

# Introducción a la Geometría Algebraica

Nicholas Mc-Donnell

1er semestre 2019



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.1.1. Resolución de singularidades para una curva . . . . .	3
1.2. Preliminares Algebraicos . . . . .	4
1.3. Conjuntos Algebraicos . . . . .	6
1.4. Base de Hilbert . . . . .	7

**Info**

Libro: “Algebraic Curves” William Fulton

Libro 2: “Introduction to Commutative Algebra” Atiyah, Mac Donald

Notas: Tareas

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Estudio de objetos geométricos derivados de los polinomios (Variedades  $\rightarrow$  Esquemas, etc). Los objetos son suaves o singulares.

#### 1.1.1. Resolución de singularidades para una curva

Consideramos el siguiente polinomio:

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) := y^2 - x^2(x + 1) = 0\} = C$$

**Definición 1.1.1** (Singularidad). Es  $p \in \mathbb{C}^2$  tal que  $f(p) = 0$ ,  $f_x(p) = 0$  y  $f_y(p) = 0$

En el ejemplo el  $(0, 0)$  es el único punto singular.

Considerar el morfismo:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}^2 \\ (u, v) &\mapsto (uv, v) \end{aligned}$$

Vemos la pre-imagen:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(C) &= \{v^2 - u^2v^2(uv + 1) = 0\} \\ &= \{v^2 = 0\} \{1 - u^2(uv + 1) = 0\} \end{aligned}$$

**Ejemplo: 1.1.1.**

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ T(x, y) &= (-x, -y) \end{aligned}$$

$T$  es automorfismo de  $\mathbb{C}^2$

$$T \circ T = 1$$

Lo que sucede es que el grupo  $\{1, T\} = G$  actúa en  $\mathbb{C}^2$ .

Mirar  $\mathbb{C}^2/G$  = espacio de órbitas de  $G$ , lo cual es una variedad algebraica

Funciones regulares en  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}[x, y]$ .

Queremos buscar lo siguiente:

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \{f(x, y) \text{ polinomio tal que } f(x, y) = f(-x, -y)\} = \mathbb{C}[x^2, y^2, xy]$$

$$\mathbb{C}[x^2, y^2, xy] \simeq \mathbb{C}[a, b, c]/(c^2 - ab)$$

$$\therefore \mathbb{C}^2/G := \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : c^2 - ab = 0\}$$

**Ejemplo: 1.1.2.**

$$\{(x, y) \in k^2 : x^{2n} + y^{2n} = 1\} = V(k)$$

Cómo se ve  $V(k)$ ? ( $V(k) \neq \emptyset$ )

$$n = 1$$

$k = \mathbb{Q}$ : Circunferencia porosa ( $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, y = \frac{2t}{t^2+1}$ ) (Viene de  $\mathbb{Z}$ , aritmético)

$k = \mathbb{R}$ : Circunferencia completa (Viene de Análisis/límites)

$k = \mathbb{C}$ : Esfera sin puntos?

$$n \geq 2: V(\mathbb{Q}) \subset V(\mathbb{R}) \subset V(\mathbb{C})$$

$V(\mathbb{Q})$ : Ultimo Teorema de Fermat  $\implies$  4ptos

$V(\mathbb{R})$ : Algo que se acerca a un cuadrado con  $n$  “grande”

$V(\mathbb{C})$ : Objeto extraño con  $g = (n-1)(2n-1)$  agujeros

Variedades = ceros de polinomios  $\in k[x_1, \dots, x_n]$  donde  $k = \bar{k}$

## 1.2. Preliminares Algebraicos

- Anillos conmutativos con 1, y morfismos de anillos, tal que el  $1 \mapsto 1$
- Dominios (sin div. del cero) y cuerpos (todo  $u \neq 0$  es unidad)
- $R$  anillo  $\rightarrow R[x]$ , grado, mónico. En general:  $R[x_1, \dots, x_n]$
- Polinomios homogéneos:  $F \in R[x_1, \dots, x_n]$  ssi  $F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{\deg(F)} F(x_1, \dots, x_n)$
- $a \in R$  es irreducible si  $a$  no unidad, no cero y  $a = bc \implies b$  o  $c$  es unidad

