Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

I2

Variable Compleja - MAT2705

Fecha de Entrega: 2019-11-12

Nicholas Mc-Donnell

Problema 1:

Considere $f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(2z-1)(4z-i)}$ y calcule las siguientes integrales

(a) $\int_{\{z:|z|=\frac{1}{10}\}} f(z)\,\mathrm{d}z$

(b) $\int_{\{z:\left|z-\frac{i}{4}\right|=\frac{1}{10}\}} f(z)\,\mathrm{d}z$

(c) $\int_{\{z:|z|=1\}} f(z)\,\mathrm{d}z$

Solución problema 1:

(a) Notemos que $f(z)$ es analítica en el disco centrado en 0 de radio $\frac{1}{10}$, ya que $sin(\pi z)$ es analítica y $(2z-1)(4z-i)$ es analítica sin ceros en ese disco. Por ende, el valor de la integral es 0.

(b) Se nota que $g(z) = f(z)(4z-i)$ es analítica en el disco centrado en $\frac{i}{4}$ de radio $\frac{1}{10}$. Luego, por la formula integral de Cauchy, se tiene que $2\pi i g(\frac{i}{4})$ es el valor de la integral pedida. Esto es fácil de calcular: $2\pi i g(\frac{i}{4}) = 2\pi i \cdot \frac{i\sinh(\frac{\pi}{4})}{\frac{i}{2}-i} = 2\pi i \cdot -2\sinh(\frac{\pi}{4}) = -4\pi i \sinh(\frac{\pi}{4})$.

(c) Usando la formula integral de Cauchy se nota que la integral se puede escribir como la siguiente suma:

$$\int_{\{z:\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{10}\}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\{z:\left|z-\frac{i}{4}\right|=\frac{1}{10}\}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Se nota que la segunda integral ya fue calculada, y que la primera se puede calcular de forma similar, $g(z) = (2z-1)f(z)$ es analítica en el area pedida, luego se tiene que $2\pi i g(\frac{1}{2}) = 2\pi i \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{2-i} = 2\pi i(2+i)/3$. Juntando ambos resultados se llega a lo siguiente:

$$\int_{\{z:|z|=1\}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\{z:\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{10}\}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\{z:\left|z-\frac{i}{4}\right|=\frac{1}{10}\}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i(2+i)/3 - 4\pi i \sinh(\frac{\pi}{4})$$

■

Problema 2:

Sea f una función entera tal que $\Im(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es constante. *Indicación: Puede usar que* $L(z) = \frac{iz+1}{1-iz}$ *mapea el semiplano superior en el disco unitario.*

Solución problema 2: Se nota que si f es una función entera entonces $\exp(if)$ también lo es, pero $|\exp(if)| = \exp(-\Im(f)) < 1$, por lo que $\exp(if)$ es acotada, pero por Liouville se tiene que $\exp(if)$ es constante, por lo que f tambien es constante.

■

Problema 3:

Encuentre la seria de potencias en torno a $z = 0$ que representa la función $f(z) = z\ln(z+1)$. Calcule su radio de convergencia.

Solución problema 3: Se sabe que

$$\ln(z+1) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k} \tag{1}$$

por lo que $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{k+1}}{k}$, ahora cambiando lo indices se tiene que $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k-1}$. Se recuerda que el radio de convergencia de (1) es 1, por lo que el radio de convergencia de la serie encontrada tambien es 1.

■

Problema 4:

Encuentre todas las funciones analíticas en $\{z : |z| < 1\}$ que satisfacen $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Solución problema 4: Se nota que $f(z) = z^3$ cumple lo pedido. Ya que $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$ y f es continua se tiene que $f(0) = 0$, por lo que 0 es un punto de acumulación y por el teorema del principio de unicidad, se tiene que la única función que cumple lo pedido es $f(z) = z^3$.

■

Problema 5:

El objetivo de esta pregunta es calcular la serie de Laurent de $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)^2}$ en el anillo $\{0 < |z-2| < 4\}$ y el orden del polo en $z = 2$. Se sugieren los siguientes pasos:

(a) Calcule la expansión de $\frac{1}{z+2}$ en torno a $z = 2$.

