



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell

Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 04

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-08-27

Problema 1:

Sean $a, b > 0$, muestre que

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

Solución problema 1: Notar que $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. Por lo que es equivalente probar lo siguiente

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$$

Ahora, como $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} > 0$ se tiene que multiplicar por esa expresión no cambia el la desigualdad. Por lo que se tiene que $\frac{ab}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2}$, que es equivalente a la desigualdad MA-MG.

■

Problema 2:

Demuestre que dados $a, b, c > 0$ se tiene que

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+bc)}$$

Solución problema 2: Se nota que la desigualdad es equivalente la siguiente

$$\frac{a^2 + ab + ac + bc}{2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$$

Y esta es verdad por MA-MG tomando $a(a+b+c)$ y bc .

■

Problema 3:

Demuestre que dados x_1, \dots, x_n reales positivos, se tiene

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

Solución problema 3: Se usa inducción de la siguiente forma, dado $P(n)$ se demuestra $P(2n)$ y dado $P(n)$ se demuestra $P(n-1)$. El caso base es $n=2$, que fue demostrado en clases.

■ $P(n) \implies P(2n)$: Dado $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n} \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n}}{2} \\ &\geq \sqrt{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n}} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots x_{2n}}} \\ &\geq \sqrt[2n]{x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots x_{2n}} \end{aligned}$$

- $P(n) \implies P(n-1)$: Dado $x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0$ se agrega $x_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$ y se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}} \cdot \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} && \iff \\
\frac{(n-1)x_1 + \dots + (n-1)x_{n-1} + x_1 + \dots + x_{n-1}}{n(n-1)} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}} && \iff \\
\frac{nx_1 + \dots + nx_{n-1}}{n(n-1)} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}} && \iff \\
\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}} && \iff \\
\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{n}} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}} && \iff \\
\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} &\geq x_1 \cdots x_{n-1} && \iff \\
\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} &\geq \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}} && \iff
\end{aligned}$$

■

Problema 4:

Sean $a, b, c > 0$ demuestre que

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$$

Solución problema 4: Por MA-MG se tiene que $ab+bc \geq 2b\sqrt{ac}$, haciendo desigualdades de la misma forma y sumando se tiene que

$$2(ab+bc+ac) \geq 2(b\sqrt{ac} + a\sqrt{bc} + c\sqrt{ab}) \quad (1)$$

Nuevamente por MA-MG se tiene que $a^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 4a\sqrt{bc}$, haciendo desigualdades de la misma forma se tiene lo siguiente

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq 4(b\sqrt{ac} + a\sqrt{bc} + c\sqrt{ab}) \quad (2)$$

Sumando 3 veces (??) a (??) se tiene lo siguiente:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \frac{3}{10}(a^2 + b^2 + c^2) \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$$

