Árboles Binarios

Agenda

- Definición
- Descripción y terminología
- Representaciones
- Recorridos
- Aplicación: Árboles de expresión

Árbol Binario: Definición

- *Un árbol binario es una colección de nodos, tal que:*
  - *puede estar vacía*
  - *puede estar formada por un nodo distinguido R, llamado **raíz** y dos sub-árboles T_1 y T_2, donde la raíz de cada subárbol T_i está conectado a R por medio de una arista*

Descripción y terminología

- Cada nodo puede tener a lo sumo dos nodos hijos.
- Cuando un nodo no tiene ningún hijo se denomina ***hoja***.
- Los nodos que tienen el mismo nodo padre se denominan ***hermanos***.

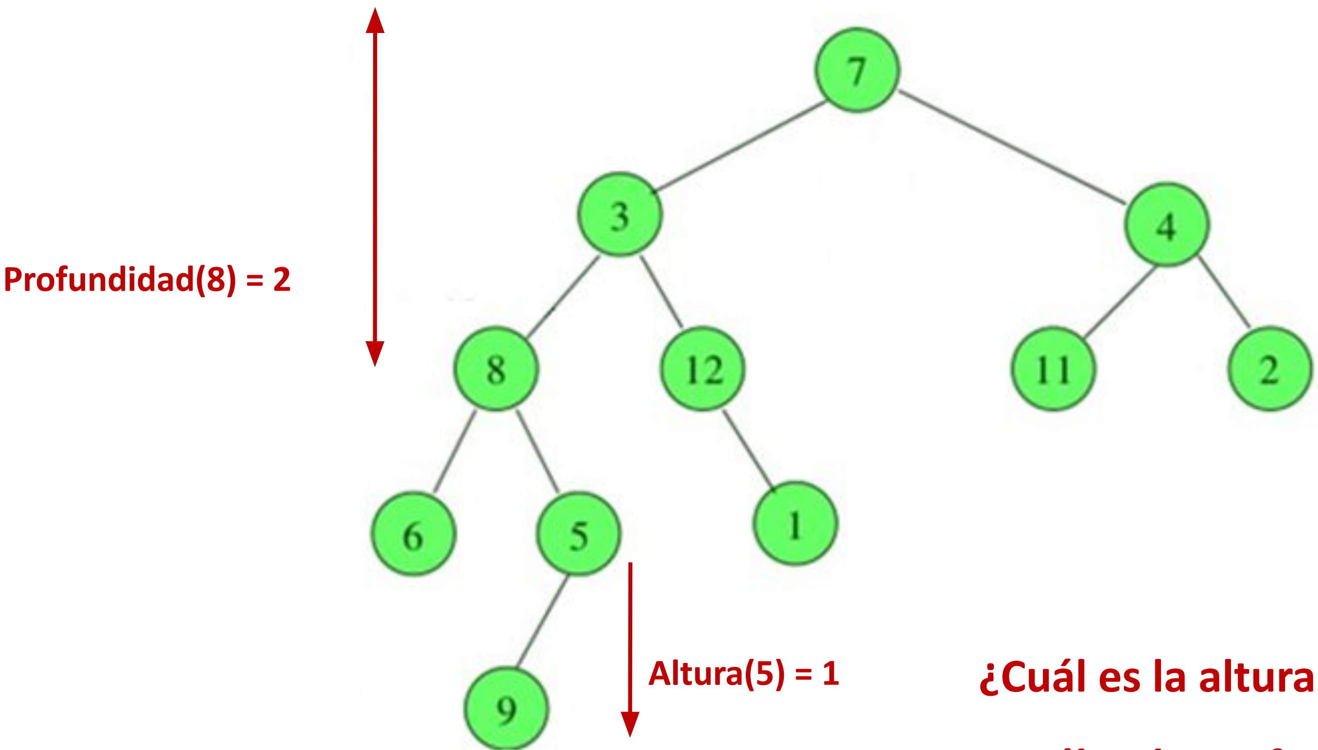
Descripción y terminología

- Conceptos a usar:
  - ***Camino***: desde n_1 hasta n_k, es una secuencia de nodos n_1, n_2, ….,n_k tal que n_i es el padre de n_{i+1}, para $1 \leq i < k$.
    - La longitud del camino es el número de aristas, es decir k-1.
    - Existe un camino de longitud cero desde cada nodo a sí mismo.
    - Existe un único camino desde la raíz a cada nodo.
  - ***Profundidad***: de n_i es la longitud del único camino desde la raíz hasta n_i.
    - La raíz tiene profundidad cero.

Descripción y terminología

- ***Grado*** de n_i es el número de hijos del nodo n_i .
- ***Altura*** de n_i es la longitud del camino más largo desde n_i hasta una hoja.
  - Las hojas tienen altura cero.
  - La altura de un árbol es la altura del nodo raíz.
- ***Ancestro/Descendiente***: si existe un camino desde n_1 a n_2, se dice que n_1 es ancestro de n_2 y n_2 es descendiente de n_1.

Descripción y terminología

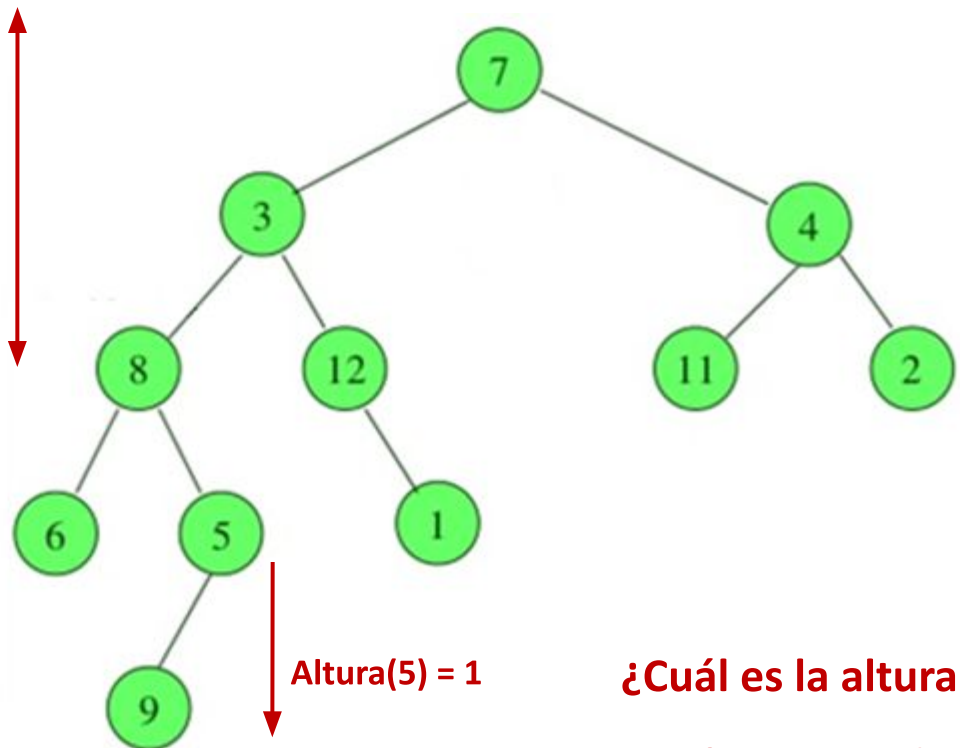


¿Cuál es la altura del nodo 8?

