

# Algebra Lineal

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2017

# Índice general

<b>1. Espacios Vectoriales</b>	<b>3</b>
1.1. Cuerpos . . . . .	3
1.2. Espacios Vectoriales . . . . .	6
1.3. Subespacios generados . . . . .	6
1.3.1. Combinaciones lineales . . . . .	6
1.4. Transformaciones lineales . . . . .	10
1.4.1. Algebra de Transformaciones Lineales . . . . .	13
1.4.2. Matriz representante . . . . .	15
1.4.3. Composición y Productos . . . . .	16
1.4.4. Invertibilidad . . . . .	17
1.5. Isomorfismos . . . . .	19
1.5.1. Matrices representantes . . . . .	20
1.5.2. Cambios de Base: . . . . .	21
1.6. Productos de Espacios Vectoriales . . . . .	22
1.6.1. Productos y Sumas directas . . . . .	23
<b>2. Parte II</b>	<b>25</b>
2.1. Polinomios . . . . .	25
2.1.1. Algoritmo de la división . . . . .	25
2.1.2. Raíces de Polinomios . . . . .	26
2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios . . . . .	27
2.3. Matrices triangulares superiores . . . . .	29
2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales . . . . .	31
<b>3. Espacios de Producto Interno</b>	<b>33</b>
3.1. Espacio de producto interno . . . . .	35
3.2. Norma . . . . .	36
3.3. Conjuntos Ortonormales . . . . .	36
3.4. Algoritmo de Gram-Schmidt . . . . .	39
3.5. Funciones lineales sobre Espacio con producto interno . . . . .	42
3.6. Complementos Ortogonales y Problemas de Minimización . . . . .	43

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
3.7. Problemas de Minimización . . . . .	47
<b>4. Operadores sobre Espacio con Producto Interno</b>	<b>51</b>
4.1. Operador Adjunto, Auto-Adjunto y Normal . . . . .	51
4.1.1. Operadores Auto-Adjuntos . . . . .	55



# Capítulo 1

## Espacios Vectoriales

### 1.1. Cuerpos

Si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , recordemos que se tienen las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad de la suma

$$a + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

2. Asociatividad de la suma

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{F}$$

3. Existe un único elemento neutro para la suma, tal que:

$$x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

4. Para todo  $x \in \mathbb{F}$  existe un único inverso para la suma, tal que:

$$x + y = 0 \quad (-x = y)$$

5. Conmutatividad del producto

$$xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

6. Asociatividad del producto

$$(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

7. Existe único neutro para el producto, el 1, tal que:

$$x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

8. Todo elemento  $x \neq 0$  posee inverso multiplicativo único, tal que:

$$x \cdot y = 1 \quad (x^{-1} = y)$$

9. Distributividad de  $\cdot$  con respecto a  $+$

$$x \cdot (y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{F}$$

**Definición 1.1.1** (Cuerpo). Un cuerpo es un conjunto dotado de dos operaciones  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ , que cumplen lo siguiente:

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$

- $(\mathbb{F}, +)$  es grupo abeliano
- $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$  es un grupo abeliano (0 es el neutro aditivo)
- $a, b, c \in \mathbb{F} \implies a(b + c) = ab + ac$

Ejemplos:

- (a)  $\mathbb{N}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. No, no hay inverso aditivo.
- (b)  $\mathbb{Z}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. No, no hay inverso multiplicativo.
- (c)  $\mathbb{Q}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. Si.
- (d)  $\mathbb{R}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. Si.
- (e)  $\mathbb{C}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. Si.
- (f)  $\mathbb{F} = \{0, 1\}$  con  $+$  y  $\cdot$  definida de la siguiente forma:

$+$	$0$	$1$	$\cdot$	$0$	$1$
$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$
$1$	$1$	$0$	$1$	$0$	$1$

**Definición 1.1.2** (Subcuerpo).  $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{F}$  es un subcuerpo si  $(\mathbb{L}, +, \cdot)$  es un cuerpo (donde  $+$  y  $\cdot$  vienen de  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ )

**Proposición 1.1.1.** Sea  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  un cuerpo  $\mathbb{L}$  es subcuerpo  $\iff$

- (a)  $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{L}$
- (b)  $\mathbb{L}$  es cerrado para  $+$ , y  $\forall x \in \mathbb{L} \implies \exists -x \in \mathbb{L}$
- (c)  $\mathbb{L}$  es cerrado para  $\cdot$ , y  $\forall x \in \mathbb{L} \setminus \{0\} \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{L}$

*Demostración.*  $\implies$  trivial

$\Longleftarrow$

1. La propiedad se hereda de  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$
2. Idem
3. Por (a)
4. Por (b)
5. La propiedad se hereda de  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$
6. Idem
7. Por (a)
8. Por (c)
9. La propiedad se hereda de  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$

□

Ejemplos:

1.  $\mathbb{F}$  es un subcuerpo de  $\mathbb{F}$
2.  $\mathbb{R}$  es un subcuerpo de  $\mathbb{C}$
3.  $\mathbb{Q}$  es un subcuerpo de  $\mathbb{R}$
4.  $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  es subcuerpo de  $\mathbb{R}$

**Lema 1.1.2.** *Todo subcuerpo de  $\mathbb{R}$  contiene a  $\mathbb{Q}$*

*Demostración.* Sea  $\mathbb{L}$  un subcuerpo de  $\mathbb{R}$

$$(a) \implies \{0, 1\} \subseteq \mathbb{L}$$

$$1 \in \mathbb{L} \implies \mathbb{N} \subseteq \mathbb{L} \quad (b)$$

$$\implies \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{L} \quad (b)$$

$$\implies \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L} \quad (c)$$

Observación: El único subcuerpo de  $\mathbb{Q}$  es  $\mathbb{Q}$  (ver dem. anterior)

□

Ejercicio: Existen infinitos subcuerpos de  $\mathbb{R}$  Recursivamente: sean  $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$  los números primos. Definamos:

$$\mathbb{L}_0$$

## 1.2. Espacios Vectoriales

**Definición 1.2.1** (Espacio Vectorial).

## 1.3. Subespacios generados

### 1.3.1. Combinaciones lineales

**Teorema 1.3.1** (\*). Sea  $V$  espacio vectorial generado por un conjunto finito  $m$  de vectores. Entonces cualquier

*Demostración.* Sean  $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$  con  $n > m$ . Por contradicción, suponiendo que son linealmente independientes.

Sean  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = V$  (por hipótesis)

$$\implies u_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(1)} v_i$$

Claramente  $(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_m^{(1)}) \neq 0$  (de lo contrario  $u_1 = 0$ )

Sin perder generalidad,  $\lambda_1^{(1)} \neq 0$  y por el Lema:

$$\langle u_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$$

Ahora, existan  $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}) \neq (0, \dots, 0)$  tales que:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 + \sum_{i=2}^m \lambda_i^{(2)} v_i$$

Más. aun,  $(\lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}) \neq (0, \dots, 0)$

De lo contrario:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 = \lambda_1^{(2)} u_1 - u_2 \rightarrow \leftarrow (u_1, \dots, u_n \text{ son linealmente independientes})$$

En conclusión, sin pérdida de generalidad  $\lambda_2^{(2)} \neq 0$

Por el Lema:

$$\langle u_1, u_2, v_3, \dots, v_m \rangle = V$$

Iterando el argumento, se tiene que:

$$\langle u_1, \dots, u_m \rangle = V$$



Notemos que  $u_{m+1} \in \langle u_1, \dots, u_m \rangle$

$$0 \neq u_{m+1} = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i \rightarrow \leftarrow$$

□

**Definición 1.3.1** (Base, Dimensión finita). Una base  $B$  de un espacio vectorial es un conjunto  $B \subseteq V$  tal que:

1.  $B$  es linealmente independiente
2.  $\langle B \rangle = V$

Un espacio vectorial  $V$  se dice finito-dimensional si existe un conjunto  $S \subseteq V, \|S\| < \infty$  tal que  $\langle S \rangle = V$ .

**Corolario.** Si  $V$  es finito-dimensional, todas las bases de  $V$  son finitas y tienen la misma cardinalidad.

*Demostración.* Sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $V$ .

Por Teo (\*),  $\|B_1\|, \|B_2\| \leq m$ , donde  $m$  es el tamaño de  $S$  tal que  $\langle S \rangle = V$  y  $\|S\| < \infty$ .

Como  $B_1$  es base,  $\langle B_1 \rangle = V$ , y como  $B_2$  es linealmente independiente:

$$\text{Teo} (*) \implies \|B_2\| \leq \|B_1\|$$

Como  $B_2$  es base. □

**Definición 1.3.2** (Dimensión). Si  $V$  es un espacio vectorial finito-dimensional definimos su dimensión,  $\dim V$ , como el cardinal de una base cualquiera de  $V$ . Si  $V$  no es finito-dimensional  $\dim V = +\infty$

Ejemplos:

$$1. V = \text{Sim}^2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = A^T\}$$

*abc*

$$2. \dim(\mathbb{R}^{n \times n}) = n^2$$

$$3. \dim(\text{Antisim}^m(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ y } \dim(\text{Sim}^m(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4. P_n(\mathbb{C})$$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  es base

$$a) \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle = P_n(\mathbb{C})$$

$$p \in P_n(\mathbb{C})$$

$$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n \in \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle$$

b)  $\{1, x, \dots, x^n\}$  es linealmente independiente.

Por contradicción supongamos  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$  Con igualdad de funciones.

$\iff (\forall x \in \mathbb{C}) 0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$

Recuerdo (TFA): Todo polinomio complejo de grado  $\geq 1$  posee una raíz compleja.

$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n = (x - z_1) \cdot a'_0 \cdot 1 + a'_1 \cdot x + \dots + a'_{n-1} \cdot x^{n-1}$

$\implies p(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \dots (x - z_k) \cdot A$  donde  $k = \text{gr}(p)$ , y  $A \neq 0$ .

Tomando  $z' \neq z_1, z_2, \dots, z_k$ , tenemos:  $0 = (z' - z_1) \cdot (z' - z_2) \cdot \dots (z' - z_k) \cdot A$  Pero multiplicar cosas distintas de 0 no da 0.

