Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Tarea 5

Geometría Diferencial - MAT2305

Fecha de Entrega: 2020-06-25

Nicholas Mc-Donnell

Solución problema 1: Como $\mathbf{x}_u \perp \mathbf{x}_v$ se tiene que $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$, ahora se calculan los símbolos de Christoffel:

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} \cdot E + \Gamma^2_{11} \cdot 0 = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma^1_{11} \cdot 0 + \Gamma^2_{11} \cdot G = -\frac{1}{2} E_v \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma^1_{12} \cdot E + \Gamma^2_{12} \cdot 0 = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma^1_{12} \cdot 0 + \Gamma^2_{12} \cdot G = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma^1_{22} \cdot E + \Gamma^2_{22} \cdot 0 = -\frac{1}{2} G_u \\ \Gamma^1_{22} \cdot 0 + \Gamma^2_{22} \cdot G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Con lo que se tiene

$$\Gamma^1_{11} = \frac{E_u}{2E} \qquad \Gamma^2_{11} = -\frac{E_v}{2G}$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{E_v}{2E} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G}$$
$$\Gamma^1_{22} = -\frac{G_u}{2E} \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{G_v}{2G}$$

Ahora, se recuerda que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + eN \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + fN \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + gN \end{aligned}$$

Con lo que se vio más arriba se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2G}\mathbf{x}_v + eN \\ \mathbf{x}_{uv} &= \frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{G_u}{2G}\mathbf{x}_v + fN \\ \mathbf{x}_{vv} &= -\frac{G_u}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{G_v}{2G}\mathbf{x}_v + gN \end{aligned}$$

Además, sabemos que $N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v$ y que $N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v$, por lo que:

$$\begin{aligned} N_u &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2}\mathbf{x}_v = -\frac{e}{E}\mathbf{x}_u - \frac{f}{G}\mathbf{x}_v \\ N_v &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2}\mathbf{x}_v = -\frac{f}{E}\mathbf{x}_u - \frac{g}{G}\mathbf{x}_v \end{aligned}$$

Ahora, queremos desarrollar la expresión $K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v(E_vG + EG_v)}{2EG\sqrt{EG}} + \frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}} - \frac{G_u(E_uG + EG_u)}{2EG\sqrt{EG}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(-\frac{E_uG_u}{2E\sqrt{EG}} - \frac{E_v^2}{2E\sqrt{EG}} + \frac{2\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\frac{E_{vv}}{2G} - \frac{G_vE_v}{2G^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{E_vG_v}{2G\sqrt{EG}} + \frac{G_u^2}{2G\sqrt{EG}} + \frac{2\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\frac{G_{uu}}{2G} - \frac{G_u^2}{2G^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(-\frac{E_uG_u}{2E\sqrt{EG}} - \frac{E_v^2}{2E\sqrt{EG}} + \frac{2\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v\right. \\ &\qquad \left. + \frac{E_vG_v}{2G\sqrt{EG}} + \frac{G_u^2}{2G\sqrt{EG}} + \frac{2\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u\right) \\ &= \frac{1}{E}\left(\frac{E_uG_u}{4EG} + \frac{E_v^2}{4EG} - \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v - \frac{E_vG_v}{4G^2} - \frac{G_u^2}{4G^2} - \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u\right) \end{aligned}$$

Con todo lo anterior casi se tiene lo pedido, especificamente si $\frac{E_uG_u}{4EG} + \frac{E_v^2}{4EG} - \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v - \frac{E_vG_v}{4G^2} -$

$\frac{G_u^2}{4G^2} - \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u = \frac{eg-f^2}{G}$, tenemos lo pedido. Para esto veamos $\mathbf{x}_{uuv}$ y $\mathbf{x}_{uvu}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uuv} &= \left(\frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2G}\mathbf{x}_v + eN\right)_v \\
&= \left(\frac{E_u}{2E}\right)_v \mathbf{x}_u + \frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_{uv} - \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v \mathbf{x}_v + \frac{E_v}{2G}\mathbf{x}_{vv} + e_v N + eN_v \\
&= \left(\frac{E_u}{2E}\right)_v \mathbf{x}_u + \frac{E_u}{2E}\left(\frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{G_u}{2G}\mathbf{x}_v + fN\right) \\
&\qquad - \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v \mathbf{x}_v + \frac{E_v}{2G}\left(-\frac{G_u}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{G_v}{2G}\mathbf{x}_v + gN\right) \\
&\qquad + e_v N + e\left(-\frac{f}{E}\mathbf{x}_u - \frac{g}{G}\mathbf{x}_v\right) \\
&= \mathbf{x}_u \left(\left(\frac{E_u}{2E}\right)_v + \frac{E_u E_v}{4E^2} - \frac{E_v G_u}{4EG} - \frac{ef}{E}\right) \\
&\qquad + \mathbf{x}_v \left(-\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v + \frac{E_u G_u}{4EG} + \frac{E_v G_v}{4G^2} - \frac{eg}{G}\right) \\
&\qquad + N\left(e_v + \frac{fE_v}{2E} + \frac{gE_v}{2G}\right)
\end{aligned}$$

