Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: `namcdonnell@uc.cl`

Ayudantía 01

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-08-19

Problema 1:

Demuestre que $-a = (-1) \cdot a$.

Solución problema 1: Se nota que es suficiente demostrar que $a + ((-1) \cdot a) = 0$, ya que el lado izquierdo de la ecuación es el inverso aditivo de a. Para esto, veamos que

$$\begin{aligned} a + ((-1) \cdot a) &= (1 \cdot a) + ((-1) \cdot a) \\ &= (1 + (-1)) \cdot a \\ &= 0 \cdot a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que se tiene que $-a = (-1) \cdot a$.

■

Problema 2:

Demuestre que si $a \neq 0$ entonces $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

Solución problema 2: Notemos que el lado derecho es el inverso multiplicativo de $(-a)$, por lo que basta ver que el lado izquierdo multiplicado por $(-a)$ da 1. Para esto, veamos que

$$\begin{aligned}
(-a)\cdot -(a)^{-1} &= ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot a^{-1}) \\
&= ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot a^{-1}) \\
&= (a\cdot(-1))\cdot((-1)\cdot a^{-1}) \\
&= a\cdot((-1)\cdot((-1)\cdot a^{-1})) \\
&= a\cdot(((-1)\cdot(-1))\cdot a^{-1}) \\
&= a\cdot(1\cdot a^{-1}) \\
&= a\cdot a^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Para ver que $(-1)\cdot(-1)=1$ es suficiente ver el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
0=(-1)\cdot 0 &\iff 0=(-1)\cdot(1+(-1)) \\
&\iff 0=((-1)\cdot 1)+((-1)\cdot(-1)) \\
&\iff 0=(-1)+((-1)\cdot(-1)) \\
&\iff 1=1+((-1)+((-1)\cdot(-1))) \\
&\iff 1=(1+(-1))+((-1)\cdot(-1)) \\
&\iff 1=0+((-1)\cdot(-1)) \\
&\iff 1=(-1)\cdot(-1)
\end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que $-(a^{-1})=(-a)^{-1}$.

$\blacksquare$

Problema 3:

(I1 2019) Sean a,b,c,d cuatro reales tales que

$$ad \neq bc$$

Pruebe que si x,y son reales tales que

$$ax+by=0 \quad \text{y} \quad cx+dy=0$$

entonces $x = y = 0$.
Hint: *Muestre que* $(ad)x = (bc)x$ *para concluír que* $x = 0$.

Solución problema 3: Se nota que no se puede tener que $ad = 0 = bc$, por lo que s.p.d.g. $ad \neq 0$, lo que nos dice que $a \neq 0$ y $d \neq 0$. Ahora, se multiplica la primera ecuación por d:

$$\begin{aligned}
d \cdot (ax + by) = d \cdot 0 &\iff (d \cdot (ax)) + (d \cdot (by)) = 0 \\
&\iff ((da) \cdot x) + ((db) \cdot y) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + ((bd) \cdot y) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + (b \cdot (dy)) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + (b \cdot (-cx)) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + (b \cdot ((-1) \cdot (cx))) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + ((b \cdot (-1)) \cdot (cx)) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + (((-1) \cdot b) \cdot (cx)) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + ((-1) \cdot (b \cdot (cx))) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + ((-1) \cdot (b \cdot (cx))) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + (-((bc) \cdot x)) = 0 \\
&\iff ((ad) \cdot x) + (-((bc) \cdot x)) + ((bc) \cdot x) = 0 + ((bc) \cdot x) \\
&\iff ((ad) \cdot x) + 0 = (bc) \cdot x \\
&\iff (ad) \cdot x = (bc) \cdot x
\end{aligned}$$

Ahora si $x \neq 0$ entonces existe x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$, por lo que

$$\begin{aligned}
((ad) \cdot x) \cdot x^{-1} = ((bc) \cdot x) \cdot x^{-1} &\iff (ad) \cdot (x \cdot x^{-1}) = (bc) \cdot (x \cdot x^{-1}) \\
&\iff (ad) \cdot 1 = (bc) \cdot 1 \\
&\iff ad = bc
\end{aligned}$$

Lo que es una contradicción, por lo que $x = 0$, ahora como $x = 0$ se tiene que $c \cdot 0 + dy = 0$ por lo que $dy = 0$, recordamos que $d \neq 0$ por lo que $y = 0$.

$\blacksquare$

Problema 4:

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, consideramos la ecuación

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0.$$

Suponiendo que $a, b \in \mathbb{R}$ son las únicas soluciones de la ecuación, y además $a \neq b$, encuentre α y β en términos de a y b.
Bonus: *Encuentre α y β si $a = b$.*

Solución problema 4: Como a, b son soluciones se tienen la siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
a^2 + \alpha a + \beta &= b^2 + \alpha b + \beta \\
a^2 + \alpha a &= b^2 + \alpha b \\
\alpha a - \alpha b &= b^2 - a^2 \\
\alpha(a - b) &= (b - a)(a + b) \\
\alpha(a - b) &= -(a - b)(a + b) \\
\alpha &= -(a + b)
\end{aligned}$$

Usando que a es solución de la ecuación y reemplazando el valor encontrado de α se tiene que

$$\begin{aligned}
a^2 + (-(a + b))a + \beta &= 0 \\
a^2 + (-a^2) + ab + \beta &= 0 \\
ab + \beta &= 0 \\
\beta &= -ab
\end{aligned}$$

Por lo que $\alpha = -(a + b)$ y $\beta = -ab$.

$\blacksquare$

Problema 5:

Demuestre que $-b < -a$ si y solo si $a < b$.

Solución problema 5: Se nota que solo se necesita una implicancia, ya que $-(-a) = a$, con lo que si se tiene que $(-b < -a) \implies (a < b)$, entonces se puede usar para que $-(-a) < -(-b) \implies (-b < -a)$. Ahora, para demostrar que $(-b < -a) \implies (a < b)$ se nota que $-b < -a$ si y solo si $(-a - (-b)) \in \mathbb{R}^+_\star$, o sea que $(b - a) \in \mathbb{R}^+_\star$, y esto último nos da que $a < b$.

$\blacksquare$

Problema 6:

Demuestre que si $b < a < 0$, entonces $0 < a^2 < b^2$.

Solución problema 6: Se nota que $b = -(-b)$, que $a = -(-a)$ y que $-0 = 0$, por lo que $-(-b) < -(-a) < -0$, por lo que $0 < (-a) < (-b)$. Ahora como $(-a) > 0$ se tiene que $0 \cdot (-a) < (-a) \cdot (-a) < (-b) \cdot (-a)$ (visto en clase), similarmente como $(-b) > 0$ se tiene que $(-b) \cdot a < (-b) \cdot (-a) < (-b) \cdot (-b)$. Usando transitividad se tiene que $0 < (-a) \cdot (-a) < (-b) \cdot (-b)$, como $-a = (-1) \cdot a$ y $(-1) \cdot (-1) = 1$ se tiene que $0 < a^2 < b^2$.

$\blacksquare$