Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 03

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-08-25

Problema 1:

¿Bajo qué condiciones $|x+y| = |x| + |y|$?

Solución problema 1: Se nota que si x e y son positivos, entonces $|x+y| = |x| + |y|$, ahora si x e y ambos son negativos, se tiene que $-x$ y $-y$ son positivos, luego

$$\begin{aligned} |x+y| &= |-(x+y)| \\ &= |(-x)+(-y)| \\ &= |(-x)| + |(-y)| \\ &= |x| + |y| \end{aligned}$$

Ahora, si el signo de x es distinto al de y, se asume s.p.d.g. que $x > 0$ y ambos no cero, entonces

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= |x| + |-y| \\ &= |x + (-y)| \end{aligned}$$

Ahora, se tiene que $|x+y| = |x| + |y|$ si y solo si $|x-y| = |x+y|$, pero esto implica que $(x-y)^2 = (x+y)^2$ por lo que $4xy = 0$, como $x > 0$ y $4 > 0$ se tiene que $y = 0$, pero se asumió que $y < 0$, por lo que se tiene que $|x+y| \neq |x| + |y|$. Por último si x o y, se puede asumir s.p.d.g. que $y = 0$[1] y por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}|x+y| &= |x+0| \\ &= |x| \\ &= |x| + 0 \\ &= |x| + |y|\end{aligned}$$

Con eso se ven todos los casos.

$\blacksquare$

Problema 2:

Muestre que $|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$.

Solución problema 2: Por inducción sobre n, si $n = 1$, se tiene trivialmente que $|x_1| \leq |x_1|$. Ahora, se asume para $k = n$. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ reales cualesquiera, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}|(x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}| &\leq |x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \\ &\leq |x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \\ &\leq |x_1| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}|\end{aligned}$$

Demostrando lo pedido.

$\blacksquare$

Problema 3:

Encuentre el conjunto solución de las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$

2) $\left|\dfrac{5x - 2}{3x + 1}\right| > 7$

Solución problema 3:

[1] se permuta x con y.

1) Se factoriza la expresión a la derecha y se ve la siguiente desigualdad

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

Se nota que si $x=-2$ o $x=2$, la expresión no está bien definida. Ahora, a través del uso de la siguiente tabla se observarán los posibles casos:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$x+2$	-	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	-	-	$+$	$+$	$+$
$x-1$	-	-	-	$+$	$+$
$x-2$	-	-	-	-	$+$
$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$	$+$	-	$+$	-	$+$

Con lo anterior se ve que la expresión es estrictamente menor a 0 en $(-2,-1)\cup(1,2)$, para el caso donde la expresión es igual a 0 se nota que la expresión es cero si $x=1$ o $x=-1$, por lo que el conjunto solución es $(-2,-1]\cup[1,2)$.

2) Se nota que si $x>-\frac{1}{3}$ se tiene que $3x+1>0$, similarmente si $x<-\frac{1}{3}$ se tiene que $3x+1<0$, juntando eso con que $\left|\frac{5x-2}{3x+1}\right|>7$ si y solo si $\frac{5x-2}{3x+1}>7$ o $\frac{5x-2}{3x+1}<-7$, se tienen cuatro casos:

Caso 1: $x>-\frac{1}{3}$ y $\frac{5x-2}{3x+1}>7$, dado eso se tiene la siguiente cadena de $\iff$

$$\begin{aligned}\frac{5x-2}{3x+1}>7 &\iff 5x-2>7*(3x+1)\\ &\iff 5x-2>21x+7\\ &\iff -9>16x\\ &\iff -\frac{9}{16}>x\end{aligned}$$

Por lo que $x\in(-\frac{1}{3},-\frac{9}{16})$.

Caso 2: $x < -\frac{1}{3}$ y $\frac{5x-2}{3x+1} > 7$, dado eso se tiene la siguiente cadena de $\iff$

$$\begin{aligned}
\frac{5x-2}{3x+1} > 7 &\iff 5x - 2 < 7 * (3x+1) \\
&\iff 5x - 2 < 21x + 7 \\
&\iff -9 < 16x \\
&\iff -\frac{9}{16} < x
\end{aligned}$$

Por lo que $x \in (-\frac{9}{16}, -\frac{1}{3})$.

Caso 3: $x > -\frac{1}{3}$ y $\frac{5x-2}{3x+1} < -7$, dado eso se tiene la siguiente cadena de $\iff$

$$\begin{aligned}
\frac{5x-2}{3x+1} < -7 &\iff 5x - 2 < -7 * (3x+1) \\
&\iff 5x - 2 < -21x - 7 \\
&\iff 26x < -5 \\
&\iff x < -\frac{5}{26}
\end{aligned}$$

Por lo que $x \in (-\frac{1}{3}, -\frac{5}{26})$.

Caso 4: $x < -\frac{1}{3}$ y $\frac{5x-2}{3x+1} < -7$, dado eso se tiene la siguiente cadena de $\iff$

$$\begin{aligned}
\frac{5x-2}{3x+1} < -7 &\iff 5x - 2 < -7 * (3x+1) \\
&\iff 5x - 2 > -21x - 7 \\
&\iff 26x > -5 \\
&\iff x > -\frac{5}{26}
\end{aligned}$$

Por lo que $x \in (-\frac{5}{26}, -\frac{1}{3})$.

Juntando todos lo casos, y notando que $-\frac{9}{16} < -\frac{1}{3}$ y que $-\frac{1}{3} < -\frac{5}{26}$, se tiene que el conjunto solución es $(-\frac{9}{16}, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, -\frac{5}{26})$

$\blacksquare$

Problema 4:

Sea $x > 0$. Demuestre que

$$\sqrt{1+x} \le 1 + x \le (1+\sqrt{x})^2$$

Solución problema 4: Se nota que $1 + x > 0$, por lo que $\sqrt{1+x} > 0$. Dado eso, se ven las siguientes equivalencias:

$$0 < \sqrt{1+x} \le 1 + x \iff 0 < 1 + x \le (1+x)^2 \iff 0 < 1 + x \le 1 + 2x + x^2 \iff 1 + x \le 1 + 2x + x^2$$

Como $x > 0$ se tiene que $0 < x(x+1)$. Y por la cadena de equivalencias se tiene la primera desigualdad. Para la segunda desigualdad, se ven la siguientes equivalencias

$$0 < 1 + x \le (1+\sqrt{x})^2 \iff 1 + x \le 1 + 2\sqrt{x} + x \iff 0 \le 2\sqrt{x}$$

De nuevo, como $x > 0$ se tiene que $\sqrt{x} > 0$, y por la cadena de equivalencias se tiene lo pedido.

$\blacksquare$