4 種 4 項平均の反復極限定理の代数幾何学的考察

中野 竜之介

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程 2 年

上の QR コードから該当の講演スライドが閲覧できます.

This work was supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2119.

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

記号の定義 I

定義 1

$$\vartheta_{a,b}(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\exp\left(\pi i(n+\tfrac{1}{2}a)\tau\,{}^t(n+\tfrac{1}{2}a)+2\pi i(z+\tfrac{1}{2}b)\,{}^t(n+\tfrac{1}{2}a)\right)$$

- $\tau=(\tau_{jk})_{jk}\in\mathfrak{S}_g$：$g\times g$ の対称複素行列で, 虚部が正定値なもの
- $z=(z_1,\dots,z_g)\in\mathbb{C}^g$: 複素変数
- $a,b\in\mathbb{Z}^g$
- $\frac{a}{2},\frac{b}{2}$：指標

特別な場合：

- $g=1$：Jacobi テータ関数 ($\mathfrak{S}_1=\mathbb{H}$：上半平面)
- $g\geq 2$：Riemann テータ関数 ($\mathfrak{S}_g$: Siegel 上半空間)
- $z=0$：テータ定数, $\vartheta_{a,b}(\tau)$

記号の定義 II

定義 2 (Gauss hypergeometric series)

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}z^n,$$

- $(\alpha,n)=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$
- $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C},\gamma\neq 0,-1,-2,\dots$

Fact

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}(1-zt)^{-\beta}\frac{dt}{t(1-t)}$$

ただし $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

記号の定義 III

定義 4 (Lauricella's hypergeometric series F_D)

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n_1,\ldots,n_m\geq 0}^{\infty}\frac{(\alpha,\sum_{j=1}^m n_j)\prod_{j=1}^m(\beta_j,n_j)}{(\gamma,\sum_{j=1}^m n_j)\prod_{j=1}^m(1,n_j)}\prod_{j=1}^m z_j^{n_j},$$

- $z=(z_1,\ldots,z_m),\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in\mathbb{C}^m$
- $|z_j|<1\ (j=1,\ldots,m)$
- $\alpha,\gamma\in\mathbb{C},\ \gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$

Fact

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}\prod_{j=1}^m(1-z_jt)^{-\beta_j}\frac{dt}{t(1-t)}.$$

ただし $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

定理 (Gauss の算術幾何平均)

- 初期値 $0 < b_0 \leq a_0$ をとる
- 以下の漸化式で定まる数列を考える：

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

- これらは共通の極限 $M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)$ に収束する.

定理 (Gauss 1799–1818, Jacobi)

- Legendre 標準形により定まる楕円曲線族 $w^2 = z(z-\lambda)(z-1)$ の周期:

$$\tau(\lambda) = i\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-\lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)} \in \mathbb{H}$$

- このとき, $\lambda = 1 - \dfrac{b_0^2}{a_0^2}$ $(a_0 \neq b_0)$ に対して, 以下が成り立つ：

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)$$

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

この等式を示すために, 以下の性質が重要である：

$$M_{\mathrm{G}}\left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = M_{\mathrm{G}}(a_n, b_n) \text{ (シフト不変性)}$$

$$a M_{\mathrm{G}}(1, b/a) = M_{\mathrm{G}}(a, b) \text{ (同次性)}$$

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}$$

$$\vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\,\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H} \text{ (}2\tau\text{-formula)}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ (Jacobi's formula)}$$

補題 6

$$\text{Jacobi's identity}: \vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{10}(\tau)^4 + \vartheta_{01}(\tau)^4 \text{ for } \forall\tau \in \mathbb{H}$$

$$\lambda \text{ の復元}: \lambda = \vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4 / \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4 \quad (\lambda = 1 - b_0^2/a_0^2 \neq 0, 1),$$

$b_0^2/a_0^2 = 1 - \vartheta_{10}(\tau)^4/\vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{01}(\tau)^4/\vartheta_{00}(\tau)^4$ より

$$b_0/a_0 = \vartheta_{01}(\tau)^2/\vartheta_{00}(\tau)^2.$$

定理

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

証明： 2τ-formula と Jacobi's formula を用いることで示される:

