

4種4項平均の反復極限定理の代数幾何学的考察

中野 竜之介

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程 2 年



上の QR コードから該当の講演スライドが閲覧できます.

This work was supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2119.

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

1 背景

● 記号の定義と事実

- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

定義 1

$$\vartheta_{a,b}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \left(\pi i (n + \tfrac{1}{2}a) \tau^t (n + \tfrac{1}{2}a) + 2\pi i (z + \tfrac{1}{2}b)^t (n + \tfrac{1}{2}a) \right)$$

- $\tau = (\tau_{jk})_{jk} \in \mathfrak{S}_g : g \times g$ の対称複素行列で, 虚部が正定値なもの
- $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$: 複素変数
- $a, b \in \mathbb{Z}^g$
- $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$: 指標

特別な場合：

- $g = 1$: Jacobi テータ関数 ($\mathfrak{S}_1 = \mathbb{H}$: 上半平面)
- $g \geq 2$: Riemann テータ関数 (\mathfrak{S}_g : Siegel 上半空間)
- $z = 0$: テータ定数, $\vartheta_{a,b}(\tau)$

定義 2 (Gauss hypergeometric series)

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} z^n,$$

- $(\alpha, n) = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)$
- $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

Fact

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^\alpha (1 - t)^{\gamma - \alpha} (1 - zt)^{-\beta} \frac{dt}{t(1 - t)}$$

ただし $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

Fact

Gauss の超幾何級数 $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ は次の微分方程式を満たす:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1-z)} \frac{d}{dz} - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)} \right] f(z) = 0$$

Fact

$\gamma \notin \mathbb{Z}$ であるとき, *Gauss* の超幾何微分方程式は $z = 0$ における局所解として

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z), \\ x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x),$$

を持つ. また, $0 < |z| < 1$ 内の単連結領域上でこの 2 解は解空間の基底となる.

定義 6 (Lauricella's hypergeometric series F_D)

$$F_D(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n_1, \dots, n_m \geq 0} \frac{(\alpha, \sum_{j=1}^m n_j) \prod_{j=1}^m (\beta_j, n_j)}{(\gamma, \sum_{j=1}^m n_j) \prod_{j=1}^m (1, n_j)} \prod_{j=1}^m z_j^{n_j},$$

- $z = (z_1, \dots, z_m), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{C}^m$
- $|z_j| < 1 \ (j = 1, \dots, m)$
- $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

Fact

$$F_D(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{\gamma-\alpha} \prod_{j=1}^m (1 - z_j t)^{-\beta_j} \frac{dt}{t(1-t)}.$$

ただし $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

定理 (Gauss の算術幾何平均)

- 初期値 $0 < b_0 \leq a_0$ をとる
- 以下の漸化式で定まる数列を考える：

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

- これらは共通の極限 $M_G(a_0, b_0)$ に収束する.

証明：

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1$$

であることから共通極限に収束することが従う.

Fact (不変原理 (の特別な場合))

Gauss AGM $M_G(a_0, b_0)$ は,

$$\mu(x, x) = x, \quad \mu\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = \mu(x, y)$$

を満たす $\mathbb{R}_>^2$ 上の連続関数 μ により

$$M_G(a_0, b_0) = \mu(a_0, b_0)$$

と表される.

命題 9 (2 次変換公式)

$$(1+z)^{2\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; z^2\right) = F\left(\alpha, \beta, 2\beta; \frac{4z}{(1+z)^2}\right)$$

命題 10

$$\frac{a_0}{M_G(a_0, b_0)} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2\right)$$

証明：

$$\mu(x, y) = \frac{x}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}$$

が不変原理を満たすことを見ればよい. $\mu(x, x) = x$ は $F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$ であることから明らか.

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) &= \frac{x+y}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \frac{\sqrt{xy}^2}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{x+y}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x+y}{2} \left(1 + \frac{x-y}{x+y}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{4\frac{x-y}{x+y}}{(1 + \frac{x-y}{x+y})^2}\right)^{-1} \\
&= \frac{x+y}{2} \left(\frac{2x}{x+y}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{4\frac{x-y}{x+y}(x+y)^2}{(x+y+x-y)^2}\right)^{-1} \\
&= xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^{-1} \\
&= xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1} = \mu(x, y)
\end{aligned}$$

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ の場合の二次変換公式を適応すれば容易に Gauss AGM が超幾何級数であることがわかる。 □

再掲

$$(1+z)^{2\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; z^2\right) = F\left(\alpha, \beta, 2\beta; \frac{4z}{(1+z)^2}\right)$$

証明：

- $F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; w\right)$ の Gauss の超幾何微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dw^2} + \frac{2\beta + 1 - (4\alpha - 2\beta + 3)w}{2w(1-w)} \frac{d}{dw} - \frac{\alpha(2\alpha - 2\beta + 1)}{2w(1-w)} \right] f = 0$$

を $w = z^2$ として z の微分方程式に書き換える.

- 左から $(1+z)^{2\alpha}$ をかける.
- $u = \frac{4z}{(1+z)^2}$ と変数変換すると $F(\alpha, \beta, 2\beta; u)$ が定める超幾何微分方程式と一致することから, $z = 0$ における値の比較と原点周りにおける一価性から従う.



