

# Algebra Lineal

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2017

# Índice general

<b>1. Espacios Vectoriales</b>	<b>3</b>
1.1. Cuerpos . . . . .	3
1.2. Espacios Vectoriales . . . . .	6
1.3. Subespacios generados . . . . .	6
1.3.1. Combinaciones lineales . . . . .	6
1.4. Transformaciones lineales . . . . .	10
1.4.1. Algebra de Transformaciones Lineales . . . . .	13
1.4.2. Matriz representante . . . . .	15
1.4.3. Composición y Productos . . . . .	16
1.4.4. Invertibilidad . . . . .	17
1.5. Isomorfismos . . . . .	19
1.5.1. Matrices representantes . . . . .	20
1.5.2. Cambios de Base: . . . . .	21
1.6. Productos de Espacios Vectoriales . . . . .	22
1.6.1. Productos y Sumas directas . . . . .	23
<b>2. Parte II</b>	<b>25</b>
2.1. Polinomios . . . . .	25
2.1.1. Algoritmo de la división . . . . .	25
2.1.2. Raíces de Polinomios . . . . .	26
2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios . . . . .	27
2.3. Matrices triangulares superiores . . . . .	29
2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales . . . . .	31
<b>3. Espacios de Producto Interno</b>	<b>33</b>
3.1. Espacio de producto interno . . . . .	35
3.2. Norma . . . . .	36



# Capítulo 1

## Espacios Vectoriales

### 1.1. Cuerpos

Si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , recordemos que se tienen las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad de la suma

$$a + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

2. Asociatividad de la suma

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{F}$$

3. Existe un único elemento neutro para la suma, tal que:

$$x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

4. Para todo  $x \in \mathbb{F}$  existe un único inverso para la suma, tal que:

$$x + y = 0 \quad (-x = y)$$

5. Conmutatividad del producto

$$xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

6. Asociatividad del producto

$$(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

7. Existe único neutro para el producto, el 1, tal que:

$$x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

8. Todo elemento  $x \neq 0$  posee inverso multiplicativo único, tal que:

$$x \cdot y = 1 \quad (x^{-1} = y)$$

9. Distributividad de  $\cdot$  con respecto a  $+$

$$x \cdot (y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{F}$$

**Definición 1.1.1** (Cuerpo). Un cuerpo es un conjunto dotado de dos operaciones  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ , que cumplen lo siguiente:

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$

- $(\mathbb{F}, +)$  es grupo abeliano
- $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$  es un grupo abeliano (0 es el neutro aditivo)
- $a, b, c \in \mathbb{F} \implies a(b + c) = ab + ac$

Ejemplos:

- (a)  $\mathbb{N}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. No, no hay inverso aditivo.
- (b)  $\mathbb{Z}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. No, no hay inverso multiplicativo.
- (c)  $\mathbb{Q}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. Si.
- (d)  $\mathbb{R}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. Si.
- (e)  $\mathbb{C}$  con  $+$  y  $\cdot$  usuales. Si.
- (f)  $\mathbb{F} = \{0, 1\}$  con  $+$  y  $\cdot$  definida de la siguiente forma:

$+$	0	1	$\cdot$	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

**Definición 1.1.2** (Subcuerpo).  $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{F}$  es un subcuerpo si  $(\mathbb{L}, +, \cdot)$  es un cuerpo (donde  $+$  y  $\cdot$  vienen de  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ )

**Proposición 1.1.1.** Sea  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  un cuerpo  $\mathbb{L}$  es subcuerpo  $\iff$

- (a)  $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{L}$
- (b)  $\mathbb{L}$  es cerrado para  $+$ , y  $\forall x \in \mathbb{L} \implies \exists -x \in \mathbb{L}$

(c)  $\mathbb{L}$  es cerrado para  $\cdot$ , y  $\forall x \in \mathbb{L} \setminus \{0\} \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{L}$

*Demostración.*  $\implies$  trivial

$\Longleftarrow$

1. La propiedad se hereda de  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$
2. Idem
3. Por (a)
4. Por (b)
5. La propiedad se hereda de  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$
6. Idem
7. Por (a)
8. Por (c)
9. La propiedad se hereda de  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$

□

Ejemplos:

1.  $\mathbb{F}$  es un subcuerpo de  $\mathbb{F}$
2.  $\mathbb{R}$  es un subcuerpo de  $\mathbb{C}$
3.  $\mathbb{Q}$  es un subcuerpo de  $\mathbb{R}$
4.  $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  es subcuerpo de  $\mathbb{R}$

**Lema 1.1.2.** *Todo subcuerpo de  $\mathbb{R}$  contiene a  $\mathbb{Q}$*

*Demostración.* Sea  $\mathbb{L}$  un subcuerpo de  $\mathbb{R}$

$$(a) \implies \{0, 1\} \subseteq \mathbb{L}$$

$$1 \in \mathbb{L} \implies \mathbb{N} \subseteq \mathbb{L} \quad (b)$$

$$\implies \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{L} \quad (b)$$

$$\implies \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L} \quad (c)$$

Observación: El único subcuerpo de  $\mathbb{Q}$  es  $\mathbb{Q}$  (ver dem. anterior)

□

Ejercicio: Existen infinitos subcuerpos de  $\mathbb{R}$  Recursivamente: sean  $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$  los números primos. Definamos:

$$\mathbb{L}_0$$

## 1.2. Espacios Vectoriales

**Definición 1.2.1** (Espacio Vectorial).

## 1.3. Subespacios generados

### 1.3.1. Combinaciones lineales

**Terorema 1.3.1** (\*). Sea  $V$  espacio vectorial generado por un conjunto finito  $m$  de vectores. Entonces cualquier

*Demostración.* Sean  $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$  con  $n > m$ . Por contradicción, suponiendo que son linealmente independientes.