$\rightarrow \leftarrow$

$$\dim(P_n(\mathbb{C})) = n + 1$$

**Observación 1.3.1.**  $\{0\}$ ,  $\dim\{0\} = 0$ , notando que base es  $\emptyset$ , tenemos que  $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

**Lema 1.3.2.** Sea  $S \subseteq V$ ,  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  conjunto linealmente independiente.

$v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle \implies \{v, v_1, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente.

*Demostración.* Ejercicio □

**Teorema 1.3.3.** Sea  $V$  espacio vectorial finito dimensional, entonces:

1. Todo conjunto linealmente independiente extiende a una base
2. Todo conjunto generado contiene una base

Todo espacio vectorial  $V \neq \{0\}$  finito dimensional posee una base.

*Demostración.* a) Sea  $v \in V \setminus \{0\}$ . Entonces  $\{v\}$  es linealmente independiente.

Por Teo, estamos listos.

Dem(Teo):

$V$  es finito dimensional  $\implies \exists \{v_1, \dots, v_n\}$  que genera  $V$ .

Sea  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  conjunto linealmente independiente.

Dos casos:

a) Si  $\langle S \rangle = V$ , entonces  $S$  es base

b) Si  $\langle S \rangle \subset V$ , entonces existe  $v \notin \langle S \rangle$ , y opr el Lema,  $S \cup \{v\}$  es linealmente independiente.

Inductivamente, o bien eventualmente 1, o iteramos 2.

Sin embargo, 2 no puede ocurrir infinitas veces.

Teo(\*)  $\implies$  todo conjunto linealmente independiente posee cardinalidad  $\leq n$ .

b) Sea  $S$ , tal que  $\langle S \rangle = V$ .

Consideremos,  $d = \max\{|S'| : S' \subseteq S, S' \text{ es linealmente independiente}\}$

Notemos que  $d \leq n < +\infty$ , por el Teo(\*).

Como el máximo se alcanza, existe  $S'$  tal que  $|S'| = d$  y  $S'$  es linealmente independiente.

Por contradicción, supongamos que  $S'$  no es base.

$$\langle S' \rangle \subset V = \langle S \rangle$$

Luego,  $S \setminus \langle S' \rangle \neq \emptyset$ . De lo contrario  $\langle S \rangle \setminus \langle S' \rangle \neq \emptyset$

$$\implies S \subseteq \langle S' \rangle \implies \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle \implies \langle S' \rangle = V$$

Finalmente, existe  $v \in S \setminus \langle S' \rangle$ , y por el Lema,  $S' \cup \{v\}$  es linealmente independiente y  $|S' \cup \{v\}| = d + 1$

$\rightarrow \leftarrow$

□

**Corolario.** Sea  $W \subset V$  subespacio propio ( $W \neq V$ ) con  $V$  finito dimensional. Entonces,  $\dim W < \dim V$

*Demostración.* ■ Si  $\dim W = 0 \implies \dim W = 0 < \dim V$ .

■ Si  $\dim W \geq 1$  entonces, por el corolario,  $W$  tiene una base.

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \text{ es base de } W$$

Como  $W$  es subespacio propio, existe  $v \in V \setminus \langle B_W \rangle$

$\implies B_W \cup \{v\}$  es linealmente independiente y  $\subset V$ .

Por Teo. a),  $B_W \cup \{v\}$  se extiende en una base  $B_V$ ,  $|B_V| \geq |B_W| + 1$ .

$$\dim W = |B_W| < |B_W| + 1 \leq |B_V| = \dim V$$

□

**Proposición 1.3.4.** Sean  $U, W$  subespacios vectoriales de un espacio vectorial finito dimensional  $V$ . Entonces:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

*Demostración.* Si  $U \cap W = \{0\}$ , trivial

Si  $U \cap W \neq \{0\}$ , entonces sea  $B_{U \cap W}$  base de  $U \cap W$ .

$$B_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_m\}$$

Base de  $U$ : Sea  $B_U = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p\}$

Base de  $W$ : Sea  $B_W = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r\}$

Ambos existen por Teo.a).

Afirmación:  $B_U \cap B_W = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r\}$  es base de  $U + W$ .

1.  $\langle B_U \cup B_W \rangle = U + W$   
 $v \in u + w, u \in U, w \in W$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^r \delta_k w_k + \sum_{j=1}^m \beta_j v_j \in \langle B_U \cup B_W \rangle$$

2.  $B_U \cup B_W$  es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j + \sum_{k=1}^p \nu_k u_k \\ - \sum_{k=1}^p \nu_k u_k &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j \in U \cap W \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j \Rightarrow \nu_k, \lambda_i = 0 \forall k, i \end{aligned}$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = |b_{U \cap W}|$$

$$\dim U = |B_U|$$

$$\dim W = |B_W|$$

$$\dim(U + W) = |B_U \cup B_W|$$

□

## 1.4. Transformaciones lineales

**Definición 1.4.1** (Transformación lineal). Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un cuerpo común  $\mathbb{F}$ . Una función  $T : V \rightarrow W$  es transformación lineal si

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Ejemplos:

1.  $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m, T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  y  $A \in \mathbb{F}^{m \times n} \quad v \mapsto Av$   
 $T$  es una transformación lineal
2.  $V = W = C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es infinitamente diferenciable}\}$   
 $V = C^1(\mathbb{R}), W = C^0(\mathbb{R})$   
 $T : V \rightarrow W$

$$f \mapsto \frac{df}{dx}$$

Por álgebra de funciones diferenciables si  $f, g \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{d(\lambda f + g)}{dx} = \lambda \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

3.  $\mathbb{R}[x]$  Es un espacio vectorial

$$T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$p \mapsto \frac{dp}{dx}$$

4.  $V = C^0([0, 1]), W = \mathbb{R}$

$$T : V \rightarrow W$$

$$f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

**Teorema 1.4.1.** Sea  $V$  un espacio finito dimensional y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ .

Sea  $W$  un espacio vectorial y consideramos vectores  $w_1, \dots, w_n \in W$

Entonces  $\exists! T : V \rightarrow W : T(v_i) = w_i \forall i = 1, \dots, n$

*Demostración.* ■ Existencia: Si  $v \in V$  entonces:

$$(*) v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

Definimos:

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$$

$T : V \rightarrow W$  es una función porque  $\forall v \in V$  la descomposición  $(*)$  es única.

Además, es lineal. Si  $v, u \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_i \lambda_i v_i$$

$$u = \sum_i \mu_i v_i$$

$$T(\lambda v + u) = T\left(\sum_i (\lambda \lambda_i + \mu_i) v_i\right)$$

$$T(\lambda v + u) = \sum_i (\lambda \lambda_i + \mu_i) T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda \sum_i \lambda_i T(v_i) + \sum_i \mu_i T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u)$$

- Unicidad: Sean  $T, T'$  transformaciones lineales tales que:

$$T(v_i) = T'(v_i) = w_i$$

Sea  $v \in V$ , entonces:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T'(v_i)$$

$$T(v) = T'(v) \implies T = T'$$

□

Propiedades:

Si  $T : V \rightarrow W$  transformaciones lineales, entonces:

1.  $T(0) = 0$
2.  $T(\sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i))$

*Demostración.*

□

La importancia de este teorema se relaciona con el hecho de poder definir transformaciones lineales sólo a través de como actúan sobre una base. Esto se relaciona con la noción de matriz representante.

**Definición 1.4.2.** Si  $T : V \rightarrow W$  transformación lineal, definimos:

- Núcleo(Kernel):  $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ , subespacio vectorial de  $V$
- Imagen(Rango):  $T(V) = \{w \in W : \exists v \in V T(v) = w\}$ , subespacio vectorial de  $W$

**Teorema 1.4.2** (Núcleo-Imagen). Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$  y  $T : V \rightarrow W$  transformación lineal. Entonces, si  $V$  es finito dimensional:

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(T(V))$$

*Demostración.* Como  $\ker T$  es subespacio vectorial de  $V$  entonces es finito dimensional y por ende posee una base:

$$\{v_1, \dots, v_k\} \quad \text{es base de } \ker T$$

Por un teorema podemos extender a una base de  $V$

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_u\} \text{ es base de } V$$

Sea ahora  $w \in \Im(T) \implies w = T(v)$

Entonces,

$$w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{F}$$

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i + v_{k+1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) v_{k+1}$$

$$\in \langle \{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} \rangle$$

Queremos probar ahora que  $(T(v_i))_{i=k+1}^n$  son linealmente independientes. Supongamos  $\exists \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  tal que:

$$\sum_{i=k+1}^n \lambda_i T(v_i) = 0$$

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i v_i\right) = 0$$

$$\implies \in \text{Ker}(T)$$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$  tal que

$$\sum_{i=k+1}^n (-\lambda_i) v_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = 0$$

Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  son linealmente independientes tenemos que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Finalmente:

$$\dim V = n, \dim \ker T = k$$

$$\dim \Im T = n - k$$

□

### 1.4.1. Algebra de Transformaciones Lineales

Def[Espacio de transformaciones lineales]:

Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Definimos

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W : T \text{ es transformación lineal}\}$$

Dadas  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ , definimos

$$T_1 + T_2 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto T_1 v + T_2 v$$

$$\lambda T_1 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto \lambda T_1 v$$

### Teorema

$\mathcal{L}(V, W)$  dotado de  $+$  y  $\cdot$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$

Dem: Primero probar que  $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$  y  $\lambda T_1 \in \mathcal{L}(V, W)$

$T_1 + T_2$  es transformación lineal.

$$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w) \quad (T_1 + T_2)(\lambda v + w) = T_1(\lambda v + w) + T_2(\lambda v + w)$$

$$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w) \quad \text{Similarmente:}$$

$$(\lambda T_1)(\mu v + w) = \mu(\lambda T_1)(v) + (\lambda T_1)(w)$$

Y el resto de las propiedades se dejan propuestas como ejercicio.