¿Cuál es la profundidad del nodo 12?

¿Cuáles son los ancestros del nodo 11?

Descripción y terminología



¿Cuál es la altura del nodo 8? 2

¿Cuál es la profundidad del nodo 12? 2

¿Cuáles son los ancestros del nodo 11? 7 y 4

Descripción y terminología

- ***Árbol binario lleno***: Dado un árbol binario T de altura ***h***, diremos que T es *lleno* si cada nodo interno tiene grado 2 y todas las hojas están en el mismo nivel (h).

  Es decir, recursivamente, T es *lleno* si :
  1.- T es un nodo simple (árbol binario lleno de altura 0), o
  2.- T es de altura h y sus sub-árboles son llenos de altura h-1.

Descripción y terminología

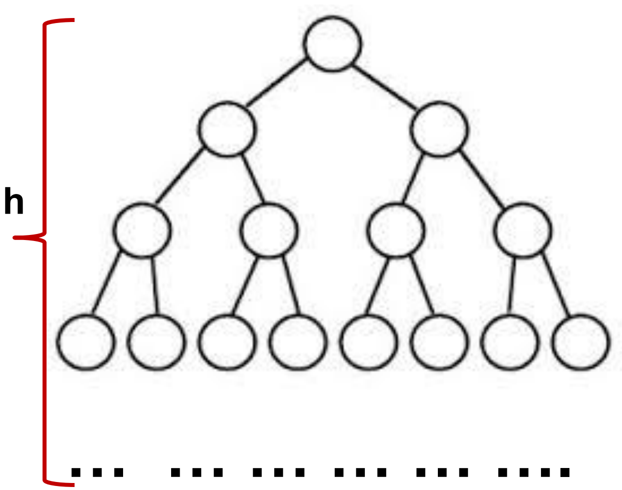
- ***Cantidad de nodos en un árbol binario lleno***:

  Sea T un árbol binario lleno de altura ***h***, la cantidad de nodos N es $(2^{h+1} - 1)$

Descripción y terminología

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario lleno***:

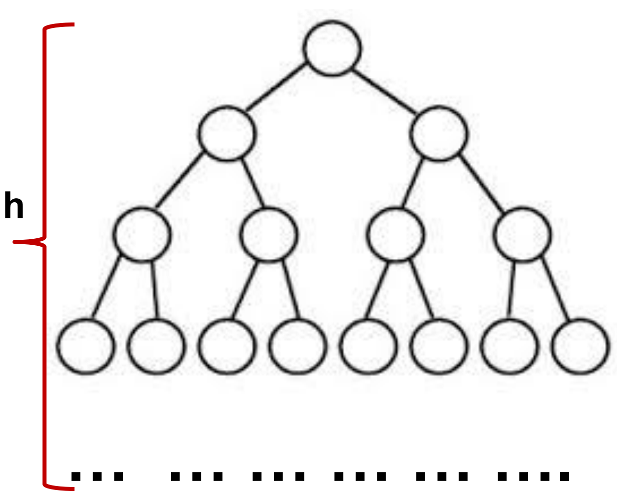
  Sea T un árbol binario lleno de altura ***h***, la cantidad de nodos N es $(2^{h+1} - 1)$



Descripción y terminología

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario lleno***:

  Sea T un árbol binario lleno de altura ***h***, la cantidad de nodos N es $(2^{h+1} - 1)$



Nivel 0 → 2^0 nodos

Nivel 1 → 2^1 nodos

Nivel 2 → 2^2 nodos

Nivel 3 → 2^3 nodos

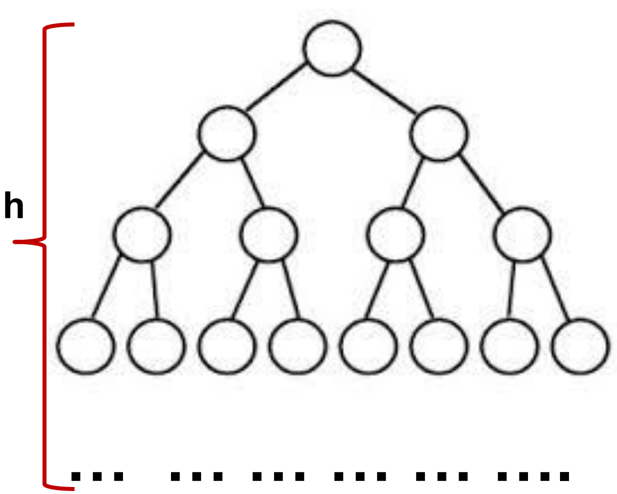
……

Nivel h → 2^h nodos

Descripción y terminología

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario lleno***:

  Sea T un árbol binario lleno de altura ***h***, la cantidad de nodos N es $(2^{h+1} - 1)$



Nivel 0 → 2^0 nodos

Nivel 1 → 2^1 nodos

Nivel 2 → 2^2 nodos

Nivel 3 → 2^3 nodos

......