Sean  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = V$  (por hipótesis)

$$\implies u_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(1)} v_i$$

Claramente  $(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_m^{(1)}) \neq 0$  (de lo contrario  $u_1 = 0$ )

Sin perder generalidad,  $\lambda_1^{(1)} \neq 0$  y por el Lema:

$$\langle u_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$$

Ahora, existan  $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}) \neq (0, \dots, 0)$  tales que:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 + \sum_{i=2}^m \lambda_i^{(2)} v_i$$

Más. aun,  $(\lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}) \neq (0, \dots, 0)$

De lo contrario:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 = \lambda_1^{(2)} u_1 - u_2 \rightarrow \leftarrow (u_1, \dots, u_n \text{ son linealmente independientes})$$

En conclusión, sin perdida de generalidad  $\lambda_2^{(2)} \neq 0$

Por el Lema:

$$\langle u_1, u_2, v_3, \dots, v_m \rangle = V$$

Iterando el argumento, se tiene que:

$$\langle u_1, \dots, u_m \rangle = V$$

Notemos que  $u_{m+1} \in \langle u_1, \dots, u_m \rangle$

$$0 \neq u_{m+1} = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i \rightarrow \leftarrow$$

□

**Definición 1.3.1** (Base, Dimensión finita). Una base  $B$  de un espacio vectorial es un conjunto  $B \subseteq V$  tal que:

1.  $B$  es linealmente independiente
2.  $\langle B \rangle = V$

Un espacio vectorial  $V$  se dice finito-dimensional si existe un conjunto  $S \subseteq V, \|S\| < \infty$  tal que  $\langle S \rangle = V$ .

**Corolario.** Si  $V$  es finito-dimensional, todas las bases de  $V$  son finitas y tienen la misma cardinalidad.

*Demostración.* Sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $V$ .

Por Teo (\*),  $\|B_1\|, \|B_2\| \leq m$ , donde  $m$  es el tamaño de  $S$  tal que  $\langle S \rangle = V$  y  $\|S\| < \infty$ .

Como  $B_1$  es base,  $\langle B_1 \rangle = V$ , y como  $B_2$  es linealmente independiente:

$$\text{Teo} (*) \implies \|B_2\| \leq \|B_1\|$$

Como  $B_2$  es base. □

**Definición 1.3.2** (Dimensión). Si  $V$  es un espacio vectorial finito-dimensional definimos su dimensión,  $\dim V$ , como el cardinal de una base cualquiera de  $V$ . Si  $V$  no es finito-dimensional  $\dim V = +\infty$

Ejemplos:

$$1. V = \text{Sim}^2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = A^T\}$$

*abc*

$$2. \dim(\mathbb{R}^{n \times n}) = n^2$$

$$3. \dim(\text{Antisim}^m(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ y } \dim(\text{Sim}^m(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4. P_n(\mathbb{C})$$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  es base

$$a) \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle = P_n(\mathbb{C})$$

$$p \in P_n(\mathbb{C})$$

$$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n \in \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle$$



b)  $\{1, x, \dots, x^n\}$  es linealmente independiente.

Por contradicción supongamos  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$  Con igualdad de funciones.

$\iff (\forall x \in \mathbb{C}) 0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$

Recuerdo (TFA): Todo polinomio complejo de grado  $\geq 1$  posee una raíz compleja.

$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n = (x - z_1) \cdot a'_0 \cdot 1 + a'_1 \cdot x + \dots + a'_{n-1} \cdot x^{n-1}$

$\implies p(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \dots (x - z_k) \cdot A$  donde  $k = \text{gr}(p)$ , y  $A \neq 0$ .

Tomando  $z' \neq z_1, z_2, \dots, z_k$ , tenemos:  $0 = (z' - z_1) \cdot (z' - z_2) \cdot \dots (z' - z_k) \cdot A$  Pero multiplicar cosas distintas de 0 no da 0.

$\rightarrow \leftarrow$

$$\dim(P_n(\mathbb{C})) = n + 1$$

**Observación 1.3.1.**  $\{0\}$ ,  $\dim\{0\} = 0$ , notando que base es  $\emptyset$ , tenemos que  $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

**Lema 1.3.2.** Sea  $S \subseteq V$ ,  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  conjunto linealmente independiente.

$v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle \implies \{v, v_1, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente.

*Demostración.* Ejercicio □

**Teorema 1.3.3.** Sea  $V$  espacio vectorial finito dimensional, entonces:

1. Todo conjunto linealmente independiente extiende a una base
2. Todo conjunto generado contiene una base

Todo espacio vectorial  $V \neq \{0\}$  finito dimensional posee una base.

*Demostración.* a) Sea  $v \in V \setminus \{0\}$ . Entonces  $\{v\}$  es linealmente independiente.

Por Teo, estamos listos.

Dem(Teo):

$V$  es finito dimensional  $\implies \exists \{v_1, \dots, v_n\}$  que genera  $V$ .

Sea  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  conjunto linealmente independiente.

Dos casos:

a) Si  $\langle S \rangle = V$ , entonces  $S$  es base

b) Si  $\langle S \rangle \subset V$ , entonces existe  $v \notin \langle S \rangle$ , y opr el Lema,  $S \cup \{v\}$  es linealmente independiente.

Inductivamente, o bien eventualmente 1, o iteramos 2.

Sin embargo, 2 no puede ocurrir infinitas veces.

Teo(\*)  $\implies$  todo conjunto linealmente independiente posee cardinalidad  $\leq n$ .

b) Sea  $S$ , tal que  $\langle S \rangle = V$ .

Consideremos,  $d = \max\{|S'| : S' \subseteq S, S' \text{ es linealmente independiente}\}$

Notemos que  $d \leq n < +\infty$ , por el Teo(\*).

Como el máximo se alcanza, existe  $S'$  tal que  $|S'| = d$  y  $S'$  es linealmente independiente.

Por contradicción, supongamos que  $S'$  no es base.

$$\langle S' \rangle \subset V = \langle S \rangle$$

Luego,  $S \setminus \langle S' \rangle \neq \emptyset$ . De lo contrario  $\langle S \rangle \setminus \langle S' \rangle \neq \emptyset$

$$\implies S \subseteq \langle S' \rangle \implies \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle \implies \langle S' \rangle = V$$

Finalmente, existe  $v \in S \setminus \langle S' \rangle$ , y por el Lema,  $S' \cup \{v\}$  es linealmente independiente y  $|S' \cup \{v\}| = d + 1$

$\rightarrow \leftarrow$

□

**Corolario.** Sea  $W \subset V$  subespacio propio ( $W \neq V$ ) con  $V$  finito dimensional. Entonces,  $\dim W < \dim V$

*Demostración.* ■ Si  $\dim W = 0 \implies \dim W = 0 < \dim V$ .