Gauss AGM の本質は Gauss の超幾何級数による表示であるが、解析的な側面以外にも代数幾何学的な側面を持つ:

定理 (Gauss 1799–1818, Jacobi)

- Legendre 標準形により定まる楕円曲線族 $w^2 = z(z - \lambda)(z - 1)$ の周期:

$$\tau(\lambda) = i \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)} \in \mathbb{H}$$

- このとき, $\lambda = 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}$ ($a_0 \neq b_0$) に対して, 以下が成り立つ:

$$\frac{a_0}{M_G(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)$$

$$\frac{a_0}{M_G(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

この等式を示すために、以下の性質が重要である：

$$M_G\left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = M_G(a_n, b_n) \text{ (シフト不変性)}$$

$$a M_G(1, b/a) = M_G(a, b) \text{ (同次性)}$$

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}$$

$$\vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau) \vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H} \text{ (2}\tau\text{-formula)}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ (Jacobi's formula)}$$

補題 11

Jacobi's identity: $\vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{10}(\tau)^4 + \vartheta_{01}(\tau)^4$ for $\forall \tau \in \mathbb{H}$

λ の復元: $\lambda = \vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4 / \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4$ ($\lambda = 1 - b_0^2/a_0^2 \neq 0, 1$),

$b_0^2/a_0^2 = 1 - \vartheta_{10}(\tau)^4 / \vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{01}(\tau)^4 / \vartheta_{00}(\tau)^4$ より

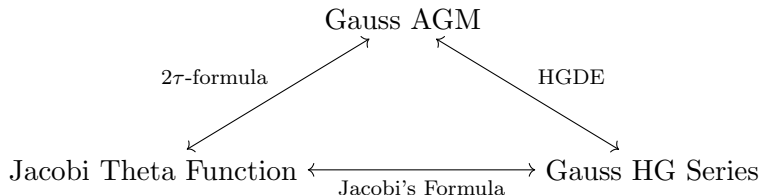
$$b_0/a_0 = \vartheta_{01}(\tau)^2 / \vartheta_{00}(\tau)^2.$$

再掲

$$\frac{a_0}{M_G(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

証明： 2τ -formula と Jacobi's formula を用いることで示される：

$$\begin{aligned}
 M_G(a_0, b_0) &= a_0 M_G(1, b_0/a_0) = a_0 M_G(1, \vartheta_{01}(\tau)^2/\vartheta_{00}(\tau)^2) \\
 &= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_G(\vartheta_{00}(\tau)^2, \vartheta_{01}(\tau)^2) \\
 &= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_G\left(\frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau)\right) \\
 &= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_G(\vartheta_{00}(2\tau)^2, \vartheta_{01}(2\tau)^2) \\
 &= \cdots = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} M_G(\vartheta_{00}(2^n \tau)^2, \vartheta_{01}(2^n \tau)^2) \\
 &= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_G(1, 1) = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} = a_0 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)^{-1} \quad \square
 \end{aligned}$$



2τ -formula

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H},$$

Jacobi's formula

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

$0 < d_0 \leq c_0 \leq b_0 \leq a_0$ とするとき, 漸化式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, & b_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{c_n d_n}}{2}, \\ c_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n c_n} + \sqrt{b_n d_n}}{2}, & d_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n d_n} + \sqrt{b_n c_n}}{2}, \end{aligned}$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_B(a_0, b_0, c_0, d_0)$ (Borchardt AGM と呼ぶ) に収束する.

- この平均は Gauss AGM と同様に同次性とシフト不変性を満たす.
- $M_B(a_0, a_0, b_0, b_0) = M_G(a_0, b_0)$.

Borchardt は種数 2 の超楕円曲線

$$y^2 = -(x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)(x - u_4)(x - u_5),$$

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5$$

の周期 $\tau \in \mathfrak{G}_2$ に対して定まる Riemann テータ定数を考えた.

Borchardt の場合においても変換 $\tau \mapsto 2\tau$ により平均を生み出す公式が与えられている:

$$\vartheta_{00,00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)^2 + \vartheta_{00,10}(\tau)^2 + \vartheta_{00,01}(\tau)^2 + \vartheta_{00,11}(\tau)^2}{4},$$

$$\vartheta_{00,10}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,10}(\tau) + \vartheta_{00,01}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2},$$

$$\vartheta_{00,01}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2},$$

$$\vartheta_{00,11}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau)}{2}.$$

Thomae の公式

$$\vartheta_{00,00}(\tau)^2 = \frac{\det \Omega}{4\pi^2} \sqrt{(u_1 - u_3)(u_1 - u_5)(u_3 - u_5)(u_2 - u_4)}$$

$$\vartheta_{00,10}(\tau)^2 = \frac{\det \Omega}{4\pi^2} \sqrt{(u_2 - u_3)(u_2 - u_5)(u_3 - u_5)(u_1 - u_4)}$$

$$\vartheta_{00,01}(\tau)^2 = \frac{\det \Omega}{4\pi^2} \sqrt{(u_1 - u_4)(u_1 - u_5)(u_4 - u_5)(u_2 - u_3)}$$

$$\vartheta_{00,11}(\tau)^2 = \frac{\det \Omega}{4\pi^2} \sqrt{(u_2 - u_3)(u_2 - u_5)(u_3 - u_5)(u_1 - u_4)}$$

- Ω : ある基底に関する B 周期

このような、テータ定数と分岐点に関する関係式を Thomae 型公式と呼ぶ。

- Borchardt 自身は (テータ定数と超幾何級数の等式の意味で) Jacobi の公式の類似や, Borchardt AGM の初期値と代数曲線族の周期の対応は示していない
- Matsumoto and Terasoma 2012 で, K3 曲面族の Thomae 型公式を示すことにより Borchardt AGM の 4 変数超幾何級数による表示が与えられている
- Kummer locus (K3 曲面族で, 周期写像の像が 2 次 Siegel 上半空間の点になるもの) に制限することにより 4 変数の超幾何級数が 3 変数の超幾何級数になり古典的な Thomae の公式が得られる

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

$0 < b_0 \leq a_0$ とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}, \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} b_n},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限 $M_{\text{Bor}}(a_0, b_0)$ (Borwein AGM と呼ぶ) に収束する.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

は変換 $\tau \mapsto 2\tau$ によって

$$\alpha(2\tau) = \frac{\alpha(\tau) + 3\beta(\tau)}{4}, \quad \beta(2\tau) = \sqrt{\frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{2}} \beta(\tau),$$

を満たす.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

命題 12 (J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991, Theorem 2.6)

① $0 < h < 1$ に対し,

$$\frac{1}{M_{\text{Bor}}(1, h)} = F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1 - h^2\right)^2$$

② $h = \beta(\tau)/\alpha(\tau)$ ($\tau \in \mathbb{H}$) とおくとき,

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1 - h^2\right)^2 = \alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4$$

Borwein AGM の場合にも, Borwein AGM の初期値と周期の対応が示されていない.

