Lenguajes Formales

Clase Teórica

Autómatas de pila y gramáticas libres de contexto

Segundo Cuatrimestre 2024

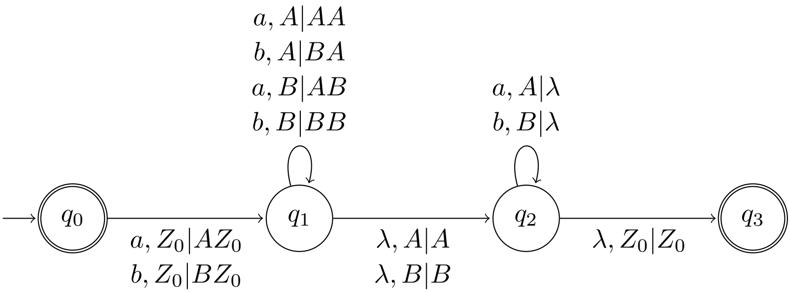
Bibliografía: Capítulos 6 y 7, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Ejemplo

Autómata de pila que acepta $\mathcal{L} = \{\omega\omega^R : \alpha \in \Sigma^*\}$:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{Z_0, A, B\}, \quad F = \{q_0, q_3\}$$



Definición (Oettinger 1961, Schutzenberger 1963)

Un **autómata de pila** está definido por

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$$

donde:

- Q es el conjunto de estados
- Σ es el alfabeto de entrada
- Γ es el alfabeto de la pila
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial
- $Z_0 \in \Gamma$ es la configuración inicial de la pila
- $F \in Q$ es el conjunto de estados finales
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}\left(Q \times \Gamma^*\right)$ es la función de transición:

$$\delta\left(q, x, Z\right) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_m, \gamma_m)\}$$

La interpretación de $\delta(q, x, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_n, \gamma_n)\}$, con $q, p_1, \ldots, p_n \in Q$, $x \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $Z \in \Gamma$, y $\gamma_i \in \Gamma^*$ es la siguiente.

Cuando el estado del autómata es q, el símbolo que la cabeza lectora está inspeccionando en ese momento es x, y en el tope de la pila nos encontramos el símbolo Z, se realizan las siguientes acciones:

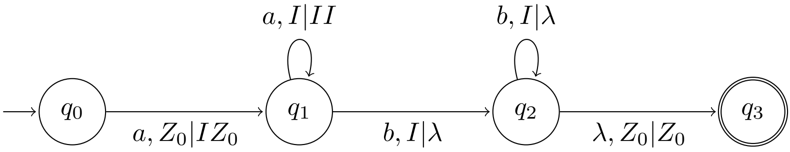
1. Si $x \in \Sigma$, es decir no es la cadena vacía, la cabeza lectora avanza una posición para inspeccionar el siguiente símbolo.
2. Se elimina el símbolo Z de la pila del autómata.
3. Se selecciona un par (p_i, γ_i) entre los existentes en la definición de $\delta(q, x, Z)$.
4. Se apila la cadena $\gamma_i = c_1 c_2 \ldots c_k$, con $c_i \in \Gamma$ en la pila del autómata, quedando el símbolo c_1 en el tope de la pila.
5. Se cambia el control del autómata al estado p_i.

Ejemplo

Autómata de pila que acepta $\mathcal{L} = \{a^n b^n : n \geq 1\}$:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{Z_0, I\}, \quad F = \{q_3\}$$



Autómatas de pila determinísticos

Definición

Un autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ es determinístico si para todo $q \in Q, x \in \Sigma, Z \in \Gamma$, se cumplen:

1. $\#\delta\left(q, x, Z\right) \leq 1$
2. $\#\delta\left(q, \lambda, Z\right) \leq 1$
3. si $\#\delta\left(q, \lambda, Z\right) = 1$ entonces $\#\delta\left(q, x, Z\right) = 0$

Teorema

No es cierto que para cada autómata de pila no determinístico existe otro determinístico que reconoce el mismo lenguaje.

Demostración. $\mathcal{L} = \{\omega\omega^R\}$ es aceptado por un AP, pero no es aceptado por ningún AP determinístico
(ver Hopcroft, Motwani Ulman (2001), página 249).

