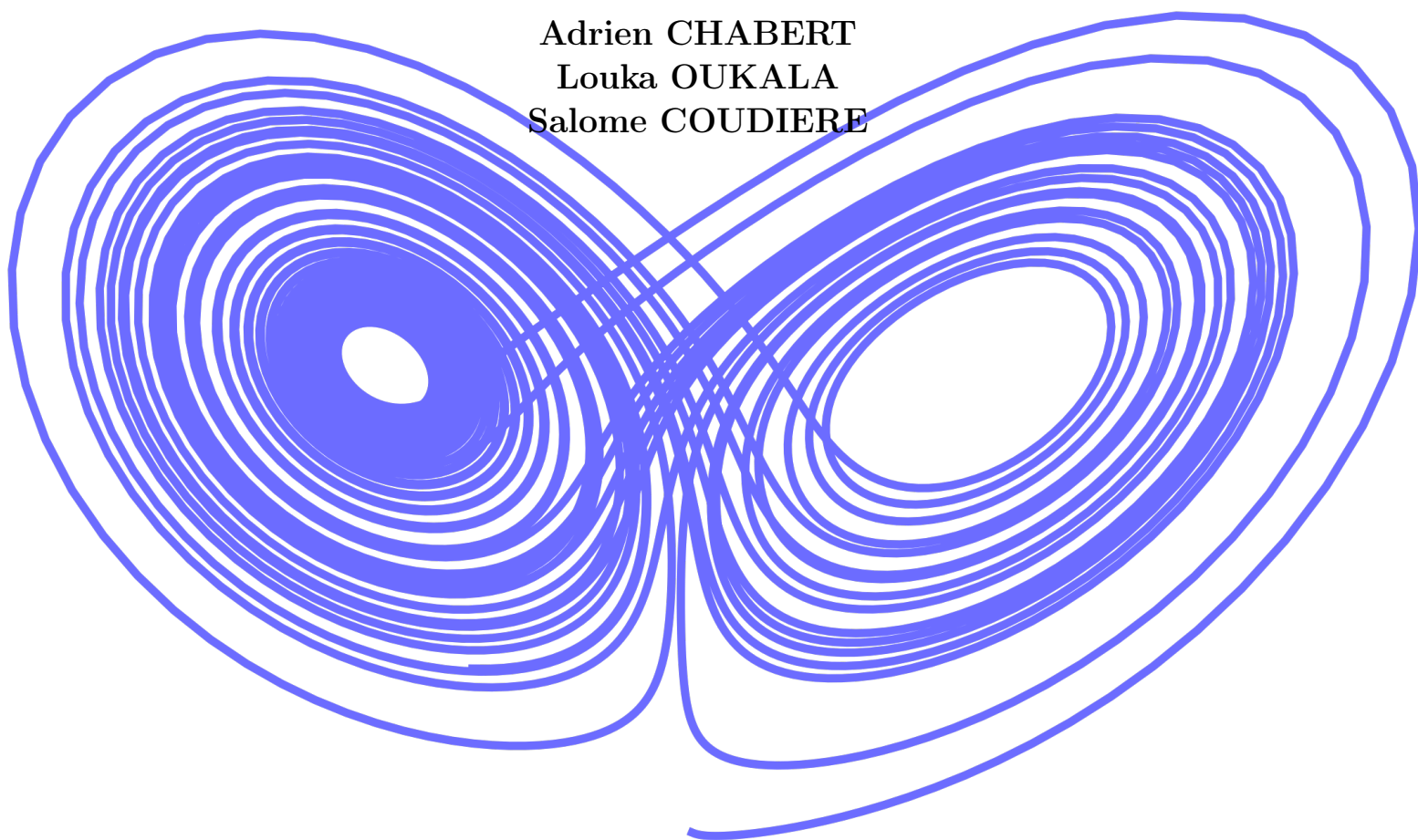


# Attracteur de Lorenz

Projet de licence 3

Adrien CHABERT  
Louka OUKALA  
Salome COUDIERE



Second semestre - Année 2023-2024

## Introduction

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) & (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' &= xy - \beta z & (L_3) \end{cases} \quad (1)$$

# 1 Méthodes numériques

Dans cette section nous allons introduire les méthodes numériques pour la résolution d'équation différentielle ordinaires (EDO).

