

Algebra Lineal

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2017

Índice general

1. Espacios Vectoriales	3
1.1. Espacios Vectoriales	3
1.2. Subespacios generados	3
1.2.1. Combinaciones lineales	3
1.3. Transformaciones lineales	7
1.3.1. Algebra de Transformaciones Lineales	10
1.3.2. Matriz representante	12
1.3.3. Composición y Productos	13
1.3.4. Invertibilidad	14
1.4. Isomorfismos	16
1.4.1. Matrices representantes	17
1.4.2. Cambios de Base:	18
1.5. Productos de Espacios Vectoriales	19
1.5.1. Productos y Sumas directas	20
2. Parte II	21
2.1. Polinomios	21
2.1.1. Algoritmo de la división	21
2.1.2. Raíces de Polinomios	22
2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios	23
2.3. Matrices triangulares superiores	25
2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales	27
3. Espacios de Producto Interno	29
3.1. Espacio de producto interno	31
3.2. Norma	32

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

1.1. Espacios Vectoriales

1.2. Subespacios generados

1.2.1. Combinaciones lineales

Teorema 1.2.1 (*). Sea V espacio vectorial generado por un conjunto finito m de vectores. Entonces cualquier

Demostración. Sean $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ con $n > m$. Por contradicción, suponiendo que son linealmente independientes.

Sean $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = V$ (por hipótesis)

$$\implies u_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(1)} v_i$$

Claramente $(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_m^{(1)}) \neq 0$ (de lo contrario $u_1 = 0$)

Sin perder generalidad, $\lambda_1^{(1)} \neq 0$ y por el Lema:

$$\langle u_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$$

Ahora, existan $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}) \neq (0, \dots, 0)$ tales que:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 + \sum_{i=2}^m \lambda_i^{(2)} v_i$$

Más. aun, $(\lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}) \neq (0, \dots, 0)$

De lo contrario:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 \implies u_2 - \lambda_1^{(2)} u_1 = 0 \rightarrow \leftarrow (u_1, \dots, u_n \text{ son linealmente independientes})$$

En conclusión, sin pérdida de generalidad $\lambda_2^{(2)} \neq 0$

Por el Lema:

$$\langle u_1, u_2, v_3, \dots, v_m \rangle = V$$

Iterando el argumento, se tiene que:

$$\langle u_1, \dots, u_m \rangle = V$$

Notemos que $u_{m+1} \in \langle u_1, \dots, u_m \rangle$

$$0 \neq u_{m+1} = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i \rightarrow \leftarrow$$

□

Definición 1.2.1 (Base, Dimensión finita). Una base B de un espacio vectorial es un conjunto $B \subseteq V$ tal que:

1. B es linealmente independiente
2. $\langle B \rangle = V$

Un espacio vectorial V se dice finito-dimensional si existe un conjunto $S \subseteq V, \|S\| < \infty$ tal que $\langle S \rangle = V$.

Corolario. Si V es finito-dimensional, todas las bases de V son finitas y tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Sean B_1 y B_2 bases de V .

Por Teo (*), $\|B_1\|, \|B_2\| \leq m$, donde m es el tamaño de S tal que $\langle S \rangle = V$ y $\|S\| < \infty$.

Como B_1 es base, $\langle B_1 \rangle = V$, y como B_2 es linealmente independiente:

$$\text{Teo} (*) \implies \|B_2\| \leq \|B_1\|$$

Como B_2 es base. □

Definición 1.2.2 (Dimensión). Si V es un espacio vectorial finito-dimensional definimos su dimensión, $\dim V$, como el cardinal de una base cualquiera de V . Si V no es finito-dimensional $\dim V = +\infty$

Ejemplos:

$$1. V = \text{Sim}^2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = A^T\}$$

abc

$$2. \dim(\mathbb{R}^{n \times n}) = n^2$$

$$3. \dim(\text{Antisim}^m(\mathbb{R})) = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \text{ y } \dim(\text{Sim}^m(\mathbb{R})) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$4. P_n(\mathbb{C})$$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es base

$$a) \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle = P_n(\mathbb{C})$$

$$p \in P_n(\mathbb{C})$$

$$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n \in \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle$$

$$b) \{1, x, \dots, x^n\} \text{ es linealmente independiente.}$$

Por contradicción supongamos $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$ Con igualdad de funciones.

$$\iff (\forall x \in \mathbb{C}) 0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$$

Recuerdo (TFA): Todo polinomio complejo de grado ≥ 1 posee una raíz compleja.

$$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n = (x - z_1) \cdot a'_0 \cdot 1 + a'_1 \cdot x + \dots + a'_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

$$\implies p(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \dots \cdot (x - z_k) \cdot A \text{ donde } k = \text{gr}(p), \text{ y } A \neq 0.$$

Tomando $z' \neq z_1, z_2, \dots, z_k$, tenemos: $0 = (z' - z_1) \cdot (z' - z_2) \cdot \dots \cdot (z' - z_k) \cdot A$ Pero multiplicar cosas distintas de 0 no da 0.

$\rightarrow \leftarrow$

$$\dim(P_n(\mathbb{C})) = n + 1$$

Observación 1.2.1. $\{0\}, \dim\{0\} = 0$, notando que base es \emptyset , tenemos que $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Lema 1.2.2. Sea $S \subseteq V, S = \{v_1, \dots, v_n\}$ conjunto linealmente independiente.

