セミナー・ワークショップ「幾何学における代数的・組み合わせ論的視点」

4 種 4 項平均の反復極限定理のテータ定数を用いた導出

中野 竜之介

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程 2 年

上の QR コードから該当の講演スライドが閲覧できます.

This work was supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2119.

定義 1

$$\vartheta_{a,b}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(\pi i(n+\tfrac{1}{2}a)\tau\,{}^t(n+\tfrac{1}{2}a) + 2\pi i(z+\tfrac{1}{2}b)\,{}^t(n+\tfrac{1}{2}a)\right)$$

- $\tau = (\tau_{jk})_{jk} \in \mathfrak{S}_g$：$g \times g$ の対称複素行列で, 虚部が正定値なもの
- $z = (z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{C}^g$: 複素変数
- $a, b \in \mathbb{Z}^g$
- $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$：指標

特別な場合：

- $g = 1$：Jacobi テータ関数 ($\mathfrak{S}_1 = \mathbb{H}$：上半平面)
- $g \geq 2$：Riemann テータ関数 ($\mathfrak{S}_g$: Siegel 上半空間)
- $z = 0$：テータ定数, $\vartheta_{a,b}(\tau)$

定義 2 (Lauricella's hypergeometric series F_D)

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n_1,\dots,n_m\geq 0}^{\infty}\frac{(\alpha,\sum_{j=1}^m n_j)\prod_{j=1}^m(\beta_j,n_j)}{(\gamma,\sum_{j=1}^m n_j)\prod_{j=1}^m(1,n_j)}\prod_{j=1}^m z_j^{n_j},$$

- $z=(z_1,\dots,z_m),\beta=(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathbb{C}^m$
- $|z_j|<1\ (j=1,\dots,m)$
- $\alpha,\gamma\in\mathbb{C},\ \gamma\neq 0,-1,-2,\dots$

Fact

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}\prod_{j=1}^m(1-z_jt)^{-\beta_j}\frac{dt}{t(1-t)}.$$

ただし $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

定理 (Gauss の算術幾何平均)

- 初期値 $0 < b_0 \leq a_0$ をとる
- 以下の漸化式で定まる数列を考える：

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

- これらは共通の極限 $M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)$ に収束する.

Gauss AGM の本質は Gauss の超幾何級数による表示であるが, 解析的な側面以外にも代数幾何学的な側面を持つ:

定理 (Gauss 1799–1818, Jacobi)

- Legendre 標準形により定まる楕円曲線族 $w^2 = z(z-\lambda)(z-1)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ の周期は次のように書ける:

$$\tau(\lambda) = i\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-\lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)} \in \mathbb{H}$$

- このとき, $\lambda = 1 - \dfrac{b_0^2}{a_0^2}$ $(a_0 \neq b_0)$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0,b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)$$

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

この等式を示すために, 以下の性質が重要である：

$$M_{\mathrm{G}}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = M_{\mathrm{G}}(a, b) \text{ (シフト不変性)}$$

$$aM_{\mathrm{G}}(1, b/a) = M_{\mathrm{G}}(a, b) \text{ (同次性)}$$

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}$$

$$\vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\,\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall\tau \in \mathbb{H} \text{ (}2\tau\text{-formula)}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ (Jacobi's formula)}$$

補題 4

$$\lambda \text{ の復元: } \lambda = \vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4/\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4 \quad (\lambda = 1 - b_0^2/a_0^2 \neq 0, 1)$$

$$\text{Jacobi's identity: } \vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{10}(\tau)^4 + \vartheta_{01}(\tau)^4 \text{ for } \forall\tau \in \mathbb{H}$$

$b_0^2/a_0^2 = 1 - \vartheta_{10}(\tau)^4/\vartheta_{00}(\tau)^4 = \vartheta_{01}(\tau)^4/\vartheta_{00}(\tau)^4$ より

$$b_0/a_0 = \vartheta_{01}(\tau)^2/\vartheta_{00}(\tau)^2.$$

再掲

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right), \quad \lambda = 1 - b_0^2/a_0^2$$

