$$\begin{cases} x' &= \sigma(y-x) & (L_1) \\ y' &= \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' &= xy - \beta z & (L_3) \end{cases} \tag{1}$$

On peut récrire ce systeme de la manière suivante.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \tag{2}$$

Remarquons que Γ est polynomiale, donc Γ est de classe C^∞ en particulier elle est C^1. D'après le théoreme de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution maximale de classe C^1 que l'on notera $(I,(x,y,z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ avec I de la forme $]0,T[,\ T \in]0,+\infty]$. Montrons que $(I,(x,y,z))$ est globale. Dans (1) on s'intéresse à la quantité : $x(L_1) + y(L_2) + z(L_3)$

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xyz - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ (N est la norme euclidienne au carré)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathcal{N}(x,y,z)\Big) &= (\sigma+\rho)xy - \sigma x^2 - y^2 - \beta z^2 \\ &\leq (\sigma+\rho)xy - \min(1,\sigma,\rho)\mathcal{N}(x,y,z) \\ (\mathit{Young})^{1} &\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2+y^2) + \mathcal{N}(x,y,z) \\ &\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2+y^2+z^2) + \mathcal{N}(x,y,z) \\ &\leq \left[\frac{\sigma+\rho}{2} - \min(1,\sigma,\rho)\right]\mathcal{N}(x,y,z) \end{aligned}$$

Posons $\eta = \sigma + \rho - 2\min(1,\sigma,\rho))$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathcal{N}(x,y,z)\Big) \leq \eta\, \mathcal{N}(x,y,z)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mathcal{N}(x,y,z)(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t},\ \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(x,y,z)(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini. En effet supposons par l'absurde que la norme du vecteur (x,y,z) explose en temps fini c'est-à-dire :

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}_+ \text{tel que } \lim_{t\to t_0} \mathcal{N}(x,y,z)(t) = +\infty \text{ mais, } \lim_{t\to t_0} \mathcal{N}_0 e^{\eta t} = \mathcal{N}_0 e^{\eta t_0} \leq +\infty$$

1. $\forall p,q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{g} = 1 \Rightarrow \forall a,b \in \mathbb{R}\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Or,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \, \mathcal{N}(x,y,z)(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}$$

On obtient alors une absurdité. Donc $\mathcal{N}(x,y,z)$ n'explose pas en temps fini. On en déduit que (x,y,z) n'explose pas en temps fini. En effet suposons que une des composante explose en temps fini par exemple x, c'est-à-dire :

$$\exists t_* \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \lim_{t \to t_*} x(t) = +\infty$$
$$\text{Or, } \forall t \in \mathbb{R}_+ \, x(t) \leq x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t}$$

En passant à la limte dans l'inéquation précédente on obtient une absurdité donc (x,y,z) est une solution globale de (1) c'est-à-dire $I = \mathbb{R}_+$

Par définition de (1) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x,y,z)$, or par composition $\Gamma(x,y,z)$ est C^1 donc (x', y', z') l'est aussi ainsi (x,y,z) est C^2.De la même manière on obtient par récurence immédiate que (x,y,z) est C^∞
On cherche maintenant les points stationnaire de (1).
On remarque que $(0,0,0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3} \equiv 0$ donc ($\mathbb{R}$,0) est une solution de l'equation differentielle.
On resout alors $\Gamma(x,y,z) = 0$ en supposant que $(x,y,z) \neq 0$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rll} \sigma(y-x) & = 0 & (L_1) \\ \rho x - y - xz & = 0 & (L_2) \\ xy - \beta z & = 0 & (L_3) \end{array} \right.$$