Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 04

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-08-27

Problema 1:

Sean $a, b > 0$ demuestre que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución problema 1: Se ve el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
0 < \frac{a+b}{2} &\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} && \iff \\
0 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\leq \frac{a^2+b^2}{2} && \iff \\
\frac{a^2+2ab+b^2}{4} &\leq \frac{a^2+b^2}{2} && \iff \\
0 &\leq \frac{a^2-2ab+b^2}{2} && \iff \\
0 &\leq \frac{(a-b)^2}{2} && \iff
\end{aligned}$$

Y lo último es cierto.

■

Problema 2:

Sean $a, b, c, d > 0$ demuestre que

$$\sqrt{(a+c)(d+b)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

Solución problema 2: Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
0 < \sqrt{(a+c)(d+b)} &\geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} && \iff \\
0 < (a+c)(d+b) &\geq \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2 && \iff \\
ad + bc + ab + cd &\geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd && \iff \\
ad + bc &\geq 2\sqrt{abcd} && \iff \\
\frac{ad+bc}{2} &\geq \sqrt{abcd} && \iff
\end{aligned}$$

y lo último es cierto por MA-MG.

■

Problema 3:

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ demuestre que

$$(a_1 + \cdots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Solución problema 3: Se nota que en la izquierda hay n^2 cuadrados términos, por lo que se toma la media aritmética y se usa MA-MG

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)}{n^2} \geq \sqrt[n^2]{1}$$

En la derecha hay un 1 ya que para todo término de la forma $\frac{a_i}{a_j}$ en la multiplicación está el término $\frac{a_j}{a_i}$. Se ve que lo anterior es equivalente a lo pedido.

■

Problema 4:

Sean $a_1, \cdots, a_n$ y $b_1, \cdots, b_n$ reales tales que para todo $1 \leq j \leq n-1$ se tiene que $a_i > a_{i+1}$ y $b_i > b_{i+1}$. Demuestre que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n > S_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

Donde S_n es la suma de $a_{k_i}b_{j_i}$ con $k_i, j_i \in \{1, \cdots, n\}$ tales que $k_a \neq k_b$ y $j_a \neq j_b$ si $a \neq b$, y que no se tiene que para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ $k_i = j_i$.

Solución problema 4: Se nota que si se tiene la primera parte de la desigualdad, se tiene la segunda, ya que si se toma $b_i^* = -b_i$, se tiene

$$\begin{aligned} a_1b_n^* + \cdots + a_nb_1^* > S_n^* & \qquad \iff \\ a_1b_n + \cdots + a_nb_1 < S_n. & \end{aligned}$$

Dado eso, se nota que se pide demostrar que el máximo de todas las permutaciones es $k_i = j_i = i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Para eso, se usará inducción sobre n. Ahora, para $n = 2$ sean $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$, entonces

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2a + a_2b_1 & \qquad \iff \\ a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2a - a_2b_1 > 0 & \qquad \iff \\ a_1(b_1 - b_2) + a_2(b_2 - b_1) > 0 & \qquad \iff \\ (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0. & \end{aligned}$$

Lo que es cierto ya que $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$. Para el caso $n = k$ se asumen los casos $n < k$, y sean $a_1, \cdots, a_n$ y $b_1, \cdots, b_n$ tales que $a_i > a_{i+1}$ y $b_i > b_{i+1}$ para $1 \leq i < n$. Sean a_i, b_j tales que $j > 1$ e $i > 1$, luego s.p.d.g. $i \leq j$ y por la hipótesis inductiva sobre $a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$ y $b_2, \cdots, b_{j-1}, b_{j+1}, \cdots, b_n$ se tiene que

$$a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} + a_{i+1}b_i + \cdots + a_jb_{j-1} + a_{j+1}b_{j+1} + \cdots + a_nb_n > S_{n-2}.$$

Dado eso, se tiene que

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_ib_j + S_{n-2} > a1b_j + a_ib_1 + S_{n-2} & \qquad \iff \\ a_1b_1 + a_ib_j > a1b_j + a_ib_1 & \qquad \iff \\ a_1b_1 + a_ib_j - a1b_j - a_ib_1 > 0 & \qquad \iff \\ a_1(b_1 - b_i) + a_i(b_j - b_1) > 0 & \qquad \iff \\ (a_1 - a_j)(b_1 - b_i) > 0. & \end{aligned}$$

Lo cual es verdad ya que $a_1 > a_j$ y $b_1 > b_j$, por último se tiene que

$$a_1b_1 + a_ib_j + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} + a_{i+1}b_i + \cdots + a_jb_{j-1} + a_{j+1}b_{j+1} + \cdots + a_nb_n > a_1b_1 + a_ib_j + S_{n-2}.$$

Por lo que aplicando la hipótesis inductiva sobre $a_i, a_{i+1}, \cdots, a_j$ y sobre $b_i, \cdot, b_j$ se tiene que

$$a_1b_1+\cdots+a_ib_i+\cdots+a_jb_j+\cdots+a_nb_n > a_1b_1+a_ib_j+\cdots+a_{i-1}b_{i-1}+a_{i+1}b_i+\cdots+a_jb_{j-1}+a_{j+1}b_{j+1}+\cdots+a_nb_n.$$

Juntando las desigualdades usando transitividad y recordando que i, j eran arbitrarios, se tiene que

$$a_1b_1 + \cdots + a_ib_i + \cdots + a_jb_j + \cdots + a_nb_n > a1b_j + a_ib_1 + S_{n-2} = S_n,$$

con lo que se demuestra la hipótesis inductiva.

$\blacksquare$