Aula: Matrizes e Operaçãoes

Prof. Nelson A. Silva

Gex102: Geometria Analítica e Álgebra Linear
UFLA

Objetivo:

Estudar as matrizes de números reais $\mathbb{R}$.

- Definição de matrizes
- Exemplos de matrizes
- Operações com matrizes
- Propriedades

O que é matriz?

São tabelas numéricas como mostradas abaixo

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 12 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 2019 \end{pmatrix}$

São tabelas numéricas como mostradas abaixo

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 12 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

f) $\begin{pmatrix} 2019 \end{pmatrix}$

Definição de matrizes

Uma matriz é um arranjo de números organizados em linhas e colunas. Dizemos que a matriz é do tamanho $m \times n$ (lê-se: "m por n") quando possui m linhas e n colunas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definição de matrizes

Uma matriz é um arranjo de números organizados em linhas e colunas. Dizemos que a matriz é do tamanho $m \times n$ (lê-se: "m por n") quando possui m linhas e n colunas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Este é um exemplo de uma matriz genérica $m \times n$. Os elementos da forma a_{ij} são chamados **elementos** ou **entradas** da matriz.

A i-ésima linha da matriz é

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

A j-ésima coluna da matriz é

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Exemplos 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 12 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

f) $\begin{pmatrix} 2019 \end{pmatrix}$

Exemplos 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 12 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

f) $\begin{pmatrix} 2019 \end{pmatrix}$

- Quais os tamanhos das matrizes?

Exemplos 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 12 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

f) (2019)

- Quais os tamanhos das matrizes?

a) 3×2 b) 3×4 c) 2×3 d) 2×1 e) 2×2 f) 1×1

Exemplos 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 12 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$ f) $\begin{pmatrix} 2019 \end{pmatrix}$

- Quais os tamanhos das matrizes?

a) 3×2 b) 3×4 c) 2×3 d) 2×1 e) 2×2 f) 1×1

- Qual o elemento que está na linha 3 e coluna 2 da matriz do item b)?

Exemplos 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 12 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

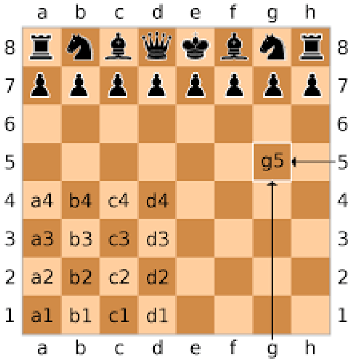
f) $\begin{pmatrix} 2019 \end{pmatrix}$

• Quais os tamanhos das matrizes?

a) 3×2 b) 3×4 c) 2×3 d) 2×1 e) 2×2 f) 1×1

• Qual o elemento que está na linha 3 e coluna 2 da matriz do item b)? É o número 3.

Como denotar uma matriz e indicar suas entradas



Notação e posicionamento de elementos

Usamos letras maiúsculas A, B, C ... para nomear as matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Notação e posicionamento de elementos

Usamos letras maiúsculas A, B, C . . . para nomear as matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Usamos letras minúsculas $a_{21}, b_{33}, c_{23}, \ldots$ do mesmo nome da matriz, acompanhada de subíndices para denotar um elemento ou entrada da matriz de uma posição específica.

Notação e posicionamento de elementos

Usamos letras maiúsculas A, B, C . . . para nomear as matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Usamos letras minúsculas $a_{21}, b_{33}, c_{23}, \ldots$ do mesmo nome da matriz, acompanhada de subíndices para denotar um elemento ou entrada da matriz de uma posição específica.

$$A = \begin{cases} a_{11} = 1 & a_{12} = 3 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = \pi \\ a_{31} - 2 & a_{23} = 200 \end{cases} \quad \text{e} \quad B = \begin{cases} b_{11} = 12 \\ b_{21} = 8 \end{cases}$$

Notação e posicionamento de elementos

Usamos letras maiúsculas A, B, C . . . para nomear as matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \pi \\ -2 & 200 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Usamos letras minúsculas $a_{21}, b_{33}, c_{23}, \ldots$ do mesmo nome da matriz, acompanhada de subíndices para denotar um elemento ou entrada da matriz de uma posição específica.

$$A = \begin{cases} a_{11} = 1 & a_{12} = 3 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = \pi \\ a_{31} - 2 & a_{23} = 200 \end{cases} \quad \text{e} \quad B = \begin{cases} b_{11} = 12 \\ b_{21} = 8 \end{cases}$$

Entrada genérica a_{ij}: o i demarca a posição da linha e o j da coluna

Criando matrizes

Podemos descrever uma matriz através das suas entradas e tamanho.