**Problématique :** Pourquoi introduire des méthodes numériques pour la résolution des EDO ?

Lorsque on étudie des équations différentielles la théorie nous permet sous certaines conditions d'affirmer que la solution à un problème de Cauchy existe et est maximale. Cependant leur expressions explicites n'est pas garantie par exemple pour les EDO linéaires à coefficients constants il est systématiquement possible de trouver une solution analytique. Cependant lorsque on aborde les EDO non-linéaires, la plupart du temps nous ne sommes pas capables d'explicitement la solution analytique. C'est pourquoi on introduit les méthodes numériques.

Commençons par introduire la forme générale d'une équation différentielle<sup>1</sup>.

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad \text{avec } f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ et } u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Ici  $u$  est la fonction à déterminer. Alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une solution maximale et  $C^1$  au problème de Cauchy suivant sur l'intervalle  $[t_I, t_F] \subset ]a, b[$  :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u(t_I) = \nu \end{cases}$$

Maintenant que nous savons que la solution existe sur un intervalle de temps fermé, on cherche à approcher les valeurs de la solution numériquement. Pour cela, on subdivise l'intervalle  $[t_I, t_F]$  en  $N$  sous-intervalles et on calcule à l'aide d'un schéma numérique donné, la valeur approchée de la solution pour tous les temps  $t_n$ ,  $0 \leq n \leq N$

## Première méthode numérique, le schéma d'Euler explicite

On introduit maintenant la première méthode de résolution.

### Théorème 1

On note  $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$  la suite des approximations des valeurs de  $u$  aux points  $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ . On appelle  $h$  le pas de la méthode, et  $h := \frac{t_F - t_I}{N}$ . Alors on a :

$$\begin{cases} t_n &= t_0 + nh \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \quad \forall 0 \leq n \leq N-1 \\ y_0 &= \nu \end{cases}$$

**Démonstration :** On intègre notre équation différentielle entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , il vient :

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, u(x)) \, dx$$

1. NB : Ici on présente les méthodes numériques dans  $\mathbb{R}^3$  on peut se ramener au cas d'un espace métrique plus général

On approche l'intégrale par la méthode des rectangles et on obtient :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, u(x)) \, dx = (t_{n+1} - t_n) f(t_n, u(t_n))$$

Or  $\forall n, u(t_n) \approx y_n$ , d'où :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

De plus  $u(t_0) = \nu = y_0$ . On obtient alors le schéma d'Euler explicite. ■

Le schéma d'Euler est une méthode simple à utiliser et à implémenter. Cependant l'ordre de son erreur, en effet la méthode de Euler est d'ordre 2 (c'est-à-dire que l'erreur décroît comme une droite de pente 2 à l'échelle logarithmique selon le nombre de subdivision de notre intervalle de départ).

## Le schéma de Runge-Kutta

On s'intéresse maintenant aux schémas de Runge-Kutta ces schémas sont des méthodes dites multi-pas (c'est-à-dire on fait une moyenne pondérée de l'approximation en plusieurs points). Plus particulièrement, la méthode de Runge-Kutta 4.

### Théoreme 2

On approche les valeurs de la solution de l'équation différentielle par la suite  $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$  sur l'intervalle  $[t_I, t_F]$ , avec  $N$  le nombre de subdivision de l'intervalle. Alors on a :

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(t_n, y_n) \\ k_2 &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= h f(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

La méthode de Runge-Kutta 4 est d'ordre 4.

On admet la démonstration de cette méthode. Aussi on la choisira pour illustrer les résultats sur le système de Lorenz. Les paramètres que nous utiliserons sont les suivants,  $[t_I, t_F] = [0, 30]$ ,  $h = 0.01$  et  $u(t = 0) = (6, 4, 2)$

## 2 Existence et première propriété

Dans cette section nous allons faire une étude du système de Lorenz afin de déterminer l'existence des solutions. Nous nous limiterons à l'étude des temps positifs ( $t \geq 0$ ). Pour cela on transforme l'équation (1) sous une forme plus pratique pour l'étude on a alors :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Commençons notre étude du système.