証明： 2τ-formula と Jacobi's formula を用いることで示される:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0) &= a_0 M_{\mathrm{G}}(1, b_0/a_0) = a_0 M_{\mathrm{G}}(1, \vartheta_{01}(\tau)^2/\vartheta_{00}(\tau)^2) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}(\vartheta_{00}(\tau)^2, \vartheta_{01}(\tau)^2) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}\left(\frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau)\right) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}\left(\vartheta_{00}(2\tau)^2, \vartheta_{01}(2\tau)^2\right) \\
&= \cdots = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} \lim_{n\to\infty} M_{\mathrm{G}}\left(\vartheta_{00}(2^n\tau)^2, \vartheta_{01}(2^n\tau)^2\right) \\
&= \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} M_{\mathrm{G}}(1,1) = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^2} = a_0 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)^{-1} \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& \text{Gauss AGM} \arrow[dl, leftrightarrow, "2\tau\text{-formula}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{HGDE}"] & \\
\text{Jacobi Theta Function} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Jacobi's Formula}"'] & & \text{Gauss HG Series}
\end{tikzcd}
$$

2τ-formula

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall\tau \in \mathbb{H},$$

Jacobi's formula

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

Borchardt 1876 I

$0 < d_0 \le c_0 \le b_0 \le a_0$ とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{c_n d_n}}{2},$$
$$c_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n c_n} + \sqrt{b_n d_n}}{2}, \qquad d_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n d_n} + \sqrt{b_n c_n}}{2},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{B}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ (Borchardt AGM と呼ぶ) に収束する.

- この平均は Gauss AGM と同様に同次性とシフト不変性を満たす.
- $M_{\mathrm{B}}(a_0, a_0, b_0, b_0) = M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)$.

Borchardt は種数 2 の超楕円曲線

$$y^2 = -(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)(x-u_5),$$
$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5$$

の周期 $\tau \in \mathfrak{S}_2$ に対して定まる Riemann テータ定数を考えた.
Borchardt の場合においても変換 $\tau \mapsto 2\tau$ により平均を生み出す公式が与えられている:

$$\vartheta_{00,00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)^2 + \vartheta_{00,10}(\tau)^2 + \vartheta_{00,01}(\tau)^2 + \vartheta_{00,11}(\tau)^2}{4},$$
$$\vartheta_{00,10}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,10}(\tau) + \vartheta_{00,01}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2},$$
$$\vartheta_{00,01}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau)}{2},$$
$$\vartheta_{00,11}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00,00}(\tau)\vartheta_{00,11}(\tau) + \vartheta_{00,10}(\tau)\vartheta_{00,01}(\tau)}{2}.$$

Thomae の公式

$$\vartheta_{00,00}(\tau)^2 = \frac{\det\Omega}{4\pi^2}\sqrt{(u_1-u_3)(u_1-u_5)(u_3-u_5)(u_2-u_4)}$$
$$\vartheta_{00,10}(\tau)^2 = \frac{\det\Omega}{4\pi^2}\sqrt{(u_2-u_3)(u_2-u_5)(u_3-u_5)(u_1-u_4)}$$
$$\vartheta_{00,01}(\tau)^2 = \frac{\det\Omega}{4\pi^2}\sqrt{(u_1-u_4)(u_1-u_5)(u_4-u_5)(u_2-u_3)}$$
$$\vartheta_{00,11}(\tau)^2 = \frac{\det\Omega}{4\pi^2}\sqrt{(u_2-u_3)(u_2-u_5)(u_3-u_5)(u_1-u_4)}$$

- Ω: ある基底に関する B 周期

このような, テータ定数と分岐点に関する関係式を Thomae 型公式と呼ぶ.

- Borchardt 自身は (テータ定数と超幾何級数の等式の意味で)Jacobi の公式の類似や, Borchardt AGM の初期値と代数曲線族の周期の対応は示していない
- Matsumoto and Terasoma 2010 で, K3 曲面族の Thomae 型公式を示すことにより Borchardt AGM の 4 変数超幾何級数による表示が与えられている
- Kummer locus(K3 曲面族で, 周期写像の像が 2 次 Siegel 上半空間の点になるもの) に制限することにより 4 変数の超幾何級数が 3 変数の超幾何級数になり古典的な Thomae の公式が得られる

$0 < b_0 \leq a_0$ とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} b_n},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)$ (Borwein AGM と呼ぶ) に収束する.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

は変換 $\tau \mapsto 2\tau$ によって

$$\alpha(2\tau) = \frac{\alpha(\tau) + 3\beta(\tau)}{4}, \quad \beta(2\tau) = \sqrt{\frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{2} \beta(\tau)},$$

を満たす.

$$\alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad \beta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 - \vartheta_{10}(\tau)^4,$$

命題 5 (J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991, Theorem 2.6)

1. $0 < h < 1$ に対し,

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Bor}}(1,h)} = F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1-h^2\right)^2$$

2. $h = \beta(\tau)/\alpha(\tau)$ $(\tau \in \mathbb{H})$ とおくとき,

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1-h^2\right)^2 = \alpha(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \vartheta_{10}(\tau)^4$$

Borwein AGM の場合にも, Borwein AGM の初期値と周期の対応が示されていない.