$v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle \implies \{v, v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Ejercicio □

Teorema 1.2.3. Sea V espacio vectorial finito dimensional, entonces:

1. Todo conjunto linealmente independiente extiende a una base

2. Todo conjunto generado contiene una base

Todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ finito dimensional posee una base.

Demostración. a) Sea $v \in V \setminus \{0\}$. Entonces $\{v\}$ es linealmente independiente.

Por Teo, estamos listos.

Dem(Teo):

V es finito dimensional $\implies \exists \{v_1, \dots, v_n\}$ que genera V .

Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ conjunto linealmente independiente.

Dos casos:

a) Si $\langle S \rangle = V$, entonces S es base

b) Si $\langle S \rangle \subset V$, entonces existe $v \notin \langle S \rangle$, y opr el Lema, $S \cup \{v\}$ es linealmente independiente.

Inductivamente, o bien eventualmente 1, o iteramos 2.

Sin embargo, 2 no puede ocurrir infinitas veces.

Teo(*) \implies todo conjunto linealmente independiente posee cardinalidad $\leq n$.

b) Sea S , tal que $\langle S \rangle = V$.

Consideremos, $d = \max\{|S'| : S' \subseteq S, S' \text{ es linealmente independiente}\}$

Notemos que $d \leq n < +\infty$, por el Teo(*).

Como el máximo se alcanza, existe S' tal que $|S'| = d$ y S' es linealmente independiente.

Por contradicción, supongamos que S' no es base.

$$\langle S' \rangle \subset V = \langle S \rangle$$

Luego, $S \setminus \langle S' \rangle \neq \emptyset$. De lo contrario $\langle S \rangle \setminus \langle S' \rangle \neq \emptyset$

$$\implies S \subseteq \langle S' \rangle \implies \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle \implies \langle S' \rangle = V$$

Finalmente, existe $v \in S \setminus \langle S' \rangle$, y por el Lema, $S' \cup \{v\}$ es linealmente independiente y $|S' \cup \{v\}| = d + 1$

$\rightarrow \leftarrow$

□

Corolario. Sea $W \subset V$ subespacio propio ($W \neq V$) con V finito dimensional. Entonces, $\dim W < \dim V$

Demostración. ■ Si $\dim W = 0 \implies \dim W = 0 < \dim V$.

■ Si $\dim W \geq 1$ entonces, por el corolario, W tiene una base.

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \text{ es base de } W$$

Como W es subespacio propio, existe $v \in V \setminus \langle B_W \rangle$

$$\implies B_W \cup \{v\} \text{ es linealmente independiente y } \subset V.$$

Por Teo. a), $B_W \cup \{v\}$ se extiende con una base B_V , $|B_V| \geq |B_W| + 1$.

$$\dim W = |B_W| < |B_W| + 1 \leq |B_V| = \dim V$$

□

Proposición 1.2.4. Sean U, W subespacios vectoriales de un espacio vectorial finito dimensional V . Entonces:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Demostración. Si $U \cap W = \{0\}$, trivial

Si $U \cap W \neq \{0\}$, entonces sea $B_{U \cap W}$ base de $U \cap W$.

$$B_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_m\}$$

Base de U: Sea $B_U = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p\}$

Base de W: Sea $B_W = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r\}$

Ambos existen por Teo.a).

Afirmación: $B_U \cup B_W = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r\}$ es base de $U + W$.

$$1. \langle B_U \cup B_W \rangle = U + W$$

$$v \in u + w, u \in U, w \in W$$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^r \delta_k w_k + \sum_{j=1}^m \beta_j v_j \in \langle B_U \cup B_W \rangle$$

$$2. B_U \cup B_W \text{ es linealmente independiente:}$$

$$0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j + \sum_{k=1}^p \nu_k u_k$$

$$- \sum_{k=1}^p \nu_k u_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j \in U \cap W$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j \Rightarrow \nu_k, \lambda_i = 0 \forall k, i$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = |B_{U \cap W}|$$

$$\dim U = |B_U|$$

$$\dim W = |B_W|$$

$$\dim(U + W) = |B_U \cup B_W|$$

□

1.3. Transformaciones lineales

Definición 1.3.1 (Transformación lineal). Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo común \mathbb{F} . Una función $T : V \rightarrow W$ es transformación lineal si

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Ejemplos:

1. $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m, T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ y $A \in \mathbb{F}^{m \times n} \quad v \mapsto Av$
 T es una transformación lineal
2. $V = W = C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es infinitamente diferenciable}\}$
 $V = C^1(\mathbb{R}), W = C^0(\mathbb{R})$
 $T : V \rightarrow W$
 $f \mapsto \frac{df}{dx}$
 Por álgebra de funciones diferenciables si $f, g \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{d(\lambda f + g)}{dx} = \lambda \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

3. $\mathbb{R}[x]$ Es un espacio vectorial
 $T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$
 $p \mapsto \frac{dp}{dx}$

4. $V = C^0([0, 1]), W = \mathbb{R}$
 $T : V \rightarrow W$
 $f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$

Terorema 1.3.1. Sea V un espacio finito dimensional y $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V .

