Algebra Lineal

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2017

Índice general

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

1.1. Subespacios generados

1.1.1. Combinaciones lineales

Terorema 1.1.1 (*). *Sea V espacio vectorial generado por un conjunto finito m de vectores. Entonces cualquier*

Demostración. Sean $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ con $n > m$. Por contradicción, suponiendo que son linealmente independientes.
Sean $< v_1, ..., v_m >= V$ (por hipótesis)

$$\implies u_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(1)} v_i$$

Claramente $(\lambda_1^{(1)}, ..., \lambda_m^{(1)}) \neq 0$ (de lo contrario $u_1 = 0$)
Sin perder generalidad, $\lambda_1^{(1)} \neq 0$ y por el Lema:

$$< u_1, v_2, ..., v_m >= V$$

Ahora, existan $(\lambda_1^{(2)}, ..., \lambda_m^{(2)} \neq (0, ..., 0)$ tales que:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i^{(2)} v_i$$

Más. aun, $(\lambda_2^{(2)}, ..., \lambda_m^{(2)} \neq (0, ..., 0)$
De lo contrario:

$$u_2 = \lambda_1^{(2)} u_1 0 = \lambda_1^{(2)} u_1 - u_2 \rightarrow\leftarrow (u_1, ..., u_n \text{ son linealmente independientes})$$

En conclusión, sin perdida de generalidad $\lambda_2^{(2)} \neq 0$

Por el Lema:

$$< u_1, u_2, v_3..., v_m >= V$$

Iterando el argumento, se tiene que:

$$< u_1, ..., u_m >= V$$

Notemos que $u_{m+1} \in < u_1, ..., u_m >$

$$0 \neq u_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i \rightarrow\leftarrow$$

□

Definición 1.1.1 (Base,Dimensión finita)**.** Una base B de un espacio vectorial es un conjunto $B \subseteq V$ tal que:

1. B es linealmente independiente
2. $< B >= V$

Un espacio vectorial V se dice finito-dimensional si existe un conjunto $S \subseteq V, \|S\| < \infty$ tal que $< S >= V$.

Corolario. *Si V es finito-dimensional, todas las bases de V son finitas y tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Sean B_1 y B_2 bases de V.
Por Teo (*), $\|B_1\|, \|B_2\| \leq m$, donde m es el tamaño de S tal que $< S >= V$ y $\|S\| < \infty$.
Como B_1 es base, $< B_1 >= V$, y como B_2 es linealmente independiente:

$$Teo(*) \implies \|B_2\| \leq \|B_1\|$$

Como B_2 es base. □

Definición 1.1.2 (Dimensión)**.** Si V es un espacio vectorial finito-dimensional definimos su dimensión, $\dim V$, como el cardinal de una base cualquiera de V. Si V no es finito-dimensional $dimV = +\infty$

Ejemplos:

1. $V = Sim^2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^T\}$

$$abc$$

2. $\dim(\mathbb{R}^{n\times n}) = n^2$
3. $\dim(Antisim^m(\mathbb{R})) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ y $\dim(Sim^m(\mathbb{R})) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

4. $P_n(\mathbb{C}$
   $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es base
   a) $< \{1, x, x^2, ..., x^n\} >= P_n(\mathbb{C})$
   $p \in P_n(\mathbb{C})$
   $\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x +, , , +a_n x^n \in < \{1, x, x^2, ..., x^n\} >$
   b) $\{1, x, ..., x^n\}$ es linealmente independiente.
   Por contradicción supongamos $(a_0, a_1, ..., a_n) \neq (0, 0, ..., 0)$
   $0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$ Con igualdad de funciones.
   $\iff (\forall x \in \mathbb{C}) 0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$
   Recuerdo (TFA): Todo polinomio complejo de grado ≥ 1 posee una raÃz compleja.
   $\implies p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n = (x - z_1) \cdot a'_0 \cdot 1 + a'_1 \cdot x + ... + a'_{n-1} \cdot x^{n-1}$
   $\implies p(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot ...(x - z_k) \cdot A$ donde $k = gr(p)$, y $A \neq 0$.
   Tomando $z' \neq z_1, z_2, ..., z_k$, tenemos: $0 = (z' - z_1) \cdot (z' - z_2) \cdot ...(z' - z_k) \cdot A$ Pero multiplicar cosas distintas de 0 no da 0.

$$\rightarrow\leftarrow$$

   $\dim(P_n(\mathbb{C})) = n + 1$

Observación 1.1.1. $\{0\}, \dim\{0\} = 0$, notando que base es $\emptyset$, tenemos que $< \emptyset >= \{0\}$

Lema 1.1.2. *Sea* $S \subseteq, S = \{v_1, ..., v_n\}$ *conjunto linealmente independiente.*
$v \notin < v_1, ..., v_n > \implies \{v, v_1, ..., v_n\}$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Ejercicio □

Terorema 1.1.3. *Sea* V *espacio vectorial finito dimensional, entonces:*

1. *Todo conjunto linealmente extiende a una base*
2. *Todo conjunto generado contiene una base*

Todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ finito dimensional posee una base.

Demostración. a) Sea $v \in V \setminus \{0\}$. Entonces $\{V\}$ es linealmente independiente.
Por Teo, estamos listos.

Dem(Teo):
V es finito dimensional $\implies \exists\{v_1, ..., v_n\}$ que genera V.
Sea $S = \{v_1, ..., v_n\}$ conjunto linealmente independente.
Dos casos:

a) Si $< S >= V$, entonces S es base
b) Si $< S > \subset V$, entonces existe $v \notin < S >$, y opr el Lema, $S \cup \{V\}$ es linealmente independiente.