(b) Encuentre a partir del paso anterior la serie de Laurent de $\frac{1}{z^2-4}$ en torno a $z = 2$.

(c) Utilice lo anterior para calcular la serie de Laurent de $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)^2}$.

(d) Estudie el orden del polo de f en $z = 2$.

Solución problema 5:

(a) Se escribe la fracción de la siguiente forma, $\frac{1}{(z-2)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-z+2)/4}$, y estos se puede reescribir usando la serie geométrica $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-z+2)/4} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{4})^n(z-2)^n$, con lo que se tiene la expansión de potencia.

(b) Se usa fracciones parciales consiguiendo la siguiente identidad $\frac{1}{z^2-4} = \frac{1}{4(z-2)} - \frac{1}{4(z+2)}$, por lo que la serie de Laurent es la siguiente $\frac{1}{z^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{-n}(z-2)^n\right)$.

(c) Se nota que $f(z) = -\frac{1}{2}g'(z)$, donde $g(z) = \frac{1}{z^2-4}$, como $g(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{-n}(z-2)^n\right)$ se tiene que $g'(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{-n}n(z-2)^{n-1}\right)$, por lo que $f(z) = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{-n}n(z-2)^{n-1}\right)$.

(d) Viendo la serie de Laurent es fácil concluir que f tiene un polo de orden 2 en $z = 2$.

■

Problema 6:

Demuestre que $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Solución problema 6: En la tarea se demostro que dado una función analítica f con una singularidad aislada no reparable en z_0, entonces z_0 es singularidad esencial de $\exp(f)$. Dado la anterior, se nota que $z = 0$ es una singularidad no reparable de $\frac{1}{z}$, por lo que es singularidad esencial de $\exp(\frac{1}{z})$.

■

Problema 7:

En esta pregunta consideraremos la función

$$N_f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

para $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa y $w \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq w$ en $|z - z_0| = \rho$. Asumimos también que $B_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_r| < r\}$.

(a) Demuestre que si $f(z) - w_0$ tiene un cero de orden m en z_0 entonces $\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}$ tiene un polo de orden 1 con residuo m en z_0.

(b) Demuestre que si $f(z) - w_0$ tiene un polo de orden m en z_0 entonces $\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}$ tiene un polo de orden 1 con residuo $-m$ en z_0.

(c) Suponga que $|f(z) - w_0| > \delta > 0$ para todo $|z - z_0| = \rho$. Demuestre que existe un $r > 0$ tal que $N(w))$ es analítica en $B_r(w_0)$.

(d) *El teorema de residuos implica que si $f(z) - w_0$ tiene un cero de orden m en z_0 y $f(z) - w_0 \neq 0$ para $0 < |z - z_0| \leq \rho$ entonces $N_f(w_0) = m$, más aún $N)f(w) \in \mathbb{N}$.* **Puede asumir el resultado anterior**. Demuestre que existe un $r > 0$ tal que $N_f(w)$ es constante en $B_r(w_0)$.

(e) Concluya que si $f(z_0) = w_0, f'(z_0) \neq 0$, entonces existe un $r > 0$ tal que $N(w) = 1$ en $B_r(w_0)$.

(f) Explique por qué el item anterior es equivalente a decir que f es inyectiva en una vecindad de z_0.

(g) Demuestre que si f_n es una sucesión de funciones analíticas que convergen uniformemente en a $f(z)$ en $\overline{B_R(z_0)}$, entonces f es analítica en $B_R(z_0)$.

(h) Suponga que f_n es una sucesión de funciones analíticas que convergen uniformemente en $\overline{B_r(z_0)}$ a $f(z)$ y $f_n(z_0) \to w_0$. Demuestre que existe $r > 0$ tal que $N_{f_n}(w) \to N_f(w)$ uniformemente en $B_r(w_0)$ cuando $n \to \infty$.

(i) Demuestre que si f_n es una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente en $\overline{B_R(z_0)}$ a $f(z)$ y f_n es inyectiva para todo n, entonces f es inyectiva.

Solución problema 7:

(a)

$\blacksquare$