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

$0 < d_0 \leq c_0 \leq b_0 \leq a_0$ に対し拡張された 4 種類の 4 項平均

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, & b_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + d_n}{2} \frac{b_n + c_n}{2}}, \\ c_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + c_n}{2} \frac{b_n + d_n}{2}}, & d_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} \frac{c_n + d_n}{2}}, \end{aligned}$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $\mu(a_0, b_0, c_0, d_0)$ に収束する.

- $\mu(a_0, b_0, b_0, b_0) = M_{\text{Bor}}(a_0, b_0).$

命題 13 (Kato and Matsumoto 2009, Theorem 1.)

$$\frac{1}{\mu(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)^2,$$

この命題は Lauricella F_D の超幾何微分方程式 (の定める Pfaff 系) を用いて証明された.

この 4 種 4 項平均の反復極限 $\mu(1, y_1, y_2, y_3)$ もまた Gauss AGM と同様の構図が成り立つような代数幾何学背景を持つこと与えた.

本講演では, 次の公式の類似公式を与えることにより $\mu(a_0, b_0, c_0, d_0)$ の Lauricella F_D による表示の別証明を与える.

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

本講演では, 次の公式の類似公式を与えることにより $\mu(a_0, b_0, c_0, d_0)$ の Lauricella F_D による表示の別証明を与える.

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

定理 14 (M., N., Jacobi's Formula の類似, 主定理)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(1, y_1, y_2, y_3)} &= \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} \left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v_S)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v_S)^\sharp)^2 \right) \\ &= F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)^2 \end{aligned}$$

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

$$\frac{1}{M_G(1, b_0/a_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right),$$

$$\tau(\lambda) = i \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)}, \quad \lambda = 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}.$$

- $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)$ の分子分母を周期積分に持つような代数曲線族は

$$w^2 = z(z - \lambda)(z - 1) \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$$

である.

$$\frac{1}{\mu(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)^2$$

- $F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)$ を周期として持つような代数曲線族を考える必要がある.
- Deligne–Mostow の理論から

$$C(x): w^4 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_j \neq z_k, z_1, z_2, z_3 \neq 0, 1\},$$

を考えると, dz/w の $[1, \infty]$ における積分に

$$F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; x_1, x_2, x_3 \right) \text{ が現れる.}$$

構想

$x = (x_1, x_2, x_3) \in X$ に対して定まる周期行列 τ を考える. $y_j^2 = 1 - x_j$ としたとき,

$$y_j = b_j(\tau)/a(\tau)$$

となるような関数 $a(\tau)$, $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$, $b_3(\tau)$ と変換 R で,

$$a(R \cdot \tau) = \frac{a(\tau) + b_1(\tau) + b_2(\tau) + b_3(\tau)}{4},$$

$$b_1(R \cdot \tau) = \frac{\sqrt{(a(\tau) + b_3(\tau))(b_1(\tau) + b_2(\tau))}}{2},$$

$$b_2(R \cdot \tau) = \frac{\sqrt{(a(\tau) + b_2(\tau))(b_1(\tau) + b_3(\tau))}}{2},$$

$$b_3(R \cdot \tau) = \frac{\sqrt{(a(\tau) + b_1(\tau))(b_2(\tau) + b_3(\tau))}}{2}.$$

となるものが見つかれば良い.

- ① テータ定数と分岐点の関係を記述した Thomae 型の公式
- ② テータ定数と Lauricella F_D の関係を記述した Jacobi の公式の類似
- ③ Borwein AGM における, 保型関数 $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ ・ 平均を生み出す変換 $\tau \mapsto 2\tau$ の拡張 (保型関数 a, b_1, b_2, b_3 の決定)

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

- 周期写像の定義 ((コ) ホモロジーの基底の構成)
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi's Formula の類似
- 主定理

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

定義 15

$$C(x): w^4 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in X$$

ただし,

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_j \neq 0, 1 \ (j = 1, 2, 3), \ x_j \neq x_k \ (j \neq k)\}.$$

命題 16 (M., N.)

$\text{pr}: C(x) \ni (z, w) \mapsto z \in \mathbb{P}^1$ とするとき, $(C(x), \text{pr})$ は 6 点 $0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty$ を branch points とする \mathbb{P}^1 の巡回 4 重分岐被覆であり, 種数 6 の閉 Riemann 面である.

定義 17

$P_j = \text{pr}^{-1}(j)$ ($j = 0, 1, x_1, x_2, x_3$) とする.

- ρ : $\rho(z, w) = (z, iw)$ で定まる pr の被覆変換

とすると、 ρ^2 により $C(x): w^4 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1)$ は種数 2 の超楕円曲線 $w^2 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1)$ の 2 重被覆であることから Prym 多様体 $\text{Prym}(C(x), \rho^2)$ を考える.

定義 18

- $H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$: $(\rho^2)^*$ の (-1) -固有空間
- $H_-^0(C(x), \Omega^1)$: $(\rho^2)^*$ の (-1) -固有空間

$$\mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = H_-^0(C(x), \Omega^1)^\vee / H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$$

- $C(x)$ の Jacobi 多様体における ρ^2 -作用の (-1) -固有空間
- $\dim \mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = 4$
- 偏極: $(1, 1, 2, 2)$

$$\mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = H_-^0(C(x), \Omega^1)^\vee / H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$$

- $C(x)$ の Jacobi 多様体における ρ^2 -作用の (-1) -固有空間
- $\dim \mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = 4$
- 偏極: $(1, 1, 2, 2)$

↪ 主偏極でない場合整係数シンプレクティック群のテータ関数への作用公式は主偏極のとき程シンプルではない.

$$\mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = H_-^0(C(x), \Omega^1)^\vee / H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$$

- $C(x)$ の Jacobi 多様体における ρ^2 -作用の (-1) -固有空間
- $\dim \mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = 4$
- 偏極: $(1, 1, 2, 2)$

↪ 主偏極でない場合整係数シンプレクティック群のテータ関数への作用公式は主偏極のとき程シンプルではない.

