2013年度　振動・波動　期末試験　　2014年1月21日

1　長さ L の弦がギターに張ってある。この場合、弦の両端は固定されているので、そこでの変位はゼロでなければならず、両端は定在波の節になっている。

1.1　1本の弦を伝わる波が同じ速さ v、同じ波数 k で逆向きに伝わっている。これらの変位が

$$y_1 = \sin k(x - vt), \quad y_2 = \sin k(x + vt)$$

で表されるとき、2つの波が重ね合わされた全体の変位を求めよ。正弦関数の和積公式を用いて、三角関数の積の形に変形せよ。

1.2　$t_0 \equiv 2\pi/(kv)$ とおくとき、時刻 $t = 0, t_0/4, t_0/2$ における変位 y の位置 x に対する関数形を求め、それぞれのグラフを描け。

1.3　この波が定在波であることを上の図を用いて説明せよ。$\lambda \equiv 2\pi/k$ とおいて、定在波の節の間隔を λ で表せ。

1.4　長さ L の弦で出せる音のうち、最も低い音の周波数が $\nu = \dfrac{v}{2L}$ となることを説明せよ。

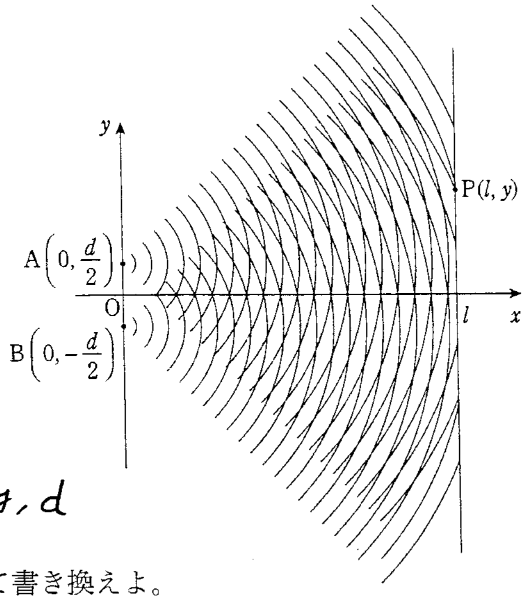
1.5　ギターの5弦は周波数110Hzと決められている。線密度 6.30×10^{-3} kg/m の弦を、張力12.6 kgwで張ってあるとき、この弦が110Hzを出すために必要な長さを求めよ。1kgw=9.8Nを用いよ。

1.6　ギターに張ってある弦の出す音を高くするには、弦の張力 T、線密度 μ および長さ L をそれぞれどうしたらよいか説明せよ。

2　図のように、xy 平面上の2点 $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{d}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(0, -\dfrac{d}{2}\right)$ にある点波源で、位相のそろった円形波

$$z(x, y, t) = \frac{C}{\sqrt{r}} \sin k(r - vt)$$

を発生させた。図の $x = l$ の直線上の各点 $\mathrm{P}(l, y)$ で2つの波の重ね合わせを観測した。



2.1　距離 $\overline{\mathrm{AP}} = r_1$ および $\overline{\mathrm{BP}} = r_2$ とおいて、それらを点A, B, Pを表す d, y, l および $\overline{\mathrm{OP}}$ の距離 L を用いて表せ。

$L \gg y, d$

2.2　**2.1** の結果について、~~$L \ll y, d$~~ の条件で、d^2 の項を無視し、さらに $(1+x)^a \sim 1 + ax$ の近似を用いて書き換えよ。

2.3 観測点では、2つの波の振幅は等しいものと近似する。観測点における重ね合わせの変位

$$z = z_1(r_1, t) + z_2(r_2, t) = \frac{C}{\sqrt{L}} \sin k(r_1 - vt) + \frac{C}{\sqrt{L}} \sin k(r_2 - vt)$$

を計算せよ。正弦関数の和積公式を用いて、三角関数の積の形に変形せよ。

2.4 **2.3** の結果から、y 方向に観測される波の強度分布について、グラフを描いて説明せよ。

3 1本の弦で、異なる周波数 $\nu_m = m\dfrac{v}{2L}$ $(m : 1, 2, \cdots)$ の定在波が同時に立つことがありうる。このときの定在波の重ね合わせを考えてみる。

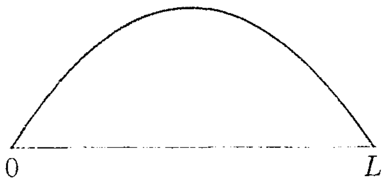
m 番目の周波数の変位 $y_m(x, t)$ は、振幅を一般的に A_m とおくと、以下の通りに書ける。

$$y_m(x, t) = A_m \sin k_m x \cos k_m vt = A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi v}{L}t\right)$$

3.1 この変位は波動方程式を満たしていることを証明せよ。

3.2 m についての重ね合わせ $y(x, t) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, t)$ も波動方程式の解であることを証明せよ。

3.3 $x = 0$ と $x = L$ で固定されている弦を、$t = 0$ で $0 \leq x \leq L$ の範囲において、任意の形 $y(x, 0)$ で変位させて静止し、手を離して振動を開始させる。この初期波形 $y(x, 0)$ に対して、$y(x, 0) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ と重ね合わせで書き表せる。



ここで、$y(x, 0) = \dfrac{A}{L^2}x(L - x)$ (A は定数) の場合を考えよう。すべての m についての係数 A_m が

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{A}{L^2} x(L - x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x$$

で計算できることを証明せよ。なお、以下の積分公式を使用してよい。

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m'\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq m')$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

3.4 **3.3** の定積分を実行すると、

$$A_m = \frac{4A(1 - \cos(m\pi))}{m^3\pi^3}$$

となる。A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 を実際に計算せよ。

3.5 **3.4** からわかるように、m が偶数のときは A_m は必ずゼロになる。その理由を、定在波 $A_m \sin\left(\dfrac{m\pi}{L}x\right)$ のグラフをいくつか異なる m について描きながら、数式を使わずに説明せよ。