Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Tarea 1

Geometría Diferencial - MAT

Fecha de Entrega: 2020-09-26

Nicholas Mc-Donnell

Problema 1:

Un disco de radio 1 en el plano xy rueda sin deslizarse a lo largo del eje x. La figura que describe un punto de la circunferencia del disco se llama cicloide.

(a) Encuentre una curva parametrizada cuya traza sea la cicloide, y determine sus puntos críticos.

(b) Calcule la longitud del arco de la cicloide correspondiente a una vuelta del disco.

Solución problema 1:

■

Problema 2:

Sea $\alpha : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right)$$

demuestre que:

(a) En $t = 0$, α es tangente al eje x.

(b) Cuando $t \to 0$, $\alpha(t) \to (0, 0)$ y $\alpha'(t) \to (0, 0)$

(c) Cuando $t \to -1$, α y su tangente tienden a la recta $x + y + a = 0$.

(d) El arco con $t \in (0, \infty)$ es simétrico con respecto a la recta $y = x$.

La figura que se obtiene completando la traza para que sea simétrica con respecto a la recta $y = x$ en todo punto se denomina el *folium de Descartes*.

Solución problema 2:

■

Problema 3:

(Líneas rectas son las más cortas.) Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

(a) Demuestre que para cualquier vector unitario v se cumple

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v \, \mathrm{d}t` \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

(b) Use lo anterior para demostrar que

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Solución problema 3:

$\blacksquare$

Problema 4:

Demuestre que si todos los planos normales a una curva pasan por un punto fijo entonces la curva está contenida en una esfera.

Solución problema 4:

$\blacksquare$

Problema 5:

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular (no necesariamente arcoparametrizada) y sean $s = s(t)$ su longitud de arco y $t = t(s)$ la inversa de este. Denotamos $()'$ a las derivadas respecto a t. Demuestre que:

(a)
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|\alpha'\|} \text{ y } \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{a' \cdot \alpha''}{\|a'\|^4}$$

(b) La curvatura de α en t es
$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|a'\|^3}$$

(c) La torsión de α en t es
$$\tau(t) = -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

Solución problema 5:

$\blacksquare$

Problema 6:

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva arcoparametrizada regular con $k(s) \neq 0$ en todo I. Demuestre que:

(a) El plano osculador es el límite de los planos que pasan por $\alpha(s), \alpha(s+h_1)$ y $\alpha(s+h_2)$ cuando $h_1, h_2 \to 0$.

(b) El límite de los círculos que pasan por $\alpha(s), \alpha(s+h_1)$ y $\alpha(s+h_2)$ cuando $h_1, h_2 \to 0$ es un círculo en el plano osculador con centro en la recta normal y radio el radio curvatura de $\alpha, r = 1/\kappa(s)$. Este círculo se conoce como el círculo osculador de α en s.

Solución problema 6:

$\blacksquare$