Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Tarea 1

Variable Compleja - MAT2705

Fecha de Entrega: 2019-09-06

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Problema 1:

(a) Grafique la imagen bajo proyección estereográfica de los siguientes conjuntos

I. El hemisferio inferior: $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < 0\}$.

II. $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \frac{3}{4} \leq z \leq 1\}$.

III. Un circulo de la forma $\{(\sqrt{1 - z_0^2} \cos\theta, \sqrt{1 - z_0^2} \sin\theta, z_0) \in \mathbb{S}^2 : \theta \in [0, 2\pi)\}$ con z_0 fijo.

IV. Un circulo de la forma $\{(\sqrt{1 - z^2} \cos\theta_0, \sqrt{1 - z^2} \sin\theta_0, z) \in \mathbb{S}^2 : z \in [-1, 1]\}$ con θ_0 fijo.

(b) Demuestre que la inversión $\frac{1}{z}$ es equivalente a una rotación de la esfera en π radianes alrededor del eje x.

Solución problema 1:

(a) Se muestran los gráficos:

(I)

(b) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2$ la proyección estereográfica, y $\rho : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ la rotación en π radianes respecto el eje x. Se pide que $\rho \circ f = f \circ \frac{1}{z}$. Se recuerdan las matrices de rotación, y se representa ρ como una:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ 0 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora, es claro que la rotación mapea (x, y, z) a $(x, -y, -z)$. Sea $z \in \mathbb{C}$, se escribe como $z = x + iy$, luego $z \mapsto \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, se aplica f y se llega a lo siguiente:

$$z \mapsto \left(\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}}{1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2}, \frac{\frac{-2y}{x^2+y^2}}{1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2}, \frac{-1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2} \right)$$

Esto se puede desarrollar un poco y se llega a:

$$\left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{-2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Con lo que claramente $\rho \circ f = f \circ \frac{1}{z}$

$\blacksquare$

Problema 2:

Encuentre mapeos conformes entre las siguientes regiones:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

(b) $\{r \exp(i\theta) \in \mathbb{C} : \theta \in (0, \frac{\pi}{n}), r \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{C}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$.

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$.

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (a, b)\}$

Solución problema 2:

(a) Se recuerda que la inversión es un mapeo conforme, y que mapea las regiones pedidas.

(b) Se recuerda que las funciones analíticas son mapeos conformes, se toma $f(x) = x^{n+1}$ se nota que cumple lo pedido.

(c) Se ven las proyecciones de ambas regiones en la esfera y se nota que ambas son hemisferios, por lo que una rotación en la esfera cumple lo pedido.

(d) Se nota que $z \mapsto \exp(z)$ mapea $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Y $\exp(z)$ es analítica, por lo que se tiene el mapeo conforme.

(e) Usando los mapeos anteriores (los cuales son todos biyectivos excepto x^{n+1}) y el mapeo lineal f de $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (a, b)\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$, se hace la siguiente cadena de mapeos conformes, se usa f, luego $\exp(z)$, se rota en la esfera para llegar a $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y se invierte.

$\blacksquare$

Problema 3:

Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continua y se define en $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ la función

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t - z} \, \mathrm{d}t.$$

Demuestre que H es analítica y calcule por definición su derivada.

Solución problema 3: Se nota que si para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, se tiene que

$$\lim_{z\to z_0} \left| \frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z_0)^2}\,\mathrm{d}t \right| = 0 \tag{1}$$

Entonces, $H(z)$ es analítica. Luego, se nota que dado $z_0 \in \mathbb{C}\setminus[0,1]$, se tiene $0 < \inf_{t\in[0,1]} |t-z_0| = \gamma$. Dado esto, se tiene que si $|z-z_0| < \gamma/2$ entonces $|z-t| > \gamma/2$ para $t \in [0,1]$. Ahora desarrollando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z_0)^2}\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_0^1 \frac{h(t)(t-z-t+z_0)}{(z-z_0)(t-z)(t-z_0)} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z_0)^2}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z_0} \cdot \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z_0} \right) \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z_0} \cdot \left(\frac{z_0-z}{(t-z)(t-z_0)} \right) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{h(t)}{(t-z_0)^2} \cdot \frac{1}{t-z} \cdot (z-z_0) \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{h(t)}{(t-z_0)^2} \cdot \frac{2}{\gamma} \right| \mathrm{d}t \cdot |z-z_0|
\end{aligned}$$

Con lo que claramente el límite en (1) es cero.

■

Problema 4:

Considere un dominio D y $f : D \to \mathbb{C}$ analítica. Se define $D^* = \{\overline{z} : z \in D\}$ y $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ para $z \in D^*$. Demuestre que g analítica y calcule su derivada.

Solución problema 4: Sea $g(x,y) = u_2(x,y) + iv_2(x,y)$ con $f(x,y) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$, entonces se tiene que $u_2(x,y) = u_1(x,-y)$ y $v_2(x,y) = -v_1(x,-y)$. Ahora, se calculan las derivas parciales de u_2 y v_2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,-y) \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial y}(x,-y) \\
&= -\left(-\frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y) \right) \\
&= -\frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,-y) \\
&= -\left(-\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,-y) \right) \\
&= -\frac{\partial u_2}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

Con esto, se ve que g cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, por lo que es analítica.

$\blacksquare$

Problema 5:

Considere $f = u + iv$ analítica. Demuestre que

(a) $|\nabla u| = |\nabla v| = |f'|$

(b) $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$

Solución problema 5:

(a) Se recuerda que el siguiente limite existe si no depende del camino tomado:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Por lo que $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$, análogamente para v. Con esto y usando la condición de Cauchy-Riemann, se ve la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = (u')^2 + (v')^2$$

Con lo anterior es claro que $|\nabla u| = |\nabla v| = |f'|$.

(b) Al calcular el gradiente de u y de v se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, \nabla v \rangle &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que se tiene lo pedido.

$\blacksquare$

Problema 6:

Sea $f : D \to \mathbb{C}$ inyectiva y analítica. Demuestre que

$$\text{Area}(f(D)) = \iint_D |f'(z)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Solución problema 6: Sea $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ un cambio de coordenadas, este esta bien definido en D ya que f es inyectiva y analítica. Luego, se calcula la inversa del Jacobiano:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Con esto y la condición de Cauchy-Riemann se nota que $\left|J^{-1}\right| = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, lo cual por la pregunta anterior es $|f'|^2$. Se aplica la transformación a la siguiente integral:

$$\iint_D |f'(z)|^2 \, \mathrm{d}A$$

Con lo que queda:

$$\iint_D |f'(z)|^2 \, \mathrm{d}A = \iint_{f(D)} 1 \, \mathrm{d}A = \mathrm{Area}(f(D))$$

■

Problema 7:

Decimos que una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es armónica si $\Re(f)$ e $\Im(f)$ son armónicas. Demuestre que si h y zh son armónicas, entonces h es analítica.

Solución problema 7: Se recuerda que si una función f es armónica entonces $\Delta f = 0$, o equivalentemente, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$. Sea $h = u + iv$ una función armónica tal que zh también lo sea, entonces $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, además se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 (ux - vy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (ux - vy)}{\partial y^2} \\ &= x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\frac{\partial v}{\partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 (uy + vx)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uy + vx)}{\partial y^2} \\ &= y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial v}{\partial x} + x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &= 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Con ambas se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, las cuales son las condiciones de Cauchy-Riemann. Con esto se tiene que h es analítica.

■