Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 13

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-10-13

Problema 1:

Demuestre que las siguientes sucesiones convergen a cero:

1) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^3}$

2) $x_n = \dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n^3}$

3) $x_n = \dfrac{1+4+\ldots+n^2}{n^4}$

Solución problema 1:

1) Notemos que $x_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k$, luego veamos que

$$\begin{aligned}
|x_n| &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k \\
&\leq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} n \\
&\leq \frac{1}{n^3}\cdot n^2 \\
&\leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, se nota que para $n \geq n_0$ se tiene que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, por lo que por transitividad se tiene que $|x_n| < \varepsilon$. Lo que nos dice que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Notemos que $x_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} 2k-1$, luego veamos que

$$\begin{aligned}
|x_n| &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} 2k-1 \\
&\leq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} 2n-1 \\
&\leq \frac{1}{n^3}(2n^2-n) \\
&\leq \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2} \\
&\leq \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \\
&\leq \frac{2}{n}+\frac{1}{n} \\
&\leq \frac{3}{n}
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea $n_0 = \left\lfloor \frac{3}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, se nota que para $n \geq n_0$ se tiene que $\frac{3}{n} < \varepsilon$, por lo que por transitividad se tieneque $|x_n| < \varepsilon$. Lo que nos dice que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

3) Notemos que $x_n = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$, luego veamos que

$$\begin{aligned}
|x_n| &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&\leq \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} n^2 \\
&\leq \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} n^2 \\
&\leq \frac{1}{n^4}\cdot n^3 \\
&\leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Usando el mismo argumento que se usa para 1), se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

$\blacksquare$

Problema 2:

Sea x_n una sucesión. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ si y solo si para todo $k \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} k \cdot x_n = 0$.

Solución problema 2: Se nota que $\Longleftarrow$ es trivial tomando $k = 1$.

Para $\Longrightarrow$, si $k = 0$, se tiene trivialmente, por lo que para $k \neq 0$ sea $\varepsilon > 0$ se tiene que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se tiene que $|x_n| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ lo que es equivalente a $|k \cdot x_n| < \varepsilon$, por lo que $\lim_{n\to\infty} k \cdot x_n = 0$.

■

Problema 3:

Sea x_n tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, y sea y_n una sucesión acotada, demuestre que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Solución problema 3: Por definición de acotado de tiene que $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq |y_n| < M$, por lo que dado un $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ da que $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, ahora se ve que $|y_n x_n| < M\,|x_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, por lo que se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

■

Problema 4:

Sea x_n tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces $\frac{1}{x_n}$ no está acotada.

Solución problema 4: Usando contrapositiva, si $\frac{1}{x_n}$ es acotada, se tiene que existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\left|\frac{1}{x_n}\right| < M$, esto se puede reescribir como $\frac{1}{M} < |x_n|$, por lo que se tiene que x_n no puede converger a 0.

■