Tarea I

Nicholas Mc-Donnell

1er semestre 2019

Índice

Problema 1.2 2

Problema 1.4 2

Problema 1.6 2

Problema 1.8 3

Problema 1.12 3

Problema 1.14 4

Problema 1.16 4

Problema 1.18 5

Problema 1.20 5

Problema 1.22 5

Notas

En esta tarea se usará la notación $\overline{a} = (a_1, ..., a_n)$

Problema 1.2: Sea R un DFU, K cuerpo cociente de R. Muestre que todo elemento z de K puede ser escrito $z = a/b$, donde a, b no tiene factores en común; este representante es único salvo unidades de R.

Solución problema 1.2: Dado un $z \in K$, se sabe que $\exists c, d \in R : z = c/d$, y ya que R es un DFU c, d tienen factorización única. Si $c = u_1 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}, d = u_2 \cdot q_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot q_k^{\beta_k}$, se pueden ver los factores en común $(r_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot r_m^{\gamma_m})$ y escribir $c = u_1 \cdot a \cdot r_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot r_m^{\gamma_m}, d = u_2 \cdot b \cdot r_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot r_m^{\gamma_m}$, luego $c/d = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{r_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot r_m^{\gamma_m}}{r_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot r_m^{\gamma_m}} = u_3 \cdot \frac{a}{b}$, donde los u_i son unidades, con esto tenemos lo pedido.

■

Problema 1.4: Sea k un cuerpo infinito, $F \in k[x_1, ..., x_n]$. Suponga que $F(\bar(a)) = 0$ para todo $\bar(a) \in k^n$. Muestre que $F = 0$ (*Hint:* Escriba $F = \sum F_i x_n^i \in k[x_1, ..., x_{n_1}]$. Use inducción en n, y el hecho que $F(x_1, ..., x_n)$ solo tiene una cantidad finita de raíces si algún $F_i(a_1, ..., a_{n-1}) \neq 0$)

Solución problema 1.2: Por inducción sobre n.
Para $n = 1$, sea $F \in k[x]$ tal que $F(a) = 0 \ \forall a \in k$, pero se sabe que un polinomio no trivial en una variable solo puede tener a lo más finitos ceros, por lo que $F = 0$.
Para n, se sabe que $k[x_1, ..., x_{n-1}, x_n] = k[x_1, ..., x_{n-1}][x_n]$, dado esto y un polinomio $F \in k[x_1, ..., x_n]$ que cumple que $F(\bar(a)) = 0 \ \forall \overline{a} \in k^n$, se escribe F de la siguiente forma:

$$F(x_1, .., x_n) = \sum_{i=0}^{m} F_i \cdot x_n^i \text{ donde } F_i \in k[x_1, ..., x_{n-1}]$$

Evaluando F en $\overline{a} \in k^{n-1}$ se tiene lo siguiente:

$$F(\overline{a}, x_n) = \sum_{i=0}^{m} F_i(\overline{a}) \cdot x_n^i$$

Se nota que $F(\overline{a}, x_n) \in k[x_n]$, con lo que sabemos que $F(\overline{a}, x_n)$ es el polinomio cero, o tiene finitas raíces, como para todo $a_n \in k$ se cumple que $F(\overline{a}, a_n) = 0$, se cumple que todos los $F_i(\overline{a})$ son cero, pero recordamos que $\overline{a}$ es arbitrario, por lo que por hipótesis inductiva los F_i también son cero. Con lo que F es cero.

■

Problema 1.6: Muestre que todo cuerpo algebraicamente cerrado es infinito. (*Hint:* Los polinomios irreducibles mónicos son $x - a, a \in k$)

Solución problema 1.6: Por contradicción, se tiene un cuerpo algebraicamente cerrado k tal que $|k| = n < \infty$. Se cuentan los polinomios mónicos de grado 2, usando que k es algebraicamente cerrado se sabe lo siguiente:

$$x^2 + ax + b = (x - c)(x - d)$$
$$\#\{x^2 + ax + b : (a, b) \in k^2\} = \#\{(x - c)(x - d) : (c, d) \in k^2\}$$

Lo primero claramente es n^2 y lo segundo es la cantidad de pares no ordenados con distintos elementos ($\binom{n}{2}$), más la cantidad de pares con el mismo elemento (n)

$$n^2 = \binom{n}{2} + n$$
$$n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + n$$
$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Claramente $n^2 \neq \frac{n(n+1}{2}$, excepto para $n = 0, 1$ pero no hay cuerpos de cero o un elemento. Por lo que no hay cuerpos finitos algebraicamente cerrados.

