Introducción a la Geometría Algebraica

Nicholas Mc-Donnell

1er semestre 2019

Índice general

Info

Libro: “Algebraic Curves” William Fulton

Notas: Tareas

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Estudio de objetos geométricos derivados de los polinomios (Variedades $\to$ Esquemas, etc). Los objetos son suaves o singulares.

1.1.1. Resolución de singularidades para una curva

Consideramos el siguiente polinomio:

$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : f(x,y) := y^2 - x^2(x+1) = 0\} = C$$

Definición 1.1.1 (Singularidad)**.** Es $p \in \mathbb{C}^2$ tal que $f(p) = 0$, $f_x(p) = 0$ y $f_y(p) = 0$

En el ejemplo el $(0,0)$ es el único punto singular.
Considerar el morfismo:

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}^2$$
$$(u,v) \mapsto (uv, v)$$

Vemos la pre-imagen:

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}(C) &= \{v^2 - u^2v^2(uv+1) = 0\} \\ &= \{v^2 = 0\}\{1 - u^2(uv+1) = 0\}\end{aligned}$$

Ejemplo: 1.1.1.

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$T(x,y) = (-x,-y)$$

T es automorfismo de $\mathbb{C}^2$

$$T \circ T = 1$$

Lo qye sucede es que el grupo $\{1, T\} = G$ actua en $\mathbb{C}^2$.
Mirar $\mathbb{C}^2/G$ =espacio de órbitas de G, lo cuál es una variedad algebraica
Funciones regulares en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}[x, y]$.
Queremos buscar lo siguiente:

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \{f(x, y) \text{polinomio tal que } f(x, y) = f(-x, -y)\} = \mathbb{C}[x^2, y^2, xy]$$

$$\mathbb{C}[x^2, y^2, xy] \simeq \mathbb{C}[a, b, c]/(c^2 - ab)$$

$$\therefore \mathbb{C}^2/G := \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : c^2 - ab = 0\}$$

Ejemplo: 1.1.2.

$$\{(x, y) \in k^2 : x^{2n} + y^{2n} = 1\} = V(k)$$

Cómo se ve $V(k)$? ($V(k) \neq \emptyset$)
$n = 1$

$k = \mathbb{Q}$: Circunferencia porosa ($x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, y = \frac{2t}{t^2+1}$)(Viene de $\mathbb{Z}$, aritmético)

$k = \mathbb{R}$: Circunferencia completa (Viene de Análisis/límites)

$k = \mathbb{C}$: Esfera sin puntos?

$n \geq 2$: $V(\mathbb{Q}) \subset V(\mathbb{R}) \subset V(\mathbb{C})$

$V(\mathbb{Q})$: Ultimo Teorema de Fermat $\implies$ 4ptos

$V(\mathbb{R})$: Algo que se acerca a un cuadrado con n "grande"

$V(\mathbb{C})$: Objeto extraño con $g = (n - 1)(2n - 1)$ agujeros

Variedades = ceros de polinomios $\in k[x_1, ..., x_n]$ donde $k = \overline{k}$

1.2. Preliminares Algebraicos

- Anillos conmutativos con 1, y morfismos de anillos, tal que el $1 \mapsto 1$
- Dominios (sin div. del cero) y cuerpos (todo $u \neq 0$ es unidad)
- R anillo $\to R[x]$, grado, mónico. En general: $R[x_1, ..., x_n]$
- Polinomios homogeneos: $F \in R[x_1, ..., x_n]$ ssi $F(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^{\deg(F)} F(x_1, ..., x_n)$
- $a \in R$ es <u>irreducible</u> si a no unidad, no cero y $a = bc \implies b$ o c es unidad

- $a \in R$ es primeo si $a \mid bc \implies a \mid b$ o $a \mid c$
- R es UFD (DFU): Todo elemento se factoriza de forma única salvo orden y unidades. (R UFD $\implies R[x]$ UFD)
- Dado R dominio existe $F =$ cuerpo de fracciones de $R \supset R$, $F = \{\frac{a}{b} : a, b \in R, b \neq 0\}$
- f morfismo, $\ker f$ (ideal) $\operatorname{Im} f$ (anillo)
- Ideal $\cong$ Kernel (Primer teorema de Isomorfismo)
- Para $S \subset R$ anillo, $< S >=$ Ideal generado por S

Definición 1.2.1 (Ideal Primo)**.** $p \subset R$ ideal primo ssi $ab \in p \implies a \in p \vee b \in p$

Teorema 1.2.1. *p primo $\iff R/p$ dominio.*

Demostración. p ideal primo

$$\begin{aligned} & ab = 0 \\ \iff & ab \in p \\ \iff & a \in p \vee b \in p \\ \iff & a = 0 \vee b = 0 \end{aligned}$$

□

Definición 1.2.2 (Ideal Maximal)**.** $p \subset R$ es maximal ssi $p \subset m \subset R$, m ideal $\implies p = m \vee m = R$

Teorema 1.2.2. *m maximal $\iff R/m$ es cuerpo*

Demostración. $\implies$
Sea $a \in R \setminus m$, por lo que $a \neq 0$, luego ya que m maximal, $< m, a >= R$. Dado esto, sabemos que $\exists b \in m, \exists c, d \in R : bc + ad = 1$, y viendo esto en R/m tenemos que $ad = 1$, o sea, a tiene inverso.
$\impliedby$
Por contradicción, existe n ideal maximal que contiene a m □

Problema 1.2.1. Sea R un dominio.