↪ $H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$ の部分格子 L で $A_L = H_-^0(C(x), \Omega^1)^\vee / L$ の偏極が $(2, 2, 2, 2)$ であるものを考える.

命題 19 (M., N.)

$$\phi_1 = \frac{dz}{w}, \quad \phi_2 = \frac{dz}{w^3}, \quad \phi_3 = \frac{zdz}{w^3}, \quad \phi_4 = \frac{z^2dz}{w^3}, \quad \phi_5 = \frac{dz}{w^2}, \quad \phi_6 = \frac{zdz}{w^2}$$

は $H^0(C(x), \Omega^1)$ の基底を成す

命題 20 (M., N.)

ϕ_1, \dots, ϕ_4 は $H_-^0(C(x), \Omega^1)$ の基底を成す

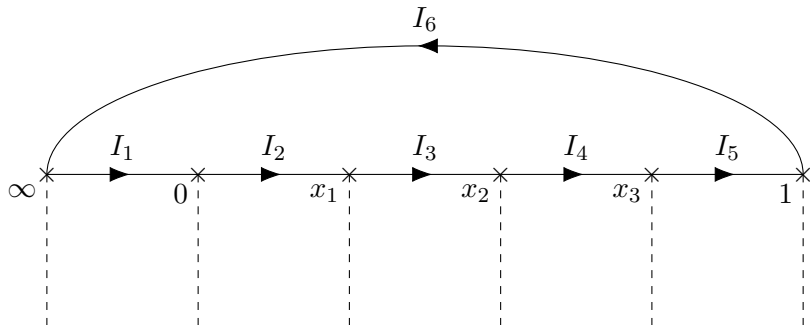


Figure: 経路 I_1, \dots, I_6

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$$

命題 21 (M., N.)

$\{\rho^k(1 - \rho^2)I_j \mid j = 1, 3, 4, 6, k = 0, 1\}$ は $H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$ を張る

命題 22 (M., N.)

$c_j = (1 - \rho^2)I_j$ と表すとき,

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 + \rho)c_1, & A_2 &= \rho c_6, & A_3 &= -(1 + \rho)c_3 - \rho c_4, & A_4 &= c_4, \\ B_1 &= c_6, & B_2 &= (1 - \rho)c_1, & B_3 &= -(1 - \rho)c_3 - c_4, & B_4 &= -\rho c_4. \end{aligned}$$

- $L = \langle A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4 \rangle_{\mathbb{Z}} \subset H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$: 指数 4 の部分格子
- 交点行列: $2J_8 = 2 \begin{pmatrix} O_4 & -I_4 \\ I_4 & O_4 \end{pmatrix}$
- ρ の作用: $\begin{pmatrix} \rho(A) \\ \rho(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_4 & -U \\ U & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$
- 偏極: $(2, 2, 2, 2)$

任意の $x \in X$ に対して各サイクルを解析接続を行い先ほど構成したシンプレクティック基底を定める (基点と解析接続のパス依存)

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

定義 23

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau_A \\ \tau_B \end{pmatrix}, \quad \tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k \right)_{j,k}, \quad \tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k \right)_{j,k}$$

とする.

命題 24 (M., N.)

$$\tau = \tau_A \tau_B^{-1} \in \mathfrak{S}_4$$

命題 25 (M., N.)

$$\tau = iU \left(I_4 - \frac{2}{t_v U v} v^t v U \right)$$

- v : τ_B の第 1 列

定義 26

$$v = \left(\int_{B_j} \frac{dz}{w} \right)_{j=1,2,3,4}$$

命題 27 (M., N.)

v を射影化したとき, $[v]$ は Hermite 形式 U が定める複素超球の元である:

$$[v] \in \mathbb{B}_3 = \{ \xi \in \mathbb{P}^3 \mid \xi^* U \xi < 0 \}.$$

定義 28

- $(x_1, x_2, x_3) \in X$ の周期への対応 $X \rightarrow \mathbb{B}_3$ は局所的に一価正則である. Γ_U をモノドロミー群とする.
- $\text{per}: X \rightarrow \Gamma_U \backslash \mathbb{B}_3$ を周期写像と呼ぶ.

命題 29 (Yoshida 1997)

X は $\Gamma_U \backslash \mathbb{B}_3$ の稠密開集合と同型.

命題 30 (M., N.)

$$\tau(v) := \iota(v) = iU \left(I_4 - \frac{2}{t_v U v} v^t v U \right) \quad (v \in \mathbb{B}_3)$$

- この写像 $\iota: \mathbb{B}_3 \rightarrow \mathfrak{S}_4$ は埋め込みとなる.
- $[v] = \text{per}(x_1, x_2, x_3)$, $\tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k \right)_{j,k}$, $\tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k \right)_{j,k}$ とするとき, $\tau(v) = \tau_A \tau_B^{-1}$

定義 31

- $\vartheta_{a,b}(v) = \vartheta_{a,b}(\tau(v))$ ($v \in \mathbb{B}_3$): テータ定数の埋め込みによる引き戻し

定義 32

$$U(U, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C}) \mid g^* U g = U\}$$

$$\mathrm{Sp}(8, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SL}(8, \mathbb{R}) \mid M J_8 {}^t M = J_8\}$$

- $U(U, \mathbb{C})$: 射影化すると \mathbb{B}_3 の自己同型群となる, ユニタリ群
- $\mathrm{Sp}(8, \mathbb{R})$: 射影化すると \mathfrak{G}_4 の自己同型群, シンプレクティック群

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

命題 33 (M., N.)

