4項平均反復極限に潜む代数幾何学

中野 竜之介

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程 2 年

This work was supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2119.
本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究
プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものです.

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - C. W. Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - T. Kato and K. Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$ と周期
   - 主定理

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - C. W. Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - T. Kato and K. Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$ と周期
   - 主定理

定義 1

$$\vartheta_{a,b}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(\pi i(n+\tfrac{1}{2}a)\tau\,{}^t(n+\tfrac{1}{2}a) + 2\pi i(z+\tfrac{1}{2}b)\,{}^t(n+\tfrac{1}{2}a)\right)$$

- $\tau = (\tau_{jk})_{jk} \in \mathfrak{S}_g$：$g\times g$ の対称複素行列で, 虚部が正定値なもの
- $z = (z_1,\ldots,z_g) \in \mathbb{C}^g$: 複素変数
- $a, b \in \mathbb{Z}^g$
- $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$：指標

特別な場合：

- $g = 1$：Jacobi テータ関数 ($\mathfrak{S}_1 = \mathbb{H}$：上半平面)
- $g \geq 2$：Riemann テータ関数 ($\mathfrak{S}_g$: Siegel 上半空間)
- $z = 0$：テータ定数, $\vartheta_{a,b}(\tau)$

記号の定義 II

定義 2 (Gauss hypergeometric series)

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}z^n,$$

- $(\alpha,n)=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$
- $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C},\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$

Fact

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}(1-zt)^{-\beta}\frac{dt}{t(1-t)}$$

ただし $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0.$

記号の定義 III

定義 4 (Lauricella's hypergeometric series F_D)

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n_1,\dots,n_m\geq 0}^{\infty}\frac{(\alpha,\sum_{j=1}^m n_j)\prod_{j=1}^m(\beta_j,n_j)}{(\gamma,\sum_{j=1}^m n_j)\prod_{j=1}^m(1,n_j)}\prod_{j=1}^m z_j^{n_j},$$

- $z=(z_1,\dots,z_m),\beta=(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathbb{C}^m$
- $|z_j|<1\ (j=1,\dots,m)$
- $\alpha,\gamma\in\mathbb{C},\ \gamma\neq 0,-1,-2,\dots$

Fact

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}\prod_{j=1}^m(1-z_jt)^{-\beta_j}\frac{dt}{t(1-t)}.$$

ただし $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - C. W. Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - T. Kato and K. Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$ と周期
   - 主定理

Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM I

定理 (Gauss の算術幾何平均)

- 初期値 $0 < b_0 \leq a_0$ をとる
- 以下の漸化式で定まる数列を考える：

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

- これらは共通の極限 $M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)$ に収束する.

定理 (Gauss 1799–1818, Jacobi)

- Legendre 標準形により定まる楕円曲線族
  $w^2 = z(z-\lambda)(z-1)$ $(\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\})$ の周期:

$$\tau(\lambda) = i\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-\lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)} \in \mathbb{H}$$

- このとき, $\lambda = 1 - \dfrac{b_0^2}{a_0^2}$ $(a_0 \neq b_0)$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0,b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)$$

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

この等式を示すために，以下の性質が重要である：

$$M_{\mathrm{G}}\left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = M_{\mathrm{G}}(a_n, b_n) \text{ (シフト不変性)}$$

$$a M_{\mathrm{G}}(1, b/a) = M_{\mathrm{G}}(a, b) \text{ (同次性)}$$

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}$$

$$\vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\,\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H} \text{ (}2\tau\text{-formula)}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ (Jacobi's formula)}$$

補題 6

$$\vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{10}(\tau)^4 + \vartheta_{01}(\tau)^4 \text{ for } \forall\tau \in \mathbb{H} \text{ (Jacobi's identity)}$$

$$\lambda = \vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4/\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4 \quad (\lambda = 1 - b_0^2/a_0^2),$$

$b_0^2/a_0^2 = 1 - \vartheta_{10}(\tau)^4/\vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{01}(\tau)^4/\vartheta_{00}(\tau)^4$ より

$$b_0/a_0 = \vartheta_{01}(\tau)^2/\vartheta_{00}(\tau)^2.$$

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

の証明を行う.