Sea W un espacio vectorial y consideramos vectores $w_1, \dots, w_n \in W$

Entonces $\exists! T : V \rightarrow W : T(v_i) = w_i \forall i = 1, \dots, n$

Demostración. ■ Existencia: Si $v \in V$ entonces:

$$(*) \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

Definimos:

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$$

$T : V \rightarrow W$ es una función porque $\forall v \in V$ la descomposición $(*)$ es única.

Además, es lineal. Si $v, u \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_i \lambda_i v_i$$

$$u = \sum_i \mu_i v_i$$

$$T(\lambda v + u) = T\left(\sum_i (\lambda \lambda_i + \mu_i) v_i\right)$$

$$T(\lambda v + u) = \sum_i (\lambda \lambda_i + \mu_i) T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda \sum_i \lambda_i T(v_i) + \sum_i \mu_i T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u)$$

- Unicidad: Sean T, T' transformaciones lineales tales que:

$$T(v_i) = T'(v_i) = w_i$$

Sea $v \in V$, entonces:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T'(v_i)$$

$$T(v) = T'(v) \implies T = T'$$

□

Propiedades:

Si $T : V \rightarrow W$ transformaciones lineales, entonces:

1. $T(0) = 0$
2. $T(\sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i))$

Demostración.

□

La importancia de este teorema se relaciona con el hecho de poder definir transformaciones lineales sólo a través de como actúan sobre una base. Esto se relaciona con la noción de matriz representante.

Definición 1.3.2. Si $T : V \rightarrow W$ transformación lineal, definimos:

- Núcleo(Kernel): $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$, subespacio vectorial de V
- Imagen(Rango): $T(V) = \{w \in W : \exists v \in V T(v) = w\}$, subespacio vectorial de W

Teorema 1.3.2 (Núcleo-Imagen). Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} y $T : V \rightarrow W$ transformación lineal. Entonces, si V es finito dimensional:

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(T(V))$$

Demostración. Como $\ker T$ es subespacio vectorial de V entonces es finito dimensional y por ende posee una base:

$$\{v_1, \dots, v_k\} \quad \text{es base de } \ker T$$

Por un teorema podemos extender a una base de V

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} \text{ es base de } V$$

$$\text{Sea ahora } w \in \Im(T) \implies w = T(v)$$

Entonces,

$$w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{F}$$

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$$

$$\in \langle \{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} \rangle$$

Queremos probar ahora que $(T(v_i))_{i=k+1}^n$ son linealmente independiente. Supongamos $\exists \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ tal que:

$$\sum_{i=k+1}^n \lambda_i T(v_i) = 0$$

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i v_i\right) = 0$$

$$\implies \in \ker(T)$$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^n (-\lambda_i) v_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = 0$$

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ son linealmente independientes tenemos que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Finalmente:

$$\dim V = n, \dim \ker T = k$$

$$\dim \Im T = n - k$$

□

1.3.1. Algebra de Transformaciones Lineales

Def[Espacio de transformaciones lineales]:

Sean V y W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Definimos

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W : T \text{ es transformación lineal}\}$$

Dadas $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, definimos

$$T_1 + T_2 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto T_1 v + T_2 v$$

$$\lambda T_1 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto \lambda T_1 v$$

Teorema

$\mathcal{L}(V, W)$ dotado de $+$ y \cdot es un espacio vectorial sobre \mathbb{F}

Dem: Primero probar que $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda T_1 \in \mathcal{L}(V, W)$

$T_1 + T_2$ es transformación lineal.

$$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w) \quad (T_1 + T_2)(\lambda v + w) = T_1(\lambda v + w) + T_2(\lambda v + w)$$

$$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w) \quad \text{Similarmente:}$$

$$(\lambda T_1)(\mu v + w) = \mu(\lambda T_1)(v) + (\lambda T_1)(w)$$

Y el resto de las propiedades se dejan propuestas como ejercicio.

Teorema

Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} , $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Luego, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio finito dimensional y $\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n$

Dem: Sean $V = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$, $W = \langle \{w_1, \dots, w_m\} \rangle$, bases respectivamente.

Dados $1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m$, definimos $E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$ como única transformación lineal que satisface:

$$E^{p,q}(v_j) = \begin{cases} w_p & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}$$

$$E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$$

$E^{p,q}$ esta bien definida por el primer teorema de la sección

$$\mathcal{B}_L = \{E^{p,q} : 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m\}$$

Afirmación: \mathcal{B}_L es base de $\mathcal{L}(V, W)$

$$\langle \mathcal{B}_L \rangle = \mathcal{L} : \text{Sea } T \in \mathcal{L}(V, W)$$

Dado $1 \leq j \leq n$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{i,j} w_i$$

Dado $v \in V$, existen $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \mu_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j \left(\sum_{i=1}^m \lambda_{i,j} w_i \right)$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mu_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_i \sum_j \lambda_{i,j} \mu_j E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j} \left(\sum_k \mu_k v_k \right) \right)$$

$$T(v) = \sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v)$$

\mathcal{B}_L es linealmente independiente: Supongamos que:

$$\sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j} = 0$$

Dado $1 \leq k \leq n$

$$\sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_k) = \mathbf{0}$$

$$\iff \sum_i \lambda_{i,k} w_i = \mathbf{0}$$

$$\iff \lambda_{1,k} = \lambda_{2,k} = \dots = \lambda_{m,k} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = |\mathcal{B}| = m \cdot n$$

1.3.2. Matriz representante

El Teo anterior permite identificar transformaciones lineales entre espacios finito-dimensionales y matrices $m \times n$ (donde $m = \dim W, n = \dim V$).

