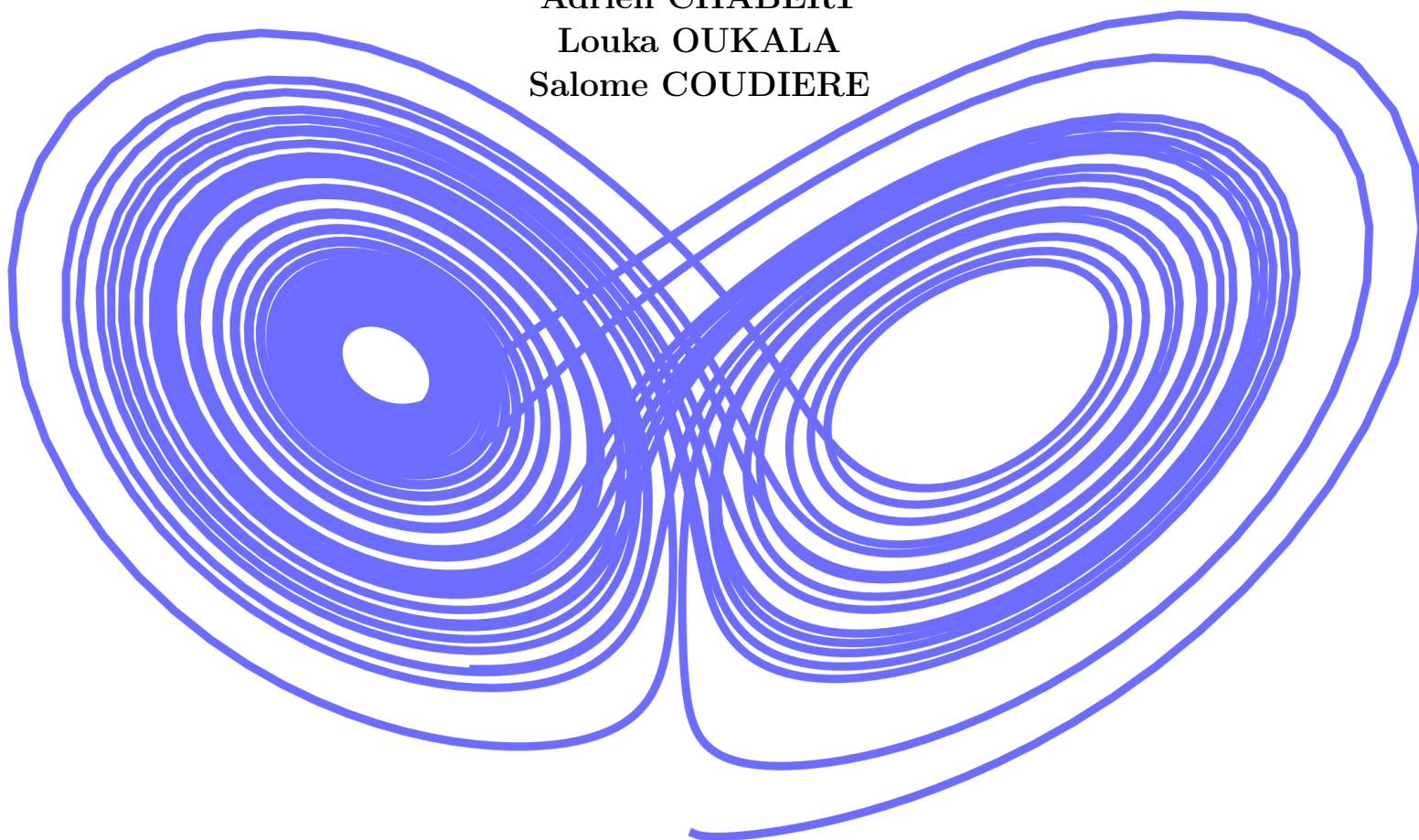


# Attracteur de Lorenz

Projet de licence 3

Adrien CHABERT  
Louka OUKALA  
Salome COUDIERE



Second semestre - Année 2023-2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Résultats fondamentaux pour les équations différentielles</b>	<b>2</b>
2.1	Définitions . . . . .	2
2.2	Outils pour les équations différentielles . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Existence et premières propriétés</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Étude des points stationnaires</b>	<b>6</b>
4.1	Rappel des théorèmes . . . . .	6
4.2	Détermination des équilibres . . . . .	7
4.3	Stabilité de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$ . . . . .	8
	Cas $\Delta > 0$ . . . . .	9
	Cas $\Delta = 0$ . . . . .	10
	Cas $\Delta < 0$ . . . . .	11
4.4	Caractérisation de $S_{\pm}$ . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>13</b>
	Première méthode numérique, le schéma d'Euler explicite . . . .	13
	Le schéma de Runge-Kutta 4 . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Interprétations</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Annexes</b>	<b>19</b>
	Méthodes des rectangles . . . . .	19
	Code . . . . .	19
	<b>Bibliographie</b>	<b>21</b>

# 1 Introduction

Does a flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?

C'est le titre de l'article que Edward N. Lorenz publie en 1972 [4], dans lesquels il fait la synthèse de ce que l'on connaît sous le nom de la théorie du chaos. La question peut être traduite par "Es-ce qu'un battement d'ailes de papillon au Brésil peut entraîner une tornade au Texas ?". En effet lors de l'étude de certains systèmes une faible variation peut entraîner des changements considérables dans les états ultérieurs du système. Tout au long de sa vie Lorenz se sera intéressé aux systèmes chaotiques essentiellement appliqué à son domaine de recherche : la météorologie. Dès 1963 il propose un modèle simplifié pour essayer de décrire la météo [5]. Ce modèle a contribué à montrer la difficulté de prédire le climat à long terme. Dans l'approximation les paramètres  $\sigma$  et  $\rho$  correspondent au nombre de Prandtl et au nombre de Rayleigh,  $x$  est un indicateur des mouvements de convection,  $y$  est proportionnel à la variation de température dans les courants verticaux, et  $z$  est un indicateur de la variation de température par rapport à un profil linéaire. Nous nous intéresseront uniquement à l'étude mathématique de ce système. Ce système est appelé l'attracteur de Lorenz (aussi appelé attracteur étrange ou système de Lorenz).