Inductivamente, o bien eventualmente 1, o iteramos 2.

Sin embargo, 2 no puede ocurrir infinitas veces.
Teo(*) $\implies$ todo conjunto linealmente independiente posee cardinalidad $\leq n$.

b) Sea S, tal que $< S >= V$.
Consideremos, $d = \max\{|S'| : S' \subseteq S, S'$ es linealmente independiente$\}$
Notemos que $d \leq n < +\infty$, por el Teo(*).
Como el máximo se alcanza, existe S' tal que $|S'| = d$ y S' es linealmente independiente.
Por contradicción, supongamos que S' no es base.

$$< S' >\subset V =< S >$$

Luego, $S\setminus < S' >\neq \emptyset$. De lo contrario $< S > \setminus < S' >\neq \emptyset$
$\implies S \subseteq< S' > \implies < S >\subset< S' > \implies < S' >= V$
Finalmente, existe $v \in S\setminus < S' >$, y por el Lema, $S' \cup \{v\}$ es linealmente independiente y $|S' \cup \{v\}| = d + 1$

$$\rightarrow\leftarrow$$

□

Corolario. *Sea $W \subset V$ subespacio propio ($W \neq V$) con V finito dimensional. Entonces,* $\dim W < \dim V$

Demostración.

- Si $\dim W = 0 \implies \dim W = 0 < \dim V$.
- Si $\dim W \geq 1$ entonces, por el corolario, W tiene una base.

$$B_W = \{w_1, ..., w_m\} \quad \text{es base de } W$$

Como W es subsepacio propio, existe $v \in V\setminus < B_W >$
$\implies B_W \cup \{v\}$ es linealmente independiente y $\subset V$.
Por Teo. a), $B_W \cup \{v\}$ se extiende cin una base $B_V, |B_V| \geq |B_W| + 1$.

$$\dim W = |B_W| < |B_W| + 1 \leq |B_V| = \dim V$$

□

Proposición 1.1.4. *Sean U, W subespacios vectoriales de un espacio vectorial finito dimensional V. Entonces:*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Demostración. Si $U \cap W = \{0\}$, trivial

Si $U \cap W \neq \{0\}$, entonces sea $B_{U\cap W}$ base de $U \cap W$.

$$B_{U\cap W} = \{v_1, ...v_m\}$$

Base de U: Sea $B_U = \{v_1, ..., v_m, u_1, ..., u_p\}$
Base de W: Sea $B_W = \{v_1, ...v_m, w_1, ..., w_r\}$
Ambos existen por Teo.a).
Afirmación: $B_U \cap B_W = \{v_1, ..., v_m, u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r\}$ es base de $U + W$.

1. $< B_U \cap B_W >= U + W$
   $v \in u + w, u \in U, w \in W$

$$\implies v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^{r} \delta_k w_k + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j \in < B_U \cup B_W >$$

2. $B_U \cup B_W$ es linealmente independiente:

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j + \sum_{k=1}^{p} \nu_k u_k$$

$$-\sum_{k=1}^{p} \nu_k u_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \in U \cap W$$

$$\implies 0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \implies \nu_k, \lambda_i = 0 \, \forall k, i$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = |b_{U\cap W}|$$

$$\dim U = |B_U|$$

$$\dim W = |B_W|$$

$$\dim(U + W) = |B_U \cup B_W| \qquad \square$$

1.2. Transformaciones lineales

Definición 1.2.1 (Transformación lineal)**.** Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo común $\mathbb{F}$. Una función $T : V \to W$ es transformación lineal si

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Ejemplos:

1. $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m, T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ y $A \in \mathbb{F}^{m\times n} \quad v \mapsto Av$
   T es una transformación lineal

2. $V = W = C^\infty(\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es infinitamente diferenciable$\}$
   $V = C^1(\mathbb{R}), W = C^0(\mathbb{R})$
   $T : V \to W$
   $f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
   Por álgebra de funciones diferenciables si $f, g \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}(\lambda f + g)}{\mathrm{d}x} = \lambda \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

3. $\mathbb{R}[x]$ Es un espacio vectorial
   $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$
   $p \mapsto \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

4. $V = C^0([0, 1]), W = \mathbb{R}$
   $T : V \to W$
   $f \to\mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Terorema 1.2.1. *Sea V un espacio finito dimensional y $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de V. Sea W un espacio vectorial y consideramos vectores $w_1, ...w_n \in W$ Entonces $\exists! T : V \to W : T(v_i) = w_i \forall i = 1, ..., n$*

Demostración.

- Existencia: Si $v \in V$ entonces:

$$(*)\, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

Definimos:

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)$$

$T : V \to W$ es una función porque $\forall v \in V$ la descomposición (*) es única.
Además, es lineal. Si $v, u \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_i \lambda_i v_i$$

$$u = \sum_i \mu_i v_i$$

$$T(\lambda v + u) = T(\sum_i (\lambda\lambda_i + \mu_i)v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \sum_i (\lambda\lambda_i + \mu_i) T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda \sum_i \lambda_i T(v_i) + \sum_i \mu_i T(v_i)$$

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u)$$

- Unicidad: Sean T, T' transformaciones lineales tales que:

$$T(v_i) = T'(v_i) = w_i$$

Sea $v \in V$, entonces:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \exists \lambda_i$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda T'(v_i)$$

$$T(v) = T'(v) \implies T = T'$$

□

Propiedades:
Si $T : V \to W$ transformaciones lineales, entonces:

1. $T(0) = 0$

2. $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)$

Demostración. □

La importancia de este teorema se relaciona con el hecho de poder definir transformaciones lineales sólo a través de como actuan sobre una base. Esto se relaciona con la nocion de matriz representante.

