

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre de 2024

Práctica N° 2: Ecuaciones Diferenciales: Problemas de valores iniciales.

Ejercicio 1. Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

tomando como parámetros la función f , los tiempos inicial y final t_0 y t_f , el paso h y el dato inicial y_0 ; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \dots, t_f)$ y la solución y .

Ejercicio 2. Graficar simultáneamente en la región $[0, 10] \times [0, 10]$ las soluciones que se obtienen del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned}y'(t) &= (y(t) - 5) \cdot (\cos^2(t) - 0.5), \\ y(0) &= k,\end{aligned}$$

al utilizar el método de Euler con paso $h = 0.01$ para $k = 0, 1, \dots, 10$.

Ejercicio 3. Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) - 5\sin(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función $y(t) = 2\sin(t) + \cos(t)$.

- (a) Escribir la iteración del método de Euler para esta ecuación.
- (b) Calcular el error de truncado local.
- (c) ¿Qué paso h debe elegirse para que el error al estimar $y(\frac{\pi}{2})$ sea menor que 10^{-2} ?

Ejercicio 4. Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.

- (a) Determinar una cota, en términos de h , para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.
- (b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2} ?
- (c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el ítem previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

Ejercicio 5. Se quiere verificar numéricamente el orden de convergencia de los métodos de Euler y Taylor de orden 2. Para ello: resolver numéricamente el problema

$$\begin{aligned}y' &= y \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

en el intervalo $[0, 1]$ con ambos métodos, tomando $h = 2^{-k}$ para $k = 2, \dots, 8$. Para cada h calcular el error que se comete al aproximar $y(1)$: $e_h = |y(1) - y_N|$. Graficar $\log(e_h)$ en función de $\log(h)$. ¿Qué se espera ver? ¿El resultado es consistente con el esperado?

Ejercicio 6. Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

(a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \dots$$

(b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$. Comparar con la solución exacta.

(c) Resolver usando el programa del Ejercicio 1 para distintos valores de λ ($\lambda = 1, 10, 50, 100$) y comparar con la solución exacta. ¿Qué sucede?

(d) Repetir los items anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?

Ejercicio 7. Considerar la ecuación:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{e^{-y}}{t} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Probar que $0 \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 1$.

(b) Escribir la iteración dada para esta ecuación por el método de Euler. Probar que la solución numérica resultará creciente.

(c) Calcular el error de truncado del método de Euler aplicado a la ecuación.

(d) Dar un valor de paso h que garantice que el error de la estimación numérica de $y(2)$ sea menor que 10^{-3} .

Ejercicio 8. Probar que una ecuación de orden n :

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

Ejercicio 9. Modificar el programa del Ejercicio 1 para que acepte ecuaciones vectoriales: la solución y deberá ser una matriz de $m \times n$, donde m es el número de pasos temporales y n la cantidad de variables del problema. De este modo, la fila i de y corresponderá al valor de la solución en todas sus variables a tiempo t_i .

Ejercicio 10. Sistema predador-presa: Se tienen dos poblaciones, una de predadores y otra de presas, cuyo número a tiempo t denotamos $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente. En ausencia de presas, x tiende a decaer a una tasa α , mientras que en ausencia de predadores y tiende a crecer a una tasa β . Además, los encuentros de predadores y presas hacen crecer la población de los primeros y decrecer la de los segundos, de acuerdo a cierta proporción. De esto modo, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + \gamma xy \\ \dot{y} &= \beta y - \delta xy, \end{aligned}$$

donde γy es la tasa de crecimiento de x (mayor cuanto más presas haya) y δx es la tasa de mortandad de presas (mayor cuanto más predadores haya). Se asume que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son todos positivos.

- Dar condiciones sobre los parámetros y los niveles de x e y que garanticen la estabilidad de las poblaciones. Es decir, que $x(t + \Delta t) = x(t)$ e $y(t + \Delta t) = y(t)$ para todo $\Delta t > 0$.
- Elegir valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x_0$ e y_0 que satisfagan las condiciones del ítem anterior y resolver utilizando el método de Euler. Realizar dos gráficos: uno de x e y en función de t (simultáneamente) y otro de y en función de x . ¿Se mantiene constante la solución?
- Tomar $\alpha = 0.25, \beta = 1, \gamma = \delta = 0.01, x_0 = 80$ e $y_0 = 30$. Resolver utilizando el método de Euler y realizar gráficos como los del ítem anterior.

Ejercicio 11. Considerar el método de Euler modificado:

$$y_{i+1} = y_i + hf \left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \right).$$

Probar que el error de truncado es $O(h^2)$. ¿Qué ventaja presenta este método respecto del método de Taylor de segundo orden?

Ejercicio 12. Indicar qué paso h debería aplicarse en el Ejercicio 3 para obtener un error menor a 10^{-2} en la aproximación de $y(\frac{\pi}{2})$ si se aplica el método de Euler modificado.

