Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico

Métodos de un paso - Diferencias finitas

Clase dictada por: Mercedes Pérez Millán

(Dto. de Matemática–FCEyN–Universidad de Buenos Aires,
IMAS-CONICET)

4 de septiembre de 2024

Repaso:

Si partimos de un problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + f(x) \\ u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta \end{cases}$$

Buscamos $(u_0, \ldots, u_N)$ de forma tal que $u_j \sim u(x_j)$ para $1 \leq j \leq N - 1$.

Repaso:

Discretizaciones de las derivadas de u:

- Forward: $u'(x_j) \sim \dfrac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h}$
- Backward: $u'(x_j) \sim \dfrac{u(x_j) - u(x_{j-1})}{h}$
- Centrada: $u'(x_j) \sim \dfrac{u(x_{j+1}) - u(x_{j-1})}{2h}$
- Discretización "usual": $u''(x_j) \sim \frac{u(x_{j+1})-2u(x_j)+u(x_{j-1})}{h^2}$

Repaso:

Llamamos $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $f_j = f(x_j)$ y usando diferencias centradas para u' proponemos entonces:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \\ u_N = \beta, \\ \dfrac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = p_j \dfrac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + q_j u_j + f_j. \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -(2+h^2 q_1) & 1 - \frac{h}{2}p_2 & & & \\ 1 + \frac{h}{2}p_2 & -(2+h^2 q_2) & (1 - \frac{h}{2}p_2) & & \\ \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 1 + \frac{h}{2}p_{N-2} & -(2+h^2 q_{N-2}) & 1 - \frac{h}{2}p_{N-2} \\ & & (1 + \frac{h}{2}p_{N-1}) & -(2+h^2 q_{N-1}) \end{pmatrix}}_{A_h} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}}_{u_h} = \underbrace{\begin{pmatrix} h^2 f_1 - (1 + \frac{h}{2}p_1)\alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} - (1 - \frac{h}{2}p_{N-1})\beta \end{pmatrix}}_{b_h}$$

Repaso:

Volvemos al problema original:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + q_j u_j + f_j.$$

Si reemplazamos $u(x_j)$ por u_j en la ecuación en diferencias obtenemos:

$$\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} = p_j \frac{u(x_{j+1}) - u(x_{j-1})}{2h} + q_j u(x_j) + f_j + \tau_j.$$

Y dedujimos que

$$\tau_j = O(h^2).$$

Repaso:

Tenemos dos ecuaciones, una para u y otra para u_h:

$$A_h u_h = b_h,$$

$$A_h u = b_h + \tau_h,$$

donde τ_h es el vector de errores de truncado.

Entonces

$$u - u_h = A_h^{-1} \tau_h$$

Teorema:

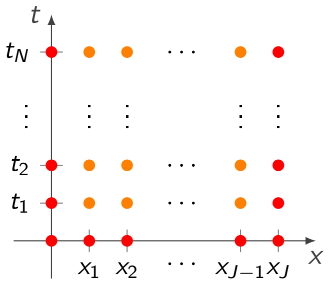
Si existe A_h^{-1}, $\|A_h^{-1}\| \leq C$ para todo h suficientemente chico (i.e. el método es estable) y $\tau_h \to 0$ (i.e. el método es consistente), entonces $\|u - u_h\| \to 0$ (el método es convergente).

Ecuaciones de evolución en derivadas parciales

Ejemplo: Ecuación del calor

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \alpha u_{xx}(x,t) & x \in (0,L), t>0 \\ u(x,0) &= g(x) & x \in [0,L] \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 & t>0, \end{aligned}$$

y consideramos $\alpha = 1$.
Vamos a discretizar el dominio: $x_j = jh$, $h = \Delta_x = \frac{L}{J}$, $t_n = nk$, $k = \Delta_t = \frac{T_f}{N}$.



Queremos aproximar $u(x_j, t_n) \sim u_j^n$.