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) & (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' &= xy - \beta z & (L_3) \end{cases} \quad (1)$$

(avec  $\sigma, \rho, \beta$  des paramètres). A travers cette étude nous allons présenter certaines caractéristiques chaotiques du système en modélisant les résultats théoriques avec des applications numériques, nous pourrions notamment observer les courbes qui prennent la forme d'ailes de papillon qui donneront leur nom à l'effet éponyme.

## 2 Résultats fondamentaux pour les équations différentielles

### 2.1 Définitions

Dans ce chapitre on rappelle les résultats sur lesquels repose notre étude.

#### Définition 1

On appelle *équation différentielle* une équation de la forme

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

où  $f \in C^0(I \times U, \mathbb{R}^d)$  et  $u \in C^1(I, U)$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $U \subset \mathbb{R}^d$  ouvert.

**Remarque :** Si  $f$  ne dépend pas directement de  $t$ , l'équation est dite autonome

Lorsque l'on s'intéresse aux équations différentielles, on s'intéresse plus particulièrement au problème de Cauchy, que l'on peut définir comme suit.

#### Définition 2

On appelle *problème de Cauchy*, une équation différentielle munie d'une condition initiale, une information sur une valeur de la fonction. On le présente sous la forme d'un système.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t = t_i) = u_i \end{cases}$$

Avec  $t_i \in I, u_i \in U$

### 2.2 Outils pour les équations différentielles

Lorsque l'on souhaite étudier les équations différentielles le lemme de Grönwall est un outil essentiel, il notamment permet d'obtenir un contrôle sur le comportement des solutions.

#### Lemme 1

Soit  $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}_+)$  et  $a \in C([0, T], \mathbb{R})$  telles que :

$$\forall t \in [0, T] u'(t) \leq a(t)u(t)$$

Alors  $\forall t \geq t_0, t_0 \in [0, T]$ , on a :

$$u(t) \leq u(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s) \, ds}$$

Cet énoncé du lemme n'est pas le plus complet qu'il est possible d'établir, il est cependant suffisant pour notre étude. On admet la démonstration que l'on

peut retrouver dans le livre de Berthelin (p.18). L'outil le plus important pour l'étude des équations différentielles ordinaire, qui nous permet de déterminer l'existence et l'unicité des solutions est le théorème suivant.

**Théorème 1**

Soient  $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^d)$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , et  $(t_0, u_0)$ . On suppose que  $f$  est localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur  $[0, T]$ . Alors

- il existe  $T > 0$  et  $u \in C^1([0, T], U)$  est solution du problème de Cauchy
- si  $v$  est une autre solution, elle coïncide avec  $u$  sur l'intervalle  $[0, T]$

Nous admettrons la démonstration de ce théorème dont on peut retrouver la démonstration dans le livre de F. Filbet (section 6.2.2) [3]. Maintenant que nous avons introduit les principaux outils pour l'étude des équations différentielle, on peut à présent s'intéresser au système de Lorenz (1)

### 3 Existence et premières propriétés

Dans cette section nous allons faire une étude du système de Lorenz afin de déterminer l'existence des solutions. Nous nous limiterons à l'étude des temps positifs ( $t \geq 0$ ). Pour cela on transforme l'équation (1) sous une forme plus pratique pour l'étude, on a :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Commençons notre étude du système.

#### Proposition 3.1

*Le système de Lorenz admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$  de classe  $C^1$*

**Démonstration :** Premièrement on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz 1 à 2.  $\Gamma$  est  $C^1$  donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle ne dépend pas directement du temps. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution de classe  $C^1$  sur  $[0, T]$  que l'on notera  $(I, (x, y, z))$  avec  $I \subset \mathbb{R}_+$  avec  $I = [0, T[$ ,  $T \in ]0, +\infty]$ . Montrons que  $T = +\infty$ . Dans (1) on s'intéresse à la somme de,  $x$  fois première ligne avec  $y$  fois la seconde ligne et  $z$  fois la troisième ligne.

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + yz - \beta z^2$$

Posons  $\mathcal{N} : (t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$  ( $\mathcal{N}$  est la norme euclidienne au carré)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) &= (\sigma + \rho)x(t)y(t) - \sigma x^2(t) - y^2(t) - \beta z^2(t) \\ &\leq (\sigma + \rho)x(t)y(t) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \quad (\text{Young})^1 \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left[\frac{\sigma + \rho}{2} + \min(1, \sigma, \beta)\right]\mathcal{N}(t) \end{aligned}$$

Posons  $\eta = \sigma + \rho + 2 \min(1, \sigma, \beta)$ . On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) \leq \eta \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}, \quad \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini. ■

---

1.  $\forall p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

En ayant obtenu les résultats de la proposition, on peut aisément en déduire la propriété suivante.

**Corollaire 1**

*Les solutions du système de Lorenz (1) sont de classe  $C^\infty$*

**Démonstration :** Par (2) on a que  $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$ , or par composition  $\Gamma(x, y, z)$  est  $C^1$  donc  $(x', y', z')$  l'est aussi, ainsi  $(x, y, z)$  est  $C^2$ . De la même manière on obtient par récurrence immédiate que  $(x, y, z)$  est  $C^\infty$  ■

Cette propriété nous permet de dire que même si (1) est un système dit chaotique, on peut affirmer que les solutions sont régulières.

