Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2019

Ánalisis Funcional - MAT2555

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Preliminares

Contenidos

1) Espacios de Banach: Definiciones Básicas, Hahn-Banach, Consecuencias del Teorema de Bairi

2) Espacios de Hilbert: Definiciones, Bases Hilbertianas, Proyección Dual de un Hilbert, Lax-Milgram

3) Topologías débiles: Espacios reflexivos

4) Teoría Espectral

Textos

- Reed and Simon (Functional Analysis)
- Rudin (Functional Analysis)
- Hain Brenzin

Interrogaciones

3 Interrogaciones + 1 Examen. Si hay exención sería con 6

Fechas

I1: Semana 23-27/9

I2: Semana 14-19/10

I3: Semena 18-22/11

Ex: Semana 2-6/12

Parte I

Espacios de Banach

1. Introducción a los Espacios de Banach

Definición 1.1 (Espacio de Banach)**.** Sea E un e.v., una función $\|\cdot\|$ tq

- $\|x\| \geq 0 \forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y, \in R$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall x \in E \forall \lambda \in k$

Ejemplo: 1.1. En $\mathbb{C}^n$, si $z \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ $\|z\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p\right)^{1/p}$

Ejemplo: 1.2. Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es e. de medida y si $1 \leq p < \infty$, $E = L^p(X)$; La norma es $\|[f]\| = \left(\int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$

Observación 1.1. Si $\|\cdot\|$ es norma en E, entonces $d_E(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica o distancia en E.

Definición 1.2 (Espacio de Banach)**.** E e.v. con norma $\|\cdot\|$ se dice espacio de Banach si es completo con respecto a d_E.

Ejemplo: 1.3. Todos los anteriores son Banach

Ejemplo: 1.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $E = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{continúa tq } \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty\}$ en E, $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$ es norma

Ejemplo: 1.5. Sea E un e.v. con norma, y sea $x_n \in E$ tal que $\sum_{k=1}^\infty |x_n| < \infty$
Q: Si $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, ¿qué podemos decir de s_n?
Si $1 \leq m < n$ entonces $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n x_k$, luego $\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^\infty \|x_k\|$
De aquí no es difícil ver que, como $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$. Entonces s_n es de Cauchy. Ciertamente s_n tiene límite en E cuando E es de Banach.

Definición 1.3 (Convergencia Absoluta)**.** Un E e.v. con norma, si $x_n \in E$ es tq $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$, diremos que la serie es absolutamente convergente

Definición 1.4 (Convergencia en Norma)**.** Si $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ es convergente en E converge respecto a d_E, diremos que s_n converge en norma

Proposición 1.1. *Si E es Banach y $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, entonces $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ converge en norma. (Notación: $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$) Recíprocamente si E e.v. con norma y si cada serie absolutamente convergente es también convergente en norma, entonces E es Banach.*

Demostración. $\Longleftarrow$: Listo anteriormente.
$\Longrightarrow$: Sea x_n de Cauchy en E. Claramente, basta encontrar x_{n_k} convergente.
Como x_n es de Cauchy, existe x_{n_k} tq $\left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| \leq \frac{1}{2^k}$ si esto es verdad.

$$x_{n_k} - x_{n_1} = \sum_{j=2}^{k} (x_{n_j} - x_{n_{j-1}})$$

Pero $\sum_{j=2}^{\infty} \left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$ así que $x_{n_k} - n_{n_1} \to x \implies x_{n_k} \to x + n_{n_1}$.
Para ver que $\exists x_{n_k}$ con $\left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| \leq \frac{1}{2^k}$, sea $k = 1$, para $\varepsilon = \frac{1}{2} \exists n_1$ tq $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2} \forall n, m \geq n_1$, esto da n_1. Si $1 \leq n_1 < \ldots < n_k$ son tq $\left\|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\right\| \leq \frac{1}{2^j}$, $j = 1, \ldots, k-1$, $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k} \forall n, m \geq n_k$, sea $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$. Sea $n_{k+1} > n_k$ tq $\left\|x_{n_{k+‘'}} - x_{n_k}\right\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Esto construye x_{n_k}. □

Ejemplo: 1.6. $M^n(\mathbb{R})$ matrices de $n \times n$ en $\mathbb{R}$, $A \in M^n(\mathbb{R})$ entonces $\|A\| = \left(\operatorname{tr}(A^T A)\right)^{1/2}$

Definición 1.5 (Transformación Lineal)**.** Sean E, F e.v. (sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$). Una transformación lineal es una función $T : E \to F$ tq $T(x + \lambda y) = Tx + \lambda T y \forall x, y \in E \forall \lambda$.