Definición 1.2.2. Si $T : V \to W$ transformación lineal, definimos:

- Núcleo(Kernel): $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$, subespacio vectorial de V

- Imagen(Rango): $T(V) = \{w \in W : \exists v \in V\, T(v) = w\}$, subespacio vectorial de W

Terorema 1.2.2 (Núcleo-Imagen)**.** *Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$ y $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces, si V es finito dimensional:*

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(T(V))$$

Demostración. Como $\ker T$ es subespacio vectorial de V entonces es finito dimensional y por ende posee una base:

$$\{v_1, ..., v_k\} \quad \text{es base de} \ker T$$

Por un teorema podemos extender a una base de V
$\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_u\}$ es base de V
Sea ahora $w \in \Im(T) \implies w = T(v)$
Entonces,

$$w = T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{F}$$

$$w = \sum^{n} +i = k + 1 \lambda_i T(v_i)$$

$$\in < \{T(v_{k+1}), ..., T(v_n)\} >$$

Queremos probar ahora que $(T(v_i))_{i=k+1}^{n}$ son linealmente independiente. Supongamos $\exists \lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$ tal que:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(v_I) = 0$$

$$T(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i) = 0$$

$$\implies \in Ker(T)$$

$\exists \lambda_1, ..., \lambda_k$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{n} (-\lambda_i) v_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = 0$$

Como $\{v_1, ..., v_n\}$ son linealmente independientes tenemos que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Finalmente:

$$\dim V = n, \dim \ker T = k$$

$$\dim \Im T = n - k$$

□

1.2.1. Algebra de Transformaciones Lineales

Def[Espacio de transformaciones lineales]:
Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Definimos

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W : T \text{ es transformación lineal}\}$$

Dadas $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, definimos

$$T_1 + T_2 : V \to W$$

$$v \mapsto T_1 v + T_2 v$$

$$\lambda T_1 : V \to W$$

$$v \mapsto \lambda T_1 v$$

Teorema

$\mathcal{L}(V, W)$ dotado de $+$ y $\cdot$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$
Dem: Primero probar que $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda T_1 \in \mathcal{L}(V, W)$
$T_1 + T_2$ es transformación lineal.
$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w)$ $(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = T_1(\lambda v + w) + T_2(\lambda v + w)$
$(T_1 + T_2)(\lambda v + w) = \lambda(T_1 + T_2)(v) + (T_1 + T_2)(w)$ Similarmente:

$$(\lambda T_1)(\mu v + w) = \mu(\lambda T_1)(v) + (\lambda T_1)(w)$$

Y el resto de las propiedades se dejan propuestas como ejercicio.

Teorema

Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$, $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Luego, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio finito dimensional y $\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n$
Dem: Sean $V =< \{v_1, ..., 0_i, ..., v_n\} >$, $W =< \{w_1, ..., 0_j, ..., w_n\} >$, bases respectivamente.
Dados $1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n$, definimos $E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$ como unica transformación lineal que satisface:

$$E^{p,q}(v_j) = \begin{cases} w_p & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}$$

$$E^{p,q} \in \mathcal{L}(V, W)$$

$E^{p,q}$ esta bien definida por el primer teorema de la sección

$$\mathcal{B}_L = \{E^{p,q} : 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m\}$$

Afirmación: $\mathcal{B}_L$ es base de $\mathcal{L}(V, W)$

$$< \mathcal{B}_L >= \mathcal{L} : \text{Sea } T \in \mathcal{L}(V, W)$$

Dado $1 \leq j \leq n$, existen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{F}$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,j} w_i$$

Dado $v \in V$, existen $\mu_1, ...\mu_n \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i)$$

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mu_j \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_{i} \sum_{j} \lambda_{i,j} \mu_j E^{i,j}(v_j)$$

$$T(v) = \sum_{i} \left(\sum_{j} \lambda_{i,j} E^{i,j} \left(\sum_{k} \mu_k v_k \right) \right)$$

$$T(v) = \sum_{i} \sum_{j} \lambda_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$\mathcal{B}_L$ es linealmente independiente: Supongamos que:

$$\sum_{i} \sum_{j} \lambda_{i,j} E^{i,j} = 0$$

Dado $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{i} \sum_{j} \lambda_{i,j} E^{i,j}(v_k) = \mathbf{0}$$

$$\iff \sum_{i} \lambda_{i,k} w_i = \mathbf{0}$$

$$\iff \lambda_{1,k} = \lambda_{2,k} = ... = \lambda_{m,k} = 0 \quad \forall k = 1, ..., n$$

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = |\mathcal{B}| = m \cdot n$$

1.2.2. Matriz representante

El Teo anterior permite identificar transformaciones lineales entre espacios finito-dimensionales y matrices $m \times n$ (donde $m = \dim W, n = \dim V$).

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W), \mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$ base de $V, \mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_m\}$ base de W.

