Práctica 5: Autómatas de pila

Versión del 28 de septiembre de 2024

Ejercicio 1. Para cada uno de los siguientes lenguajes, construir un autómata de pila que los acepte. Hacer una versión determinística en los casos en que sea posible.

a. $\{a^n b^n\}$.

b. $\{a^n b^m \mid m > n\}$.

c. $\{a^n b^m \mid m \neq n\}$.

d. $\{\omega \# \omega^{\mathrm{r}} \mid \omega \in \{a,b\}^*\}$.

e. $\{\omega \omega^{\mathrm{r}} \mid \omega \in \{a,b\}^*\}$.

f. $\{\omega \mid \omega \in \{a,b\}^* \wedge \omega = \omega^{\mathrm{r}}\}$.

g. $\{\omega \mid \omega \in \{a,b\}^* \wedge \omega \neq \omega^{\mathrm{r}}\}$.

h. $\left\{\omega \mid \omega \in \{a,b\}^* \wedge |\omega|_a = |\omega|_b\right\}$.

i. $\left\{\omega \mid \omega \in \{a,b\}^* \wedge |\omega|_a > |\omega|_b\right\}$.

j. $\left\{\omega \mid \omega \in \{a,b\}^* \wedge |\omega|_a \neq |\omega|_b\right\}$.

k. $\left\{\omega \mid \omega \in \{a,b\}^* \wedge |\omega|_a = 2|\omega|_b\right\}$.

l. $\{a^n b^m c^k \mid n \neq m \vee m \neq k\}$.

m. $\{a^n b^m \mid m = 2n\} \cup \{a^n c^m \mid n = 2m\}$.

n. Cadenas de paréntesis balanceados.

Ejercicio 2. Sea el autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$, donde:

$$Q = \{q_0, q_1\}, \quad \Sigma = \{a, b, c\}, \quad \Gamma = \{Z_0, A, B, C\}, \quad F = \{q_0\}$$

$$\delta : \begin{array}{cc} \delta(q_0, a, Z_0) = (q_1, AZ_0) & \delta(q_0, b, Z_0) = (q_1, BZ_0) \\ \delta(q_1, a, A) = (q_1, AC) & \delta(q_0, b, B) = (q_1, BC) \\ \delta(q_1, c, A) = (q_1, \lambda) & \delta(q_1, c, B) = (q_1, \lambda) \\ \delta(q_1, c, C) = (q_1, \lambda) & \delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_0, Z_0) \end{array}$$

Definir por comprensión el lenguaje aceptado por M.

Ejercicio 3. Dadas dos cadenas α y β, decimos que α es una subcadena *no contigua* de β si todos los caracteres de α aparecen en β exactamente en el mismo orden, pero de forma no necesariamente contigua. Por ejemplo, ab, aba y aaa son subcadenas no contiguas de $aabba$.

Sea $\mathcal{L}$ el siguiente lenguaje:

$$\mathcal{L} = \left\{\alpha \# \beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^* \text{ y } \alpha^{\mathrm{r}} \text{ es una subcadena no contigua de } \beta\right\}.$$

Dar un autómata de pila que reconozca $\mathcal{L}$. ¿Es un autómata determinístico?

Ejercicio 4. Dado el alfabeto $\{\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow\}$, podemos interpretar una cadena como una serie de pasos a dar sobre una cuadrícula. Por ejemplo, siguiendo la cadena $\leftarrow\leftarrow\leftarrow\downarrow$, terminamos tres pasos al oeste y un paso al sur del lugar donde comenzamos.

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de las cadenas que terminan dos pasos al norte del punto inicial (sin importar cuántos pasos al este o al oeste), y en las que un paso al sur nunca es inmediatamente seguido por un paso al este. Por ejemplo, $\downarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow$ es una cadena de $\mathcal{L}$, mientras que $\rightarrow\downarrow\rightarrow$ y $\uparrow\downarrow\rightarrow\uparrow\uparrow$ no lo son.

Dar un autómata de pila que reconozca $\mathcal{L}$. ¿Es un autómata determinístico?

Ejercicio 5. Un lenguaje $\mathcal{L}$ se dice libre de prefijos si ninguna cadena de $\mathcal{L}$ es un prefijo propio de otra cadena de $\mathcal{L}$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (explicar) o falsas (dar un contraejemplo).

a. $\mathcal{L} = \mathcal{N}(M)$ para un APD $\Longrightarrow \mathcal{L}$ es libre de prefijos.

b. $\mathcal{L} = \mathcal{N}(M)$ para un APND $\Longrightarrow \mathcal{L}$ es libre de prefijos.

c. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$ para un APD $\Longrightarrow \mathcal{L}$ es libre de prefijos.

$\mathcal{N}(M)$ es el lenguaje aceptado por el autómata M por pila vacía.

Ejercicio 6. Para cada uno de los siguientes lenguajes, dar un autómata de pila que los reconozca por pila vacía. Si es posible, hacerlo determinístico. En caso contrario, explicar por qué no se puede.

a. $\{a^n b^m \mid n \geq 1, m = 2n\}$.

b. $\{a^n b^m \mid m \geq 1, n = 2m\}$.

c. $\{a^n b^m \mid 1 \leq n \leq 2m\}$.