## 4 Étude des points stationnaires

Après une première étude du système de Lorenz (1), on s'intéresse maintenant à la stabilité du système de Lorenz autour des points d'équilibre que l'on définit comme suit.

### Définition 3

Soit  $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$  avec  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $f$  définit une équation différentielle autonome. On appelle point stationnaire ou d'équilibre de l'équation différentielle, tout point  $v \in U$  tel que :

$$f(v) = 0$$

### 4.1 Rappel des théorèmes

Avant de s'intéresser aux théorèmes qui nous donnent les résultats de stabilité, on rappelle les définitions de la différentielle et du spectre qui nous serviront par la suite.

### Définition 4

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $a \in U$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que :

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

L'application linéaire  $L$  est alors appelée la différentielle de  $f$  en  $a$  on la note  $\mathcal{D}_f(a)$

**Remarque :** Dans la suite on appellera différentielle, l'application linéaire et la matrice associée à l'application linéaire dans la base canonique sans distinction.

### Définition 5

On définit le spectre d'une application linéaire  $f$  sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Comme l'ensemble des valeurs propres de  $f$ . On le note  $\text{Sp}(f)$

Maintenant on rappelle les résultats sur lesquels on s'appuiera dans la suite. Ces théorèmes établissent des résultats de stabilité dite linéaire autour des points stationnaires en se basant sur l'étude spectrale de la différentielle.

### Théoreme 2

Soit  $f \in C^2(U; \mathbb{R}^d)$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^d$  et  $v \in U$  tel que  $f(v) = 0$ . Si le spectre de  $\mathcal{D}_f(v)$  est inclus dans le demi-plan ouvert  $\{\lambda; \Re(\lambda) < 0\}$  alors  $v$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'équation  $u' = f(u)$



Ce résultat nous permet de conclure sur le comportement assymtotique des solutions ayant subi une faible perturbation à l'instant de départ (c'est-à-dire les solutions  $(\mathbb{R}_+, u_1)$  telles que  $u_1(t_{\text{init}}) = u(t_{\text{init}}) + \varepsilon$ ,  $0 < \|\varepsilon\| \ll 1$ ). On obtient ainsi  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u - u_1\| = 0$ .

### Théoreme 3

Soit  $f \in C^2(U; \mathbb{R}^d)$  et  $v \in U$  tel que  $f(v) = 0$ . Si  $\max\{\Re(\lambda); \lambda \in \text{Sp}(\mathcal{D}_f(v))\}$  est atteint pour une valeur propre de  $\mathcal{D}_f(v)$  de partie réelle strictement positive. Alors  $v$  est un point d'équilibre instable pour l'équation  $u' = f(u)$

Ces théorèmes nous donnent des résultats seulement pour des valeurs propre toute strictement négative ou au moins une strictement positive. Cependant ces théorèmes ne nous permettent pas de conclure sur le cas où 0 est valeur propre de la différentielle. Aussi il n'existe pas de résultats pour conclure sur la stabilité simple en étudiant le spectre de la différentielle.

## 4.2 Détermination des équilibres

Dans un premier temps on regarde si notre système possède des équilibres et si oui lesquels.

### Proposition 4.1

Si  $\beta(1 - \rho) \geq 0$ , l'équation (1) possède 3 points d'équilibre qui sont :

$$S_0 := 0_{\mathbb{R}^3} \quad S_+ := \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \quad S_- := \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix}$$

**Démonstration :** On remarque que  $(0, 0, 0)$  est un point stationnaire, en effet  $\Gamma(0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$  donc  $(\mathbb{R}_+, 0_{\mathbb{R}^3})$  est une solution de l'équation différentielle. On résout alors  $\Gamma(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$  en supposant que  $(x, y, z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ , il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 & (L_1) \\ \rho x - y - xz = 0 & (L_2) \\ xy - \beta z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

de  $(L_1)$  on obtient que  $x = y$ . Dans  $(L_2)$  et dans  $(L_3)$  on remplace  $y$  par  $x$ , il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0$$

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\beta}$$

On obtient ainsi un polynôme de degré 3, il y a donc au plus 3 équilibres :

$$\begin{aligned}(L_2) &\Rightarrow x(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}) = 0, \text{ or } x \neq 0 \\ &\Rightarrow x^2 = \beta(1 - \rho)\end{aligned}$$

Si  $\beta(1 - \rho) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0, \rho \leq 1$  ou  $\beta \leq 0, \rho \geq 1$  alors :

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\beta(1 - \rho)}$$

De ces trois équations on obtient que :

$$\Gamma(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x, y, z) = (\pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

On vérifie aisément que cette relation est une équivalence, en ramplacant les valeurs obtenue de  $x, y$  et  $z$  dans  $\Gamma(x, y, z)$  ■

**Remarque :** Si  $\rho = 1, 0$  est une racine triple de  $\chi$ , donc  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un point stationnaire triple pour (1).

### 4.3 Stabilité de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$

Afin d'utiliser les outils introduit dans la partie 4.1 on introduit le lemme suivant.

