Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 04

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-08-27

Problema 1:

Sean $a, b > 0$, muestre que

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

Solución problema 1: Notar que $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. Por lo que es equivalente probar lo siguiente

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$$

Ahora, como $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} > 0$ se tiene que multiplicar por esa expresión no cambia el la desigualdad. Por lo que se tiene que $\frac{ab}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2}$, que es equivalente a la desigualdad MA-MG.

■

Problema 2:

Demuestre que dados $a, b, c > 0$ se tiene que

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

Solución problema 2: Se nota que la desigualdad es equivalente la siguiente

$$\frac{a^2+ab+ac+bc}{2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$$

Y esta es verdad por MA-MG tomando $a(a+b+c)$ y bc.

■

Problema 3:

Demuestre que dados $x_1, \ldots, x_n$ reales positivos, se tiene

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

Solución problema 3: Se usa inducción de la siguiente forma, dado $P(n)$ se demuestra $P(2n)$ y dado $P(n)$ se demuestra $P(n-1)$. El caso base es $n = 2$, que fue demostrado en clases.

- $P(n) \implies P(2n)$: Dado $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n} \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} \\
&\geq \sqrt{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}} \\
&\geq \sqrt[2n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}
\end{aligned}$$

- $P(n) \implies P(n-1)$: Dado $x_1, \cdots, x_{n-1} \geq 0$ se agrega $x_n = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$ y se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}\cdot\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}} && \iff \\
\frac{(n-1)x_1+\cdots+(n-1)x_{n-1}+x_1+\cdots+x_{n-1}}{n(n-1)} &\geq \sqrt[n]{x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}}\cdot\sqrt[n]{\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}} && \iff \\
\frac{nx_1+\cdots+nx_{n-1}}{n(n-1)} &\geq \sqrt[n]{x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}}\cdot\sqrt[n]{\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}} && \iff \\
\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} &\geq \sqrt[n]{x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}}\cdot\sqrt[n]{\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}} && \iff \\
\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} &\geq \sqrt[n]{x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}} && \iff \\
\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} &\geq x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1} && \iff \\
\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} &\geq \sqrt[n-1]{x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}} && \iff
\end{aligned}
$$

■

Problema 4:

Sean $a, b, c > 0$ demuestre que

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$$

Solución problema 4: Por MA-MG se tiene que $ab+bc \geq 2b\sqrt{ac}$, haciendo desigualdades de la misma forma y sumando se tiene que

$$2(ab+bc+ac) \geq 2(b\sqrt{ac} + a\sqrt{bc} + c\sqrt{ab}) \tag{1}$$

Nuevamente por MA-MG se tiene que $a^2+a^2+b^2+c^2 \geq 4a\sqrt{bc}$, haciendo desigualdades de la misma forma se tiene lo siguiente

$$3a^2+3b^2+3c^2 \geq 4(b\sqrt{ac} + a\sqrt{bc} + c\sqrt{ab}) \tag{2}$$

Sumando 3 veces (**??**) a (**??**) se tiene lo siguiente:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{3}{10}(a^2+b^2+c^2) \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$$

$\blacksquare$