Algebra Lineal

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2017

Índice general

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

1.1. Cuerpos

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, recordemos que se tienen las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad de la suma
$$a + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

2. Asociatividad de la suma
$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{F}$$

3. Existe un único elemento neutro para la suma, tal que:
$$x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

4. Para todo $x \in \mathbb{F}$ existe un único inverso para la suma, tal que:
$$x + y = 0 \quad (-x = y)$$

5. Conmutatividad del producto
$$xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

6. Asociatividad del producto
$$(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

7. Existe único neutro para el producto, el 1, tal que:
$$x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

8. Todo elemento $x \neq 0$ posee inverso multiplicativo único, tal que:

$$x \cdot y = 1 \quad (x^{-1} = y)$$

9. Distributividad de $\cdot$ con respecto a $+$

$$x \cdot (y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{F}$$

Definición 1.1.1 (Cuerpo)**.** Un cuerpo es un conjunto dotado de dos operaciones $(\mathbb{F}, +, \cdot)$, que cumplen lo siguiente:

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

- $(\mathbb{F}, +)$ es grupo abeliano
- $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano (0 es el neutro aditivo)
- $a, b, c \in \mathbb{F} \implies a(b + c) = ab + ac$

Ejemplos:

(a) $\mathbb{N}$ con $+$ y $\cdot$ usuales. No, no hay inverso aditivo.

(b) $\mathbb{Z}$ con $+$ y $\cdot$ usuales. No, no hay inverso multiplicativo.

(c) $\mathbb{Q}$ con $+$ y $\cdot$ usuales. Si.

(d) $\mathbb{R}$ con $+$ y $\cdot$ usuales. Si.

(e) $\mathbb{C}$ con $+$ y $\cdot$ usuales. Si.

(f) $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ con $+$ y $\cdot$ definida de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Definición 1.1.2 (Subcuerpo)**.** $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{F}$ es un subcuerpo si $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ es un cuerpo (donde $+$ y $\cdot$ vienen de $(\mathbb{F}, +, \cdot)$)

Proposición 1.1.1. *Sea* $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ *un cuerpo* $\mathbb{L}$ *es subcuerpo* $\iff$

(a) $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{L}$

(b) $\mathbb{L}$ *es cerrado para* $+$*, y* $\forall x \in \mathbb{L} \implies \exists -x \in \mathbb{L}$

(c) $\mathbb{L}$ *es cerrado para* $\cdot$*, y* $\forall x \in \mathbb{L} \setminus \{0\} \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{L}$

Demostración. $\Longrightarrow$ trivial
$\Longleftarrow$

1. La propiedad se hereda de $(\mathbb{F}, +, \cdot)$
2. Idem
3. Por (a)
4. Por (b)
5. La propiedad se hereda de $(\mathbb{F}, +, \cdot)$
6. Idem
7. Por (a)
8. Por (c)
9. La propiedad se hereda de $(\mathbb{F}, +, \cdot)$

□

Ejemplos:

1. $\mathbb{F}$ es un subcuerpo de $\mathbb{F}$
2. $\mathbb{R}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$
3. $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo de $\mathbb{R}$
4. $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ es subcuerpo de $\mathbb{R}$

Lema 1.1.2. *Todo subcuerpo de $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$*

Demostración. Sea $\mathbb{L}$ un subcuerpo de $\mathbb{R}$

$$(a) \implies \{0, 1\} \subseteq \mathbb{L}$$

$$1 \in \mathbb{L} \implies \mathbb{N} \subseteq \mathbb{L} \quad (b)$$

$$\implies \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{L} \quad (b)$$

$$\implies \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L} \quad (c)$$

Observación: El único subcuerpo de $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$ (ver dem. anterior) □

Ejercicio: Existen infinitos subcuerpos de $\mathbb{R}$ Recursivamente: sean $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, ...$ los números primos. Definamos:

$$\mathbb{L}_0$$

1.2. Espacios Vectoriales

Definición 1.2.1 (Espacio Vectorial)**.**

1.3. Subespacios generados

1.3.1. Combinaciones lineales

Teorema 1.3.1 (*)**.** *Sea V espacio vectorial generado por un conjunto finito m de vectores. Entonces cualquier*

Demostración. Sean $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ con $n > m$. Por contradicción, suponiendo que son linealmente independientes.
Sean $< v_1, ..., v_m >= V$ (por hipótesis)

$$\implies u_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(1)} v_i$$

Claramente $(\lambda_1^{(1)}, ..., \lambda_m^{(1)}) \neq 0$ (de lo contrario $u_1 = 0$)
Sin perder generalidad, $\lambda_1^{(1)} \neq 0$ y por el Lema:

$$< u_1, v_2, ..., v_m >= V$$

Ahora, existan $(\lambda_1^{(2)}, ..., \lambda_m^{(2)} \neq (0, ..., 0)$ tales que:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i^{(2)} v_i$$

Más. aun, $(\lambda_2^{(2)}, ..., \lambda_m^{(2)} \neq (0, ..., 0)$
De lo contrario:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 0 = \lambda_1^{(2)} u_1 - u_2 \rightarrow\leftarrow (u_1, ..., u_n \text{ son linealmente independientes})$$

En conclusión, sin perdida de generalidad $\lambda_2^{(2)} \neq 0$
Por el Lema:

$$< u_1, u_2, v_3 ..., v_m >= V$$

Iterando el argumento, se tiene que:

$$< u_1, ..., u_m >= V$$

Notemos que $u_{m+1} \in < u_1, ..., u_m >$

$$0 \neq u_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i \rightarrow\leftarrow$$

□

Definición 1.3.1 (Base,Dimensión finita)**.** Una base B de un espacio vectorial es un conjunto $B \subseteq V$ tal que:

1. B es linealmente independiente
2. $< B >= V$

Un espacio vectorial V se dice finito-dimensional si existe un conjunto $S \subseteq V, \|S\| < \infty$ tal que $< S >= V$.

Corolario. *Si V es finito-dimensional, todas las bases de V son finitas y tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Sean B_1 y B_2 bases de V.
Por Teo (*), $\|B_1\|, \|B_2\| \leq m$, donde m es el tamaño de S tal que $< S >= V$ y $\|S\| < \infty$.
Como B_1 es base, $< B_1 >= V$, y como B_2 es linealmente independiente:

$$Teo(*) \implies \|B_2\| \leq \|B_1\|$$

Como B_2 es base. □

Definición 1.3.2 (Dimensión)**.** Si V es un espacio vectorial finito-dimensional definimos su dimensión, $\dim V$, como el cardinal de una base cualquiera de V. Si V no es finito-dimensional $dimV = +\infty$

Ejemplos:

1. $V = Sim^2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^T\}$

$$abc$$

2. $\dim(\mathbb{R}^{n\times n}) = n^2$
3. $\dim(Antisim^m(\mathbb{R})) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ y $\dim(Sim^m(\mathbb{R})) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$
4. $P_n(\mathbb{C}$
   $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es base
   a) $< \{1, x, x^2, ..., x^n\} >= P_n(\mathbb{C})$
      $p \in P_n(\mathbb{C})$
      $\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x +,,, + a_n x^n \in < \{1, x, x^2, ..., x^n\} >$

b) $\{1, x, ..., x^n\}$ es linealmente independiente.
Por contradicción supongamos $(a_0, a_1, ..., a_n) \neq (0, 0, ..., 0)$
$0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$ Con igualdad de funciones.
$\iff (\forall x \in \mathbb{C}) 0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$
Recuerdo (TFA): Todo polinomio complejo de grado ≥ 1 posee una raÃz compleja.
$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n = (x - z_1) \cdot a'_0 \cdot 1 + a'_1 \cdot x + ... + a'_{n-1} \cdot x^{n-1}$
$\implies p(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot ...(x - z_k) \cdot A$ donde $k = gr(p)$, y $A \neq 0$.
Tomando $z' \neq z_1, z_2, ..., z_k$, tenemos: $0 = (z' - z_1) \cdot (z' - z_2) \cdot ...(z' - z_k) \cdot A$ Pero multiplicar cosas distintas de 0 no da 0.

$$\rightarrow\leftarrow$$

$\dim(P_n(\mathbb{C})) = n + 1$

Observación 1.3.1. $\{0\}, \dim\{0\} = 0$, notando que base es $\emptyset$, tenemos que $< \emptyset >= \{0\}$

Lema 1.3.2. *Sea $S \subseteq, S = \{v_1, ..., v_n\}$ conjunto linealmente independiente.*
$v \notin < v_1, ..., v_n > \implies \{v, v_1, ..., v_n\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Ejercicio □

Teorema 1.3.3. *Sea V espacio vectorial finito dimensional, entonces:*

1. *Todo conjunto linealmente extiende a una base*

2. *Todo conjunto generado contiene una base*

Todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ finito dimensional posee una base.

Demostración. a) Sea $v \in V \setminus \{0\}$. Entonces $\{V\}$ es linealmente independiente.
Por Teo, estamos listos.

Dem(Teo):
V es finito dimensional $\implies \exists\{v_1, ..., v_n\}$ que genera V.
Sea $S = \{v_1, ..., v_n\}$ conjunto linealmente independiente.
Dos casos:

a) Si $< S >= V$, entonces S es base

b) Si $< S > \subset V$, entonces existe $v \notin < S >$, y opr el Lema, $S \cup \{V\}$ es linealmente independiente.

Inductivamente, o bien eventualmente 1, o iteramos 2.

Sin embargo, 2 no puede ocurrir infinitas veces.
Teo(*) $\implies$ todo conjunto linealmente independiente posee cardinalidad $\leq n$.

b) Sea S, tal que $< S >= V$.
Consideremos, $d = \text{máx}\{|S'| : S' \subseteq S, S' \text{ es linealmente independiente}\}$
Notemos que $d \leq n < +\infty$, por el Teo(*).
Como el máximo se alcanza, existe S' tal que $|S'| = d$ y S' es linealmente independiente.
Por contradicción, supongamos que S' no es base.

$$< S' > \subset V =< S >$$

Luego, $S \setminus < S' > \neq \emptyset$. De lo contrario $< S > \setminus < S' > \neq \emptyset$
$\implies S \subseteq < S' > \implies < S > \subset < S' > \implies < S' >= V$
Finalmente, existe $v \in S \setminus < S' >$, y por el Lema, $S' \cup \{v\}$ es linealmente independiente y $|S' \cup \{v\}| = d + 1$

$$\rightarrow\leftarrow$$

□

Corolario. *Sea $W \subset V$ subespacio propio ($W \neq V$) con V finito dimensional. Entonces,* $\dim W < \dim V$

Demostración.