Definimos la matriz representante de T con respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ como $\mathcal{M}(T) =$

$(a_{ij})_{i=1...m,j=1...n}$, tal que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Si las bases no están claras por contexto usamos la notación $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$
Es facil ver que

$$\mathcal{M}(T_1 + \lambda T_2) = \mathcal{M}(T_1) + \lambda \mathcal{M}(T_2)$$

(Ejercicio)
De esta forma, $\mathcal{M}$ respeta"la estructura lineal de $\mathcal{L}(V, W)$
Ejemplos:
$\mathbb{F}^\infty = V = W$

1. $L : \mathbb{F}^\infty \to \mathbb{F}^\infty$

$$x = (x_1, x_2, ...)$$

$$Lx = (x_2, x_3, ...)$$

2. $R : \mathbb{F}^\infty \to \mathbb{F}^\infty$

$$x = (x_1, x_2, ...)$$

$$Rx = (0, x_1, x_2, ...)$$

Pregunta: $\mathcal{M}(L), \mathcal{M}(R)$?

1.2.3. Composición y Productos

Teo

Sean V, W, Z espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{W}, \mathcal{Z}$. Entonces por composición: $S \circ T : V \to Z$ dada por $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ es una transformación lineal.
Dem: Tenemos que probar que:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

En efecto:

$$(S \circ T)(\lambda u + v) = S(T(\lambda u + v)) = S(\lambda T(u) + T(v))$$

$$S \circ T)(\lambda u + v) = \lambda S(T(u)) + S(T(v)) = lambda(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

Definición 1.2.3. Endomorfismo

Una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, V)$ de dice endomorfismo u operador lineal. Denotamos $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. La composición funciona como producto sobre $End(V)$
Propiedades:

a) $I \circ S = S \circ I = S$ (I es neutro para $\circ$)

b)
- $S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$
- $(T_1 + T_2) \circ S = T_1 \circ S + T_2 \circ S$

c) $\lambda(S \circ T) = (\lambda S) \circ T = S \circ (\lambda S)$

Demostración. Ejercicio □

Importante notar que $\circ$ no es conmutativo.
También es importante observar que <u>NO</u> todo operador posee elemento inverso para $\circ$. Dado $T \in End(V) \setminus \{0\}$, decimos que $S \in End(V) \setminus \{0\}$ es su inversa si:

$$S \circ T = T \circ S = I$$

Corolario

Sea V espacio vectorial finito-dimensional y $\mathbb{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V. Entonces $\{E^{p,1} : p, q = 1, ..., n\}$ es base de $End(v)$.

Demostración. Directo por Teo (+). □

Lema: Sean $S, T \in End(V)$ con V finito dimensional. Entonces:

$$\mathcal{M}(S \circ T) = \mathcal{M}(S) \cdot \mathcal{M}(T)$$

Demostración. Recordar que

$$\{E^{p,q} : p, q = 1, ..., n\}$$

son base de $End(V)$.

$$\mathcal{M}(S) = (b_{p,q})_{p=1,...,nq=1,...n}$$

□

1.2.4. Invertibilidad

Definición 1.2.4. $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se dice invertible si existe $S : W \to V$ tal que

$$S \circ T = I_V, T \circ S = I_W \tag{1.1}$$

Cuando T es invertible, denotamos T^{-1} com su inversa

$$T \text{ invertible} \iff T \text{ es inyectiva y es sobreyectiva}$$

Observación 1.2.1.

1. No todo $T \in End(V) \setminus \{0\}$ es invertible

2. En el caso $V = W$, I_V es neutro para $\circ$

3. Puede ser que $S \circ T = I$ y $T \circ S \neq I$

Terorema 1.2.3. *Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$ y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si T es invertible entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$*

Demostración. Queremos probar $T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2)$
Sean $v_1 = T^{-1}(w_1), v_2 = T^{-1}(w_2)$

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad /T^{-1}(\,)$$

$$v_1 + \lambda v_2 = T^{-1}(T(v_1) + \lambda T(v_2))$$

$$T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2) = T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) \qquad \square \tag{1.2}$$

Proposición 1.2.4. *Sean $T : V \to W, S : W \to Z$ lineales e invertibles. Entonces $S \circ T$ es lineal e invertible; mas aun*

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} \tag{1.3}$$

Demostración. $S \circ T$ es lineal (visto lunes).
Invertible: basta probar:

$$(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = I_Z$$

$$(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = T^{-1} \circ (S^{-1} \circ S) \circ T = T^{-1} \circ T = I_V$$

$\square$

Definición 1.2.5. Decimos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es no singular si $\ker T = [0]$. Notar ademas que T no singular si solo si inyectiva

$$Tv_1 = Tv_2 \iff T(v_1 - v_2) = 0 \tag{1.4}$$

Terorema 1.2.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:*
T no-singular $\iff$ T transforma conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes, es decir, $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$ l.i. $\implies$ $\{Tv_1, ..., Tv_k\} \subseteq W$ l.i.

Terorema 1.2.6. $\square$ *Sean V, W finito-dimensionales tal que $\dim V = \dim W$. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ entonces las siguientes son equivalentes:*

i) *T es invertible*

ii) *T es no-singular*

iii) *T es sobreyectiva*

iv) *Para toda base $\{v_1, ..., v_n\}$ de V, $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ es base de W.*

v) *Existe* $\{v_1, ..., v_n\}$ *base de* V *tal que* $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ *es base de* W

Observación 1.2.2.

