Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Tarea 4

Geometría Diferencial - MAT2305

Fecha de Entrega: 2020-05-01

Nicholas Mc-Donnell

Solución problema 1: Se calculan las siguientes cosas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (1-u^2+v^2, 2uv, 2u)\\
\mathbf{x}_v &= (1+u^2-v^2, 2uv, -2v)\\
\mathbf{x}_{uu} &= (-2u, 2v, 2)\\
\mathbf{x}_{uv} &= (2v, 2u, 0)\\
\mathbf{x}_{uu} &= (2u, -2v, -2)
\end{aligned}$$

(a) Para calcular los coeficientes de la primera forma fundamental se ven las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle\\
F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle\\
G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle
\end{aligned}$$

Haciendo unos cálculos[1] y viendo simetrías, se llega a que:

$$\begin{aligned}
E &= (1+u^2+v^2)^2\\
F &= 0\\
G &= (1+u^2+v^2)^2
\end{aligned}$$

(b) Para calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental se calcula[2] N:

$$N = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\left(-2u, 2v, 1-u^2-v^2\right) \tag{1}$$

Y usando las siguientes relaciones se calculan los coeficientes de la segunda forma

[1] Están en el apendice.
[2] Ver 1.

fundamental[3]:

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle$$
$$f = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle$$
$$g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle$$

Y usando el hecho de que $\mathbf{x}_{uu} = -\mathbf{x}_{vv}$ se llega a que:

$$e = 2$$
$$f = 0$$
$$g = -2$$

(c) Sean $\alpha(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$ y $\beta(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$ curvas coordenadas, luego $\alpha'(u) = \mathbf{x}_u(u, v_0)$ y $\beta'(v) = \mathbf{x}_v(u_0, v)$. Ahora, se usan las siguientes relaciones para calcular $\mathrm{d}N$ en base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}$$
$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$
$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$
$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

Simplificando un poco se tiene que $a_{11} = \frac{e}{E}, a_{12} = a_{21} = 0, a_{22} = \frac{g}{G}$, por lo que $a_{11} = -a_{22} = \frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}$. Con eso, se ve lo siguientes:

$$\mathrm{d}N = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Como $\mathrm{d}N\mathbf{x}_u = a_{11}\mathbf{x}_u$ y $\mathrm{d}N\mathbf{x}_v = a_{22}\mathbf{x}_v$ por definición, se usa el teorema de Olinde Rodrigues y se tiene que α y β son lineas de curvaturas.

[3] Ver 1.

(d) Ahora se usa que $K = \det(\mathrm{d}N)$ y que $H = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathrm{d}N)$, con lo que se ve que $K = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}$ y que $H = 0$. Por lo que X es superficie mínima, y como $a_{11} = -a_{22}, K = a_{11}a_{22}$, se tiene que $k_1 = a_{11}$ y $k_2 = a_{22}$.

$\blacksquare$

Solución problema 2: Sea $\mathbf{x}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), (u-1)^3+1)$, con $U = \{(u,v) : 0 < u < 2, 0 < v < 2\pi\}$, se hacen unos cálculos[4] y se llega a que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-6(u-1)}{(9(u-1)^4+1)^{\frac{3}{2}}} \\ a_{22} &= \frac{-3(u-1)^2}{\sqrt{9(u-1)^4+1}} \\ a_{12} &= a_{21} = 0 \end{aligned}$$

Luego, los puntos que corresponden al origen son los que cumplen que $u = 1$, ahora se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned} K &= a_{11}a_{22} = 0 \\ H &= -\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) = 0 \end{aligned}$$

Por lo que son planares.

$\blacksquare$

Solución problema 3: Se toma el ejemplo $X(u,v) = (u, v, u^4 + 2u^2v^2 + v^2)$, se hacen varios cálculos[5] y se llega a la siguiente expresión de la curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{8}{c^2} \cdot \frac{4v^4 + 4u^2v^2 + 3u^2 + 3v^2}{((4u(u^2+v^2))^2+1)((2v(u^2+1))^2+1) - 4u(u^2+v^2)2v(u^2+1)}$$

Donde $c = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{(4u(u^2+v^2))^2 + (2v(v^2+1))^2 + 1}$, se nota que el denominador de K es de la forma $(a^2+1)(b^2+1) - ab = a^2+b^2-ab+a^2+b^2+1$, como $a^2+b^2 \geq ab$, se tiene que el denominador es estrictamente mayor a 0. Ahora, el numerador de K es mayor o igual a 0, más aún es igual a 0 ssi $u = v = 0$. Por lo que $(0,0)$ es el único punto parabólico de X.