- Si $\dim W = 0 \implies \dim W = 0 < \dim V$.
- Si $\dim W \geq 1$ entonces, por el corolario, W tiene una base.

$$B_W = \{w_1, ..., w_m\} \quad \text{es base de } W$$

Como W es subespacio propio, existe $v \in V \setminus < B_W >$
$\implies B_W \cup \{v\}$ es linealmente independiente y $\subset V$.
Por Teo. a), $B_W \cup \{v\}$ se extiende cin una base $B_V, |B_V| \geq |B_W| + 1$.

$$\dim W = |B_W| < |B_W| + 1 \leq |B_V| = \dim V$$

□

Proposición 1.3.4. *Sean U, W subespacios vectoriales de un espacio vectorial finito dimensional V. Entonces:*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Demostración. Si $U \cap W = \{0\}$, trivial
Si $U \cap W \neq \{0\}$, entonces sea $B_{U \cap W}$ base de $U \cap W$.

$$B_{U \cap W} = \{v_1, ...v_m\}$$

Base de U: Sea $B_U = \{v_1, ..., v_m, u_1, ..., u_p\}$
Base de W: Sea $B_W = \{v_1, ...v_m, w_1, ..., w_r\}$

Ambos existen por Teo.a).
Afirmación: $B_U \cap B_W = \{v_1, ..., v_m, u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r\}$ es base de $U + W$.

1. $< B_U \cap B_W >= U + W$
   $v \in u + w, u \in U, w \in W$

$$\implies v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^{r} \delta_k w_k + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j \in < B_U \cup B_W >$$

2. $B_U \cup B_W$ es linealmente independiente:

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j + \sum_{k=1}^{p} \nu_k u_k$$

$$-\sum_{k=1}^{p} \nu_k u_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \in U \cap W$$

$$\implies 0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \implies \nu_k, \lambda_i = 0 \, \forall k, i$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = |b_{U \cap W}|$$

$$\dim U = |B_U|$$

$$\dim W = |B_W|$$

$$\dim(U + W) = |B_U \cup B_W|$$

□

1.4. Transformaciones lineales

Definición 1.4.1 (Transformación lineal)**.** Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo común $\mathbb{F}$. Una función $T : V \to W$ es transformación lineal si

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Ejemplos:

1. $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m, T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ y $A \in \mathbb{F}^{m \times n} \quad v \mapsto Av$
   T es una transformación lineal

2. $V = W = C^\infty(\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es infinitamente diferenciable$\}$
   $V = C^1(\mathbb{R}), W = C^0(\mathbb{R})$
   $T : V \to W$

$f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
Por álgebra de funciones diferenciables si $f, g \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}(\lambda f + g)}{\mathrm{d}x} = \lambda \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

3. $\mathbb{R}[x]$ Es un espacio vectorial
   $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$
   $p \mapsto \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

4. $V = C^0([0,1]), W = \mathbb{R}$
   $T : V \to W$
   $f \to\mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Teorema 1.4.1. *Sea V un espacio finito dimensional y $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de V.*
Sea W un espacio vectorial y consideramos vectores $w_1, ...w_n \in W$
Entonces $\exists! T : V \to W : T(v_i) = w_i \forall i = 1, ..., n$

Demostración.

- Existencia: Si $v \in V$ entonces:

$$(*)\, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

Definimos:

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)$$

$T : V \to W$ es una función porque $\forall v \in V$ la descomposición (*) es única.
Además, es lineal. Si $v, u \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_i \lambda_i v_i$$

$$u = \sum_i \mu_i v_i$$

$$T(\lambda v + u) = T(\sum_i (\lambda\lambda_i + \mu_i) v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \sum_i (\lambda\lambda_i + \mu_i) T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda \sum_i \lambda_i T(v_i) + \sum_i \mu_i T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u)$$

- Unicidad: Sean T, T' transformaciones lineales tales que:

$$T(v_i) = T'(v_i) = w_i$$

Sea $v \in V$, entonces:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda T'(v_i)$$

$$T(v) = T'(v) \implies T = T'$$

□

Propiedades:
Si $T : V \to W$ transformaciones lineales, entonces:

1. $T(0) = 0$
2. $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)$

Demostración. □

La importancia de este teorema se relaciona con el hecho de poder definir transformaciones lineales sólo a través de como actuan sobre una base. Esto se relaciona con la noción de matriz representante.

Definición 1.4.2. Si $T : V \to W$ transformación lineal, definimos:

- Núcleo(Kernel): $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$, subespacio vectorial de V
- Imagen(Rango): $T(V) = \{w \in W : \exists v \in V \, T(v) = w\}$, subespacio vectorial de W

Teorema 1.4.2 (Núcleo-Imagen)**.** *Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$ y $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces, si V es finito dimensional:*

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(T(V))$$

Demostración. Como $\ker T$ es subespacio vectorial de V entonces es finito dimensional y por ende posee una base:

$$\{v_1, ..., v_k\} \quad \text{es base de} \ker T$$

Por un teorema podemos extender a una base de V
$\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_u\}$ es base de V

Sea ahora $w \in \Im(T) \implies w = T(v)$
Entonces,

$$w = T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{F}$$

$$w = \sum^{n} +i = k + 1\lambda_i T(v_i)$$

$$\in < \{T(v_{k+1}), ..., T(v_n)\} >$$

Queremos probar ahora que $(T(v_i))_{i=k+1}^{n}$ son linealmente independiente. Supongamos $\exists \lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$ tal que:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(v_I) = 0$$

$$T(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i) = 0$$

$$\implies \in Ker(T)$$

$\exists \lambda_1, ..., \lambda_k$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{n} (-\lambda_i) v_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = 0$$

Como $\{v_1, ..., v_n\}$ son linealmente independientes tenemos que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Finalmente:

$$\dim V = n, \dim \ker T = k$$

$$\dim \Im T = n - k$$

□

1.4.1. Algebra de Transformaciones Lineales

Def[Espacio de transformaciones lineales]:
Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Definimos

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W : T \text{ es transformación lineal}\}$$

Dadas $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, definimos

$$T_1 + T_2 : V \to W$$

$$v \mapsto T_1 v + T_2 v$$

$$\lambda T_1 : V \to W$$

$$v \mapsto \lambda T_1 v$$

Teorema

$\mathcal{L}(V,W)$ dotado de $+$ y $\cdot$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$
Dem: Primero probar que $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ y $\lambda T_1 \in \mathcal{L}(V,W)$
$T_1 + T_2$ es transformación lineal.
$(T_1+T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1+T_2)(v) + (T_1+T_2)(w)$ $(T_1+T_2)(\lambda v + w) = T_1(\lambda v + w) + T_2(\lambda v + w)$
$(T_1+T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1+T_2)(v) + (T_1+T_2)(w)$ Similarmente:

$$(\lambda T_1)(\mu v + w) = \mu(\lambda T_1)(v) + (\lambda T_1)(w)$$

Y el resto de las propiedades se dejan propuestas como ejercicio.

Teorema

Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$, $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Luego, $\mathcal{L}(V,W)$ es un espacio finito dimensional y $\dim \mathcal{L}(V,W) = m \cdot n$
Dem: Sean $V =< \{v_1, ..., 0_i, ..., v_n\} >$, $W =< \{w_1, ..., 0_j, ..., w_n\} >$, bases respectivamente.
Dados $1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n$, definimos $E^{p,q} \in \mathcal{L}(V,W)$ como única transformación lineal que satisface:

$$E^{p,q}(v_j) = \begin{cases} w_p & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}$$

$$E^{p,q} \in \mathcal{L}(V,W)$$

$E^{p,q}$ esta bien definida por el primer teorema de la sección

$$\mathcal{B}_L = \{E^{p,q} : 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m\}$$

Afirmación: $\mathcal{B}_L$ es base de $\mathcal{L}(V,W)$

$$< \mathcal{B}_L >= \mathcal{L} : \text{Sea } T \in \mathcal{L}(V,W)$$

Dado $1 \leq j \leq n$, existen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{F}$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,j} w_i$$

Dado $v \in V$, existen $\mu_1, ...\mu_n \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i)$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mu_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_{i} \sum_{j} \lambda_{i,j} \mu_j E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_{i} \left(\sum_{j} \lambda_{i,j} E^{i,j} \left(\sum_{k} \mu_k v_k \right) \right)$$

$$T(v) = \sum_{i} \sum_{j} \lambda_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$\mathcal{B}_L$ es linealmente independiente: Supongamos que:

$$\sum_{i} \sum_{j} \lambda_{i,j} E^{i,j} = 0$$

Dado $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{i} \sum_{j} \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_k) = \mathbf{0}$$

$$\iff \sum_{i} \lambda_{i,k} w_i = \mathbf{0}$$

$$\iff \lambda_{1,k} = \lambda_{2,k} = ... = \lambda_{m,k} = 0 \quad \forall k = 1, ..., n$$

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = |\mathcal{B}| = m \cdot n$$

1.4.2. Matriz representante

El Teo anterior permite identificar transformaciones lineales entre espacios finito-dimensionales y matrices $m \times n$ (donde $m = \dim W, n = \dim V$).

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W), \mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$ base de $V, \mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_m\}$ base de W.

Definimos la matriz representante de T con respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ como $\mathcal{M}(T) = (a_{ij})_{i=1...m, j=1...n}$, tal que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Si las bases no están claras por contexto usamos la notación $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$
Es facil ver que

$$\mathcal{M}(T_1 + \lambda T_2) = \mathcal{M}(T_1) + \lambda \mathcal{M}(T_2)$$

(Ejercicio)
De esta forma, $\mathcal{M}$ respeta"la estructura lineal de $\mathcal{L}(V, W)$

Ejemplos:
$\mathbb{F}^\infty = V = W$

1. $L : \mathbb{F}^\infty \to \mathbb{F}^\infty$
$$x = (x_1, x_2, ...)$$
$$Lx = (x_2, x_3, ...)$$

2. $R : \mathbb{F}^\infty \to \mathbb{F}^\infty$
$$x = (x_1, x_2, ...)$$
$$Rx = (0, x_1, x_2, ...)$$

Pregunta: $\mathcal{M}(L), \mathcal{M}(R)$?

