Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

I1

Analisis Funcional - MAT2555

Fecha de Entrega: 2019-09-26

Nicholas Mc-Donnell

Se denotará $\mathcal{B}$ a $\{f_0\} \cup \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$

Solución problema 1.a: Para ver que S_n está bien definido es suficiente y necesario ver que para toda $f \in L^2(]-\pi,\pi[)$ se tiene $S_n f \in L^2(]-\pi,\pi[)$.

$$\begin{aligned}
\|S_n f\| &= \left\| \langle f_0, f\rangle f_0(s) + \sum_{k=1}^{n} \langle f_k, f\rangle f_k(s) + \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f\rangle e_k(s) \right\| \\
&\leq |\langle f_0, f\rangle| \|f_0\| + \sum_{k=1}^{n} |\langle f_k, f\rangle| \|f_k\| + \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, f\rangle| \|e_k\| \\
&\leq \|f\| \left(\|f_0\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2 \right) = \|f\| (2n+1)
\end{aligned}$$

Como $f \in L^2(]-\pi,\pi[)$ inmediatamente se tiene que $\|S_n f\| < \infty$, más aún se tiene que S_n es acotado, como claramente S_n es lineal, S_n es continua. Ahora, para ver que S_n es proyección falta que $S_n^2 = S_n$ y que $\langle S_n g, f\rangle = \langle g, S_n f\rangle$. Para lo primero se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle f_0, S_n f\rangle &= \left\langle f_0, \langle f_0, f\rangle f_0(s) + \sum_{k=1}^{n} \langle f_k, f\rangle f_k(s) + \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f\rangle e_k(s) \right\rangle \\
&= \langle f_0, f\rangle \langle f_0, f_0\rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle f_k, f\rangle \langle f_0, f_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f\rangle \langle f_0, e_k\rangle \\
&= \langle f_0, f\rangle
\end{aligned}$$

Lo último es porque $\mathcal{B}$ es ortonormal, similarmente se nota lo mismo para cada elemento en $\mathcal{B}$ con n fijo, por lo que $S_n(S_n(f)) = S_n(f)$. Para lo último, sean $g_1, g_2 \in L^2(]-\pi,\pi[)$

$$\begin{aligned}
\langle S_n g_1, g_2\rangle &= \left\langle \langle f_0, g_1\rangle f_0(s) + \sum_{k=1}^{n} \langle f_k, g_1\rangle f_k(s) + \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, g_1\rangle e_k(s), g_2 \right\rangle \\
&= \langle f_0, g_1\rangle \langle f_0, g_2\rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle f_k, g_1\rangle \langle f_k, g_2\rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, g_1\rangle \langle e_k, g_2\rangle \\
&= \left\langle g_1, \langle f_0, g_2\rangle f_0(s) + \sum_{k=1}^{n} \langle f_k, g_2\rangle f_k(s) + \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, g_2\rangle e_k(s) \right\rangle \quad = \langle g_1, S_n g_2\rangle
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene lo pedido.

$\blacksquare$

Solución problema 1.b: Se quiere demostrar las siguientes igualdades[1]:

$$(S_nf)(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(s-t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(s-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(s-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

Comenzando por (2), se usa la siguiente sustitución $u = s-t$, con lo que se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(s-t)\,\mathrm{d}t &= -\int_{s+\pi}^{s-\pi} f(s-u)D_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{s-\pi}^{s+\pi} f(s-u)D_n(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Ahora, como $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ y como $s+\pi-(s-\pi) = 2\pi$ se tiene que

$$\int_{s-\pi}^{s+\pi} f(s-u)D_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} f(s-u)D_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Con lo que se tiene (2), para (1) se usará la siguiente igualdad

$$\langle f_k, f\rangle\, f_k(s) + \langle e_k, f\rangle\, e_k(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{1}{\pi}\cos(k(s-t)) \tag{3}$$

