Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad

Clase Teórica: Funciones parcialemnte computables

Segundo Cuatrimestre 2024

Bibliografía

Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001. Capítulo 8 y 9.

Representación de números y tuplas

Fijamos $\Sigma = \{\mathbf{B}, 1\}$.
Representaremos a los números naturales en unario (con palotes).

- el número $x \in \mathbb{N}$ se representa como

$$\overline{x} = \underbrace{1 \ldots 1}_{x+1}$$

Representamos a las tuplas $(x_1, \ldots, x_n)$ como lista de (representaciones de) los x_i separados por blanco

- la tupla $(x_1, \ldots, x_n)$ se representa como

$$\mathbf{B}\overline{x_1}\mathbf{B}\overline{x_2}\mathbf{B} \cdots * \overline{x_n}\mathbf{B}$$

Por ejemplo,

- el número 0 se representa como 1
- el número 3 se representa como 1111
- la tupla $(1, 2)$ se representa como $\mathbf{B}11\mathbf{B}111\mathbf{B}$
- la tupla $(0, 0, 1)$ se representa como $\mathbf{B}1\mathbf{B}1\mathbf{B}11\mathbf{B}$

Funciones parciales

Una función parcial f es una función que puede estar indefinida para algunos (tal vez ninguno; tal vez todos) sus argumentos.
Siempre vamos a trabajar con funciones parciales $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.

- notamos $f(x_1, \ldots, x_n)\downarrow$ cuando f está definida para $x_1, \ldots, x_n$.
  En este caso $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un número natural.
- notamos $f(x_1, \ldots, x_n)\uparrow$ cuando f está indefinida para $x_1, \ldots, x_n$

El conjunto de argumentos para los que f está definida se llama dominio de f, notado $\text{dom}(f)$.

$$\text{dom}(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) : f(x_1, \ldots, x_n)\downarrow\}$$

f es total si $\text{dom}(f) = \mathbb{N}^n$.

Funciones parciales Turing computables

Definición

Una función parcial $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es Turing computable si existe una máquina de Turing determinística $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, q_f)$ con $\Sigma = \{\mathbf{B}, 1\}$ tal que cuando empieza en la configuración inicial

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \overline{x_1} & \mathbf{B} & \overline{x_2} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} & \overline{x_n} & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots \\ & & & & & & & & & & & \triangle & & & \\ & & & & & & & & & & & \boxed{q_0} & & & \end{array}$$

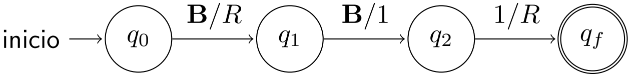
(con los enteros x_i representados en unario):

- si $f(x_1, \ldots, x_n) \downarrow$ entonces siguiendo sus instrucciones en δ llega a una configuración final de la forma

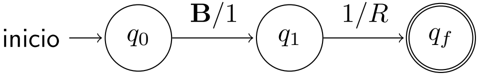
$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \mathbf{B} & \overline{f(x_1, \ldots, x_n)} & \mathbf{B} & \cdots \\ & & & \triangle & \\ & & & \boxed{q_f} & \end{array}$$

  (quizá algo más en la cinta)
- si $f(x_1, \ldots, x_n) \uparrow$ entonces nunca termina en el estado q_f.

Cómputo de la función $f(x) = 0$



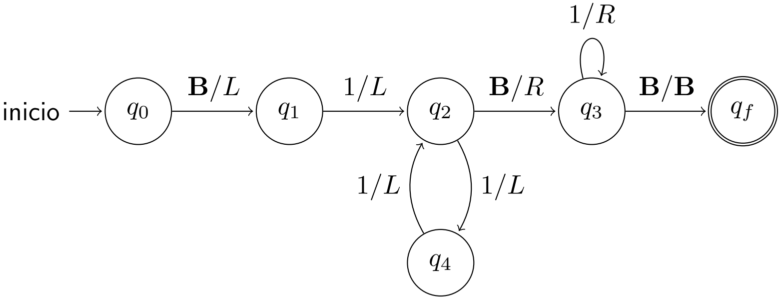
Cómputo de la función $f(x) = x + 1$



Cómputo de una función parcial

Supongamos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es par} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$



Iniciales, composición y recursión primitiva

Definición

Las siguientes funciones se llaman iniciales:
$s(x) = x + 1$,
$n(x) = 0$,
$u_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ (proyecciones)

Sean $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. La composición de f y $g_1, \ldots, g_k$ es $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$,

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Sean $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Definimos $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ por recursión primitiva

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n, 0) &= f(x_1, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_n, t+1) &= g(h(x_1, \ldots, x_n, t), x_1, \ldots, x_n, t) \end{aligned}$$

En este contexto, una función 0-aria es una constante k.
Si h es 1-aria y $t = 0$, entonces $h(t) = k = s^{(k)}(n(t))$.