1.4.3. Composición y Productos

Teo

Sean V, W, Z espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{W}, \mathcal{Z}$. Entonces por composición: $S \circ T : V \to Z$ dada por $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ es una transformación lineal.
Dem: Tenemos que probar que:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

En efecto:
$$(S \circ T)(\lambda u + v) = S(T(\lambda u + v)) = S(\lambda T(u) + T(v))$$
$$S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda S(T(u)) + S(T(v)) = lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

Definición 1.4.3. Endomorfismo
Una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, V)$ de dice endomorfismo u operador lineal. Denotamos $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. La composición funciona como producto sobre $End(V)$
Propiedades:

a) $I \circ S = S \circ I = S$ (I es neutro para $\circ$)

b)
- $S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$
- $(T_1 + T_2) \circ S = T_1 \circ S + T_2 \circ S$

c) $\lambda(S \circ T) = (\lambda S) \circ T = S \circ (\lambda S)$

Demostración. Ejercicio □

Importante notar que $\circ$ no es conmutativo.
También es importante observar que NO todo operador posee elemento inverso para $\circ$. Dado $T \in$

$End(V) \setminus \{0\}$, decimos que $S \in End(V) \setminus \{0\}$ es su inversa si:

$$S \circ T = T \circ S = I$$

Corolario

Sea V espacio vectorial finito-dimensional y $\mathbb{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V. Entonces $\{E^{p,1} : p, q = 1, ..., n\}$ es base de $End(v)$.

Demostración. Directo por Teo (+). □

Lema: Sean $S, T \in End(V)$ con V finito dimensional. Entonces:

$$\mathcal{M}(S \circ T) = \mathcal{M}(S) \cdot \mathcal{M}(T)$$

Demostración. Recordar que

$$\{E^{p,q} : p, q = 1, ..., n\}$$

son base de $End(V)$.

$$\mathcal{M}(S) = (b_{p,q})_{p=1,...,nq=1,...n}$$

□

1.4.4. Invertibilidad

Definición 1.4.4. $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se dice invertible si existe $S : W \to V$ tal que

$$S \circ T = I_V, T \circ S = I_W \tag{1.1}$$

Cuando T es invertible, denotamos T^{-1} com su inversa

$$T \text{ invertible} \iff T \text{ es inyectiva y es sobreyectiva}$$

Observación 1.4.1.

1. No todo $T \in End(V) \setminus \{0\}$ es invertible
2. En el caso $V = W$, I_V es neutro para $\circ$
3. Puede ser que $S \circ T = I$ y $T \circ S \neq I$

Teorema 1.4.3. *Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$ y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si T es invertible entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$*

Demostración. Queremos probar $T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2)$
Sean $v_1 = T^{-1}(w_1), v_2 = T^{-1}(w_2)$

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad /T^{-1}(\,)$$

$$v_1 + \lambda v_2 = T^{-1}(T(v_1) + \lambda T(v_2))$$

$$T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2) = T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) \qquad \square \quad (1.2)$$

Proposición 1.4.4. *Sean $T : V \to W, S : W \to Z$ lineales e invertibles. Entonces $S \circ T$ es lineal e invertible; mas aun*

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} \tag{1.3}$$

Demostración. $S \circ T$ es lineal (visto lunes).
Invertible: basta probar:

$$(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = I_Z$$

$$(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = T^{-1} \circ (S^{-1} \circ S) \circ T = T^{-1} \circ T = I_V$$

$\square$

Definición 1.4.5. Decimos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es no singular si $\ker T = [0]$. Notar ademas que T no singular si solo si inyectiva

$$Tv_1 = Tv_2 \iff T(v_1 - v_2) = 0 \tag{1.4}$$

Teorema 1.4.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:*
T no-singular $\iff$ T transforma conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes, es decir, $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$ l.i. $\implies$ $\{Tv_1, ..., Tv_k\} \subseteq W$ l.i.

Teorema 1.4.6. $\square$ *Sean V, W finito-dimensionales tal que $\dim V = \dim W$. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ entonces las siguientes son equivalentes:*

- i) *T es invertible*
- ii) *T es no-singular*
- iii) *T es sobreyectiva*
- iv) *Para toda base $\{v_1, ..., v_n\}$ de V, $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ es base de W.*
- v) *Existe $\{v_1, ..., v_n\}$ base de V tal que $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ es base de W*

Observación 1.4.2.

1. Si $\dim V \neq \dim W$
   $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m n < m$

$(x_1, .., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$
es inyectiva, pero no sobreyectiva

2. $V = W, \dim V = +\infty$
   $R : \mathbb{F}^\infty \to \mathbb{F}^\infty$
   $(x_1, ...) \mapsto (0, x_1, ...)$
   es inyectiva, pero no sobreyectiva

Demostración. $(i) \implies (ii)$
$(ii) \ker T = \{0\} \iff T(V) = W$
$(ii) \implies (iii)$
$(iii) T$ es sobre. Por TNI

$$\dim T = n \implies \dim \ker T = 0 \implies T \text{ no singular}$$

Si $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de V, por el Teo. anterior $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ se base de W □

1.5. Isomorfismos

Definición 1.5.1. Isomorfismos Sean V, W espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Decimos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es un isomorfismo si es invertible. En tal caso, diremos que V y W son isomorfos

Ejemplos:

1. $\mathbb{F}^{n+1}$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ son isomorfos
$$T : \mathbb{F}^{n+1} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$
$$(a_0, a_1, ..., a_n) \mapsto p(x) = \sum_{I=1}^{n} a_i x^i + a_o$$

2. (Coordenadas baricéntricas): Si $B = \{v_1, ..., v_n\}$ es base de V
$$(\forall v \in V) v = \sum_{I=1}^{n} \lambda_i v_i$$
$$[\cdot]_B : V \to \mathbb{F}^n$$
$$v \mapsto (\lambda_1, ..., \lambda_n) = [v]_B$$

3. V, W finito dimensional sobre $\mathbb{F}$, con
$$B_V = \{v_1, ..., v_n\}$$
$$B_W = \{w_1, .., w_m\}$$

$$\mathcal{M}(\cdot, B_V, B_W) : \mathcal{L}(V, W) \to \mathbb{F}^{n\times m}$$

$$T \mapsto \mathcal{M}(T, B_V, B_W)$$

es un isomorfismo (ejercicio)

Teorema 1.5.1. *Dos espacios finito dimensionales V, W (sobre $\mathbb{F}$ son isomorfos si solo si* $\dim V = \dim W$

Demostración. Sean $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V, $B_W = \{w_1, ..., w_m\}$ base de W.
$\Longrightarrow$ Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ isomorfismo

$$\{Tv_1, ..., Tv_n\} \subseteq W$$

Es un conjunto linealmente independiente (un Teorema)

$$\Longrightarrow n \leq \dim W = m$$

Tomando T^{-1}, (que también es isomorfismo) tomemos

$$\{T^{-1}w_1, ..., T^{-1}w_m\} \subseteq V$$

Es linealmente independiente

$$\Longrightarrow m \leq \dim V = n$$

$$\Longrightarrow m = n$$

$\Longleftarrow$ Suponemos $n = m$, sea T la única transformación lineal tal que

$$Tv_i = w_i \quad \forall I = 1, ..., n$$

Por el teorema $\square$, parte $(v) \implies (i)$ tenemos que T es isomorfismo. $\square$

1.5.1. Matrices representantes

Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$, y sean $T \in \mathcal{L}(V, W), B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V, $B_W = \{w_1, ..., w_m\}$ base de W.

$$[Tv_j]_{B_W} = (a_{1j}, ..., a_{mj}) \iff T(v_j) = \sum_{I=1}^{m} a_{ij} w_i \quad (\forall v \in V \exists a_{ij})$$

Luego, par todo $v \in V$

$$v = \sum_j \lambda_j v_j \quad (\exists \lambda_j) \iff [Tv]_{B_V} = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$$

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(v_j)$$

De esta forma,

$$[T(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$$

Notemos que A coincide con la matriz representante de T con respecto a las bases B_V y B_W.

$$\mathcal{M}(T, B_V, B_W) = M$$

Evaluar (*) para $v = v_j$

$$[T(v_j)]_{B_W} = A \cdot [v_j]_{B_V} = A \cdot e_j$$

$$\implies T(v_j) = \sum_{I=1}^{m} a_{i,j} \cdot w_i$$

$$\therefore T(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(v_j) = \sum_j \sum_i \lambda_j a_{i,j} w_i$$

$$T(v) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j} (\sum_q \lambda_q v_q) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$$\therefore T = \sum_i \sum_j a_{i,j} E^{I,j}$$

1.5.2. Cambios de Base:

Sean $B = (v_1, ..., v_n)$ y $B' = (v_1', ..., v_n')$ 2 bases (ordenadas).
Como se relacionan $[\cdot]_{'}B$ y $[\cdot]_B$?

$$T : V \to \mathbb{F}^n, U : V \to \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto [v]_B, v \mapsto [v]_{B'}$$

Notemos que $T \circ U^{-1} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n, [v]_B \mapsto [v]_{B'}$ es un isomorfismo.
Sea P la matriz representante de $T \circ U^{-1}$ con respecto a la base canónica en $\mathbb{F}^n$
Usando (*):

$$[v]_B = P \cdot [v]_{B'} \quad \forall v$$

Sea ahora $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Tomemos:

$$[T(v)]_B = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot [v]_B$$

$$P \cdot [T(v)]_{B'} = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P \cdot [v]_{B'}$$

$$[T(v)]_{B'} = \big(P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P\big) \cdot [v]_{B'}$$

$$\implies \mathcal{M}_{B',B}(T) = \big(P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P\big)$$

<u>Pregunta</u>: Como calcular P?

$$[v'_j]_B = P \cdot [v'_j]_{B'} = P \cdot j$$

$$P = \left[[v'_1]_B|[v'_2]_B|...|[v'_n]_B\right] \oplus$$

Teorema 1.5.2. *Sea V espacio vectorial finito-dimensional con bases ordenadas $B = (v_1, ..., v_n)$ y $B' = (v'_1, ...,' v'_n)$. Sea $T \in End(V)$. Luego*

$$\mathcal{M}_{B',B}(T) = P^{-1}\mathcal{M}_{B,B}(T)P$$

Definición 1.5.2. $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ son similares si $\exists P$ invertible tal que:

$$A = P^{-1}BP$$

1.6. Productos de Espacios Vectoriales

Definición 1.6.1. Sean $V_1, ..., V_m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Definimos el espacio producto como

$$V = V_1 \times ... \times V_m = \{(v_1, ..., v_m) : v_i \in V_i (\forall i = 1, ..., m)\}$$

1. Suma: $(v_1, ..., v_m) + (v'_1, ...v'_m) = (v_1 + v'_1, ..., v_m + v'_m)$
2. Producto por escalar: $\lambda \cdot (v_1, ..., v_m) = (\lambda v_1, ..., \lambda v_m)$

Proposición 1.6.1. *$V \times ... \times V_m$ con suma y producto escalar es un espacio vectorial.*

Demostración. Ejercicio: similar a $\mathbb{F}^n$ □

Proposición 1.6.2. *Sean $V_1, ..., V_m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Entonces $V_1 \times ... \times V_m$ es finito-dimensional y*

$$\dim(V_1 \times ... \times V_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim V_i$$