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0) &= a_0 M_{\mathrm{G}}(1, b_0/a_0) = a_0 M_{\mathrm{G}}(1, \vartheta_{01}(\tau)^2/\vartheta_{00}(\tau)^2) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}(\vartheta_{00}(\tau)^2, \vartheta_{01}(\tau)^2) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}\left(\frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau)\right) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}\left(\vartheta_{00}(2\tau)^2, \vartheta_{01}(2\tau)^2\right) \\
&= \cdots = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} \lim_{n\to\infty} M_{\mathrm{G}}\left(\vartheta_{00}(2^n\tau)^2, \vartheta_{01}(2^n\tau)^2\right) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}(1,1) = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} = a_0 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)^{-1} \qquad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & \text{Gauss AGM} \arrow[dl, leftrightarrow, "2\tau\text{-formula}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{HGDE}"] & \\ \text{Jacobi Theta Function} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Jacobi's Formula}"'] & & \text{Gauss HG Series} \end{tikzcd}$$

2τ-formula

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall\tau \in \mathbb{H},$$

Jacobi's formula

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

1 背景
- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編
- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- Thomae 型公式
- 主定理

3 おまけ
- Borwein AGM への退化

$0 < d_0 \leq c_0 \leq b_0 \leq a_0$ とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{c_n d_n}}{2},$$
$$c_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n c_n} + \sqrt{b_n d_n}}{2}, \qquad d_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n d_n} + \sqrt{b_n c_n}}{2},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{B}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ (Borchardt AGM と呼ぶ) に収束する.

- この平均は Gauss AGM と同様に同次性とシフト不変性を満たす.
- $M_{\mathrm{B}}(a_0, a_0, b_0, b_0) = M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)$.

Borchardt はある種数 2 の超楕円曲線の周期 $\tau \in \mathfrak{S}_2$ に対して定まる Riemann テータ定数を考えた.
Borchardt の場合においても変換 $\tau \mapsto 2\tau$ により平均を生み出す公式が与えられている:

$$\vartheta_{00,00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)^2 + \vartheta_{00,10}(\tau)^2 + \vartheta_{00,01}(\tau)^2 + \vartheta_{00,11}(\tau)^2}{4},$$
$$\vartheta_{00,10}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,10}(\tau) + \vartheta_{00,01}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2},$$
$$\vartheta_{00,01}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2},$$
$$\vartheta_{00,11}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau)}{2}.$$

- Borchardt 自身は (テータ定数と超幾何級数の等式の意味で)Jacobi の公式の類似や, Borchardt AGM の初期値と代数曲線族の周期がどう対応するかは示していない
- Matsumoto and Terasoma 2012 で, K3 曲面の Thomae 型公式を示すことにより Borchardt AGM の 4 変数超幾何級数による表示が与えられている
- Kummer locus に制限することにより 4 変数の超幾何級数が 3 変数の超幾何級数になり古典的な Thomae の公式が得られる

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

$0 < b_0 \le a_0$ とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_3}{4}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} b_n},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)$ (Borwein AGM と呼ぶ) に収束する.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

は変換 $\tau \mapsto 2\tau$ によって

$$\alpha(2\tau) = \frac{\alpha(\tau) + 3\beta(\tau)}{4}, \quad \beta(2\tau) = \sqrt{\frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{2} \beta(\tau)},$$

を満たす.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

命題 7 (J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991, Theorem 2.6)

1. $0 < h < 1$ に対し,

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Bor}}(1,h)} = F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1-h^2\right)^2$$

2. $h = \beta(\tau)/\alpha(\tau)$ $(\tau \in \mathbb{H})$ とおくとき,

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1-h^2\right)^2 = \alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4$$

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

$0 < d_0 \le c_0 \le b_0 \le a_0$ に対し拡張された 4 種類の 4 項平均

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + d_n}{2}\frac{b_n + c_n}{2}},$$
$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + c_n}{2}\frac{b_n + d_n}{2}}, \qquad d_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2}\frac{c_n + d_n}{2}},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ (Matsumoto AGM と呼ぶ) に収束する.

- $M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, b_0, b_0) = M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)$.

命題 8 (Kato and Matsumoto 2009, Theorem 1.)

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Mat}}(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-y_1^2, 1-y_2^2, 1-y_3^2\right)^2,$$

この命題は Lauricella F_D の超幾何微分方程式を用いて証明された.
本講演では, 次の公式の類似公式を与えることにより Matsumoto AGM の Lauricella F_D による表示の別証明を与える.