### Proposition 2.1

*Le système de Lorenz admet des solutions. De plus les solutions sont globales sur  $\mathbb{R}_+$  et de classe  $C^1$*

**Démonstration :**  $\Gamma$  est  $C^1$  donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle ne dépend pas directement du temps. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution maximale de classe  $C^1$  que l'on notera  $(I, (x, y, z))$  avec  $I \subset \mathbb{R}_+$  avec  $I = [0, T[$ ,  $T \in ]0, +\infty]$ . Montrons que  $(I, (x, y, z))$  est globale. Dans (1) on s'intéresse à la somme de  $x$  fois première ligne avec  $y$  fois la seconde ligne et  $z$  fois la troisième ligne.

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + yz - \beta z^2$$

Posons  $\mathcal{N} : (t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$  ( $\mathcal{N}$  est la norme euclidienne au carré)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) &= (\sigma + \rho)x(t)y(t) - \sigma x^2(t) - y^2(t) - \beta z^2(t) \\ &\leq (\sigma + \rho)x(t)y(t) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \quad (\text{Young})^2 \\ &\leq \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) + \min(1, \sigma, \beta)\mathcal{N}(t) \\ &\leq \left[\frac{\sigma + \rho}{2} + \min(1, \sigma, \beta)\right]\mathcal{N}(t) \end{aligned}$$

Posons  $\eta = \sigma + \rho - 2\min(1, \sigma, \beta)$ . On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) \leq \eta \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}, \quad \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini. ■

---

2.  $\forall p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

En ayant obtenue les résultats de la proposition on peut aisément en déduire que la propriété suivante.

**Propriété 2.1**

*Les solutions du système de Lorenz (1) sont de classe  $C^\infty$*

**Démonstration :** Par (2) on a que  $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$ , or par composition  $\Gamma(x, y, z)$  est  $C^1$  donc  $(x', y', z')$  l'est aussi, ainsi  $(x, y, z)$  est  $C^2$ . De la même manière on obtient par récurrence immédiate que  $(x, y, z)$  est  $C^\infty$  ■

Cette propriété nous permet de dire que même si (1) est un système dit chaotique, on peut affirmer que les solutions sont régulières.

### 3 Étude des points stationnaires

Après une première étude sommaire du système de Lorenz (1), on s'intéresse maintenant à l'étude des points stationnaires. Les points stationnaires sont des points tels que si le système passe par un de ces points il y reste indéfiniment.

**Théoreme 3**

*Soit l'équation différentielle bien définie,*

$$u' = f(u)$$

*Si il existe  $v$  tel que  $f(v) = 0$  alors  $v$  est un point stationnaire de l'équation différentielle.*

#### 3.1 Rappel des théorèmes

D'abord on rappelle les résultats sur lesquels on s'appuiera dans la suite. Ces théorèmes établissent des résultats de stabilité sur les points stationnaires en se basant sur l'étude spectrale de la différentielle.

**Théoreme 4**

*Soit  $f \in C^2(U; E)$  sur un ouvert  $U$  d'un espace de Banach  $E$  et  $v \in U$  tel que  $f(v) = 0$ . Si le spectre de  $\mathcal{D}_f(v)$  est inclus dans le demi-plan ouvert  $\{\lambda; \Re(\lambda) < 0\}$  alors  $v$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'équation  $u' = f(u)$*

Ce résultat nous permet de conclure sur le comportement asymptotique des solutions ayant subi une faible perturbation à l'instant de départ (c'est-à-dire les solutions  $(\mathbb{R}_+, u_1)$  telles que  $u_1(t_{\text{init}}) = u(t_{\text{init}}) + \varepsilon$ ,  $0 < \|\varepsilon\| \ll 1$ ). On obtient ainsi  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u - u_1\| = 0$ .

**Théoreme 5**

Soit  $f \in C^2(U; E)$  et  $v \in U$  tel que  $f(v) = 0$ . Si  $\max\{\Re(\lambda); \lambda \in \text{Sp}(\mathcal{D}_f(v))\}$  est atteint pour une valeur propre de  $\mathcal{D}_f(v)$  de partie réelle strictement positive. Alors  $v$  est un point d'équilibre instable pour l'équation  $u' = f(u)$

### 3.2 Détermination des équilibres

Dans un premier temps on regarde si notre système possède des équilibres et si oui lesquels.

**Proposition 3.1**

SI  $\rho > 1$ , l'équation (1) possède 3 points d'équilibre qui sont :

$$0_{\mathbb{R}^3} \quad S_+ := \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{pmatrix} \quad S_- := \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{pmatrix}$$

**Démonstration :** On remarque que  $(0,0,0)$  est un point stationnaire, en effet  $\Gamma(0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$  donc  $(\mathbb{R}_+, 0_{\mathbb{R}^3})$  est une solution de l'équation différentielle.

