Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019

Tarea 3

Introducción a la Geometría Algebraica — MAT 2335

Fecha de Entrega: 2019/04/26

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Problema 2.4 2

Problema 2.5 2

Problema 2.6 2

Problema 2.8 2

Problema 2.15 3

Problema 2.17 3

Problema 2.24 3

Problema 2.33 4

Problema 2.35 4

Problema 2.38 5

Problema 2.41 6

Problema 2.47 6

Problema 2.49 6

Problema 2.55 8

Notas

En esta tarea se usará la notación $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

Problema 2.4:

Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ una variedad no vacía. Muestre que los siguientes son equivalentes:

(I) V es un punto

(II) $\Gamma(V) = k$

(III) $\dim_k \Gamma(V) < \infty$

Solución problema 2.4:

■

Problema 2.5:

Sea F un polinomio irreducible en $k[x, y]$, y suponga que F es mónico en y: $F = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots$ con $n > 0$. Sea $V = V(F) \subset \mathbb{A}^2$. Muestre que el homorfismo natural de $k[x]$ a $\Gamma(V) = k[x, y]/(F)$ es inyectivo, para que $k[x]$ pueda considerarse un subanillo de $\Gamma(V)$; muestre que los residuos $\overline{1}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}^{n-1}$ generan $\Gamma(V)$ sobre $k[x]$ como un modulo.

Solución problema 2.5:

■

Problema 2.6:

Sea $\varphi : V \to W, \psi : W \to Z$. Demuestre que $\widetilde{\psi \circ \varphi} = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}$. Muestre que la composición de mapeos polinomiales es un mapeo polinomial.

Solución problema 2.6:

■

Problema 2.8:

(a) Muestre que $\{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3 : t \in k\}$ es una variedad.

(b) Muestre que $V(xz - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ es una variedad. (*Hint:*$y^3 - x^4, z^3 - x^5, z^4 - y^5 \in I(V)$. Encuentre un mapeo polinomial desde $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ a V.)

Solución problema 2.8:

■

Problema 2.15:

Sean $P = (a_1, \ldots, a_n), Q = (b_1, \ldots, b_n)$ puntos distintos de $\mathbb{A}^n$. La *recta* a través de P y Q es definida como $\{(a_1 + t(b_1 - a_1), \ldots, a_n + t(b_n - a_n)) : t \in k\}$

(a) Muestre que si L es una recta a través de P y Q, y T es un cambio de coordenadas afín, entonces $T(L)$ es la recta a través de $T(P)$ y $T(Q)$.

(b) Muestre que una recta es una subvariedad lineal de dimensión 1, y que una subvariedad lineal de dimensión 1 es una recta a través de dos puntos.

(c) Muestre que, en $\mathbb{A}^2$, una recta es lo mismo que un hiperplano.

(d) Sean $P, P' \in \mathbb{A}^2, L_1, L_2$ dos rectas distintas a través de P, L'_1, L'_2 dos rectas distintas a través de P'. Muestre que existe un cambio de coordenadas afín T de $\mathbb{A}^2$ tal que $T(P) = P'$ y $T(L_i) = L'_i, i = 1, 2$.

Solución problema 2.15:

■

Problema 2.17:

Sea $V = V(y^2 - x^2(x+1)) \subset \mathbb{A}^2$, y $\overline{x}, \overline{y}$ los residuos de x, y en $\Gamma(V)$; sea $z = \overline{x}/\overline{y} \in k(V)$. Encuentre los conjuntos de polos de z y de z^2.

Solución problema 2.17:

■

Problema 2.24:

Sea $V = \mathbb{A}^1, \Gamma(V) = k[x], K = k(V) = k(x)$.

(a) Para cada $a \in k = V$, muestre que $\mathcal{O}_a(V)$ es un DVR con parámetro de uniformización $t = x - a$.

(b) Muestre que $\mathcal{O}_\infty = \{F/G \in k(x) : \deg(G) \geq \deg(F)\}$ también es un DVR, con parámetro de uniformización $t = 1/x$.

Solución problema 2.24:

■

Problema 2.33:

Separe $y^3 - 2xy^2 + 2x^2y + x^3$ en factores lineales en $\mathbb{C}[x, y]$.

