Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019

Tarea 5

Introducción a la Geometría Algebraica — MAT 2335

Fecha de Entrega: 2019/05/31

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Notas

En esta tarea se usará la notación $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

Problema 5.1:

Let F be a projective plane curve. Show that a point P is a multiple point if and only if $F(P) = F_x(P) = F_y(P) = F_z(P) = 0$.

Solución problema 5.1: Se nota que deshomogenizar F y después derivar respecto a x, y o z, es equivalente a derivar y después deshomogenizar, mientras que no sé deshomogenice por la variable respecto a la cual se deriva. También se recuerda que por definición la multiplicidad de P en una CPP F es la multiplicidad de P en F_*, para cualquier deshomogenización. Dado esto se puede ver que P es punto multiple de F ssi $\overline{P}$ es punto multiple F_*. Con eso se tiene que si $F(P) = F_x(P) = F_y(P) = f_z(P) = 0$, entonces P es punto multiple. Ahora, con eso se recuerda que para curvas planas afines se tiene que P es un punto multiple de G si y solo si $G(P) = G_x(P) = G_y(P) = 0$, por lo que sí P es punto multiple de F, $\overline{P}$ es punto multiple de F_*, por lo que $F_*(\overline{P}) = F_{*x}(\overline{P}) = F_{*y}(\overline{P}) = 0$, con lo que $F(\overline{P}) = F_x(\overline{P}) = F_y(\overline{P})$, pero se recuerda que no importa que deshomogenización se usa, por lo que también se tiene que $F_z(P) = 0$.

$\blacksquare$

Problema 5.4:

Let P be a simple point of F. Show that the tangent line to F at P has the equation $F_x(P)x + F_y(P)y + F_z(P)z = 0$.

Solución problema 5.4: Se sabe que la tangente afín a F_* en $\overline{P}$ es $F_{*x}(\overline{P})(x - x_0) + F_{*x}(\overline{P})(y - y_0) = (F_{*x}(\overline{P})x + F_{*y}(\overline{P})y - (F_{*x}(\overline{P})x_0 + F_{*y}(\overline{P})y_0)$, ahora $P \in F$ por lo que $0 = nF(P) = x_0F_x(P) + y_0F_y(P) + z_0F_z(P)$, se puede tomar $z_0 = 1$, por lo que $F_x(P)x_0 + F_y(P)y_0 = -F_z(P)$, con lo que se tiene que la recta tangente proyectiva es $F_x(P)x+F_y(P)y+F_z(P)z$.

$\blacksquare$

Problema 5.6:

For any $F, P \in F$, show that $m_P(F_x) \geq m_P(F) - 1$.

Solución problema 5.6: Como $nF = xF_x+yF_y+zF_z$, entonces $nF_* = xF_{*x}+yF_{*y}+F_{z*}$, por lo que $xF_{*x} = nF_* - yF_{*y} - F_{z*}$. Y con esto y su descomposición en polinomios homogéneos, es claro que $m_P(F_{*x}) \geq m_P(F_*) - 1$.

$\blacksquare$

Problema 5.7:

Show that two plane curves with no common components intersect in a finite number of points.

Solución problema 5.7: Se nota que por Bezout se tiene esto inmediatamente.

$\blacksquare$

Problema 5.18:

Show that there is only one conic passing through the five points $[0:0:1], [0:1:0], [1:0:0], [1:1:1]$, and $[1:2:3]$; show that is nonsingular.

Solución problema 5.18: Sea C cónica tal que los puntos están en ella. Ya que $[0:0:1], [0:1:0], [1:0:0] \in C$ se tiene que $C = axy + byz + xz$, y usando los otros puntos se tiene que $C = 3xy + yz - 4xz$. Se ve $\nabla C = (3y - 4z, 3x + z, y - 4x)$, y se nota que $\nabla C = 0$ ssi $x = y = z = 0$, por lo que C es no singular.

$\blacksquare$

Problema 5.19:

Consider the nine points $[0:0:1], [0:1:1], [1:0:1], [1:1:1], [0:2:1], [2:0:1], [1:2:1].[2:1:1]$, and $[2:2:1] \in \mathbb{P}^2$ (Sketch). Show that there are an infinite number of cubics passing through these points.

Solución problema 5.19:

$\blacksquare$

Problema 5.21:

Show that every nonsingular projective plane curve is irreducible. Is this true for affine curves?

Solución problema 5.21: Por contradicción, se asume que F es una CPP no-singular reducible, entonces existen R, S tal que $F = RS$, con $\deg R, \deg S \geq 1$, luego por Bezout se tiene que existe un punto $p \in R \cap S$, con lo que $m_p(F) > 1$, por lo que F es singular en p, lo que es una contradicción. En el caso afín esto no necesariamente es verdad, ya que dado dos curvas R, S su intersección puede ser vacía.

