Teoría de Números

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2018

Índice general

1. Nombre a decidir **3**

1.1. Funciones Aritméticas 3

1.2. Series de Dirichlet 6

1.2.1. Propiedades Analíticas 6

Capítulo 1

Nombre a decidir

1.1. Funciones Aritméticas

Definición 1.1.1 (Función Aritmética)**.** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

- Es multiplicativa si
$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall (a,b) = 1$$

- Es completamente multiplicativa si
$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall a, b$$

Ejemplo: 1.1.1. (a) $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si n = 1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

(b) $I_k(n) = n^k$

(c) Función de Möbius:
$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ tiene un divisor cuadrado} \\ (-1)^k & \text{en otro caso, donde } k \text{ es el numero de factores primos} \end{cases}$$

(d) $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$

(e) Función de Euler: $\phi(n) = \#\{1 \leq k \leq n : (k,n) = 1\}$

Definición 1.1.2 (Convolución)**.** Sean f, g funciones aritméticas su convolución $f * g$:
$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a) \cdot g(b)$$

Teorema 1.1.2 (Propiedades de la convolución)**.** *(a)* $(f * g) * h = f * (g * h)$

(b) $f * g = g * f$

(c) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(d) $\delta * f = f$

(e) $I_0 * \mu = \delta$

(f) Si f *y* g *son multiplicativas entonces* $f * g$ *es multiplicativa*

Demostración.

(a) Tarea

(b) Tarea

(c) Tarea

(d) Tarea

(e) $(I_0 * \mu)(1) = I_0(1) \cdot \mu(1) = 1 = \delta(1)$ Sea $n > 1$, sean $p_1, ..., p_l$ los factores primos distintos de n

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_l^{\alpha_l}$$

$$(I_0 * \mu)(n) = \sum_{a \cdot b = n} I_0(a)\mu(b)$$

$$(I_0 * \mu)(n) = \sum_{b|n} \mu(b) = \sum_{d|p_1 \cdot ... \cdot p_l}$$

$$(I_0 * \mu)(n) = \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{\nu} \binom{l}{\nu} = (1 \cdot 1)^l = 0 = \delta(n)$$

(f) f, g mult. Sean $(a, b) = 1$

$$(f * g)(a) \cdot (f * g)(b) = \left(\sum_{x \cdot y = a} f(x)g(y) \right) \left(\sum_{s \cdot t = a} f(s)g(t) \right)$$

$$(f * g)(a) \cdot (f * g)(b) = \sum_{x \cdot y = a} \sum_{s \cdot t = b} f(x \cdot s) \cdot g(y \cdot t)$$

$$(f * g)(a) \cdot (f * g)(b) = \sum_{u \cdot w = ab} f(u) \cdot g(w)$$

$$(f * g)(a) \cdot (f * g)(b) = (f * g)(ab)$$

□

Ejemplo: 1.1.3.

$$\sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1 \cdot I_0(n/d) = (I_0 * I_0)(n)$$

Corolario (Fórmula de Inversión de Möbius)**.** *Sea f función aritmética. Sea $F = I_0 * f$ es decir:*
$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$
entonces: $f = \mu * F$
es decir $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot F(n/d)$

Demostración.

$$\mu * F = \mu * (I_0 * f)$$

$$\mu * F = (\mu * I_0) * f = \delta * f = f$$

□

Ejemplo: 1.1.4. $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Nro de generados: $\phi(n)$
- Subgrupos: exactamente, para $d|n$:

$$C_n \geq \left\langle \frac{n}{d} \right\rangle \simeq C_d$$

- Todo $x \in C_n$ genera algún subgrupo

$$\implies \sum_{d|n} \phi(n) = \#C_n = n$$

$$\therefore \phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot I_1(n/d)$$

$$\phi(n) = n \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

$$\phi = \mu * I_1$$

Teorema 1.1.5 ($\Sigma \to \Pi$)**.** *Sea f multiplicativa y no idénticamente a 0. Entonces:*

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{p|n} (1 + f(p) + ... + f(p^{v_p(n)}))$$

donde p varía sobre primos y $v_p(n) =$ exponente de p en n.

Demostración. Expandir LD + Factorización Única + mult □

Ejemplo: 1.1.6. (a) $\sigma_0 = \sum_{d|n} 1 = \prod_{p|n}(1 + 1 + ... + 1) = \prod_{p|n}(v_p(n) + 1)$

(b) $\phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = n \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$

Definición 1.1.3 (Sumar)**.** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$
$S_f(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$

Teorema 1.1.7 (Sumas por partes)**.** *Sea $a_1, a_2, ...$ secuencia de números complejos. Sea $f : [1, x] \to \mathbb{C}$ de clase C^1 para algún $x > 1$. Entonces:*

$$sum_{n\leq x} a_n \cdot f(n) = (sum_{n\leq x} a_n)\, f(x) - \int_1^x \left(\sum_{x\leq t} \right) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Demostración. Apuntes □

1.2. Series de Dirichlet

1.2.1. Propiedades Analíticas

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$
$$D(s, f) := \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$
¿Cuándo converge? ($s \in \mathbb{R}$)
$$S_f(x) = \sum_{n\geq 1} f(n)$$

Teorema 1.2.1 (Criterio de Convergencia)**.** *Dada f función aritmética y $s_0 \in \mathbb{R}$, los siguientes son equivalentes:*

(1) $S_f(x) \ll_s x^s, \quad \forall s > s_0$

(2) $D(s, f)$ *converge* $\forall s > s_0$

(3) $D(s, f) = s \cdot \int_1^\infty S_f(t) \frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}}, \quad \forall s > s_0$

Demostración. (2) $\implies$ (1) Fijamos $s > s_0$

$$(2) \implies \sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n^s} = O_s(1)$$

$$S_f(x) = \sum_{x\leq x} \frac{f(n)}{n^s} \cdot n^s \tag{1.1}$$
$$= \sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n^s} - s \cdot \int_1^x \left(\sum_{n\leq t} \frac{f(n)}{n^s} \right) \cdot t^{s-1}\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$
$$\ll_s x^s + x^s \ll x^s \tag{1.3}$$

(1) $\implies$ (2) & Fórmula: Tomar $s > s_0$

$$\sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{S_f(x)}{x^s} + s\int_1^x S_f(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}}$$

Usar (1) con $\epsilon > 0$ chico y $S_f(x) \ll_\epsilon x^{s_0+\epsilon}$ $(\epsilon = \frac{s-s_0}{2})$
Notar:

$$\frac{S_f(x)}{t^{s+1}} \ll_\epsilon \frac{1}{t^{s-s_0-\epsilon+1}}$$

$\square$