1. Si $\dim V \neq \dim W$
   $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m n < m$
   $(x_1, .., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$
   es inyectiva, pero no sobreyectiva

2. $V = W, \dim V = +\infty$
   $R : \mathbb{F}^\infty \to \mathbb{F}^\infty$
   $(x_1, ...) \mapsto (0, x_1, ...)$
   es inyectiva, pero no sobreyectiva

Demostración. $(i) \implies (ii)$
$(ii) \ker T = \{0\} \iff T(V) = W$
$(ii) \implies (iii)$
$(iii) T$ es sobre. Por TNI

$$\dim T = n \implies \dim \ker T = 0 \implies T \text{ no singular}$$

Si $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de V, por el Teo. anterior $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ se base de W □

1.3. Isomorfismos

Definición 1.3.1. Isomorfismos Sean V, W espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Decimos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es un isomorfismo si es invertible. En tal caso, diremos que V y W son isomorfos

Ejemplos:

1. $\mathbb{F}^{n+1}$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ son isomorfos

$$T : \mathbb{F}^{n+1} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(a_0, a_1, ..., a_n) \mapsto p(x) = \sum_{I=1}^{n} a_i x^i + a_o$$

2. (Coordenadas baricéntricas): Si $B = \{v_1, ..., v_n\}$ es base de V

$$(\forall v \in V) v = \sum_{I=1}^{n} \lambda_i v_i$$

$$[\cdot]_B : V \to \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto (\lambda_1, ..., \lambda_n) = [v]_B$$

3. V, W finito dimensional sobre $\mathbb{F}$, con

$$B_V = \{v_1, ..., v_n\}$$

$$B_W = \{w_1, .., w_m\}$$

$$\mathcal{M}(\cdot, B_V, B_W) : \mathcal{L}(V, W) \to \mathbb{F}^{n\times m}$$

$$T \mapsto \mathcal{M}(T, B_V, B_W)$$

es un isomorfismo (ejercicio)

Terorema 1.3.1. *Dos espacios finito dimensionales V, W (sobre $\mathbb{F}$ son isomorfos si solo si* $\dim V = \dim W$

Demostración. Sean $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V, $B_W = \{w_1, ..., w_m\}$ base de W.
$\Longrightarrow$ Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ isomorfismo

$$\{Tv_1, ..., Tv_n\} \subseteq W$$

Es un conjunto linealmente independiente (un Teorema)

$$\Longrightarrow n \leq \dim W = m$$

Tomando T^{-1}, (que también es isomorfismo) tomemos

$$\{T^{-1}w_1, ..., T^{-1}w_m\} \subseteq V$$

Es linealmente independiente

$$\Longrightarrow m \leq \dim V = n$$

$$\Longrightarrow m = n$$

$\Longleftarrow$ Suponemos $n = m$, sea T la unica transformación lineal tal que

$$Tv_i = w_i \quad \forall I = 1, ..., n$$

Por el teorema □, parte $(v) \implies (i)$ tenemos que T es isomorfismo. □

1.3.1. Matrices representantes

Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$, y sean $T \in \mathcal{L}(V, W), B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V, $B_W = \{w_1, ..., w_m\}$ base de W.

$$[Tv_j]_{B_W} = (a_{1j}, ..., a_{mj}) \iff T(v_j) = \sum_{I=1}^{m} a_{ij} w_i \quad (\forall v \in V \exists a_{ij})$$

Luego, par todo $v \in V$

$$v = \sum_j \lambda_j v_j \quad (\exists \lambda_j) \iff [Tv]_{B_V} = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$$

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(v_j)$$

De esta forma,

$$[T(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$$

Notemos que A coincide con la matriz representante de T con respecto a las bases B_V y B_W.

$$\mathcal{M}(T, B_V, B_W) = M$$

Evaluar (*) para $v = v_j$

$$[T(v_j)]_{B_W} = A \cdot [v_j]_{B_V} = A \cdot e_j$$

$$\implies T(v_j) = \sum_{I=1}^{m} a_{i,j} \cdot w_i$$

$$\therefore T(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(v_j) = \sum_j \sum_i \lambda_j a_{i,j} w_i$$

$$T(v) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j} (\sum_q \lambda_q v_q) = \sum_j \sum_i a_{i,j} E^{i,j}(v)$$

$$\therefore T = \sum_i \sum_j a_{i,j} E^{I,j}$$

1.3.2. Cambios de Base:

Sean $B = (v_1, ..., v_n)$ y $B' = (v'_1, ..., v'_n)$ 2 bases (ordenadas).
Como se relacionan $[\cdot]_{'}B$ y $[\cdot]_B$?

$$T : V \to \mathbb{F}^n, U : V \to \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto [v]_B, v \mapsto [v]_{B'}$$

Notemos que $T \circ U^{-1} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n, [v]_B \mapsto [v]_{B'}$ es un isomorfismo.
Sea P la matriz representante de $T \circ U^{-1}$ con respecto a la base canónica en $\mathbb{F}^n$
Usando (*):

$$[v]_B = P \cdot [v]_{B'} \quad \forall v$$

Sea ahora $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Tomemos:

$$[T(v)]_B = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot [v]_B$$

$$P \cdot [T(v)]_{B'} = \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P \cdot [v]_{B'}$$

$$[T(v)]_{B'} = \left(P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P\right) \cdot [v]_{B'}$$

$$\implies \mathcal{M}_{B',B}(T) = \left(P^{-1} \cdot \mathcal{M}_{B,B}(T) \cdot P\right)$$

Pregunta: Como calcular P?