$0 < d_0 \leq c_0 \leq b_0 \leq a_0$ に対し拡張された 4 種類の 4 項平均

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + d_n}{2}\frac{b_n + c_n}{2}},$$
$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + c_n}{2}\frac{b_n + d_n}{2}}, \qquad d_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2}\frac{c_n + d_n}{2}},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M(a_0, b_0, c_0, d_0)$ に収束する.

- $M(a_0, b_0, b_0, b_0) = M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)$
- $M(a_0, a_0, b_0, b_0) \neq M_{\mathrm{G}}(a_0, b_0)$

命題 6 (Kato and Matsumoto 2009, Theorem 1.)

$$\frac{1}{M(1,y_1,y_2,y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;1-y_1^2,1-y_2^2,1-y_3^2\right)^2,$$

この命題は Lauricella F_D の超幾何微分方程式 (の定める Pfaff 系) を用いて証明された.

$$\begin{tikzcd}
& M(a_0,b_0,c_0,d_0) \arrow[dl, dotted, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Kato and Matsumoto 2009}"] & \\
\text{Riemann Theta Function} \arrow[rr, dotted, leftrightarrow] & & \text{Lauricella's HG Series } F_D
\end{tikzcd}$$

この 4 種 4 項平均の反復極限 $M(1,y_1,y_2,y_3)$ もまた Gauss AGM と同様の構図が成り立つような代数幾何学背景を持つこと与えた.

本講演では, 次の公式の類似公式を与えることにより $M(a_0, b_0, c_0, d_0)$ の Lauricella F_D による表示の別証明を与える.

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall\tau \in \mathbb{H}$$

$$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \text{ for } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

定理 7 (M., N., Jacobi's Formula の類似, 主定理)

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(1, y_1, y_2, y_3)} &= \frac{\Gamma(3/4)^4}{\pi}\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{1100,0000}(\tau(v)^\sharp)^2\right) \\ &= F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2\right)^2\end{aligned}$$

観察 I

$$\frac{1}{M_{\mathrm{G}}(1, b_0/a_0)} = \vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right),$$

$$\tau(\lambda) = i\frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-\lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)}, \quad \lambda = 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}.$$

- $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right)$ の分子分母を周期積分に持つような代数曲線族は

$$w^2 = z(z-\lambda)(z-1) \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$$

である.

観察 II

$$\frac{1}{M(1,y_1,y_2,y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;1-y_1^2,1-y_2^2,1-y_3^2\right)^2$$

- $F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;1-y_1^2,1-y_2^2,1-y_3^2\right)$ を周期として持つような代数曲線族を考える必要がある.
- Deligne–Mostow の理論から

$$C(x)\colon w^4 = z(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-1),$$
$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid z_j\neq z_k,\ z_1,z_2,z_3\neq 0,1\},$$

を考えると, dz/w の $[1,\infty]$ における積分に
$F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;x_1,x_2,x_3\right)$ が現れる.

構想

$x = (x_1, x_2, x_3) \in X$ に対して定まる "周期行列" τ を考える.
$y_j^2 = 1 - x_j$ としたとき,

$$y_j = b_j(\tau)/a(\tau)$$

となるような関数 $a(\tau)$, $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$, $b_3(\tau)$ と変換 R で,

$$a(R\cdot\tau) = \frac{a(\tau)+b_1(\tau)+b_2(\tau)+b_3(\tau)}{4},$$
$$b_1(R\cdot\tau) = \frac{\sqrt{(a(\tau)+b_3(\tau))(b_1(\tau)+b_2(\tau))}}{2},$$
$$b_2(R\cdot\tau) = \frac{\sqrt{(a(\tau)+b_2(\tau))(b_1(\tau)+b_3(\tau))}}{2},$$
$$b_3(R\cdot\tau) = \frac{\sqrt{(a(\tau)+b_1(\tau))(b_2(\tau)+b_3(\tau))}}{2}.$$

となるものが見つかれば良い.