Nivel h → 2^h nodos

$$\mathbf{N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h}$$

La suma de los términos de una serie geométrica de razón 2 es:

$$\mathbf{(2^{h+1} - 1)}$$

Descripción y terminología

- ***Árbol binario completo***: Dado un árbol binario T de altura h, diremos que T es completo si es lleno de altura h-1 y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario completo***:

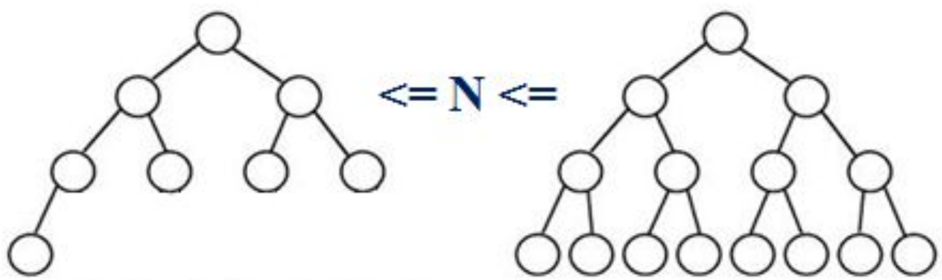
  Sea T un árbol binario completo de altura ***h***, la cantidad de nodos N varía entre (2^{h}) y $(2^{h+1} - 1)$

Descripción y terminología

- ***Árbol binario completo***: Dado un árbol binario T de altura h, diremos que T es completo si es lleno de altura h-1 y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario completo***:

  Sea T un árbol binario completo de altura ***h***, la cantidad de nodos N varía entre (2^{h}) y $(2^{h+1} - 1)$

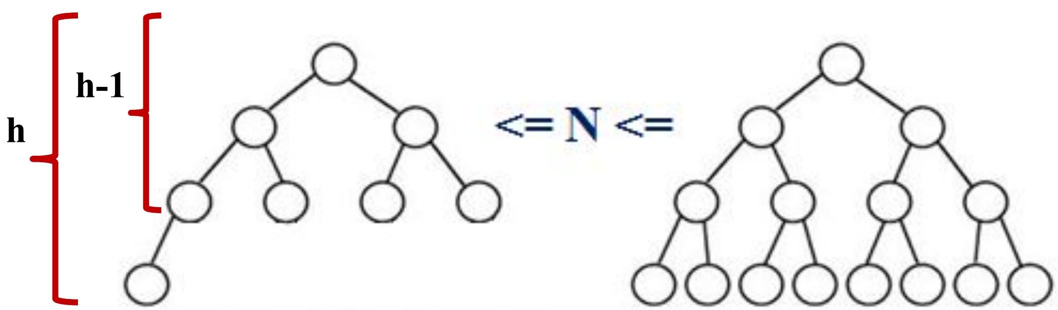


Descripción y terminología

- ***Árbol binario completo***: Dado un árbol binario T de altura h, diremos que T es completo si es lleno de altura h-1 y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario completo***:

  Sea T un árbol binario completo de altura ***h***, la cantidad de nodos N varía entre (2^h) y ($2^{h+1} - 1$)

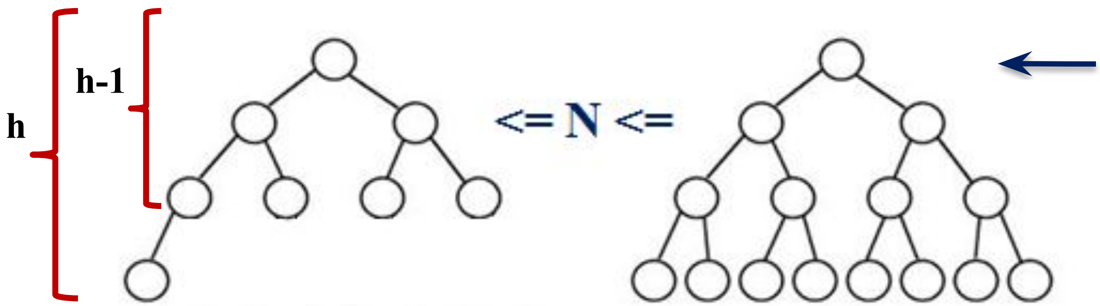


Descripción y terminología

- ***Árbol binario completo***: Dado un árbol binario T de altura h, diremos que T es completo si es lleno de altura h-1 y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario completo***:

  Sea T un árbol binario completo de altura ***h***, la cantidad de nodos N varía entre (2^{h}) y $(2^{h+1} - 1)$



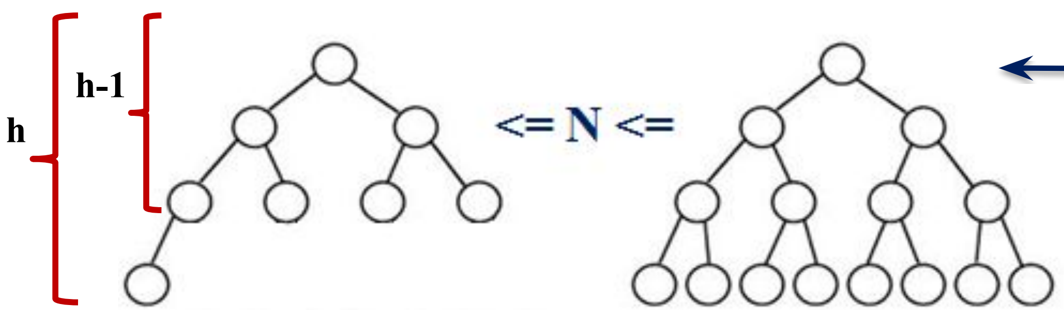
- Si el árbol es lleno
  N = $(2^{h+1}-1)$

Descripción y terminología

- ***Árbol binario completo***: Dado un árbol binario T de altura h, diremos que T es completo si es lleno de altura h-1 y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario completo***:

  Sea T un árbol binario completo de altura ***h***, la cantidad de nodos N varía entre (2^{h}) y $(2^{h+1} - 1)$



- Si el árbol es lleno
  N $= (2^{h+1}-1)$

- Si no, el árbol es lleno en la altura *h-1* y tiene por lo menos un nodo en el nivel *h:*

N $= (2^{h-1+1}-1)+1=(2^{h}-1 + 1)$

Juguemos a adivinar

- *Una persona piensa un animal y otra persona hace preguntas para adivinarlo*

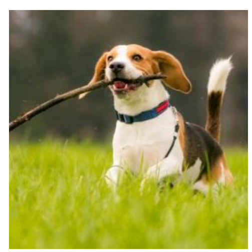
Limitamos las opciones a:

- *Dragón*
- *Dinosaurio*
- *Cóndor*
- *Caballo*
- *Perro*

Algunas preguntas

- *¿Es real?*
- *¿Está extinto?*
- *¿Vuela?*
- *¿Puede llevar personas?*
- *¿Es cuadrúpedo?*




Sintetizamos las características

	¿Real?	¿Extinto?	¿Vuela?	¿Lleva personas?	¿Cuadrúpedo?
Dragón			X	X	X
Dinosaurio	X	X			
Cóndor	X		X		
Perro	X				X
Caballo	X			X	X

