Tarea III

Nicholas Mc-Donnell

2do semestre 2017

Índice

Quiero dar una disculpa, ya que hay multiples ejercicios a medio terminar. Los cuales no alcance, ni borrar, ni terminar.

1. Operaciones de un grupo en si mismo

1.1

Does the rule $g, x \mapsto xg^{-1}$ define an operation of G on itself?
Si

Demostración. Tomemos $g' = g^{-1}$

$$\therefore g, x \mapsto xg'$$

Lo cual es multiplicación por la derecha, lo cual sabemos que define una operación. $\square$

1.7

Let $F = \mathbb{F}_5$. Determine the order of the conjugacy class of $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ in $GL_n(\mathbb{F}_5)$

Demostración. Sea A un elemento de $GL_2(\mathbb{F}_5)$ el conjuga a $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$$

En otras palabras, A pertenece al estabilizador.

$$\therefore A \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix} A$$

Tomamos los siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$2b \equiv b \mod 5$$

$$2c \equiv c \mod 5$$

Lo que implica que $b \equiv c \equiv 0 \mod 5$.

$$\implies A = \begin{bmatrix} a & \\ & d \end{bmatrix}$$

Esto implica que el estabilizador tiene 16 elementos. ($|GL_2(\mathbb{F}_5)| = 480$ (24 opciones para el primer vector y 20 para el segundo))

$$\implies |C| = 30$$ □

1.9

Let G be a group of order n, and let F be any field. Prove that G is isomorphic to a subgroup of $GL_n(F)$

Demostración. Por Teo de Cayley sabemos que cada grupo de orden n, es isomorfo a un subgrupo de S_n. Recordemos la existencia de la matrices de permutaciones (subgrupo de $GL_n(F)$), y notamos que podemos hacer un isomorfismo entre estas matrices y S_n. Por lo que, cada grupo de orden n es isomorfo a un subgrupo de las matrices de permutaciones, las cuales son un subgrupo de $GL_n(F)$. Lo que implica que todo grupo de orden n es isomorfo a un subgrupo de $GL_n(F)$ □

1.15

Let G be a group of order 35.

(a) Suppose that G operates nontrivially on a set of five elements. Prove that G has a normal subgroup of order 7.

(b) Prove that every group of order 35 is cyclic.

(a) *Demostración.* Sea S tal que $|S| = 5$, luego sabemos que $G \circlearrowright S$ no trivialmente.

$$\therefore \sum_{\text{Órbitas de } S} |O| = 5$$

Pero también sabemos que esta suma no es de la forma:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Por lo que tiene que ser de la siguiente forma:

$$5 = 5$$

Lo que implica que G tiene un subgrupo H de orden 7 (el estabilizador). Luego, tomamos G/H y operamos sobre el con H.

Notamos que H solo puede actuar trivialmente ($[G : H] = 5, |H| = 7$), por lo que H estabiliza todas las clases laterales.

$$h \in H \implies h(gH) = gH \quad \forall g \in G$$

Esto se puede ver como un homomorfismo:

$$\varphi : G \to G/H$$

$$g' \mapsto g'(gH)$$

Por lo que $H = \ker \varphi \quad \forall g$. Por lo que □

(b) *Demostración.* Notamos que solo es necesario demostrar que existe un subgrupo normal de orden 5 o un subgrupo normal de orden 7 ($NH = HN$ de orden 35). Por (a) sabemos que si un grupo de orden 35 actúa no trivialmente, entonces tiene un subgrupo normal de orden 7. □

3. Operaciones en un subconjunto

3.7

Let H be a subgroup of a group G. Prove or disprove: The normalizer $N(H)$ is a normal subgroup of the group G.

Demostración. Veamos el caso $G = S_3$, tomamos $H =< x >$ con $x^2 = e$

$$N(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$$

$$\implies N(H) = H$$

Por lo que $H \ntriangleleft G$, pero al mismo tiempo

$$N(H) \ntriangleleft G$$ □

3.9

Prove that the subgroup of B of upper triangular matrices in $GL_n(\mathbb{R})$ is conjugate to the group L of lower triangular matrices.

Demostración. Notamos que la matriz que la siguiente matriz cumple lo pedido:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que las matrices triangulares superiores son conjugadas de las matrices triangulares inferiores.

□

3.13

(a) Let H be a normal subgroup of G of order 2. Prove that H is in the center of G

(b) Let H be a normal subgroup of prime order p in a finite group G. Suppose that p is the smallest prime dividing $|G|$. Prove that H is in the center $Z(G)$.

(a) *Demostración.* Sea $H \triangleleft G$ tal que $|H| = 2$.

$$\therefore \forall g \in G \quad gH = Hg$$

$$\implies \{g, gh\} = \{g, hg\}$$

$$\implies gh = hg \quad \forall g \in G$$

$$\therefore h \in Z(G)$$

$$\implies H \subseteq Z(G)$$

□

(b) *Demostración.* Sea $H \triangleleft G$ con $|H| = p$ el menor primo que divide a $|G|$.

$$\therefore gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$$

$$\implies \{e, ghg^{-1}, gh^2g^{-1}, ..., gh^{p-1}g^{-1}\} = \{e, h, h^2, ..., h^{p-1}\} \quad \forall g \in G$$

□

4. Teoremas de Sylow

4.1

How many elements of order 5 are contained in a group of order 20?

Demostración. Por el tercer Teorema de Sylow, la cantidad de p-subgrupos, s, divide al orden de G y $s \equiv 1 \mod p$.

Veamos que $s = 1, 2, 4, 5, 10, 20$, pero que solo $1 \equiv 1 \mod 5$.
Por lo que

$$\phi(5) = \# \text{ de elementos de orden } 5 = 4$$

Lo que implica que hay 4 elementos de orden 5 en G □

4.3

Prove that no group of order p^2q, where p and q are prime, is simple.

4.13

Prove that if G has order $n = p^e a$ where $1 \leq a < p$ and $e \geq 1$, then G has a proper normal subgroup.

Demostración. Notemos que los grupos $\mathbb{Z}_p$ tienen orden $p = p^1 \cdot 1$, pero sus únicos subgrupos son los subgrupos triviales, por lo que hay grupos que no tienen subgrupos normales propios. □

5. Grupos de orden 12

5.3

Let G be a group of order 30.

(a) Prove that either the Sylow 5-subgroup K or the Sylow 3-subgroup H is normal.

(b) Prove that HK is a cyclic subgroup of G

(c) Classify groups of order 30

(a) *Demostración.* □

(b) *Demostración.* Ya que H o K es subgrupo normal

$$HK = KH$$

Ademas, por ser Sylow p, con p distinto

$$H \cap K = \{e\}$$

$$\implies |HK| = |H| \cdot |K|$$

También

$$\exists x \in HK : |x| = |HK|$$

Por lo que HK es subgrupo cíclico □

6. Cálculo de los grupos simétricos

6.3

Let p, q be permutations. Prove that the products pq and qp have cycles of equal sizes.

Demostración. Sea $\square$

6.7

Is the cyclic subgroup H of S_n generated by the cycle $(\mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5})$ a normal subgroup?

7. El grupo libre

7.3

We may define a *closed word* in S' to be the oriented loop obtained by joining the ends of a word. Thus represents a closed word, if we read it clockwise. Establish a bijective correspondance between reduced closed words and conjugacy classes in the free group.