On résout alors  $\Gamma(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$  en supposant que  $(x, y, z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ , il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y-x) = 0 & (L_1) \\ \rho x - y - xz = 0 & (L_2) \\ xy - \beta z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

de  $(L_1)$  on obtient que  $x = y$ . Dans  $(L_2)$  et dans  $(L_3)$  on remplace  $y$  par  $x$ , il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0$$

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\beta}$$

On obtient ainsi un polynôme de degré 3 il y a donc au plus 3 équilibres :

$$(L_2) \Rightarrow x(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}) = 0, \text{ or } x \neq 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \beta(1 - \rho)$$

Si  $\beta(1 - \rho) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0, \rho \leq 1$  ou  $\beta \leq 0, \rho \geq 1$  alors :

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\beta(1 - \rho)}$$

De ces trois équations on obtient que :

$$\Gamma(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x, y, z) = (\pm \sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

On vérifie aisément que cette relation est une équivalence, en ramplacant les valeurs obtenues de  $x, y$  et  $z$  dans  $\Gamma(x, y, z)$  ■

**Remarque :** Si  $\rho = 1$  il n'y a qu'un seul équilibre.

### 3.3 Caractérisation de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$

Afin d'utiliser les outils introduit dans la partie 3.1, dans un premier temps on calcule la différentielle de  $f$  :

$$\mathcal{D}_\Gamma(x_s, y_s, z_s) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z_s & -1 & -x_s \\ y_s & x_s & -b \end{pmatrix} \quad (3)$$

A présent on calcule le polynôme caractéristique de la différentielle en  $0_{\mathbb{R}^3}$  (noté  $\chi$ ) donné par le calcul suivant.

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - \mathcal{D}_\Gamma(0, 0, 0)) = (\lambda + \beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma)$$

**Remarque :**  $-\beta$  est toujours racine de  $\chi$

On remarque que  $\chi$  est un polynôme de degré 3 et d'après la remarque précédente on a que  $\chi(\lambda) = (\lambda + \beta)P(\lambda)$ , avec  $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - \rho\sigma$ . Ainsi les pour étudier  $\chi$ , on calcule le déterminant de  $P$  :

$$\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4(\sigma - \rho\sigma) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho$$

Dans la suite on vas dissocier les cas suivant :

1. Cas  $\Delta > 0$  :
2. Cas  $\Delta = 0$  :
3. Cas  $\Delta < 0$  :

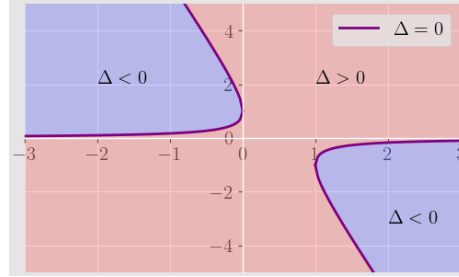


FIGURE 1 – Signe de  $\Delta$  en fonction de  $\rho$  en abscisses et de  $\sigma$  en ordonnées

#### Cas $\Delta > 0$

Premièrement on détermine les conditions pour que  $\Delta$  soit strictement positif.

#### Proposition 3.2

$\Delta$  est strictement positif pour l'ensemble des paramètres suivant :

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} > \sigma \text{ et } \sigma > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} \right\}$$



**Démonstration :**  $\Delta = \sigma^2 + \sigma(4\rho - 2) + 1$  est un polynome de la variable  $\sigma$ . On note le determinant de  $\Delta$  selon la variable  $\sigma$ ,  $\delta$ .  $\Delta$  est convexe par rapport à la variable  $\sigma$  donc  $\Delta$  est strictement positif à l'extérieur de ces racines. On a donc :

$$\sigma < 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

ou

$$\sigma > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

■

A présent regardons l'équilibre  $0_{\mathbb{R}^3}$  dans le cas  $\Delta > 0$

### Proposition 3.3

Dans le cas  $\Delta > 0$  si  $\beta < 0$  l'équilibre  $0_{\mathbb{R}^3}$  est instable, si  $\beta > 0$  on a :