$\blacksquare$

[4] Ver 1.
[5] Ver 1.

Solución problema 4:

(a) Sea S una superficie regular compacta, y sea Γ el conjunto de esferas con centro O tal que S está contenida en ellas. Se nota que existe un radio r ínfimo de estas esferas, sea Σ la esfera de radio r y centro O, s.p.d.g. O es el origen y $r = 1$. Ahora, claramente $\Sigma \cap S \neq \emptyset$, sea $p \in \Sigma \cap S$, s.p.d.g. $p = (0, 0, -1)$. Luego, sea P el plano tangente a Σ en p, entonces P es tangente a S, porque P no puede contener más puntos de Σ además de p y S está contenida en Σ. Ahora, como P es tangente a S y a Σ, se tiene que S y Σ son tangentes en p. Ahora, sea N un plano normal a P en p, ahora existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$P \cap \Sigma = \{R(x, 0, \sqrt{1 - x^2}) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$
$$P \cap S = \{R(x, 0, f(x)) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

Donde R es una matriz de rotación y f es la parametrización de la curva correspondiente, se denota $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Ahora, se tiene que $k_{S,N}(p)$ es la curvatura normal de S del plano normal N en p, más aún $k_{S,N}(p) = f''(0)$[6]. Dado esto, se ve que para $x > 0$ f es localmente creciente, más aún localmente $f'(x) \geq g'(x)$, similarmente si $x < 0$ se tiene que localmente $f'(x) \leq g'(x)$, por lo que si $x < 0 < y$ se tiene que $\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} \geq \frac{g'(y)-g'(x)}{y-x}$, como $f''(0)$ y $g''(0)$ existen al tomar el limite de $(x, y) \to (0, 0)$ se llega a que $f''(0) \geq g''(0)$, como $g''(0)$ es la curvatura de Σ (una esfera) se tiene que $g''(0) > 0$, con lo que $k_{S,N}(p) > 0$ para todo plano normal, con lo que se tiene lo pedido.

(b) Por contradicción, se asume que existe una superficie S que cumple lo pedido, por la parte (a) existe un punto elíptico p en S, por lo que s.p.d.g. $k_1, k_2 > 0$ por lo que $H(p) \neq 0$, una contradicción.

∎

Solución problema 5:

(a)

(b) Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, luego $X(U) = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\} \cap \{(x, y, z) : 0 < z < 1\}$. Se nota que la normal a $X(U)$ en p N es igual a $(f_x, f_y, f_z) = \frac{1}{\sqrt{2}z}(x, y, -z)$, por lo que $N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos v, \sin v, -1)$. Ahora, la curva $C \subset X(U)$ donde $z = z_0$ se

[6] Se tiene que la normal a la curva es proporcional a la normal a la superficie y $k = f''(0)$

