

## Práctica 11 – Ecuaciones diferenciales

### Ejercicio 1

Dada una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$$

Con un valor inicial conocido  $y(x_0)=y_0$ . Se desea obtener numéricamente el valor de la variable  $y$  en un punto  $x$  determinado para un paso  $h$  dado mediante los métodos de Euler explícito, Euler centrado, y el método de Heun (Runge-Kutta de orden 2). Para ello se pide:

1. Construir un programa (principal) Fortran en un fichero que:
  - A) Pida por pantalla y lea por teclado para la ecuación diferencial de trabajo 1: el punto  $x$  en donde se quiere obtener el valor de la variable  $y$ , valor  $x$  inicial ( $x_0$ ), valor  $y$  inicial ( $y_0$ ), y el paso  $h$  a aplicar.
  - B) Use una función vectorial que aplique las expresiones de los métodos a la ecuación diferencial de trabajo 1.
  - C) Proporcione por pantalla el valor de la variable  $y$  obtenido con cada método.
  - D) Calcule el error relativo respecto a la solución analítica si la hubiera.
  - E) Repetir los pasos A, B, C y D para la ecuación diferencial de trabajo 2, usando la misma función vectorial.
2. Construir un fichero (método) Fortran que codifique mediante una función vectorial las ecuaciones de los métodos de Euler explícito, Euler centrado y Heun. Esta función debe tener como argumento de entrada la función genérica  $f(x,y)$  de la ecuación diferencial, y como salida (en su nombre) un vector de 3 posiciones en el que se almacenen los valores de la variable  $y$  obtenido con cada método.
3. Construir un fichero (trabajo) Fortran que codifique mediante funciones escalares las expresiones analíticas de la función  $f(x,y)$  de cada ecuación diferencial de trabajo.

Nota: a modo de prueba usad:

Ecuación diferencial de trabajo 1: tasa de variación de una población de ratas ( $y$ ) con el tiempo dado en meses ( $t$ ):

$$\frac{dy(t)}{dt} = (1 - 0.1 \cdot t) \cdot y(t)$$

Conocida la población inicial de ratas  $y(t=0)=25$ , se pide determinar la población al cabo de 12 meses con un paso  $h=0.5$  meses.

Sol.:

Euler explícito:  $y=1986$  (error: 34.6%)

Euler centrado:  $y=2770$  (error: 8.8%)

Heun:  $y=2806$  (error: 7.6%)

*Ecuación diferencial de trabajo 2: ecuación hipsométrica, la cual expresa que la tasa de cambio (disminución) de la presión atmosférica ( $p$ ) con la altura ( $z$ ) es directamente proporcional a la presión en cada nivel.*

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{1}{H}p(z)$$

*Siendo  $H$  una constante llamada factor de escala con un valor igual a 8000 m.*

*Conocido el valor inicial  $p(z=0 \text{ m})=101325 \text{ Pa}$ , determinar la presión atmosférica en la cumbre del Everest (8800 m) con un paso  $h=200 \text{ m}$ .*

*Sol.:*

*Euler explícito:  $p=33260 \text{ Pa}$  (error: 1.39%)*

*Euler centrado:  $p=33774 \text{ Pa}$  (error: 0.14%)*

*Heun:  $p=33732 \text{ Pa}$  (error: 0.012%)*

## **Ejercicio 2**

Repetir el ejercicio 1. Ahora se pide obtener el valor de la variable  $y$  en un conjunto de puntos discretizados  $x$ . Para ello,

- 1) Construir un programa (principal) Fortran en un fichero que:
  - A) Dimensione dinámicamente el vector de puntos  $x$  para la ecuación diferencial de trabajo 1. Además, pedirá que se le dé por teclado el punto inicial, punto final, y la discretización  $h$ . Se obtendrá la dimensión del vector, se le asignará, y se construirá como se desee.
  - B) Use una subrutina que aplique las expresiones de los métodos a la ecuación diferencial de trabajo 1.
  - C) Genere un archivo *salida1.txt* de cuatro columnas: la primera con los puntos  $x$ , y la segunda, tercera y cuarta con los valores de la variable  $y$  obtenidos con Euler explícito, Euler centrado y Heun, respectivamente.
  - D) Escriba en un fichero *pinta1.gnpl* las órdenes de Gnuplot que permitan representar, a partir del archivo *salida1.txt*, una gráfica con 4 curvas (correspondientes a los tres métodos y a la solución analítica si la hubiera) en el que se represente la variación que experimenta la variable  $y$  para cada punto  $x$ , y que dicha representación quede guardada en un fichero *figura1.png*.
  - E) Llame a Gnuplot para ejecutar las órdenes almacenadas en el fichero *pinta1.gnpl*.
  - F) Repita los pasos A, B, C, D y E para la ecuación diferencial de trabajo 2, usando la misma subrutina. Se generarán el archivo *salida2.txt* y los ficheros *pinta2.gnpl* y *figura2.gnpl*.

- 2) Construir un fichero (método) Fortran que codifique mediante una subrutina las ecuaciones de los métodos de Euler explícito, Euler centrado y Heun, usando como argumento de entrada de forma supuesta un vector con los puntos  $x$ . Como argumentos de salida la subrutina tendrá tres vectores en los que se almacenarán los valores de la variable  $y$  para cada punto  $x$  obtenido con cada método.
- 3) Construir un fichero (trabajo) Fortran que codifique mediante funciones escalares las expresiones analíticas de la función  $f(x,y)$  de cada ecuación diferencial de trabajo.

*Nota: Usar las mismas ecuaciones diferenciales de trabajo e idénticos valores iniciales que en el ejercicio 1.*

*Para la ecuación diferencial de trabajo 1, el vector de puntos  $x$  será (0, 0.5, 1, 1.5,...,20).*

*Para la ecuación diferencial de trabajo 2, el vector de puntos  $x$  será (0,200,400,...,10000).*