



Introduction

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) & (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' &= xy - \beta z & (L_3) \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \quad (2)$$

1 Méthodes numériques

2 Existence et première propriété

Dans cette section nous allons faire une étude du système de Lorenz afin de déterminer l'existence des solutions. Nous nous limiterons à l'étude des temps positifs ($t \geq 0$)

Proposition 2.1

Le système de Lorenz admet des solutions. De plus les solutions sont globales sur \mathbb{R}_+ et de classe C^1

Démonstration : Γ est C^1 donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle ne dépend pas directement du temps. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution maximale de classe C^1 que l'on notera $(I, (x, y, z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ avec $I = [0, T[$, $T \in]0, +\infty]$. Montrons que $(I, (x, y, z))$ est globale. Dans (1) on s'intéresse à la somme de, x fois première ligne avec y fois la seconde ligne et z fois la troisième ligne.

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xyx - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ (\mathcal{N} est la norme euclidienne au carré)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) &= (\sigma + \rho)x(t)y(t) - \sigma x^2(t) - y^2(t) - \beta z^2(t) \\ &\leq (\sigma + \rho)x(t)y(t) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) && \text{(Young)}^1 \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left[\frac{\sigma + \rho}{2} + \min(1, \sigma, \beta)\right]\mathcal{N}(t) \end{aligned}$$

1. $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Posons $\eta = \sigma + \rho - 2 \min(1, \sigma, \beta)$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) \leq \eta \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}, \text{ avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini. ■

En ayant obtenue les résultats de la proposition on peut aisément en déduire que la propriété suivante.

Propriété 2.1

Les solutions du système de Lorenz (1) sont de classe C^∞

Démonstration : Par (2) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$, or par composition $\Gamma(x, y, z)$ est C^1 donc (x', y', z') l'est aussi, ainsi (x, y, z) est C^2 . De la même manière on obtient par récurrence immédiate que (x, y, z) est C^∞ . ■

Cette propriété nous permet de dire que même si (1) est un système dit chaotique, on peut affirmer que les solutions sont régulières.

3 Étude des points stationnaires

Après une première étude sommaire du système de Lorenz (1), on s'intéresse maintenant à l'étude des points stationnaires. Les points stationnaires sont des points tels que si le système passe par un de ces points il y reste indéfiniment.

Théoreme 1

$u' = f(u)$ si il existe v tel que $f(v) = 0$ alors v est un point stationnaire de l'équation différentielle.

3.1 Rappel des théorèmes

D'abord on rappelle les résultats sur lesquels on s'appuiera dans la suite. Ces théorèmes établissent des résultats de stabilité sur les points stationnaires en se basant sur l'étude spectrale de la différentielle.

Théoreme 2

Soit $f \in C^2(U; E)$ sur un ouvert U d'un espace de Banach E et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si le spectre de $\mathcal{D}_f(v)$ est inclus dans le demi-plan ouvert $\{\lambda; \Re(\lambda) < 0\}$ alors v est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'équation $u' = f(u)$

Ce résultat nous permet de conclure sur le comportement assymptotique des solutions ayant subi une faible perturbation à l'instant de départ (c'est-à-dire les solution (\mathbb{R}_+, u_1) telles que $u_1(t_{\text{init}}) = u(t_{\text{init}}) + \varepsilon$, $0 < \|\varepsilon\| \ll 1$). On obtient ainsi $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u - u_1\| = 0$.

Théoreme 3

Soit $f \in C^2(U; E)$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si $\max\{\Re(\lambda); \lambda \in \text{Sp}(\mathcal{D}_f(v))\}$ est atteint pour une valeur propre de $\mathcal{D}_f(v)$ de partie réelle strictement positive. Alors v est un point d'équilibre instable pour l'équation $u' = f(u)$

3.2 Détermination des équilibres

Dans un premier temps on regarde si notre système possède des équilibres et si oui lesquels.

