



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Control 1

Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — IIC2223

Fecha de Entrega: 2020-09-07

Nicholas Mc-Donnell

Problema 1:

Un autómata finito no determinista (NFA) $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ se dice no-ambiguo, si para toda palabra $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ existe exactamente una ejecución de aceptación de \mathcal{A} sobre w . Por ejemplo, un autómata finito determinista es un NFA no-ambiguo, pero existen autómatas que no son deterministas, pero si no ambiguos.

- (a) Para $i \geq 0$, considere el lenguaje L_i de todas las palabras $w = a_1 \dots a_n$ sobre $\{a, b\}$ con $n > i$ tal que $a_{n-i} = b$. Demuestre que para cada L_i existe un NFA no-ambiguo \mathcal{A} con menor o igual a $i + 2$.
- (b) Demuestre que para todo lenguaje regular L con $\varepsilon \notin L$, existe un NFA no-ambiguo $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ tal que $|I| = |F| = 1$ y $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$.

Solución problema 1: *Doy mi palabra que la siguiente solución de la pregunta 1 fue desarrollada y escrita individualmente por mi persona según el código de honor de la Universidad*

—Nicholas Mc-Donnell

- (a) Sea q_1 estado ‘prefijo’, q_2 estado ‘b’ y q_j con $3 \leq j \leq i + 2$ ¹ como estados ‘sufijo’. Se tiene que $q_{i+2} \in F$ y $q_1 \in I$, además se tiene que $\Delta(q_1, c, q_1)$ y $\Delta(q_j, c, q_{j+1})$ para $c \in \Sigma$ y $2 \leq j < i + 2$, por último se tiene $\Delta(q_1, b, q_2)$. Lo anterior define \mathcal{A}_i . Ahora, sea $w \in L_i$, se tiene que $w = a_1 \dots a_n$ para algún $n > i$, se ve la siguiente ejecución $\rho : q_1 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-i-1}} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a_{n-i+1}} q_3 \xrightarrow{a_{n-i+2}} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{i+1} \xrightarrow{a_n} q_{i+2}$, como $q_{i+2} \in F$ \mathcal{A}_i acepta w , por lo que se tiene que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i) \subseteq L_i$. Ahora, sea $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$, tal que $w = a_1 \dots a_n$, se tiene que existe una ejecución ρ que acepta w , se nota que $n > i$ ya que toda palabra aceptada por \mathcal{A}_i tiene que pasar por los estados q_1 a q_{i+2} , que son $i + 1$ estados, más aún como toda ejecución que acepta tiene que pasar por esos estados, en específico tiene que pasar por la transición $\Delta(q_1, b, q_2)$ y como después de q_2 las transiciones son ‘únicas’², se tiene que hay exactamente $i - 1$ ³ estados por los que va a pasar para ser aceptada. Con lo anterior se tiene que $a_{n-i} = b$, viendo ambas condiciones sobre w , se tiene que $w \in L_i$. Completando la demostración.

¹Si $i = 0$, se usa el estado q_2

¹Ver 1

²Para cada q_k hay solo un q_j tal que $\Delta(q_k, c, q_j)$ para algún $c \in \Sigma$

³Si $i = 0$ el autómata es de 2 estados y q_2 es de aceptación, por lo que una vez se llega al estado q_2 no hay más transiciones.

- (b) Sea \mathcal{A} un DFA tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$, se tiene que visto como NFA $|Q| = 1$. Ahora, se construye un NFA \mathcal{A}' en base a \mathcal{A} de la siguiente manera, se crea un estado extra q_{final} que es de aceptación, y para todo otro estado de aceptación q_i ⁴ se usa el siguiente proceso, para todo estado q_j y carácter $a \in \Sigma$ tal que $\delta_{\mathcal{A}}(q_j, a) = q_i$ se agrega $\Delta_{\mathcal{A}'}(q_j, a, q_{final})$, y una vez que toda transición que llegue al estado q_j se haya procesado se tiene que $q_j \notin F$. Este NFA cumple que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ ya que para toda ejecución de aceptación ρ de \mathcal{A} sobre w se tiene una ejecución de aceptación ρ' con la diferencia que la última transición desde el estado correspondiente $p_j \xrightarrow{w_k} p_i$ es $p_j \xrightarrow{w_k} q_{final}$ ⁵, más aún esta transición es única por construcción y como ρ es única se tiene que la ejecución hasta p_i es única, con lo que se tiene que ρ' es única en su totalidad. Con lo anterior, se tiene que el NFA \mathcal{A}' cumple lo pedido. ■

⁴Se nota que como $\varepsilon \notin L$ se tiene que q_0 no es estado de aceptación.

⁵Para la otra implicancia, es claro que por construcción tiene que existir un estado de aceptación $p_i \in Q_{\mathcal{A}}$ tal que $p_j \xrightarrow{w_k} p_i$