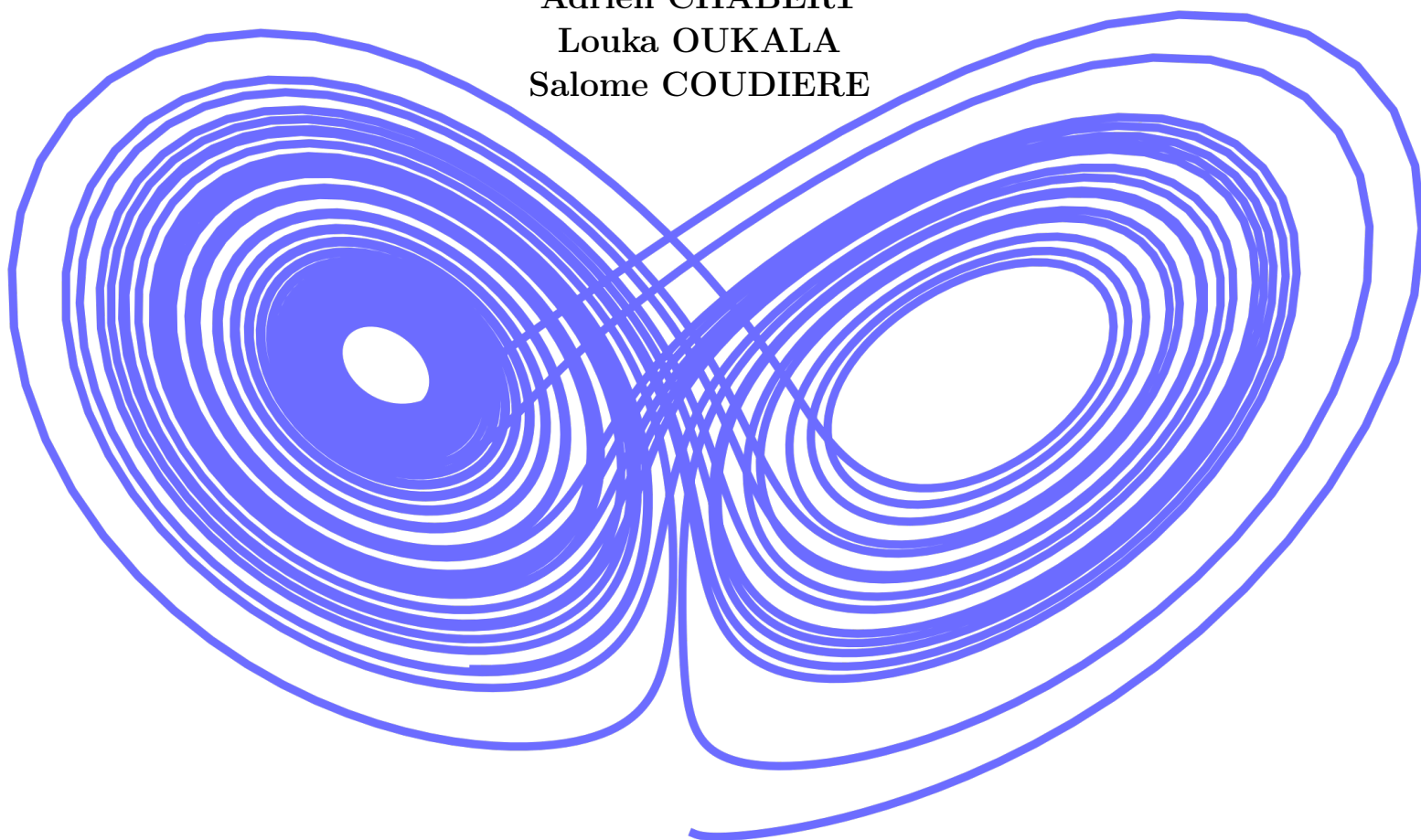


Attracteur de Lorenz

Projet de licence 3

Adrien CHABERT
Louka OUKALA
Salome COUDIERE



Second semestre - Année 2023-2024

Je me rature ardemment.
Il faut n'écriture que le strict
nécessaire.

— Claude NOUGARO

Nous tenons à remercier, notre professeur référent pour ce projet M. Filbet, pour le temps s'il a consacré à nous apprendre la méthodologie pour rédiger ce mémoire. La rigueur exigée sera un atout dans la poursuite de nos études. Nous remercions aussi l'ensemble de nos professeurs qui s'efforce de nous transmettre leur précieux savoir. Je tiens aussi à remercier mon père pour avoir relu et corrigé ce document ainsi que pour son soutien indéfectible.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Résultats fondamentaux pour les équations différentielles	2
2.1	Définitions	2
2.2	Outils pour les équations différentielles	2
3	Existence et premières propriétés	4
4	Étude des points stationnaires	6
4.1	Rappel des théorèmes	6
4.2	Détermination des équilibres	7
4.3	Stabilité de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$	8
	Cas $\Delta > 0$	9
	Cas $\Delta = 0$	10
	Cas $\Delta < 0$	11
4.4	Stabilité de S_{\pm}	12
5	Méthodes numériques	13
	Première méthode numérique, le schéma d'Euler explicite	13
	Le schéma de Runge-Kutta 4	14
	Erreur et ordre	14
6	Interprétations	16
7	Conclusion	19
8	Annexes	20
	Méthodes des rectangles	20
	Code	21
	Bibliographie	22

1 Introduction

Does a flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?

