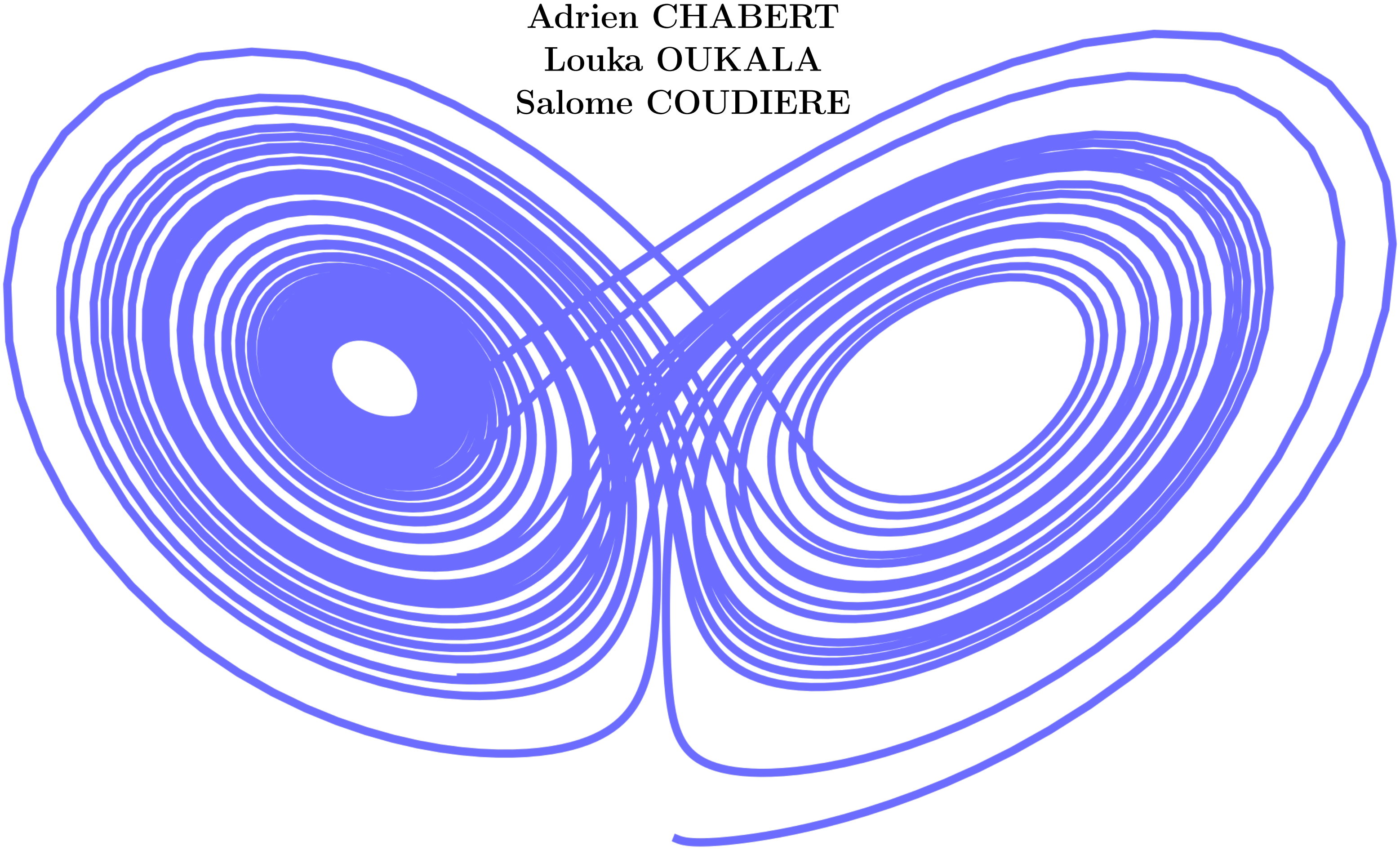
Attracteur de Lorenz

Projet de licence 3

Adrien CHABERT
Louka OUKALA
Salome COUDIERE



Second semestre - Année 2023-2024

Table des matières

1 Introduction

> Does a flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?

C'est le titre de l'article que Edward N. Lorenz publie en 1972 [3], dans le quel il fait la synthèse de ce que l'on connait sous le nom de la théorie du chaos. La question peut être traduite par "Est-ce qu'un battement d'ailes de papillon au Brésil peut entrainer une tornade au Texas ?". En effet lors de l'étude de certains systèmes, une faible variation peut entraîner des changements considérables dans les états ultérieurs du système. Tout au long de sa vie Lorenz se seras intéressé aux systèmes chaotiques essentiellement appliqués à son domaine de recherche : la météorologie. Dès 1963, il propose un modèle simplifié pour essayer de décrire la méteo [4]. Ce modèle à contribué à montrer la difficulté de prédire le climat à long terme. Ce modèle à été présenté sous la forme suivante.

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y-x), \qquad (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz, \qquad (L_2) \\ z' &= xy - \beta z, \qquad (L_3) \end{cases} \tag{1}$$

($Avec\ \sigma, \rho, \beta\ des\ paramètres$). Dans ce système les inconues sont les fonction du temps t, x,y et z. x est un indicateur des mouvements de convection, y est proportionnel à la variation de température dans les courants verticaux, et z est un indicateur de la variation de température par rapport à un profil linéaire. Dans l'approximation les paramètres σ et ρ correspondent au nombre de Prandtl et au nombre de Rayleigh. Nous nous interresseront uniquement à l'étude mathématique de ce système. Ce système est appelé l'attracteur de Lorenz (aussi appelé attracteur étrange ou système de Lorenz). À travers cette étude nous allons présenter certaines caractéristiques chaotiques du système en modélisant les résultats théoriques avec des applications numériques, nous pourrons notamment observer les courbes qui prennent la forme d'ailes de papillon qui donneront leur nom a l'effet éponyme.