Demostración. Dado $I = 1, ..., m$ sea

$$B_{V_i} = \{V_{1,1}, ..., V_{i,n_i}\}$$

Base de V_i. Ahora sea

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} \{(0, ..., 0, v_{ij}, ..., 0) : j = 1, ..., n_i\}$$

Probaremos que B es base de $V_1 \times ... \times V_m$. Notemos que esto basta:

$$\dim V_1 \times ... \times V_m = |B| = \sum_{i=1}^{m} n_i = \sum_{i=1}^{m} \dim V_i$$

- <u>B genera</u>: Sea $v \in V \times ... \times V_m$, entonces

$$v = (v_1, ..., v_m) \quad \text{donde } v_i \in V_i$$

  Como B_{V_i} es base de V_i:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot v_{i,j}$$

$$v = \left(\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} v_{1,j}, ..., \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{m,j} v_{m,j} \right)$$

$$v = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} (0, ..., 0, v_{i,j}, 0, ..., 0) \in < B >$$

- B es linealmente independiente (ejercicio)

$\square$

1.6.1. Productos y Sumas directas

Teorema 1.6.3. *Sean $U_1, ...U_m$ subespacios vectoriales de V. Definimos la transformación lineal*

$$\Gamma : U_1 \times ... \times U_m \to U_1 + ... + U_m$$

$$\Gamma(u_1, ..., u_m) = u_1 + ... + u_m$$

Entonces, $U_1 + ... + U_m$ es suma directa si solo si Γ inyectiva

Observación 1.6.1. Notar que Γ siempre es sobreyectiva

Demostración.

$$\Gamma \text{ inyectiva} \iff \ker \Gamma = \{0\}$$

$$\iff [u_1 + ... + u_m = 0 \iff (u_1, ..., u_m) = (0, ..., 0)]$$

$$\iff U_1 + ... + U_m \text{ es directa}$$

$\square$

Capítulo 2

Parte II

2.1. Polinomios

Definición 2.1.1 (Grado)**.** Si $p(z) = a_0 + ... + a_n z^n$ con $a_n \neq 0$, entonces $gr(p) = n$. Si $p(z) = 0$ entonces $gr(p) = -\infty$

Proposición 2.1.1.

2.1.1. Algoritmo de la división

Recordemos que si p, s son enteros, no negativos, con $s \neq 0$, existen únicos q, r enteros no negativos tal que:

$$p = s \cdot q + r$$

Donde $r < s$.
De ahora en adelante, $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ a menos que se diga lo contrario.

Teorema 2.1.2 (División de polinomios)**.** *Sean $p, s \in \mathbb{F}[z]$ con $s \neq 0$. Entonces existen únicos polinomios $q, r \in \mathbb{F}[z]$ tales que:*

$$p = q \cdots + r \implies n = gr(q) + m$$

Con $gr(r) < gr(s)$.

Demostración. Sean $n = gr(p), m = gr(s)$. Definamos

$$T : \mathcal{P}_{n-m}(\mathbb{F}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(q, r) \mapsto q \cdot s + r$$

Probaremos que T es una transformación lineal biyectiva. Notar que esto es suficiente para concluir el Teorema.

- T es lineal

$$T((q_1, r_1) + \lambda(q_2, r_1)) = T(q_1, r_1) + \lambda T(q_2, r_2)$$

- T inyectivo: Basta probar que $\ker T = \{0\}$. En efecto, si (q, r) son tales que:

$$q \cdot s + r = 0$$

$$q \cdot s = -r$$

Comparando grados:

$$gr(LI) = gr(q) \cdot m, gr(LD) = \leq m - 1$$

$$\implies q = 0 \implies r = 0$$

- T sobreyectiva: Por el TNI, y como $\ker T = \{0\}$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1})$$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m}) + \dim(\mathcal{P}_{m-1}) = n + 1$$

$$\therefore \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = n + 1 = \dim \mathcal{P}_{n-}$$

Lo que implica que T es sobreyectiva.

□

Observación 2.1.1. La demostración del Teo. Anterior entrega un .ªlgoritmo”para dividir polinomios. Resolver la ecuación lineal no-homogénea

$$T(q, r) = p$$

Asignando bases a la partida y la llegada, se obtendrá un sistema lineal

$$Ax = b$$

2.1.2. Raíces de Polinomios

El estudio de la ecuación $p(z) = 0$ es sumamente útil para analizar un polinomio $p \in \mathbb{F}$

Definición 2.1.2 (Raíz)**.** $\lambda \in \mathbb{F}$ se dice raiz de un polinomio si

$$p(\lambda) = 0$$

Definición 2.1.3 (Factor)**.** $s \in \mathbb{F}[z]$ se dice factor de $p \in \mathbb{F}[z]$ si existe un polinomio $q \in \mathbb{F}[z]$ tal que:

$$p = q \cdot s$$

Teorema 2.1.3 (Raíces definen factores de grado 1)**.** *Sea* $p \in \mathbb{F}[z]$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$*. Entonces* $p(\lambda) = 0 \iff (z - \lambda)$ *es factor de* p

Demostración. $\Longleftarrow$ $(z - \lambda)$ factor de p, entonces $\exists q \in \mathbb{F}[z]$ tal que

$$p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z) \forall z \in \mathbb{F}$$

$$\implies p(\lambda) = 0 \cdot q(\lambda) = 0$$

implies. Por el algoritmo de la división para p y $s(z) = z - \lambda$, tenemos que $\exists! r \in \mathbb{F}[z]$ con $gr(r) \leq= 0 \implies r \in \mathbb{F}$ tal que

$$p(z) = q(z) \cdot (z - \lambda) + r$$

$$\implies 0 = p(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r$$

$$\therefore r = 0$$

□

Corolario (Un polinomio tiene tantas raíces como su grado)**.** *Sea* $p \in \mathbb{F}[z]$ *un polinomio de grado* $m \geq 0$*. Entonces* p *tiene a lo más* m *raíces distintas sobre* $\mathbb{F}$

Demostración. Por inducción en m.
$m = 0$: $p(z) = a_0 \neq 0$. Entonces p tiene 0 raíces.
$m - 1 \implies m$: Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_m z^m$ con $a_m \neq 0$

Caso 1: p no posee raíces

Caso 2: p sí posee raíces. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ raíz de p

$$\therefore \exists q \in \mathbb{F}[z] : p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z)$$

Claramente $gr(q) = m - 1$. Por inducción, q posee a lo más $m - 1$ raíces en $\mathbb{F}$. Por lo tanto:

$$\# \text{ raíces de } p \leq \# \text{ raíces de } (z - \lambda) + \# \text{ raíces de } q = m$$

□

2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios

Queremos entender la estructura de $T \in End(V) = \mathcal{L}(V)$ supongamos que

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

y

$$T|_{u_1}, T|_{u_2}, ..., T|_{u_m}$$

Definición 2.2.1 (Subespacio invariante)**.** Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un subespacio U de V se dice invariante para T si $TU \subseteq U$

$$\implies TU = \{w \in V : w = Tv\}$$

Propiedad: Sea $p, q \in \mathbb{F}[z]$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces:

1. $(p \cdot q)(T) = p(T) \cdot q(T)$
2. $p(T) \cdot q(T) = q(T) \cdot p(T)$

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ y $q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$

$$(p \cdot q)(z) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j z^j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k z^k\right)$$

$$p \cdot q)(z) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_j b_k z^{j+k}$$

$$\implies (p \cdot q)(T) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_j b_k T^{j+k}$$

$$(p \cdot q)(T) = (\sum_{j} a_j T^j)(\sum_{k}^{m} b_k T^k)$$

□

Teorema 2.2.1 (Existencia de vps)**.** *Todo operador en un espacio vectorial complejo de dimensión finita y > 0, posee un valor propio.*

Demostración. Sea $n = \dim V > 0$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea ahora $v \neq \mathbf{0}$. Entonces

$$\{v, Tv, T^2v, ..., T^n v\}$$

es linealmente dependiente. Luego existen $a_0, .., a_n$ tal que $a_0 v + a_1 Tv + ... + a_n T^n v = 0$

$$\therefore p(T)v = 0 \quad \text{con } \mathrm{gr}(p) = n$$

Por el teorema fundamental del algebra, p puede ser factorizado

$$p(z) = C(z - \lambda_1) \cdot ... \cdot (z - \lambda_n)$$

Por ende:

$$p(T)v = 0 = C(T - \lambda_1 I) \cdot ... \cdot (T - \lambda_n I)v$$

$\implies$ Existe $j = 1, ..., n$ tal que $\mathrm{Im}(T - \lambda I) \neq V \therefore \lambda_j$ es valor propio de T □

2.3. Matrices triangulares superiores

Recordemos que daa $T \in \mathcal{L}(V)$ y una base B la matriz representante de T con respecto a B es

$$\mathcal{M}_B(T) = (a_{i,j})_{i,j\in[n]}$$

tal que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}v_k$$

Notemos, por ejemplo, que en el caso complejo siempre existe una base B tal que la matriz representante posee la siguiente estructura

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

En efecto, sea $\lambda \in \mathbb{F}$ valor propio de T con vector propio asociado $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Sea B una base que contiene a v. Si hacemos esto

$$Tv = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.3.1 (Matriz triangular superior)**.** Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ se dice triangular superior si

$$a_{i,j} = 0 \forall i > j$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Proposición 2.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $v_1, ..., v_n$ base (ordenada) de V. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) La matriz representante $\mathcal{M}_B(T)$ es $\triangle$ superior

b) $Tv_j \in < v_1, ..., v_j > \forall j = 1, ..., n$

c) $< v_1, ..., v_j >$ es invariante bajo $T, \forall j = 1, ..., n$

Demostración. ◻

Proposición 2.3.2 (Invertibilidad a través de representaciones matriciales)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que posee una representación $\triangle$ superior con respecto a cierta base. Entonces T invertible $\iff$ las entradas diagonales de la matriz son no nulas.*

Demostración. Sea B base tal que

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

$\impliedby$ Por $(*)$

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\therefore v_1 = T\left(\frac{v_1}{\lambda_1}\right) \in \mathrm{Im}(T)$$

Nuevamente, por $(*)$

$$Tv_2 = av_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\lambda \neq 0 \implies v_2 = T\left(\frac{v_2}{\lambda_2}\right) + \frac{a}{\lambda_2} v_1 \in \mathrm{Im}(T)$$

Por inducción:

$$Tv_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$v_j = T\left(\frac{v_j}{\lambda_j}\right) + \frac{a_1}{\lambda_j} v_1 + ... + \frac{a_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} \in \mathrm{Im}(T)$$

$\implies$ Sabemos que $\forall j = 1, ..., n$

$$Tv_j = a_1 v_1 + ... + a_{j-1} v_{j-1+\lambda_j v_j}$$

$$\implies Tv_j \in < v - 1, ..., v_j >$$

Si algún $\lambda_j = 0$:

$$Tv_j \in < v_1, ..., v_{j-1} >$$

$$T(< v_1, ..., v_j >) \subseteq < v_1, ..., v_{j-1} >$$

En efecto ◻

Corolario (Valores propios de operador a través de representación $\triangle$ superior)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con representación $\triangle$ superior*

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

con B base de V. Entonces los valores propios de T son $\lambda_1, ..., \lambda_n$

Demostración.

$$T_\lambda I \quad \text{no es biyectiva}$$

$$\mathcal{M}_B(T-\lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix} (*)$$

$$\mathcal{M}_B(T-\lambda I) = \mathcal{M}_B(T) - \lambda\mathcal{M}_B(I)$$

Por el Teo $(\therefore)$
$T-\lambda I$ invertible si solo si $\lambda_1 - \lambda, ..., \lambda_n - \lambda \neq 0$
λ es valor propio si solo si $\lambda_1 = \lambda$ o $\lambda_2 = \lambda$ ... $\lambda_n = \lambda$ □

2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales

Definición 2.4.1 (Diagonal de una matriz diagonal)**.** Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Definimos $Diag(A) \in \mathbb{F}^{N\times m}$

$$(Diag(A))_{i,j} =$$

Y decimos que A es diagonal si

$$A = Diag(A)$$

Equivalentemente, A es diagonal si

$$a_{i,j} = 0 \forall i \neq j$$

Claramente, toda matriz diagonal es $\triangle$ superior, entonces los valores propios de A son los valores en la diagonal.