C'est le titre de l'article que Edward N. Lorenz publie en 1972 [2], dans le quel il fait la synthèse de ce que l'on connaît sous le nom de la théorie du chaos. La question peut être traduite par "Est-ce qu'un battement d'ailes de papillon au Brésil peut entraîner une tornade au Texas ?". En effet lors de l'étude de certains systèmes, une faible variation peut entraîner des changements considérables dans les états ultérieurs du système. Tout au long de sa vie Lorenz se sera intéressé aux systèmes chaotiques essentiellement appliqués à son domaine de recherche : la météorologie. Dès 1963, il propose un modèle simplifié pour essayer de décrire la météo [3]. Ce modèle a contribué à montrer la difficulté de prédire le climat sur le long terme. Ce modèle a été présenté sous la forme suivante.

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x), & (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz, & (L_2) \\ z' &= xy - \beta z, & (L_3) \end{cases} \quad (1)$$

(Avec σ, ρ, β des paramètres). Dans ce système les inconnues sont les fonctions du temps t , x, y et z . L'indicateur x des mouvements de convection, y est proportionnel à la variation de température dans les courants verticaux, et z est un indicateur de la variation de température par rapport à un profil linéaire. Dans l'approximation les paramètres σ et ρ correspondent au nombre de Prandtl et au nombre de Rayleigh. Nous nous intéresseront uniquement à l'étude mathématique de ce système. Ce système est appelé l'attracteur de Lorenz (aussi appelé attracteur étrange ou système de Lorenz). À travers cette étude nous allons présenter certaines caractéristiques chaotiques du système en modélisant les résultats théoriques avec des applications numériques, nous pourrions notamment observer les courbes qui prennent la forme d'ailes de papillon qui donneront leur nom à l'effet éponyme.

2 Résultats fondamentaux pour les équations différentielles

2.1 Définitions

Dans ce chapitre on rappelle les résultats sur lesquels repose notre étude.

Définition 1

On appelle *équation différentielle* une équation de la forme

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

où $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^d)$ et $u \in C^1(I, U)$ avec I un intervalle de \mathbb{R} et $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

Remarque : Si f ne dépend pas directement de t , l'équation est dite autonome

Lorsque l'on s'intéresse aux équations différentielles, on s'intéresse plus particulièrement au problème de Cauchy, que l'on peut définir comme suit.

Définition 2

On appelle *problème de Cauchy*, une équation différentielle munie d'une condition initiale (une information sur une valeur de la fonction). On le présente sous la forme d'un système.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t = t_i) = u_i \end{cases}$$

Avec $t_i \in I, u_i \in U$

2.2 Outils pour les équations différentielles

Lorsque l'on souhaite étudier les équations différentielles le lemme de Grönwall est un outil essentiel, il permet notamment d'obtenir un contrôle sur le comportement des solutions.

Lemme 1

Soient $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ et $a \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in [0, T] u'(t) \leq a(t)u(t)$$

Alors $\forall t \geq t_0, t_0 \in [0, T]$, on a :

$$u(t) \leq u(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(s) \, ds}$$

Cet énoncé du lemme n'est pas le plus complet qu'il est possible d'établir, il est cependant suffisant pour notre étude. On admet la démonstration que l'on peut

retrouver dans le livre de Berthelin (p.18) [4]. L'outil le plus important pour l'étude des équations différentielles ordinaire, qui nous permet de déterminer l'existence et l'unicité des solutions est le théorème suivant.

Théoreme 1 (*Cauchy-Lipschitz*)

Soient $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^d)$ où I est un intervalle de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^d , et (t_0, u_0) . On suppose que f est localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur $[0, T]$. Alors

- il existe $T > 0$ et $u \in C^1([0, T], U)$ est solution du problème de Cauchy
- si v est une autre solution, elle coïncide avec u sur l'intervalle $[0, T]$

Nous admettrons la démonstration de ce théorème dont on peut retrouver dans le livre de F. Filbet (section 6.2.2) [5]. Maintenant que nous avons introduit les principaux outils pour l'étude des équations différentielles, on peut à présent s'intéresser au système de Lorenz (1)

3 Existence et premières propriétés

Dans cette section nous allons faire une étude du système de Lorenz afin de déterminer l'existence des solutions. Nous nous limiterons à l'étude des temps positifs ($t \geq 0$).

Proposition 3.1

Le système de Lorenz admet une unique solution sur \mathbb{R}_+ de classe C^1

Démonstration : Premièrement, on transforme le système de Lorenz sous la forme d'un problème d'ordre 1.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \quad (2)$$

À présent montrons l'existence des solutions de ce système. Γ est C^1 donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle ne dépend pas directement du temps. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution de classe C^1 sur $[0, T]$ que l'on notera $(I, (x, y, z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ et $I = [0, T[, T \in]0, +\infty]$. Montrons que $T = +\infty$. Dans (1) on s'intéresse à la somme de, x fois première ligne avec y fois la seconde ligne et z fois la troisième ligne.

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xyx - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (x, y, z) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, c'est la norme euclidienne au carré.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) &= (\sigma + \rho)x(t)y(t) - \sigma x^2(t) - y^2(t) - \beta z^2(t) \\ &\leq (\sigma + \rho)x(t)y(t) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \quad (\text{Young})^1 \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left[\frac{\sigma + \rho}{2} + \min(1, \sigma, \beta)\right]\mathcal{N}(t) \end{aligned}$$

Posons $\eta = \sigma + \rho + 2\min(1, \sigma, \beta)$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) \leq \eta \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}, \quad \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini. ■

1. $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

En ayant obtenu les résultats de cette proposition, on peut aisément en déduire la propriété suivante.

Corollaire 1

Les solutions du système de Lorenz (1) sont de classe C^∞

Démonstration : Par (2) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$, or par composition $\Gamma(x, y, z)$ est C^1 donc (x', y', z') l'est aussi, ainsi (x, y, z) est C^2 . De la même manière on obtient par récurrence immédiate que (x, y, z) est C^∞ ■

Cette propriété nous permet de dire que même si (1) est un système dit chaotique, on peut affirmer que les solutions sont régulières.

