Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Tarea 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - MAT2500

Fecha de Entrega: 2019-08-30

Nicholas Mc-Donnell

Agradecimientos a las siguientes personas:
Maximiliano Norbu, Agustín Oyarce, Paulina Vega, Darwin Sanhueza,
Francisco Monardes, Luciano Sciaraffia

Índice

Problema 1:

Sean $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_{n-1}(t)$ soluciones del sistema homogéneo $\dot{x} = A(t)x$, y sea x una solución del sistema no homogéneo $\dot{x} = A(t)x + g(t)$, donde $A(t)$ y $g(t)$ son continuas sobre el intervalo I. Pruebe que $Z = \det(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, x)$ satisface la *Formula no homogénea de Abel*

$$\dot{Z} = \operatorname{tr}(A(t))Z + \det(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, g)$$

Solución problema 1: Dado la definición de Z, y la multilinealidad del determinante se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{Z} &= \det\left(\dot{\phi}_1, \ldots, \phi_{n-1}, x\right) + \cdots + \det(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \dot{x}) \\
&= \det(A(t)\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, x) + \cdots + \det(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, A(t)x + g(t)) \\
&= \det(A(t)\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, x) + \cdots + \det(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, A(t)x) + \det(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, g(t))
\end{aligned}$$

Por propiedades del determinante se tiene la siguiente identidad para cualquier conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$:

$$\det(A(t)v_1, \ldots, v_n) + \cdots + \det(v_1, \ldots, A(t)v_n) = c \cdot \det(v_1, \ldots, v_n)\ [1]$$

Ahora, tomando la base canónica, claramente se ve que $c = \operatorname{tr}(A(t))$, ya que $A(t)e_i = A_{i,i}(t)$. Con esto se llega a lo siguiente:

$$\dot{Z} = \operatorname{tr}(A(t))z + \det(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, g)$$

■

Problema 2:

Sea A la matriz constante asociada a la EDO homogénea de orden n:

$$x^{(n)} + q_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + q_1\dot{x} + q_0x = 0$$

(tal que el sistema equivalente de primer orden es $\dot{y} = Ay$, donde $y = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})^T)$.

(a) Demuestre que el polinomio característico de A es

$$\chi(z) := \det(zI - A) = z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \cdots + q_1z + q_0$$

[1] El c no depende del conjunto de vectores

(b) Pruebe que la multiplicidad geométrica de cada valor propio de A es 1, i.e. cada valor propio de A es asociado con sólo un bloque de Jordan.

(c) Demuestre que la ecuación, o equivalentemente, el sistema $\dot{y} = Ay$ es estable si y sólo si todos los valores propios tienen parte real no positiva, y todos los valores propios imaginarios son simples.

Solución problema 2:

(a) Usando la fórmula de Laplace se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\det(zI - A) &= \begin{vmatrix} z & -1 & \dots & 0 \\ 0 & z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0 & q_1 & \dots & z + q_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= qq_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} + z^{n-1}(z + q_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-2} q_k(-1)^{k+n} \det M_{n,k} \\ &= q_0 + z^n + z^{n-1}q_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} q_k(-1)^{k+n} \det M_{n,k}\end{aligned}$$

Se nota que $\det M_{n,k} = z^k(-1)^{n-k}$, por lo que se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\det(zI - A) &= q_0 + z^n + z^{n-1}q_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} q_k(-1)^{k+n}(-1)^{n-k}z^k \\ &= q_0 + z^n + z^{n-1}q_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} q_k z^k(-1)^{2n} \\ &= z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \dots + q_1 z + q_0\end{aligned}$$

■

Problema 3:

Considere el sistema lineal homogéneo $\dot{x} = A_b x$, donde $A_b = \begin{pmatrix} b & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Encuentre la solución general del sistema cuando $b = -4$ y *dibuje* el retrato de fase.

(b) Determine los valores de b para los cuales el origen es, respectivamente, una fuente, una fuente espiral, un sumidero, un sumidero espiral, una silla y un centro.