Teorema 1.2 (Caracterización de continuidad de funciones lineales)**.** *Sean E, F e.v.n., y sea $T : E \to F$ una transformación lineal. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) T es continua en x para todo $x \in E$.

2) T es continua en 0_E

3) $\sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F < \infty$

4) $\exists c > 0 \forall x \in E : \|Tx\|_F \leq c \|x\|_E$

Demostración. Se demostrará $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1$
$1 \implies 2$ es trivial
Para $2 \implies 3$, sea $\varepsilon = 1$, y un $\delta > 0$ tq

$$\|x - 0_E\|_E < \delta \implies \|Tx - T(0)\|_F < 1$$

Como T es lineal tenemos que $Tx - T(0) = Tx$, y además se tiene que $x - 0_E = x$. Luego,

$$\|x\|_E < \delta \implies \|Tx\|_F < 1$$

Ahora, para todo $x \in E$ tq $\|x\| = 1$, $\|\delta x\| = \delta \|x\|$. Con esto,

$$\left\| \frac{\delta}{2} x \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Así, por lo anterior tenemos que

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2} x \right) \right\| < 1$$

Eso significa que para todo $x \in E$ tq $\|x\| = 1$ se tiene que

$$\|Tx\| < \frac{2}{\delta}$$

Con lo que tenemos lo pedido.
Para $3 \implies 4$, sea $c_0 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$, entonces para todo $x \in E$ distinto de cero, tenemos que

$$\left(\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \implies \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq c_0 \right) \implies \|Tx\|_F \leq c_0 \|x\|_E$$

Con lo que se llega a lo que queríamos.
Por último, para $4 \implies 1$, sea $c > 0$ tq $\|Tx\|_F \leq c \|x\|_E$. Luego,

$$\|Tx - Ty\|_F = \|T(x-y)\|_F \leq c \|x - y\|_E$$

Por lo que T es Lipschitz, por lo que es continua. □

Definición 1.6 (Norma de operador/Funcional Acotado)**.** Para E, V e.v.n $T : E \to F$ que cumple 1-2-3-4 se llama funcional acotado (u operador lineal acotado); se define $\|T\|_{E,F} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \text{ínf}\{c > 0 : \|Tx\| \leq c \|x\| \, \forall x \in E\}$

Definición 1.7. Para E, V e.v.n. sea $\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \to F \text{ lineal, acotado}\}$

Proposición 1.3. $\|\cdot\|_{E,F}$ *es norma en* $\mathcal{L}(E, F)$

Demostración. Claramente cumple todo en base a la definición □

Proposición 1.4. *Si F es Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es Banach con respecto a* $\|\cdot\|_{E,F}$

Demostración. Sean $T_n : E \to F$ lineales continuas, Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_{E,F}$. Observemos que, para cada $x \in R$ fijo, $y_n = T_n x$ es Cauchy en F; pues $\|y_n - y_m\|_F = \|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$.
Si $x = 0$, y_n es constante, por lo que es Cauchy.
Si $x \neq 0$, sea $\varepsilon > 0$. T_n es Cauchy $\implies \exists n_0 : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \forall n, m \geq n_0$. Así: $y_n = T_n x$ es

de Cauchy en F, como F es completo, $y_n \to y \equiv Tx$. En otras palabras, $T_n x \to Tx$.
Vamos a ver que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y que $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Primero: $\forall x \in R \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T_n(x + \lambda y) = T_n x + \lambda T_n y \to T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty$.
Segundo: (Ejercicio) Como T_n es Cauchy, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = C < \infty$. Entonces $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq C \|x\| \to \|Tx\| \leq C \|x\|$.
Último: Verificar que $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, sea ε, n_0 tq $\|T_n - T_m\| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$. Entonces $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \ \forall n, m \geq n_0 \forall x \in E$. Así $\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\| \ \forall n \geq n_0 \forall x \in E$ por lo que $\|T - T_n\| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ □

Definición 1.8 (Dual)**.** Si E es e.v.n., definimos su dual (topológico) como:

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C}) \text{ o } \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