#### **Lemme 2 (préliminaire)**

Le polynôme caractéristique de la différentielle de  $\Gamma$  évalué en  $0_{\mathbb{R}^3}$  est :

$$\chi(\lambda) = (\lambda + \beta)P(\lambda)$$

Avec  $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma$ , de plus le déterminant de  $P$  est :

$$\Delta = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho$$

Notons que  $-\beta$  est toujours racine de  $\chi$

**Démonstration :** Dans un premier temps on calcule la différentielle de  $\Gamma$  :

$$\mathcal{D}_\Gamma(x_s, y_s, z_s) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z_s & -1 & -x_s \\ y_s & x_s & -\beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

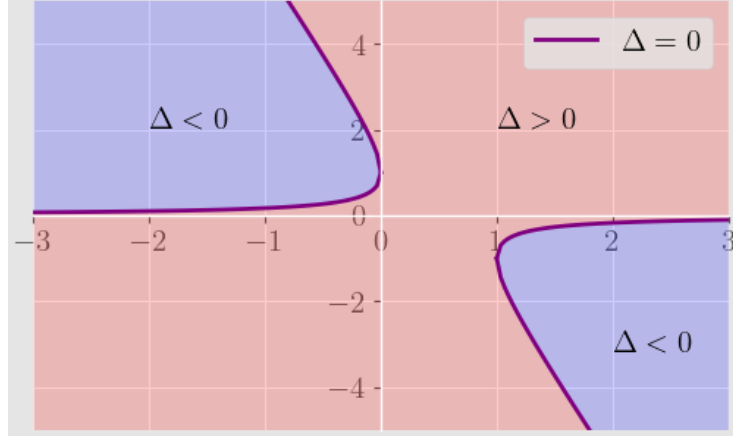
A présent on calcule le polynôme caractéristique de la différentielle en  $0_{\mathbb{R}^3}$  (noté  $\chi$ ) donné par le calcul suivant.

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - \mathcal{D}_\Gamma(0, 0, 0)) = (\lambda + \beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma)$$

Posons  $P$  comme dans le lemme. Ainsi pour étudier  $\chi$ , on calcule le déterminant de  $P$  :

$$\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4(\sigma - \rho\sigma) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho \quad \blacksquare$$

Dans l'étude que l'on propose on vas distinguer 3 cas pour étudier la stabilité l'équilibre du système de Lorenz près de l'origine.


 FIGURE 1 – Signe de  $\Delta$  en fonction de  $\rho$  en abscisse et de  $\sigma$  en ordonné

Cas  $\Delta > 0$

**Proposition 4.2**

Dans le cas  $\Delta > 0$  si  $\beta < 0$  l'équilibre  $0_{\mathbb{R}^3}$  est instable, si  $\beta > 0$  on a :

- Si  $\sigma(\rho - 1) > 0$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1)
- Si  $\sigma(\rho - 1) < 0$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

**Démonstration :** Premièrement on détermine les conditions pour que  $\Delta$  soit strictement positif.

**Lemme 3**

$\Delta$  est strictement positif pour l'ensemble des paramètres suivant :

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} > \sigma \text{ ou } \sigma > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} \right\}$$

**Démonstration (Lemme) :**  $\Delta = \sigma^2 + \sigma(4\rho - 2) + 1$  est un polynôme de la variable  $\sigma$ . On note le discriminant de  $\Delta$  selon la variable  $\sigma$ ,  $\delta$ .  $\Delta$  est convexe par rapport à la variable  $\sigma$  donc  $\Delta$  est strictement positif à l'extérieur de ses racines. On a donc :

$$\sigma < 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

ou

$$\sigma > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

■

Maintenant regardons l'équilibre  $0_{\mathbb{R}^3}$  dans le cas  $\Delta > 0$ . On peut expliciter les racines de  $\chi$  qui constitue le spectre de la différentielle de  $\Gamma$ . On a ainsi :

$$\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3})) = \left\{ -\beta, \lambda_+ := \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{\Delta}}{2}, \lambda_- := \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{\Delta}}{2} \right\}$$

Premièrement on différencie le cas  $\beta < 0$ , dans ce cas alors  $\max(\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3}))) \geq -\beta > 0$ , donc dans ce cas  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1). Dans le cas où  $\beta$  est positif, comme  $\lambda_+ > \lambda_-$  si  $\lambda_+ > 0$  l'équilibre est instable sinon l'équilibre est instable. On cherche alors  $\rho$  et  $\sigma$  tel que  $\lambda_+ > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\rho\sigma}}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow & (\sigma-1)^2 + 4\rho\sigma > (\sigma+1)^2 \\ \Leftrightarrow & \sigma(\rho-1) > 0 \end{aligned}$$

■

Cas  $\Delta = 0$

### Proposition 4.3

Dans le cas  $\Delta = 0$  : Si  $\beta < 0$  l'équilibre est instable si  $\beta > 0$  alors on a :

- Si  $\sigma < -1, \rho > 1$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1)
- Si  $\sigma > -1, \rho < 1$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

**Démonstration :** On s'intéresse d'abord aux cas tels que  $\Delta = 0$

#### Lemme 4

$\Delta$  est nul si et seulement si on a la paramétrisation suivante,

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \sigma = 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} \text{ ou } \sigma = 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} \right\}$$

Cette paramétrisation implique que  $\rho \in \mathbb{R} \setminus ]0, 1[$

**Démonstration (Lemme) :** A nouveau on considère  $\Delta$  comme un polynôme de la variable  $\sigma$ . Pour que  $\Delta$  ait des racines il faut que  $\delta$  soit positif ou nul.

$$\delta \geq 0 \Leftrightarrow \rho(\rho-1) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R} \setminus ]0, 1[$$

Maintenant on calcule les racines de  $\Delta$ .

$$\sigma = \frac{2 - 4\rho + \sqrt{(4\rho-2)^2 - 4}}{2} = 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

ou

$$\sigma = \frac{2 - 4\rho - \sqrt{(4\rho-2)^2 - 4}}{2} = 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