### Teorema

Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ ,  $\dim V = n$  y  $\dim W = m$ . Luego,  $\mathcal{L}(V, W)$  es un espacio finito dimensional y  $\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n$

Dem: Sean  $V = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$ ,  $W = \langle \{w_1, \dots, w_m\} \rangle$ , bases respectivamente.

Dados  $1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n$ , definimos  $E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$  como única transformación lineal que satisface:

$$E^{p,q}(v_j) = \begin{cases} w_p & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}$$

$$E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$$

$E^{p,q}$  esta bien definida por el primer teorema de la sección

$$\mathcal{B}_L = \{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n\}$$

Afirmación:  $\mathcal{B}_L$  es base de  $\mathcal{L}(V, W)$

$$\langle \mathcal{B}_L \rangle = \mathcal{L} : \text{Sea } T \in \mathcal{L}(V, W)$$

Dado  $1 \leq j \leq n$ , existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{i,j} w_i$$

Dado  $v \in V$ , existen  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$$



$$T(v) = \sum_{j=1}^n \mu_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i \right)$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mu_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_i \sum_j \lambda_{i,j} \mu_j E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_i \left( \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j} \left( \sum_k \mu_k v_k \right) \right)$$

$$T(v) = \sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$\mathcal{B}_L$  es linealmente independiente: Supongamos que:

$$\sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j} = 0$$

Dado  $1 \leq k \leq n$

$$\sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_k) = \mathbf{0}$$

$$\iff \sum_i \lambda_{i,k} w_i = \mathbf{0}$$

$$\iff \lambda_{1,k} = \lambda_{2,k} = \dots = \lambda_{m,k} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = |\mathcal{B}| = m \cdot n$$

### 1.4.2. Matriz representante

El Teo anterior permite identificar transformaciones lineales entre espacios finito-dimensionales y matrices  $m \times n$  (donde  $m = \dim W, n = \dim V$ ).

Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$ ,  $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $W$ .

Definimos la matriz representante de  $T$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}_V$  y  $\mathcal{B}_W$  como  $\mathcal{M}(T) = (a_{ij})_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$ , tal que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Si las bases no están claras por contexto usamos la notación  $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$

Es facil ver que

$$\mathcal{M}(T_1 + \lambda T_2) = \mathcal{M}(T_1) + \lambda \mathcal{M}(T_2)$$

(Ejercicio)

De esta forma,  $\mathcal{M}$  respeta"la estructura lineal de  $\mathcal{L}(V, W)$

Ejemplos:

$$\mathbb{F}^\infty = V = W$$

$$1. L : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$Lx = (x_2, x_3, \dots)$$

$$2. R : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$Rx = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Pregunta:  $\mathcal{M}(L), \mathcal{M}(R)$ ?

### 1.4.3. Composición y Productos

**Teo**

Sean  $V, W, Z$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  y  $S \in \mathcal{L}(W, Z)$ . Entonces por composición:  $S \circ T : V \rightarrow Z$  dada por  $(S \circ T)(v) = S(T(v))$  es una transformación lineal.

Dem: Tenemos que probar que:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

En efecto:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = S(T(\lambda u + v)) = S(\lambda T(u) + T(v))$$

$$S \circ T(\lambda u + v) = \lambda S(T(u)) + S(T(v)) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

#### Definición 1.4.3. Endomorfismo

Una transformación lineal  $T \in \mathcal{L}(V, V)$  se dice endomorfismo u operador lineal. Denotamos  $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$ . La composición funciona como producto sobre  $End(V)$

Propiedades:

$$a) I \circ S = S \circ I = S \text{ (} I \text{ es neutro para } \circ \text{)}$$

$$b) \quad \blacksquare S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$$

$$\blacksquare (T_1 + T_2) \circ S = T_1 \circ S + T_2 \circ S$$

$$c) \lambda(S \circ T) = (\lambda S) \circ T = S \circ (\lambda T)$$

*Demostración.* Ejercicio □

Importante notar que  $\circ$  no es conmutativo.

También es importante observar que NO todo operador posee elemento inverso para  $\circ$ . Dado  $T \in$

$End(V) \setminus \{0\}$ , decimos que  $S \in End(V) \setminus \{0\}$  es su inversa si:

$$S \circ T = T \circ S = I$$

### Corolario

Sea  $V$  espacio vectorial finito-dimensional y  $\mathbb{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$ . Entonces  $\{E^{p,1} : p, q = 1, \dots, n\}$  es base de  $End(V)$ .

*Demostración.* Directo por Teo (+). □

Lema: Sean  $S, T \in End(V)$  con  $V$  finito dimensional. Entonces:

$$\mathcal{M}(S \circ T) = \mathcal{M}(S) \cdot \mathcal{M}(T)$$

*Demostración.* Recordar que

$$\{E^{p,q} : p, q = 1, \dots, n\}$$

son base de  $End(V)$ .

$$\mathcal{M}(S) = (b_{p,q})_{p=1, \dots, n, q=1, \dots, n}$$

□

#### 1.4.4. Invertibilidad

**Definición 1.4.4.**  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  se dice invertible si existe  $S : W \rightarrow V$  tal que

$$S \circ T = I_V, T \circ S = I_W \tag{1.1}$$

Cuando  $T$  es invertible, denotamos  $T^{-1}$  con su inversa

$$T \text{ invertible} \iff T \text{ es inyectiva y es sobreyectiva}$$

#### Observación 1.4.1.

1. No todo  $T \in End(V) \setminus \{0\}$  es invertible
2. En el caso  $V = W$ ,  $I_V$  es neutro para  $\circ$
3. Puede ser que  $S \circ T = I$  y  $T \circ S \neq I$

**Teorema 1.4.3.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$  y  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Si  $T$  es invertible entonces  $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$

*Demostración.* Queremos probar  $T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2)$

Sean  $v_1 = T^{-1}(w_1), v_2 = T^{-1}(w_2)$

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad /T^{-1}()$$

$$v_1 + \lambda v_2 = T^{-1}(T(v_1) + \lambda T(v_2))$$

$$T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2) = T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) \quad \square \quad (1.2)$$

**Proposición 1.4.4.** Sean  $T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow Z$  lineales e invertibles. Entonces  $S \circ T$  es lineal e invertible; mas aun

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} \quad (1.3)$$

*Demostración.*  $S \circ T$  es lineal (visto lunes).

Invertible: basta probar:

$$(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = I_Z$$

$$(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = T^{-1} \circ (S^{-1} \circ S) \circ T = T^{-1} \circ T = I_V$$

□

**Definición 1.4.5.** Decimos que  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  es no singular si  $\ker T = [0]$ . Notar ademas que  $T$  no singular si solo si inyectiva

$$Tv_1 = Tv_2 \iff T(v_1 - v_2) = 0 \quad (1.4)$$

**Teorema 1.4.5.** Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Entonces:

$T$  no-singular  $\iff T$  transforma conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes, es decir,  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$  l.i.  $\implies \{Tv_1, \dots, Tv_k\} \subseteq W$  l.i.

**Teorema 1.4.6.** □ Sean  $V, W$  finito-dimensionales tal que  $\dim V = \dim W$ . Si  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  entonces las siguientes son equivalentes:

- I)  $T$  es invertible
- II)  $T$  es no-singular
- III)  $T$  es sobreyectiva
- IV) Para toda base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ ,  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  es base de  $W$ .
- V) Existe  $\{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  tal que  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  es base de  $W$

**Observación 1.4.2.**

- 1. Si  $\dim V \neq \dim W$   
 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n < m$

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$   
 es inyectiva, pero no sobreyectiva

2.  $V = W, \dim V = +\infty$   
 $R : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$   
 $(x_1, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots)$   
 es inyectiva, pero no sobreyectiva

*Demostración.* (i)  $\implies$  (ii)

$$(ii) \ker T = \{0\} \iff T(V) = W$$

(ii)  $\implies$  (iii)

(iii)  $T$  es sobre. Por TNI

$$\dim T = n \implies \dim \ker T = 0 \implies T \text{ no singular}$$

Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ , por el Teo. anterior  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  se base de  $W$  □

## 1.5. Isomorfismos

**Definición 1.5.1.** Isomorfismos Sean  $V, W$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Decimos que  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  es un isomorfismo si es invertible. En tal caso, diremos que  $V$  y  $W$  son isomorfos

Ejemplos:

1.  $\mathbb{F}^{n+1}$  y  $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$  son isomorfos

$$T : \mathbb{F}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i + a_0$$

2. (Coordenadas baricéntricas): Si  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$

$$(\forall v \in V) v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

$$[\cdot]_B : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [v]_B$$

3.  $V, W$  finito dimensional sobre  $\mathbb{F}$ , con

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$\mathcal{M}(\cdot, B_V, B_W) : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathbb{F}^{n \times m}$$

$$T \mapsto \mathcal{M}(T, B_V, B_W)$$

es un isomorfismo (ejercicio)

**Teorema 1.5.1.** *Dos espacios finito dimensionales  $V, W$  (sobre  $\mathbb{F}$  son isomorfos si solo si  $\dim V = \dim W$*

*Demostración.* Sean  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$ ,  $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $W$ .

$\implies$  Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  isomorfismo

$$\{Tv_1, \dots, Tv_n\} \subseteq W$$

Es un conjunto linealmente independiente (un Teorema)

$$\implies n \leq \dim W = m$$

Tomando  $T^{-1}$ , (que también es isomorfismo) tomemos

$$\{T^{-1}w_1, \dots, T^{-1}w_m\} \subseteq V$$

Es linealmente independiente

$$\implies m \leq \dim V = n$$

$$\implies m = n$$

$\Leftarrow$  Suponemos  $n = m$ , sea  $T$  la única transformación lineal tal que

$$Tv_i = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Por el teorema  $\square$ , parte (v)  $\implies$  (i) tenemos que  $T$  es isomorfismo.  $\square$

### 1.5.1. Matrices representantes

Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ , y sean  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$ ,  $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $W$ .

$$[Tv_j]_{B_W} = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \iff T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad (\forall v \in V \exists a_{ij})$$

Luego, par todo  $v \in V$

$$v = \sum_j \lambda_j v_j \quad (\exists \lambda_j) \iff [Tv]_{B_W} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j)$$

De esta forma,

$$[T(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$$

Notemos que  $A$  coincide con la matriz representante de  $T$  con respecto a las bases  $B_V$  y  $B_W$ .

$$\mathcal{M}(T, B_V, B_W) = M$$

Evaluar (\*) para  $v = v_j$

$$[T(v_j)]_{B_W} = A \cdot [v_j]_{B_V} = A \cdot e_j$$

$$\implies T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot w_i$$

$$\therefore T(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j) = \sum_j \sum_i \lambda_j a_{i,j} w_i$$

$$T(v) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j} \left( \sum_q \lambda_q v_q \right) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$$\therefore T = \sum_i \sum_j a_{i,j} E^{i,j}$$

### 1.5.2. Cambios de Base:

Sean  $B = (v_1, \dots, v_n)$  y  $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$  2 bases (ordenadas).

