

Algebra Lineal

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2017

Índice general

1. Espacios Vectoriales	3
1.1. Cuerpos	3
1.2. Espacios Vectoriales	6
1.3. Subespacios generados	6
1.3.1. Combinaciones lineales	6
1.4. Transformaciones lineales	10
1.4.1. Algebra de Transformaciones Lineales	13
1.4.2. Matriz representante	15
1.4.3. Composición y Productos	16
1.4.4. Invertibilidad	17
1.5. Isomorfismos	19
1.5.1. Matrices representantes	20
1.5.2. Cambios de Base:	21
1.6. Productos de Espacios Vectoriales	22
1.6.1. Productos y Sumas directas	23
2. Parte II	25
2.1. Polinomios	25
2.1.1. Algoritmo de la división	25
2.1.2. Raíces de Polinomios	26
2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios	27
2.3. Matrices triangulares superiores	29
2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales	31
3. Espacios de Producto Interno	33
3.1. Espacio de producto interno	35
3.2. Norma	36
3.3. Conjuntos Ortonormales	36
3.4. Algoritmo de Gram-Schmidt	39
3.5. Funciones lineales sobre Espacio con producto interno	42
3.6. Complementos Ortogonales y Problemas de Minimización	43

3.7. Problemas de Minimización	47
4. Operadores sobre Espacio con Producto Interno	51
4.1. Operador Adjunto, Auto-Adjunto y Normal	51
4.1.1. Operadores Auto-Adjuntos	55
4.1.2. Operadores normales	56
4.1.3. Vectores Propios Generalizados	59

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

1.1. Cuerpos

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , recordemos que se tienen las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad de la suma

$$a + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

2. Asociatividad de la suma

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{F}$$

3. Existe un único elemento neutro para la suma, tal que:

$$x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

4. Para todo $x \in \mathbb{F}$ existe un único inverso para la suma, tal que:

$$x + y = 0 \quad (-x = y)$$

5. Conmutatividad del producto

$$xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

6. Asociatividad del producto

$$(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y \in \mathbb{F}$$

7. Existe único neutro para el producto, el 1, tal que:

$$x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

8. Todo elemento $x \neq 0$ posee inverso multiplicativo único, tal que:

$$x \cdot y = 1 \quad (x^{-1} = y)$$

9. Distributividad de \cdot con respecto a $+$

$$x \cdot (y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{F}$$

Definición 1.1.1 (Cuerpo). Un cuerpo es un conjunto dotado de dos operaciones $(\mathbb{F}, +, \cdot)$, que cumplen lo siguiente:

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$

- $(\mathbb{F}, +)$ es grupo abeliano
- $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano (0 es el neutro aditivo)
- $a, b, c \in \mathbb{F} \implies a(b + c) = ab + ac$

Ejemplos:

- (a) \mathbb{N} con $+$ y \cdot usuales. No, no hay inverso aditivo.
- (b) \mathbb{Z} con $+$ y \cdot usuales. No, no hay inverso multiplicativo.
- (c) \mathbb{Q} con $+$ y \cdot usuales. Si.
- (d) \mathbb{R} con $+$ y \cdot usuales. Si.
- (e) \mathbb{C} con $+$ y \cdot usuales. Si.
- (f) $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ con $+$ y \cdot definida de la siguiente forma:

$+$	0	1	\cdot	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

Definición 1.1.2 (Subcuerpo). $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{F}$ es un subcuerpo si $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ es un cuerpo (donde $+$ y \cdot vienen de $(\mathbb{F}, +, \cdot)$)

Proposición 1.1.1. Sea $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ un cuerpo \mathbb{L} es subcuerpo \iff

- (a) $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{L}$
- (b) \mathbb{L} es cerrado para $+$, y $\forall x \in \mathbb{L} \implies \exists -x \in \mathbb{L}$
- (c) \mathbb{L} es cerrado para \cdot , y $\forall x \in \mathbb{L} \setminus \{0\} \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{L}$

Demostración. \implies trivial

\Longleftarrow

1. La propiedad se hereda de $(\mathbb{F}, +, \cdot)$
2. Idem
3. Por (a)
4. Por (b)
5. La propiedad se hereda de $(\mathbb{F}, +, \cdot)$
6. Idem
7. Por (a)
8. Por (c)
9. La propiedad se hereda de $(\mathbb{F}, +, \cdot)$

□

Ejemplos:

1. \mathbb{F} es un subcuerpo de \mathbb{F}
2. \mathbb{R} es un subcuerpo de \mathbb{C}
3. \mathbb{Q} es un subcuerpo de \mathbb{R}
4. $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ es subcuerpo de \mathbb{R}

Lema 1.1.2. *Todo subcuerpo de \mathbb{R} contiene a \mathbb{Q}*

Demostración. Sea \mathbb{L} un subcuerpo de \mathbb{R}

$$(a) \implies \{0, 1\} \subseteq \mathbb{L}$$

$$1 \in \mathbb{L} \implies \mathbb{N} \subseteq \mathbb{L} \quad (b)$$

$$\implies \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{L} \quad (b)$$

$$\implies \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L} \quad (c)$$

Observación: El único subcuerpo de \mathbb{Q} es \mathbb{Q} (ver dem. anterior)

□

Ejercicio: Existen infinitos subcuerpos de \mathbb{R} Recursivamente: sean $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$ los números primos. Definamos:

$$\mathbb{L}_0$$

1.2. Espacios Vectoriales

Definición 1.2.1 (Espacio Vectorial).

1.3. Subespacios generados

1.3.1. Combinaciones lineales

Teorema 1.3.1 (*). Sea V espacio vectorial generado por un conjunto finito m de vectores. Entonces cualquier

Demostración. Sean $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ con $n > m$. Por contradicción, suponiendo que son linealmente independientes.

Sean $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = V$ (por hipótesis)

$$\implies u_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(1)} v_i$$

Claramente $(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_m^{(1)}) \neq 0$ (de lo contrario $u_1 = 0$)

Sin perder generalidad, $\lambda_1^{(1)} \neq 0$ y por el Lema:

$$\langle u_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$$

Ahora, existan $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}) \neq (0, \dots, 0)$ tales que:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 + \sum_{i=2}^m \lambda_i^{(2)} v_i$$

Más. aun, $(\lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}) \neq (0, \dots, 0)$

De lo contrario:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 = \lambda_1^{(2)} u_1 - u_2 \rightarrow \leftarrow (u_1, \dots, u_n \text{ son linealmente independientes})$$

En conclusión, sin pérdida de generalidad $\lambda_2^{(2)} \neq 0$

Por el Lema:

$$\langle u_1, u_2, v_3, \dots, v_m \rangle = V$$

Iterando el argumento, se tiene que:

$$\langle u_1, \dots, u_m \rangle = V$$

Notemos que $u_{m+1} \in \langle u_1, \dots, u_m \rangle$

$$0 \neq u_{m+1} = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i \rightarrow \leftarrow$$

□

Definición 1.3.1 (Base, Dimensión finita). Una base B de un espacio vectorial es un conjunto $B \subseteq V$ tal que:

1. B es linealmente independiente
2. $\langle B \rangle = V$

Un espacio vectorial V se dice finito-dimensional si existe un conjunto $S \subseteq V, \|S\| < \infty$ tal que $\langle S \rangle = V$.

Corolario. Si V es finito-dimensional, todas las bases de V son finitas y tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Sean B_1 y B_2 bases de V .

Por Teo (*), $\|B_1\|, \|B_2\| \leq m$, donde m es el tamaño de S tal que $\langle S \rangle = V$ y $\|S\| < \infty$.

Como B_1 es base, $\langle B_1 \rangle = V$, y como B_2 es linealmente independiente:

$$\text{Teo} (*) \implies \|B_2\| \leq \|B_1\|$$

Como B_2 es base. □

Definición 1.3.2 (Dimensión). Si V es un espacio vectorial finito-dimensional definimos su dimensión, $\dim V$, como el cardinal de una base cualquiera de V . Si V no es finito-dimensional $\dim V = +\infty$

Ejemplos:

$$1. V = \text{Sim}^2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = A^T\}$$

abc

$$2. \dim(\mathbb{R}^{n \times n}) = n^2$$

$$3. \dim(\text{Antisim}^m(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ y } \dim(\text{Sim}^m(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4. P_n(\mathbb{C})$$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es base

$$a) \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle = P_n(\mathbb{C})$$

$$p \in P_n(\mathbb{C})$$

$$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n \in \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle$$

b) $\{1, x, \dots, x^n\}$ es linealmente independiente.

Por contradicción supongamos $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$ Con igualdad de funciones.

$\iff (\forall x \in \mathbb{C}) 0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$

Recuerdo (TFA): Todo polinomio complejo de grado ≥ 1 posee una raíz compleja.

$\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n = (x - z_1) \cdot a'_0 \cdot 1 + a'_1 \cdot x + \dots + a'_{n-1} \cdot x^{n-1}$

$\implies p(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \dots (x - z_k) \cdot A$ donde $k = \text{gr}(p)$, y $A \neq 0$.

Tomando $z' \neq z_1, z_2, \dots, z_k$, tenemos: $0 = (z' - z_1) \cdot (z' - z_2) \cdot \dots (z' - z_k) \cdot A$ Pero multiplicar cosas distintas de 0 no da 0.

$\rightarrow \leftarrow$

$$\dim(P_n(\mathbb{C})) = n + 1$$

Observación 1.3.1. $\{0\}$, $\dim\{0\} = 0$, notando que base es \emptyset , tenemos que $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Lema 1.3.2. Sea $S \subseteq V$, $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ conjunto linealmente independiente.

$v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle \implies \{v, v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Ejercicio □

Teorema 1.3.3. Sea V espacio vectorial finito dimensional, entonces:

1. Todo conjunto linealmente independiente extiende a una base
2. Todo conjunto generado contiene una base

Todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ finito dimensional posee una base.

Demostración. a) Sea $v \in V \setminus \{0\}$. Entonces $\{v\}$ es linealmente independiente.

Por Teo, estamos listos.

