Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019

Tarea 4

Introducción a la Geometría Algebraica — MAT 2335

Fecha de Entrega: 2019/05/10

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Problema 3.1 **2**

Problema 3.4 **2**

Problema 3.9 **2**

Problema 3.10 **3**

Problema 3.14 **3**

Problema 3.15 **3**

Problema 3.19 **4**

Problema 3.21 **4**

Problema 4.1 **4**

Problema 4.3 **4**

Problema 4.4 **5**

Problema 4.9 **5**

Problema 4.14 **5**

Problema 4.15 **6**

Problema 4.23 **6**

Problema 4.25 **6**

Problema 4.28 **6**

Notas

En esta tarea se usará la notación $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

Problema 3.1:

Prove that in the above examples $P = (0,0)$ is the only multiple point on the curves C, D, E, and F.

Solución problema 3.1: Se recuerda que $C = \{(x,y) : y^2 - x^3 = 0\}, D = \{(x,y) : y^2-x^3-x^2 = 0\}, E = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3 = 0\}, F = \{(x,y) : (x^2+y^2)^3-4x^2y^2 = 0\}$. Luego se sabe que si la derivada respecto a y y la derivada respecto x es cero en un punto de la curva, entonces es un punto multiple. Viendo cada curva:

- C La derivada respecto a y es $2y$, y respecto a x es $-3x^2$, claramente el único punto donde ambas son cero, es el $(0,0)$.
- D La derivada respecto a y es $2y$, y respecto a x es $-3x^2 - 2x$, claramente los puntos donde ambas son cero, son $(0,0)$ y $(\sqrt{2/3}, 0)$, se nota que el segundo punto no está en la curva, por lo que se tiene lo pedido.
- E La derivada respecto a y es $4y(x^2+y^2)+3x^2-3y^2$, y respecto a x es $4x(x^2+y^2)+6xy$,
- F La derivada respecto a y es $6y(x^2+y^2) - 8x^2y$, y respecto a x es $6x(x^2+y^2) - 8xy^2$,

■

Problema 3.4:

Let P be a double point on a curve F. Show that P is a node if and only if $F_{xy}(P)^2 \neq F_{xx}(P)F_{yy}(P)$

Solución problema 3.4:

■

Problema 3.9:

Let $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ define a hypersurface $V(F) \subset \mathbb{A}^n$. Let $P \in \mathbb{A}^n$.

(a) Define the multiplicity $m_P(F)$ of F at P.

(b) If $m_P(F) = 1$, define the tangent hyperplane to F at P.

(c) Examine $F = x^2 + y^2 - z^2, P = (0,0)$. Is it possible to define tangent hyperplanes at multiple points?

Solución problema 3.9:

(a) Para definir la multiplicidad, primero se nota que $F(P) = 0$, donde F es el polinomio asociado. Por lo que si se aplica la traslación $T(x) = x - P$, el $\overline{0}$ en la curva trasladada tendría la misma multiplicidad que P, además el polinomio correspondiente se puede escribir como suma de polinomios homogéneos. Dado esto, naturalmente se define la multiplicidad de P como el menor grado de los polinomios homogéneos de la curva trasladada.

(b) Naturalmente se tiene que las rectas tangentes a F en P están bien definidas, por lo que estás abarcan todo el hiperplano tangente. Con lo que la definición sería la unión de todos las rectas tangentes en el punto.

(c) Se nota que $m_{(0,0)}(F) = 2$, por lo que no hay un solo hiperplano tangente en el punto. Ahora, definir hiperplanos tangentes en múltiples puntos es imposible para el caso general, porque a priori no se puede saber si es que dado un punto P de F y un hiperplano tangente H en P, $\#F \cap H > 1$.

■

Problema 3.10:

Show that an irreducible plane curve has only finite number of multiple points. Is this true for hypersurfaces?

