# Système de Lorenz

10 avril 2024

## Introduction

$$\left\{\begin{array}{lll} x' & = \sigma(y-x) & (L_1) \\ y' & = \rho x - y - xz & (L_2) \\ z' & = xy - \beta z & (L_3) \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \Gamma(\vec{u}), \quad \Gamma : \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \tag{2}$$

## 1 Méthodes numériques

## 2 Existence et première propriété

Dans cette section nous allons faire une étude du systeme de Lorenz afin de determiner l'existence des solutions. Nous nous limiterons à l'étude des temps positifs ($t \geq 0$)

**Proposition 2.1**

*Le systeme de Lorenz admet des solutions. De plus les solutions sont globales sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $C^1$*

**Démonstration :** $\Gamma$ est $C^1$ donc elle est localement Lipschitzienne, de plus elle de depend pas directement du temps. D'après le théoreme de Cauchy-Lipschitz, l'équation (1) admet une unique solution maximale de classe $C^1$ que l'on notera $(I,(x,y,z))$ avec $I \subset \mathbb{R}_+$ avec $I = [0,T[,\ T \in ]0,+\infty]$. Montrons que $(I,(x,y,z))$ est globale. Dans (1) on s'intéresse à la somme de, $x$ fois première ligne avec $y$ fois la seconde ligne et $z$ fois la troisième ligne.

$$xx' + yy' + zz' = \sigma yx - \sigma x^2 + \rho xy - y^2 - xyz + xyz - \beta z^2$$

Posons $\mathcal{N} : (t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ ($\mathcal{N}$ est la norme euclidienne au carré)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{N}(t) &= (\sigma+\rho)x(t)y(t) - \sigma x^2(t) - y^2(t) - \beta z^2(t) \\
&\leq (\sigma+\rho)x(t)y(t) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \\
&\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2(t)+y^2(t)) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \qquad (\mathit{Young})\,^1 \\
&\leq (\frac{\sigma+\rho}{2})(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)) + \min(1,\sigma,\beta)\mathcal{N}(t) \\
&\leq \left[\frac{\sigma+\rho}{2} + \min(1,\sigma,\beta)\right]\mathcal{N}(t)
\end{aligned}
$$

Posons $\eta = \sigma + \rho - 2\min(1,\sigma,\beta))$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{N}(t) \leq \eta\ \mathcal{N}(t)$$

D'après le lemme de Grönwall il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{N}_0 e^{\eta t},\ \text{avec } \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$$

Donc la norme du vecteur solution n'explose pas en temps fini. ■

En ayant obtenue les résultats de la proposition on peut aisément en déduire que la propriété suivante.

**Propriété 2.1**

*Les solutions du système de Lorenz* (1) *sont de classe* $C^\infty$

**Démonstration :** Par (2) on a que $(x', y', z') = \Gamma(x, y, z)$, or par composition $\Gamma(x, y, z)$ est $C^1$ donc $(x', y', z')$ l'est aussi, ainsi $(x, y, z)$ est $C^2$.De la même manière on obtient par récurence immédiate que $(x, y, z)$ est $C^\infty$ ■

Cette propriété nous permet de dire que même si (1) est un système dit chaotique, on peut affirmer que les solutions sont régulière.

# 3 Étude des points stationnaires

Après une première etude sommaire du système de Lorenz (1), on s'intéresse maintenant à l'étude des points stationnaires. Les points stationnaires sont des points tels que si le système passe par un de ces points il y reste indéfiniment.

**Théoreme 1**

*$u' = f(u)$ si il existe $v$ tel que $f(v) = 0$ alors $v$ est un point stationnaire de l'équation differentielle.*

1. $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

## 3.1 Rappel des théorèmes

D'abord on rappelle les résultats sur lesquels on s'appuiras dans la suite. Ces théorèmes établissent des résultats de stabilité sur les point stationnaires en se basant sur l'étude spectrale de la differentielle.

**Théoreme 2**

*Soit $f \in C^2(U;E)$ sur un ouvert $U$ d'un espace de Banach $E$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si le spectre de $\mathcal{D}_\Gamma(v)$ est inclus dans le demi-plan ouvert $\{\lambda; \Re(\lambda) < 0\}$ alors $v$ est un point d'équilibre assymptotiquement stable pour l'équation $u' = f(u)$*

Ce résultat nous permet de conclure sur le comportement assymtotique des solutions ayant subit une faible perturbation à l'instant de départ (c'est-à-dire les solution $(\mathbb{R}_+, u_1)$ telles que $u_1(t_{\text{init}}) = u(t_{\text{init}}) + \varepsilon,\ 0 < \|\varepsilon\| \ll 1$ ). On obtient ainsi $\lim_{t\to\infty} \|u - u_1\| = 0$.

**Théoreme 3**

*Soit $f \in C^2(U;E)$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Si $\max\{\Re(\lambda); \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathcal{D}_f(v))\}$ est atteint pour une valeur propre de $\mathcal{D}_f(v)$ de partie réelle strictement positive. Alors $v$ est un point d'équilibre instable pour l'équation $u' = f(u)$*

## 3.2 Détermination des équilibres

Dans un premier temps on regarde si notre système possèdes des équilibres et si oui lesquels.

