MATEMÁTICA

Questão 1. Sejam a e b números reais positivos. Considere os sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} -ax + by + az = 0 \\ b^2x + a^3y + 4a^2z = 0 \\ 4a^2x + a^3y + b^2z = 0 \end{cases}$$

Sabendo que esse sistema admite solução não trivial, determine b em função de a. Determine o conjunto solução do sistema para $a = \dfrac{1}{2}$.

Resolução:

Como se trata de uma sistema linear homogêneo, sabemos que uma **condição necessária e suficiente** para que ele tenha **solução não trivial** é que a matriz

$$M := \begin{bmatrix} -a & b & a \\ b^2 & a^3 & 4a^2 \\ 4a^2 & a^3 & b^2 \end{bmatrix}$$

tenha determinante zero. Como

$$\begin{aligned} \det M &= -a^4b^2 + 16a^4b + a^4b^2 - 4a^6 + 4a^6 - b^5 = 16a^4b - b^5 \\ &= b(16a^4 - b^4) = b(4a^2 + b^2)(4a^2 - b^2), \end{aligned}$$

$b > 0$ e $4a^2 + b^2 > 0$, concluímos que $\det M = 0$ se e somente se $4a^2 - b^2 = 0$, isto é, $2a = \pm b$. Mas como $a > 0$ e $b > 0$, concluímos finalmente que $\det M = 0$ se e somente se $b = 2a$.

Logo, **o sistema admite solução não trivial se e somente se** $b = 2a$.

Quando $a = \frac{1}{2}$, temos $b = 1$ e o sistema se escreve como

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x + \frac{1}{8}y + z = 0 \\ x + \frac{1}{8}y + z = 0 \end{cases}$$

e podemos usar as duas primeiras equações para determinar x e y em função de z (observe que a terceira equação é redundante):

$$\begin{cases} x - 2y = z \\ 8x + y = -8z. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 2 e somando com a primeira, obtemos imediatamente $x = -\frac{15}{17}z$; substituindo na segunda, encontramos $y = -8z + \frac{120}{17}z = -\frac{16}{17}z$.

Assim, qualquer solução do sistema é dada por $x = -\frac{15}{17}z$ e $y = -\frac{16}{17}z$, onde z *é um número real arbitrário*. Portanto, podemos escrever o conjunto solução S do sistema como

$$S = \left\{ \left(-\frac{15}{17}z, -\frac{16}{17}z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Renomeando $z = 17\alpha$, o conjunto S pode também ser escrito na forma mais concisa

$$S = \{(-15\alpha, -16\alpha, 17\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Critério de Correção.

- formulou a condição $\det M = 0$ .... 2 pt
- Obteve $2a = \pm b$ .... 2 pt
- Concluiu que $b = 2a$ .... 1 pt
- Obteve o sistema $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x + \frac{1}{8}y + z = 0 \end{cases}$ .... 2 pt
- Resolveu e obteve $x = -\frac{15}{17}z$ e $y = -\frac{16}{17}z$ .... 3 pt

MATEMÁTICA

Questão 2. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine os números $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que a matriz $M = \alpha^2 A + \alpha B + C$ é invertível.

Resolução:

(Até 2 pontos)

Determinar

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 3 & -2\alpha^2 + 6\alpha + 3 \\ -2\alpha^2 + 6\alpha + 3 & \alpha^2 + 3 \end{pmatrix}.$$

(Até 2 pontos)

Determinar

$$det(M) = (\alpha^2 + 3)^2 - (-2\alpha^2 + 6\alpha + 3)^2.$$

(Até 2 pontos)

Notar que

$$det(M) = 0 \iff \pm(\alpha^2 + 3) = -2\alpha^2 + 6\alpha + 3.$$

(Até 2 pontos)

Caso 1:

$$\alpha^2 + 3 = -2\alpha^2 + 6\alpha + 3 \iff -3\alpha(\alpha - 2) = 0,$$

ou seja, $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$.

(Até 2 pontos)

Caso 2:

$$-(\alpha^2 + 3) = -2\alpha^2 + 6\alpha + 3 \iff -\alpha^2 + 6\alpha + 6 = 0,$$

ou seja, $\alpha = 3 \pm \sqrt{15}$.

