



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre de 2019

Ánàlisis Funcional - MAT2555

Nicholas Mc-Donnell

Índice

I	Espacios de Banach	3
1.	Introducción a los Espacios de Banach	3
1.1.	Problema	7
1.1.1.	Pregunta	7
1.1.2.	Primero	7

Preliminares

Contenidos

- 1) Espacios de Banach: Definiciones Básicas, Hahn-Banach, Consecuencias del Teorema de Bairi
- 2) Espacios de Hilbert: Definiciones, Bases Hilbertianas, Proyección Dual de un Hilbert, Lax-Milgram
- 3) Topologías débiles: Espacios reflexivos
- 4) Teoría Espectral

Textos

- Reed and Simon (Functional Analysis)
- Rudin (Functional Analysis)
- Hain Brenzin

Interrogaciones

3 Interrogaciones + 1 Examen. Si hay exención sería con 6

Fechas

I1: Semana 23-27/9

I2: Semana 14-19/10

I3: Semena 18-22/11

Ex: Semana 2-6/12

Parte I

Espacios de Banach

1. Introducción a los Espacios de Banach

Definición 1.1 (Espacio de Banach). Sea E un e.v., una función $\|\cdot\|$ tq

- $\|x\| \geq 0 \forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall x \in E \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Ejemplo: 1.1. En \mathbb{C}^n , si $z \in \mathbb{C}^n, z = (z_1, \dots, z_n)$ $\|z\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p\right)^{1/p}$

Ejemplo: 1.2. Si (X, \mathcal{B}, μ) es e. de medida y si $1 \leq p < \infty, E = L^p(X)$; La norma es $\|f\| = \left(\int_X |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$

Observación 1.1. Si $\|\cdot\|$ es norma en E , entonces $d_E(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica o distancia en E .

Definición 1.2 (Espacio de Banach). E e.v. con norma $\|\cdot\|$ se dice espacio de Banach si es completo con respecto a d_E .

Ejemplo: 1.3. Todos los anteriores son Banach

Ejemplo: 1.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $E = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{continúa tq } \int_\Omega |f(x)| dx < \infty\}$ en $E, \|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| dx < \infty$ es norma

Ejemplo: 1.5. Sea E un e.v. con norma, y sea $x_n \in E$ tal que $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$

Q: Si $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, ¿qué podemos decir de s_n ?

Si $1 \leq m < n$ entonces $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n x_k$, luego $\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^\infty \|x_k\|$

De aquí no es difícil ver que, como $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$. Entonces s_n es de Cauchy. Ciertamente s_n tiene límite en E cuando E es de Banach.

Definición 1.3 (Convergencia Absoluta). Un E e.v. con norma, si $x_n \in E$ es tq $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$, diremos que la serie es absolutamente convergente

Definición 1.4 (Convergencia en Norma). Si $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ es convergente en E converge respecto a d_E , diremos que s_n converge en norma

Proposición 1.1. Si E es Banach y $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, entonces $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ converge en norma. (Notación: $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$) Recíprocamente si E e.v. con norma y si cada serie absolutamente convergente es también convergente en norma, entonces E es Banach.

Demostración. \Leftarrow : Listo anteriormente.

\Rightarrow : Sea x_n de Cauchy en E . Claramente, basta encontrar x_{n_k} convergente.

Como x_n es de Cauchy, existe x_{n_k} tq $\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \frac{1}{2^k}$ si esto es verdad.

$$x_{n_k} - x_{n_1} = \sum_{j=2}^k (x_{n_j} - x_{n_{j-1}})$$

Pero $\sum_{j=2}^{\infty} \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty$ así que $x_{n_k} - x_{n_1} \rightarrow x \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x + x_{n_1}$.

Para ver que $\exists x_{n_k}$ con $\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \frac{1}{2^k}$, sea $k = 1$, para $\varepsilon = \frac{1}{2} \exists n_1$ tq $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2} \forall n, m \geq n_1$, esto da n_1 . Si $1 \leq n_1 < \dots < n_k$ son tq $\|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| \leq \frac{1}{2^j}$, $j = 1, \dots, k-1$, $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k} \forall n, m \geq n_k$, sea $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$. Sea $n_{k+1} > n_k$ tq $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Esto construye x_{n_k} . \square

Ejemplo: 1.6. $M^n(\mathbb{R})$ matrices de $n \times n$ en \mathbb{R} , $A \in M^n(\mathbb{R})$ entonces $\|A\| = (\text{tr}(A^T A))^{1/2}$

Definición 1.5 (Transformación Lineal). Sean E, F e.v. (sobre \mathbb{C} o \mathbb{R}). Una transformación lineal es una función $T : E \rightarrow F$ tq $T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty \forall x, y \in E \forall \lambda$.