Solución problema 3.10:

■

Problema 3.14:

Let $V = V(x^2 - y^3, y^2 - z^3) \subset \mathbb{A}^3, P = (0, 0, 0), \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p(V)$. Find $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Solución problema 3.14:

■

Problema 3.15:

(a) Let $\mathcal{O} = \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$ for some $p \in \mathbb{A}^2, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P(\mathbb{A}^2)$. Calculate $\chi(n) = \dim_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$.

(b) Let $\mathcal{O} = \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^r(k))$. Show that $\chi(n)$ es a polynomial of degree r in n, with leading coefficient $1/r!$.

Solución problema 3.15:

■

Problema 3.19:

A line L es tangent to a curve F at a point P if and only if $I(P, F \cap L) > m + P(F)$.

Solución problema 3.19:

■

Problema 3.21:

Let F be an affine plane curve. Let L be a line that is not a component of F. Suppose $L = \{(a+tb, c+td) : t \in k\}$. Define $G(T) = F(a+Tb, c+Td)$. Factor $G(T) = \epsilon \prod(T - \lambda_i)^{e_i}$, λ_i distinct. Show that there is a natural one-to-one correspondence between the λ_i and the points $P_i \in L \cap F$. Show that under this correspondence, $I(P_i, L \cap F) = e_i$. In particular, $\sum I(P, L \cap F) \leq \deg(F)$.

Solución problema 3.21:

■

Problema 4.1:

What points in $\mathbb{P}^2$ do not belong to two of the three set U_1, U_2, U_3?

Solución problema 4.1: Los puntos de U_i son los $[x_1 : x_2 : x_3]$ tal que $x_i \neq 0$, por lo que si $x \notin U_i \cup U_j$ entonces $x_i = x_j = 0$, por lo que son los puntos $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]$.

■

Problema 4.3:

(a) Show that the definitions of this section carry over without change to the case where k is an arbitrary field.

(b) If k_0 is a subfield of k, show that $\mathbb{P}^n(k_0)$ may be identified with a subset of $\mathbb{P}^n(k)$.

Solución problema 4.3:

■

Problema 4.4:

Let I be a homogeneous ideal in $k[x_1,\ldots,x_{n+1}]$. Show that I is prime if and only if the following condition is satisfied; for any forms $F,G\in k[x_1,\ldots,x_{n+1}]$, if $FG\in I$, then $F\in I$ or $G\in I$.

Solución problema 4.4: Se nota que si I es primo las condiciones trivialmente se cumplen. Sea I homogéneo tal que para polinomios homogéneos $F,G\in k[x_1,\ldots,x_{n+1}]$, si $FG\in I$ entonces $F\in I$ o $G\in I$. Sean F,G polinomios tales que $FG\in I$, y $F,G\notin I$, luego se puede escribir $F=\sum F_i$ y $G=\sum G_j$ con los F_i,G_j polinomios homogéneos, luego $FG=\sum\sum F_iG_j$ se sabe que la multiplicación de polinomios homogéneos es un polinomio homogéneo, entonces se pueden agrupar los polinomios homogéneos por grado de la siguiente forma:

$$FG=\sum_{d=0}^{\deg(FG)}\left(\sum_{i+j=d}F_iG_j\right)$$

Por lo que se recuerda la definición de ideal homogéneo, con lo que se tiene que $\displaystyle\sum_{i+j=d}F_iG_j\in I$. Ahora, se tiene la propiedad de que $I=(P_1,\ldots,P_m)$ con P_i polinomios homogéneos, sean $\{P_k,\ldots,P_l\}\subset\{P_1,\ldots,P_m\}$ de grado d, luego se recuerda que los polinomios homogéneos de grado d son l.i. por lo que $F_iG_j\in I$, luego sea $F_i\notin I$, para un $F_iG_j\in I$, por lo que para todo j $G_j\in I$, por lo que $G\in I$, análogamente, sea $G_j\notin I$ entonces $F_iG_j\in I$, por lo que para todo i $F_i\in I$, con lo que $F\in I$. Que es lo que se buscaba.

