Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre de 2024

Práctica N° 4: Número de condición. Sistemas Lineales.

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes fórmulas para las normas inducidas sobre las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a partir de las correspondientes normas en los vectores.

a) Por la norma infinito en los vectores:

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

b) Por la norma 1 en los vectores:

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

c) Escribir funciones en Python para calcular estas normas.

Ejercicio 2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ y entre las normas en los vectores, y las correspondientes normas inducidas en las matrices, vienen dadas por:

- Vectorial

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

- Matricial

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$$

- Calcular las constantes para la equivalencia $\|.\|_1$ y $\|.\|_\infty$ de los vectores, y las correspondientes normas inducidas en las matrices.

Ejercicio 3. Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ como el máximo del valor $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ entre varios vectores $x \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que reciba una matriz A y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

$$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|Ax_k\|_2}{\|x_k\|_2}\right\}$$

  donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar distribuidos uniformemente en el círculo unitario.

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

Recordar que la norma de un vector o matriz `x` se calculan en Python con el comando `np.linalg.norm(x,2)`. Para generar vectores al azar puede usarse la función `np.random.random()`. Tener en cuenta esto genera valores en el intervalo $[0, 1]$. Chequear, además que estos vectores generados resulten no nulos.

Ejercicio 4. Se tiene el sistema $Ax = b$.

a) Sea x la solución exacta y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $r := b - A\tilde{x}$. Si notamos $e = x - \tilde{x}$, mostrar que:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto b se conoce una aproximación $\tilde{b}$. $\tilde{x}$ es tal que $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Probar que:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $cond_2(A)$ y $cond_\infty(A)$.

b) ¿Cuán chico debe ser el error en los datos $(b - \tilde{b})$, si se desea que el error en la aproximación de la solución sea menor que 10^{-4}?

c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar $b = (3, 2, 2)^t$, que se corresponde con la solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$. Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el item anterior y perturbar b obteniendo $\tilde{b}$. Finalmente, resolver $A\tilde{x} = \tilde{b}$ y verificar que $\|\tilde{x} - x\| < 10^{-4}$.

Ejercicio 6. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\| \;\|$ es una norma matricial, la condición de A verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{cond(A)} \leq \inf \left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular} \right\}.$$

Deducir que

$$cond(A) \geq \sup \left\{ \frac{\|A\|}{\|A-B\|} : B \text{ es singular} \right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $cond(A)$ mide la distancia relativa de A a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 7. a) Estimar la $cond_\infty(A)$ de las siguientes matrices en función ε (cuando $\varepsilon \to 0$).

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Concluir que la condición de las matrices A y B del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

Ejercicio 8. Sea D_n la matriz diagonal de $n \times n$ con elementos diagonales iguales a $1/10$. Calcular el determinante de D_n y ver que $det(D_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿D_n está mal condicionada?

Ejercicio 9. Sea $A_n \in \mathbb{R}^n$ la matriz dada por $A_n = (a_{i,j})$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $Cond_\infty(A_n) \geq Cn^2$ para alguna constante C independiente de n.

b) Probar que $Cond_2(A_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ejercicio 10. La n-ésima matriz de Hilbert $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define de la siguiente manera

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Demostrar que $cond_\infty(H_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 11. a) Escribir un programa que resuelva un sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ usando eliminación gaussiana sin pivoteo.

b) Adaptar el programa del ítem anterior para que calcule la matriz A^{-1}.

Ejercicio 12. Se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tridiagonal.

a) Mostrar que el proceso de eliminación gaussiana preserva los ceros de A, es decir que a lo largo de la triangulación no se generan valores no nulos fuera de las tres diagonales principales.

b) Adaptar el programa del Ejercicio 11 para que resuelva un sistema $Ax = b$, con A tridiagonal. El programa debe recibir cuatro vectores (las tres diagonales principales y b), y devolver x. Utilizar el comando `time.time()` (es necesario importar el paquete `time`) para conocer el tiempo que se tarda en resolver un sistema con este programa y comparar con el que se requiere para resolver el mismo sistema utilizando los comandos `np.linalg.inv()` y `np.linalg.solve()`, que no están especialmente pensados para matrices tridiagonales.

c) Experimentar con ejemplos de la Práctica 3 cuya formulación conduzca a matrices tridiagonales.

Ejercicio 14. Sea $v \in \mathbb{C}^n$. Probar que la matriz $I - vv^*$ es unitaria si y sólo si $\|v\|_2^2 = 2$ o $v = 0$.

