Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Ayudante: Nicholas Mc-Donnell
Email: namcdonnell@uc.cl

Ayudantía 06

MAT1106 — Introducción al Cálculo

Fecha: 2020-09-03

Problema 1:

Encuentre el conjunto de solución de la inecuación

$$\frac{3}{1-x} < \frac{x+6}{2-x}$$

Solución problema 1: Se nota que $x \neq 2$ y $x \neq 1$, y se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{1-x} < \frac{x+6}{2-x} &\iff 0 < \frac{x+6}{2-x} - \frac{3}{1-x} \\
&\iff 0 < \frac{(x+6)(1-x) - 3(2-x)}{(2-x)(1-x)} \\
&\iff 0 < \frac{x+6-x^2-6x-6+3x}{(2-x)(1-x)} \\
&\iff 0 < -\frac{x(x+2)}{(2-x)(1-x)} \\
&\iff 0 < -\frac{x(x+2)}{(x-2)(x-1)}
\end{aligned}$$

Por lo que viendo la siguiente tabla:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$x+2$	-	$+$	$+$	$+$	$+$
x	-	-	$+$	$+$	$+$
$x-1$	-	-	-	$+$	$+$
$x-2$	-	-	-	-	$+$
$-\frac{x(x+2)}{(x-2)(x-1)}$	-	$+$	-	$+$	-

Por lo que se tiene que $x \in (-2,0) \cup (1,2)$.

■

Problema 2:

Sea $\alpha > 0$. Encuentre todos los valores de x tales que

$$\left|x^2 - \alpha^2\right| > |x - \alpha|$$

Solución problema 2: Se nota que $x \neq \alpha$, ya que si $x = \alpha$ se tiene $0\,|x^2 - \alpha^2| > |x - \alpha| = 0$. Y si $x \neq \alpha$ se tiene que $|x - \alpha| > 0$, por lo que $|x + \alpha| > 1$. Por lo que $x > 1 - \alpha$ o $x < -1 - \alpha$ por lo que $x \in ((-\infty, -1-\alpha) \cup (1-\alpha, \infty)) \setminus \{\alpha\}$.

■

Problema 3:

(I3 2017) Sea $z > 0$ fijo, y sea A_z el conjunto de solución de la inecuación

$$\left|x^2 + xz + z^2\right| \leq zx + 2z^2.$$

Demuestre que si $0 < z_1 < z_2$, entonces $A_{z_1} \subseteq A_{z_2}$

Solución problema 3: Sabemos que $x^2 + zx + z^2 \geq 0$ por ayudantía pasada. Por lo que la inecuación es equivalente a

$$x^2 \leq z^2$$

Se sabe que el conjunto solución de esa inecuación es $[-z, z]$.

Si $0 < z_1 < z_2$, entonces $-z_1 > -z_2$. Sea $x \in A_{z_1}$, esto nos dice que $-z_1 \leq x \leq z_1$. Por lo que $-z_2 < -z_1 \leq x \leq z_1 < z_2$ nos dice que $x \in A_{z_2}$.

■

Problema 4:

Demuestre la desigualdad de Nesbitt: Si $a, b, c > 0$ se tiene que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Solución problema 4: S.p.d.g. $a \geq b \geq c$, por lo que

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$$

Usando la desigualdad demostrada la ayudantía pasada se tiene que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$$
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b}$$

Sumando ambas desigualdades se tiene

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3$$

Lo que es equivalente lo pedido.s

$\blacksquare$