■

Problema 1.8:

Muestre que los conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^1_k$ son solo los conjuntos finitos con el mismo $\mathbb{A}^1_k$.

Solución problema 1.8: Se asume que existe algún conjunto algebraico $X \nsubseteq \mathbb{A}^1_k$ que es infinito. Luego existe algún conjunto finito de polinomios S tal que $V(S) = X$, sea $p \in S \subset k[x]$, sabemos que p tiene finitos ceros. Definimos $S' = \{\deg p : p \in S\}$, como S es finito, S' tiene un máximo s, por lo que se puede acotar $\#V(S) \leq \#S \cdot s \in \mathbb{N}$, pero X es infinito con lo que tenemos una contradicción.

■

Problema 1.12:

Suponga C es una curva afín en el plano, y L es una linea en $\mathbb{A}^2_k$, $L \nsubseteq C$. Suponga $C = V(F)$, $F \in k[x, y]$ un polinomio de grado n. Muestre que $L \cap C$ es un conjunto finito de no más que n puntos. (*Hint:* Suponga que $L = V(y - (ax + b))$, y considere $F(x, ax + b) \in k[x]$.)

Solución problema 1.12: Ya que L es una linea (recta), existe $p(x, y) = ax + by + c :$ $V(p) = L$, se nota que si $b \neq 0$ entonces $q(x, y) = a/bx + y + c/b$ tiene los mismos ceros que p y se puede escribir como $q(x, y) = y - (-a/bx - c/b)$. En caso de que $b = 0$ sabemos que $a \neq 0$, si no $V(p) = \emptyset \vee V(p) = \mathbb{A}_k^2$. Con esto notamos que existe $q \in k[x,y] : q(x,y) = y - (a'x + b') \wedge V(q) = L$ (si no existe $q(x,y) = x - (a''y + b'')$ que cumple lo mismo). Con esto se analiza $F(x, a'x + b')$, se puede notar que $V(F(x, a'x + b')) = V(F) \cap L$. Se ve que $F(x, a'x + b') \in k[x]$, por lo que tiene finitos ceros. Con esto se tiene que $V(F) \cap L$ tiene finitos elementos.

■

Problema 1.14: Sea F un polinomio no constante en $k[x_1, ..., x_n]$, k algebraicamente cerrado. Muestre que $\mathbb{A}_k^n \setminus V(F)$ es infinito si $n \geq 1$, y $V(F)$ es infinito si $n \geq 2$. Concluya que el complemento de un conjunto algebraico es infinito. (*Hint:* Ver el problema 1.4)

Solución problema 1.14: Se nota que $V(F) \not\subseteq \mathbb{A}_k^n$, ya que por el problema 1.4 se sabe que si $\forall \overline{a} \in \mathbb{A}_k^n : F(\overline{a}) = 0 \implies F(\overline{x}) = 0$, pero F es no constante. Supongamos que $\mathbb{A}_k^n \setminus V(F)$ es finito, luego sean $\overline{a}_i$ sus elementos, se pueden construir los polinomios $p_i(\overline{x}) = \prod_{j=1}^n (x_j - a_j)$. Con estos se construye $G = F \cdot \prod_{i=1}^m p_i$, claramente $V(G) = \mathbb{A}_k^n$, por lo que $G = 0$, pero $p_i \neq 0$, lo que implica que $F = 0$ una contradicción. Con esto se tiene que $\mathbb{A}_k^n \setminus V(F)$ es infinito para $n \geq 1$.
Dado $F \in k[x_1, ..., x_n]$ no constante, y $V(F)$, se asume que $V(F)$ es finito. Se sabe que F se puede escribir de la siguiente manera:

$$F(\overline{x}, x_n) = \sum_{i=0}^m g_i(\overline{x}) x_n^i \quad q_i \in k[x_1, ..., x_{n-1}]$$