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

$$\frac{1}{M_{\mathrm{G}}(1, b_0/a_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right),$$

$$\tau(\lambda) = i\frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-\lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)}, \quad \lambda = 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}.$$

- $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)$ の分子分母を周期積分に持つような代数曲線族は

$$w^2 = z(z-\lambda)(z-1) \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$$

である.

観察 II

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Mat}}(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2\right)^2$$

- $F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2\right)$ を周期として持つような代数曲線族を考える必要がある.
- Deligne–Mostow の理論から

$$C(x)\colon w^4 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1),$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_j \neq z_k,\ z_1, z_2, z_3 \neq 0, 1\},$$

を考えると, dz/w の $[1, \infty]$ における積分に
$F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; x_1, x_2, x_3\right)$ が現れる.

主定理

1. テータ定数と分岐点の関係を記述した Thomae 型の公式
2. テータ定数と Lauricella F_D の関係を記述した Jacobi の公式の類似
3. Borwein AGM における, 保型関数 $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ ・平均を生み出す変換 $\tau \mapsto 2\tau$ の拡張

1 背景
- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編
- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- Thomae 型公式
- 主定理

3 おまけ
- Borwein AGM への退化

1. 周期写像の定義
2. 周期写像の逆写像のテータ定数による構成
3. Thomae 型公式と超幾何級数を生み出す変換
4. 4 種 4 項平均を生み出す保型関数と変換

1 背景
- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編
- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- Thomae 型公式
- 主定理

3 おまけ
- Borwein AGM への退化

定義 9

$$C(x)\colon w^4 = z(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-1)$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in X$$

ただし,

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_j \neq 0, 1 \ (j = 1, 2, 3),\ x_j \neq x_k \ (j \neq k)\}.$$

命題 10 (M., N.)

$\mathrm{pr}\colon C(x) \ni (z, w) \mapsto z \in C(x)$ とするとき, $(C(x), \mathrm{pr})$ は 6 点 $0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty$ を branch points とする $\mathbb{P}^1$ の巡回 4 重分岐被覆であり, 種数 6 の閉 Riemann 面である.

定義 11

$P_j = \mathrm{pr}^{-1}(j)$ $(j = 0, 1, x_1, x_2, x_3)$ とする.

- ρ: $\rho(z,w)=(z,iw)$ で定まる pr の被覆変換

とするとき, ρ^2 により $C(x)\colon w^4=z(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-1)$ は種数 2 の超楕円曲線 $w^2=z(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-1)$ の 2 重被覆であることから Prym 多様体 $\mathrm{Prym}(C(x),\rho^2)$ を考える.

定義 12

- $H_1(C(x),\mathbb{Z})^-$: $(\rho^2)^*$ の (-1)-固有空間
- $H^0_-(C(x),\Omega^1)$: $(\rho^2)^*$ の (-1)-固有空間

代数曲線 $C(x)$ III

$$\mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = H^0_-(C(x), \Omega^1)^\vee / H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$$

- $C(x)$ の Jacobi 多様体における ρ^2-作用の (-1)-固有空間
- $\dim \mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = 4$
- 偏極: $(1, 1, 2, 2)$

代数曲線 $C(x)$ III

$$\mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = H^0_-(C(x), \Omega^1)^\vee / H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$$

- $C(x)$ の Jacobi 多様体における ρ^2-作用の (-1)-固有空間
- $\dim \mathrm{Prym}(C(x), \rho^2) = 4$
- 偏極: $(1, 1, 2, 2)$

$\rightsquigarrow$ 主偏極でない場合整係数シンプレクティック群のテータ関数への作用公式は主偏極のとき程シンプルではない.

代数曲線 $C(x)$ III

$$\mathrm{Prym}(C(x),\rho^2) = H^0_-(C(x),\Omega^1)^\vee / H^-_1(C(x),\mathbb{Z})$$

- $C(x)$ の Jacobi 多様体における ρ^2-作用の (-1)-固有空間
- $\dim \mathrm{Prym}(C(x),\rho^2) = 4$
- 偏極: $(1,1,2,2)$

$\rightsquigarrow$ 主偏極でない場合整係数シンプレクティック群のテータ関数への作用公式は主偏極のとき程シンプルではない.
$\rightsquigarrow$ $H^-_1(C(x),\mathbb{Z})$ の部分格子 L で $A_L = H^0_-(C(x),\Omega^1)^\vee / L$ の偏極が $(2,2,2,2)$ であるものを考える.