Definition (funciones recursivas primitivas)

Una función es recursiva primitiva (r.p.), $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, si se define mediante las funciones iniciales y un número finito de aplicaciones de composición y recursión primitiva.

Ejemplos de función recursivas primitivas

La función $suma(x, y) = x + y$ es r.p. porque

$$\begin{array}{rcl} suma(x, 0) & = & u_1^1(x) \\ suma(x, y + 1) & = & g(suma(x, y), x, y) \end{array}$$

donde $\quad g(x_1, x_2, x_3) = s(u_1^3(x_1, x_2, x_3))$

- $x \cdot y$
- $x!$
- x^y
- $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- y muchas más.

Clases Cerradas por Recursión Primitiva (CRP)

Una clase $\mathcal{C}$ de funciones totales es CRP
(Cerrada por Recursión Primitiva)
(en inglés es CRP, Primitive Recursive Closed)
si

1. las funciones iniciales están en $\mathcal{C}$
2. si una función f se obtiene a partir de otras pertenecientes a $\mathcal{C}$ por medio de composición o recursión primitiva, entonces f también está en $\mathcal{C}$

Teorema

Una función es r.p. sii pertenece a toda clase CRP.

Teorema

La clase de funciones totales Turing computables es una clase CRP.

Corolario

Toda función r.p. es total y Turing computable.

¿ Toda función total Turing computable es r.p.? Veremos que no

Predicados primitivos recursivos

Los predicados son simplemente funciones que toman valores en $\{0,1\}$.

- 1 se interpreta como verdadero
- 0 se interpreta como falso

Los predicados r.p. son aquellos representados por funciones r.p. en $\{0,1\}$.

Por ejemplo, el predicado $x \leq y$ es r.p. ya que $\alpha(x \dot{-} y)$.

Operadores lógicos

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una clase CRP. Si p y q son predicados en $\mathcal{C}$ entonces $\neg p$, $p \wedge q$ y $p \vee q$ están en $\mathcal{C}$.

Demostración.

- $\neg p$ se define como $\alpha(p)$
- $p \wedge q$ se define como $p \cdot q$
- $p \vee q$ se define como $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\square$

Corolario

Si p y q son predicados r.p., entonces también lo son los predicados $\neg p$, $p \vee q$ y $p \wedge q$

Corolario

Si p y q son predicados totales Turing computables entonces también lo son los predicados $\neg p$, $p \vee q$ y $p \wedge q$

Definición por casos (2)

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una clase CRP. Sean $h, g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funciones en $\mathcal{C}$ y sea $p : \mathbb{N}^n \to \{0,1\}$ un predicado en $\mathcal{C}$. La función

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x_1, \ldots, x_n) & \textit{si } p(x_1, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_n) & \textit{si no} \end{cases}$$

está en $\mathcal{C}$.

Demostración.

$f(x_1, \ldots, x_n) =$
$g(x_1, \ldots, x_n) \cdot p(x_1, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n) \cdot \alpha(p(x_1, \ldots, x_n))$ $\square$

Definición por casos $(m+1)$

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una clase CRP. Sean $g_1, \ldots, g_m, h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funciones en $\mathcal{C}$ y sean $p_1, \ldots, p_m : \mathbb{N}^n \to \{0,1\}$ predicados mutuamente excluyentes en $\mathcal{C}$. La función

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) & \textit{si } p_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad\vdots & \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) & \textit{si } p_m(x_1, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_n) & \textit{si no} \end{cases}$$

está en $\mathcal{C}$.

