Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

# Tarea 2

Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — IIC2223

Fecha de Entrega: 2020-09-03

Nicholas Mc-Donnell

## Problema 1:

Para cada lenguaje escriba una expresión regular que lo defina. Explique su respuesta

(a) Sea $\Sigma_1 = \{0,1\}$. $L_1$ es el lenguaje de todas las palabras $w \in \Sigma_1^*$ tal que $w \notin \mathcal{L}(01^+(011)^*(0+1))$.

(b) Sea $\Sigma_2 = \{0,1\} \times \{0,1\}$. $L_2$ es el lenguaje de todas las palabras $w \in \Sigma_2^*$ tal que para cada par consecutivo $(a,b)$ y $(c,d)$ se tiene que $b = c$. Por ejemplo, $(0,1)(1,0) \in L_2$ pero $(1,0)(1,0) \notin L_2$.

### Solución problema 1:

(a) Viendo los posibles prefijos de las palabras en $\mathcal{L}(01^+(011)^*(0+1))$ se puede deducir el complemento, para esto sea $R' = 01^+(011)^*(0+1)$

1) Si $R$ no comparte 'prefijos' con $R'$, se tiene que $R$ tiene que ser $0(0+1)^*$, ya que cualquier palabra en $\mathcal{L}(R')$ comienza con 1.
2) Si $R$ comparte el 'prefijo' 0 pero nada más tiene que ser $00(0+1)^*$, ya que toda palabra de $\mathcal{L}(R')$ comienza con 0 y continua con al menos un 1.
3) Si $R$ comparte el 'prefijo' $01^+$ hay que notar que además puede compartir el 'prefijo' $01^+0$, ya que si $w \in \mathcal{L}(01^+)$ y $w \neq 01$ entonces $w \in \mathcal{L}(01^+(0+1))$, por ende se tiene que $R = 01$ o que $R = 01^+00(0+1)^*$. El primero es ya que $01 \notin \mathcal{L}(R')$, y el segundo es ya que $01^+0$ es 'prefijo', pero $01^+00$ no lo es.
4) Si $R$ comparte el 'prefijo' $01^+(011)^*$ y nada más, se tiene que $R = 01^+(011)^*$. Esto es ya que para toda $w \in \mathcal{L}(R')$ se tiene que tienen un carácter después de ese prefijo.
5) Si $R$ comparte el 'prefijo' $01^+(011)^+1$, entonces $R = 01^+(011)^+10(0+1)^*$[1].
6) Si $R$ comparte el 'prefijo' $01^+(011)^*01$, entonces el siguiente carácter tiene que ser un 0, pero después no hay restricciones. Con esto se tiene que $R = c$.
7) Si $R$ comparte el 'prefijo' $01^+(011)^*00$ no hay restricciones. Con esto se tiene que $R = 01^+(011)^+00(0+1)^*$.

[1] El caso donde el 'prefijo' es $01^+1$se ve en el punto 3.

Por ende se junta todo lo anterior, más la palabra vacía y se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}R =&\varepsilon\\ &+0(0+1)^*\\ &+00(0+1)^*\\ &+01\\ &+01^+00(0+1)^*\\ &+01^+(011)^*\\ &+01^+(011)^+10(0+1)^*\\ &+01^+(011)^+10(0+1)^*\\ &+01^+(011)^*00(0+1)^*\end{aligned}$$

(b) Se toma la siguiente expresión regular

$$\begin{aligned}&((1,1)+(0,1)+((0,0)+(1,0))(0,0)^*(0,1))\\ &((1,1)+(1,0)(0,1)+(1,0)(0,0)^*(0,1))^*\\ &((1,0)(0,0)^*+\varepsilon)+\varepsilon\end{aligned}$$

Esta expresión regular se puede dividir naturalmente en 4 partes, el 'inicio', el 'loop', el 'final' y el 'vacío'. El 'vacío' garantiza que se acepta la palabra vacía. El 'inicio' garantiza que la primera parte acepta todo comienzo posible que termina en $(a,1)$. El 'loop' toma todas las formas posibles de rellenar de tal forma de que comiencen con $(1,a)$ y terminen con $(b,1)$, asi logrando poder 'correr' el loop de nuevo. Y por último el 'final', que da todos los posibles finales, más específicamente, que termine en $(a,1)$[2] o $(a,0)$.

■

## Problema 2:

Sea $\Sigma$ un alfabeto finito y sean $R_1$ y $R_2$ expresiones regulares sobre $\Sigma$. Se define el operador:

$$R_1 \downarrow\downarrow R_2$$

tal que $w \in \mathcal{L}(R_1 \downarrow\downarrow R_2)$ si, y solo si, $w$ se puede descomponer como $w = u_1v_1u_2v_2\cdots u_kv_k$ para algún $k \geq 1$ y con $u_i, v_i \in \Sigma^*$ para todo $i \leq k$ tal que $u_1, u_2, \cdots, u_k \in \mathcal{L}(R_1)$ y

[2] Esto corresponde al $\varepsilon$

$v_1, v_2, \cdots, v_k \in \mathcal{L}(R_2)$. Por ejemplo, la expresión $(a^*) \downdownarrows (b^*)$ define todas las palabras en $\{a, b\}^*$.

Demuestre que para todas expresiones regulares $R_1$ y $R_2$, el resultado de $R_1 \downdownarrows R_2$ define un lenguaje regular.

**Solución problema 2:** Se nota que si $R_1 \downdownarrows R_2$ es equivalente a $(R_1R_2)^+$, se tiene que $\mathcal{L}(R_1 \downdownarrows R_2)$ es un lenguaje regular. Ahora, sea $w \in \mathcal{L}((R_1R_2)^+)$ se tiene que $w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(R_1R_2)^k$, por lo que $w \in \mathcal{L}(R_1R_2)^k$ para algún $k \geq 1$, con lo que se tiene $w = u_1v_1u_2v_2 \cdots u_kv_k$ donde $u_i \in \mathcal{L}(R_1)$ y $v_i \in \mathcal{L}(R_2)$, lo que es la definición de $w \in \mathcal{L}(R_1 \downdownarrows R_2)$. Se nota que el argumento es prácticamente reversible[3] por lo que $\mathcal{L}(R_1 \downdownarrows R_2) = \mathcal{L}((R_1R_2)^+)$. Y como el segundo es un lenguaje regular[4] se tiene que el primero es un lenguaje regular.

$\blacksquare$

[3] Hay que tener cuidado en la parte de $w \in \mathcal{L}(R_1R_2)^k$ para algún $k \geq 1$, pero es un detalle menor.

[4] Por el teorema de Kleene.