Exercício:

a) Escreva a matriz C do tamanho 3×2 cuja entradas satisfazem $c_{ij} = \begin{cases} i^2 + j, & \text{se } i \geq j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

b) Dê exemplo de uma matriz A, 2×2, com entradas satisfazendo $a_{ij} = a_{ji}$.

Igualdade de matrizes

IMPORTANTE: Ao comparar duas matrizes devemos olhar três coisas: número de linhas, número de colunas e entradas.

Definição: Duas matrizes são iguais quando possuem o mesmo tamanho e mesmas entradas.

Igualdade de matrizes

IMPORTANTE: Ao comparar duas matrizes devemos olhar três coisas: número de linhas, número de colunas e entradas.

Definição: Duas matrizes são iguais quando possuem o mesmo tamanho e mesmas entradas.

Exercício:

a) As matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 100-99 & 10/5 \\ 3\times 1 & 4+0 \end{pmatrix}$ são iguais?

b) Quais os valores das incógnitas para que as matrizes abaixo sejam iguais?

$$\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ c+d & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & 2c \end{bmatrix}.$$

Seja A uma matriz do tamanho $m \times n$.

Tipos de matrizes

Seja A uma matriz do tamanho $m \times n$.

Matriz nula. Quando $a_{ij} = 0$ para todos i, j, a matriz A é a matriz nula $m \times n$. Denotaremos simplesmente por $\overline{0}$ não importa o tamanho.

$$\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times4}, \quad \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times2}.$$

Seja A uma matriz do tamanho $m \times n$.

Matriz nula. Quando $a_{ij} = 0$ para todos i, j, a matriz A é a matriz nula $m \times n$. Denotaremos simplesmente por $\overline{0}$ não importa o tamanho.

$$\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4}, \quad \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

Matriz linha. Quando $m = 1$ temos $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & \cdots & 7 \end{pmatrix}$.

Tipos de matrizes

Seja A uma matriz do tamanho $m \times n$.

Matriz nula. Quando $a_{ij} = 0$ para todos i, j, a matriz A é a matriz nula $m \times n$. Denotaremos simplesmente por $\overline{0}$ não importa o tamanho.

$$\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4}, \quad \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

Matriz linha. Quando $m = 1$ temos $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & \cdots & 7 \end{pmatrix}$.

Matriz coluna. Quando $n = 1$, temos $A = \begin{pmatrix} 8 \\ \sqrt{2} \\ \vdots \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Matriz quadrada. Quando $m = n$ temos uma matriz quadrada de ordem m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

Tipos de matrizes

Matriz quadrada. Quando $m = n$ temos uma matriz quadrada de ordem m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

Matriz identidade. É uma matriz quadrada cuja entradas satifazem $a_{ij} = \begin{cases} 1 & se i = j, \\ 0 & se i \neq j. \end{cases}$. Então a A é matriz identidade I_n.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}; \; I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Matriz diagonal. Quando todos os elementos exceto os da diagonal são nulos. Isto é, $a_{ij} = 0$, quando $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

Matrizes quadradas especiais

Matriz diagonal. Quando todos os elementos exceto os da diagonal são nulos. Isto é, $a_{ij} = 0$, quando $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

A **diagonal principal** de uma matriz é a formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Matriz triangular superior. Quando $d_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Matriz triangular superior. Quando $d_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Matriz triangular inferior. Quando $d_{ij} = 0$ se $i < j$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ \pi & 5 & 0 \end{pmatrix};$$

Operações com matrizes

Operação Transposição

$$A^t$$

Matriz transposta. Seja A uma matriz da ordem $m \times n$. A matriz trasposta de A é a matriz $B = (b_{ij})$ dada por:

$$b_{ij} = a_{ji}. \quad \text{(troca-se i por j)}$$

Denotamos B por A^t.