Concluir que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3 \pm \sqrt{15}\}$.

MATEMÁTICA

Questão 3. Determine o conjunto solução da inequação

$$\log_{2^{-x}}(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}) > \log_{2^{-x}}(\sqrt[3]{3}).$$

Resolução:

As condições de existência do logaritmo são:

(i) $2^{-x} > 0$: válido para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $2^{-x} \neq 1$: válido para $x \neq 0$;

(iii) $\sqrt[3]{x^2+2x-3} < 0$: válido para $x \in (-3, 1)$.

Ou seja, $x \in (-3, 0) \cup (0, 1)$.

Se $x \in (-3, 0)$, $2^{-x} > 1$ e o logaritmo é crescente. Assim,

$$\begin{aligned}
\log_{2^{-x}}(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}) > \log_{2^{-x}}(\sqrt[3]{3}) &\Leftrightarrow -\sqrt[3]{x^2+2x-3} > \sqrt[3]{3}\\
&\Leftrightarrow x^2+2x-3 < -3\\
&\Leftrightarrow x^2+2x < 0\\
&\Leftrightarrow x \in (-2, 0)
\end{aligned}$$

Segue que, $x \in (-2, 0)$ satisfaz a inequação dada.

Se $x \in (0, 1)$, $0 < 2^{-x} < 1$ e o logaritmo é decrescente. Assim,

$$\begin{aligned}
\log_{2^{-x}}(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}) > \log_{2^{-x}}(\sqrt[3]{3}) &\Leftrightarrow -\sqrt[3]{x^2+2x-3} < \sqrt[3]{3}\\
&\Leftrightarrow x^2+2x-3 > -3\\
&\Leftrightarrow x^2+2x > 0\\
&\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)
\end{aligned}$$

Segue que, $x \in (0, 1)$ satisfaz a inequação dada.

Portanto, qualquer $x \in (-2, 0) \cup (0, 1)$ satisfaz a inequação logarítmica.

Critério de correção:

(1 ponto) Verificar as condições de existência $2^{-x} > 0$ e $2^{-x} \neq 1$.

(2 pontos) Verificar a condição de existência $\sqrt[3]{x^2 + 2x - 3} < 0$.

(3 pontos) Concluir que se $x < 0$, então $x \in (-2, 0)$ satisfaz a inequação.

(3 pontos) Concluir que se $x < 0$, então $x \in (0, 1)$ satisfaz a inequação.

(1 ponto) Apresentar o conjunto solução.

MATEMÁTICA

Questão 4. Considere o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $q(x) = x^{10} - 1$ por $p(x)$ e encontre todas as raízes complexas de $p(x)$.

Resolução:

(Até 2 pontos)

Como

$$q(x) = (x^5 + 1)(x^5 - 1)$$

e

$$x^5 + 1 = (x + 1)p(x)$$

o quociente procurado é $(x + 1)(x^5 - 1)$ e o resto procurado é zero.

(Até 2 pontos)

As raízes de $p(x)$ estão contidas no conjunto das raízes de $q(x)$, a saber,

$$r_j = \cos\left(\frac{2\pi}{10}j\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{10}j\right)$$

para $j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j \leq 10$.

(Até 2 pontos)

Determinar a raiz $x = -1$ de $q(x)$ e notar que não é raiz de $p(x)$.

(Até 2 pontos)

Determinar as raízes de $x^5 + 1$, a saber,

$$s_k = \cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}k\right)$$

para $k \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq 5$.

(Até 2 pontos)

Retirar as raízes dos dois itens anteriores, restando as quatro raízes procuradas para $p(x)$, a saber,

$$r_1, r_3, r_7 \text{ e } r_9.$$

Questão 5. Sejam $A = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$ e $B = \operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcule $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ em função de A e B, sabendo que A e B não são ambos nulos.

Resolução:

Etapa 1 (4 pontos):

Reescreva A e B da forma:

$$A = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Critério: 2 pontos para cada igualdade correta.

Etapa 2 (1 ponto):

Divida B por A para obter:

$$\frac{B}{A} = \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \qquad \text{(I)}$$

Critério: 1 ponto para obter corretamente a igualdade (I).