Como $V(F)$ es finito, $n \geq 2$ y k es algebraicamente cerrado (es infinito por problema 1.6) existe $\overline{a} \in \mathbb{A}_k^{n-1} : F(\overline{a}, x_n) \neq 0 \forall x_n \in k$, luego, se ve evalúa $\overline{a}$ en el polinomio:

$$F(\overline{a}, x_n) = \sum_{i=0}^m g_i(\overline{a}) x_n^i$$

Se puede notar que $F(\overline{a}, x_n)$ es un polinomio en $k[x_n]$, por lo que tiene que sea una raíz, pero elegimos $\overline{a}$ tal que no tuviera raíces. Con esto tenemos una contradicción. Por lo que $V(F)$ es infinito.

■

Problema 1.16: Sea V, W un conjunto algebraico en $\mathbb{A}_k^n$. Muestre que $V = W$ ssi $I(V) = I(W)$.

Solución problema 1.16: Sean V, W conjuntos algebraicos, trivialmente se nota que $I(V) = I(W)$ si $V = W$. Para la otra implicancia, sean $I(V) = I(W)$, y sea $\overline{a} \in V$, y

$p \in I(V) = I(W)$, luego $p(\overline{a}) = 0$, por lo que $\overline{a} \in W$. Análogamente, se consigue la otra contención.

■

Problema 1.18: Sea I un ideal en un anillo R. Si $a^n, b^m \in I$, muestre que $(a+b)^{n+m}$. Muestre $\text{rad}(I)$ es un ideal, de hecho un ideal radical. Muestre que un ideal primo es radical.

Solución problema 1.18: Sabemos que $(a+b)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} a^i b^{m+n-i}$, dado un termino de esta sumatoria $a^i b^{m+n-i}$ tenemos dos casos $i \geq n$ e $i < n$. En el primer caso escribimos lo siguiente $a^i b^{m+n-i} = a^n \cdot a^{n-i} b^{m+n-i}$, como $a^n \in I$ entonces $a^i b^{m+n-i} \in I$. En el segundo caso notamos que si $n > i$ entonces $m + n - i > m$, por lo que se puede usar el mismo argumento anterior, pero con b^m. Con esto se concluye que todos los términos de $(a+b)^{n+m}$ pertenecen a I, y por la aditividad $(a+b)^{n+m} \in I$.

■

Problema 1.20: Muestre que para cualquier ideal I en $R = k[x_1, ..., x_n]$, $V(I) = V(\text{rad}(I))$, y $\text{rad}(I) \subset I(V(I))$.

Solución problema 1.20: Claramente $\text{rad}(I) \subseteq I$, por lo que $V(\text{rad}(I)) \supseteq V(I)$. Sea $\overline{a} \in V(\text{rad}(I))$, entonces $\exists m \in \mathbb{N}, p \in I : p^m \in I \wedge p(\overline{a}) = 0$ por lo que $p^m(\overline{a}) = 0 \implies \overline{a} \in V(I)$, con esto se concluye que $V(I) = V(\text{rad}(I))$. Ahora dado $p \in \text{rad}(I)$, y un $\overline{a} \in \mathbb{A}_k^n : p(\overline{a}) = 0$ como $V(I) = V(\text{rad}(I))$, entonces $\overline{a} \in V(I)$, por lo que $p \in I(V(I))$. Con esto se concluye que $\text{rad}(I) \subseteq I(V(I))$.

■

Problema 1.22: Se I un ideal en un anillo R, $\pi : R \to R/I$ el homorfismo natural.

(a) Muestre que para cualquier ideal J' de R/I, $\pi^{-1}(J') = J$ es un ideal de R que contiene a I, y para cada ideal J en R que contiene I, $\pi(J) = J'$ es un ideal de R/I. Esto arma un correspondencia uno-a-uno natural entre {ideales de R/I}$= \mathcal{I}'$ y {ideales de R que contienen I}$= \mathcal{I}$.

(b) Muestra que J' es ideal radical ssi J es radical. Similarmente para ideales primos y maximales.