1. Si F, G son formas[1] de grado r, s respectivamente en $R[x_1, ..., x_n]$, muestre que FG es una forma de grado $r + s$
2. Muestre que todo factor de una forma en $R[x_1, ..., x_n]$ también es una forma

Problema 1.2.2. Sea R un DFU, K el cuerpo cociente de R. Muestre que todo elemento z de K se puede escribir

[1]Polinomios homogeneos

1.3.

Definición 1.3.1 (Espacio Afín)**.** El **Espacio afín** de dimensión n es $\mathbb{A}_k^n := k^n$

Definición 1.3.2 (Hipersuperficie)**.** Dado $F \in k[x_1, ..., x_n]$, se define la **hipersuperficie**

$$V(F) := \{(a_1, ..., a_n) \in k^n : F(a_1, ..., a_n) = 0\}$$

Ejemplo: 1.3.1. $V(y^2 - x^2(x+1)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

Ejemplo: 1.3.2. $V(ax^2 + by^2 + 1) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 = \emptyset$, dado $a, b > 0$, distinto a $V(x^2 + y^2 + 1) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$

Ejemplo: 1.3.3. $V(y^2 - x(x^2 - 1)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

Ejemplo: 1.3.4. $V(z^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$

Ejemplo: 1.3.5. $V((x^2 - y^2)(x^3 - 1)(y^3 - 1)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

Definición 1.3.3 (Conjunto Algebraico)**.** Sea $S \subset k[x_1, .., x_n]$. Un **conjunto algebraico afín**

$$\begin{aligned} V(S) &= \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0 \forall F \in S\} \\ &= \bigcap_{F \in S} V(F) \end{aligned}$$

$S = \{F_1, ..., F_m\}, V(S) = V(F_1, ..., F_m)$

Propiedades 1.3.4 (Conjuntos Algebraicos)**.** 1. Si $I =< S > \implies V(S) = V(I)$

Demostración. Sea $p \in V(S) \implies F(p) = 0 \forall F \in S$.
Sea $G \in I \implies G = r_1F_1 + ... + r_mF_m,\ F_1, ..., F_m \in S\ r_1, ..., r_m \in k[x_1, ..., x_n]$

$$\therefore G(p) = r_1(p)F_1(p) + ... + r_m(p)F_m(p) = 0 \implies p \in V(I)$$

Si $p \in V(I) \implies$ en particular $F(p) = 0 \forall F \in S \subset I \implies p \in V(S)$

$$\therefore V(I) = V(S)$$

□

2. $\{I_\alpha\}_{\alpha \in J}$ familia de ideales $\implies V(\bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J} V(I_\alpha)$

3. $I \subset J$ ideales $\implies V(I) \supset V(J)$

4. $V(FG) = V(F) \cup V(G)$ Sea I, J ideales $\implies V(I) \cup V(J) = V(< \{FG : F \in I, G \in J\} >)$

5. $V(\emptyset) = \mathbb{A}_k^n$, $V(1) = \emptyset$

Observación 1.3.1. La **unión** arbitraria de conjuntos algebraicos no es necesariamente conjunto algebraico:

$$\mathbb{N} = V(I)?$$

Observación 1.3.2 (Topología de Zariski)**.** Los conjuntos algebraicos definen los **conjuntos cerrados** para una topología en $\mathbb{A}_k^n$ ($\mathbb{A}_k^n\backslash$cerrados = abiertos). Los cerrados de esta topología son $\{\emptyset, \mathbb{A}_k^n, \text{conj. finitos}\}$

Definición 1.3.5 (Ideal de un conjunto)**.** Sea $X \subset \mathbb{A}_k^n$. $I(X) = \{f \in k[x_1, ..., x_n] : f(p) = 0 \forall p \in X\}$

Propiedades 1.3.6 (Ideales de conjuntos)**.**

1. $I(X)$ es ideal:

   Demostración. $f, g \in I(X) \implies f(p) + g(p) = 0, \forall p \in X \implies f + g \in I(X)$
   $r \in k[x_1, .., x_n], f \in I(X) \implies r(p)f(p) = r(p) \cdot 0 = 0 \forall p \in X \implies rf \in I(X)$ □

2. $X \subset Y \implies I(X) \supset I(Y)$

3. $I(\emptyset) = k[x_1, ..., x_n]$, $I(\mathbb{A}_k^n) = (0)$ si k es un cuerpo infinito. $I(\{a_1, ..., a_n\}) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, ..., x_n - a_n)$ $a_i \in k$

4. $I(V(S)) \supset S$ $\forall$ conj. $S \subset k[x_1, .., x_n]$, $V(I(X)) \supset X \forall X \subset \mathbb{A}_k^n$

5. $V(I(V(S))) = V(S)$ $\forall$ conj. de pol. S, $I(V(I(X))) = I(X) \forall X \subset \mathbb{A}_k^n$

6. Si $V =$ conj. alg. $\implies V = V(I(V))$, si $I =$ ideal $\implies I = I(V(I))$

Observación 1.3.3. Si $I = I(X)$ y $F^m \in I$