Dem(Teo):

V es finito dimensional $\implies \exists \{v_1, \dots, v_n\}$ que genera V .

Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ conjunto linealmente independiente.

Dos casos:

a) Si $\langle S \rangle = V$, entonces S es base

b) Si $\langle S \rangle \subset V$, entonces existe $v \notin \langle S \rangle$, y opr el Lema, $S \cup \{v\}$ es linealmente independiente.

Inductivamente, o bien eventualmente 1, o iteramos 2.

Sin embargo, 2 no puede ocurrir infinitas veces.

Teo(*) \implies todo conjunto linealmente independiente posee cardinalidad $\leq n$.

b) Sea S , tal que $\langle S \rangle = V$.

Consideremos, $d = \max\{|S'| : S' \subseteq S, S' \text{ es linealmente independiente}\}$

Notemos que $d \leq n < +\infty$, por el Teo(*).

Como el máximo se alcanza, existe S' tal que $|S'| = d$ y S' es linealmente independiente.

Por contradicción, supongamos que S' no es base.

$$\langle S' \rangle \subset V = \langle S \rangle$$

Luego, $S \setminus \langle S' \rangle \neq \emptyset$. De lo contrario $\langle S \rangle \setminus \langle S' \rangle \neq \emptyset$

$$\implies S \subseteq \langle S' \rangle \implies \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle \implies \langle S' \rangle = V$$

Finalmente, existe $v \in S \setminus \langle S' \rangle$, y por el Lema, $S' \cup \{v\}$ es linealmente independiente y $|S' \cup \{v\}| = d + 1$

$\rightarrow \leftarrow$

□

Corolario. Sea $W \subset V$ subespacio propio ($W \neq V$) con V finito dimensional. Entonces, $\dim W < \dim V$

Demostración. ■ Si $\dim W = 0 \implies \dim W = 0 < \dim V$.

■ Si $\dim W \geq 1$ entonces, por el corolario, W tiene una base.

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \text{ es base de } W$$

Como W es subespacio propio, existe $v \in V \setminus \langle B_W \rangle$

$$\implies B_W \cup \{v\} \text{ es linealmente independiente y } \subset V.$$

Por Teo. a), $B_W \cup \{v\}$ se extiende en una base B_V , $|B_V| \geq |B_W| + 1$.

$$\dim W = |B_W| < |B_W| + 1 \leq |B_V| = \dim V$$

□

Proposición 1.3.4. Sean U, W subespacios vectoriales de un espacio vectorial finito dimensional V . Entonces:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Demostración. Si $U \cap W = \{0\}$, trivial

Si $U \cap W \neq \{0\}$, entonces sea $B_{U \cap W}$ base de $U \cap W$.

$$B_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_m\}$$

Base de U : Sea $B_U = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p\}$

Base de W : Sea $B_W = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r\}$

Ambos existen por Teo.a).

Afirmación: $B_U \cup B_W = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r\}$ es base de $U + W$.

1. $\langle B_U \cup B_W \rangle = U + W$
 $v \in u + w, u \in U, w \in W$

$$\implies v = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^r \delta_k w_k + \sum_{j=1}^m \beta_j v_j \in \langle B_U \cup B_W \rangle$$

2. $B_U \cup B_W$ es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j + \sum_{k=1}^p \nu_k u_k \\ - \sum_{k=1}^p \nu_k u_k &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j \in U \cap W \\ \implies 0 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^r \mu_j w_j \implies \nu_k, \lambda_i = 0 \forall k, i \end{aligned}$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = |b_{U \cap W}|$$

$$\dim U = |B_U|$$

$$\dim W = |B_W|$$

$$\dim(U + W) = |B_U \cup B_W|$$

□

1.4. Transformaciones lineales

Definición 1.4.1 (Transformación lineal). Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo común \mathbb{F} . Una función $T : V \rightarrow W$ es transformación lineal si

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Ejemplos:

1. $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m, T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ y $A \in \mathbb{F}^{m \times n} \quad v \mapsto Av$
 T es una transformación lineal
2. $V = W = C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es infinitamente diferenciable}\}$
 $V = C^1(\mathbb{R}), W = C^0(\mathbb{R})$
 $T : V \rightarrow W$

$$f \mapsto \frac{df}{dx}$$

Por álgebra de funciones diferenciables si $f, g \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{d(\lambda f + g)}{dx} = \lambda \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

3. $\mathbb{R}[x]$ Es un espacio vectorial

$$T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$p \mapsto \frac{dp}{dx}$$

4. $V = C^0([0, 1]), W = \mathbb{R}$

$$T : V \rightarrow W$$

$$f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

Teorema 1.4.1. Sea V un espacio finito dimensional y $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V .

Sea W un espacio vectorial y consideramos vectores $w_1, \dots, w_n \in W$

Entonces $\exists! T : V \rightarrow W : T(v_i) = w_i \forall i = 1, \dots, n$

Demostración. ■ Existencia: Si $v \in V$ entonces:

$$(*) v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

Definimos:

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$$

$T : V \rightarrow W$ es una función porque $\forall v \in V$ la descomposición $(*)$ es única.

Además, es lineal. Si $v, u \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_i \lambda_i v_i$$

$$u = \sum_i \mu_i v_i$$

$$T(\lambda v + u) = T\left(\sum_i (\lambda \lambda_i + \mu_i) v_i\right)$$

$$T(\lambda v + u) = \sum_i (\lambda \lambda_i + \mu_i) T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda \sum_i \lambda_i T(v_i) + \sum_i \mu_i T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u)$$

- Unicidad: Sean T, T' transformaciones lineales tales que:

$$T(v_i) = T'(v_i) = w_i$$

Sea $v \in V$, entonces:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T'(v_i)$$

$$T(v) = T'(v) \implies T = T'$$

□

Propiedades:

Si $T : V \rightarrow W$ transformaciones lineales, entonces:

1. $T(0) = 0$
2. $T(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$

Demostración.

□

La importancia de este teorema se relaciona con el hecho de poder definir transformaciones lineales sólo a través de como actúan sobre una base. Esto se relaciona con la noción de matriz representante.

Definición 1.4.2. Si $T : V \rightarrow W$ transformación lineal, definimos:

- Núcleo(Kernel): $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$, subespacio vectorial de V
- Imagen(Rango): $T(V) = \{w \in W : \exists v \in V T(v) = w\}$, subespacio vectorial de W

Teorema 1.4.2 (Núcleo-Imagen). Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} y $T : V \rightarrow W$ transformación lineal. Entonces, si V es finito dimensional:

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(T(V))$$

Demostración. Como $\ker T$ es subespacio vectorial de V entonces es finito dimensional y por ende posee una base:

$$\{v_1, \dots, v_k\} \quad \text{es base de } \ker T$$

Por un teorema podemos extender a una base de V

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_u\} \text{ es base de } V$$

Sea ahora $w \in \Im(T) \implies w = T(v)$

Entonces,

$$w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{F}$$

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i + v_{k+1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) v_{k+1}$$

$$\in \langle \{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} \rangle$$

Queremos probar ahora que $(T(v_i))_{i=k+1}^n$ son linealmente independientes. Supongamos $\exists \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ tal que:

$$\sum_{i=k+1}^n \lambda_i T(v_i) = 0$$

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i v_i\right) = 0$$

$$\implies \sum_{i=k+1}^n \lambda_i v_i \in \ker(T)$$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^n (-\lambda_i) v_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = 0$$

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ son linealmente independientes tenemos que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Finalmente:

$$\dim V = n, \dim \ker T = k$$

$$\dim \Im T = n - k$$

□

1.4.1. Algebra de Transformaciones Lineales

Def[Espacio de transformaciones lineales]:

Sean V y W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Definimos

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W : T \text{ es transformación lineal}\}$$

Dadas $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, definimos

$$T_1 + T_2 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto T_1 v + T_2 v$$

$$\lambda T_1 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto \lambda T_1 v$$

Teorema

$\mathcal{L}(V, W)$ dotado de $+$ y \cdot es un espacio vectorial sobre \mathbb{F}

Dem: Primero probar que $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda T_1 \in \mathcal{L}(V, W)$

$T_1 + T_2$ es transformación lineal.

$$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w) \quad (T_1 + T_2)(\lambda v + w) = T_1(\lambda v + w) + T_2(\lambda v + w)$$

$$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w) \quad \text{Similarmente:}$$

$$(\lambda T_1)(\mu v + w) = \mu(\lambda T_1)(v) + (\lambda T_1)(w)$$

Y el resto de las propiedades se dejan propuestas como ejercicio.

Teorema

Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} , $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Luego, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio finito dimensional y $\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n$

Dem: Sean $V = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$, $W = \langle \{w_1, \dots, w_m\} \rangle$, bases respectivamente.

Dados $1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m$, definimos $E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$ como única transformación lineal que satisface:

$$E^{p,q}(v_j) = \begin{cases} w_p & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}$$

$$E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$$

$E^{p,q}$ esta bien definida por el primer teorema de la sección

$$\mathcal{B}_L = \{E^{p,q} : 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m\}$$

Afirmación: \mathcal{B}_L es base de $\mathcal{L}(V, W)$

$$\langle \mathcal{B}_L \rangle = \mathcal{L} : \text{Sea } T \in \mathcal{L}(V, W)$$

Dado $1 \leq j \leq n$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{i,j} w_i$$

Dado $v \in V$, existen $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \mu_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i \right)$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mu_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_i \sum_j \lambda_{i,j} \mu_j E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j} \left(\sum_k \mu_k v_k \right) \right)$$

$$T(v) = \sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v)$$

\mathcal{B}_L es linealmente independiente: Supongamos que:

$$\sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j} = 0$$

Dado $1 \leq k \leq n$

$$\sum_i \sum_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_k) = \mathbf{0}$$

$$\iff \sum_i \lambda_{i,k} w_i = \mathbf{0}$$

$$\iff \lambda_{1,k} = \lambda_{2,k} = \dots = \lambda_{m,k} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = |\mathcal{B}| = m \cdot n$$

1.4.2. Matriz representante

El Teo anterior permite identificar transformaciones lineales entre espacios finito-dimensionales y matrices $m \times n$ (donde $m = \dim W, n = \dim V$).