Ejemplo: 1.7. Tomemos $E = \mathbb{R}^n$, y sean $S, T \in \mathcal{L}(E)$.

$$\|S \circ T(x)\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

por lo que

$$\|S \circ T\| \leq \|T\| \|S\|$$

Entonces $\left\|T^k\right\| \leq \|T\|^k$

Proposición 1.5. *Si E es Banach, $T \in \mathcal{L}(E), \|T\| < 1$, $I - T$ es invertible, con inversa continua, entonces* $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$

Demostración. Sale con truco típico. □

Ejemplo: 1.8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $\kappa \in L^2(\Omega \times \Omega; \mathbb{R})$. Definamos $T_\kappa : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ donde $f \mapsto T_\kappa(f)(x) = \int_\Omega \kappa(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y$
T_κ es lineal. Veamos que $T_\kappa(f) \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \left| \int_\Omega \kappa(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \int_\Omega \kappa^2(x, y)\,\mathrm{d}y \int_\Omega f^2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

O sea, ya que $\int_\Omega |T(f)(x)|^2\,\mathrm{d}x = \|T_\kappa f\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$\|T_\kappa f\| \leq \|\kappa\| \|f\|$$

Definición 1.9. Sea E e.v.n., $p : E \to \mathbb{R}$ se dice semi-norma si:

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in E$

- $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x) \forall x \in E \forall \lambda$

Ejemplo: 1.9. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $\mathcal{C}' = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ continuas, con derivadas continuas acotadas$\}$, $p(f) = \int_\Omega |\nabla f|$ es una semi-norma.

1.1. Problema

Sea E e.v.n. sobre $\mathbb{R}$, $p : E \to \mathbb{R}$ semi-norma, $F \subseteq E$ s.e.v. y $\varphi : F \to \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi(x) \leq p(x) \forall x \in F$

1.1.1. Pregunta

$\exists \varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi_1(x) = \varphi(x) \forall x \in F$ y $\varphi(x) \leq p(x) \forall x \in E$?

1.1.2. Primero

Sea F s.e.v. de E, $F \subsetneq E$; tomemos $x \in E \setminus F$ (en particular $x \neq 0$), y consideramos $F_1 = \langle \{x\} \rangle \oplus F$. Entonces $\forall y \in F_1 \exists! \lambda \in \mathbb{R}, z \in F$ tq $y = \lambda x + z$. Si $\varphi_1 : F_1 \to \mathbb{R}$, entonces la linealidad implica que $\varphi_1(y) = \lambda \varphi_1(x) + \varphi_1(z)$ y si φ_1 es extensión de φ, $\varphi_1(y) = \lambda \varphi_1(x) + \varphi(z)$. En otras palabras, para extender φ a F_1 basta escoger $\varphi_1(x) \in \mathbb{R}$, pero tenemos que escogerlo de modo que $\lambda \varphi_1(x) + \varphi(z) \leq p(\lambda x + z) \, \forall z \in F$.

Lema 1.6. *Para E, p, F, φ como se acaban de describir.*

$$A = \sup_{\substack{z \in F \\ \alpha > 0}} \left(\frac{1}{\alpha} \left(-p(z - \alpha x) + \varphi(z) \right) \right) \leq \inf_{\substack{z \in F \\ \alpha > 0}} \left(\frac{1}{\alpha} \left(p(z + \alpha x) - \varphi(z) \right) \right) = B$$

Demostración. Se tiene $\forall \alpha, \beta > 0$, $\forall z_1, z_2 \in F$

$$\begin{aligned} \alpha \varphi(z_1) + \beta \varphi(z_2) &= (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha z_1}{\alpha + \beta} + \frac{\beta z_2}{\alpha + \beta} \right) \\ &= (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha (z_1 - \beta x)}{\alpha + \beta} + \frac{\beta (z_2 + \alpha x)}{\alpha + \beta} \right) \\ &\leq \alpha p(z_1 = \beta x) + \beta p(z_2 + \alpha x) \end{aligned}$$