Definición 2.4.2 (Subespacio Propio)**.** Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. El subespacio propio de T correspondiente a $\lambda, E(\lambda, T)$, se define como

$$E(\lambda, T) = \ker(T - \lambda I)$$

es decir, el conjunto de vectores propios asociados a λ, más el cero.

Observación 2.4.1. λ es valor propio de $T \iff E(\lambda, T) \neq \{0\}$

Proposición 2.4.1 (Suma de subespacios propios es directa)**.**

Capítulo 3

Espacios de Producto Interno

Definición 3.0.1 (Producto Interno)**.** Un producto interno sobre un espacio vectorial V es una función

$$< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{F}$$

$$(u, v) \mapsto < u, v >$$

I) Positividad: $< v, v > \geq 0 \quad \forall v \in V$

II) Definitividad: $< v, v > = 0 \iff v = \mathbf{0}$

III) Aditividad por la izquierda: $\forall u, v, w \in V$

$$< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$$

IV) Homogeneidad: $< \lambda u, v > = \lambda < u, v > \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall u, v \in V$

V) Simetría conjugada: $< u, v > = \overline{< v, u >}$

Observación 3.0.1. En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}, (V) \iff < u, v > = < v, u >$

Ejemplos:

a) El producto interno Euclideano sobre $\mathbb{F}^n$

$$< (z_1, ..., z_n), (w_1, ..., w_n) > = z_1 \cdot \overline{w_1} + ... + z_n \cdot \overline{w_n}$$

b) Si $c_1, ..., c_n > 0$, entonces

$$< (z_1, ..., z_n), (w_1, ..., w_n) > = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z_i \cdot \overline{w_i}$$

c) Si $V = \mathcal{C}[-1, 1]$

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

d) Si $V = \mathbb{R}[x]$ entonces

$$< p, q >= \int_0^\infty e^{-x} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

Integrales

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y $f \geq 0$ definimos la integral de f como el "área bajo la curva".

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)$$

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{N} \cdot i$$

$$i = 0, ..., N$$

1.

Teorema 3.0.1 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que para $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ se cumple $F'(x) = f(x)$ (primitiva).*
Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{J} \int_{A_j=[a_j,b_j]} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Linealidad:

$$\mathcal{I} : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$$

$$f(x) \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es una tra lineal.

Ejemplos:

1. Monomio:

$$p(t) = t^k \quad P(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

P es primitiva de p:

$$P'(t) = t^k = p(t)$$

$$\therefore TFC$$

$$\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s = P(t) - P(0)$$

2. Polinomios:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t$$

$$\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^t s^k\,\mathrm{d}s$$

3. Exponenciales:

$$f(x) = e^{\lambda x} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$F(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$$

$$\therefore \int_0^x e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda}$$

4. Seno-Coseno:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$f(x) = e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x$$

$$F(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$$

$$\therefore \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda}$$

$$\int_0^x f(t) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + i\frac{1 - \cos\lambda x}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow \int_0^x \sin\lambda t\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \cos\lambda x}{\lambda}$$

$$\int_0^x \cos\lambda t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin\lambda x}{\lambda}$$

3.1. Espacio de producto interno

Definición 3.1.1 (Espacio de producto interno)**.** $(V, < \cdot, \cdot >)$ es un espacio de producto interno (e.p.i.) si V es una espacio vectorial y $< \cdot, \cdot >$ es producto interno sobre V.

Proposición 3.1.1 (Propiedades básicas)**.**

(a)

$$\forall u \in V \quad v \mapsto < v, u >$$

Es una transformación lineal de V hacia $\mathbb{F}$

(b)

$$< 0, u >= 0 \forall u \in V$$

(c)

$$< u, 0 >= 0 \forall u \in V$$

(d)

$$< u, v + w >=< u, v > + < u, w > \forall u, v, w \in V$$

(e)

$$< u, \lambda v >= bar\lambda < u, v > \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

3.2. Norma

Definición 3.2.1 (Norma)**.** Sea $(V, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de producto interno, definimos la norma asociada como:

$$\|x\| = \sqrt{< x, >}$$

Propiedades: Sea $v \in V$

(a)

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

(b)

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Intuición geométrica:

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$
Por teo del coseno

$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\theta$$

$$\|v - u\|^2 =< v - u, v - u >= \|v\|^2 - < v, u > - < u, v > + \|u\|^2$$

$$\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2 < u, v >$$

Reemplazando:

$$< u, v >= \|u\|\|v\| \cos\theta$$

3.3. Conjuntos Ortonormales

Proposición 3.3.1 (Norma de una combinación ortonormal)**.** *Sea $(V, < \cdot, \cdot >)$ espacio con producto interno y $e_1, ..., e_m$ conjunto ortonormal. Entonces*

$$\|a_1e_1 + ...a_me_m\|^2 = |a_1|^2 + ... + |a_m|^2$$

Demostración. Por Pitágoras:

$$\|a_1e_1 + ...a_me_m\|^2 = \|a_1e_1\|^2 + \|a_2e_2 + ... + a_me_m\|^2$$

$$\|a_1e_1 + ...a_me_m\|^2 = |a_1|^2\|e_1\|^2 + \|a_2e_2 + ... + a_me_m\|^2$$

$$\|a_1e_1 + ...a_me_m\|^2 = |a_1|^2 + \|a_2e_2 + ... + a_me_m\|^2$$

$$\vdots$$

$$\|a_1e_1 + ...a_me_m\|^2 = |a_1|^2 + ... + |a_m|^2$$

□

Teorema 3.3.2. *Todo familia ortonormal es linealmente independiente.*

Demostración. Sea $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ conjunto ortonormal.
Si fueran linealmente dependientes, existen $a_1, ..., a_m \in \mathbb{F}$ no todos nulos

$$\lambda_1, ..., \lambda_m \in \Lambda$$

$$a_1e_{\lambda_1} + ... + a_me_{\lambda_m} = 0 \quad /\|\cdot\|^2$$

$$0 = \|a_1e_{\lambda_1} + ... + a_me_{\lambda_m}\|^2$$

$$0 = |a_1|^2 + ... + |a_m|^2$$

$$\iff a_1 = ... = a_m = 0$$

$$\rightarrow\leftarrow$$

□

Definición 3.3.1 (Base ortonormal)**.** Una base ortonormal de un espacio con producto interno $(V, <\cdot,\cdot>)$ es un conjunto ortonormal que también es base.

Lema 3.3.3. *Sea* $(V, <\cdot,\cdot>)$ *un espacio producto interno finito dimensional. Entonces un conjunto ortonormal de cardinalidad* $\dim V$ *es una base ortonormal*

Demostración. Sea $n = \dim V$ y sea $e_1, ..., e_m$ conjunto ortonormal en V.

$$\implies e_1, .., e_m \text{ son linealmente independiente}$$

$$\implies \text{ son base}$$

□

Ejemplos:

1. $\mathbb{F}^n$

2. $serF^4$, el conjunto

$$(0{,}5, 0{,}5, 0{,}5, 0{,}5), (0{,}5, 0{,}5, -0{,}5, -0{,}5)$$

$$(0{,}5, -0{,}5, -0{,}5, 0{,}5), (-0{,}5, 0{,}5, -0{,}5, 0{,}5)$$

es base ortonormal. Claramente: $\|\cdot\| = \sqrt{(0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}5)^2} = 1$
Tambien los productos internos cruzados dan 0

Pregunta: Cuándo existen bases ortonormales uniformes en $\mathbb{R}^n$

Lema 3.3.4. *Sea $e_1, ..e_n$ vectores de $\mathbb{F}^n$ y sea*

$$U = [e_1|e_2|...|e_n]$$

Entonces, $e_1, .., e_n$ es base ortonormal $\iff$

$$U^T \cdot U = I_{n\times n}$$

Demostración.

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \frac{e_1^T}{} \\ \frac{e_2^T}{} \\ \vdots \\ \frac{}{e_n^T} \end{bmatrix}$$

□

Definición 3.3.2 (Matriz unitaria)**.** $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$ se dice unitaria si

$$U^T U = I_{n\times n}$$

Notar que U es unitaria $\iff$ las columnas de U son base ortonormal.

Para responder la pregunta hacemos lo siguiente:

Demostración. $\underline{n = 1}$: $\{1\}$ es dase ortonormal de $\mathbb{F}$

$$H_1 = [1]$$

$\underline{n \implies 2n}$: Sea H_n una matriz unitaria tal que

$$|(H_n)_{i,j}| = \frac{1}{\sqrt{n}} = c$$

$$H_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}$$

1. Esta matriz también es uniforme

2. Esta matriz es unitaria

$$H_{2n}^T \cdot H_{2n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_n^T \cdot H_n + H_n^T \cdot H_n & H_n^T \cdot H_n - H_n^T \cdot H_n^T \cdot H_n \\ H_n^T \cdot H_n - H_n^T \cdot H_n & H_n^T \cdot H_n + H_n^T \cdot H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ 0 & I_{n\times n} \end{bmatrix}$$ □

Las columnas son las base ortonormal uniforme buscada.