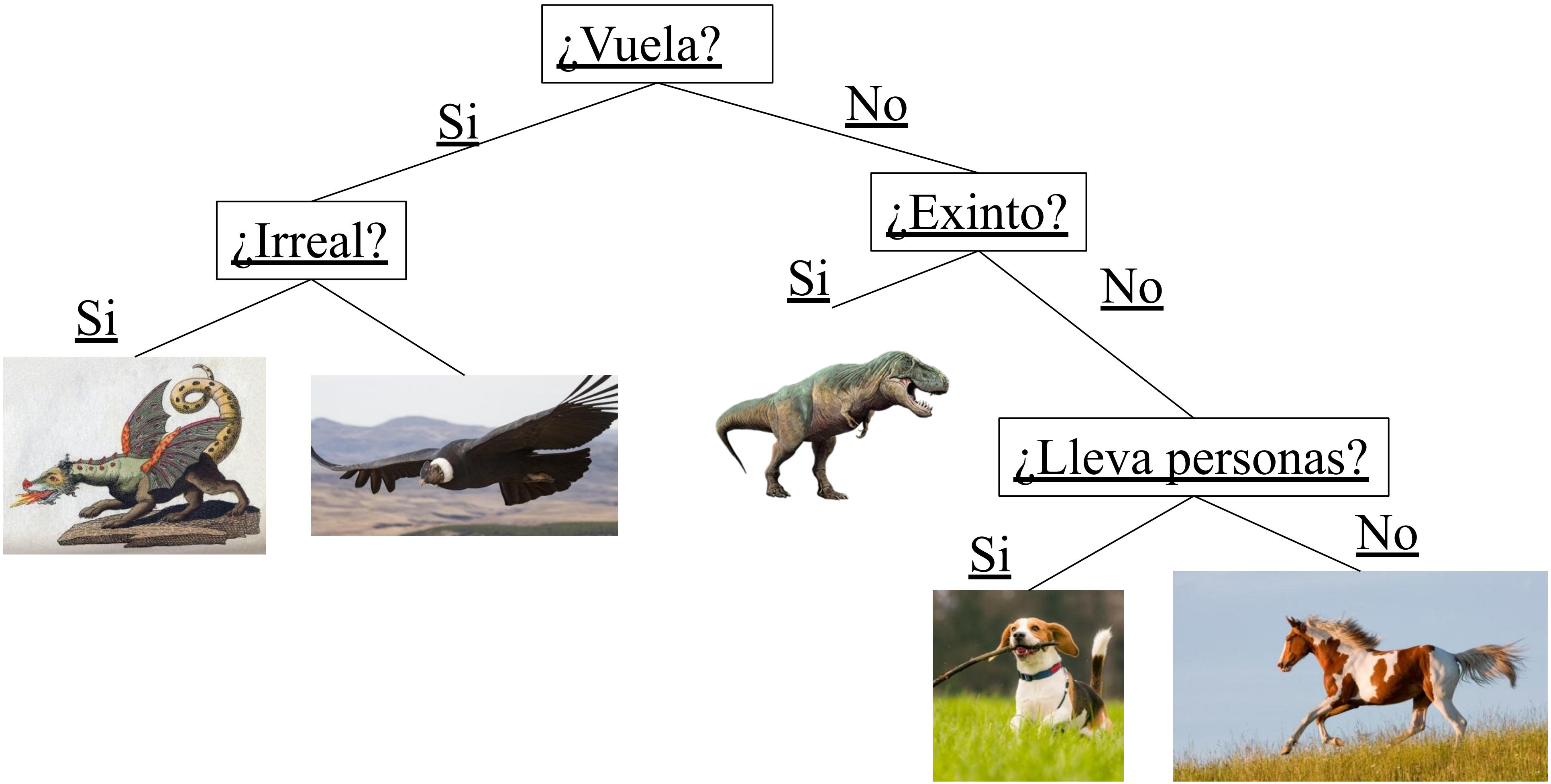
¿Cómo podemos organizar las preguntas?

De forma tal de ir descartando animales, para identificar un sólo animal.

Se genera: **Árbol de decisión**

- *Herramienta de soporte a la toma de decisión que usa un modelo similar a un árbol donde se registran decisiones y sus posibles consecuencias*