Con esto se puede escribir

$$\begin{aligned}
\alpha\varphi(z_1) - \alpha p(z_1 - \beta x) &\leq -\beta\varphi(z_2) + \beta p(z_2 + \alpha x) \\
\frac{1}{\beta}\left(\varphi(z_1) - p(z_1 - \beta x)\right) &\leq \frac{1}{\alpha}\left(-\varphi(z_2) + p(z_2 + \alpha x)\right) \\
\sup_{\substack{\beta > 0 \\ z_1 \in F}} \frac{1}{\beta}\left(\varphi(z_1) - p(z_1 - \beta x)\right) &\leq \inf_{\substack{\alpha > 0 \\ z_2 \in F}} \frac{1}{\alpha}\left(-\varphi(z_2) + p(z_2 + \alpha x)\right)
\end{aligned}$$

□

Corolario. *$\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq si definimos $\varphi_1(x) = \mu$, con $x \in E \backslash F$, entonces $\varphi_1(y) \leq p(y)$ $\forall y \in F_1$*

Demostración. Sea $\mu \in [A, B]$, para $y = \alpha x + z, \alpha > 0, z \in F$,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y) &= \varphi_1(\alpha x + z) \\
&= \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\left(\varphi(z) - p(z + \alpha x)\right) + \mu\right) + p(\alpha x + z) \\
&\leq p(z + \alpha x)
\end{aligned}$$

Entonces $\varphi_1(\alpha x + z) \leq p(\alpha x + z)\, \forall \alpha > 0$. Para $-\alpha$, $\alpha > 0$ se usa una idea similar, pero con el supremo. □

Teorema 1.7 (Hahn-Banach real)**.** *Sea E e.v. sobre $\mathbb{R}$, $F \subseteq E$ s.e.v., p semi-norma, $\varphi : F \to \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi(x) \leq p(x) \forall x \in F$. Entonces existe $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi_1(x) = \varphi(x) \forall x \in F$, $\varphi_1(x) \leq p(x) \forall x \in E$*

Demostración. Sea E e.v. sobre $\mathbb{R}$, p semi-norma en E, $F \subseteq E$ s.e.v., si $\varphi : F \to \mathbb{R}$ es lineal y $\varphi(x) \leq p(x) \forall x \in F$. Entonces, existe $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ lineal, extensión de φ, tq $\varphi_1(x) \leq p(x) \forall x \in E$ □

Definamos $\mathcal{C} = \{(H, \psi) : H \text{ s.e.v. de } E, F \subseteq H, \psi : H \to \mathbb{R}, \psi\mid_F = \varphi, \psi(x) \leq p(x) \forall x \in H\}$. Para $(H_1, \psi_1), (H_2, \psi_2) \in \mathcal{C}$. Se define $(H_1, \psi_1) \leq (H_2, \psi_2)$ ssi $H_1 \subseteq H_2$ y $\psi_2\mid_{H_1} = \psi_1$. $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{C}$.

1) $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pues $(F, \varphi) \in \mathcal{C}$.

2) Si $\{(H_i, \psi_i)\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}$ es totalmente ordenado, $\exists (H_S, \psi_s)$ cota superior de $\{(H_i, \psi_i)\}_{i \in I}$, o sea $H_s \supseteq H_i \forall i \in I, \psi_s\mid_{H_i} = \psi_i$.

Para esto:
Sea $H_s = \bigcup_{i \in I} H_i$. H_s es s.e.v. de E pues si $x, y \in H_s, \lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\exists i, j \in I$ tq $x \in H_i, y \in$

H_j, como $\{(H_i, \psi_i)\}$ es totalmente ordenado, se tiene que $H_i \subseteq H_j$ o $H_j \subseteq H_i$. Ahora, s.p.d.g. $H_i \subseteq H_j \implies x, y \in H_j \implies x + \lambda y \in H_j \subseteq H_s$.
Definamos $\psi_s : H_s \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\psi_s(x) = \psi_i(x) \text{ si } x \in H_i$$

Esto esta bien definido, pues $\{(H_i, \psi_i)\}$ es totalmente ordenado. Además $\psi(x) \leq p(x) \forall x \in H_s$ pues todo ψ_i satisface esto.
Esto prueba que $(H_s, \psi_s) \in \mathcal{C}$ y que $(H_i, \psi_i) \leq (H_s, \psi_s) \forall i \in I$. Ahora, por el lemma de Zorn existe $(H_*, \psi_*) \in \mathcal{C}$ que es maximal. Esto es $((H, \psi) \in \mathcal{C} \wedge (H_*, \psi_*) \leq (H, \psi)) \implies (H_*, \psi_*) = (H, \psi)$.
<u>Afirmación:</u> $H_* = E$. Si no: $\exists x \in E \setminus H_*$, por lo que podemos extender H_* y ψ_*, lo que es una contradicción, ya que (H_*, ψ_*) es maximal. Con esto se tiene que