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W .

Definimos la matriz representante de T con respecto a las bases \mathcal{B}_V y \mathcal{B}_W como $\mathcal{M}(T) =$

$(a_{ij})_{i=1\dots m, j=1\dots n}$, tal que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Si las bases no están claras por contexto usamos la notación $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$

Es facil ver que

$$\mathcal{M}(T_1 + \lambda T_2) = \mathcal{M}(T_1) + \lambda \mathcal{M}(T_2)$$

(Ejercicio)

De esta forma, \mathcal{M} respeta la estructura lineal de $\mathcal{L}(V, W)$

Ejemplos:

$$\mathbb{F}^\infty = V = W$$

$$1. L : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$Lx = (x_2, x_3, \dots)$$

$$2. R : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$Rx = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Pregunta: $\mathcal{M}(L), \mathcal{M}(R)$?

1.3.3. Composición y Productos

Teo

Sean V, W, Z espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, Z)$. Entonces por composición: $S \circ T : V \rightarrow Z$ dada por $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ es una transformación lineal.

Dem: Tenemos que probar que:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

En efecto:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = S(T(\lambda u + v)) = S(\lambda T(u) + T(v))$$

$$S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda S(T(u)) + S(T(v)) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

Definición 1.3.3. Endomorfismo

Una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, V)$ se dice endomorfismo u operador lineal. Denotamos $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. La composición funciona como producto sobre $End(V)$

Propiedades:

$$a) I \circ S = S \circ I = S \text{ (I es neutro para } \circ \text{)}$$

- b) ■ $S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$
 ■ $(T_1 + T_2) \circ S = T_1 \circ S + T_2 \circ S$
- c) $\lambda(S \circ T) = (\lambda S) \circ T = S \circ (\lambda T)$

Demostración. Ejercicio □

Importante notar que \circ no es conmutativo.

También es importante observar que NO todo operador posee elemento inverso para \circ . Dado $T \in \text{End}(V) \setminus \{0\}$, decimos que $S \in \text{End}(V) \setminus \{0\}$ es su inversa si:

$$S \circ T = T \circ S = I$$

Corolario

Sea V espacio vectorial finito-dimensional y $\mathbb{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Entonces $\{E^{p,1} : p, q = 1, \dots, n\}$ es base de $\text{End}(V)$.

Demostración. Directo por Teo (+). □

Lema: Sean $S, T \in \text{End}(V)$ con V finito dimensional. Entonces:

$$\mathcal{M}(S \circ T) = \mathcal{M}(S) \cdot \mathcal{M}(T)$$

Demostración. Recordar que

$$\{E^{p,q} : p, q = 1, \dots, n\}$$

son base de $\text{End}(V)$.

$$\mathcal{M}(S) = (b_{p,q})_{p=1, \dots, n, q=1, \dots, n}$$

□

1.3.4. Invertibilidad

Definición 1.3.4. $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se dice invertible si existe $S : W \rightarrow V$ tal que

$$S \circ T = I_V, T \circ S = I_W \tag{1.1}$$

Cuando T es invertible, denotamos T^{-1} con su inversa

$$T \text{ invertible} \iff T \text{ es inyectiva y es sobreyectiva}$$

Observación 1.3.1.

1. No todo $T \in \text{End}(V) \setminus \{0\}$ es invertible

2. En el caso $V = W$, I_V es neutro para \circ
3. Puede ser que $S \circ T = I$ y $T \circ S \neq I$

Terorema 1.3.3. Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si T es invertible entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$

Demostración. Queremos probar $T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2)$
Sean $v_1 = T^{-1}(w_1), v_2 = T^{-1}(w_2)$

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad /T^{-1}()$$

$$v_1 + \lambda v_2 = T^{-1}(T(v_1) + \lambda T(v_2))$$

$$T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2) = T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) \quad \square \quad (1.2)$$

Proposición 1.3.4. Sean $T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow Z$ lineales e invertibles. Entonces $S \circ T$ es lineal e invertible; mas aun

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} \quad (1.3)$$

Demostración. $S \circ T$ es lineal (visto lunes).

Invertible: basta probar:

$$(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = I_Z$$

$$(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = T^{-1} \circ (S^{-1} \circ S) \circ T = T^{-1} \circ T = I_V$$

□

Definición 1.3.5. Decimos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es no singular si $\ker T = [0]$. Notar ademas que T no singular si solo si inyectiva

$$Tv_1 = Tv_2 \iff T(v_1 - v_2) = 0 \quad (1.4)$$

Terorema 1.3.5. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

T no-singular $\iff T$ transforma conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes, es decir, $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ l.i. $\implies \{Tv_1, \dots, Tv_k\} \subseteq W$ l.i.

Terorema 1.3.6. □ Sean V, W finito-dimensionales tal que $\dim V = \dim W$. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ entonces las siguientes son equivalentes:

- I) T es invertible
- II) T es no-singular
- III) T es sobreyectiva
- IV) Para toda base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V , $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es base de W .

v) Existe $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V tal que $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es base de W

Observación 1.3.2.