$\blacksquare$

Problema 4.9:

Let I be homogeneous ideal in $k[x_1,\ldots,x_{n+1}]$, and $\Gamma=k[x_1,\ldots,x_{n+1}]/I$. Show that the forms of degree d in Γ form a finite-dimensional vector space over k.

Solución problema 4.9:

$\blacksquare$

Problema 4.14:

Let P_1,P_2,P_3 (resp. Q_1,Q_2,Q_3) be three points in $\mathbb{P}^2$ not lying on a line. Show that there is projective change of coordinates $T:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ such that $T(P_i)=Q_i, i=1,2,3$. Extend this to $n+1$ points in $\mathbb{P}^n$, not lying on a hyperplane.

Solución problema 4.14:

$\blacksquare$

Problema 4.15:

Show that any two distinct lines in $\mathbb{P}^2$ intersect in one point.

Solución problema 4.15:

$\blacksquare$

Problema 4.23:

Describe all subvarieties in $\mathbb{P}^1$ and in $\mathbb{P}^2$.

Solución problema 4.23:

$\blacksquare$

Problema 4.25:

Let $P = [x : y : z] \in \mathbb{P}^2$.

(a) Show that $\{(a, b, c) \in \mathbb{A}^3 : ax + by + cz = 0\}$ is hyperplane in $\mathbb{A}^3$.

(b) Show that for any finite set of points in $\mathbb{P}^2$, there is a line not passing through any of them.

Solución problema 4.25:

(a) Se recuerda la definición de hiperplano; $V(F)$ es un hiperplano ssi $\deg F = 1$. Luego, sea $F(a, b, c) = ax + by + cz$, F es de grado 1 ya que no todos los x, y, z son iguales a cero. Entonces, claramente $V(F) = \{(a, b, c) \in \mathbb{A}^3 : ax + by + cz = 0\}$, por lo que es un hiperplano.

(b)

$\blacksquare$

Problema 4.28:

For simplicity of notation, in this problem we let $x_0, \ldots, x_n$ be coordinates for $\mathbb{P}^n$, $y_0, \ldots, y_m$ coordinates for $\mathbb{P}^m$, and $T_{00}, T_{01}, \ldots, T_{0m}, T_{10}, \ldots, T_{nm}$ coordinates for $\mathbb{P}^N$, where $N = (n + 1)(m + 1) - 1 = n + m + nm)$. Define $S : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$ by the formula:

$$S([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_m]) = [x_0y_0 : x_0y_1 : \cdots : x_ny_m]$$

S is called the *Segre embedding* of $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ in $\mathbb{P}^{n+m+mn}$.

(a) Show that S is a well-defined, one-to-one mapping.

(b) Show that if W is an algebraic subset of $\mathbb{P}^N$, then $S^{-1}(W)$ is an algebraic subset of $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

(c) Let $V = V(\{T_{ij}T_{kl} - T_{il}T_{kj} : i,k = 0,\dots,n; j,l = 0,\dots,m\}) \subset \mathbb{P}^N$. Show that $S(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = V$. In fact, $S(U_i \times U_j) = V \cap U_{ij}$, where $U_{ij} = \{[t] : t_{ij} \neq 0\}$.

(d) Show that V is a variety.

Solución problema 4.28:

(a) Claramente, S esta bien definido, ya que si todos los $x_i y_j = 0$ entonces $x_i = 0 \forall i$ o $y_j = 0 \forall j$, ya que la imagen tiene todas las posibles multiplicaciones de pares (x_i, y_j). Sea $S(a,b) = S(c,d)$ donde $a, c \in \mathbb{P}^n$ $b, d \in \mathbb{P}^m$, entonces $a_i b_j = c_i d_j$ donde no todos son cero, por lo que

$\blacksquare$