Sumatorias y productorias (desde 0)

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una clase CRP. Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ está en $\mathcal{C}$ entonces también están las funciones

$$g(y, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=0}^{y} f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$h(y, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{t=0}^{y} f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Demostración.

$$\begin{array}{rcl} g(0, x_1, \ldots, x_n) & = & f(0, x_1, \ldots, x_n) \\ g(t+1, x_1, \ldots, x_n) & = & g(t, x_1, \ldots, x_n) + f(t+1, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Idem para h con $\cdot$ en lugar de $+$. $\square$

Observar que no importa la variable en la que se hace la recursión: podemos definir $g'(x, t)$ como la clase pasada y luego $g(t, x) = g'(u_2^2(t, x), u_1^2(t, x)) = g'(x, t)$.

Sumatorias y productorias (desde 1)

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una clase CRP. Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ está en $\mathcal{C}$ entonces también están las funciones

$$g(y, x_1, \dots, x_n) = \sum_{t=1}^{y} f(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$h(y, x_1, \dots, x_n) = \prod_{t=1}^{y} f(t, x_1, \dots, x_n)$$

(como siempre, sumatoria vacía = 0, productoria vacía = 1)

Demostración.

$$\begin{array}{rcl} g(0, x_1, \dots, x_n) & = & 0 \\ g(t+1, x_1, \dots, x_n) & = & g(t, x_1, \dots, x_n) + f(t+1, x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Idem para h con $\cdot$ en lugar de $+$ y 1 en lugar de 0 en el caso base. □

Cuantificadores acotados

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado.

$(\forall t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero sii

- $p(0, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero y

  $\vdots$

- $p(y, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero

$(\exists t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero sii

- $p(0, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero o

  $\vdots$

- $p(y, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero

Lo mismo se puede definir con $< y$ en lugar de $\leq y$.

$$(\exists t)_{<y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{y} \quad (\forall t)_{<y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Cuantificadores acotados (con $\leq$)

Teorema

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ *un predicado perteneciente a una clase CRP* $\mathcal{C}$*.*
Los siguientes predicados también están en $\mathcal{C}$*:*

$$(\forall t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$(\exists t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Demostración.

$$(\forall t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n) \text{ sii } \prod_{t=0}^{y} p(t, x_1, \ldots, x_n) = 1$$

$$(\exists t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n) \text{ sii } \sum_{t=0}^{y} p(t, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

- la sumatoria y productoria están en $\mathcal{C}$
- la comparación por $=$ está en $\mathcal{C}$

$\square$

Cuantificadores acotados (con $<$)

Teorema

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado perteneciente a una clase CRP $\mathcal{C}$. Los siguientes predicados también están en $\mathcal{C}$:

$$(\forall t)_{<y}\ p(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$(\exists t)_{<y}\ p(t, x_1, \dots, x_n)$$

Demostración.

$(\forall t)_{<y}\ p(t, x_1, \dots, x_n)$ sii $(\forall t)_{\leq y}\ (t = y \vee p(t, x_1, \dots, x_n))$
$(\exists t)_{<y}\ p(t, x_1, \dots, x_n)$ sii $(\exists t)_{\leq y}\ (t \neq y \wedge p(t, x_1, \dots, x_n))$ $\square$

Más ejemplos de funciones recursivas primitivas

- $y|x$ sii y divide a x. Se define como

$$(\exists t)_{\leq x}\ y \cdot t = x$$

  Notar que con esta definición $0|0$.
- $primo(x)$ sii x es primo.

Minimización acotada

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado de una clase CRP $\mathcal{C}$.

$$g(y, x_1, \dots, x_n) = \sum_{u=0}^{y} \prod_{t=0}^{u} \alpha(p(t, x_1, \dots, x_n))$$

¿ Qué hace g?

Supongamos que existe un $t \leq y$ tal que $p(t, x_1, \dots, x_n)$ es verdadero

- sea t_0 el mínimo tal t
- $p(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ para todo $t < t_0$
- $p(t_0, x_1, \dots, x_n) = 1$
- $\prod_{t=0}^{u} \alpha(p(t, x_1, \dots, x_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } u < t_0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $g(y, x_1, \dots, x_n) = \overbrace{\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{t_0 \text{ veces}} + 0 + 0 + \dots + 0}^{y+1 \text{ veces}} = t_0$
- entonces $g(y, x_1, \dots, x_n)$ es el mínimo $t \leq y$ tal que $p(t, x_1, \dots, x_n)$ es verdadero

Si no existe tal t, $g(y, x_1, \dots, x_n) = y + 1$

Minimización acotada

Notamos

$$\min_{t \leq y} p(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \text{mínimo } t \leq y \text{ tal que} \\ p(t, x_1, \ldots, x_n) \text{ es verdadero} & \text{si existe tal } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Teorema

