Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Primer Semestre de 2019

Tarea 3

Fundamentos de la Matemática — MAT 2405

Fecha de Entrega: 2019/06/05

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Maximiliano Norbu

Índice

Problema 1:

Dado una relación antisimétrica $R \neq \emptyset$, muestre que $R \cap R^{-1}$ es una función.

Solución problema 1:

Se puede asumir que $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$, si no, es función por vacuidad. Sea $\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in R \cap R^{-1}$, entonces $\langle y, x \rangle, \langle z, x \rangle \in R \cap R^{-1}$, por esto, también $\langle y, x \rangle, \langle z, x \rangle \in R$ como R antisimétrica, $x = y, x = z$, por lo que $y = z$. En conclusión, o bien $R \cap R^{-1}$ una relación vacía o bien $R \cap R^{-1}$ la relación identidad, en ambos casos, $R \cap R^{-1}$ es función.

■

Problema 2:

Sea A un conjunto, y sea $F = \{\langle x, \langle x, x \rangle \rangle : x \in A\}$, muestre que F es función biyectiva entre A y $I_A = \{\langle y, y \rangle : y \in A\}$.

Solución problema 2:

Claramente F es función, se recuerdan las definiciones de inyectividad y de sobreyectividad:

$$\forall x \forall y \forall z \forall w \left(\left(\left(\langle x, y \rangle \in F \right) \wedge \left(\langle z, w \rangle \in F \right) \right) \implies \left((x = z) \iff (z = w) \right) \right)$$

$$\forall y \left((y \in I_A) \implies \left(\exists x \left(\langle x, y \rangle \in F \right) \right) \right)$$

Para la primera, si $\langle x, y \rangle$ o $\langle z, w \rangle$, no pertenecen a F, no hay problema, ya que la función no está definida en esos casos, entonces no hay problema. Si ambas pertenecen a F

■

Problema 3:

Muestre que dado un conjunto A, un elemento $a \in A$ y una función

$$f : A \times \omega \to A,$$

entonces existe una única función $h : \omega \to A$ tal que $h(0) = a$ y que cumple $h(n^+) = f(h(n), n)$.

Solución problema 3:

■

Problema Bonus:

Sea $\varphi(x)$ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con única variable libre x. Suponga que $\emptyset$ verifica $\varphi(x)$ y que para cada $a \in \omega$ si a verifica $\varphi(x)$, entonces a^+ también verifica $\varphi(x)$. Demuestre que todo $b \in \omega$ verifica $\varphi(x)$.

Solución problema Bonus:

Se nota que solo es necesario demostrar que el siguiente conjunto es inductivo:

$$A = \{a \in \omega : \varphi(a)\}$$

Se nota que $\emptyset \in A$, ya que $\emptyset \in \omega$ y $\emptyset$ verifica $\varphi(x)$. Luego, se sabe que $\forall a\,(a \in A \implies a^+ \in A)$, ya que si $a \in A$, se tiene que a verifica $\varphi(x)$, por lo que a^+ también verifica $\varphi(x)$, pero entonces $a^+ \in A$. Con esto se tiene que A es un conjunto inductivo, por lo que $\omega \subseteq A$, y por definición de A se tiene $A \subseteq \omega$, entonces $A = \omega$. Con lo que todo $b \in \omega$ verifica $\varphi(x)$.

$\blacksquare$