以2 l 为周期的函数的傅里叶展开

周期为 $2l$ 函数 $f(x)$

$\Downarrow$ 变量代换 $z=\dfrac{\pi x}{l}$

周期为 2π 函数 $F(z)$

$\Downarrow$ 将$F(z)$ 作傅氏展开

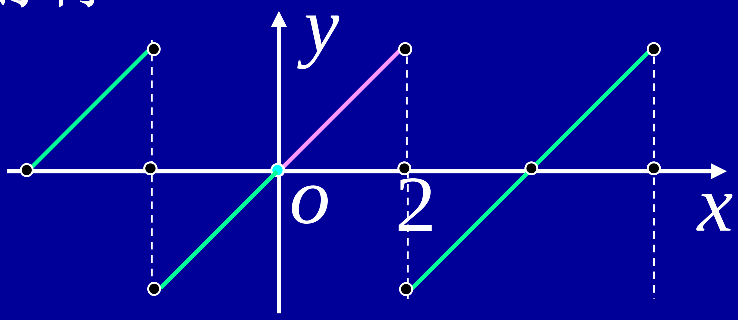
$f(x)$ 的傅氏展开式

例. 把 $f(x)=x\ \ (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数; (2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

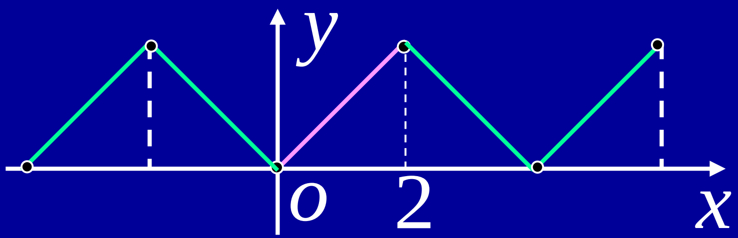
$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\qquad(0<x<2)$$

(2) 将 $f(x)$ 作偶周期延拓, 则有



$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

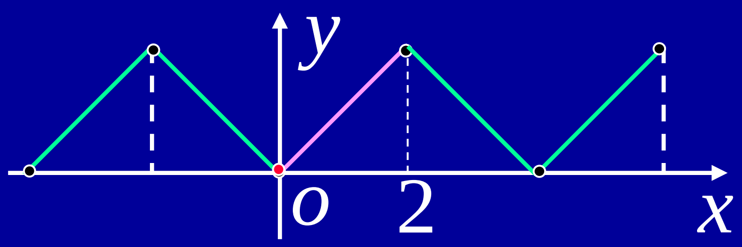
$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$(0 < x < 2)$$

$$f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$

说明: 此式对 $x=0$ 也成立,



据此有 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

当函数定义在任意有限区间上时，其傅里叶展开方法:

方法1 $f(x),\ x\in[a,b]$

$$\Big\downarrow \ \text{令 } x=z+\frac{b+a}{2},\ \text{即 } z=x-\frac{b+a}{2}$$

$$F(z)=f(x)=f\Big(z+\frac{b+a}{2}\Big),\quad z\in\Big[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}\Big]$$

$$\Big\downarrow \ \text{周期延拓}$$

$F(z)$ 在 $\Big[-\dfrac{b-a}{2},\dfrac{b-a}{2}\Big]$ 上展成傅里叶级数

$$\Big\downarrow \ \text{将 } z=x-\frac{b+a}{2}\ \text{代入展开式}$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅里叶级数

方法2 $f(x)$, $x \in [a,b]$

$$\Big\downarrow \text{令 } x = z + a, \text{ 即 } z = x - a$$

$$F(z) = f(x) = f(z+a), \quad z \in [0, b-a]$$

$$\Big\downarrow \text{奇或偶式周期延拓}$$

$F(z)$ 在 $[0, b-a]$ 上展成正弦或余弦级数

$$\Big\downarrow \text{将 } z = x - a \text{ 代入展开式}$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数