Como se relacionan  $[\cdot]_{B'}$  y  $[\cdot]_B$ ?

$$T : V \rightarrow \mathbb{F}^n, U : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto [v]_B, v \mapsto [v]_{B'}$$

Notemos que  $T \circ U^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n, [v]_B \mapsto [v]_{B'}$  es un isomorfismo.

Sea  $P$  la matriz representante de  $T \circ U^{-1}$  con respecto a la base canónica en  $\mathbb{F}^n$

Usando (\*):

$$[v]_B = P \cdot [v]_{B'} \quad \forall v$$

Sea ahora  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ . Tomemos:

$$[T(v)]_B = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot [v]_B$$

$$P \cdot [T(v)]_{B'} = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P \cdot [v]_{B'}$$

$$[T(v)]_{B'} = (P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P) \cdot [v]_{B'}$$

$$\implies \mathcal{M}_{B',B}(T) = (P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P)$$

Pregunta: Como calcular  $P$ ?

$$[v'_j]_B = P \cdot [v'_j]_{B'} = P \cdot j$$

$$P = [[v'_1]_B | [v'_2]_B | \dots | [v'_n]_B] \oplus$$

**Teorema 1.5.2.** Sea  $V$  espacio vectorial finito-dimensional con bases ordenadas  $B = (v_1, \dots, v_n)$  y  $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ . Sea  $T \in \text{End}(V)$ . Luego

$$\mathcal{M}_{B',B}(T) = P^{-1} \mathcal{M}_{B,B}(T) P$$

**Definición 1.5.2.**  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  son similares si  $\exists P$  invertible tal que:

$$A = P^{-1} B P$$

## 1.6. Productos de Espacios Vectoriales

**Definición 1.6.1.** Sean  $V_1, \dots, V_m$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Definimos el espacio producto como

$$V = V_1 \times \dots \times V_m = \{(v_1, \dots, v_m) : v_i \in V_i (\forall i = 1, \dots, m)\}$$

1. Suma:  $(v_1, \dots, v_m) + (v'_1, \dots, v'_m) = (v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m)$
2. Producto por escalar:  $\lambda \cdot (v_1, \dots, v_m) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_m)$

**Proposición 1.6.1.**  $V \times \dots \times V_m$  con suma y producto escalar es un espacio vectorial.

*Demostración.* Ejercicio: similar a  $\mathbb{F}^n$  □

**Proposición 1.6.2.** Sean  $V_1, \dots, V_m$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Entonces  $V_1 \times \dots \times V_m$  es finito-dimensional y

$$\dim(V_1 \times \dots \times V_m) = \sum_{i=1}^m \dim V_i$$

*Demostración.* Dado  $i = 1, \dots, m$  sea

$$B_{V_i} = \{V_{i,1}, \dots, V_{i,n_i}\}$$

Base de  $V_i$ . Ahora sea

$$B = \bigcup_{i=1}^m \{(0, \dots, 0, v_{ij}, \dots, 0) : j = 1, \dots, n_i\}$$

Probaremos que  $B$  es base de  $V_1 \times \dots \times V_m$ . Notemos que esto basta:

$$\dim V_1 \times \dots \times V_m = |B| = \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m \dim V_i$$



- B genera: Sea  $v \in V \times \dots \times V_m$ , entonces

$$v = (v_1, \dots, v_m) \quad \text{donde } v_i \in V_i$$

Como  $B_{V_i}$  es base de  $V_i$ :

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot v_{i,j} \\ v &= \left( \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} v_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{m,j} v_{m,j} \right) \\ v &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} (0, \dots, 0, v_{i,j}, 0, \dots, 0) \in B \end{aligned}$$

- $B$  es linealmente independiente (ejercicio)

□

### 1.6.1. Productos y Sumas directas

**Teorema 1.6.3.** Sean  $U_1, \dots, U_m$  subespacios vectoriales de  $V$ . Definimos la transformación lineal

$$\Gamma : U_1 \times \dots \times U_m \rightarrow U_1 + \dots + U_m$$

$$\Gamma(u_1, \dots, u_m) = u_1 + \dots + u_m$$

Entonces,  $U_1 + \dots + U_m$  es suma directa si y solo si  $\Gamma$  es inyectiva

**Observación 1.6.1.** Notar que  $\Gamma$  siempre es sobreyectiva

*Demostración.*

$$\Gamma \text{ inyectiva} \iff \ker \Gamma = \{0\}$$

$$\iff [u_1 + \dots + u_m = 0 \iff (u_1, \dots, u_m) = (0, \dots, 0)]$$

$$\iff U_1 + \dots + U_m \text{ es directa}$$

□



# Capítulo 2

## Parte II

### 2.1. Polinomios

**Definición 2.1.1** (Grado). Si  $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$  con  $a_n \neq 0$ , entonces  $gr(p) = n$ . Si  $p(z) = 0$  entonces  $gr(p) = -\infty$

**Proposición 2.1.1.**

#### 2.1.1. Algoritmo de la división

Recordemos que si  $p, s$  son enteros, no negativos, con  $s \neq 0$ , existen únicos  $q, r$  enteros no negativos tal que:

$$p = s \cdot q + r$$

Donde  $r < s$ .

De ahora en adelante,  $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$  a menos que se diga lo contrario.

**Teorema 2.1.2** (División de polinomios). Sean  $p, s \in \mathbb{F}[z]$  con  $s \neq 0$ . Entonces existen únicos polinomios  $q, r \in \mathbb{F}[z]$  tales que:

$$p = q \cdots + r \implies n = gr(q) + m$$

Con  $gr(r) < gr(s)$ .

*Demostración.* Sean  $n = gr(p), m = gr(s)$ . Definamos

$$T : \mathcal{P}_{n-m}(\mathbb{F}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(q, r) \mapsto q \cdot s + r$$

Probaremos que  $T$  es una transformación lineal biyectiva. Notar que esto es suficiente para concluir el Teorema.

- T es lineal

$$T((q_1, r_1) + \lambda(q_2, r_1)) = T(q_1, r_1) + \lambda T(q_2, r_2)$$

- T inyectivo: Basta probar que  $\ker T = \{0\}$ . En efecto, si  $(q, r)$  son tales que:

$$q \cdot s + r = 0$$

$$q \cdot s = -r$$

Comparando grados:

$$\text{gr}(LI) = \text{gr}(q) \cdot m, \text{gr}(LD) = \leq m - 1$$

$$\implies q = 0 \implies r = 0$$

- T sobreyectiva: Por el TNI, y como  $\ker T = \{0\}$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1})$$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m}) + \dim(\mathcal{P}_{m-1}) = n + 1$$

$$\therefore \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = n + 1 = \dim \mathcal{P}_n$$

Lo que implica que  $T$  es sobreyectiva.

□

**Observación 2.1.1.** La demostración del Teo. Anterior entrega un "algoritmo" para dividir polinomios. Resolver la ecuación lineal no-homogénea

$$T(q, r) = p$$

Asignando bases a la partida y la llegada, se obtendrá un sistema lineal

$$Ax = b$$

### 2.1.2. Raíces de Polinomios

El estudio de la ecuación  $p(z) = 0$  es sumamente útil para analizar un polinomio  $p \in \mathbb{F}$

**Definición 2.1.2** (Raíz).  $\lambda \in \mathbb{F}$  se dice raíz de un polinomio si

$$p(\lambda) = 0$$

**Definición 2.1.3** (Factor).  $s \in \mathbb{F}[z]$  se dice factor de  $p \in \mathbb{F}[z]$  si existe un polinomio  $q \in \mathbb{F}[z]$  tal que:

$$p = q \cdot s$$

**Teorema 2.1.3** (Raíces definen factores de grado 1). *Sea  $p \in \mathbb{F}[z]$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Entonces  $p(\lambda) = 0 \iff (z - \lambda)$  es factor de  $p$*

*Demostración.*  $\Leftarrow$   $(z - \lambda)$  factor de  $p$ , entonces  $\exists q \in \mathbb{F}[z]$  tal que

$$p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z) \forall z \in \mathbb{F}$$

$$\implies p(\lambda) = 0 \cdot q(\lambda) = 0$$

*implies.* Por el algoritmo de la división para  $p$  y  $s(z) = z - \lambda$ , tenemos que  $\exists! r \in \mathbb{F}[z]$  con  $\deg(r) < 1 \implies r \in \mathbb{F}$  tal que

$$p(z) = q(z) \cdot (z - \lambda) + r$$

$$\implies 0 = p(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r$$

$$\therefore r = 0$$

□

**Corolario** (Un polinomio tiene tantas raíces como su grado). *Sea  $p \in \mathbb{F}[z]$  un polinomio de grado  $m \geq 0$ . Entonces  $p$  tiene a lo más  $m$  raíces distintas sobre  $\mathbb{F}$*

*Demostración.* Por inducción en  $m$ .

$m = 0$ :  $p(z) = a_0 \neq 0$ . Entonces  $p$  tiene 0 raíces.