Matriz transposta. Seja A uma matriz da ordem $m \times n$. A matriz trasposta de A é a matriz $B = (b_{ij})$ dada por:

$$b_{ij} = a_{ji}. \quad \text{(troca-se i por j)}$$

Denotamos B por A^t.

Exemplos 2.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$.

b)

$$B_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^t_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

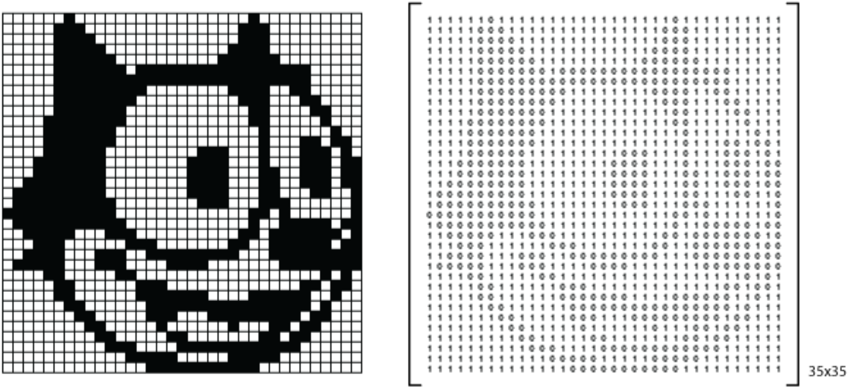
$$B_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^t_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{bmatrix}$$

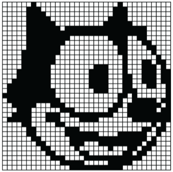
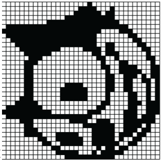
Fonte das figuras:
https://www.todamateria.com.br/matriz-transposta/

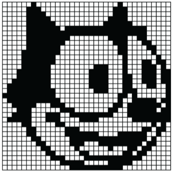
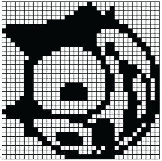
Imagem digital (imagem binária)



Fonte: http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_en.html

Operações com matrizes - Transposta

$A =$  $A^t =$ 

$A =$  $A^t =$ 

Exercício.

a) Quando $A = A^t$, dizemos que A é **simétrica**. Determine x, y, z para que A seja simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4z \\ x & 2 & -y \\ 3 & y & 3 \end{pmatrix}$$

b) Se B é uma matriz triangular superior então B^t é triangular inferior?

Operação Adição

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}$$

Soma de matrizes: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de **mesmo tamanho** $m \times n$, definimos

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Isto é, somamos os elementos de mesma posição. A matriz resultante tem também tamanho $m \times n$.

Soma de matrizes: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de **mesmo tamanho** $m \times n$, definimos

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Isto é, somamos os elementos de mesma posição. A matriz resultante tem também tamanho $m \times n$.

IMPORTANTE: As matrizes precisam ser da mesma ordem! Não dá para somar duas matrizes com números de linhas e colunas diferentes!

Exemplos 3.

a) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+3 \\ 2+(-2) & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exemplos 3.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+3 \\ 2+(-2) & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemplos 3.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+3 \\ 2+(-2) & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **Não faz sentido!**

Exemplos 3.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+3 \\ 2+(-2) & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **Não faz sentido!**

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

Exemplos 3.

a) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+3 \\ 2+(-2) & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **Não faz sentido!**

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemplos 3.

a) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+3 \\ 2+(-2) & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **Não faz sentido!**

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Considere todas as matrizes da mesma ordem.

s1) **Comutatividade:** $A + B = B + A$;

Propriedades da Adição

Considere todas as matrizes da mesma ordem.

s1) **Comutatividade:** $A + B = B + A$;

s2) **Associatividade:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;

Considere todas as matrizes da mesma ordem.

s1) **Comutatividade:** $A + B = B + A$;

s2) **Associatividade:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;

s3) **Elemento Neutro:** $A + \overline{O} = A$;

Considere todas as matrizes da mesma ordem.

s1) **Comutatividade:** $A + B = B + A$;

s2) **Associatividade:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;

s3) **Elemento Neutro:** $A + \overline{O} = A$;

s4) **Elemento Oposto:** Para qualquer matriz A, existe $-A$ tal que $A + (-A) = \overline{0}$.

