Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 02

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-08-24

Problema 1:

Sean a, b tales que $ab = 1$. Demuestre que $a^2 + b^2 \geq 2$.

Solución problema 1: Se recuerda que $(a - b)^2 \geq 0$, por lo que $(a^2 + b^2) - 2ab \geq 0$, como $ab = 1$ se tiene que $(a^2 + b^2) - 2 \geq 0$ por lo que usando la definición de $\geq$ se tiene que $a^2 + b^2 \geq 2$.

$\blacksquare$

Problema 2:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

1) Demuestre que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, y determine cuando se cumple la igualdad.
2) Demuestre que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
3) Concluya que $a^3 > b^3$ si y solo si $a > b$.

Solución problema 2:

1) Se nota que $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2}$, por lo que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$. Dado eso, se tiene que $a^2 + ab + b^2 = 0$ si y solo si $a^2 + b^2 = 0$ por lo que $a = b = 0$.

2) Se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

3) Con lo anterior, se nota que si $a^3 > b^3$ o $a > b$, se tiene que $a \neq b$, por lo que $a^2+ab+b^2 > 0$. Por ende

$$\begin{aligned}a^3 > b^3 &\iff a^3-b^3 > 0\\ &\iff (a-b)(a^2+ab+b^2) > 0\\ &\iff a-b > 0\cdot(a^2+ab+b^2)^{-1}\\ &\iff a-b > 0\\ &\iff a > b\end{aligned}$$

■

Problema 3:

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Pruebe que $ad + bc < ac + bd$

Solución problema 3: Notar que $0 < b - a$ y $0 < d - c$, por lo que

$$\begin{aligned}0 < (b-a)(d-c) &\iff 0 < b(d-c) - a(d-c)\\ &\iff 0 < bd - bc - ad + ac\\ &\iff ad + bc < ac + bd\end{aligned}$$

Con lo que se tiene lo pedido.

■

Problema 4:

Demuestre que si $L - \varepsilon \leq M$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $L \leq M$

Solución problema 4: Por contradicción, se asume que $L > M$, luego sea $\varepsilon = \frac{L-M}{2} > 0$, entonces

$$\begin{aligned} L - \varepsilon \leq M &\iff L - \frac{L-M}{2} \leq M \\ &\iff 2L - (L - M) \leq 2M \\ &\iff 2L - L + M \leq 2M \\ &\iff L + M \leq 2M \\ &\iff L \leq M \end{aligned}$$

Lo último es una contradicción, por lo que $L \leq M$.

$\blacksquare$

Problema 5:

Se define el mínimo entre a y b como

$$\text{mín}(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases}$$

Demuestre que $|x| = -\text{mín}(x, -x)$.

Solución problema 5: Por casos, si $x \geq 0$ se tiene que $|x| = x$, ahora como $x \geq 0$ se tiene que $-x \leq 0 \leq x$, por lo que $\text{mín}(x, -x) = -x$, más aún $-\text{mín}(x, -x) = x = |x|$. Si $x < 0$, se tiene que $|x| = -x$ y $-x > 0 > x$, por lo tanto $\text{mín}(x, -x) = x$, y $-\text{mín}(x, -x) = -x = |x|$.

$\blacksquare$

Problema 6:

Se define el máximo entre a y b como

$$\text{máx}(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$$

Demuestre que $\text{máx}(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$.

Solución problema 6: De nuevo, por casos, si $a \geq b$ se tiene que $|a-b| = a-b$, por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \\
&= \frac{a+b+a-b}{2} \\
&= \frac{2a}{2} \\
&= a \\
&= \max(a,b)
\end{aligned}$$

Si $a < b$ se tiene que $absa - b = b - a$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \\
&= \frac{a+b+b-a}{2} \\
&= \frac{2b}{2} \\
&= b \\
&= \max(a,b)
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene lo pedido.

$\blacksquare$