2 Résultats fondamentaux pour les équations differentielles

2.1 Définitions

Dans ce chapitre on rappelle les résultats sur lesquels repose notre étude.

Définition 1

On appele équation différentielle une équation de la forme

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

où $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^d)$ et $u \in C^1(I, U)$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

Remarque : Si f ne dépend pas directement de t, l'équation est dite autonome

Lorsque l'on s'intéresse aux équations differentielles, on s'intéresse plus particulièrement au problème de Cauchy, que l'on peut définir comme suit.

Définition 2

On appele problème de Cauchy, une équation différentielle munit d'une condition initiale, une information sur une valeurs de la fonction. On le présente sous la forme d'un système.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t = t_i) = u_i \end{cases}$$

Avec $t_i \in I, u_i \in U$

2.2 Outils pour les équations differentielles

Lorsque l'on souhaite étudier les équations differentielles le lemme de Grönwall est un outils essentiel, il notamment permet d'obtenir un contrôle sur le comportement des solutions.

Lemme 1

Soit $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ et $a \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in [0, T] u'(t) \leq a(t)u(t)$$

Alors $\forall t \geq t_0, t_0 \in [0, T]$, on a :

$$u(t) \leq u(t_0) e^{\int_{t_o}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s}$$

Cet énoncé du lemme n'est pas le plus complet qu'il est possible d'établir, il est cependant suffisant pour notre étude. On admet la démonstration que l'on peut retrouver dans le livre de Berthelin (p.18) [5]. L'outil le plus important pour l'étude des équations différentielles ordinaire, qui nous permet de déterminer l'existence et l'unicité des solutions est le théorème suivant.

Théoreme 1

Soient $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^d)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et (t_0, u_0). On suppose que f est localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur $[0, T]$. Alors

- *il existe $T > 0$ et $u \in C^1([0, T], U)$ est solution du problème de Cauchy*
- *si v est une autre solution, elle coïncide avec u sur l'intervalle $[0, T]$*

Nous admettrons la démonstration de ce théorème dont on peut retrouver la démonstration dans le livre de F. Filbet (section 6.2.2) [6]. Maintenant que nous avons introduit les principaux outils pour l'étude des équations différentielle, on peut à présent s'interresser au système de Lorenz (1)

3 Existence et premières propriétés

Dans cette section nous allons faire une étude du systeme de Lorenz afin de déterminer l'existence des solutions. Nous nous limiterons à l'étude des temps positifs ($t \geq 0$).

Proposition 3.1

Le système de Lorenz admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^1

Démonstration : Premièrement on transforme le système de Lorenz sous la forme d'un problème d'ordre 1.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \tag{2}$$

À présent montrons l'existence des solutions de ce système. Γ est C^1 donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle de depend pas directement du temps. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution de classe C^1 sur $[0,T]$ que l'on notera $(I,(x,y,z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ avec $I = [0,T[,\ T \in]0,+\infty]$. Montrons que $T = +\infty$. Dans (1) on s'intéresse à la somme de, x fois première ligne avec y fois la seconde ligne et z fois la troisième ligne.

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xyz - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (x,y,z) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, c'est la norme euclidienne au carré.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{N}(t) &= (\sigma+\rho)x(t)y(t) - \sigma x^2(t) - y^2(t) - \beta z^2(t) \\
&\leq (\sigma+\rho)x(t)y(t) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \\
&\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2(t)+y^2(t)) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) && (\textit{Young})^{1} \\
&\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \\
&\leq \left[\frac{\sigma+\rho}{2} + \min(1,\sigma,\beta)\right]\mathcal{N}(t)
\end{aligned}$$

Posons $\eta = \sigma + \rho + 2\min(1,\sigma,\beta)$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{N}(t) \leq \eta\ \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t},\ \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini. ∎

1. $\forall p,q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a,b \in \mathbb{R}\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

En ayant obtenu les résultats de la proposition, on peut aisément en déduire la propriété suivante.

Corollaire 1

Les solutions du système de Lorenz (1) *sont de classe* C^∞

Démonstration : Par (2) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$, or par composition $\Gamma(x, y, z)$ est C^1 donc (x', y', z') l'est aussi, ainsi (x, y, z) est C^2.De la même manière on obtient par récurence immédiate que (x, y, z) est C^∞ ■

Cette propriété nous permet de dire que même si (1) est un système dit chaotique, on peut affirmer que les solutions sont régulières.

4 Étude des points stationnaires

Après une première étude du système de Lorenz (1), on s'intéresse maintenant à la stabilité du système de Lorenz autour des points d'équilibre que l'on définit comme suit.

Définition 3

Soit $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^d$, f définit une équation différentielle autonome. On appele point stationnaire ou d'équilibre de l'équation differentielle, tout point $v \in U$ tel que :

$$f(v) = 0$$

4.1 Rappel des théorèmes

Avant de s'intéresser aux théorèmes qui nous donnent les résultats de stabilité, on rappelle les définitions de la différentielle et du spectre qui nous serviront par la suite.

Définition 4

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

L'application linéaire L est alors appelée la differentielle de f en a on la note $\mathcal{D}_f(a)$

Remarque : Dans la suite on appellera différentielle, l'application linéaire et la matrice associé à l'application linéaire dans la base cannonique sans distinction.

