Introducción a la Geometría Algebraica

Nicholas Mc-Donnell

1er semestre 2019

Índice general

Info

Libro: "Algebraic Curves" William Fulton

Notas: Tareas

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Estudio de objetos geométricos derivados de los polinomios (Variedades $\to$ Esquemas, etc). Los objetos son suaves o singulares.

1.1.1. Resolución de singularidades para una curva

Consideramos el siguiente polinomio:

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) := y^2 - x^2(x + 1) = 0\} = C$$

Definición 1.1.1 (Singularidad)**.** Es $p \in \mathbb{C}^2$ tal que $f(p) = 0$, $f_x(p) = 0$ y $f_y(p) = 0$

En el ejemplo el $(0, 0)$ es el único punto singular.
Considerar el morfismo:

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}^2$$
$$(u, v) \mapsto (uv, v)$$

Vemos la pre-imagen:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(C) &= \{v^2 - u^2v^2(uv + 1) = 0\} \\ &= \{v^2 = 0\}\{1 - u^2(uv + 1) = 0\} \end{aligned}$$

Ejemplo: 1.1.1.

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$T(x, y) = (-x, -y)$$

T es automorfismo de $\mathbb{C}^2$

$$T \circ T = 1$$

Lo qye sucede es que el grupo $\{1, T\} = G$ actua en $\mathbb{C}^2$.
Mirar $\mathbb{C}^2/G$ =espacio de órbitas de G, lo cuál es una variedad algebraica
Funciones regulares en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}[x, y]$.
Queremos buscar lo siguiente:

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \{f(x, y)\text{polinomio tal que } f(x, y) = f(-x, -y)\} = \mathbb{C}[x^2, y^2, xy]$$

$$\mathbb{C}[x^2, y^2, xy] \simeq \mathbb{C}[a, b, c]/(c^2 - ab)$$

$$\therefore \mathbb{C}^2/G := \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : c^2 - ab = 0\}$$

Ejemplo: 1.1.2.

$$\{(x, y) \in k^2 : x^{2n} + y^{2n} = 1\} = V(k)$$

Cómo se ve $V(k)$? ($V(k) \neq \emptyset$)
$n = 1$

$k = \mathbb{Q}$: Circunferencia porosa ($x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, y = \frac{2t}{t^2+1}$)(Viene de $\mathbb{Z}$, aritmético)

$k = \mathbb{R}$: Circunferencia completa (Viene de Análisis/límites)

$k = \mathbb{C}$: Esfera sin puntos?

$n \geq 2$: $V(\mathbb{Q}) \subset V(\mathbb{R}) \subset V(\mathbb{C})$

$V(\mathbb{Q})$: Ultimo Teorema de Fermat $\implies$ 4ptos

$V(\mathbb{R})$: Algo que se acerca a un cuadrado con n “grande”

$V(\mathbb{C})$: Objeto extraño con $g = (n-1)(2n-1)$ agujeros

Variedades = ceros de polinomios $\in k[x_1, ..., x_n]$ donde $k = \overline{k}$

1.2. Preliminares Algebraicos

- Anillos conmutativos con 1, y morfismos de anillos, tal que el $1 \mapsto 1$
- Dominios (sin div. del cero) y cuerpos (todo $u \neq 0$ es unidad)
- R anillo $\to R[x]$, grado, mónico. En general: $R[x_1, ..., x_n]$
- Polinomios homogeneos: $F \in R[x_1, ..., x_n]$ ssi $F(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^{\deg(F)} F(x_1, ..., x_n)$
- $a \in R$ es <u>irreducible</u> si a no unidad, no cero y $a = bc \implies b$ o c es unidad

- $a \in R$ es primeo si $a \mid bc \implies a \mid b$ o $a \mid c$
- R es UFD (DFU): Todo elemento se factoriza de forma única salvo orden y unidades. (R UFD $\implies R[x]$ UFD)
- Dado R dominio existe $F =$ cuerpo de fracciones de $R \supset R$, $F = \{\frac{a}{b} : a, b \in R, b \neq 0\}$
- f morfismo, $\ker f$ (ideal) $\operatorname{Im} f$ (anillo)
- Ideal $\cong$ Kernel (Primer teorema de Isomorfismo)
- Para $S \subset R$ anillo, $< S >=$ Ideal generado por S

Definición 1.2.1 (Ideal Primo). $p \subset R$ ideal primo ssi $ab \in p \implies a \in p \vee b \in p$

Teorema 1.2.1. *p primo $\iff R/p$ dominio.*

Demostración. p ideal primo

$$\begin{aligned} & ab = 0 \\ \iff & ab \in p \\ \iff & a \in p \vee b \in p \\ \iff & a = 0 \vee b = 0 \end{aligned}$$

□

Definición 1.2.2 (Ideal Maximal). $p \subset R$ es maximal ssi $p \subset m \subset R$, m ideal $\implies p = m \vee m = R$

Teorema 1.2.2. *m maximal $\iff R/m$ es cuerpo*

Demostración. $\implies$
Sea $a \in R \setminus m$, por lo que $a \neq 0$, luego ya que m maximal, $< m, a >= R$. Dado esto, sabemos que $\exists b \in m, \exists c, d \in R : bc + ad = 1$, y viendo esto en R/m tenemos que $ad = 1$, o sea, a tiene inverso.
$\impliedby$
Por contradicción, existe n ideal maximal que contiene a m □

Problema 1.2.1. Sea R un dominio.

1. Si F, G son formas[1] de grado r, s respectivamente en $R[x_1, ..., x_n]$, muestre que FG es una forma de grado $r + s$
2. Muestre que todo factor de una forma en $R[x_1, ..., x_n]$ también es una forma

Problema 1.2.2. Sea R un DFU, K el cuerpo cociente de R. Muestre que todo elemento z de K se puede escribir

[1] Polinomios homogeneos