Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019

Tarea 3

Fundamentos de la Matemática — MAT 2405

Fecha de Entrega: 2019/06/05

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Maximiliano Norbu

Índice

Problema 1:

Dado una relación antisimétrica $R \neq \emptyset$, muestre que $R \cap R^{-1}$ es una función.

Solución problema 1:

Se puede asumir que $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$, si no, es función por vacuidad. Sea $\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in R \cap R^{-1}$, entonces $\langle y, x \rangle, \langle z, x \rangle \in R \cap R^{-1}$, por esto, también $\langle y, x \rangle, \langle z, x \rangle \in R$ como R antisimétrica, $x = y, x = z$, por lo que $y = z$. En conclusión, o bien $R \cap R^{-1}$ una relación vacía o bien $R \cap R^{-1}$ la relación identidad, en ambos casos, $R \cap R^{-1}$ es función.

■

Problema 2:

Sea A un conjunto, y sea $F = \{\langle x, \langle x, x \rangle \rangle : x \in A\}$, muestre que F es función biyectiva entre A y $I_A = \{\langle y, y \rangle : y \in A\}$.

Solución problema 2:

Claramente F es función, se recuerdan las definiciones de inyectividad y de sobreyectividad:

$$\forall x \forall y \forall z \forall w \left(\left(\left(\langle x, y \rangle \in F \right) \wedge \left(\langle z, w \rangle \in F \right) \right) \implies \left((x = z) \iff (y = w) \right) \right)$$

$$\forall y \left((y \in I_A) \implies \left(\exists x \left(\langle x, y \rangle \in F \right) \right) \right)$$

Para la primera, si $\langle x, y \rangle$ o $\langle z, w \rangle$, no pertenecen a F, no hay problema, ya que la función no está definida en esos casos, entonces no hay problema. Si ambas pertenecen a F entonces $y = \langle x, x \rangle$ y $w = \langle z, z \rangle$. Claramente si $x = z$ entonces $\langle x, x \rangle = \langle z, z \rangle$ (por axioma 1)(y, por ende $y = w$). Ahora, si $y = w$, $\langle x, x \rangle = \langle z, z \rangle$, entonces $x = z$, pues $\langle x, x \rangle = \{\{x\}\}$ y $\langle z, z \rangle = \{\{z\}\}$ y por axioma 1. Luego para la segunda, si $y \notin I_A$ no hay problema, ya que no es parte del codominio. Si $y \in I_A$ entonces $y = \langle x, x \rangle$ para algún $x \in A$, luego por definición $\langle x, y \rangle = \langle x, \langle x, x \rangle \rangle \in F$, con lo que se tiene que F sobreyectiva. Entonces se tiene que F es biyectiva.

■

Problema 3:

Muestre que dado un conjunto A, un elemento $a \in A$ y una función

$$f : A \times \omega \to A,$$

entonces existe una única función $h : \omega \to A$ tal que $h(0) = a$ y que cumple $h(n^+) = f(h(n), n)$.

Solución problema 3:

Se puede definir la siguiente función

$$\begin{aligned} F :& A \times \omega \to A \times \omega \\ & \langle b, k \rangle \mapsto \left\langle f(b, k), k^+ \right\rangle \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de la recursión, existe H tal que $H(0) = \langle a, 0 \rangle$ y $H(n^+) = F(H(n))$. Sea $h : \omega \to A$ tal que $h = \pi_a \circ H$ (siendo π_a la proyección del primer elemento). Ahora falta solo demostrar $N = \{n \in \omega : H(n) = \langle h(n), n \rangle\}$ es inductivo. Por enunciado y la definición de H, $0 \in N$. Ahora,

$$\begin{aligned} H(n^+) &= F(H(n)) \\ &= \left\langle f(H(n)), n^+ \right\rangle \text{(por definición de H)} \end{aligned}$$

Ahora, como:

$$\begin{aligned} h(n^+) &= \pi_a \circ H(n^+) \\ &= \pi_a \circ (f(H(n)), n^+) \\ &= f(H(n)) \end{aligned}$$

Entonces se tiene que $H(n^+) = \langle f(H(n), n^+ \rangle = \langle h(n^+), n^+ \rangle$, por lo que N es inductivo. Ahora veremos que h es unico. Asumamos que existe otro, sea g tal que $g(0) = a$ y $g(n^+) = f(g(n), n)$. Entonces $N' = \{n \in \omega : h(n) = g(n)\}$ y eso es inductivo pues $0 \in N'$ y la otra parte sale de que si $n \in N'$, entonces $g(n) = h(n)$ pero $g(n^+) = f(g(n), n) = f(h(n), n) = h(n^+)$. Por ende ω es inductivo, $g = h$ y h es única.

$\blacksquare$

Problema Bonus:

Sea $\varphi(x)$ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con única variable libre x. Suponga que $\emptyset$ verifica $\varphi(x)$ y que para cada $a \in \omega$ si a verifica $\varphi(x)$, entonces a^+ también verifica $\varphi(x)$. Demuestre que todo $b \in \omega$ verifica $\varphi(x)$.

Solución problema Bonus:

Se nota que solo es necesario demostrar que el siguiente conjunto es inductivo:

$$A = \{a \in \omega : \varphi(a)\}$$

Se nota que $\emptyset \in A$, ya que $\emptyset \in \omega$ y $\emptyset$ verifica $\varphi(x)$. Luego, se sabe que $\forall a\, (a \in A \implies a^+ \in A)$, ya que si $a \in A$, se tiene que a verifica $\varphi(x)$, por lo que a^+ también verifica $\varphi(x)$, pero entonces $a^+ \in A$. Con esto se tiene que A es un conjunto inductivo, por lo que $\omega \subseteq A$, y por definición de A se tiene $A \subseteq \omega$, entonces $A = \omega$. Con lo que todo $b \in \omega$ verifica $\varphi(x)$.

$\blacksquare$