1. Si $\dim V \neq \dim W$

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n < m$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

es inyectiva, pero no sobreyectiva

2. $V = W, \dim V = +\infty$

$$R : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$(x_1, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots)$$

es inyectiva, pero no sobreyectiva

Demostración. (i) \implies (ii)

$$(ii) \ker T = \{0\} \iff T(V) = W$$

(ii) \implies (iii)

(iii) T es sobre. Por TNI

$$\dim T = n \implies \dim \ker T = 0 \implies T \text{ no singular}$$

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V , por el Teo. anterior $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es base de W □

1.4. Isomorfismos

Definición 1.4.1. Isomorfismos Sean V, W espacio vectorial sobre \mathbb{F} . Decimos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es un isomorfismo si es invertible. En tal caso, diremos que V y W son isomorfos

Ejemplos:

1. \mathbb{F}^{n+1} y $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ son isomorfos

$$T : \mathbb{F}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i + a_0$$

2. (Coordenadas baricéntricas): Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V

$$(\forall v \in V) v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

$$[\cdot]_B : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [v]_B$$

3. V, W finito dimensional sobre \mathbb{F} , con

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$\mathcal{M}(\cdot, B_V, B_W) : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathbb{F}^{n \times m}$$

$$T \mapsto \mathcal{M}(T, B_V, B_W)$$

es un isomorfismo (ejercicio)

Terorema 1.4.1. *Dos espacios finito dimensionales V, W (sobre \mathbb{F} son isomorfos si solo si $\dim V = \dim W$*

Demostración. Sean $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W .

\implies Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ isomorfismo

$$\{Tv_1, \dots, Tv_n\} \subseteq W$$

Es un conjunto linealmente independiente (un Teorema)

$$\implies n \leq \dim W = m$$

Tomando T^{-1} , (que también es isomorfismo) tomemos

$$\{T^{-1}w_1, \dots, T^{-1}w_m\} \subseteq V$$

Es linealmente independiente

$$\implies m \leq \dim V = n$$

$$\implies m = n$$

\Leftarrow Suponemos $n = m$, sea T la unica transformación lineal tal que

$$Tv_i = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Por el teorema \square , parte (v) \implies (i) tenemos que T es isomorfismo. \square

1.4.1. Matrices representantes

Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} , y sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W .

$$[Tv_j]_{B_W} = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \iff T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i \quad (\forall v \in V \exists a_{ij})$$

Luego, par todo $v \in V$

$$v = \sum_j \lambda_j v_j \quad (\exists \lambda_j) \iff [Tv]_{B_V} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j)$$

De esta forma,

$$[T(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$$

Notemos que A coincide con la matriz representante de T con respecto a las bases B_V y B_W .

$$\mathcal{M}(T, B_V, B_W) = M$$

Evaluar (*) para $v = v_j$

$$[T(v_j)]_{B_W} = A \cdot [v_j]_{B_V} = A \cdot e_j$$

$$\implies T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot w_i$$

$$\therefore T(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j) = \sum_j \sum_i \lambda_j a_{i,j} w_i$$

$$T(v) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j} \left(\sum_q \lambda_q v_q \right) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$$\therefore T = \sum_i \sum_j a_{i,j} E^{i,j}$$

1.4.2. Cambios de Base:

Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ 2 bases (ordenadas).

Como se relacionan $[\cdot]_{B'}$ y $[\cdot]_B$?

$$T : V \rightarrow \mathbb{F}^n, U : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto [v]_B, v \mapsto [v]_{B'}$$

Notemos que $T \circ U^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n, [v]_B \mapsto [v]_{B'}$ es un isomorfismo.

Sea P la matriz representante de $T \circ U^{-1}$ con respecto a la base canónica en \mathbb{F}^n

Usando (*):

$$[v]_B = P \cdot [v]_{B'} \quad \forall v$$

Sea ahora $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Tomemos:

$$[T(v)]_B = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot [v]_B$$

$$\begin{aligned}
P \cdot [T(v)]_{B'} &= \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P \cdot [v]_{B'} \\
[T(v)]_{B'} &= (P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P) \cdot [v]_{B'} \\
\implies \mathcal{M}_{B',B}(T) &= (P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P)
\end{aligned}$$

Pregunta: Como calcular P ?

$$\begin{aligned}
[v'_j]_B &= P \cdot [v'_j]_{B'} = P \cdot j \\
P &= [[v'_1]_B | [v'_2]_B | \dots | [v'_n]_B] \oplus
\end{aligned}$$

Terorema 1.4.2. Sea V espacio vectorial finito-dimensional con bases ordenadas $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$. Sea $T \in \text{End}(V)$. Luego

$$\mathcal{M}_{B',B}(T) = P^{-1} \mathcal{M}_{B,B}(T) P$$

Definición 1.4.2. $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ son similares si $\exists P$ invertible tal que:

$$A = P^{-1} B P$$

1.5. Productos de Espacios Vectoriales

Definición 1.5.1. Sean V_1, \dots, V_m espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Definimos el espacio producto como

$$V = V_1 \times \dots \times V_m = \{(v_1, \dots, v_m) : v_i \in V_i (\forall i = 1, \dots, m)\}$$

1. Suma: $(v_1, \dots, v_m) + (v'_1, \dots, v'_m) = (v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m)$
2. Producto por escalar: $\lambda \cdot (v_1, \dots, v_m) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_m)$

Proposición 1.5.1. $V \times \dots \times V_m$ con suma y producto escalar es un espacio vectorial.