主定理

1. テータ定数と分岐点の関係を記述した Thomae 型の公式
2. テータ定数と Lauricella F_D の関係を記述した Jacobi の公式の類似
3. Borwein AGM における, 保型関数 $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ ・平均を生み出す変換 $\tau \mapsto 2\tau$ の拡張 (保型関数 a, b_1, b_2, b_3 の決定)

定義 8

$$C(x)\colon w^4 = z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1)$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in X$$

ただし,

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_j \neq 0, 1 \ (j = 1, 2, 3),\ x_j \neq x_k \ (j \neq k)\}.$$

命題 9 (M., N.)

$\mathrm{pr}\colon C(x) \ni (z, w) \mapsto z \in \mathbb{P}^1$ とするとき, $(C(x), \mathrm{pr})$ は 6 点 $0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty$ を branch points とする $\mathbb{P}^1$ の巡回 4 重分岐被覆であり, 種数 6 の閉 Riemann 面である.

定義 10

$P_j = \mathrm{pr}^{-1}(j)$ $(j = 0, 1, x_1, x_2, x_3)$ とする.

- ρ: $\rho(z,w) = (z, iw)$ で定まる pr の被覆変換

通常, 周期写像はホモロジー群とコホモロジー群のペアリングから定まる行列を用いて定義するが, 本講演では変換 $(\rho^2)^*$ の (-1)-固有空間等で議論を進める.

定義 11

- $H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$: $(\rho^2)^*$ の (-1)-固有空間
- $H_-^0(C(x), \Omega^1)$: $(\rho^2)^*$ の (-1)-固有空間

命題 12 (M., N.)

$$\phi_1 = \frac{dz}{w}, \quad \phi_2 = \frac{dz}{w^3}, \quad \phi_3 = \frac{zdz}{w^3}, \quad \phi_4 = \frac{z^2dz}{w^3}, \quad \phi_5 = \frac{dz}{w^2}, \quad \phi_6 = \frac{zdz}{w^2}$$

は $H^0(C(x),\Omega^1)$ の基底を成す

命題 13 (M., N.)

$\phi_1,\ldots,\phi_4$ は $H^0_-(C(x),\Omega^1)$ の基底を成す

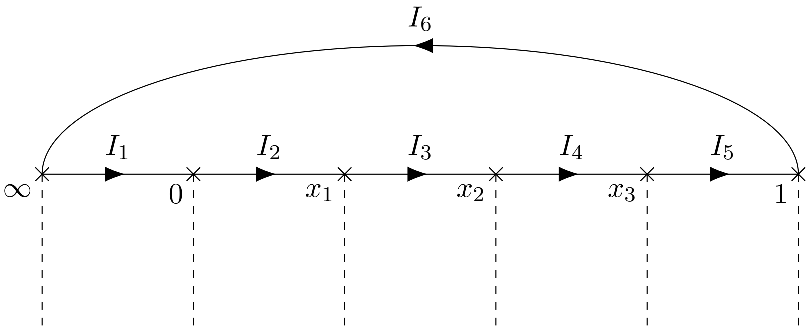

Figure: 経路 $I_1, \ldots, I_6$

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$$

命題 14 (M., N.)

$\{\rho^k(1-\rho^2)I_j \mid j = 1,3,4,6,\ k = 0,1\}$ は $H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$ を張る

命題 15 (M., N.)

$c_j = (1-\rho^2) I_j$ と表すとき,

$$
\begin{aligned}
&A_1 = (1+\rho)c_1, && A_2 = \rho c_6, && A_3 = -(1+\rho)c_3 - \rho c_4, && A_4 = c_4,\\
&B_1 = c_6, && B_2 = (1-\rho)c_1, && B_3 = -(1-\rho)c_3 - c_4, && B_4 = -\rho c_4.
\end{aligned}
$$

- $L = \langle A_1, \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4 \rangle_{\mathbb{Z}} \subset H_1^-(C(x), \mathbb{Z})$: 指数 4 の部分格子
- 交点行列: $2J_8 = 2\begin{pmatrix} O_4 & -I_4 \\ I_4 & O_4 \end{pmatrix}$
- ρ の作用: $\begin{pmatrix} \rho(A) \\ \rho(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_4 & -U \\ U & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

任意の $x \in X$ に対して各サイクルを解析接続を行い先ほど構成したシンプレクティック基底を定める (基点と解析接続のパス依存)

定義 16

$$\tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k \right)_{j,k}, \quad \tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k \right)_{j,k}$$

とする.