Las matrices $H_1, H_2, H_4, ..., H_{2^k}$ se conocen como matrices de Hadanard

Conjetura (Hadanard). *Estas matrices solo existen para*

$$n = 4k, k \in \mathbb{Z}$$

Dada una base $e_1, ..., e_n$ de V tenemos

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad \forall v \in V$$

Cómo calcular $a_1, .., a_m$?

Teorema 3.3.5. *Sea $e_1, .., e_n$ base ortonormal de $(V, < \cdot, \cdot >)$, entonces*

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v, e_i > e_i$$

además

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} | < v, e_i > |^2$$

Demostración. Como $e_1, ..., e_n$ es base, existen $a_1, ..., a_n$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad / < \cdot, e_j >$$

$$< v, e_j >= \sum_{i=1}^{n} a_i < e_i, e_j >= a_j \cdot 1$$

Probamos la primera parte. La segunda es consecuencia de Pitágoras. □

3.4. Algoritmo de Gram-Schmidt

Teorema 3.4.1. *Sean $v_1, ..., v_m$ conjunto linealmente independiente de vectores en $(V, < \cdot, \cdot >)$. Sea*

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i<j} < v_j, e_i > e_i}{\|v_j - \sum_{i<j} < v_j, e_i > e_i\|}$$

Entonces $e_1, ..., e_n$ es conjunto ortonormal y $< e_1, ..., e_n >=< v_1, ..., v_n >$

Demostración. Por inducción en j

$\underline{j=1}$: e_1 es conjunto ortonormal:

$$\|e_1\| = \left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\| = 1$$

y

$$< e_1 > = < v_1 >$$

Notar que $v_1 \neq 0$ porque $v_1, ..., v_n$ es linealmente independiente y por ender e_1 esta bien definido.

$\underline{j-1 \implies j}$:

$e_1, ..., e_j$ es ortonormal.

Primero e_j está bien definido

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i<j} < v_j, e_i > e_i}{\|v_j - \sum_{i<j} < v_j, e_i > e_i\|}$$

y

$$v_j \notin < v_1, ..., v_{j-1} >$$

$$\therefore v_j - \sum_{i<j} < v_j, e_i > e_i \neq 0$$

Para probar ortonormalidad, basta probar que:

$$< e_j, e_l > = \begin{cases} 1 & l = j \\ 0 & l < j \end{cases}$$

$$< e_j, e_j > = \|e_j\|^2 = \frac{\| \cdot \|^2}{\| \cdot \|^2} = 1$$

$$< e_j, e_l > = \frac{1}{c} < v_j - \sum_{i<j} < v_j, e_i > e_i, e_l >$$

$$< e_j, e_l > = \frac{1}{c} \left[< v_j, e_l > - < \sum_{i<j} < v_j, e_i > e_i, e_l > \right]$$

$$< e_j, e_l > = \frac{1}{c} \left[< v_j, e_l > - \sum_{i<j} << v_j, e_i > e_i, e_l > \right]$$

$$< e_j, e_l > = \frac{1}{c} \left[< v_j, e_l > - \sum_{i<j} < v_j, e_i > \cdot < e_i, e_l > \right]$$

Por hipótesis de inducción:

$$< e_j, e_l > = \frac{1}{c} [< v_j, e_l > - < v_j, e_l > \cdot 1] = 0$$

$\therefore e_1, ..., e_n$ ortonormal.

Falta probar

$$< e_1, ..., e_n >=< v_1, ..., v_n >$$

Para probarlo basta ver que

$$\text{(Hip. Ind.)} < e_1, ..., e_{j-1} >=< v_1, ..., v_{j-1} >$$

Pero además

$$e_j \in< e_1, .., e_{j-1}, v_j >=< v_1, ..., v_j >$$

En conclusión

$$< e_1, .., e_j >\subseteq< v_1, ..., v_j >$$

$$\therefore< e_1, .., e_j >\subseteq< v_1, ..., v_j >$$ □

Teorema 3.4.2 (Representación $\triangle$-superior con respecto a base ortonormal)**.** *Sea* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *espacio con producto interno (real o complejo) y sea* $T \in \mathcal{L}(V)$*. Si* T *posee una representación matricial* $\triangle$*-superior con respecto a una base, entonces posee una representación* $\triangle$*-superior con respecto a una base ortonormal.*

Demostración. Sea $B = (v_1, ..., v_n)$ base ordenada de V tal que $\mathcal{M}_B(T)$ sea $\triangle$-superior. Entonces:

$$< v_1 > \text{ es invariante bajo} T$$

$$< v_1, v_2 > \text{ es invariante bajo} T$$

$$\vdots$$

$$< v_1, ..., v_n > \text{ es invariante bajo} T$$

Aplicando G-S a $(v_1, ..., v_n) \implies e_1, ..., e_n$ base ortonormal de V.
Para concluir basta probar que los subespacios

$$< e_1, ..., e_j > \quad j = 1, ..., n$$

son invariantes bajo T.
Pero esto es directo, ya que

$$< v_1, ..., v_j >=< e_1, ..., e_j > \quad j = 1, ..., n$$ □

Teorema 3.4.3 (Schur)**.** *Todo operador sobre un espacio con producto interno complejo de dimensión finita posee una representación* $\triangle$*-superior para alguna base ortonormal de* V*.*

Demostración. Todo operador sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita posee una representación $\triangle$-superior para alguna base. Con el Teo anterior se concluye. □

3.5. Funciones lineales sobre Espacio con producto interno

Definición 3.5.1 (Funcional Lineal)**.** Una funcional lineal sobre $(V, < \cdot, \cdot >)$ es una transformación lineal $l : V \to \mathbb{F}$.

Ejemplos:

1. $u \in V$:
   $l : V \to \mathbb{F}$
   $v \mapsto < v, u >$

2. Sea $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por
$$\varphi(P) = \int_{-1}^{1} p(t)\cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$$
   Pregunta: $\exists q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \varphi(p) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t$?

Teorema 3.5.1 (Representación de Riesz)**.** *Sea $(V, < \cdot, \cdot >)$ espacio producto interno finito-dimensional y φ un funcional lineal. Entonces existe un único $u \in V$*

$$\varphi(v) =< v, u > \quad \forall v \in V$$

Demostración. Sea $\dim V = n, e_1, .., e_n$ base de ortonormal de V.
Existencia Sea $v \in V$
$$v =< v, e_1 > e_1 + ...+ < v, e_n > e_n \quad /\varphi$$
$$\varphi(v) = \varphi(< v, e_1 > e_1 + ...+ < v, e_n > e_n)$$
$$\varphi(v) =< v, e_1 > \varphi(e_1) + ...+ < v, e_n > \varphi(e_n) >$$
$$\varphi(v) =< v, \overline{\varphi(e_1)}e_1 + ... + \overline{\varphi(e_n)}e_n$$
Unicidad: Sean $u_1, u_2 \in V$ tales que
$$\varphi(v) =< v, u_1 >=< v, u_2 > \quad \forall v \in V$$
$$\therefore < v, u_1 - u_2 >= 0 \quad \forall v \in V$$
Tomando $v = u_1 - u_2$
$$< u_1 - u_2, u_1 - u_2 >= 0$$
$$\therefore \|u_1 - u_2\|^2 = 0$$
$$\iff u_1 - u_2 = 0$$
□

Observación 3.5.1. La demostración da una fórmula explícita para calcular u: Dada una base ortonormal $e_1, ..., e_n$

3.6. Complementos Ortogonales y Problemas de Minimización

Definición 3.6.1 (Complemento Ortogonal)**.** Sea $(V, < \cdot, \cdot >$ espacio con producto interno y $U \subset V$. Se define el complemento ortogonal de U, denotado $U^{\perp}$ como

$$U^{\perp} = \{v \in V :< v, u >= \forall u \in U\}$$

Propiedades:

(a) $U \subseteq V \implies U^{\perp}$ subespacio vectorial de V
$U^{\perp} = \{v \in V :< v, u >= 0 \quad \forall u \in U\}$

Demostración.

$$U^{\perp} \neq \emptyset : 0 \in U^{\perp}$$

$$v, w \in U^{\perp}, \lambda \in \mathbb{F} : u \in U$$

$$\therefore < v + \lambda w, u >=< v, u > +\lambda < w, u >= 0$$

□

(b) $\{0\}^{\perp} = V$: Ejercicio

(c) $V^{\perp} = \{0\}$

Demostración. Si $v \in V^{\perp}$ entonces:

$$< v, u >= 0 \quad \forall u \in V$$

Tomando $u = v$

$$< v, v >= 0 \iff v = 0$$

□

(d) $U < V \implies U \cap U^{\perp} = \{0\}$

Demostración. Sea $v \in U \cap U^{\perp}$

$$< v, u >= 0 \quad \forall u \in U$$

Tomando $u = v$

$$< v, v >= 0 \iff v = 0$$

□

(e) $U \subseteq W \implies W^{\perp} \subset U^{\perp}$

Demostración.

$$W^{\perp} = \{v \in V :< v, w >= 0 \quad \forall w \in W\}$$

$$W^{\perp} \subseteq \{v \in V :< v, u >= 0 \quad \forall u \in U\}$$

$$W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$$

□

Proposición 3.6.1 (Suma directa ortogonal)**.** *Sea* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *espacio con producto interno, y* U *subespacio finito-dimensional. Entonces:*

$$U \oplus U^{\perp} = V$$

Demostración. $\underline{U + U^{\perp} = V}$: Sea $e_1, ..., e_m$ base ortonormal de V

$$\forall v \in V$$

$$v = (\overline{< e_1, v >}e_1 + ... + \overline{< e_m, v >}e_m) \in U + (v - \overline{< e_1, v >}e_1 - ... - \overline{< e_m, v >}e_m)$$

Por demostrar que: $u \in U^{\perp}$
Basta probar que $\forall i = 1, ..., m$

$$< e_i, u >= 0$$

Veamos

$$< e_i, v- < \overline{e_1, v >}e_1 - ... - \overline{< e_m, v >}e_m >=< e_i, v > - < e_1, v >< e_i, e_1 > - ... - < e_m, v >< e_i, e_m >$$

$$< e_i, u >=< e_i, v > - < e_i, v >= 0$$

<u>Es directa:</u> $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ por propiedad. □

Corolario (Dimensión del complemento ortogonal)**.** *Si* V *es finito-dimensional* $U < V$

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$$

Demostración.

