Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 05

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-09-01

Problema 1:

Sean $a, b > 0$ demuestre que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución problema 1: Se ve el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
0 < \frac{a+b}{2} &\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} && \iff \\
0 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\leq \frac{a^2+b^2}{2} && \iff \\
\frac{a^2+2ab+b^2}{4} &\leq \frac{a^2+b^2}{2} && \iff \\
0 &\leq \frac{a^2-2ab+b^2}{4} && \iff \\
0 &\leq \frac{(a-b)^2}{4} && \iff
\end{aligned}$$

Y lo último es cierto.

■

Problema 2:

Sean $a, b, c, d > 0$ demuestre que

$$\sqrt{(a+c)(d+b)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

Solución problema 2: Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a+c)(d+b)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd} > 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
(a+c)(d+b) \geq \left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2 > 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
ad+bc+ab+cd \geq ab+2\sqrt{abcd}+cd & \qquad \Longleftrightarrow \\
ad+bc \geq 2\sqrt{abcd} & \qquad \Longleftrightarrow \\
\frac{ad+bc}{2} \geq \sqrt{abcd} & \qquad \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

y lo último es cierto por MA-MG.

■

Problema 3:

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ demuestre que

$$(a_1+\cdots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Solución problema 3: Se nota que en la izquierda hay n^2 cuadrados términos, por lo que se toma la media aritmética y se usa MA-MG

$$\frac{(a_1+\cdots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}{n^2} \geq \sqrt[n^2]{1}$$

En la derecha hay un 1 ya que para todo término de la forma $\frac{a_i}{a_j}$ en la multiplicación está el término $\frac{a_j}{a_i}$. Se ve que lo anterior es equivalente a lo pedido.

■

Problema 4:

Sean $a_1, \cdots, a_n$ y $b_1, \cdots, b_n$ reales tales que para todo $1 \leq j \leq n-1$ se tiene que $a_i > a_{i+1}$ y $b_i > b_{i+1}$. Demuestre que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n > S_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

Donde S_n es la suma de $a_{k_i}b_{j_i}$ con $k_i, j_i \in \{1, \cdots, n\}$ tales que $k_a \neq k_b$ y $j_a \neq j_b$ si $a \neq b$, y que no se tiene que para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ $k_i = j_i$.

Solución problema 4: Se nota que si se tiene la primera parte de la desigualdad, se tiene la segunda, ya que si se toma $b_i^* = -b_i$, se tiene

$$\begin{aligned} a_1 b_n^* + \cdots + a_n b_1^* > S_n^* & \iff \\ a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 < S_n. & \end{aligned}$$

Dado eso, se nota que se pide demostrar que el máximo de todas las permutaciones es $k_i = j_i = i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Para eso, se usará inducción sobre n. Ahora, para $n = 2$ sean $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$, entonces

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 > a_1 b_2 a + a_2 b_1 & \iff \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 a - a_2 b_1 > 0 & \iff \\ a_1(b_1 - b_2) + a_2(b_2 - b_1) > 0 & \iff \\ (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0. & \end{aligned}$$

Lo que es cierto ya que $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$. Para el caso $n = k$ se asume $n = k-1$, ahora sea S_n alguna permutación tal que $a_1 b_1$ no sea un término, entonces se tiene que $S_n = a_1 b_j + a_i b_j + T$, donde $i, j > 0$ y T corresponde al resto de los términos. Entonces, sea $S_n' = a_1 b_1 + a_i b_i + T$, queremos demostrar que $S_n' > S_n$, en otras palabras

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_i b_j + T > a_1 b_j + a_i b_1 + T & \iff \\ a_1 b_1 + a_i b_j > a_1 b_j + a_i b_1 & \iff \\ a_1 b_1 + a_i b_j - a_1 b_j - a_i b_1 > 0 & \iff \\ a_1(b_1 - b_j) - a_i(b_1 - b_j) > 0 & \iff \\ (a_1 - a_i)(b_1 - b_j) > 0, & \end{aligned}$$

y esto último es verdad ya que $a_1 > a_i$ y $b_1 > b_j$. Ahora, se nota que $a_2, \cdots, a_n$ y $b_2, \cdots, b_n$ son $n - 1$ términos por lo que por inducción se tiene que

$$a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n > a_i b_j + T,$$

por lo que

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n > a_1 b_1 + a_i b_j + T.$$

Lo que es equivalente a decir que $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n > S'_n$, con lo que usando transitividad se tiene lo pedido.[1]

$\blacksquare$

[1]El caso donde a_1 y b_1 están juntos es equivalente a la desigualdad con S'_n.