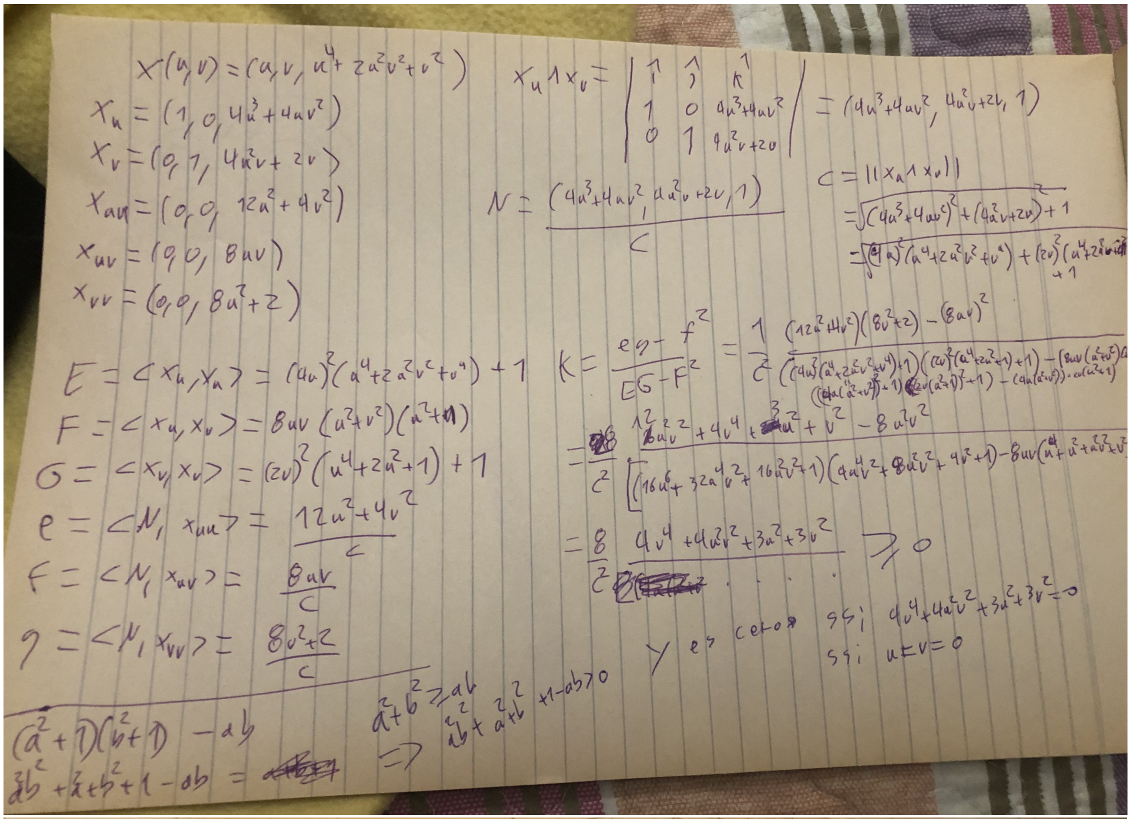
puede parametrizar de la siguiente manera $\mathbf{x}(v) = (z_0 \cos v, z_0 \sin v, z_0)$, y como es un círculo su curvatura k corresponde a $\frac{1}{z_0}$[7] y su normal en v es $(\cos v, \sin v, 0)$, con lo que $k_n = \frac{1}{z_0\sqrt{2}}$.

(c) Se nota que dado un punto p en $X(U)$ se puede construir una recta $\alpha : (a, b) \to X(U)$ tal que $\lim_{t\to a} \alpha(t) = \mathbf{0}$ y que para algún $c \in (a, b)$ se tiene que $\alpha(c) = p$. Se ve que los puntos de está curva son tangentes al mismo plano, por lo que se aplica (a) y se tiene que p es un punto parabólico o planar, pero p también pertenece a un círculo con $z = z_0$ para algún z_0, por lo que $k_n \neq 0$, con esto se tiene que p es un punto parabólico, como p es arbitrario todo los puntos de $X(U)$ son parabólicos.

$\blacksquare$

[7] z_0 es el radio del círculo.

Apéndice



$$X(u,v) = (u, v, u^4 + 2u^2v^2 + v^2)$$

$$X_u = (1, 0, 4u^3 + 4uv^2)$$

$$X_v = (0, 1, 4u^2v + 2v)$$

$$X_{uu} = (0, 0, 12u^2 + 4v^2)$$

$$X_{uv} = (0, 0, 8uv)$$

$$X_{vv} = (0, 0, 8u^2 + 2)$$

$$X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 4u^3+4uv^2 \\ 0 & 1 & 4u^2v+2v \end{vmatrix} = (4u^3+4uv^2, 4u^2v+2v, 1)$$

$$N = \frac{(4u^3+4uv^2, 4u^2v+2v, 1)}{c}$$

$$c = \|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{(4u^3+4uv^2)^2 + (4u^2v+2v)^2 + 1} = \sqrt{(4u)^2(u^4+2u^2v^2+v^4) + (2v)^2(u^4+2u^2+1) + 1}$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = (4u)^2(u^4+2u^2v^2+v^4) + 1$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 8uv(u^2+v^2)(u^2+1)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (2v)^2(u^4+2u^2+1) + 1$$