命題 13 (M., N.)

$$\phi_1 = \frac{dz}{w}, \quad \phi_2 = \frac{dz}{w^3}, \quad \phi_3 = \frac{zdz}{w^3}, \quad \phi_4 = \frac{z^2dz}{w^3}, \quad \phi_5 = \frac{dz}{w^2}, \quad \phi_6 = \frac{zdz}{w^2}$$

は $H^0(C(x), \Omega^1)$ の基底を成す

命題 14 (M., N.)

$\phi_1, \ldots, \phi_4$ は $H^0_-(C(x), \Omega^1)$ の基底を成す

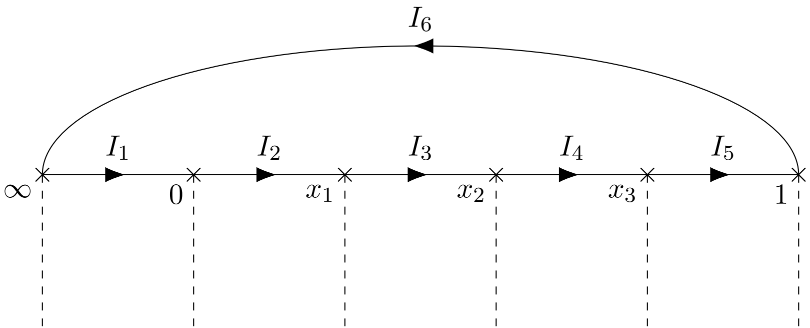

Figure: 経路 $I_1, \dots, I_6$

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$$

命題 15 (M., N.)

$\{\rho^k(1-\rho^2)I_j \mid j = 1,3,4,6,\ k = 0,1\}$ は $H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$ を張る

命題 16 (M., N.)

$c_j = (1-\rho^2)I_j$ と表すとき,

$$
\begin{aligned}
&A_1 = (1+\rho)c_1, && A_2 = \rho c_6, && A_3 = -(1+\rho)c_3 - \rho c_4, && A_4 = c_4,\\
&B_1 = c_6, && B_2 = (1-\rho)c_1, && B_3 = -(1-\rho)c_3 - c_4, && B_4 = -\rho c_4.
\end{aligned}
$$

- $L = \langle A_1, \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4 \rangle_{\mathbb{Z}} \subset H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$: 指数 4 の部分格子
- 交点行列: $2J_8 = 2\begin{pmatrix} O_4 & -I_4 \\ I_4 & O_4 \end{pmatrix}$
- ρ の作用: $\begin{pmatrix} \rho(A) \\ \rho(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_4 & -U \\ U & O_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$
- 偏極: $(2, 2, 2, 2)$

任意の $x \in X$ に対して各サイクルを解析接続を行い先ほど構成したシンプレクティック基底を定める (基点と解析接続のパス依存)

1 背景
- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編
- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- Thomae 型公式
- 主定理

3 おまけ
- Borwein AGM への退化

定義 17

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau_A \\ \tau_B \end{pmatrix}, \quad \tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k \right)_{j,k}, \quad \tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k \right)_{j,k}$$

とする.

命題 18 (M., N.)

$$\tau = \tau_A \tau_B^{-1} \in \mathfrak{S}_4$$

命題 19 (M., N.)

$$\tau = iU \left(I_4 - \frac{2}{{}^t v U v} v \, {}^t v U \right)$$

- v: τ_B の第 1 列

周期 II

定義 20

$$v = \left(\int_{B_j} \frac{dz}{w} \right)_{j=1,2,3,4}$$

命題 21 (M., N.)

v を射影化したとき, $[v]$ は Hermite 形式 U が定める複素超球の元である:

$$[v] \in \mathbb{B}_3 = \{\xi \in \mathbb{P}^3 \mid \xi^* U \xi < 0\}.$$

定義 22

- $(x_1, x_2, x_3) \in X$ の周期への対応 $X \to \mathbb{B}_3$ は局所的に一価正則である. Γ をモノドロミー群とする.
- $p\colon X \to \Gamma \backslash \mathbb{B}_3$ を周期写像と呼ぶ.

