2011年度　振動・波動　中間試験　　2011年12月6日

1　ドアクローザは、開けたドアーを自動的に閉める器具である。ドアクローザには、ばねによる復元力と、ダンパーによる速度に比例した抵抗力がはたらく。ドアクローザの原理について、以下の問いに答えよ。

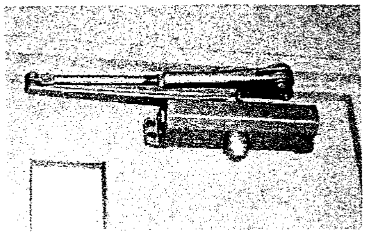


図 1: ドアクローザ

1.1　まず、ばね定数 k のばねに質量 m のおもりがつながって、摩擦のないなめらかな床面に置かれている状況を考える。ばねが自然長でつりあっている位置を $x=0$ とおく。ばねから受ける力は自然長からの変位 u に比例すると考える。このおもりの変位 u についての運動方程式を記し、単振動の角振動数 ω_0 および一般解の形を示せ。

1.2　次に、**1.1** のおもりに、速度に比例する抵抗力 $-b\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ がかかる状況を考える。このおもりの変位 u についての運動方程式を記せ。

1.3　**1.2** の運動方程式は、$\gamma = b/m$ とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u + \gamma\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$ と整理できる。

この微分方程式の解が、理想的な単振動の解 $u = A\cos(\omega t+\alpha)$ に少し修正を加えて、$u = f(t)\cos(\omega t+\alpha)$ で表せるものとおいてみる。この関数を微分して代入し、$\cos(\omega t+\alpha)$ と $\sin(\omega t+\alpha)$ を含む恒等式に書き改めよ。

1.4　**1.3** の恒等式を解いて、解 $u = f(t)\cos(\omega t+\alpha)$ の $f(t)$ と ω を求めよ。この解が求まるために、ω_0 と γ が満たすべき条件式を記せ。

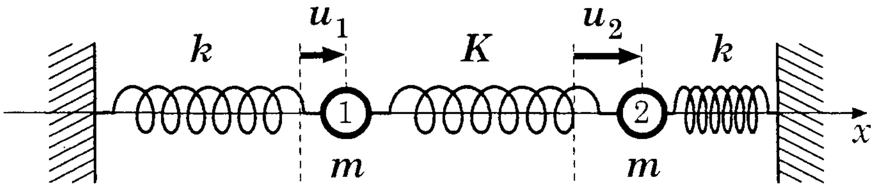
1.5　~~速度~~が $u = f(t)\cos(\omega t+\alpha)$ の概略を、$t=0$ で速度がゼロの条件で、縦軸 u、横軸 t のグラフに図示せよ。

1.6　微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u + \gamma\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$ の解が、理想的な単振動の解 $u = Ce^{\lambda t}$ で表せるものとおいてみる。この関数を微分して代入し、一般解 $u = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ を求めよ。この解が求まるために、ω_0 と γ が満たすべき条件式を記せ。

1.7　$u = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ の概略を縦軸 u、横軸 t のグラフに図示せよ。

1.8　**1.5** と **1.7** の2つの場合は、ドアクローザの動作としてどのような状況に対応しているか、実際のドアの動き方について、運動方程式の解との関係を挙げて説明せよ。さらに、ドアクローザのもっとも適切な動作はどのような状況になるか。ω_0 と γ が満たすべき条件を示しながら、なるべく文章で説明せよ。

2 図のように、質量 m のおもり２個をばね定数 k のばねで壁につなぎ、おもりどうしをばね定数 K のばねで連結した。つり合いの位置からのおもり１、２の変位を u_1、u_2 とおく。ただし、おもりは x 方向にのみ運動し、重力の影響は受けないものとする。



2.1 それぞれのおもりを質点とみなして、運動方程式を立てよ。

2.2 おもりの変位 u_1、u_2 が同時に 同じ角振動数で単振動するものとして、変位を $u_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha)$, $u_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha)$ で表す。おもりの運動方程式から導かれる A_1, A_2 に関する連立方程式を解き、２通りの ω の解を求めよ。

2.3 ２通りの ω の解で場合分けして、A_1 と A_2 との間に成り立つ関係を求めよ。

2.4 ２通りの ω の解で場合分けして、おもり１とおもり２の時々刻々の動きをコマ撮り写真のような図を描いて説明せよ。

3 単位長さあたりの質量 μ が一様な１本の弦を、両端から引っ張った状態にする。この弦を仮想的に間隔 a で細かく分け、ひとつの小部分は、重心に質量 μa が集中した質点とみなす。分割した質点は、ばね定数を k のばねで連結されていると考える。これらの小部分に番号を振り、$n-1$, n, $n+1$ 番目の質点がつり合いの位置からずれている変位をそれぞれ u_{n-1}, u_n, u_{n+1} とおく。ただし、質点は連結した方向にしか運動しないものとする。

3.1 n 番目の質点に関する運動方程式を立てよ。結果だけ書くのではなく、立て方の手順を説明せよ。

3.2 $T' \equiv ka$ と置き、T' と μ を一定とみなして、運動方程式を書き換えよ。

3.3 １本の弦を仮想的に細分化していったのが、多数個の質点のモデルである。弦は連続であるから、この分割は無限に細かくても成り立つはずである。**3.2** の運動方程式を連続体に移行させるための考え方を説明し、実際に運動方程式を変形して波動方程式を導け。

3.4 **3.3** の波動方程式には、$u = f(x - vt)$ および $u = g(x + vt)$ の形の解があることを証明せよ。さらに、v を T', μ, a のうち、適切なものを使って表せ。

3.5 $u = f(x - vt)$ および $u = g(x + vt)$ の形の解は、どのような伝搬のしかたをする波を表現しているか、グラフと文章でなるべくていねいに説明せよ。