

# 4 項平均反復極限に潜む代数幾何学

中野 竜之介

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程 2 年



This work was supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2119.

本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究  
プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものです.

## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

## 1 背景

- 記号の定義

- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

## 定義 1

$$\vartheta_{a,b}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \left( \pi i \left( n + \frac{1}{2}a \right) \tau^t \left( n + \frac{1}{2}a \right) + 2\pi i \left( z + \frac{1}{2}b \right)^t \left( n + \frac{1}{2}a \right) \right)$$

- $\tau = (\tau_{jk})_{jk} \in \mathfrak{S}_g : g \times g$  の対称複素行列で, 虚部が正定値なもの
- $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$ : 複素変数
- $a, b \in \mathbb{Z}^g$
- $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ : 指標

特別な場合:

- $g = 1$ : Jacobi テータ関数 ( $\mathfrak{S}_1 = \mathbb{H}$ : 上半平面)
- $g \geq 2$ : Riemann テータ関数 ( $\mathfrak{S}_g$ : Siegel 上半空間)
- $z = 0$ : テータ定数,  $\vartheta_{a,b}(\tau)$

### 定義 2 (Gauss hypergeometric series)

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} z^n,$$

- $(\alpha, n) = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)$
- $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

### Fact

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{\gamma-\alpha} (1-zt)^{-\beta} \frac{dt}{t(1-t)}$$

ただし  $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0$ .

## 定義 4 (Lauricella's hypergeometric series $F_D$ )

$$F_D(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n_1, \dots, n_m \geq 0} \frac{(\alpha, \sum_{j=1}^m n_j) \prod_{j=1}^m (\beta_j, n_j)}{(\gamma, \sum_{j=1}^m n_j) \prod_{j=1}^m (1, n_j)} \prod_{j=1}^m z_j^{n_j},$$

- $z = (z_1, \dots, z_m), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{C}^m$
- $|z_j| < 1 \ (j = 1, \dots, m)$
- $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

## Fact

$$F_D(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{\gamma-\alpha} \prod_{j=1}^m (1 - z_j t)^{-\beta_j} \frac{dt}{t(1-t)}.$$

ただし  $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0$ .

## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

## 定理 (Gauss の算術幾何平均)

- 初期値  $0 < b_0 \leq a_0$  をとる
- 以下の漸化式で定まる数列を考える：

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

- これらは共通の極限  $M_G(a_0, b_0)$  に収束する.



## 定理 (Gauss 1799–1818, Jacobi)

- Legendre 標準形により定まる楕円曲線族  
 $w^2 = z(z - \lambda)(z - 1)$  ( $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ) の周期:

$$\tau(\lambda) = i \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)} \in \mathbb{H}$$

- このとき,  $\lambda = 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}$  ( $a_0 \neq b_0$ ) に対して, 以下が成り立つ:

$$\frac{a_0}{M_G(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)$$

$$\frac{a_0}{M_G(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

この等式を示すために、以下の性質が重要である：

$$M_G\left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = M_G(a_n, b_n) \text{ (シフト不変性)}$$

$$a M_G(1, b/a) = M_G(a, b) \text{ (同次性)}$$

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}$$

$$\vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau) \vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H} \text{ (2}\tau\text{-formula)}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ (Jacobi's formula)}$$

## 補題 6

$\vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{10}(\tau)^4 + \vartheta_{01}(\tau)^4$  for  $\forall \tau \in \mathbb{H}$  (Jacobi's identity)

$$\lambda = \vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4 / \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4 \quad (\lambda = 1 - b_0^2/a_0^2),$$

$b_0^2/a_0^2 = 1 - \vartheta_{10}(\tau)^4 / \vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{01}(\tau)^4 / \vartheta_{00}(\tau)^4$  より

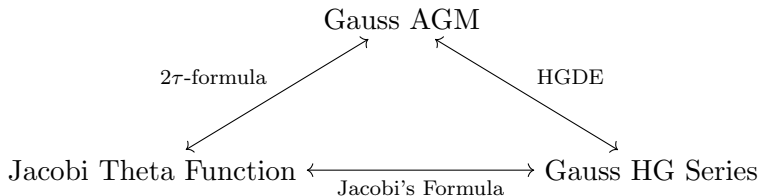
$$b_0/a_0 = \vartheta_{01}(\tau)^2 / \vartheta_{00}(\tau)^2.$$

$$\frac{a_0}{M_G(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

の証明を行う.