Solución problema 3:

(a) Se calcula el polinomio característico $p_{A_{-4}}(\lambda) = (\lambda+1)^2$, con lo que se tiene que la matriz de Jordan es la siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como A_{-4} es una matriz constante se tiene que la solución general del sistema es la siguiente:

$$x(t) = S\exp(tJ)S^{-1}x_0$$

Donde x_0 es la condición inicial y donde S es la matriz tal que $A_{-4} = SJS^{-1}$. Luego por lo que se vio en el Teschl se tiene que $\exp(J) = \begin{pmatrix} 1/e & 1/e \\ 0 & 1/e \end{pmatrix}$, y calculando $S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que la solución general es de la siguiente manera:

$$x(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & \frac{3}{e} \\ -\frac{3}{e} & \frac{4}{e} \end{pmatrix}$$

(b) Se ve el polinomio característico $p_{A_b}(t) = \lambda^2 - \lambda(b+2) + 9 + 2b$, se nota que solo si $b = -2$ se tiene que los valores propios son completamente imaginarios, por lo que el origen es un centro. Para los otros casos se verá cuando los valores propios son completamente reales y cuando son complejos, para esto se verá el signo del discriminante del polinomio característico:

$$\Delta = (b+2)^2 - 4\cdot(9+2b) = (b+4)(b-8)$$

Por lo que para $b \in (-4, 8)$ se tiene que $\Delta < 0$, y en otro caso $\Delta \geq 0$, además se quiere ver cuando la parte real es positiva o negativa, lo cual tiene dos casos, si $\sqrt{\Delta}$ es imaginario o si es real. Comenzando por el primer caso, se nota que se depende del signo de $b+2$. En el segundo caso, se nota que si $b \geq 8$ ambos valores propios son siempre positivos[2]

■

Problema 4:

Encuentre la solución general de

[2] $b + 2 > \sqrt{\Delta}$

(a) $\dot{x} = Ax$, donde $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & -7 \end{pmatrix}$;

(b) $\ddot{x} + x = 2\sin(2t)$

(c) $\ddot{x} - 2\dot{x} = -x + t - 1 + 2\exp(t)$

(d) $t\ddot{x} - 2(t+1)\dot{x} + (t+2)x = 0$, $\phi_1(t) = \exp(t)$

Solución problema 4:

(a) Se sabe que para matrices constantes la solución general de este sistema es de la forma:

$$x = \exp(tA)x_0$$

Para calcular esta solución se ve el polinomio característico $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$ y se calcula la forma de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además se calcula S tal que $A = SJS^{-1}$:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Juntando todo se tiene que la solución general es de la siguiente forma:

$$x = \exp(t) \begin{pmatrix} \frac{-1+2e^4}{e^3} & \frac{1+11e^4}{4e^3} & \frac{-1+e^4}{e^3} \\ 0 & e & 0 \\ -\frac{2\left(-1+e^4\right)}{e^3} & \frac{-1-5e^4}{2e^3} & \frac{2-e^4}{e^3} \end{pmatrix} x_0$$

(b) Se nota que $-\frac{2}{3}\sin(2t)$ es solución particular. Además se ve que la matriz correspondiente al sistema homogéneo tiene polinomio característico $\lambda^2 + 1$, junto con que la matriz es de 2×2 se tiene que la solución general es de la siguiente forma:

$$x = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) - \frac{2}{3}\sin(2t)$$

(c) Se reescribe la EDO, $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t - 1 + 2\exp(t)$,

(d) Ya que se tiene una solución, ϕ_1, se elige la siguiente función $\phi_2 = v \cdot \phi_1$ para una posible solución:

$$\begin{aligned} t(\ddot{v}\phi_1 + 2\dot{v}\dot{\phi}_1 + v\ddot{\phi}_1) - 2(t+1)(\dot{v}\phi_1 + v\dot{\phi}_1) + (t+2)(v\phi_1) &= t(\ddot{v}\phi_1 + 2\dot{v}\dot{\phi}_1) - 2(t+1)\dot{v}\phi_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto nos da una nueva EDO sobre de orden 1 sobre $\dot{v}$, pero es una EDO separable, por lo que su solución es la siguiente:

$$\dot{v} = \frac{1}{t^2}$$

Por lo que $v = -\frac{1}{t}$, con lo que se ve que $\phi_2 = -\frac{1}{t}\exp(t)$ es solución, y la solución general a la EDO es de la forma $x = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.

■

Problema 5:

Considere el sistema lineal homogéneo $\dot{x} = A(t)x$, para $t > 0$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3/t & -1 \\ 2/t^2 & -1/t \end{pmatrix}$$

(a) Verifique que

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

resuelve el sistema para $t > 0$.