Définition 5

On définit le spectre d'une application linéaire f sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel (avec $\mathbb{K}= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).Comme l'ensemble des valeurs propres de f. On le note $\mathrm{Sp}(f)$

Maintenant on rappelle les résultats sur lesquels on s'appuira dans la suite. Ces théorèmes établissent des résultats de stabilité dite linéaire autour des points stationnaires en se basant sur l'étude spectrale de la différentielle.

Théoreme 2

Soit $f \in C^2(U; \mathbb{R}^d)$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si le spectre de $\mathcal{D}_\Gamma(v)$ est inclus dans le demi-plan ouvert $\{\lambda; \Re(\lambda) < 0\}$ alors v est un point d'équilibre assymptotiquement stable pour l'équation $u' = f(u)$

Ce résultat nous permet de conclure sur le comportement assymtotique des solutions ayant subit une faible perturbation à l'instant de départ. Ainsi deux solutions une ayant subit une perturbation à l'instant initial et l'autre non, approchent assymptotiquement la même trajectoire.

Théoreme 3

Soit $f \in C^2(U;\mathbb{R}^d)$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si $\max\{\Re(\lambda); \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathcal{D}_f(v))\}$ est atteint pour une valeur propre de $\mathcal{D}_f(v)$ de partie réelle strictement positive. Alors v est un point d'équilibre instable pour l'équation $u' = f(u)$

Ces théorèmes nous donnent des résultats seulemment pour des valeurs propres strictement négative ou strictement positive. Cependant ces théorèmes ne nous permettent pas de conclure sur le cas où 0 est valeur propre de la différentielle. Il existe des résultats qui permettent de conclure sur la stabilité simple, cependant nous ne traiterons pas ce cas dans notre étude.

4.2 Détermination des équilibres

Dans un premier temps on regarde si notre système possède des équilibres et si oui lesquels.

Proposition 4.1

Si $\beta(1-\rho) \geq 0$, l'equation (1) possède 3 points d'équilibre qui sont :

$$S_0 := 0_{\mathbb{R}^3} \qquad S_+ := \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \qquad S_- := \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration : On remarque que $(0,0,0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $(\mathbb{R}_+, 0_{\mathbb{R}^3})$ est une solution de l'équation différentielle.
On résout alors $\Gamma(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$ en supposant que $(x,y,z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y-x) &= 0 \quad (L_1) \\ \rho x - y - xz &= 0 \quad (L_2) \\ xy - \beta z &= 0 \quad (L_3) \end{cases}$$

de (L_1) on obtient que $x = y$. Dans (L_2) et dans (L_3) on remplace y par x, il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0$$
$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\beta}$$

On obtient ainsi un polynôme de degré 3, il y a donc au plus 3 équilibres :

$$
\begin{aligned}
(L_2) &\Rightarrow x(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}) = 0, \text{ or } x \neq 0 \\
&\Rightarrow x^2 = \beta(1-\rho) \\
\text{Si } \beta(1-\rho) \geq 0 &\Leftrightarrow \beta \geq 0, \rho \leq 1 \text{ ou } \beta \leq 0, \rho \geq 1 \text{ alors :} \\
&\Rightarrow x = \pm\sqrt{\beta(1-\rho)}
\end{aligned}
$$

De ces trois équations on obtient que :

$$\Gamma(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x,y,z) = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho - 1)$$

On verifie aisément que cette relation est une équivalance, en ramplacant les valeurs obtenue de x,y et z dans $\Gamma(x,y,z)$ ■

Remarque : Si $\rho = 1, 0$ est une racine triple de χ, donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point stationnaire triple pour (1).

4.3 Stabilité de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$

Afin d'utiliser les outils introduit dans la partie 4.1 on introduit le lemme suivant.

Lemme 2 (*préliminaire*)

Le polynôme caractéristique de la differentielle de Γ évalué en $0_{\mathbb{R}^3}$ est :

$$\chi(\lambda) = (\lambda + \beta)P(\lambda)$$

Avec $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2 + \lambda(\sigma+1) + \sigma - \rho\sigma$, de plus le déterminant de P est :

$$\Delta = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho$$

Notons que $-\beta$ est toujours racine de χ

Démonstration : Dans un premier temps on calcule la différentielle de Γ :

$$\mathcal{D}_\Gamma(x_s, y_s, z_s) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z_s & -1 & -x_s \\ y_s & x_s & -\beta \end{pmatrix} \tag{3}$$

A présent on calcule le polynôme caractéristique de la différentielle en $0_{\mathbb{R}^3}$ (noté χ) donné par le calcul suivant.

$$\chi(\lambda) = \det\left(\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{D}_\Gamma(0,0,0)\right) = (\lambda+\beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma+1) + \sigma - \rho\sigma)$$

Posons P comme dans le lemme. Ainsi pour étudier χ, on calcule le détetermi-nant de P :

$$\Delta = (\sigma+1)^2 - 4(\sigma - \sigma\rho) = (\sigma-1)^2 + 4\sigma\rho$$ ■

Dans l'étude que l'on propose on vas distinguer 3 cas pour étudier la stabilité l'équilibre du système de Lorenz près de l'origine.