4 Étude des points stationnaires

Après une première étude du système de Lorenz (1), on s'intéresse maintenant à la stabilité du système de Lorenz autour des points d'équilibre que l'on définit comme suit.

Définition 3

Soit $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$ avec U ouvert de \mathbb{R}^d , f définit une équation différentielle autonome. On appelle point stationnaire ou d'équilibre de l'équation différentielle, tout point $v \in U$ tel que :

$$f(v) = 0$$

4.1 Rappel des théorèmes

Avant de s'intéresser aux théorèmes qui nous donnent les résultats de stabilité, on rappelle les définitions de la différentielle et du spectre qui nous serviront par la suite.

Définition 4

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que :

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

L'application linéaire L est alors appelée la différentielle de f en a , on la note $\mathcal{D}_f(a)$

Remarque : Dans la suite on appellera différentielle, l'application linéaire et la matrice associée à l'application linéaire dans la base canonique sans distinction.

Définition 5

On définit le spectre d'une application linéaire f sur un \mathbb{K} -espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Comme l'ensemble des valeurs propres de f . On le note $\text{Sp}(f)$

Maintenant on rappelle les résultats sur lesquels on s'appuiera dans la suite. Ces théorèmes établissent des résultats de stabilité dite linéaire autour des points stationnaires en se basant sur l'étude spectrale de la différentielle.

Théoreme 2

Soit $f \in C^2(U; \mathbb{R}^d)$ sur un ouvert U de \mathbb{R}^d et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si le spectre de $\mathcal{D}_f(v)$ est inclus dans le demi-plan ouvert $\{\lambda; \Re(\lambda) < 0\}$ alors v est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'équation $u' = f(u)$

Ce résultat nous permet de conclure sur le comportement asymptotique des solutions ayant subi une faible perturbation à l'instant de départ. Ainsi deux solutions proche d'un point d'équilibre, une ayant subi une perturbation à l'instant initial et l'autre non, approchent asymptotiquement la même trajectoire.

Théoreme 3

Soit $f \in C^2(U; \mathbb{R}^d)$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si $\max\{\Re(\lambda); \lambda \in \text{Sp}(\mathcal{D}_f(v))\}$ est atteint pour une valeur propre de $\mathcal{D}_f(v)$ de partie réelle strictement positive. Alors v est un point d'équilibre instable pour l'équation $u' = f(u)$

Ces théorèmes nous donnent des résultats seulement pour des valeurs propres strictement négative ou strictement positive. Cependant ces théorèmes ne nous permettent pas de conclure sur le cas où 0 est valeur propre de la différentielle. Il existe des résultats qui permettent de conclure sur la stabilité simple (0 valeur propre de la différentielle), cependant nous ne traiterons pas ce cas dans notre étude.

4.2 Détermination des équilibres

Dans un premier temps on regarde si notre système possède des équilibres, et si oui, lesquels.

Proposition 4.1

Si $\beta(1 - \rho) \geq 0$, l'équation (1) possède 3 points d'équilibre qui sont :

$$S_0 := 0_{\mathbb{R}^3} \quad S_+ := \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \quad S_- := \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration : On remarque que $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $(\mathbb{R}_+, 0_{\mathbb{R}^3})$ est une solution de l'équation différentielle. On résout alors $\Gamma(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$ en supposant que $(x, y, z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 & (L_1) \\ \rho x - y - xz = 0 & (L_2) \\ xy - \beta z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

de (L_1) on obtient que $x = y$. Dans (L_2) et dans (L_3) on remplace y par x , il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0$$

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\beta}$$

On obtient ainsi un polynôme de degré 3, il y a donc au plus 3 équilibres :

$$(L_2) \Rightarrow x(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}) = 0, \text{ or } x \neq 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \beta(1 - \rho)$$

Si $\beta(1 - \rho) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0, \rho \leq 1$ ou $\beta \leq 0, \rho \geq 1$ alors :

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\beta(1 - \rho)}$$

De ces trois équations on obtient que :

$$\Gamma(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x, y, z) = (\pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

On vérifie aisément que cette relation est une équivalence, en remplaçant les valeurs obtenues de x, y et z dans $\Gamma(x, y, z)$ ■

Remarque : Si $\rho = 1, 0$ est une racine triple de χ , donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point stationnaire triple pour (1).

4.3 Stabilité de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$

Afin d'utiliser les outils introduits dans la partie 4.1, on présente le lemme suivant.

Lemme 2 (préliminaire)

Le polynôme caractéristique de la différentielle de Γ évalué en $0_{\mathbb{R}^3}$ est :

$$\chi(\lambda) = (\lambda + \beta)P(\lambda)$$

Avec $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma$, de plus le discriminant de P est :

$$\Delta = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho$$

Notons que $-\beta$ est toujours racine de χ

Démonstration : Dans un premier temps on calcule la différentielle de Γ :

$$\mathcal{D}_\Gamma(x_s, y_s, z_s) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z_s & -1 & -x_s \\ y_s & x_s & -\beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

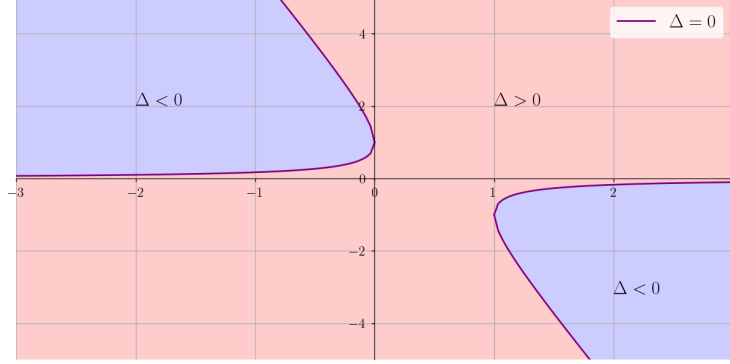
A présent, on calcule le polynôme caractéristique de la différentielle en $0_{\mathbb{R}^3}$ (noté χ) donné par le calcul suivant.