Etapa 3 (2 pontos):

Agora, perceba que para $\theta = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, temos:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\,\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\,\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}. \qquad \text{(II)}$$

Critério: 2 pontos para obter corretamente a igualdade (II).

Etapa 4 (Até 3 pontos):

Para determinar $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ em função de A e B, substitua (I) na igualdade (II):

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{2B/A}{1+B^2/A^2} = \frac{2AB}{A^2+B^2}. \qquad \text{(III)}$$

Critério: 3 pontos para obter corretamente a igualdade (III).

Solução alternativa:

Etapa 1: Temos

$$
\begin{aligned}
AB &= \overbrace{\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}^{\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)} + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta \Rightarrow \\
AB &= \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}(\mathrm{sen}\,2\alpha - \mathrm{sen}\,2\beta).
\end{aligned}
\qquad \text{(I)}
$$

Critério: 2 pontos para obter corretamente uma das igualdades em (I) identificando sen $(\alpha-\beta)$.

Etapa 2 (2 pontos): Além disso,

$$\frac{1}{2}(\mathrm{sen}\,2\alpha - \mathrm{sen}\,2\beta) = \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)\,\cos(\alpha+\beta). \qquad \text{(II)}$$

Critério: 2 pontos para obter corretamente a igualdade (II).

Etapa 3 (1 ponto): Substituindo (II) na expressão de AB, obtemos

$$
\begin{aligned}
&AB = \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) + \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)\,\cos(\alpha+\beta) \Rightarrow \\
&\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) = \frac{AB}{\cos(\alpha+\beta)+1}.
\end{aligned}
$$

Critério: 1 ponto para obter corretamente uma das igualdades acima.

Etapa 4 (2 pontos): Por outro lado,

$$A^2 + B^2 = 2 + 2\cos(\alpha+\beta) \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{A^2+B^2}{2} - 1 \qquad \text{(III)}.$$

Critério: 2 pontos para obter corretamente uma das igualdades em (III).

Etapa 5 (Até 3 pontos): O valor de sen $(\alpha-\beta)$ em função de A e B é determinado juntando as etapas 3 e 4:

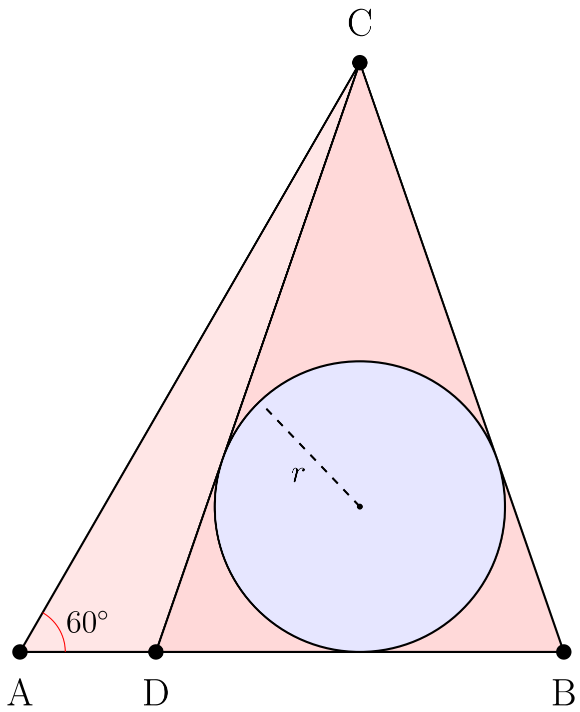
$$\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) = \frac{AB}{\frac{A^2+B^2}{2} - 1 + 1} = \frac{2AB}{A^2+B^2}. \qquad \text{(IV)}$$

Critério: 3 pontos para obter corretamente a igualdade (IV).