Intuición: Tomando $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Supongamos que el autómata ve n 0s; irá apilando algún símbolo para llevar la cuenta de los 0s.
- Si luego ve 110^n, para validar la cantidad de 0s, debería desapilar los símbolos (y si la cadena termina acá, aceptar, tomando $\omega = 0^n 1$).
- Si después de esto vuelve a ver $0^n 110^n$, debería aceptar (tomando $\omega = 0^n 110^n$)...
- Pero si ve $0^m 110^m$ con $m \neq n$, debería rechazar. Sin embargo, al estar la pila vacía, es imposible distinguir entre n y m.

Sea un autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$.

Definición (Configuración de un autómata de pila)

Es una tripla $(q, \omega, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ donde:

- $q \in Q$ es el estado actual,
- $\omega \in \Sigma^*$ es la parte de la cadena de entrada que falta procesar,
- $\gamma \in \Gamma^*$ es el contenido de la pila.

La configuración inicial del autómata para la cadena ω_0 es (q_0, ω_0, Z_0).

Definición (Cambio de configuración $\vdash$)

Para todo $x \in \Sigma$, $\omega \in \Sigma^*$, $Z \in \Gamma$, $\gamma, \pi \in \Gamma^*, q, q' \in Q$

- $(q, x\omega, Z\pi) \vdash (q', \omega, \gamma\pi)$ si $(q', \gamma) \in \delta\,(q, x, Z)$.
- $(q, \omega, Z\pi) \vdash (q', \omega, \gamma\pi)$ si $(q', \gamma) \in \delta\,(q, \lambda, Z)$.

Definición (Lenguaje reconocido)

Sea un autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$.

El lenguaje reconocido por M por **estado final** es

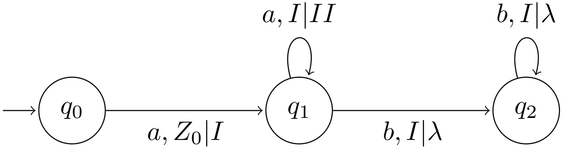
$$\mathcal{L}(M) = \left\{ \omega \in \Sigma^* \;:\; \exists (p \in F, \gamma \in \Gamma^*) \quad (q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \gamma) \right\}$$

El lenguaje reconocido por M por **pila vacía** es

$$\mathcal{L}_\lambda(M) = \left\{ \omega \in \Sigma^* \;:\; \exists (p \in Q) \quad (q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda) \right\}$$

Ejemplo

Sea un AP $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \varnothing \rangle$, donde $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, I\}$, y δ está dada por el siguiente dibujo:



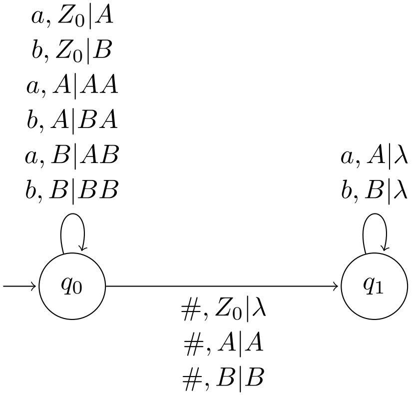
Notar que $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, I)\}$, por lo tanto en la transición de q_0 a q_1 el símbolo Z_0 fue removido de la pila.

El lenguaje reconocido por M por pila vacía es

$$\mathcal{L}_\lambda(M) = \{a^n b^n : n \geq 1\}$$

Ejemplo

El siguiente autómata de pila M es determinístico



$$\mathcal{L}_\lambda(M) = \left\{\omega\#\omega^R : \omega \in (\Sigma \setminus \{\#\})^*\right\}$$

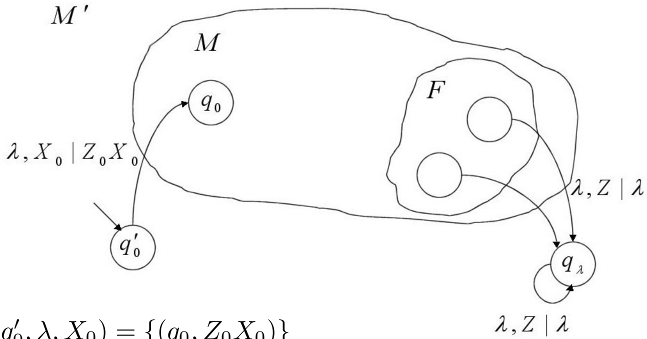
Teorema

Para cada AP M existe un AP M' tal que

$$\mathcal{L}\left(M\right) = \mathcal{L}_\lambda\left(M'\right).$$

Demostración. Sea AP $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$. Definimos

$$M' = \langle Q \cup \{q_\lambda, q'_0\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta', q'_0, X_0, \varnothing \rangle$$