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0, 1\}$ *un predicado de una clase CRP* $\mathcal{C}$*. La función*

$$\min_{t \leq y} p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

también está en $\mathcal{C}$*.*

Más ejemplos de funciones recursivas primitivas

- x div y es la división entera de x por y

$$\min_{t \leq x}((t+1) \cdot y > x)$$

  Notar que con esta definición 0 div 0 es 0.
- $x \mod y$ es el resto de dividir a x por y
- p_n es el n-ésimo primo ($n > 0$). Se define $p_0 = 0, p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$

$$\begin{array}{rcl} p_0 & = & 0 \\ p_{n+1} & = & \min_{t \leq K(n)} (primo(t) \wedge t > p_n) \end{array}$$

  Necesitamos una cota $K(n)$ que sea buena, es decir
  - suficientemente grande y
  - recursiva primitiva

  $K(n) = p_n! + 1$ funciona (ver que $p_{n+1} \leq p_n! + 1$).

Codificación de pares

Definimos la función recursiva primitiva

$$\langle x, y\rangle = 2^x(2 \cdot y + 1) \dot{-} 1$$

Notar que $2^x(2 \cdot y + 1) \neq 0$.

Proposición

Hay una única solución (x, y) a la ecuación $\langle x, y\rangle = z$.

Demostración.

- x es el máximo número tal que $2^x | (z + 1)$
- $y = ((z + 1)/2^x - 1)/2$

$\square$

Observadores de pares

Los observadores del par $z = \langle x, y \rangle$ son

- $\ell(z) = x$
- $r(z) = y$

Proposición

Los observadores de pares son recursivas primitivas.

Demostración.

Como $x, y < z + 1$ tenemos que

- $\ell(z) = \min\limits_{x \leq z} ((\exists y)_{\leq z}\ z = \langle x, y \rangle)$
- $r(z) = \min\limits_{y \leq z} ((\exists x)_{\leq z}\ z = \langle x, y \rangle)$

$\square$

Por ejemplo,

- $\langle 2, 5 \rangle = 2^2(2 \cdot 5 + 1) \dot{-} 1 = 43$
- $\ell(43) = 2$
- $r(43) = 5$

Codificación de secuencias

El número de Gödel de la secuencia de números naturales

$$a_1, \ldots, a_n$$

es el número

$$[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i},$$

donde p_i es el i-ésimo primo ($i \geq 1$).

Por ejemplo el número de Gödel de la secuencia

$$1, 3, 3, 2, 2$$

es

$$[1, 3, 3, 2, 2] = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 40020750.$$

Propiedades de la codificación de secuencias

Teorema

Si $[a_1, \ldots, a_n] = [b_1, \ldots, b_n]$ *entonces* $a_i = b_i$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración.

Por la factorización única en primos. $\square$

Observar que

$$[a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_n, 0] = [a_1, \ldots, a_n, 0, 0] = \ldots$$

pero

$$[a_1, \ldots, a_n] \neq [0, a_1, \ldots, a_n]$$

Observadores de secuencias

Los observadores de la secuencia $x = [a_1, \ldots, a_n]$ son

- $x[i] = a_i$
- $|x| =$ longitud de x

Proposición

Los observadores de secuencias son recursivas primitivas.

Demostración.

- $x[i] = \min\limits_{t \leq x} (\neg p_i^{t+1} | x)$
- $|x| = \min\limits_{i \leq x} \left(x[i] \neq 0 \wedge (\forall j)_{\leq x} (j \leq i \vee x[j] = 0) \right)$

$\square$

Por ejemplo,

- $[1, 3, 3, 2, 2][2] = 3 = 40020750[2]$
- $[1, 3, 3, 2, 2][6] = 0 = 40020750[6]$
- $|[1, 3, 3, 2, 2]| = 5 = |40020750|$
- $|[1, 3, 3, 2, 2, 0]| = |[1, 3, 3, 2, 2, 0, 0]| = 5 = |40020750|$
- $x[0] = 0$ para todo x
- $0[i] = 0$ para todo i

En resumen: codificación y decodificación de pares y secuencias

Teorema (Codificación de pares)

- $\ell(\langle x, y \rangle) = x, r(\langle x, y \rangle) = y$
- $z = \langle \ell(z), r(z) \rangle$
- $\ell(z), r(z) \leq z$
- *la codificación y observadores de pares son r.p.*