Questão 6. *Considere um triângulo ABC tal que* $m(\overline{AB}) = 4, m(\overline{AC}) = 5$ *e* $BC = 60°$. *Seja D um ponto do lado* $\overline{AB}$ *tal que* $m(\overline{AD}) = 1$. *Encontre o raio do círculo inscrito no triângulo BCD.*

Resolução:

Considere a figura a seguir:



- *Pela lei dos cossenos temos que*

$$(m(\overline{BC}))^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60°;$$
$$(m(\overline{CD}))^2 = 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos 60°.$$

Portanto:

$$m(\overline{BC}) = m(\overline{CD}) = \sqrt{21}.$$

- *A área do triângulo BCD será:*

$$\acute{A}rea(BCD) = \frac{1}{2} m(\overline{BD}) \cdot m(\overline{AC}) \cdot sen\, 60° = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

- *O perímetro do triângulo BCD será*

$$Per\acute{i}metro(BCD) = 3 + 2\sqrt{21}.$$

- *Finalmente, o raio r da circunferência inscrita em BCD será*

$$r = \frac{\acute{A}rea(BCD)}{\frac{1}{2}Per\acute{\imath}metro(BCD)} = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}(3+2\sqrt{21})} = \frac{6\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{10}.$$

Critérios:

- *Concluir corretamente que $m(\overline{BC}) = m(\overline{CD}) = \sqrt{21}$.* ***(Até 4 PONTOS)***

- *Concluir corretamente que raio r da circunferência inscrita em BCD será $\dfrac{6\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{10}$.* ***(Até 6 PONTOS)***

- *Pequenos erros de conta, imprecisões ou omissões na linha argumentativa podem acarretar em um desconto de* ***até 2 PONTOS*** *por ocorrência. Consideramos também como omissão a resposta final dada de forma pouco simplificada, como por exemplo aquelas com radiciação dupla ou muitas contas não desenvolvidas.*

Questão 7. *Determine os pontos P pertencentes à elipse E definida pela equação $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, tais que os segmentos de reta que ligam P aos focos de E formam um ângulo de $60°$.*

Resolução:

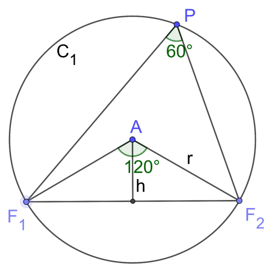
Etapa 1 (2 pontos):

Segue da equação da elipse que $c = \sqrt{3}$ e, portanto, os focos são $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$.

Critério: 2 pontos para determinar os dois focos da elipse.

Etapa 2 (Até 4 pontos):

Sejam C_1, C_2 circunferências passando por F_1 e F_2, tal que a corda $\overline{F_1F_2}$ determina o arco capaz de $120°$ no semi-plano superior $y \geq 0$ em C^1, e no semi-plano inferior em C_2, respectivamente.



Do triângulo F_1AF_2, obtemos $r = 2$ e $h = 1$.

Logo, as equações de C_1 e C_2 são dadas, respectivamente, por:

$$C_1 :\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \quad e \quad C_2 :\ x^2 + (y+1)^2 = 4. \qquad (I)$$

Critério: 2 pontos para cada equação corretamente determinada em (I).

Etapa 3 (Até 4 pontos):

Assim, os **únicos** *pontos que satisfazem a condição desejada são dados como solução dos sistemas abaixo:*

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow P_1 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right),\ P_2 = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ são soluções.}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow P_3 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right),\ P_4 = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ são soluções.}$$

Critério: 4 pontos para determinar as **únicas** *quatro soluções acima, sendo 2 pontos para cada par corretamente determinado.*

Solução alternativa:

Etapa 1 (2 pontos):

Segue da equação da elipse que $c = \sqrt{3}$ *e, portanto, os focos são* $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ *e* $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$.

Critério: 2 pontos para determinar os dois focos da elipse.

Etapa 2 (Até 2 pontos):

Sejam m *e* n *as distâncias de* P *à* F_1 *e* F_2*, respectivamente. Segue da definição e da equação da elipse que* $m+n=4$. *Da lei dos cossenos aplicada ao triângulo* F_1PF_2*, obtemos* $m^2+n^2-mn=12$.

Critério: 1 ponto para concluir que $m+n=4$*, 1 ponto para concluir que* $m^2+n^2-mn=12$.

Etapa 3 (2 pontos):

Resolvendo o sistema abaixo, determinamos o valor de m *e* n:

$$\begin{cases} m+n=4 \\ m^2+n^2-mn=12 \end{cases} \Rightarrow \{m,n\} = \left\{2+2\frac{\sqrt{6}}{3},\ 2-2\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

Critério: 2 pontos para determinar corretamente os valores acima.