証明： 2τ-formula と Jacobi's formula を用いることで示される:

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0) &= a_0 M_{\mathrm{G}}(1, b_0/a_0) = a_0 M_{\mathrm{G}}(1, \vartheta_{01}(\tau)^2/\vartheta_{00}(\tau)^2) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}(\vartheta_{00}(\tau)^2, \vartheta_{01}(\tau)^2) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}\left(\frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau)\right) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}\left(\vartheta_{00}(2\tau)^2, \vartheta_{01}(2\tau)^2\right) \\
&= \cdots = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} \lim_{n\to\infty} M_{\mathrm{G}}\left(\vartheta_{00}(2^n\tau)^2, \vartheta_{01}(2^n\tau)^2\right) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}(1, 1) = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} = a_0 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)^{-1} \qquad \square
\end{aligned}$$

Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM VI

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Gauss AGM} \arrow[dl, leftrightarrow, "2\tau\text{-formula}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{HGDE}"] & \\
\text{Jacobi Theta Function} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Jacobi's Formula}"'] & & \text{Gauss HG Series}
\end{tikzcd}$$

2τ-formula

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H},$$

Jacobi's formula

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - C. W. Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - T. Kato and K. Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$ と周期
   - 主定理

C. W. Borchardt 1876 I

$0 < d_0 \le c_0 \le b_0 \le a_0$ とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{c_n d_n}}{2},$$
$$c_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n c_n} + \sqrt{b_n d_n}}{2}, \qquad d_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n d_n} + \sqrt{b_n c_n}}{2},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{B}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ (Borchardt AGM と呼ぶ) に収束する.

- この平均は Gauss AGM と同様に同次性とシフト不変性を満たす.
- $M_{\mathrm{B}}(a_0, a_0, b_0, b_0) = M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)$.

C. W. Borchardt 1876 II

Borchardt はある種数 2 の超楕円曲線の周期 $\tau \in \mathfrak{S}_2$ に対して定まる Riemann テータ定数を考えた.
Borchardt の場合においても変換 $\tau \mapsto 2\tau$ により平均を生み出す公式が与えられている:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{00,00}(2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)^2 + \vartheta_{00,10}(\tau)^2 + \vartheta_{00,01}(\tau)^2 + \vartheta_{00,11}(\tau)^2}{4}, \\
\vartheta_{00,10}(2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,10}(\tau) + \vartheta_{00,01}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2}, \\
\vartheta_{00,01}(2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2}, \\
\vartheta_{00,11}(2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau)}{2}.
\end{aligned}
$$

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - C. W. Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - T. Kato and K. Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$ と周期
   - 主定理

J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991 I

$0 < b_0 \leq a_0$ とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_3}{4}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} b_n},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)$ (Borwein AGM と呼ぶ) に収束する.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

は変換 $\tau \mapsto 2\tau$ によって

$$\alpha(2\tau) = \frac{\alpha(\tau) + 3\beta(\tau)}{4}, \quad \beta(2\tau) = \sqrt{\frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{2} \beta(\tau)},$$

を満たす.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

命題 7 (J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991, Theorem 2.6)

1. $0 < h < 1$ に対し，

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Bor}}(1,h)} = F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1-h^2\right)^2$$

2. $h = \beta(\tau)/\alpha(\tau)$ $(\tau \in \mathbb{H})$ とおくとき，

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1-h^2\right)^2 = \alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4$$

1 背景
- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

2 本編
- 代数曲線 $C(x)$ と周期
- 主定理

$0 < d_0 \leq c_0 \leq b_0 \leq a_0$ に対し拡張された 4 種類の 4 項平均

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + d_n}{2} \frac{b_n + c_n}{2}},$$
$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + c_n}{2} \frac{b_n + d_n}{2}}, \qquad d_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} \frac{c_n + d_n}{2}},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ (Matsumoto AGM と呼ぶ) に収束する.

- $M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, b_0, b_0) = M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)$.

命題 8 (T. Kato and K. Matsumoto 2009, Theorem 1.)

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Mat}}(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2\right)^2,$$

この命題は Lauricella F_D の超幾何微分方程式を用いて証明された.
本講演では, 次の公式の類似公式を与えることにより Matsumoto AGM の Lauricella F_D による表示の別証明を与える.

