Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019

Tarea 1

Fundamentos de la Matemática - MAT 2405

Fecha de Entrega: 2019/03/27

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Maximiliano Norbu

Problemas

Problema 1 (15 pts)**.**

(a) (5 pts) Dadas oraciones α y β, muestre que $(\alpha \iff \beta)$ y $((\alpha \implies \beta) \wedge (\beta \implies \alpha))$ son lógicamente equivalentes.

(b) (10 pts) Demuestre por inducción en oraciones que toda oración es lógicamente equivalente a alguna oración que no tiene el símbolo $\iff$.

Solución problema 1:]

(a) Viendo la siguiente tabla con todas las valuaciones posibles se nota que son lógicamente equivalentes pues ambas siempre tienen el mismo valor de verdad.

α	β	$\alpha \implies \beta$	$\beta \implies \alpha$	$\alpha \iff \beta$	$((\alpha \implies \beta) \wedge (\beta \implies \alpha))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

(b) Sabemos que a partir de oraciones base, hay 6 tipos de oraciones que se pueden armar (incluyendo a la oración en sí). Sean α y β oraciones cualesquiera, los tipos de oraciones que se pueden armar con estas son:

1) α

2) $\neg\alpha$

3) $\alpha \wedge \beta$

4) $\alpha \vee \beta$

5) $\alpha \implies \beta$

6) $\alpha \iff \beta$

Como la base del lenguaje son las letras propocicionales y estas no tienen equivalencias, asumiré que ni α ni β tienen equivalencias (esto para ver que podemos construir todo a partir de algo que no tiene equivalencias). Sabemos que si α y β no tienen equivalencias, entonces las oraciones del tipo 1 al tipo 5 tampoco tienen equivalencias. Ahora, llamemos γ una oración de tipo 1 a 5 cualquiera. Esta es lógicamente equivalente a $\neg\neg\gamma$ pues, sea $\mathcal{V}$ una valuación cualquiera:
si $\mathcal{V}(\gamma) = V$
$\implies \mathcal{V}(\neg\gamma) = F$
$\implies \mathcal{V}(\neg\neg\gamma) = V$
y si $\mathcal{V}(\gamma) = F$
$\implies \mathcal{V}(\neg\gamma) = V$
$\implies \mathcal{V}(\neg\neg\gamma) = F$
Por ende, γ y $\neg\neg\gamma$ son lógicamente equivalentes. Como $\neg\neg\gamma$ es solo agregarle signos "$\neg$" a γ, sabemos que $\neg\neg\gamma$ no contiene equivalencias.
Ahora, llamemos κ una oración de tipo 6, digamos, $\alpha \iff \beta$ donde α y β son oraciones sin equivalencias. Por el ejercicio 1.a κ es lógicamente equivalente a $((\alpha \implies \beta) \wedge (\beta \implies \alpha))$, oración que no tiene equivalencias.
Por inducción de oraciones, esto se puede extender a toda oración constructible del lenguaje, por ende toda oración es lógicamente equivalente a otra que no contiene equivalencias.

$\blacksquare$

Problema 2 (10 pts)**.**

(a) (5 pts) Demuestre que si Σ es un conjunto no vacío de oraciones que cumple ambos $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$, entonces Σ no es satisfacible.

(b) (5 pts) ¿Es el conjunto vacío ϕ satisfacible? ¿Se cumplen $\phi \models \varphi$ y/o $\phi \models \neg\varphi$?

Solución problema 2:

(a) Se asume que Σ es satisfacible, entonces existe una valuación $\mathcal{V}$ tal que toda oración en Σ sea verdad. Pero si φ es verdad, entonces $\neg\varphi$ es falso, ahora $\Sigma \models \neg\varphi$, por lo que $\neg\varphi$ es verdad, pero una oración no puede ser verdadera y falsa ya que una valuación solo puede dar un valor para cada oración. Con esto se concluye que Σ no es satisfacible.

(b) Por definición, ya que $\emptyset$ no tiene oraciones se cumple que para toda valuación todas las oraciones de $\emptyset$ son verdad. Ahora si $\emptyset \models \varphi$, significa que toda valuación que satisface $\emptyset$ también satisface φ, pero como toda valuación satisface $\emptyset$, en particular hay una tal que φ sea falso, análogamente con $\neg\varphi$.

