Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Solución Ayudantía 10

Álgebra I - MAT2227

Fecha: 2019/10/08

3) Sea $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, ahora por inducción en el grado de un polinomio $q(x) \in \mathbb{X}$. Si $\deg(q) = 0$ entonces $\gcd(p, q) = p = p \cdot 1 + q \cdot 0$. Se asume que para todo q tal que $\deg(q) < k$ se tiene que $\exists a, b \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $\gcd(p, q) = p \cdot a + q \cdot q$. Luego, sea q de grado k, por algoritmo de la división existen $r, s \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p = qs + r$ donde $\deg(r) < \deg(q)$, se nota que $\gcd(p, q) = \gcd(p, r)$. Como $\deg(r) < \deg(q) = k$ existen $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $ap + br = \gcd(p, r) = \gcd(p, q)$, usando que $r = p - qs$ se tiene que $\gcd(p, q) = (a + b)p + (-bs)q$, con lo que se tiene lo pedido. Para la segunda parte, si p, q coprimos entonces $\exists a, b \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $ap + bq = 1$, por lo que $1 \in (p, q) \subseteq \mathbb{Q}[x]$, sea $r \in \mathbb{Q}[x]$, como $1 \in (p, q)$ y por propiedad 1b) se tiene que $r \cdot 1 \in (p, q)$, por lo que $\mathbb{Q}[x] = (p, q)$. Para la tercera parte, dado p irreducible mónico, existe $q \notin (p)$[1]. Luego $\gcd(p, q) = 1$, por lo que $(p, q) = \mathbb{Q}[x]$, por lo que todo elemento $r \in \mathbb{Q}[x]$ se puede escribir de la siguiente forma $r = ap + bq$, se nota que $ap \in (p)$, si $bq \in (p)$ se toma $s = 0$ y se tiene lo pedido, si no, se toma $s = bq$ y se tiene lo pedido. Con esto se tiene lo pedido.

[1] Si no existiera inmediatamente se tiene lo pedido, tomando $s = 0$