Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

# Tarea 1

Tópicos Avanzados en Algoritmos, Combinatoria y Optimización

Fecha de Entrega: 2020-08-24

Nicholas Mc-Donnell

## Problema 1:

Show that if $M$ is a cost minimizing social welfare function, and $N$ is odd, then for any preference profile $[>] \in L^n$, if a Condorcet winner of $[>]$ exists, then $M$ will put the Condorcet winner on top of $M([>])$.

**Solución problema 1:** Sea $[>]$ una colección de $N$ ordenes tales que existe un ganador de Condorcet, llamaremos $o'$ a este ganador. Además, se denotará $>$ a $M([>])$. Dado lo anterior, se demostrará por contradicción lo pedido, se asume que existe un $o'' \in O$ tal que $o'' > o'$, luego se define $>'$ como $>$ con la diferencia que $o'$ cumple que la propiedad de Condorcet. Luego, sea $>_i \in L$ entonces se tiene que $d(>', >_i) = d(>, >_i) - \#(a > o' \text{ y } o' >_i a) + \#(o' > a \text{ y } a >_i o')$. Se nota que en el caso donde $>_i$ cumple que la propiedad de Condorcet con $o'$ se tiene que $d(>', >_i) = d(>, >_i) - \#(a > o' \text{ y } o' >_i a)$, en caso contrario se tiene que $d(>', >_i) \leq d(>, >_i) + \#(o' > a \text{ y } a >_i o')$. Por lo que se puede ver lo siguiente:

$$c(>, [>]) - c(>', [>]) = \sum_{i=1}^{n} \#(a > o' \text{ y } o' >_i a) - \sum_{i=1}^{n} \#(o' > a \text{ y } a >_i o')$$

Ahora se nota que la primera sumatoria corresponde a al menos $k \cdot c$ donde $k$ es la cantidad de posiciones que 'avanzó' $o'$ entre $>$ y $>'$, más formalmente $k = \#(a > o')$, y $c$ es la cantidad de $>_i$ que cumplen la propiedad de Condorcet con $o'$. Mientras, la segunda sumatoria corresponde a lo más $k \cdot (N - c)$, ya que hay $N - c$ ordenes que no cumplen la propiedad de Condorcet con $o'$, y $o'$ 'avanzó' $k$ posiciones. Por ende se tiene la siguiente desigualdad

$$c(>, [>]) - c(>', [>]) \geq k \cdot c - k \cdot (N - c) \qquad \geq k \cdot (2c - N) \geq k \cdot 1 \qquad > 0$$

Por lo que $c(>, [>]) > c(>', [>])$, lo que es una contradicción, ya que $>= M([>])$. Por lo tanto se tiene que no existe un $o'' \in O$ tal que $o'' > o$.

∎