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{12u^2+4v^2}{c}$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{8uv}{c}$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{8u^2+2}{c}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{c^2} \frac{(12u^2+4v^2)(8u^2+2) - (8uv)^2}{((4u)^2(u^4+2u^2v^2+v^4)+1)((2v)^2(u^4+2u^2+1)+1) - (8uv(u^2+v^2)(u^2+1))^2}$$

$$= \frac{8}{c^2} \frac{12u^2v^2 + 4v^4 + 3u^2 + v^2 - 8u^2v^2}{(16u^6 + 32u^4v^2 + 16u^2v^2 + 1)(4u^4v^2 + 8u^2v^2 + 4v^2 + 1) - 8uv(u^4 + u^2 + u^2v^2 + v^2)}$$

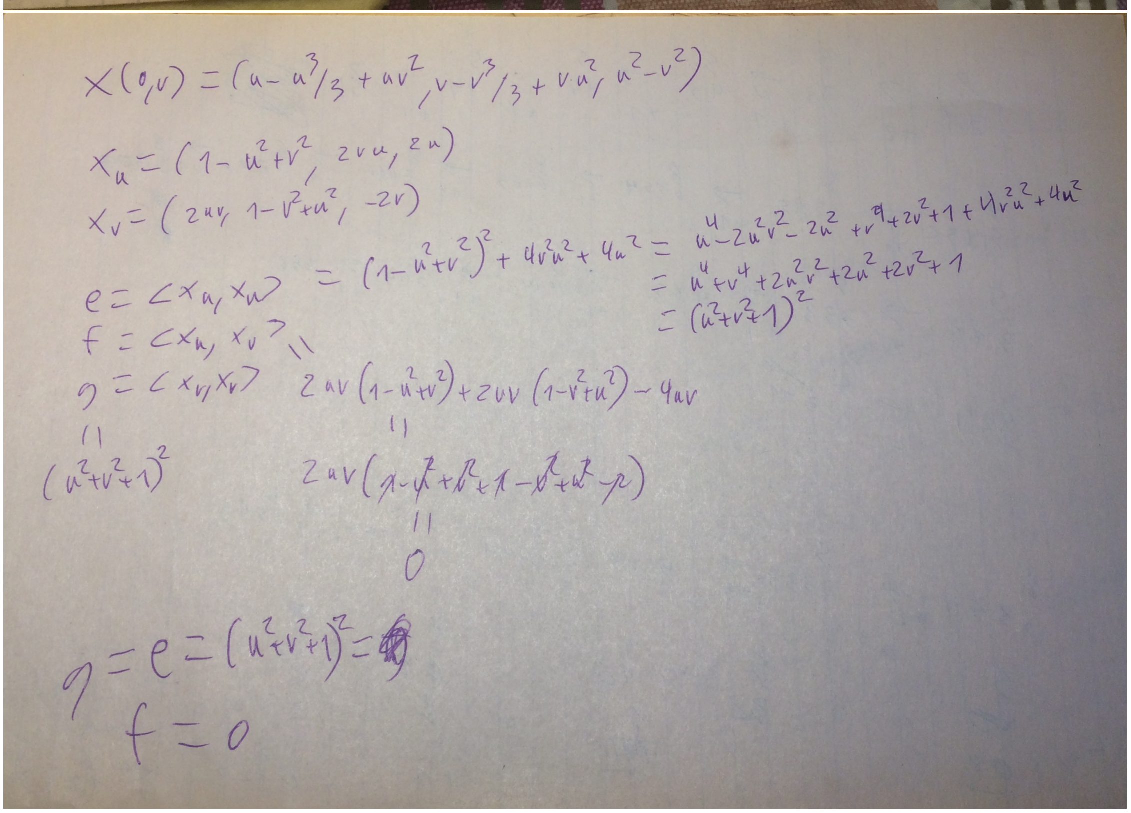
$$= \frac{8}{c^2} \frac{4v^4 + 4u^2v^2 + 3u^2 + 3v^2}{\ldots} \geq 0$$