- $a \in R$  es primeo si  $a \mid bc \implies a \mid b$  o  $a \mid c$
- $R$  es UFD (DFU): Todo elemento se factoriza de forma única salvo orden y unidades. ( $R$  UFD  $\implies R[x]$  UFD)
- Dado  $R$  dominio existe  $F =$  cuerpo de fracciones de  $R \supset R$ ,  $F = \{\frac{a}{b} : a, b \in R, b \neq 0\}$
- $f$  morfismo,  $\ker f$  (ideal)  $\text{Im } f$  (anillo)
- Ideal  $\cong$  Kernel (Primer teorema de Isomorfismo)
- Para  $S \subset R$  anillo,  $\langle S \rangle =$  Ideal generado por  $S$

**Definición 1.2.1** (Ideal Primo).  $p \subset R$  ideal primo ssi  $ab \in p \implies a \in p \vee b \in p$

**Teorema 1.2.1.**  $p$  primo  $\iff R/p$  dominio.

*Demostración.*  $p$  ideal primo

$$\begin{aligned}
 ab &= 0 \\
 \iff ab &\in p \\
 \iff a \in p \vee b &\in p \\
 \iff a = 0 \vee b &= 0
 \end{aligned}$$

□

**Definición 1.2.2** (Ideal Maximal).  $p \subset R$  es maximal ssi  $p \subset m \subset R$ ,  $m$  ideal  $\implies p = m \vee m = R$

**Teorema 1.2.2.**  $m$  maximal  $\iff R/m$  es cuerpo

*Demostración.*  $\implies$

Sea  $a \in R \setminus m$ , por lo que  $a \neq 0$ , luego ya que  $m$  maximal,  $\langle m, a \rangle = R$ . Dado esto, sabemos que  $\exists b \in m, \exists c, d \in R : bc + ad = 1$ , y viendo esto en  $R/m$  tenemos que  $ad = 1$ , o sea,  $a$  tiene inverso.

$\Leftarrow$

Por contradicción, existe  $n$  ideal maximal que contiene a  $m$

□

**Problema 1.2.1.** Sea  $R$  un dominio.

1. Si  $F, G$  son formas<sup>1</sup> de grado  $r, s$  respectivamente en  $R[x_1, \dots, x_n]$ , muestre que  $FG$  es una forma de grado  $r + s$
2. Muestre que todo factor de una forma en  $R[x_1, \dots, x_n]$  también es una forma

**Problema 1.2.2.** Sea  $R$  un DFU,  $K$  el cuerpo cociente de  $R$ . Muestre que todo elemento  $z$  de  $K$  se puede escribir

---

<sup>1</sup>Polinomios homogéneos

### 1.3. Conjuntos Algebraicos

**Definición 1.3.1** (Espacio Afín). El **Espacio afín** de dimensión  $n$  es  $\mathbb{A}_k^n := k^n$

**Definición 1.3.2** (Hipersuperficie). Dado  $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ , se define la **hipersuperficie**

$$V(F) := \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : F(a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

**Ejemplo 1.3.1.**  $V(y^2 - x^2(x+1)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

**Ejemplo 1.3.2.**  $V(ax^2 + by^2 + 1) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 = \emptyset$ , dado  $a, b > 0$ , distinto a  $V(x^2 + y^2 + 1) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$

**Ejemplo 1.3.3.**  $V(y^2 - x(x^2 - 1)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

**Ejemplo 1.3.4.**  $V(z^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$

**Ejemplo 1.3.5.**  $V((x^2 - y^2)(x^3 - 1)(y^3 - 1)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

**Definición 1.3.3** (Conjunto Algebraico). Sea  $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ . Un **conjunto algebraico afín**

$$\begin{aligned} V(S) &= \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0 \forall F \in S\} \\ &= \bigcap_{F \in S} V(F) \end{aligned}$$

$$S = \{F_1, \dots, F_m\}, V(S) = V(F_1, \dots, F_m)$$

**Propiedades 1.3.4** (Conjuntos Algebraicos).

1. Si  $I = \langle S \rangle \implies V(S) = V(I)$

*Demostración.* Sea  $p \in V(S) \implies F(p) = 0 \forall F \in S$ .