$\blacksquare$

Problema 5.22:

Let F be an irreducible curve of degree n. Assume $F_x \neq 0$. Apply Corollary 1 to F and F_x, and conclude that $\sum m_P(F)(m_P(F)-1) \leq n(n-1)$. In particular, F has at most $\frac{1}{2}n(n-1)$ multiple points. (See Problems 5.6, 5.8.)

Solución problema 5.22: Se nota que $\deg F_x = \deg F - 1 = n-1$,luego por coralario 1, $\sum m_P(F)m_P(F_x) \leq n(n-1)$. Se recuerda que $m_P(F_x) \geq m_P(F) - 1$, por lo que $\sum m_P(F)m_P(F_x) \geq \sum m_P(F)(m_P(F)-1)$. Con ambas desigualdades se tiene que $\sum m_P(F)(m_P(F)-1) \leq n(n-1)$. Se nota que en caso que P sea un punto simple de F entonces $m_P(F)(m_P(F)-1) = 0$, y si P es un punto multiple $m_P(F) \geq 2$, por lo que $2 \cdot \#\{P \in F : m_P(F) \geq 2\} \leq \sum m_P(F)(m_P(F)-1) \leq n(n-1)$, por lo que $\#\{P \in F : m_P(F) \geq 2\} \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.

■

Problema 5.28:

($\operatorname{char}(k) = p > 0$) $F = x^{p+1} - y^p z$, $P = [0:1:0]$. Find $L \cap F$ for all lines L passing through P. Show that every line that is tangent to F at a simple points passes through P!

Solución problema 5.28: Sea L tal que $[0:1:0] \in L$, entonces $L = x + az$, luego $L \cap F = V(z((az)^p - y^p), x+az) = V(z(az-y)^p, x+az)$. Se nota que $[0:1:0] \in L \cap F$, ahora sea $[-a:b:1] \in L \cap F$, entonces $b = a$ ya que $(a-y)^p = 0$. Con esto se tiene que $L \cap F = \{[0:1:0], [-a:a:1]\}$. Sea L tangente a F en P un punto simple, se sabe que $L = F_x(P)x + F_y(P)y + F_z(P)z$, viendo $F_y = 0$, y que P es simple, se tiene que $F_z(P) \neq 0$ o $F_x(P) \neq 0$, si $F_z(P) \neq 0$ se tiene que $F_z(P) = y_0^p \neq 0 \implies (z_0 = 0 \iff x_0 = 0)$, y si $F_x(P) = x_0^p \neq 0 \implies y_0^p z_0 \neq 0 \implies (z_0 \neq 0 \land y_0 \neq 0)$, por lo que $P = [0:1:0]$ o $P = [x_0 : y_0 : z_0]$, donde todos son distintos de cero. Se toma $P = [x_0 : y_0 : z_0]$ con todos distintos de cero, luego $L = x_0^p x + y_0^p z$, pero $[0:1:0] \in L$. Con lo que se tiene lo pedido.

■

Problema 6.9:

Let $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$, an open subvariety of $\mathbb{A}^2$. Show that $\Gamma(X) = \Gamma(\mathbb{A}^2) = k[x,y]$

Solución problema 6.9: Se nota que $\Gamma(\mathbb{A}^2) \subseteq k(x,y)$, luego si $p/q \in \Gamma(\mathbb{A}^2)$ entonces $V(q) \cap \mathbb{A}^2 = \emptyset$, pero $V(q) \subset \mathbb{A}^2$, por lo que $V(q) = \emptyset$. Esta dice que q es una constante, por lo que $\Gamma(\mathbb{A}^2) = k[x,y]$. Similarmente $\Gamma(\mathbb{A}^2) \subseteq \Gamma(X)$, luego sea $p/q \in \Gamma(X)$, entonces $V(q) \cap X = \emptyset$, se asume que q no constante, por lo que $V(q) = \{(0,0)\}$, pero q es un polinomio no constante en el plano, entonces $V(q)$ no puede ser finito por lo que tiene infinitos elementos, lo que es una contradicción, con esto se tiene que q es constante, por lo que $\Gamma(X) \subseteq k[x,y] = \Gamma(\mathbb{A}^2)$. Con lo que se tiene lo pedido.

■

Problema 6.14:

Let X, Y be varieties, $f : X \to Y$ a mapping. Let $X = \bigcup_\alpha U_\alpha, Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$, with U_α, V_α open subvarieties, and suppose $f(U_\alpha) \subset V_\alpha$ for all α.

(a) Show that f is a morphism if only if each restriction $f_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ of f is a morphism.

(b) If each U_α, V_α is affine, f is a morphism if only if each $\tilde{f}(\Gamma(V_\alpha)) \subset \Gamma(U_\alpha)$

Solución problema 6.14:

(a) $\implies$: Ya que f es continua, f_α la restricción también lo es. La segunda parte también se tiene, ya que como $V_\alpha \subset Y$, específicamente se tiene la propiedad para los subconjuntos abiertos U de V_α.
$\Longleftarrow$: Para la continuidad de f basta notar que como es continua en cada U_α, entonces es continua en la unión de estás.

