大连理工大学
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Fourier级数的概念

主讲人：刘秀平 教授

三角函数系的正交性

三角函数系的正交性

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$(1)

中的每个函数周期为2π，且满足：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, m \neq n, \qquad （2）$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0, m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, m \neq n.$$

公式（2）表明，三角函数系（1）任意

两个相异函数乘积在[-π，π]上的积分为零。

这个性质称为三角函数系在区间[-π，π]上的正交性。

另外，易知

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi.$$

2.以2π为周期的函数的Fourier级数

假设以2π为周期的函数$f(x)$能展成三角级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad （3）$$

并假设（3）右端可以逐项积分。对（3）两端积分得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx). \qquad （4）$$

由三角函数系的正交性，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

若以$\cos kx$乘以（3）两端，再在[-π，π]上积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos kx dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx). \qquad （5）$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx.\text{同理，}\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Fourier级数

称

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx, k = 0,1,2,\cdots \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx, k = 1,2,\cdots \end{cases} \qquad (6)$$

为函数$f(x)$的fourier系数。以$f(x)$的fourier系数为系数做成的三角级数称为函数$f(x)$的fourier级数，记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (7)$$

例题1 设$f(x)$以2π为周期，它在（$-\pi$，π]上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x < 0, \\ x, 0 \le x < \pi, \end{cases}$$ 求$f(x)$的fourier级数。

解：求fourier系数。由

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kxdx = \begin{cases} -\dfrac{2}{k^2\pi}, k\text{为奇数}, \\ 0, k\text{为偶数}, \end{cases}, k = 1,2,\cdots.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kxdx = \frac{(-1)^{k+1}}{k}, k = 1,2,\cdots.$$

所以$f(x)$的fourier级数为

$$\frac{\pi}{4} - (\frac{2}{\pi}\cos x - \sin x) - \frac{1}{2}\sin x - (\frac{2}{9\pi}\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x) - \cdots$$

Fourier级数

例题2设$f(x)$以2π为周期，它在（$-\pi$，π]上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, -\pi \le x < 0,\\ 1, 0 \le x < \pi,\end{cases}$$,求$f(x)$的fourier级数。

解：求fourier系数。由

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}1dx]=0.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}-\cos kxdx+\int_{0}^{\pi}\cos kxdx]=0.$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kxdx=\frac{2}{k\pi}\cos kx\Big|_{\pi}^{0}$$

$$=\frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)=\begin{cases}\dfrac{4}{k\pi}, k\text{为奇数},\\ 0, k\text{为偶数},\end{cases}, k=1,2,\cdots.$$

所以$f(x)$的fourier级数为$\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$.

例题3设$f(x)$以2π为周期，它在（$-\pi$，π]上的表达式为

$f(x)=x^2$,求$f(x)$的fourier级数。

解：首先由$f(x)=x^2 \Rightarrow f(x)\sin kx$为奇函数

$$\Rightarrow b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx=0, k=1,2,\cdots \text{其次}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kxdx$$

$$=\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 d\sin kx=-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin kxdx$$

$$=\frac{2}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xd\cos kx=\frac{2}{k^2\pi}(x\cos kx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{4(-1)^k}{k^2}, k=1,2,\cdots.$$

所以x^2的fourier级数为$\dfrac{1}{3}\pi^2+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^k}{k^2}\cos kx.$

谢谢!