埋め込み ι は準同型

$$j: U(U, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Sp}(8, \mathbb{R})$$

で, 次の図式が可環になるものを誘導する:

$$\begin{array}{ccc}
 (g, v) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (j(g), \iota(v)) \\
 \downarrow \wr & \begin{array}{c} \subseteq \\ U(U, \mathbb{C}) \times \mathbb{B}_3 \longrightarrow \mathbb{B}_3 \end{array} & \downarrow \supset \\
 & \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathrm{Sp}(8, \mathbb{R}) \times \mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathfrak{S}_4 \ni j(g) \cdot \iota(v) \end{array} & \downarrow \\
 gv & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \iota(gv) \\
 \downarrow \wr & \begin{array}{c} \subseteq \\ \downarrow \end{array} & \downarrow \wr \\
 & \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathrm{Sp}(8, \mathbb{R}) \times \mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathfrak{S}_4 \ni j(g) \cdot \iota(v) \end{array} & \downarrow \wr
 \end{array}$$

Legendre 標準形により定まる楕円曲線族

$$C_{\text{ell}}(\lambda): w^2 = z(z - \lambda)(z - 1)$$

の場合は $(C_{\text{ell}}(x)$ 上の有理型関数としての) z を Abel–Jacobi 写像

$$C_{\text{ell}}(\lambda) \ni (z, w) \mapsto \frac{1}{\text{B-周期}} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{w} \in E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}), \quad \tau = \tau(\lambda)$$

による引き戻すことにより λ のテータ定数による表示を得ていた:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau)^4}{\vartheta_{00}(\tau)^4}$$

これは周期写像

$$\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \ni \lambda \xrightarrow{\sim} [\tau(\lambda)] \in \mathbb{H}/\Gamma(2)$$

の逆写像をテータ定数により構成していることに他ならない.

Abel–Jacobi 写像

$$C_{\text{ell}}(\lambda) \ni (z, w) \mapsto \frac{1}{\text{B-周期}} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{w} \in E_\tau$$

同様に, **Abel–Jacobi–Prym 写像**

$$\psi: C(x) \ni P \mapsto \int_{(1-\rho^2)\gamma} \left(\frac{dz}{w}, \frac{dz}{w^3}, \frac{z dz}{w^3}, \frac{z^2 dz}{w^3} \right) \times \underbrace{\left(\int_{B_j} \phi_k \right)_{j,k}^{-1}}_{=\text{B-周期}} \in A_L$$

と, $C(x)$ の普遍被覆面 $\widetilde{C(x)}$ から \mathbb{C}^4 への写像として ψ の lifting $\tilde{\psi}$ を考えることで,

- $C(x)$ 上の有理型関数の構成
- 分岐点と球面上のテータ定数の関係式の導出
- 特に, x_1 のテータ定数による表示の導出

を行った.

定義 34

$$\psi: C(x) \ni P \mapsto \int_{(1-\rho^2)\gamma} \left(\frac{dz}{w}, \frac{dz}{w^3}, \frac{z dz}{w^3}, \frac{z^2 dz}{w^3} \right) \left(\int_{B_j} \phi_k \right)_{j,k}^{-1} \in A_L$$

を Abel–Jacobi–Prym 写像と呼ぶ. ただし, 経路は P_∞ から P への経路 γ を 1 つ取るとき, $(1 - \rho^2)\gamma = \gamma - \rho^2\gamma$ とする.

注意 35

$$(1 - \rho^2)H_1(C(x), \mathbb{Z}) = (1 - \rho)H_1^-(C(x), \mathbb{Z}) \subset L \subset H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$$

であることからこの写像は well-defined である. ◆

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

$\tilde{\psi}^*\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau)$ の零点とその位数を解析することにより得られる.

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

$\tilde{\psi}^*\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau)$ の零点とその位数を解析することにより得られる.

- ① $\tilde{\psi}(P_j)$ の決定

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

$\tilde{\psi}^*\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau)$ の零点とその位数を解析することにより得られる.

① $\tilde{\psi}(P_j)$ の決定

$$\rightsquigarrow \psi(P_0) \equiv \psi(P_{x_1}), \psi(P_{x_2}) \equiv \psi(P_{x_3}), \psi(P_{x_3}) \equiv \psi(P_{\infty}).$$

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

$\tilde{\psi}^*\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau)$ の零点とその位数を解析することにより得られる.

① $\tilde{\psi}(P_j)$ の決定

$$\rightsquigarrow \psi(P_0) \equiv \psi(P_{x_1}), \psi(P_{x_2}) \equiv \psi(P_{x_3}), \psi(P_{x_3}) \equiv \psi(P_\infty).$$

② 各指標 $\frac{1}{2}(bU, b)$ ($b \in \{0, 1\}^4$) における $\psi(P_j)$ の位数の計算

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

$\tilde{\psi}^*\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau)$ の零点とその位数を解析することにより得られる.

① $\tilde{\psi}(P_j)$ の決定

$\rightsquigarrow \psi(P_0) \equiv \psi(P_{x_1}), \psi(P_{x_2}) \equiv \psi(P_{x_3}), \psi(P_{x_3}) \equiv \psi(P_\infty).$

② 各指標 $\frac{1}{2}(bU, b)$ ($b \in \{0, 1\}^4$) における $\psi(P_j)$ の位数の計算

③ 零点を分岐点 P_j 以外にちょうど 4 点持つように指標 2 つを選び比を取る

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

$\tilde{\psi}^*\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau)$ の零点とその位数を解析することにより得られる.

① $\tilde{\psi}(P_j)$ の決定

$\rightsquigarrow \psi(P_0) \equiv \psi(P_{x_1}), \psi(P_{x_2}) \equiv \psi(P_{x_3}), \psi(P_{x_3}) \equiv \psi(P_\infty).$

② 各指標 $\frac{1}{2}(bU, b)$ ($b \in \{0, 1\}^4$) における $\psi(P_j)$ の位数の計算

③ 零点を分岐点 P_j 以外にちょうど 4 点持つように指標 2 つを選び比を取る

\rightsquigarrow pr で写すと全て同じ点になる (ρ -軌道上にある)

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

$\tilde{\psi}^*\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau)$ の零点とその位数を解析することにより得られる.