1. $\delta'(q'_0, \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
   (M' entra al estado inicial de M con $Z_0 X_0$ en la pila, así evita pila vacía).
2. $\forall (q \in Q, x \in \Sigma \cup \{\lambda\}, Z \in \Gamma), \quad \delta'(q, x, Z) = \delta(q, x, Z)$.
   (M' simula M).
3. $\forall (q \in F, Z \in \Gamma \cup \{X_0\}), \quad (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q, \lambda, Z)$
4. $\forall (Z \in \Gamma \cup \{X_0\}), \quad (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q_\lambda, \lambda, Z)$.
   (Si M entra en un estado final, M' debe ir a vaciar la pila).

Veamos que $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}_\lambda(M')$.

Si $\omega \in \mathcal{L}(M)$ entonces $(q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma)$, con $q \in F$, $\gamma \in \Gamma^*$.

Por definición de δ', $\delta'(q_0', \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$, entonces

$$(q_0', \omega, X_0) \underset{M'}{\vdash} (q_0, \omega, Z_0 X_0).$$

Por definición de δ', $\forall (q \in Q, x \in \Sigma \cup \{\lambda\}, Z \in \Gamma)$, $\delta'(q, x, Z) = \delta(q, x, Z)$,

$$(q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma).$$

Entonces $(q_0', \omega, X_0) \underset{M'}{\vdash} (q_0, \omega, Z_0 X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma X_0)$.

Por definición de δ', $\forall (q \in F, Z \in \Gamma \cup \{X_0\})$,

$$(q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q, \lambda, Z) \quad \text{y} \quad (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q_\lambda, \lambda, Z).$$

Entonces $(q, \lambda, \gamma X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q_\lambda, \lambda, \lambda)$. Por lo tanto, $(q_0', \omega, X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q_\lambda, \lambda, \lambda)$.

Concluimos que, si $\omega \in \mathcal{L}(M)$ entonces $\omega \in \mathcal{L}_\lambda(M')$.

Veamos que $\mathcal{L}_\lambda(M') \subseteq \mathcal{L}(M)$.

Si $\omega \in \mathcal{L}_\lambda(M')$, entonces existe la secuencia

$$(q_0', \omega, X_0) \underset{M'}{\vdash} \underbrace{(q_0, \omega, Z_0X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma X_0)}_{A} \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q_\lambda, \lambda, \lambda),$$

Pero la transición en A implica

$$(q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma).$$

Por lo tanto, si $\omega \in \mathcal{L}_\lambda(M')$ entonces $\omega \in \mathcal{L}(M)$. $\square$

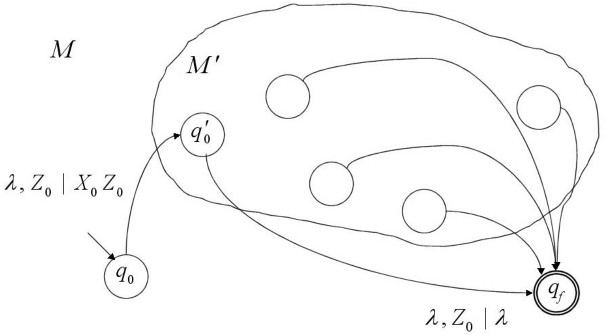
Teorema (Chomsky 1962, Evey 1963)

Para cada AP $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, \varnothing \rangle$ existe un AP $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ tal que

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}_\lambda(M').$$

Demostración. Sea AP $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, \varnothing \rangle$.

Definimos $M = \langle Q' \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma, \Gamma' \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\} \rangle$ donde



- $\delta(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q_0', X_0 Z_0)\}$,
  así desde un principio M simula M', con $X_0 Z_0$ en la pila.
- $\forall (q \in Q', x \in \Sigma \cup \{\lambda\}, Z \in \Gamma'), \quad \delta(q, x, Z) = \delta'(q, x, Z)$
  así M simula M'.
- $\forall (q \in Q'), \quad (q_f, \lambda) \in \delta(q, \lambda, Z_0)$
  así cuando se vacía la pila simulada de M', M salta al estado final q_f.