$m - 1 \implies m$ : Sea  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$  con  $a_m \neq 0$

Caso 1:  $p$  no posee raíces

Caso 2:  $p$  sí posee raíces. Sea  $\lambda \in \mathbb{F}$  raíz de  $p$

$$\therefore \exists q \in \mathbb{F}[z] : p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z)$$

Claramente  $\deg(q) = m - 1$ . Por inducción,  $q$  posee a lo más  $m - 1$  raíces en  $\mathbb{F}$ . Por lo tanto:

$$\# \text{ raíces de } p \leq \# \text{ raíces de } (z - \lambda) + \# \text{ raíces de } q = m$$

□

## 2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios

Queremos entender la estructura de  $T \in \text{End}(V) = \mathcal{L}(V)$  supongamos que

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

y

$$T|_{u_1}, T|_{u_2}, \dots, T|_{u_m}$$

**Definición 2.2.1** (Subespacio invariante). Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  un subespacio  $U$  de  $V$  se dice invariante para  $T$  si  $TU \subseteq U$

$$\implies TU = \{w \in V : w = Tv\}$$

Propiedad: Sea  $p, q \in \mathbb{F}[z]$  y  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Entonces:

1.  $(p \cdot q)(T) = p(T) \cdot q(T)$
2.  $p(T) \cdot q(T) = q(T) \cdot p(T)$

*Demostración.* Sea  $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  y  $q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$

$$(p \cdot q)(z) = \left( \sum_{j=0}^n a_j z^j \right) \left( \sum_{k=0}^m b_k z^k \right)$$

$$p \cdot q(z) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k z^{j+k}$$

$$\implies (p \cdot q)(T) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k T^{j+k}$$

$$(p \cdot q)(T) = \left( \sum_j a_j T^j \right) \left( \sum_k b_k T^k \right)$$

□

**Teorema 2.2.1** (Existencia de vps). *Todo operador en un espacio vectorial complejo de dimensión finita y  $> 0$ , posee un valor propio.*

*Demostración.* Sea  $n = \dim V > 0$  y sea  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Sea ahora  $v \neq \mathbf{0}$ . Entonces

$$\{v, Tv, T^2v, \dots, T^n v\}$$

es linealmente dependiente. Luego existen  $a_0, \dots, a_n$  tal que  $a_0 v + a_1 Tv + \dots + a_n T^n v = 0$

$$\therefore p(T)v = 0 \quad \text{con } \text{gr}(p) = n$$

Por el teorema fundamental del algebra,  $p$  puede ser factorizado

$$p(z) = C(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$$

Por ende:

$$p(T)v = 0 = C(T - \lambda_1 I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n I)v$$

$\implies$  Existe  $j = 1, \dots, n$  tal que  $\text{Im}(T - \lambda_j I) \neq V \therefore \lambda_j$  es valor propio de  $T$

□

## 2.3. Matrices triangulares superiores

Recordemos que dada  $T \in \mathcal{L}(V)$  y una base  $B$  la matriz representante de  $T$  con respecto a  $B$  es

$$\mathcal{M}_B(T) = (a_{i,j})_{i,j \in [n]}$$

tal que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i$$

Notemos, por ejemplo, que en el caso complejo siempre existe una base  $B$  tal que la matriz representante posee la siguiente estructura

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

En efecto, sea  $\lambda \in \mathbb{F}$  valor propio de  $T$  con vector propio asociado  $v \neq 0$ .

Sea  $B$  una base que contiene a  $v$ . Si hacemos esto

$$Tv = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Definición 2.3.1** (Matriz triangular superior). Una matriz  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  se dice triangular superior si

$$a_{i,j} = 0 \forall i > j$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**Proposición 2.3.1.** Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  y  $v_1, \dots, v_n$  base (ordenada) de  $V$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) La matriz representante  $\mathcal{M}_B(T)$  es  $\Delta$  superior
- b)  $Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle \forall j = 1, \dots, n$
- c)  $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$  es invariante bajo  $T, \forall j = 1, \dots, n$

*Demostración.* □

**Proposición 2.3.2** (Invertibilidad a través de representaciones matriciales). *Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  tal que posee una representación  $\Delta$  superior con respecto a cierta base. Entonces  $T$  invertible  $\iff$  las entradas diagonales de la matriz son no nulas.*

*Demostración.* Sea  $B$  base tal que

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

$\Leftarrow$  Por  $(*)$

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\therefore v_1 = T \left( \frac{v_1}{\lambda_1} \right) \in \text{Im}(T)$$

Nuevamente, por  $(*)$

$$Tv_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\lambda \neq 0 \implies v_2 = T \left( \frac{v_2}{\lambda_2} \right) \in \text{Im}(T)$$

Por inducción:

$$Tv_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$v_j = T \left( \frac{v_j}{\lambda_j} \right) + \frac{a_1}{\lambda_j} v_1 + \dots + \frac{a_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} \in \text{Im}(T)$$

$\implies$  Sabemos que  $\forall j = 1, \dots, n$

$$Tv_j = a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$\implies Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

Si algún  $\lambda_j = 0$ :

$$Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

$$T(\langle v_1, \dots, v_j \rangle) \subseteq \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

En efecto □

**Corolario** (Valores propios de operador a través de representación  $\Delta$  superior). *Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  con representación  $\Delta$  superior*

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$



con  $B$  base de  $V$ . Entonces los valores propios de  $T$  son  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

*Demostración.*

$$T_\lambda I \quad \text{no es biyectiva}$$

$$\mathcal{M}_B(T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\mathcal{M}_B(T - \lambda I) = \mathcal{M}_B(T) - \lambda \mathcal{M}_B(I)$$

Por el Teo ( $\cdot$ )

$T - \lambda I$  invertible si solo si  $\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda \neq 0$

$\lambda$  es valor propio si solo si  $\lambda_1 = \lambda$  o  $\lambda_2 = \lambda \dots \lambda_n = \lambda$

□

## 2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales

**Definición 2.4.1** (Diagonal de una matriz diagonal). Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ . Definimos  $Diag(A) \in \mathbb{F}^{n \times m}$

$$(Diag(A))_{i,j} =$$

Y decimos que  $A$  es diagonal si

$$A = Diag(A)$$

Equivalentemente,  $A$  es diagonal si

$$a_{i,j} = 0 \forall i \neq j$$

Claramente, toda matriz diagonal es  $\Delta$  superior, entonces los valores propios de  $A$  son los valores en la diagonal.

**Definición 2.4.2** (Subespacio Propio). Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ . El subespacio propio de  $T$  correspondiente a  $\lambda$ ,  $E(\lambda, T)$ , se define como

$$E(\lambda, T) = \ker(T - \lambda I)$$

es decir, el conjunto de vectores propios asociados a  $\lambda$ , más el cero.

**Observación 2.4.1.**  $\lambda$  es valor propio de  $T \iff E(\lambda, T) \neq \{0\}$

**Proposición 2.4.1** (Suma de subespacios propios es directa).



## Capítulo 3

# Espacios de Producto Interno

**Definición 3.0.1** (Producto Interno). Un producto interno sobre un espacio vectorial  $V$  es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

I) Positividad:  $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$

II) Definitividad:  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \mathbf{0}$

III) Aditividad por la izquierda:  $\forall u, v, w \in V$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

IV) Homogeneidad:  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall u, v \in V$

V) Simetría conjugada:  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

**Observación 3.0.1.** En el caso  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, (V) \iff \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Ejemplos:

a) El producto interno Euclideo sobre  $\mathbb{F}^n$

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + \dots + z_n \cdot \overline{w_n}$$

b) Si  $c_1, \dots, c_n > 0$ , entonces

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \cdot z_i \cdot \overline{w_i}$$

c) Si  $V = \mathcal{C}[-1, 1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

d) Si  $V = \mathbb{R}[x]$  entonces

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

## Integrales

Si  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  y  $f \geq 0$  definimos la integral de  $f$  como el "área bajo la curva".

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)$$

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{N} \cdot i$$

$$i = 0, \dots, N$$

1.

**Teorema 3.0.1** (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que para  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple  $F'(x) = f(x)$  (primitiva).*

Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^J \int_{A_j=[a_j, b_j]} f(x) dx$$

2. Linealidad:

$$\mathcal{I} : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$$

$$f(x) \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

es una tra lineal.

Ejemplos:

1. Monomio:

$$p(t) = t^k \quad P(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

$P$  es primitiva de  $p$ :

$$P'(t) = t^k = p(t)$$

$$\therefore TFC$$

$$\int_0^t p(s) ds = P(t) - P(0)$$

2. Polinomios:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$$\int_0^t p(s) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^t s^k ds$$

3. Exponenciales:

$$f(x) = e^{\lambda x} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$F(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$$

$$\therefore \int_0^x e^{\lambda t} dt = F(x) - F(0) = \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda}$$

4. Seno-Coseno:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) = e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$$

$$F(x) = \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda}$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda}$$

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + i \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda}$$

$$\implies \int_0^x \sin \lambda t dt = \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda}$$

$$\int_0^x \cos \lambda t dt = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$$

### 3.1. Espacio de producto interno

**Definición 3.1.1** (Espacio de producto interno).  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de producto interno (e.p.i.) si  $V$  es un espacio vectorial y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es producto interno sobre  $V$ .

**Proposición 3.1.1** (Propiedades básicas).

(a)

$$\forall u \in V \quad v \mapsto \langle v, u \rangle$$

*Es una transformación lineal de  $V$  hacia  $\mathbb{F}$*

(b)

$$\langle 0, u \rangle = 0 \forall u \in V$$

(c)

$$\langle u, 0 \rangle = 0 \forall u \in V$$

(d)

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$$

(e)

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

### 3.2. Norma

**Definición 3.2.1** (Norma). Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de producto interno, definimos la norma asociada como:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Propiedades: Sea  $v \in V$

(a)

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

(b)

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

**Intuición geométrica:**

Sean  $u, v \in \mathbb{R}^2$

Por teo del coseno

$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

$$\|v - u\|^2 = \langle v - u, v - u \rangle = \|v\|^2 - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \|u\|^2$$

$$\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle$$

Reemplazando:

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$$

### 3.3. Conjuntos Ortonormales

**Proposición 3.3.1** (Norma de una combinación ortonormal). Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio con producto interno y  $e_1, \dots, e_m$  conjunto ortonormal. Entonces

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$

*Demostración.* Por Pitágoras:

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = \|a_1 e_1\|^2 + \|a_2 e_2 + \dots + a_m e_m\|^2$$

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 \|e_1\|^2 + \|a_2 e_2 + \dots + a_m e_m\|^2$$

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \|a_2 e_2 + \dots + a_m e_m\|^2$$

$$\vdots$$

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$

□

**Teorema 3.3.2.** *Todo familia ortonormal es linealmente independiente.*

*Demostración.* Sea  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  conjunto ortonormal.

