Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad

Autómatas finitos no determinísticos con transiciones instantáneas y Expresiones Regulares

Segundo Cuatrimestre 2024

Bibliografía

Capítulo 3, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

En esta clase

- Autómatas finitos no determinísticos con transiciones instantáneas.
- Teorema: Equivalencia entre AFND-λ y AFND.

Definición (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ)

Un AFND-λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde
Q *es conjunto de estados*
Σ *es el alfabeto de entrada*
q_0 *es estado inicial*
F *es conjunto de estados finales*
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$.

Demostraremos que para todo AFND-λ hay un AFND que reconoce el mismo lenguaje. Vamos a necesitar herramientas.

Clausura λ

La clausura λ de un estado q, $Cl_\lambda(q)$, es el conjunto de estados alcanzable desde q, siguiendo sólo transiciones λ.
Usamos la noción de clausura transitivo-reflexiva para definir Cl_λ.

Definición (clausura λ de un estado)

Dado un AFND-λ $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$.
Sea $R \subseteq Q \times Q$ tal que $(q, p) \in R$ si y solo si $p \in \delta(q, \lambda)$.
Definimos $Cl_\lambda : Q \to \mathcal{P}(Q)$,

$$Cl_\lambda(q) = \{p : (q, p) \in R^*\}$$

Notar que $q \in Cl_\lambda(q)$.

Definición (clausura λ de un conjunto de estados P)

$$Cl_\lambda(P) = \bigcup_{q \in P} Cl_\lambda(q).$$

Extendemos la definición de δ a conjuntos de estados,
$\delta : \mathcal{P}(Q) \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$, $\delta(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$.

Definición (función transición-sin-λ $\widehat{\delta}$)

Dado un AFND-λ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ con $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$ definimos la función de transición -sin-λ $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$$\widehat{\delta}(q, a) = Cl_\lambda\Big(\delta\big(Cl_\lambda(q), a\big)\Big)$$

Notar que $\widehat{\delta}(q, a)$ puede ser distinto de $\delta(q, a)$.

Extendemos $\widehat{\delta}$ a conjuntos de estados,
$\widehat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$, $\widehat{\delta}(P, a) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(q, a)$.

Extendemos $\widehat{\delta}$ a palabras $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$,
$\widehat{\delta}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$, $\qquad \widehat{\delta}(q, xa) = \widehat{\delta}\big(\widehat{\delta}(q, x), a\big)$.

Atención!!
Aqui se usa $\widehat{\delta}$ para definir aceptación en AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$.

Definición (lenguaje aceptado por un AFND-λ)

Sea AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. El lenguaje aceptado por M, $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M,

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ x : \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi \right\}.$$

Teorema (equivalencia entre AFND y AFND-λ)

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ hay un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

Demostración del teorema

Sea AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \to \mathcal{P}(Q)$.
Usaremos las versiones extendidas de δ en ambos argumentos, conjuntos de estados, y palabras de Σ^*.

Sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ la función de transición-sinλ.
Usaremos también las versiones extendidas en $\widehat{\delta}$ en ambos argumentos, conjuntos de estados, y palabras de Σ^*.

Definimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$, donde $\delta' : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$,

$$\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a), \text{ para cada } a \in \Sigma \text{ y } q \in Q$$

Definimos δ' para conjuntos y para cadenas de la manera estandard,
$\delta' : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ y $\delta' : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$.

$$F' = \begin{cases} F & \text{, si } Cl_\lambda(q_0) \cap F = \emptyset \\ F \cup \{q_0\} & \text{, si no.} \end{cases}$$

Observar que $F' \supseteq F$.

Debemos ver para toda $x \in \Sigma^*$, $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M')$.

Caso $x = \lambda$.

Supongamos $\lambda \in \mathcal{L}(M)$. Entonces, $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset$.
Como $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$ tenemos $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset$.
Luego $F' = F \cup \{q_0\}$ y por lo tanto $q_0 \in F'$, entonces $\lambda \in \mathcal{L}(M')$.

Supongamos $\lambda \in \mathcal{L}(M')$. Entonces, $\delta'(q_0, \lambda) \cap F' \neq \emptyset$.
Por definición de δ' tenemos $\delta'(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.
Luego $q_0 \in F'$ y necesariamente $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset$,
(asumir $Cl_\lambda(q_0) \cap F = \emptyset$ implica $F = F'$ y $q_0 \notin F'$, lo que contradice $q_0 \in F'$).
Dado que $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$, tenemos $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset$, y por la definición de palabra aceptada en AFND-λ, $\lambda \in \mathcal{L}(M)$.

Caso $|x| \geq 1$. Debemos ver que $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M')$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x)$, para todo $x \in \Sigma^+$.
Lo hacemos por inducción en la longitud de la cadena.

Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de M', $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$.

Caso inductivo $|x| > 1$. Sea $x = wa$ y asumamos que vale para w.

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\underbrace{\delta'(q_0, w)}, a) = \delta'(\underbrace{\widehat{\delta}(q_0, w)}, a),$$

las expresiones tomadas por las llaves son iguales por h.i.

y para cualquier $P \subseteq Q$

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta'(q, a) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(P, a) = \widehat{\delta}(P, a)$$

haciendo $P = \widehat{\delta}(q_0, w)$, tenemos que

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\widehat{\delta}(q_0, w), a) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q_0, w), a) = \widehat{\delta}(q_0, wa).$$

Seguimos con el caso $|x| \geq 1$.

Supongamos $x \in \mathcal{L}(M)$. Entonces, $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing$,
Por lo tanto, $\delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$, ya que $F \subseteq F'$
Concluimos $x \in \mathcal{L}(M')$.

Supongamos $x \in \mathcal{L}(M')$. Entonces, $\delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$.
Dado que $F' = F$ ó $F' = F \cup \{q_0\}$,

$$\left(\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\right) \text{ ó } \underbrace{\left(\widehat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_0\} \neq \varnothing \wedge Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing\right)}_{\text{por def. de } F'}$$

implica
$x \in \mathcal{L}(M)$ ó $x \in \mathcal{L}(M)$
luego
$x \in \mathcal{L}(M)$.

□

Ejercicios

1. Demostrar que ara cada AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ existe otro AFND -λ $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$ y F' tiene un único estado final.

2. Indicar Verdadero o Falso y justificar
   Sea Σ un alfabeto con al menos dos símbolos, y sea a un símbolo de Σ.
   Sea AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. Considerar el AFND-$\lambda$ $M' = \langle Q, \Sigma \setminus \{a\}, \delta', q_0, F \rangle$ que se obtiene de reemplazar todas las transiciones con el símbolo a por transiciones λ. Es decir,
   - para todo $q \in Q$, para todo $x \in \Sigma$ tal que $x \neq a$, $\delta'(q, x) = \delta(q, x)$,
   - para todo $q \in Q$, $\delta'(q, \lambda) = \delta(q, a)$,

   ¿Cual es el lenguaje aceptado por M'?

3. ¿Se puede acotar superiormente cuantas transiciones requiere la aceptación de una palabra en un AFND-λ?