- Si  $\sigma(\rho - 1) > 0$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1)
- Si  $\sigma(\rho - 1) < 0$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

**Démonstration :** Dans le cas  $\Delta > 0$  on peut expliciter les racines de  $\chi$  qui constitue le spectre de la différentielle de  $\Gamma$ . On a ainsi :

$$\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma) = \left\{ -\beta, \lambda_+ := \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{\Delta}}{2}, \lambda_- := \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{\Delta}}{2} \right\}$$

Premièrement on différencie le cas  $\beta < 0$ , dans ce cas alors  $\max(\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma)) \geq -\beta > 0$ , donc dans ce cas  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1). Dans le cas où  $\beta$  est positif, comme  $\lambda_+ > \lambda_-$  si  $\lambda_+ > 0$  l'équilibre est instable sinon l'équilibre est instable. On cherche alors  $\rho$  et  $\sigma$  tel que  $\lambda_+ > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\rho\sigma}}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow & (\sigma - 1)^2 + 4\rho\sigma > (\sigma + 1)^2 \\ \Leftrightarrow & \sigma(\rho - 1) > 0 \end{aligned}$$

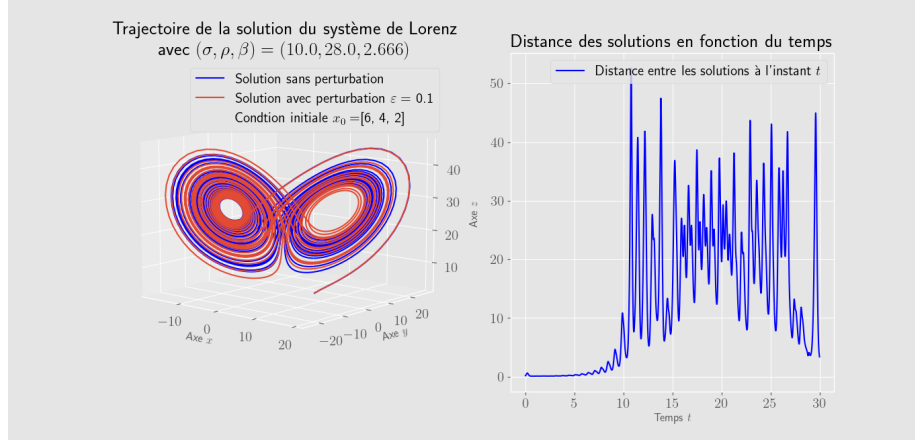
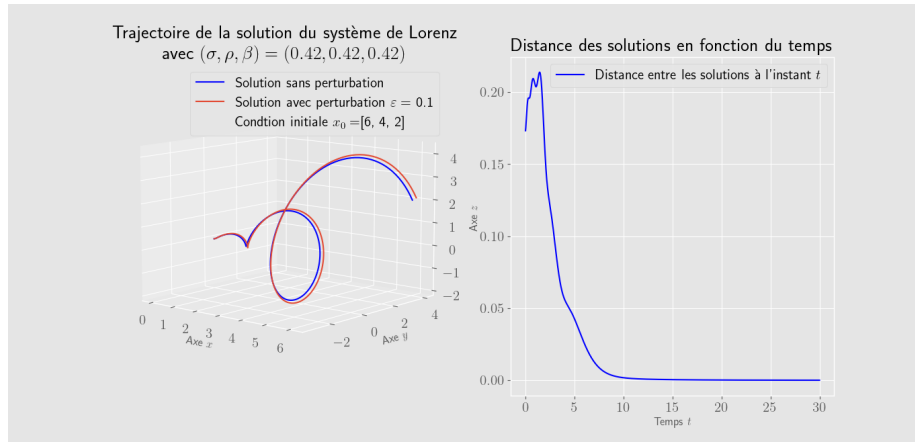
■

**Exemple :** Dans cette configuration (figure 2) on retombe sur les paramètres qui permettent d'observer la trajectoire en forme d'ailes de papillon décrite par E. Lorenz lors de son article de 1963. La figure observée apparaît pour les paramètres  $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ . D'après la proposition qui précède c'est donc un cas d'équilibre instable avec  $\Delta > 0$ .

Dans la figure 3, on observe bien que les solutions commencent leurs trajectoires avec une distance l'une de l'autre et ensuite se rapprochent jusqu'à un écart très faible. Dans ce cas de figure il est possible de représenter les cas instable, ce qui ne sera pas le cas pour les prochains  $\Delta \leq 0$ .