Si fueran linealmente dependientes, existen  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$  no todos nulos

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$$

$$a_1 e_{\lambda_1} + \dots + a_m e_{\lambda_m} = 0 \quad / \|\cdot\|^2$$

$$0 = \|a_1 e_{\lambda_1} + \dots + a_m e_{\lambda_m}\|^2$$

$$0 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$

$$\iff a_1 = \dots = a_m = 0$$

$$\rightarrow \nrightarrow$$

□

**Definición 3.3.1** (Base ortonormal). Una base ortonormal de un espacio con producto interno  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un conjunto ortonormal que también es base.

**Lema 3.3.3.** *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio producto interno finito dimensional. Entonces un conjunto ortonormal de cardinalidad  $\dim V$  es una base ortonormal*

*Demostración.* Sea  $n = \dim V$  y sea  $e_1, \dots, e_m$  conjunto ortonormal en  $V$ .

$$\implies e_1, \dots, e_m \text{ son linealmente independiente}$$

$$\implies \text{son base}$$

□

Ejemplos:

1.  $\mathbb{F}^n$

2.  $\text{ser } F^4$ , el conjunto

$$(0,5, 0,5, 0,5, 0,5), (0,5, 0,5, -0,5, -0,5)$$

$$(0,5, -0,5, -0,5, 0,5), (-0,5, 0,5, -0,5, 0,5)$$

es base ortonormal. Claramente:  $\|\cdot\| = \sqrt{(0,5)^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2} = 1$

Tambien los productos internos cruzados dan 0

Pregunta: Cuándo existen bases ortonormales uniformes en  $\mathbb{R}^n$

**Lema 3.3.4.** Sea  $e_1, \dots, e_n$  vectores de  $\mathbb{F}^n$  y sea

$$U = [e_1 | e_2 | \dots | e_n]$$

Entonces,  $e_1, \dots, e_n$  es base ortonormal  $\iff$

$$U^T \cdot U = I_{n \times n}$$

*Demostración.*

$$\begin{bmatrix} \frac{e_1^T}{e_2^T} \\ \vdots \\ \frac{e_n^T}{e_n^T} \end{bmatrix}$$

□

**Definición 3.3.2** (Matriz unitaria).  $U \in \mathbb{F}^{n \times n}$  se dice unitaria si

$$U^T U = I_{n \times n}$$

Notar que  $U$  es unitaria  $\iff$  las columnas de  $U$  son base ortonormal.

Para responder la pregunta hacemos lo siguiente:

*Demostración.*  $n = 1$ :  $\{1\}$  es base ortonormal de  $\mathbb{F}$

$$H_1 = [1]$$

$n \implies 2n$ : Sea  $H_n$  una matriz unitaria tal que

$$|(H_n)_{i,j}| = \frac{1}{\sqrt{n}} = c$$

$$H_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}$$

1. Esta matriz también es uniforme

2. Esta matriz es unitaria

$$H_{2n}^T \cdot H_{2n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_n^T \cdot H_n + H_n^T \cdot H_n & H_n^T \cdot H_n - H_n^T \cdot H_n^T \cdot H_n \\ H_n^T \cdot H_n - H_n^T \cdot H_n & H_n^T \cdot H_n + H_n^T \cdot H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

□



Las columnas son las base ortonormal uniforme buscada.

Las matrices  $H_1, H_2, H_4, \dots, H_{2^k}$  se conocen como matrices de Hadanard

**Conjetura** (Hadanard). *Estas matrices solo existen para*

$$n = 4k, k \in \mathbb{Z}$$

Dada una base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$  tenemos

$$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad \forall v \in V$$

Cómo calcular  $a_1, \dots, a_m$ ?

**Teorema 3.3.5.** *Sea  $e_1, \dots, e_n$  base ortonormal de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , entonces*

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$$

además

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2$$

*Demostración.* Como  $e_1, \dots, e_n$  es base, existen  $a_1, \dots, a_n$  tal que

$$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad / \quad \langle \cdot, e_j \rangle$$

$$\langle v, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle e_i, e_j \rangle = a_j \cdot 1$$

Probamos la primera parte. La segunda es consecuencia de Pitágoras. □

### 3.4. Algoritmo de Gram-Schmidt

**Teorema 3.4.1.** *Sean  $v_1, \dots, v_m$  conjunto linealmente independiente de vectores en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .*

*Sea*

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i}{\|v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i\|}$$

*Entonces  $e_1, \dots, e_n$  es conjunto ortonormal y  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$*

*Demostración.* Por inducción en  $j$

$j = 1$ :  $e_1$  es conjunto ortonormal:

$$\|e_1\| = \left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\| = 1$$

y

$$\langle e_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$$

Notar que  $v_1 \neq 0$  porque  $v_1, \dots, v_n$  es linealmente independiente y por ende  $e_1$  está bien definido.

$j - 1 \implies j$ :

$e_1, \dots, e_j$  es ortonormal.

Primero  $e_j$  está bien definido

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i}{\|v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i\|}$$

y

$$v_j \notin \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

$$\therefore v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i \neq 0$$

Para probar ortonormalidad, basta probar que:

$$\langle e_j, e_l \rangle = \begin{cases} 1 & l = j \\ 0 & l < j \end{cases}$$

$$\langle e_j, e_j \rangle = \|e_j\|^2 = \frac{\|\cdot\|^2}{\|\cdot\|^2} = 1$$

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} \langle v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i, e_l \rangle$$

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} \left[ \langle v_j, e_l \rangle - \left\langle \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i, e_l \right\rangle \right]$$

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} \left[ \langle v_j, e_l \rangle - \sum_{i < j} \langle \langle v_j, e_i \rangle e_i, e_l \rangle \right]$$

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} \left[ \langle v_j, e_l \rangle - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle \cdot \langle e_i, e_l \rangle \right]$$

Por hipótesis de inducción:

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} [\langle v_j, e_l \rangle - \langle v_j, e_l \rangle \cdot 1] = 0$$

$\therefore e_1, \dots, e_n$  ortonormal.

Falta probar

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Para probarlo basta ver que

$$(\text{Hip. Ind.}) \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

Pero además

$$e_j \in \langle e_1, \dots, e_{j-1}, v_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

En conclusión

$$\langle e_1, \dots, e_j \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

$$\therefore \langle e_1, \dots, e_j \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

□

**Teorema 3.4.2** (Representación  $\Delta$ -superior con respecto a base ortonormal). *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio con producto interno (real o complejo) y sea  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Si  $T$  posee una representación matricial  $\Delta$ -superior con respecto a una base, entonces posee una representación  $\Delta$ -superior con respecto a una base ortonormal.*

*Demostración.* Sea  $B = (v_1, \dots, v_n)$  base ordenada de  $V$  tal que  $\mathcal{M}_B(T)$  sea  $\Delta$ -superior. Entonces:

$$\langle v_1 \rangle \text{ es invariante bajo } T$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle \text{ es invariante bajo } T$$

$$\vdots$$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \text{ es invariante bajo } T$$

Aplicando G-S a  $(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow e_1, \dots, e_n$  base ortonormal de  $V$ .

Para concluir basta probar que los subespacios

$$\langle e_1, \dots, e_j \rangle \quad j = 1, \dots, n$$

son invariantes bajo  $T$ .

Pero esto es directo, ya que

$$\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle e_1, \dots, e_j \rangle \quad j = 1, \dots, n$$

□

**Teorema 3.4.3** (Schur). *Todo operador sobre un espacio con producto interno complejo de dimensión finita posee una representación  $\Delta$ -superior para alguna base ortonormal de  $V$ .*

*Demostración.* Todo operador sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita posee una representación  $\Delta$ -superior para alguna base. Con el Teo anterior se concluye. □

### 3.5. Funciones lineales sobre Espacio con producto interno

**Definición 3.5.1** (Funcional Lineal). Una funcional lineal sobre  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es una transformación lineal  $l : V \rightarrow \mathbb{F}$ .

Ejemplos:

1.  $u \in V :$

$$l : V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$v \mapsto \langle v, u \rangle$$

2. Sea  $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\varphi(P) = \int_{-1}^1 p(t) \cos(\pi t) dt$$

Pregunta:  $\exists q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \varphi(p) = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt$ ?

**Teorema 3.5.1** (Representación de Riesz). Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio producto interno finito-dimensional y  $\varphi$  un funcional lineal. Entonces existe un único  $u \in V$

$$\varphi(v) = \langle v, u \rangle \quad \forall v \in V$$

*Demostración.* Sea  $\dim V = n, e_1, \dots, e_n$  base de ortonormal de  $V$ .