Corolario. *Sea E e.v.n. (sobre $\mathbb{R}$ por ahora), $\forall x \in E, x \neq 0, \exists \varphi \in E^*$ tq $\varphi(x) = \|x\|$ y $\|\varphi\| = 1$*

Demostración. Definamos $\varphi(\lambda x) = \lambda \|x\|$, $\varphi : \langle x \rangle \to \mathbb{R}$ es lineal y claramente $\varphi(\lambda x) \leq \|\lambda x\|$. Ahora usamos HB con $p(x) = \|x\|$. □

Teorema 1.8 (Hahn-Banach complejo)**.** *Hahn-Banach, pero sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración. La misma demostración, pero cambiar la frase $\forall x \varphi(x) \leq p(x)$ por $\forall x \, |\varphi(x)| \leq p(x)$ donde $|\cdot|$ es la norma en $\mathbb{C}$. □

Corolario. *Si $F \subseteq E$, $\overline{F} \neq E$ $\forall x \in E \setminus \overline{F}$ $\exists \varphi \in E^*$ tq $\varphi(z) = 0 \forall z \in F$ pero $\varphi(x) \neq 0$*

Demostración. Para todo $A \subseteq E$ y $x \in E$ se define:

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$$

Sea $x \in \overline{F}$, y sea $F_1 = \langle x \rangle \oplus F$. Se toma $y \in F_1$, $y = \lambda x + z$, $z \in F$. Se define $\varphi(y) = \lambda d(x, F)$ para $z \in F$ y $\lambda \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda x + z)| &= |\lambda| \, d(x, F) \\ &\leq |\lambda| \left\| x + \frac{1}{\lambda} z \right\| \end{aligned}$$

Con lo que $|\varphi(\lambda x + z)| \leq \|\lambda x + z\|$. O sea, $|\varphi(y)| \leq \|y\|$ para $y \in F_1$ y $\varphi(z) = 0 \forall z \in F$
Luego por HB $\exists \varphi' : E \to \mathbb{C}$, $\|\varphi'(y)\| \leq \|y\| \forall y \in E$ y además $\varphi'(x) = d(x, F) > 0$ para $x \notin \overline{F}$. □

Observación 1.2. Esta proposición dice que si $x \notin \overline{F}$ entonces $\exists \varphi \in E^*$ tq $\Re(\varphi(x)) > \Re(\varphi(y))$ para todo $y \in F$.

En ese espíritu uno puede probar que:
Si E es e.v.n., A, B convexos cerrados y disjuntos, con B compacto, $\exists \varphi \in E^*$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$ tq $\Re(\varphi(x)) \leq \alpha < \beta \leq \Re(\varphi(y)) \, \forall x \in A \, \forall y \in B$.

2. Consecuencias del Lema de Baire

2.1. Recuerdo

Sea X e.m. completo. Si $O_n \subseteq X$ es abierto denso en $X \forall n \in \mathbb{N}$, entonces su intersección $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ es densa.
Esto es equivalente a:
Si F_n es cerrado de interior vacío en X para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_N$ tiene interior vacío.

Teorema 2.1 (Banach Steinhaus o Teorema de la cota uniforme)**.** *Sean E, F Banach, y sean $T_i : E \to F$ lineales indexadas por $i \in I$. Supongamos que $\forall x \in E \, \exists c_x \geq 0$ tq $\|T_i x\|_F \leq c_x \, \forall i \in I$.*
En estas condiciones $\exists c \geq 0$ tq

$$\|T_i x\|_F \leq C \|x\|_E \qquad \qquad \forall x \in E, \, \forall i \in I$$

Equivalentemente $\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C \, \forall i \in I$

Demostración. Por hipótesis, $\forall x \in E \; \exists c_x \geq 0$ tq $\|T_i x\| \leq c_x \; \forall i \in I$. Esto dice que si definimos

$$B_n = \{x \in E \text{ tq } \|T_i x\| \leq n \forall i \in I\}$$

Entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = E$. Además, B_n son cerrados.
Por el lema de Baire, algún B_n tiene interior no vacío, digamos B_{n_0}. Entonces $\exists x_0 \in E$ y $\delta > 0$ tq $B_{2\delta}(x_0) \subseteq B_{n_0}$.
Entonces $\forall x \in E$, $x \neq 0$,

$$T_i(x) = \frac{\|x\|}{\delta} T_i \left(x_0 + \frac{\delta x}{\|x\|} - x_0 \right)$$

