



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre de 2019

Tarea 1

Fundamentos de la Matemática - MAT 2405

Fecha de Entrega: 2019/03/27

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Maximiliano Norbu

Problemas

Problema 1 (15 pts).

- (a) (5 pts) Dadas oraciones α y β , muestre que $(\alpha \iff \beta)$ y $((\alpha \implies \beta) \wedge (\beta \implies \alpha))$ son lógicamente equivalentes.
- (b) (10 pts) Demuestre por inducción en oraciones que toda oración es lógicamente equivalente a alguna oración que no tiene el símbolo \iff .

Solución problema 1:]

- (a) Viendo la siguiente tabla con todas las valuaciones posibles se nota que son lógicamente equivalentes pues ambas siempre tienen el mismo valor de verdad.

α	β	$\alpha \implies \beta$	$\beta \implies \alpha$	$\alpha \iff \beta$	$((\alpha \implies \beta) \wedge (\beta \implies \alpha))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

- (b) Sabemos que a partir de oraciones base, hay 6 tipos de oraciones que se pueden armar (incluyendo a la oración en sí). Sean α y β oraciones cualesquiera, los tipos de oraciones que se pueden armar con estas son:

1) α

- 2) $\neg\alpha$
- 3) $\alpha \wedge \beta$
- 4) $\alpha \vee \beta$
- 5) $\alpha \implies \beta$
- 6) $\alpha \iff \beta$

Como la base del lenguaje son las letras propocionales y estas no tienen equivalencias, asumiré que ni α ni β tienen equivalencias (esto para ver que podemos construir todo a partir de algo que no tiene equivalencias). Sabemos que si α y β no tienen equivalencias, entonces las oraciones del tipo 1 al tipo 5 tampoco tienen equivalencias. Ahora, llamemos γ una oración de tipo 1 a 5 cualquiera. Esta es lógicamente equivalente a $\neg\neg\gamma$ pues, sea \mathcal{V} una valuación cualquiera:

$$\begin{aligned} \text{si } \mathcal{V}(\gamma) &= V \\ \implies \mathcal{V}(\neg\gamma) &= F \\ \implies \mathcal{V}(\neg\neg\gamma) &= V \\ \text{y si } \mathcal{V}(\gamma) &= F \\ \implies \mathcal{V}(\neg\gamma) &= V \\ \implies \mathcal{V}(\neg\neg\gamma) &= F \end{aligned}$$

Por ende, γ y $\neg\neg\gamma$ son lógicamente equivalentes. Como $\neg\neg\gamma$ es solo agregarle signos “ \neg ” a γ , sabemos que $\neg\neg\gamma$ no contiene equivalencias.

Ahora, llamemos κ una oración de tipo 6, digamos, $\alpha \iff \beta$ donde α y β son oraciones sin equivalencias. Por el ejercicio 1.a κ es lógicamente equivalente a $((\alpha \implies \beta) \wedge (\beta \implies \alpha))$, oración que no tiene equivalencias.

Por inducción de oraciones, esto se puede extender a toda oración constructible del lenguaje, por ende toda oración es lógicamente equivalente a otra que no contiene equivalencias.

■

Problema 2 (10 pts).

- (a) (5 pts) Demuestre que si Σ es un conjunto no vacío de oraciones que cumple ambos $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$, entonces Σ no es satisfacible.
- (b) (5 pts) ¿Es el conjunto vacío ϕ satisfacible? ¿Se cumplen $\phi \models \varphi$ y/o $\phi \models \neg\varphi$?

Solución problema 2:

- (a) Se asume que Σ es satisfacible, entonces existe una valuación \mathcal{V} tal que toda oración en Σ sea verdad. Pero si φ es verdad, entonces $\neg\varphi$ es falso, ahora $\Sigma \models \neg\varphi$, por lo que $\neg\varphi$ es verdad, pero una oración no puede ser verdadera y falsa ya que una valuación solo puede dar un valor para cada oración. Con esto se concluye que Σ no es satisfacible.
- (b) Por definición, ya que \emptyset no tiene oraciones se cumple que para toda valuación todas las oraciones de \emptyset son verdad. Ahora si $\emptyset \models \varphi$, significa que toda valuación que satisface \emptyset también satisface φ , pero como toda valuación satisface \emptyset , en particular hay una tal que φ sea falso, análogamente con $\neg\varphi$.