$$[v'_j]_B = P \cdot [v'_j]_{B'} = P \cdot j$$

$$P = \left[[v'_1]_B|[v'_2]_B|...|[v'_n]_B\right] \oplus$$

Terorema 1.3.2. *Sea V espacio vectorial finito-dimensional con bases ordenadas $B = (v_1, ..., v_n)$ y $B' = (v'_1, ...,' v'_n)$. Sea $T \in End(V)$. Luego*

$$\mathcal{M}_{B',B}(T) = P^{-1}\mathcal{M}_{B,B}(T)P$$

Definición 1.3.2. $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ son similares si $\exists P$ invertible tal que:

$$A = P^{-1}BP$$

1.4. Productos de Espacios Vectoriales

Definición 1.4.1. Sean $V_1, ..., V_m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Definimos el espacio producto como

$$V = V_1 \times ... \times V_m = \{(v_1, ..., v_m) : v_i \in V_i (\forall i = 1, ..., m)\}$$

1. Suma: $(v_1, ..., v_m) + (v'_1, ...v'_m) = (v_1 + v'_1, ..., v_m + v'_m)$
2. Producto por escalar: $\lambda \cdot (v_1, ..., v_m) = (\lambda v_1, ..., \lambda v_m)$

Proposición 1.4.1. *$V \times ... \times V_m$ con suma y producto escalar es un espacio vectorial.*

Demostración. Ejercicio: similar a $\mathbb{F}^n$ □

Proposición 1.4.2. *Sean $V_1, ..., V_m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Entonces $V_1 \times ... \times V_m$ es finito-dimensional y*

$$\dim(V_1 \times ... \times V_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim V_i$$

Demostración. Dado $I = 1, ..., m$ sea

$$B_{V_i} = \{V_{1,1}, ..., V_{i,n_i}\}$$

Base de V_i. Ahora sea

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} \{(0, ..., 0, v_{ij}, ..., 0) : j = 1, ..., n_i\}$$

Probaremos que B es base de $V_1 \times ... \times V_m$. Notemos que esto basta:

$$\dim V_1 \times ... \times V_m = |B| = \sum_{i=1}^{m} n_i = \sum_{i=1}^{m} \dim V_i$$

- $\underline{B \text{ genera}}$: Sea $v \in V \times ... \times V_m$, entonces

$$v = (v_1, ..., v_m) \quad \text{donde } v_i \in V_i$$

Como B_{V_i} es base de V_i:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot v_{i,j}$$

$$v = \left(\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} v_{1,j}, ..., \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{m,j} v_{m,j} \right)$$

$$v = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} (0, ..., 0, v_{i,j}, 0, ..., 0) \in < B >$$

- B es linealmente independiente (ejercicio)

□

1.4.1. Productos y Sumas directas

Terorema 1.4.3. *Sean $U_1, ...U_m$ subespacios vectoriales de V. Definimos la transformación lineal*

$$\Gamma : U_1 \times ... \times U_m \to U_1 + ... + U_m$$

$$\Gamma(u_1, ..., u_m) = u_1 + ... + u_m$$

Entonces, $U_1 + ... + U_m$ es suma directa si solo si Γ inyectiva

Observación 1.4.1. Notar que Γ siempre es sobreyectiva

Demostración.

$$\Gamma \text{ inyectiva} \iff \ker \Gamma = \{0\}$$

$$\iff [u_1 + ... + u_m = 0 \iff (u_1, ..., u_m) = (0, ..., 0)]$$

$$\iff U_1 + ... + U_m \text{ es directa}$$

□

Capítulo 2

Parte II

2.1. Polinomios

Definición 2.1.1 (Grado)**.** Si $p(z) = a_0 + ... + a_n z^n$ con $a_n \neq 0$, entonces $gr(p) = n$. Si $p(z) = 0$ entonces $gr(p) = -\infty$

Proposición 2.1.1.

2.1.1. Algoritmo de la división

Recordemos que si p, s son enteros, no negativos, con $s \neq 0$, existen únicos q, r enteros no negativos tal que:

$$p = s \cdot q + r$$

Donde $r < s$.
De ahora en adelante, $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ a menos que se diga lo contrario.

Terorema 2.1.2 (División de polinomios)**.** *Sean $p, s \in \mathbb{F}[z]$ con $s \neq 0$. Entonces existen únicos polinomios $q, r \in \mathbb{F}[z]$ tales que:*

$$p = q \cdots + r \implies n = gr(q) + m$$

Con $gr(r) < gr(s)$.

Demostración. Sean $n = gr(p), m = gr(s)$. Definamos

$$T : \mathcal{P}_{n-m}(\mathbb{F}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

$$(q, r) \mapsto q \cdot s + r$$

Probaremos que T es una transformación lineal biyectiva. Notar que esto es suficiente para concluir el Teorema.

- T es lineal

$$T((q_1, r_1) + \lambda(q_2, r_1)) = T(q_1, r_1) + \lambda T(q_2, r_2)$$

- T inyectivo: Basta probar que $\ker T = \{0\}$. En efecto, si (q, r) son tales que:

$$q \cdot s + r = 0$$

$$q \cdot s = -r$$

Comparando grados:

$$gr(LI) = gr(q) \cdot m, gr(LD) =\leq m - 1$$

$$\implies q = 0 \implies r = 0$$

- T sobreyectiva: Por el TNI, y como $\ker T = \{0\}$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1})$$

$$\dim(\mathcal{P}_{n-m}) + \dim(\mathcal{P}_{m-1}) = n + 1$$

$$\therefore \dim T(\mathcal{P}_{n-m} \times \mathcal{P}_{m-1}) = n + 1 = \dim \mathcal{P}_{n-}$$

Lo que implica que T es sobreyectiva.