Con la discretización usual de la derivada segunda y diferencias forward para la primera tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \text{ para } 1 \leq j \leq J-1, 0 \leq n \leq N-1, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad 0 \leq j \leq J, \\ u_0^n = u_J^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N. \end{cases}$$

Podemos despejar:

$$u_j^{n+1} = \frac{k}{h^2} u_{j-1}^n + (1 - \frac{2k}{h^2}) u_j^n + \frac{k}{h^2} u_{j+1}^n$$

$j{=}1 \qquad u_1^{n+1} = 0 + (1 - \frac{2k}{h^2}) u_1^n + \frac{k}{h^2} u_2^n$

$j{=}2{:}N{-}2 \qquad u_j^{n+1} = \frac{k}{h^2} u_{j-1}^n + (1 - \frac{2k}{h^2}) u_j^n + \frac{k}{h^2} u_{j+1}^n$

$j{=}J{-}1 \qquad u_{J-1}^{n+1} = \frac{k}{h^2} u_{J-2}^n + (1 - \frac{2k}{h^2}) u_{J-1}^n + 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+2} \\ \vdots \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix}}_{u^{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \frac{2k}{h^2} & \frac{k}{h^2} & & & \\ \frac{k}{h^2} & 1 - \frac{2k}{h^2} & \frac{k}{h^2} & & \\ \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & \frac{k}{h^2} & 1 - \frac{2k}{h^2} & \frac{k}{h^2} & \\ & & \frac{k}{h^2} & 1 - \frac{2k}{h^2} & \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{pmatrix}}_{u^n}$$

El error de truncado se obtiene al reemplazar la solución numérica por la real en el esquema, es decir,

$$\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k}=\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}+T,$$

donde T es dicho error de truncado.

Ejercicio: Ver que $T=O(k)+O(h^2)$.

Definición 1:

Decimos que el método es *consistente* si $T \underset{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}{\longrightarrow} 0$.

Este método resulta consistente.

Definición 2:

Decimos que el método es *estable en norma* $|||.|||$ si existe una constante $C > 0$ (independiente de h, k, j, n, J, N) tal que $|||u^n||| \leq C|||u^0|||$.

Veamos cuándo este método es estable en norma infinito ($||v||_\infty = \max_j\{|v_j|\}$).

$$
\begin{aligned}
||u^{n+1}||_\infty &= \max_j\{|\frac{k}{h^2}u_{j-1}^n + (1 - \frac{2k}{h^2})u_j^n + \frac{k}{h^2}u_{j+1}^n|\} \\
&\leq \max_j\{\frac{k}{h^2}||u^n||_\infty + |1 - \frac{2k}{h^2}|\ ||u^n||_\infty + \frac{k}{h^2}||u^n||_\infty\} \\
&= \left(|1 - \frac{2k}{h^2}| + \frac{2k}{h^2}\right)||u^n||_\infty
\end{aligned}
$$

Si $2k < h^2$

Si $\frac{2k}{h^2} < 1$ tenemos

$$||u^{n+1}||_\infty \leq ||u^n||_\infty.$$

Con este razonamiento concluimos:

$$||u^n||_\infty \leq ||u^0||_\infty,$$

y el método resulta estable, con $C = 1$.

Error

$$\begin{array}{rcl} u(x_j, t_{n+1}) & = & \frac{k}{h^2} u(x_{j-1}, t_n) + (1 - \frac{2k}{h^2}) u(x_j, t_n) + \frac{k}{h^2} u(x_{j+1}, t_n) + k T_j^n \\ - \quad u_j^{n+1} & = & \frac{k}{h^2} u_{j-1}^n + (1 - \frac{2k}{h^2}) u_j^n + \frac{k}{h^2} u_{j+1}^n \\ \hline e_j^{n+1} & = & \frac{k}{h^2} e_{j-1}^n + (1 - \frac{2k}{h^2}) e_j^n + \frac{k}{h^2} e_{j+1}^n + k T_j^n \end{array}$$

Definición 3:

Decimos que el método es *converge* si $\max_{j,n} e_j^n \underset{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}}{\longrightarrow} 0$.