① $\tilde{\psi}(P_j)$ の決定

$\rightsquigarrow \psi(P_0) \equiv \psi(P_{x_1}), \psi(P_{x_2}) \equiv \psi(P_{x_3}), \psi(P_{x_3}) \equiv \psi(P_\infty).$

② 各指標 $\frac{1}{2}(bU, b)$ ($b \in \{0, 1\}^4$) における $\psi(P_j)$ の位数の計算

③ 零点を分岐点 P_j 以外にちょうど 4 点持つように指標 2 つを選び比を取る

\rightsquigarrow pr で写すと全て同じ点になる (ρ -軌道上にある)

$\rightsquigarrow C \frac{z-s}{z-t}$ という形になっていることがわかる

命題 36 (M., N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

$\tilde{\psi}^*\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau)$ の零点とその位数を解析することにより得られる.

① $\tilde{\psi}(P_j)$ の決定

$\rightsquigarrow \psi(P_0) \equiv \psi(P_{x_1}), \psi(P_{x_2}) \equiv \psi(P_{x_3}), \psi(P_{x_3}) \equiv \psi(P_\infty).$

② 各指標 $\frac{1}{2}(bU, b)$ ($b \in \{0, 1\}^4$) における $\psi(P_j)$ の位数の計算

③ 零点を分岐点 P_j 以外にちょうど 4 点持つように指標 2 つを選び比を取る

\rightsquigarrow pr で写すと全て同じ点になる (ρ -軌道上にある)

$\rightsquigarrow C^{\frac{z-s}{z-t}}$ という形になっていることがわかる

$\rightsquigarrow \psi$ で写すと A_L 上同値になる 2 点を結ぶ経路を取り $\widetilde{C(x)}$ 上で解析接続することにより, 特定の指標で $\tilde{\psi}^*\vartheta_{bU,b}(\zeta, \tau)$ の全ての零点が決定され, 特に $s+t$ や st の値が具体的にわかる.

命題 37 (M., N.)

$$\frac{\tilde{\psi}^* \vartheta_{0000,0000}(P)}{\tilde{\psi}^* \vartheta_{1000,0100}(P)} = C \frac{z-s}{z-t}$$

の s, t, C は次で決定される:

$$s+t=2, \quad st=x_1, \quad C = \frac{\vartheta_{0000,0000}(v)}{\vartheta_{1000,0100}(v)}$$

また, $s/t = \vartheta_{0000,0000}(v)^2 / \vartheta_{1000,0100}(v)^2$ である.

命題 (再掲)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2 \vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}$$

証明:

$$\left(1 + \frac{s}{t}\right) \left(1 + \frac{t}{s}\right) = \frac{(s+t)^2}{st} = \frac{4}{x_1}$$

より従う.



周期写像 $p(x_1, x_2, x_3)$ を X 内で

$$(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_2, x_1, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_3, x_2, x_1)$$

と解析接続することで,

- v に生じる変換行列の計算
- **テータ定数への作用の明示公式**の構成 (i.e. 周期写像 p の逆写像)を行った.

周期写像 $p(x_1, x_2, x_3)$ を X 内で

$$(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_2, x_1, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_3, x_2, x_1)$$

と解析接続することで,

- v に生じる変換行列の計算
- **テータ定数への作用の明示公式**の構成 (i.e. 周期写像 p の逆写像)を行った.

$$g_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ & & -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}, \quad g_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ & & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Q}(i)$ 係数であるため作用公式は非自明であるが, Matsumoto, Minowa, and Nishimura 2007[Proposition 3] を利用すると計算できる.

Gauss AGM においては楕円曲線の周期 $\tau(\lambda)$ によって λ が復元できていたのであった:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$

Gauss AGM においては楕円曲線の周期 $\tau(\lambda)$ によって λ が復元できていたのであった:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$

定理 38 (M., N.)

$[v] = \text{per}(x_1, x_2, x_3)$ とする.

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2},$$

$$x_2 = \frac{4\vartheta_{0010,0001}(v)^2\vartheta_{1010,0101}(v)^2}{(\vartheta_{0010,0001}(v)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v)^2)^2},$$

$$x_3 = \frac{4\vartheta_{0011,0000}(v)^2\vartheta_{1011,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0011,0000}(v)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v)^2)^2}.$$

- x_1, x_2, x_3 の表示の分母は共通であってほしい

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- **Thomae 型公式**
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

定理 39 (M., N., Thomae 型公式)

$v = {}^t \left(\int_{B_j} \frac{dz}{w} \right)_{j=1,2,3,4}$, $([v] = \text{per}(x_1, x_2, x_3))$ とする. このとき,

$$\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2 = -\frac{{}^t v U v}{4\pi\Gamma(3/4)^4},$$

$$\vartheta_{0010,0001}(v)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v)^2 = -\frac{{}^t v U v}{8\pi\Gamma(3/4)^4},$$

$$\vartheta_{0011,0000}(v)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v)^2 = -\frac{{}^t v U v}{8\pi\Gamma(3/4)^4},$$

証明： $\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{0000,1100}(v)^2$ と ${}^t v U v$ の比を取り, $\Gamma_U \backslash \mathbb{B}_3$ の Satake コンパクト化をしカスプへの極限を調べることによりコンパクト複素多様体上で正則, 即ち定数関数であることがわかる. 定数を決定することにより主張を得る.

