Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Tarea 1

Variable Compleja - MAT2705

Fecha de Entrega: 2019-09-06

Nicholas Mc-Donnell

Índice

Problema 1:

(a) Grafique la imagen bajo proyección estereográfica de los siguientes conjuntos

  I. El hemisferio inferior: $\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z < 0\}$.

  II. $\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : \frac{3}{4} \leq z \leq 1\}$.

  III. Un circulo de la forma $\{(\sqrt{1-z_0^2}\cos\theta, \sqrt{1-z_0^2}\sin\theta, z_0) \in \mathbb{S}^2 : \theta \in [0,2\pi)\}$ con z_0 fijo.

  IV. Un circulo de la forma $\{(\sqrt{1-z^2}\cos\theta_0, \sqrt{1-z^2}\sin\theta_0, z) \in \mathbb{S}^2 : z \in [-1,1]\}$ con θ_0 fijo.

(b) Demuestre que la inversión $\frac{1}{x}$ es equivalente a una rotación de la esfera en π radianes alrededor del eje x.

Solución problema 1:

$\blacksquare$

Problema 2:

Encuentre mapeos conformes entre las siguientes regiones:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

(b) $\{r\exp(i\theta) \in \mathbb{C} : \theta \in (0, \frac{\pi}{n}), r \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{C}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$.

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$.

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (a,b)\}$

Solución problema 2:

(a) Se recuerda que la inversión es un mapeo conforme, y que mapea las regiones pedidas.

(b) Se recuerda que las funciones analíticas son mapeos conformes, se toma $f(x) = x^{n+1}$ se nota que cumple lo pedido.

(c)

$\blacksquare$

Problema 3:

Sea $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ continua y se define en $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ la función

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t.$$

Demuestre que H es analítica y calcule por definición su derivada.

Solución problema 3: Se nota que si para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, se tiene que

$$\lim_{z\to z_0} \left| \frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z_0)^2}\,\mathrm{d}t \right| = 0 \tag{1}$$

Entonces, $H(z)$ es analítica. Luego, se nota que dado $z_0 \in \mathbb{C}\setminus[0,1]$, se tiene $0 < \inf_{t\in[0,1]} |t - z_0| = \gamma$. Dado esto, se tiene que si $|z - z_0| < \gamma/2$ entonces $|z - t| > \gamma/2$ para $t \in [0,1]$. Ahora desarrollando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z_0)^2}\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_0^1 \frac{h(t)(t-z-t+z_0)}{(z-z_0)(t-z)(t-z_0)} - \int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z_0)^2}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z_0} \cdot \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z_0} \right) \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z_0} \cdot \left(\frac{z_0-z}{(t-z)(t-z_0)} \right) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{h(t)}{(t-z_0)^2} \cdot \frac{1}{t-z} \cdot (z-z_0) \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{h(t)}{(t-z_0)^2} \cdot \frac{2}{\gamma} \right| \mathrm{d}t \cdot |z-z_0|
\end{aligned}$$

Con lo que claramente el límite en (1) es cero.

∎

Problema 4:

Considere un dominio D y $f : D \to \mathbb{C}$ analítica. Se define $D^* = \{\overline{z} : z \in D\}$ y $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ para $z \in D^*$. Demuestre que g analítica y calcule su derivada.

Solución problema 4:

∎

Problema 5:

Considere $f = u + iv$ analítica. Demuestre que

(a) $|\nabla u| = |\nabla v| = |f'|$

(b) $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$

Solución problema 5:

$\blacksquare$

Problema 6:

Sea $f : D \to \mathbb{C}$ inyectiva y analítica. Demuestre que

$$\text{Area}(f(D)) = \int\int_D |f'(z)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Solución problema 6:

$\blacksquare$

Problema 7:

Decimos que una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es armónica si $\Re(f)$ e $\Im(f)$ son armónicas. Demuestre que si h y zh son armónicas, entonces h es analítica.

Solución problema 7: Se recuerda que si una función f es armónica entonces $\Delta f = 0$, o equivalentemente, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$. Sea $h = u + iv$ una función armónica tal que zh también lo sea, entonces $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, además se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 (ux - vy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (ux - vy)}{\partial y^2} \\
&= x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 (uy + vx)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uy + vx)}{\partial y^2} \\
&= y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 (uy)}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$