Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019

Tarea 1

Fundamentos de la Matemática - MAT 2405

Fecha de Entrega: 2019/03/27

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Maximiliano Norbu

Problemas

Problema 1 (15 pts)**.**

(a) (5 pts) Dadas oraciones α y β, muestre que $(\alpha \iff \beta)$ y $((\alpha \implies \beta) \wedge (\beta \implies \alpha))$ son lógicamente equivalentes.

(b) (10 pts) Demuestre por inducción en oraciones que toda oración es lógicamente equivalente a alguna oración que no tiene el símbolo $\iff$.

Solución problema 1:

(a) Viendo la siguiente tabla con todas las valuaciones posibles se nota que son lógicamente equivalentes pues ambas siempre tienen el mismo valor de verdad.

α	β	$\alpha \implies \beta$	$\beta \implies \alpha$	$\alpha \iff \beta$	$((\alpha \implies \beta) \wedge (\beta \implies \alpha))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

(b)

$\blacksquare$

Problema 2 (10 pts)**.**

(a) (5 pts) Demuestre que si Σ es un conjunto no vacío de oraciones que cumple ambos $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$, entonces Σ no es satisfacible.

(b) (5 pts) ¿Es el conjunto vacío ϕ satisfacible? ¿Se cumplen $\phi \models \varphi$ y/o $\phi \models \neg\varphi$?

Solución problema 2:

(a) Se asume que Σ es satisfacible, entonces existe una valuación $\mathcal{V}$ tal que toda oración en Σ sea verdad. Pero si φ es verdad, entonces $\neg\varphi$ es falso, ahora $\Sigma \models \neg\varphi$, por lo que $\neg\varphi$ es verdad, pero una oración no puede ser verdadera y falsa ya que una valuación solo puede dar un valor para cada oración. Con esto se concluye que Σ no es satisfacible.

(b) Por definición, ya que $\emptyset$ no tiene oraciones se cumple que para toda valuación <u>todas</u> las oraciones de $\emptyset$ son verdad. Ahora si $\emptyset \models \varphi$, significa que para toda valuación

$\blacksquare$

Problema 3 (5 pts)**.** Sea α oración. Encuentre una derivación $\neg\neg\alpha$ a partir del conjunto $\Delta = \{\alpha\}$ utilizando los axiomas y regla de deducción vistas en clase.

Solución problema 3:

$$\varphi_1 = \alpha$$
$$\varphi_2 = (\neg\alpha \implies ((c \implies \neg\alpha) \implies \neg\alpha)) \qquad (A1)$$
$$\varphi_3 = (\neg\alpha \implies ((c \implies \neg\alpha) \implies \neg\alpha)) \implies ((\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) \implies (\neg\alpha \implies \neg\alpha)) \qquad (A2)$$
$$\varphi_4 = (\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) \implies (\neg\alpha \implies \neg\alpha) \qquad (MP)$$
$$\varphi_5 = (\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) \qquad (A1)$$
$$\varphi_6 = (\neg\alpha \implies \neg\alpha) \qquad (MP)$$
$$\varphi_7 = (\neg\alpha \implies \neg\alpha) \implies (\alpha \implies \neg\neg\alpha) \qquad (A9)$$
$$\varphi_8 = (\alpha \implies \neg\neg\alpha) \qquad (MP)$$
$$\varphi_9 = \neg\neg\alpha \qquad (MP)$$

$\blacksquare$

Problema 4. Bonus
Encuentre una derivación de la oración β partir del conjunto $\{\neg\neg\beta\}$ utilizando los axiomas y regla de deducción vistas en clase.

Solución problema 4: Dado $\neg\neg\alpha$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \neg\neg\alpha \\
\varphi_2 &= \neg\neg\alpha \implies ((x \implies x) \implies \neg\neg\alpha) && (A1)\\
\varphi_3 &= (x \implies x) \implies \neg\neg\alpha && (MP)\\
\varphi_4 &= ((x \implies x) \implies \neg\neg\alpha) \implies (\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) && (A9)\\
\varphi_5 &= \neg\alpha \implies \neg(x \implies x) && (MP)\\
\varphi_6 &= \neg(x \implies x) \implies \alpha && (A10)\\
\varphi_7 &= (\neg(x \implies x) \implies \alpha) \implies (\neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha)) && (A1)\\
\varphi_8 &= \neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha) && (MP)\\
\varphi_9 &= (\neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha)) \implies ((\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) \implies (\neg\alpha \implies \alpha)) && (A2)\\
\varphi_{10} &= (\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) \implies (\neg\alpha \implies \alpha) && (MP)\\
\varphi_{11} &= \neg\alpha \implies \alpha && (MP)\\
\varphi_{12} &= \alpha \vee \neg\alpha && (A11)\\
\varphi_{13} &= ((\alpha \implies \alpha) \implies ((\neg\alpha \implies \alpha) \implies ((\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha))) && (A5)\\
\varphi_{14} &= \alpha \implies ((c \implies \alpha) \implies \alpha) && (A1)\\
\varphi_{15} &= (\alpha \implies ((c \implies \alpha) \implies \alpha)) \implies ((\alpha \implies (c \implies \alpha)) \implies (\alpha \implies \alpha)) && (A2)\\
\varphi_{16} &= (\alpha \implies (c \implies \alpha)) \implies (\alpha \implies \alpha) && (MP)\\
\varphi_{17} &= (\alpha \implies (c \implies \alpha)) && (A1)\\
\varphi_{18} &= \alpha \implies \alpha && (MP)\\
\varphi_{19} &= ((\neg\alpha \implies \alpha) \implies ((\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha)) && (MP)\\
\varphi_{20} &= (\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha && (MP)\\
\varphi_{21} &= \alpha && (MP)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$