### Cas $\Delta = 0$

On s'intéresse maintenant aux cas tels que  $\Delta = 0$


 FIGURE 2 – Exemple d'équilibre instable pour  $\Delta > 0$ 

 FIGURE 3 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour  $\Delta > 0$ 

### Proposition 3.4

$\Delta$  est nul si et seulement si on a la paramétrisation suivante,

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \sigma = 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} \text{ ou } \sigma = 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} \right\}$$

**Remarque :** Cette paramétrisation implique que  $\rho \in \mathbb{R} \setminus ]0, 1[$

**Démonstration :** A nouveaux on considère  $\Delta$  comme un polynôme de la variable  $\sigma$ . Pour que  $\Delta$  ait des racines il faut que  $\delta$  soit positif ou nul.

$$\delta \geq 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R} \setminus ]0, 1[$$

Maintenant on calcule les racines de  $\Delta$ .

$$\sigma = \frac{2 - 4\rho + \sqrt{(4\rho - 2)^2 - 4}}{2} = 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

ou

$$\sigma = \frac{2 - 4\rho - \sqrt{(4\rho - 2)^2 - 4}}{2} = 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

On obtient ainsi la paramétrisation voulue. ■

Maintenant on s'intéresse à la stabilité de l'équilibre pour le cas  $\Delta = 0$ .

**Proposition 3.5**

Dans le cas  $\Delta = 0$  : Si  $\beta < 0$  l'équilibre est instable si  $\beta > 0$  alors on a :

- Si  $\sigma < -1, \rho > 1$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1)
- Si  $\sigma > -1, \rho < 1$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

**Démonstration :** Comme  $-\beta$  est toujours racine de  $\chi$  si  $\beta < 0$  alors  $\max(\text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma)) \geq -\beta > 0$  donc d'après le theoreme 5,  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1)  
 Si  $\beta > 0$  alors dans le cas de  $\Delta = 0, \text{Sp}(\mathcal{D}_\Gamma) = \{\beta, -\frac{\sigma+1}{2}\}$ , on cherche alors les conditions sur les paramètre  $\sigma$  et  $\rho$  telles que le système soit instable ou asymptotiquement stable. On s'intéresse au cas instable et on inversera le sens des inégalités pour avoir le cas asymptotiquement stable.

$$-\frac{\sigma+1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sigma < -1$$

Dans la première équation on obtient que  $-1 > 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1}$  n'as pas de solutions. Dans la seconde équation on cherche  $\rho$  tel que :

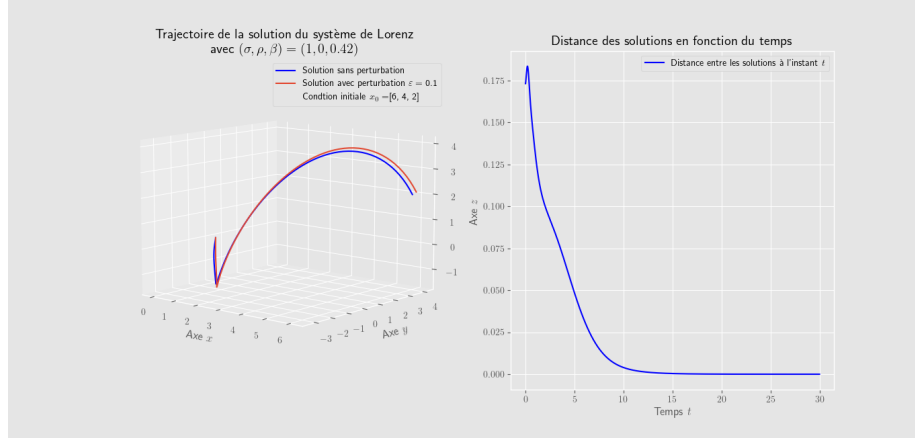
$$1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1} < -1 \Rightarrow \frac{(4\rho-2)^2}{4} - 1 > (2\rho-2)^2 \Leftrightarrow \rho > 1$$

En faisant les calculs avec l'inégalité inverse on retrouve le cas asymptotiquement stable. ■

**Example :** Dans la figure 3.3n observe bien que les solutions commencent leurs trajectoires avec une distance l'une de l'autre et ensuite se rapprochent jusqu'à un écart très faible. Dans ce cas de figure il n'est pas intéressant de représenter le cas où l'équilibre est instable, car les solutions s'éloignent très rapidement de l'origine et entres elles.

