

Números suma de dos cuadrados y ecuaciones diofantinas

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sanchez

2do semestre 2017

Resumen

Comenzaremos dando algunos ejemplos de ecuaciones diofantinas de la forma $x^2 + y^2 = p$, para después analizar cuales ecuaciones de la forma $x^2 + y^2 = n$ tienen solución. Después de esto, analizaremos unos pocos ejemplos de ecuaciones de las formas $x^2 - p = y^n$ y $x^2 + ny^2 = p$, con sus respectivas soluciones.

1. Números suma de cuadrados

Teorema 1.1. *Un número natural n se puede representar como una suma de dos cuadrados si y solo si todo factor primo de la forma $p = 4m + 3$ aparece con un exponente par en la factorización prima de n . Para los primos $p = 4m + 1$ la ecuación $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$ tiene dos soluciones $s \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, para $p = 2$ hay una solución, mientras que para $p = 4m + 3$ no hay soluciones. Ningun numero de la forma $n = 4m + 3$ es la suma de dos cuadrados. Todo primo de la forma $p = 4m + 1$ es la suma de dos cuadrados, en otras palabras, se puede escribir como $p = x^2 + y^2$ con $x, y \in \mathbb{N}$.*

2. Ejemplos

2.1. $x^2 - 2y^2 = 2, x^2 + 2y^2 = 2$

Definición 2.1. Norma: Función N de un anillo R a \mathbb{Z} , que cumple las siguientes propiedades:

$$a, b \in R$$

1. $N(ab) = N(a)N(b)$
2. $a \mid b \implies N(a) \mid N(b)$
3. a unidad $\implies N(a) = 1$

Norma típica de $\mathbb{Z}[\sqrt{x}]$ con $x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$:

$$a + b\sqrt{x} \in \mathbb{Z}[\sqrt{x}], N(a + b\sqrt{x}) = a^2 - xb^2$$

2.2. $x^2 - p = y^4$

$$x^2 - 17 = y^4$$

$$x^2 - 19 = y^4$$

$$x^2 - p = y^4$$