Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Examen

Analisis Funcional - MAT2555

Fecha de Entrega: 2019-12-19

Nicholas Mc-Donnell

Solución problema 1: Sea $\phi_0 \in E^*$ tal que $\|\phi_0\| = 1$ y $\phi_0(x_0) = \|x_0\|$, se nota que $\|\phi_0(x_n)\| \leq \|x_n\|$, ahora es claro que $\limsup_{n\to\infty} \|\phi_0(x_n)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$, pero se sabe que $x_n \rightharpoonup x_0$ por lo que $\limsup_{n\to\infty} \|\phi_0(x_n)\| = \|\phi_0(x_0)\| = \|x_0\|$, con lo que se tiene que $\|x_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

$\blacksquare$

Solución problema 2: Dado que $\langle x, Tx\rangle \geq 0$ entonces $\lambda \geq 0$, luego por Cauchy-Schwartz se tiene que $\langle x, Tx\rangle \leq \|x\| \cdot \|Tx\| \leq \|x\|^2 \|T\| = \|T\|$, por lo que $\lambda \leq \|T\| < \infty$. Ahora, para la desigualdad se recuerdan las siguientes identidades:

$$\langle x \pm y, Tx \pm Ty\rangle = \langle x, Tx\rangle + \langle y, Ty\rangle \pm 2\mathrm{Re}\,\langle x, Ty\rangle$$

Restando estas se tiene lo siguiente

$$4\mathrm{Re}\,\langle x, Ty\rangle = \langle x+y, Tx+Ty\rangle - \langle x-y, Tx-Ty\rangle$$

Sea $\omega_{x,y} \in \mathbb{C}$ tal que $|\omega_{x,y}| = 1$ y $|\langle x, Ty\rangle| = \langle x, Ty\rangle \cdot \omega_{x,y}$, con eso y lo anterior se tienen las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned}
2\,|\langle x, Ty\rangle| &= \frac{1}{2}\,|\langle x+y, Tx+Ty\rangle - \langle x-y, Tx-Ty\rangle| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|\langle x+y, T(x+y)\rangle| + |x-y, T(x-y)|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 \left|\left\langle \frac{x+y}{\|x+y\|}, T\frac{x+y}{\|x+y\|}\right\rangle\right| + \|x-y\|^2 \left|\left\langle \frac{x-y}{\|x-y\|}, T\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\rangle\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\|x+y\|^2 \lambda + \|x-y\|^2 \lambda\right| = \frac{1}{2}\lambda\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right) \\
&\leq \lambda\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene lo pedido.

$\blacksquare$

Solución problema 3: Sea $t > 0$, luego por la pregunta anterior se tiene lo siguiente:

$$2\left|\left\langle \frac{1}{t}x, Ty\right\rangle\right| \leq \lambda\left(\left\|\frac{1}{t}x\right\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Y al multiplicar por t se deduce que

$$2\,|\langle x, Ty\rangle| \leq \lambda\left(\frac{1}{t}\|x\|^2 + t\|y\|^2\right) \tag{1}$$

Dado lo anterior, sea y_n una sucesión tal que $\frac{\|Ty_n\|}{\|T\|\|y_n\|} \geq 1 - \frac{1}{n}$, y sea $x_n = Ty_n$ luego se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 &\leq \frac{2\|Ty_n\|^2}{2\|T\|^2\|y_n\|^2} = \frac{2|\langle Ty_n, Ty_n\rangle|}{(\|T\|\|y_n\|)^2 + \|T\|^2\|y_n\|^2} \\ &\leq \frac{2|\langle x_n, Ty_n\rangle|}{\|x_n\|^2 + \|T\|^2\|y_n\|^2}\end{aligned}$$

Dado la anterior y tomando $t = \|T\|, x = x_n, y = y_n$ en (1) se tiene lo siguiente

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{2|\langle x_n, Ty_n\rangle|}{\|x_n\|^2 + \|T\|^2\|y_n\|^2} \leq \frac{\lambda}{\|T\|}$$

Tomando el limite se tiene que $\lambda \geq \|T\|$, por lo que junto con la desigualdad vista en la pregunta 2, se tiene que $\lambda = \|T\|$.

$\blacksquare$

Solución problema 4: Ya que T es un operador compacto se tiene que $Tx_n \to Tx_0$ en norma, además ya que $x_n \rightharpoonup x_0$ se tiene que $\langle x_n, Tx_0\rangle \to \langle x_0, Tx_0\rangle$, por último se quiere que la sucesión x_n sea acotada. Para esto se define el siguiente funcional lineal $T_n(y) = \langle y, x_n\rangle$, para un $y \in E$ fijo se tiene que $T_n y \to < y, x_0 >$ en norma, por lo que la sucesión es acotada por alguna constante c_y, con lo que por Banach-Steinhaus se tiene que la sucesión $\|T_n\|$ es acotada, pero es claro que $\|T_n\| = \|x_n\|$, por lo que x_n es acotada con cota C. Juntando todo lo anterior, se llega a la siguiente desigualdad:

$$\|\langle x_n, Tx_n\rangle - \langle x_0, Tx_0\rangle\| \leq \|\langle x_n, Tx_n - Tx_0\rangle\| + \|\langle x_n, Tx_0\rangle - \langle x_0, Tx_0\rangle\|$$

Se nota que existe n_1 tal que para $n \geq n_1$ se tiene que $\|Tx_n - Tx_0\| < \frac{\varepsilon}{2C}$, y que existe n_2 tal que para $n \geq n_2$ se tiene que $\|\langle x_n, Tx_0\rangle - \langle x_0, Tx_0\rangle\| < \frac{\varepsilon}{2}$, tomando $n_3 = \text{mín}(n_1, n_2)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\|\langle x_n, Tx_n\rangle - \langle x_0, Tx_0\rangle\| &\leq \|Tx_n - Tx_0\| C + \|\langle x_n, Tx_0\rangle - \langle x_0, Tx_0\rangle\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo que $\langle x_n, Tx_n\rangle \to \langle x_0, Tx_0\rangle$.