命題 23 (Yoshida 1997)

X は $\Gamma\backslash\mathbb{B}_3$ の稠密開集合と同型.

命題 24 (M., N.)

$$\imath(v) = iU\left(I_4 - \frac{2}{{}^t vUv}\, v\, {}^t vU\right) \qquad (v \in \mathbb{B}_3)$$

- この写像 $\imath\colon \mathbb{B}_3 \to \mathfrak{S}_4$ は埋め込みとなる.
- $[v] = p(x_1, x_2, x_3)$, $\tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k\right)_{j,k}$, $\tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k\right)_{j,k}$ とするとき, $\imath(v) = \tau_A \tau_B^{-1}$

定義 25

- $\vartheta_{a,b}(v) = \vartheta_{a,b}(\imath(v))$ $(v \in \mathbb{B}_3)$: テータ定数の埋め込みによる引き戻し

定義 26

$$\mathrm{U}(U, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C} \mid g^* U g = U)\}$$
$$\mathrm{Sp}(8, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SL}(8, \mathbb{R}) \mid M J_8 \, {}^t M = J_8\}$$

- $\mathrm{U}(U, \mathbb{C})$: 射影化すると $\mathbb{B}_3$ の自己同型群となる
- $\mathrm{Sp}(8, \mathbb{R})$: $\mathfrak{S}_4$ の自己同型群

命題 27 (M., N.)

埋め込み $\imath$ は準同型

$$\jmath\colon \mathrm{U}(U,\mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}(8,\mathbb{R})$$

で, 次の図式が可環になるものを誘導する:

$$\begin{tikzcd}
(g,v) \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] \arrow[dr, phantom, "\in" sloped] & & & (\jmath(g),\imath(v)) \arrow[dd, mapsto] \arrow[dl, phantom, "\ni" sloped] \\
& \mathrm{U}(U,\mathbb{C}) \times \mathbb{B}_3 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{B}_3 \arrow[d] & \\
& \mathrm{Sp}(8,\mathbb{R}) \times \mathfrak{S}_4 \arrow[r] & \mathfrak{S}_4 \arrow[r, phantom, "\ni"] & \jmath(g)\cdot\imath(v) \\
gv \arrow[rr, mapsto] \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] & & \imath(gv) \arrow[u, phantom, "\cup" sloped] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

周期 VI

Legendre 標準形により定まる楕円曲線族

$$C_{\mathrm{ell}}(\lambda)\colon w^2 = z(z-\lambda)(z-1)$$

の場合は ($C(x)$ 上の有理型関数としての) z を Abel–Jacobi 写像

$$C_{\mathrm{ell}}(\lambda) \ni (z,w) \mapsto \frac{1}{\text{B-周期}} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{w} \in E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}), \quad \tau = \tau(\lambda)$$

による引き戻すことにより λ のテータ定数による表示を得ていた:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau)^4}{\vartheta_{00}(\tau)^4}$$

Abel–Jacobi 写像

$$C_{\mathrm{ell}}(\lambda) \ni (z,w) \mapsto \frac{1}{\text{B-周期}} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{w} \in E_\tau$$

同様に, Abel–Jacobi–Prym 写像

$$C(x) \ni P \mapsto \int_{(1-\rho^2)\gamma} \left(\frac{dz}{w}, \frac{dz}{w^3}, \frac{z\,dz}{w^3}, \frac{z^2\,dz}{w^3} \right) \times \underbrace{\left(\left(\int_{B_j} \phi_k \right)_{j,k} \right)^{-1}}_{=\text{B-周期}} \in A_L$$

を考えることで,

- $C(x)$ 上の有理型関数の構成
- 分岐点と球面上のテータ定数の関係式の導出

を行った.

周期 VIII

周期写像 $p(x_1, x_2, x_3)$ を X 内で

$$(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_2, x_1, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_3, x_2, x_1)$$

と解析接続することで,

- v に生じる変換行列の計算
- テータ定数への作用の明示公式の構成 (i.e. 周期写像 p の逆写像)

を行った.

周期 IX

Gauss AGM においては楕円曲線の周期 $\tau(\lambda)$ によって λ が復元できていたのであった:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$

Gauss AGM においては楕円曲線の周期 $\tau(\lambda)$ によって λ が復元できていたのであった:

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$

定理 28 (M., N.)