Esta aparece desarrollando la expresión:

$$\begin{aligned}\langle f_k, f\rangle\, f_k(s) + \langle e_k, f\rangle\, e_k(s) &= f_k(s)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt)f(t)\,\mathrm{d}t + e_k(s)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{\pi}\big[\cos(ks)\cos(kt)+\sin(ks)\sin(kt)\big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{1}{\pi}\cos(ks-kt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Usando (3), que $\langle f_0, f\rangle\, f_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{2\pi}\,\mathrm{d}t$ y recordando que $D_n(s) = \frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(ks)$ se tiene (1)

■

Solución problema 1.c: Dado $s \in \mathbb{R}$ fijo se quiere que $(S_nf)(s) \to f(s)$, para esto se verá

[1] i.e. S_nf es la convolución de f y de D_n

que la siguiente expresión tiende a 0.

$$f(s) - (S_n f)(s) \tag{4}$$

Para esto, se reescribirá usando lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(s) - (S_n f)(s) &= f(s) - \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(s-t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{Por (2)} \\ &= f(s) \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(s-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)(f(s) - f(s-t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Luego tomando, $\phi_n(t) = \sin((n+1/2)t)/\sqrt{\pi}$ y $g_s(t) = \frac{f(s)-f(s-t)}{2\sqrt{\pi}\sin(t/2)}$, se quiere que $\{\phi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea una familia ortonormal, que g_s sea medible y $g_s \in L^2(]-\pi,\pi[)$. Se nota que, dado las condiciones anteriores, se tiene que $f(s) - (S_n f)(s) \to 0$, ya que $\infty > \|g_s\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \phi_k, g_s\rangle|^2$ por la desigualdad de Parseval, con lo que se tiene que $|\langle \phi_n, g_s\rangle|^2 \to 0$, más específicamente $|\langle \phi_n, g_s\rangle| \to 0$, o sea, $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(t) g_s(t)\,\mathrm{d}t \to 0$.
Para demostrar que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia ortonormal, sean $n, k \in \mathbb{N}$ distintos entre sí, luego se ve $\langle \phi_n, \phi_k\rangle$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(t)\phi_k(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+1/2)t)\sin((k+1/2)t)/\pi\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot (\cos(t(n-k)) - \cos(t(n+k+1)))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(t(n-k))}{n-k} - \frac{\sin(t(n+k+1))}{n+k+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

Se recuerda que $n, k \in \mathbb{N}$, por lo que $\langle \phi_n, \phi_k\rangle = 0$. Ahora, si es que $n = k$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \phi_n, \phi_n\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(1 - \cos(t(2n+1)))\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t(2n+1))\,\mathrm{d}t \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que $\{\phi_n\}$ es una familia ortonormal. Ahora, para que g_s sea medible es suficiente que las discontinuidades que aparezcan por $\sin(t/2)$ sean removibles[2]. Para esto se nota que sus

[2]i.e. si g_s discontinua en x_0 que exista $\lim_{x\to x_0} g_s(x)$

únicas posibles discontinuidades son en $t = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, y ya que f es periódica, se ve que es suficiente que la discontinuidad en $t = 0$ sea removible.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(s) - f(s-t)}{2\sqrt{\pi}\sin(t/2)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(s-t)}{\sqrt{\pi}\cos(t/2)} = \frac{f'(s)}{\sqrt{\pi}}$$

Con lo que se tiene que $\|g_s\| < \infty$ y más aún, g_s es medible.

$\blacksquare$

Solución problema 1.d: Se quiere que $\langle f_k, f\rangle = -\frac{1}{k}\langle e_k, f'\rangle$ y que $\langle e_k, f\rangle = \frac{1}{k}\langle f_k, f'\rangle$. Para el primero se escribe la integral y se usa integración por partes:

$$\begin{aligned}
\langle f_k, f\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(ks)f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sin(ks)}{k}\cdot f(s)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k\sqrt{\pi}}f'(s)\sin(ks)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sin(ks)}{k}\cdot f(s)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\langle e_k, f'\rangle
\end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sin(k\pi) = 0$ y $\sin(-k\pi) = 0$, por lo que $\langle f_k, f\rangle = \frac{1}{k}\langle e_k, f\rangle$. Similarmente:

$$\begin{aligned}
\langle e_k, f\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(ks)f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cos(ks)}{k}\cdot f(s)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k\sqrt{\pi}}f'(s)\cos(ks)\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cos(ks)}{k}\cdot f(s)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\langle f_k, f'\rangle
\end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\cos(k\pi) = 1$ y $\cos(-k\pi) = 1$, junto con que $f(-\pi + 2\pi) = f(\pi)$ se tiene que $\langle e_k, f\rangle = \frac{1}{k}\langle f_k, f'\rangle$. Además se pide demostrar que $S_n f$ es una sucesión de Cauchy, para esto, sean $n, m \in \mathbb{N}$ y s.p.d.g. sea $n > m$, entonces:

$$(S_n f - S_m f)(s) = \sum_{k=m+1}^{n} \langle f_k, f\rangle f_k + \langle e_k, f\rangle e_k = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}(\langle f_k, f'\rangle e_k - \langle e_k, f'\rangle f_k)$$

Ahora, se desarrolla cada termino de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\langle f_k, f' \rangle\, e_k(t) - \langle e_k, f' \rangle\, f_k(t) &= \frac{1}{\pi}\left(\sin(kt)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ks)f'(s)\,\mathrm{d}s - \cos(kt)\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ks)f'(s)\,\mathrm{d}s\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(s)\left(\sin(kt)\cos(ks) - \cos(kt)\sin(ks)\right)\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(s)\sin(k(t-s))\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{\pi}\left\langle f', \sin(k(t-s))\right\rangle\\
&= \frac{1}{\pi}\left\langle f', \sin(ks)\right\rangle
\end{aligned}$$

Con esto se llega a lo siguiente:

$$(S_n f - S_m f)(t) = \frac{1}{\pi}\left\langle f'(s), \sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin(ks)}{k}\right\rangle$$

Ahora, se usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se tiene que

$$|(S_n f - S_m f)(s)| \leq \frac{1}{\pi}\|f'\|\left\|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin(ks)}{k}\right\| = C_{n,m}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(ks)}{k}$ es una serie de funciones convergente, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tq $n, m > N \implies C_{n,m} < \varepsilon$, por lo que se tiene que $S_n f$ es una sucesión de Cauchy. Por lo que se tiene que $S_n f$ converge uniformemente a f en $\mathbb{R}$.

■

Solución problema 1.e: Se quiere que $\mathcal{B}$ sea una base ortonormal completa, en otras palabras que si para $f \in L^2(]-\pi,\pi[)$ se tiene que $\forall b \in \mathcal{B}\ \langle f, b\rangle = 0$ entonces $f = 0$. Para esto, se nota que es suficiente que para $f \in L^2(]-\pi,\pi[)$ se tenga $\|f - S_n f\| \to 0$, ya que si $\langle f, b\rangle = 0$ para todo $b \in \mathcal{B}$ entonces $S_n f = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\|f\| \to 0$, pero esto implicaría que $f = 0$. Ahora, para demostrar que $\|f - S_n f\| \to 0$ recordamos que por la pregunta anterior se tiene que si $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ entonces $\sup|g - S_n g| \to 0$, por lo que específicamente $\|g - S_n g\| \to 0$. Usando lo anterior, y que $\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(]-\pi,\pi[)$, se tiene que existe $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad\qquad \|g - S_n g\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Se nota además que, como S_n es proyección ortogonal, $\|S_n\| \leq 1$[3] por lo que $\|S_n f - S_n g\| \leq \|S_n\| \|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Juntando las tres expresiones se tiene lo siguiente:

$$\|f - S_n f\| \leq \|f - g\| + \|g - S_n g\| + \|S_n g - S_n f\| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Con lo que se tiene que $\|f - S_n f\| \to 0$, consiguiendo lo pedido.

$\blacksquare$

[3] $\|S_n f\|^2 = \langle S_n f, S_n f \rangle = \left\langle S_n^2 f, f = \langle S_n, f \rangle \leq \|S_n\| \|f\| \right\rangle \implies \|S_n\| \leq \|f\|$