Solución problema 2.33: Se nota que $p(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 2x^2y + x^3$ es un polinomio homogéneo, por ende factorizarlo en $\mathbb{C}[x, y]$ es equivalente a factorizar $p(x, 1)$ en $\mathbb{C}[y]$. Como $\mathbb{C}$ es cerrado, y $p(x, 1)$ es de grado 3, tiene 3 raíces χ_1, χ_2, χ_3 y $p(x, 1) = (x-\chi_1)(x-\chi_2)(x-\chi_3)$. Con esto se tiene que $p(x, y) = (x - y\chi_1)(x - y\chi_2)(x - y\chi_3)$, consiguiendo lo pedido.

■

Problema 2.35:

(a) Muestre que $d + 1$ monomios de grado d en $R[x, y]$, y $1 + 2 + \cdots + (d + 1) = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ monomios de grado d en $R[x, y, z]$.

(b) Sea $V(d, n) = \{$polinomios homógeneos de grado d en $k[x_1, \ldots, x_n]\}$, k un cuerpo. Muestre $V(d, n)$ es un espacio vectorial, y que los monomios de grado d forman una base. Entonces $\dim V(d, 1) = 1$; $\dim V(d, 2) = d + 1$; $\dim V(d, 3) = (d + 1)(d + 2)/2$.

(c) Sea $L_1, L_2, \ldots$ y $M_1, M_2, \ldots$ secuencias de polinomios lineales homógeneos no cero en $k[x, y]$, y asume que ningún $L_i = \lambda M_j, \lambda \in k$. Sea $A_{ij} = L_1L_2 \ldots L_iM_1M_2 \ldots M_j, i, j \geq 0 (A_{00} = 1)$. Muestre que $\{A_{ij} : i + j = d\}$ es base para $V(d, 2)$.

Solución problema 2.35:

(a) Se nota que un monomio en $R[x, y]$ es de la forma x^iy^j, por lo que los monomios de grado d cumplen que $i + j = d$, claramente i fija a j, e i tiene $d + 1$ posibles valores, por lo que hay $d + 1$ monomios de grado d. Similarmente a lo anterior un monomio en $R[x, y, z]$ es de la forma $x^iy^jz^k$, donde los monomios de grado d cumplen $i + j + k = d$, con i, j fijando k, también se nota que dado un i fijo j tiene $d + 1 - i$ posibles valores, por lo que la cantidad de monomios sería $sum_{i=0}^{d+1}(d+1-i) = \sum_{j=0}^{d+1} j = (d+1)(d+2)/2$.

(b) Sea $p \in V(d, n)$, como es homogéneo $p(\overline{x}, 1) \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ y tiene grado d, se sabe que los polinomios de grado a lo más d son un espacio vectorial sobre k y cada $p \in V(d, n)$ tiene un elemento correspondiente en este espacio vectorial, por lo que solo es necesario demostrar clausura. Sean $p, q \in V(d, n)$ luego $p(\overline{x}, 1) + q(\overline{x}, 1) \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ es un polinomio de grado d ya que $deg(p + q) = max(\deg(p), \deg(q))$ y $\deg p = \deg q = d$ con lo que tenemos que $V(d, n)$ es un e.v. sobre k. Claramente los monomios son l.i., y cada polinomio homogéneo de grado d se escribe en monomios de grado d. Con lo que tenemos lo pedido.

(c) Se nota que solo es necesario demostrar que los A_{ij} son l.i., ya que claramente son $d+1$ y en (b) se vio que la dimensión de $V(d,2)$ es $d+1$. Se enumeran los A_{ij} que cumplen $i+j=d$ de la siguiente forma $A_{i(d-i)}$ donde $i \in \{0,\ldots,d\}$. Por inducción en i, se toma A_{0d} y $A_{1(d-1)}$, se asume que son l.d., entonces existe λ tal que:

$$A_{0d} = \lambda A_{1(d-1)}$$
$$M_1 \ldots M_d = \lambda L_1 M_1 \ldots M_{d-1}$$

Se divide por $M_1 \ldots M_{d-1}$, por lo que $M_1 = \lambda L_1$, lo que es una contradicción. Sean $i=k$, se asume que $A_{k(d-k)}$ se puede escribir como una combinación lineal de los $A_{i(d-i)}$ con $0 \leq i < k$:

$$A_{k(d-k)} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A_{j(d-j)}$$
$$L_1 \ldots L_k M_1 \ldots M_{d-k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j L_1 \ldots L_j M_1 \ldots M_{d-j}$$

