Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 10

Álgebra I - MAT2227

Fecha: 2019/10/08

Sea $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mónico se define un ideal principal $(p(x)) = \{p(x) \cdot q(x) : q(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$[1], similarmente sean $q(x), p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mónicos se define un ideal generado por dos elementos $(q(x), p(x)) = \{p(x) \cdot a(x) + q(x) \cdot b(x) : a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$.

1) Dado $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mónicos demuestre las siguientes propiedades de $(p(x))$ y de $(p(x), q(x))$:

   (a) Sean $r(x), s(x) \in (p(x))$ entonces $r(x) + r(s) \in (p(x))$ (equivalentemente para $(p(x), q(x))$).

   (b) Sea $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ y $s(x) \in (p(x))$ entonces $r(x) \cdot s(x) \in (p(x))$ (equivalentemente para $(p(x), q(x))$).

2) (a) Dado $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mónicos tal que $p(x) \mid q(x)$ demuestre que $(q(x)) \subseteq (p(x))$.

   (b) Use (a) esto para demostrar que sí $p(x)$ es irreducible, no existe $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $(p(x)) \subsetneq (q(x))$, si $(p(x))$ cumple esta última condición se llama ideal principal maximal.

   (c) Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ mónico, se define $(p(x))$ de forma equivalente, usando lo anterior demuestre que los únicos ideales principales maximales en $\mathbb{C}[x]$ son de la forma $(x - a)$ con $a \in \mathbb{C}$.

   (d) Similarmente sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mónico se define $(p(x))$ de forma equivalente, demuestre que los únicos ideales principales maximales en $\mathbb{R}[x]$ son de la forma $(p(x))$ donde $\deg(p) \leq 2$.

[1] $q(x)$ puede ser constante

3) Use el algoritmo de Euclides para polinomios para demostrar que dado $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ existen $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ tales que $p \cdot u + q \cdot v = \gcd(p, q)$. Use esto para demostrar que dado $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mónicos coprimos, entonces $(p(x), q(x)) = \mathbb{Q}[x]$. Use lo anterior para demostrar que dado $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible mónico, todo polinomio $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ se puede escribir de la siguiente forma $q(x) = r(x) + s(x)$ con $r(x) \in (p(x))$ y $s(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus (p(x)) \cup \{0\}$.