(c) Muestre que J' es finitamente generado si J lo es. Concluya que R/I es Noetheriano si R es Noetheriano. Todo anillo de la forma $k[x_1, ..., x_n]/I$ es Noetheriano.

Solución problema 1.22:

(a) Sea J' un ideal, luego $0 \in J = \pi^{-1}(J')$, ya que $\pi^{-1}(\{0\}) = I$ se sabe que $I \subseteq \pi^{-1}(J') = J$. Sean $a, b \in J$, entonces $\pi(a), \pi(b) \in J'$, luego $\pi(a) + \pi(b) = \pi(a+b) \in J'$ con lo que $a + b \in \pi^{-1}(J') = J$. Sea $a \in J, r \in R$, de esto se nota que $\pi(a) \in J', \pi(r) \in R/I$, por lo que $\pi(r)\pi(a) = \pi(ra) \in J'$ con lo cual se sabe que $ra \in \pi^{-1}(J') = J$. Con esto se concluye que $J \supseteq I$ es ideal.

Sea $J \supseteq I$ un ideal, entonces $0 \in J' = \pi(J)$, ya que $\pi(I) = \{0\}$. Sean $a', b' \in J'$, luego $\exists a, b \in J : \pi(a) = a', \pi(b) = b'$, con esto se ve que $a' + b' = \pi(a) + \pi(b) = \pi(a+b) \in J'$. Sean $a' \in J', r' \in R/I$, se puede ver que $\exists a \in J, r \in R : \pi(a) = a', \pi(r) = r'$, por lo que $r'a' = \pi(r)\pi(a) = \pi(ra) \in J'$. Por lo que se puede concluir que J' es un ideal.

(b) Sea J ideal radical, y sea $b^m \in J'$. Luego, existe $a \in R : \pi(a) = b$, dado eso $\pi(a^m) = b^m \in J'$, por lo que $a^m \in J$, y ya que J es radical $a \in J$, con esto $\pi(a) = b \in J'$ por lo que J' es radical. Similarmente si J' radical, $a^m \in J$ luego $\pi(a)^m \in J'$, por lo que $\pi(a) \in J'$ con lo que $\pi(a) \in J'$ por lo que $a \in J$, lo significa que J es radical.

Sea J ideal primo, luego sean $a', b' \in R/I : a'b' \in J'$, se sabe que existen $a, b \in R : \pi(a) = a', \pi(b) = b'$, con esto se ve que $ab \in J$ y como J ideal primo $a \in J \vee b \in J \implies \pi(a) = a' \in J' \vee \pi(b) = b' \in J'$. Entonces J' ideal primo. Ahora, sea J' ideal primo, y sean $a, b \in R : ab \in J$, entonces $\pi(a)\pi(b) = \pi(ab) \in J'$ y ya que J' primo $\pi(a) \in J' \vee \pi(a) \in J' \implies a \in J \vee b \in J$. Por lo que J es ideal primo.

Sea J' ideal maximal, y supongamos que $\pi^{-1}(J') = J \supseteq I$ ideal no maximal, luego existe ideal $M \supseteq J$. Se ve que $J' = \pi(J) \subseteq \pi(M) = M'$ lo que es una contradicción. Por lo que J es ideal maximal. Ahora, sea J ideal maximal y su imagen $\pi(J) = J'$ es no maximal, por lo que existe $M' \supseteq J'$, sea $M = \pi^{-1}(M') \supseteq \pi^{-1}(J') = J$, pero J es maximal, una contradicción. Por lo que J' es maximal.

(c) Sea J finitamente generado, y sea $a' \in J'$, entonces existe $a \in J : \pi(a) = a'$, como J es finitamente generado $J = (a_1, ..., a_n)$ y $\exists r_i \in R : a = \sum_{i=1}^n r_i \cdot a_i$, luego $\pi(a) = \sum_{i=1}^n \pi(r_i)\pi(a_i)$, como a' es un elemento arbitrario de J', $(\pi(a_1), ..., \pi(a_n))$ genera J', por ende J' es finitamente generado. Con esto se concluye directamente que si todo J es finitamente generado, todo J' es finitamente generado. Por lo que si R Noetheriano R/I es Noetheriano. Como corolario directo $k[x_1, .., x_n]/I$ es Noetheriano.

$\blacksquare$