Como $x_0 + \frac{\delta x}{\|x\|} \in B_{2\delta}(x_0)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T_i x\| &= \frac{\|x\|}{\delta} \left\| T_i(x_0 + \frac{\delta x}{\|x\|}) - T_i x_0 \right\| \\
&\leq \frac{\|x\|}{\delta} \left(\left\| T_i \left(x_0 + \frac{\delta x}{\|x\|} \right) \right\| + \|T_i x_0\| \right) \\
&\leq \frac{2n_0}{\delta} \|x\|
\end{aligned}$$

Esto es, $\|T_i x\| \leq \frac{2n_0}{\delta} \|x\| \; \forall x \in E, \forall i \in I$. □

Teorema 2.2 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sean E, F Banach, sea $T : E \to F$ lineal continua y sobreyectiva. Entonces T es abierto, esto es, $T(O)$ es abierto en F para todo O abierto en E.*

Demostración. Sea $T : E \to F$ lineal, continua y sobreyectiva. Con E, F espacios de Banach. Basta probar que $T(B_t(x))$ es abierto en F $\forall x \in E, \forall t > 0$. Ya que dado V abierto, $V = \bigcup_{x\in V} B_{\delta(x)}(x)$ para $\delta(x) > 0$, y entonces:

$$\bigcup_{x\in V} T(B_{\delta(x)}(x)) = T(V)$$

Lo que sería un abierto. Ahora, se nota que $T(B_t(x)) = T(x) + T(B_t(0))$. Esto nos dice que basta ver que $T(B_t(0))$ sea abierto $\forall t > 0$.
Además, se ve que $h_t(T(B_1(0))) = T(B_t(0))$, por lo que basta que $T(B_t(0))$ sea abierto para algún $t > 0$.
Para eso, se demostrará que es suficiente que $T(B_t(0))$ tenga interior no vacío para que sea abierto. Si $T(B_t(0))$ tiene interior no vacío, entonces $\exists \delta > 0$, $y \in F$ tal que $D^F_{2\delta}(y) \subseteq T(B^E_t(0))$. De aquí, $\exists x \in B_t(0)$ tal que $T(x) = y$ y $\|x\| < t$. Con esto:

$$\begin{aligned}
B^F_{2\delta}(y) = T(x) + B^F_{2\delta}(0) \subseteq T(B^E_t(0)) \\
\implies B^F_{2\delta}(0) \subseteq T(-x + B^E_t(0)) \subseteq T(B^E_{2t}(0))^1
\end{aligned}$$

Es decir, $B^F_{2\delta}(0) \subseteq T(B^E_{2t}(0))$, lo que gracias a la dilatación $h_{\frac{\varepsilon}{2\delta}}$ es equivalente a decir que $\forall \varepsilon > 0 B^F_{\varepsilon}(0) \subseteq T(B_{\frac{t\varepsilon}{\delta}}(0))$.
Se usará lo anterior para probar que $T(B_t(0))$ es abierto. Sea $v \in T(B_t(0))$. Digamos que $T(u) = v$, con $u \in B_t(0)$.

Observación 2.1. $B^E_{t-\|u\|}(u) \subseteq B^E_t(0)$, así que $u + B^E_{t-\|u\|}(0) \subseteq B^E_t(0)$. Gracias a esto

[1] Esta última contención viene dada porque $\|-x + z\| \leq \|x\| + \|z\| \leq 2t$.

concluimos que $T(u) + T(B^E_{t-\|u\|}(0)) \subseteq T(B^E_t(0))$.

Ahora, escogiendo $\frac{t\varepsilon}{\delta} \leq t - \|u\|$, concluimos que $B^E_\varepsilon(T(u)) = T(u) + B^F_\varepsilon(0) \subseteq T(B^E_t(0))$.

□

Corolario. *Si E, F Banach, y $T : E \to F$ es lineal continua y biyectiva, entonces es bicontinua.*

Teorema 2.3. *Sea H Hilbert*

1) Si $\{e_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}$ son ortonormales completos en H. Entonces $\exists h : I \to J$ biyectiva.

2) H tiene al menos un conjunto ortonormal completo.