On obtient ainsi la paramétrisation voulue. ■

Maintenant on s'intéresse à la stabilité de l'équilibre pour le cas  $\Delta = 0$ . Comme  $-\beta$  est toujours racine de  $\chi$  si  $\beta < 0$  alors  $\max(\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3}))) \geq -\beta > 0$  donc d'après le théorème 3,  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1). Si  $\beta > 0$  alors dans le cas de  $\Delta = 0$ ,  $\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma) = \{\beta, -\frac{\sigma+1}{2}\}$ , on cherche alors les conditions sur les paramètres  $\sigma$  et  $\rho$  telles que le système soit instable ou asymptotiquement stable. On s'intéresse au cas instable et on inversera le sens des inégalités pour avoir le cas asymptotiquement stable.

$$-\frac{\sigma+1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sigma < -1$$

Dans la première équation de la paramétrisation on obtient que

$$-1 > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

n'a pas de solutions. Dans la seconde équation on cherche  $\rho$  tel que :

$$1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < -1 \Rightarrow \frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1 > (2\rho-2)^2 \Leftrightarrow \rho > 1$$

En faisant les calculs avec l'inégalité inverse, on retrouve le cas asymptotiquement stable. ■

**Cas  $\Delta < 0$**

**Proposition 4.4**

Dans le cas  $\Delta < 0$  : Si  $\beta < 0$  l'équilibre est instable si  $\beta > 0$  alors on a :

- Si  $\sigma < -1, \rho > 1$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1)
- Si  $\sigma > -1, \rho < 1$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

**Démonstration :** On détermine les cas tels que  $\Delta < 0$

**Lemme 5**

$\Delta$  est strictement négatif pour l'ensemble des paramètres suivants :

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < \sigma < 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} \right\}$$

Dans cet ensemble on a que :  $\rho \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$

**Démonstration (Lemme) :** Pour que  $\Delta$  ait des racines il faut que  $\delta$  soit strictement positif.

$$\delta > 0 \Leftrightarrow \rho(\rho-1) > 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$$

Par convexité de  $\Delta$  on a que  $\Delta$  est négatif entre ses racines, il vient alors :

$$1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < \sigma < 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$$

Donc l'ensemble des  $\rho, \sigma$  qui vérifie cette inégalité sont alors des paramètres tels que  $\Delta$  est négatif. ■

On détermine les cas pour lesquels l'équilibre est instable ou asymptotiquement stable. Pour la différenciation du cas de  $\beta$  cf. la démonstration de 4.3. Ainsi il vient :

$$\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma(0_{\mathbb{R}^3})) = \left\{ \beta, \omega := \frac{-(\sigma+1) + i\sqrt{-\Delta}}{2}, \bar{\omega} := \frac{-(\sigma+1) - i\sqrt{-\Delta}}{2} \right\}$$

Pour étudier la stabilité on s'intéresse à la partie réelle de  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ . Or  $\Re(\omega) = \Re(\bar{\omega}) = -\frac{\sigma+1}{2}$  on retombe ainsi sur le même calcul que dans la démonstration de la propriété 4.3. On retrouve bien le cas voulu. ■

#### 4.4 Caractérisation de $S_\pm$

Dans cette section nous allons nous intéresser au point d'équilibres défini précédemment  $S_+$  et  $S_-$ . Nous ferons aussi quelques hypothèses simplificatrices, supposons  $\sigma, \rho, \beta$  positifs et de plus  $\sigma > \beta + 1$ .

##### Proposition 4.5

*Sous les hypothèses de cette section et si  $\rho > 1$  alors on définit  $\rho^* = \sigma \frac{\sigma+\beta+3}{\sigma-\beta-1}$  tel que*

- *si  $\rho < \rho^*$  alors les équilibres  $S_\pm$  sont asymptotiquement stables pour*
- (1)
- *si  $\rho > \rho^*$  alors les équilibres  $S_\pm$  sont instables pour (1)*

**Remarque :** Si  $\rho \in [0, 1[$  les équilibres  $S_\pm$  n'existent pas.

## 5 Méthodes numériques

Dans cette section nous allons introduire les méthodes numériques pour la résolution d'équation différentielle ordinaire (EDO).

**Problématique :** Pourquoi introduire des méthodes numériques pour la résolution des EDO ?

Lorsque on étudie des équations différentielles la théorie nous permet sous certaines conditions d'affirmer que la solution à un problème de Cauchy existe et est maximale. Cependant leurs expressions explicites n'est pas garantie. Cependant lorsqu'on aborde les EDO non-linéaire, la plupart du temps nous ne sommes pas capable d'expliciter la solution analytique. C'est pourquoi on introduit les méthodes numériques.

Commençons par introduire la forme générale d'une équation différentielle<sup>2</sup>.

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad \text{avec } f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ et } u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Ici  $u$  est la fonction à déterminer. Alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une solution maximale et  $C^1$  au problème de Cauchy suivant sur l'intervalle  $[t_I, t_F] \subset ]a, b[$  :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u(t_I) = \nu \end{cases}$$

Maintenant que nous savons que la solution existe sur un intervalle de temps fermé, on cherche à approcher les valeurs de la solution numériquement. Pour cela, on subdivise l'intervalle  $[t_I, t_F]$  en  $N$  sous intervalles et on calcule à l'aide d'un schéma numérique donné, la valeur approché de la solution pour tout les temps  $t_n$ ,  $0 \leq n \leq N$

### Première méthode numérique, le schéma d'Euler explicite

On introduit maintenant la première méthode de résolution.