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - \mathcal{D}_\Gamma(0, 0, 0)) = (\lambda + \beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma)$$

Posons P comme dans le lemme. Ainsi pour étudier χ , on calcule le discriminant de P :

$$\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4(\sigma - \rho\sigma) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho \quad \blacksquare$$

Dans l'étude que l'on propose on va distinguer trois cas pour étudier la stabilité de l'équilibre du système de Lorenz près de l'origine.


 FIGURE 1 – Signe de Δ en fonction de ρ en abscisse et de σ en ordonnée

Cas $\Delta > 0$

Proposition 4.2

- Dans le cas $\Delta > 0$ si $\beta < 0$ l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$ est instable, si $\beta > 0$ on a :
- Si $\sigma(\rho - 1) > 0$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1)
 - Si $\sigma(\rho - 1) < 0$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

Démonstration : Premièrement, on détermine les conditions pour que Δ soit strictement positif.

Lemme 3

Δ est strictement positif pour l'ensemble des paramètres suivant :

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} > \sigma \text{ ou } \sigma > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} \right\}$$

Démonstration (Lemme) : $\Delta = \sigma^2 + \sigma(4\rho - 2) + 1$ est un polynôme de la variable σ . On note le déterminant de Δ selon la variable σ , δ . Δ est convexe par rapport à la variable σ donc Δ est strictement positif à l'extérieur de ses racines. On a donc :

$$\sigma < 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

ou

$$\sigma > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

■

Maintenant regardons l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$ dans le cas $\Delta > 0$. On peut expliciter les racines de χ qui constitue le spectre de la différentielle de Γ . On a ainsi :

$$\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3})) = \left\{ -\beta, \lambda_+ := \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{\Delta}}{2}, \lambda_- := \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{\Delta}}{2} \right\}$$

Premièrement on différencie le cas $\beta < 0$, dans ce cas alors, $\max(\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3}))) \geq -\beta > 0$, donc dans ce cas $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1). Dans le cas où β est positif, comme $\lambda_+ > \lambda_-$, si $\lambda_+ > 0$, l'équilibre est instable sinon l'équilibre est asymptotiquement stable. On cherche alors ρ et σ tel que $\lambda_+ > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\rho\sigma}}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow & (\sigma - 1)^2 + 4\rho\sigma > (\sigma + 1)^2 \\ \Leftrightarrow & \sigma(\rho - 1) > 0 \end{aligned}$$

■

Cas $\Delta = 0$

Proposition 4.3

Dans le cas $\Delta = 0$: Si $\beta < 0$ l'équilibre est instable si $\beta > 0$ alors on a :

- Si $\sigma < -1, \rho > 1$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1)
- Si $\sigma > -1, \rho < 1$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

Démonstration : On s'intéresse d'abord aux cas tels que $\Delta = 0$

Lemme 4

Δ est nul si et seulement si on a la paramétrisation suivante,

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \sigma = 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} \text{ ou } \sigma = 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} \right\}$$

Cette paramétrisation implique que $\rho \in \mathbb{R} \setminus]0, 1[$

Démonstration (Lemme) : A nouveau on considère Δ comme un polynôme de la variable σ . Pour que Δ ait des racines, il faut que δ soit positif ou nul.

$$\delta \geq 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R} \setminus]0, 1[$$

Maintenant on calcule les racines de Δ .

$$\sigma = \frac{2 - 4\rho + \sqrt{(4\rho - 2)^2 - 4}}{2} = 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

ou

$$\sigma = \frac{2 - 4\rho - \sqrt{(4\rho - 2)^2 - 4}}{2} = 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

On obtient ainsi la paramétrisation voulue. ■

Maintenant on s'intéresse à la stabilité de l'équilibre dans le cas $\Delta = 0$. Comme $-\beta$ est toujours racine de χ si $\beta < 0$ alors $\max(\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3}))) \geq -\beta > 0$ donc d'après le théorème 3, $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1)

Si $\beta > 0$ alors dans le cas de $\Delta = 0$, $\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma) = \{\beta, -\frac{\sigma+1}{2}\}$, on cherche alors les conditions sur les paramètres σ et ρ telles que le système soit instable ou asymptotiquement stable. On s'intéresse au cas instable et on inversera le sens des inégalités pour avoir le cas asymptotiquement stable.

$$-\frac{\sigma+1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sigma < -1$$

Dans la première équation de la paramétrisation on obtient que

$$-1 > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

n'a pas de solutions.

Dans la seconde équation on cherche ρ tel que :

$$1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < -1 \Rightarrow \frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1 > (2\rho-2)^2 \Leftrightarrow \rho > 1$$

En faisant les calculs avec l'inégalité inverse, on retrouve le cas asymptotiquement stable. ■

Cas $\Delta < 0$

Proposition 4.4

Dans le cas $\Delta < 0$: Si $\beta < 0$ l'équilibre est instable si $\beta > 0$ alors on a :

- Si $\sigma < -1, \rho > 1$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1)
- Si $\sigma > -1, \rho < 1$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

Démonstration : On détermine les cas tels que $\Delta < 0$

Lemme 5

Δ est strictement négatif pour l'ensemble des paramètres suivants :

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < \sigma < 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} \right\}$$

Dans cet ensemble on a : $\rho \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$

Démonstration (Lemme) : Pour que Δ ait des racines, il faut que δ soit strictement positif.

$$\delta > 0 \Leftrightarrow \rho(\rho-1) > 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$$

Par convexité de Δ on a que Δ est négatif entre ses racines, il vient alors :

$$1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < \sigma < 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

Donc l'ensemble des ρ, σ qui vérifie cette inégalité sont alors des paramètres tels que Δ est négatif. ■