Teorema (Codificación de secuencias)

- $[a_1, \ldots, a_n][i] = \begin{cases} a_i & \textit{si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \textit{si no} \end{cases}$
- *si* $n \geq |x|$ *entonces* $[x[1], \ldots, x[n]] = x$
- *la codificación y observadores de secuencias son r.p.*

La función de Ackermann (1928)

$$A(x,y,z) = \begin{cases} y+z & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \text{ y } z = 0 \\ 1 & \text{si } x = 2 \text{ y } z = 0 \\ y & \text{si } x > 2 \text{ y } z = 0 \\ A(x-1, y, A(x,y,z-1)) & \text{si } x, z > 0 \end{cases}$$

- $A_0(y,z) = A(0,y,z) = y + z = y \underbrace{+1 + \cdots + 1}_{z \text{ veces}}$
- $A_1(y,z) = A(1,y,z) = y \cdot z = \underbrace{y + \cdots + y}_{z \text{ veces}}$
- $A_2(y,z) = A(2,y,z) = y \uparrow z = y^z = \underbrace{y \cdot \cdots \cdot y}_{z \text{ veces}}$
- $A_3(y,z) = A(3,y,z) = y \uparrow\uparrow z = \underbrace{y^{y^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{y}}}}}}_{z \text{ veces}}$
- $\ldots$

Para cada i, $A_i : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es r.p. pero $A : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ no es r.p.

Versión de Robinson & Peter (1948)

$$B(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m = 0 \\ B(m-1,1) & \text{si } m > 0 \text{ y } n = 0 \\ B(m-1, B(m, n-1)) & \text{si } m > 0 \text{ y } n > 0 \end{cases}$$

- $B_0(n) = B(0,n) = n+1$
- $B_1(n) = B(1,n) = 2 + (n+3) - 3$
- $B_2(n) = B(2,n) = 2 \cdot (n+3) - 3$
- $B_3(n) = B(3,n) = 2 \uparrow (n+3) - 3$
- $B_4(n) = B(4,n) = 2 \uparrow\uparrow (n+3) - 3$
- $\ldots$

Para cada i, $B_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es r.p. pero $B : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ no es r.p.

- $B(4,2) \simeq 2 \times 10^{19728}$

$B'(x) = B(x,x)$ crece más rápido que cualquier función r.p.

$$(\forall f \text{ r.p.})(\exists n)(\forall x > n)\ B'(x) > f(x)$$

Teorema

La función de Ackermann es total Turing computable y no es recursiva primitiva.

Minimización no acotada

Definimos la minimización no acotada

$$\min_t p(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \text{mínimo } t \text{ tal que} & \\ p(t, x_1, \ldots, x_n) \text{ es verdadero} & \text{si existe tal } t \\ & \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Funciones computables

Definición

Una función parcial es parcial computable si se puede obtener a partir de las funciones iniciales por un número finito de aplicaciones de

- composición,
- recursión primitiva y
- minimización no acotada

Definición

Una función total es computable si se puede obtener a partir de las funciones iniciales por un número finito de aplicaciones de

- composición,
- recursión primitiva y
- minimización propia
  (del tipo $\min_t q(x_1, \ldots, x_n, t)$ donde siempre existe al menos un t tal que $q(x_1, \ldots, x_n, t)$ es verdadero)

Damos un lenguaje de programación $\mathcal{S}{+}{+}$ que permite definir todas las funciones computables en base a las funciones iniciales, composición, recursión primitiva , minimización acotada y no acotada.

Teorema

Una función parcial $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ *es parcialmente computable sii existe un programa* P *en* $\mathcal{S}{+}{+}$ *tal que*

$$f(r_1, \ldots, r_m) = \Psi_P^{(m)}(r_1, \ldots, r_m)$$

para todo $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{N}^m$.

La igualdad (del meta-lenguaje) es verdadera si

- *los dos lados están definidos y tienen el mismo valor o*
- *los dos lados están indefinidos*

Minimización no acotada

Teorema

Si $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ *es un predicado computable entonces*

$$\min_t p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

es parcial computable.

Demostración.

El siguiente programa computa $\min_t p(t, x_1, \ldots, x_n)$:
while $p(Y, X_1, \ldots, X_n) \neq 1$
$Y = Y + 1$

$\square$

Clausura por composición

Teorema

Si h se obtiene a partir de las funciones (parciales) computables $f, g_1, \ldots, g_k$ por composición entonces h es (parcial) computable.

