$$\begin{cases} x' &= \sigma(y-x) & (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' &= xy - \beta z & (L_3) \end{cases} \tag{1}$$

On peut récrire ce systeme de la manière suivante.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \tag{2}$$

Remarque : Γ est polynomiale, donc Γ est de classe C^∞ en particulier elle est C^1.

Proposition : Les solutions du systeme de Lorenz sont globales sur $\mathbb{R}_+$

Demonstration : Γ est C^1 donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle de depend pas directement du temps. D'après le théoreme de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution maximale de classe C^1 que l'on notera $(I, (x, y, z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ avec $I =]0, T[, \ T \in]0, +\infty]$. Montrons que $(I, (x, y, z))$ est globale. Dans (1) on s'intéresse à la quantité : $x(L_1) + y(L_2) + z(L_3)$

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xyz - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ ($\mathcal{N}$ est la norme euclidienne au carré)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{N}(t) &= (\sigma+\rho)xy - \sigma x^2 - y^2 - \beta z^2 \\ &\leq (\sigma+\rho)xy + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2+y^2) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) && (\textit{Young})^{1} \\ &\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2+y^2+z^2) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left[\frac{\sigma+\rho}{2} + \min(1,\sigma,\beta)\right]\mathcal{N}(t) \end{aligned}$$

Posons $\eta = \sigma + \rho - 2\min(1, \sigma, \beta))$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{N}(t) \leq \eta \ \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}, \ \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini.

1. $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Proposition : Les solution de (1) sont C^∞

Demonstration : Par définition de (1) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$, or par composition $\Gamma(x, y, z)$ est C^1 donc (x', y', z') l'est aussi ainsi (x, y, z) est C^2.De la même manière on obtient par récurence immédiate que (x, y, z) est C^∞

On cherche maintenant les points stationnaire de (1).
On remarque que $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} \equiv 0$ donc ($\mathbb{R}$,0) est une solution de l'equation differentielle.
On resout alors $\Gamma(x, y, z) = 0$ en supposant que $(x, y, z) \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) & = 0 \quad (L_1) \\ \rho x - y - xz & = 0 \quad (L_2) \\ xy - \beta z & = 0 \quad (L_3) \end{cases}$$

de (L_1) on obtient que $x = y$. Dans (L_2) on remplace y par x, il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0 \Rightarrow z = \rho - 1$$

De même dans (L_3)

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{\beta z}$$

De ces trois équation on obtient que :

$$\Gamma(x, y, z) = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

On verifie aisaiment que cette relation est une équivalance, en ramplacant les valeurs obtenue de x,y et z dans $\Gamma(x, y, z)$
On se propose d'étudier la stabilité des points stationnaires. Pour cela on s'intéresse à la linéarisé de (1), donné par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathcal{D}_\Gamma(x_s, y_s, z_s) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec (x_s, y_s, z_s) les coordonnées des points stationnaire, $\mathcal{D}_\Gamma(x, y, z)$ la differentielle de Γ donné par :

$$\mathcal{D}_\Gamma(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

On étudie premièrement l'équilibre autour de $0_{\mathbb{R}^3}$:
L'équation ainsi obtnue est :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

Autrement dit on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y \\ z' = \beta z \end{array}\right. \tag{4}$$