On détermine les cas pour lesquels l'équilibre est instable ou asymptotiquement stable. Pour la différenciation du cas de β cf. la démonstration de 4.3. Ainsi il vient :

$$\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3})) = \left\{ \beta, \omega := \frac{-(\sigma+1) + i\sqrt{-\Delta}}{2}, \bar{\omega} := \frac{-(\sigma+1) - i\sqrt{-\Delta}}{2} \right\}$$

Pour étudier la stabilité on s'intéresse à la partie réelle de ω et $\bar{\omega}$. Or $\Re(\omega) = \Re(\bar{\omega}) = -\frac{\sigma+1}{2}$ on retombe ainsi sur le même calcul que dans la démonstration de la propriété 4.3. On retrouve bien le cas voulu. ■

4.4 Stabilité de S_\pm

Dans cette section nous allons nous intéresser aux points d'équilibres définis précédemment S_+ et S_- . Nous ferons aussi quelques hypothèses simplificatrices, supposons σ, ρ, β positifs et de plus $\sigma > \beta + 1$.

Proposition 4.5

Sous les hypothèses de cette section et si $\rho > 1$ alors on définit $\rho^ = \sigma \frac{\sigma+\beta+3}{\sigma-\beta-1}$ tel que*

- *si $\rho < \rho^*$ alors les équilibres S_\pm sont asymptotiquement stables pour (1)*
- *si $\rho > \rho^*$ alors les équilibres S_\pm sont instables pour (1)*

Remarque : Si $\rho \in [0, 1[$ les équilibres S_\pm n'existent pas.

Nous admettrons le résultat ci-dessus, une démonstration est proposée dans la thèse de D. Jones [1].

5 Méthodes numériques

Dans cette section nous allons introduire les méthodes numériques pour la résolution d'équation différentielle ordinaire (EDO).

Problématique : Pourquoi introduire des méthodes numériques pour la résolution des EDO ?

Lorsque on étudie des équations différentielles certains théorèmes comme celui de Cauchy-Lipschitz 1, nous permettent de prouver l'existence de solutions pour un problème de Cauchy. Cependant leurs formes explicites n'est pas garantie. Lorsqu'on aborde les EDO non-linéaire, la plupart du temps nous ne sommes pas capable d'expliquer la solution analytique. C'est pourquoi on introduit les méthodes numériques.

Considérons un problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u(t_I) = \nu \end{cases}$$

Ici u est la fonction à déterminer sur l'intervalle $[t_I, t_F] \subset]a, b[$ ². Maintenant que nous savons que la solution existe sur un intervalle de temps fermé $([t_I, t_F])$, on cherche à approcher les valeurs de la solution numériquement. Pour cela, on subdivise l'intervalle $[t_I, t_F]$ en N sous intervalles et on calcule à l'aide d'un schéma numérique donné, la valeur approchée de la solution pour tout les temps t_n , $0 \leq n \leq N$

Première méthode numérique, le schéma d'Euler explicite

On introduit maintenant la première méthode de résolution.

Définition 6 (*Schéma d'Euler explicite*)

On note $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ la suite des approximations des valeurs de u aux points $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$. On appelle h le pas de la méthode, et $h := \frac{t_F - t_I}{N}$. Alors on a :

$$\begin{cases} t_n &= t_0 + nh \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \quad \forall 0 \leq n \leq N \\ y_0 &= \nu \end{cases}$$

Mise en œuvre : On intègre notre équation différentielle entre les instants t_n et t_{n+1} , il vient :

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, u(x)) \, dx$$

On approche l'intégrale par la méthode des rectangles³ et on obtient :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, u(x)) \, dx = (t_{n+1} - t_n) f(t_n, u(t_n))$$

2. En effet ce problème de Cauchy vérifie toutes les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, en effet f est C^1 donc localement Lipschitzienne.

3. cf. Annexes méthode des rectangles

Or $\forall n, u(t_n) \approx y_n$, d'où :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

De plus $u(t_0) = \nu = y_0$. On obtient alors le schéma d'Euler explicite.

Le schéma d'Euler est une méthode simple à utiliser et à implémenter. Cependant cette méthode possède des inconvénients dont nous reparlerons dans la section erreur et ordre.

Le schéma de Runge-Kutta 4

On s'intéresse maintenant aux schémas de Runge-Kutta. Ces schémas sont des méthodes dites multi-pas (c'est-à-dire on fait une moyenne pondérée de l'approximation en plusieurs points). Plus particulièrement, la méthode de Runge-Kutta 4.

Définition 7 (*Schéma de Runge-Kutta 4*)

On approche les valeurs de la solution de l'équation différentielle par la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ sur l'intervalle $[t_I, t_F]$, avec N le nombre de subdivisions de l'intervalle. Alors on a :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

On la choisira pour illustrer les résultats sur le système de Lorenz. Les paramètres que nous utiliserons pour les modélisations à suivre sont : $[t_I, t_F] = [0, 30]$, $h = 0.01$ et $u(t = 0) = (6, 4, 2)$

Erreur et ordre

Commençons par définir les 2 notions introduites dans le titre de cette sous-partie.

Définition 8

On définit l'erreur globale comme suit :

$$e_n = u(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

De plus on dit que un schéma est d'ordre p s'il existe une constante positive C , ne dépendant ni de n , ni de h telle que :

$$\max_{n \in 0, \dots, N} \|e_n\| \leq Ch^p$$

Revenons sur les schémas présentés précédemment. Le schéma d'Euler est d'ordre 1, le schéma de Runge-Kutta 4 est d'ordre 4. C'est-à-dire pour un pas donné $h = 10^{-2}$ la norme de l'erreur de la d'Euler sera de l'ordre de 10^{-2} , tandis que la norme de l'erreur de la méthode de Runge-Kutta 4 sera de l'ordre de 10^{-8} . Ainsi pour obtenir la même erreur avec la méthode d'Euler qu'avec la méthode de Runge-Kutta 4, il faudra générer plus de valeurs.

