Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 12

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-10-05

Problema 1:

Sea x_n una sucesión. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ si y solo si para todo $k > 0$ $\lim_{n\to\infty} k \cdot x_n = \infty$.

Solución problema 1: $\Longleftarrow$ Es trivial tomando $k = 1$.

$\Longrightarrow$ Sea $R > 0$, se nota que $\frac{R}{k} > 0$, por lo que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se tiene que $x_n > \frac{R}{k}$, o equivalentemente $k \cdot x_n > R$, lo que nos da que $\lim_{n\to\infty}$.

■

Problema 2:

Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$y $x_n \neq 0$, entonces $\frac{1}{x_n}$ está acotada inferiormente.

Solución problema 2: Sea $R = 1 > 0$, se tiene que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se tiene $x_n > 1 > 0$, más específicamente se tiene que $1 > \frac{1}{x_n} > 0$. Ahora, sea $m = \min(\{0\} \cup \{x_n : n < n_0\})$[1], se nota que para $n < n_0$ $x_n > m$ y que para $n \geq n_)$ se tiene que $x_n > 0 \geq m$, por lo que se tiene que x_n está acotada inferiormente por m.

■

Problema 3:

Sea $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 - 1}}$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

[1]Esto está bien definido ya que $\{0\} \cup \{x_n : n < n_0\}$ es un conjunto no vacío y es finito.

Solución problema 3: Se ve la siguiente factorización:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^3}-\sqrt{n^3-1}} &= \frac{1}{\sqrt{n^3}-\sqrt{n^3-1}} \cdot \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3-1}} \\ &= \sqrt{n^3}+\sqrt{n^3-1}\end{aligned}$$

Como $\sqrt{n^3-1} \geq 0$ y $\sqrt{n^3} \geq n$, se tiene que $x_n \geq n$, y por ayudantía anterior al tenerse que $\lim_{n\to} n = \infty$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

$\blacksquare$

Problema 4:

Sea L_n definida como

$$L_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ L_{n-1} + L_{n-2} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Demuestre que $L_n \to \infty$

Solución problema 4: Se demuestra por inducción que $L_n \geq n-1$, para $n < 4$ se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned} L_1 &= 2 \geq 0 \\ L_2 &= 1 \geq 1 \\ L_3 &= 3 \geq 2 \end{aligned}$$

Luego para L_n se ve

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \\ L_n &\geq n-2+n-3 \\ L_n &\geq 2n-5 \\ L_n &\geq n-1, \end{aligned}$$

la última desigualdad se tiene porque $n \geq 4$. Ahora por ayudantia anterior se tiene que $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$.