Se nota que ambos lados son divisibles por $M_1 \ldots M_{d-k}$[1], y se divide por esto. Se ve que los $A_{i(d-i)}$ con $i \in \{0,\ldots,d\}$ son divisibles por M_{d-k+1}, con lo que lo que se tenía antes se puede escribir de la siguiente forma:

$$L_1 \ldots L_k = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j L_1 \ldots L_j M_{d-k+1} \ldots M_{d-j}$$
$$L_1 \ldots L_k = M_{d-k+1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} L_1 \ldots L_j M_{d-k+2} \ldots M_{d-j} \right)$$

Por lo que $M_{d-k+1} \mid L_1 \ldots L_k$, se recuerda que M_{d-k+1} es lineal por lo que es irreducible, luego $M_{d-k+1} \mid L_i$ con $i \in \{1,...,k\}$, pero es no posible por enunciado, por lo que se tiene una contradicción. Con esto se nota que los $A_{i(d-i)}$ son l.i., con lo que se tiene lo pedido.

■

Problema 2.38:

Muestre que si $k \subset R_i$, y cada R_i es finito-dimensional sobre k; entonces $\dim(\prod R_i) = \sum \dim R_i$

[1] $d-j > d-k$

Solución problema 2.38: Se nota que ya que cada R_i es finito-dimensional sobre k, existe una base $(a_{i,1},\ldots,a_{i,n_i})$. Ahora, sea $\overline{x}\in\prod R_i$, entonces cada uno de sus componentes x_i se puede escribir en la base correspondiente. Sean R, R' finito-dimensionales sobre k, luego sea $(x,0),(0,x')\in R\times R'$, claramente son l.i., por lo que un elemento de $R\times R'$ se escribe en base a un elemento en cada espacio vectorial, y cada uno de esos elementos se escribe con su base correspondiente (las cuales son l.i. ya que los mismos elementos son l.i.), por lo que la base de $R\times R'$ es la unión de las bases de cada uno, con lo que $\dim R\times R' = \dim R + \dim R'$. Usando esto inductivamente sobre la cantidad de R_i se tiene lo pedido.

■

Problema 2.41:

Sean I, J ideales en un anillo R. Suponga que I es finitamente generado y $I\subset \operatorname{rad}(J)$. Muestre que $I^n\subset J$ para algún n.

Solución problema 2.41: Sea $I=(a_1,\ldots,a_k)$, luego los $a_i \implies a_i\in\operatorname{rad} J$, por lo que existe un n_i tal que $a_i^{n_i}\in J$, sea $n=\max\limits_i\{n_i\}$, luego $a_i^n\in J$ con $i=1,\ldots,k$. Sea $a\in I^{kn}$, luego a se escribe en base a monomios de la forma $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_k^{\alpha_k}$ donde $kn=\sum\alpha_i$, se nota que a_i^n divide a cada monomio para algún i (si no $\alpha_i<n$ para todos los i, con lo que su suma sería menor a kn), por lo que cada uno de los monomios pertenece a J, y como generan I^{kn}, se tiene que $I^{kn}\subset J$.

■

Problema 2.47:

Suponga que R es un anillo que contiene a k, y R es finito-dimensional sobre k. Muestre que R es isomorfo al producto directo de anillos locales.

Solución problema 2.47:

■

Problema 2.49:

(a) Sea N un submódulo de M, $\pi : M\to M/N$ el homorfismo natural. Suponga que $\varphi : M\to M'$ es un homorfismo de R-módulos, y $\varphi(N)=0$. Muestre que hay un homorfismo único $\overline{\varphi}: M/N\to M'$ such tal que $\overline{\varphi}\circ\pi=\varphi$.

(b) Si N y P son submódulos de un módulo M, con $P\subset N$, entonces hay homorfismos naturales de M/P a M/N y de N/P a M/P. Muestre que la secuencia resultante

$$0\to N/P\to M/P\to M/N\to 0$$

es exacta ("El segundo Teorema de Isomorfismo de Noether").

(c) Sean $U \subset W \subset V$ espacios vectoriales, con V/U finito-dimensional. Entonces $\dim V/U = \dim V/W + \dim W/U$.

(d) Si $J \subset I$ son ideales en un anillo R, hay una secuencia exacta de R-módulos:

$$0 \to I/J \to R/J \to R/I \to 0$$

(e) Si $\mathcal{O}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$, hay una secuencia exacta natural de $\mathcal{O}$-módulos

$$0 \to \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \to \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1} \to \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1} \to 0$$

Solución problema 2.49: Nota: Para efectos de esta pregunta $\overline{a}$ es el residuo de a.