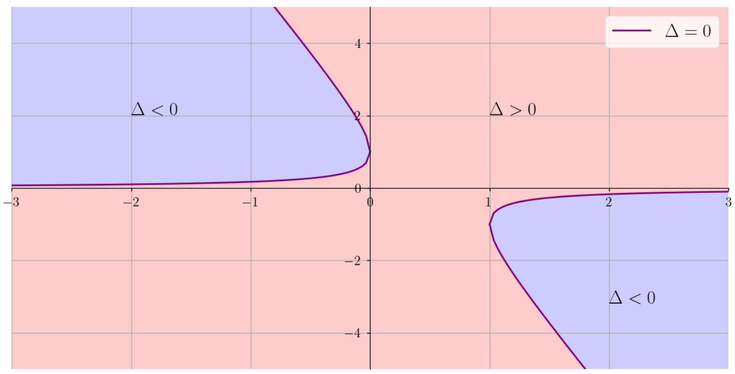


FIGURE 1 – Signe de Δ en fonction de ρ en abscisse et de σ en ordonné

Cas $\Delta > 0$

Proposition 4.2

Dans le cas $\Delta > 0$ si $\beta < 0$ l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$ est instable, si $\beta > 0$ on a :
- *Si $\sigma(\rho - 1) > 0$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1)*
- *Si $\sigma(\rho - 1) < 0$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre assymptotiquement stable pour (1)*

Démonstration : Premièrement on détermine les conditions pour que Δ soit strictement positif.

Lemme 3

Δ est strictement positif pour l'ensemble des paramètre suivant :

$$\left\{(\sigma,\rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} > \sigma \text{ ou } \sigma > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}\right\}$$

Démonstration (Lemme) : $\Delta = \sigma^2 + \sigma(4\rho - 2) + 1$ est un polynôme de la variable σ. On note le deteterminant de Δ selon la variable σ, δ. Δ est convexe par rapport à la variable σ donc Δ est strictement positif à l'éxtérieur de ses racines. On a donc :

$$\sigma < 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

ou

$$\sigma > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

■

Maintenant regardons l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$ dans le cas $\Delta > 0$.On peut expliciter les racines de χ qui constitue le spectre de la differentielle de Γ.On a ainsi :

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3})) = \left\{-\beta, \lambda_+ := \frac{-(\sigma+1)+\sqrt{\Delta}}{2}, \lambda_- := \frac{-(\sigma+1)-\sqrt{\Delta}}{2}\right\}$$

Premièrement on différencie le cas $\beta < 0$, dans ce cas alors $\max(\mathrm{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3}))) \geq -\beta > 0$, donc dans ce cas $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1). Dans le cas où β est positif,comme $\lambda_+ > \lambda_-$ si $\lambda_+ > 0$ l'équilibre est instable sinon l'équilibre est instable. On cherche alors ρ et σ tel que $\lambda_+ > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{-(\sigma+1)+\sqrt{(\sigma-1)^2+4\rho\sigma}}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\sigma-1)^2+4\rho\sigma > (\sigma+1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \sigma(\rho-1) > 0 \end{aligned}$$

■

Cas $\Delta = 0$

Proposition 4.3

Dans le cas $\Delta = 0$: Si $\beta < 0$ l'équilibre est instable si $\beta > 0$ alors on a :
- *Si $\sigma < -1, \rho > 1$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1)*
- *Si $\sigma > -1, \rho < 1$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre assymptotiquement stable pour (1)*

Démonstration : On s'intéresse d'abbord aux cas tels que $\Delta = 0$

Lemme 4

Δ est nul si et seulemment si on a la paramétrisation suivante,

$$\left\{(\sigma,\rho)\in\mathbb{R}^2 : \sigma = 1-2\rho+\sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4}-1} \text{ ou } \sigma = 1-2\rho-\sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4}-1}\right\}$$

Cette paramétrisation implique que $\rho \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$

Démonstration (Lemme) : A nouveau on considère Δ comme un polynôme de la variable σ. Pour que Δ ait des racines il faut que δ soit positif ou nul.

$$\delta \geq 0 \Leftrightarrow \rho(\rho-1) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$$

Maintenant on calcule les racines de Δ.

$$\sigma = \frac{2-4\rho+\sqrt{(4\rho-2)^2-4}}{2} = 1-2\rho+\sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4}-1}$$

ou

$$\sigma = \frac{2-4\rho-\sqrt{(4\rho-2)^2-4}}{2} = 1-2\rho-\sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4}-1}$$

On obtient ainsi la paramétrisation voulue. ■

Maintenant on s'intéresse à la stabilité de l'équilibre pour le cas $\Delta = 0$. Comme $-\beta$ est toujours racine de χ si $\beta < 0$ alors $\max(\mathrm{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3}))) \geq -\beta > 0$ donc d'après le théorème 3, $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1)

Si $\beta > 0$ alors dans le cas de $\Delta = 0, \mathrm{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma) = \{\beta, -\frac{\sigma+1}{2}\}$, on cherche alors les conditions sur les paramètres σ et ρ telles que le système soit instable ou assymptotiquement stable. On s'intéresse au cas instable et on inversera le sens des inégalités pour avoir le cas assymptotiquement stable.

$$-\frac{\sigma+1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sigma < -1$$

Dans la première équation de la paramétrisation on obtient que

$$-1 > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

n'a pas de solutions. Dans la seconde équation on cherche ρ tel que :

$$1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < -1 \Rightarrow \frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1 > (2\rho-2)^2 \Leftrightarrow \rho > 1$$

En faisant les caluls avec l'inégalité inverse, on retrouve le cas assymptotiquement stable. ∎

Cas $\Delta < 0$

Proposition 4.4

Dans le cas $\Delta < 0$: Si $\beta < 0$ l'équilibre est instable si $\beta > 0$ alors on a :
- *Si $\sigma < -1, \rho > 1$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1)*
- *Si $\sigma > -1, \rho < 1$ alors $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre assymptotiquement stable pour (1)*

