Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Tarea 1

Geometría Diferencial - MAT2305

Fecha de Entrega: 2020-03-26

Nicholas Mc-Donnell

Problema 1:

Un disco de radio 1 en el plano xy rueda sin deslizarse a lo largo del eje x. La figura que describe un punto de la circunferencia del disco se llama cicloide.

(a) Encuentre una curva parametrizada cuya traza sea la cicloide, y determine sus puntos críticos.

(b) Calcule la longitud del arco de la cicloide correspondiente a una vuelta del disco.

Solución problema 1:

(a) Sea θ el ángulo como el reloj de giro del círculo respecto al eje y, entonces el centro del círculo está en $(\theta, 1)$ y el punto en la circunferencia está en $(\theta, 1)+(\cos(\theta-\pi/2), \sin(\theta-\pi/2))$, lo cual se puede expresar como $(\theta+\sin(\theta), 1+\cos(\theta))$.

(b) Usando la formula para calcular la longitud de arco se llega a la siguiente integral $\int_0^{2\pi} \left\|(\theta+\sin(\theta), 1+\cos(\theta))'\right\| \mathrm{d}\theta$ la cual se desarrolla de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left\|(\theta+\sin(\theta), 1+\cos(\theta))'\right\| \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \|(1+\cos(\theta), -\sin(\theta))\| \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{\cos^2(\theta/2)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int_0^{\pi} \cos(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 8
\end{aligned}$$

■

Problema 2:

Sea $\alpha : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$$

demuestre que:

(a) En $t=0$, α es tangente al eje x.

(b) Cuando $t \to \infty$, $\alpha(t) \to (0,0)$ y $\alpha'(t) \to (0,0)$

(c) Cuando $t \to -1$, α y su tangente tienden a la recta $x + y + a = 0$.

(d) El arco con $t \in (0, \infty)$ es simétrico con respecto a la recta $y = x$.

La figura que se obtiene completando la traza para que sea simétrica con respecto a la recta $y = x$ en todo punto se denomina el *folium de Descartes.*

Solución problema 2: Se nota que $\alpha'(t) = \left(3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, -3a\frac{t(-2+t^3)}{(1+t^3)^2}\right)$

(a) Se ve que $\alpha(0) = (0,0)$ y que $\alpha'(t) = (1,0)$, por lo que se tiene lo pedido.

(b) Se nota que $\alpha(t) = 3a\left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}\right)$, y se nota que $\alpha(t) = 3a\left(\frac{p_x(t)}{q_x(t)}, \frac{p_y(t)}{q_y(t)}\right)$ donde $\deg p_i < \deg q_i$ para $i = x, y$, por lo que se tiene que $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = (0,0)$. Similarmente se cumple lo mismo para α', por lo que de nuevo $\lim_{t\to\infty} \alpha'(t) = (0,0)$.

(c) Se nota que $\frac{3at}{1+t^3} + \frac{3at^2}{1+t^3} = \frac{3at}{t^2-t+1}$, por lo que cuando $t \to -1$ se tiene que α tiene a $x + y + a = 0$. Más aún, se nota que $\alpha_x'(t) + \alpha_y'(t) = 3a\frac{1-t^2}{(t^2-t+1)^2}$, por lo que α' tambien tiende a $x + y + a$.

(d) Aplicando la reflexión respecto la recta $y = x$ y además usando la transformación $t \mapsto \frac{1}{t}$ la cual es una biyección entre $(0, \infty)$ y el mismo intervalo que cambia la dirección (i.e. $t \to 0^+ \implies \frac{1}{t} \to \infty$ y $t \to \infty \implies \frac{1}{t} \to 0$), usando esto se nota que al aplicar ambos se tiene la curva original.

$\blacksquare$

Problema 3:

(Líneas rectas son las más cortas.) Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

(a) Demuestre que para cualquier vector unitario v se cumple

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

(b) Use lo anterior para demostrar que

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Solución problema 3:

(a) Descomponiendo en la base canónica se nota que dado un vector v se tiene que

$$(q-p)\cdot v = q\cdot v - p\cdot v = \alpha(b)\cdot v - \alpha(a)\cdot v = \int_a^b \alpha'(t)\cdot v \,\mathrm{d}t$$

Ahora si v es unitario además se tiene lo siguiente

$$(q-p)\cdot v \leq |(q-p)\cdot v| = \left|\int_a^b \alpha'(t)\cdot v\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\alpha'(t)\cdot v|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

(b) Sea $v = \frac{q-p}{\|q-p\|}$ un vector unitario, luego $(q-p)\cdot\left(\frac{q-p}{\|q-p\|}\right) = \|q-p\|$, por lo que usando la desigualdad anterior se tiene lo pedido.

