PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tarea 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - MAT2500

Fecha de Entrega: 2019-08-30

Nicholas Mc-Donnell

Agradecimientos a las siguientes personas:
Maximiliano Norbu, Agustín Oyarce, Camilo Sánchez, Benjamín Cortez, Felipe Guzmán

Índice

Problema 1:

Transforme las siguientes EDOs en sistemas autónomos de primer orden:

(a) $\ddot{x} + t\sin(\dot{x}) = x$.

(b) $\ddot{x} = -y, \ddot{y} = x$.

Solución problema 1: Se toman los siguientes sistemas autónomos de primer orden, y se nota que son equivalentes a los correspondientes:

(a) $\dot{t} = 1$, $z = \dot{x}$, $\dot{z} + t\sin(z) = x$

(b) $w = \dot{x}$, $y = -\dot{w}$, $x = \dot{z}$, $z = \dot{y}$

$\blacksquare$

Problema 2:

Encuentre soluciones a las siguientes EDOs:

(a) $\dot{x} = x(1-x)$

(b) $\dot{x} = \sin(t)\exp(x)$

Solución problema 2:

(a) Notemos que $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv 1$ son soluciones, por lo que se puede asumir que $x \neq 1$ y $x \neq 0$ localmente. Usando un poco de álgebra se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{\dot{x}}{x(1-x)} = 1$$

La cual se puede integrar, quedando lo siguiente:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s$$

Se nota que $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, por lo que la ecuación anterior se ve de la siguiente forma:

$$\ln(x(t)) - \ln(x(t_0)) - \ln(1-x(t)) + \ln(1-x(t_0)) = t - t_0$$

Con lo que se ve que

$$\frac{x(t)}{x(t_0)} \cdot \frac{1-x(t_0)}{1-x(t)} = \exp(t-t_0)$$

Y por un poco de álgebra se tiene lo siguiente:

$$x(t) = \frac{\frac{x(t_0)}{1-x(t_0)}\exp(t-t_0)}{1+\frac{x(t_0)}{1-x(t_0)}\exp(t-t_0)}$$

La cual es una solución local.

(b) Se nota que la EDO es equivalente a la siguiente:

$$\dot{x}\exp(-x) = \sin(t)$$

Por lo que se puede integrar, consiguiendo lo siguiente:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} \sin(s)\,\mathrm{d}s$$

Solucionando las integrales y haciendo un poco de álgebra se tiene que:

$$x(t) = -\ln(\cos(t) - \cos(t_0) + \exp(-x(t_0)))$$

Lo cual nos da una solución local.

■

Problema 3:

Encuentre soluciones a las siguientes EDOs

(a) $\dot{x} = \frac{3x-2t}{t}$

(b) $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$

(c) $y' = \frac{y}{x} - \tan(\frac{y}{x})$

Solución problema 3:

(a) La EDO correspondiente se puede escribir de la siguiente manera[1]:

$$\dot{x} - \frac{3x}{t} = -2$$

[1] Recordando que $t \neq 0$

Tomando el factor integrante $\exp\left(\int_{t_0}^{t} -3/t\,\mathrm{d}t\right)$, se llega a la siguiente igualdad:

$$\left(x \exp\left(\int_{t_0}^{t} -3/s\,\mathrm{d}s\right)\right)' = -2\exp\left(\int_{t_0}^{t} -3/s\,\mathrm{d}s\right)$$

Desarrollando el factor integrante e integrando en ambos lados se consigue lo siguiente:

$$x(t)\cdot\left(\frac{t_0}{t}\right)^3 - x(t_0) = 2t_0^3\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t_0^4}\right)$$

Con lo que se ve que las soluciones son de la siguiente forma:

$$x(t) = x(t_0)\cdot\left(\frac{t}{t_0}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{t^3}{t_0^4}\right)$$

Consiguiendo lo pedido.

(b) Para esta EDO se nota que la sustitución de Ricatti funciona, por lo que se necesita una solución particular. Notamos que $y(x) = \frac{1}{x}$ es una solución particular[2], por lo que se usa la sustitución $u = \frac{1}{y - \frac{1}{x}}$ y algo de álgebra para llegar a la siguiente EDO:

$$u' + \frac{u}{x} = -1$$

La cual se puede solucionar multiplicando por el factor integrante:

$$\left(u \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right)\right)' = -\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right)$$

Ahora, integrando de nuevo y solucionando el factor integrante se llega a lo siguiente:

$$u(x)\cdot\frac{x}{x_0} - u(x_0) = \frac{x}{x_0} - 1$$

Con lo que tenemos la forma general de $u(x)$:

$$u(x) = \frac{x_0}{x}u(x_0) - \frac{x_0}{x} + 1$$

Deshaciendo la sustitución se llega a lo siguiente:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{x_0}{x}u(x_0) - \frac{x_0}{x} + 1}$$

[2] $y' = -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$

Lo que nos da la forma general de una solución.

