Ayudantía I

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2017

3. Determine si los siguientes son espacios vectoriales para esto de una demostración o un contraejemplo.

3. a) Si $b \in \mathbb{F}$, el conjunto $S = \left|\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\right\}$

Dem:

Digamos que $b \neq 0$, luego sea $\mathbf{x} \in S$.

Notar que $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}$, ya que $x_3 \neq x_4$, pero en el caso de $\mathbf{0}, x_3 = x_4 = 0$.

Por lo que para $b \neq 0$, S no es espacio vectorial.

Luego, si $b = 0$, por lo anterior $x_3 = x_4 = 0$ lo que implica que $\mathbf{0} \in S$

Sea $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, luego $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, 5u_4+5v_4, u_4+v_4) = (u_1+v_1, u_2+v_2, 5(u_4+v_4), u_4+v_4) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, lo que implica que la suma esta bien definida como operación y es conmutativa.

Sea $\mathbf{v} \in S$:

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, 5v_4, v_4)$

Tomemos $(-v_1, -v_2, -5v_4, -v_4) = \mathbf{u} \therefore \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Por lo que existe el inverso

Lo que implica que $(S, +)$ es grupo abeliano

Luego, sea $\mathbf{v} \in S$

$1\mathbf{v} = (1v_1, 1v_2, 1(5v_4), 1v_4) = (v_1, v_2, 5v_4, v_4) = \mathbf{v}$

Y por último, sean $a, d \in \mathbb{F}, b, c \in S$:

$a(b + c) = a(b_1 + c_1, b_2 + c_2, 5(b_4 + c_4), b_4 + c_4) = (a(b_1 + c_1), a(b_2 + c_2), a(5(b_4 + c_4)), a(b_4 + c_4)) = (ab_1 + ac_1, ab_2 + ac_2, 5(ab_4 + ac_4), ab_4 + ac_4) = ab + ac$

Similarmente: $(a + d)b = ab + db$

Esto implica que S es un espacio vectorial

3.b) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, el conjunto S de las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Dem:

Primero notar que $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ por definición de operatoria con $\mathbf{0}$, lo que implica que $\mathbf{0} \in S$.

Luego los vectores son un grupo abeliano con la suma, por lo que se hereda esta propiedad.

Por propiedad de vector $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ De nuevo los vectores cumplen la propiedad distrubitiva, por lo que esta se hereda.

Por ende S es espacio vectorial.

3.c) El conjunto S de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son diferenciables
Dem:
Primero notar que la función $f(x) = 0$ es diferenciable, y que para toda función g, $g + f = g$, además recordar que el conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) es un espacio vectorial, por lo que todas las propiedades se heredan.
Luego sea $\lambda \in \mathbb{R}, f, g \in S$

$$(\lambda f + g)' = (\lambda f)' + (g)' = \lambda (f)' + (g)'$$

f y g son diferenciables, lo que implica que $\lambda f + g$ es diferenciable, por lo que S es un subespacio vectorial y por lo mismo un espacio vectorial.

3.d) $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$
Dem:
Notar que $\mathbb{C}$ se puede ver como $\mathbb{R}^2$, donde $z = x + iy$, $\Im(z) = y, \Re(z) = x$, y $\mathbf{u} = (x, y)$
Como $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

3.e) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, el conjunto S de las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$
Dem:
Notar que $\mathbf{0} \notin S$, ya que $A\mathbf{0} = \mathbf{0} \neq \mathbf{b}$
Por lo que S no es espacio vectorial.

3.f) $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$
Dem:
Notar que $0 \in \mathbb{R}$
Luego se sabe que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano.
$1 \cdot x = x$ Por propiedad de la identidad multiplicativa en los reales.
Sean $a, b \in \mathbb{Q}, c, d \in \mathbb{R}$ además $a, b \in \mathbb{R}$, por lo que por propiedad de los reales: $a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$.
Lo que implica que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Sean U y W dos subespacios vectoriales de V. Demuestre que $U \cup W$ es un espacio vectorial de V si y solo si $U \subset W$ o $W \subset U$

Dem:
$\Longleftarrow$
Sea $U \subset W$, esto implica que $U \cup W = W$, el cual es subespacio vectorial de V, por lo que $U \cup W$ es subespacio vectorial de V. Análogamente, si $W \subset U$, $U \cup W$ es subespacio vectorial de V.

$\Longrightarrow$

Sea $\mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in W$, entonces por clausura de la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U \cup W$, lo que a su vez implica que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U \vee \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$, tomando el primer caso:

$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$, se sabe que $-\mathbf{u} \in U$ por lo que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{u}) \in U$, expresión que es equivalente a $\mathbf{v} \in U$ por asociatividad y conmutatividad, lo que implica que $W \subset U$.

El otro caso es analogo, por lo que en resumen: $U \cup W$ espacio vectorial $\iff$ $U \subset W$ o $W \subset U$.