(a) Sea $\overline{\varphi} : M/N \to M'$ tal que $\overline{x} \mapsto \varphi(x)$, hay que demostrar que es morfismo, o sea que esta bien definido y que $\overline{\varphi}(\overline{\lambda a + b}) = \lambda \overline{\varphi}(\overline{a}) + \overline{\varphi}(\overline{b})$. Sean $a, b \in M$ tal que $\overline{a} = \overline{b}$, entonces se nota que $a - b \in N$, por lo que $\varphi(a - b) = 0$, o sea $\varphi(a) = \varphi(b)$, con lo que tenemos que está bien definida. Ahora se ve lo segundo:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(\overline{\lambda a + b}) &= \varphi(\lambda a + b) \\ &= \lambda \varphi(a) + \varphi(b) \\ &= \lambda \overline{\varphi}(\overline{a}) + \overline{\varphi}(\overline{b}) \end{aligned}$$

Por lo que $\overline{\varphi}$ esta bien definida. Falta demostrar que $\overline{\varphi}$ es único, sean $\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}$ tal que $\varphi = \overline{\varphi_1} \circ \pi = \overline{\varphi_2} \circ \pi$. Se nota que π es sobreyectiva, entonces dado $y \in M/N$ existe $x \in M$ tal que $\pi(x) = y$. Luego $\overline{\varphi_1} \circ \pi(x) = \overline{\varphi_2} \circ \pi(x)$, específicamente $\overline{\varphi_1}(y) = \overline{\varphi_2}(y)$, ya que y es arbitrario, esto se cumple para todo y, con lo que $\overline{\varphi_1} = \overline{\varphi_2}$. Con lo que se tiene lo pedido.

(b) Se nota que lo que hay que demostrar es que $\ker \varphi_1 = \{0\}, \operatorname{Im} \varphi_1 = \ker \varphi_2, \operatorname{Im} \varphi_2 = M/N$ donde φ_1 es el morfismo natural de N/P a M/P y φ_2 es el morfismo natural de M/P a M/N. En orden, se recuerda que $N \subset M$, por lo que $N/P \subset M/P$ por lo que φ_1 es la identidad restringida a N/P, con lo que $\ker \varphi_1 = \{0\}$. Para la segunda igual basta notar que $\operatorname{Im} \varphi_1 = N/P$, ya que si $\overline{a} \in N/P$ entonces $a \in N$, por lo que $\varphi_2(\overline{a}) = 0$, con lo que $\ker \varphi_2 \supseteq N/P$, ahora si $\overline{a} = 0$ en $M/N \implies a \in N$, por lo que $\overline{a} \in N/P \implies \ker \varphi_2 = \operatorname{Im} \varphi_1$. Para la última, claramente $\operatorname{Im} \varphi_2 \subseteq M/N$, sea $\overline{a} \in M/N \wedge \overline{a} \neq 0$ entonces $a \notin N \implies a \notin P$, por lo que $\overline{a} \neq 0$ en M/P y claramente es pre-imagen. Con lo que tenemos todo lo pedido.

(c) Se comienza notando que ya que V/U finito-dimensional $W/U, V/W$ son finito-dimensionales, luego por (b) se tiene que la siguiente secuencia es exacta:

$$0 \to W/U \to V/U \to V/W \to 0$$

Luego por proposición vista en clase se tiene lo pedido.

(d) Se recuerda que dado un ideal I de un anillo R, R se puede ver como un I-módulo, similarmente para un ideal $J \subset I$, por lo que por (b) existe la secuencia exacta, donde I, R son J-módulos.

(e) Se puede notar que es suficiente mostar que $\forall n : \mathfrak{m}^{n+1} \subset \mathfrak{m}^n$. Luego por inducción, el caso base es trivial ya que $\mathfrak{m}$ es maximal. Ahora, sea $a \in \mathfrak{m}^{n+1}$, entonces $a = a_1 a_2 \dots a_{n+1}$ donde $a_i \in \mathfrak{m}$, luego $a_{n+1} \in \mathcal{O}$ y $a_1 a_2 \dots a_n \in \mathfrak{m}^n$, por lo que por propiedad de ideales $a \in \mathfrak{m}^n$. Con esto se usa (d) y se tiene lo pedido.

■

Problema 2.55:

Sea $F = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio mónico en $R[x]$. Muestre que $R[x]/(F)$ es un R-módulo libre con base $\overline{1}, \overline{x}, \dots, \overline{x}^{n-1}$, donde $\overline{x}$ es el residuo de x.

Solución problema 2.55:

■