**1.** 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$

解：$\int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x = x\big((1+\sin x)\ln x\big)' - (1+\sin x)\ln x + c$

$$= x\left(\cos x\ln x + \frac{1+\sin x}{x}\right) - (1+\sin x)\ln x + c$$

**2.** 设 $f(\sin^2 x) = \dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x$

解：令 $x=\sin^2 t, t\in[0,\frac{\pi}{2})$，

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin t}{\cos t} f(\sin^2 t) 2\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{t}{\sin t} 2\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$= 2\int t\sin t\mathrm{d}t = 2(-t\cos t + \int \cos t\mathrm{d}t)$$

$$= 2(-t\cos t + \sin t) + c$$

$$= 2(-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x}) + c$$

**3.** 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$

解：$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x = x^3 f(x) - 3\int x^2 f(x)\mathrm{d}x = x^3\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' - 3\int x^2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'\mathrm{d}x$

$$= x^3\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) - 3\int x^2\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= x^2\cos x - x\sin x - 3\int (x\cos x - \sin x)\mathrm{d}x$$

$$= x^2\cos x - x\sin x - 3\int x\cos x\mathrm{d}x + 3\int \sin x\mathrm{d}x$$

$$= x^2\cos x - 4x\sin x - 6\cos x + c$$

**4.** 已知 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，求 $\int\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f'(x)}\right]\mathrm{d}x$

解：$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$$\int\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f'(x)}\right]\mathrm{d}x=\int\left[\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x+\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}(e^x+e^{-x})+\int\frac{1}{e^x-e^{-x}}\mathrm{d}(e^x-e^{-x})$$

$$=\ln(e^x+e^{-x})+\ln\left|e^x-e^{-x}\right|+c==\ln\left|e^{2x}-e^{-2x}\right|+c$$

**5.** 设 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$

解：$\int xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=xF'(x)-F(x)+c$

**6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$$

因为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以在 $[0,1]$ 上可积．现在对

$[0,1]$ $n$ 等分，$[0,\frac{1}{n}]$，$[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$，$\cdots$，$[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}]$，$x_0=0$，$x_1=\frac{1}{n}$，$\cdots$，$x_n=\frac{n}{n}$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$$

**7.** $\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}=$ （ ）.

A. 0 .　　　　B. $\frac{1}{6}$ .　　　　C. $\frac{1}{5}$ .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

**8.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$$

**9.** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$ ， $f(x)>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\cdot f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}$$

**10.** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdot\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdot\frac{n}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdot\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$$

11. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负、连续, 且不恒为零，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证明：由已知，至少存在 $x_0 \in [a,b]$，使 $f(x_0) > 0$

若 $x_0 \in (a,b)$，因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$，由保号性知，存在 $\delta > 0$，

$x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$，使 $f(x) > 0$，于是由积分中值定理有

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)2\delta > 0，\quad \xi \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x > 0$$

若 $x_0 = a$，即 $f(a) > 0$

因为 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) > 0$，由保号性知，存在 $\delta > 0$，$x \in [a, a+\delta]$，

使 $f(x) > 0$，于是由积分中值定理有

$$\int_a^{a+\delta} f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\delta > 0，\quad \xi \in [a, a+\delta]$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x > 0$$

若 $x_0 = b$，即 $f(b) > 0$ 可类似证明.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$