■ Si  $\dim W \geq 1$  entonces, por el corolario,  $W$  tiene una base.

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \text{ es base de } W$$

Como  $W$  es subespacio propio, existe  $v \in V \setminus \langle B_W \rangle$

$\implies B_W \cup \{v\}$  es linealmente independiente y  $\subset V$ .

Por Teo. a),  $B_W \cup \{v\}$  se extiende con una base  $B_V$ ,  $|B_V| \geq |B_W| + 1$ .

$$\dim W = |B_W| < |B_W| + 1 \leq |B_V| = \dim V$$

□

**Proposición 1.3.4.** Sean  $U, W$  subespacios vectoriales de un espacio vectorial finito dimensional  $V$ . Entonces:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

*Demostración.* Si  $U \cap W = \{0\}$ , trivial

Si  $U \cap W \neq \{0\}$ , entonces sea  $B_{U \cap W}$  base de  $U \cap W$ .

$$B_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_m\}$$

Base de  $U$ : Sea  $B_U = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p\}$

Base de  $W$ : Sea  $B_W = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r\}$

Ambos existen por Teo.a).

Afirmación:  $B_U \cup B_W = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r\}$  es base de  $U + W$ .

1.  $\langle B_U \cup B_W \rangle = U + W$   
 $v \in u + w, u \in U, w \in W$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^r \delta_k w_k + \sum_{j=1}^m \beta_j v_j \in \langle B_U \cup B_W \rangle$$

2.  $B_U \cup B_W$  es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j + \sum_{k=1}^p \nu_k u_k \\ - \sum_{k=1}^p \nu_k u_k &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j \in U \cap W \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j \Rightarrow \nu_k, \lambda_i = 0 \forall k, i \end{aligned}$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = |b_{U \cap W}|$$

$$\dim U = |B_U|$$

$$\dim W = |B_W|$$

$$\dim(U + W) = |B_U \cup B_W|$$

□

## 1.4. Transformaciones lineales

**Definición 1.4.1** (Transformación lineal). Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un cuerpo común  $\mathbb{F}$ . Una función  $T : V \rightarrow W$  es transformación lineal si

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Ejemplos:

1.  $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m, T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  y  $A \in \mathbb{F}^{m \times n} \quad v \mapsto Av$   
 $T$  es una transformación lineal
2.  $V = W = C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es infinitamente diferenciable}\}$   
 $V = C^1(\mathbb{R}), W = C^0(\mathbb{R})$   
 $T : V \rightarrow W$

$$f \mapsto \frac{df}{dx}$$

Por álgebra de funciones diferenciables si  $f, g \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{d(\lambda f + g)}{dx} = \lambda \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

3.  $\mathbb{R}[x]$  Es un espacio vectorial

$$T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$p \mapsto \frac{dp}{dx}$$

4.  $V = C^0([0, 1]), W = \mathbb{R}$

$$T : V \rightarrow W$$

$$f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

**Terorema 1.4.1.** Sea  $V$  un espacio finito dimensional y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ .

Sea  $W$  un espacio vectorial y consideramos vectores  $w_1, \dots, w_n \in W$

Entonces  $\exists! T : V \rightarrow W : T(v_i) = w_i \forall i = 1, \dots, n$

*Demostración.* ■ Existencia: Si  $v \in V$  entonces:

$$(*) v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

Definimos:

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$$

$T : V \rightarrow W$  es una función porque  $\forall v \in V$  la descomposición  $(*)$  es única.

Además, es lineal. Si  $v, u \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_i \lambda_i v_i$$

$$u = \sum_i \mu_i v_i$$

$$T(\lambda v + u) = T\left(\sum_i (\lambda \lambda_i + \mu_i) v_i\right)$$

$$T(\lambda v + u) = \sum_i (\lambda \lambda_i + \mu_i) T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda \sum_i \lambda_i T(v_i) + \sum_i \mu_i T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u)$$

- Unicidad: Sean  $T, T'$  transformaciones lineales tales que:

$$T(v_i) = T'(v_i) = w_i$$

Sea  $v \in V$ , entonces:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T'(v_i)$$

$$T(v) = T'(v) \implies T = T'$$

□

Propiedades:

Si  $T : V \rightarrow W$  transformaciones lineales, entonces:

1.  $T(0) = 0$
2.  $T(\sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i))$

*Demostración.*

□

La importancia de este teorema se relaciona con el hecho de poder definir transformaciones lineales sólo a través de como actúan sobre una base. Esto se relaciona con la noción de matriz representante.

**Definición 1.4.2.** Si  $T : V \rightarrow W$  transformación lineal, definimos:

- Núcleo(Kernel):  $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ , subespacio vectorial de  $V$
- Imagen(Rango):  $T(V) = \{w \in W : \exists v \in V T(v) = w\}$ , subespacio vectorial de  $W$

**Teorema 1.4.2** (Núcleo-Imagen). Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$  y  $T : V \rightarrow W$  transformación lineal. Entonces, si  $V$  es finito dimensional:

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(T(V))$$

*Demostración.* Como  $\ker T$  es subespacio vectorial de  $V$  entonces es finito dimensional y por ende posee una base:

$$\{v_1, \dots, v_k\} \quad \text{es base de } \ker T$$

Por un teorema podemos extender a una base de  $V$

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_u\} \text{ es base de } V$$

Sea ahora  $w \in \Im(T) \implies w = T(v)$

Entonces,

$$w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{F}$$

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i + v_{k+1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) v_{k+1}$$

$$\in \langle \{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} \rangle$$

Queremos probar ahora que  $(T(v_i))_{i=k+1}^n$  son linealmente independientes. Supongamos  $\exists \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  tal que:

$$\sum_{i=k+1}^n \lambda_i T(v_i) = 0$$

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i v_i\right) = 0$$

$$\implies \in \text{Ker}(T)$$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$  tal que

$$\sum_{i=k+1}^n (-\lambda_i) v_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = 0$$

Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  son linealmente independientes tenemos que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Finalmente:

$$\dim V = n, \dim \ker T = k$$

$$\dim \Im T = n - k$$

□

### 1.4.1. Algebra de Transformaciones Lineales

Def[Espacio de transformaciones lineales]:

Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Definimos

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W : T \text{ es transformación lineal}\}$$

Dadas  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ , definimos

$$T_1 + T_2 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto T_1 v + T_2 v$$

$$\lambda T_1 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto \lambda T_1 v$$

**Teorema**

$\mathcal{L}(V, W)$  dotado de  $+$  y  $\cdot$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$

Dem: Primero probar que  $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$  y  $\lambda T_1 \in \mathcal{L}(V, W)$

$T_1 + T_2$  es transformación lineal.

$$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w) \quad (T_1 + T_2)(\lambda v + w) = T_1(\lambda v + w) + T_2(\lambda v + w)$$

$$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w) \quad \text{Similarmente:}$$

$$(\lambda T_1)(\mu v + w) = \mu(\lambda T_1)(v) + (\lambda T_1)(w)$$

Y el resto de las propiedades se dejan propuestas como ejercicio.