Demostración.

1) Sean $\{e_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}$ completos en H. Vamos a probar que $\exists z : I \to J$ inyectiva. Luego, similarmente existiría $\eta : J \to I$, por lo que por Cantor-Bernstein se tiene que $\exists h : I \to J$ biyectiva.
Para construir z, observemos que $\forall j \in J$, $I_j\{i \in I : \langle e_i, f_j\rangle \neq 0\}$ es numerable. Además, $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ pues si $i \notin I_j \forall j \in J$, entonces $\langle e_i, f_j\rangle = 0 \forall j \in J \implies e_i = 0$.
Definamos: para $i \in I$ escojamos un $j \in J$ tq $i \in I_j$. Enuramos $I_j = \{\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ y definamos $z : I \to I \times \mathbb{N}$ donde $i \mapsto (j, n)$ donde $i \in I_j$ y $i = \alpha_n$.
Afirmación: z es inyectivo. Para ver esto, sean $i_1, i_2 \in I$ distintos:

Caso 1 : $j_1 = j_2 = j$. Entonces $i_1, i_2 \in I_j = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_3, \dots\}$, luego (j, n_1) j, n_2 son distintos ya que $i_1 \neq i_2$. Así $z(i_1) \neq z(i_2)$

Caso 2 : $j_1 \neq j_2$, entonces $z(i_1) \neq z(i_2)$

Entonces, z es inyectiva, y como $\exists \eta : J \times \mathbb{N} \to J$ entonces $\eta \circ z : I \to J$ es inyectiva.

2) Sea $\mathcal{C} = \{\{e_i\}_{i\in I} \subseteq H : \{e_i\}_{i\in I} \text{ ortonormal}\}$. $\mathcal{C}$ es no vacía, ya que si $x \neq 0, e_x = \frac{x}{\|x\|}$ satisface lo pedido. Se toma el orden parcial dado por la inclusión en $\mathcal{C}$. Ahora, si $\mathcal{B}_i \in \mathcal{C} \forall i \in \Lambda$ y si $\{\mathcal{B}_{\rangle_{i\in\Lambda}}\}$ es totalmente ordenado por $\subseteq$. Se define $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{B}_i$. Claramente $\mathcal{B}$ es cota superior en $\{\mathcal{B}_i\}_{i\in\Lambda}$. Ahora por Zorn, se tiene un elemento maximal $\mathcal{B}^*$ en $\mathcal{C}$. Solo falta que $\mathcal{B}^*$ sea completo, si $\exists x \in H$ tq $\langle x, e\rangle = 0 \forall e \in \mathcal{B}^*$, con $x \neq 0$ entonces $\mathcal{B}^* \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ es ortonormal, pero esto contradice la maximalidad de $\mathcal{B}^*$.

□

Teorema 2.4. *Sea E Banach, E reflexiva ssi $\overline{B}_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es compacto en $\sigma(E, E^*)$*

Demostración. $\implies$: Hecho en clase anterior
$\impliedby$: Se toma un desvio por Hahn-Banach Geométrico $\square$

Teorema 2.5 (Hahn-Banach Geométrico)**.** *Sea E Banach*

1) *Si U, V son abiertos convexos, $U \cap V = \emptyset$, entonces $\exists \varphi \in E^*$ tq $\Re(\varphi(x)) < \Re(\varphi(y))$ $\forall x \in U \forall y \in V$.*

2) *Si C y K cerrados convexos en E, K compacto y $K \cap C = \emptyset$, entonces $\exists \varphi \in E^*, \delta > 0$ tq $\Re(\varphi(x)) + \delta \leq \Re(\varphi(y)) - \delta$ $\forall x \in C \forall y \in K$*

Para demostrar lo anterior, se usarán los siguientes lemas:

Lema 2.6. *Sea $V \subseteq E$, V abierto, convexo, $0 \in V$. Existe una función $P_v : E \to [0, \infty)$ tq*