(c) Se ve que si se usa la sustitución $u = \frac{y}{x}$, esto nos simplifica la EDO a lo siguiente:

$$u'x + u = u - \tan(u)$$

Si es que $u = 0$, la función idénticamente cero es solución, por lo que se verán soluciones localmente no cero. Con esto se puede resolver la EDO escribiéndola de la siguiente forma:

$$\frac{u'}{\tan(u)} = -\frac{1}{x}$$

Esto se puede integrar, y reordenar algebraicamente para conseguir esto:

$$u(x) = \arcsin\left(\frac{x_0}{x}\sin(u(x_0))\right)$$

Deshaciendo la sustitución, se consigue lo siguiente:

$$y(x) = x\arcsin\left(\frac{x_0}{x}\sin\left(\frac{y(x_0)}{x_0}\right)\right)$$

Donde $x \neq 0$ e $y(x_0) \neq 0$, con lo que tenemos una solución local.

$\blacksquare$

Problema 4:

Sean $\tau > 0$ y $\gamma > 0$ constantes. Considere

$$\dot{x} = \gamma\sqrt{|x|} - \tau x, \quad x(0) = x_0$$

(a) Resuelva el problema. (*Sugerencia*: La EDO es de tipo Bernoulli)

(b) Analice la unicidad de la solución, y determine el intervalo máximo de definición. Si hay falla de unicidad, explique porqué esto no contradice el teorema de Picard-Lindelöf.

(c) Analice el comportamiento a largo plazo, $t \to \infty$, cuando $x_0 > 0$.

Solución problema 4:

(a) Se nota que la EDO es autónoma, por lo que al solucionar el problema localmente para $t = 0$, se soluciona localmente para cualquier t_0. Dado esto que la función $x(t) \equiv 0$ es solución si $x_0 = 0$. También se nota que f es lipschitz con respecto a x para todo

$x \neq 0$, y al ser autónoma es uniformemente continua con respecto t, por lo que dado una condición inicial $x_0 \neq 0$ se tiene solución única, por el teorema de Picard-Lindelöf. Sea $x_0 > 0$ entonces localmente se puede hacer la sustitución $x = y^2$, lo que nos da la siguiente EDO:

$$\dot{y} = \frac{\gamma}{2} - y\frac{\tau}{2}$$

Una EDO separable, por lo que integrando directamente y reordenando se llega a:

$$y(t) = \frac{\gamma}{\tau} - \left(\frac{\gamma}{\tau} - x_0^2\right) \exp\left(-\frac{\tau \cdot t}{2}\right)$$

Se recuerda la sustitución que se uso, y se deshace, pero se considera que $x(0) = x_0 > 0$[3]. Con eso se llega a la presente solución:

$$x(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\tau} - \left(\frac{\gamma}{\tau} - x_0^2\right) \exp\left(-\frac{\tau \cdot t}{2}\right)}$$

Similarmente para $x_0 < 0$, se tiene la siguiente solución:

$$x(t) = \sqrt{-\frac{\gamma}{\tau} + \left(\frac{\gamma}{\tau} + x_0^2\right) \exp\left(-\frac{\tau \cdot t}{2}\right)}$$

(b) Como la EDO no es lipschitz cerca de 0, se tiene que cada vez que una solución tenga una intersección con el 0 esta se puede extender de variadas formas, por lo que no hay unicidad de solución, esto no contradice Picard-Lindelöf ya que no es lipschitz cerca de 0. Para ver el intervalo máximo de definición hay notar que dado $x_0 > 0$, se necesita que $y(t) \geq 0$, lo cual se cumple para todo $T_- < t$, donde $T_- < 0$ es un valor dependiente de x_0, γ y τ. Similarmente, para $x_0 < 0$ se tiene que $t < T_+$, donde $T_+ > 0$ es un valor que depende de x_0, γ y τ.

(c) Como se vio anteriormente si $x_0 > 0$, $x(t)$ esta bien definida para todo t positivo, luego, viendo las soluciones es claro que cuando $t \to \infty$ entonces $x(t) \to \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}}$.

■

Problema 5:

[3] Al usar $x = y^2$ se pierde la noción de positividad, por lo que al deshacer la sustitución, se necesita considerarla.

Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Suponga que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \quad (t, x) \in J \times \mathbb{R}, \quad f \in C(J \times \mathbb{R}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una solución C^1 definida localmente en tiempo para todos datos iniciales $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}$. Demuestre que si el intervalo máximo de definición de una solución $x(t)$ es $(T_-, T_+) \subseteq J$, entonces $\lim_{t \downarrow T_-} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t \uparrow T_+} |x(t)| = \infty$. (*Sugerencia*: Argumente por contradicción. Primero demuestre que si hay dos sucesiones $\{a_i\}$ y $\{b_j\}$ con $a_i \uparrow T_+$ y $b_j \uparrow T_+$ tales que $x(a_i) \to x_1$ y $x(b_j) \to x_2$, entonces $x_1 = x_2$. Úselo para probar que $x(t)$ se puede extender como una solución después del momento T_+).