Existencia Sea  $v \in V$

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n \quad / \varphi$$

$$\varphi(v) = \varphi(\langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n)$$

$$\varphi(v) = \langle v, e_1 \rangle \varphi(e_1) + \dots + \langle v, e_n \rangle \varphi(e_n)$$

$$\varphi(v) = \langle v, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)} e_n \rangle$$

Unicidad: Sean  $u_1, u_2 \in V$  tales que

$$\varphi(v) = \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle \quad \forall v \in V$$

$$\therefore \langle v, u_1 - u_2 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Tomando  $v = u_1 - u_2$

$$\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0$$

$$\therefore \|u_1 - u_2\|^2 = 0$$

$$\iff u_1 - u_2 = 0$$

□

**Observación 3.5.1.** La demostración da una fórmula explícita para calcular  $u$ : Dada una base ortonormal  $e_1, \dots, e_n$

### 3.6. Complementos Ortogonales y Problemas de Minimización

**Definición 3.6.1** (Complemento Ortogonal). Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio con producto interno y  $U \subset V$ . Se define el complemento ortogonal de  $U$ , denotado  $U^\perp$  como

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

Propiedades:

- (a)  $U \subseteq V \implies U^\perp$  subespacio vectorial de  $V$   
 $U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$

*Demostración.*

$$U^\perp \neq \emptyset : 0 \in U^\perp$$

$$v, w \in U^\perp, \lambda \in \mathbb{F} : u \in U$$

$$\therefore \langle v + \lambda w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \lambda \langle w, u \rangle = 0$$

□

- (b)  $\{0\}^\perp = V$  : Ejercicio

- (c)  $V^\perp = \{0\}$

*Demostración.* Si  $v \in V^\perp$  entonces:

$$\langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in V$$

Tomando  $u = v$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

□

- (d)  $U \subset V \implies U \cap U^\perp = \{0\}$

*Demostración.* Sea  $v \in U \cap U^\perp$

$$\langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U$$

Tomando  $u = v$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

□

- (e)  $U \subseteq W \implies W^\perp \subset U^\perp$

*Demostración.*

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

$$W^\perp \subseteq \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$$

$$W^\perp \subseteq U^\perp \quad \square$$

**Proposición 3.6.1** (Suma directa ortogonal). *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio con producto interno, y  $U$  subespacio finito-dimensional. Entonces:*

$$U \oplus U^\perp = V$$

*Demostración.*  $U + U^\perp = V$ : Sea  $e_1, \dots, e_m$  base ortonormal de  $V$

$$\forall v \in V$$

$$v = (\overline{\langle e_1, v \rangle} e_1 + \dots + \overline{\langle e_m, v \rangle} e_m) \in U + (v - \overline{\langle e_1, v \rangle} e_1 - \dots - \overline{\langle e_m, v \rangle} e_m)$$

Por demostrar que:  $u \in U^\perp$

Basta probar que  $\forall i = 1, \dots, m$

$$\langle e_i, u \rangle = 0$$

Veamos

$$\langle e_i, v - \overline{\langle e_1, v \rangle} e_1 - \dots - \overline{\langle e_m, v \rangle} e_m \rangle = \langle e_i, v \rangle - \langle e_1, v \rangle \langle e_i, e_1 \rangle - \dots - \langle e_m, v \rangle \langle e_i, e_m \rangle$$

$$\langle e_i, u \rangle = \langle e_i, v \rangle - \langle e_i, v \rangle = 0$$

Es directa:  $U \cap U^\perp = \{0\}$  por propiedad.  $\square$

**Corolario** (Dimensión del complemento ortogonal). *Si  $V$  es finito-dimensional  $U < V$*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

*Demostración.*

$$U \oplus U^\perp = V \quad \square$$

**Teorema 3.6.2.** *Sea  $U < V$  finito-dimensional. Entonces*

$$(U^\perp)^\perp = U$$

*Demostración.*  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ : Sea  $u \in U$

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad \forall v \in U^\perp$$

$$\therefore u \in (U^\perp)^\perp$$

$U \supseteq (U^\perp)^\perp$  Sea  $v \in (U^\perp)^\perp$

$$v = u + w \quad u \in U, w \in W$$

PDQ:  $w = 0$

Como  $v \in (U^\perp)^\perp$

$$\langle v, z \rangle = 0 \quad \forall z \in U^\perp$$

Tomando  $z = w$

$$\langle u + w, w \rangle = 0$$

$$\langle u, w \rangle + \langle w, w \rangle = 0$$

$$u \in U, w \in U^\perp \implies \langle u, w \rangle = 0 \implies \langle w, w \rangle = 0 \iff w = 0$$

$$\therefore v = u \in U$$

□

**Definición 3.6.2** (Proyección ortogonal). Sea  $U$  subespacio vectorial finito-dimensional de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Se define la proyección ortogonal  $\mathcal{P}_U \in \mathcal{L}(V)$  tal que

$$\mathcal{P}_U : V \rightarrow V$$

$$v \mapsto u$$

donde

$$v = u + w, u \in U, w \in U^\perp$$

Ejemplo: Sea  $x \in V, x \neq 0$  y  $U = \langle x \rangle$

$$\mathcal{P}_U v = \frac{\langle v, x \rangle}{\|x\|^2} \cdot x$$

Propiedades: Sea  $U < V$  finito-dimensional y  $v \in V$

(a)  $\mathcal{P}_U \in \mathcal{L}(V)$

(b)  $\mathcal{P}_U u = u \quad \forall u \in U$

(c)  $\mathcal{P}_U w = 0 \quad \forall w \in U^\perp$

(d)  $\text{Im } \mathcal{P}_U = U$

(e)  $\ker \mathcal{P}_U = U^\perp$

(f)  $v - \mathcal{P}_U v \in U^\perp$

(g)  $\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U$

(h)  $\|\mathcal{P}_U v\| \leq \|v\|$

(i) Para toda base ortonormal de  $U$ ,  $e_1, \dots, e_n$

$$\mathcal{P}_U v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

Demostración de las propiedades

(a) *Demostración.* Sabemos que  $\mathcal{P}_U$  es función ya que  $U \oplus U^\perp = V$ . Probemos la linealidad. Sean  $v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2$  y sea  $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\mathcal{P}_U(v_1 + \lambda v_2) = ?$$

Sabemos que

$$\mathcal{P}_U v_1 = u_1 \quad \mathcal{P}_U v_2 = u_2$$

Y además

$$v_1 + \lambda v_2 = (u_1 + w_1) + \lambda(u_2 + w_2) = (u_1 + \lambda u_2) + (w_1 + \lambda w_2)$$

□

(b) *Demostración.*

$$u = u + 0 \implies \mathcal{P}_U u = u$$

□

(c) *Demostración.*

$$w = 0 + w \implies \mathcal{P}_U w = 0$$

□

(d) Ejercicio

(e) Ejercicio

(f) *Demostración.*

$$\langle v, \mathcal{P}_U v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

Sean

$$v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^\perp$$

$$\implies u = \mathcal{P}_U v$$

$$\therefore w - \mathcal{P}_U v \in U^\perp$$

□

(g) *Demostración.*  $\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U$

Sea  $v \in V$ :

$$v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^\perp$$



$$\mathcal{P}_U v \stackrel{(a)}{=} \mathcal{P}_U u + \mathcal{P}_U w \stackrel{(b),(c)}{=} u$$

$$\mathcal{P}_U^2 v = \mathcal{P}_U u + \mathcal{P}_U w = \mathcal{P}_U v$$

□

(h) Sea  $v = u + w$   $u \in U$   $w \in U^\perp$

$$v = \mathcal{P}_U v + w \quad \|\cdot\|^2$$

$$\|v\|^2 = \|\mathcal{P}_U v\|^2 + \|w\|^2$$

$$\implies \|v\|^2 \geq \|\mathcal{P}_U v\|^2$$

(i) Ejercicio

### 3.7. Problemas de Minimización

Dado  $v \in V$  y  $U < V$

$$(\mathcal{P}) \min \|u - v\| \quad u \in U$$

**Teorema 3.7.1** (Distancia mínima a un subespacio vectorial). *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio con producto interno y  $U < V$ . Entonces para todo  $v \in V$*

$$\|v - \mathcal{P}_U v\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U$$

Más aun, la igualdad se alcanza  $\iff u = \mathcal{P}_U v$

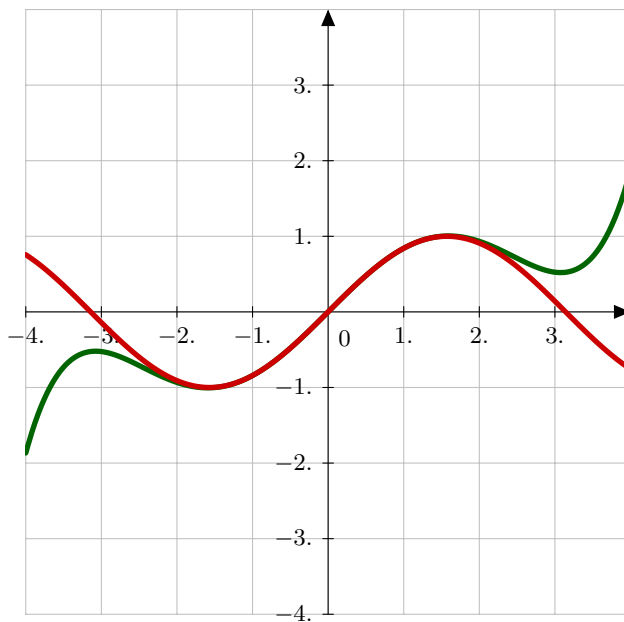
*Demostración.*

□

Ejemplo: Encuentre un polinomio  $u$  a coeficientes reales y de grado máximo 5 que aproxime  $\sin(x)$  lo mejor posible sobre  $[-\pi, \pi]$ , con respecto a la distancia

$$\min_{u \in \mathcal{P}_5} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x) - u(x)| dx$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = T(x)$$



Solución:  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio con producto interno

$$V = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \quad \langle p, q \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(x) \, dx$$

$$U = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})|_{[-\pi, \pi]} \quad \forall p, q \in V$$