Etapa 4 (Até 4 pontos):

Assim, os **únicos** *pontos que satisfazem a condição desejada são dados como solução dos sistemas abaixo:*

$$\begin{cases} \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2)} = 2+2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2)} = 2-2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow P_1 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right),\ P_2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ são soluções.}$$

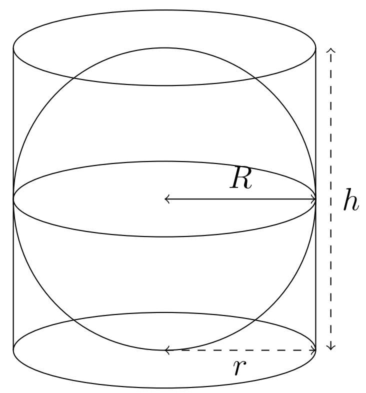
$$\begin{cases} \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2)} = 2-2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2)} = 2+2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow P_3 = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right),\ P_4 = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ são soluções.}$$

Critério: 4 pontos para determinar as **únicas** *quatro soluções acima, sendo 2 pontos para cada par corretamente determinado.*

Questão 8. *Um cilindro equilátero é apoiado em uma suas bases e parcialmente preenchido com água. Quando uma esfera é colocada em seu interior, de modo a tocar o fundo, o nível de água atinge a altura do cilindro. Se o raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro e o volume de água é* $2000\frac{\pi}{3} cm^3$*, determine a área da superfície lateral do cilindro e o volume da esfera.*

Resolução:

Sejam r *e* h *o raio da base e a altura do cilindro, respectivamente. Seja ainda* R *o raio da esfera. Pelos dados do problema, temos* $h = 2r$ *(o cilindro é equilátero),* $R = r$ *e*



$$\text{Volume do cilindro} = \text{Volume da esfera} + \text{Volume de água},$$

isto é

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{2000\pi}{3}.$$

Substituindo $h = 2r$ *e* $R = r$*, obtemos*

$$2r^3 = \frac{4}{3}r^3 + \frac{2000}{3}$$

de onde concluímos que

$$r^3 = \frac{2000}{3} \times \frac{3}{2} = 1000.$$

Assim, $r = 10$ *cm e temos*

(i) **a área da superfície lateral do cilindro** (A_L) *é igual a* $A_L = 2\pi rh = 2\pi \times 10 \times 20 = 400\pi\ cm^2$*;*

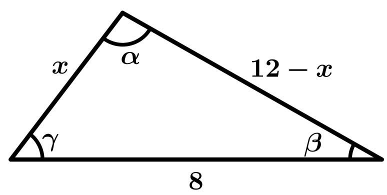
(ii) **o volume da esfera** (V_{esfera}) *é igual a* $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4000\pi}{3}\ cm^3$.

Critério de Correção.

- *Escreveu* $\pi r^2 h$ *para a o volume do cilindro* .... *2 pt*
- *Escreveu* $\frac{4}{3}\pi r^3$ *para o volume da esfera* .... *2 pt*
- *Escreveu Vol. do cilindro = Vol. da esfera + Vol. de água* ...... *2 pt*
- *Resolveu equações e obteve* $r = 10$ .... *2 pt*
- *Obteve a área lateral do cilindro* $A_L = 2\pi rh = 400\pi\ cm^2$ .... *1 pt*
- *Obteve o volume da esfera* $V_{esfera} = \frac{4000\pi}{3}\ cm^3$ .... *1 pt*

Questão 9. *Um triângulo tem perímetro 20 e seus ângulos internos* α, β, γ *satisfazem a igualdade* $sen(\alpha) + sen(\beta) + sen(\gamma) = 2$. *Sabendo que um dos lados desse triângulo mede 8, determine a medida dos outros dois lados.*

Resolução. *Como a soma dos três lados do triângulo é igual a 20, e um deles mede 8, a soma das medidas dos outros dois lados é 12. Considere essas medidas* x *e* $12 - x$. *Sem perda de generalidade, consideraremos os lados e ângulos dispostos como na figura a seguir.*