Nos queda por argumentar que $\omega \in \mathcal{L}_\lambda(M')$ si y solo si $\omega \in \mathcal{L}(M)$.

- Si $\omega \in \mathcal{L}_\lambda(M')$ entonces $(q_0', \omega, X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$.
  La definición de M asegura

  $$(q_0, \omega, Z_0) \underset{M}{\vdash} (q_0', \omega, X_0 Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_f, \lambda, \lambda),$$

  y por lo tanto $\omega \in \mathcal{L}(M)$.

- Si $\omega \in \mathcal{L}(M)$ entonces

  $$(q_0, \omega, Z_0) \underset{M}{\vdash} (q_0', \omega, X_0 Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_f, \lambda, \lambda),$$

  pero por definición de M,
  $(q_0', \omega, X_0 Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, Z_0)$ si y solo si $(q_0', \omega, X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$.

  Concluimos $(q_0', \omega, X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$, y por lo tanto $\omega \in \mathcal{L}_\lambda(M')$. $\square$

Ejercicios

1. Indicar verdadeo o falso y justificar: Si $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \varnothing \rangle$ es un autómata de pila entonces cada palabra $\omega \in \mathcal{L}_\lambda(M)$ es reconocida por M en a lo sumo $|\omega| * \#Q * \#\Gamma$ transiciones; es decir, existe $n \leq |\omega| * \#Q * \#\Gamma$, existe $p \in Q$, tal que $(q_0, \omega, Z_0) \overset{n}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda)$.
2. Dado un autómata finito $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ dar un autómata de pila $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0', \varnothing \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}_\lambda(M')$
3. Consideremos la demostración del Teorema que afirma que para cada autómata $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ existe M' tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}_\lambda(M')$. ¿Si M es determinístico, el autómata M' construido en la demostración también lo es?
4. Consideremos la demostración del Teorema que afirma que dado $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, \varnothing \rangle$ existe M tal que $\mathcal{L}_\lambda(M') = \mathcal{L}(M)$. ¿Si M' es determinístico, el autómata M construido en la demostración también lo es?

Gramáticas libres de contexto

Recordemos la definición.

Definición

Una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ es libre de contexto si las producciones en P son de la forma

$$A \to \alpha, \quad \text{con} \quad A \in V_N \quad \text{y} \quad \alpha \in (V_N \cup V_T)^*.$$

Demostraremos que para cada gramática libre de contexto G hay un autómata de pila M que acepta el lenguaje generado por dicha gramática y viceversa.

Dada una gramática libre de contexto G, se puede reconocer si una palabra pertenece a $\mathcal{L}(G)$ en tiempo del orden cúbico de la longitud de la palabra. En casos especiales (determinismo), se puede reconocer en tiempo lineal. Lo veremos próximamente.

Lenguaje generado por una gramática

Definición (Derivación $\Rightarrow$)

Sea $G = (V_N, V_T, P, S)$ una gramática.
Si $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 \in (V_N \cup V_T)^*$ y $\alpha \to \beta \in P$ entonces

$$\gamma_1 \alpha \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta \gamma_2$$

La relación $\Rightarrow$ es un subconjunto de $(V_N \cup V_T)^* \times (V_N \cup V_T)^*$ y significa derivar en un solo paso.

Las relaciones $\stackrel{+}{\Rightarrow}$ y $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ son la clausura transitiva y reflexo-transitiva respectivamente (uno o más pasos de derivación, y cero o más pasos).

Si $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$ y $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$ decimos que α es una *forma sentencial* de G.

Definición (Lenguaje generado por una gramática G)

Dada una gramática $G = (V_N, V_T, P, S)$,

$$\mathcal{L}(G) = \{\omega \in T^* : S \stackrel{+}{\Rightarrow} \omega\}$$

Ejemplo

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ la gramática libre de contexto tal que $V_N = \{E\}$, $V_T = \{+, *, \mathbf{id}, (,)\}$, $S = E$ y P tiene

$$E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathbf{id}$$

En cada paso de la derivación debemos elegir qué símbolo no terminal reescribiremos y luego debemos elegir una producción que tenga ese símbolo del lado izquierdo.