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W .

Definimos la matriz representante de T con respecto a las bases \mathcal{B}_V y \mathcal{B}_W como $\mathcal{M}(T) = (a_{ij})_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$, tal que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Si las bases no están claras por contexto usamos la notación $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$

Es facil ver que

$$\mathcal{M}(T_1 + \lambda T_2) = \mathcal{M}(T_1) + \lambda \mathcal{M}(T_2)$$

(Ejercicio)

De esta forma, \mathcal{M} respeta la estructura lineal de $\mathcal{L}(V, W)$

Ejemplos:

$$\mathbb{F}^\infty = V = W$$

$$1. L : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$Lx = (x_2, x_3, \dots)$$

$$2. R : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

$$x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$Rx = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Pregunta: $\mathcal{M}(L), \mathcal{M}(R)$?

1.4.3. Composición y Productos

Teo

Sean V, W, Z espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, Z)$. Entonces por composición: $S \circ T : V \rightarrow Z$ dada por $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ es una transformación lineal.

Dem: Tenemos que probar que:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

En efecto:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = S(T(\lambda u + v)) = S(\lambda T(u) + T(v))$$

$$S \circ T(\lambda u + v) = \lambda S(T(u)) + S(T(v)) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

Definición 1.4.3. Endomorfismo

Una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, V)$ se dice endomorfismo u operador lineal. Denotamos $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. La composición funciona como producto sobre $End(V)$

Propiedades:

$$a) I \circ S = S \circ I = S \text{ (I es neutro para } \circ \text{)}$$

$$b) \quad \blacksquare S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$$

$$\blacksquare (T_1 + T_2) \circ S = T_1 \circ S + T_2 \circ S$$

$$c) \lambda(S \circ T) = (\lambda S) \circ T = S \circ (\lambda T)$$

Demostración. Ejercicio □

Importante notar que \circ no es conmutativo.

También es importante observar que NO todo operador posee elemento inverso para \circ . Dado $T \in$

$End(V) \setminus \{0\}$, decimos que $S \in End(V) \setminus \{0\}$ es su inversa si:

$$S \circ T = T \circ S = I$$

Corolario

Sea V espacio vectorial finito-dimensional y $\mathbb{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Entonces $\{E^{p,1} : p, q = 1, \dots, n\}$ es base de $End(V)$.

Demostración. Directo por Teo (+). □

Lema: Sean $S, T \in End(V)$ con V finito dimensional. Entonces:

$$\mathcal{M}(S \circ T) = \mathcal{M}(S) \cdot \mathcal{M}(T)$$

Demostración. Recordar que

$$\{E^{p,q} : p, q = 1, \dots, n\}$$

son base de $End(V)$.

$$\mathcal{M}(S) = (b_{p,q})_{p=1, \dots, n, q=1, \dots, n}$$

□

1.4.4. Invertibilidad

Definición 1.4.4. $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se dice invertible si existe $S : W \rightarrow V$ tal que

$$S \circ T = I_V, T \circ S = I_W \tag{1.1}$$

Cuando T es invertible, denotamos T^{-1} con su inversa

$$T \text{ invertible} \iff T \text{ es inyectiva y es sobreyectiva}$$

Observación 1.4.1.

1. No todo $T \in End(V) \setminus \{0\}$ es invertible
2. En el caso $V = W$, I_V es neutro para \circ
3. Puede ser que $S \circ T = I$ y $T \circ S \neq I$

Teorema 1.4.3. Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si T es invertible entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$

Demostración. Queremos probar $T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2)$

Sean $v_1 = T^{-1}(w_1), v_2 = T^{-1}(w_2)$

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad /T^{-1}()$$

$$v_1 + \lambda v_2 = T^{-1}(T(v_1) + \lambda T(v_2))$$

$$T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2) = T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) \quad \square \quad (1.2)$$

Proposición 1.4.4. Sean $T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow Z$ lineales e invertibles. Entonces $S \circ T$ es lineal e invertible; mas aun

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} \quad (1.3)$$

Demostración. $S \circ T$ es lineal (visto lunes).

Invertible: basta probar:

$$(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = I_Z$$

$$(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = T^{-1} \circ (S^{-1} \circ S) \circ T = T^{-1} \circ T = I_V$$

□

Definición 1.4.5. Decimos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es no singular si $\ker T = [0]$. Notar ademas que T no singular si solo si inyectiva

$$Tv_1 = Tv_2 \iff T(v_1 - v_2) = 0 \quad (1.4)$$

Teorema 1.4.5. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

T no-singular $\iff T$ transforma conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes, es decir, $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ l.i. $\implies \{Tv_1, \dots, Tv_k\} \subseteq W$ l.i.

Teorema 1.4.6. □ Sean V, W finito-dimensionales tal que $\dim V = \dim W$. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ entonces las siguientes son equivalentes:

- I) T es invertible
- II) T es no-singular
- III) T es sobreyectiva
- IV) Para toda base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V , $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es base de W .
- V) Existe $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V tal que $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es base de W

Observación 1.4.2.

- 1. Si $\dim V \neq \dim W$

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n < m$$

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$
 es inyectiva, pero no sobreyectiva

2. $V = W, \dim V = +\infty$
 $R : \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$
 $(x_1, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots)$
 es inyectiva, pero no sobreyectiva

Demostración. (i) \implies (ii)

$$(ii) \ker T = \{0\} \iff T(V) = W$$

$$(ii) \implies (iii)$$

(iii) T es sobre. Por TNI

$$\dim T = n \implies \dim \ker T = 0 \implies T \text{ no singular}$$

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V , por el Teo. anterior $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ se base de W □

1.5. Isomorfismos

Definición 1.5.1. Isomorfismos Sean V, W espacio vectorial sobre \mathbb{F} . Decimos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es un isomorfismo si es invertible. En tal caso, diremos que V y W son isomorfos

Ejemplos:

1. \mathbb{F}^{n+1} y $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ son isomorfos

$$T : \mathbb{F}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i + a_0$$

2. (Coordenadas baricéntricas): Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V

$$(\forall v \in V) v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

$$[\cdot]_B : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [v]_B$$

3. V, W finito dimensional sobre \mathbb{F} , con

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$\mathcal{M}(\cdot, B_V, B_W) : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathbb{F}^{n \times m}$$

$$T \mapsto \mathcal{M}(T, B_V, B_W)$$

es un isomorfismo (ejercicio)

Teorema 1.5.1. *Dos espacios finito dimensionales V, W (sobre \mathbb{F} son isomorfos si solo si $\dim V = \dim W$*

Demostración. Sean $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W .

\implies Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ isomorfismo

$$\{Tv_1, \dots, Tv_n\} \subseteq W$$

Es un conjunto linealmente independiente (un Teorema)

$$\implies n \leq \dim W = m$$

Tomando T^{-1} , (que también es isomorfismo) tomemos

$$\{T^{-1}w_1, \dots, T^{-1}w_m\} \subseteq V$$

Es linealmente independiente

$$\implies m \leq \dim V = n$$

$$\implies m = n$$

\Leftarrow Suponemos $n = m$, sea T la única transformación lineal tal que

$$Tv_i = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Por el teorema \square , parte (v) \implies (i) tenemos que T es isomorfismo. \square

1.5.1. Matrices representantes

Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} , y sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W .

$$[Tv_j]_{B_W} = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \iff T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad (\forall v \in V \exists a_{ij})$$

Luego, par todo $v \in V$

$$v = \sum_j \lambda_j v_j \quad (\exists \lambda_j) \iff [Tv]_{B_W} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j)$$

De esta forma,

$$[T(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$$

Notemos que A coincide con la matriz representante de T con respecto a las bases B_V y B_W .

$$\mathcal{M}(T, B_V, B_W) = M$$

Evaluar (*) para $v = v_j$

$$[T(v_j)]_{B_W} = A \cdot [v_j]_{B_V} = A \cdot e_j$$

$$\implies T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot w_i$$

$$\therefore T(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j) = \sum_j \sum_i \lambda_j a_{i,j} w_i$$

$$T(v) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j} \left(\sum_q \lambda_q v_q \right) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$$\therefore T = \sum_i \sum_j a_{i,j} E^{i,j}$$

1.5.2. Cambios de Base:

Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ 2 bases (ordenadas).

Como se relacionan $[\cdot]_{B'}$ y $[\cdot]_B$?

$$T : V \rightarrow \mathbb{F}^n, U : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto [v]_B, v \mapsto [v]_{B'}$$

Notemos que $T \circ U^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n, [v]_B \mapsto [v]_{B'}$ es un isomorfismo.

Sea P la matriz representante de $T \circ U^{-1}$ con respecto a la base canónica en \mathbb{F}^n

Usando (*):

$$[v]_B = P \cdot [v]_{B'} \quad \forall v$$

Sea ahora $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Tomemos:

$$[T(v)]_B = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot [v]_B$$

$$P \cdot [T(v)]_{B'} = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P \cdot [v]_{B'}$$

$$[T(v)]_{B'} = (P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P) \cdot [v]_{B'}$$

$$\implies \mathcal{M}_{B',B}(T) = (P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P)$$

Pregunta: Como calcular P ?

$$[v'_j]_B = P \cdot [v'_j]_{B'} = P \cdot j$$

$$P = [[v'_1]_B | [v'_2]_B | \dots | [v'_n]_B] \oplus$$

Teorema 1.5.2. Sea V espacio vectorial finito-dimensional con bases ordenadas $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$. Sea $T \in \text{End}(V)$. Luego

$$\mathcal{M}_{B',B}(T) = P^{-1} \mathcal{M}_{B,B}(T) P$$

Definición 1.5.2. $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ son similares si $\exists P$ invertible tal que:

$$A = P^{-1} B P$$

1.6. Productos de Espacios Vectoriales

Definición 1.6.1. Sean V_1, \dots, V_m espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Definimos el espacio producto como

$$V = V_1 \times \dots \times V_m = \{(v_1, \dots, v_m) : v_i \in V_i (\forall i = 1, \dots, m)\}$$

1. Suma: $(v_1, \dots, v_m) + (v'_1, \dots, v'_m) = (v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m)$
2. Producto por escalar: $\lambda \cdot (v_1, \dots, v_m) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_m)$

Proposición 1.6.1. $V \times \dots \times V_m$ con suma y producto escalar es un espacio vectorial.

