2011年度　振動・波動　期末試験　　2012年1月31日

1　長さ L の弦がギターに張ってある。この場合、弦の両端は固定されているので、そこでの変位はゼロでなければならず、両端は定在波の節になっている。

1.1　1本の弦を伝わる波が同じ速さ v、同じ波数 k で逆向きに伝わっている。これらの変位が

$$y_1 = \sin k(x - vt), \quad y_2 = \sin k(x + vt)$$

で表されるとき、2つの波が重ね合わされた全体の変位を求めよ。正弦関数の和積公式を用いて、三角関数の積の形に変形せよ。

1.2　$t_0 \equiv 2\pi/(kv)$ とおくとき、時刻 $t = 0, t_0/4, t_0/2$ における変位 y の位置 x に対する関数形を求め、それぞれのグラフを描け。

1.3　この波が定在波であることを上の図を用いて説明せよ。$\lambda \equiv 2\pi/k$ とおいて、定在波の節の間隔を λ で表せ。

1.4　長さ L の弦で出せる音のうち、最も低い音の周波数が、$\nu = \dfrac{v}{2L}$ で与えられることを説明せよ。

1.5　ギターの5弦は周波数110Hzと決められている。線密度 6.30×10^{-3} kg/m の弦を、張力12.6 kgwで張ってあるとき、この弦が110Hzを出すために必要な長さを求めよ。なお、1kgw=9.8Nとせよ。

1.6　ギターに張ってある弦の出す音を高くするには、弦の張力 T、線密度 μ および長さ L をそれぞれどうしたらよいか説明せよ。

2　1本の弦で、異なる周波数 $\nu_m = m\dfrac{v}{2L}$　$(m : 1, 2, \cdots)$ の定在波が同時に立つことがありうる。このときの定在波の重ね合わせを考えてみる。

m 番目の周波数の変位 $y_m(x, t)$ は、振幅を一般的に A_m とおくと、以下の通りに書ける。

$$y_m(x, t) = A_m \sin k_m x \cos k_m vt = A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi v}{L}t\right)$$

2.1　この変位は波動方程式を満たしていることを証明せよ。

2.2　異なる m についての重ね合わせ

$$y(x, t) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, t)$$

も波動方程式の解であることを証明せよ。

2.3 $x=0$ と $x=L$ で固定されている弦を、$t=0$ で $0 \le x \le L$ の範囲において、任意の形 $y(x,0)$ で変位させて静止し、手を離して振動を開始させる。この初期波形 $y(x,0)$ に対して、

$$y(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

と重ね合わせで書き表すとき、すべての m についての係数 A_m が

$$A_m=\frac{2}{L}\int_0^L y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

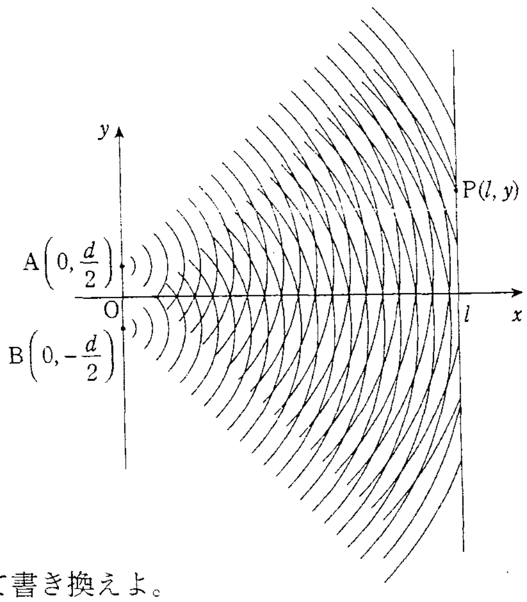
で計算できることを証明せよ。なお、以下の積分公式を使用してよい。

$$\begin{aligned}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m'\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x &= 0 \quad (m \neq m') \\ \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x &= \frac{L}{2}\end{aligned}$$

3 図のように、xy 平面上の２点 $\mathrm{A}\left(0,\frac{d}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(0,-\frac{d}{2}\right)$ にある点波源で、位相のそろった円形波

$$z(x,y,t)=\frac{C}{\sqrt{r}}\sin k(r-vt)$$

を発生させた。図の $x=l$ の直線上の各点 $\mathrm{P}(l,y)$ で２つの波の重ね合わせを観測した。



3.1 距離 $\overline{\mathrm{AP}}=r_1$ および $\overline{\mathrm{BP}}=r_2$ とおいて、それらを点 A, B, P を表す d, y, l および $\overline{\mathrm{OP}}$ の距離 L を用いて表せ。

3.2 **3.1** の結果について、$L \ll y, d$ の条件で、d^2 の項を無視し、さらに $(1+x)^a \sim 1+ax$ の近似を用いて書き換えよ。

3.3 観測点において、２つの波の振幅は等しいものと近似する。観測点における重ね合わせの変位

$$z=z_1(r_1,t)+z_2(r_2,t)=\frac{C}{\sqrt{L}}\sin k(r_1-vt)+\frac{C}{\sqrt{L}}\sin k(r_2-vt)$$

を計算せよ。正弦関数の和積公式を用いて、三角関数の積の形に変形せよ。

3.4 **3.3** の結果から、y 方向に観測される波の強度分布について、グラフを描いて説明せよ。