Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Primer Semestre de 2019

Tarea 2

Fundamentos de la Matemática - MAT 2405

Fecha de Entrega: 2019/04/24

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Maximiliano Norbu

Problemas

Problema 1 (8pts)**.** Sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula con una variable libre x. Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Muestre que $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi$ si y sólo si para toda $\mathfrak{M}$-asignación $i : \{x\} \to M$ se cumple que $(\mathfrak{M}, i) \models \varphi$.

Solución problema 1: Debemos probar que, dado $b \in M$:

1. $\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x)$
2. $(\mathfrak{M}, i_b) \models \varphi$, donde i_b: $\{x\} \to M$ es la asignación $i_b(x) = b$

son equivalentes.
Para esto basta demostrar el caso de términos y luego (inductivamente) extenderlo a todas las fórmulas posibles.
Para un término t cualquiera, como t tiene solo la variable libre x (enunciado):

1. t$(\hat{x}|x)$ no tiene variables libres. Su interpretación en $\mathfrak{M}'_b$ (donde $\mathfrak{M}'_b$ es una $\mathcal{L}'$-estructura y donde $\mathcal{L}'$ es una extensión del lenguaje $\mathcal{L}$ que solo agrega una constante b la cual interpreto de manera natural) está bien definida, pues $t^{\mathfrak{M}'_b} \in M$
2. Podemos usar i_b para interpretar x y $t^{(\mathfrak{M}, i_b)} \in M$

Es importante notar que $t^{(\mathfrak{M}, i_b)} = t^{\mathfrak{M}'_b}$, o sea, son el mismo elemento en M.
Por esto, para el caso de términos, se cumple lo propuesto.
Ahora extenderemos este caso a las fórmulas atómicas.

Si φ fuera una fórmula atómica $Rt_1, ..., t_n$ (R siendo una relación n-aria y t_j siendo términos con solo una variable libre x), entonces dado $b \in M$, de las definiciones obtenemos:

1. $\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x)$ si y sólo si $(t_1^{\mathfrak{M}'_b}, ..., t_n^{\mathfrak{M}'_b}) \in R^{\mathfrak{M}'_b}$

2. $(\mathfrak{M}, i_b) \models$ si y solo si $(t_1^{(\mathfrak{M}, i_b)}, ..., t_n^{(\mathfrak{M}, i_b)})) \in R^{\mathfrak{M}}$

Aquí es importante notar que $R^{\mathfrak{M}'_b} = R^{\mathfrak{M}}$. También notar que las interpretaciones de los términos (t_j) son las mismas en ambos casos (viendo término a término) por el caso de términos visto anteriormente. Por estas dos cosas se tiene que $\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x)$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \varphi$.
Ahora, si ψ fuera fórmula y $\varphi = \neg\psi$, claramente $Free(\psi) = Free(\neg\psi) = Free(\varphi) = x$, $t^{\mathfrak{M}'_b} = t^{(\mathfrak{M}, i_b)} = b \in M$.
Con esto tenemos:

1. $\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x) = \neg\psi(\hat{x}|x)$ si y solo si $\mathfrak{M}'_b \not\models \psi(\hat{x}|x)$

2. $(\mathfrak{M}, i_b) \models \varphi = \neg\psi$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \not\models \psi$

Por el paso inductivo tenemos $\mathfrak{M}'_b \models \psi(\hat{x}|x)$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \psi$ por lo que:
$\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x) = \neg\psi(\hat{x}|x)$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \varphi = \neg\psi$.
Ahora, sean ψ y σ fórmulas con unica variable libre x y sea $\varphi = \psi * \sigma$ con $*$ conectivo binario, claramente $Free(\varphi) = x$. $t^{\mathfrak{M}'_b} = t^{(\mathfrak{M}, i_b)} = b \in M$. Con esto tenemos:

1. $\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x) = \psi * \sigma(\hat{x}|x)$ si y solo si $\mathfrak{M}'_b \models \psi(\hat{x}|x) * \mathfrak{M}'_b \models \sigma(\hat{x}|x)$

2. $(\mathfrak{M}, i_b) \models \varphi = \psi * \sigma$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \psi * (\mathfrak{M}, i_b) \models \sigma$

Por ejemplo, si $\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x) = \psi \vee \sigma(\hat{x}|x)$ si y solo si $\mathfrak{M}'_b \models \psi(\hat{x}|x)$ o $\mathfrak{M}'_b \models \sigma(\hat{x}|x)$.
También $(\mathfrak{M}, i_b) \models \varphi = \psi \vee \sigma$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \psi$ o $(\mathfrak{M}, i_b) \models \sigma$.
O sea, $\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x) = \psi \vee \sigma(\hat{x}|x)$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \varphi = \psi \vee \sigma$. Por paso inductivo tenemos $\mathfrak{M}'_b \models \varphi(\hat{x}|x) = \psi * \sigma(\hat{x}|x)$ si y solo $(\mathfrak{M}, i_b) \models \varphi = \psi * \sigma$ se cumple pa todos los conectores binarios.
Ahora, sea ψ fórmula, y variable y $\varphi = \mathbb{Q}y\psi$ con $\mathbb{Q}$ cuantificador. Hay dos casos. Caso 1: si $y \notin Free(\psi)$:
Tenemos:

1. $\mathfrak{M}'_b \models \phi(\hat{x}|x) = \mathbb{Q}y\psi(\hat{x}|x)$ si y solo si $\mathfrak{M}'_b \models \psi(\hat{x}|x)$

2. $(\mathfrak{M}, i_b) \models \phi = \mathbb{Q}y\psi$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \psi$