Demostración. Ejercicio: similar a \mathbb{F}^n □

Proposición 1.6.2. Sean V_1, \dots, V_m espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Entonces $V_1 \times \dots \times V_m$ es finito-dimensional y

$$\dim(V_1 \times \dots \times V_m) = \sum_{i=1}^m \dim V_i$$

Demostración. Dado $i = 1, \dots, m$ sea

$$B_{V_i} = \{V_{i,1}, \dots, V_{i,n_i}\}$$

Base de V_i . Ahora sea

$$B = \bigcup_{i=1}^m \{(0, \dots, 0, v_{ij}, \dots, 0) : j = 1, \dots, n_i\}$$

Probaremos que B es base de $V_1 \times \dots \times V_m$. Notemos que esto basta:

$$\dim V_1 \times \dots \times V_m = |B| = \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m \dim V_i$$

- B genera: Sea $v \in V \times \dots \times V_m$, entonces

$$v = (v_1, \dots, v_m) \quad \text{donde } v_i \in V_i$$

Como B_{V_i} es base de V_i :

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot v_{i,j} \\ v &= \left(\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} v_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{m,j} v_{m,j} \right) \\ v &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} (0, \dots, 0, v_{i,j}, 0, \dots, 0) \in B \end{aligned}$$

- B es linealmente independiente (ejercicio)

□

1.6.1. Productos y Sumas directas

Teorema 1.6.3. Sean U_1, \dots, U_m subespacios vectoriales de V . Definimos la transformación lineal

$$\Gamma : U_1 \times \dots \times U_m \rightarrow U_1 + \dots + U_m$$

$$\Gamma(u_1, \dots, u_m) = u_1 + \dots + u_m$$

Entonces, $U_1 + \dots + U_m$ es suma directa si y solo si Γ es inyectiva

Observación 1.6.1. Notar que Γ siempre es sobreyectiva

Demostración.

$$\Gamma \text{ inyectiva} \iff \ker \Gamma = \{0\}$$

$$\iff [u_1 + \dots + u_m = 0 \iff (u_1, \dots, u_m) = (0, \dots, 0)]$$

$$\iff U_1 + \dots + U_m \text{ es directa}$$

□

Capítulo 2

Parte II

2.1. Polinomios

Definición 2.1.1 (Grado). Si $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ con $a_n \neq 0$, entonces $gr(p) = n$. Si $p(z) = 0$ entonces $gr(p) = -\infty$

Proposición 2.1.1.

2.1.1. Algoritmo de la división

Recordemos que si p, s son enteros, no negativos, con $s \neq 0$, existen únicos q, r enteros no negativos tal que:

$$p = s \cdot q + r$$

Donde $r < s$.

De ahora en adelante, $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ a menos que se diga lo contrario.

Teorema 2.1.2 (División de polinomios). Sean $p, s \in \mathbb{F}[z]$ con $s \neq 0$. Entonces existen únicos polinomios $q, r \in \mathbb{F}[z]$ tales que:

$$p = q \cdots + r \implies n = gr(q) + m$$

Con $gr(r) < gr(s)$.

Demostración. Sean $n = gr(p), m = gr(s)$. Definamos

$$T : \mathcal{P}_{n-m}(\mathbb{F}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(q, r) \mapsto q \cdot s + r$$

Probaremos que T es una transformación lineal biyectiva. Notar que esto es suficiente para concluir el Teorema.

- T es lineal

$$T((q_1, r_1) + \lambda(q_2, r_1)) = T(q_1, r_1) + \lambda T(q_2, r_2)$$

- T inyectivo: Basta probar que $\ker T = \{0\}$. En efecto, si (q, r) son tales que:

$$q \cdot s + r = 0$$

$$q \cdot s = -r$$

Comparando grados:

$$\text{gr}(LI) = \text{gr}(q) \cdot m, \text{gr}(LD) = \leq m - 1$$

$$\implies q = 0 \implies r = 0$$

- T sobreyectiva: Por el TNI, y como $\ker T = \{0\}$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1})$$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m}) + \dim(\mathcal{P}_{m-1}) = n + 1$$

$$\therefore \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = n + 1 = \dim \mathcal{P}_n$$

Lo que implica que T es sobreyectiva.

□

Observación 2.1.1. La demostración del Teo. Anterior entrega un "algoritmo" para dividir polinomios. Resolver la ecuación lineal no-homogénea

$$T(q, r) = p$$

Asignando bases a la partida y la llegada, se obtendrá un sistema lineal

$$Ax = b$$

2.1.2. Raíces de Polinomios

El estudio de la ecuación $p(z) = 0$ es sumamente útil para analizar un polinomio $p \in \mathbb{F}$

Definición 2.1.2 (Raíz). $\lambda \in \mathbb{F}$ se dice raíz de un polinomio si

$$p(\lambda) = 0$$

Definición 2.1.3 (Factor). $s \in \mathbb{F}[z]$ se dice factor de $p \in \mathbb{F}[z]$ si existe un polinomio $q \in \mathbb{F}[z]$ tal que:

$$p = q \cdot s$$

Teorema 2.1.3 (Raíces definen factores de grado 1). *Sea $p \in \mathbb{F}[z]$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces $p(\lambda) = 0 \iff (z - \lambda)$ es factor de p*

Demostración. \Leftarrow $(z - \lambda)$ factor de p , entonces $\exists q \in \mathbb{F}[z]$ tal que

$$p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z) \forall z \in \mathbb{F}$$

$$\implies p(\lambda) = 0 \cdot q(\lambda) = 0$$

implies. Por el algoritmo de la división para p y $s(z) = z - \lambda$, tenemos que $\exists! r \in \mathbb{F}[z]$ con $\deg(r) < 1 \implies r \in \mathbb{F}$ tal que

$$p(z) = q(z) \cdot (z - \lambda) + r$$

$$\implies 0 = p(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r$$

$$\therefore r = 0$$

□

Corolario (Un polinomio tiene tantas raíces como su grado). *Sea $p \in \mathbb{F}[z]$ un polinomio de grado $m \geq 0$. Entonces p tiene a lo más m raíces distintas sobre \mathbb{F}*

Demostración. Por inducción en m .

$m = 0$: $p(z) = a_0 \neq 0$. Entonces p tiene 0 raíces.

$m - 1 \implies m$: Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$ con $a_m \neq 0$

Caso 1: p no posee raíces

Caso 2: p sí posee raíces. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ raíz de p

$$\therefore \exists q \in \mathbb{F}[z] : p(z) = (z - \lambda) \cdot q(z)$$

Claramente $\deg(q) = m - 1$. Por inducción, q posee a lo más $m - 1$ raíces en \mathbb{F} . Por lo tanto:

$$\# \text{ raíces de } p \leq \# \text{ raíces de } (z - \lambda) + \# \text{ raíces de } q = m$$

□

2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios

Queremos entender la estructura de $T \in \text{End}(V) = \mathcal{L}(V)$ supongamos que

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

y

$$T|_{u_1}, T|_{u_2}, \dots, T|_{u_m}$$

Definición 2.2.1 (Subespacio invariante). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un subespacio U de V se dice invariante para T si $TU \subseteq U$

$$\implies TU = \{w \in V : w = Tv\}$$

Propiedad: Sea $p, q \in \mathbb{F}[z]$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces:

1. $(p \cdot q)(T) = p(T) \cdot q(T)$
2. $p(T) \cdot q(T) = q(T) \cdot p(T)$

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ y $q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$

$$(p \cdot q)(z) = \left(\sum_{j=0}^n a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^m b_k z^k \right)$$

$$p \cdot q(z) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k z^{j+k}$$

$$\implies (p \cdot q)(T) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k T^{j+k}$$

$$(p \cdot q)(T) = \left(\sum_j a_j T^j \right) \left(\sum_k b_k T^k \right)$$

□

Teorema 2.2.1 (Existencia de vps). *Todo operador en un espacio vectorial complejo de dimensión finita y > 0 , posee un valor propio.*

Demostración. Sea $n = \dim V > 0$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea ahora $v \neq \mathbf{0}$. Entonces

$$\{v, Tv, T^2v, \dots, T^n v\}$$

es linealmente dependiente. Luego existen a_0, \dots, a_n tal que $a_0 v + a_1 Tv + \dots + a_n T^n v = 0$

$$\therefore p(T)v = 0 \quad \text{con } \text{gr}(p) = n$$

Por el teorema fundamental del algebra, p puede ser factorizado

$$p(z) = C(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$$

Por ende:

$$p(T)v = 0 = C(T - \lambda_1 I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n I)v$$

\implies Existe $j = 1, \dots, n$ tal que $\text{Im}(T - \lambda_j I) \neq V \therefore \lambda_j$ es valor propio de T

□

2.3. Matrices triangulares superiores

Recordemos que dada $T \in \mathcal{L}(V)$ y una base B la matriz representante de T con respecto a B es

$$\mathcal{M}_B(T) = (a_{i,j})_{i,j \in [n]}$$

tal que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i$$

Notemos, por ejemplo, que en el caso complejo siempre existe una base B tal que la matriz representante posee la siguiente estructura

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

En efecto, sea $\lambda \in \mathbb{F}$ valor propio de T con vector propio asociado $v \neq 0$.