**Cas  $\Delta < 0$**

On determine les cas tels que  $\Delta < 0$


 FIGURE 4 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour  $\Delta = 0$ 
**Proposition 3.6**

$\Delta$  est strictement négatif pour l'ensemble des paramètres suivant :

$$\left\{ (\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} < \sigma < 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} \right\}$$

**Remarque :** Dans cet ensemble on a que :  $\rho \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$

**Démonstration :** Pour que  $\Delta$  ait des racines il faut que  $\delta$  soit strictement positif.

$$\delta > 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 1) > 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$$

Par convexité de  $\Delta$  on a que  $\Delta$  est négatif entre ces racines, il vient alors :

$$1 - 2\rho - \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1} < \sigma < 1 - 2\rho + \sqrt{\frac{(4\rho - 2)^2}{4} - 1}$$

Donc l'ensemble des  $\rho, \sigma$  qui vérifie cette inégalité sont alors des paramètres tels que  $\Delta$  est négatif. ■

On détermine les cas pour lesquels l'équilibre est instable ou asymptotiquement stable.

**Proposition 3.7**

Dans le cas  $\Delta < 0$  : Si  $\beta < 0$  l'équilibre est instable si  $\beta > 0$  alors on a :

- Si  $\sigma < -1, \rho > 1$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre instable pour (1)
- Si  $\sigma > -1, \rho < 1$  alors  $0_{\mathbb{R}^3}$  est un équilibre asymptotiquement stable pour (1)

**Démonstration :** Pour la différenciation du cas de  $\beta$  cf. la démonstration de 3.5.

Dans ce cas on a :

$$\text{Sp}(\mathcal{D}_T) = \left\{ \beta, \omega := \frac{-(\sigma+1) + i\sqrt{-\Delta}}{2}, \bar{\omega} := \frac{-(\sigma+1) - i\sqrt{-\Delta}}{2} \right\}$$

Pour étudier la stabilité on s'intéresse à la partie réelle de  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ . Or  $\Re(\omega) = \Re(\bar{\omega}) = -\frac{\sigma+1}{2}$  on retombe ainsi sur le même cas que dans la démonstration de la propriété 3.5. On retrouve bien le cas voulu. ■

**Exemple :** On observe bien que les solutions commencent leurs trajectoires avec une distance l'une de l'autre et ensuite se rapprochent jusqu'à un écart très faible. Dans ce cas de figure il n'est pas intéressant de représenter le cas où l'équilibre est instable, car les solutions s'éloignent très rapidement de l'origine et entres elles.

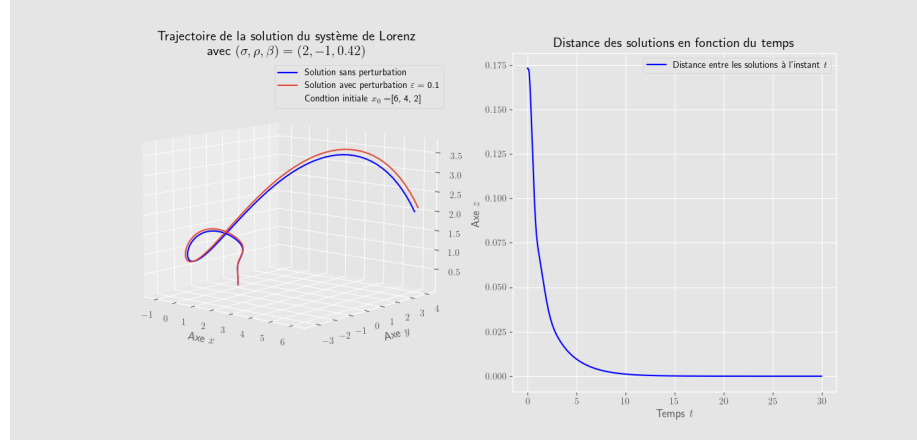


FIGURE 5 – Exemple d'équilibre asymptotiquement stable pour  $\Delta = 0$

### 3.4 Caractérisation de $S_{\pm}$

## 4 Annexes