命題 17 (M., N.)

$$\tau = \tau_A \tau_B^{-1} \in \mathfrak{S}_4$$

命題 18 (M., N.)

$$\tau = iU \left(I_4 - \frac{2}{{}^t v U v} v \, {}^t v U \right)$$

- v: τ_B の第 1 列

命題 19 (M., N.)

$$v = {}^t\left(\int_{B_1} \frac{dz}{w}, \int_{B_2} \frac{dz}{w}, \int_{B_3} \frac{dz}{w}, \int_{B_4} \frac{dz}{w}\right)$$

とする. v を射影化したとき, v は Hermite 形式 U が定める複素超球の元である:

$$v \in \mathbb{B}_3 = \{\xi \in \mathbb{P}^3 \mid \xi^* U \xi < 0\}.$$

定義 20

- $(x_1, x_2, x_3) \in X$ の周期への対応 $X \to \mathbb{B}_3$ は局所的に一価正則である. Γ_U をモノドロミー群とする.
- $\mathrm{per}\colon X \to \Gamma_U \backslash \mathbb{B}_3$ を周期写像と呼ぶ.

Fact (Yoshida 1997)

X は $\Gamma_U \backslash \mathbb{B}_3$ の稠密開集合と同型.

命題 22 (M., N.)

$$\tau(v) := \imath(v) = iU\left(I_4 - \frac{2}{{}^t v U v}\, v\, {}^t v U\right) \quad (v \in \mathbb{B}_3)$$

- $\imath \colon \mathbb{B}_3 \to \mathfrak{S}_4$ は埋め込みとなる
- $v = \mathrm{per}(x_1, x_2, x_3)$, $\tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k\right)_{j,k}$, $\tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k\right)_{j,k}$ とするとき, $\tau(v) = \tau_A \tau_B^{-1}$

定義 23

- $\vartheta_{a,b}(v) = \vartheta_{a,b}(\tau(v))$ $(v \in \mathbb{B}_3)$: テータ定数の埋め込みによる引き戻し

定義 24

$$\mathrm{U}(U,\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \mid g^* U g = U\}$$
$$\mathrm{Sp}(8,\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SL}(8,\mathbb{R}) \mid M J_8 \, {}^t M = J_8\}$$

- $\mathrm{U}(U,\mathbb{C})$: 射影化すると $\mathbb{B}_3$ の自己同型群となる, ユニタリ群
- $\mathrm{Sp}(8,\mathbb{R})$: 射影化すると $\mathfrak{S}_4$ の自己同型群, シンプレクティック群

周期写像の逆写像の構成 I

楕円曲線の場合に Abel–Jacobi 写像によりテータ定数を引き戻した関数を調べることにより周期写像の逆写像を与えることができた.

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}(\tau(\lambda))^4}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^4}$$

本講演の場合においても Abel–Jacobi 写像の類似物を導入することにより周期写像の逆写像の構成を行った.

定理 25 (M., N.)

$v = \mathrm{per}(x_1, x_2, x_3)$ とする.

$$x_1 = \frac{4\vartheta_{0000,0000}(v)^2\vartheta_{1000,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2)^2},$$

$$x_2 = \frac{4\vartheta_{0010,0001}(v)^2\vartheta_{1010,0101}(v)^2}{(\vartheta_{0010,0001}(v)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v)^2)^2},$$

$$x_3 = \frac{4\vartheta_{0011,0000}(v)^2\vartheta_{1011,0100}(v)^2}{(\vartheta_{0011,0000}(v)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v)^2)^2}.$$

定理 26 (M., N., Thomae 型公式)

$v = {}^t\left(\int_{B_1} \frac{dz}{w}, \int_{B_2} \frac{dz}{w}, \int_{B_3} \frac{dz}{w}, \int_{B_4} \frac{dz}{w}\right)$ とする．このとき，

$$\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2 = -\frac{{}^t vUv}{4\pi\Gamma(3/4)^4},$$

$$\vartheta_{0010,0001}(v)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v)^2 = -\frac{{}^t vUv}{8\pi\Gamma(3/4)^4},$$

$$\vartheta_{0011,0000}(v)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v)^2 = -\frac{{}^t vUv}{8\pi\Gamma(3/4)^4},$$

証明： 左辺と ${}^t vUv$ の比を取り，$\Gamma_U \backslash \mathbb{B}_3$ の佐武コンパクト化で加わる点への極限を調べることにより示さる．

系 27

$$\frac{\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2}{2} = \vartheta_{0010,0001}(v)^2 + \vartheta_{1010,0101}(v)^2$$
$$= \vartheta_{0011,0000}(v)^2 + \vartheta_{1011,0100}(v)^2$$