$[v] = p(x_1, x_2, x_3)$ とする.

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2},$$

$$x_2 = \frac{4\vartheta_{0010,0001}(v)^2\vartheta_{1010,0101}(v)^2}{(\vartheta_{0010,0001}(v)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v)^2)^2},$$

$$x_3 = \frac{4\vartheta_{0011,0000}(v)^2\vartheta_{1011,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0011,0000}(v)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v)^2)^2}.$$

- x_1, x_2, x_3 の表示の分母は共通であってほしい

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

定理 29 (M., N., Thomae 型公式)

$v = {}^t\left(\int_{B_j}\frac{dz}{w}\right)_{j=1,2,3,4}$, $([v]=p(x_1,x_2,x_3))$ とする．このとき，

$$\vartheta_{0000,0000}(v)^2+\vartheta_{1000,0100}(v)^2=-\frac{{}^tvUv}{4\pi\Gamma(3/4)^4},$$

$$\vartheta_{0010,0001}(v)^2+\vartheta_{1010,0101}(v)^2=-\frac{{}^tvUv}{8\pi\Gamma(3/4)^4},$$

$$\vartheta_{0011,0000}(v)^2+\vartheta_{1011,0100}(v)^2=-\frac{{}^tvUv}{8\pi\Gamma(3/4)^4},$$

証明： $\vartheta_{0000,0000}(v)^2+\vartheta_{0000,1100}(v)^2$ と ${}^tvUv$ の比を取り，$\Gamma\backslash\mathbb{B}_3$ の Satake コンパクト化をしカスプへの極限を調べることによりコンパクト複素多様体上で正則，即ち定数関数であることがわかる．定数を決定することにより主張を得る．

系 30

$$\frac{\vartheta_{0000,0000}(v)^2+\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{2} = \vartheta_{0010,0001}(v)^2+\vartheta_{1010,0101}(v)^2$$
$$= \vartheta_{0011,0000}(v)^2+\vartheta_{1011,0100}(v)^2$$

系 31

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2+\vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2},$$
$$x_2 = \frac{16\vartheta_{0010,0001}(v)^2\vartheta_{1010,0101}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2+\vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2},$$
$$x_3 = \frac{16\vartheta_{0011,0000}(v)^2\vartheta_{1011,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2+\vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2}.$$

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

主定理 I

補題 32 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z}),\ P = \mathrm{diag}(0,1,1,1),\ Q = \mathrm{diag}(1,0,0,0),$$

とする.

このとき, $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$.

特に $\tau = \tau(v)$ $(v \in \mathbb{B}_3)$ であるとき, ${}^t vUv = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$.

補題 32 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8,\mathbb{Z}),\ P = \mathrm{diag}(0,1,1,1),\ Q = \mathrm{diag}(1,0,0,0),$$

とする.
このとき, $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$.
特に $\tau = \tau(v)$ $(v \in \mathbb{B}_3)$ であるとき, ${}^t vUv = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$.

$(x_1, x_2, x_3) \in X$ に対して

$$v_2 = (1+i)\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{w} = -2\pi F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-x_1, 1-x_2, 1-x_3\right)$$

補題 32 (M., N.)

$$M_0 = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z}),\ P = \mathrm{diag}(0,1,1,1),\ Q = \mathrm{diag}(1,0,0,0),$$

とする.
このとき, $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し $\det(Q\tau + P) = \tau_{11}$.
特に $\tau = \tau(v)$ $(v \in \mathbb{B}_3)$ であるとき, ${}^t vUv = -\frac{2i}{\tau_{11}} v_2^2$.

$(x_1, x_2, x_3) \in X$ に対して

$$v_2 = (1+i)\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{w} = -2\pi F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-x_1, 1-x_2, 1-x_3\right)$$

$$v_1 = \sqrt{2}\pi F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; x_1, x_2, x_3\right).$$

主定理 II

定理 33 (M., N., 主定理 1, Jacobi's Formula の類似)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi}\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2+\vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2\right)\\
=&F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;x_1,x_2,x_3\right)^2
\end{aligned}
$$

- $[v]=Sp(x_1,x_2,x_3)$
- S: $p^{-1}(Sp(x_1,x_2,x_3))=(1-x_3,1-x_2,1-x_1)$ となるもの
- $\tau(v)^\sharp=M_0\cdot\tau(v)$

$$
S=\frac{1}{1-i}\begin{pmatrix} & -1 & & \\ -2 & & & \\ & & 1 & i \\ & & -i & -1 \end{pmatrix}\in \mathrm{U}(U,\mathbb{Q}(i))
$$

定理 34 (M., N.)