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall\tau \in \mathbb{H}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - C. W. Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - T. Kato and K. Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$ と周期
   - 主定理

$$\frac{1}{M_{\mathrm{G}}(1, b_0/a_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right),$$

$$\tau(\lambda) = i\frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-\lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)}, \quad \lambda = 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}.$$

- $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)$ の分子分母を周期積分に持つような代数曲線族は

$$w^2 = z(z-\lambda)(z-1) \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$$

である.

観察 II

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Mat}}(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-y_1^2, 1-y_2^2, 1-y_3^2\right)^2$$

- $F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-y_1^2, 1-y_2^2, 1-y_3^2\right)$ を周期として持つような代数曲線族を考える必要がある.
- Deligne–Mostow の理論から

$$C(x) \colon w^4 = z(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-1),$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_j \neq z_k,\ z_1, z_2, z_3 \neq 0, 1\},$$

を考えると, dz/w の $[1, \infty]$ における積分に $F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; x_1, x_2, x_3\right)$ が現れる.

主定理

1. Borwein AGM における, 保型関数 $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ ・平均を生み出す変換 $\tau \mapsto 2\tau$ の拡張
2. テータ定数と Lauricella F_D の関係を記述した Jacobi の公式の類似

1 背景
- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- C. W. Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- T. Kato and K. Matsumoto 2009
- 観察

2 本編
- 代数曲線 $C(x)$ と周期
- 主定理

代数曲線 $C(x)$ と周期

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - C. W. Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - T. Kato and K. Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$ と周期
   - 主定理

代数曲線 $C(x)$ と周期 I

$$C(x)\colon w^4 = z(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-1) \quad (x=(x_1,x_2,x_3))$$
ただし, $x \in X_6 = \{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid z_j \neq z_k,\ z_1,z_2,z_3 \neq 0,1\}$.

- $\rho(z,w)=(z,iw)$: $\mathrm{pr}(z,w)=z$ の被覆変換
- 1 次ホモロジー群・正則 1-形式の空間に対して ρ^2 の (-1)-固有空間を考える
- $C(x)$ の Jacobi 多様体を考える代わりに, 上記の空間により定まる Prym 多様体 $\mathrm{Prym}(C(x),\rho^2)$ を考える
- $\dim \mathrm{Prym}(C(x),\rho^2)=4$

代数曲線 $C(x)$ と周期 II

定義 9

$C(x)\colon w^4 = z(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-1)$ の周期を

$$v = 2\,{}^t\!\left(\int_1^\infty \frac{dz}{w}, (1+i)\int_{-\infty}^0 \frac{dz}{w}, -(1+i)\int_{x_1}^{x_2} \frac{dz}{w} - \int_{x_2}^{x_3} \frac{dz}{w}, i\int_{x_2}^{x_3} \frac{dz}{w}\right)$$

で定める.

命題 10 (M., N.)

$$[v] \in \mathbb{B}_3^U = \{\xi \in \mathbb{P}^3 \mid \xi^* U \xi < 0\},$$

$$U = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

代数曲線 $C(x)$ と周期 III

- $(x_1, x_2, x_3) \in X_6$ の周期への対応 $X_6 \to \mathbb{B}_3^U$ は局所的に一価正則である. Γ をモノドロミー群とする.
- $p\colon X_6 \to \Gamma\backslash\mathbb{B}_3^U$ を周期写像と呼ぶ.

命題 11 (M., N.)

$$\imath(v) = iU\left(I_4 - \frac{2}{{}^t v U v}\, v\, {}^t v U\right) \quad (v \in \mathbb{B}_3^U)$$

- この写像 $\imath\colon \mathbb{B}_3^U \to \mathfrak{S}_4$ は埋め込みとなる.

- $\vartheta_{a,b}(v) = \vartheta_{a,b}(\imath(v))$ $(v \in \mathbb{B}_3^U)$: テータ定数の埋め込みによる引き戻し

代数曲線 $C(x)$ と周期 IV

Gauss AGM においては楕円曲線の周期 $\tau(\lambda)$ によって λ が復元できていたのであった:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$

代数曲線 $C(x)$ と周期 IV

Gauss AGM においては楕円曲線の周期 $\tau(\lambda)$ によって λ が復元できていたのであった:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$

定理 12 (M., N.)