**Teorema**

Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ ,  $\dim V = n$  y  $\dim W = m$ . Luego,  $\mathcal{L}(V, W)$  es un espacio finito dimensional y  $\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n$

Dem: Sean  $V = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$ ,  $W = \langle \{w_1, \dots, w_m\} \rangle$ , bases respectivamente.

Dados  $1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m$ , definimos  $E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$  como única transformación lineal que satisface:

$$E^{p,q}(v_j) = \begin{cases} w_p & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}$$

$$E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$$

$E^{p,q}$  esta bien definida por el primer teorema de la sección

$$\mathcal{B}_L = \{E^{p,q} : 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m\}$$

Afirmación:  $\mathcal{B}_L$  es base de  $\mathcal{L}(V, W)$

$$\langle \mathcal{B}_L \rangle = \mathcal{L} : \text{Sea } T \in \mathcal{L}(V, W)$$

Dado  $1 \leq j \leq n$ , existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{i,j} w_i$$

Dado  $v \in V$ , existen  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \mu_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i \right)$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mu_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_i \sum_j \lambda_{i,j} \mu_j E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_i \left( \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j} \left( \sum_k \mu_k v_k \right) \right)$$

$$T(v) = \sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$\mathcal{B}_L$  es linealmente independiente: Supongamos que:

$$\sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j} = 0$$

Dado  $1 \leq k \leq n$

$$\sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_k) = \mathbf{0}$$

$$\iff \sum_i \lambda_{i,k} w_i = \mathbf{0}$$

$$\iff \lambda_{1,k} = \lambda_{2,k} = \dots = \lambda_{m,k} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = |\mathcal{B}| = m \cdot n$$

### 1.4.2. Matriz representante

El Teo anterior permite identificar transformaciones lineales entre espacios finito-dimensionales y matrices  $m \times n$  (donde  $m = \dim W, n = \dim V$ ).

Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$ ,  $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $W$ .

Definimos la matriz representante de  $T$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}_V$  y  $\mathcal{B}_W$  como  $\mathcal{M}(T) = (a_{ij})_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$ , tal que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Si las bases no están claras por contexto usamos la notación  $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$

Es facil ver que

$$\mathcal{M}(T_1 + \lambda T_2) = \mathcal{M}(T_1) + \lambda \mathcal{M}(T_2)$$

(Ejercicio)

De esta forma,  $\mathcal{M}$  respeta la estructura lineal de  $\mathcal{L}(V, W)$



Ejemplos:

$$\mathbb{F}^\infty = V = W$$

$$1. L : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$Lx = (x_2, x_3, \dots)$$

$$2. R : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$Rx = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Pregunta:  $\mathcal{M}(L), \mathcal{M}(R)$ ?

### 1.4.3. Composición y Productos

**Teo**

Sean  $V, W, Z$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  y  $S \in \mathcal{L}(W, Z)$ . Entonces por composición:  $S \circ T : V \rightarrow Z$  dada por  $(S \circ T)(v) = S(T(v))$  es una transformación lineal.

Dem: Tenemos que probar que:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

En efecto:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = S(T(\lambda u + v)) = S(\lambda T(u) + T(v))$$

$$S \circ T(\lambda u + v) = \lambda S(T(u)) + S(T(v)) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

#### Definición 1.4.3. Endomorfismo

Una transformación lineal  $T \in \mathcal{L}(V, V)$  se dice endomorfismo u operador lineal. Denotamos  $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$ . La composición funciona como producto sobre  $End(V)$

Propiedades:

$$a) I \circ S = S \circ I = S \text{ (} I \text{ es neutro para } \circ \text{)}$$

$$b) \quad \blacksquare S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$$

$$\blacksquare (T_1 + T_2) \circ S = T_1 \circ S + T_2 \circ S$$

$$c) \lambda(S \circ T) = (\lambda S) \circ T = S \circ (\lambda T)$$

*Demostración.* Ejercicio □

Importante notar que  $\circ$  no es conmutativo.

También es importante observar que NO todo operador posee elemento inverso para  $\circ$ . Dado  $T \in$

$End(V) \setminus \{0\}$ , decimos que  $S \in End(V) \setminus \{0\}$  es su inversa si:

$$S \circ T = T \circ S = I$$

### Corolario

Sea  $V$  espacio vectorial finito-dimensional y  $\mathbb{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$ . Entonces  $\{E^{p,1} : p, q = 1, \dots, n\}$  es base de  $End(V)$ .

*Demostración.* Directo por Teo (+). □

Lema: Sean  $S, T \in End(V)$  con  $V$  finito dimensional. Entonces:

$$\mathcal{M}(S \circ T) = \mathcal{M}(S) \cdot \mathcal{M}(T)$$

*Demostración.* Recordar que

$$\{E^{p,q} : p, q = 1, \dots, n\}$$

son base de  $End(V)$ .

$$\mathcal{M}(S) = (b_{p,q})_{p=1, \dots, n, q=1, \dots, n}$$

□

#### 1.4.4. Invertibilidad

**Definición 1.4.4.**  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  se dice invertible si existe  $S : W \rightarrow V$  tal que

$$S \circ T = I_V, T \circ S = I_W \tag{1.1}$$

Cuando  $T$  es invertible, denotamos  $T^{-1}$  con su inversa

$$T \text{ invertible} \iff T \text{ es inyectiva y es sobreyectiva}$$

#### Observación 1.4.1.

1. No todo  $T \in End(V) \setminus \{0\}$  es invertible
2. En el caso  $V = W$ ,  $I_V$  es neutro para  $\circ$
3. Puede ser que  $S \circ T = I$  y  $T \circ S \neq I$

**Teorema 1.4.3.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$  y  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Si  $T$  es invertible entonces  $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$

*Demostración.* Queremos probar  $T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2)$

Sean  $v_1 = T^{-1}(w_1), v_2 = T^{-1}(w_2)$

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad /T^{-1}()$$

$$v_1 + \lambda v_2 = T^{-1}(T(v_1) + \lambda T(v_2))$$

$$T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2) = T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) \quad \square \quad (1.2)$$

**Proposición 1.4.4.** Sean  $T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow Z$  lineales e invertibles. Entonces  $S \circ T$  es lineal e invertible; mas aun

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} \quad (1.3)$$

*Demostración.*  $S \circ T$  es lineal (visto lunes).

