Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 07

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-09-08

Problema 1:

Demuestre por inducción que $n^2 \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución problema 1: Usando inducción, para $n = 1$ se tiene que $1^2 \geq 1$. Ahora, para el caso inductivo:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &\geq n^2 + 2n + 1 \\ &\geq n + 2n + 1 \\ &\geq n + 1\end{aligned}$$

Quedando demostrado el caso inductivo.

■

Problema 2:

Usando la notación $\{(x+y)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para la sucesión definida como $(x+y)_n = x_n + y_n$, y $\{(xy)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para la sucesión definida como $(xy)_n = x_n y_n$. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si es verdadero demuestre, en caso contrario de contraejemplo.

1) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son crecientes, entonces $\{(x+y)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

2) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son crecientes, entonces $\{(xy)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

3) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son monótonas, entonces $\{(x+y)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

4) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son monótonas, entonces $\{(xy)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

5) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona, entonces $\{(x^2)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Solución problema 2:

1) Es verdadero, se tiene que $x_n + y_n \leq x_{n+1} + y_n \leq x_{n+1} + y_{n+1}$, por lo que $(x+y)_n \leq (x+y)_{n+1}$.

2) Es falso, se consideran $x_n = n$ e $y_n = -1$.

3) Es falso, se consideran $x_n = n^2$ e $y_n = -n!$, entonces $(x+y)_1 = 0, (x+y)_2 = 2, (x+y)_3 = 3, (x+y)_4 = -8$.

4) Es falso, se consideran $x_n = n^2$ e $y_n = (n!)^{-1}$, entonces $(xy)_1 = 1, (xy)_2 = 2, (xy)_3 = \frac{3}{2}, (xy)_4 = \frac{2}{3}$.

5) Es falso, se considera $x_n = n-2$, entonces $(x^2)_1 = 1, (x^2)_2 = 0, (x^2)_3 = 1$.

■

Problema 3:

Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$. Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que $\alpha^n > Cn$ para todo n.

Solución problema 3: Se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha^n &= (1+(\alpha-1))^n \\ &\geq 1 + n(\alpha-1) \qquad \text{Por Bernoulli} \\ &> n(\alpha-1)\end{aligned}$$

Entonces tomando $C = \alpha - 1$ se tiene lo pedido.

■

Problema 4:

Demuestre que la siguiente sucesión es creciente

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Solución problema 4: Para demostrar que a_n es creciente se demostrará que $a_{n+1}/a_n \geq 1$. Se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n} \\
&\geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) \\
&\geq^* \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Para el $\geq^*$ se ve que

$$1-\frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \geq \frac{(n+1)^3}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$\blacksquare$