$$\left\{\begin{array}{lll} x' & = \sigma(y-x) & (L_1) \\ y' & = \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' & = xy - \beta z & (L_3) \end{array}\right. \tag{1}$$

On peut récrire ce systeme de la manière suivante.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \tag{2}$$

Remarque : Γ est polynomiale, donc Γ est de classe C^∞ en particulier elle est C^1.

Proposition : Les solutions du systeme de Lorenz sont globales sur $\mathbb{R}_+$

Demonstration : Γ est C^1 donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle de depend pas directement du temps. D'après le théoreme de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution maximale de classe C^1 que l'on notera $(I,(x,y,z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ avec $I =]0,T[,\ T \in]0,+\infty]$. Montrons que $(I,(x,y,z))$ est globale. Dans (1) on s'intéresse à la somme de la x fois première ligne avec y fois la seconde ligne et z fois la troisième ligne.

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xyz - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ ($\mathcal{N}$ est la norme euclidienne au carré)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{N}(t) &= (\sigma+\rho)xy - \sigma x^2 - y^2 - \beta z^2 \\ &\leq (\sigma+\rho)xy + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2+y^2) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) && (\mathit{Young})\,^1 \\ &\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2+y^2+z^2) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left[\frac{\sigma+\rho}{2} + \min(1,\sigma,\beta)\right]\mathcal{N}(t) \end{aligned}$$

Posons $\eta = \sigma + \rho - 2\min(1,\sigma,\beta))$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{N}(t) \leq \eta\ \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t},\ \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini.

1. $\forall p,q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a,b \in \mathbb{R}\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Proposition : Les solution de (1) sont C^∞

Demonstration : Par définition de (1) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$, or par composition $\Gamma(x, y, z)$ est C^1 donc (x', y', z') l'est aussi ainsi (x, y, z) est C^2.De la même manière on obtient par récurence immédiate que (x, y, z) est C^∞

On cherche maintenant les points stationnaire de (1).
On remarque que $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} \equiv 0$ donc ($\mathbb{R}_+$,0) est une solution de l'equation differentielle.
On resout alors $\Gamma(x, y, z) = 0$ en supposant que $(x, y, z) \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y-x) & = 0 \quad (L_1) \\ \rho x - y - xz & = 0 \quad (L_2) \\ xy - \beta z & = 0 \quad (L_3) \end{cases}$$

de (L_1) on obtient que $x = y$. Dans (L_2) on remplace y par x, il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0$$

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\beta}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} (L_2) &\Rightarrow x(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}) = 0 \text{ or } x \neq 0 \\ &\Rightarrow x^2 = \beta(1-\rho) \\ \text{Si } \beta(-\rho) \geq 0 &\Leftrightarrow \beta \geq 0, \rho \leq 1 \text{ ou } \beta \leq 0, \rho \geq 1 \text{ alors :} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{\beta(1-\beta)} \end{aligned}$$

De ces trois équation on obtient que :

$$\Gamma(x, y, z) = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho - 1)$$

On verifie aisément que cette relation est une équivalance, en ramplacant les valeurs obtenue de x,y et z dans $\Gamma(x, y, z)$

Remarque : Si $\rho = 0$ alors il n'y a qu'un seul équilibre

On se propose d'étudier la stabilité des points stationnaires. Pour cela on s'intéresse à la linéarisé de (1), donné par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathcal{D}_\Gamma(x_s, y_s, z_s) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec (x_s, y_s, z_s) les coordonnées des points stationnaire, $\mathcal{D}_\Gamma(x, y, z)$ la differentielle de Γ donné par :

$$\mathcal{D}_\Gamma(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

On étudie premièrement l'équilibre autour de $0_{\mathbb{R}^3}$:
L'équation ainsi obtnue est :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

Autrement dit on obtient :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y \\ z' = \beta z \end{cases} \tag{4}$$

On se propose de caractériser l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$.
Rappel : Théoreme :
Soient $f \in C^2(U; E)$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si $\max\{\Re(\lambda); \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathcal{D}_f(v))\}$ est atteint pour une valeur propre de $\mathcal{D}_f(v)$ de partie réelle strictement positive. Alors v est un point d'équilibre instable pour l'équation $u' = f(u)$
Calculons le polynome caractéristique de la differentielle de Γ en $0_{\mathbb{R}^3}$, on notera se polynome χ.

$$\chi(\lambda) = \det\big(\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{D}_\Gamma(0,0,0)\big) = (\lambda - \beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma)$$

Remarque : β est toujours racine de χ
Posons $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma$, donc $\chi(\lambda) = (\lambda - \beta)P(\lambda)$, on calcule le deteterminant de P :

$$\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4(\sigma - \sigma\rho)) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho$$

On obtient alors un autre polynome. On étudie son signe et on différencie les cas suivant :

<u>Cas 1 : Si $(\rho, \sigma) = (0, 1)$:</u>
Alors $\chi_A(x) = (x - \beta)(x + 1)^2$, donc d'après le théoreme, si β est strictement positif 0 est un point d'équilibre instable pour (1)

<u>Cas 2 : Si $(\rho, \sigma) = (1, -1)$:</u>
Alors $\chi_A(x) = (x - \beta)x^2$, donc d'après le théoreme, si β est strictement positif 0 est un point d'équilibre instable pour (1)

<u>Cas 3 : Si $\rho \in]0, 1[, \sigma \in \mathbb{R}$:</u>
$\Delta > (\sigma - 1)^2 > 0$ donc P a deux racines réelles. que l'on note :

$$x_\pm = \frac{-(\sigma - 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}}{2}$$

Regardons le signe des racines. $x_+ < -(\sigma - 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2} \leq 0$, de même pour x_-, on a, $x_- < -\sigma + 1 - |\sigma - 1| \leq 0$. De plus si β est strictement négatif, toutes les racines sont strictement négative donc 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1). }

Cas 4 : Si $\rho > 1$ et $\sigma \geq 0$:
Dans ce cas on a $\Delta > 0$, on retrouve la même expression des racines que précédemment $x_{\pm}$. On trouve que $2x_+ > 1 - \sigma + |\sigma + 1| \geq 0$, donc $x_+ > 0$, pour x_- on a, $2x_- < 1 - \sigma - |\sigma + 1| \leq 0$, donc $x_- < 0$, dans ce cas 0 est un équilibre instable pour (1).

Cas 5 : Si $\rho < 0$ et $\sigma \leq 0$:
Comme dans le cas précédent on trouve $\Delta > 0$ avce cette fois $x_+ < 0$ et $x_- > 0$. On le retrouve en majorant $2x_+$ et $2x_-$ par $\rho = 0$ on majore ainsi x_+ et minore x_-. Donc 0 est un équilbre instable pour (1).

Remarque : Les cas 1,3,4,5 sont des point d'équilibre hyperbolique de (1) en effet, $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Vect}(i) = \emptyset$