2015年度　振動・波動　中間試験	2015年11月17日

1　ドアクローザは、開けたドアーを自動的に閉める器具である。ドアクローザには、ばねによる復元力と、ダンパーによる速度に比例した抵抗力がはたらく。ドアクローザの原理について、以下の問いに答えよ。

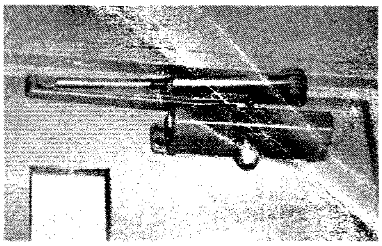

図 1: ドアクローザ

1.1　ドアクローザを表すモデルの運動方程式は
$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u + \gamma\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$ と整理できる。

この解が理想的な単振動の解に少し修正を加えて、$u(t) = f(t)\cos(\omega t - \alpha)$ で表せるものとおいてみる。この $u(t)$ を微分して代入し、$\cos(\omega t - \alpha)$ と $\sin(\omega t - \alpha)$ を含む恒等式に書き改めよ。

1.2　**1.1** の恒等式が任意の時刻 t で成立するための条件について、文章で説明して式で表せ。これより $f(t)$ を解き、それを用いて ω を求めよ。

1.3　**1.2** の関数 $f(t)$ と関数 $u(t)$ のグラフの概略を変数 t として同じ座標軸上に重ねて描け。なお、初期条件は自由に設定してよい。

1.4　**1.1** の解が指数関数減衰の解に少し修正を加えて、$u(t) = C\exp(\lambda t)$ で表せるものとおいてみる。この $u(t)$ を微分方程式に代入して、λ に関する方程式に整理せよ。

1.5　**1.4** の関数 $u(t)$ のグラフの概略を変数 t として同じ座標軸上に重ねて描け。なお、初期条件は自由に設定してよい。

1.6　**1.3** と **1.5** の２つの場合は、ドアクローザの動作としてどのような状況に対応しているか、実際のドアの動き方について、運動方程式の解との関係を挙げて説明せよ。さらに、ドアクローザの最も適切な動作はどのような状況になるか。ω_0 と γ が満たすべき条件を示し、文章で説明せよ。

1.7　ドアクローザを取り付けたドアが、ばたんと勢いよく閉まるようになった。ばねとダンパーのどちらか一方だけ調整して、理想的なドアの閉まり方にしたい。ばねだけ調整した場合とダンパーだけ調整した場合の結果の違いについて ω_0 と γ の間に成り立つ関係に基づいて考察せよ。

2　ばね定数 k のばねに質量 m のおもりがつながっている振動子に、速度に比例した抵抗力がかかっており、さらに周期的な外力を受けている場合を考えよう。

2.1　抵抗力と外力を受ける振動子の運動方程式は $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega_0^2 u + \gamma\dfrac{\partial u}{\partial t} = f\cos\omega t$ と整理できる。この解が単振動の解 $u(t) = A\cos(\omega t - \alpha)$ で表せるものとおいてみる。この $u(t)$ を微分方程式に代入して、$\cos(\omega t - \alpha)$ の項と $\sin(\omega t - \alpha)$ の項とに整理せよ。なお、三角関数の和積の公式 $\cos\omega t = \cos(\omega t - \alpha + \alpha) = \cos(\omega t - \alpha)\cos\alpha - \sin(\omega t - \alpha)\sin\alpha$ を用いること。

2.2　**1.1** で整理された微分方程式が任意の時刻 t で成立するための条件について、文章で説明して式で表せ。

2.3 $\tan\alpha$ および A を ω の関数として求め、$\tan\alpha(\omega)$ および $A(\omega)$ のグラフの概略を変数 ω として描け。

2.4 $\omega = \omega_0$ の付近では $A(\omega)$ はどのような特徴を示すかについて説明せよ。

2.5 $\omega = \omega_0$ の場合について、外力の $\cos\omega t$ と振動解の $\cos(\omega t - \alpha)$ とを同じグラフに重ねて描き、その意味を文章で説明せよ。

3 地面の上に立っている建物を、図 **2** のようなおもりとバネで表すことにする。建物全体を質量 m のひとつの質点として考え、建物の土台は揺れに対してもとの位置に戻ろうとする復元力をもっているバネとして考える。バネの一方の端は地面に取り付けられているものとする。地震の揺れは図の縦の x 軸方向の縦揺れに限ることにする。地震による地面の変位を u_0、地面が揺れる建物の変位を u_1 とおく。

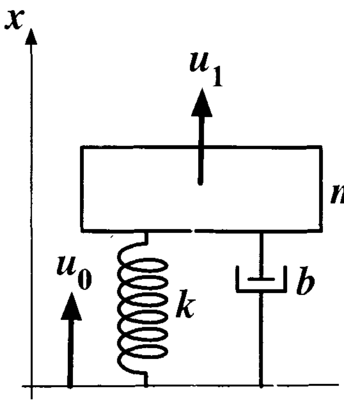

図 2: 地震のモデル

3.1 バネの伸びは地面と建物の変位の差で決まり、抵抗力は建物と地面の相対的な速度で決まることを考慮して、建物の運動方程式を立てよ。

3.2 **3.1** の結果を変形することにより、バネの支持点が変位することで、実効的に外力が加わったことと同等の効果が生じていることを説明せよ。

3.3 地震によって地面に $u_0 = U\cos\omega t$ の周期的な変動が生じたとする。**3.1** の運動方程式に地面の変位を代入し、この解が単振動の解 $u_1(t) = A\cos(\omega t - \alpha)$ で表せるものとおいてみる。この $u(t)$ を微分方程式に代入して、微分方程式の両辺を $\cos(\omega t - \alpha)$ の項と $\sin(\omega t - \alpha)$ の項とに整理せよ。

3.4 **3.3** で整理された方程式が任意の時刻 t で成立するための条件について、文章で説明して式で表せ。

3.5 $\dfrac{A}{U}$ を ω の関数として求めよ。$\dfrac{A}{U}$ は γ の値によらず、$\omega = \sqrt{2}\omega_0$ で $\dfrac{A}{U} = 1$ となることを示せ。

3.6 地面の振動の角振動数 ω を横軸、A/U を縦軸として、グラフに概略を描け。同じグラフに $A/U = 1$ の直線を重ねて描くこと。

3.7 $\dfrac{A}{U}$ の持つ意味を説明せよ。$\omega = \sqrt{2}\omega_0$ の値はどのように重要か説明せよ。

3.8 抵抗力がゼロの場合を考える。地面の揺れに対して、建物の揺れを 12.5 %に抑えるためには、地面の揺れの振動数 ω に対する建物の単振動の周波数 ω_0 をいくらに設定すればよいか。

3.9 以上の結果に基づき、地震の揺れから建物を守る手段について、実際の揺れの振動数 ω、建物の質量 m と建物の土台のバネ定数 k の関係から説明せよ。