Thomae 型公式・Jacobi の公式の類似 II

系 28

$$1 - x_1 = \left(\frac{\vartheta_{0000,0000}(v)^2 - \vartheta_{1000,0100}(v)^2}{\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2} \right)^2,$$

$$1 - x_2 = \left(\frac{\vartheta_{0100,1000}(v)^2 + \vartheta_{1111,1111}(v)^2}{\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2} \right)^2,$$

$$1 - x_3 = \left(\frac{\vartheta_{0100,1000}(v)^2 - \vartheta_{1111,1111}(v)^2}{\vartheta_{0000,0000}(v)^2 + \vartheta_{1000,0100}(v)^2} \right)^2.$$

補題 29 (M., N.)

$$N = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z}),\ P = \mathrm{diag}(1,0,1,1),\ Q = \mathrm{diag}(0,1,0,0),$$

とする.

このとき, $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し $\det(Q\tau + P) = \tau_{22}$.

特に $\tau = \tau(v)$ $(v \in \mathbb{B}_3)$ であるとき, ${}^t vUv = -\dfrac{2i}{\tau_{22}} v_1^2$.

$v = {}^t\left(\int_{B_1} \frac{dz}{w}, \int_{B_2} \frac{dz}{w}, \int_{B_3} \frac{dz}{w}, \int_{B_4} \frac{dz}{w}\right)$ に対して

$$v_1 = \sqrt{2}\pi F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; x_1, x_2, x_3\right).$$

定理 30 (M., N., Jacobi's Formula の類似)

$$\frac{\Gamma(3/4)^4}{\pi}\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2\right)$$
$$= F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;x_1,x_2,x_3\right)^2$$

- $v = \mathrm{per}(x_1, x_2, x_3)$
- $\tau(v)^\sharp = N \cdot \tau(v)$

$$\begin{aligned}
a(v) &= \vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{1100,0000}(\tau(v)^\sharp)^2,\\
b_1(v) &= \vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 - \vartheta_{1100,0000}(\tau(v)^\sharp)^2,\\
b_2(v) &= \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{1111,1111}(\tau(v)^\sharp)^2,\\
b_3(v) &= \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2 - \vartheta_{1111,1111}(\tau(v)^\sharp)^2.
\end{aligned}$$

と，変換 $R = \dfrac{1}{1-i}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & -i \\ & & -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(U, \mathbb{Q}(i))$ により平均が生み出される．この行列 R を平均生成変換 (mean generating matrix) と呼ぶ．

- $v = \mathrm{per}(x_1, x_2, x_3)$ $(0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1)$
- $\tau(v)^\sharp = N \cdot \tau(v)$
- $b_j(v)^2 / a(v)^2 = 1 - x_j$

$$a(Rv) = \frac{a(v) + b_1(v) + b_2(v) + b_3(v)}{4},$$

$$b_1(Rv) = \frac{\sqrt{(a(v) + b_3(v))(b_1(v) + b_2(v))}}{2},$$

$$b_2(Rv) = \frac{\sqrt{(a(v) + b_2(v))(b_1(v) + b_3(v))}}{2},$$

$$b_3(Rv) = \frac{\sqrt{(a(v) + b_1(v))(b_2(v) + b_3(v))}}{2}.$$

定理 31 (M., N. 主定理)

$a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq d_0 > 0$ とする.

$$\frac{a_0}{M(a_0, b_0, c_0, d_0)} = \frac{\Gamma(3/4)^4}{\pi} \underbrace{\left(\vartheta_{0000,0000}(\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta_{0000,1100}(\tau(v)^\sharp)^2\right)}_{=a(v)}$$

- $y_1 = b_0/a_0$, $y_2 = c_0/a_0$, $y_3 = d_0/a_0$
- $v = \mathrm{per}(1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2)$
- $\tau(v)^\sharp = N \cdot \tau(v)$

Kato and Matsumoto 2009 主定理

$$\frac{\Gamma(3/4)^4}{\pi} a(v) = F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2\right)^2$$

主定理の証明：

$$
\begin{aligned}
& M(a_0, b_0, c_0, d_0) \\
=& a_0 M(1, y_1, y_2, y_3) \\
=& a_0 M\left(1, \frac{b_1(v)}{a(v)}, \frac{b_2(v)}{a(v)}, \frac{b_3(v)}{a(v)}\right) \\
=& \frac{a_0}{a(v)} M\left(a(v), b_1(v), b_2(v), b_3(v)\right) \\
=& \frac{a_0}{a(v)} M\left(a(Rv), b_1(Rv), b_2(Rv), b_3(Rv)\right) \\
=& \cdots = \frac{a_0}{a(v)} M\left(a(R^{4n}v), b_1(R^{4n}v), b_2(R^{4n}v), b_3(R^{4n}v)\right)
\end{aligned}
$$