□

Observación 2.1.1. La demostración del Teo. Anterior entrega un .ªlgoritmo"para dividir polinomios. Resolver la ecuación lineal no-homogénea

$$T(q, r) = p$$

Asignando bases a la partida y la llegada, se obtendrá un sistema lineal

$$Ax = b$$

2.1.2. Raíces de Polinomios

El estudio de la ecuación $p(z) = 0$ es sumamente útil para analizar un polinomio $p \in \mathbb{F}$

Definición 2.1.2 (Raíz)**.** $\lambda \in \mathbb{F}$ se dice raiz de un polinomio si

$$p(\lambda) = 0$$

Definición 2.1.3 (Factor)**.** $s \in \mathbb{F}[z]$ se dice factor de $p \in \mathbb{F}[z]$ si existe un polinomio $q \in \mathbb{F}[z]$ tal que:

$$p = q \cdot s$$

Terorema 2.1.3 (Raíces definen factores de grado 1)**.** *Sea* $p \in \mathbb{F}[z]$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$*. Entonces* $p(\lambda) = 0 \iff (z-\lambda)$ *es factor de* p

Demostración. $\Longleftarrow$ $(z-\lambda)$ factor de p, entonces $\exists q \in \mathbb{F}[z]$ tal que

$$p(z) = (z-\lambda) \cdot q(z) \forall z \in \mathbb{F}$$

$$\implies p(\lambda) = 0 \cdot q(\lambda) = 0$$

implies. Por el algoritmo de la división para p y $s(z) = z - \lambda$, tenenemos que $\exists! r \in \mathbb{F}[z]$ con $gr(r) \leq= 0 \implies r \in \mathbb{F}$ tal que

$$p(z) = q(z) \cdot (z-\lambda) + r$$

$$\implies 0 = p(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + r$$

$$\therefore r = 0$$

□

Corolario (Un polinomio tiene tantas raíces como su grado)**.** *Sea* $p \in \mathbb{F}[z]$ *un polinomio de grado* $m \geq 0$*. Entonces* p *tiene a lo más* m *raíces distintas sobre* $\mathbb{F}$

Demostración. Por inducción en m.
$m = 0$: $p(z) = a_0 \neq 0$. Entonces p tiene 0 raíces.
$m - 1 \implies m$: Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_m z^m$ con $a_m \neq 0$

<u>Caso 1</u>: p no posee raíces

<u>Caso 2</u>: p sí posee raíces. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ raíz de p

$$\therefore \exists q \in \mathbb{F}[z] : p(z) = (z-\lambda) \cdot q(z)$$

Claramente $gr(q) = m - 1$. Por inducción, q posee a lo más $m-1$ raíces en $\mathbb{F}$. Por lo tanto:

$$\# \text{ raíces de } p \leq \# \text{ raíces de } (z-\lambda) + \# \text{ raíces de } q = m$$

□

2.2. Subespacios invariantes, y valores y vectores propios

Queremos entender la estructura de $T \in End(V) = \mathcal{L}(V)$ supongamos que

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

y

$$T|_{u_1}, T|_{u_2}, ..., T|_{u_m}$$

Definición 2.2.1 (Subespacio invariante)**.** Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un subespacio U de V se dice invariante para T si $TU \subseteq U$

$$\implies TU = \{w \in V : w = Tv\}$$

Propiedad: Sea $p, q \in \mathbb{F}[z]$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces:

1. $(p \cdot q)(T) = p(T) \cdot q(T)$
2. $p(T) \cdot q(T) = q(T) \cdot p(T)$

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ y $q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$

$$(p \cdot q)(z) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j z^j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k z^k\right)$$

$$p \cdot q)(z) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_j b_k z^{j+k}$$

$$\implies (p \cdot q)(T) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_j b_k T^{j+k}$$

$$(p \cdot q)(T) = (\sum_{j} a_j T^j)(\sum_{k}^{m} b_k T^k)$$

□

Terorema 2.2.1 (Existencia de vps)**.** *Todo operador en un espacio vectorial complejo de dimensión finita y* > 0*, posee un valor propio.*

Demostración. Sea $n = \dim V > 0$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea ahora $v \neq \mathbf{0}$. Entonces

$$\{v, Tv, T^2 v, ..., T^n v\}$$

es linealmente dependiente. Luego existen $a_0, .., a_n$ tal que $a_0 v + a_1 Tv + ... + a_n T^n v = 0$

$$\therefore p(T)v = 0 \quad \text{con } \mathrm{gr}(p) = n$$

Por el teorema fundamental del algebra, p puede ser factorizado

$$p(z) = C(z - \lambda_1) \cdot ... \cdot (z - \lambda_n)$$

Por ende:

$$p(T)v = 0 = C(T - \lambda_1 I) \cdot ... \cdot (T - \lambda_n I)v$$

$\implies$ Existe $j = 1, ..., n$ tal que $\mathrm{Im}(T - \lambda I) \neq V \therefore \lambda_j$ es valor propio de T □

2.3. Matrices triangulares superiores

Recordemos que daa $T \in \mathcal{L}(V)$ y una base B la matriz representante de T con respecto a B es

$$\mathcal{M}_B(T) = (a_{i,j})_{i,j\in[n]}$$

tal que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}v_k$$

Notemos, por ejemplo, que en el caso complejo siempre existe una base B tal que la matriz representante posee la siguiente estructura

