Teoría de Modelos

Nicholas Mc-Donnell

Verano 2018-2019

Índice general

Capítulo 1

Base

La lógica se interesa en el camino entre un conjunto de premisas y un conjunto de conclusiones. Para eso esta se fija en la forma los argumentos.

Ejemplo: 1.0.1.

$$\begin{array}{l} p \implies q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Ejemplo: 1.0.2.

$$\begin{array}{l} p \implies q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

1.1. Lógica proposicional

Premisas que tienen un solo valor de verdad, Verdadero o Falso. Lenguaje es **muy** importante, no puede ser ambiguo.

Definición 1.1.1 (Lenguaje ($\mathcal{L}$))**.**

- letras proposicionales (infinitos numerables)

$$p_1, p_2, ..., p_n, ...$$

- conectivos lógicos

- paréntesis

Definición 1.1.2 (Oración).

- Oraciones atómicas:

$$p_i$$

- α, β son oraciones, las siguientes son oraciones:

$$\neg\alpha, \alpha \implies \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \iff \beta$$

- Toda oración se obtiene de la manera anterior en un número finito de pasos.

Definición 1.1.3 (Table de verdad). Es una función tal que

$$v : \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$$

v valuación: mundos posibles

Definición 1.1.4 (Consecuencia lógica ($\models$)). $\Gamma \models \varphi$, gama entraña phi (Gamma entails Phi), phi. Para cualquier v si $v(\Gamma) = 1$ entonces $v(\phi) = 1$

Ejemplo: 1.1.1 (Modus Ponens).

$$\begin{aligned}&\text{Si } \Gamma \models \varphi \implies \psi \\ &\text{y } \Gamma \models \varphi \\ &\text{entonces } \Gamma \models \psi\end{aligned}$$

Ejemplo: 1.1.2 (Teorema de Compacidad). Si $\Gamma \models \varphi$, entonces existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que Γ_0 es finito y $\Gamma_0 \models \varphi$

1.1.1. Sistema deductivo

Axiomas y conectivos lógicos ($\neg, \implies$)

1. $\vdash \varphi \implies (\psi \implies \varphi)$
2. $\vdash (\varphi \implies (\psi \implies \theta)) \implies ((\varphi \implies \psi) \implies (\varphi \implies \theta))$
3. Hay dos opciones
   - $\vdash (\neg\varphi \implies \psi) \implies ((\neg\varphi \implies \neg\psi) \implies \varphi)$
   - $\vdash (\neg\varphi \implies \neg\theta) \implies (\psi \implies \theta)$

Bajo Modus Ponens

$\vdash \varphi \implies \varphi$.

$$\vdash \varphi \implies ((\varphi \implies \varphi) \implies \varphi) \implies ((\varphi \implies (\varphi \implies \varphi)) \implies (\varphi \implies \varphi))$$
$$\vdash \varphi \implies ((\varphi \implies \varphi) \implies \varphi)$$
$$\vdash (\varphi \implies (\varphi \implies \varphi)) \implies (\varphi \implies \varphi)$$
$$\vdash (\varphi \implies (\varphi \implies \varphi))$$
$$\vdash \varphi \implies \varphi$$

□

Definición 1.1.5 (Demostración ($\Gamma \vdash \varphi$))**.** Γ es consecuencia sintáctica de φ si existe sucesión de oraciones de $\mathcal{L} < \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n >$

- $\sigma_n = \varphi$
- σ_i es instancia de axiomas
- $\sigma_i \in \Gamma$
- σ_i se obtiene por MP de $\sigma_j, \sigma_k; j, k < i$

Teorema 1.1.1 (Completitud)**.** *Si* $\Gamma \models \varphi$*, entonces* $\Gamma \vdash \varphi$ *(Dem: [1])*

Definición 1.1.6 ($\overline{\mathcal{L}}$)**.** Son todas las oraciones de $\mathcal{L}$

Definición 1.1.7 (Álgebra totalmente libre)**.** $< \mathcal{L}, \vee, \wedge, \neg >$, dónde:

$$\vee : \overline{\mathcal{L}} \times \overline{\mathcal{L}} \to \overline{\mathcal{L}}$$

$$(\psi, \varphi) \mapsto (\psi \vee \varphi)$$

Definición 1.1.8 (Álgebra de Boole)**.** Se toma la siguiente relación de congruencia

$$\varphi \sim \psi \iff \models \varphi \iff \psi$$

Con lo que $\overline{\mathcal{L}} \mid_{\sim} = \{[\varphi] : \varphi \in \overline{\mathcal{L}}\}$

$$[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$$

$$[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$

$$\neg[\psi] = [\neg\psi]$$

Si se define $[\varphi] \leq [\psi]$ ssi $\models \varphi \implies \psi$, esto genera un orden en esta Álgebra.

Teorema 1.1.2 (Teorema de la deducción)**.** $(\Sigma \vdash \varphi \implies \psi) \impliedby (\Sigma, \varphi \vdash \psi)$

1.1.2. Lógica de Primer Orden

Se cuantifica **sólo** sobre objetos, no sobre conjuntos de objetos.

Bibliografía

[1] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press, 2009.