y es cero ssi $4v^4 + 4u^2v^2 + 3u^2 + 3v^2 = 0$ ssi $u = v = 0$

$$(a^2+1)(b^2+1) - ab$$

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - ab =$$

$$a^2 + b^2 \geq ab \Rightarrow a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - ab > 0$$



$$X(u,v) = (u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2)$$

$$X_u = (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u)$$

$$X_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$$

$$e = \langle X_u, X_u \rangle = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4v^2u^2 + 4u^2 = u^4 - 2u^2v^2 - 2u^2 + v^4 + 2v^2 + 1 + 4v^2u^2 + 4u^2$$
$$= u^4 + v^4 + 2u^2v^2 + 2u^2 + 2v^2 + 1$$
$$= (u^2 + v^2 + 1)^2$$

$$f = \langle X_u, X_v \rangle = 2uv(1 - u^2 + v^2) + 2uv(1 - v^2 + u^2) - 4uv = 2uv(\cancel{1} - \cancel{u^2} + \cancel{v^2} + 1 - v^2 + u^2 - \cancel{2}) = 0$$

$$g = \langle X_v, X_v \rangle = (u^2 + v^2 + 1)^2$$

$$g = e = (u^2 + v^2 + 1)^2$$

$$f = 0$$

$e = \langle N, X_{uu} \rangle$

$f = \langle N, X_{uv} \rangle$

$g = \langle N, X_{vv} \rangle$

$\cancel{X_{uu} = \ldots (2 - 6u^2 - 2v^2)}$

$\cancel{X_{uv} =}$

$X_{uu} = (-2u, 2v, 2)$

$X_{uv} = (2v, 2u, 0)$

$X_{vv} = (2u, -2v, -2)$

$$N = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1-u^2+v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1+u^2-v^2 & -2v \end{vmatrix} = \hat{i}\left(-4uv^2 + 2u(1+u^2-v^2)\right) + \hat{j}\left((1-u^2+v^2)(-2v) + 4u^2v\right) + \hat{k}\left((1-u^2+v^2)(1+u^2-v^2) - 4u^2v^2\right)$$

$$= \hat{i}\,\cancel{(-2u+2u^3-6uv^2)} + \hat{j}\,\cancel{(-2v-2v^3+6vu^2)} + \hat{k}\left(1 - (u^2-v^2)^2 - 4u^2v^2\right)$$

$$= \hat{i}\left(-2u-2u^3-2uv^2\right) + \hat{j}\left(2v+2v^3+2u^2v\right) + \hat{k}\left(1-(u^2+v^2)^2\right)$$

$$= \hat{i}\left(-2u(1+u^2+v^2)\right) + \hat{j}\left(+2v(1+v^2+u^2)\right) + \hat{k}\left(1-(u^2+v^2)^2\right)$$

$$= (1+u^2+v^2)\left(\hat{i}(-2u) + \hat{j}\,2v + \hat{k}\,(1-u^2-v^2)\right) =$$

$$\cancel{4u^2(1+u^2+v^2)^2 + 4v^2(1+u^2+v^2)^2 + (1-(u^2+v^2)^2)^2}$$

$4u^2 + 4v^2 + 1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2 - 2u^2 + 2v^2$

$$\cancel{(4u^2+4v^2)(1+u^2+v^2)^2 + (1-(u^2+v^2)^2)^2}$$

$(1+u^2+v^2)^2$

$\alpha(u) = X(u, v_0)$
$\beta(v) = X(u_0, v)$

$\alpha'(u) = X_u(u, v_0) = (1 - u^2 + v_0^2, 2v_0 u, 2u)$
$\beta'(v) = X_v(u_0, v) = (2u_0 v, 1 - v^2 + u_0^2, -2v)$

