2014年度　振動・波動　期末試験　　　2015年2月3日

1　単位長さあたりの質量 μ が一様な1本の弦を、両端から引っ張った状態にする。この弦を仮想的に間隔 a で細かく分け、ひとつの小部分は、重心に質量 μa が集中した質点とみなす。分割した質点は、ばね定数を k のばねで連結されていると考える。これらの小部分に番号を振り、$n-1, n, n+1$ 番目の質点がつり合いの位置からずれている変位をそれぞれ u_{n-1}, u_n, u_{n+1} とおく。ただし、質点は連結した方向にしか運動しないものとする。

1.1　n 番目の質点に関する運動方程式を立てよ。結果だけではなく、立て方の手順を説明せよ。

1.2　$T' \equiv ka$ と置き、T' と μ を一定とみなして、運動方程式を書き換えよ。

1.3　1本の弦を仮想的に細分化していったのが、多数個の質点のモデルである。弦は連続であるから、この分割は無限に細かくても成り立つはずである。**1.2** の運動方程式を連続体に移行させるための考え方を説明し、実際に運動方程式を変形して波動方程式を導け。

2　長さ L の弦がギターに張ってある。この場合、弦の両端は固定されているので、そこでの変位はゼロでなければならず、両端は定在波の節になっている。

2.1　1本の弦を伝わる波が同じ速さ v、同じ波数 k で逆向きに伝わっている。これらの変位が

$$y_1 = \sin k(x - vt), \quad y_2 = \sin k(x + vt)$$

で表されるとき、2つの波が重ね合わされた全体の変位を求めよ。正弦関数の和積公式を用いて、三角関数の積の形に変形せよ。

2.2　$t_0 \equiv 2\pi/(kv)$ とおくとき、時刻 $t = 0, t_0/4, t_0/2$ における変位 y の位置 x に対する関数形を求め、それぞれのグラフを描け。

2.3　この波が定在波であることを上の図を用いて説明せよ。$\lambda \equiv 2\pi/k$ とおいて、定在波の節の間隔を λ で表せ。

2.4　長さ L の弦で出せる音のうち、最も低い音の周波数の求め方を説明せよ。

2.5　ギターの5弦は周波数110Hzと決められている。線密度 6.30×10^{-3} kg/m の弦を、張力12.6 kgwで張ってあるとき、この弦が110Hzを出すために必要な長さを求めよ。1kgw=9.8Nを用いよ。

2.6　ギターに張ってある弦の出す音を高くするには、弦の張力 T、線密度 μ および長さ L をそれぞれどうしたらよいか説明せよ。

3　速さが同じ v で、周波数 ν_1, ν_2 の異なる２つの正弦波

$$y_1 = \sin \frac{2\pi\nu_1}{v}(x - vt), \quad y_2 = \sin \frac{2\pi\nu_2}{v}(x - vt)$$

を位置座標 $x = 0$ で同時に観測した。

3.1　２つの波が重ね合わされた全体の変位を求めよ。正弦関数の和積公式を用いて、三角関数の積の形に変形せよ。$\overline{\nu} \equiv \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, $\delta\nu \equiv |\nu_1 - \nu_2|$ と定義して書き換えよ。

3.2　**3.1** で求めた変位について横軸を時刻 t とするグラフに描け。横軸に適切な値を書き込むこと。

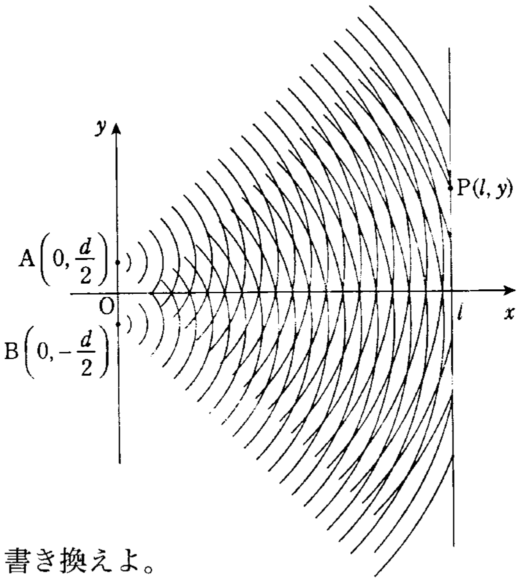
3.3　**3.2** を利用して、うなりの周波数について説明せよ。

3.4　周波数 440Hz の音に、ある周波数の音を重ねたら、0.5 秒に１回ずつ音の強弱変化が聞こえた。次に重ねた音の周波数を少しずつ上げていったところ、うなりの間隔は次第に短くなっていった。最初に重ねた音の周波数を求める考え方を説明せよ。

4　図のように、xy 平面上の２点 A $\left(0, \frac{d}{2}\right)$, B $\left(0, -\frac{d}{2}\right)$ にある点波源で、位相のそろった円形波

$$z(x, y, t) = \frac{C}{\sqrt{r}} \sin k(r - vt)$$

を発生させた。図の $x = l$ の直線上の各点 $\mathbf{P}(l,\ y)$ で２つの波の重ね合わせを観測した。



4.1　距離 $\overline{\mathrm{AP}} = r_1$ および $\overline{\mathrm{BP}} = r_2$ とおいて、それらを点 A, B, P を表す d, y, l および $\overline{\mathrm{OP}}$ の距離 L を用いて表せ。

4.2　**4.1** の結果について、$L \ll y, d$ の条件で、d^2 の項を無視し、さらに $(1 + x)^a \sim 1 + ax$ の近似を用いて書き換えよ。

4.3　観測点では、２つの波の振幅は等しいものと近似する。観測点における重ね合わせの変位

$$z = z_1(r_1, t) + z_2(r_2, t) = \frac{C}{\sqrt{L}} \sin k(r_1 - vt) + \frac{C}{\sqrt{L}} \sin k(r_2 - vt)$$

を計算せよ。正弦関数の和積公式を用いて、三角関数の積の形に変形せよ。

4.4　**4.3** の結果から、y 方向に観測される波の強度分布について、グラフを描いて説明せよ。

4.5　間隔 $d = \frac{1}{110}$mm の２重スリットに対して単一波長のレーザー光を照射し、距離 $l = 4$m 離れたスクリーン上に干渉縞を投影した。レーザーの波長が $\lambda = 0.53\mu$m および $\lambda = 0.67\mu$m のそれぞれの場合について、干渉縞の明線間隔を求めよ。~~$l \ll y$~~ $l \gg y$ の条件ではどのような近似を用いることになるかを説明せよ。