Sea B una base que contiene a v . Si hacemos esto

$$Tv = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.3.1 (Matriz triangular superior). Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ se dice triangular superior si

$$a_{i,j} = 0 \forall i > j$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Proposición 2.3.1. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y v_1, \dots, v_n base (ordenada) de V . Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) La matriz representante $\mathcal{M}_B(T)$ es Δ superior
- b) $Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle \forall j = 1, \dots, n$
- c) $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$ es invariante bajo $T, \forall j = 1, \dots, n$

Demostración. □

Proposición 2.3.2 (Invertibilidad a través de representaciones matriciales). *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que posee una representación Δ superior con respecto a cierta base. Entonces T invertible \iff las entradas diagonales de la matriz son no nulas.*

Demostración. Sea B base tal que

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

\Leftarrow Por (*)

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\therefore v_1 = T \left(\frac{v_1}{\lambda_1} \right) \in \text{Im}(T)$$

Nuevamente, por (*)

$$Tv_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\lambda \neq 0 \implies v_2 = T \left(\frac{v_2}{\lambda_2} \right) \in \text{Im}(T)$$

Por inducción:

$$Tv_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$v_j = T \left(\frac{v_j}{\lambda_j} \right) + \frac{a_1}{\lambda_j} v_1 + \dots + \frac{a_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} \in \text{Im}(T)$$

\implies Sabemos que $\forall j = 1, \dots, n$

$$Tv_j = a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$\implies Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

Si algún $\lambda_j = 0$:

$$Tv_j \in \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

$$T(\langle v_1, \dots, v_j \rangle) \subseteq \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

En efecto □

Corolario (Valores propios de operador a través de representación Δ superior). *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con representación Δ superior*

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

con B base de V . Entonces los valores propios de T son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Demostración.

$$T_\lambda I \quad \text{no es biyectiva}$$

$$\mathcal{M}_B(T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\mathcal{M}_B(T - \lambda I) = \mathcal{M}_B(T) - \lambda \mathcal{M}_B(I)$$

Por el Teo (\cdot)

$T - \lambda I$ invertible si solo si $\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda \neq 0$

λ es valor propio si solo si $\lambda_1 = \lambda$ o $\lambda_2 = \lambda \dots \lambda_n = \lambda$

□

2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales

Definición 2.4.1 (Diagonal de una matriz diagonal). Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$. Definimos $Diag(A) \in \mathbb{F}^{n \times m}$

$$(Diag(A))_{i,j} =$$

Y decimos que A es diagonal si

$$A = Diag(A)$$

Equivalentemente, A es diagonal si

$$a_{i,j} = 0 \forall i \neq j$$

Claramente, toda matriz diagonal es Δ superior, entonces los valores propios de A son los valores en la diagonal.

Definición 2.4.2 (Subespacio Propio). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. El subespacio propio de T correspondiente a λ , $E(\lambda, T)$, se define como

$$E(\lambda, T) = \ker(T - \lambda I)$$

es decir, el conjunto de vectores propios asociados a λ , más el cero.

Observación 2.4.1. λ es valor propio de $T \iff E(\lambda, T) \neq \{0\}$

Proposición 2.4.1 (Suma de subespacios propios es directa).

Capítulo 3

Espacios de Producto Interno

Definición 3.0.1 (Producto Interno). Un producto interno sobre un espacio vectorial V es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

I) Positividad: $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$

II) Definitividad: $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \mathbf{0}$

III) Aditividad por la izquierda: $\forall u, v, w \in V$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

IV) Homogeneidad: $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall u, v \in V$

V) Simetría conjugada: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

Observación 3.0.1. En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}, (V) \iff \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Ejemplos:

a) El producto interno Euclideo sobre \mathbb{F}^n

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + \dots + z_n \cdot \overline{w_n}$$

b) Si $c_1, \dots, c_n > 0$, entonces

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \cdot z_i \cdot \overline{w_i}$$

c) Si $V = \mathcal{C}[-1, 1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

d) Si $V = \mathbb{R}[x]$ entonces

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

Integrales

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y $f \geq 0$ definimos la integral de f como el "área bajo la curva".

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)$$

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{N} \cdot i$$

$$i = 0, \dots, N$$

1.

Teorema 3.0.1 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que para $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se cumple $F'(x) = f(x)$ (primitiva).*

Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^J \int_{A_j=[a_j, b_j]} f(x) dx$$

2. Linealidad:

$$\mathcal{I} : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$$

$$f(x) \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

es una tra lineal.

Ejemplos:

1. Monomio:

$$p(t) = t^k \quad P(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

P es primitiva de p :

$$P'(t) = t^k = p(t)$$

$$\therefore TFC$$

$$\int_0^t p(s) ds = P(t) - P(0)$$

2. Polinomios:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$$\int_0^t p(s) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^t s^k ds$$

3. Exponenciales:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} \quad (\lambda \neq 0) \\ F(x) &= \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \\ \therefore \int_0^x e^{\lambda t} dt &= F(x) - F(0) = \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} \end{aligned}$$

4. Seno-Coseno:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ f(x) &= e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x \\ F(x) &= \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} \\ \therefore \int_0^x f(t) dt &= \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} \\ \int_0^x f(t) dt &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + i \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} \\ \implies \int_0^x \sin \lambda t dt &= \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} \\ \int_0^x \cos \lambda t dt &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \end{aligned}$$

3.1. Espacio de producto interno

Definición 3.1.1 (Espacio de producto interno). $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de producto interno (e.p.i.) si V es un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es producto interno sobre V .

Proposición 3.1.1 (Propiedades básicas).

(a)

$$\forall u \in V \quad v \mapsto \langle v, u \rangle$$

Es una transformación lineal de V hacia \mathbb{F}

(b)

$$\langle 0, u \rangle = 0 \quad \forall u \in V$$

(c)

$$\langle u, 0 \rangle = 0 \quad \forall u \in V$$

(d)

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$$

(e)

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

3.2. Norma

Definición 3.2.1 (Norma). Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de producto interno, definimos la norma asociada como:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Propiedades: Sea $v \in V$

(a)

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

(b)

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Intuición geométrica:

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$

Por teo del coseno

$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

$$\|v - u\|^2 = \langle v - u, v - u \rangle = \|v\|^2 - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \|u\|^2$$

$$\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle$$

Reemplazando:

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$$

3.3. Conjuntos Ortonormales

Proposición 3.3.1 (Norma de una combinación ortonormal). Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno y e_1, \dots, e_m conjunto ortonormal. Entonces

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$

Demostración. Por Pitágoras:

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = \|a_1 e_1\|^2 + \|a_2 e_2 + \dots + a_m e_m\|^2$$

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 \|e_1\|^2 + \|a_2 e_2 + \dots + a_m e_m\|^2$$

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \|a_2 e_2 + \dots + a_m e_m\|^2$$

$$\vdots$$

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$

□

Teorema 3.3.2. *Todo familia ortonormal es linealmente independiente.*

Demostración. Sea $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ conjunto ortonormal.

Si fueran linealmente dependientes, existen $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ no todos nulos

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$$

$$a_1 e_{\lambda_1} + \dots + a_m e_{\lambda_m} = 0 \quad / \|\cdot\|^2$$

$$0 = \|a_1 e_{\lambda_1} + \dots + a_m e_{\lambda_m}\|^2$$

$$0 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$

$$\iff a_1 = \dots = a_m = 0$$

$$\rightarrow \nrightarrow \leftarrow$$

□

Definición 3.3.1 (Base ortonormal). Una base ortonormal de un espacio con producto interno $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un conjunto ortonormal que también es base.

Lema 3.3.3. *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno finito dimensional. Entonces un conjunto ortonormal de cardinalidad $\dim V$ es una base ortonormal*

Demostración. Sea $n = \dim V$ y sea e_1, \dots, e_m conjunto ortonormal en V .

$$\implies e_1, \dots, e_m \text{ son linealmente independiente}$$

$$\implies \text{son base}$$

□

Ejemplos:

1. \mathbb{F}^n

2. $\text{ser } F^4$, el conjunto

$$(0,5, 0,5, 0,5, 0,5), (0,5, 0,5, -0,5, -0,5)$$

$$(0,5, -0,5, -0,5, 0,5), (-0,5, 0,5, -0,5, 0,5)$$

es base ortonormal. Claramente: $\|\cdot\| = \sqrt{(0,5)^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2} = 1$

Tambien los productos internos cruzados dan 0

Pregunta: Cuándo existen bases ortonormales uniformes en \mathbb{R}^n

Lema 3.3.4. Sea e_1, \dots, e_n vectores de \mathbb{F}^n y sea

$$U = [e_1 | e_2 | \dots | e_n]$$

Entonces, e_1, \dots, e_n es base ortonormal \iff

$$U^T \cdot U = I_{n \times n}$$

Demostración.

$$\begin{bmatrix} \frac{e_1^T}{e_2^T} \\ \vdots \\ \frac{e_n^T}{e_n^T} \end{bmatrix}$$

□

Definición 3.3.2 (Matriz unitaria). $U \in \mathbb{F}^{n \times n}$ se dice unitaria si

$$U^T U = I_{n \times n}$$

Notar que U es unitaria \iff las columnas de U son base ortonormal.

Para responder la pregunta hacemos lo siguiente:

Demostración. $n = 1$: $\{1\}$ es base ortonormal de \mathbb{F}

$$H_1 = [1]$$

$n \implies 2n$: Sea H_n una matriz unitaria tal que

$$|(H_n)_{i,j}| = \frac{1}{\sqrt{n}} = c$$

$$H_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}$$

1. Esta matriz también es uniforme

2. Esta matriz es unitaria

$$H_{2n}^T \cdot H_{2n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_n^T \cdot H_n + H_n^T \cdot H_n & H_n^T \cdot H_n - H_n^T \cdot H_n^T \cdot H_n \\ H_n^T \cdot H_n - H_n^T \cdot H_n & H_n^T \cdot H_n + H_n^T \cdot H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

□

Las columnas son las base ortonormal uniforme buscada.

Las matrices $H_1, H_2, H_4, \dots, H_{2^k}$ se conocen como matrices de Hadanard

Conjetura (Hadanard). *Estas matrices solo existen para*

$$n = 4k, k \in \mathbb{Z}$$

Dada una base e_1, \dots, e_n de V tenemos

$$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad \forall v \in V$$

Cómo calcular a_1, \dots, a_m ?

