Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Examen

Geometría Diferencial - MAT2305

Fecha de Entrega: 2020-07-9

Nicholas Mc-Donnell

Solución problema 1:

(a) Se denota $\mathbf{x}(u,v) = \alpha(u) + v\hat{b}(u)$, se nota que como α cumple que $\kappa > 0$ y es una curva entonces α es $\mathcal{C}^\infty$, al igual que $\hat{b}$, por lo que $\mathbf{x}$ es $\mathcal{C}^\infty$. Más aún es localmente invertible en cada punto ya que $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$[1], de otra forma las columnas del Jacobiano son l.i. Con todo lo anterior, se tiene que la superficie es regular, ya que el último punto implica que d$\mathbf{x}$ es inyectiva y que $\mathbf{x}$ localmente tiene inversa continua.

(b) Se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= \alpha' + v\hat{b}' \\
\mathbf{x}_v &= \hat{b} \\
\mathbf{x}_{uu} &= \alpha'' + v\hat{b}'' \\
\mathbf{x}_{uv} &= \hat{b}' \\
\mathbf{x}_{vv} &= 0
\end{aligned}$$

Con lo anterior se calculan las formas fundamentales:

$$\begin{aligned}
E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \\
&= \left\langle \alpha' + v\hat{b}', \alpha' + v\hat{b}' \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha', \alpha' + v\hat{b}' \right\rangle + \left\langle v\hat{b}', \alpha' + v\hat{b}' \right\rangle \\
&= \langle \alpha', \alpha' \rangle + \left\langle \alpha', v\hat{b}' \right\rangle + \left\langle v\hat{b}', \alpha' \right\rangle + \left\langle v\hat{b}', v\hat{b}' \right\rangle \\
&= \langle \alpha', \alpha' \rangle + 2\left\langle \alpha', v\hat{b}' \right\rangle + \left\langle v\hat{b}', v\hat{b}' \right\rangle \qquad /\hat{b}' \parallel \hat{n} \text{ y } \hat{t} \perp \hat{n} \\
&= \|\alpha'\|^2 + v^2 \left\|\hat{b}'\right\|^2 \\
&= \left\|\hat{t}\right\|^2 + v^2 \|-\tau\hat{n}\|^2 \\
&= 1 + v^2\tau^2
\end{aligned}$$

[1] El cálculo aparece en la siguiente parte de la respuesta.

$$
\begin{aligned}
F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\
&= \left\langle \alpha' + v\hat{b}', \hat{b} \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha', \hat{b} \right\rangle + \left\langle v\hat{b}', \hat{b} \right\rangle \qquad /\hat{b}' \parallel \hat{n}, \hat{t} \perp \hat{n} \text{ y } \hat{b} \perp \hat{n} \\
&= 0 \\
G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \\
&= \left\langle \hat{b}, \hat{b} \right\rangle \\
&= \left\| \hat{b} \right\|^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ahora se calcula $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (\alpha' + v\hat{b}') \wedge \hat{b} \\
&= \alpha' \wedge \hat{b} + v\hat{b}' \wedge \hat{b} \\
&= \hat{t} \wedge \hat{b} + v(-\tau\hat{n}) \wedge \hat{b} \\
&= -\hat{n} - v\tau\hat{t}
\end{aligned}
$$

Por lo que $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{1 + v^2\tau^2}$, lo cual se denotará λ para facilitar los cálculos.

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} \\
&= -\frac{1}{\lambda} \left(\hat{n} + v\tau\hat{t} \right)
\end{aligned}
$$

Ahora se calculan los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle \\
&= \left\langle -\frac{1}{\lambda}\left(\hat{n} + v\tau\hat{t}\right), \alpha'' + v\hat{b}'' \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{1}{\lambda}\left(\hat{n} + v\tau\hat{t}\right), \hat{t}' + v\left(-\tau\hat{n}\right)' \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{1}{\lambda}\left(\hat{n} + v\tau\hat{t}\right), k\hat{n} - v\tau\left(-k\hat{t} - \tau\hat{b}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{1}{\lambda}\left(\hat{n} + v\tau\hat{t}\right), k\hat{n} + kv\tau\hat{t} + v\tau^2\hat{b} \right\rangle \\
&= -\frac{1}{\lambda}\left(\left\langle \hat{n}, k\hat{n} + kv\tau\hat{t} + v\tau^2\hat{b} \right\rangle + \left\langle v\tau\hat{t}, k\hat{n} + kv\tau\hat{t} + v\tau^2\hat{b} \right\rangle\right) \\
&= -\frac{1}{\lambda}\left(k + kv^2\tau^2\right) \\
&= -\frac{k}{\lambda}\left(1 + v^2\tau^2\right) \\
&= -\frac{k}{\lambda} \cdot \lambda^2 \\
&= -k\lambda \\
f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle \\
&= \left\langle -\frac{1}{\lambda}\left(\hat{n} + v\tau\hat{t}\right), \hat{b}' \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{1}{\lambda}\left(\hat{n} + v\tau\hat{t}\right), -\tau\hat{n} \right\rangle \\
&= \frac{\tau}{\lambda} \\
g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle \\
&= \langle N, 0 \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Con lo que se tienen todos los coeficientes de la primera y de la segunda forma fundamental.