Demostración. Ejercicio: similar a \mathbb{F}^n □

Proposición 1.5.2. Sean V_1, \dots, V_m espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Entonces $V_1 \times \dots \times V_m$ es finito-dimensional y

$$\dim(V_1 \times \dots \times V_m) = \sum_{i=1}^m \dim V_i$$

Demostración. Dado $i = 1, \dots, m$ sea

$$B_{V_i} = \{V_{i,1}, \dots, V_{i,n_i}\}$$

Base de V_i . Ahora sea

$$B = \bigcup_{i=1}^m \{(0, \dots, 0, v_{ij}, \dots, 0) : j = 1, \dots, n_i\}$$

Probaremos que B es base de $V_1 \times \dots \times V_m$. Notemos que esto basta:

$$\dim V_1 \times \dots \times V_m = |B| = \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m \dim V_i$$

- B genera: Sea $v \in V \times \dots \times V_m$, entonces

$$v = (v_1, \dots, v_m) \quad \text{donde } v_i \in V_i$$

Como B_{V_i} es base de V_i :

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot v_{i,j} \\ v &= \left(\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} v_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{m,j} v_{m,j} \right) \\ v &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} (0, \dots, 0, v_{i,j}, 0, \dots, 0) \in \langle B \rangle \end{aligned}$$

- B es linealmente independiente (ejercicio)

□

1.5.1. Productos y Sumas directas

Terorema 1.5.3. Sean U_1, \dots, U_m subespacios vectoriales de V . Definimos la transformación lineal

$$\Gamma : U_1 \times \dots \times U_m \rightarrow U_1 + \dots + U_m$$

$$\Gamma(u_1, \dots, u_m) = u_1 + \dots + u_m$$

Entonces, $U_1 + \dots + U_m$ es suma directa si solo si Γ inyectiva

Observación 1.5.1. Notar que Γ siempre es sobreyectiva

Demostración.

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ inyectiva} &\iff \ker \Gamma = \{0\} \\ &\iff [u_1 + \dots + u_m = 0 \iff (u_1, \dots, u_m) = (0, \dots, 0)] \\ &\iff U_1 + \dots + U_m \text{ es directa} \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Parte II

2.1. Polinomios

Definición 2.1.1 (Grado). Si $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ con $a_n \neq 0$, entonces $gr(p) = n$. Si $p(z) = 0$ entonces $gr(p) = -\infty$

Proposición 2.1.1.

2.1.1. Algoritmo de la división

Recordemos que si p, s son enteros, no negativos, con $s \neq 0$, existen únicos q, r enteros no negativos tal que:

$$p = s \cdot q + r$$

Donde $r < s$.

De ahora en adelante, $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ a menos que se diga lo contrario.

Teorema 2.1.2 (División de polinomios). Sean $p, s \in \mathbb{F}[z]$ con $s \neq 0$. Entonces existen únicos polinomios $q, r \in \mathbb{F}[z]$ tales que:

$$p = q \cdots + r \implies n = gr(q) + m$$

Con $gr(r) < gr(s)$.

Demostración. Sean $n = gr(p), m = gr(s)$. Definamos

$$T : \mathcal{P}_{n-m}(\mathbb{F}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(q, r) \mapsto q \cdot s + r$$

Probaremos que T es una transformación lineal biyectiva. Notar que esto es suficiente para concluir el Teorema.

- T es lineal

$$T((q_1, r_1) + \lambda(q_2, r_1)) = T(q_1, r_1) + \lambda T(q_2, r_2)$$

- T inyectivo: Basta probar que $\ker T = \{0\}$. En efecto, si (q, r) son tales que:

$$q \cdot s + r = 0$$

$$q \cdot s = -r$$

Comparando grados:

$$\text{gr}(LI) = \text{gr}(q) \cdot m, \text{gr}(LD) = \leq m - 1$$

$$\implies q = 0 \implies r = 0$$

- T sobreyectiva: Por el TNI, y como $\ker T = \{0\}$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1})$$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m}) + \dim(\mathcal{P}_{m-1}) = n + 1$$

$$\therefore \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = n + 1 = \dim \mathcal{P}_n$$

Lo que implica que T es sobreyectiva.

□

Observación 2.1.1. La demostración del Teo. Anterior entrega un "algoritmo" para dividir polinomios. Resolver la ecuación lineal no-homogénea

$$T(q, r) = p$$

Asignando bases a la partida y la llegada, se obtendrá un sistema lineal

$$Ax = b$$

2.1.2. Raíces de Polinomios

El estudio de la ecuación $p(z) = 0$ es sumamente útil para analizar un polinomio $p \in \mathbb{F}$

Definición 2.1.2 (Raíz). $\lambda \in \mathbb{F}$ se dice raíz de un polinomio si

$$p(\lambda) = 0$$

Definición 2.1.3 (Factor). $s \in \mathbb{F}[z]$ se dice factor de $p \in \mathbb{F}[z]$ si existe un polinomio $q \in \mathbb{F}[z]$ tal que:

$$p = q \cdot s$$

Terorema 2.1.3 (Raíces definen factores de grado 1). *Sea $p \in \mathbb{F}[z]$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces $p(\lambda) = 0 \iff (z - \lambda)$ es factor de p*