Si elegimos el no terminal más a la izquierda,

$E \overset{*}{\Rightarrow} (\mathbf{id})$, porque $E \Rightarrow (E) \Rightarrow (\mathbf{id})$

$E \overset{*}{\Rightarrow} (\mathbf{id} + \mathbf{id})$, porque $E \Rightarrow (E) \Rightarrow (E + E) \Rightarrow (\mathbf{id} + E) \Rightarrow (\mathbf{id} + \mathbf{id})$.

Si elegimos el no terminal más a la derecha,

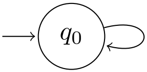
$E \Rightarrow (E) \Rightarrow (E + E) \Rightarrow (E + \mathbf{id}) \Rightarrow (\mathbf{id} + \mathbf{id})$.

Un autómata de pila para esta gramática libre de contexto

Ejemplo

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ la gramática libre de contexto tal que $V_N = \{E\}$, $V_T = \{+, *, \mathbf{id}, (,)\}$, $S = E$ y P tiene $E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathbf{id}$

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \varnothing \rangle$ con $Q = \{q_0\}, \Sigma = V_T, \Gamma = V_N \cup V_T$ y $Z_0 = S$.



$$\lambda, E|\mathbf{id}; \quad \lambda, E|(E); \quad \lambda, E|E+E; \quad \lambda, E|E*E$$

$$+, +|\lambda; \quad *, *|\lambda; \quad \mathbf{id}, \mathbf{id}|\lambda; \quad (, (|\lambda; \quad),)|\lambda$$

Si en el tope de la pila hay un símbolo no terminal, el autómata M lo reemplazará en la pila por el lado derecho de alguna producción.

Si en el tope de la pila hay un símbolo terminal el autómata M constatará que es igual al próximo símbolo en la cadena de entrada y lo desapilará.

Este autómata acepta $\mathcal{L}(G)$ por pila vacía.

Teorema (Chomsky 1962, Evey 1963)

Para cada gramática G libre de contexto existe un autómata de pila M tal que

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\lambda(M).$$

Demostración del Teorema. Sea GLC $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$. Definimos el AP

$$M = \langle \{q\}, V_T, V_N \cup V_T, \delta, q, S, \varnothing \rangle$$

donde $\delta : Q \times (V_T \cup \{\lambda\}) \times (V_N \cup V_T) \to \mathcal{P}\left(Q \times (V_N \cup V_T)^*\right)$ es tal que

- si $(A \to \alpha) \in P$, entonces $(q, \alpha) \in \delta(q, \lambda, A)$.
- $\forall (x \in V_T),\ \delta(q, x, x) = \{(q, \lambda)\}$.

Queremos ver que

$$S \overset{+}{\Rightarrow} \omega \text{ si y solo si } (q, \omega, S) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda).$$

Lema

$\forall (A \in V_N, \omega \in V_T^*)$, $A \overset{*}{\Rightarrow} \omega$ si y solo si $(q, \omega, A) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$.

Demostración. Por inducción en m, la cantidad de pasos de la derivación.

- *Caso base*, $m = 1$. Tenemos $A \overset{1}{\Rightarrow} \omega$ para $\omega = x_1 \dots x_k$, con $k \geq 0$, si y solo si $(q, x_1 \dots x_k, A) \underset{M}{\vdash} (q, x_1 \dots x_k, x_1 \dots x_k) \underset{M}{\overset{k}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$.
- *Caso inductivo*, $m > 1$.

  HI: Para todo $j < m$, $A \overset{j}{\Rightarrow} \omega$ si y solo si $(q, \omega, A) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$.

  Por definición de derivación, $A \overset{m}{\Rightarrow} \omega$ si y solo si $A \to X_1 \dots X_k$ está en P tal que para cada i, $X_i \overset{m_i}{\Rightarrow} \omega_i$, para algún $m_i < m$ y $\omega_1 \dots \omega_k = \omega$.

  Por def. de M, $(A \to X_1 \dots X_k) \in P$ sii $(q, \omega, A) \underset{M}{\vdash} (q, \omega, X_1 \dots X_k)$.