Llamemos $E^n = \max_j\{|e_j^n|\}$ y $T^n = \max_j\{|T_j^n|\}$, entonces

$$E^{n+1} \leq \left(|1 - \frac{2k}{h^2}| + \frac{2k}{h^2}\right) E^n + kT^n$$

Si $\frac{2k}{h^2} < 1$, tenemos

$$E^{n+1} \leq E^n + kT^n$$

$n=0$ $\quad E^1 = 0 + kT^0 = kT^0,$

$n=1$ $\quad E^2 \leq E^1 + kT^1 = k(T^1 + T^0),$

$\dots \quad \dots$

$$E^n \leq k(T^{n-1} + \cdots + T^1 + T^0)$$

$$E^n \leq k(T^{N-1} + \cdots + T^n + \cdots + T^1 + T^0) = k\sum_{i=0}^{N-1} \max_j\{|T_j^i|\}$$

Como

$$|T_j^i| \leq \frac{k}{2}|u_{tt}(x_j, \eta_i)| + \frac{h^2}{24}|u_{xxxx}(\xi_j, t_i) + u_{xxxx}(\theta_j, t_i)|$$

para $\eta_i \in (t_i, t_i + k)$, $\xi_i \in (x_j, x_j + h), \theta_i \in (x_j - h, x_j)$, si tomamos $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\widetilde{C} \geq \max_{\substack{x \in [0,L] \\ t \in [0, T_F]}} \left\{ \frac{|u_{tt}(x,t)|}{2}, \frac{|u_{xxxx}(x,t)|}{12} \right\},$$

obtenemos $|T_j^i| \leq \widetilde{C}k + \widetilde{C}h^2$ y por lo tanto:

$$E^n \leq k \sum_{i=0}^{N-1} (\widetilde{C}k + \widetilde{C}h^2) = kN(\widetilde{C}k + \widetilde{C}h^2) \underset{k=\frac{T_F}{N}}{=} T_F(O(k) + O(h^2)).$$

Notemos que, si $h = 10^{-3}$, estamos pidiendo $2k < 10^{-6}$. Es decir, $2 \times 10^6 < N$.

Veamos un método implícito:

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}, 1 \leq j \leq J-1, 0 \leq n \leq N-1, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad 0 \leq j \leq J, \\ u_0^n = u_J^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N. \end{cases}$$

Despejamos:

$$u_j^n = -\frac{k}{h^2}u_{j-1}^{n+1} + (1+\frac{2k}{h^2})u_j^{n+1} - \frac{k}{h^2}u_{j+1}^{n+1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{pmatrix}}_{u^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\frac{2k}{h^2} & -\frac{k}{h^2} & & & \\ -\frac{k}{h^2} & 1+\frac{2k}{h^2} & -\frac{k}{h^2} & & \\ \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & -\frac{k}{h^2} & 1+\frac{2k}{h^2} & -\frac{k}{h^2} \\ & & -\frac{k}{h^2} & 1+\frac{2k}{h^2} \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix}}_{u^{n+1}}$$

Y debemos resolver el sistema lineal para hallar u^{n+1}.

Verificar que vale:

- $T(h,k) = O(k) + O(h^2)$.
- $(1 + \frac{2k}{h^2})e_j^{n+1} = e_j^n + \frac{k}{h^2}(e_{j-1}^{n+1} + e_{j+1}^{n+1}) + kT_j^n$.

Luego,

$$(1 + \frac{2k}{h^2})|e_j^{n+1}| \leq |e_j^n| + \frac{k}{h^2}(|e_{j-1}^{n+1}| + |e_{j+1}^{n+1})| + k|T_j^n|,$$

tomando máximos:

$$(1 + \frac{2k}{h^2})E^{n+1} \leq E^n + \frac{2k}{h^2}E^{n+1} + kT^n,$$

y finalmente

$$E^{n+1} \leq E^n + kT^n$$

$$E^n \leq k(T^{n-1} + \cdots + T^1 + T^0) \leq \cdots \leq T_F(O(k) + O(h^2))$$

¿Cuál es la diferencia? En el método implícito no necesitamos $2k < h^2$.

Pero en cada paso debemos resolver un sistema lineal.