

6点で分岐する複素射影直線の4重被覆の周期積分

中野 竜之介

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程 1 年

2025 年 3 月 3 日

背景 (Gauss 1799)

$0 < b_0 < a_0$ に対し

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限 $M_G(a_0, b_0)$ に収束し, これは $\lambda = 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}$ から定まる $\tau(\lambda) \in \mathbb{H}$ によって

$$M_G(a_0, b_0) = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau(\lambda))^2} = \frac{a_0}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}\right)}$$

と表される. この等式の証明の核は,

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau) \text{ for } \forall \tau \in \mathbb{H},$$

$$\vartheta_{00}(\tau(\lambda'))^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda'\right) \text{ for } \forall \lambda' \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

が成り立つことである.

背景 (C. W. Borchardt 1876)

$0 < d_0 < c_0 < b_0 < a_0$ に対し拡張された 4 項平均

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, & b_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{c_n d_n}}{2}, \\ c_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n c_n} + \sqrt{b_n d_n}}{2}, & d_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n d_n} + \sqrt{b_n c_n}}{2}, \end{aligned}$$

から定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_{\text{Bor}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ に収束する. この場合にも, 適切な超楕円曲線と周期を考えることにより平均と同じ形の 2 倍公式が成り立つことから M_{Bor} が Riemann テータ定数と超楕円曲線の分岐点で書けることが知られている.

この場合におけるテータ定数と超幾何級数の関係も K. Matsumoto・T. Terasoma 2012 で示されている.

$0 < d_0 < c_0 < b_0 < a_0$ に対し拡張された 4 項平均

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, & b_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + d_n}{2} \frac{b_n + c_n}{2}}, \\ c_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + c_n}{2} \frac{b_n + d_n}{2}}, & d_{n+1} &= \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} \frac{c_n + d_n}{2}}, \end{aligned}$$

から定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_{\text{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ に収束する. M_{Mat} のテータ定数による表示は発見されておらず, 表示

$$\frac{1}{M_{\text{Mat}}(1, x_1, x_2, x_3)} = F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - x_1^2, 1 - x_2^2, 1 - x_3^2 \right),$$

を持つことが示されている.

目的

- ① テータ定数の変換則が平均と同じ形として現れるシンプレクティック群 (=Siegel 上半空間の自己同型群) の元とその作用を決定し, Matsumoto AGM M_{Mat} をテータ定数により表示.
- ② テータ定数と分岐点の関係を記述した Thomae 型の公式の発見.
- ③ テータ定数と Lauricella F_D の関係を記述した Jacobi の公式の類似の発見.

代数曲線 $C(x)$

Definition 1

複素多様体 X を,

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_j \neq x_k \text{ for } j \neq k, x_1, x_2, x_3 \neq 0, 1\},$$

と定める.

Definition 2

$x = (x_1, x_2, x_3) \in X$ に対して,

$$C(x): w^4 - z(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - 1) = 0,$$

と定める. $C(x)$ が定める非特異射影モデルも $C(x)$ と表す.

Proposition 3 (N.)

$C(x)$ は6点 $P_{x_j} = [1 : x_j : 0]$ ($j = 1, 2, 3$), $P_0 = [1 : 0 : 0]$, $P_1 = [1 : 1 : 0]$, $P_\infty = [0 : 0 : 1]$ で分岐する \mathbb{P}^1 の4重分岐被覆であり, 種数6の閉 Riemann 面である.

Definition 4

$\rho : \rho(z, w) = (z, iw)$ で定まる被覆変換,

$H_1(C(x), \mathbb{Z})^- : \rho^2 : H_1(C(x), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(C(x), \mathbb{Z})$ の (-1) -固有空間,

$H^1(C(x), \Omega^1)^- : \rho^2 : H^1(C(x), \Omega^1) \rightarrow H^1(C(x), \Omega^1)$ の (-1) -固有空間

とする.

部分格子 $L(x)$

Proposition 5 (N.)

次のような $\Sigma = \{A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4\} \subset H_1(C(x), \mathbb{Z})^-$ が存在:

- ① $L(x) = \langle \Sigma \rangle_{\mathbb{Z}}$ は $H_1(C(x), \mathbb{Z})^-$ の指数 4 の部分格子で, 交点行列は

$$Q = \begin{pmatrix} O_4 & -2I_4 \\ 2I_4 & O_4 \end{pmatrix}.$$

- ② $\rho^t(A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4) = \begin{pmatrix} & -U \\ U & \end{pmatrix}^t(A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4),$

$$\text{ただし, } U = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6 (N.)