Considere todas as matrizes da mesma ordem.

s1) **Comutatividade:** $A + B = B + A$;

s2) **Associatividade:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;

s3) **Elemento Neutro:** $A + \overline{O} = A$;

s4) **Elemento Oposto:** Para qualquer matriz A, existe $-A$ tal que $A + (-A) = \overline{0}$.

Exercício. Qual a matriz X para que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & \pi \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Considere todas as matrizes da mesma ordem.

s1) **Comutatividade:** $A + B = B + A$;

s2) **Associatividade:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;

s3) **Elemento Neutro:** $A + \overline{O} = A$;

s4) **Elemento Oposto:** Para qualquer matriz A, existe $-A$ tal que $A + (-A) = \overline{0}$.

Exercício. Qual a matriz X para que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & \pi \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Resposta:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -\pi \end{pmatrix}$$

Operação Multiplicação por escalar

$$\lambda A$$

Multiplicação de matrizes por um escalar:
Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número λ, definimos

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Multiplicação de matrizes por um escalar:
Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e um número λ, definimos

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Isto é, multiplicamos cada elemento de A por λ. A matriz resultante também tem ordem $m \times n$.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \cdots & \lambda a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicação por escalar.

Exemplos 4.

a) Seja $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 12 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemplos 4.

a) Seja $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 12 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Então

$$3B = \begin{pmatrix} 3 \times 0 & 3 \times (-1) \\ 3 \times (1/2) & 3 \times 12 \\ 3 \times 5 & 3 \times 1 \end{pmatrix} =$$

Exemplos 4.

a) Seja $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 12 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Então

$$3B = \begin{pmatrix} 3 \times 0 & 3 \times (-1) \\ 3 \times (1/2) & 3 \times 12 \\ 3 \times 5 & 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3/2 & 36 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemplos 4.

a) Seja $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 12 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Então

$$3B = \begin{pmatrix} 3 \times 0 & 3 \times (-1) \\ 3 \times (1/2) & 3 \times 12 \\ 3 \times 5 & 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3/2 & 36 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

b) A **matriz oposta** de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ é a matriz $(-1)A$

Exemplos 4.

a) Seja $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 12 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Então

$$3B = \begin{pmatrix} 3 \times 0 & 3 \times (-1) \\ 3 \times (1/2) & 3 \times 12 \\ 3 \times 5 & 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3/2 & 36 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

b) A **matriz oposta** de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ é a matriz $(-1)A$, ou seja, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

Temos $A + (-1)A = \overline{0}$.

Exemplos 4.

a) Seja $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 12 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Então

$$3B = \begin{pmatrix} 3\times 0 & 3\times(-1) \\ 3\times(1/2) & 3\times 12 \\ 3\times 5 & 3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3/2 & 36 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

b) A **matriz oposta** de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ é a matriz $(-1)A$, ou seja, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

Temos $A + (-1)A = \overline{0}$.

Subtração de matrizes: $A - B = A + (-1)B$.

Operação Multiplicação

$$A \cdot B$$

Multiplicação de matrizes: Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e uma matriz $B = (b_{lk})$ de ordem $n \times s$, definimos AB como a matriz $(c_{ik})_{m \times s}$,

$$c_{ik} = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}).$$

Multiplicação de matrizes: Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e uma matriz $B = (b_{lk})$ de ordem $n \times s$, definimos AB como a matriz $(c_{ik})_{m \times s}$,

$$c_{ik} = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}).$$

OBS: c_{ik} é o elemento formado pela multiplicação da linha i de A com a coluna k da matriz B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \color{red}{b_{1k}} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & \dots & \color{red}{b_{2k}} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \color{red}{\vdots} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \color{red}{\vdots} & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \color{red}{b_{nk}} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

Exemplos 5.

a) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(3\times 3)}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{(3\times 2)}$.

Exemplos 5.

a) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(3\times 3)}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{(3\times 2)}$.