Árbol de decisión



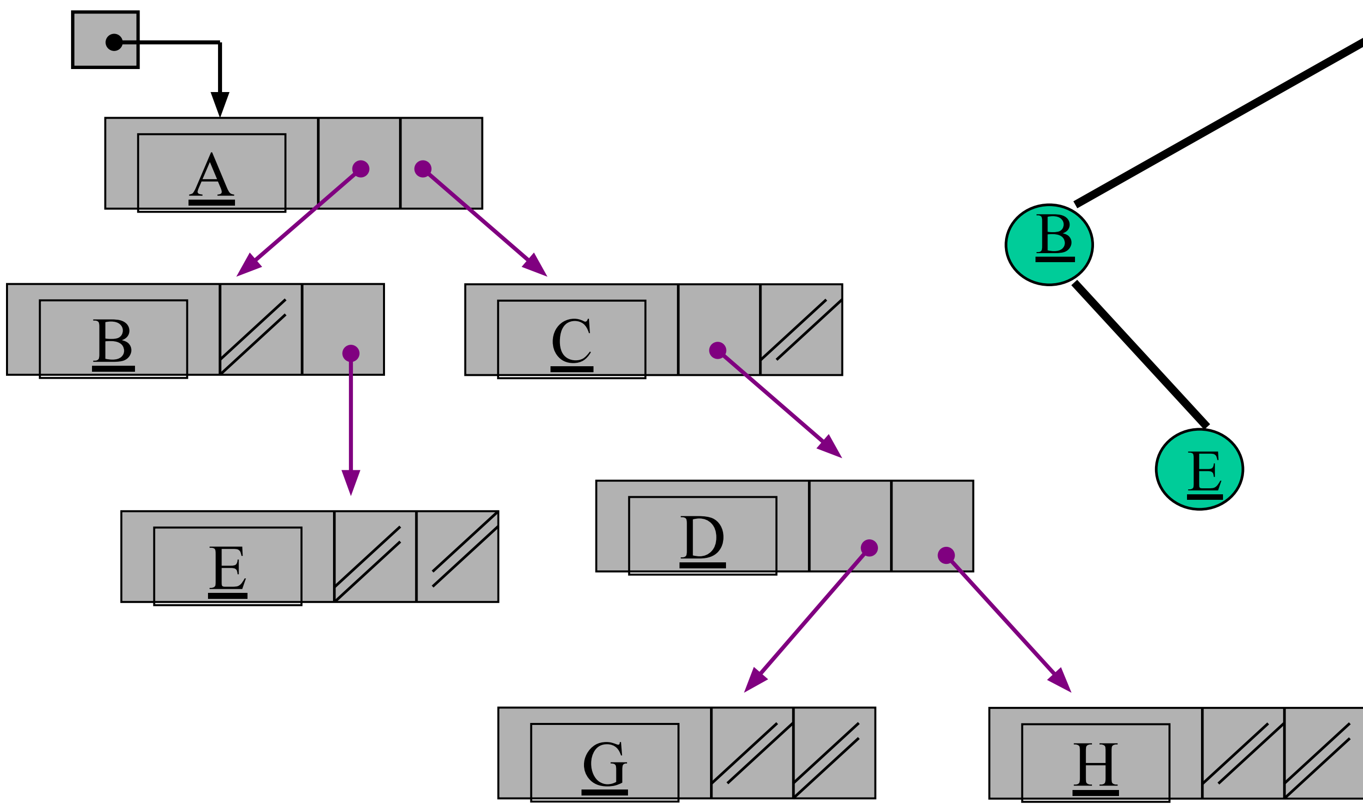
Árbol de decisión: usos

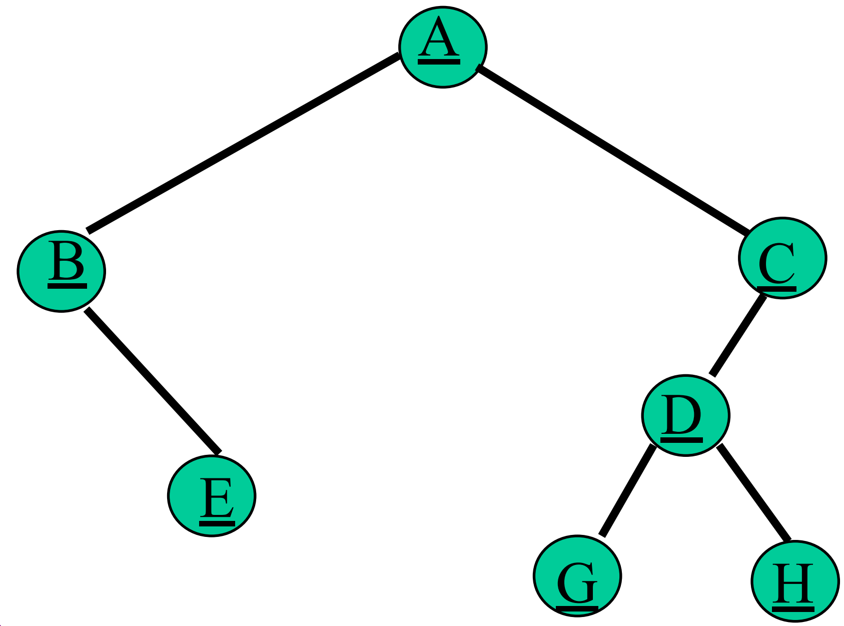
- *Son utilizados en investigación operativa para identificar la mejor estrategia para lograr un objetivo*
  - *Análisis financiero, considerando recursos y probabilidades*
  - *Ocurrencia de eventos, considerando probabilidades y resultados*
- *También son populares en Machine learning*

Representación
Hijo Izquierdo - Hijo Derecho

- Cada nodo tiene:
  - Información propia del nodo
  - Referencia a su hijo izquierdo
  - Referencia a su hijo derecho

Representación
Hijo Izquierdo - Hijo Derecho





Recorridos

- **Preorden**

  Se procesa primero la raíz y luego sus hijos, izquierdo y derecho.

- **Inorden**

  Se procesa el hijo izquierdo, luego la raíz y último el hijo derecho

- **Postorden**

  Se procesan primero los hijos, izquierdo y derecho, y luego la raíz

- **Por niveles**

  Se procesan los nodos teniendo en cuenta sus niveles, primero la raíz, luego los hijos, los hijos de éstos, etc.

Recorrido: Preorden

```
public void preorden() {
        imprimir (dato);
        si (tiene hijo_izquierdo)
                hijoIzquierdo.preorden();
        si (tiene hijo_derecho)
                hijoDerecho.preorden();
}
```

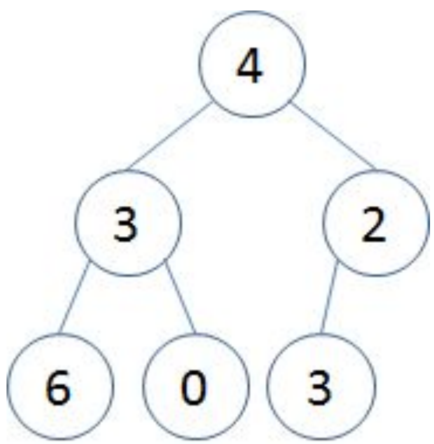
Recorrido: Por niveles

```
public void  porNiveles() {
        encolar(raíz);
        mientras (cola no se vacíe) {
            desencolar(v);
            imprimir (dato de v);
            si (tiene hijo_izquierdo)
                  encolar(hijo_izquierdo);
             si (tiene hijo_derecho)
                  encolar(hijo_derecho);
      }
}
```

Ejercicio: **Valencias**

SPOJ.com - Problem UCV2013J

El Sr. White ha encontrado una manera de maximizar la pureza de los cristales basados en ciertos compuestos químicos. Ha observado que cada compuesto está hecho de **moléculas** que están unidas entre sí siguiendo la estructura de un **árbol binario completo** donde cada nivel, excepto posiblemente el último, está completamente lleno, y todos los nodos están lo más a la izquierda posible. Cada nodo del árbol almacena la **valencia** de una molécula y se representa como un **número entero**. El Sr. White utiliza un microscopio electrónico que descarga la estructura de la molécula como un stream de números enteros y le gustaría tener su ayuda para obtener automáticamente la valencia total de sólo las **hojas del árbol dado**. Por ejemplo, la secuencia 4-3-2-6-0-3 representa el árbol que se muestra en la figura y la valencia total de las hojas es 9.