(c) Usando los coeficientes de las formas fundamentales se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-f^2}{EG} \\ &= -\frac{\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2}{\lambda^2} \\ &= -\frac{\tau^2}{\lambda^4} \end{aligned}$$

Ahora por el teorema de Minding se tiene que dos superficies son localmente isométricas ssi su curvatura gaussiana es igual. Ahora se nota que $K = 0$ ssi $\tau = 0$[2], y eso quiere decir que S es localmente isométrica al plano ssi α es una curva planar.

■

Solución problema 2:

(a) Para calcular τ_g primero se escribirá $\hat{t}$ y $\hat{h}$ en la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$[3], sea φ el ángulo entre $\hat{t}$ y e_1, entonces se tiene que $\hat{t} = e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi$ y como $\hat{t} \perp \hat{h}$ se tiene que $\hat{h} = e_1 \sin\varphi - e_2 \cos\varphi$. Además, se tiene que $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = \mathrm{d}N(\hat{t})$ por lo que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_g &= \left\langle \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}, \hat{h} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{d}N(\hat{t}), \hat{h} \right\rangle \\ &= \langle \mathrm{d}N(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi), e_1 \sin\varphi - e_2 \cos\varphi \rangle \\ &= \langle \mathrm{d}N(e_1 \cos\varphi) + \mathrm{d}N(e_2 \sin\varphi), e_1 \sin\varphi - e_2 \cos\varphi \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos\varphi + e_2 k_2 \sin\varphi, e_1 \sin\varphi - e_2 \cos\varphi \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos\varphi, e_1 \sin\varphi - e_2 \cos\varphi \rangle + \langle e_2 k_2 \sin\varphi, e_1 \sin\varphi - e_2 \cos\varphi \rangle \\ &= k_1 \cos\varphi \sin\varphi - k_2 \sin\varphi \cos\varphi \\ &= (k_1 - k_2) \sin\varphi \cos\varphi \end{aligned}$$

Llegando a lo pedido.

[2] $\lambda^4 = \left(1 + v^2\tau^2\right)^2 \geq 1$

[3] Vectores propios de $\mathrm{d}N$

(b) Se nota lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tau_g = 0 &\iff \left\langle \mathrm{d}N(\hat{t}), \hat{h} \right\rangle = 0 \\
&\iff \mathrm{d}N(\hat{t}) \perp \hat{h} \\
&\iff \mathrm{d}N(\hat{t}) \parallel \hat{t} \\
&\iff \mathrm{d}N(\hat{t}) = \lambda(s)\hat{t} \\
&\iff \mathrm{d}N(\alpha') = \lambda(s)\alpha' \\
&\iff \alpha \text{ es linea de curvatura}^4
\end{aligned}$$

(c) Para esto se recuerda que $k_n = k\cos\theta$ donde $\cos\theta = \langle \hat{n}, N\rangle$, como $k \neq 0$ se tiene que $\hat{n} \perp N$, por lo que $\hat{n} \in T_p(S)$, más como $\hat{t} \perp \hat{n}$ se puede tomar $\hat{h}$ tal que $\hat{h} = \hat{n}$. Ahora, se tiene que $\langle N, \hat{n}\rangle = 0$, por lo que $\tau_g = -\langle N, \hat{n}'\rangle$, desarrollándolo un poco más:

$$\begin{aligned}
\tau_g &= -\langle N, \hat{n}'\rangle \\
&= -\left\langle N, -k\hat{t} - \tau\hat{b} \right\rangle^5 \\
&= -\left\langle \hat{b}, -k\hat{t} - \tau\hat{b} \right\rangle \\
&= -(-\tau) \\
&= \tau
\end{aligned}$$

[4] Esto último es por Olinde-Rodrigues

Usando lo demostrado en (a) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\tau^2 &= \tau_g^2 \\
&= ((k_1 - k_2)\sin\varphi\cos\varphi)^2 \\
&= (k_1 - k_2)^2 \sin^2\varphi\cos^2\varphi \\
&= \left((k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi \\
&= \left((-2H)^2 - 4K\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi \\
&= \left(4H^2 - 4K\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi \\
&= 4\left(H^2 - K\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi
\end{aligned}$$

Luego con unos cálculos formales se tiene que $H = 0$ y que $\varphi = \frac{\pi}{4}$, por lo que $\tau^2 = -K$.