$N(\alpha(u))' = dN(\alpha'(u))$

Como $dN = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ en base $\{X_u, X_v\}$

y $\alpha'(u) = X_u(u, v_0)$, $\beta'(v) = X_v(u_0, v)$

se tiene $dN X_u = a_{11} X_u$, $dN X_v = a_{22} X_v$

$X_u = (\cos(v), \sin(v), 3(u-1)^2)$
$X_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$
$X_{uu} = (0, 0, 6(u-1))$
$X_{uv} = (-\sin(v), \cos(v), 0)$
$X_{vv} = (-u\cos(v), -u\sin(v), 0)$

$$X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 3(u-1)^2 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(-3(u-1)^2 u\cos(v)) + \hat{j}(-3(u-1)^2 u\sin(v)) + \hat{k}(u)$$
$$= -u(+3\cos(v)(u-1)^2, +3\sin(v)(u-1)^2, 1)$$

$$|X_u \wedge X_v| = u\sqrt{9\cos^2(v)(u-1)^4 + 9\sin^2(v)(u-1)^4 + 1}$$
$$= u\sqrt{9(u-1)^4 + 1}$$
$$\Rightarrow N = \frac{(3\cos(v)(u-1)^2, 3\sin(v)(u-1)^2, -1)}{\sqrt{9(u-1)^4 + 1}}$$

$E = \langle x_u, x_u \rangle = 1 + 9(u-1)^4$

$F = \langle x_u, x_v \rangle = 0$

$G = \langle x_v, x_v \rangle = u^2$

$$e = \langle N, x_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{9(u-1)^4+1}}\left[0 + 0 + -6(u-1)\right] = \frac{-6(u-1)}{\sqrt{9(u-1)^4+1}}$$

$$f = \langle N, x_{uv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{9(u-1)^4+1}}\left[-\sin(v)\,3\cos(v)(u-1)^2 + \cos(v)\,3\sin(v)(u-1)^2 + 0\right] = 0$$

$$g = \langle N, x_{vv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{9(u-1)^4+1}}\left[-3u\cos^2(v)(u-1)^2 - 3u\sin^2(v)(u-1)^2 + 0\right] = \frac{-3u(u-1)^2}{\sqrt{9(u-1)^4+1}}$$

$$a_{11} = \frac{e}{E} = \frac{-6(u-1)}{(9(u-1)^4+1)^{3/2}} \qquad \text{si } u = 1 \quad a_{11} = a_{22} = 0$$

$a_{21} = a_{12} = 0$

$$a_{22} = \frac{g}{G} = \frac{-3(u-1)^2}{u\sqrt{9(u-1)^4+1}} \qquad \Rightarrow H = 0 \text{ y } K = 0$$

$\Rightarrow$ son planares.

$X(u,v) = (u, v, u^4 + v^2)$

$$x_u \wedge x_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 4u^3 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (4u^3, -2v, 1)$$

$x_u = (1, 0, 4u^3)$

$x_v = (0, 1, 2v)$

$x_{uu} = (0, 0, 12u^2)$

$x_{uv} = (0, 0, 0)$

$x_{vv} = (0, 0, 2)$

$$N = \frac{(4u^3, -2v, 1)}{\sqrt{16u^6 + 4v^2 + 1}}$$

$$\therefore K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{24u^2}{(16u^6+4v^2+1)\underbrace{\left[(1+16u^6)(1+4v^2) - 64u^6v^2\right]}_{c}}$$

$E = \langle x_u, x_u \rangle = 1 + 16u^6$

$F = \langle x_u, x_v \rangle = 8u^3 v$

$G = \langle x_v, x_v \rangle = 1 + 4v^2$

$$e = \langle N, x_{uu} \rangle = \frac{12u^2}{\sqrt{16u^6+4v^2+1}}$$

$f = \langle N, x_{uv} \rangle = 0$

$$g = \langle N, x_{vv} \rangle = \frac{2}{\sqrt{16u^6+4v^2+1}}$$

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{12u^2(1+4v^2) + 2(1+16u^6)}{\sqrt{16u^6+4v^2+1}\cdot c}$$

$$\therefore c = (1+16u^6)(1+4v^2) - 64u^6v^2 = 1 + 16u^6 + 4v^2 + \cancel{64u^6v^2 - 64u^6v^2}$$
$$= 1 + 16u^6 + 4v^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{24u^2}{(16u^6+4v^2+1)^2}, \quad H = \frac{6u^2(1+4v^2) + 1 + 16u^6}{(16u^6+4v^2+1)^{3/2}}$$