Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad

Práctica 1: Lenguajes

Versión del 28 de agosto de 2024

Ejercicio 1. Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto. Hallar:

$$\Sigma^0, \quad \Sigma^1, \quad \Sigma^2, \quad \Sigma^*, \quad \Sigma^+, \quad |\Sigma|, \quad \left|\Sigma^0\right|$$

($|A|$ indica la cantidad de elementos de A).

Ejercicio 2. Decidir si, dado $\Sigma = \{a, b\}$, vale:

$$\lambda \in \Sigma, \quad \lambda \subseteq \Sigma, \quad \lambda \in \Sigma^+, \quad \lambda \in \Sigma^*, \quad \Sigma^0 = \lambda, \quad \Sigma^0 = \{\lambda\}$$

Ejercicio 3. Sea $\alpha = abb$ una cadena. Calcular:

$$\alpha^0, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \prod_{k=0,\dots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3, \quad \alpha^{\mathrm{r}}$$

Ejercicio 4. Sean las cadenas $\alpha = abb$ y $\beta = acb$. Calcular:

$$\alpha\beta, \quad (\alpha\beta)^{\mathrm{r}}, \quad \beta^{\mathrm{r}}, \quad \beta^{\mathrm{r}}\alpha^{\mathrm{r}}, \quad \lambda\alpha, \quad \lambda\beta, \quad \alpha\lambda\beta, \quad \alpha^2\lambda^3\beta^2$$

Ejercicio 5. Dado un alfabeto Σ, sean $x, y \in \Sigma$ y $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Demostrar que:

a. $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$

b. $|\alpha^r| = |\alpha|$

c. $|\alpha x \beta| = |x \alpha \beta|$

d. $|\alpha.\alpha| = 2|\alpha|$

e. $(\alpha.\beta)^{\mathrm{r}} = \beta^{\mathrm{r}}.\alpha^{\mathrm{r}}$

f. $(\alpha^{\mathrm{r}})^{\mathrm{r}} = \alpha$

g. $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^{\mathrm{r}}$

($|\alpha|$ indica la longitud de la cadena α).

Ejercicio 6. Dar ejemplos de cadenas que pertenezcan a los siguientes lenguajes:

a. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

b. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

c. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$

d. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 0\}$

e. $\mathcal{L} = \left\{a^n (ac)^p (bab)^q \,\middle|\, n \geq 0 \wedge q = p + 2 \wedge p \geq 1\right\}$

f. $\mathcal{L} = \{a, b\}^3 \cap \Lambda$

g. $\mathcal{L} = \left\{\alpha\alpha^{\mathrm{r}} \,\middle|\, \alpha \in \{a, b\}^+\right\}$

h. $\mathcal{L} = \left\{\alpha \in \{a, b\}^+ \,\middle|\, \alpha = \alpha^r\right\}$

Ejercicio 7. Definir por comprensión los siguientes lenguajes:

a. $\mathcal{L}_1 = \{ab, aabb, aaabbb, ...\}$

b. $\mathcal{L}_2 = \{aab, aaaabb, aaaaaabbb, ...\}$

c. $\mathcal{L}_3 = \{aaabccc, aaaabcccc, aaaaabccccc, ...\}$

(donde el «crecimiento» en la cantidad de cada símbolo es lineal en cada caso).

Ejercicio 8. Dados $\mathcal{L}_1 = \{a, bc\}$, $\mathcal{L}_2 = \{aaa, bc\}$, y siendo $\Lambda = \{\lambda\}$, calcular:

a. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$

b. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$

c. $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2$

d. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^0$

e. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^2$

f. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^+$

g. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^+$

h. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^*$

i. $\mathcal{L}_1.\Lambda.\mathcal{L}_2$

j. $\mathcal{L}_1\varnothing\mathcal{L}_2$

k. $(\mathcal{L}_1)^{\mathrm{r}}$

l. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^{\mathrm{r}}$

Ejercicio 9. Determinar el complemento de los siguientes lenguajes, considerando los alfabetos indicados en cada caso.

a. $\mathcal{L} = \Lambda$ para $\Sigma = \{a, b\}$

b. $\mathcal{L} = \{\lambda, a\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$

c. $\mathcal{L} = \{b\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

d. $\mathcal{L} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$

e. $\mathcal{L} = \{\alpha_1 b \alpha_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, b\}^* \wedge |\alpha_1| > |\alpha_2|\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

Ejercicio 10. Sea $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ lenguajes cualesquiera. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, demostrarlas. Si no, dar un contraejemplo.

a. $\mathcal{L}^+ \subseteq \mathcal{L}^+$.

b. $\mathcal{L}^+ \subsetneq \mathcal{L}^*$

c. $\mathcal{L}^n\mathcal{L}^m = \mathcal{L}^{n+m}$ para todo $n, m \geq 0$

d. $\mathcal{L}^n \subseteq \mathcal{L}^{n+1}$ para todo $n \geq 0$

e. $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2, n \geq 0 \Longrightarrow (\mathcal{L}_1)^n \subseteq (\mathcal{L}_2)^n$

f. $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \Longrightarrow (\mathcal{L}_1)^* \subseteq (\mathcal{L}_2)^*$

g. $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}^*$

h. $(\mathcal{L}^+)^+ = \mathcal{L}^*$

i. $(\mathcal{L}^+)^* = \mathcal{L}^*$

j. $(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^* = (\mathcal{L}_1)^* \cup (\mathcal{L}_2)^*$

k. $(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)^* = (\mathcal{L}_1)^* \cap (\mathcal{L}_2)^*$

l. $(\mathcal{L}^2)^* = \mathcal{L}^*$

m. $(\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_2)^* = \mathcal{L}^*$

n. $(\mathcal{L}^n)^{\mathrm{r}} = (\mathcal{L}^{\mathrm{r}})^n$ para todo $n \geq 0$

ñ. $(\mathcal{L}^*)^{\mathrm{r}} = (\mathcal{L}^{\mathrm{r}})^*$

Ejercicio 11. Siendo:

- $\mathrm{Sub}(\mathcal{L})$: subcadenas del lenguaje $\mathcal{L}$.
- $\mathrm{Ini}(\mathcal{L})$: subcadenas iniciales (prefijos) del lenguaje $\mathcal{L}$.
- $\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$: subcadenas finales (sufijos) del lenguaje $\mathcal{L}$.

Demostrar que, si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son lenguajes:

a. $\mathrm{Fin}(\mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1)$

b. $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)$

c. $\mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) = \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_2) \cup \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1)\mathcal{L}_2$

d. $\mathrm{Ini}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \mathrm{Ini}(\mathcal{L}_1) \cup \mathrm{Ini}(\mathcal{L}_2)$

e. $\mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1) \cup \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_2)$

f. $\mathrm{Ini}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Ini}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Fin}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)$