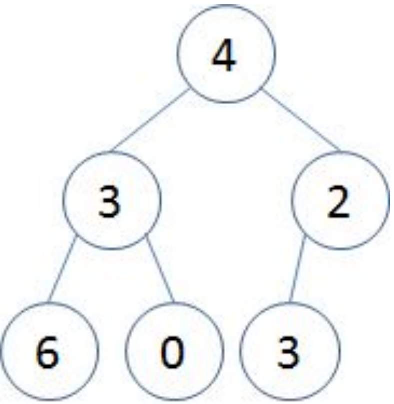
Ejercicio: **Valencias**

SPOJ.com - Problem UCV2013J

Input

La entrada contiene varios casos de prueba, cada uno correspondiente a un compuesto en particular. Cada caso de prueba consiste en una sola línea que comienza con un entero N (1 <= N <= 1000000), seguido de N números enteros Vi que representan las valencias de cada molécula separadas por espacios en blanco (0 < = Vi < = 100).

El final de la entrada se indica mediante un caso de prueba con N = 0.



Output

Para cada compuesto se produce una sola línea con la suma de las valencias de las hojas del árbol.

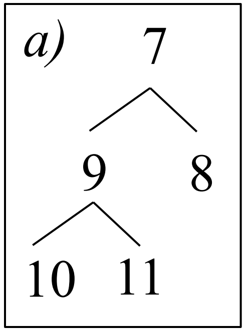
Ejemplo

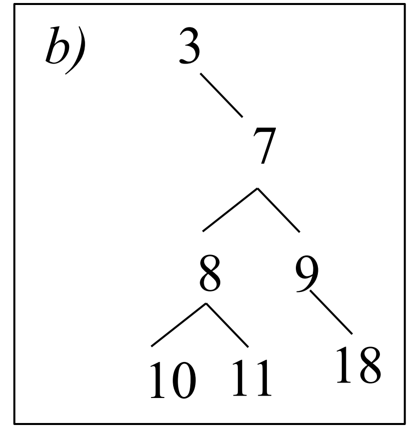
Input:
6 4 3 2 6 0 3
7 1 1 1 2 1 2 1
0

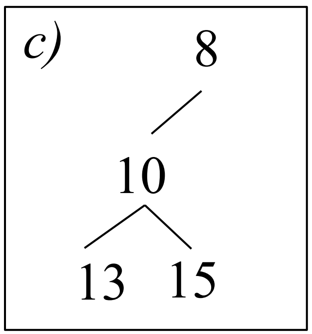
Output:
9
6

Ejercitación *Árbol binario: Recorridos*

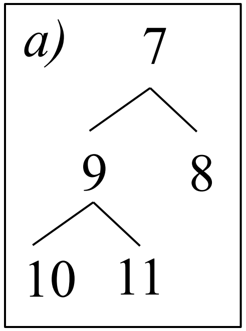
Ejercicio 1





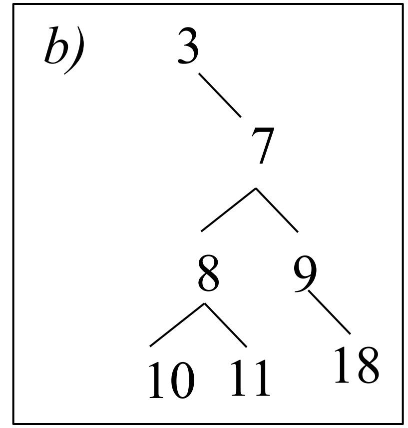


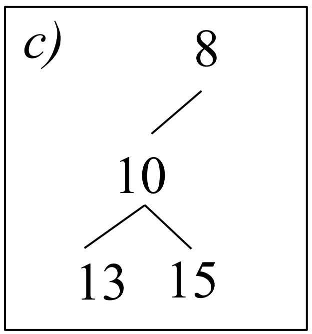
Ejercicio 1



a)

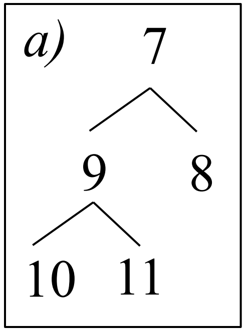
- ✔*inorden :* *10 9 11 7 8*
- ✔*postorden : 10 11 9 8 7*
- ✔*preorden:* *7 9 10 11 8*





Ejercitación *Árbol binario: Recorridos*

Ejercicio 1

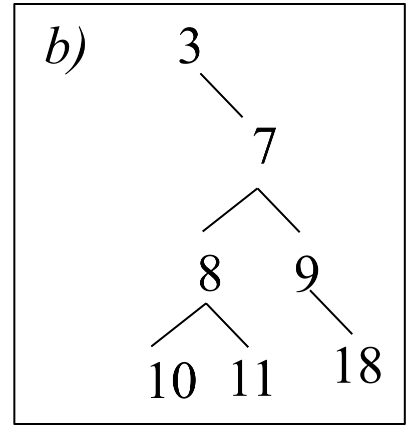


a)

✔*inorden :* *10 9 11 7 8*

✔*postorden :* *10 11 9 8 7*

✔*preorden:* *7 9 10 11 8*

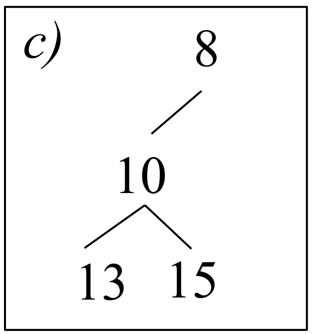


b)

✔*inorden :* *3 10 8 11 7 9 18*

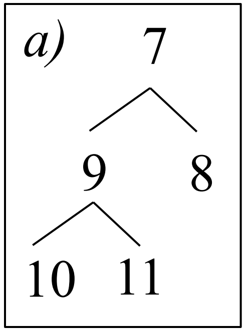
✔*postorden :* *10 11 8 18 9 7 3*

✔*preorden:* *3 7 8 10 11 9 18*



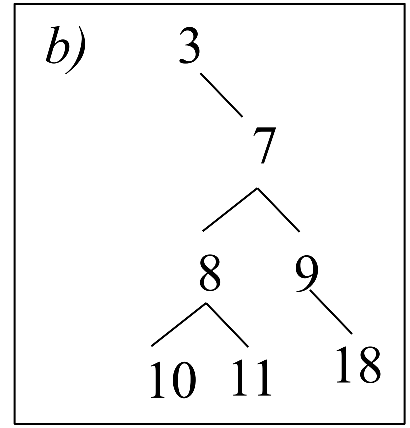
Ejercitación *Árbol binario: Recorridos*