Invertible: basta probar:

$$(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = I_Z$$

$$(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = T^{-1} \circ (S^{-1} \circ S) \circ T = T^{-1} \circ T = I_V$$

□

**Definición 1.4.5.** Decimos que  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  es no singular si  $\ker T = [0]$ . Notar ademas que  $T$  no singular si solo si inyectiva

$$Tv_1 = Tv_2 \iff T(v_1 - v_2) = 0 \quad (1.4)$$

**Terorema 1.4.5.** Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Entonces:

$T$  no-singular  $\iff T$  transforma conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes, es decir,  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$  l.i.  $\implies \{Tv_1, \dots, Tv_k\} \subseteq W$  l.i.

**Terorema 1.4.6.** □ Sean  $V, W$  finito-dimensionales tal que  $\dim V = \dim W$ . Si  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  entonces las siguientes son equivalentes:

- I)  $T$  es invertible
- II)  $T$  es no-singular
- III)  $T$  es sobreyectiva
- IV) Para toda base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ ,  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  es base de  $W$ .
- V) Existe  $\{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  tal que  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  es base de  $W$

**Observación 1.4.2.**

- 1. Si  $\dim V \neq \dim W$   
 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n < m$

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$   
 es inyectiva, pero no sobreyectiva

2.  $V = W, \dim V = +\infty$   
 $R : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$   
 $(x_1, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots)$   
 es inyectiva, pero no sobreyectiva

*Demostración.* (i)  $\implies$  (ii)

$$(ii) \ker T = \{0\} \iff T(V) = W$$

(ii)  $\implies$  (iii)

(iii)  $T$  es sobre. Por TNI

$$\dim T = n \implies \dim \ker T = 0 \implies T \text{ no singular}$$

Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ , por el Teo. anterior  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  se base de  $W$  □

## 1.5. Isomorfismos

**Definición 1.5.1.** Isomorfismos Sean  $V, W$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Decimos que  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  es un isomorfismo si es invertible. En tal caso, diremos que  $V$  y  $W$  son isomorfos

Ejemplos:

1.  $\mathbb{F}^{n+1}$  y  $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$  son isomorfos

$$T : \mathbb{F}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i + a_0$$

2. (Coordenadas baricéntricas): Si  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$

$$(\forall v \in V) v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

$$[\cdot]_B : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [v]_B$$

3.  $V, W$  finito dimensional sobre  $\mathbb{F}$ , con

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$\mathcal{M}(\cdot, B_V, B_W) : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathbb{F}^{n \times m}$$

$$T \mapsto \mathcal{M}(T, B_V, B_W)$$

es un isomorfismo (ejercicio)

**Teorema 1.5.1.** *Dos espacios finito dimensionales  $V, W$  (sobre  $\mathbb{F}$  son isomorfos si solo si  $\dim V = \dim W$*

*Demostración.* Sean  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$ ,  $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $W$ .

$\implies$  Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  isomorfismo

$$\{Tv_1, \dots, Tv_n\} \subseteq W$$

Es un conjunto linealmente independiente (un Teorema)

$$\implies n \leq \dim W = m$$

Tomando  $T^{-1}$ , (que también es isomorfismo) tomemos

$$\{T^{-1}w_1, \dots, T^{-1}w_m\} \subseteq V$$

Es linealmente independiente

$$\implies m \leq \dim V = n$$

$$\implies m = n$$

$\Leftarrow$  Suponemos  $n = m$ , sea  $T$  la única transformación lineal tal que

$$Tv_i = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Por el teorema  $\square$ , parte (v)  $\implies$  (i) tenemos que  $T$  es isomorfismo.  $\square$

### 1.5.1. Matrices representantes

Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ , y sean  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$ ,  $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $W$ .

$$[Tv_j]_{B_W} = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \iff T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad (\forall v \in V \exists a_{ij})$$

Luego, par todo  $v \in V$

$$v = \sum_j \lambda_j v_j \quad (\exists \lambda_j) \iff [Tv]_{B_W} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j)$$

De esta forma,

$$[T(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$$

Notemos que  $A$  coincide con la matriz representante de  $T$  con respecto a las bases  $B_V$  y  $B_W$ .

$$\mathcal{M}(T, B_V, B_W) = M$$

Evaluar (\*) para  $v = v_j$

$$[T(v_j)]_{B_W} = A \cdot [v_j]_{B_V} = A \cdot e_j$$

$$\implies T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot w_i$$

$$\therefore T(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j) = \sum_j \sum_i \lambda_j a_{i,j} w_i$$

$$T(v) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j} \left( \sum_q \lambda_q v_q \right) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$$\therefore T = \sum_i \sum_j a_{i,j} E^{i,j}$$

### 1.5.2. Cambios de Base:

Sean  $B = (v_1, \dots, v_n)$  y  $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$  2 bases (ordenadas).

Como se relacionan  $[\cdot]_{B'}$  y  $[\cdot]_B$ ?

$$T : V \rightarrow \mathbb{F}^n, U : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto [v]_B, v \mapsto [v]_{B'}$$

Notemos que  $T \circ U^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n, [v]_B \mapsto [v]_{B'}$  es un isomorfismo.