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

En efecto, sea $\lambda \in \mathbb{F}$ valor propio de T con vector propio asociado $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Sea B una base que contiene a v. Si hacemos esto

$$Tv = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.3.1 (Matriz triangular superior)**.** Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ se dice triangular superior si

$$a_{i,j} = 0 \forall i > j$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Proposición 2.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $v_1, ..., v_n$ base (ordenada) de V. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) La matriz representante $\mathcal{M}_B(T)$ es $\triangle$ superior

b) $Tv_j \in < v_1, ..., v_j > \forall j = 1, ..., n$

c) $< v_1, ..., v_j >$ es invariante bajo $T, \forall j = 1, ..., n$

Demostración. □

Proposición 2.3.2 (Invertibilidad a través de representaciones matriciales)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que posee una representación $\triangle$ superior con respecto a cierta base. Entonces T invertible $\iff$ las entradas diagonales de la matriz son no nulas.*

Demostración. Sea B base tal que

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

$\impliedby$ Por $(*)$

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\therefore v_1 = T\left(\frac{v_1}{\lambda_1}\right) \in \mathrm{Im}(T)$$

Nuevamente, por $(*)$

$$Tv_2 = av_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\lambda \neq 0 \implies v_2 = T\left(\frac{v_2}{\lambda_2}\right) + \frac{a}{\lambda_2} v_1 \in \mathrm{Im}(T)$$

Por inducción:

$$Tv_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_j$$

$$v_j = T\left(\frac{v_j}{\lambda_j}\right) + \frac{a_1}{\lambda_j} v_1 + ... + \frac{a_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} \in \mathrm{Im}(T)$$

$\implies$ Sabemos que $\forall j = 1, ..., n$

$$Tv_j = a_1 v_1 + ... + a_{j-1} v_{j-1+\lambda_j v_j}$$

$$\implies Tv_j \in < v - 1, ..., v_j >$$

Si algún $\lambda_j = 0$:

$$Tv_j \in < v_1, ..., v_{j-1} >$$

$$T(< v_1, ..., v_j >) \subseteq < v_1, ..., v_{j-1} >$$

En efecto □

Corolario (Valores propios de operador a través de representación $\triangle$ superior)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con representación $\triangle$ superior*

$$\mathcal{M}_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (*)$$

con B base de V. Entonces los valores propios de T son $\lambda_1, ..., \lambda_n$

Demostración.

$$T_\lambda I \quad \text{no es biyectiva}$$

$$\mathcal{M}_B(T-\lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix} (*)$$

$$\mathcal{M}_B(T-\lambda I) = \mathcal{M}_B(T) - \lambda \mathcal{M}_B(I)$$

Por el Teo ($\therefore$)
$T-\lambda I$ invertible si solo si $\lambda_1 - \lambda, ..., \lambda_n - \lambda \neq 0$
λ es valor propio si solo si $\lambda_1 = \lambda$ o $\lambda_2 = \lambda$ ... $\lambda_n = \lambda$ □

2.4. Subespacios propios y Matrices Diagonales

Definición 2.4.1 (Diagonal de una matriz diagonal)**.** Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Definimos $Diag(A) \in \mathbb{F}^{N\times m}$

$$(Diag(A))_{i,j} =$$

Y decimos que A es diagonal si

$$A = Diag(A)$$

Equivalentemente, A es diagonal si

$$a_{i,j} = 0 \forall i \neq j$$

Claramente, toda matriz diagonal es $\triangle$ supeior, entonces los valores propios de A son los valores en la diagonal.

Definición 2.4.2 (Subespacio Propio)**.** Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. El subespacio propio de T correspondiente a $\lambda, E(\lambda, T)$, se define como

$$E(\lambda, T) = \ker(T - \lambda I)$$

es decir, el conjunto de vectores propios asociados a λ, más el cero.

Observación 2.4.1. λ es valor propio de $T \iff E(\lambda, T) \neq \{0\}$

Proposición 2.4.1 (Suma de subespacios propios es directa)**.**

Capítulo 3

Espacios de Producto Interno

Definición 3.0.1 (Producto Interno)**.** Un producto interno sobre un espacio vectorial V es una función

$$< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{F}$$

$$(u, v) \mapsto < u, v >$$

I) Positividad: $< v, v > \geq 0 \quad \forall v \in V$

II) Definitividad: $< v, v >= 0 \iff v = 0$

III) Aditividad por la izquierda: $\forall u, v, w \in V$

$$< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$$

IV) Homogeneidad: $< \lambda u, v >= \lambda < u, v > \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall u, v \in V$

V) Simetría conjugada: $< u, v >= \overline{< v, u >}$

Observación 3.0.1. En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}, (V) \iff < u, v >=< v, u >$

<u>Ejemplos:</u>

a) El producto interno Euclideano sobre $\mathbb{F}^n$

$$< (z_1, ..., z_n), (w_1, ..., w_n) >= z_1 \cdot \overline{w_1} + ... + z_n \cdot \overline{w_n}$$

b) Si $c_1, ..., c_n > 0$, entonces

$$(z_1, ..., z_n), (w_1, ..., w_n) >= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z_i \cdot \overline{w_i}$$

c) Si $V = \mathcal{C}[-1, 1]$

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

d) Si $V = \mathbb{R}[x]$ entonces

$$< p, q >= \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) \, \mathrm{d}x$$