Então $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 5\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 5\cdot 5 \\ 0\cdot 2 + 7\cdot 3 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 7\cdot(-1) + 1\cdot 5 \\ (-2)\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot 0 & (-2)\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 24 \\ 21 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}_{(3\times 2)}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 15 & -9 \\ -6 & -5 & 3 \\ 12 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 15 & -9 \\ -6 & -5 & 3 \\ 12 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 15 & -9 \\ -6 & -5 & 3 \\ 12 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Então $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 15 & -9 \\ -6 & -5 & 3 \\ 12 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Então $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \sqrt{5} & 0 & 18 \\ \frac{25}{7} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 15 & -9 \\ -6 & -5 & 3 \\ 12 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Então $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \sqrt{5} & 0 & 18 \\ \frac{25}{7} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \sqrt{5} & 0 & 18 \\ \frac{25}{7} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 15 & -9 \\ -6 & -5 & 3 \\ 12 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Então $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \sqrt{5} & 0 & 18 \\ \frac{25}{7} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \sqrt{5} & 0 & 18 \\ \frac{25}{7} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

e) **Potências de matrizes.**

A n-ésima potência de uma matriz quadrada A é defina como $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ vezes}}$.

e) **Potências de matrizes.**

A n-ésima potência de uma matriz quadrada A é defina como $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ vezes}}$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, então $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & -24 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$ e

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -7 & -76 \\ 57 & -83 \end{pmatrix}$

Exercício Se $A^2 = \overline{0}$, então $A = \overline{0}$?

e) **Potências de matrizes.**

A n-ésima potência de uma matriz quadrada A é defina como $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ vezes}}$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, então $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & -24 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$ e

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -7 & -76 \\ 57 & -83 \end{pmatrix}$

Exercício Se $A^2 = \overline{0}$, então $A = \overline{0}$? Falso! Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a multiplicação.

m1) **Associatividade:** $(AB)C = A(BC)$;

m2) **Elemento Neutro:** $AI_n = I_nA = A$; Ou seja, multiplicar uma matriz quadrada pela matriz identidade de mesma ordem não altera a matriz.

m3) **Distributividade:** $A(B + C) = AB + AC$;

Diferenças importantes

1. Nem sempre podemos somar duas matrizes.

1. Nem sempre podemos somar duas matrizes.

   De fato, precisamos observar o tamanho das matrizes. Somar matrizes é intuitivo, mas só podemos somar duas ou mais matrizes de tamanhos iguais.

1. Nem sempre podemos somar duas matrizes.

   De fato, precisamos observar o tamanho das matrizes. Somar matrizes é intuitivo, mas só podemos somar duas ou mais matrizes de tamanhos iguais.

Multiplicar matrizes não é intuitivo quanto somar matrizes. Existem quatro diferenças importantes entre multiplicar números e multiplicar matrizes.

1. Nem sempre podemos somar duas matrizes.

   De fato, precisamos observar o tamanho das matrizes. Somar matrizes é intuitivo, mas só podemos somar duas ou mais matrizes de tamanhos iguais.

Multiplicar matrizes não é intuitivo quanto somar matrizes. Existem quatro diferenças importantes entre multiplicar números e multiplicar matrizes.

2. Nem sempre podemos multiplicar duas matrizes.

   De fato, precisamos observar os números de linhas e colunas das matrizes envolvidas.

1. Nem sempre podemos somar duas matrizes.

   De fato, precisamos observar o tamanho das matrizes. Somar matrizes é intuitivo, mas só podemos somar duas ou mais matrizes de tamanhos iguais.

Multiplicar matrizes não é intuitivo quanto somar matrizes. Existem quatro diferenças importantes entre multiplicar números e multiplicar matrizes.

2. Nem sempre podemos multiplicar duas matrizes.

   De fato, precisamos observar os números de linhas e colunas das matrizes envolvidas.

3. Para A e B quadradas, nem sempre $AB = BA$.

1. Nem sempre podemos somar duas matrizes.

    De fato, precisamos observar o tamanho das matrizes. Somar matrizes é intuitivo, mas só podemos somar duas ou mais matrizes de tamanhos iguais.

Multiplicar matrizes não é intuitivo quanto somar matrizes. Existem quatro diferenças importantes entre multiplicar números e multiplicar matrizes.

2. Nem sempre podemos multiplicar duas matrizes.

    De fato, precisamos observar os números de linhas e colunas das matrizes envolvidas.