である．ここで，

$$
R^{4n} = \mathrm{diag}(-1/4, -4, 1, 1)^n
$$

より,

$$\lim_{n\to\infty} R^{4n}v \equiv \lim_{n\to\infty} {}^t\left(4^{-2n}\frac{v_1}{v_2}, 1, -4^{-n}\frac{v_3}{v_2}, -4^{-n}\frac{v_4}{v_2}\right) = {}^t(0,1,0,0)$$

であることに注意すると,

$$\lim_{n\to\infty} a(R^n v) = \lim_{n\to\infty} b_j(R^n v) = \frac{\pi}{\Gamma(3/4)^4}$$

であることがわかる. 実際,

$$v(t) = {}^t(1,-t,0,0) \in \mathbb{B}_3 \quad \text{for } t>0$$

を考えると, $\tau(v(t))^\sharp = \mathrm{diag}\left(\frac{i}{t}, \frac{i}{t}, i, i\right)$ であることから

$$a(v(t)) = \vartheta_{0000,0000}(\tau(v(t))^\sharp)^2 + \vartheta_{1100,0000}(\tau(v(t))^\sharp)^2$$

$$= \left(\vartheta_{00}\left(\frac{i}{t}\right)^4 + \vartheta_{10}\left(\frac{i}{t}\right)^4 \right) \vartheta_{00}(i)^4$$

$$\underset{t\downarrow 0}{\to} (1+0)\vartheta_{00}(i)^4 = \vartheta_{00}(i)^4$$

が従う. ここで,

補題 32 (Chiba and Matsumoto 2023, Remark 4.6)

$$\vartheta_{00}(i) = \frac{\pi^{1/4}}{\Gamma(3/4)}$$

より主張を得る.

主定理 V

Jacobi's Formula の類似と主定理を合わせることにより

Kato and Matsumoto 2009, Theorem 1.

$$\frac{1}{M(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2\right)^2,$$

の別証明を与えた.

$$\begin{tikzcd}
& M(a_0, b_0, c_0, d_0) \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Kato and Matsumoto 2009}"] & \\
\text{Riemann Theta Function} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{Lauricella's HG Series } F_D
\end{tikzcd}$$

今回の結果は, $M(a_0, b_0, c_0, d_0)$ が, 代数曲線の周期とテータ定数の保型性を通じて Lauricella F_D と結びつくことを具体的に示したものである.

1 背景

- 記号の定義と事実
- Gauss's Arithmetic-Geometric Mean, Gauss AGM
- Borchardt 1876
- J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
- Kato and Matsumoto 2009
- 観察

2 本編

- 代数曲線 $C(x)$
- 周期
- 周期写像の逆写像の構成
- Thomae 型公式・Jacobi の公式の類似
- 主定理

3 おまけ

- Borwein AGM への退化

補題 33

$x_1 = x_2 = x_3$ であるとき, $\mathrm{per}(x_1, x_2, x_3) = {}^t(v_1, v_2, 0, 0)$ である.

$$\tau(v)^\sharp = \mathrm{diag}\left(-\frac{v_2}{v_1}i, -\frac{v_2}{v_1}i, i, i\right),$$

$$Rv = \frac{1}{1-i}\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}\right) v \equiv {}^t(v_1, 2v_2, 0, 0),$$

$$\tau(Rv)^\sharp = \tau(v)^\sharp \,\mathrm{diag}(2, 2, 1, 1)$$

である. 退化したとき, 2 倍写像が見えている.

注意 34 $\Gamma_U \backslash \mathbb{B}_3$ を Satake コンパクト化した際, X の $\mathbb{C}^3$ から抜かれていた超平面が埋まりその上に周期写像が伸びるため一致させる写像が正当化される. ♦

Borwein AGM への退化 II

$\tau_0 = -iv_2/v_1$ と置く. $\tau(v)^\sharp$ が対角行列であることから Riemann テータ定数は Jacobi テータ定数の積に分解されることに注意すると保型関数 $a(v), b_1(v), b_2(v), b_3(v)$ の Borwein AGM への退化が $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ となることがわかる.

