

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) & (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' &= xy - \beta z & (L_3) \end{cases} \quad (1)$$

On peut récrire ce système de la manière suivante.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Remarque : Γ est polynomiale, donc Γ est de classe C^∞ en particulier elle est C^1 .

Proposition : Les solutions du système de Lorenz sont globales sur \mathbb{R}_+

Démonstration : Γ est C^1 donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle ne dépend pas directement du temps. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution maximale de classe C^1 que l'on notera $(I, (x, y, z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ avec $I =]0, T[$, $T \in]0, +\infty]$. Montrons que $(I, (x, y, z))$ est globale. Dans (1) on s'intéresse à la somme de, x fois première ligne avec y fois la seconde ligne et z fois la troisième ligne.

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xy - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ (\mathcal{N} est la norme euclidienne au carré)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) &= (\sigma + \rho)x(t)y(t) - \sigma x^2(t) - y^2(t) - \beta z^2(t) \\ &\leq (\sigma + \rho)x(t)y(t) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \quad (\text{Young})^1 \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left[\frac{\sigma + \rho}{2} + \min(1, \sigma, \beta)\right]\mathcal{N}(t) \end{aligned}$$

Posons $\eta = \sigma + \rho - 2\min(1, \sigma, \beta)$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) \leq \eta \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}, \quad \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini.

1. $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Proposition : Les solution de (1) sont C^∞

Demonstration : Par définition de (1) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$, or par composition $\Gamma(x, y, z)$ est C^1 donc (x', y', z') l'est aussi, ainsi (x, y, z) est C^2 . De la même manière on obtient par récurrence immédiate que (x, y, z) est C^∞

On cherche maintenant les points stationnaire de (1).

On remarque que $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} \equiv 0$ donc $(\mathbb{R}_+, 0)$ est une solution de l'équation différentielle.

On resout alors $\Gamma(x, y, z) = 0$ en supposant que $(x, y, z) \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 & (L_1) \\ \rho x - y - xz = 0 & (L_2) \\ xy - \beta z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

de (L_1) on obtient que $x = y$. Dans (L_2) et dans (L_3) on remplace y par x , il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0$$

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\beta}$$

On obtient ainsi :

$$(L_2) \Rightarrow x(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}) = 0, \text{ or } x \neq 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \beta(1 - \rho)$$

Si $\beta(1 - \rho) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0, \rho \leq 1$ ou $\beta \leq 0, \rho \geq 1$ alors :

$$\Rightarrow x = \sqrt{\beta(1 - \rho)}$$

De ces trois équation on obtient que :

$$\Gamma(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x, y, z) = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

On verifie aisément que cette relation est une équivalence, en ramplacant les valeurs obtenue de x, y et z dans $\Gamma(x, y, z)$

Remarque : Si $\rho = 1$ alors il n'y a qu'un seul équilibre

On se propose d'étudier la stabilité des points stationnaires. Pour cela on s'intéresse à la linéarisé de (1), donné par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathcal{D}_\Gamma(x_s, y_s, z_s) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec (x_s, y_s, z_s) les coordonnées des points stationnaire, $\mathcal{D}_\Gamma(x, y, z)$ la différentielle de Γ donné par :

$$\mathcal{D}_\Gamma(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

On étudie premièrement l'équilibre autour de $0_{\mathbb{R}^3}$:
L'équation ainsi obtenue est :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

Autrement dit on obtient :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y \\ z' = \beta z \end{cases} \quad (4)$$

On se propose de caractériser l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$.

Rappel : Théoreme :

Soient $f \in C^2(U; E)$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si $\max\{\Re(\lambda); \lambda \in \text{Sp}(\mathcal{D}_f(v))\}$ est atteint pour une valeur propre de $\mathcal{D}_f(v)$ de partie réelle strictement positive. Alors v est un point d'équilibre instable pour l'équation $u' = f(u)$
Calculons le polynome caractéristique de la différentielle de Γ en $0_{\mathbb{R}^3}$, on notera ce polynome χ .

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - \mathcal{D}_\Gamma(0, 0, 0)) = (\lambda - \beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma)$$

Remarque : β est toujours racine de χ

Posons $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma$, donc $\chi(\lambda) = (\lambda - \beta)P(\lambda)$, on calcule le déterminant de P :

$$\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4(\sigma - \rho\sigma) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho$$

On obtient alors un autre polynome. On étudie son signe et on différencie les cas suivant :

Cas 1 : Si $(\rho, \sigma) = (0, 1)$:

Alors $\chi_A(x) = (\lambda - \beta)(\lambda + 1)^2$, donc d'après le théoreme, si β est strictement positif 0 est un point d'équilibre instable pour (1)

Cas 2 : Si $(\rho, \sigma) = (1, -1)$:

Alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \beta)\lambda^2$, donc d'après le théoreme, si β est strictement positif (resp. strictement négatif) $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilibre instable (resp. asymptotiquement stable) pour (1)

Cas 3 : Si $\rho \in]0, 1[, \sigma \in \mathbb{R}$:

$\Delta > (\sigma - 1)^2 > 0$ donc P a deux racines réelles. que l'on note :

$$\lambda_{\pm} = \frac{-(\sigma - 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}}{2}$$

Regardons le signe des racines. $\lambda_+ < -(\sigma - 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho} \leq 0$, de même pour λ_- , on a, $\lambda_- < -\sigma + 1 - |\sigma - 1| \leq 0$. De plus si β est strictement négatif, toutes les racines sont strictement négatives donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1). Si $\beta > 0$, $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilibre instable.

Cas 4 : Si $\rho > 1$ et $\sigma \geq 0$:

Dans ce cas on a $\Delta > 0$, on retrouve la même expression des racines que précédemment λ_{\pm} . On trouve que $2\lambda_+ > 1 - \sigma + |\sigma + 1| \geq 0$, donc $\lambda_+ > 0$, pour λ_- on a, $2\lambda_- < 1 - \sigma - |\sigma + 1| \leq 0$, donc $\lambda_- < 0$, dans ce cas $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1).

Cas 5 : Si $\rho < 0$ et $\sigma \leq 0$:

Comme dans le cas précédent on trouve $\Delta > 0$ avec cette fois $\lambda_+ < 0$ et $\lambda_- > 0$. On le retrouve en majorant $2\lambda_+$ et $2\lambda_-$ par $\rho = 0$, on majore ainsi λ_+ et minore λ_- . Donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1).

Remarque : Les cas 1,3,4,5 sont des point d'équilibre hyperbolique de (1) en effet, $\text{Sp}(A) \cap \text{Vect}(i) = \emptyset$