Teorema 3.3.5. *Sea e_1, \dots, e_n base ortonormal de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces*

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$$

además

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2$$

Demostración. Como e_1, \dots, e_n es base, existen a_1, \dots, a_n tal que

$$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad / \quad \langle \cdot, e_j \rangle$$

$$\langle v, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle e_i, e_j \rangle = a_j \cdot 1$$

Probamos la primera parte. La segunda es consecuencia de Pitágoras. □

3.4. Algoritmo de Gram-Schmidt

Teorema 3.4.1. *Sean v_1, \dots, v_m conjunto linealmente independiente de vectores en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

Sea

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i}{\|v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i\|}$$

Entonces e_1, \dots, e_n es conjunto ortonormal y $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Demostración. Por inducción en j

$j = 1$: e_1 es conjunto ortonormal:

$$\|e_1\| = \left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\| = 1$$

y

$$\langle e_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$$

Notar que $v_1 \neq 0$ porque v_1, \dots, v_n es linealmente independiente y por ende e_1 está bien definido.

$j - 1 \implies j$:

e_1, \dots, e_j es ortonormal.

Primero e_j está bien definido

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i}{\|v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i\|}$$

y

$$v_j \notin \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

$$\therefore v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i \neq 0$$

Para probar ortonormalidad, basta probar que:

$$\langle e_j, e_l \rangle = \begin{cases} 1 & l = j \\ 0 & l < j \end{cases}$$

$$\langle e_j, e_j \rangle = \|e_j\|^2 = \frac{\|\cdot\|^2}{\|\cdot\|^2} = 1$$

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} \langle v_j - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i, e_l \rangle$$

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} \left[\langle v_j, e_l \rangle - \left\langle \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle e_i, e_l \right\rangle \right]$$

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} \left[\langle v_j, e_l \rangle - \sum_{i < j} \langle \langle v_j, e_i \rangle e_i, e_l \rangle \right]$$

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} \left[\langle v_j, e_l \rangle - \sum_{i < j} \langle v_j, e_i \rangle \cdot \langle e_i, e_l \rangle \right]$$

Por hipótesis de inducción:

$$\langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{c} [\langle v_j, e_l \rangle - \langle v_j, e_l \rangle \cdot 1] = 0$$

$\therefore e_1, \dots, e_n$ ortonormal.

Falta probar

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Para probarlo basta ver que

$$(\text{Hip. Ind.}) \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

Pero además

$$e_j \in \langle e_1, \dots, e_{j-1}, v_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

En conclusión

$$\langle e_1, \dots, e_j \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

$$\therefore \langle e_1, \dots, e_j \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

□

Teorema 3.4.2 (Representación Δ -superior con respecto a base ortonormal). *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno (real o complejo) y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si T posee una representación matricial Δ -superior con respecto a una base, entonces posee una representación Δ -superior con respecto a una base ortonormal.*

Demostración. Sea $B = (v_1, \dots, v_n)$ base ordenada de V tal que $\mathcal{M}_B(T)$ sea Δ -superior. Entonces:

$$\langle v_1 \rangle \text{ es invariante bajo } T$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle \text{ es invariante bajo } T$$

$$\vdots$$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \text{ es invariante bajo } T$$

Aplicando G-S a $(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow e_1, \dots, e_n$ base ortonormal de V .

Para concluir basta probar que los subespacios

$$\langle e_1, \dots, e_j \rangle \quad j = 1, \dots, n$$

son invariantes bajo T .

Pero esto es directo, ya que

$$\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle e_1, \dots, e_j \rangle \quad j = 1, \dots, n$$

□

Teorema 3.4.3 (Schur). *Todo operador sobre un espacio con producto interno complejo de dimensión finita posee una representación Δ -superior para alguna base ortonormal de V .*

Demostración. Todo operador sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita posee una representación Δ -superior para alguna base. Con el Teo anterior se concluye. □

3.5. Funciones lineales sobre Espacio con producto interno

Definición 3.5.1 (Funcional Lineal). Una funcional lineal sobre $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una transformación lineal $l : V \rightarrow \mathbb{F}$.

Ejemplos:

1. $u \in V :$

$$l : V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$v \mapsto \langle v, u \rangle$$

2. Sea $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(P) = \int_{-1}^1 p(t) \cos(\pi t) dt$$

Pregunta: $\exists q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \varphi(p) = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt$?

Teorema 3.5.1 (Representación de Riesz). Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio producto interno finito-dimensional y φ un funcional lineal. Entonces existe un único $u \in V$

$$\varphi(v) = \langle v, u \rangle \quad \forall v \in V$$

Demostración. Sea $\dim V = n, e_1, \dots, e_n$ base de ortonormal de V .

Existencia Sea $v \in V$

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n \quad / \varphi$$

$$\varphi(v) = \varphi(\langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n)$$

$$\varphi(v) = \langle v, e_1 \rangle \varphi(e_1) + \dots + \langle v, e_n \rangle \varphi(e_n)$$

$$\varphi(v) = \langle v, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)} e_n \rangle$$

Unicidad: Sean $u_1, u_2 \in V$ tales que

$$\varphi(v) = \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle \quad \forall v \in V$$

$$\therefore \langle v, u_1 - u_2 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Tomando $v = u_1 - u_2$

$$\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0$$

$$\therefore \|u_1 - u_2\|^2 = 0$$

$$\iff u_1 - u_2 = 0$$

□

Observación 3.5.1. La demostración da una fórmula explícita para calcular u : Dada una base ortonormal e_1, \dots, e_n

3.6. Complementos Ortogonales y Problemas de Minimización

Definición 3.6.1 (Complemento Ortogonal). Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno y $U \subset V$. Se define el complemento ortogonal de U , denotado U^\perp como

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

Propiedades:

(a) $U \subseteq V \implies U^\perp$ subespacio vectorial de V

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

Demostración.

$$U^\perp \neq \emptyset : 0 \in U^\perp$$

$$v, w \in U^\perp, \lambda \in \mathbb{F} : u \in U$$

$$\therefore \langle v + \lambda w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \lambda \langle w, u \rangle = 0$$

□

(b) $\{0\}^\perp = V$: Ejercicio

(c) $V^\perp = \{0\}$

Demostración. Si $v \in V^\perp$ entonces:

$$\langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in V$$

Tomando $u = v$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

□

(d) $U \subset V \implies U \cap U^\perp = \{0\}$

Demostración. Sea $v \in U \cap U^\perp$

$$\langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U$$

Tomando $u = v$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

□

(e) $U \subseteq W \implies W^\perp \subset U^\perp$

Demostración.

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

$$W^\perp \subseteq \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$$

$$W^\perp \subseteq U^\perp \quad \square$$

Proposición 3.6.1 (Suma directa ortogonal). *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno, y U subespacio finito-dimensional. Entonces:*

$$U \oplus U^\perp = V$$

Demostración. $U + U^\perp = V$: Sea e_1, \dots, e_m base ortonormal de V

$$\forall v \in V$$

$$v = (\overline{\langle e_1, v \rangle} e_1 + \dots + \overline{\langle e_m, v \rangle} e_m) \in U + (v - \overline{\langle e_1, v \rangle} e_1 - \dots - \overline{\langle e_m, v \rangle} e_m)$$

Por demostrar que: $u \in U^\perp$

Basta probar que $\forall i = 1, \dots, m$

$$\langle e_i, u \rangle = 0$$

Veamos

$$\langle e_i, v - \overline{\langle e_1, v \rangle} e_1 - \dots - \overline{\langle e_m, v \rangle} e_m \rangle = \langle e_i, v \rangle - \langle e_1, v \rangle \langle e_i, e_1 \rangle - \dots - \langle e_m, v \rangle \langle e_i, e_m \rangle$$

$$\langle e_i, u \rangle = \langle e_i, v \rangle - \langle e_i, v \rangle = 0$$

Es directa: $U \cap U^\perp = \{0\}$ por propiedad. \square

Corolario (Dimensión del complemento ortogonal). *Si V es finito-dimensional $U < V$*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Demostración.

$$U \oplus U^\perp = V \quad \square$$

Teorema 3.6.2. *Sea $U < V$ finito-dimensional. Entonces*

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Demostración. $U \subseteq (U^\perp)^\perp$: Sea $u \in U$

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad \forall v \in U^\perp$$

$$\therefore u \in (U^\perp)^\perp$$

$U \supseteq (U^\perp)^\perp$ Sea $v \in (U^\perp)^\perp$

$$v = u + w \quad u \in U, w \in W$$

PDQ: $w = 0$

Como $v \in (U^\perp)^\perp$

$$\langle v, z \rangle = 0 \quad \forall z \in U^\perp$$

Tomando $z = w$

$$\langle u + w, w \rangle = 0$$

$$\langle u, w \rangle + \langle w, w \rangle = 0$$

$$u \in U, w \in U^\perp \implies \langle u, w \rangle = 0 \implies \langle w, w \rangle = 0 \iff w = 0$$

$$\therefore v = u \in U$$

□

Definición 3.6.2 (Proyección ortogonal). Sea U subespacio vectorial finito-dimensional de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Se define la proyección ortogonal $\mathcal{P}_U \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$\mathcal{P}_U : V \rightarrow V$$

$$v \mapsto u$$

donde

$$v = u + w, u \in U, w \in U^\perp$$

Ejemplo: Sea $x \in V, x \neq 0$ y $U = \langle x \rangle$

$$\mathcal{P}_U v = \frac{\langle v, x \rangle}{\|x\|^2} \cdot x$$

Propiedades: Sea $U < V$ finito-dimensional y $v \in V$

(a) $\mathcal{P}_U \in \mathcal{L}(V)$

(b) $\mathcal{P}_U u = u \quad \forall u \in U$

(c) $\mathcal{P}_U w = 0 \quad \forall w \in U^\perp$

(d) $\text{Im } \mathcal{P}_U = U$

(e) $\ker \mathcal{P}_U = U^\perp$

(f) $v - \mathcal{P}_U v \in U^\perp$

(g) $\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U$

(h) $\|\mathcal{P}_U v\| \leq \|v\|$

(i) Para toda base ortonormal de U , e_1, \dots, e_n

$$\mathcal{P}_U v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

Demostración de las propiedades

(a) *Demostración.* Sabemos que \mathcal{P}_U es función ya que $U \oplus U^\perp = V$. Probemos la linealidad. Sean $v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\mathcal{P}_U(v_1 + \lambda v_2) = ?$$