$$U \oplus U^{\perp} = V$$

□

Teorema 3.6.2. *Sea* $U < V$ *finito-dimensional. Entonces*

$$(U^{\perp})^{\perp} = U$$

Demostración. $\underline{U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}}$: Sea $u \in U$

$$< v, u >= 0 \quad \forall v \in U^{\perp}$$

$$\therefore u \in (U^{\perp})^{\perp}$$

$U \supseteq (U^\perp)^\perp$ Sea $v \in (U^\perp)^\perp$

$$v = u + w \quad u \in U, w \in W$$

PDQ: $w = 0$
Como $v \in (U^\perp)^\perp$

$$< v, z >= o \quad \forall z \in U^\perp$$

Tomando $z = w$

$$< u + w, w >= 0$$

$$< u, w > + < w, w >= 0$$

$$u \in U, w \in U^\perp \implies < u, w >= 0 \implies < w, w >= 0 \iff w = 0$$

$$\therefore v = u \in U$$

□

Definición 3.6.2 (Proyección ortogonal)**.** Sea U subespacio vectorial finito-dimensional de $(V, < \cdot, \cdot >)$. Se define la proyección ortogonal $\mathcal{P}_U \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$\mathcal{P}_U : V \to V$$

$$v \mapsto u$$

donde

$$v = u + w, u \in U, w \in U^\perp$$

Ejemplo: Sea $x \in V, x \neq 0$ y $U =< x >$

$$\mathcal{P}_U v = \frac{< v, x >}{\|x\|^2} \cdot x$$

Propiedades: Sea $U < V$ finito-dimensional y $v \in V$

(a) $\mathcal{P}_U \in \mathcal{L}(V)$

(b) $\mathcal{P}_U u = u \quad \forall u \in U$

(c) $\mathcal{P}_U w = 0 \quad \forall w \in U^\perp$

(d) $\operatorname{Im} \mathcal{P}_U = U$

(e) $\ker \mathcal{P}_U = U^\perp$

(f) $v - \mathcal{P}_U v \in U^\perp$

(g) $\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U$

(h) $\|\mathcal{P}_U v\} \leq \|v\|$

(i) Para todoa base ortonormal de U, $e_1, ..., e_n$

$$\mathcal{P}_U v =< v, e_1 > e_1 +, , , + < v, e_n > e_n >$$

Demostración de las propiedades

(a) *Demostración.* Sabemos que $\mathcal{P}_U$ es función ya que $U \oplus U^{\perp} = V$. Probemos la linealidad. Sean $v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\mathcal{P}_U(v_1 + \lambda v_2) =?$$

Sabemos que

$$\mathcal{P}_U v_1 = u_1 \quad \mathcal{P}_U v_2 = u_2$$

Y además

$$v_1 + \lambda v_2 = (u_1 + w_1) + \lambda(u_2 + w_2) = (u_1 + \lambda u_2) + (w_1 + \lambda w_2)$$

□

(b) *Demostración.*

$$u = u + 0 \implies P_U u = u$$

□

(c) *Demostración.*

$$w = 0 + w \implies P_U u = 0$$

□

(d) Ejercicio

(e) Ejercicio

(f) *Demostración.*

$$< v, \mathcal{P}_U v, u >= 0 \quad \forall u \in U$$

Sean

$$v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^{\perp}$$

$$\implies u = \mathcal{P}_U v$$

$$\therefore w - \mathcal{P}_U v \in U^{\perp}$$

□

(g) *Demostración.* $\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U$
Sea $v \in V$:

$$v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^{\perp}$$

$$\mathcal{P}_U v =^{(a)} \mathcal{P}_U u + \mathcal{P}_U w =^{(b),(c)} u$$

$$\mathcal{P}_U^2 v = \mathcal{P}_U u + \mathcal{P}_U w = \mathcal{P}_U v \qquad \square$$

(h) Sea $v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^{\perp}$

$$v = \mathcal{P}_U v + w \quad /\|\cdot\|^2$$

$$\|v\|^2 = \|\mathcal{P}_U v\|^2 + \|w\|^2$$

$$\implies \|v\|^2 \geq \|\mathcal{P}_U v\|^2$$

(i) Ejercicio

3.7. Problemas de Minimización

Dado $v \in V$ y $U < V$

$$(\mathcal{P})\ \text{mín}\, \|u - v\| \quad u \in U$$

Teorema 3.7.1 (Distancia mínima a un subespacio vectorial)**.** *Sea* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *espacio con producto interno y* $U < V$. *Entonces para todo* $v \in V$

$$\|v - \mathcal{P}_U v\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U$$

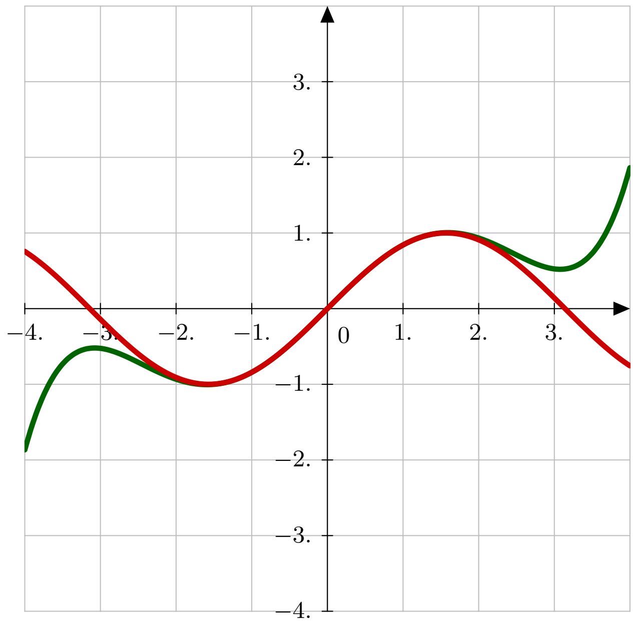
Más aun, la igualdad se alcanza $\iff u = \mathcal{P}_U v$

Demostración. $\square$

Ejemplo: Encuentre un polinomio u a coeficientes reales y de grado máximo 5 que aproxime $\sin(x)$ lo mejor posible sobre $[-\pi, \pi]$, con respecto a la distincia

$$\min_{u \in \mathcal{P}_s} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x) - u(x)|\, \mathrm{d}x$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = T(x)$$



Solución: $(V, < \cdot, \cdot >)$ espacio con producto interno

$$V = \mathcal{C}([pi, \pi], \mathbb{R}) < p, q >= \int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

$$U = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})|_{[-\pi,\pi]} \quad \forall p, q \in V$$

Tenemos una base de U

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$$

1. Aplicamos G-S (Ejercicio)

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$$

2. Aplicamos la fórmula de $\mathcal{P}_U v$

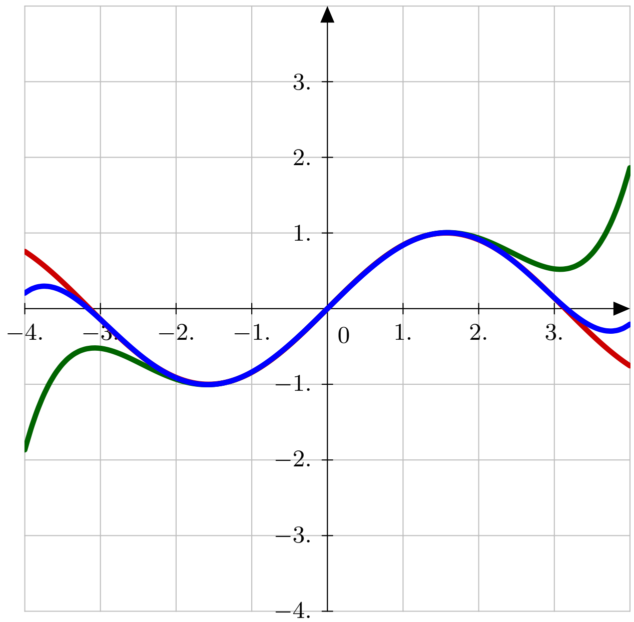
$$\mathcal{P}_U v =< v, e_1 > e_1 + ... < v, e_5 > e_5 + < v, e_6 > e_6 >$$

(Ejercicio de Cálculo, **NO DE LINEAL**)

$$< v, e_1 >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cdot e_i(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{10^6} \sum_{i=1}^{10^6}$$

Finalmente:

$$u(x) = \mathcal{P}_U v \approx 0{,}987862x - 0{,}155271x^3 + 0{,}00564312x^5$$


3.
2.
1.
−1.
−2.
−3.
−4.
−4.
−3.
−2.
−1.
0
1.
2.
3.

Capítulo 4

Operadores sobre Espacio con Producto Interno

Durante este capítulo

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
- V, W son espacios con producto interno sobre $\mathbb{F}$

4.1. Operador Adjunto, Auto-Adjunto y Normal

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Consideremos para $w \in W$ fijo, el funcional

$$l_w : V \to \mathbb{F}$$

$$v \mapsto < Tv, w >$$

Por el Teo. de Rep. de Riesz, existe $T^*w \in V$ tal que

$$l_w(v) =< v, T^*w >=< Tv, w > \quad \forall v \in V \forall w \in W$$

La función

$$T^* : W \to V$$

$$w \mapsto T^*w$$

le llamamos la adjunta de T.

Definición 4.1.1 (Adjunta)**.** Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Definimos la adjunta de T como la función

$$T^* : W \to V$$

tal que

$$< Tv, w >_W = < v, T^* w >_V \quad \forall v \in V \forall w \in W$$

Ejemplo: Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 + 3x_3, 2x_1)$$

Tomemos bases canónicas

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}(T^*) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathcal{M}(T^*) = \mathcal{T}^T$$

Proposición 4.1.1 (Adjunta es lineal)**.**

$$T \in \mathcal{L}(V, W) \implies T^* \in \mathcal{L}(W, W)$$

Demostración. Sean $w_1, w_2 \in W$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ PD: $T^*(w_1 + \lambda w_2) = T^* w_1 + \lambda T^* w_2$
Sea $v \in V$

$$< v, T^*(w_1 + \lambda w_2) > = < Tv, w_1 + \lambda w_2 >$$

$$< v, T^*(w_1 + \lambda w_2) > = < Tv, w_1 > + \bar{\lambda} < Tv, w_2 >$$

$$< v, T^*(w_1 + \lambda w_2) > = < v, T^* w_1 > + < v, \lambda T^* w_2 >$$

$$< v, T^*(w_1 + \lambda w_2) > = < v, T^* w_1 + \lambda T^* w_2 >$$

Por Riesz

$$T^*(w_1 + \lambda w_2) = T^*(w_1) + \lambda T(w_2)$$

□

Propiedades de la adjunta:

a) $(S + T)^* = S^* + T^* \quad \forall S, T \in \mathcal{L}(V, W)$

b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall T \in \mathcal{L}(V, W)$

c) $(T^*)^* = T$

d) $I^* = I$ donde $I \in \mathcal{L}(V)$ es la identidad

e) $(ST)^* = T^* S^* \quad \forall T \in \mathcal{L}(V, W) \forall S \in \mathcal{L}(W, S)$

a) *Demostración.* Sean $v \in V, w \in W$

$$< v, (S+T)^* w > = < (S+T)v, w >$$

$$< v, (S+T)^* w = < Sv, w > + < Tv, w >$$

$$< v, (S+T)^* w = < v, S^* w > + < v, T^* w > = < v, (S^* + T^*)w > \forall v$$

$$\iff (S+T)^* w = S^* w + T^* w \forall w \in W \iff (S+T)^* = S^* T^* \qquad \square$$

b) *Demostración.* Sean $v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{F}$

$$< v, (\lambda T)^* w > = < (\lambda T)v, w > = \lambda < Tv, w >$$

$$< v, (\lambda T)^* w > = < v, \bar{\lambda} T^* w > \quad \forall v \in V \forall w \in W \qquad \square$$

c) *Demostración.* Sean $v \in V, w \in W$

$$< w, (T^*)^* v > = < T^* w, v > = < w, Tv >$$

Por Riesz:

$$(T^*)^* v = Tv \forall v$$

$$\iff (T^*)^* = T \qquad \square$$

d) Ejercicio

e) *Demostración.* Sean $v \in V, u \in U$

$$< v, (ST)^* u > = < (ST)v, u > = < S(Tv), u > = < Tv, S^* u > = < v, T^*(S^* u) >$$

