# Cálculo II

Nicholas Mc-Donnell

1er semestre 2018

## Programa

Profesor: Godofredo Iommi
Email: `giommi@mat.uc.cl`

1. La Integral de Riemann
2. Técnicas de integración
3. Aplicaciones
4. Integrales impropias
5. Sucesiones y Series de funciones

## Bibliografía

- Calculus, 4 edición, Kitchens
- `www.mat.uc.cl/~igiommi`

## Adicional

- Análise Real Vol. I, Lima
- Introduction to Calculus and Analysis, Courant y John

## Evaluaciones

I1: Jueves 5 Abril 7-8
I2: Jueves 3 Mayo 7-8
I3: Miércoles 6 Junio 7-8
Examen: Martes 26 Junio 3-4

$$NF = 0{,}7 \cdot \frac{(I1 + I2 + I3)}{3} + 0{,}3 \cdot EX$$

No hay eximición

# Índice general

# Parte I

# La Integral de Riemann

# Capítulo 1

# Axioma del Supremo

Estructura algebraica: $\mathbb{R}$ es un cuerpo
Estructura de orden: $\mathbb{R}$ esta ordenado
$\mathbb{R}$ es completo ($\mathbb{Q}$ no es completo)

**Definición 1.0.1** (Cota Superior)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, diremos que $a \in \mathbb{R}$ es <u>cota superior</u> de $A$ si para todos $x \in A$ se tiene que $x \leq a$

**Definición 1.0.2** (Cota Inferior)**.** Análogamente se define cota inferior

**Observación 1.0.1.** Las cotas superiores e inferiores <u>no</u> son unicas.

**Ejemplo: 1.0.1.**

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es tal que 0 es cota inferior y 2 es cota superior.

**Ejemplo: 1.0.2.**

$$A = [0, +\infty]$$

Posee cota inferior, pero no superior

**Definición 1.0.3.** Diremos que $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ es <u>acotado superiormente</u> (resp. inferiormente) si posee cotas superiores (resp. inferiores).
Diremos que $A$ es <u>acotado</u> si lo es inferior y superiormente.

**Definición 1.0.4.** Sea $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ si $a \in A$ es cota superior (resp. inferior) de $A$ diremos que "$a$.es el <u>maximo</u> (resp. minimo) de $A$

**Definición 1.0.5** (Supremo)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacio, diremos que $a \in \mathbb{R}$ es el supremo de $A$ y anotaremos $a = \sup A$ si satisface:

1. El numero $a$ es cota superior de $A$

2. Si $b \in \mathbb{R}$ es cota superior de $A$ entonces $a \leq b$

**Observación 1.0.2.** El supremo es la menor de las cotas superiores de $A$

**Observación 1.0.3.** Es posible reformular la definición de supremo. En efecto, $a = \sup A$ si:

1. $a$ es cota superior de $A$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A : a - \epsilon < x \leq a$

**Definición 1.0.6** (Ínfimo)**.** Análogamente el ínfimo se define con cotas inferiores y con notación ínf

**Definición 1.0.7** (Axioma del Supremo)**.** Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente posee supremo.

**Observación 1.0.4.** Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado inferiormente posee ínfimo.

**Ejemplo: 1.0.3.** Sea $A = (a, b)$, demuestre que $\inf A = a$

*Demostración.* De la defincion de intervalo tenemos que "$a$."es cota inferior.
Si $\epsilon > b - a$ entonces para todo $x \in A$ se tiene que $x < a + \epsilon$
Sea $0 < \epsilon < b - a$ y consideremos el numero $c = a + \frac{\epsilon}{2}$
Entonces:

1. $a < c$

2. $a + \frac{\epsilon}{2} \leq a + \epsilon < a + b - a = b$

$$\implies c \in A$$

Luego $\inf A = a$ □

**Proposición 1.0.4** (Arquimediana)**.** *Dado un numero real $x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$*

*Demostración.* La afirmación es equivalente a decir que el conjunto $\mathbb{N}$ no esta acotado superiormente.
Supongamos por el contrario que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Por el axioma del supremo existe $c = \sup \mathbb{N}$
En particular $c - 1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c - 1 < n$. Luego, $\sup \mathbb{N} = c < n + 1$ como $n + 1 \in \mathbb{N}$, tenemos la contradicción que prueba el resultado. □

**Ejemplo: 1.0.5.** Pruebe que el infimo de $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es igual a 0.

*Demostración.* Cero es cota inferior ya que los elementos de $A$ son cuocientes de numeros positivos y por lo tanto son positivos.
Supongamos que $a > 0$ es tal que $\inf A = a$. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a \leq \frac{1}{n}$$

En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \leq \frac{1}{a}$ que contradice la proposicion Arquimediana. Luego, $\text{ínf}\, A = 0$ $\square$

**Ejemplo: 1.0.6.** Demuestre que $\text{ínf}\{\frac{|\sin(n)|}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es igual a 0.

*Demostración.* Notemos que $|\sin(n)| \geq 0$ y $n \geq 0$. Luego $x = 0$ es cota inferior de $\{\frac{|\sin(n)|}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Notemos ademas que $|\sin(n)| \leq 1$. Luego, $\frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$ $\square$