Proposition 3.1

L'équation (1) possède 3 points d'équilibre qui sont :

$$0_{\mathbb{R}^3} \quad S_+ := \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{pmatrix} \quad S_- := \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{pmatrix}$$

Démonstration : On remarque que $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} := 0$ donc $(\mathbb{R}_+, 0)$ est une solution de l'équation différentielle. On résout alors $\Gamma(x, y, z) = 0$ en supposant que $(x, y, z) \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y-x) = 0 & (L_1) \\ \rho x - y - xz = 0 & (L_2) \\ xy - \beta z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

de (L_1) on obtient que $x = y$. Dans (L_2) et dans (L_3) on remplace y par x , il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0$$

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\beta}$$

On obtient ainsi un polynôme de degré 3 il y a donc au plus 3 équilibres :

$$(L_2) \Rightarrow x(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}) = 0, \text{ or } x \neq 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \beta(1 - \rho)$$

Si $\beta(1 - \rho) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0, \rho \leq 1$ ou $\beta \leq 0, \rho \geq 1$ alors :

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\beta(1 - \rho)}$$

De ces trois équation on obtient que :

$$\Gamma(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x, y, z) = (\pm \sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

On verifie aisément que cette relation est une équivalence, en ramplacant les valeurs obtenue de x, y et z dans $\Gamma(x, y, z)$ ■

Remarque : Si $\rho = 1$ il n'y a qu'un seul équilibre.

3.3 Caractérisation de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$

Afin d'utiliser les outils introduit dans la partie 3.1, on calcule le polynome caractéristique de la différentielle en 0 (noté χ) donné par le calcul suivant.

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - \mathcal{D}_\Gamma(0, 0, 0)) = (\lambda - \beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma)$$

Remarque : β est toujours racine de χ

On remarque que χ est un polynome de degré 3 et d'après la remarque précédente on a que $\chi(\lambda) = (\lambda - \beta)P(\lambda)$, avec $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma$. Ainsi les pour étudier χ , on calcule le deteterminant de P :

$$\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4(\sigma - \rho\sigma) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho$$

Proposition 3.2 (Cas 1 :)

Si $(\rho, \sigma) = (0, 1)$, alors :

1. Si $\beta > 0$ alors 0 équilibre instable pour (1)
2. Si $\beta < 0$ alors 0 équilibre asymptotiquement stable pour (1)

Démonstration : Dans ce cas on a, $\chi(x) = (\lambda - \beta)(\lambda + 1)^2$. Donc $\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0, 0, 0)) = \{\beta, -1\}$, on différencie alors 2 cas. Si β est strictement positif alors d'après 3 l'équilibre est instable. Si β est strictement négatif d'après 2 l'équilibre est asymptotiquement stable ■

Cas 2 : Si $(\rho, \sigma) = (1, -1)$:

Alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \beta)\lambda^2$, donc d'après le théoreme, si β est strictement positif (resp. strictement négatif) $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilibre instable (resp. asymptotiquement stable) pour (1)

Cas 3 : Si $\rho \in]0, 1[$, $\sigma \in \mathbb{R}$:

$\Delta > (\sigma - 1)^2 > 0$ donc P a deux racines réelles. que l'on note :

$$\lambda_{\pm} = \frac{-(\sigma - 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}}{2}$$

Regardons le signe des racines. $\lambda_+ < -(\sigma - 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho} \leq 0$, de même pour λ_- , on a, $\lambda_- < -\sigma + 1 - |\sigma - 1| \leq 0$. De plus si β est strictement négatif, toutes les racines sont strictement négative donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1). Si $\beta > 0$, $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilibre instable.

Cas 4 : Si $\rho > 1$ et $\sigma \geq 0$:

Dans ce cas on a $\Delta > 0$, on retrouve la même expression des racines que précédemment λ_{\pm} . On trouve que $2\lambda_+ > 1 - \sigma + |\sigma + 1| \geq 0$, donc $\lambda_+ > 0$, pour λ_-

on a, $2\lambda_- < 1 - \sigma - |\sigma + 1| \leq 0$, donc $\lambda_- < 0$, dans ce cas $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1).

Cas 5 : Si $\rho < 0$ et $\sigma \leq 0$:

Comme dans le cas précédent on trouve $\Delta > 0$ avec cette fois $\lambda_+ < 0$ et $\lambda_- > 0$. On le retrouve en majorant $2\lambda_+$ et $2\lambda_-$ par $\rho = 0$, on majore ainsi λ_+ et minore λ_- . Donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1).

3.4 Caractérisation de S_{\pm}

4 Annexes