Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Control 1

Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — IIC2223

Fecha de Entrega: 2020-09-07

Nicholas Mc-Donnell

Problema 1:

Un autómata finito no determinista (NFA) $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ se dice no-ambiguo, si para toda palabra $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ existe exactamente una ejecución de aceptación de $\mathcal{A}$ sobre w. Por ejemplo, un autómata finito determinista es un NFA no-ambiguo, pero existen autómatas que no son deterministas, pero si no ambiguos.

(a) Para $i \geq 0$, considere el lenguaje L_i de todas las palabras $w = a_1 \ldots a_n$ sobre $\{a, b\}$ con $n > i$ tal que $a_{n-i} = b$. Demuestre que para cada L_i existe un NFA no-ambiguo $\mathcal{A}$ con menor o igual a $i + 2$.

(b) Demuestre que para todo lenguaje regular L con $\varepsilon \notin L$, existe un NFA no-ambiguo $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ tal que $|I| = |F| = 1$ y $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$.

Solución problema 1: *Doy mi palabra que la siguiente solución de la pregunta 1 fue desarrollada y escrita individualmente por mi persona según el código de honor de la Universidad*

—Nicholas Mc-Donnell

(a) Sea q_1 estado 'prefijo', q_2 estado 'b' y q_j con $3 \leq j \leq i + 2$[1] como estados 'sufijo'. Se tiene que $q_{i+2} \in F$ y $q_1 \in I$, además se tiene que $\Delta(q_1, c, q_1)$ y $\Delta(q_j, c, q_{j+1})$ para $c \in \Sigma$ y $2 \leq j < i + 2$, por último se tiene $\Delta(q_1, b, q_2)$. Lo anterior define $\mathcal{A}_i$. Ahora, sea $w \in L_i$, se tiene que $w = a_1 \ldots a_n$ para algún $n > i$, se ve la siguiente ejecución $\rho : q_1 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_{n-i-1}} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a_{n-i+1}} q_3 \xrightarrow{a_{n-i+2}} \ldots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{i+1} \xrightarrow{a_n} q_{i+2}$, como $q_{i+2} \in F$ $\mathcal{A}_i$ acepta w, por lo que se tiene que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i) \subseteq L_i$. Ahora, sea $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$, tal que $w = a_1 \ldots a_n$, se tiene que existe una ejecución ρ que acepta w, se nota que $n > i$ ya que toda palabra aceptada por $\mathcal{A}_i$ tiene que pasar por los estados q_1 a q_{i+2}, que son $i + 1$ estados, más aún como toda ejecución que acepta tiene que pasar por esos estados, en especifico tiene que pasar por la transición $\Delta(q_1, b, q_2)$ y como después de q_2 las transiciones son 'únicas'[2], se tiene que hay exactamente $i - 1$[3] estados por los que va a pasar para ser aceptada. Con lo anterior se tiene que $a_{n-i} = b$, viendo ambas condiciones sobre w, se tiene que $w \in L_i$. Completando la demostración.

[1] Si $i = 0$, se usa el estado q_2

[1] Ver 1

[2] Para cada q_k hay solo un q_j tal que $\Delta(q_k, c, q_j)$ para algún $c \in \Sigma$

[3] Si $i = 0$ el autómata es de 2 estados y q_2 es de aceptación, por lo que una vez se llega al estado q_2 no hay más transiciones.

(b) Sea $\mathcal{A}$ un DFA tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$, se tiene que visto como NFA $|Q| = 1$. Ahora, se construye un NFA $\mathcal{A}'$ en base a $\mathcal{A}$ de la siguiente manera, se crea un estado extra q_{final} que es de aceptación, y para todo otro estado de aceptación q_i[4] se usa el siguiente proceso, para todo estado q_j y carácter $a \in \Sigma$ tal que $\delta_{\mathcal{A}}(q_j, a) = q_i$ se agrega $\Delta_{\mathcal{A}'}(q_j, a, q_{final})$, y una vez que toda transición que llegue al estado q_j se haya procesado se tiene que $q_j \notin F$. Este NFA cumple que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ ya que para toda ejecución de aceptación ρ de $\mathcal{A}$ sobre w se tiene una ejecución de aceptación ρ' con la diferencia que la última transición desde el estado correspondiente $p_j \xrightarrow{w_k} p_i$ es $p_j \xrightarrow{w_k} q_{final}$[5], más aún esta transición es única por construcción y como ρ es única se tiene que la ejecución hasta p_i es única, con lo que se tiene que ρ' es única en su totalidad. Con lo anterior, se tiene que el NFA $\mathcal{A}'$ cumple lo pedido.