  Si $X_i \in V_N$, entonces por hipótesis inductiva, $(q, \omega_i, X_i) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$.

  Si $X_i \in V_T$, entonces $\omega_i = X_i$ y por def. de M, $(q, \omega_i, X_i) \underset{M}{\vdash} (q, \lambda, \lambda)$.

  Por lo tanto,

$$(q, \omega, A) \underset{M}{\vdash} (q, \omega_1 \dots \omega_k, X_1 \dots X_k) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q, \omega_2 \dots \omega_k, X_2 \dots X_k) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} \dots$$
$$\underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q, \omega_k, X_k) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda).$$

□

Continuación demostración del Teorema.

El Lema dice que para cualquier A en V_N, $\omega \in V_T^*$

$$A \overset{*}{\Rightarrow} \omega \quad \text{si y solo si} \quad (q, \omega, A) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda) \, .$$

Luego, para cualquier $\omega \in V_T^*$,

$$S \overset{+}{\Rightarrow} \omega \quad \text{si y solo si} \quad (q, \omega, S) \underset{M}{\overset{+}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda) \, .$$

por lo tanto $\mathcal{L}\,(G) = \mathcal{L}_\lambda\,(M)$. □

Teorema (Chomsky 1962, Evey 1963)

Si M es un autómata de pila, entonces $\mathcal{L}_\lambda(M)$ es libre de contexto.

Demostración del Teorema. Dado AP $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \varnothing)$ definimos $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ donde S es un símbolo nuevo, $V_N = \{[q, Z, p] : q \in Q, Z \in \Gamma, p \in Q\} \cup \{S\}$, $V_T = \Sigma$ y P:

- $S \to [q_0, Z_0, q]$ en P, para cada q en Q.
- $[q, Z, q_1] \to x$ en P si y solo si $(q_1, \lambda) \in \delta(q, x, Z)$.
- $[q, Z, q_1] \to \lambda$ en P si y solo si $(q_1, \lambda) \in \delta(q, \lambda, Z)$.
- Para cada $q, q_1, q_2, \ldots, q_{m+1} \in Q$, $x \in \Sigma$ y $Z, Y_1, \ldots, Y_m \in \Gamma$,
  - $[q, Z, q_{m+1}] \to x[q_1, Y_1, q_2] \ldots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$ en P si y solo si $(q_1, Y_1 \ldots Y_m) \in \delta(q, x, Z)$.
  - $[q, Z, q_{m+1}] \to [q_1, Y_1, q_2] \ldots [q_m, Y_m, q_{m+1}]$ en P si y solo si $(q_1, Y_1 \ldots Y_m) \in \delta(q, \lambda, Z)$.

(G es tal que su derivación más a la izquierda es una simulación de M).

Lema

Para todo $q \in Q, Z \in \Gamma, p \in Q$,

$$(q, \omega, Z) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda) \quad \text{si y solo si} \quad [q, Z, p] \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega.$$

Demostración del Lema.

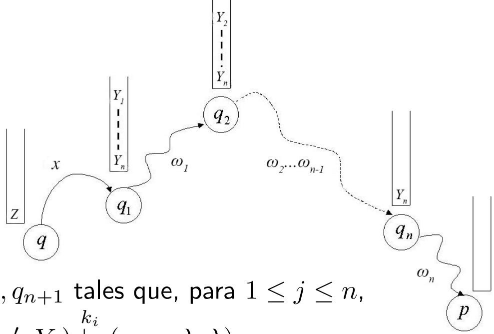
Veamos primero de autómata M a gramática G.

Veamos por inducción que para todo $i \geq 1$,

$$\text{Si } (q, \omega, Z) \overset{i}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda) \quad \text{entonces } [q, Z, p] \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega.$$

Escribimos x para denotar un símbolo de Σ o λ.

- Caso $i = 1$. Tenemos $(q, x, Z) \overset{1}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda)$. Entonces, $(p, \lambda) \in \delta(q, x, Z)$.
  Y por definición de G, $[q, Z, p] \to x$. Por lo tanto, $[q, Z, p] \underset{G}{\Rightarrow} x$.
- Caso $i > 1$. Tenemos $\omega = x\omega'$ con $\omega' \in \Sigma^*$, $(q, \omega, Z) \overset{i}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda)$
  Existen $Y_1, .., Y_n$ en Γ tales que
  $(q, x\omega', Z) \underset{M}{\vdash} (q_1, \omega', Y_1, \ldots, Y_n) \overset{i-1}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda)$.
  Necesariamente ω' se descompone como $\omega' = \omega'_1 \ldots \omega'_n$, tales que para $1 \leq j \leq n$, $\omega_1 \ldots \omega_j$ hacen que Y_j quede en el tope de pila.