Démonstration : On détermine les cas tels que $\Delta < 0$

Lemme 5

Δ est strictement négatif pour l'ensemble des paramètres suivants :

$$\left\{(\sigma,\rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < \sigma < 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}\right\}$$

Dans cet ensemble on a que : $\rho \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$

Démonstration (Lemme) : Pour que Δ ait des racines il faut que δ soit strictement positif.

$$\delta > 0 \Leftrightarrow \rho(\rho-1) > 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$$

Par convexité de Δ on a que Δ est négatif entre ses racines, il vient alors :

$$1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < \sigma < 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

Donc l'ensemble des ρ, σ qui vérifie cette inégalité sont alors des paramètres tels que Δ est négatif. ∎

On determine les cas pour lesquels l'équilibre est instable ou assymptotiquement stable.Pour la différenciation du cas de β cf. la démonstration de 4.3. Ainsi il vient :

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3})) = \left\{\beta, \omega := \frac{-(\sigma+1)+i\sqrt{-\Delta}}{2}, \bar{\omega} := \frac{-(\sigma+1)-i\sqrt{-\Delta}}{2}\right\}$$

Pour étudier la stabilité on s'intéresse à la partie réelle de ω et $\bar{\omega}$. Or $\Re(\omega) = \Re(\bar{\omega}) = -\frac{\sigma+1}{2}$ on retombe ainsi sur le même calcul que dans la démonstration de la propriété 4.3. On retrouve bien le cas voulu. ■

4.4 Stabilité de $S_\pm$

Dans cette section nous allons nous intéresser au point d'équilibres définit précédemment S_+ et S_-. Nous ferons aussi quelques hypothèses simplificatrices, supposons σ, ρ, β positifs et de plus $\sigma > \beta + 1$.

Proposition 4.5

Sous les hypothèses de cette section et si $\rho > 1$ alors on definit $\rho^* = \sigma\frac{\sigma+\beta+3}{\sigma-\beta-1}$ tel que

- *si $\rho < \rho^*$ alors les équilibres $S_\pm$ sont assymptotiquement stables pour (1)*
- *si $\rho > \rho^*$ alors les équilibres $S_\pm$ sont instables pour (1)*

Remarque : Si $\rho \in [0, 1[$ les équilibres $S_\pm$ n'existent pas.

Nous admettrons le résultat ci-dessus, une démonstration est proposé dans la these de D. Jones [2].

5 Méthodes numériques

Dans cette section nous allons introduire les méthodes numériques pour la résolution d'équation differentielle ordinaire (EDO).

Problématique : Pourquoi introduire des méthodes numériques pour la résolution des EDO ?

Lorsque on étudie des équations differentielles certains théorèmes comme celui de Cauchy-Lipschitz 1, nous permettent de prouver l'existence de solutions pour un problème de Cauchy. Cependant leurs forme explicite n'est pas garantie. Lorsqu'on aborde les EDO non-linéaire, la plupart du temps nous ne sommes pas capable d'expliciter la solution analytique. C'est pourquoi on introduit les méthodes numériques.
Considérons un problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_I) = \nu \end{cases}$$

Ici u est la fonction à déterminer sur l'intervalle $[t_I, t_F] \subset]a,b[$ [2]. Maintenant que nous savons que la solution existe sur un intervalle de temps fermé ($[t_I, t_F]$), on cherche a approcher les valeurs de la solution numériquement. Pour cela, on subdivise l'intervalle $[t_I, t_F]$ en N sous intervalles et on calcule a l'aide d'un schéma numérique donné, la valeur approché de la solution pour tout les temps $t_n,\ 0 \leq n \leq N$

Première méthode numérique, le schéma d'Euler explicite

On introduit maintenant la première méthode de résolution.

Définition 6

On note $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ la suite des approximations des valeurs de u aux points $(t_n)_{0\leq n\leq N}$. On appelle h le pas de la méthode, et $h := \frac{t_F - t_I}{N}$. Alors on a :

$$\begin{cases} t_n &=& t_0 + nh \\ y_{n+1} &=& y_n + hf(t_n, y_n) \quad \forall 0 \leq n \leq N \\ y_0 &=& \nu \end{cases}$$

Mise en œvre : On intègre notre équation differentielle entre les instants t_n et t_{n+1}, il vient :

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, u(x))\ \mathrm{d}x$$

On approche l'intégrale par la méthode des rectangles et on obtient :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, u(x))\ \mathrm{d}x = (t_{n+1} - y_n) f(t_n, u(t_n))$$

2. En effet ce problème de Cauchy verifie toutes les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, en effet f est C^1 donc localement Lipschitzienne.

Or $\forall n, u(t_n) \approx y_n$, d'où :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

De plus $u(t_0) = \nu = y_0$. On obtient alors le schéma d'Euler explicite.

Le schéma d'Euler est une méthode simple à utiliser et à implémenter. Cependant cette méthode possède des inconvénients dont nous reparlerons plus tard.

Le schéma de Runge-Kutta 4

On s'interresse maintenant au schémas de Runge-Kutta ces schémas sont des méthodes dites multi-pas (c'est-à-dire on fait une moyenne pondérée de l'approximation en plusieurs points). Plus particulièrement, la méthode de Runge-Kutta 4.

Définition 7

On approche les valeurs de la solution de l'équation differentielle par la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ sur l'intervalle $[t_I, t_F]$, avec N le nombre de subdivision de l'intervalle. Alors on a :

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

La méthode de Runge-Kutta 4 est d'ordre 4.