On compare les méthodes pour la résolution du problème de Cauchy $u'(t) = -u(t)$ et $u(0) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On connaît la solution exacte qui est $u : t \rightarrow e^{-t}$. On observe effectivement que la méthode Euler est d'ordre 1 et

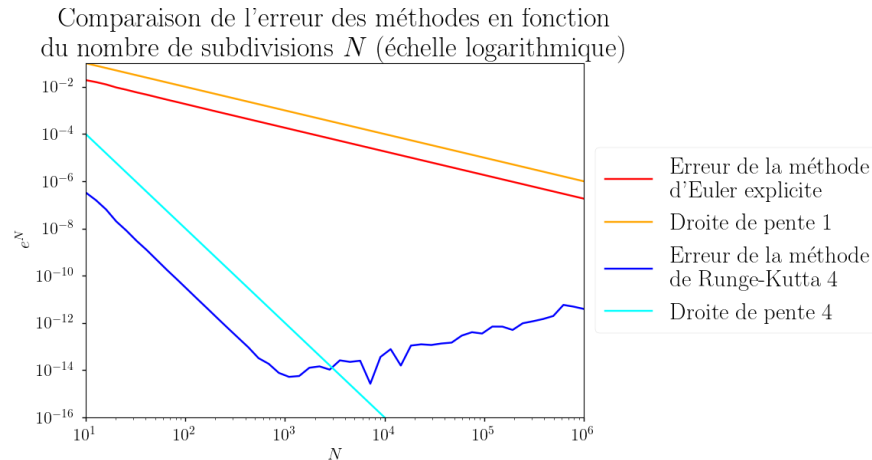


FIGURE 2 – Comparaison des méthodes en fonction de N

que la méthode de Runge-Kutta 4 est d'ordre 4. Sur le graphe de l'erreur de la méthode RK4 l'erreur dégénère dû à l'accumulation d'erreur de précision machine car la méthode de Runge-Kutta 4 a une précision inférieure à la précision machine.

6 Interprétations

Dans cette section, on illustre à l'aide de méthodes numériques les résultats de stabilité démontré précédemment.

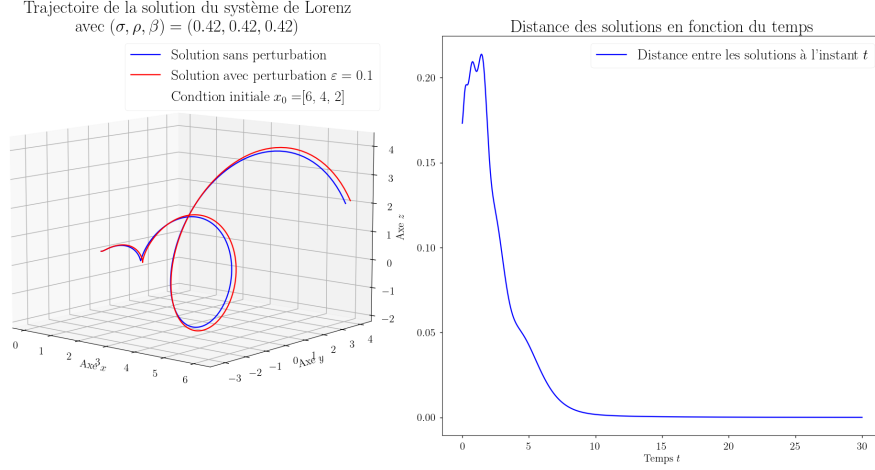


FIGURE 3 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour $\Delta > 0$

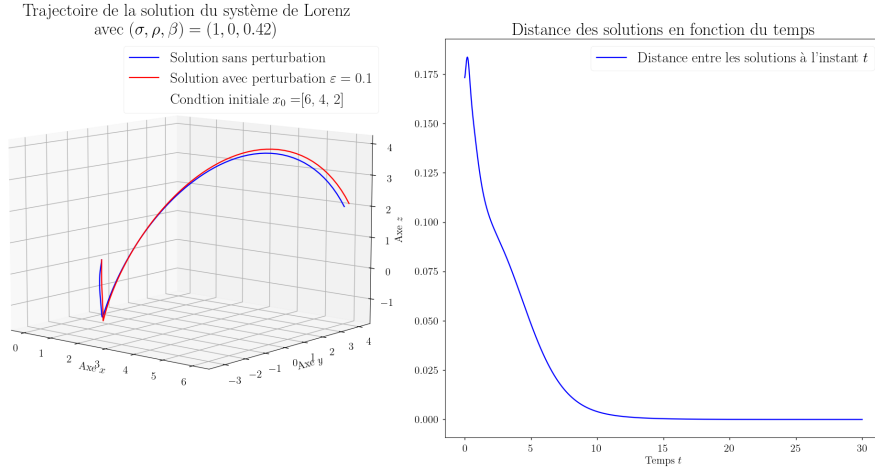
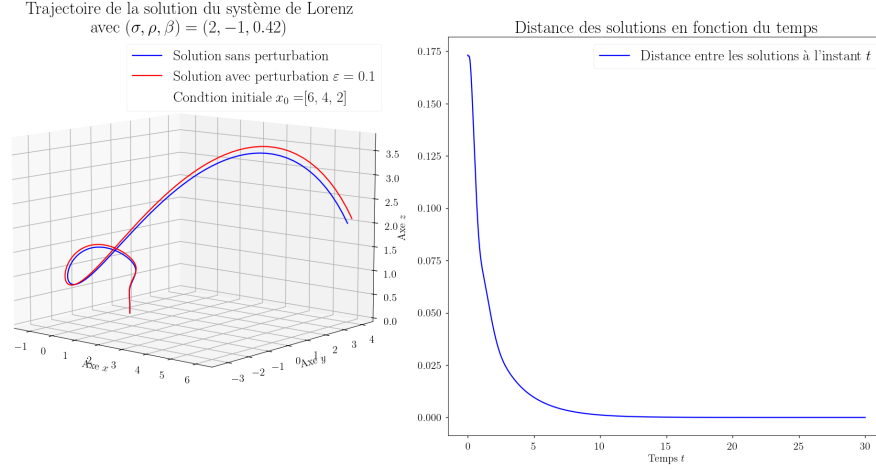
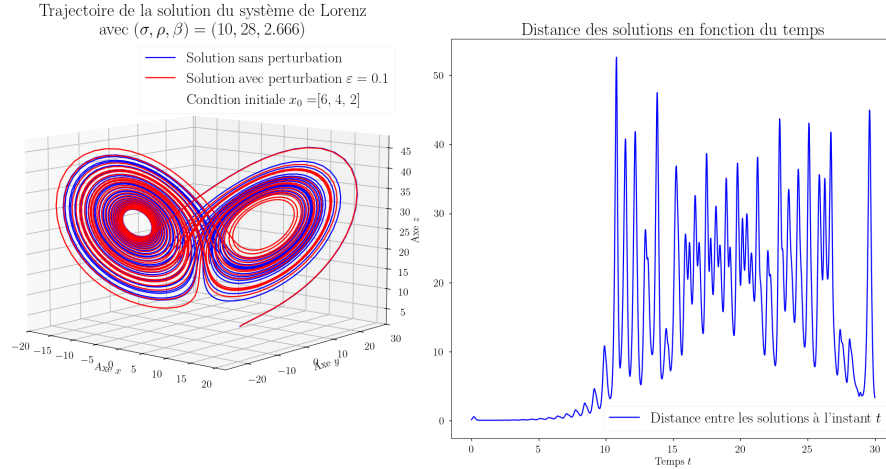