系 40

$$\begin{aligned}\frac{\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2}{2} &= \vartheta_{0010,0001}(v)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v)^2 \\ &= \vartheta_{0011,0000}(v)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v)^2\end{aligned}$$

系 41

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}, \\ x_2 &= \frac{16\vartheta_{0010,0001}(v)^2\vartheta_{1010,0101}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}, \\ x_3 &= \frac{16\vartheta_{0011,0000}(v)^2\vartheta_{1011,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}.\end{aligned}$$

命題 42 (M., N.)

$$S = \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} & & -1 \\ -2 & & \\ & 1 & i \\ & -i & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(U, \mathbb{Q}(i))$$

とする. このとき, $\mathrm{per}^{-1}(S \mathrm{per}(x_1, x_2, x_3)) = (1 - x_3, 1 - x_2, 1 - x_1)$.

定義 43

$\mathrm{per}_S: X \rightarrow \Gamma_U \backslash \mathbb{B}_3$ を

$$\mathrm{per}_S(x_1, x_2, x_3) = S \mathrm{per}(x_1, x_2, x_3) \text{ for } \forall (x_1, x_2, x_3) \in X$$

として定める.

命題 44 (M., N.)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{(\vartheta_{0011,0000}(v_S)^2 - \vartheta_{1011,0100}(v_S)^2)^2}{(\vartheta_{0011,0000}(v_S)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v_S)^2)^2}, \\
 x_2 &= \frac{(\vartheta_{0010,0001}(v_S)^2 - \vartheta_{1010,0101}(v_S)^2)^2}{(\vartheta_{0010,0001}(v_S)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v_S)^2)^2}, \\
 x_3 &= \frac{(\vartheta_{0000,0000}(v_S)^2 - \vartheta_{1000,0100}(v_S)^2)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v_S)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v_S)^2)^2},
 \end{aligned}$$

- $v_S = \text{per}_S(x_1, x_2, x_3)$

補題 45 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z}), \quad P = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1), \quad Q = \mathrm{diag}(1, 0, 0, 0),$$

とする.

このとき, $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$.

特に $\tau = \tau(v)$ ($v \in \mathbb{B}_3$) であるとき, ${}^t v U v = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$.

補題 45 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z}), \quad P = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1), \quad Q = \mathrm{diag}(1, 0, 0, 0),$$

とする.

このとき, $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$.

特に $\tau = \tau(v)$ ($v \in \mathbb{B}_3$) であるとき, ${}^t v U v = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$.

$v = \mathrm{per}_S(x_1, x_2, x_3)$ に対して

$$v_2 = \sqrt{2}\pi F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; x_1, x_2, x_3 \right).$$

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

定理 46 (M., N., Jacobi's Formula の類似)

$$\frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} \left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v_S)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v_S)^\sharp)^2 \right) \\ = F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; x_1, x_2, x_3 \right)^2$$

- $v_S = \text{per}_S(x_1, x_2, x_3)$
- $\tau(v_S)^\sharp = M_0 \cdot \tau(v_S)$

定理 47 (M., N.)

$v_S = \text{per}_S(x_1, x_2, x_3)$ とする. このとき,

$$a(v_S) = \vartheta_{0000,0000}(\tau(v_S)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v_S)^\sharp)^2,$$

$$b_1(v_S) = 4\vartheta_{0011,0000}(\tau(v_S)^\sharp)\vartheta_{0011,1100}(\tau(v_S)^\sharp)$$

$$b_2(v_S) = 4\vartheta_{0010,0001}(\tau(v_S)^\sharp)\vartheta_{0010,1101}(\tau(v_S)^\sharp),$$

$$b_3(v_S) = 2\vartheta_{0000,0000}(\tau(v_S)^\sharp)\vartheta_{0000,1100}(\tau(v_S)^\sharp).$$

と, 変換 $R = \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & i \\ & & -i & -1 \end{pmatrix} \in \text{U}(U, \mathbb{Q}(i))$ が求めるものである.

- $\tau(v_S)^\sharp = M_0 \cdot \tau(v_S)$
- $b_j(v_S)/a(v_S) = y_j$

$$\begin{aligned}a(Rv_S) &= \frac{a(v_S) + b_1(v_S) + b_2(v_S) + b_3(v_S)}{4}, \\b_1(Rv_S) &= \frac{\sqrt{(a(v_S) + b_3(v_S))(b_1(v_S) + b_2(v_S))}}{2}, \\b_2(Rv_S) &= \frac{\sqrt{(a(v_S) + b_2(v_S))(b_1(v_S) + b_3(v_S))}}{2}, \\b_3(Rv_S) &= \frac{\sqrt{(a(v_S) + b_1(v_S))(b_2(v_S) + b_3(v_S))}}{2}.\end{aligned}$$

定理 48 (M., N. 主定理)

$a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq d_0 > 0$ とする.

$$\frac{a_0}{\mu(a_0, b_0, c_0, d_0)} = \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} \frac{\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v_S)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v_S)^\sharp)^2 \right)}{=a(v_S)}$$

- $y_1 = b_0/a_0, y_2 = c_0/a_0, y_3 = d_0/a_0$
- $x_j = 1 - y_j^2$
- $v_S = \text{per}_S(x_1, x_2, x_3)$
- $\tau(v_S)^\sharp = M_0 \cdot \tau(v_S)$

定理 48 (M., N. 主定理)

$a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq d_0 > 0$ とする.

$$\frac{a_0}{\mu(a_0, b_0, c_0, d_0)} = \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} \frac{\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v_S)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v_S)^\sharp)^2 \right)}{=a(v_S)}$$

- $y_1 = b_0/a_0, y_2 = c_0/a_0, y_3 = d_0/a_0$
- $x_j = 1 - y_j^2$
- $v_S = \text{per}_S(x_1, x_2, x_3)$
- $\tau(v_S)^\sharp = M_0 \cdot \tau(v_S)$

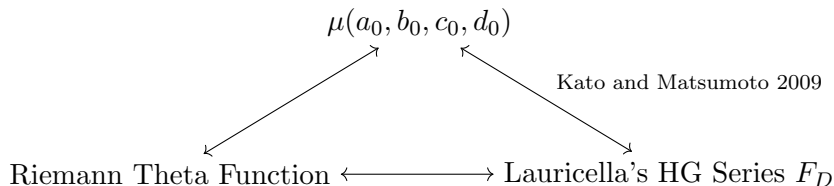
$$\frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} a(v_S) = F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)^2$$

Jacobi's Formula の類似と主定理を合わせることで

命題 49 (Kato and Matsumoto 2009, Theorem 1.)

$$\frac{1}{\mu(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)^2,$$

の別証明を与えた.