On la choisira pour illustrer les résultats sur le système de Lorenz. Les paramètres que nous utiliserons pour les modélisations à suivre, $[t_I, t_F] = [0, 30], h = 0.01$ et $u(t = 0) = (6, 4, 2)$

Erreur et ordre

Commençons par définir les 2 notions introduites dans le titre de cette sous-partie.

Définition 8

On définit l'erreur globale comme suit :

$$e_n = u(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

De plus on dit que un schéma est d'odre p s'il existe un constante positive C, ne dépendent ni de n ni de h telle que :

$$\max_{n \in 0,\ldots,N} \|e_n\| \leq Ch^p$$

Revennons sur les schéma présenté précédemment. Le schéma d'Euler est d'ordre 1, le schéma de Runge-Kutta 4 est d'ordre 4. C'est-à-dire pour un pas donné $h = 10^{-2}$ l'erreur de la d'Euler sera 10^{-2}, tandis que l'erreur de la méthode de Runge-Kutta 4 sera 10^{-8}. Ainsi pour obtenir la même erreur avec la méthode d'Euler qu'avec la méthode de Runge-Kutta 4 il faudra générer plus de valeurs.

6 Interprétations

Dans cette section on illustre à l'aide de méthodes numériques les résultats de stabilité démontré précédemment.

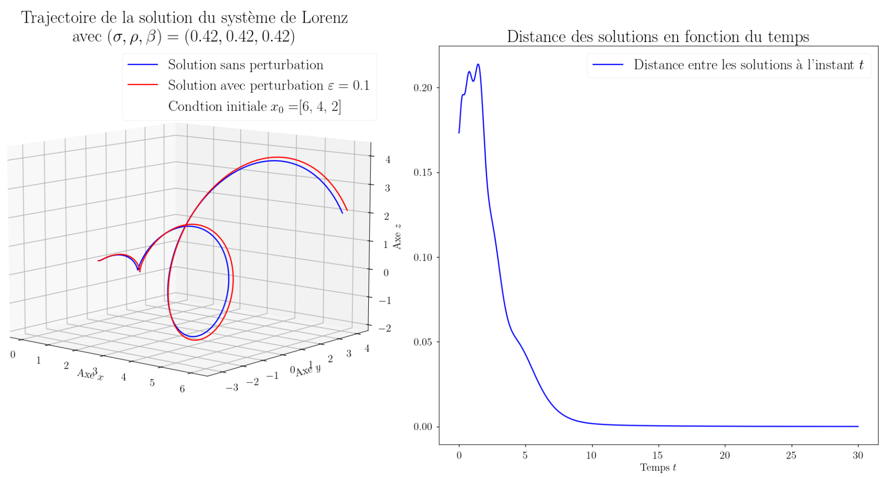


Figure 2 – Exemple d'équilibre assymptotiquement stable pour $\Delta > 0$

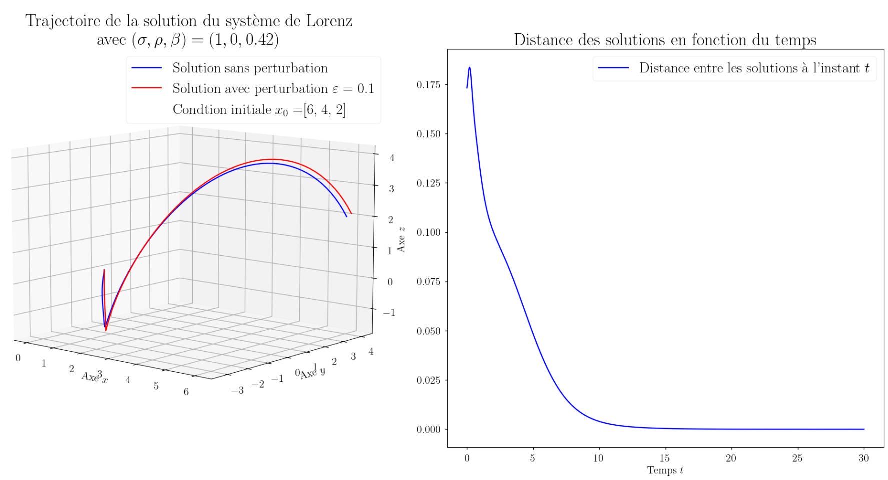


Figure 3 – Exemple d'équilibre assymptotiquement stable pour $\Delta = 0$

Dans les figure 6 ,6 et 6, on observe bien que les solutions commencent leurs trajectoires avec une distance l'une de l'autre et ensuite se rapprochent jusqu'a un écart très faible. On est dans les cas des propositions respectivement 4.2,4.3 et 4.4, cela correspond bien aux cas d'un équilibre assymptotiquement stable.