証明：  $2\tau$ -formula と Jacobi's formula を用いることで示される：

$$\begin{aligned}
 M_G(a_0, b_0) &= a_0 M_G(1, b_0/a_0) = a_0 M_G(1, \vartheta_{01}(\tau)^2/\vartheta_{00}(\tau)^2) \\
 &= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_G(\vartheta_{00}(\tau)^2, \vartheta_{01}(\tau)^2) \\
 &= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_G\left(\frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau)\right) \\
 &= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_G(\vartheta_{00}(2\tau)^2, \vartheta_{01}(2\tau)^2) \\
 &= \cdots = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} M_G(\vartheta_{00}(2^n \tau)^2, \vartheta_{01}(2^n \tau)^2) \\
 &= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_G(1, 1) = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} = a_0 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)^{-1} \quad \square
 \end{aligned}$$



## 2τ-formula

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H},$$

## Jacobi's formula

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

$0 < d_0 \leq c_0 \leq b_0 \leq a_0$  とするとき, 漸化式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, & b_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{c_n d_n}}{2}, \\ c_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n c_n} + \sqrt{b_n d_n}}{2}, & d_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n d_n} + \sqrt{b_n c_n}}{2}, \end{aligned}$$

によって定まる数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$  は共通の極限  $M_B(a_0, b_0, c_0, d_0)$  (Borchardt AGM と呼ぶ) に収束する.

- この平均は Gauss AGM と同様に同次性とシフト不変性を満たす.
- $M_B(a_0, a_0, b_0, b_0) = M_G(a_0, b_0)$ .

Borchardt はある種数 2 の超楕円曲線の周期  $\tau \in \mathfrak{S}_2$  に対して定まる Riemann テータ定数を考えた.

Borchardt の場合においても変換  $\tau \mapsto 2\tau$  により平均を生み出す公式が与えられている:

$$\begin{aligned}\vartheta_{00,00}(2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)^2 + \vartheta_{00,10}(\tau)^2 + \vartheta_{00,01}(\tau)^2 + \vartheta_{00,11}(\tau)^2}{4}, \\ \vartheta_{00,10}(2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,10}(\tau) + \vartheta_{00,01}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2}, \\ \vartheta_{00,01}(2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2}, \\ \vartheta_{00,11}(2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau)}{2}.\end{aligned}$$



## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

$0 < b_0 \leq a_0$  とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}, \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} b_n},$$

によって定まる数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は共通の極限  $M_{\text{Bor}}(a_0, b_0)$  (Borwein AGM と呼ぶ) に収束する.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

は変換  $\tau \mapsto 2\tau$  によって

$$\alpha(2\tau) = \frac{\alpha(\tau) + 3\beta(\tau)}{4}, \quad \beta(2\tau) = \sqrt{\frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{2}} \beta(\tau),$$

を満たす.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

命題 7 (J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991, Theorem 2.6)

①  $0 < h < 1$  に対し,

$$\frac{1}{M_{\text{Bor}}(1, h)} = F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1 - h^2\right)^2$$

②  $h = \beta(\tau)/\alpha(\tau)$  ( $\tau \in \mathbb{H}$ ) とおくとき,

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1 - h^2\right)^2 = \alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4$$

## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

$0 < d_0 \leq c_0 \leq b_0 \leq a_0$  に対し拡張された 4 種類の 4 項平均

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, & b_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + d_n}{2} \frac{b_n + c_n}{2}}, \\ c_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + c_n}{2} \frac{b_n + d_n}{2}}, & d_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} \frac{c_n + d_n}{2}}, \end{aligned}$$

によって定まる数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$  は共通の極限  $M_{\text{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$  (Matsumoto AGM と呼ぶ) に収束する.

- $M_{\text{Mat}}(a_0, b_0, b_0, b_0) = M_{\text{Bor}}(a_0, b_0).$

命題 8 (T. Kato and K. Matsumoto 2009, Theorem 1.)

$$\frac{1}{M_{\text{Mat}}(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)^2,$$

この命題は Lauricella  $F_D$  の超幾何微分方程式を用いて証明された.  
本講演では, 次の公式の類似公式を与えることにより Matsumoto AGM の Lauricella  $F_D$  による表示の別証明を与える.