#### Définition 6

On note  $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$  la suite des approximations des valeurs de  $u$  aux points  $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ . On appelle  $h$  le pas de la méthode, et  $h := \frac{t_F - t_I}{N}$ . Alors on a :

$$\begin{cases} t_n &= t_0 + nh \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \quad \forall 0 \leq n \leq N \\ y_0 &= \nu \end{cases}$$

**Mise en œuvre :** On intègre notre équation différentielle entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , il vient :

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, u(x)) \, dx$$

2. NB : Ici on présente les méthodes numériques dans  $\mathbb{R}^3$  on peut se ramener au cas d'un espace vectoriel plus général

On approche l'intégrale par la méthode des rectangles et on obtient :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, u(x)) \, dx = (t_{n+1} - t_n) f(t_n, u(t_n))$$

Or  $\forall n, u(t_n) \approx y_n$ , d'où :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

De plus  $u(t_0) = \nu = y_0$ . On obtient alors le schéma d'Euler explicite.

Le schéma d'Euler est une méthode simple à utiliser et à implémenter. Cependant l'ordre de son erreur, en effet la méthode d'Euler est d'ordre 2 (c'est-à-dire que l'erreur décroît comme une droite de pente 2 à l'échelle logarithmique selon le nombre de subdivision de notre intervalle de départ).

## Le schéma de Runge-Kutta 4

On s'intéresse maintenant aux schémas de Runge-Kutta ces schémas sont des méthodes dites multi-pas (c'est-à-dire on fait une moyenne pondérée de l'approximation en plusieurs points). Plus particulièrement, la méthode de Runge-Kutta 4.

### Théoreme 4

*On approche les valeurs de la solution de l'équation différentielle par la suite  $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$  sur l'intervalle  $[t_I, t_F]$ , avec  $N$  le nombre de subdivision de l'intervalle. Alors on a :*

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(t_n, y_n) \\ k_2 &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= h f(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

*La méthode de Runge-Kutta 4 est d'ordre 4.*

On admet la démonstration de cette méthode. Aussi on la choisira pour illustrer les résultats sur le système de Lorenz. Les paramètres que nous utiliserons pour les modélisations à suivre,  $[t_I, t_F] = [0, 30]$ ,  $h = 0.01$  et  $u(t = 0) = (6, 4, 2)$



## 6 Interprétations

**Exemple :** Dans cette configuration (figure 2) on retombe sur les paramètres qui permettent d'observer la trajectoire en forme d'ailes de papillon décrite par E. Lorenz lors de son article de 1963[5]. La figure observée apparaît pour les paramètres  $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ . D'après la proposition qui précède c'est donc un cas d'équilibre instable avec  $\Delta > 0$ .

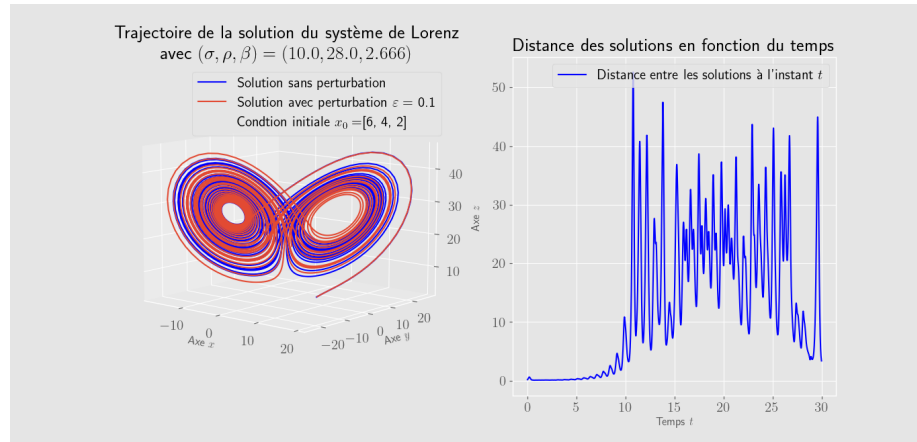


FIGURE 2 – Exemple d'équilibre instable pour  $\Delta > 0$

Dans la figure 3, on observe bien que les solutions commencent leurs trajectoires avec une distance l'une de l'autre et ensuite se rapprochent jusqu'à un écart très faible. Dans ce cas de figure il est possible de représenter les cas instable, ce qui ne sera pas le cas pour les prochains cas ( $\Delta \leq 0$ ).

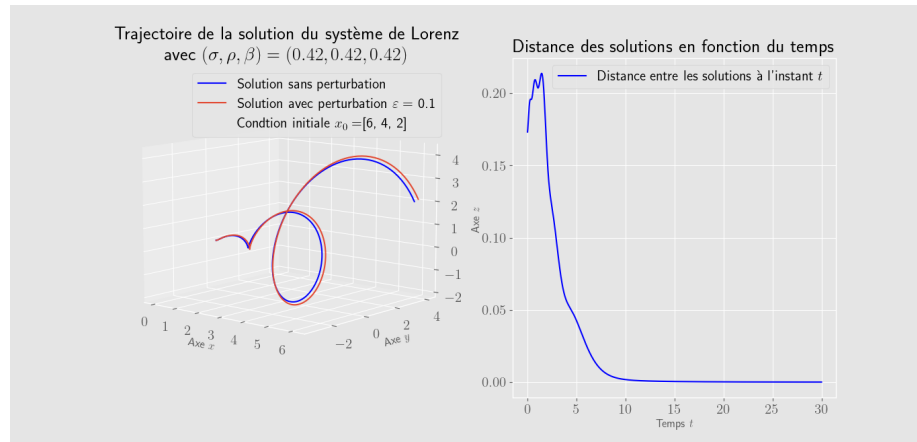


FIGURE 3 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour  $\Delta > 0$

**Exemple :** Dans la figure 6n observe bien que les solutions commencent leurs trajectoires avec une distance l'une de l'autre et ensuite se rapprochent jusqu'à un écart très faible. Dans ce cas de figure il n'est pas intéressant de représenter le cas où l'équilibre est instable, car les solutions s'éloignent très rapidement de l'origine et entres elles.