■

Solución problema 3:

(a) Para calcular la curvatura geodésica se usará la siguiente identidad $k^2 = k_g^2 + k_n^2$, se sabe que para una circunferencia de radio r se tiene que $k = \frac{1}{r}$, más aún se sabe que en una esfera unitaria $k_1 = k_2 = 1$ por lo que $k_n = 1$, con esto se tiene que $k_g = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$.

(b) Sean A_i las regiones que no contienen el polo norte de la esfera delimitadas por los círculos de radio r_i y con centro en el plano XY tal que son tangentes a pares. Sean B_j con $j = 1, 2$ las regiones triangulares restantes. Se nota que $\iint_{S^2} 1\,\mathrm{d}\sigma = 4\pi$, que S^2 es la unión disjunta de los B_j y los A_i, y por último que $\iint_{B_1} 1\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{B_2} 1\,\mathrm{d}\sigma$. Dado esto se ve que el área que corresponde al triángulo en el polo norte es

$$\frac{4\pi - \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \iint_{A_i} 1\,\mathrm{d}\sigma}{2}$$

Ahora, se recuerda que tras una rotación se puede parametrizar A_i con $\mathbf{x}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ donde $\theta \in [0,\theta_i]$[6] y $\varphi \in [0, 2\pi]$. Se ve que $E = 1, F = 0, G = \sin^2\theta$. Dado lo anterior se puede calcular el área de A_i con la siguiente integral:

$$\iint_{[0,\theta_i]\times[0,2\pi]} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

[5] $\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n} = N$

[6] $\theta_i = \arccos(r_i)$

Reescribiendo la integral:

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,\theta_i]\times[0,2\pi]} \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{\theta_i}\int_0^{2\pi} \sin\theta^7\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\theta_i} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\theta_i} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\left(1-\cos(\theta_i)\right) \\
&= 2\pi\left(1-r_i\right)
\end{aligned}$$

Juntando todo se tiene que el área del triángulo es:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi - \sum_{i=1}^{3}\iint_{A_i} 1\,\mathrm{d}\sigma}{2} &= 2\pi - \sum_{i=1}^{3}\pi(1-r_i) \\
&= \pi\left(r_1+r_2+r_3-1\right)
\end{aligned}$$

■

Solución problema 4:

(a) Se nota que el toro dado es la superficie de revolución generada por la curva cerrada $\alpha(t) = (2+\cos(t), 0, \sin(t))$ respecto al eje Z, por lo que los meridianos son lineas de curvatura. Además, se nota que la curva γ corresponde a un paralelo[8], por lo que también es una linea de curvatura.

■

Solución problema 5:

[7]Se tiene que $0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$, por lo que $|\sin\theta| = \sin\theta$

[8]Corresponde a fijar el punto $(3,0,0)$ y rotarlo respecto al eje Z.

(a) Para calcular los símbolos de Christoffel se ve lo siguiente:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 \cdot \frac{1}{y^2} + \Gamma_{11}^2 \cdot 0 = 0 \\ \Gamma_{11}^1 \cdot 0 + \Gamma_{11}^2 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 \cdot \frac{1}{y^2} + \Gamma_{12}^2 \cdot 0 = \frac{1}{y^3} \\ \Gamma_{12}^1 \cdot 0 + \Gamma_{12}^2 \cdot \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 \cdot \frac{1}{y^2} + \Gamma_{22}^2 \cdot 0 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 \cdot 0 + \Gamma_{22}^2 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^3} \end{cases}$$

Por lo que $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$ y $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{y}$. Ahora como $F = 0$ se puede usar la siguiente identidad demostrada en tarea:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}}\right)_y + \left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}}\right)_x\right)$$

Se desarrolla lo anterior:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}}\right)_y + \left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}}\right)_x\right) \\ &= -\frac{1}{2}y^2\left(\left(\frac{\frac{-2}{y^3}}{\frac{1}{y^2}}\right)_y + \left(\frac{0}{\frac{1}{y^2}}_x\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}y^2\left(\frac{-2}{y}\right)_y \\ &= -\frac{1}{2}y^2\frac{2}{y^2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

■