■

Problema 3 (5 pts). Sea α oración. Encuentre una derivación $\neg\neg\alpha$ a partir del conjunto $\Delta = \{\alpha\}$ utilizando los axiomas y regla de deducción vistas en clase.

Solución problema 3:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha \\ \varphi_2 &= (\neg\alpha \implies ((c \implies \neg\alpha) \implies \neg\alpha)) & (A1) \\ \varphi_3 &= ((\neg\alpha \implies ((c \implies \neg\alpha) \implies \neg\alpha)) \implies ((\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) \implies (\neg\alpha \implies \neg\alpha))) & (A2) \\ \varphi_4 &= ((\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) \implies (\neg\alpha \implies \neg\alpha)) & (MP) \\ \varphi_5 &= (\neg\alpha \implies (c \implies \neg\alpha)) & (A1) \\ \varphi_6 &= (\neg\alpha \implies \neg\alpha) & (MP) \\ \varphi_7 &= ((\neg\alpha \implies \neg\alpha) \implies (\alpha \implies \neg\neg\alpha)) & (A9) \\ \varphi_8 &= (\alpha \implies \neg\neg\alpha) & (MP) \\ \varphi_9 &= \neg\neg\alpha & (MP)\end{aligned}$$

■

Problema 4. Bonus

Encuentre una derivación de la oración β a partir del conjunto $\{\neg\neg\beta\}$ utilizando los axiomas y regla de deducción vistas en clase.

Solución problema 4: Dado $\neg\neg\alpha$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \neg\neg\alpha \\
 \varphi_2 &= (\neg\neg\alpha \implies ((x \implies x) \implies \neg\neg\alpha)) & (A1) \\
 \varphi_3 &= ((x \implies x) \implies \neg\neg\alpha) & (MP) \\
 \varphi_4 &= (((x \implies x) \implies \neg\neg\alpha) \implies (\neg\alpha \implies \neg(x \implies x))) & (A9) \\
 \varphi_5 &= (\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) & (MP) \\
 \varphi_6 &= (\neg(x \implies x) \implies \alpha) & (A10) \\
 \varphi_7 &= ((\neg(x \implies x) \implies \alpha) \implies (\neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha))) & (A1) \\
 \varphi_8 &= (\neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha)) & (MP) \\
 \varphi_9 &= ((\neg\alpha \implies (\neg(x \implies x) \implies \alpha)) \implies ((\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) \implies (\neg\alpha \implies \alpha))) & (A2) \\
 \varphi_{10} &= ((\neg\alpha \implies \neg(x \implies x)) \implies (\neg\alpha \implies \alpha)) & (MP) \\
 \varphi_{11} &= (\neg\alpha \implies \alpha) & (MP) \\
 \varphi_{12} &= (\alpha \vee \neg\alpha) & (A11) \\
 \varphi_{13} &= ((\alpha \implies \alpha) \implies ((\neg\alpha \implies \alpha) \implies ((\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha))) & (A5) \\
 \varphi_{14} &= (\alpha \implies ((c \implies \alpha) \implies \alpha)) & (A1) \\
 \varphi_{15} &= ((\alpha \implies ((c \implies \alpha) \implies \alpha)) \implies ((\alpha \implies (c \implies \alpha)) \implies (\alpha \implies \alpha))) & (A2) \\
 \varphi_{16} &= ((\alpha \implies (c \implies \alpha)) \implies (\alpha \implies \alpha)) & (MP) \\
 \varphi_{17} &= (\alpha \implies (c \implies \alpha)) & (A1) \\
 \varphi_{18} &= (\alpha \implies \alpha) & (MP) \\
 \varphi_{19} &= ((\neg\alpha \implies \alpha) \implies ((\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha)) & (MP) \\
 \varphi_{20} &= ((\alpha \vee \neg\alpha) \implies \alpha) & (MP) \\
 \varphi_{21} &= \alpha & (MP)
 \end{aligned}$$

■