Pela Lei dos Senos, temos

$$\frac{8}{sen\,\alpha} = \frac{x}{sen\,\beta} = \frac{12-x}{sen\,\gamma} = \frac{8+x+12-x}{sen\,(\alpha)+sen\,(\beta)+sen\,(\gamma)} = \frac{20}{2} = 10.$$

Logo,

$$\frac{8}{sen\,\alpha} = 10 \;\Rightarrow\; sen\,\alpha = \frac{4}{5}.$$

Daí,

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}.$$

Pela Lei dos Cossenos, temos

$$8^2 = x^2 + (12-x)^2 - 2\,x\,(12-x)\cos\alpha.$$

Analisando a primeira possibilidade, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, *temos*

$$8^2 = x^2 + (12-x)^2 - 2\,x\,(12-x)\,\frac{3}{5} \;\Leftrightarrow\; x^2 - 12x + 25 = 0,$$

cujas raízes são $x = 6+\sqrt{11}$ *e* $x = 6-\sqrt{11}$. *Em ambos os casos, obtemos que os lados* x *e* $12 - x$ *são iguais a*

$$6+\sqrt{11} \quad e \quad 6-\sqrt{11}.$$

Se $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, *temos*

$$8^2 = x^2 + (12-x)^2 + 2\,x\,(12-x)\,\frac{3}{5} \;\Leftrightarrow\; x^2 - 12x + 100 = 0,$$

e essa última equação não possui raiz real.

Portanto, a medida dos outros dois lados do triângulo são

$$6 + \sqrt{11} \quad e \quad 6 - \sqrt{11}.$$

Critérios

- *(+3 pontos) Determinar sen* $\alpha = \dfrac{4}{5}$.
- *(+1 ponto) Determinar* $\cos\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$.
- *(+4 pontos) Aplicar a Lei dos Cossenos com* $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ *e encontrar os lados* $6+\sqrt{11}$ *e* $6-\sqrt{11}$.
- *(+2 pontos) Analisar que para* $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ *o problema não tem solução.*

Questão 10. *Em um decágono convexo, de quantas formas podemos escolher duas diagonais que não se interceptam?*

Resolução:

Quantidade de diagonais: $\dfrac{n.(n-3)}{2} = \dfrac{10.7}{2} = 35.$

Quantidade de pares de diagonais: $\begin{pmatrix} 35 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{35!}{2!33!} = 595.$

Dados 4 pontos do polígono, fica determinada de maneira única duas diagonais que se interceptam no interior do polígono. Assim, temos

$\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{10!}{2!8!} = 210$ *pares de diagonais que se interceptam no interior do decágono.*

Além destas, deve-se contabilizar as diagonais que se interceptam em um vértice do polígono.

Cada vértice admite $(n-3) = 10-3 = 7$ *diagonais concorrentes.*

Porntanto, temos $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{7!}{2!5!} = 21$ *pares de diagonais que se interceptam em cada vértice. Nos 10 vértices do decágono, temos* $10.21 = 210$ *pares de diagonais que se interceptam.*

A quantidade total de pares de diagonais que NÃO se interceptam é dada por

$595 - 210 - 210 = 175.$

Critério de correção:

- *Quem apenas calculou o número correto de diagonais do decágono, ganhou* ***1 PONTO***.
- *Quem apenas calculou o número correto de pares de diagonais, ganhou* ***2 PONTOS.***
- *Quem calculou apenas a quantidade de diagonais que se interseptam no interior do polígono, ganhou até* ***8 PONTOS.***

- *Quem calculou apenas os pares de diagonais que se interceptam nos vértices, ganhou até 4* ***PONTOS.***

- *Quem contabilizou o dobro da quantidade pedida por não se atentar que em sua contagem cada diagonal foi contada duas vezes, ganhou até* ***8 PONTOS.***

- *Métodos de contagem incompletos (como abrir em casos, mas não abranger todos os casos), assim como métodos com falhas na argumentação, omissão de justificativas etc, ganhou até* ***5 PONTOS****, dependendo da coerência e validade das justificativas apresentadas bem como da abrangência da contagem dos casos.*

- *Pequenas imprecisões, erros básicos de conta, ou pequenas omissões podem acarretar em um desconto adicional de até* ***2 PONTOS.***