Demostración.

El siguiente programa computa h:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &\leftarrow g_1(X_1, \ldots, X_n) \\
&\vdots \\
Z_k &\leftarrow g_k(X_1, \ldots, X_n) \\
Y &\leftarrow f(Z_1, \ldots, Z_k)
\end{aligned}
$$

Si $f, g_1, \ldots, g_k$ son totales entonces h es total. $\square$

Clausura por recursión primitiva

Teorema

Si h se obtiene a partir de g por recursión primitiva y g es computable entonces h es computable.

Demostración.

El siguiente programa computa h:

$Y \leftarrow k$ (es una macro, se puede hacer fácil)

while $X! = 0$ **do** $\{$

$Y \leftarrow g(Z, Y)$

$Z \leftarrow Z + 1$

$X \leftarrow X - 1$ $\}$

Si g es total entonces h es total. $\square$

Teorema

La clase de funciones parcialmente computables es una clase CRP.

Demostración.

Ya vimos que la clase de funciones computables está cerrada por composición y recursión primitiva Veamos que las funciones iniciales son computables:

- $s(x) = x + 1$ se computa con el programa

$$Y \leftarrow X + 1$$

- $n(x) = 0$ se computa con el programa vacío
- $u_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ se computa con el programa

$$Y \leftarrow X_i$$

$\square$

Teorema

Sea $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ *una función parcial. Son equivalentes:*

1. f *es parcialmente computable en Python*
2. f *es parcialmente computable en C*
3. f *es parcialmente computable en Haskell*
4. f *es parcialmente Turing computable*

No es importante

- qué base usamos para representar a los números
  - usamos representación unaria ($\Sigma = \{\mathbf{B}, 1\}$)
  - pero podríamos haber elegido la binaria ($\Sigma = \{\mathbf{B}, 0, 1\}$)
  - o base 10 ($\Sigma = \{\mathbf{B}, 0, 1, 2, \dots, 9\}$)
- si permitimos que al terminar la cinta tenga otras cosas escritas además de la salida o solo contenga la salida
- si usamos esta variante de arquitectura:
  - una cinta de entrada (solo de lectura)
  - una cinta de salida (solo de escritura)
  - una o varias cintas de trabajo, de lectura/escritura

¡Siempre computamos la misma clase de funciones!

Tipos de datos en $\mathcal{S}{++}$

- vimos que el único tipo de dato en $\mathcal{S}{++}$ son los naturales
- sin embargo podemos simular otros tipos. Por ejemplo,
  - tipo bool: lo representamos con el 1 (verdadero) y el 0 (falso)
  - tipo par de números naturales: la codificación y decodificación de pares son funciones primitivas recursivas
  - tipo entero: podría ser codificada con un par

$$\langle \text{bool}, \text{número natural} \rangle$$

  - tipo secuencias finitas de números naturales: la codificación y decodificación de secuencias son funciones primitivas recursivas
- ahora vamos a ver como simular el tipo programa en $\mathcal{S}{++}$

Codificación de programas en $\mathcal{S}{++}$

Recordemos que las instrucciones de $\mathcal{S}{++}$ eran:

1. $V++$
2. $V--$
3. **while** $(V \neq 0)$**do** $\{P\}$
4. **pass**

Observar que toda instrucción menciona exactamente una variable V

Codificación de variables de $\mathcal{S}{++}$

Ordenamos las variables:

$$Y, X_1, Z_1, X_2, Z_2, X_3, Z_3, \ldots$$

Escribimos $\#(V)$ para la posición que ocupa la variable V en la lista.

Por ejemplo,

- $\#(Y) = 0$
- $\#(X_1) = 1$
- $\#(Z_1) = 2$
- $\#(X_2) = 3$

Codificación de instrucciones de $\mathcal{S}$++

Definimos la función primitiva recursiva $\#$: expresiones de $\mathcal{S}$++ $\to \mathbb{N}$

$\#($**pass** $) = 0$

$\#(I) = \langle a, b \rangle + 1$, para $I \neq$ **pass**

donde

$a = \#(V)$ donde V es la variable mencionada en I,

si V es variable de salida Y, $\#(Y) = 0$

si V es variable de entrada X_i, $\#(X_i) = 2i - 1$

si V es variable local Z, $\#(Z) = 2i$

$b = 0$ si I es $V + +$

$b = 1$ si I es $V - -$

$b = \#(P) + 1$ si I es **while** $V \neq 0$ **do** $\{P\}$

Todo número x representa a una única instrucción I.

