姓名：__________

学号：__________

院系：__________

_____ 级_____ 班

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称：线性代数与解析几何　　试卷：A　　考试形式：闭卷

授课院（系）：数学科学学院　考试日期：2016 年 1 月 15 日　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
标准分	30	10	10	10	10	10	8	6	6	100
得　分										

装

得　分

一、（每小题 3 分，共 30 分）填空题

1. 设 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T=$ $\underline{\begin{bmatrix}2&-1&3\\4&-2&6\\6&-3&9\end{bmatrix}}$

2. $\begin{vmatrix}1&2&2&2\\k&k&0&0\\k^2&0&k&0\\k^3&0&0&k\end{vmatrix}=$ $\underline{-k^3-2k^4-2k^5}$

订

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=$ $\underline{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})}$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k+1&1&1&1\\2&k+2&2&2\\3&3&k+3&3\\4&4&4&k+4\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=3$，则 k 需满足 $\underline{k=-10}$

5. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 都是向量空间 V 的基，$\boldsymbol{b}_1=[1,-1,2]^T$，$\boldsymbol{b}_2=[3,1,-1]^T$，从 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 到 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{a}_1=$ $\underline{[4,0,1]^T}$，$\boldsymbol{a}_2=$ $\underline{[5,-1,3]^T}$

线

6. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+9x_2^2+2x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 为正定二次型的充要条件是 k 满足 $\underline{0<k<3}$

7. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2015}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2016}=$ $\underline{\begin{bmatrix}1&1&2018\\1&1&2017\\0&1&3\end{bmatrix}}$

8. 已知方程 $ax^2+ay^2+az^2+4xy+4xz+4yz=b$ 所表示的曲面为单叶双曲面，则 a 和 b 需满

足 $\underline{-4<a<2且b<0}$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 既是正交矩阵又是正定矩阵，则 $\boldsymbol{AA}^*=$ $\underline{\boldsymbol{E}}$

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵， $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A},|\boldsymbol{A}|>0,tr(\boldsymbol{A})<0$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$ $\underline{3}$

得　分

二、（每小题 2 分，共 10 分）选择题

1.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的 $1,2$ 列对调得到 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}=$（　B　）

（A）$\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

2. 下列选项正确的是（　A　）

（A）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.　（B）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

（C）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.　（D）若 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^*$， $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

3. 对任意 a,b,c，下列向量组中线性无关的是（　C　）

（A）$(a,1,2),(2,b,3),(0,0,0)$　（B）$(b,1,1),(1,a,3),(2,3,c),(a,1,c)$

（C）$(1,a,1,1),(1,b,1,0),(1,c,0,0)$　（D）$(1,1,1,a),(2,2,2,b),(0,0,0,c)$

4. 设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是四阶方阵，$(1,0,1,0)^T$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系可为（　D　）

（A）α_1,α_2　（B）α_1,α_3　（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

5.下列矩阵中不可相似对角化的是（　C　）

（A）$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

得　分

三、（10 分）（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\2&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 求 $|\boldsymbol{B}|$.

解：（1）

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$ …………5 分（思路正确给 3 分，只有 1 个数算错给 4 分）

（2）由 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{A}$

$$|\boldsymbol{B}|=\frac{|2\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|}$$ …………3 分

$|\boldsymbol{A}|=-4,|2\boldsymbol{A}|=-32,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=-1,|\boldsymbol{B}|=32$ …………2 分

得　分

四、（10 分）求向量组 $\boldsymbol{a}_1=[1,3,2,0]^T$,$\boldsymbol{a}_2=[2,-1,4,1]^T$,$\boldsymbol{a}_3=[-3,5,-6,-2]^T$,

$\boldsymbol{a}_4=[2,-1,0,1]^T$,$\boldsymbol{a}_5=[7,0,6,3]^T$ 的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解：$$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5]=\begin{bmatrix}1&2&-3&2&7\\3&-1&5&-1&0\\2&4&-6&0&6\\0&1&-2&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ …………4 分

秩为 3 …………2 分

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 是一个极大无关组 …………2 分

$\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_4$ …………2 分

得　分

五、（10 分）设平面 π_1 和 π_2 的方程分别为 $x+2y+z-2=0$ 和 $-x+y+z-4=0.$

（1）求平面 π_1 和 π_2 的交线 L 的点向式方程.

（2）求经过平面 π_1 和 π_2 的交线且与平面 π_1 垂直的平面 π_3 的方程。

解：（1）交线 L 的点向式方程为 $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-3}$ …………5 分

（2）$4x-y-2z+10=0$ …………5 分

得　分

六、（10 分）当 k 满足什么条件时，方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=1\\2x_1+kx_2+3x_3=1\\-kx_1-2x_2\quad=4\end{cases}$

有唯一解；无解；有无穷多解？在有无穷多解时，求出其通解.

解：$\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right]=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\2&k&3&1\\-k&-2&0&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&k+2&1&-1\\0&-k-2&k&k+4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&k+2&1&-1\\0&0&k+1&k+3\end{bmatrix}$………2 分

当$k\neq-2$且$k\neq-1$时，有唯一解 …………2 分
当$k=-1$时，无解 …………2 分
当$k=-2$时，有无穷多解 …………2 分

$\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right]\to\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，通解为$\boldsymbol{x}=c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$ …………2 分

得　分

七、（8 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}$，求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解：特征值为$\lambda_1=-1$（2 重），$\lambda_2=0$（单） …………3 分

$\lambda_1=-1$对应的特征向量为$\boldsymbol{p}_1=\left[1,1,0\right]^T,\boldsymbol{p}_2=\left[1,0,1\right]^T$（满足：$-x_1+x_2+x_3=0$）

$\lambda_2=0$对应的特征向量为$\boldsymbol{p}_3=\left[1,1,-1\right]^T$ …………3 分

$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$ …………2 分

得　分

八、（6 分）设$n\geq2,\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为线性无关的$m$元列向量组，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，$\beta_k=2(\alpha-\alpha_k)$，其中$k=1,2,\cdots,n$，证明：向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关。

证：$\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right]\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&2&\cdots&2\\2&0&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&\cdots&0\end{bmatrix}$…………2 分

因为$\left|\boldsymbol{P}\right|=2(n-1)(-2)^{n-1}$，$\boldsymbol{P}$可逆，所以$r(\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right])=r(\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right])=n$

向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关。…………4 分

得　分

九、（6 分）设α,β为正交的三元单位列向量，证明：$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$与$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$相似。

证：由α,β为正交的三元单位列向量，得$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=0,\alpha^T\alpha=\beta^T\beta=1$

$A\alpha = \beta, A\beta = \alpha$ …………1 分

$A(\alpha+\beta) = \alpha+\beta, A(\alpha-\beta) = -(\alpha-\beta)$

由 α, β 为正交的单位列向量还可知，$\alpha+\beta \neq 0, \alpha-\beta \neq 0$

所以 $1, -1$ 为 A 的特征值 …………3 分

由 $r(A) = r(\alpha\beta^T + \beta\alpha^T) \leq r(\alpha\beta^T) + r(\beta\alpha^T) \leq 2$ 可知，0 为 A 的特征值…………1 分

由于 A, B 为对称矩阵，对称矩阵相似的充要条件是特征值相同，B 的特征值也是 $1, -1, 0$
所以 A 与 B 相似。 …………1 分