Existen $q_2, \ldots, q_{n+1}$ tales que, para $1 \leq j \leq n$,

$k_i < i, \quad (q_j, \omega'_j, Y_j) \overset{k_i}{\underset{M}{\vdash}} (q_{j+1}, \lambda, \lambda)$.

Por hipótesis inductiva, para cada $1 \leq j \leq n$,

$$\text{si } (q_j, \omega'_j, Y_j) \overset{k_i}{\underset{M}{\vdash}} (q_{j+1}, \lambda, \lambda) \quad \text{entonces} \quad [q_j, Y_j, q_{j+1}] \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega'_j.$$

Pero en G tenemos la producción

$$[q, Z, q_{n+1}] \to x[q_1, Y_1, q_2] \ldots [q_n, Y_n, q_{n+1}].$$

Usando que para cada j, $[q_j, Y_j, q_{j+1}] \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega'_j$, obtenemos

$$[q, Z, q_{n+1}] \overset{*}{\Rightarrow} x\omega'_1 \ldots \omega'_n = x\omega' = \omega.$$

Veamos ahora de gramática G a autómata M.

Veamos por inducción sobre i que para todo $i \geq 1$,

$$\text{Si } [q, Z, p] \overset{i}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega \text{ entonces } (q, \omega, Z) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda).$$

Escribimos x para denotar un símbolo de Σ o λ.

- Para $i = 1$. Si $[q, Z, p] \overset{1}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$, entonces $[q, Z, p] \rightarrow x$ es producción de G y por definición de M, $(p, \lambda) \in \delta(q, x, Z)$.
- Para $i > 1$. Si $[q, Z, p] \overset{i}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega$, $\quad [q, Z, p] \underset{G}{\Rightarrow} x[q_1, Y_1, q_2] \ldots [q_n, Y_n, p] \overset{i-1}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega$.
  Descomponemos ω como $\omega = x\omega_1 \ldots \omega_n$ tal que para cada $1 \leq j \leq n$, cada derivación toma menos de i pasos: $[q_j, Y_j, q_{j+1}] \overset{k_i}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega_j$, con $k_i < i$.

  Por hipótesis inductiva, para cada $1 \leq j \leq n$, $(q_j, \omega_j, Y_j) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_{j+1}, \lambda, \lambda)$.

  Entonces $(q_j, \omega_j, Y_j Y_{j+1} \ldots Y_n) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_{j+1}, \lambda, Y_{j+1} \ldots Y_n)$.
  Partimos de $[q, Z, p] \underset{G}{\Rightarrow} x[q_1, Y_1, q_2] \ldots [q_n, Y_n, p]$.
  Por definicion de M, $(q, x, Z) \underset{M}{\vdash} (q_1, \lambda, Y_1 \ldots Y_n)$.
  Llamando p al q_{n+1}, obtenemos
  $(q, xy_1 \ldots y_n, Z) \underset{M}{\vdash} (q_1, y_1 \ldots y_n, Y_1 \ldots Y_n) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda)$. $\square$

Continuación demostración del Teorema.

Por el Lema, para todo $q \in Q, Z \in \Gamma, p \in Q$,

$$(q, \omega, Z) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda) \qquad \text{si y solo si} \qquad [q, Z, p] \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega.$$

Tomando $q = q_0$ y $Z = Z_0$,

$$(q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda) \qquad \text{si y solo si} \qquad [q_0, Z_0, p] \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega.$$

Por la definición de G, $S \to [q_0, Z_0, p]$ está en P, entonces,

$$(q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda) \qquad \text{si y solo si} \qquad S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega.$$

O, lo que es lo mismo

$$\omega \in \mathcal{L}_\lambda(M) \qquad \text{si y solo si} \qquad \omega \in \mathcal{L}(G). \quad \square$$