Codificación de programas en $\mathcal{S}{+}{+}$

Un programa P es una lista (finita) de instrucciones $I_1, \ldots, I_k$

Codificamos al programa P con

$$\#(P) = [\#(I_1), \ldots, \#(I_k)]$$

Prohibimos los programas que terminan con la isntrucción **pass** y con esto cada número representa a un único programa.

Hay más funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que números naturales

Teorema (Cantor)

El conjunto de las funciones (totales) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es numerable.

Demostración.

Supongamos que lo fuera. Las enumero: $f_0, f_1, f_2 \dots$

$$
\begin{array}{lclllll}
\text{valores de } f_0 & = & f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \dots \\
\text{valores de } f_1 & = & f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & \dots \\
\text{valores de } f_2 & = & f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \dots \\
\vdots & & & & & & \\
\text{valores de } f_k & = & f_k(0) & f_k(1) & f_k(2) & f_k(3) & \dots \\
\vdots & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Defino la siguiente función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$g(x) = f_x(x) + 1.$$

Para todo k, $f_k \neq g$ (en particular difieren en el punto k). Entonces g no está listada. Absurdo: $f_0, f_1, f_2 \dots$ era una enumeración de todas las funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Hay funciones no computables

- hay una cantidad no numerable de funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- o sea, hay más funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que números naturales
- hay tantos programas como números naturales
- hay tantas funciones computables como números naturales
- tiene que haber funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no computables
  Pero ¿qué ejemplo concreto tenemos?

El problema de la detención (Halting problem)

$\mathsf{HALT}(x, y) : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ es verdadero sii el programa con número y y entrada x no se indefine, i.e.

$$\mathsf{HALT}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_P^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde P es el único programa tal que $\#(P) = y$.

Ejemplo:
Supongamos programa P busca incrementalmente el primer numero par que no es la suma de dos primos. Sea $\#(P) = e$. ¿Cuánto vale $\mathsf{HALT}(x, e)$?

$$\mathsf{HALT}(x, e) = 1 \quad \text{sii} \quad \Psi_P(x) \downarrow \quad \text{sii} \quad \text{la conjetura de Goldbach es falsa}$$

HALT no es computable

Teorema (Turing, 1936)

HALT *no es computable.*

Demostración.

Supongamos que HALT es computable.
Construimos el siguiente programa:

Programa Q

$$\boxed{\textbf{while } \mathrm{HALT}(X, X) \neq 0 \textbf{ do } \{\textbf{pass }\}}$$

Supongamos que $\#(Q) = e$. Entonces

$$\Psi_Q(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } \mathrm{HALT}(x, x) = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces

$$\mathrm{HALT}(x, e) = 1 \quad \text{sii} \quad \Psi_Q(x)\downarrow \quad \text{sii} \quad \mathrm{HALT}(x, x) \neq 1$$

e está fijo pero x es variable. Llegamos a un absurdo con $x = e$. $\square$

Diagonalización

En general, sirve para definir una función distinta a muchas otras.

En el caso de HALT(x, y),

- sea P_i el programa con número i
- supongo que HALT(x, y) es computable
- defino una función f computable
- núcleo de la demostración: ver que $f \notin \{\Psi_{P_0}, \Psi_{P_1}, \Psi_{P_2}, \dots\}$
  - para esto, me aseguro que $f(x) \neq \Psi_{P_x}(x)$, en particular:

$$f(x)\downarrow \text{ sii } \Psi_{P_x}(x)\uparrow \qquad \begin{array}{cccc} \boxed{\Psi_{P_0}(0)} & \Psi_{P_0}(1) & \Psi_{P_0}(2) & \cdots \\ \Psi_{P_1}(0) & \boxed{\Psi_{P_1}(1)} & \Psi_{P_1}(2) & \cdots \\ \Psi_{P_2}(0) & \Psi_{P_2}(1) & \boxed{\Psi_{P_2}(2)} & \cdots \end{array}$$

- ¡pero f era computable! Absurdo: tenía que estar en

$$\{\Psi_{P_0}, \Psi_{P_1}, \Psi_{P_2}, \dots\}.$$