3. Para A e B quadradas, nem sempre $AB = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{e } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Se $AB = \overline{0}$ isto não quer dizer que $A = \overline{0}$ ou $B = \overline{0}$.

3. Se $AB = \overline{0}$ isto não quer dizer que $A = \overline{0}$ ou $B = \overline{0}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $A \neq \overline{0}$ e $B \neq \overline{0}$ mas $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Se $AB = \overline{0}$ isto não quer dizer que $A = \overline{0}$ ou $B = \overline{0}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $A \neq \overline{0}$ e $B \neq \overline{0}$ mas $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Nem sempre existe uma matriz inversa. (Voltaremos neste tópico adiante!)

Exercício. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcule $A[3(A^t + \frac{1}{3}B)]^t - (BA^t + 2A^tA^t)^t$.

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a soma e multiplicação. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

t1) $(A^t)^t = A$;

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a soma e multiplicação. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

t1) $(A^t)^t = A$;

t2) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a soma e multiplicação. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

t1) $(A^t)^t = A$;

t2) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

t3) $(AB)^t = B^t A^t$;

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a soma e multiplicação. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

t1) $(A^t)^t = A$;

t2) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

t3) $(AB)^t = B^t A^t$;

t4) $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$;

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a soma e multiplicação. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

t1) $(A^t)^t = A$;

t2) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

t3) $(AB)^t = B^t A^t$;

t4) $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$;

e1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a soma e multiplicação. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

t1) $(A^t)^t = A$;

t2) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

t3) $(AB)^t = B^t A^t$;

t4) $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$;

e1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

e2) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a soma e multiplicação. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

t1) $(A^t)^t = A$;

t2) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

t3) $(AB)^t = B^t A^t$;

t4) $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$;

e1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

e2) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

e3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

Considere todas as matrizes de ordens que sejam possível fazer a soma e multiplicação. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

t1) $(A^t)^t = A$;

t2) $(A+B)^t = A^t + B^t$;

t3) $(AB)^t = B^t A^t$;

t4) $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$;

e1) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

e2) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

e3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

e4) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;

Exercícios. Supondo que as hipóteses de tamanhos de matrizes sejam compatíveis

a) É verdade que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

b) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcule $A[3(A^t + \frac{1}{3}B)]^t - (BA^t + 2A^tA^t)^t$.

c) Resolva o sistema de matrizes: $\begin{cases} X + 2Y = A \\ -2X + 3Y = B \end{cases}$

Exercícios. Supondo que as hipóteses de tamanhos de matrizes sejam compatíveis

a) É verdade que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

b) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcule $A[3(A^t + \frac{1}{3}B)]^t - (BA^t + 2A^tA^t)^t$.

c) Resolva o sistema de matrizes: $\begin{cases} X + 2Y = A \\ -2X + 3Y = B \end{cases}$

Respostas:

Exercícios. Supondo que as hipóteses de tamanhos de matrizes sejam compatíveis

a) É verdade que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

b) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcule $A[3(A^t + \frac{1}{3}B)]^t - (BA^t + 2A^tA^t)^t$.

c) Resolva o sistema de matrizes: $\begin{cases} X + 2Y = A \\ -2X + 3Y = B \end{cases}$

Respostas:

a) Falso! $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Exercícios. Supondo que as hipóteses de tamanhos de matrizes sejam compatíveis

a) É verdade que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

b) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcule $A[3(A^t + \frac{1}{3}B)]^t - (BA^t + 2A^tA^t)^t$.

c) Resolva o sistema de matrizes: $\begin{cases} X + 2Y = A \\ -2X + 3Y = B \end{cases}$

Respostas:

a) Falso! $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

b) AA

Exercícios. Supondo que as hipóteses de tamanhos de matrizes sejam compatíveis

a) É verdade que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

b) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcule $A[3(A^t + \frac{1}{3}B)]^t - (BA^t + 2A^tA^t)^t$.

c) Resolva o sistema de matrizes: $\begin{cases} X + 2Y = A \\ -2X + 3Y = B \end{cases}$

Respostas:

a) Falso! $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

b) AA

c) $X = \frac{3A-2B}{7}$, $Y = \frac{2A+B}{7}$