$$\begin{aligned}
a(v) &= \vartheta \begin{bmatrix} 0000 \\ 0000 \end{bmatrix} (\tau(v)^\sharp)^2 + \vartheta \begin{bmatrix} 1100 \\ 0000 \end{bmatrix} (\tau(v)^\sharp) \\
&= \left(\vartheta_{00} \left(\tau_0\right)^4 + \vartheta_{10} \left(\tau_0\right)^4 \right) \vartheta_{00}(i)^4 \\
&= \vartheta_{00}(i)^4 \alpha(\tau_0) \\
b_1(v_0) &= \vartheta \begin{bmatrix} 0000 \\ 0000 \end{bmatrix} (\tau(v)^\sharp)^2 - \vartheta \begin{bmatrix} 1100 \\ 0000 \end{bmatrix} (\tau(v)^\sharp)^2 \\
&= \left(\vartheta_{00}(\tau_0)^4 - \vartheta_{10}(\tau_0)^4 \right) \vartheta_{00}(i)^4 = \vartheta_{00}(i)^4 \beta(\sigma),
\end{aligned}$$

同様に $b_1(v) = b_2(v) = b_3(v)$.

Borwein AGM への退化 III

$$a(v) = \vartheta_{00}(i)^4 \alpha(\tau_0)$$
$$b_1(v) = b_2(v) = b_3(v) = \vartheta_{00}(i)^4 \beta(\tau_0)$$

$$\vartheta_{00}(i)^4 = \frac{\pi}{\Gamma(3/4)^4}$$

$$\left(\frac{1}{\text{Borwein AGM}} = \right) \frac{\Gamma(3/4)^4}{\pi} a(v) = \frac{\Gamma(3/4)^4}{\pi} \vartheta_{00}(i)^4 \alpha(\tau_0) = \alpha(\tau_0)$$

Borwein AGM の結果も退化することにより得られる

積分表示の方は明らかに退化する:

$$F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;x,x,x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}\prod_{j=1}^{3}(1-xt)^{-\frac{1}{4}}\frac{dt}{t(1-t)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}(1-xt)^{-\frac{3}{4}}\frac{dt}{t(1-t)}$$

$$=F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},1;x\right)$$

Borwein AGM への退化 V

Borwein AGM を与える代数曲線族は

$$w^4 = z(z-x)^3(z-1),\ x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$$

であり, 周期は

$$\begin{aligned}\tau_0(x) &= (1-i)\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{w} \Big/ \int_{1}^{\infty} \frac{dz}{w} \\ &= \sqrt{2}i\, F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1-x\right) \Big/ F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; x\right) \in \mathbb{H}\end{aligned}$$

である. Borwein AGM の初期値 $a_0 > b_0$ に対して $x = 1 - b_0^2/a_0^2$ とすることにより

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)} = \vartheta_{00}(\tau_0(x))^4 + \vartheta_{10}(\tau_0(x))^4$$

となる.
種数は 3 であるが, Prym 多様体と周期を考えると周期行列が $\mathrm{diag}(\tau_0, \tau_0)$ となり Borwein 兄弟の結果まで周期行列のサイズが落ちる.

参考文献 I

Borchardt, C. W. (Nov. 1876). "Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen". In: *Monatsber. der Berl. Akad.* 53, pp. 611–621.

Borwein, J. M. and P. B. Borwein (1991). "A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM". In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 323.2, pp. 691–701. ISSN: 0002-9947,1088-6850. DOI: 10.2307/2001551. URL: https://doi.org/10.2307/2001551.

Chiba, J. and K. Matsumoto (2023). "An Analogy of Jacobi's Formula and Its Applications". In: *Hokkaido Math. J.* 52, pp. 463–494.

Kato, T. and K. Matsumoto (2009). "The Common Limit of a Quadruple Sequence and the Hypergeometric Function F_D of Three Variables". In: *Nagoya Math. J.* 195, pp. 113–124.

- Matsumoto, K. and T. Terasoma (2010). "Arithmetic-geometric means for hyperelliptic curves and Calabi-Yau varieties". In: *Internat. J. Math.* 21.7, pp. 939–949. ISSN: 0129-167X,1793-6519. DOI: 10.1142/S0129167X1000632X. URL: https://doi.org/10.1142/S0129167X1000632X.
- Yoshida, Masaaki (1997). *Hypergeometric functions, my love*. Vol. E32. Aspects of Mathematics. Modular interpretations of configuration spaces. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, pp. xvi+292. ISBN: 3-528-06925-2. DOI: 10.1007/978-3-322-90166-8. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-322-90166-8.