Solución problema 5: Se nota que la demostración para ambos límites es equivalente, por lo que se toma el caso de $t \uparrow T_+$, y se asume que el límite no es infinito. Ahora sean, $\{a_i\}$ y $\{b_j\}$ sucesiones tal que $a_i \uparrow T_+$ y $b_j \uparrow T_+$, y además $x(a_i) \to x_1$ y $x(b_j) \to x_2$. Si $x_1 \neq x_2$, sea $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, se pueden encontrar a_i, a_k y b_j, tal que $a_i < b_j < a_k$ y $x_1 - x(a_k) < x_2 - x(b_j) < x_1 - x(a_i) < \varepsilon_n$, ahora por TVM existen $t_{n,1} \in (a_i, b_j)$ y $t_{n,2} \in (b_j, a_k)$ tal que $\frac{x(b_j)-x(a_i)}{b_j - a_i} = \dot{x}(t_{n,1})$ y $\frac{x(a_k)-x(b_j)}{a_k - b_j} = \dot{x}(t_{n,2})$. Se nota que desde un n suficientemente grande se tiene que $\dot{x}(t_{n,2}) > 0$ y $\dot{x}(t_{n,1}) < 0$, o $\dot{x}(t_{n,2}) < 0$ y $\dot{x}(t_{n,1}) > 0$, pero la diferencia entre $t_{n,1}$ y $t_{n,2}$ disminuye para un n cada más grande, lo implicaría que $\dot{x}$ no es continua cerca de T_+, pero x es C^1. Por ende, $x_1 = x_2$, con lo que para todo sucesión $c_k \uparrow T_+$ se tiene que $\lim_{k \to \infty} x(c_k) = x_1$, por lo que se puede extender $x(t)$ a T_+, lo que contradice que que el intervalo máximo es (T_-, T_+).

■

Problema 6:

Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - \exp(t^2)x^2 \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

(a) Identifique y dibuje las 0-isoclinas de la ecuación.

(b) Demuestre que para $\xi \in [0, 1]$, la solución $x(t)$ está definida para todos $t \geq 0$, y que $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

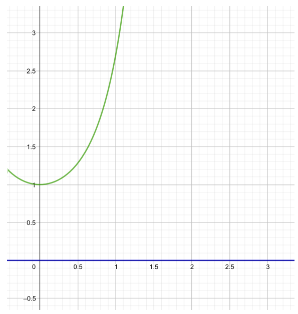
(c) Pruebe que cuando $\xi \geq K$ es suficientemente grande, $x(t)$ explota en tiempo finito. (*Sugerencia*: Construya una subsolución de la forma $y(t) = \exp(t^2)g(t)$ que explota en tiempo finito).

Solución problema 6:

(a) Las 0-isoclinas se calculan de la siguiente manera:

$$x^2(x - \exp(t^2)) = 0$$

Con lo que se ven dos 0-isoclinas:



Donde $f(t) = \exp(t^2)$ y $g(t) = 0$

(b) Dado la condición inicial es suficiente demostrar que $x(t)$ es decreciente para que este definida para todo $t \geq 0$. Sea $x \in [0, 1]$, entonces la siguiente desigualdad se cumple:

$$\dot{x} = x^3 - \exp(t^2)x^2 = x^2(x - \exp(t^2)) \leq 1 - \exp(t^2) \leq 0$$

Por lo que para $x \in [0, 1]$ $x(t)$ es decreciente. Ahora, como $x(t)$ es decreciente y acotada inferiormente[4] se tiene que existe el límite $lim_{t\to\infty}x(t)$, se llamará k a este límite. Si $k = 0$ se tiene lo pedido, por lo que se considerará $k > 0$

(c) Para demostrar esto, sea $y(t) = \exp(t^2)\frac{1}{(x-1/2)^2}$, esta es una subsolución que explota en tiempo finito, por lo que se tiene lo pedido.

$\blacksquare$

Problema 7:

Sea $C \subseteq X$ un subconjunto cerrado del espacio de Banach X. Suponga que para la función $K : C \to C$, su n-ésima iteración $K^n : C \to C$ es una contracción. Demuestre que K tiene un único punto fijo en C.

[4] Por la solución y 0-isoclina $x(t) \equiv 0$

Solución problema 7: Por pto. fijo de Banach, se tiene que K^n tiene un pto. fijo único, el cual se denotará como $\overline{x}$, luego

$$\begin{aligned} K^n(K(\overline{x})) &= K^{n+1}(\overline{x}) \\ &= K(K^n(\overline{x})) \\ &= K(\overline{x}) \quad \text{ya que } \overline{x} \text{ es pto. fijo de } K^n \end{aligned}$$

Entonces $K(\overline{x})$ es pto. fijo de K^n, pero este es único, por lo que $K(\overline{x}) = \overline{x}$. Lo que significa que K tiene un pto. fijo.

■

Problema 8:

(La Desigualdad de Gronwall): Suponga que $\psi(t)$ satisface

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0, T]$$

con $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ y $\beta(t) \geq 0$. Entonces

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}s, \quad t \in [0, T]$$

Es más, si además $\alpha(s) \leq \alpha(t)$ para $s \leq t$, entonces

$$\psi(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}s\right), \quad t \in [0, T].$$

Demuestre la última desigualdad.

Solución problema 8:

■