Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ánalisis Funcional

Semestre curso: 2019-2

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Preliminares

Contenidos

1) Espacios de Banach: Definiciones Básicas, Hahn-Banach, Consecuencias del Teorema de Bairi

2) Espacios de Hilbert: Definiciones, Bases Hilbertianas, Proyección Dual de un Hilbert, Lax-Milgram

3) Topologías débiles: Espacios reflexivos

4) Teoría Espectral

Textos

- Reed and Simon (Functional Analysis)
- Rudin (Functional Analysis)
- Hain Brenzin

Interrogaciones

3 Interrogaciones + 1 Examen. Si hay exención sería con 6

Fechas

I1: Semana 23-27/9

I2: Semana 14-19/10

I3: Semena 18-22/11

Ex: Semana 2-6/12

Parte I

Espacios de Banach

1. Introducción a los Espacios de Banach

Definición 1.1 (Espacio de Banach)**.** Sea E un e.v., una función $\|\cdot\|$ tq

- $\|x\| \geq 0 \forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y, \in R$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall x \in E \forall \lambda \in k$

Ejemplo: 1.1. En $\mathbb{C}^n$, si $z \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ $\|z\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p\right)^{1/p}$

Ejemplo: 1.2. Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es e. de medida y si $1 \leq p < \infty$, $E = L^p(X)$; La norma es $\|[f]\| = \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$

Observación 1.1. Si $\|\cdot\|$ es norma en E, entonces $d_E(x,y) = \|x-y\|$ es una métrica o distancia en E.

Definición 1.2 (Espacio de Banach)**.** E e.v. con norma $\|\cdot\|$ se dice espacio de Banach si es completo con respecto a d_E.

Ejemplo: 1.3. Todos los anteriores son Banach

Ejemplo: 1.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $E = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{continúa tq } \int_\Omega |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty\}$ en E, $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty$ es norma

Ejemplo: 1.5. Sea E un e.v. con norma, y sea $x_n \in E$ tal que $\sum_{k=1}^\infty |x_n| < \infty$
Q: Si $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, ¿qué podemos decir de s_n?
Si $1 \leq m < n$ entonces $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n x_k$, luego $\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^\infty \|x_k\|$
De aquí no es difícil ver que, como $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$. Entonces s_n es de Cauchy. Ciertamente s_n tiene límite en E cuando E es de Banach.

Definición 1.3 (Convergencia Absoluta)**.** Un E e.v. con norma, si $x_n \in E$ es tq $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$, diremos que la serie es absolutamente convergente

Definición 1.4 (Convergencia en Norma)**.** Si $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ es convergente en E converge respecto a d_E, diremos que s_n converge en norma

Proposición 1.1. *Si E es Banach y $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, entonces $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ converge en norma. (Notación: $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$) Recíprocamente si E e.v. con norma y si cada serie absolutamente convergente es también convergente en norma, entonces E es Banach.*

Demostración. $\Longleftarrow$: Listo anteriormente.
$\Longrightarrow$: Sea x_n de Cauchy en E. Claramente, basta encontrar x_{n_k} convergente.
Como x_n es de Cauchy, existe x_{n_k} tq $\left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| \leq \frac{1}{2^k}$ si esto es verdad.

$$x_{n_k} - x_{n_1} = \sum_{j=2}^{k} (x_{n_j} - x_{n_{j-1}})$$

Pero $\sum_{j=2}^{\infty} \left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$ así que $x_{n_k} - n_{n_1} \to x \implies x_{n_k} \to x + n_{n_1}$.
Para ver que $\exists x_{n_k}$ con $\left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| \leq \frac{1}{2^k}$, sea $k = 1$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}\exists n_1$ tq $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2}\forall n, m \geq n_1$, esto da n_1. Si $1 \leq n_1 < \ldots < n_k$ son tq $\left\|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\right\| \leq \frac{1}{2^j}$, $j = 1, \ldots, k-1$, $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}\forall n, m \geq n_k$, sea $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$. Sea $n_{k+1} > n_k$ tq $\left\|x_{n_{k+`'}} - x_{n_k}\right\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Esto construye x_{n_k}. □

Ejemplo: 1.6. $M^n(\mathbb{R})$ matrices de $n \times n$ en $\mathbb{R}$, $A \in M^n(\mathbb{R})$ entonces $\|A\| = \left(\operatorname{tr}(A^T A)\right)^{1/2}$

Definición 1.5 (Transformación Lineal)**.** Sean E, F e.v. (sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$). Una transformación lineal es una función $T : E \to F$ tq $T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty \forall x, y \in E \forall \lambda$.

Teorema 1.2 (Caracterización de continuidad de funciones lineales)**.** *Sean E, F e.v.n., y sea $T : E \to F$ una transformación lineal. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) T es continua en x para todo $x \in E$.