Ejercicio 1



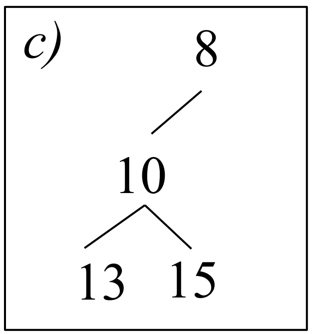
a)

- ✔*inorden :* 10 9 11 7 8
- ✔*postorden :* 10 11 9 8 7
- ✔*preorden:* 7 9 10 11 8



b)

- ✔*inorden :* 3 10 8 11 7 9 18
- ✔*postorden :* 10 11 8 18 9 7 3
- ✔*preorden:* 3 7 8 10 11 9 18

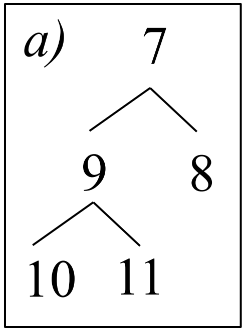


c)

- ✔*inorden :* 13 10 15 8
- ✔*postorden :* 13 15 10 8
- ✔*preorden:* 8 10 13 15

Ejercitación *Árbol binario: Recorridos*

Ejercicio 1

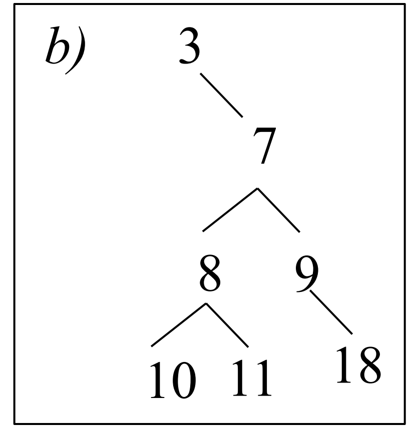


a)

✔*inorden :* *10 9 11 7 8*

✔*postorden :* *10 11 9 8 7*

✔*preorden:* *7 9 10 11 8*

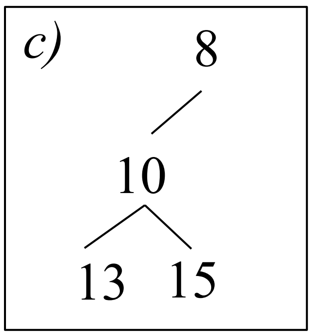


b)

✔*inorden :* *3 10 8 11 7 9 18*

✔*postorden :* *10 11 8 18 9 7 3*

✔*preorden:* *3 7 8 10 11 9 18*



c)

✔*inorden :* *13 10 15 8*

✔*postorden :* *13 15 10 8*

✔*preorden:* *8 10 13 15*

Ejercicio 2

Construya el árbol binario a partir del cual se obtuvieron los siguientes recorridos:
inorden: ***C B F E G A D I H*** *y* *postorden:* ***C F G E B I H D A***

Ejercitación

Árbol binario: Recorridos

Ejercicio 2.

Construya el árbol binario a partir del cual se obtuvieron los siguientes recorridos: inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

Resolución:

inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

¿Por dónde empezamos?

¿Qué información podemos obtener de los recorridos dados?

¿De qué estamos seguros?

Ejercitación

Árbol binario: Recorridos

Ejercicio 2.

Construya el árbol binario a partir del cual se obtuvieron los siguientes recorridos: inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

Resolución:

inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

Raíz

A

¿ Cómo seguimos ?

Ejercitación

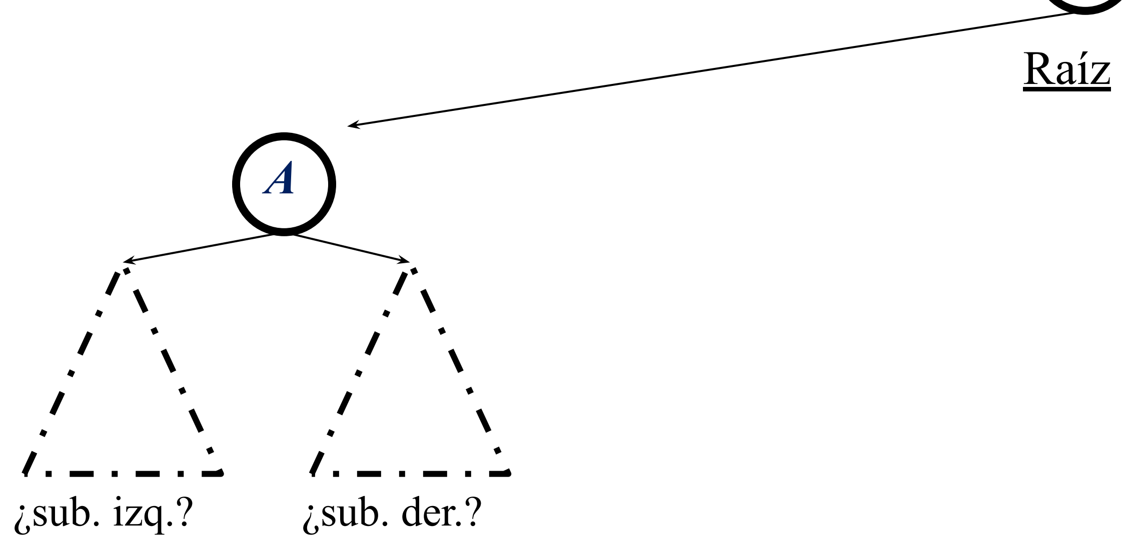
Árbol binario: Recorridos

Ejercicio 2.

Construya el árbol binario a partir del cual se obtuvieron los siguientes recorridos: inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

Resolución:

inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***



¿Cómo armamos los subárboles? ¿Qué información podemos obtener de los recorridos dados?

