

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) & (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' &= xy - \beta z & (L_3) \end{cases} \quad (1)$$

On peut récrire ce système de la manière suivante.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Remarquons que Γ est polynomiale, donc Γ est de classe C^∞ en particulier elle est C^1 . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution maximale de classe C^1 que l'on notera $(I, (x, y, z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ avec I de la forme $]0, T[, T \in]0, +\infty]$. Montrons que $(I, (x, y, z))$ est globale. Dans (1) on s'intéresse à la quantité : $x(L_1) + y(L_2) + z(L_3)$

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xyz - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ (N est la norme euclidienne au carré)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{N}(x, y, z) \right) &= (\sigma + \rho)xy - \sigma x^2 - y^2 - \beta z^2 \\ &\leq (\sigma + \rho)xy - \min(1, \sigma, \rho) \mathcal{N}(x, y, z) \\ (Young)^1 &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) (x^2 + y^2) + \mathcal{N}(x, y, z) \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2) + \mathcal{N}(x, y, z) \\ &\leq \left[\frac{\sigma + \rho}{2} - \min(1, \sigma, \rho) \right] \mathcal{N}(x, y, z) \end{aligned}$$

Posons $\eta = \sigma + \rho - 2 \min(1, \sigma, \rho)$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{d}{dt} \left(\mathcal{N}(x, y, z) \right) \leq \eta \mathcal{N}(x, y, z)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{N}(x, y, z)(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}, \text{ avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(x, y, z)(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini. En effet supposons par l'absurde que la norme du vecteur (x, y, z) explose en temps fini c'est-à-dire :

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{N}(x, y, z)(t) = +\infty \text{ mais, } \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{N}_0 e^{\eta t} = \mathcal{N}_0 e^{\eta t_0} \leq +\infty$$

1. $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Or,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \mathcal{N}(x, y, z)(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}$$

On obtient alors une absurdité. Donc $\mathcal{N}(x, y, z)$ n'explose pas en temps fini. On en déduit que (x, y, z) n'explose pas en temps fini. En effet supposons que une des composante explose en temps fini par exemple x , c'est-à-dire :

$$\exists t_* \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow t_*} x(t) = +\infty$$

$$\text{Or, } \forall t \in \mathbb{R}_+ x(t) \leq x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}$$

En passant à la limite dans l'inéquation précédente on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow t_*} x(t) < \lim_{t \rightarrow t_*} \mathcal{N}_0 e^{\eta t}$$

c'est une absurdité donc (x, y, z) est une solution globale de (1) c'est-à-dire $I = \mathbb{R}_+$

Par définition de (1) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$, or par composition $\Gamma(x, y, z)$ est C^1 donc (x', y', z') l'est aussi ainsi (x, y, z) est C^2 . De la même manière on obtient par récurrence immédiate que (x, y, z) est C^∞

On cherche maintenant les points stationnaire de (1).

On remarque que $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} \equiv 0$ donc $(\mathbb{R}, 0)$ est une solution de l'équation différentielle.

On résout alors $\Gamma(x, y, z) = 0$ en supposant que $(x, y, z) \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 & (L_1) \\ \rho x - y - xz = 0 & (L_2) \\ xy - \beta z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

de (L_1) on obtient que $x = y$. Dans (L_2) on remplace y par x , il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0 \Rightarrow z = \rho - 1$$

De même dans (L_3)

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \pm \sqrt{\beta z}$$

De ces trois équation on obtient que :

$$\Gamma(x, y, z) = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (\pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

On vérifie aisément que cette relation est une équivalence, en remplaçant les valeurs obtenue de x, y et z dans $\Gamma(x, y, z)$