2) T es continua en 0_E

3) $\sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F < \infty$

4) $\exists c > 0 \forall x \in E : \|Tx\|_F \leq c \|x\|_E$

Demostración. Se demostrará $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1$
$1 \implies 2$ es trivial
Para $2 \implies 3$, sea $\varepsilon = 1$, y un $\delta > 0$ tq

$$\|x - 0_E\|_E < \delta \implies \|Tx - T(0)\|_F < 1$$

Como T es lineal tenemos que $Tx - T(0) = Tx$, y además se tiene que $x - 0_E = x$. Luego,

$$\|x\|_E < \delta \implies \|Tx\|_F < 1$$

Ahora, para todo $x \in E$ tq $\|x\| = 1$, $\|\delta x\| = \delta \|x\|$. Con esto,

$$\left\| \frac{\delta}{2} x \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Así, por lo anterior tenemos que

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2} x\right) \right\| < 1$$

Eso significa que para todo $x \in E$ tq $\|x\| = 1$ se tiene que

$$\|Tx\| < \frac{2}{\delta}$$

Con lo que tenemos lo pedido.
Para $3 \implies 4$, sea $c_0 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$, entonces para todo $x \in E$ distinto de cero, tenemos que

$$\left(\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \implies \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq c_0 \right) \implies \|Tx\|_F \leq c_0 \|x\|_E$$

Con lo que se llega a lo que queríamos.
Por último, para $4 \implies 1$, sea $c > 0$ tq $\|Tx\|_F \leq c \|x\|_E$. Luego,

$$\|Tx - Ty\|_F = \|T(x-y)\|_F \leq c \|x - y\|_E$$

Por lo que T es Lipschitz, por lo que es continua. □

Definición 1.6 (Norma de operador/Funcional Acotado)**.** Para E, V e.v.n $T : E \to F$ que cumple 1-2-3-4 se llama funcional acotado (u operador lineal acotado); se define $\|T\|_{E,F} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \text{ínf}\{c > 0 : \|Tx\| \leq c \|x\| \, \forall x \in E\}$

Definición 1.7. Para E, V e.v.n. sea $\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \to F \text{ lineal, acotado}\}$

Proposición 1.3. $\|\cdot\|_{E,F}$ *es norma en* $\mathcal{L}(E, F)$

Demostración. Claramente cumple todo en base a la definición □

Proposición 1.4. *Si F es Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es Banach con respecto a* $\|\cdot\|_{E,F}$

Demostración. Sean $T_n : E \to F$ lineales continuas, Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_{E,F}$. Observemos que, para cada $x \in R$ fijo, $y_n = T_n x$ es Cauchy en F; pues $\|y_n - y_m\|_F = \|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$.
Si $x = 0$, y_n es constante, por lo que es Cauchy.
Si $x \neq 0$, sea $\varepsilon > 0$. T_n es Cauchy $\implies \exists n_0 : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \forall n, m \geq n_0$. Así: $y_n = T_n x$ es

de Cauchy en F, como F es completo, $y_n \to y \equiv Tx$. En otras palabras, $T_n x \to Tx$.
Vamos a ver que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y que $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Primero: $\forall x \in R \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T_n(x+\lambda y) = T_n x + \lambda T_n y \to T(x+\lambda y) = Tx + \lambda Ty$.
Segundo: (Ejercicio) Como T_n es Cauchy, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = C < \infty$. Entonces $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq C \|x\| \to \|Tx\| \leq C \|x\|$.
Último: Verificar que $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, sea ε, n_0 tq $\|T_n - T_m\| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$. Entonces $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \ \forall n, m \geq n_0 \forall x \in E$. Así $\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\| \ \forall n \geq n_0 \forall x \in E$ por lo que $\|T - T_n\| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ □

Definición 1.8 (Dual)**.** Si E es e.v.n., definimos su dual (topológico) como:

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C}) \text{ o } \mathcal{E}, \mathbb{R}$$

Ejemplo: 1.7. Tomemos $E = \mathbb{R}^n$, y sean $S, T \in \mathcal{L}(E)$.

$$\|S \circ T(x)\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

por lo que

$$\|S \circ T\| \leq \|T\| \|S\|$$

Entonces $\left\|T^k\right\| \leq \|T\|^k$

Proposición 1.5. *Si E es Banach, $T \in \mathcal{L}(E), \|T\| < 1$, $I - T$ es invertible, con inversa continua, entonces $(I_T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$*

Demostración. Sale con truco tipico □

Ejemplo: 1.8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $\kappa \in L^2(\Omega \times \Omega; \mathbb{R})$. Definamos $T_\kappa : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ donde $f \mapsto T_\kappa(f)(x) = \int_\Omega \kappa(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y$
T_κ es lineal. Veamos que $T_\kappa(f) \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \left| \int_\Omega \kappa(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \int_\Omega \kappa^2(x,y) \, \mathrm{d}y \int_\Omega f^2(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

O sea, ya que $\int_\Omega |T(f)(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \|T_\kappa f\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$\|T_\kappa f\| \leq \|\kappa\| \|f\|$$