$\blacksquare$

Problema 2:

Sea Σ un alfabeto finito y sea R una expresión regular sobre $Sigma$. Se define el operador:

$$R^{\downarrow\downarrow}$$

tal que $w \in \mathcal{L}(R^{\downarrow\downarrow})$ si, y solo si, existe una palabra $w' \in \mathcal{L}(R)$ que se puede descomponer como $w' = u_1 v_1 \dots u_k v_k$ para algún $k \geq 1$ y con $u_i, v_i \Sigma^*$, y tal que $w = u_1 \dots u_k$.
Demuestre que para toda expresión regular R, el resultado $R^{\downarrow\downarrow}$ define un lenguaje regular.

Solución problema 2: *Doy mi palabra que la siguiente solución de la pregunta 2 fue desarrollada y escrita individualmente por mi persona según el código de honor de la Universidad*

—Nicholas Mc-Donnell

Se ve que $R^{\downarrow\downarrow}$ corresponde a todas las subsecuencias de carácteres[6] de palabras aceptadas por R. Sea $w \in \mathcal{L}(R)$, entonces se tiene que $w = w_1 \dots w_k = u_1 v_1 \dots u_k v_k$ donde $k = |w|$ y se tiene $\{u_i, v_i\} = \{\varepsilon, w_i\}$, por lo tanto $u_1 \dots u_k \in \mathcal{L}(R^{\downarrow\downarrow})$, lo que nos dice que dado una palabra en $\mathcal{L}(R)$ toda subsecuencia de carácteres pertenece a $\mathcal{L}(R^{\downarrow\downarrow})$. Para ver que $\mathcal{L}(R^{\downarrow\downarrow})$ es regular, se toma $\mathcal{A}$ un DFA tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(R)$, y se construye un NFA-$\varepsilon$ $\mathcal{A}'$ de la siguiente forma. Todo estado se vuelve estado de aceptación e iterativamente se hace el siguiente proceso,

[4] Se nota que como $\varepsilon \notin L$ se tiene que q_0 no es estado de aceptación.

[5] Para la otra implicania, es claro que por construcción tiene que existir un estado de aceptación $p_i \in Q_{\mathcal{A}}$ tal que $p_j \xrightarrow{w_k} p_i$

[6] Incluida la secuencia vacia, i.e. la palabra vacia

dados q_i, q_j tales que $\delta(q_i, a) = q_j$ y $a \in \Sigma$ se agrega $\Delta(q_i, \varepsilon, q_j)$ Como hay finitos estados el proceso termina y nos define un NFA. Ahora, sea $w \in \mathcal{L}(R)$ tal que $w = u_1 v_1 \dots u_k v_k$ como se vio anteriormente, y $\rho : p_1 \xrightarrow{w_1} \dots \xrightarrow{w_k} p_{k+1}$ una ejecución de aceptación de $\mathcal{A}$ sobre w, sea i tal que $u_i = \varepsilon$, entonces se puede ver la ejecución $\rho' : p_1 \xrightarrow{w_1} \dots \xrightarrow{w_{i-1}} p_i \xrightarrow{\varepsilon} p_{i+1} \xrightarrow{w_{i+1}} p_{i+2} \xrightarrow{w_{i+2}} \dots \xrightarrow{w_k} p_{k+1}$, se ve entonces que toda subsecuencia de w es aceptada, pero se ve que toda palabra aceptada por $\mathcal{A}'$ es una subsecuencia alguna palabra en $\mathcal{A}$ por construcción[7] Ahora, como cada NFA-ε define un lenguaje regular, se tiene que $\mathcal{L}(R)$ es regular.

■

[7] Las ε-transiciones nos garantizan eso.