Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Primer Semestre de 2019

Tarea 4

Análisis Real — MAT 2515

Fecha de Entrega: 2019/06/19

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Problema 1:

Sea X el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ con la norma $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}$. Demostrar que los polinomios son densos en X.

Solución problema 1: Se comenzará demostrando un pequeño lema:

Lema 1: *Sea X un espacio métrico completo, y sea $g : X \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Luego, el álgebra generada*[1] $< g >$ *es densa en* $C(X, \mathbb{R})$[2]

Demostración. Por Stone-Weiestrass, X es un espacio métrico completo, $< g >$ es un subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$, y $\mathbb{R} \subset< g >$, luego como g es inyectiva dado $x, y \in X$ se tiene que si $x \neq y$ entonces $g(x) \neq g(y)$. Por lo que $< g >$ es denso en $C(X, \mathbb{R})$. $\square$

Se nota que los polinomios son el álgebra generada por la función identidad, y que la identidad es inyectiva. Además se recuerda que $[0,1]$ es completo, por lo que los polinomios son densos en $C[0,1]$. Ahora, ya que todas las ℓ_p-normas son equivalentes, específicamente la norma del supremo es más fina que ℓ_2-norma. Luego, sea $f \in C[0,1]$, ya que $< x >$ es denso en $C[0,1]$, existe una sucesión p_n tal que $p_n \to f$ bajo la norma del supremo, por definición de norma más fina p_n también converge bajo la ℓ_2-norma, y además en ayudantia se vio que tiene que converger a lo mismo, por lo que $p_n \to f$ bajo la ℓ_2-norma, como f era arbitrario se tiene que $< x >$ es denso en X.

$\blacksquare$

Problema 2:

Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Demostrar que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, tal que $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 0$ y $\int_0^1 f(x) g^n(x) \, \mathrm{d}x = 0$ para todo n natural, entonces $\int_0^1 f^2(x) \, \mathrm{d}x = 0$.

Solución problema 2: Se sabe que $[0,1]$ es un espacio métrico completo, y que como g es estrictamente creciente es inyectiva. Luego el álgebra generado $< g >$ es densa $C[0,1]$ por lema 1. Se nota que todo elemento de $< g >$ se puede escribir como un polinomio en g, de otra forma, para todo $h \in< g >$ existe $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(g) = h$. Dado esto, se define $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$h(x) \mapsto \int_0^1 f(x) h(x) \, \mathrm{d}x$$

[1] Como anillo, donde se toman todas las sumas y multiplicaciones entre elementos del álgebra y elementos de $\mathbb{R}$.

[2] Se asume la norma del supremo.

Se nota que si F es continua, se tiene lo pedido, ya que al ser $< g >$ denso en $C[0,1]$ existe un sucesión p_n que converge a f, y esta cumple que $F(p_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por linealidad de la integral y porque $\int_0^1 f(x)g^n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Luego para ver la continuidad de

$$\begin{aligned} |F(h)| &= \left| \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq 1 \cdot \|f\| \cdot \|h\| \end{aligned}$$

Como $\|f\|$ es una constante se tiene lo pedido.

■

Problema 3:

Sea X el espacio de las funciones diferenciables en $(-1,1)$ con $\|f\| = \sup_{x\in(-1,1)} |f(x)|$. Estudiar cuales de las siguientes funciones definidas en X es un funcional lineal acotado. En caso de serlo calcular su norma.

(a) $T_1(f) = f(0)$

(b) $T_2(f) = \int_{-1}^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x$

(c) $T_3(f) = f'(0)$

Solución problema 3:

(a) Sean $f, g \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, luego $T_1(\lambda f + g) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T_1(f) + T_1(g)$, por lo que es un funcional lineal. Luego se nota que $|f(0)| \leq \|f\|$, por lo que T_1 esta acotado, luego sea $f(x) = 1$ la función constante, $|T_1(f)| = \|f\| = 1$, por lo que $\|T_1\| = 1$.

(b) Sean $f, g \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, luego $T_2(\lambda f+g) = \int_{-1}^1 (\lambda f(x) + g(x))\,x^2\,\mathrm{d}x = \lambda \int_{-1}^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 g(x)x^2\,\mathrm{d}x = \lambda T_2(f) + T_2(g)$, por lo que es un funcional lineal. Para ver si T_2 es acotado se nota lo siguiente:

$$\left| \int_{-1}^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{-1}^1 |f(x)|\,x^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^1 \sup_{x\in(-1,1)} |f(x)|\,x^2\,\mathrm{d}x = \|f\| \cdot \frac{2}{3}$$

Con lo que se tiene que $\|T_2(f)\| \leq \frac{2}{3}\|f\|$, tomando la función constante $f(x) = 1$, se tiene la igualdad, por lo que $\|T_2\| = \frac{2}{3}$.

(c) Sean $f, g \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, luego $T_3(\lambda f + g) = \lambda f'(0) + g'(0) = \lambda T_3(f) + T_3(g)$, por lo que es un funcional lineal. Para revisar si es acotada es suficiente tomar la función $f(x) = \sin(nx)$, ya que $\|f\| = 1$, pero $\|T_3(f)\| = n$, con lo que T_3 no es acotada.

$\blacksquare$

Problema 4:

Sea X el espacio vectorial $X = \{\{a_n\} | a_n \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$ con la norma $\|\{a_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Si M es el subespacio $M = \{\{a_n\} \in X | a_n = 0 \text{ si } n \geq 3\}$ definamos $T : M \to \mathbb{R}$ por $T(\{a_n\}) = a_1 + a_2$

(a) Calcular $\|T\|$.

(b) Si $M_1 = \{\{a_n\} \in X | a_n = 0 \text{ si } n \geq 4\}$ describir TODAS las funciones lineales $T_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ tales que $T_1(\{a_n\}) = T(\{a_n\})$ si $\{a_n\} \in M$ y $\|T_1\| = \|T\|$.

Solución problema 4:

(a) Se nota que $\|T(\{a_n\})\| = |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|\{a_n\}\|$, y se nota que se llega a la igualdad con $a_1 = 0$ o con $a_2 = 0$, por lo que $\|T\| = 1$.

(b) Por propiedad de transformaciones lineales, se nota que T_1 está caracterizada por como actúa sobre la base de M_1, luego $M < M_1$ más específicamente $B = \{b_1, b_2\}$ es base de M donde b_i es 1 en la i-ésima coordenada, y extendiendo B con b_3 se tiene M_1. Luego, $T_1 |_M = T$ por lo que $T_1(\{a_n\}) = a_1 + a_2 + \lambda a_3$. Ahora se necesita que $\|T_1\| = \|T\|$, por lo que se necesita que $|a_1 + a_2 + \lambda a_3| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3|$, más específicamente $|\lambda| \leq 1$, dado esto, se nota que se tiene la igualdad con $a_3 = 0$, y con $a_2 = 0$ o $a_1 = 0$, por lo que se tiene que $\|T_1\| = \|T\|$. Dado esto $T_1(\{a_n\}) = a_1 + a_2 + \lambda a_3$ donde $|\lambda| \leq 1$, cumple lo pedido, por lo que todas las T_1 que cumplen lo necesario son de esa forma.

$\blacksquare$