■

Problema 4:

Demuestre que si todos los planos normales a una curva pasan por un punto fijo entonces la curva está contenida en una esfera.

Solución problema 4: Sea p el punto donde se intersectan todos los planos normales de una curva γ, s.p.d.g. $p = \mathbf{0}$, luego se tiene que $n(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, y se sabe que un plano con vector normal n y p un punto del plano, entonces la ecuación del plano está dada por $n\cdot((x,y,z)-p) = 0$, con lo que se sabe que γ cumple lo siguiente

$$n(t)\cdot\gamma(t) = 0$$

Luego usando eso y la definición de $n(t)$, se tiene que $\frac{\gamma(t)\cdot\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = 0$, específicamente $\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 0$. Integrando la expresión anterior en el intervalo $[t_0, T]$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^T \gamma'(t)\cdot\gamma(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^T 0\,\mathrm{d}t \\
\int_{t_0}^T 2\gamma'(t)\cdot\gamma(t)\,\mathrm{d}t &= 2\cdot 0 \\
\|\gamma(T)\|^2 - \|\gamma(t_0)\|^2 &= 0 \\
\|\gamma(T)\|^2 &= \|\gamma(t_0)\|^2
\end{aligned}$$

Se nota que $\|\gamma(t_0)\|^2$ es una constante positiva por lo que se puede reescribir como r^2, y se tiene que $\|\gamma(T)\|^2 = r^2$, que en el caso de $\mathbb{R}^3$ corresponde a ser una curva en una esfera.

■

Problema 5:

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular (no necesariamente arcoparametrizada) y sean $s = s(t)$ su longitud de arco y $t = t(s)$ la inversa de este. Denotamos $()'$ a las derivadas respecto a t. Demuestre que:

(a)
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|\alpha'\|} \text{ y } \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{a' \cdot \alpha''}{\|a'\|^4}$$

(b) La curvatura de α en t es
$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|a'\|^3}$$

(c) La torsión de α en t es
$$\tau(t) = -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

Solución problema 5:

(a) Sea $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por s tal que $\beta = \alpha \circ t$, con esto se tiene que $1 = \left\|\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\right\| = \left\|\alpha'(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\right\|$, lo que nos da $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|\alpha'\|}$. Usando lo anterior y la siguiente identidad $\|\gamma\|' = \frac{\gamma' \cdot \gamma}{\|\gamma\|}$ se desarrolla lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\|\alpha'\|} \\ &= -\frac{1}{\|\alpha'\|^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\alpha'\| \\ &= -\frac{1}{\|\alpha'\|^2}\frac{\alpha'' \cdot \alpha'}{\|\alpha'\|}\frac{dt}{ds} \\ &= -\frac{\alpha'' \cdot \alpha'}{\|\alpha'\|^4}\end{aligned}$$

(b) Se recuerda que T es el vector tangente a α en t y se nota que $\alpha' = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}T$, con $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\alpha'\|$.

Dado lo anterior se ve lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} T + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 T' \\
\alpha' \wedge \alpha'' &= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} (\alpha' \wedge T) + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 (\alpha' \wedge T') \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} (\alpha' \wedge \alpha') + \|\alpha'\|^2 (\alpha' \wedge T') \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \mathbf{0} + \|\alpha'\|^2 (\alpha' \wedge T') \\
\|\alpha' \wedge \alpha''\| &= \|\alpha'\|^2 \|\alpha'\| \|T'\| \\
&= \|\alpha'\|^3 \kappa(t)
\end{aligned}$$

Reescribiendo la última linea se llega a lo pedido.

■

Problema 6:

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva arcoparametrizada regular con $k(s) \neq 0$ en todo I. Demuestre que:

(a) El plano osculador es el límite de los planos que pasan por $\alpha(s), \alpha(s+h_1)$ y $\alpha(s+h_2)$ cuando $h_1, h_2 \to 0$.

(b) El límite de los círculos que pasan por $\alpha(s), \alpha(s+h_1)$ y $\alpha(s+h_2)$ cuando $h_1, h_2 \to 0$ es un círculo en el plano osculador con centro en la recta normal y radio el radio curvatura de $\alpha, r = 1/\kappa(s)$. Este círculo se conoce como el círculo osculador de α en s.

Solución problema 6:

(a)

■