(b) Sea $x_2(t)$ otra solución, tal que el Wronskiano $W(t) := \det(x_1, x_2)$ satisface $W(1) = 1$. Encuentre $W(t)$.

(c) Use el de conocimiento de $W(t)$ para determinar una posible solución x_2.

(d) Resuelva el problema de valor inicial

$$\dot{x} = A(t)x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}, \quad t > 0 \quad \text{con} \quad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución problema 5:

(a) Se ve la siguiente igualdad:

$$A(t)x_1 = \begin{pmatrix} 3/t & -1 \\ 2/t^2 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t - t \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = \dot{x_1}$$

(b) Se sabe que $W(t) = W(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(t))\, \mathrm{d}t)$, se calcula la traza $\operatorname{tr}(A(t)) = \frac{2}{t}$ y se toma $t_0 = 1$. Con lo anterior se llega a que $w(t) = t^2$

(c) Considerando el siguiente cambio de variable:

$$y(t) = M^{-1}(t)x(t)$$

Donde

$$M(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Se ve el sistema después del cambio:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= M^{-1}\left(AM - \dot{M}\right) y \\ &= M^{-1}A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1/t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \end{aligned}$$

Dado esto se ve que $\dot{y_1} = -1/t^2 y_2$ y $\dot{y_2} = 0$, por lo que $y_2 = c$, por ende $y_1 = \frac{c}{t}$. Con esto se tiene lo siguiente:

$$x = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c}{t} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tc \\ 2c \end{pmatrix}$$

Juntando esto con la otra solución, y con el Wronskiano, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} w(t) &= \begin{vmatrix} t^2 & tc \\ t & 2c \end{vmatrix} \\ &= t^2 c \\ &= t^2 \quad \text{Por 5b} \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que $c = 1$, con eso se tiene la otra solución $x_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$

■

Problema 6:

(a) Dado el sistema $\dot{x} = A(t)x$, donde $A(t)$ es continua y periódica con periodo T. Demuestre que la transformación $y(t) = P(t, t_0)^{-1}x(t)$ traduce el sistema a uno con coeficientes constantes:

$$\dot{y} = Q(t_0)y$$

Donde $\Pi(t, t_0) = P(t, t_0)\exp((t - t_0)Q(t_0))$,

(b) Considere la EDO no homogénea

$$\dot{x} = A(t)x + g(t)$$

donde $A(t)$ y $g(t)$ son periódicas de periodo T. Muestre que esta EDO tiene una solución periódica única de periodo T si y solo si 1 no es un valor propio de la matriz de monodronía $M(t_0)$.

Solución problema 6:

■

Problema 7:

Considere el sistema homogéneo $\dot{x} = A(t)x$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

y a, b, c, d son funciones reales continuas con periodo 1. Suponga que $a(t) > 0$ y $d(t) > 0$. Demuestre que para todo entero $k > 2$ el sistema no puede tener una solución periódica $x(t)$ con periodo mínimo igual a k.

Solución problema 7: Usando el cambio de coordenadas del problema 6(a) se nota que el periodo de una solución depende del periodo de $P(t, t_0)$, pero por el corolario 3.16 y por el teorema de Floquet, se tiene que el periodo de $P(t, t_0)$ es el mismo o el doble que el de $A(t)$, por lo que el sistema no puede tener una solución periódica con periodo mayor a 2.

■

Problema 8:

Demuestre que la ecuación lineal

$$\ddot{x} + (1 + \exp(-t))x = 0$$

es estable, es decir, que todas sus soluciones permanecen acotadas para $t \geq 0$

Solución problema 8: Se nota que la EDO se puede escribir de esta forma $(\ddot{x} + x) + \exp(-t)x = 0$, más específicamente denotando $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene lo siguiente:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \exp(-t) & 0 \end{pmatrix} x$$

Tomando $A(t)$ como la primera matrix y $B(t)$ como la segunda, se nota que $\|B(t)\| = \exp(-t)$ y que los valores propios de $A(t)$ son $\pm i$, como $A(t) \in M_{2\times 2}$ todas las multiplicidades de los valores propios son iguales, específicamente son 1. Notando que $\int_0^\infty \|B(t)\|\, \mathrm{d}t = 1 < \infty$, por el corolario 3.24 se tiene que toda solución del sistema es estable, por lo que se tiene lo pedido.

$\blacksquare$