Teorema 1.2 (Caracterización de continuidad de funciones lineales). Sean E, F e.v.n., y sea $T : E \rightarrow F$ una transformación lineal. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) T es continua en x para todo $x \in E$.

2) T es continua en 0_E

3) $\sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F < \infty$

4) $\exists c > 0 \forall x \in E : \|Tx\|_F \leq c \|x\|_E$

Demostración. Se demostrará $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ es trivial

Para $2 \Rightarrow 3$, sea $\varepsilon = 1$, y un $\delta > 0$ tq

$$\|x - 0_E\|_E < \delta \Rightarrow \|Tx - T(0)\|_F < 1$$

Como T es lineal tenemos que $Tx - T(0) = Tx$, y además se tiene que $x - 0_E = x$. Luego,

$$\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|Tx\|_F < 1$$

Ahora, para todo $x \in E$ tq $\|x\| = 1$, $\|\delta x\| = \delta \|x\|$. Con esto,

$$\left\| \frac{\delta}{2} x \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Así, por lo anterior tenemos que

$$\left\| T \left(\frac{\delta}{2} x \right) \right\| < 1$$

Eso significa que para todo $x \in E$ tq $\|x\| = 1$ se tiene que

$$\|Tx\| < \frac{2}{\delta}$$

Con lo que tenemos lo pedido.

Para $3 \implies 4$, sea $c_0 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$, entonces para todo $x \in E$ distinto de cero, tenemos que

$$\left(\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \implies \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq c_0 \right) \implies \|Tx\|_F \leq c_0 \|x\|_E$$

Con lo que se llega a lo que queríamos.

Por último, para $4 \implies 1$, sea $c > 0$ tq $\|Tx\|_F \leq c \|x\|_E$. Luego,

$$\|Tx - Ty\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq c \|x - y\|_E$$

Por lo que T es Lipschitz, por lo que es continua. □

Definición 1.6 (Norma de operador/Funcional Acotado). Para E, V e.v.n $T : E \rightarrow F$ que cumple 1-2-3-4 se llama funcional acotado (u operador lineal acotado); se define $\|T\|_{E,F} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c \|x\| \forall x \in E\}$

Definición 1.7. Para E, V e.v.n. sea $\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \rightarrow F \text{ lineal, acotado}\}$

Proposición 1.3. $\|\cdot\|_{E,F}$ es norma en $\mathcal{L}(E, F)$

Demostración. Claramente cumple todo en base a la definición □

Proposición 1.4. Si F es Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es Banach con respecto a $\|\cdot\|_{E,F}$

Demostración. Sean $T_n : E \rightarrow F$ lineales continuas, Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_{E,F}$. Observemos que, para cada $x \in E$ fijo, $y_n = T_n x$ es Cauchy en F ; pues $\|y_n - y_m\|_F = \|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$.

Si $x = 0$, y_n es constante, por lo que es Cauchy.

Si $x \neq 0$, sea $\varepsilon > 0$. T_n es Cauchy $\implies \exists n_0 : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \forall n, m \geq n_0$. Así: $y_n = T_n x$ es

de Cauchy en F , como F es completo, $y_n \rightarrow y \equiv Tx$. En otras palabras, $T_n x \rightarrow Tx$.

Vamos a ver que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y que $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Primero: $\forall x \in E \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T_n(x + \lambda y) = T_n x + \lambda T_n y \rightarrow T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty$.

Segundo: (Ejercicio) Como T_n es Cauchy, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = C < \infty$. Entonces $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq C \|x\| \rightarrow \|Tx\| \leq C \|x\|$.

Último: Verificar que $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, sea ε, n_0 tq $\|T_n - T_m\| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$. Entonces $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \forall n, m \geq n_0 \forall x \in E$. Así $\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\| \forall n \geq n_0 \forall x \in E$ por lo que $\|T - T_n\| \leq \varepsilon \forall n \geq n_0$ \square

Definición 1.8 (Dual). Si E es e.v.n., definimos su dual (topológico) como:

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C}) \text{ o } \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

Ejemplo: 1.7. Tomemos $E = \mathbb{R}^n$, y sean $S, T \in \mathcal{L}(E)$.

$$\|S \circ T(x)\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

por lo que

$$\|S \circ T\| \leq \|T\| \|S\|$$

Entonces $\|T^k\| \leq \|T\|^k$

Proposición 1.5. Si E es Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$, $\|T\| < 1$, $I - T$ es invertible, con inversa continua, entonces $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$