$[v]=p(x_1,x_2,x_3)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
a(v)&=\vartheta_{0000,0000}(\tau(Sv)^\sharp)^2+\vartheta_{0000,1100}(\tau(Sv)^\sharp)^2,\\
b_1(v)&=4\vartheta_{0011,0000}(\tau(Sv)^\sharp)\vartheta_{0011,1100}(\tau(Sv)^\sharp)\\
b_2(v)&=4\vartheta_{0010,0001}(\tau(Sv)^\sharp)\vartheta_{0010,1101}(\tau(Sv)^\sharp),\\
b_3(v)&=2\vartheta_{0000,0000}(\tau(Sv)^\sharp)\vartheta_{0000,1100}(\tau(Sv)^\sharp).
\end{aligned}$$

と，変換 $R=\dfrac{1}{1-i}\begin{pmatrix}2&&&\\&1&&\\&&1&i\\&&-i&-1\end{pmatrix}\in\mathrm{U}(U,\mathbb{Q}(i))$ が求めるものである．

- $\tau(v)^\sharp=M_0\cdot\tau(v)$
- $b_j(v)^2/a(v)^2=1-x_j$

主定理 IV

$$a(Rv) = \frac{a(v) + b_1(v) + b_2(v) + b_3(v)}{4},$$

$$b_1(Rv) = \frac{\sqrt{(a(v) + b_3(v))(b_1(v) + b_2(v))}}{2},$$

$$b_2(Rv) = \frac{\sqrt{(a(v) + b_2(v))(b_1(v) + b_3(v))}}{2},$$

$$b_3(Rv) = \frac{\sqrt{(a(v) + b_1(v))(b_2(v) + b_3(v))}}{2}.$$

定理 35 (M., N. 主定理 2)

$a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq d_0 > 0$ とする.

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)} = \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} \underbrace{\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2\right)}_{=a(v)}$$

- $y_1 = b_0/a_0$, $y_2 = c_0/a_0$, $y_3 = d_0/a_0$
- $[v] = Sp(1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2)$
- $S \in \mathrm{U}(U, \mathbb{Q}(i))$: $p^{-1}(Sp(x_1, x_2, x_3)) = (1 - x_3, 1 - x_2, 1 - x_1)$
- $\tau(v)^\sharp = M_0 \cdot \tau(v)$

主定理 VI

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Matsumoto AGM} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Kato and Matsumoto 2009}"] & \\
\text{Riemann Theta Function} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{Lauricella's HG Series } F_D
\end{tikzcd}$$

今回の結果は, Matsumoto AGM が, 代数曲線の周期とテータ定数の保型性を通じて Lauricella F_D と結びつくことを具体的に示したものである.

1 背景
- 記号の定義
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編
- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- Thomae 型公式
- 主定理

3 おまけ
- Borwein AGM への退化

1. 背景
   - 記号の定義
   - Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
   - Borchardt 1876
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
   - 観察
2. 本編
   - 代数曲線 $C(x)$
   - 周期
   - Thomae 型公式
   - 主定理
3. おまけ
   - Borwein AGM への退化

補題 36

$x_1 = x_2 = x_3$ であるとき,

$$[v] = Sp(x_1, x_2, x_3) = {}^t\left(\frac{1}{2}v_2, v_1, 0, 0\right),$$

$$\tau(v)^\sharp = \mathrm{diag}\left(-\frac{v_2}{2v_1}i, -\frac{v_2}{2v_1}i, i, i\right),$$

$$Rv = \frac{1}{1-i}\left(\begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}\right) v = {}^t(v_2, v_1, 0, 0),$$

$$\tau(Rv)^\sharp = 2\tau(v)^\sharp$$

である.

$\tau_0 = -iv_2/v_1$ と置く. $\tau(v)^\sharp$ が対角行列であることから Riemann テータ定数は Jacobi テータ定数の積に分解されることに注意すると保型関数 $a(v), b_1(v), b_2(v), b_3(v)$ の Borwein AGM への退化が $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ となることがわかる.

