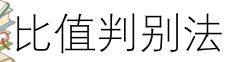


## 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

主讲人: 刘秀平 教授



定理(比值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数,  $u_n > 0$  (n > N),

则(I)当 $\rho$ <1时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

- (II) 当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$ )时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。
- (III) 当 $\rho$ =1时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛,可能发散。

证明: (I) 首先,由 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$ 知,

対 
$$\epsilon = \frac{1-\rho}{2} > 0, \exists N, \dot{\exists} n \ge N \text{ bb}, 有$$

$$-\frac{1-\rho}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho < \frac{1-\rho}{2}.n \ge N \tag{1}$$

即 
$$u_{n+1} < \frac{1+\rho}{2} u_n \stackrel{\triangle}{=} \overline{\rho} u_n, n \ge N$$
 (2)   
其中  $\overline{\rho} = \frac{1+\rho}{2} < 1$ .



因此,有
$$u_{N+1} < \overline{\rho}u_N$$
  
 $u_{N+2} < \overline{\rho}u_{N+1} < \overline{\rho}^2u_N$   
 $u_{N+3} < \overline{\rho}u_{N+2} < \overline{\rho}^3u_N$   
…

$$u_{N+m} < \cdots < \overline{\rho}^m u_N, \forall m.$$

由比较判别法知,级数 $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ 是收敛,

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$
收敛。

(II) 当
$$\rho > 1$$
(或 $\rho = +\infty$ ) 时,  
由 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$ 知,

対 
$$\in = \frac{\rho - 1}{2} > 0, \exists N, \dot{\exists} n \ge N$$
时, 有
$$-\frac{1 - \rho}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho < \frac{1 - \rho}{2}.n \ge N$$
 (3)

即 
$$u_{n+1} > \frac{1+\rho}{2} u_n \stackrel{\triangle}{=} \overline{\rho} u_n, n \ge N$$
 (4)  
其中  $\overline{\rho} = \frac{1+\rho}{2} > 1$ .

因此,有
$$u_{N+1} > \overline{\rho}u_N$$
 $u_{N+2} > \overline{\rho}u_{N+1} > \overline{\rho}^2u_N$ 
 $u_{N+3} > \overline{\rho}u_{N+2} > \overline{\rho}^3u_N$ 
 $\vdots$ 
 $u_{N+m} > \cdots > \overline{\rho}^m u_N, \forall m.$ 

由比较判别法知级数 $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ 是发散的,

所以级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$
发散。

(III) 当 $\rho$ =1时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛,可能发散。

例如
$$u_n = \frac{1}{n^p} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1.$$



## 比值判别法

例题1 判断下列级数的敛散性

$$1.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad 2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} \quad 3.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} \quad 4.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$\text{$\mathbb{H}$: } 1.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \implies u_n = \frac{1}{n!}, \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

因此,由比值判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  是收敛的。

$$3.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}, \Rightarrow u_n = \frac{(2n)!!}{n^n},$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+2)!!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(2n)!!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

因此,由比值判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}$  是收敛的。



$$2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} \Rightarrow u_n = \frac{n!}{e^n}, \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n!} = +\infty.$$

因此,由比值判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$  是发散的。

$$4.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n}}{(n!)^{2}}, \Rightarrow u_{n} = \frac{n^{n}}{(n!)^{2}},$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^{2}} \frac{(n!)^{2}}{n^{n}}$$

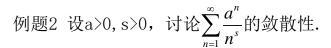
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+1)} \frac{(n+1)^{n}}{n^{n}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+1)} (1 + \frac{1}{n})^{n}$$

=0<1.

因此,由比值判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$  是收敛的。





解: 首先
$$u_n = \frac{a^n}{n^s}$$
.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^s} \frac{n^s}{a^n}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{an^s}{(n+1)^s} = a.$$

所以,当
$$a < 1$$
时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 是收敛的.

当
$$a > 1$$
时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 是发散的.

当
$$a=1$$
时,原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ .

所以,当
$$s > 1$$
时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 是收敛的.

当
$$s \le 1$$
时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 是发散的.



例题3.判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ 的敛散性.

解:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} \Rightarrow u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$$
,考虑比值法:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{e^n n!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{en^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} = 1.$$

至此,比值法失效。但是我们知道 $(1+\frac{1}{n})^n \uparrow \rightarrow e$ ,

因此有 
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1.$$

表明, $u_{n+1} > u_n$ .又 $u_1 = e$ ,于是当 $n \to \infty$ 时, $u_n \neq 0$ ,所以不满足级数收敛的必要条件,

因此,级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$
是发散。



谢谢!