Demostración. Sale con truco típico. \square

Ejemplo: 1.8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $\kappa \in L^2(\Omega \times \Omega; \mathbb{R})$. Definamos $T_\kappa : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

donde $f \mapsto T_\kappa(f)(x) = \int_\Omega \kappa(x, y) f(y) dy$

T_κ es lineal. Veamos que $T_\kappa(f) \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \left| \int_\Omega \kappa(x, y) f(y) dy \right|^2 dx \leq \int_\Omega \int_\Omega \kappa^2(x, y) dy \int_\Omega f^2(y) dy dx$$

O sea, ya que $\int_\Omega |T(f)(x)|^2 dx = \|T_\kappa f\|_{L^2(\Omega)}^2$

$$\|T_\kappa f\| \leq \|\kappa\| \|f\|$$

Definición 1.9. Sea E e.v.n., $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ se dice semi-norma si:

$$\blacksquare \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in E$$

$$\blacksquare \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall x \in E \forall \lambda$$

Ejemplo: 1.9. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $\mathcal{C}' = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas, con derivadas continuas acotadas}\}$, $p(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|$ es una semi-norma.

1.1. Problema

Sea E e.v.n. sobre \mathbb{R} , $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ semi-norma, $F \subseteq E$ s.e.v. y $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi(x) \leq p(x) \forall x \in F$

1.1.1. Pregunta

$$\exists \varphi_1 : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineal tq } \varphi_1(x) = \varphi(x) \forall x \in F \text{ y } \varphi_1(x) \leq p(x) \forall x \in E?$$

1.1.2. Primero

Sea F s.e.v. de E , $F \subsetneq E$; tomemos $x \in E \setminus F$ (en particular $x \neq 0$), y consideramos $F_1 = \langle \{x\} \rangle \oplus F$. Entonces $\forall y \in F_1 \exists! \lambda \in \mathbb{R}, z \in F$ tq $y = \lambda x + z$. Si $\varphi_1 : F_1 \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la linealidad implica que $\varphi_1(y) = \lambda \varphi_1(x) + \varphi_1(z)$ y si φ_1 es extensión de φ , $\varphi_1(y) = \lambda \varphi_1(x) + \varphi(z)$. En otras palabras, para extender φ a F_1 basta escoger $\varphi_1(x) \in \mathbb{R}$, pero tenemos que escogerlo de modo que $\lambda \varphi_1(x) + \varphi(z) \leq p(\lambda x + z) \forall z \in F$.

Lema 1.6. Para E, p, F, φ como se acaban de describir.

$$A = \sup_{\substack{z \in F \\ \alpha > 0}} \left(\frac{1}{\alpha} (-p(z - \alpha x) + \varphi(z)) \right) \leq \inf_{\substack{z \in F \\ \alpha > 0}} \left(\frac{1}{\alpha} (p(z + \alpha x) - \varphi(z)) \right) = B$$

Demostración. Se tiene $\forall \alpha, \beta > 0, \forall z_1, z_2 \in F$

$$\begin{aligned} \alpha \varphi(z_1) + \beta \varphi(z_2) &= (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha z_1}{\alpha + \beta} + \frac{\beta z_2}{\alpha + \beta} \right) \\ &= (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha(z_1 - \beta x)}{\alpha + \beta} + \frac{\beta(z_2 + \alpha x)}{\alpha + \beta} \right) \\ &\leq \alpha p(z_1 - \beta x) + \beta p(z_2 + \alpha x) \end{aligned}$$

Con esto se puede escribir

$$\begin{aligned}\alpha\varphi(z_1) - \alpha p(z_1 - \beta x) &\leq -\beta\varphi(z_2) + \beta p(z_2 + \alpha x) \\ \frac{1}{\beta}(\varphi(z_1) - p(z_1 - \beta x)) &\leq \frac{1}{\alpha}(-\varphi(z_2) + p(z_2 + \alpha x)) \\ \sup_{\substack{\beta > 0 \\ z_1 \in F}} \frac{1}{\beta}(\varphi(z_1) - p(z_1 - \beta x)) &\leq \inf_{\substack{\alpha > 0 \\ z_2 \in F}} \frac{1}{\alpha}(-\varphi(z_2) + p(z_2 + \alpha x))\end{aligned}$$

□

Corolario. $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq si definimos $\varphi_1(x) = \mu$, con $x \in E \setminus F$, entonces $\varphi_1(y) \leq p(y) \forall y \in F_1$