$H^1(C(x), \Omega^1)^-$ の基底 ϕ_1, \dots, ϕ_4 と Σ から定まる周期行列

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau_A \\ \tau_B \end{pmatrix}, \quad \tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k \right), \quad \tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k \right)$$

は Riemann の双線型関係式を満たす. よって,

$$\tau = \tau_A \tau_B^{-1} \in \mathfrak{S}_4 = \{M \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C}) \mid {}^t M = M, \mathrm{Im}(M) > 0\}.$$

複素超球の \mathfrak{S}_4 への埋め込み

Proposition 7 (N.)

① $v = \left(\int_{B_1} \phi_j \right)$ とするとき,

$$\tau = iU \left(I_4 - \frac{2}{t_v U v} v^t v U \right),$$

② $v \in \mathbb{B}_3^U = \{ \xi \in (\mathbb{P}^1)^3 \mid \xi^* U \xi < 0 \},$

③ $s \in \mathbb{B}_3^U \iff iU \left(I_4 - \frac{2}{t_s U s} s^t s U \right) \in \mathfrak{S}_4.$

こうして埋め込み $\iota: \mathbb{B}_3^U \rightarrow \mathfrak{S}_4$ が定まる.

周期写像

Definition 8

配置 $x \in X$ に対し上の $v \in \mathbb{B}_3^U$ を対応させる局所一価正則写像を $p: X \rightarrow \mathbb{B}_3^U$ としこれを周期写像と呼ぶ.

周期写像 p のモノドロミー群を Γ とする.

M. Yoshida 1997, 私説 超幾何関数 6 章の結果を適応すると次が従う:

Proposition 9

Γ は \mathbb{B}_3^U の稠密開部分集合 $(\mathbb{B}_3^U)^\circ$ に真性不連続に作用し, $\tilde{p}: X \rightarrow (\mathbb{B}_3^U)^\circ / \Gamma$ は同型写像.

復習: $P_\infty = [0 : 0 : 1]$

Definition 10

写像 $\psi: X \rightarrow J(C(x)) = \mathbb{C}^4/(\mathbb{Z}^4\tau + \mathbb{Z}^4)$ を,

$$\psi(P) = \left(\int_{(1-\rho^2)\gamma} \phi_1, \dots, \int_{(1-\rho^2)\gamma} \phi_4 \right), \quad P \in X$$

と定める. ただし γ は P_∞ から P への経路とする.

Definition 11

指標 $a, b \in \mathbb{Z}^4$ に対し, Riemann テータ関数 $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\zeta, \tau)$ を

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^4} \mathbf{e} \left(\frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{2}a \right) \tau \left(m + \frac{1}{2}a \right) + \left(\zeta + \frac{1}{2}b \right)^t \left(m + \frac{1}{2}a \right) \right)$$

で定める. ただし, $\mathbf{e}(t) = \exp(2\pi it)$ とする.

以後, $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}((0, 0, 0, 0), \tau)$ とする.

Definition 12

$\mu_0 = (0, 0, 0, 0)$, $\mu_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\mu_2 = (1, 0, 0, 0)$, $\mu_3 = (1, 1, 1, 1)$ とし, $\vartheta_j(\zeta, \tau) = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \mu_j U \\ \mu_j \end{smallmatrix} \right](\zeta, \tau)$ と表す. また, $F_j(P) = \vartheta_j(\psi(P), \tau)$ とする.

Proposition 13 (N.)

$R_{jk}(P) = F_j(P)/F_k(P)$ とするとき, R_{01} , R_{23} は z に関する有理型関数

$$R_{01}(z) = \frac{\vartheta_0(\tau)}{\vartheta_1(\tau)} \frac{z - s}{z - t}, \quad R_{23}(z) = \frac{\vartheta_2(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \frac{z - s'}{z - t'},$$

であり, s, t, s', t' は

$$s + t = 2, \quad st = x_1, \quad s' + t' = 2, \quad s't' = x_2 + x_3 - x_2x_3,$$

により決定される.