今回の結果は, $\mu(a_0, b_0, c_0, d_0)$ が, 代数曲線の周期とテータ定数の保型性を通じて Lauricella F_D と結びつくことを具体的に示したものである.

① 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

② 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

③ おまけ

- Borwein AGM への退化

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchartd 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式
- Jacobi の公式の類似・主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

補題 50

$x_1 = x_2 = x_3$ であるとき, $\text{per}(x_1, x_2, x_3) = {}^t(v_1, v_2, 0, 0)$ である.

$$v_S = \text{per}_S(x_1, x_2, x_3) = -(1+i) {}^t\left(\frac{1}{2}v_2, v_1, 0, 0\right),$$

$$\tau(v_S)^\sharp = \text{diag}\left(-\frac{v_2}{2v_1}i, -\frac{v_2}{2v_1}i, i, i\right),$$

$$Rv_S = \frac{1}{1-i} \left(\begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \right) v_S = -i {}^t(v_2, v_1, 0, 0),$$

$$\tau(Rv_S)^\sharp = \tau(v_S)^\sharp \text{diag}(2, 2, 1, 1)$$

である. 退化したとき, 2 倍写像が見えている.

Borwein AGM への退化 II

$\tau_0 = -iv_2/v_1$ と置く. $\tau(v)^\sharp$ が対角行列であることから Riemann テータ定数は Jacobi テータ定数の積に分解されることに注意すると保型関数 $a(v), b_1(v), b_2(v), b_3(v)$ の Borwein AGM への退化が $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ となることがわかる.

$$\begin{aligned} a(v_S) &= \vartheta \begin{bmatrix} 0000 \\ 0000 \end{bmatrix} (\tau(v_S)^\sharp)^2 + \vartheta \begin{bmatrix} 0000 \\ 1100 \end{bmatrix} (\tau(v_S)^\sharp)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) 2\vartheta_{00}(i)^4 \\ &= \frac{1}{4} \left(\vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + 2\vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) 2\vartheta_{00}(i)^4 \\ &= \frac{1}{4} \left(\vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{10} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + 3 \frac{\vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4}{= \vartheta_{00}(\tau_0/2)^4 - \vartheta_{10}(\tau_0/2)^4} \right) 2\vartheta_{00}(i)^4 \\ &= 2\vartheta_{00}(i)^4 \frac{\alpha(\frac{\tau_0}{2}) + 3\beta(\frac{\tau_0}{2})}{4} = 2\vartheta_{00}(i)^4 \alpha(\tau_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b_1(v_S) \\
 &= 2 \vartheta \begin{bmatrix} 0000 \\ 0000 \end{bmatrix} (\tau(v_S)^\sharp) \vartheta \begin{bmatrix} 0000 \\ 1100 \end{bmatrix} (\tau(v_S)^\sharp) \\
 &= 2 \vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^2 \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^2 \vartheta_{00}(i) \\
 &= 2 \vartheta_{00}(i)^4 \vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^2 \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right) \\
 &= 2 \vartheta_{00}(i)^4 \sqrt{\vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4} \\
 &= 2 \vartheta_{00}(i)^4 \sqrt{\left(\vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{10} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4} \\
 &= 2 \vartheta_{00}(i)^4 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + 2 \vartheta_{10} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\vartheta_{00}(i)^4 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{10} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4} \\
 &= 2\vartheta_{00}(i)^4 \sqrt{\frac{\alpha \left(\frac{\tau_0}{2} \right) + \beta \left(\frac{\tau_0}{2} \right)}{2} \cdot \beta \left(\frac{\tau_0}{2} \right)} \\
 &= 2\vartheta_{00}(i)^4 \beta(\tau_0).
 \end{aligned}$$

同様に $b_1(v_S) = b_2(v_S) = b_3(v_S)$.

$$\begin{aligned}a(v_S) &= 2\vartheta_{00}(i)^4\alpha(\tau_0) \\ b_1(v_S) &= b_2(v) = b_3(v) = 2\vartheta_{00}(i)^4\beta(\tau_0)\end{aligned}$$







補題 51

$$2\vartheta_{00}(i)^4 = \frac{2\pi}{\Gamma(3/4)^4}$$

$$\left(\frac{1}{\text{Borwein AGM}} = \right) \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} a(v_S) = \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} 2\vartheta_{00}(i)^4 \alpha(\tau_0) = \alpha(\tau_0)$$

Borwein AGM の結果も退化することにより得られる

参考文献

-  Borchardt, C. W. (1876). "Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen". In: *Berl. Monatsber.* 53, pp. 611–621.
-  Borwein, J. M. and P. B. Borwein (1991). "A Cubic Counterpart of Jacobi's Identity and the AGM". In: *Trans. Amer. Math. Soc.*
-  Kato, T. and K. Matsumoto (2009). "The Common Limit of a Quadruple Sequence and the Hypergeometric Function F_D of Three Variables". In: *Nagoya Math. J.* 195, pp. 113–124.
-  Matsumoto, K., T. Minowa and R. Nishimura (2007). "Automorphic Forms on the 5-Dimensional Complex Ball with Respect to the Picard Modular Group over $\mathbb{Z}[i]$ ". In: *Hokkaido Math. J.* 36, pp. 143–173.
-  Matsumoto, K. and T. Terasoma (2012). *Thomae Type Formula for K3 Surfaces Given by Double Covers of the Projective Plane Branching Along Six Lines.*
-  Yoshida, M. (1997). *Hypergeometric Functions, My Love. Vol. E32. Aspects of Mathematics. Modular Interpretations of Configuration Spaces.* Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.