Tenemos una base de  $U$

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$$

1. Aplicamos G-S (Ejercicio)

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$$

2. Aplicamos la fórmula de  $\mathcal{P}_U v$

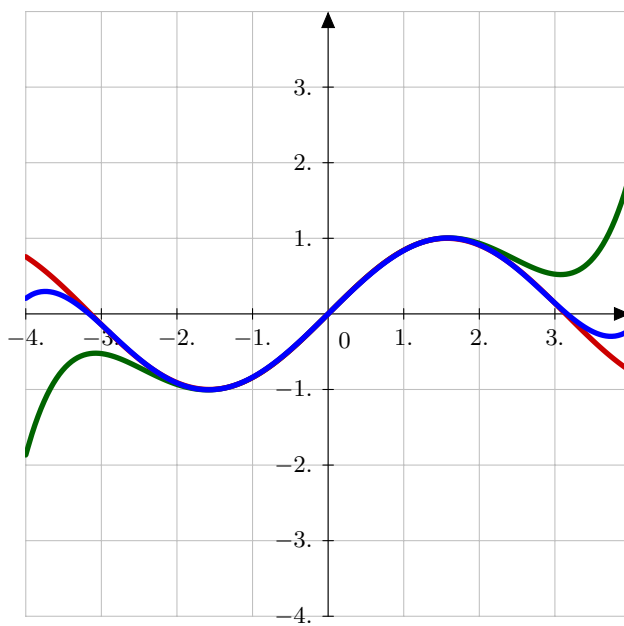
$$\mathcal{P}_U v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_5 \rangle e_5 + \langle v, e_6 \rangle e_6$$

(Ejercicio de Cálculo, **NO DE LINEAL**)

$$\langle v, e_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cdot e_1(x) \, dx \approx \frac{1}{10^6} \sum_{i=1}^{10^6}$$

Finalmente:

$$u(x) = \mathcal{P}_U v \approx 0,987862x - 0,155271x^3 + 0,00564312x^5$$





## Capítulo 4

# Operadores sobre Espacio con Producto Interno

Durante este capítulo

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$
- $V, W$  son espacios con producto interno sobre  $\mathbb{F}$

### 4.1. Operador Adjunto, Auto-Adjunto y Normal

Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Consideremos para  $w \in W$  fijo, el funcional

$$l_w : V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$v \mapsto \langle Tv, w \rangle$$

Por el Teo. de Rep. de Riesz, existe  $T^*w \in V$  tal que

$$l_w(v) = \langle v, T^*w \rangle = \langle Tv, w \rangle \quad \forall v \in V \forall w \in W$$

La función

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$w \mapsto T^*w$$

le llamamos la adjunta de  $T$ .

**Definición 4.1.1** (Adjunta). Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Definimos la adjunta de  $T$  como la función

$$T^* : W \rightarrow V$$

tal que

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^*w \rangle_V \quad \forall v \in V \forall w \in W$$

Ejemplo: Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 + 3x_3, 2x_1)$$

Tomemos bases canónicas

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}(T^*) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathcal{M}(T^*) = \mathcal{T}^T$$

**Proposición 4.1.1** (Adjunta es lineal).

$$T \in \mathcal{L}(V, W) \implies T^* \in \mathcal{L}(W, V)$$

*Demostración.* Sean  $w_1, w_2 \in W$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$  PD:  $T^*(w_1 + \lambda w_2) = T^*w_1 + \lambda T^*w_2$

Sea  $v \in V$

$$\langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle = \langle Tv, w_1 + \lambda w_2 \rangle$$

$$\langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle = \langle Tv, w_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle Tv, w_2 \rangle$$

$$\langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle = \langle v, T^*w_1 \rangle + \langle v, \lambda T^*w_2 \rangle$$

$$\langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle = \langle v, T^*w_1 + \lambda T^*w_2 \rangle$$

Por Riesz

$$T^*(w_1 + \lambda w_2) = T^*w_1 + \lambda T^*w_2$$

□

Propiedades de la adjunta:

a)  $(S + T)^* = S^* + T^* \quad \forall S, T \in \mathcal{L}(V, W)$

b)  $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall T \in \mathcal{L}(V, W)$

c)  $(T^*)^* = T$

d)  $I^* = I$  donde  $I \in \mathcal{L}(V)$  es la identidad

e)  $(ST)^* = T^*S^* \quad \forall T \in \mathcal{L}(V, W) \forall S \in \mathcal{L}(W, S)$

a) *Demostración.* Sean  $v \in V, w \in W$

$$\begin{aligned}
 \langle v, (S+T)^*w \rangle &= \langle (S+T)v, w \rangle \\
 \langle v, (S+T)^*w \rangle &= \langle Sv, w \rangle + \langle Tv, w \rangle \\
 \langle v, (S+T)^*w \rangle &= \langle v, S^*w \rangle + \langle v, T^*w \rangle = \langle v, (S^*+T^*)w \rangle \quad \forall v \\
 \iff (S+T)^*w &= S^*w + T^*w \quad \forall w \in W \iff (S+T)^* = S^*+T^* \quad \square
 \end{aligned}$$

b) *Demostración.* Sean  $v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}
 \langle v, (\lambda T)^*w \rangle &= \langle (\lambda T)v, w \rangle = \lambda \langle Tv, w \rangle \\
 \langle v, (\lambda T)^*w \rangle &= \langle v, \bar{\lambda}T^*w \rangle \quad \forall v \in V \forall w \in W \quad \square
 \end{aligned}$$

c) *Demostración.* Sean  $v \in V, w \in W$

$$\langle w, (T^*)^*v \rangle = \langle T^*w, v \rangle = \langle w, Tv \rangle$$

Por Riesz:

$$\begin{aligned}
 (T^*)^*v &= Tv \quad \forall v \\
 \iff (T^*)^* &= T \quad \square
 \end{aligned}$$

d) Ejercicio

e) *Demostración.* Sean  $v \in V, u \in U$

$$\langle v, (ST)^*u \rangle = \langle (ST)v, u \rangle = \langle S(Tv), u \rangle = \langle Tv, S^*u \rangle = \langle v, T^*(S^*u) \rangle$$

Por Riesz:

$$\begin{aligned}
 (ST)^*u &= T^*S^*u \quad \forall u \in U \\
 \iff (ST)^* &= T^*S^* \quad \square
 \end{aligned}$$

**Proposición 4.1.2** (Núcleo e Imagen de  $T^*$ ). Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Entonces

$$a) \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$$

$$b) \operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp$$

$$c) \ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$$

$$d) \operatorname{Im} T = (\ker T^*)^\perp$$

a) *Demostración.* Sea  $w \in W$

$$\begin{aligned}
 w \in \ker(T^*) &\iff T^*w = 0 \\
 &\iff \langle v, T^*w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \\
 &\iff \langle Tv, w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \\
 &\iff \langle z, w \rangle = 0 \quad \forall z = Tv, v \in V \\
 &\iff w \in (\text{Im } T)^\perp \quad \square
 \end{aligned}$$

b) *Demostración.* Claramente esta es implicada por c) y el complemento ortogonal  $\square$

c) *Demostración.* Claramente esta es implica por a)  $\square$

d) *Demostración.* Claramente esta es implicada por b)  $\square$

**Definición 4.1.2** (Traspuesta conjugada). La traspuesta conjugada de una matriz  $m \times n$  compleja es una matriz  $n \times m$  compleja que se obtiene intercambiando filas por columnas, y tomando conjugadas en todos los coeficientes.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3+i & 7 \\ 6 & 6 & 8i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3-i & 6 \\ 7 & -8i \end{bmatrix}$$

**Teorema 4.1.3** (La matriz representante de  $T^*$ ). Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Sean

$$B = (e_1, \dots, e_n) \subseteq V$$

$$C = (f_1, \dots, f_m) \subseteq W$$

bases ordenadas y ortonormales de  $V$  y  $W$ , respectivamente. Entonces  $\mathcal{M}_{C,B}(T^*)$  es la traspuesta conjugada de  $\mathcal{M}_{B,C}(T)$

*Demostración.* Como  $C$  es base ortonormal

$$Te_k = \langle Te_k, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle Te_k, f_m \rangle f_m$$

Y por lo tanto

$$(\mathcal{M}_{B,C}(T))_{jk} = \langle Te_k, f_j \rangle$$

Como  $B$  es base ortonormal tenemos

$$T^*f_j = \langle T^*f_j, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle T^*f_j, e_n \rangle e_n$$

Y por lo tanto

$$(\mathcal{M}_{C,B}(T^*))_{kj} = \langle T^*f_j, e_k \rangle = \langle f_j, Te_k \rangle = \overline{\langle Te_k, f_j \rangle} \quad \square$$



### 4.1.1. Operadores Auto-Adjuntos

**Definición 4.1.3** (Operador a.a.). Un operador  $T \in \mathcal{L}(V)$  se dice auto-adjunto (a.a.) si  $T = T^*$ . Es decir,

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Propiedades: Si  $S, T$  a.a. y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces

a  $S + T$  es a.a.

b  $\lambda S$  es a.a.

*Demostración.* Ejercicio □

**Proposición 4.1.4.** *Todo valor propio de un operador a.a. es real*

*Demostración.* Sea  $\lambda \in \mathbb{F}$  y  $v \in V \setminus \{0\}$  tal que

$$Tv = \lambda v \quad / \quad \langle \cdot, v \rangle$$

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$$

$$\langle v, Tv \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

$$\implies \bar{\lambda} = \lambda$$

□

**Teorema 4.1.5.** *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio con producto interno compleja y  $T \in \mathcal{L}$ . Entonces*

$$\langle Tv, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \iff T = 0$$

**Observación 4.1.1.** Esto no es cierto si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ . Ver la siguiente transformación:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$

*Demostración.* Notemos que  $\forall u, w \in V$

$$\langle Tu, w \rangle = \frac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4} + i \frac{\langle T(u+iw), u+iw \rangle - \langle T(u-iw), u-iw \rangle}{4}$$

Entonces

$$\langle Tu, w \rangle = 0 \quad \forall u, w \iff \langle Tv, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Concluyendo que  $T = 0 \iff \langle Tv, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$  □

**Teorema 4.1.6.** *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio con producto interno complejo y  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Entonces  $T$  es a.a.*

$$\iff \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

**Observación 4.1.2.** Esto **NO** es cierto para  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

*Demostración.*

$$\langle Tv, v \rangle - \overline{\langle Tv, v \rangle} = \langle Tv, v \rangle - \langle v, Tv \rangle$$

$$\langle Tv, v \rangle - \overline{\langle Tv, v \rangle} = \langle (T - T^*)v, v \rangle$$

Se concluye que

$$\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \iff \langle (T - T^*)v, v \rangle = 0 \iff T - T^* = 0 \quad \square$$