Sabemos que

$$\mathcal{P}_U v_1 = u_1 \quad \mathcal{P}_U v_2 = u_2$$

Y además

$$v_1 + \lambda v_2 = (u_1 + w_1) + \lambda(u_2 + w_2) = (u_1 + \lambda u_2) + (w_1 + \lambda w_2)$$

□

(b) *Demostración.*

$$u = u + 0 \implies \mathcal{P}_U u = u$$

□

(c) *Demostración.*

$$w = 0 + w \implies \mathcal{P}_U w = 0$$

□

(d) Ejercicio

(e) Ejercicio

(f) *Demostración.*

$$\langle v, \mathcal{P}_U v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

Sean

$$v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^\perp$$

$$\implies u = \mathcal{P}_U v$$

$$\therefore w - \mathcal{P}_U v \in U^\perp$$

□

(g) *Demostración.* $\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U$

Sea $v \in V$:

$$v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^\perp$$

$$\mathcal{P}_U v \stackrel{(a)}{=} \mathcal{P}_U u + \mathcal{P}_U w \stackrel{(b),(c)}{=} u$$

$$\mathcal{P}_U^2 v = \mathcal{P}_U u + \mathcal{P}_U w = \mathcal{P}_U v$$

□

(h) Sea $v = u + w$ $u \in U$ $w \in U^\perp$

$$v = \mathcal{P}_U v + w \quad \|\cdot\|^2$$

$$\|v\|^2 = \|\mathcal{P}_U v\|^2 + \|w\|^2$$

$$\implies \|v\|^2 \geq \|\mathcal{P}_U v\|^2$$

(i) Ejercicio

3.7. Problemas de Minimización

Dado $v \in V$ y $U < V$

$$(\mathcal{P}) \min \|u - v\| \quad u \in U$$

Teorema 3.7.1 (Distancia mínima a un subespacio vectorial). *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno y $U < V$. Entonces para todo $v \in V$*

$$\|v - \mathcal{P}_U v\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U$$

Más aun, la igualdad se alcanza $\iff u = \mathcal{P}_U v$

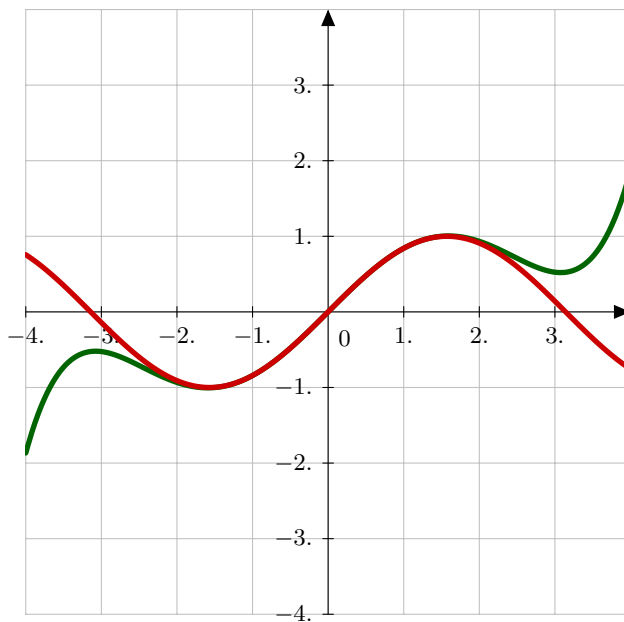
Demostración.

□

Ejemplo: Encuentre un polinomio u a coeficientes reales y de grado máximo 5 que aproxime $\sin(x)$ lo mejor posible sobre $[-\pi, \pi]$, con respecto a la distancia

$$\min_{u \in \mathcal{P}_5} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x) - u(x)| dx$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = T(x)$$



Solución: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno

$$V = \mathcal{C}([\pi, \pi], \mathbb{R}) \quad \langle p, q \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(x) \, dx$$

$$U = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})|_{[-\pi, \pi]} \quad \forall p, q \in V$$

Tenemos una base de U

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$$

1. Aplicamos G-S (Ejercicio)

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$$

2. Aplicamos la fórmula de $\mathcal{P}_U v$

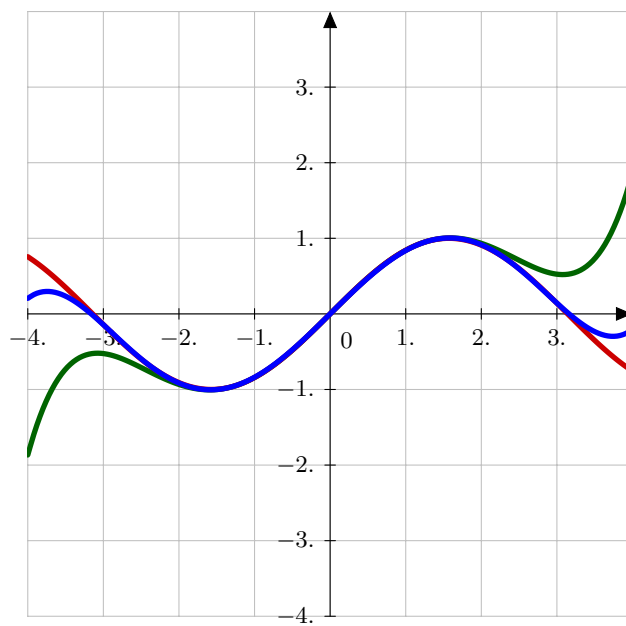
$$\mathcal{P}_U v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_5 \rangle e_5 + \langle v, e_6 \rangle e_6$$

(Ejercicio de Cálculo, **NO DE LINEAL**)

$$\langle v, e_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cdot e_1(x) \, dx \approx \frac{1}{10^6} \sum_{i=1}^{10^6}$$

Finalmente:

$$u(x) = \mathcal{P}_U v \approx 0,987862x - 0,155271x^3 + 0,00564312x^5$$



Capítulo 4

Operadores sobre Espacio con Producto Interno

Durante este capítulo

- $\mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$
- V, W son espacios con producto interno sobre \mathbb{F}

4.1. Operador Adjunto, Auto-Adjunto y Normal

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Consideremos para $w \in W$ fijo, el funcional

$$l_w : V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$v \mapsto \langle Tv, w \rangle$$

Por el Teo. de Rep. de Riesz, existe $T^*w \in V$ tal que

$$l_w(v) = \langle v, T^*w \rangle = \langle Tv, w \rangle \quad \forall v \in V \forall w \in W$$

La función

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$w \mapsto T^*w$$

le llamamos la adjunta de T .

Definición 4.1.1 (Adjunta). Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Definimos la adjunta de T como la función

$$T^* : W \rightarrow V$$

tal que

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^*w \rangle_V \quad \forall v \in V \forall w \in W$$

Ejemplo: Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 + 3x_3, 2x_1)$$

Tomemos bases canónicas

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}(T^*) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathcal{M}(T^*) = \mathcal{T}^T$$

Proposición 4.1.1 (Adjunta es lineal).

$$T \in \mathcal{L}(V, W) \implies T^* \in \mathcal{L}(W, V)$$

Demostración. Sean $w_1, w_2 \in W$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ PD: $T^*(w_1 + \lambda w_2) = T^*w_1 + \lambda T^*w_2$

Sea $v \in V$

$$\langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle = \langle Tv, w_1 + \lambda w_2 \rangle$$

$$\langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle = \langle Tv, w_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle Tv, w_2 \rangle$$

$$\langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle = \langle v, T^*w_1 \rangle + \langle v, \lambda T^*w_2 \rangle$$

$$\langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle = \langle v, T^*w_1 + \lambda T^*w_2 \rangle$$

Por Riesz

$$T^*(w_1 + \lambda w_2) = T^*w_1 + \lambda T^*w_2$$

□

Propiedades de la adjunta:

a) $(S + T)^* = S^* + T^* \quad \forall S, T \in \mathcal{L}(V, W)$

b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall T \in \mathcal{L}(V, W)$

c) $(T^*)^* = T$

d) $I^* = I$ donde $I \in \mathcal{L}(V)$ es la identidad

e) $(ST)^* = T^*S^* \quad \forall T \in \mathcal{L}(V, W) \forall S \in \mathcal{L}(W, S)$

a) *Demostración.* Sean $v \in V, w \in W$

$$\begin{aligned}
 \langle v, (S+T)^*w \rangle &= \langle (S+T)v, w \rangle \\
 \langle v, (S+T)^*w \rangle &= \langle Sv, w \rangle + \langle Tv, w \rangle \\
 \langle v, (S+T)^*w \rangle &= \langle v, S^*w \rangle + \langle v, T^*w \rangle = \langle v, (S^*+T^*)w \rangle \quad \forall v \\
 \iff (S+T)^*w &= S^*w + T^*w \quad \forall w \in W \iff (S+T)^* = S^*+T^* \quad \square
 \end{aligned}$$

b) *Demostración.* Sean $v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}
 \langle v, (\lambda T)^*w \rangle &= \langle (\lambda T)v, w \rangle = \lambda \langle Tv, w \rangle \\
 \langle v, (\lambda T)^*w \rangle &= \langle v, \bar{\lambda}T^*w \rangle \quad \forall v \in V \forall w \in W \quad \square
 \end{aligned}$$

c) *Demostración.* Sean $v \in V, w \in W$

$$\langle w, (T^*)^*v \rangle = \langle T^*w, v \rangle = \langle w, Tv \rangle$$

Por Riesz:

$$\begin{aligned}
 (T^*)^*v &= Tv \quad \forall v \\
 \iff (T^*)^* &= T \quad \square
 \end{aligned}$$

d) Ejercicio

e) *Demostración.* Sean $v \in V, u \in U$

$$\langle v, (ST)^*u \rangle = \langle (ST)v, u \rangle = \langle S(Tv), u \rangle = \langle Tv, S^*u \rangle = \langle v, T^*(S^*u) \rangle$$

