§8.2. 平面曲线积分与路径无关的条件

1. 定义：若 $\int_{L:A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{l}$ 在区域 D 内与路径无关，则称 $\vec{F}$ 在 D 上为保守场。

2. 有势场：若存在可微函数 $\varphi(x,y)$ 使 $\vec{F}(x,y)=\{\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\}$
则称 $\vec{F}$ 是有势.

Note 1 若 $\vec{F}=\{P,Q\}$ 有势 $\varphi(x,y)$ 则 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y)$　$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y)$.

2. 若 $\vec{F}$ 有势，势函数 $\varphi(x,y)$ 不唯一.

3. 若 $\vec{F}$ 有势函数 $\varphi(x,y)$　$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=P\,dx+Q\,dy$
即 $P\,dx+Q\,dy$ 是某一个函数的全微分.

4. 若 $\vec{F}$ 是有势的，则 $\int_{L:A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_{L:A\to B}P\,dx+Q\,dy=\int_{L:A\to B}d\varphi=\varphi(x_B,y_B)-\varphi(x_A,y_A)$
(相当于 N-L 公式推广).

定理1：$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 有界闭区域　$\vec{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$.　$P,Q\in C(D)$.

则 (1)(2)(3)(4) 等价.

(1) $\vec{F}(x,y)$ 是 D 上之保守场.

(2) 对 D 内任何封闭曲线 C：$\oint_{C^+}\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$

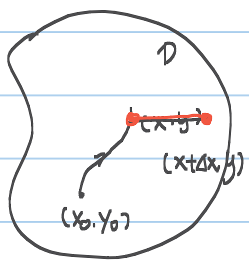
(3) $\vec{F}(x,y)$ 有势函数

(4) $P\,dx+Q\,dy$ 是某个函数全微分.

证明：　(1)⟺(2)　(3)⟺(4)　显然.　下证 (1)⟺(4)

(1)⟹(4)　令 $\varphi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(s,t)\,ds+Q(s,t)\,dt$

f连续
$F(x)=\int_0^{x}f(t)\,dt$ 是 f 的一个原函数



下证 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P$　$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x}$$

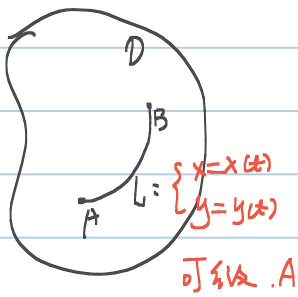
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(s,t)ds+Q(s,t)dt - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(s,t)ds+Q(s,t)dt\right]$$

$$\overset{\text{保持切}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(s,t)ds+Q(s,t)\underline{\underline{dt}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} P(s,y)ds = \frac{\partial P}{\partial x}.$$ 同理 $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q.$

(4) $\Rightarrow$ (1). 假设 $Pdx + Qdy$ 是某个函数全微分.

$P, Q \in C(D)$. 不妨设 $d\varphi = Pdx+Qdy \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$



可设 A 对应 $t=\alpha$
B 对应 $t=\beta$

$$\int_{L: A\to B} Pdx+Qdy = \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right]dt$$

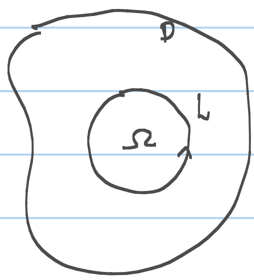
$$= \int_\alpha^\beta \underline{\frac{d}{dt}\boxed{\varphi(x(t),y(t))}}\, dt$$

$$= \varphi(x(\beta),y(\beta)) - \varphi(x(\alpha),y(\alpha)).$$

即 积分与路径无关.

定理 2: D 是单连通区域, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 则

$\int_{L: A\to B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 与路径无关.

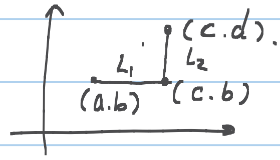


证明: $$\oint_{L^+} Pdx+Qdy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= 0.$$

即 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关.

例：计算 $\int_{L:(a,b)\to(c,d)} x^2y\,dy + xy^2\,dx$.



解：$I = \int_{L:(a,b)\to(c,d)} xy^2\,dx + x^2y\,dy$

$P(x,y) = xy^2$.　　$Q(x,y) = x^2y$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$　　$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$. 从而 积分与路径无关

从而 $I = \int_{L_1^+} + \int_{L_2^+} = \int_a^c xb^2\,dx + \int_b^d c^2y\,dy$

$= \frac{1}{2}b^2(c^2-a^2) + \frac{1}{2}c^2(d^2-b^2)$

$= \frac{1}{2}(c^2d^2 - a^2b^2)$.