Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: `namcdonnell@uc.cl`

Ayudantía 08

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-09-15

Problema 1:

(I6 2018) Considere $x_n = \frac{n!}{n^n}$

(a) Demuestre que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}$$

(b) Demuestre que

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución problema 1:

(a) Para demostrar esto es suficiente demostrar que $\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} \\
&= \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{n!}{(n+1)^n}} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\geq= 1 + n \cdot \frac{1}{n} \\
&\geq= 2
\end{aligned}$$

(b) Para esto, se usará inducción. Para $n = 1$ se tiene que $x_1 = 1$, lo que cumple lo pedido. Ahora, asumiendo que se cumple para $n-1$, además se recuerda lo demostrado anteriormente $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n$, y se ve lo siguiente

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n \leq \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

La otra desigualdad es por definición.

$\blacksquare$

Problema 2:

Demuestre que x_n es monótona si y solo si todas las subsucesiones también son monótonas.

Solución problema 2: $\Longrightarrow$ Demostrado en clase.

$\Longleftarrow$ Se nota que x_n es subsucesión de x_n por lo que x_n es monótona.

$\blacksquare$

Problema 3:

Para $a > 0$, se definen las funciones

$$f(x) = x^3 - 2 \qquad \text{y} \qquad g_a(x) = a^3 - 2 + 3a^2(x - a)$$

(a) Demuestre que

$$f(x) - g_a(x) = (x - a)^2(x + 2a)$$

y concluya que $f(x) \geq g_a(x)$ para todo $x \geq 0$.

(b) Ahora, sea x_n una sucesión tal que $x_1 = 2$ y x_{n+1} cumple

$$g_{x_n}(x_{n+1}) = 0 \qquad \text{y} \qquad x_{n+1} \geq 0$$

Demuestre que está sucesión es monótona.

Solución problema 3:

(a) Se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) - g_a(x) &= x^3 - 2 - a^3 + 2 - 3a^2(x-a) \\ &= x^3 - a^3 - 3a^2(x-a) \\ &= (x^2 + ax + a^2 - 3a^2)(x-a) \\ &= (x^2 + ax - 2a^2)(x-a) \\ &= (x-a)(x+2a)(x-a) \\ &= (x-a)^2(x+2a) \end{aligned}$$

Ahora, como $x \geq 0$, $a > 0$ y $(x-a)^2 \geq 0$ se tiene que $f(x) - g_a(x) \geq 0$

(b) Usando inducción se demostrará que $\sqrt[3]{2} \leq x_{n+1} \leq x_n$. Para el caso $n = 1$ se tiene que $x_1 = 2 \geq \sqrt[3]{2}$, y como $g_{x_1}(x_2) = 0$ se tiene que $x_1^3 - 2 + 3x_1^2(x_2 - x_1) = 0$, como $x_1^3 - 2 \geq 0$ y $3x_1^2 \geq 0$ se tiene que $x_2 \geq x_1$. Ahora, de forma similar se hará el caso inductivo.

■

Problema 4:

Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión tenga una cantidad finita de subsucesiones.

Solución problema 4: Se ve que una sucesión eventualmente constante cumple que tiene una cantidad finita de subsucesiones. Por lo que se demostrará que si una sucesión tiene finitas subsucesiones, entonces es eventualmente constante por contra-positiva.

Sea x_n un sucesión que no es eventualmente constante. Se ve el siguiente conjunto $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se tienen dos casos:

Caso 1: $2 \leq |S| < \infty$[1] Entonces existe algún $a \in S$ tal que $x_n = a$ infinitas veces. Ahora, vemos las subsucesiones que son de la forma k a, un b donde $b \neq a$ y después toda lo que queda de la subsucesión. Lo que nos dice que tenemos infinitas subsucesiones.

Caso 2: $|S| = \infty$ Para cada elemento $x \in S$, se tiene que existe un $n_{0,x}$, tal que $x_{n_{0,x}} = x$ y $x_{n_k} \neq x$ para $k < n_{0,x}$. Como se puede definir la subsucesión que comienza en $n_{0,x}$, y como tenemos infinitos $n_{0,x}$, se tienen infinitas subsucesiones.

■

[1]Si $|S| = 1$, la sucesión tiene que ser constante.