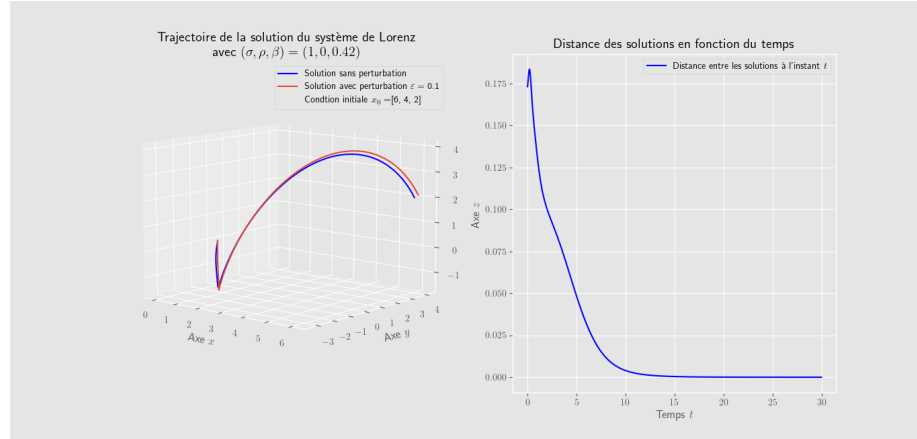


FIGURE 4 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour  $\Delta = 0$

**Exemple :** On observe bien que les solutions commencent leurs trajectoires avec une distance l'une de l'autre et ensuite se rapprochent jusqu'à un écart très faible. Dans ce cas de figure il n'est pas intéressant de représenter le cas où l'équilibre est instable, car les solutions s'éloignent très rapidement de l'origine et entres elles.

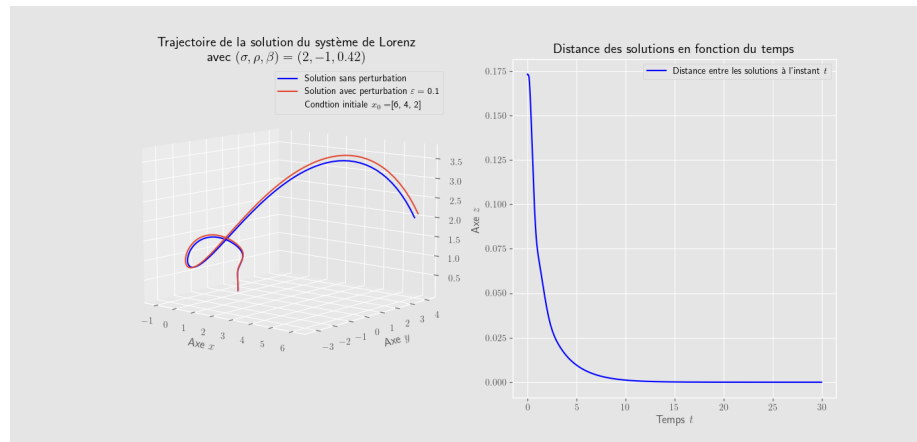
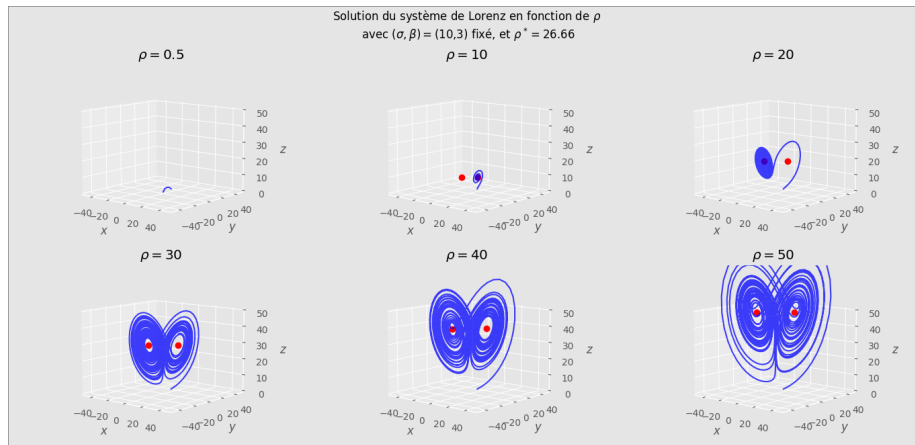


FIGURE 5 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour  $\Delta = 0$

**Exemple :** Dans la figure 6 on a  $\rho \approx 26,66$ , on observe alors :

- pour  $\rho = 1/2$  on a que le système est très simple puisque les équilibre sont réduits à  $0_{\mathbb{R}^3}$  de plus nous sommes dans le cas où  $\Delta < 0$  et l'équilibre est asymptotiquement stable donc la solution vas directement vers  $0_{\mathbb{R}^3}$
- Pour les cas  $\rho = 10$  et  $\rho = 20$ , on se retrouve dans le cas ou les équilibres existent et sont asymptotiquement stables car  $\rho < \rho^*$ , on observe bien que la trajectoire de la solution se rapproche d'un équilibre et ne semble pas s'en éloigner.
- Pour les cas restants on a,  $\rho > \rho^*$  on observe alors que la trajectoire de la solution semble s'entendre dans l'espace sans jamais se diriger vers un équilibre. Cependant les solutions semblent rester dans une sous partie de l'espace.


