



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tarea 1

Variable Compleja - MAT2705

Fecha de Entrega: 2019-09-06

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Problema 1	1
Problema 2	3
Problema 3	4
Problema 4	5
Problema 5	5
Problema 6	6
Problema 7	6

Problema 1:

(a) Grafique la imagen bajo proyección estereográfica de los siguientes conjuntos

- I. El hemisferio inferior: $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < 0\}$.
- II. $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \frac{3}{4} \leq z \leq 1\}$.
- III. Un círculo de la forma $\{(\sqrt{1 - z_0^2} \cos \theta, \sqrt{1 - z_0^2} \sin \theta, z_0) \in \mathbb{S}^2 : \theta \in [0, 2\pi)\}$ con z_0 fijo.
- IV. Un círculo de la forma $\{(\sqrt{1 - z^2} \cos \theta_0, \sqrt{1 - z^2} \sin \theta_0, z) \in \mathbb{S}^2 : z \in [-1, 1]\}$ con θ_0 fijo.

(b) Demuestre que la inversión $\frac{1}{z}$ es equivalente a una rotación de la esfera en π radianes alrededor del eje x .

Solución problema 1:

(a) Se muestran los gráficos:

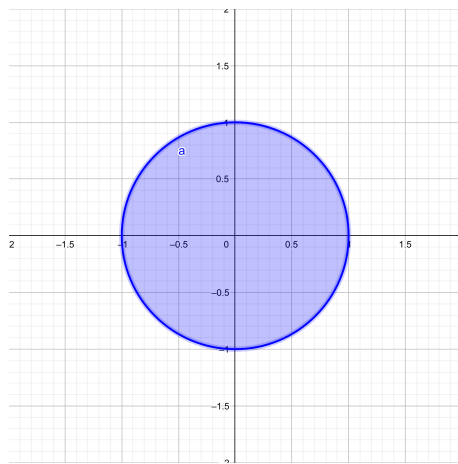


Figura 1:

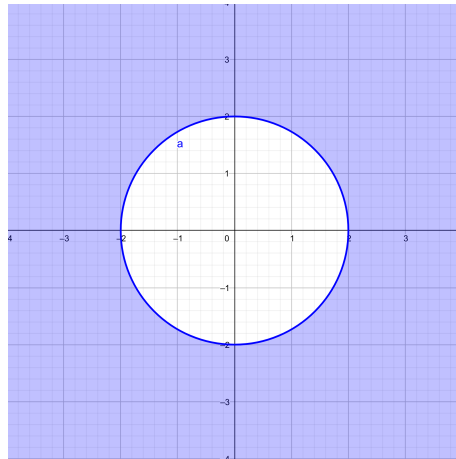


Figura 2:

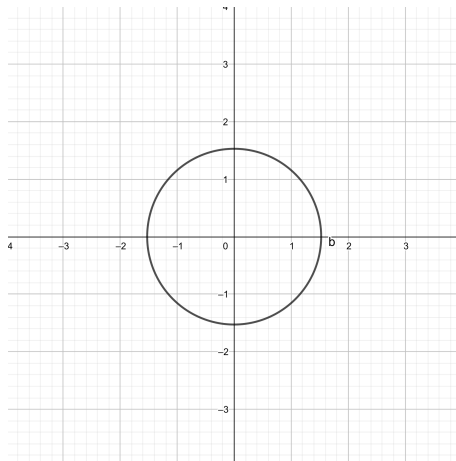


Figura 3: Con $z_0 = 0,2$

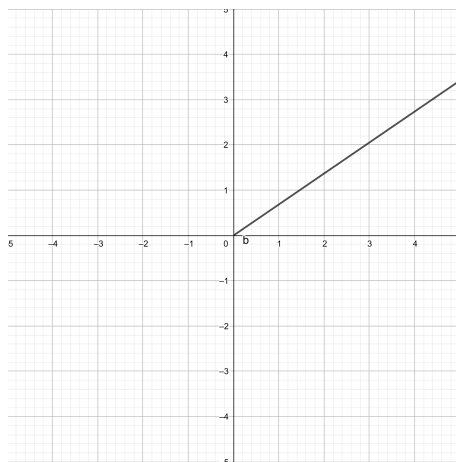


Figura 4: Con $\theta = 0,6$

- (b) Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$ la proyección estereográfica, y $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ la rotación en π radianes respecto el eje x . Se pide que $\rho \circ f = f \circ \frac{1}{z}$. Se recuerdan las matrices de rotación, y se representa ρ como una:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ 0 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora, es claro que la rotación mapea (x, y, z) a $(x, -y, -z)$. Sea $z \in \mathbb{C}$, se escribe como $z = x + iy$, luego $z \mapsto \frac{x-iy}{x^2+y^2}$, se aplica f y se llega a lo siguiente:

$$z \mapsto \left(\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}}{1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2}, \frac{\frac{-2y}{x^2+y^2}}{1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2}, \frac{-1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2} \right)$$

Esto se puede desarrollar un poco y se llega a:

$$\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{-2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right)$$

Con lo que claramente $\rho \circ f = f \circ \frac{1}{z}$

■

Problema 2:

Encuentre mapeos conformes entre las siguientes regiones:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.
- (b) $\{r \exp(i\theta) \in \mathbb{C} : \theta \in (0, \frac{\pi}{n}), r \in \mathbb{R}\}$ y \mathbb{C} , con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$.
- (d) $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$.
- (e) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (a, b)\}$

Solución problema 2:

- (a) Se recuerda que la inversión es un mapeo conforme, y que mapea las regiones pedidas.
- (b) Se recuerda que las funciones analíticas son mapeos conformes, se toma $f(x) = x^{n+1}$ se nota que cumple lo pedido.