Para $\mathbf{x}_{uvu}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uvu} &= \left(\frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{G_u}{2G}\mathbf{x}_v + fN\right)_u \\
&= \left(\frac{E_v}{2E}\right)_u \mathbf{x}_u + \frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_{uu} + \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u \mathbf{x}_v + \frac{G_u}{2G}\mathbf{x}_{vu} + f_u N + fN_u \\
&= \left(\frac{E_v}{2E}\right)_u \mathbf{x}_u + \frac{E_v}{2E}\left(\frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2G}\mathbf{x}_v + eN\right) \\
&\qquad + \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u \mathbf{x}_v + \frac{G_u}{2G}\left(\frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{G_u}{2G}\mathbf{x}_v + fN\right) \\
&\qquad + f_u N + f\left(-\frac{e}{E}\mathbf{x}_u - \frac{f}{G}\mathbf{x}_v\right) \\
&= \mathbf{x}_u \left(\left(\frac{E_v}{2E}\right)_u + \frac{E_u E_v}{4E^2} + \frac{E_v G_u}{4EG} - \frac{ef}{E}\right) \\
&\qquad + \mathbf{x}_v \left(\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u - \frac{E_v^2}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} - \frac{f^2}{G}\right) \\
&\qquad + N\left(f_u + \frac{eE_v}{2E} + \frac{fG_u}{2G}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, $\mathbf{x}_{uuv} = \mathbf{x}_{uvu}$, por lo que $\mathbf{x}_{uuv} - \mathbf{x}_{uvu} = 0$, más aún como $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ es una base se tiene que los coeficientes son cero, específicamente se tiene que:

$$\left(-\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v + \frac{E_uG_u}{4EG} + \frac{E_vG_v}{4G^2} - \frac{eg}{G}\right) - \left(\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u - \frac{E_v^2}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} - \frac{f^2}{G}\right) = 0$$

Reescribiéndolo un poco:

$$\frac{E_uG_u}{4EG} + \frac{E_v^2}{4EG} - \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v - \frac{E_vG_v}{4G^2} - \frac{G_u^2}{4G^2} - \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u = \frac{eg-f^2}{G}$$

Que es lo que queríamos, por lo que se tiene lo pedido.

$\blacksquare$

Solución problema 2:

(a) Como $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$, se tiene que $K = -1$ y además como $F = 0$ se tiene que $\mathbf{x}_u \perp \mathbf{x}_v$, por lo que $K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$, entonces se tendría que $K = 0$. Esto es una contradicción, por lo que no puede existir una superficie que cumpla eso.

(b) Se calculan los símbolos de Christoffel:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 \cdot 1 + \Gamma_{11}^2 \cdot 0 = 0 \\ \Gamma_{11}^1 \cdot 0 + \Gamma_{11}^2 \cdot \cos^2 u = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 \cdot 1 + \Gamma_{12}^2 \cdot 0 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 \cdot 0 + \Gamma_{12}^2 \cdot \cos^2 u = -\sin u \cos u \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 \cdot 1 + \Gamma_{22}^2 \cdot 0 = \sin u \cos u \\ \Gamma_{22}^1 \cdot 0 + \Gamma_{22}^2 \cdot \cos^2 u = 0 \end{cases}$$

Por lo que $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = \sin u \cos u$ y $\Gamma_{12}^2 = -\tan u$. Se quiere que se cumplen las siguientes:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = -EK$$

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$$
$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2$$

Reemplazando se tiene lo siguiente:

$$-\sec^2 u + \tan^2 u = -1$$

$$0 = \cos^2 u \cdot 0 + 0(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)$$
$$0 = \cos^2 u \cdot \cos u \sin u + 0(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) + \tan u$$

Las primeras dos son trivialmente ciertas. Pero la última es falsa. Por lo que no existe tal superficie.

■

Solución problema 3: Se nota que la superficie se puede parametrizar con $\mathbf{x}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ con $r > 0$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, dado eso se tiene que:

$$\mathbf{x}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$
$$\mathbf{x}_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

Por lo que:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 2$$
$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$$
$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = r^2$$

Ahora, sea $\mathbf{y}(r,\theta) = (\sqrt{2}r\cos\left(\theta/\sqrt{2}\right), \sqrt{2}r\sin\left(\theta/\sqrt{2}\right), 0)$

$$\mathbf{x}_r = (\sqrt{2}\cos\left(\theta/\sqrt{2}\right), \sqrt{2}\sin\left(\theta/\sqrt{2}\right), 0)$$
$$\mathbf{x}_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

Por lo que:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 2$$
$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$$
$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = r^2$$

Como los coeficientes de la primera forma fundamental son los mismos, el plano y el cono son localmente isométricos.

■

Solución problema 4:

(a) Sea α la arcoparametrización de C, ya que es una geodesica se tiene que $n(t) = \pm N(t)$, donde n es la normal a la curva y N es la normal a la superficie. Ahora, como C es una linea de curvatura se tiene que cumple la siguiente ecuación $N' = \lambda\alpha'$, además por Frenet se sabe que $n' = -kt - \tau b$ y como $N = \pm n$, se tiene que $\pm\lambda\alpha' = -kt - \tau b$, como α está arcoparametrizada $\alpha' = t$, más aún como $b \perp t$ se tiene que $\tau = 0$.

(b) Similarmente al anterior, sea α la arcoparametrización de C, ya que es una geodesica se tiene que $n(t) = \pm N(t)$, donde n es la normal a la curva y N es la normal a la superficie. Como es una curva plana no-recta se tiene que $k \neq 0$ y $\tau = 0$. Usando Frenet y que $n = \pm N$, se tiene que $N' = \pm kt = \pm k\lambda\alpha'$. Entonces por Olinde-Rodrigues se tiene que C es linea de curvatura.

(c) Sea S el plano XY, y sea α una curva no recta, se sabe que una curva es linea de curvatura si y solo si cumple la siguiente ecuación:

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0$$

Ahora, como S es un plano se tiene que $E = G = 1$ y $F = e = f = g = 0$, por ende se tiene que toda curva dentro de S es linea de curvatura, especificamente α, por lo que tenemos lo pedido.

■

Solución problema 5:

■