■

Problema 6.23:

Let $P, Q \in X$, X a variety. Show that there is an affine open set V on X that contains P and Q. (*Hint:* See the proof of the Corollary to Proposition 5, and use Problem 1.17(c).)

Solución problema 6.23:

■

Problema 6.26:

(a) Let $f : X \to Y$ be a morphism of varieties such that $f(X)$ is dense in Y. Show that the homorphism $\tilde{f} : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ is one-to-one.

(b) If X and Y are affine, show that $f(X)$ is dense in Y if and only if $\tilde{f} : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ is one-to-one. Is this true if Y is not affine.

Solución problema 6.26:

■

Problema 6.31:

(Theorem of the Primitive Element) Let K be a field of characteristic zero. L a finite (algebraic) extension of K. Then there is a $z \in L$ such that $L = K(z)$. *Outline of Proof:*

(Step I) Suppose $L = K(\alpha, \beta)$. Let p and q be monic and irreducible polynomials in $k[x]$ such that $p(\alpha) = 0, q(\beta) = 0$. Let L' be a field in which $p = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i), q = \prod_{j=1}^{m}(x - \beta_j), \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, L' \supset L$ (see Problems 1.52, 1.53). Choose $\lambda \neq 0$ in K so that $\lambda\alpha + \beta \neq \lambda\alpha_i + \beta_j$ for all $i \neq 1, j \neq 1$. Let $z = \lambda\alpha + \beta, K' = K(z)$. Set $h(x) = q(z - \lambda x) \in K'[x]$. Then $h(\alpha) = 0, h(\alpha_i) \neq 0$ if $i > 1$. Therefore $(h, p) = (x - \alpha) \in K'[x]$. Then $\alpha \in K'$, so $\beta \in K'$, so $L = K'$.

(Step II) If $L = K(x_1, \ldots, x_n)$, use induction on n to find $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ such that $L = K(\sum \lambda_i x_i)$.

Solución problema 6.31: Para la primera parte, se toma $L = K(\alpha, \beta)$, con p, q los polinomios minimales correspondientes. Sea L' una extensión de K tal que p, q sean factorizables en monomios, de otra forma, L' es una extensión separable de L. Sean $p = \prod(x - \alpha_i), q = \prod(x - \beta_j)$ factorizados en L', donde $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$. Se puede elegir $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda\alpha + \beta \neq \lambda\alpha_i + \beta_j$ para todo $i \neq 1, j \neq 1$, ya que hay finitos λ tales que $-\lambda(\alpha - \alpha_i) = \beta - \beta_j$. Ahora sea $K' = K(z)$ con $z = \lambda\alpha + \beta$, se toma el polinomio $h(x) = q(z - \lambda x) \in K'[x]$, claramente $h(\alpha_i) = 0 \iff i = 1$. Luego $L = K(\alpha, \beta) = K(\alpha, z) = K'(\alpha)$, por lo que sí $[K'(\alpha) : K'] = 1$ se tiene lo pedido. Sea q' polinomio minimal de α en K', como $h(\alpha) = 0$ se tiene que $q' \mid h$, y además $q' \mid q$, pero $(q, h) = (x - \alpha)$, por lo que $q'(x) = x - \alpha$, y se tiene lo pedido.
Para el caso general, se nota que si funciona para n elementos ($\exists \gamma : K(\gamma) = K(x_1, \ldots, x_n)$), para $n + 1$ se reduce a $K(\gamma, x_{n+1})$, lo cual cumple lo pedido por la primera parte.

■

Problema 6.43:

Let C be a projective curve, $P \in C$. Then there is birational morphism $f : C \to C'$, C' a projective curve, such that $f^{-1}(f(P)) = \{P\}$. We outline the proof:

(a) We can assume: $C \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Let $t, x_1, \ldots, x_n, z$ be coordinates for $\mathbb{P}^{n+1}$; Then $C \cap V(t)$ is finite; $C \cap V(t, z) = \emptyset$; $P = [0 : \cdots : 0 : 1]$; and $k(C)$ is algebraic over $k(u)$, where $u = \bar{t}/\bar{z} \in k(C)$.

(b) For each $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^n$, let $\varphi_\lambda : C \to \mathbb{P}^2$ be defined by the formula $\varphi([t : x_1 : \cdots : x_n : z]) = [t : \sum \lambda_i x_i : z]$. Then φ_λ is well-defined morphism, and $\varphi_\lambda(P) = [0 : 0 : 1]$. Let C' be the closure of $\varphi_\lambda(C)$.

(c) The variable λ can be chosen so φ_λ is a birational morphism from C to C' and $\varphi_\lambda^{-1}([0 : 0 : 1]) = \{P\}$. (Use problem 6.32 and the fact that $C \cap V(T)$ is finite).

Solución problema 6.43:

■