Theorem 14 (N.)

$$x_1 = \frac{4\vartheta_0(\tau)^2\vartheta_1(\tau)^2}{(\vartheta_0(\tau)^2 + \vartheta_1(\tau)^2)^2}, \quad \frac{x_2 - x_3}{1 - x_3} = \frac{4\vartheta_2(\tau)^2\vartheta_3(\tau)^2}{(\vartheta_2(\tau)^2 + \vartheta_3(\tau)^2)^2}$$

Proof.

$$\left(1 + \frac{\vartheta_0(\tau)^2}{\vartheta_1(\tau)^2}\right) \left(1 + \frac{\vartheta_1(\tau)^2}{\vartheta_2(\tau)^2}\right) = \left(1 + \frac{t}{s}\right) \left(1 + \frac{s}{t}\right) = \frac{(s+t)^2}{st} = \frac{4}{x_1}.$$

□

この τ に X における x_1 と x_2 , x_1 と x_3 の置換と対応する $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q}(i))$ の元をそれぞれ作用させると次を得る:

Theorem 15 (N.)

$$\begin{aligned}
 m_4 &= (0010; 0001), & m_5 &= (1010; 0101), \\
 m_6 &= (0110; 1001), & m_7 &= (1101; 1110), \\
 m_8 &= (0011; 0000), & m_9 &= (1011; 0100), \\
 m_{10} &= (0111; 1000), & m_{11} &= (1100; 1111),
 \end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{4\vartheta_4(\tau)^2\vartheta_5(\tau)^2}{(\vartheta_4(\tau)^2 + \vartheta_5(\tau)^2)^2}, & \frac{x_3 - x_1}{1 - x_3} &= \frac{4\vartheta_6(\tau)^2\vartheta_7(\tau)^2}{(\vartheta_6(\tau)^2 + \vartheta_7(\tau)^2)^2}, \\
 x_3 &= \frac{4\vartheta_8(\tau)^2\vartheta_9(\tau)^2}{(\vartheta_8(\tau)^2 + \vartheta_9(\tau)^2)^2}, & \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1} &= \frac{4\vartheta_{10}(\tau)^2\vartheta_{11}(\tau)^2}{(\vartheta_{10}(\tau)^2 + \vartheta_{11}(\tau)^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Theorem 16 (主定理 N.)

上の x_1, x_2, x_3 のテータ定数による表示は $\tilde{p}: X \rightarrow (\mathbb{B}_3^U)^\circ / \Gamma$ の逆写像 $[v] \mapsto (x_1(v), x_2(v), x_3(v))$ を与える.

以上の内容と Matsumoto AGM の関連は次のようになっている:

Theorem 17 (N.)

$C = \frac{1}{1-i} \left(\text{diag}(1, 2) \oplus \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \right) \in \text{Aut}(\mathbb{B}_3^U)$, $y_j(v)^2 = 1 - x_1(v)$ とするとき,

$$y_1(Cv)^2 = \frac{4(y_1 + y_2)(y_3 + 1)}{(y_1 + y_2 + y_3 + 1)^2}, \quad y_2(Cv)^2 = \frac{4(y_1 + y_3)(y_2 + 1)}{(y_1 + y_2 + y_3 + 1)^2},$$

$$y_3(Cv)^2 = \frac{4(y_1 + 1)(y_2 + y_3)}{(y_1 + y_2 + y_3 + 1)^2},$$





が成立.

Gauss・Borchardt の場合には $\tau \rightarrow 2\tau$ で平均が 1 つ進む形が現れていたが, Matsumoto の場合には

$$\tau \rightarrow j(C) \cdot \tau = (U \operatorname{Re}(C)U\tau + U \operatorname{Im}(C))(-\operatorname{Im}(C)U\tau + \operatorname{Re}(C))^{-1}$$

がそのような変換となっていることから Matsumoto AGM のテータ定数による表示はほぼ完了している.

よって超幾何級数とテータ定数が周期写像を經由して結びつく Jacobi の公式に対応する公式と Thomae 型の公式を発見することにより予想は証明される.

-  C. W. Borchardt (1876). “Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen.”. *Berl. Monatsber* **53**, 611–621.
-  K. Matsumoto and T. Terasoma (2012). “Thomae type formula for K3 surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines.”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* **2012.669**, 121–149.
-  M. Yoshida (1997). “Hypergeometric functions, my love.”. **E32**. Aspects of Mathematics. Modular interpretations of configuration spaces. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.
-  T. Kato and K. Matsumoto (2009). “The common limit of a quadruple sequence and the hypergeometric function F_D of three variables.”. *Nagoya Math. J.* **195**, 113–124.