Por Riesz:

$$(ST)^* u = T^* S^* u \forall u \in U$$

$$\iff (ST)^* = T^* S^* \qquad \square$$

Proposición 4.1.2 (Núcleo e Imagen de T^*)**.** *Sea* $T \in \mathcal{L}(V, W)$*. Entonces*

a) $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$

b) $\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp$

c) $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

d) $\operatorname{Im} T = (\ker T^*)^\perp$

a) Demostración. Sea $w \in W$

$$w \in \ker(T^*) \iff T^*w = 0$$

$$\iff < v, T^*w >= 0 \quad \forall v \in V$$

$$\iff < Tv, w >= 0 \quad \forall v \in V$$

$$\iff < z, w >= 0 \quad \forall z = Tv, v \in V$$

$$\iff w \in (\operatorname{Im} T)^\perp$$ □

b) Demostración. Claramente esta es implicada por c) y el complemento ortogonal □

c) Demostración. Claramente esta es implica por a) □

d) Demostración. Claramente esta es implicada por b) □

Definición 4.1.2 (Traspuesta conjugada)**.** La traspuesta conjugada de una matriz $m \times n$ compleja es una matriz $n \times n$ compleja que se obtiene intercambiando filas por columnas, y tomando conjugadas en todos los coeficientes.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3+i & 7 \\ 6 & 6 & 8i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3-i & 6 \\ 7 & -8i \end{bmatrix}$$

Teorema 4.1.3 (La matriz representante de T^*)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Sean*

$$B = (e_1, ..., e_n) \subseteq V$$

$$C = (f_1, ..., f_m) \subseteq W$$

bases ordenadas y ortonormales de V y W, respectivamente. Entonces $\mathcal{M}_{C,B}(T^*)$ es la traspuesta conjugada de $\mathcal{M}_{B,C}(T)$

Demostración. Como C es base ortonormal

$$Te_k =< Te_k, f_1 > f_1 + ...+ < Te_k, f_m > f_m$$

Y por lo tanto

$$(\mathcal{M}_{B,C}(T))_{jk} =< Te_k, f_j >$$

Como B es base ortonormal tenemos

$$T^*f_j =< T^*f_j, e_1 > e_1 + ...+ < T^*f_j, e_n > e_n$$

Y por lo tanto

$$(\mathcal{M}_{C,B}(T^*))_{kj} =< T^*f_j, e_k =< f_j, Te_k >= \overline{< Te_k, f_j >}$$ □

4.1.1. Operadores Auto-Adjuntos

Definición 4.1.3 (Operador a.a.)**.** Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ se dice auto-adjunto (a.a.) si $T + T^*$. Es decir,

$$< Tv, w > = < v, Tw > \quad \forall v, w \in V$$

Propiedades: Si S, T a.a. y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

a $S + T$ es a.a.

b λS es a.a.

Demostración. Ejercicio □

Proposición 4.1.4. *Todo valor propio de un operador a.a. es real*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$Tv = \lambda v \quad / < \cdot, v >$$

$$< Tv, v > = < \lambda v, v > = \lambda \|\lambda\|^2$$

$$< v, Tv > = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

$$\implies \bar{\lambda} = \lambda$$

□

Teorema 4.1.5. *Sea $(V, < \cdot, \cdot >$ espacio con producto interno compleja y $T \in \mathcal{L}$. Entonces*

$$< Tv, v > = 0 \quad \forall v \in V \iff T = 0$$

Observación 4.1.1. Esto no es cierto si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Ver la siguiente transformación:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$

Demostración. Notemos que $\forall u, w \in V$

$$< Tu, w > = \frac{< T(u + w), u + w > - < T(u - w), u - w >}{4} + i \frac{< T(u + iw), u + iw > - < T(u - iw), u - iw >}{4}$$

Entonces

$$Tu, w > = 0 \quad \forall u, w \iff < Tv, v > = 0 \quad \forall v \in V$$

Concluyendo que $T = 0 \iff < Tv, v > = 0 \quad \forall v \in V$ □

Teorema 4.1.6. *Sea $(V, < \cdot, \cdot >)$ espacio con producto interno complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces T es a.a.*

$$\iff < Tv, v > \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

Observación 4.1.2. Esto **NO** es cierto para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

Demostración.

$$< Tv, v > - \overline{< Tv, v >} =< Tv, v > - < v, Tv >$$

$$< Tv, v > - \overline{< Tv, v >} =< (T - T^*)v, v >$$

Se concluye que

$$< Tv, v >\in \mathbb{R} \iff < (T - T^*)v, v >= 0 \iff T - T^* = 0$$ □

<u>Ejercicio:</u>
Sea $(V, < \cdot, \cdot >)$ espacio con producto interno con $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Sea $T : V \to V$

$$f \mapsto \int_{-1}^{1} exp(-\frac{(x-y)^2}{2})f(y)\,\mathrm{d}y$$

a) Pruebe que T está bien definida y que $T \in \mathcal{L}(V)$

b) Calcule T^*

c) ¿Cuándo T es a.a.?

<u>Sol:</u>

Proposición 4.1.7. *Sea* $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{F} = \mathbb{C}$ *y sea* $T \in \mathcal{L}(V)$ *a.a. tal que*

$$< Tv, v >= 0 \quad \forall v \in V$$

Entonces $T = 0$

Demostración. Basta probarlo para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ □

4.1.2. Operadores normales

Definición 4.1.4 (Operador Normal)**.** Un operador T sobre un espacio con producto interno se dice normal si conmuta con su adjunta:

$$TT^* = T^*T$$

Observación 4.1.3. T a.a. $\implies$ T normal

Teorema 4.1.8. *T es normal* $\iff \|Tv\| = \|T^*v\| \quad \forall v \in V$

Demostración. T normal $\iff TT^* - T^*T = 0$ $\square$

Teorema 4.1.9 (Caracterización Operadores Positivos)**.** *Los siguientes son equivalentes:*

a) $T \geq 0$

b) T *a.a. y sus valores propios son no-negativos*

c) T *posee una raíz cuadrada mayor a 0*

d) T *posee una raíz cuadrada a.a.*

e) $\exists R \in \mathcal{L}(V)$ *tal que* $T = R^*R$

Demostración. $\underline{a) \implies b)}$: $< Tv, v > \geq 0 \quad \forall v \in V$ y T a.a.
Sea λ valor propio de $T : \exists v \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$Tv = \lambda v \quad / < \cdot, v >$$

$$< Tv, v > = < \lambda v, v > = \lambda \|v\|^2$$

Si $\lambda < 0$ entonces $< Tv, v > < 0 \rightarrow\leftarrow$
$\underline{b) \implies c)}$: T a.a. con valores propios mayores o iguales a 0.
Sea $e_1, ..., e_n$ base ortonormal de V de vectores propios de T

$$Te_i = \lambda_i e_i \quad \forall i = 1, ..., n$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., n$$

Proponemos $R \in \mathcal{L}(V)$ como

$$Re_i = \sqrt{\lambda_i} e_i \quad \forall i = 1, ..., n$$

Notemos que

$$R^2 e_i = R(Re_i)$$

$$R^2 e_i = R(\sqrt{\lambda_i} e_i)$$

$$R^2 e_i = \lambda_i e_i$$

$$R^2 e_i = Te_i$$

Como todo operadpr se describe de manera única sobre una base

$$R^2 = T$$

Probemos finalmente que $T \geq 0$.
R es a.a.

$$\therefore R \text{ a.a.}$$

Nos falta que $< Rv, v > \geq 0 \quad \forall v \in V$

$$< Rv, v > = \sum_i |a_i|^2 \sqrt{\lambda_i}$$

$$< Rv, v > \geq 0$$

$\underline{c) \implies d)}$: Es inmediata.
$\underline{d) \implies e)}$: $T = R^2 \quad R = R^*$

$$T = RR = R^* R$$

$\underline{e) \implies a)}$: $T = R^* R$
T es a.a.:

$$T^* = (R^* R)^* = R^* R^{**} = R^* R = T$$

Positividad:

$$< Tv, v > = < R^* Rv, v >$$

$$< Tv, v > = < Rv, Rv > = \|Rv\|^2$$

$$\implies < Tv, v > \geq 0$$

□

Proposición 4.1.10. *Si $T \geq 0$ entonces existe una única raíz cuadrada positiva.*

Demostración. Ya tenemos la existencia. Falta unicidad.
Sea $R \geq 0$ raíz cuadrada de T

$$T = R^2$$

Sea $e_1, ..., e_n$ base ortonormal de V tal que

$$Re_i = \lambda_i e_i \quad \forall i = 1, ..., n$$

Notar que $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$ (por b)
Sean λ, v par propio de T

$$Tv = \lambda v$$

Digamos $v = a_1 e_1 + ... + a_n e_n$

$$\implies Rv = a_1 \lambda_1 e_1 + ... + a_n \lambda_n e_n$$

$$\implies R^2 v = a_1 \lambda_1^2 e_1 + ... + a_n \lambda_n^2 e_n = Tv$$

Como $e_1, .., e_n$ base

$$a_i \lambda_i^2 = a_i \lambda \quad \forall i$$

Como $v \neq 0$ entonces $\exists i : a_i \neq 0$

$$\implies \lambda = \lambda_i^2 \implies a_j = 0 \quad \forall \lambda_j \neq \lambda_i$$

En consecuencia:

$$v = \sum_{i:\lambda_i^2=\lambda} a_i e_i$$

$$\implies Rv = \sum_{i:\lambda_i^2=\lambda} a_i \lambda_i e_i = \sqrt{\lambda} v \qquad \square$$