Sea  $G \in I \implies G = r_1 F_1 + \dots + r_m F_m$ ,  $F_1, \dots, F_m \in S$ ,  $r_1, \dots, r_m \in k[x_1, \dots, x_n]$

$$\therefore G(p) = r_1(p)F_1(p) + \dots + r_m(p)F_m(p) = 0 \implies p \in V(I)$$

Si  $p \in V(I) \implies$  en particular  $F(p) = 0 \forall F \in S \subset I \implies p \in V(S)$

$$\therefore V(I) = V(S)$$

□

2.  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in J}$  familia de ideales  $\implies V(\bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J} V(I_\alpha)$

3.  $I \subset J$  ideales  $\implies V(I) \supset V(J)$

4.  $V(FG) = V(F) \cup V(G)$  Sea  $I, J$  ideales  $\implies V(I) \cup V(J) = V(\langle \{FG : F \in I, G \in J\} \rangle)$

5.  $V(\emptyset) = \mathbb{A}_k^n$ ,  $V(1) = \emptyset$



**Observación 1.3.1.** La **unión** arbitraria de conjuntos algebraicos no es necesariamente conjunto algebraico:

$$\mathbb{N} = V(I)?$$

**Observación 1.3.2** (Topología de Zariski). Los conjuntos algebraicos definen los **conjuntos cerrados** para una topología en  $\mathbb{A}_k^n$  ( $\mathbb{A}_k^n \setminus \text{cerrados} = \text{abiertos}$ ). Los cerrados de esta topología son  $\{\emptyset, \mathbb{A}_k^n, \text{conj. finitos}\}$

**Definición 1.3.5** (Ideal de un conjunto). Sea  $X \subset \mathbb{A}_k^n$ .  $I(X) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(p) = 0 \forall p \in X\}$

**Propiedades 1.3.6** (Ideales de conjuntos).

1.  $I(X)$  es ideal:

$$\text{Demostración. } f, g \in I(X) \implies f(p) + g(p) = 0, \forall p \in X \implies f + g \in I(X)$$

$$r \in k[x_1, \dots, x_n], f \in I(X) \implies r(p)f(p) = r(p) \cdot 0 = 0 \forall p \in X \implies rf \in I(X) \quad \square$$

2.  $X \subset Y \implies I(X) \supset I(Y)$

3.  $I(\emptyset) = k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $I(\mathbb{A}_k^n) = (0)$  si  $k$  es un cuerpo infinito.  $I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$   $a_i \in k$

4.  $I(V(S)) \supset S \forall \text{ conj. } S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $V(I(X)) \supset X \forall X \subset \mathbb{A}_k^n$

5.  $V(I(V(S))) = V(S) \forall \text{ conj. de pol. } S$ ,  $I(V(I(X))) = I(X) \forall X \subset \mathbb{A}_k^n$

6. Si  $V = \text{conj. alg.} \implies V = V(I(V))$ , si  $I = \text{ideal} \implies I = I(V(I))$

**Observación 1.3.3.** Si  $I = I(X)$  y  $\exists m \in \mathbb{N} : F^m \in I$ , entonces  $F \in I$

**Definición 1.3.7** (Ideal Radical). Si  $I$  es ideal de  $R$ , entonces el ideal Radical es:

$$\text{rad } I = \{a \in R : \exists m \in \mathbb{N} a^m \in I\}$$

## 1.4. Base de Hilbert

**Teorema 1.4.1** (Base de Hilbert). *Todo conjunto algebraico es la intersección de un número finito de hipersuperficies.*

**Definición 1.4.1** (Anillo Noetheriano). Sea  $R$  anillo.  $R$  se dice **Noetheriano** ssi todo ideal de  $R$  es finitamente generado.