Sea  $P$  la matriz representante de  $T \circ U^{-1}$  con respecto a la base canónica en  $\mathbb{F}^n$

Usando (\*):

$$[v]_B = P \cdot [v]_{B'} \quad \forall v$$

Sea ahora  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ . Tomemos:

$$[T(v)]_B = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot [v]_B$$

$$P \cdot [T(v)]_{B'} = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P \cdot [v]_{B'}$$

$$[T(v)]_{B'} = (P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P) \cdot [v]_{B'}$$

$$\implies \mathcal{M}_{B',B}(T) = (P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P)$$

Pregunta: Como calcular  $P$ ?

$$[v'_j]_B = P \cdot [v'_j]_{B'} = P \cdot j$$

$$P = [[v'_1]_B | [v'_2]_B | \dots | [v'_n]_B] \oplus$$

**Terorema 1.5.2.** Sea  $V$  espacio vectorial finito-dimensional con bases ordenadas  $B = (v_1, \dots, v_n)$  y  $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ . Sea  $T \in \text{End}(V)$ . Luego

$$\mathcal{M}_{B',B}(T) = P^{-1} \mathcal{M}_{B,B}(T) P$$

**Definición 1.5.2.**  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  son similares si  $\exists P$  invertible tal que:

$$A = P^{-1} B P$$

## 1.6. Productos de Espacios Vectoriales

**Definición 1.6.1.** Sean  $V_1, \dots, V_m$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Definimos el espacio producto como

$$V = V_1 \times \dots \times V_m = \{(v_1, \dots, v_m) : v_i \in V_i (\forall i = 1, \dots, m)\}$$

1. Suma:  $(v_1, \dots, v_m) + (v'_1, \dots, v'_m) = (v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m)$
2. Producto por escalar:  $\lambda \cdot (v_1, \dots, v_m) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_m)$

**Proposición 1.6.1.**  $V \times \dots \times V_m$  con suma y producto escalar es un espacio vectorial.

*Demostración.* Ejercicio: similar a  $\mathbb{F}^n$  □

**Proposición 1.6.2.** Sean  $V_1, \dots, V_m$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Entonces  $V_1 \times \dots \times V_m$  es finito-dimensional y

$$\dim(V_1 \times \dots \times V_m) = \sum_{i=1}^m \dim V_i$$

*Demostración.* Dado  $i = 1, \dots, m$  sea

$$B_{V_i} = \{V_{1,1}, \dots, V_{i,n_i}\}$$

Base de  $V_i$ . Ahora sea

$$B = \bigcup_{i=1}^m \{(0, \dots, 0, v_{ij}, \dots, 0) : j = 1, \dots, n_i\}$$

Probaremos que  $B$  es base de  $V_1 \times \dots \times V_m$ . Notemos que esto basta:

$$\dim V_1 \times \dots \times V_m = |B| = \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m \dim V_i$$

- B genera: Sea  $v \in V \times \dots \times V_m$ , entonces

$$v = (v_1, \dots, v_m) \quad \text{donde } v_i \in V_i$$

Como  $B_{V_i}$  es base de  $V_i$ :

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot v_{i,j} \\ v &= \left( \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} v_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{m,j} v_{m,j} \right) \\ v &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} (0, \dots, 0, v_{i,j}, 0, \dots, 0) \in \langle B \rangle \end{aligned}$$

- $B$  es linealmente independiente (ejercicio)

□

### 1.6.1. Productos y Sumas directas

**Teorema 1.6.3.** Sean  $U_1, \dots, U_m$  subespacios vectoriales de  $V$ . Definimos la transformación lineal

$$\Gamma : U_1 \times \dots \times U_m \rightarrow U_1 + \dots + U_m$$

$$\Gamma(u_1, \dots, u_m) = u_1 + \dots + u_m$$

Entonces,  $U_1 + \dots + U_m$  es suma directa si y solo si  $\Gamma$  es inyectiva

**Observación 1.6.1.** Notar que  $\Gamma$  siempre es sobreyectiva

*Demostración.*

$$\Gamma \text{ inyectiva} \iff \ker \Gamma = \{0\}$$

$$\iff [u_1 + \dots + u_m = 0 \iff (u_1, \dots, u_m) = (0, \dots, 0)]$$

$$\iff U_1 + \dots + U_m \text{ es directa}$$

□





# Capítulo 2

## Parte II

### 2.1. Polinomios

**Definición 2.1.1** (Grado). Si  $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$  con  $a_n \neq 0$ , entonces  $gr(p) = n$ . Si  $p(z) = 0$  entonces  $gr(p) = -\infty$

**Proposición 2.1.1.**

#### 2.1.1. Algoritmo de la división

Recordemos que si  $p, s$  son enteros, no negativos, con  $s \neq 0$ , existen únicos  $q, r$  enteros no negativos tal que:

$$p = s \cdot q + r$$

Donde  $r < s$ .

De ahora en adelante,  $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$  a menos que se diga lo contrario.

**Teorema 2.1.2** (División de polinomios). Sean  $p, s \in \mathbb{F}[z]$  con  $s \neq 0$ . Entonces existen únicos polinomios  $q, r \in \mathbb{F}[z]$  tales que:

$$p = q \cdots + r \implies n = gr(q) + m$$

Con  $gr(r) < gr(s)$ .

*Demostración.* Sean  $n = gr(p), m = gr(s)$ . Definamos

$$T : \mathcal{P}_{n-m}(\mathbb{F}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(q, r) \mapsto q \cdot s + r$$

Probaremos que  $T$  es una transformación lineal biyectiva. Notar que esto es suficiente para concluir el Teorema.

- T es lineal

$$T((q_1, r_1) + \lambda(q_2, r_1)) = T(q_1, r_1) + \lambda T(q_2, r_2)$$

- T inyectivo: Basta probar que  $\ker T = \{0\}$ . En efecto, si  $(q, r)$  son tales que:

$$q \cdot s + r = 0$$

$$q \cdot s = -r$$

Comparando grados:

$$\text{gr}(LI) = \text{gr}(q) \cdot m, \text{gr}(LD) = \leq m - 1$$

$$\implies q = 0 \implies r = 0$$

- T sobreyectiva: Por el TNI, y como  $\ker T = \{0\}$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1})$$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m}) + \dim(\mathcal{P}_{m-1}) = n + 1$$

$$\therefore \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = n + 1 = \dim \mathcal{P}_n$$

Lo que implica que  $T$  es sobreyectiva.