Ejercicio 13. Galileo: Leer el siguiente párrafo:

– Pero, Simplicio, tengo la esperanza de que no seguirás el ejemplo de muchos otros que desvían la discusión de un punto principal y dicen que algunas de mis afirmaciones se apartan de la verdad por un cabello, y por este cabello esconden las faltas de otras teorías tan gruesas como un cable de navío. Aristóteles dice que ‘una esfera de hierro de 100 libras, cayendo desde una altura de 100 codos, llega a la tierra antes que una bola de 1 libra haya caído un simple codo’. Yo digo que las dos llegan al mismo tiempo. Tú encuentras, al hacer la experiencia, que la más pesada adelanta a la más ligera en 2 ó 3 dedos; ahora, no puedes esconder detrás de estos dos dedos los 99 codos de Aristóteles, ni puedes mencionar mi error y, al mismo tiempo, pasar en silencio el tuyo, mucho mayor.

Salviati, en *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* - Galileo Galilei.

Viviani, estudiante de Galileo, afirma que su maestro realizó efectivamente el experimento descrito en el párrafo anterior, arrojando desde lo alto de la torre de Pisa una bala de cañón y una bala de mosquete. El objetivo de este ejercicio es reproducir numéricamente la experiencia de Galileo.

La posición de un objeto en caída libre puede modelarse con la ecuación:

$$\ddot{x} = \frac{\gamma}{m} \dot{x}^2 - g \quad (1)$$

siendo x la altura, m la masa del cuerpo, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ la aceleración gravitatoria y γ una constante que representa el rozamiento con el fluido en que se produce la caída. Deben darse condiciones sobre la altura y la velocidad iniciales.

La Torre de Pisa mide 55.8 mts. La masa de una bala de cañón es de 16 Kg, y la de una bala de mosquete 0.0082 Kg. Las constantes de rozamiento para cada bala son: $\gamma_c = 0.0058$ y $\gamma_m = 3.74 \times 10^{-5}$, respectivamente (la diferencia se debe a la diferencia de tamaños).

Implementar un programa llamado **galileo** para obtener la dinámica de la caída de ambas balas utilizando el método de Euler modificado, y graficar, en una misma figura, la posición de cada bala en función del tiempo. A partir de los resultados obtenidos, responder:

- (a) ¿Cuánto tiempo tarda cada bala en tocar el suelo?
- (b) Modificar el programa para que se detenga en el momento en que la bala cañón alcanza el suelo. ¿Cuán lejos del piso está la bala de mosquete?

Nota: No debe cometerse el mismo error que Simplicio al juzgar los resultados. La bala de cañón es alrededor de 2000 veces más pesada que la de mosquete. Consecuentemente, Aristóteles hubiese pronosticado que al llegar la bala de cañón al piso, la de mosquete habría descendido apenas 2 cm.

Ejercicio 14. Tiro oblicuo: Un proyectil de masa m se arroja desde un punto del plano (x_0, y_0) , con una velocidad inicial dada por el vector (v_0^x, v_0^y) . La trayectoria del proyectil se rige por las ecuaciones dadas por la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\gamma\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -mg - \gamma\dot{y}, \end{aligned}$$

donde g es la aceleración gravitatoria $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, y γ es una constante de rozamiento con el medio en que se realiza el lanzamiento. Formular el problema en forma de sistema de orden uno.

Tomando $m = 10\text{Kg}$ y $\gamma = 0.2 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$, y suponiendo que el proyectil se lanza desde 30 metros de altura con una velocidad inicial horizontal de $40 \frac{m}{s}$, ¿qué distancia recorre antes de tocar el piso?

Hacer un programa que permita responder esta pregunta, utilizando el método de Euler modificado para resolver el sistema.

Ejercicio 15. Durante un brote de una enfermedad en la ciudad de Macondo se puede dividir a la población entre los grupos *susceptibles* de contraer la enfermedad (S), infectados (I) y recuperados (R). La relación entre el número de personas en cada grupo está definida por el siguiente sistema de ODEs:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta \frac{S I}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{S I}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned}$$

con β y γ las tasas de infección y recuperación respectivamente.

- (a) Interpretar el sentido de las ecuaciones.

- (b) Considerar que la ciudad tiene una población de $N = 10000$ habitantes e inicialmente todas las personas son susceptibles. Supondremos una tasa de transmisión $\beta = 0.2$ y un tiempo medio de recuperación de 10 días. Si inicialmente hay una única persona enferma, discutir de qué forma deberían evolucionar las poblaciones de cada grupo.
- (c) Simular y graficar la solución que se obtiene al utilizar el comando `scipy.integrate.solve_ivp`, que aplica un método de Runge-Kutta de orden 4(5).
- (d) Asumiendo que no se producen fallecimientos, verificar que la población de la ciudad se mantiene constante a lo largo de la simulación.
- (e) Determinar el tiempo a partir del cual, sin acciones externas, la cantidad de infecciones comienza a descender.