$\blacksquare$

Solución problema 5: Se nota que si $\lambda = 0$, se tiene trivialmente lo pedido al tomar $x_0 = 0$. Se asume que $\lambda > 0$, como $\lambda = \sup_{\|x\|=1} \langle x, Tx\rangle$ existe una sucesión x_n tal que

$\langle x_n, Tx_n \rangle \to \lambda$ y que $\|x_n\| = 1$. Ahora como H es Hilbert, especificamente es Banach reflexivo y x_n es acotada, por lo que tiene una subsucesión tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$. Recordamos que T es compacto y que por la pregunta 4 se tiene que $\langle x_{n_k}, Tx_{n_k} \rangle \to \langle x_0, Tx_0 \rangle$, pero se tiene que $\langle x_n, Tx_n \rangle \to \langle x_0, Tx_0 \rangle$ por lo que $\lambda = \langle x_0, Tx_0 \rangle$. Para ver que $\|x_0\| = 1$, se recuerda que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ entonces de la pregunta 1 se tiene que $\|x_0\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_{n_k}\|$, pero $\|x_{n_k}\| = 1$, por lo que $\|x_0\| \leq 1$. Se ve que $|\langle x_0, Tx_0 \rangle| \leq \|x_0\| \|T\| \|x_0\|$, por lo que si $\|x_0\| < 1$ se tiene que $\|T\| = \lambda = \langle x_0, Tx_0 \rangle \leq \|x_0\|^2 \|T\| < \|T\|$ lo que es una contradicción. Por lo que $\|x_0\| = 1$.

■

Solución problema 6: Para demostrar que $f_y(0)$ es un máximo local, se nota que que $f_y(0) = \lambda$, y como $\|x(t)\| = 1$ se tiene que $\langle x(t), Tx(t) \rangle \leq \lambda$, con lo que se tiene lo pedido. Por lo que se tiene que $f_y'(0) = 0$, ahora para calcular este último se verán las siguientes expresiones:

$$(\langle f(t), g(t) \rangle)' = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle\,^{1} \tag{2}$$

$$(\|f(t)\|) = \frac{\mathrm{Re}\,\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|} \tag{3}$$

$$x'(t) = \frac{y\,\|x_0 + ty\|^2 - (x_0 + ty)\,\mathrm{Re}\,\langle y, x_0 + ty \rangle}{\|x_0 + ty\|^3} \tag{4}$$

Se nota que la expresión en (4) aparece por el uso la expresión en (3). Ahora, usando (2) y (4) se puede calcular $f_y'(0)$ fácilmente:

$$\begin{aligned}
0 &= f_y'(0) \\
&= \langle x'(0), Tx(0) \rangle + \langle x(0), Tx'(0) \rangle \\
&= \langle y - x_0 \mathrm{Re}\,\langle y, x_0 \rangle, Tx_0 \rangle + \langle x_0, Ty - \mathrm{Re}\,\langle y, x_0 \rangle\, Tx_0 \rangle \\
&= \langle y, Tx_0 \rangle - \mathrm{Re}\,\langle y, x_0 \rangle \langle x_0, Tx_0 \rangle + \langle x_0, Ty \rangle - \langle x_0, Tx_0 \rangle\, \mathrm{Re}\,\langle y, x_0 \rangle \\
&= 2\mathrm{Re}\,\langle y, Tx_0 \rangle - 2\lambda \mathrm{Re}\,\langle y, x_0 \rangle \\
&= 2\left(\mathrm{Re}\,\langle y, Tx_0 \rangle - \mathrm{Re}\,\langle y, \lambda x_0 \rangle\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\,\langle y, Tx_0 - \lambda x_0 \rangle
\end{aligned}$$

Tomando $y = Tx_0 - \lambda x_0$ se tiene que $\mathrm{Re}\,\langle y, y \rangle = \langle y, y \rangle = 0$, por lo que $Tx_0 = \lambda x_0$.

■

[1] Esta y la expresión siguiente serán demostradas al final en el apartado.

Apartado

Aquí se demostraran las siguientes afirmaciones:

$$(\langle f(t), g(t)\rangle)' = \langle f'(t), g'(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle \qquad (\|f(t)\|)' = \frac{\operatorname{Re}\langle f'(t), f(t)\rangle}{\|f(t)\|}$$

Demostración. Sean g, f funciones diferenciables en H, sea $h(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$. Se ve la siguiente identidad:

$$\langle f(t+h), g(t+h)\rangle - \langle f(t), g(t)\rangle = \langle f(t+h), g(t+h)\rangle - \langle f(t), g(t+h)\rangle + \langle f(t), g(t+h)\rangle - \langle f(t), g(t)\rangle$$

Por lo que se nota que

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\langle f(t+h), g(t+h)\rangle - \langle f(t), g(t+h)\rangle}{h} + \frac{\langle f(t), g(t+h)\rangle - \langle f(t), g(t)\rangle}{h}$$

Ahora por la linealidad del producto interno se tiene que $h'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$. Ahora se nota que $\|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}$, por lo que usando la regla de la cadena y desarrollando se llega que $(\|(f(t))\|)' = \frac{\operatorname{Re}\langle f'(t), f(t)\rangle}{\|f(t)\|}$. $\square$