Ejercicio 15. Dados $x \neq y$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $\|x\|_2 = \|y\|_2$ y $\langle x, y\rangle$ es real. Probar que la matriz unitaria $U = I - vv^*$ con $v = \dfrac{\sqrt{2}}{\|x-y\|_2}(x-y)$ satisface que $Ux = y$.

Ejercicio 16. Implementar dos programas que calculen la descomposición QR de una matriz:

1. Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gramm-Schmidt.

2. Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programa con las dadas por el comando `np.linalg.qr`. ¿Qué se observa?

Ejercicio 17. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$a)\, A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad b)\, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 18. Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, con las siguientes condiciones:

- que finalice si el método se estaciona,
- que finalice con una advertencia si se excede cierto tope de iteraciones,

Sugerencia: estudiar los comandos `np.tril`, `np.triu` y `np.diag`.

Ejercicio 19. El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ acota inferiormente a toda norma de A, sin utilizar normas complejas.

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $\lambda = a+ib$ un autovalor de A y sea $u+iv$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcular Au y Av y probar que:

$$\|Au\|_2^2 + \|Av\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2).$$

b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|A\|_2.$$

c) Probar que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$ vale que

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

(Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si $B = A^m$, entonces λ^m es autovalor de B).

Ejercicio 20. Sea A una matriz que admite una base de autovectores. Mostrar una norma $|||.|||$ subordinada a una norma vectorial tal que $\rho(A) = |||A|||$.

Ejercicio 21. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)$.

a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verificar, sin embargo, que la matriz no es diagonal dominante.

b) Sea J la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de J. Hallar una norma $\|\ \|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1.

Ejercicio 22. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido. ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿y simétrica y definida positiva?

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 23. a) Mostrar que toda matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $|\det(B)| > 1$ tiene un autovalor λ, real o complejo, con $|\lambda| > 1$.

b) Decidir si el método de Jacobi converge o no para un sistema dado por la matriz
$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 24. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel aplicados a la resolución de $Ax = v$.

Ejercicio 25. a) Probar que si A tiene una base de autovectores v_i, con autovalores λ_i, la matriz

$$B = I + sA, \quad s \in \mathbb{R}$$

tiene los mismos autovectores, con autovalores $\nu_i = 1 + s\lambda_i$.

b) Se sabe que los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_j = -4\sin^2(\frac{\pi j}{2n})$, $j = 1, \dots, n-1$. Considerar sistemas de la forma $Ax = b$, con A como en el ítem anterior. Decidir si el método de Jacobi converge. ¿Qué sucede con el método de Gauss-Seidel? ¿Cuál resulta preferible?

c) Considerar el problema de Poisson en el intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Formular el problema por diferencias finitas (esto es usando la discretización habitual de la derivada segunda). Decidir si los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel pueden aplicarse para resolver el sistema lineal resultante.

Ejercicio 26. a) Sean $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con M inversible. Probar que los autovalores de $-M^{-1}N$ son las raíces del polinomio $\det(\lambda M + N)$

b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+\frac{1}{\alpha} \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1+\frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver un sistema $Ax = b$ se propone el método iterativo:

$$x_{n+1} = -M^{-1}Nx_n + M^{-1}b, \tag{1}$$

Siendo $N = A - M$. Probar que si el método (1) converge a x, entonces x es solución del sistema $Ax = b$.

c) Hallar todos los valores de α para los cuáles el método propuesto converge.

d) ¿Qué restricción debería imponerse sobre α si se quiere garantizar que el error $e_n = x_n - x$ satisfaga

$$\|e_n\| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \|e_0\|,$$

para alguna norma $\|\cdot\|$?

Ejercicio 27. Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $A_n x = b_n$ para

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+\frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2}).$$

¿Cómo es la convergencia? ¿ Tiene esto que ver con el mal condicionamiento de A? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

Ejercicio 28. (método SOR) Dada $A \in R^{n\times n}$ con $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $A = L + D + U$ con $L =$ triangulo inferior estricto de A, $D = \text{diag}(A)$ y $U =$ triangulo superior estricto de A.

1. Demostrar que el sistema $Ax = b$ es equivalente al sistema $(D + wL)x = ((1 - w)D - wU)x + wb$, cualquiera sea $w \neq 0$.

2. Considere el método iterativo $x^{k+1} = B(w)x^k + c$ con $B(w) = (D + wL)^{-1}((1 - w)D - wU)$. Probar que $\det(B(\omega)) = (1 - \omega)^n$ y concluir que, si el método converge, $w \in (0, 2)$

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Compare los métodos para $w = \frac{3}{2}$ y $w = 1$ ¿Cuál elegiría y por qué?