□

**Observación 2.1.1.** La demostración del Teo. Anterior entrega un "algoritmo" para dividir polinomios. Resolver la ecuación lineal no-homogénea

$$T(q, r) = p$$

Asignando bases a la partida y la llegada, se obtendrá un sistema lineal

$$Ax = b$$

### 2.1.2. Raíces de Polinomios

El estudio de la ecuación  $p(z) = 0$  es sumamente útil para analizar un polinomio  $p \in \mathbb{F}$

**Definición 2.1.2** (Raíz).  $\lambda \in \mathbb{F}$  se dice raíz de un polinomio si

$$p(\lambda) = 0$$

**Definición 2.1.3** (Factor).  $s \in \mathbb{F}[z]$  se dice factor de  $p \in \mathbb{F}[z]$  si existe un polinomio  $q \in \mathbb{F}[z]$  tal que:

$$p = q \cdot s$$

**Terorema 2.1.3** (Raíces definen factores de grado 1). *Sea  $p \in \mathbb{F}[z]$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Entonces  $p(\lambda) = 0 \iff (z - \lambda)$  es factor de  $p$*

*Demostración.*  $\Leftarrow$   $(z - \lambda)$  factor de  $p$ , entonces  $\exists q \in \mathbb{F}[z]$  tal que

$$p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z) \forall z \in \mathbb{F}$$

$$\implies p(\lambda) = 0 \cdot q(\lambda) = 0$$

*implies.* Por el algoritmo de la división para  $p$  y  $s(z) = z - \lambda$ , tenemos que  $\exists! r \in \mathbb{F}[z]$  con  $\deg(r) < 1 \implies r \in \mathbb{F}$  tal que

$$p(z) = q(z) \cdot (z - \lambda) + r$$

$$\implies 0 = p(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r$$

$$\therefore r = 0$$

□

**Corolario** (Un polinomio tiene tantas raíces como su grado). *Sea  $p \in \mathbb{F}[z]$  un polinomio de grado  $m \geq 0$ . Entonces  $p$  tiene a lo más  $m$  raíces distintas sobre  $\mathbb{F}$*

*Demostración.* Por inducción en  $m$ .

$m = 0$ :  $p(z) = a_0 \neq 0$ . Entonces  $p$  tiene 0 raíces.

$m - 1 \implies m$ : Sea  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$  con  $a_m \neq 0$

Caso 1:  $p$  no posee raíces

Caso 2:  $p$  sí posee raíces. Sea  $\lambda \in \mathbb{F}$  raíz de  $p$

$$\therefore \exists q \in \mathbb{F}[z] : p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z)$$

Claramente  $\deg(q) = m - 1$ . Por inducción,  $q$  posee a lo más  $m - 1$  raíces en  $\mathbb{F}$ . Por lo tanto:

$$\# \text{ raíces de } p \leq \# \text{ raíces de } (z - \lambda) + \# \text{ raíces de } q = m$$

□

## 2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios

Queremos entender la estructura de  $T \in \text{End}(V) = \mathcal{L}(V)$  supongamos que

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

y

$$T|_{U_1}, T|_{U_2}, \dots, T|_{U_m}$$

**Definición 2.2.1** (Subespacio invariante). Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  un subespacio  $U$  de  $V$  se dice invariante para  $T$  si  $TU \subseteq U$

$$\implies TU = \{w \in V : w = Tv\}$$

Propiedad: Sea  $p, q \in \mathbb{F}[z]$  y  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Entonces:

1.  $(p \cdot q)(T) = p(T) \cdot q(T)$
2.  $p(T) \cdot q(T) = q(T) \cdot p(T)$

*Demostración.* Sea  $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  y  $q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$

$$(p \cdot q)(z) = \left( \sum_{j=0}^n a_j z^j \right) \left( \sum_{k=0}^m b_k z^k \right)$$

$$p \cdot q(z) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k z^{j+k}$$

$$\implies (p \cdot q)(T) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k T^{j+k}$$

$$(p \cdot q)(T) = \left( \sum_j a_j T^j \right) \left( \sum_k b_k T^k \right)$$

□

**Teorema 2.2.1** (Existencia de vps). *Todo operador en un espacio vectorial complejo de dimensión finita y  $> 0$ , posee un valor propio.*

*Demostración.* Sea  $n = \dim V > 0$  y sea  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Sea ahora  $v \neq \mathbf{0}$ . Entonces

$$\{v, Tv, T^2v, \dots, T^n v\}$$

es linealmente dependiente. Luego existen  $a_0, \dots, a_n$  tal que  $a_0 v + a_1 Tv + \dots + a_n T^n v = 0$

$$\therefore p(T)v = 0 \quad \text{con } \text{gr}(p) = n$$

Por el teorema fundamental del algebra,  $p$  puede ser factorizado

$$p(z) = C(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$$

Por ende:

$$p(T)v = 0 = C(T - \lambda_1 I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n I)v$$

$\implies$  Existe  $j = 1, \dots, n$  tal que  $\text{Im}(T - \lambda_j I) \neq V \therefore \lambda_j$  es valor propio de  $T$

□

## 2.3. Matrices triangulares superiores

Recordemos que dada  $T \in \mathcal{L}(V)$  y una base  $B$  la matriz representante de  $T$  con respecto a  $B$  es

$$\mathcal{M}_B(T) = (a_{i,j})_{i,j \in [n]}$$

tal que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i$$

Notemos, por ejemplo, que en el caso complejo siempre existe una base  $B$  tal que la matriz representante posee la siguiente estructura

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

En efecto, sea  $\lambda \in \mathbb{F}$  valor propio de  $T$  con vector propio asociado  $v \neq 0$ .