1) *$P_V(\lambda x) = \lambda P_V(x)$ $\forall x \in E \forall \lambda > 0$*

2) *$P_V(x + y) \leq P_V(x) + P_V(y)$ $\forall x, y \in E$*

3) *$V = \{x \in E : P_V(x) < 1\}$*

Demostración. Definamos $P_V(x) = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in V\}$, verifiquemos $\forall x \in E$ el conjunto $\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in V\} \neq \emptyset$. Esto garantiza que el ínf existe.
<u>Para esto</u>: $0 \in V \implies \exists \delta > 0$ tq $B_\delta(0) \subseteq V$. Entonces $\forall x \in E$ se tiene que $\frac{\delta}{2\|x\|}x \in B_\delta(0) \subseteq V$. En particular $t = \frac{2\|x\|}{\delta} \in \{t > 0 : \frac{1}{t}x \in V\}$
Sea ahora $x \in E, \lambda > 0$.

$$\begin{aligned} P_V(\lambda x) &= \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}(\lambda x) \in V\} \\ &= \lambda \cdot \inf\{(t/\lambda) > 0 : \frac{1}{t//\lambda}x \in V\} \\ &= \lambda P_V(x) \end{aligned}$$

Para 2), es claro que $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \frac{1}{P_V(x)+\varepsilon}x \in V$. Sean $x, y \in E, \varepsilon > 0$. Definamos $\alpha = \frac{P_V(x)+\varepsilon}{P_v(x)+P_V(y)+2\varepsilon} \in [0,1]$, $1 = \alpha = \frac{P_V(y)+\varepsilon}{P_v(x)+P_V(y)+2\varepsilon} \in [0,1]$.
Entonces

$$\alpha \cdot \left(\frac{x}{P_V(x) + \varepsilon}\right) + (1 - \alpha)\left(\frac{y}{P_V(y) + \varepsilon}\right) = \frac{x + y}{P_v(x) + P_V(y) + 2\varepsilon} \in V$$

Por lo que $P_V(x + y) \leq P_V(x) + P_V(y) + 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$.
Solo falta 3), llamemos $V_1 = \{x \in E : P_V(x) < 1\}$. Para ver que $V)1 \subseteq V$, tomemos $x \in V_1$,

o sea, $P_V(x) < 1$. Escojamos t tq $P_V(x) < t < 1$. Entonces

$$\frac{1}{t}x \in V \implies t \cdot \left(\frac{1}{t}x\right) + (1-t)\cdot 0 = x \in V$$

Conclusión $V_1 \subseteq V$. Para la otra parte, sea $x \in V$. Si $x = 0$ entonces $P_V(x) = 0 < 1$. Si $x \in V, x \neq 0$ $\exists r > 0$ tq $B_r(x) \subseteq V$. Observemos entonces que $\left(1 + \frac{r}{2\|x\|}\right) x \in B_r(x)$. En otras palabras $t = \frac{1}{1+\frac{r}{2\|x\|}} < 1$ cumple que $\frac{1}{t}x \in V \implies P_V(x) < 1$. Con lo que se tiene lo pedido. $\square$

Lema 2.7. *Sea E Banach, $V \subseteq E$, V abierto, convexo, $V \neq \emptyset$, y escojamos $x_0 \notin V$. Entonces $\exists \varphi \in E^*$ tq $\Re(\varphi(x)) < \Re(\varphi(x_0))$ $\forall x \in V$*

Demostración. Tomemos $y_0 \in V$, y definamos $V_1 = \{x - y_0 : x \in V\}$, $x_1 = x_0 - y_0$, con esto $0 \in V_1$, $x_1 \notin V_1$. Definamos $F = \{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$. F es s.e.v. real de E. Definamos $\varphi_1 : F \to \mathbb{R}$ donde $\varphi_1(\lambda x_1) = \lambda$. Observemos que $\forall \lambda > 0 : \varphi_1(\lambda x_1) = \lambda \leq \lambda P_{V_1}(x_1) = P_{V_1}(\lambda x_1)$.
Esto dice que $\varphi_1 \leq P_V(x)$ $\forall x \in F$. Ahora, por HB, φ_1 se extiende a $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ lineal real tq $\varphi_1(x) \leq P_V(x)$ $\forall x \in E$.

Observación 2.2. $\varphi_1(x) \leq P_V(x) \leq \frac{2\|x\|}{\delta} \implies \varphi_1$ es lineal (real) continua.

Sea $\varphi(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix)$. Claramente $\Re(\varphi) = \varphi_1$, $\varphi \in E^*$ y además con $x \in V_1$

$$\Re(\varphi(x)) \leq P_{V_1}(x) < 1 = \varphi_1(x_1) = \Re(\varphi(x_1))$$

Trasladando V_1 de vuelta se tiene lo pedido. $\square$