$[v] = p(x_1, x_2, x_3)$ とする.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2+\vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2},\\
x_2 &= \frac{4\vartheta_{0010,0001}(v)^2\vartheta_{1010,0101}(v)^2}{(\vartheta_{0010.0001}(v)^2+\vartheta_{1010,0101}(v)^2)^2},\\
x_3 &= \frac{4\vartheta_{0011,0000}(v)^2\vartheta_{1011,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0011,0000}(v)^2+\vartheta_{1011,0100}(v)^2)^2}.
\end{aligned}$$

1. 背景
    - 記号の定義
    - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
    - C. W. Borchardt 1876
    - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
    - T. Kato and K. Matsumoto 2009
    - 観察
2. 本編
    - 代数曲線 $C(x)$ と周期
    - 主定理

命題 13 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8,\mathbb{Z}),\ P = \mathrm{diag}(0,1,1,1),\ Q = \mathrm{diag}(1,0,0,0),$$

とする.
このとき, $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$.
特に $\tau = \tau(v)$ ($v \in \mathbb{B}_3^U$) であるとき, ${}^t v U v = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$.

命題 13 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z}),\ P = \mathrm{diag}(0,1,1,1),\ Q = \mathrm{diag}(1,0,0,0),$$

とする.
このとき, $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$.
特に $\tau = \tau(v)$ $(v \in \mathbb{B}_3^U)$ であるとき, ${}^t vUv = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$.

$(x_1, x_2, x_3) \in X_6$ に対して

$$v_2 = (1+i)\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{w} = -2\pi F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-x_1, 1-x_2, 1-x_3\right)$$

定理 14 (M., N.)

$[v] = p(1-x_1, 1-x_2, 1-x_3)$ とする．このとき，

$$a(v) = \vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2,$$

$$b_1(v) = 4\vartheta_{0011,0000}(\tau(v)^\sharp)\vartheta_{0011,1100}(\tau(v)^\sharp)$$

$$b_2(v) = 4\vartheta_{0010,0001}(\tau(v)^\sharp)\vartheta_{0010,1101}(\tau(v)^\sharp),$$

$$b_3(v) = 2\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)\vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp).$$

と，変換 $R = \frac{1}{1-i}\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & i \\ & & -i & -1 \end{pmatrix}$ が Matsumoto AGM を与える保型関数と変換である．

- $\tau(v)^\sharp = M_0 \cdot \tau(v)$
- $b_j(v)^2/a(v)^2 = 1 - x_j$

Matsumoto AGM を与える保型関数と変換であるとは即ち

$$
\begin{aligned}
a(Rv) &= \frac{a(v)+b_1(v)+b_2(v)+b_3(v)}{4} \\
b_1(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v)+b_3(v))(b_1(v)+b_2(v))}}{2} \\
b_2(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v)+b_2(v))(b_1(v)+b_3(v))}}{2} \\
b_3(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v)+b_1(v))(b_2(v)+b_3(v))}}{2}
\end{aligned}
$$

を満たすことである.

定理 15 (M., N. 主定理 1)

$a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq d_0 > 0$ とする.

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)} = \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi}\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2\right).$$

- $y_1 = b_0/a_0$, $y_2 = c_0/a_0$, $y_3 = d_0/a_0$,
- $[v] = p(y_1^2, y_2^2, y_3^2)$,
- $\tau(v)^\sharp = M_0 \cdot \tau(v)$.

定理 16 (M., N., 主定理 2, Jacobi's Formula の類似)

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi}\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2\right)\\ =&F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-y_1^2, 1-y_2^2, 1-y_3^2\right)^2.\end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
& \text{Matsumoto AGM} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{T. Kato and K. Matsumoto 2009}"] & \\
\text{Riemann Theta Function} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{Lauricella's HG Series } F_D
\end{tikzcd}
$$

今回の結果は, Matsumoto AGM が, 代数曲線の周期とテータ定数の保型性を通じて Lauricella F_D と結びつくことを具体的に示したものである.

参考文献

- C. W. Borchardt (1876). "Berl. Monatsber". In: *Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen* 53, pp. 611–621.
- J. M. Borwein and P. B. Borwein (1991). "A Cubic Counterpart of Jacobi's Identity and the AGM". In: *Transactions of the American Mathematical Society*.
- T. Kato and K. Matsumoto (2009). "The Common Limit of a Quadruple Sequence and the Hypergeometric Function F_D of Three Variables". In: *Nagoya Math. J.* 195, pp. 113–124.