Entonces $\mathfrak{M}'_b \models \phi(\hat{x}|x)$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \phi$
Caso 2: si $y \in Free(\psi)$.
Sea $\hat{y}^{\mathfrak{M}''_{bb'}} := b' \in M$, tenemos $\mathfrak{M}'_b(\hat{y}|y) \models \mathbb{Q}y\psi(\hat{y}|y)$ si y solo si $\mathbb{Q}b' \in M$, $\mathfrak{M}''_{bb'} \models \psi$.
Luego, $\hat{y}^{\mathfrak{M}'_{b'}} := b' \in M$, tenemos que $(\mathfrak{M}, i_b) \models \mathbb{Q}y\psi$ si y solo si $(\mathfrak{M}'_{b'}, i_b) \models \psi$
Por hipotesis tenemos que $\mathfrak{M}'_b \models \psi$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \psi$. Además tenemos que dado $b' \in M$ tenemos que $\mathfrak{M}''_{bb'}$ es la misma que $\mathfrak{M}'_b$ con la siguiente modificación:
$\hat{y}^{\mathfrak{M}''_{bb'}} = \hat{y}^{\mathfrak{M}'_{b'}} = b' \in M$. Esto demuestra que $\mathfrak{M}'_b \models \mathbb{Q}y\psi$ si y solo si $(\mathfrak{M}, i_b) \models \mathbb{Q}y\psi$.
Con todo esto, se cumple para todas las fórmulas y obtenemos lo pedido.

■

Problema 2.

(a) (4pts) Con el lenguaje $\mathcal{L} = \{\dot{+}, \dot{=}, E\}$, y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, =, f)$ donde el símbolo de función unaria E se interpreta como la función $f(x) = x^2$ y los otros símbolos se interpretan de la manera usual, muestre que el conjunto $A = \{\overline{1}\} \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es definible.

(b) (8pts) Con el lenguaje $\mathcal{L} = \{\dot{+}, \dot{=}\}$ y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}_0, +, =)$ donde los símbolos del lenguaje se interpretan de la manera usual, mostrar que todo subconjunto finito de $\mathbb{N}_0$ es definible.

Solución problema 2:

(a) Sea φ la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula con variable libre x:

$$(f(x) = x) \wedge (\forall y \neg(x + y = y))$$

Se puede notar que si x cumple $f(x) = x$, entonces es su propio cuadrado en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, se recuerda que es cuerpo[1], por lo que no hay divisores de 0, entonces $x^2 - x = x(x - \overline{1}) = 0$ y como es un cuerpo se sabe que $x = \overline{1}$ ó $x = \overline{0}$. Luego $\overline{1} + y \neq y$, para cualquier y, pero $\overline{0} + y = y$, para cualquier y, por lo que solo $\overline{1}$ satisface φ. Con lo que A es definible.

(b) Se nota que si existe φ_n $\mathcal{L}$-fórmula tal que solo n lo satisface, entonces un conjunto finito $A = \{a_1, ..., a_k\}$ es definible por la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula:

$$\bigvee_{i=1}^{k} \varphi_{a_i}$$

[1] Artin (2011)

Se puede notar que φ_0 sería la $\mathcal{L}$-fórmula con variable libre b $\forall x(x+b=x)$. Luego, se considera la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula con variable libre a

$$\forall x, y((x+y=a) \implies ((\neg(x=y)) \wedge (((a=x) \wedge \varphi_0(y|b)) \vee ((a=y) \wedge \varphi_0(x|b)))))$$

Se va a notar que esta es φ_1, ya que solo 1 cumple que la única forma de escribirlo en forma de suma es tomándose a si mismo y sumándole el 0, también se consideran ambas posibilidades con el orden[2]. Con estas $\mathcal{L}$-fórmulas se tiene lo suficiente para construir φ_n con variable libre x:

$$\exists y((\underbrace{(((\ldots(y+y)+\ldots)+y)}_{\text{“}n\text{” } y}=x) \wedge \varphi_1(y|a))$$

Esto es suficiente ya que para cada φ_n el n es fijo, y n es único número natural que cumple que es la suma de n unos. Ya construido φ_n por lo mencionado al comienzo, se tiene que todo subconjunto finito A de $\mathbb{N}_0$ es definible.

■

Problema 3 (Bonus)**.** Sea $A = \{p_1, p_2, ...\}$ el conjunto de todas las letras proposicionales. Muestre que hay a lo más un conjunto consistente maximal que contiene el conjunta A.

Solución problema 3: Sean Δ_1 y Δ_2 dos conjuntos consistentes maximales que contienen A. Luego, pasa una de los opciones $\Delta_1 \neq \Delta_2$ ó $\Delta_1 = \Delta_2$. Viendo el primer caso, existe $\varphi \in \Delta_1 \setminus \Delta_2$, luego ya que Δ_2 es consistente maximal y $\varphi \notin \Delta_2$, $\neg\varphi \in \Delta_2$. Sea $B \subset A$ las letras proposicionales en φ, luego $B \cup \{\varphi\} \subset \Delta_1$ y $B \cup \{\neg\varphi\} \subset \Delta_2$. Ahora, claramente $B \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ y por correctitud $B \cup \{\varphi\} \models \varphi$, similarmente para $B \cup \{\neg\varphi\}$ entonces existen valuaciones V_1, V_2 que satisfacen cada uno correspondientemente, entonces particularmente satisfacen B y como φ esta compuesta por los elementos de B se cumple que $V_1(\varphi) = V_2(\varphi)$, pero si esto es una contradicción. Con esto se tiene que $\Delta_1 = \Delta_2$ por lo que solo hay un conjunto consistente maximal que contiene A.

■

Referencias

Artin, M. (2011). *Algebra.* Pearson Prentice Hall.

[2] La suma es conmutativa.