- (c) Se ven las proyecciones de ambas regiones en la esfera y se nota que ambas son hemisferios, por lo que una rotación en la esfera cumple lo pedido.
- (d) Se nota que $z \mapsto \exp(z)$ mapea $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Y $\exp(z)$ es analítica, por lo que se tiene el mapeo conforme.
- (e) Usando los mapeos anteriores (los cuales son todos biyectivos excepto x^{n+1}) y el mapeo lineal f de $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (a, b)\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$, se hace la siguiente cadena de mapeos conformes, se usa f , luego $\exp(z)$, se rota en la esfera para llegar a $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y se invierte.

■

Problema 3:

Sea $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continua y se define en $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ la función

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t - z} dt.$$

Demuestre que H es analítica y calcule por definición su derivada.

Solución problema 3: Se nota que si para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t - z_0)^2} dt \right| = 0 \quad (1)$$

Entonces, $H(z)$ es analítica. Luego, se nota que dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, se tiene $0 < \inf_{t \in [0, 1]} |t - z_0| = \gamma$. Dado esto, se tiene que si $|z - z_0| < \gamma/2$ entonces $|z - t| > \gamma/2$ para $t \in [0, 1]$. Ahora desarrollando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left| \frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t - z_0)^2} dt \right| &= \left| \int_0^1 \frac{h(t)(t - z - t + z_0)}{(z - z_0)(t - z)(t - z_0)} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t - z_0)^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{h(t)}{t - z_0} \cdot \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - z_0} \right) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{h(t)}{t - z_0} \cdot \left(\frac{z_0 - z}{(t - z)(t - z_0)} \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{h(t)}{(t - z_0)^2} \cdot \frac{1}{t - z} \cdot (z - z_0) \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{h(t)}{(t - z_0)^2} \cdot \frac{2}{\gamma} \right| dt \cdot |z - z_0| \end{aligned}$$

Con lo que claramente el límite en (1) es cero.

■

Problema 4:

Considere un dominio D y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Se define $D^* = \{\bar{z} : z \in D\}$ y $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ para $z \in D^*$. Demuestre que g analítica y calcule su derivada.

Solución problema 4: Sea $g(x, y) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$ con $f(x, y) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$, entonces se tiene que $u_2(x, y) = u_1(x, -y)$ y $v_2(x, y) = -v_1(x, -y)$. Ahora, se calculan las derivas parciales de u_2 y v_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, -y) & \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, -y) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, -y) & &= -\left(-\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, -y)\right) \\ &= -\left(-\frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y)\right) & &= -\frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \\ &= -\frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Con esto, se ve que g cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, por lo que es analítica.

■

Problema 5:

Considere $f = u + iv$ analítica. Demuestre que

- (a) $|\nabla u| = |\nabla v| = |f'|$
- (b) $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$

Solución problema 5:

- (a) Se recuerda que el siguiente limite existe si no depende del camino tomado:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Por lo que $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$, análogamente para v . Con esto y usando la condición de Cauchy-Riemann, se ve la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = (u')^2 + (v')^2$$

Con lo anterior es claro que $|\nabla u| = |\nabla v| = |f'|$.

(b) Al calcular el gradiente de u y de v se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned}\langle \nabla u, \nabla v \rangle &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Con lo que se tiene lo pedido. ■

Problema 6:

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ inyectiva y analítica. Demuestre que

$$\text{Area}(f(D)) = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$$

Solución problema 6: Sea $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ un cambio de coordenadas, este esta bien definido en D ya que f es inyectiva y analítica. Luego, se calcula la inversa del Jacobiano:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Con esto y la condición de Cauchy-Riemann se nota que $|J^{-1}| = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, lo cual por la pregunta anterior es $|f'|^2$. Se aplica la transformación a la siguiente integral:

$$\iint_D |f'(z)|^2 dA$$

Con lo que queda:

$$\iint_D |f'(z)|^2 dA = \iint_{f(D)} 1 dA = \text{Area}(f(D))$$
■

Problema 7:

Decimos que una función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es armónica si $\Re(f)$ e $\Im(f)$ son armónicas. Demuestre que si h y zh son armónicas, entonces h es analítica.

Solución problema 7: Se recuerda que si una función f es armónica entonces $\Delta f = 0$, o equivalentemente, $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$. Sea $h = u + iv$ una función armónica tal que zh también lo

sea, entonces $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, además se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 (ux - vy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (ux - vy)}{\partial y^2} \\ &= x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 (uy + vx)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uy + vx)}{\partial y^2} \\ &= y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} + x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &= 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Con ambas se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, las cuales son las condiciones de Cauchy-Riemann. Con esto se tiene que h es analítica.

■