■

Problema 3 (5 pts)**.** Sea α oración. Encuentre una derivación $\neg\neg\alpha$ a partir del conjunto $\Delta = \{\alpha\}$ utilizando los axiomas y regla de deducción vistas en clase.

Solución problema 3:

$$\varphi_1 = \alpha$$

$$\varphi_2 = (\neg\alpha \implies ((c \implies \neg\alpha) \implies \neg\alpha)) \qquad (A1)$$

$$\varphi_3 = ((\neg\alpha \implies ((c \implies \neg\alpha) \implies \neg\alpha)) \implies ((\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) \implies (\neg\alpha \implies \neg\alpha))) \qquad (A2)$$

$$\varphi_4 = ((\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) \implies (\neg\alpha \implies \neg\alpha)) \qquad (MP)$$

$$\varphi_5 = (\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) \qquad (A1)$$

$$\varphi_6 = (\neg\alpha \implies \neg\alpha) \qquad (MP)$$

$$\varphi_7 = ((\neg\alpha \implies \neg\alpha) \implies (\alpha \implies \neg\neg\alpha)) \qquad (A9)$$

$$\varphi_8 = (\alpha \implies \neg\neg\alpha) \qquad (MP)$$

$$\varphi_9 = \neg\neg\alpha \qquad (MP)$$

■

Problema 4. Bonus
Encuentre una derivación de la oración β partir del conjunto $\{\neg\neg\beta\}$ utilizando los axiomas y regla de deducción vistas en clase.

Solución problema 4: Dado $\neg\neg\alpha$

$$\varphi_1 = \neg\neg\alpha$$

$$\varphi_2 = (\neg\neg\alpha \implies ((x \implies x) \implies \neg\neg\alpha)) \qquad (A1)$$

$$\varphi_3 = ((x \implies x) \implies \neg\neg\alpha) \qquad (MP)$$

$$\varphi_4 = (((x \implies x) \implies \neg\neg\alpha) \implies (\neg\alpha \implies \neg(x \implies x))) \qquad (A9)$$

$$\varphi_5 = (\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) \qquad (MP)$$

$$\varphi_6 = (\neg(x \implies x) \implies \alpha) \qquad (A10)$$

$$\varphi_7 = ((\neg(x \implies x) \implies \alpha) \implies (\neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha))) \qquad (A1)$$

$$\varphi_8 = (\neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha)) \qquad (MP)$$

$$\varphi_9 = ((\neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha)) \implies ((\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) \implies (\neg\alpha \implies \alpha))) \qquad (A2)$$

$$\varphi_{10} = ((\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) \implies (\neg\alpha \implies \alpha)) \qquad (MP)$$

$$\varphi_{11} = (\neg\alpha \implies \alpha) \qquad (MP)$$

$$\varphi_{12} = (\alpha \vee \neg\alpha) \qquad (A11)$$

$$\varphi_{13} = ((\alpha \implies \alpha) \implies ((\neg\alpha \implies \alpha) \implies ((\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha))) \qquad (A5)$$

$$\varphi_{14} = (\alpha \implies ((c \implies \alpha) \implies \alpha)) \qquad (A1)$$

$$\varphi_{15} = ((\alpha \implies ((c \implies \alpha) \implies \alpha)) \implies ((\alpha \implies (c \implies \alpha)) \implies (\alpha \implies \alpha))) \qquad (A2)$$

$$\varphi_{16} = ((\alpha \implies (c \implies \alpha)) \implies (\alpha \implies \alpha)) \qquad (MP)$$

$$\varphi_{17} = (\alpha \implies (c \implies \alpha)) \qquad (A1)$$

$$\varphi_{18} = (\alpha \implies \alpha) \qquad (MP)$$

$$\varphi_{19} = ((\neg\alpha \implies \alpha) \implies ((\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha)) \qquad (MP)$$

$$\varphi_{20} = ((\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha) \qquad (MP)$$

$$\varphi_{21} = \alpha \qquad (MP)$$

$\blacksquare$