Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Primer Semestre de 2019

Tarea 2

Introducción a la Geometría Algebraica — MAT 2335

Fecha de Entrega: 2019/04/11

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Notas

En esta tarea se usará la notación $\overline{a} = (a_1, ..., a_n)$

. Problema 1.25:

(a) Muestre que $V(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ es irreducible; en efecto, $I(V(y - x^2)) = I(y - x^2)$

(b) Separe $V(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ en componentes irreducibles.

Solución problema 1.25:

$\blacksquare$

. Problema 1.29:

Muestre que $\mathbb{A}^n_k$ es irreducible si k es infinito.

Solución problema 1.29:

$\blacksquare$

. Problema 1.30:

Sea $k = \mathbb{R}$

(a) Muestre que $I(V(x^2 + y^2 + 1)) = (1)$

(b) Demuestre que todo subconjunto algebraico de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ es igual a $V(F)$ para algún $F \in \mathbb{R}[x, y]$

Solución problema 1.30:

$\blacksquare$

. Problema 1.31:

(a) Encuentre los componentes irreducibles de $V(y^2 - xy - x^2y + x^3)$ en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y también en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

(b) Haga lo mismo para $V(y^2 - x(x^2 - 1))$, y para $V(x^3 + x - x^2y - y)$

Solución problema 1.31:

■

. Problema 1.33:

(a) Separe $V(x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ en componentes irreducibles.

(b) Sea $V = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} : t \in \mathbb{C}\}$. Encuentre $I(V)$, y demuestre que es irreducible.

Solución problema 1.33:

■

. Problema 1.37:

Sea k un cuerpo cualquiera, $F \in k[x]$ un polinomio de grado $n > 0$. Muestre que los residuos $\overline{1}, \overline{x}, ..., \overline{x}^{n-1}$ forman una base de $k[x]/(F)$ sobre k.

Solución problema 1.37:

■

. Problema 1.45:

Sea R un subanillo de S, S un subanillo de T.

1. Si $S = \sum Rv_i, T = \sum Sw_j$, muestre que $T = \sum Rv_iw_j$.
2. Si $S = R[v_1, ..., v_n], T = S[w_1, ..., w_m]$, muestre que $T = R[v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m]$.
3. Si R, S, T son cuerpos, y $S = R(v_1, ..., v_n), T = S(w_1, ..., w_m)$, demuestre que $T = R(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m)$.

Solución problema 1.45:

■

. Problema 1.49:

Sea k un cuerpo, $L = k(x)$ el cuerpo de funciones racionales en una variable sobre k.

1. Muestre que todo elemento de L que es integral sobre $k[x]$ ya esta en $k[x]$. (Hint: Si $z^n + a_1 z^{n-1} + ... = 0$, tome $z = F/G$, con F, G coprimos. Entonces $F^n + a_1 F^{n-1} + ... = 0$, por lo que G divide a F.)

2. Muestre que hay un elemento no cero $F \in k[x]$ tal que para todo $z \in L$, $F^n z$ es integral sobre $k[x]$ para algún $n > 0$.

Solución problema 1.49:

■

. Problema 1.51:

Sea k un cuerpo, $F \in k[x]$ un polinomio irreducible mónico de grado $n > 0$.

(a) Muestre que $L = k[x]/(F)$ es un cuerpo, y si a es el residuo de x en L, entonces $F(a) = 0$.

(b) Suponga que L' es una extensión de cuerpo de k, $y \in L'$ tal que $F(y) = 0$. Demuestre que el homorfismo de $k[x]$ a L' que toma x a y, induce un isomorfismo de L con $k(y)$.

(c) Con L', y como en (b), suponga que $G \in k[x]$ y $G(y) = 0$. Muestre que F divide a G.

(d) Muestre que $F = (x - a)F_1, F_1 \in L[x]$

Solución problema 1.51:

■

. Problema 1.54:

Sea R un dominio con K su cuerpo cociente, y sea L una extensión finita y algebraica de K

1. Para todo $v \in L$, demuestre que existe $a \in R$ distinto a cero tal que av es integral sobre R

2. Muestre que hay una base $v_1, ..., v_n$ para L sobre K (como un espacio vectorial) tal que cada v_i es integral sobre R.

Solución problema 1.54:

■