**Observación 1.4.1.** Notar que  $k$  cuerpo es Noetheriano, y que los DIP son Noetherianos.

**Teorema 1.4.2** (Hilbert).  $R$  Noetheriano  $\implies R[x_1, \dots, x_n]$  Noetheriano

*Demostración.*  $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d \in R[x]$   $a_d \neq 0$ ,  $a_d$  se llamará término líder de  $F$  ( $a_d = l(F)$ ).

Sea  $I \subset R[x]$  ideal, Sea  $J \subset R$  el conjunto de todos los términos líderes de elementos en  $I$

**Observación 1.4.2.**  $J$  es ideal

$\therefore$  Por hipótesis  $J = \langle l(F_1), \dots, l(F_r) \rangle$ .

Sea  $N > \deg(F_i) \forall i = 1, \dots, r$

Para cada  $m \leq N$ , sea  $J_m$  el conjunto de los coeficientes líderes de  $F \in I$  con  $\deg(F) \leq m$ . Notamos que  $J_m$  es ideal.

$\therefore$  Por hipótesis,  $J_m = \underbrace{\langle l(F_{m,i}) \rangle}_{\text{Finitos}}$  con  $\deg(F_{m,i}) \leq m$ .

$$I' = \langle F_1, \dots, F_r, \bigcup_{m=1}^N \{F_{m,i}\} \rangle$$

Notar que  $I' \subseteq I$ . Sea  $G \in I \setminus I'$  tal que su grado es lo más pequeño posible.

Caso 1: Si  $\deg(G) > N \implies \exists$  polinomios  $\{Q_i\}$  tal que  $G$  y  $\sum_{i=1}^r Q_i \cdot F_i$  tienen el mismo líder: Sea  $l(G) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot l(F_i)$

$$\therefore Q_i = \alpha_i \cdot x^{\deg(G) - \deg(F_i)}$$

$$\therefore \deg(G - \underbrace{\sum_{i=1}^r Q_i \cdot F_i}_{\in I}) < \deg(G)$$

Y  $G - \sum Q_i \cdot F_i \notin I'$  en otro caso  $G \in I' \rightarrow \leftarrow$

Caso 2: Si  $\deg(G) \leq N \implies \deg(G) = m \leq N$

$\therefore$  hacer lo mismo con  $J_m$  □

**Corolario.**  $k[x_1, \dots, x_m]$  es Noetheriano.

**Definición 1.4.2** (Reducible/Irreducible).  $V \subset \mathbb{A}^n$  conjunto algebraico. Si  $V = V_1 \cup V_2$  donde  $V_1, V_2$  son conjuntos algebraicos en  $\mathbb{A}^n$  y  $V \neq V_i, i = 1, 2 \implies$  se dice que  $V$  es **reducible**. Si no, es **irreducible**

**Ejemplo: 1.4.3.**  $V(xy) \subset \mathbb{A}_k^2$ ,  $V(xy) = V(x) \cup V(y) \implies V(xy)$  es reducible.

**Ejemplo: 1.4.4.**  $\{p, q\} \subset \mathbb{A}_k^n$ ,  $V = \{p, q\} = \{p\} \cup \{q\}$

**Ejemplo: 1.4.5.**  $V(x^2) \subset \mathbb{A}^2$ ,  $(x^2) = I$  no es primo

**Proposición 1.4.6.**  $V$  irred. ssi  $I(V)$  es primo

*Demostración.* Si  $I(V)$  no primo  $\implies F_1, F_2 \in k[x_1, \dots, x_2]$  con  $F_1 F_2 \in I(V)$ , pero  $F_i \notin I(V)$   $i = 1, 2$

$$\implies V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2)), V \cap V(F_i) \not\subseteq V$$

Si  $p \in V \implies F_1(p) \cdot F_2(p) = 0 \implies F_1(p) = 0 \vee F_2(p) = 0$ .

Luego  $\exists q_i \in V$  tal que  $F_i(q_i) \neq 0 \implies q_i \notin V \cap V(F_i)$

$\therefore V$  es reducible □