**Proposition 3.1**

*L'equation (1) possèdes 3 points d'équilibre qui sont :*

$$0_{\mathbb{R}^3} \qquad S_+ := \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \qquad S_- := \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix}$$

**Démonstration :** On remarque que $(0,0,0)$ est un point stationnaire, en effet $\Gamma(0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3} := 0$ donc $(\mathbb{R}_+,0)$ est une solution de l'equation differentielle.
On resout alors $\Gamma(x,y,z) = 0$ en supposant que $(x,y,z) \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(y-x) &= 0 \quad (L_1) \\ \rho x - y - xz &= 0 \quad (L_2) \\ xy - \beta z &= 0 \quad (L_3) \end{cases}$$

de $(L_1)$ on obtient que $x = y$. Dans $(L_2)$ et dans $(L_3)$ on remplace $y$ par $x$, il vient alors :

$$(L_2) \Rightarrow \rho x - x - xz = 0 \Rightarrow x(\rho - 1 - z) = 0$$

$$(L_3) \Rightarrow x^2 - \beta z = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\beta}$$

On obtient ainsi un polynome de degrès 3 il y a donc au plus 3 équilibres :

$$\begin{aligned}
(L_2) &\Rightarrow x(\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta}) = 0, \text{ or } x \neq 0\\
&\Rightarrow x^2 = \beta(1-\rho)\\
\text{Si } \beta(1-\rho) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0, \rho \leq 1 \text{ ou } \beta \leq 0, \rho \geq 1 &\text{ alors :}\\
&\Rightarrow x = \pm\sqrt{\beta(1-\beta)}
\end{aligned}$$

De ces trois équation on obtient que :

$$\Gamma(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x,y,z) = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

On verifie aisément que cette relation est une équivalance, en ramplacant les valeurs obtenue de $x$,$y$ et $z$ dans $\Gamma(x,y,z)$ ■

**Remarque :** Si $\rho = 1$ il n'y a qu'un seul équilibre.

### 3.3 Caractérisation de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$

Calculons le polynome caractéristique de la differentielle de $\Gamma$ en $0_{\mathbb{R}^3}$, on notera ce polynome $\chi$.

$$\chi(\lambda) = \det\big(\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{D}_\Gamma(0,0,0)\big) = (\lambda - \beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma+1) + \sigma - \rho\sigma)$$

**Remarque :** $\beta$ est toujours racine de $\chi$

Posons $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2 + \lambda(\sigma+1) + \sigma - \rho\sigma$, donc $\chi(\lambda) = (\lambda-\beta)P(\lambda)$, on calcule le deteterminant de $P$ :

$$\Delta = (\sigma+1)^2 - 4(\sigma - \sigma\rho)) = (\sigma-1)^2 + 4\sigma\rho$$

On obtient alors un autre polynome. On étudie son signe et on différencie les cas suivant :

Cas 1 : Si $(\rho,\sigma) = (0,1)$ :

Alors $\chi_A(x) = (\lambda-\beta)(\lambda+1)^2$, donc d'après le théoreme, si $\beta$ est strictement positif 0 est un point d'équilibre instable pour (1)

Cas 2 : Si $(\rho,\sigma) = (1,-1)$ :

Alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda-\beta)\lambda^2$, donc d'après le théoreme, si $\beta$ est strictement positif (resp. strictement négatif) $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilibre instable (resp. asymptotiquement stable) pour (1)

Cas 3 : Si $\rho \in ]0,1[, \sigma \in \mathbb{R}$ :

$\Delta > (\sigma-1)^2 > 0$ donc $P$ a deux racines réelles. que l'on note :

$$\lambda_\pm = \frac{-(\sigma-1) \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma\rho}}{2}$$

Regardons le signe des racines. $\lambda_+ < -(\sigma-1) + \sqrt{(\sigma+1)^2} \leq 0$, de même pour $\lambda_-$, on a, $\lambda_- < -\sigma + 1 - |\sigma - 1| \leq 0$. De plus si $\beta$ est strictement négatif, toutes les racines sont strictement négative donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1). Si $\beta > 0$, $0_{\mathbb{R}^3}$ est un point d'équilbre instable.

Cas 4 : Si $\rho > 1$ et $\sigma \geq 0$ :

Dans ce cas on a $\Delta > 0$, on retrouve la même expression des racines que précédemment $\lambda_\pm$. On trouve que $2\lambda_+ > 1 - \sigma + |\sigma + 1| \geq 0$, donc $\lambda_+ > 0$, pour $\lambda_-$ on a, $2\lambda_- < 1 - \sigma - |\sigma + 1| \leq 0$, donc $\lambda_- < 0$, dans ce cas $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre instable pour (1).

Cas 5 : Si $\rho < 0$ et $\sigma \leq 0$ :

Comme dans le cas précédent on trouve $\Delta > 0$ avce cette fois $\lambda_+ < 0$ et $\lambda_- > 0$. On le retrouve en majorant $2\lambda_+$ et $2\lambda_-$ par $\rho = 0$, on majore ainsi $\lambda_+$ et minore $\lambda_-$. Donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilbre instable pour (1).

### 3.4 Caractérisation de $S_\pm$

# 4 Annexes