2014年度　振動・波動　中間試験　　2014年11月25日

1　ドアクローザは、開けたドアーを自動的に閉める器具である。ドアクローザには、ばねによる復元力と、ダンパーによる速度に比例した抵抗力がはたらく。ドアクローザの原理について、以下の問いに答えよ。

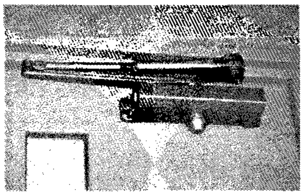


図 1: ドアクローザ

1.1　復元力と抵抗力がはたらく質点の運動方程式は、
$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2u+\gamma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$ と整理できる。

この微分方程式の解が、理想的な単振動の解 $u=A\cos(\omega t-\alpha)$ に少し修正を加えて、$u=f(t)\cos(\omega t-\alpha)$ で表せるものとおいてみる。この関数を微分して代入し、$\cos(\omega t-\alpha)$ と $\sin(\omega t-\alpha)$ を含む恒等式に書き改めよ。

1.2　**1.1** の恒等式を解いて、解 $u=f(t)\cos(\omega t-\alpha)$ の $f(t)$ と ω を求めよ。この解が求まるために、ω_0 と γ が満たすべき条件式を記せ。

1.3　$u=f(t)\cos(\omega t-\alpha)$ の概略を、$t=0$ で速度がゼロの条件で、縦軸 u、横軸 t のグラフに図示せよ。

1.4　微分方程式 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2u+\gamma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$ の解が、理想的な単振動の解 $u=Ce^{\lambda t}$ で表せるものとおいてみる。この関数を微分して代入し、一般解 $u=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$ を求めよ。この解が求まるために、ω_0 と γ が満たすべき条件式を記せ。

1.5　$u=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$ の概略を縦軸 u、横軸 t のグラフに図示せよ。

1.6　**1.3** と **1.5** の２つの場合は、ドアクローザの動作としてどのような状況に対応しているか、実際のドアの動き方について、運動方程式の解との関係を挙げて説明せよ。さらに、ドアクローザの最も適切な動作はどのような状況になるか。ω_0 と γ が満たすべき条件を示しながら、なるべく文章で説明せよ。

2　周期的な外力と抵抗力が加わっている調和振動子の運動方程式を考えよう。

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2u+\gamma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f\cos\omega t$$

この解が、理想的な単振動の解 $u=A\cos(\omega t-\alpha)$ で表せるものとおいてみる。

2.1　この関数を微分して最初の運動方程式に代入することにより、$\cos(\omega t-\alpha)$ と $\sin(\omega t-\alpha)$ についてまとめた恒等式を導け。必要に応じて、下記の公式を用いよ。

$$\cos\omega t \;=\; \cos(\omega t-\alpha+\alpha)=\cos(\omega t-\alpha)\cos\alpha-\sin(\omega t-\alpha)\sin\alpha$$

2.2　**2.1** の式が任意の時刻 t で成立するには、$\cos(\omega t-\alpha)$ と $\sin(\omega t-\alpha)$ の係数が両辺で等しくなければならない。それらの連立式を A,α について解いた解が以下で表せることを説明せよ。

$$\tan\alpha=\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2},\quad A(\omega)=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$$

2.3　質点の振動振幅 A は、外力の角振動数 ω に依存する。角振動数 ω の周期的な外力を与えたときの振幅 $A(\omega)$ の概略をグラフに描け。

2.4 **2.3** で描いた振幅 $A(\omega)$ のグラフで急峻な極大値をもつことは、強制振動についてどのような性質を表しているか、説明せよ。

3

強制振動の実際例として私たちにとって身近な例は地震である。地面の上に立っている建物を、図 2 のようなおもりとバネで表すことにする。建物全体を質量 m のひとつの質点として考え、建物の土台は揺れに対してもとの位置に戻ろうとする復元力をもっているバネとして考える。バネの一方の端は地面に取り付けられているものとする。地震の揺れは図の縦の x 軸方向の縦揺れに限ることにする。地震による地面の変位を u_0、地面が揺れる建物の変位を u_1 とおく。

3.1 バネの伸びは地面と建物の変位の差で決まり、抵抗力は建物と地面の相対的な速度で決まることを考慮して、建物の運動方程式を立てよ。

3.2 **3.1** の結果を変形することにより、バネの支持点が変位することで、実効的に外力が加わったことと同等の効果が生じていることを説明せよ。

3.3 地震によって地面に $u_0 = U\cos\omega t$ の周期的な変動が生じたとする。**3.1** の運動方程式に地面の変位を代入し、この解が単振動 $u_1 = A\cos(\omega t - \alpha)$ で表せるものとおいてみる。これを左辺に代入し、$\cos(\omega t - \alpha)$ および $\sin(\omega t - \alpha)$ の項の係数を比較して、連立方程式を示せ。

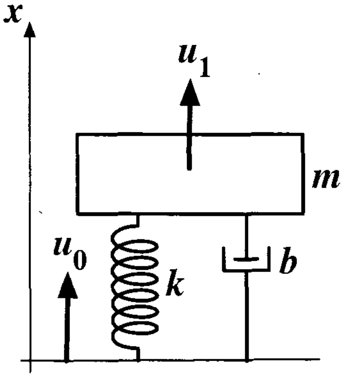


図 2: 地震のモデル

3.4 **3.3** を解いた解が以下で表せることを説明せよ。

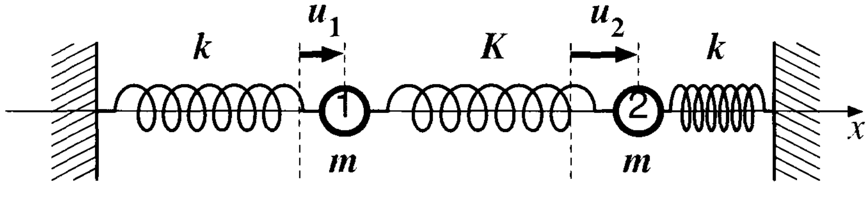
$$\frac{A}{U} = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + \gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

3.5 地面の振動の角振動数 ω を横軸、A/U を縦軸として、グラフに概略を示し、A/U のもつ意味を説明せよ。

3.6 以上の結果に基づき、地震の揺れから建物を守る手段について、実際の揺れの振動数 ω、建物の質量 m と建物の土台のバネ定数 k の関係から説明せよ。

4

図のように、質量 m のおもり２個をばね定数 k のばねで壁につなぎ、おもりどうしをばね定数 K のばねで連結した。つり合いの位置からのおもり１、２の変位を u_1、u_2 とおく。ただし、おもりは x 方向にのみ運動し、重力の影響は受けないものとする。



4.1 それぞれのおもりを質点とみなして、運動方程式を立てよ。

4.2 おもりの変位 u_1、u_2 が同時に 同じ角振動数で単振動するものとして、変位を $u_1 = A_1\cos(\omega t - \alpha)$, $u_2 = A_2\cos(\omega t - \alpha)$ で表す。おもりの運動方程式から導かれる A_1, A_2 に関する連立方程式を解き、２通りの ω の解を求めよ。

4.3 ２通りの ω の解で場合分けして、A_1 と A_2 との間に成り立つ関係を求め、おもり 1 とおもり 2 の時々刻々の動きをコマ撮り写真のような図を描いて説明せよ。