Demostración. \Leftarrow $(z - \lambda)$ factor de p , entonces $\exists q \in \mathbb{F}[z]$ tal que

$$p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z) \forall z \in \mathbb{F}$$

$$\implies p(\lambda) = 0 \cdot q(\lambda) = 0$$

implies. Por el algoritmo de la división para p y $s(z) = z - \lambda$, tenemos que $\exists! r \in \mathbb{F}[z]$ con $\deg(r) < 1 \implies r \in \mathbb{F}$ tal que

$$p(z) = q(z) \cdot (z - \lambda) + r$$

$$\implies 0 = p(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r$$

$$\therefore r = 0$$

□

Corolario (Un polinomio tiene tantas raíces como su grado). *Sea $p \in \mathbb{F}[z]$ un polinomio de grado $m \geq 0$. Entonces p tiene a lo más m raíces distintas sobre \mathbb{F}*

Demostración. Por inducción en m .

$m = 0$: $p(z) = a_0 \neq 0$. Entonces p tiene 0 raíces.

$m - 1 \implies m$: Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$ con $a_m \neq 0$

Caso 1: p no posee raíces

Caso 2: p sí posee raíces. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ raíz de p

$$\therefore \exists q \in \mathbb{F}[z] : p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z)$$

Claramente $\deg(q) = m - 1$. Por inducción, q posee a lo más $m - 1$ raíces en \mathbb{F} . Por lo tanto:

$$\# \text{ raíces de } p \leq \# \text{ raíces de } (z - \lambda) + \# \text{ raíces de } q = m$$

□

2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios

Queremos entender la estructura de $T \in \text{End}(V) = \mathcal{L}(V)$ supongamos que

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

y

$$T|_{U_1}, T|_{U_2}, \dots, T|_{U_m}$$

Definición 2.2.1 (Subespacio invariante). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un subespacio U de V se dice invariante para T si $TU \subseteq U$

$$\implies TU = \{w \in V : w = Tv\}$$

Propiedad: Sea $p, q \in \mathbb{F}[z]$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces:

1. $(p \cdot q)(T) = p(T) \cdot q(T)$
2. $p(T) \cdot q(T) = q(T) \cdot p(T)$

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ y $q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$

$$(p \cdot q)(z) = \left(\sum_{j=0}^n a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^m b_k z^k \right)$$

$$p \cdot q(z) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k z^{j+k}$$

$$\implies (p \cdot q)(T) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k T^{j+k}$$

$$(p \cdot q)(T) = \left(\sum_j a_j T^j \right) \left(\sum_k b_k T^k \right)$$

□

Teorema 2.2.1 (Existencia de vps). *Todo operador en un espacio vectorial complejo de dimensión finita y > 0 , posee un valor propio.*

Demostración. Sea $n = \dim V > 0$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea ahora $v \neq \mathbf{0}$. Entonces

$$\{v, Tv, T^2v, \dots, T^n v\}$$

es linealmente dependiente. Luego existen a_0, \dots, a_n tal que $a_0 v + a_1 Tv + \dots + a_n T^n v = 0$

$$\therefore p(T)v = 0 \quad \text{con } \text{gr}(p) = n$$

Por el teorema fundamental del algebra, p puede ser factorizado

$$p(z) = C(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$$

Por ende:

$$p(T)v = 0 = C(T - \lambda_1 I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n I)v$$

\implies Existe $j = 1, \dots, n$ tal que $\text{Im}(T - \lambda_j I) \neq V \therefore \lambda_j$ es valor propio de T

□

2.3. Matrices triangulares superiores

Recordemos que dada $T \in \mathcal{L}(V)$ y una base B la matriz representante de T con respecto a B es

$$\mathcal{M}_B(T) = (a_{i,j})_{i,j \in [n]}$$

tal que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i$$

Notemos, por ejemplo, que en el caso complejo siempre existe una base B tal que la matriz representante posee la siguiente estructura

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

En efecto, sea $\lambda \in \mathbb{F}$ valor propio de T con vector propio asociado $v \neq 0$.

Sea B una base que contiene a v . Si hacemos esto

$$Tv = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.3.1 (Matriz triangular superior). Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ se dice triangular superior si

$$a_{i,j} = 0 \forall i > j$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Proposición 2.3.1. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y v_1, \dots, v_n base (ordenada) de V . Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) La matriz representante $\mathcal{M}_B(T)$ es Δ superior
- b) $Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle \forall j = 1, \dots, n$
- c) $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$ es invariante bajo $T, \forall j = 1, \dots, n$

Demostración. □

Proposición 2.3.2 (Invertibilidad a través de representaciones matriciales). *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que posee una representación Δ superior con respecto a cierta base. Entonces T invertible \iff las entradas diagonales de la matriz son no nulas.*

Demostración. Sea B base tal que

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

\Leftarrow Por (*)

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\therefore v_1 = T \left(\frac{v_1}{\lambda_1} \right) \in \text{Im}(T)$$

Nuevamente, por (*)

$$Tv_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\lambda \neq 0 \implies v_2 = T \left(\frac{v_2}{\lambda_2} \right) \in \text{Im}(T)$$

