幂级数的基本概念

1、**幂级数的定义**：形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \qquad (x\in(-\infty,+\infty))$$

的函数项级数称为 $(x-x_0)$ 的**幂级数**，其中，x_0 是某个确定的值，$a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots$，都是常数，叫做幂级数的**系数**.

2、**幂级数的理解**：如果对 $(-\infty,+\infty)$ 中的一点 x_1，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ 收敛，则称 x_1 为幂级数的**收敛点**；若这个数项级数发散，则称 x_1 为幂级数的**发散点**，所有收敛点组成的集合称为幂级数的**收敛域**，所有发散点组成的集合称为幂级数的**发散域**.

当 $x_0=0$ 时，上述级数变成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (x\in(-\infty,+\infty)),$$

称为 x 的幂级数. 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，令 $x-x_0=t$，该级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$，可见这两个级数可互相转化. 因此，不失一般性，只需讨论幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 即可.

3、**幂级数收敛域的特点**：由于幂级数仅在收敛域上才有意义，因此我们首先需要求出幂级数的收敛域。那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域有哪些特点呢？显然，当 $x=0$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛于 a_0；当 $x=x_0$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 收敛于 a_0，可见幂级数的收敛域是非空的.

例 1、对于等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,$$

由等比级数性质易知，它在 $-1<x<1$ 时收敛，而在 $|x| \geqslant 1$ 时发散，即它的收敛域为以原点为对称的区间 $(-1,1)$，其和函数为 $\frac{1}{1-x}$.

例 2、 试求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛域.

解 此级数的一般项$u_n(x)=\frac{x^n}{n+1}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\right|\Big/\left|\frac{x^n}{n+1}\right|=|x|.$$

根据比值判别法，当$|x|<1$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n+1}\right|$收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$收敛；而当$|x|>1$时，$|u_n(x)|\not\to 0$故$u_n(x)\not\to 0$，此时$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$发散.

当$x=1$，幂级数成为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

它是调和级数，发散.

当$n=-1$时，幂级数成为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots,$$

它是收敛的.

因此，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛域是$[-1,1)$. 它的收敛域若不计区间端点，也是以原点为对称的区间，上述幂级数收敛特点虽然是由两个特例得到的，但它具有一般性。