Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Control 1

Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — IIC2223

Fecha de Entrega: 2020-09-07

Nicholas Mc-Donnell

Problema 1:

Sea Σ un alfabeto finito y sea R una expresión regular sobre $Sigma$. Se define el operador:

$$R^{\downarrow\downarrow}$$

tal que $w \in \mathcal{L}(R^{\downarrow\downarrow})$ si, y solo si, existe una palabra $w' \in \mathcal{L}(R)$ que se puede descomponer como $w' = u_1v_1 \dots u_kv_k$ para algún $k \geq 1$ y con $u_i, v_i\Sigma^*$, y tal que $w = u_1 \dots u_k$.
Demuestre que para toda expresión regular R, el resultado $R^{\downarrow\downarrow}$ define un lenguaje regular.

Solución problema 1: *Doy mi palabra que la siguiente solución de la pregunta 2 fue desarrollada y escrita individualmente por mi persona según el código de honor de la Universidad*

—Nicholas Mc-Donnell

Se ve que $R^{\downarrow\downarrow}$ corresponde a todas las subsecuencias de carácteres[1] de palabras aceptadas por R. Sea $w \in \mathcal{L}(R)$, entonces se tiene que $w = w_1 \dots w_k = u_1v_1 \dots u_kv_k$ donde $k = |w|$ y se tiene $\{u_i, v_i\} = \{\varepsilon, w_i\}$, por lo tanto $u_1 \dots u_k \in \mathcal{L}(R^{\downarrow\downarrow})$, lo que nos dice que dado una palabra en $\mathcal{L}(R)$ toda subsecuencia de carácteres pertenece a $\mathcal{L}(R^{\downarrow\downarrow})$. Para ver que $\mathcal{L}(R^{\downarrow\downarrow})$ es regular, se toma $\mathcal{A}$ un DFA tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(R)$, y se construye un NFA-$\varepsilon$ $\mathcal{A}'$ de la siguiente forma. Todo estado se vuelve estado de aceptación e iterativamente se hace el siguiente proceso, dados q_i, q_j tales que $\delta(q_i, a) = q_j$ y $a \in \Sigma$ se agrega $\Delta(q_i, \varepsilon, q_j)$ Como hay finitos estados el proceso termina y nos define un NFA. Ahora, sea $w \in \mathcal{L}(R)$ tal que $w = u_1v_1 \dots u_kv_k$ como se vio anteriormente, y $\rho : p_1 \xrightarrow{w_1} \dots \xrightarrow{w_k} p_{k+1}$ una ejecución de aceptación de $\mathcal{A}$ sobre w, sea i tal que $u_i = \varepsilon$, entonces se puede ver la ejecución $\rho' : p_1 \xrightarrow{w_1} \dots \xrightarrow{w_{i-1}} p_i \xrightarrow{\varepsilon} p_{i+1} \xrightarrow{w_{i+1}} p_{i+2} \xrightarrow{w_{i+2}} \dots \xrightarrow{w_k} p_{k+1}$, se ve entonces que toda subsecuencia de w es aceptada, pero se ve que toda palabra aceptada por $\mathcal{A}'$ es una subsecuencia alguna palabra en $\mathcal{A}$ por construcción[2] Ahora, como cada NFA-ε define un lenguaje regular, se tiene que $\mathcal{L}(R)$ es regular.

■

[1] Incluida la secuencia vacia, i.e. la palabra vacia
[2] Las ε-transiciones nos garantizan eso.