FIGURE 4 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour $\Delta = 0$

Dans les figure 6 ,6 et 6, on observe bien que les solutions commencent leurs trajectoires avec une distance l'une de l'autre et ensuite se rapprochent jusqu'a un écart très faible. On est dans les cas des propositions respectivement 4.2,4.3 et 4.4, cela correspond bien aux cas d'un équilibre asymptotiquement stable.


 FIGURE 5 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour $\Delta = 0$

 FIGURE 6 – Exemple d'équilibre instable pour $\Delta > 0$

Dans cette configuration (figure 6) on retombe sur les paramètres qui permettent d'observer la trajectoire en forme d'ailes de papillon décrite par E. Lorenz lors de son article de 1963 [3]. La figure observée apparaît pour les paramètres $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$. D'après la proposition 4.2 c'est un équilibre instable pour (1). Pour la période observée, on observe aucune forme de stabilisation de la trajectoire autour de $0_{\mathbb{R}^3}$, c'est donc bien le cas d'un équilibre instable.

Dans la figure 6 on a $\rho^* \approx 26,66$, on observe alors :

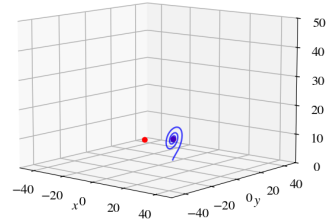
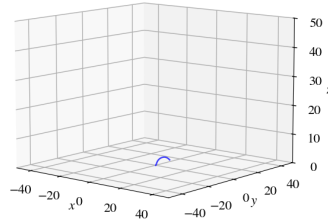
- pour $\rho = 1/2$, le système est très simple puisque les équilibres sont réduits à $0_{\mathbb{R}^3}$ de plus nous sommes dans le cas où $\Delta < 0$ et l'équilibre est asymptotiquement stable donc la solution va directement vers $0_{\mathbb{R}^3}$

Solution du système de Lorenz en fonction de ρ

avec $(\sigma, \beta) = (10, 3)$ fixé, et $\rho^* = 26.66$

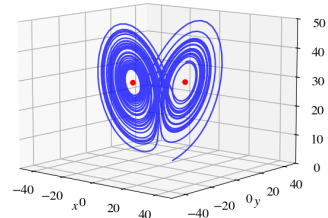
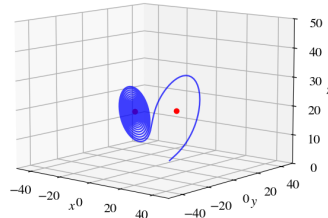
$\rho = 0.5$

$\rho = 10$



$\rho = 20$

$\rho = 30$



$\rho = 40$

$\rho = 50$

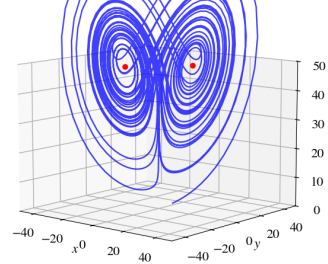
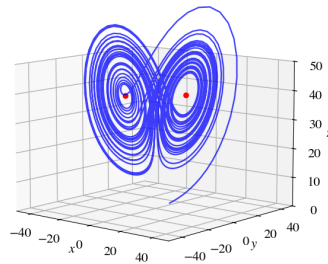


FIGURE 7 – Solutions de (1) en fonction de ρ

- Pour les cas $\rho = 10$ et $\rho = 20$, on se retrouve dans le cas où les équilibres existent et sont asymptotiquement stables car $\rho < \rho^*$, on observe bien que la trajectoire de la solution se rapproche d'un équilibre et ne semble pas s'en éloigner.
- Pour les cas restants on a, $\rho > \rho^*$ on observe alors que la trajectoire de la solution semble s'étendre dans l'espace sans jamais se diriger vers un équilibre. Cependant les solutions semblent rester dans une sous partie de l'espace.

