正项级数敛散性基本定理和 $p-$ 级数敛散性

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n \geqslant 0, n=1,2,\cdots)$ 的部分和为 S_n，显然部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的，也就是

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots.$$

根据数列的单调有界原理，可知如果这个数列具有上界，那么它必收敛；如果这个数列没有上界，那么它必发散. 由此便获得正项级数收敛的基本定理.

基本定理 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 证明 $p-$ 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$, 当 $p \le 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

证明 当 $p \le 1$ 时

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

上式右端是调和级数的部分和，在前面已证明

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = +\infty .$$

因而 $\{S_n\}$ 无上界，所以当 $p \leqslant 1$ 时， $p-$ 级数发散.

当 $p>1$ 时，由于 $\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p} dx < \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p} dx$，于是

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^2 \frac{dx}{x^p} + \int_2^3 \frac{dx}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^p}$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} < 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{1}{p-1} .$$

即 $\{S_n\}$ 有上界. 由基本定理可知，当 $p>1$ 时， $p-$ 级数收敛.

$p-$ 级数在判断正项级数的敛散性方面有着重要的应用. 它的结论应该牢记.