 FIGURE 6 – Solutions de (1) en fonction de  $\rho$

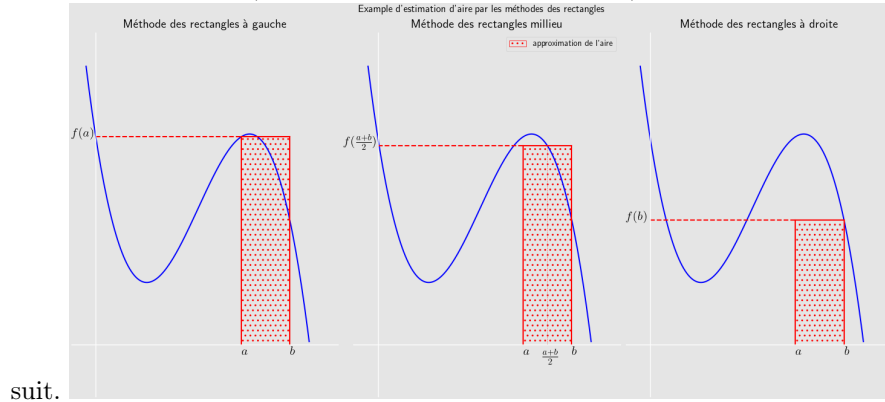
## 7 Conclusion

Au cours de notre étude à l'aide de l'exemple de l'attracteur de Lorenz, nous avons approché le concept de chaos dans les équations différentielles. Notre étude nous a permis de constater que les comportements singulier proviennent de faibles perturbations dans les conditions initiales. De plus ces comportements ne sont pas uniquement inhérent au conditions initiales ils dépendent de la configuration du système nous avons pu constater que il existe des jeux de paramètres, donc de configurations telles que les trajectoires des solutions ne fassent pas apparaître de comportement chaotique (On peut faire une analogie avec la mécanique des fluides, les système a grand nombre de Rayleigh sont autement chaotique à cause de faible viscosité, à contrario les systèmes a faible nombre de Rayleigh en forte présence de frottements ne sont pas sensibles au faibles perturbations. c'est d'ailleurs la correspondance de  $\rho$  dans les approximation de Lorenz). Ces mouvements qui pourrait sembler aléatoire sont en fait déterministe. Cependant dû à la difficulté de mesurer de manière suffisamment fiable les grandeurs qui évoluent dans le système, il en devient autement imprévisible. C'est ce que on à pu constater durant l'étude des équilibres. Pour continuer l'étude de ce système nous pourrions nous intéresser au rapport entre l'attracteur de Lorenz et la "Tent map" qui permet de déterminer si il existe un seuil tel que le mouvement devienne chaotique.

## 8 Annexes

### Méthodes des rectangles

La méthode des rectangles est une méthode numérique pour approximer le calcul d'intégrale. La méthode des rectangles consiste à approximer l'aire sous la courbe par un rectangle. On peut choisir la hauteur du rectangle de différentes manières (à gauche, au milieu et à gauche). Décrit dans l'image qui



suit.

Considérons l'intégrale bien définie suivante :

$$I := \int_a^b f(x) dx \quad \text{avec } a < b$$

On peut approximer cette intégrale de trois manières différentes : Méthode des rectangles à gauche :

$$I \approx (b - a)f(a)$$

Méthode des rectangles milieu :

$$I \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

Méthode des rectangles à droite :

$$I \approx (b - a)f(b)$$

**Remarque :** Comme le montre l'image ci-dessus l'approximation peut-être grossière

### Code

L'ensemble des graphes ont été générés sur python à l'aide des bibliothèques Matplotlib et Numpy. Vous pouvez retrouver l'ensemble de ces codes sur le Github du projet ou sur filesender jusqu'au 29/05 :

- Filesender :  
<https://filesender.renater.fr/?s=download&token=d4f04658-9db0-4820-ad5d-05dac5863664>
- Github :  
<https://github.com/N3rida/Projet>

Les correspondance des fichiers sont celles donné par ce tableau :

genGraph.py	générations des graphes des exemples de la stabilité pour les différent cas de $\Delta$
GrapheSolution.py	graphe de la solution comme dans la page de couverture
DeltaDomain.py	graphe du signe de $\Delta$ en fonction de $\rho$ et $\sigma$
genSpmEquilibrium.py	graphe pour comparer l'évolution de la trajectoire autour des équilibre $S_{\pm}$ en fonction de $\rho$
genMethRect.py	graphe explicatif de la méthode des rectangles

## Bibliographie

- [1] *Calcul différentiel et équations différentielles.*
- [2] FLORENT BERTHELIN. *Équations différentielles.* Nouvelle édition 2021, corrigée et augmentée de 8 exercices. Enseignement des mathématiques 34. Paris : Cassini, 2021. ix+707. ISBN : 978-2-84225-229-8.
- [3] FRANCIS FILBET. *Analyse numérique, modélisation : algorithme et étude mathématique : cours et exercices corrigés.* Sciences sup mathématiques. Paris : Dunod, 2009. iv+316. ISBN : 978-2-10-052253-8.
- [4] Edward LORENZ. « Does a flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ? » In : (jan. 1972).
- [5] Edward N. LORENZ. « Deterministic Nonperiodic Flow ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (1<sup>er</sup> mars 1963). Publisher : American Meteorological Society Section : Journal of the Atmospheric Sciences, p. 130-141. ISSN : 0022-4928, 1520-0469. DOI : 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2. URL : [https://journals.ametsoc.org/view/journals/atasc/20/2/1520-0469\\_1963\\_020\\_0130\\_dnf\\_2\\_0\\_co\\_2.xml](https://journals.ametsoc.org/view/journals/atasc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml) (visité le 24/04/2024).
- [6] SYLVIE BENZONI-GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles : cours et exercices corrigés.* Paris : Dunod, 2021. ISBN : 978-2-10-083537-9.