Borwein AGM への退化 II

$$
\begin{aligned}
a(v) &= \vartheta \begin{bmatrix} 0000 \\ 0000 \end{bmatrix} (\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta \begin{bmatrix} 0000 \\ 1100 \end{bmatrix} (\tau(v)^\sharp)^2 \\
&= \left(\vartheta_{00} \left(\frac{1}{2} \tau_0 \right)^4 + \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) 2\vartheta_{00}(i)^4 \\
&= \frac{1}{2} \left(\vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) 2\vartheta_{00}(i)^4 \\
&= \frac{1}{4} \left(\vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + 2\vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) 2\vartheta_{00}(i)^4 \\
&= \frac{1}{4} \left(\vartheta_{00} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + \vartheta_{10} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 + 3\vartheta_{01} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^4 \right) 2\vartheta_{00}(i)^4 \\
&= 2\vartheta_{00}(i)^4 \frac{\alpha(\frac{\tau_0}{2}) + 3\beta(\frac{\tau_0}{2})}{4} = 2\vartheta_{00}(i)^4 \alpha(\tau_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_1(v)\\
&= 2\,\vartheta\begin{bmatrix}0000\\0000\end{bmatrix}(\tau(v)^\sharp)\,\vartheta\begin{bmatrix}0000\\1100\end{bmatrix}(\tau(v)^\sharp)\\
&= 2\vartheta_{00}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^2\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^2\vartheta_{00}(i)\\
&= 2\vartheta_{00}(i)^4\vartheta_{00}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^2\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)\\
&= 2\vartheta_{00}(i)^4\sqrt{\vartheta_{00}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4}\\
&= 2\vartheta_{00}(i)^4\sqrt{\left(\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4+\vartheta_{10}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4\right)\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4}\\
&= 2\vartheta_{00}(i)^4\sqrt{\frac{1}{2}\left(\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4+2\vartheta_{10}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4+\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4\right)\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4}
\end{aligned}
$$

Borwein AGM への退化 III

$$
\begin{aligned}
&= 2\vartheta_{00}(i)^4 \sqrt{\frac{1}{2}\left(\vartheta_{00}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4 + \vartheta_{10}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4 + \vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4\right)\vartheta_{01}\left(\frac{\tau_0}{2}\right)^4} \\
&= 2\vartheta_{00}(i)^4 \sqrt{\frac{\alpha\left(\frac{\tau_0}{2}\right) + \beta\left(\frac{\tau_0}{2}\right)}{2} \cdot \beta\left(\frac{\tau_0}{2}\right)} \\
&= 2\vartheta_{00}(i)^4 \beta(\tau_0).
\end{aligned}
$$

同様に $b_1(v) = b_2(v) = b_3(v)$.

Borwein AGM への退化 IV

$$a(v) = 2\vartheta_{00}(i)^4 \alpha(\tau_0)$$
$$b_1(v) = b_2(v) = b_3(v) = 2\vartheta_{00}(i)^4 \beta(\tau_0)$$

補題 37

$$2\vartheta_{00}(i)^4 = \frac{2\pi}{\Gamma(3/4)^4}$$

$$\frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} a(v) = \frac{\Gamma(3/4)^4}{2\pi} 2\vartheta_{00}(i)^4 \alpha(\tau_0) = \alpha(\tau_0)$$

Borwein AGM の結果も退化することにより得られる

参考文献

- Borchardt, C. W. (1876). “Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen”. In: *Berl. Monatsber.* 53, pp. 611–621.
- Borwein, J. M. and P. B. Borwein (1991). “A Cubic Counterpart of Jacobi’s Identity and the AGM”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.*
- Kato, T. and K. Matsumoto (2009). “The Common Limit of a Quadruple Sequence and the Hypergeometric Function F_D of Three Variables”. In: *Nagoya Math. J.* 195, pp. 113–124.
- Matsumoto, K. and T. Terasoma (2012). *Thomae Type Formula for K3 Surfaces Given by Double Covers of the Projective Plane Branching Along Six Lines*.
- Yoshida, M. (1997). *Hypergeometric Functions, My Love*. Vol. E32. Aspects of Mathematics. Modular Interpretations of Configuration Spaces. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.