Teoría de Números

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2018

Índice general

0.1. Funciones Aritméticas 2

0.1. Funciones Aritméticas

Definición 0.1.1 (Función Aritmética)**.** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

- Es multiplicativa si
$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall (a, b) = 1$$
- Es completamente multiplicativa si
$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall a, b$$

Ejemplo: 0.1.1. (a) $\delta(n)$

(b) $I_k(n) = n^k$

(c) Función de Möbius:
$$\mu(n) =$$

(d) $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$

(e) Función de Euler: $\phi(n) = \#\{1 \leq k \leq n : (k, n) = 1\}$

Definición 0.1.2 (Convolución)**.** Sean f, g funciones aritméticas su convolución $f * g$:

$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a) \cdot g(b)$$

Teorema 0.1.2 (Propiedades de la convolución)**.** *(a)* $(f * g) * h = f * (g * h)$

(b) $f * g = g * f$

(c) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(d) $\delta * f = f$

(e) $I_0 * \mu = \delta$

(f) Si f y g son multiplicativas entonces $f * g$ es multiplicativa

Demostración.

(a) Tarea

(b) Tarea

(c) Tarea

(d) Tarea

(e) $(I_0 * \mu)(1) = I_0(1) \cdot \mu(1) = 1 = \delta(1)$ Sea $n > 1$, sean $p_1, ..., p_l$ los factores primos distintos de n

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_l^{\alpha_l}$$

$$(I_0 * \mu)(n) = \sum_{a \cdot b = n} I_0(a)\mu(b)$$

$$(I_0 * \mu)(n) = \sum_{b|n} \mu(b) = \sum_{d|p_1 \cdot ... \cdot p_l}$$

$$(I_0 * \mu)(n) = \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \binom{l}{\nu} = (1 \cdot 1)^l = 0 = \delta(n)$$

(f) f, g mult. Sean $(a, b) = 1$

$$(f * g)(a) \cdot (f * g)(b) = \left(\sum_{x \cdot y = a} f(x)g(y) \right) \left(\sum_{s \cdot t = a} f(s)g(t) \right)$$

$$(f * g)(a) \cdot (f * g)(b) = \sum_{x \cdot y = a} \sum_{s \cdot t = b} f(x \cdot s) \cdot g(y \cdot t)$$

$$(f * g)(a) \cdot (f * g)(b) = \sum_{u \cdot w = ab} f(u) \cdot g(w)$$

$$(f * g)(a) \cdot (f * g)(b) = (f * g)(ab)$$

□

Ejemplo: 0.1.3.

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \cdot I_0(n/d) = (I_0 * I_0)(n)$$

Corolario (Fórmula de Inversión de Möbius)**.** *Sea f función aritmética. Sea $F = I_0 * f$ es decir: $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$*
entonces: $f = \mu * F$
es decir $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot F(n/d)$

Demostración.

$$\mu * F = \mu * (I_0 * f)$$

$$\mu * F = (\mu * I_0) * f = \delta * f = f$$

□

Ejemplo: 0.1.4. $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Nro de generados: $\phi(n)$

- Subgrupos: exactamente, para $d|n$:

$$C_n \geq \left\langle \frac{n}{d} \right\rangle \simeq C_d$$

- Todo $x \in C_n$ genera algún subgrupo

$$\implies \sum_{d|n} \phi(n) = \#C_n = n$$

$$\therefore \phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot I_1(n/d)$$

$$\phi(n) = n \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

$$\phi = \mu * I_1$$

Teorema 0.1.5 **($\Sigma \to \Pi$).** *Sea f multiplicativa y no idénticamente a 0. Entonces:*

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{p|n} (1 + f(p) + ... + f(p^{v_p(n)}))$$

donde p varía sobre primos y $v_p(n) =$ exponente de p en n.

Demostración. Expandir LD + Factorización Única + mult □

Ejemplo: 0.1.6. (a) $\sigma_0 = \sum_{d|n} 1 = \prod_{p|n}(1 + 1 + ... + 1) = \prod_{p|n}(v_p(n) + 1)$

(b) $\phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = n \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$