Por inducción:

$$Tv_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$v_j = T \left(\frac{v_j}{\lambda_j} \right) + \frac{a_1}{\lambda_j} v_1 + \dots + \frac{a_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} \in \text{Im}(T)$$

\implies Sabemos que $\forall j = 1, \dots, n$

$$Tv_j = a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$\implies Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

Si algún $\lambda_j = 0$:

$$Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

$$T(\langle v_1, \dots, v_j \rangle) \subseteq \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

En efecto □

Corolario (Valores propios de operador a través de representación Δ superior). *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con representación Δ superior*

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

con B base de V . Entonces los valores propios de T son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Demostración.

$$T_\lambda I \quad \text{no es biyectiva}$$

$$\mathcal{M}_B(T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\mathcal{M}_B(T - \lambda I) = \mathcal{M}_B(T) - \lambda \mathcal{M}_B(I)$$

Por el Teo (\cdot)

$T - \lambda I$ invertible si solo si $\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda \neq 0$

λ es valor propio si solo si $\lambda_1 = \lambda$ o $\lambda_2 = \lambda \dots \lambda_n = \lambda$

□

2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales

Definición 2.4.1 (Diagonal de una matriz diagonal). Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$. Definimos $Diag(A) \in \mathbb{F}^{n \times m}$

$$(Diag(A))_{i,j} =$$

Y decimos que A es diagonal si

$$A = Diag(A)$$

Equivalentemente, A es diagonal si

$$a_{i,j} = 0 \forall i \neq j$$

Claramente, toda matriz diagonal es Δ superior, entonces los valores propios de A son los valores en la diagonal.

Definición 2.4.2 (Subespacio Propio). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. El subespacio propio de T correspondiente a λ , $E(\lambda, T)$, se define como

$$E(\lambda, T) = \ker(T - \lambda I)$$

es decir, el conjunto de vectores propios asociados a λ , más el cero.

Observación 2.4.1. λ es valor propio de $T \iff E(\lambda, T) \neq \{0\}$

Proposición 2.4.1 (Suma de subespacios propios es directa).

Capítulo 3

Espacios de Producto Interno

Definición 3.0.1 (Producto Interno). Un producto interno sobre un espacio vectorial V es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

- I) Positividad: $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$
- II) Definitividad: $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \mathbf{0}$
- III) Aditividad por la izquierda: $\forall u, v, w \in V$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

- IV) Homogeneidad: $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall u, v \in V$
- V) Simetría conjugada: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

Observación 3.0.1. En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}, (V) \iff \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Ejemplos:

- a) El producto interno Euclideo sobre \mathbb{F}^n

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + \dots + z_n \cdot \overline{w_n}$$

- b) Si $c_1, \dots, c_n > 0$, entonces

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \cdot z_i \cdot \overline{w_i}$$

- c) Si $V = \mathcal{C}[-1, 1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

d) Si $V = \mathbb{R}[x]$ entonces

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

Integrales

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y $f \geq 0$ definimos la integral de f como el "área bajo la curva".

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)$$

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{N} \cdot i$$

$$i = 0, \dots, N$$

1.

Teorema 3.0.1 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que para $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se cumple $F'(x) = f(x)$ (primitiva).*

Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^J \int_{A_j=[a_j, b_j]} f(x) dx$$

2. Linealidad:

$$\mathcal{I} : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$$

$$f(x) \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

es una tra lineal.

Ejemplos:

1. Monomio:

$$p(t) = t^k \quad P(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

P es primitiva de p :

$$P'(t) = t^k = p(t)$$

$$\therefore TFC$$

$$\int_0^t p(s) ds = P(t) - P(0)$$

2. Polinomios:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$$\int_0^t p(s) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^t s^k ds$$

3. Exponenciales:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} \quad (\lambda \neq 0) \\ F(x) &= \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \\ \therefore \int_0^x e^{\lambda t} dt &= F(x) - F(0) = \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} \end{aligned}$$

4. Seno-Coseno:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ f(x) &= e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x \\ F(x) &= \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} \\ \therefore \int_0^x f(t) dt &= \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} \\ \int_0^x f(t) dt &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + i \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} \\ \implies \int_0^x \sin \lambda t dt &= \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} \\ \int_0^x \cos \lambda t dt &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \end{aligned}$$

3.1. Espacio de producto interno

Definición 3.1.1 (Espacio de producto interno). $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de producto interno (e.p.i.) si V es un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es producto interno sobre V .

Proposición 3.1.1 (Propiedades básicas).

(a)

$$\forall u \in V \quad v \mapsto \langle v, u \rangle$$

Es una transformación lineal de V hacia \mathbb{F}

(b)

$$\langle 0, u \rangle = 0 \quad \forall u \in V$$

(c)

$$\langle u, 0 \rangle = 0 \quad \forall u \in V$$

(d)

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$$

(e)

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

3.2. Norma

Definición 3.2.1 (Norma). Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de producto interno, definimos la norma asociada como:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Propiedades: Sea $v \in V$

(a)

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

(b)

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Intuición geométrica:

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$

Por teo del coseno

$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

$$\|v - u\|^2 = \langle v - u, v - u \rangle = \|v\|^2 - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \|u\|^2$$

$$\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle$$

Reemplazando:

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$$