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x \right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

$$\frac{1}{M_G(1, b_0/a_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right),$$

$$\tau(\lambda) = i \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)}, \quad \lambda = 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}.$$

- $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)$  の分子分母を周期積分に持つような代数曲線族は

$$w^2 = z(z - \lambda)(z - 1) \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$$

である.



$$\frac{1}{M_{\text{Mat}}(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)^2$$

- $F_D \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)$  を周期として持つような代数曲線族を考える必要がある.
- Deligne–Mostow の理論から

$$C(x): w^4 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_j \neq z_k, z_1, z_2, z_3 \neq 0, 1\},$$

を考えると,  $dz/w$  の  $[1, \infty]$  における積分に  $F_D \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; x_1, x_2, x_3 \right)$  が現れる.

# 主定理

- ① Borwein AGM における, 保型関数  $\alpha(\tau), \beta(\tau)$  ・ 平均を生み出す変換  $\tau \mapsto 2\tau$  の拡張
- ② テータ定数と Lauricella  $F_D$  の関係を記述した Jacobi の公式の類似

## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

$C(x): w^4 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1) \quad (x = (x_1, x_2, x_3))$   
ただし,  $x \in X_6 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_j \neq z_k, z_1, z_2, z_3 \neq 0, 1\}$ .

- $\rho(z, w) = (z, iw)$ :  $\text{pr}(z, w) = z$  の被覆変換
- 1 次ホモロジー群・正則 1-形式の空間に対して  $\rho^2$  の  $(-1)$ -固有空間を考える
- $C(x)$  の Jacobi 多様体を考える代わりに, 上記の空間により定まる Prym 多様体  $\text{Prym}(C(x), \rho^2)$  を考える
- $\dim \text{Prym}(C(x), \rho^2) = 4$

## 定義 9

$C(x)$ :  $w^4 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1)$  の周期を

$$v = 2 \left( \int_1^\infty \frac{dz}{w}, (1+i) \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{w}, -(1+i) \int_{x_1}^{x_2} \frac{dz}{w} - \int_{x_2}^{x_3} \frac{dz}{w}, i \int_{x_2}^{x_3} \frac{dz}{w} \right)$$

で定める.

## 命題 10 (M., N.)

$$[v] \in \mathbb{B}_3^U = \{\xi \in \mathbb{P}^3 \mid \xi^* U \xi < 0\},$$

$$U = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

- $(x_1, x_2, x_3) \in X_6$  の周期への対応  $X_6 \rightarrow \mathbb{B}_3^U$  は局所的に一価正則である.  $\Gamma$  をモノドロミー群とする.
- $p: X_6 \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{B}_3^U$  を周期写像と呼ぶ.

### 命題 11 (M., N.)

$$\iota(v) = iU \left( I_4 - \frac{2}{t_v U v} v^t v U \right) \quad (v \in \mathbb{B}_3^U)$$

- この写像  $\iota: \mathbb{B}_3^U \rightarrow \mathfrak{S}_4$  は埋め込みとなる.
- $\vartheta_{a,b}(v) = \vartheta_{a,b}(\iota(v))$  ( $v \in \mathbb{B}_3^U$ ): テータ定数の埋め込みによる引き戻し

Gauss AGM においては楕円曲線の周期  $\tau(\lambda)$  によって  $\lambda$  が復元できていたのであった:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$



Gauss AGM においては楕円曲線の周期  $\tau(\lambda)$  によって  $\lambda$  が復元できていたのであった:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$

## 定理 12 (M., N.)

$[v] = p(x_1, x_2, x_3)$  とする.

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2},$$

$$x_2 = \frac{4\vartheta_{0010,0001}(v)^2\vartheta_{1010,0101}(v)^2}{(\vartheta_{0010,0001}(v)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v)^2)^2},$$

$$x_3 = \frac{4\vartheta_{0011,0000}(v)^2\vartheta_{1011,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0011,0000}(v)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v)^2)^2}.$$

## 1 背景

- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

## 2 本編

- 代数曲線  $C(x)$  と周期
- 主定理

## 命題 13 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z}), \quad P = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1), \quad Q = \mathrm{diag}(1, 0, 0, 0),$$

とする.