Demostración. Sea $\mu \in [A, B]$, para $y = \alpha x + z, \alpha > 0, z \in F$,

$$\begin{aligned}\varphi_1(y) &= \varphi_1(\alpha x + z) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{\alpha}(\varphi(z) - p(z + \alpha x)) + \mu \right) + p(\alpha x + z) \\ &\leq p(z + \alpha x)\end{aligned}$$

Entonces $\varphi_1(\alpha x + z) \leq p(\alpha x + z) \forall \alpha > 0$. Para $-\alpha, \alpha > 0$ se usa una idea similar, pero con el supremo. □

Teorema 1.7 (Hahn-Banach real). Sea E e.v. sobre \mathbb{R} , $F \subseteq E$ s.e.v., p semi-norma, $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi(x) \leq p(x) \forall x \in F$. Entonces existe $\varphi_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi_1(x) = \varphi(x) \forall x \in F$, $\varphi_1(x) \leq p(x) \forall x \in E$

Demostración. Sea E e.v. sobre \mathbb{R} , p semi-norma en E , $F \subseteq E$ s.e.v., si $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y $\varphi(x) \leq p(x) \forall x \in F$. Entonces, existe $\varphi_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, extensión de φ , tq $\varphi_1(x) \leq p(x) \forall x \in E$ □

Definamos $\mathcal{C} = \{(H, \psi) : H \text{ s.e.v. de } E, F \subseteq H, \psi : H \rightarrow \mathbb{R}, \psi|_F = \varphi, \psi(x) \leq p(x) \forall x \in H\}$. Para $(H_1, \psi_1), (H_2, \psi_2) \in \mathcal{C}$. Se define $(H_1, \psi_1) \leq (H_2, \psi_2)$ ssi $H_1 \subseteq H_2$ y $\psi_2|_{H_1} = \psi_1$. ≤ es un orden parcial sobre \mathcal{C} .

1) $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pues $(F, \varphi) \in \mathcal{C}$.

2) Si $\{(H_i, \psi_i)\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}$ es totalmente ordenado, $\exists (H_s, \psi_s)$ cota superior de $\{(H_i, \psi_i)\}_{i \in I}$, o sea $H_s \supseteq H_i \forall i \in I, \psi_s|_{H_i} = \psi_i$.

Para esto:

Sea $H_s = \bigcup_{i \in I} H_i$. H_s es s.e.v. de E pues si $x, y \in H_s, \lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\exists i, j \in I$ tq $x \in H_i, y \in$

H_j , como $\{(H_i, \psi_i)\}$ es totalmente ordenado, se tiene que $H_i \subseteq H_j$ o $H_j \subseteq H_i$. Ahora, s.p.d.g. $H_i \subseteq H_j \implies x, y \in H_j \implies x + \lambda y \in H_j \subseteq H_s$.

Definamos $\psi_s : H_s \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\psi_s(x) = \psi_i(x) \text{ si } x \in H_i$$

Esto esta bien definido, pues $\{(H_i, \psi_i)\}$ es totalmente ordenado. Además $\psi(x) \leq p(x) \forall x \in H_s$ pues todo ψ_i satisface esto.

Esto prueba que $(H_s, \psi_s) \in \mathcal{C}$ y que $(H_i, \psi_i) \leq (H_s, \psi_s) \forall i \in I$. Ahora, por el lemma de Zorn existe $(H_*, \psi_*) \in \mathcal{C}$ que es maximal. Esto es $((H, \psi) \in \mathcal{C} \wedge (H_*, \psi_*) \leq (H, \psi)) \implies (H_*, \psi_*) = (H, \psi)$.

Afirmación: $H_* = E$. Si no: $\exists x \in E \setminus H_*$, por lo que podemos extender H_* y ψ_* , lo que es una contradicción, ya que (H_*, ψ_*) es maximal. Con esto se tiene que

Corolario. Sea E e.v.n. (sobre \mathbb{R} por ahora), $\forall x \in E, x \neq 0, \exists \varphi \in E^*$ tq $\varphi(x) = \|x\|$ y $\|\varphi\| = 1$

Demostración. Definamos $\varphi(\lambda x) = \lambda \|x\|$, $\varphi : \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y claramente $\varphi(\lambda x) \leq \|\lambda x\|$. Ahora usamos HB con $p(x) = \|x\|$. □

Teorema 1.8 (Hahn-Banach complejo). *Hahn-Banach, pero sobre \mathbb{C} .*

Demostración. La misma demostración, pero cambiar la frase $\forall x \varphi(x) \leq p(x)$ por $\forall x |\varphi(x)| \leq p(x)$ donde $|\cdot|$ es la norma en \mathbb{C} . □