Ejercitación

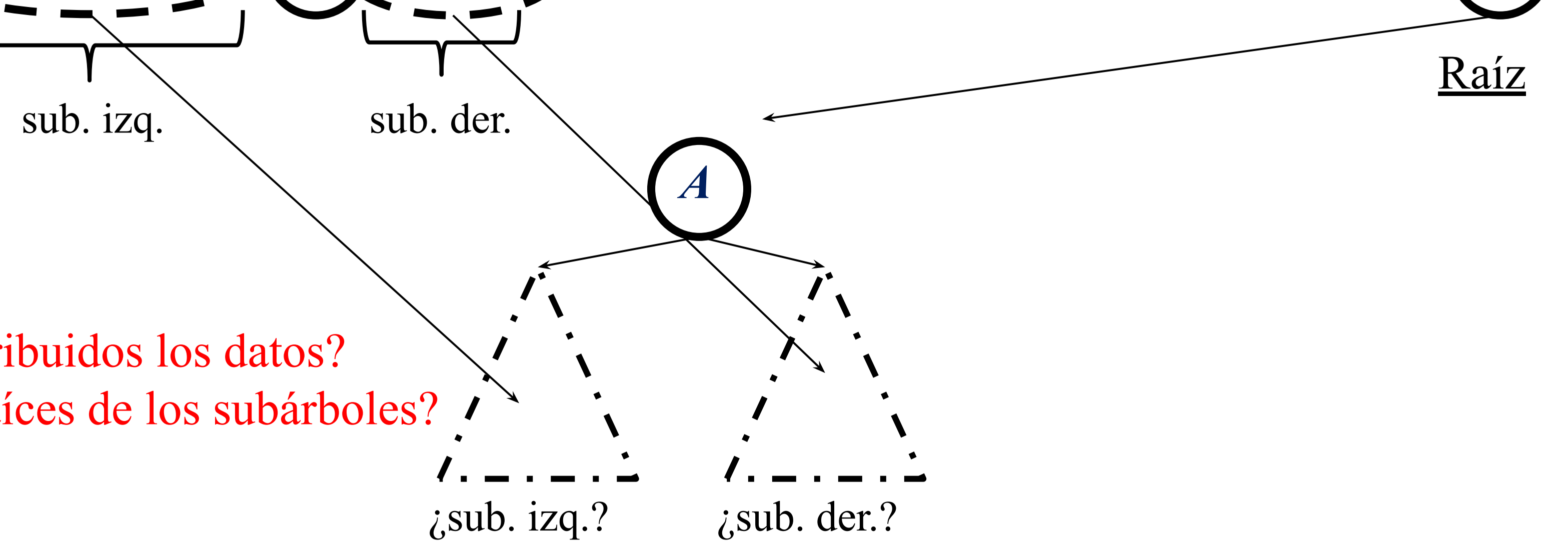
<u>Árbol binario: Recorridos</u>

Ejercicio 2.

Construya el árbol binario a partir del cual se obtuvieron los siguientes recorridos: inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

Resolución:

inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***



¿Cómo están distribuidos los datos?
¿Cuáles son las raíces de los subárboles?

Ejercitación

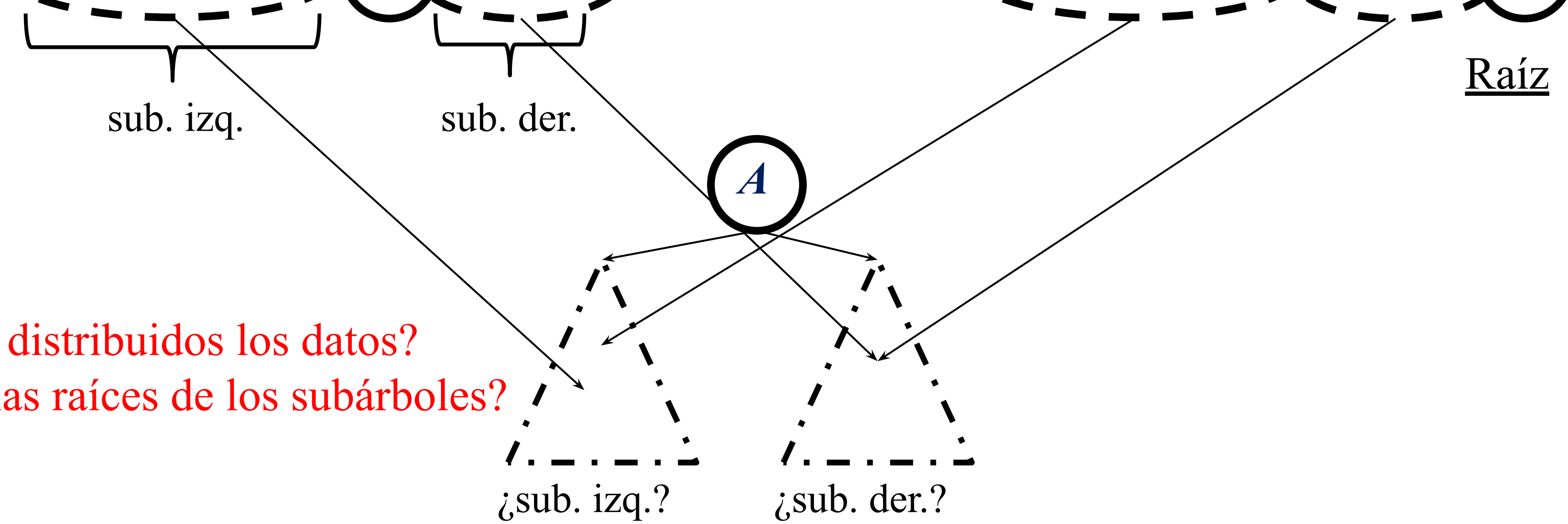
Árbol binario: Recorridos

Ejercicio 2.

Construya el árbol binario a partir del cual se obtuvieron los siguientes recorridos: inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

Resolución:

inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***



¿Cómo están distribuidos los datos?
¿Cuáles son las raíces de los subárboles?

Ejercitación

Árbol binario: Recorridos

Ejercicio 2.

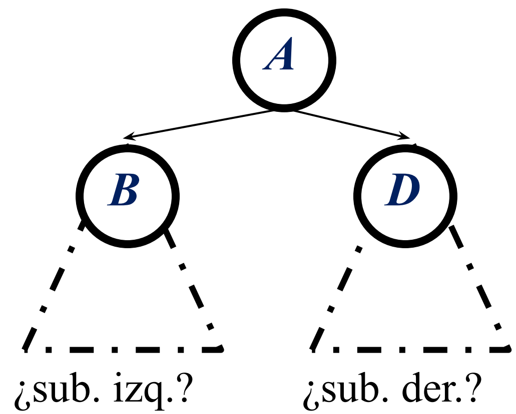
Construya el árbol binario a partir del cual se obtuvieron los siguientes recorridos: inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

Resolución:

inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

sub. izq.

sub. der.



Repetimos los pasos anteriores y …

Ejercitación

<u>Árbol binario: Recorridos</u>

Ejercicio 2.

Construya el árbol binario a partir del cual se obtuvieron los siguientes recorridos: inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***

Resolución:

inorden : ***C B F E G A D I H*** *y postorden :* ***C F G E B I H D A***