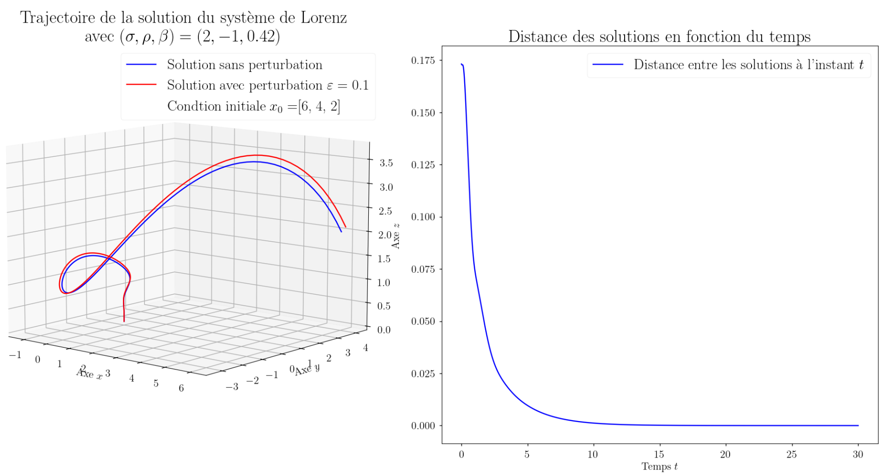


FIGURE 4 – Exemple d'équilibre assymptotiquement stable pour $\Delta = 0$

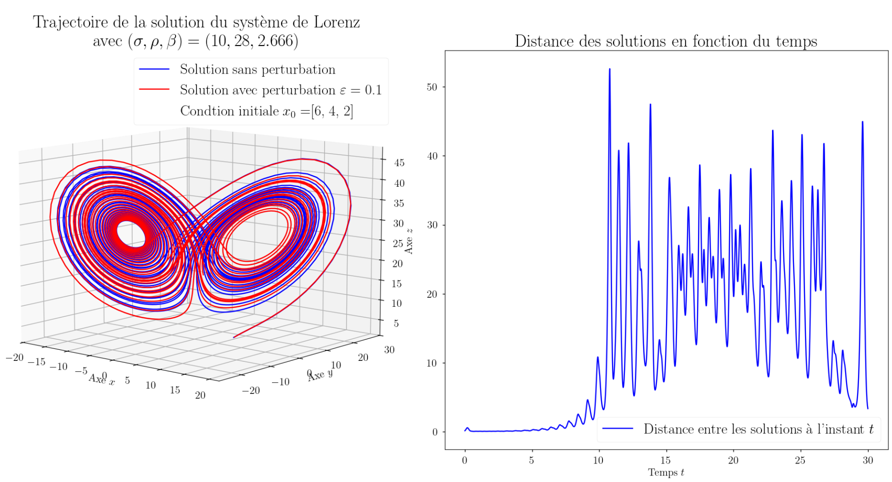


FIGURE 5 – Exemple d'équilibre instable pour $\Delta > 0$

Dans cette configuration (figure 5) on retombe sur les paramètre qui permettent d'observer la trajectoire en forme d'ailes de papillon décrite par E.Lorenz lors de son article de 1963 [4]. La figure observé apparait pour les paramètres $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$. D'après la proposition 4.2 c'est un équilibre instable pour (1). Pour la période observé on observe aucune forme de stabilisation de la trajectoire autour de $0_{\mathbb{R}^3}$, c'est donc bien le cas d'un équilibre instable.

Dans la figure 6 on a $\rho \approx 26, 66$, on observe alors :

— pour $\rho = 1/2$ on a que le système est très simple puisque les équilibre sont réduits a $0_{\mathbb{R}^3}$ de plus nous sommes dans le cas où $\Delta < 0$ et l'équilibre est assymptotiquement stable donc la solution vas directement vers $0_{\mathbb{R}^3}$

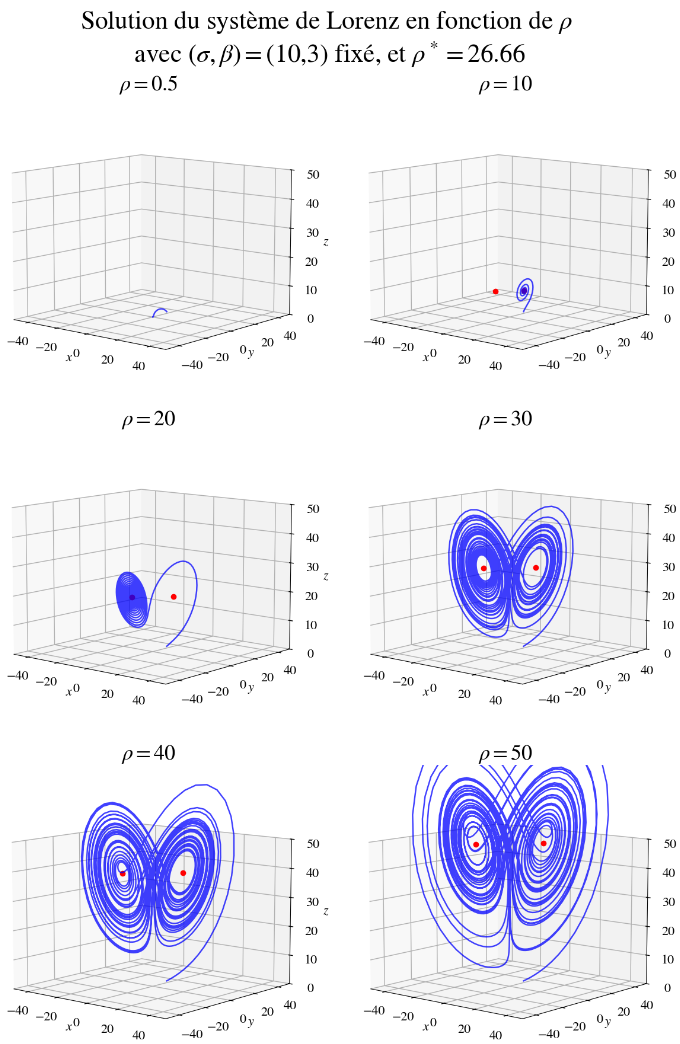


FIGURE 6 – Solutions de (1) en fonction de ρ

- Pour les cas $\rho = 10$ et $\rho = 20$, on se retrouve dans le cas ou les équilibres existent et sont assymptotiquement stables car $\rho < \rho^*$, on observe bien que la trajectoire de la solution se raproche d'un équilibre et ne semble pas s'en éloigner.
- Pour les cas restants on a, $\rho > \rho^*$ on observe alors que la trajectoire de la solution semble s'entendre dans l'espace sans jamais se diriger vers un équilibre. Cependant les solutions semblent rester dans une sous partie de l'espace.