このとき,  $\tau \in \mathfrak{S}_4$  に対し  $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$ .

特に  $\tau = \tau(v)$  ( $v \in \mathbb{B}_3^U$ ) であるとき,  ${}^t v U v = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$ .

## 命題 13 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z}), \quad P = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1), \quad Q = \mathrm{diag}(1, 0, 0, 0),$$

とする.

このとき,  $\tau \in \mathfrak{S}_4$  に対し  $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$ .

特に  $\tau = \tau(v)$  ( $v \in \mathbb{B}_3^U$ ) であるとき,  ${}^t v U v = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$ .

$(x_1, x_2, x_3) \in X_6$  に対して

$$v_2 = (1+i) \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{w} = -2\pi F_D \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-x_1, 1-x_2, 1-x_3 \right)$$

## 定理 14 (M., N.)

$[v] = p(1 - x_1, 1 - x_2, 1 - x_3)$  とする. このとき,

$$a(v) = \vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2,$$

$$b_1(v) = 4\vartheta_{0011,0000}(\tau(v)^\sharp)\vartheta_{0011,1100}(\tau(v)^\sharp)$$

$$b_2(v) = 4\vartheta_{0010,0001}(\tau(v)^\sharp)\vartheta_{0010,1101}(\tau(v)^\sharp),$$

$$b_3(v) = 2\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)\vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp).$$

と, 変換  $R = \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & i \\ & & -i & -1 \end{pmatrix}$  が Matsumoto AGM を与える保型

関数と変換である.

- $\tau(v)^\sharp = M_0 \cdot \tau(v)$
- $b_j(v)^2/a(v)^2 = 1 - x_j$

Matsumoto AGM を与える保型関数と変換であるとは即ち

$$\begin{aligned}a(Rv) &= \frac{a(v) + b_1(v) + b_2(v) + b_3(v)}{4} \\b_1(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v) + b_3(v))(b_1(v) + b_2(v))}}{2} \\b_2(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v) + b_2(v))(b_1(v) + b_3(v))}}{2} \\b_3(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v) + b_1(v))(b_2(v) + b_3(v))}}{2}\end{aligned}$$

を満たすことである.

## 定理 15 (M., N. 主定理 1)

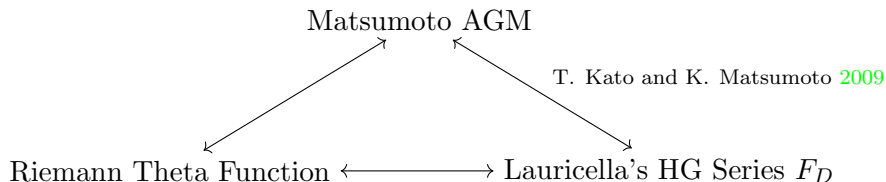
$a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq d_0 > 0$  とする.

$$\frac{a_0}{M_{\text{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)} = \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} \left( \vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^{\sharp})^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^{\sharp})^2 \right).$$

- $y_1 = b_0/a_0, y_2 = c_0/a_0, y_3 = d_0/a_0,$
- $[v] = p(y_1^2, y_2^2, y_3^2),$
- $\tau(v)^{\sharp} = M_0 \cdot \tau(v).$




## 定理 16 (M., N., 主定理 2, Jacobi's Formula の類似)

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} \left( \vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^{\sharp})^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^{\sharp})^2 \right) \\ &= F_D \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2 \right)^2. \end{aligned}$$



今回の結果は, Matsumoto AGM が, 代数曲線の周期とテータ定数の保型性を通じて Lauricella  $F_D$  と結びつくことを具体的に示したものである.



-  C. W. Borchardt (1876). “Berl. Monatsber”. In: *Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen* 53, pp. 611–621.
-  J. M. Borwein and P. B. Borwein (1991). “A Cubic Counterpart of Jacobi’s Identity and the AGM”. In: *Transactions of the American Mathematical Society*.
-  T. Kato and K. Matsumoto (2009). “The Common Limit of a Quadruple Sequence and the Hypergeometric Function  $F_D$  of Three Variables”. In: *Nagoya Math. J.* 195, pp. 113–124.