Por Riesz:

$$\begin{aligned}
 (ST)^*u &= T^*S^*u \quad \forall u \in U \\
 \iff (ST)^* &= T^*S^* \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposición 4.1.2 (Núcleo e Imagen de T^*). Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces

$$a) \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$$

$$b) \operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp$$

$$c) \ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$$

$$d) \operatorname{Im} T = (\ker T^*)^\perp$$

a) *Demostración.* Sea $w \in W$

$$\begin{aligned}
 w \in \ker(T^*) &\iff T^*w = 0 \\
 &\iff \langle v, T^*w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \\
 &\iff \langle Tv, w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \\
 &\iff \langle z, w \rangle = 0 \quad \forall z = Tv, v \in V \\
 &\iff w \in (\text{Im } T)^\perp \quad \square
 \end{aligned}$$

b) *Demostración.* Claramente esta es implicada por c) y el complemento ortogonal □

c) *Demostración.* Claramente esta es implica por a) □

d) *Demostración.* Claramente esta es implicada por b) □

Definición 4.1.2 (Traspuesta conjugada). La traspuesta conjugada de una matriz $m \times n$ compleja es una matriz $n \times m$ compleja que se obtiene intercambiando filas por columnas, y tomando conjugadas en todos los coeficientes.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3+i & 7 \\ 6 & 6 & 8i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3-i & 6 \\ 7 & -8i \end{bmatrix}$$

Teorema 4.1.3 (La matriz representante de T^*). Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Sean

$$B = (e_1, \dots, e_n) \subseteq V$$

$$C = (f_1, \dots, f_m) \subseteq W$$

bases ordenadas y ortonormales de V y W , respectivamente. Entonces $\mathcal{M}_{C,B}(T^*)$ es la traspuesta conjugada de $\mathcal{M}_{B,C}(T)$

Demostración. Como C es base ortonormal

$$Te_k = \langle Te_k, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle Te_k, f_m \rangle f_m$$

Y por lo tanto

$$(\mathcal{M}_{B,C}(T))_{jk} = \langle Te_k, f_j \rangle$$

Como B es base ortonormal tenemos

$$T^*f_j = \langle T^*f_j, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle T^*f_j, e_n \rangle e_n$$

Y por lo tanto

$$(\mathcal{M}_{C,B}(T^*))_{kj} = \langle T^*f_j, e_k \rangle = \langle f_j, Te_k \rangle = \overline{\langle Te_k, f_j \rangle} \quad \square$$

4.1.1. Operadores Auto-Adjuntos

Definición 4.1.3 (Operador a.a.). Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ se dice auto-adjunto (a.a.) si $T = T^*$. Es decir,

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Propiedades: Si S, T a.a. y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

a $S + T$ es a.a.

b λS es a.a.

Demostración. Ejercicio □

Proposición 4.1.4. *Todo valor propio de un operador a.a. es real*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$Tv = \lambda v \quad / \quad \langle \cdot, v \rangle$$

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$$

$$\langle v, Tv \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

$$\implies \bar{\lambda} = \lambda$$

□

Teorema 4.1.5. *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno compleja y $T \in \mathcal{L}$. Entonces*

$$\langle Tv, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \iff T = 0$$

Observación 4.1.1. Esto no es cierto si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Ver la siguiente transformación:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$

Demostración. Notemos que $\forall u, w \in V$

$$\langle Tu, w \rangle = \frac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4} + i \frac{\langle T(u+iw), u+iw \rangle - \langle T(u-iw), u-iw \rangle}{4}$$

Entonces

$$\langle Tu, w \rangle = 0 \quad \forall u, w \iff \langle Tv, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Concluyendo que $T = 0 \iff \langle Tv, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$ □

Teorema 4.1.6. *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno compleja y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces T es a.a.*

$$\iff \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

Observación 4.1.2. Esto **NO** es cierto para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle - \overline{\langle Tv, v \rangle} &= \langle Tv, v \rangle - \langle v, Tv \rangle \\ \langle Tv, v \rangle - \overline{\langle Tv, v \rangle} &= \langle (T - T^*)v, v \rangle \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \iff \langle (T - T^*)v, v \rangle = 0 \iff T - T^* = 0 \quad \square$$

Ejercicio:

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno con $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

Sea $T : V \rightarrow V$

$$f \mapsto \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right) f(y) \, dy$$

- a) Pruebe que T está bien definida y que $T \in \mathcal{L}(V)$
- b) Calcule T^*
- c) ¿Cuándo T es a.a.?

Sol:

Proposición 4.1.7. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{F} = \mathbb{C}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ a.a. tal que

$$\langle Tv, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Entonces $T = 0$

Demostración. Basta probarlo para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ \square

4.1.2. Operadores normales

Definición 4.1.4 (Operador Normal). Un operador T sobre un espacio con producto interno se dice normal si conmuta con su adjunta:

$$TT^* = T^*T$$

Observación 4.1.3. T a.a. $\implies T$ normal

Teorema 4.1.8. T es normal $\iff \|Tv\| = \|T^*v\| \quad \forall v \in V$

Demostración. T normal $\iff TT^* - T^*T = 0$

□

Teorema 4.1.9 (Caracterización Operadores Positivos). *Los siguientes son equivalentes:*

- a) $T \geq 0$
- b) T a.a. y sus valores propios son no-negativos
- c) T posee una raíz cuadrada mayor a 0
- d) T posee una raíz cuadrada a.a.
- e) $\exists R \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = R^*R$

Demostración. a) \implies b): $\langle Tv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$ y T a.a.

Sea λ valor propio de $T : \exists v \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$Tv = \lambda v \quad / \quad \langle \cdot, v \rangle$$

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$$

Si $\lambda < 0$ entonces $\langle Tv, v \rangle < 0 \rightarrow \leftarrow$

b) \implies c): T a.a. con valores propios mayores o iguales a 0.

Sea e_1, \dots, e_n base ortonormal de V de vectores propios de T

$$Te_i = \lambda_i e_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Proponemos $R \in \mathcal{L}(V)$ como

$$Re_i = \sqrt{\lambda_i} e_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que

$$R^2 e_i = R(Re_i)$$

$$R^2 e_i = R(\sqrt{\lambda_i} e_i)$$

$$R^2 e_i = \lambda_i e_i$$

$$R^2 e_i = Te_i$$

Como todo operador se describe de manera única sobre una base

$$R^2 = T$$

Probemos finalmente que $T \geq 0$.

R es a.a.

$$\therefore R \text{ a.a.}$$

Nos falta que $\langle Rv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$

$$\langle Rv, v \rangle = \sum_i |a_i|^2 \sqrt{\lambda_i}$$

$$\langle Rv, v \rangle \geq 0$$

c) \implies d): Es inmediata.

d) \implies e): $T = R^2 \quad R = R^*$

$$T = RR = R^*R$$

e) \implies a): $T = R^*R$

T es a.a.:

$$T^* = (R^*R)^* = R^*R^{**} = R^*R = T$$

Positividad:

$$\langle Tv, v \rangle = \langle R^*Rv, v \rangle$$

$$\langle Tv, v \rangle = \langle Rv, Rv \rangle = \|Rv\|^2$$

$$\implies \langle Tv, v \rangle \geq 0$$

□

Proposición 4.1.10. *Si $T \geq 0$ entonces existe una única raíz cuadrada positiva.*

Demostración. Ya tenemos la existencia. Falta unicidad.

Sea $R \geq 0$ raíz cuadrada de T

$$T = R^2$$

Sea e_1, \dots, e_n base ortonormal de V tal que

$$Re_i = \lambda_i e_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notar que $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$ (por b)

Sean λ, v par propio de T

$$Tv = \lambda v$$

Digamos $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

$$\implies Rv = a_1 \lambda_1 e_1 + \dots + a_n \lambda_n e_n$$

$$\implies R^2 v = a_1 \lambda_1^2 e_1 + \dots + a_n \lambda_n^2 e_n = Tv$$

Como e_1, \dots, e_n base

$$a_i \lambda_i^2 = a_i \lambda \quad \forall i$$

Como $v \neq 0$ entonces $\exists i : a_i \neq 0$

$$\implies \lambda = \lambda_i^2 \implies a_j = 0 \quad \forall \lambda_j \neq \lambda_i$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i:\lambda_i^2=\lambda} a_i e_i \\ \implies Rv &= \sum_{i:\lambda_i^2=\lambda} a_i \lambda_i e_i = \sqrt{\lambda} v \end{aligned} \quad \square$$

4.1.3. Vectores Propios Generalizados

v es vector propio generalizado de T asociada a $\lambda \in \mathbb{F} : v \neq 0$ tal que $\exists j \geq 1$

$$(T - \lambda I)^j v = 0$$

Observación 4.1.4. La noción de "valor propio generalizado" no tiene sentido

$$(\lambda \in \mathbb{F}) \quad (T - \lambda I)^j \text{ no inyectivo para algún } j \geq 1$$

$$\implies (T - \lambda I) \text{ no es inyectiva}$$

$$\implies \lambda \text{ es valor propio de } T$$

Definición 4.1.5 (Espacio propio generalizado). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. El espacio propio generalizado de T correspondiente a λ , denotado $G(\lambda, T)$, se define como el conjunto de vectores propios generalizados de T asociados a λ , incluyendo el 0.

$$G(\lambda, T) = \bigcup_{j \geq 1} \ker(T - \lambda I)^j$$

Observación 4.1.5. $E(\lambda, T) \subseteq G(\lambda, T)$

Hasta ahora ni siquiera es claro que $G(\lambda, T)$ es subespacio vectorial de V .

Proposición 4.1.11 (Caracterización de subespacio propio generado). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces

$$G(\lambda, T) = \ker(T - \lambda I)^{\dim V}$$

Demostración. Claramente \supseteq

\subseteq | Sea $j \geq 1$ y $v \neq 0$

\square