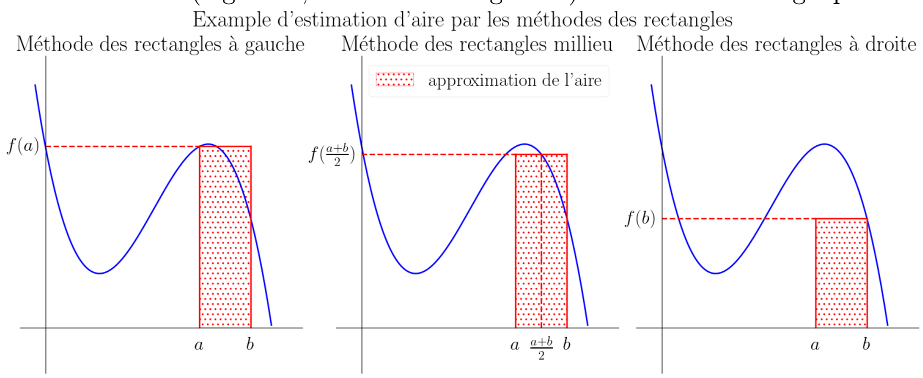
7 Conclusion

Au cours de notre étude à l'aide de l'exemple de l'attracteur de Lorenz, nous avons approché le concept de chaos dans les équations differentielles. Notre étude nous a permis de constater que les comportements singuliers proviennent de faibles perturbations dans les conditions initiales. De plus ces comportements ne sont pas uniquement inhérent au conditions initiales ils dépendent de la configuration du système nous avons pu constater qu'il existe des jeux de paramètres, donc de configurations telles que les trajectoires des solutions ne font pas apparaître de comportement chaotique (On peut faire une analogie avec la mécanique des fluides, les systèmes a grand nombre de Rayleigh sont autement chaotique à cause de faible viscosité, à contrario les systèmes a faible nombre de Rayleigh en forte présence de frottements ne sont pas sensibles au faibles perturbations. c'est d'ailleur la correspondance de ρ dans les approximation de Lorenz). Ces mouvements qui pourraient sembler aléatoire sont en fait déterministe. Cependant dû à la difficulté de mesurer de mainière suffisament fiable les grandeurs qui évoluent dans le système, il en devient hautement imprévisible. C'est ce qu'on a pu constater durant l'étude des équilibres.

8 Annexes

Méthodes des rectangles

La méthode des rectangles est une méthode numérique pour approximer le calcul d'intégrale. La méthode des rectangles consiste à approximer l'aire sous la courbe par un rectangle. On peut choisir la hauteur du rectangle de différentes manières (à gauche, au millieu et à gauche). Décrit dans l'image qui suit.



Considérons l'intégrale bien définie suivante :

$$I := \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{avec } a < b$$

On peur approximer cette intégrale de trois manières différentes : Méthode des rectangles à gauche :

$$I \approx (b-a)f(a)$$

Méthode des rectangles millieu :

$$I \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

Méthode des rectangles à droite :

$$I \approx (b-a)f(b)$$

Remarque : Comme le montre l'image ci-dessus l'approximation peut-être grossière

Code

L'ensemble des graphes ont été génerés sur python à l'aide des bibliothèques Matplotlib et Numpy. Vous pouvez retrouver l'ensemble de ces codes sur le Github du projet ou sur filesender jusqu'au 29/05 :

— Filesender :
`https://filesender.renater.fr/?s=download&token=d4f04658-9db0-4820-ad5d-05dac5863664`

— Github :
`https://github.com/N3rida/Projet`

Les correspondance des fichiers sont celles donné par ce tableau :

genGraph.py	générations des graphes des exemples de la stabilité pour les différent cas de Δ
GrapheSolution.py	graphe de la solution comme dans la page de couverture
DeltaDomain.py	graphe du signe de Δ en fonction de ρ et σ
genSpmEquilibrium.py	graphe pour comparer l'évolution de la trajectoire autour des équilibre $S_\pm$ en fonction de ρ
genMethRect.py	graphe explicatif de la méthode des rectangles

Bibliographie

[1] *Calcul différentiel et équations différentielles.*

[2] Daniel Jones. « Stability Analysis of the Chaotic Lorenz System with a State-Feedback Controller ». In : *Electronic Theses and Dissertations* (1er jan. 2009). url : `https://digitalcommons.georgiasouthern.edu/etd/944`.

[3] Edward Lorenz. « Does a flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ? » In : (jan. 1972).

[4] Edward N. Lorenz. « Deterministic Nonperiodic Flow ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (1er mars 1963). Publisher : American Meteorological Society Section : Journal of the Atmospheric Sciences, p. 130-141. issn : 0022-4928, 1520-0469. doi : 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2. url : `https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml` (visité le 24/04/2024).

[5] Florent Berthelin. *Équations différentielles.* Nouvelle édition 2021, corrigée et augmentée de 8 exercices. Enseignement des mathématiques 34. Paris : Cassini, 2021. ix+707. isbn : 978-2-84225-229-8.

[6] Francis Filbet. *Analyse numérique, modélisation : algorithme et étude mathématique : cours et exercices corrigés.* Sciences sup mathématiques. Paris : Dunod, 2009. iv+316. isbn : 978-2-10-052253-8.

[7] Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles : cours et exercices corrigés.* Paris : Dunod, 2021. isbn : 978-2-10-083537-9.