Sea  $B$  una base que contiene a  $v$ . Si hacemos esto

$$Tv = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Definición 2.3.1** (Matriz triangular superior). Una matriz  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  se dice triangular superior si

$$a_{i,j} = 0 \forall i > j$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**Proposición 2.3.1.** Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  y  $v_1, \dots, v_n$  base (ordenada) de  $V$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) La matriz representante  $\mathcal{M}_B(T)$  es  $\Delta$  superior
- b)  $Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle \forall j = 1, \dots, n$
- c)  $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$  es invariante bajo  $T, \forall j = 1, \dots, n$

*Demostración.* □

**Proposición 2.3.2** (Invertibilidad a través de representaciones matriciales). *Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  tal que posee una representación  $\Delta$  superior con respecto a cierta base. Entonces  $T$  invertible  $\iff$  las entradas diagonales de la matriz son no nulas.*

*Demostración.* Sea  $B$  base tal que

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

$\Leftarrow$  Por (\*)

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\therefore v_1 = T \left( \frac{v_1}{\lambda_1} \right) \in \text{Im}(T)$$

Nuevamente, por (\*)

$$Tv_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\lambda \neq 0 \implies v_2 = T \left( \frac{v_2}{\lambda_2} \right) \in \text{Im}(T)$$

Por inducción:

$$Tv_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$v_j = T \left( \frac{v_j}{\lambda_j} \right) + \frac{a_1}{\lambda_j} v_1 + \dots + \frac{a_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} \in \text{Im}(T)$$

$\implies$  Sabemos que  $\forall j = 1, \dots, n$

$$Tv_j = a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$\implies Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

Si algún  $\lambda_j = 0$ :

$$Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

$$T(\langle v_1, \dots, v_j \rangle) \subseteq \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

En efecto □

**Corolario** (Valores propios de operador a través de representación  $\Delta$  superior). *Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  con representación  $\Delta$  superior*

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

con  $B$  base de  $V$ . Entonces los valores propios de  $T$  son  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

*Demostración.*

$$T_\lambda I \quad \text{no es biyectiva}$$

$$\mathcal{M}_B(T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\mathcal{M}_B(T - \lambda I) = \mathcal{M}_B(T) - \lambda \mathcal{M}_B(I)$$

Por el Teo ( $\therefore$ )

$T - \lambda I$  invertible si solo si  $\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda \neq 0$

$\lambda$  es valor propio si solo si  $\lambda_1 = \lambda$  o  $\lambda_2 = \lambda \dots \lambda_n = \lambda$

□

## 2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales

**Definición 2.4.1** (Diagonal de una matriz diagonal). Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ . Definimos  $Diag(A) \in \mathbb{F}^{n \times m}$

$$(Diag(A))_{i,j} =$$

Y decimos que  $A$  es diagonal si

$$A = Diag(A)$$

Equivalentemente,  $A$  es diagonal si

$$a_{i,j} = 0 \forall i \neq j$$

Claramente, toda matriz diagonal es  $\triangle$  superior, entonces los valores propios de  $A$  son los valores en la diagonal.

**Definición 2.4.2** (Subespacio Propio). Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ . El subespacio propio de  $T$  correspondiente a  $\lambda$ ,  $E(\lambda, T)$ , se define como

$$E(\lambda, T) = \ker(T - \lambda I)$$

es decir, el conjunto de vectores propios asociados a  $\lambda$ , más el cero.

**Observación 2.4.1.**  $\lambda$  es valor propio de  $T \iff E(\lambda, T) \neq \{0\}$

**Proposición 2.4.1** (Suma de subespacios propios es directa).





## Capítulo 3

# Espacios de Producto Interno

**Definición 3.0.1** (Producto Interno). Un producto interno sobre un espacio vectorial  $V$  es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

I) Positividad:  $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$

II) Definitividad:  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \mathbf{0}$

III) Aditividad por la izquierda:  $\forall u, v, w \in V$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

IV) Homogeneidad:  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall u, v \in V$

V) Simetría conjugada:  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

**Observación 3.0.1.** En el caso  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, (V) \iff \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Ejemplos:

a) El producto interno Euclideo sobre  $\mathbb{F}^n$

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + \dots + z_n \cdot \overline{w_n}$$

b) Si  $c_1, \dots, c_n > 0$ , entonces

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \cdot z_i \cdot \overline{w_i}$$

c) Si  $V = \mathcal{C}[-1, 1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

d) Si  $V = \mathbb{R}[x]$  entonces

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

### Integrales

Si  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  y  $f \geq 0$  definimos la integral de  $f$  como el "área bajo la curva".

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)$$

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{N} \cdot i$$

$$i = 0, \dots, N$$

1.

**Teorema 3.0.1** (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que para  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple  $F'(x) = f(x)$  (primitiva).*

Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^J \int_{A_j=[a_j, b_j]} f(x) dx$$

2. Linealidad:

$$\mathcal{I} : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$$

$$f(x) \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

es una tra lineal.

Ejemplos:

1. Monomio:

$$p(t) = t^k \quad P(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

$P$  es primitiva de  $p$ :

$$P'(t) = t^k = p(t)$$

$$\therefore TFC$$

$$\int_0^t p(s) ds = P(t) - P(0)$$

2. Polinomios:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$$\int_0^t p(s) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^t s^k ds$$

3. Exponenciales:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} \quad (\lambda \neq 0) \\ F(x) &= \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \\ \therefore \int_0^x e^{\lambda t} dt &= F(x) - F(0) = \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} \end{aligned}$$

4. Seno-Coseno:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ f(x) &= e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x \\ F(x) &= \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} \\ \therefore \int_0^x f(t) dt &= \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} \\ \int_0^x f(t) dt &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + i \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} \\ \implies \int_0^x \sin \lambda t dt &= \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} \\ \int_0^x \cos \lambda t dt &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \end{aligned}$$

### 3.1. Espacio de producto interno

**Definición 3.1.1** (Espacio de producto interno).  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de producto interno (e.p.i.) si  $V$  es un espacio vectorial y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es producto interno sobre  $V$ .

**Proposición 3.1.1** (Propiedades básicas).

(a)

$$\forall u \in V \quad v \mapsto \langle v, u \rangle$$

*Es una transformación lineal de  $V$  hacia  $\mathbb{F}$*

(b)

$$\langle 0, u \rangle = 0 \quad \forall u \in V$$

(c)

$$\langle u, 0 \rangle = 0 \quad \forall u \in V$$

(d)

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$$

(e)

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

### 3.2. Norma

**Definición 3.2.1** (Norma). Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de producto interno, definimos la norma asociada como:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Propiedades: Sea  $v \in V$

(a)

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

(b)

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

**Intuición geométrica:**

Sean  $u, v \in \mathbb{R}^2$

Por teo del coseno

$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

$$\|v - u\|^2 = \langle v - u, v - u \rangle = \|v\|^2 - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \|u\|^2$$

$$\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle$$

Reemplazando:

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$$