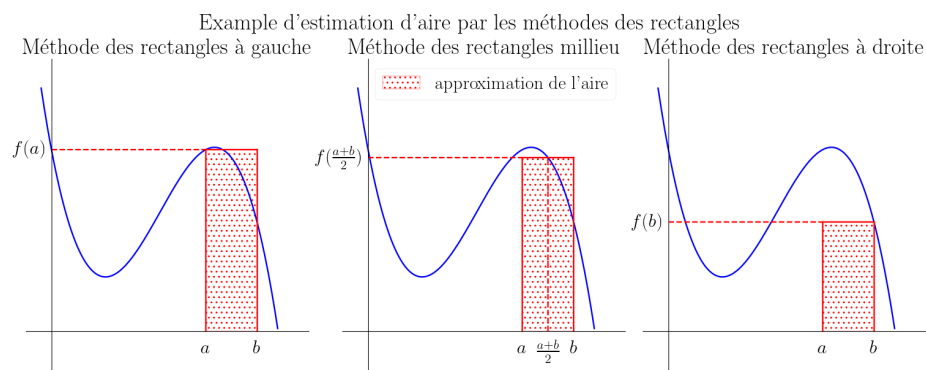
7 Conclusion

Au cours de notre étude à l'aide de l'exemple de l'attracteur de Lorenz, nous avons approché le concept de chaos dans les équations différentielles. Notre étude nous a permis de constater que les comportements singuliers proviennent de faibles perturbations dans les conditions initiales. De plus ces comportements ne sont pas uniquement inhérents aux conditions initiales. Ils dépendent de la configuration du système : nous avons pu constater qu'il existe des jeux de paramètres, donc de configurations telles que les trajectoires des solutions ne font pas apparaître de comportement chaotique. On peut faire une analogie avec la mécanique des fluides. Les systèmes à grand nombre de Rayleigh sont hautement chaotiques. À contrario les systèmes à faible nombre de Rayleigh ne sont pas sensibles aux faibles perturbations. C'est d'ailleurs la correspondance de ρ dans les approximations de Lorenz. Ces mouvements qui pourraient sembler aléatoires sont en fait déterministes. Cependant dû à la difficulté de mesurer de manière suffisamment fiable les grandeurs qui évoluent dans le système, il en devient hautement imprévisible. C'est ce qu'on a pu constater durant l'étude des équilibres.

8 Annexes

Méthode des rectangles

La méthode des rectangles est une méthode numériques pour approximer le calcul d'intégrale. Elle consiste à approximer l'aire sous la courbe par un rectangle. On peut choisir la hauteur du rectangle de différentes manières, à gauche, au milieu et à droite. Comme présenté dans la figure les figures qui suivent.



Considérons l'intégrale suivante :

$$I := \int_a^b f(x) dx \quad \text{avec } a < b \text{ et } f \text{ continue par morceaux}$$

On peut approximer cette intégrale de trois manières différentes :

Méthode des rectangles à gauche :

$$I \approx (b - a)f(a)$$

Méthodes des rectangles milieu :

$$I \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

Méthodes des rectangles à droite :

$$I \approx (b - a)f(b)$$

Remarque : Comme le montre les images ci-dessus l'approximation peut-être grossière. Dans l'exemple de la méthode des rectangles à droite une majorité de l'aire sous la courbe n'est pas incluse dans le rectangle.

Code

L'ensemble des graphes ont été générés sur python à l'aide des bibliothèques Matplotlib et Numpy. Vous pouvez retrouver l'ensemble de ces codes sur le Github du projet ou sur filesender jusqu'au 20/06/2024 :

- Filesender :
<https://filesender.renater.fr/?s=download&token=8ddd43a9-c73c-4fc9-b54e-8f3845f5c640>
- Github :
<https://github.com/N3rida/Projet>

Les correspondance des fichiers sont celles donné par ce tableau :

genGraph.py	générations des graphes des exemples de la stabilité pour les différent cas de Δ
GrapheSolution.py	graphe de la solution comme dans la page de couverture
DeltaDomain.py	graphe du signe de Δ en fonction de ρ et σ
genSpmEquilibrium.py	graphe pour comparer l'évolution de la trajectoire autour des équilibre S_{\pm} en fonction de ρ
genMethRect.py	graphe explicatif de la méthode des rectangles
methodsError	programme qui permet de comparer l'erreur entre la méthode de Euler et de Runge-Kutta 4

Bibliographie

- [1] DANIEL JONES. « Stability Analysis of the Chaotic Lorenz System with a State-Feedback Controller ». In : *Electronic Theses and Dissertations* (1^{er} jan. 2009). URL : <https://digitalcommons.georgiasouthern.edu/etd/944>.
- [2] EDWARD LORENZ. « Does a flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas? » In : (jan. 1972).
- [3] EDWARD N. LORENZ. « Deterministic Nonperiodic Flow ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (1^{er} mars 1963). Publisher : American Meteorological Society Section : Journal of the Atmospheric Sciences, p. 130-141. ISSN : 0022-4928, 1520-0469. DOI : 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2. URL : https://journals.ametsoc.org/view/journals/atasc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml (visité le 24/04/2024).
- [4] FLORENT BERTHELIN. *Équations différentielles*. Nouvelle édition 2021, corrigée et augmentée de huit exercices. Enseignement des mathématiques 34. Paris : Cassini, 2021. ix+707. ISBN : 978-2-84225-229-8.
- [5] FRANCIS FILBET. *Analyse numérique, modélisation : algorithme et étude mathématique : cours et exercices corrigés*. Sciences sup mathématiques. Paris : Dunod, 2009. iv+316. ISBN : 978-2-10-052253-8.
- [6] SYLVIE BENZONI-GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles : cours et exercices corrigés*. Paris : Dunod, 2021. ISBN : 978-2-10-083537-9.