空间曲线的切线与法平面

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

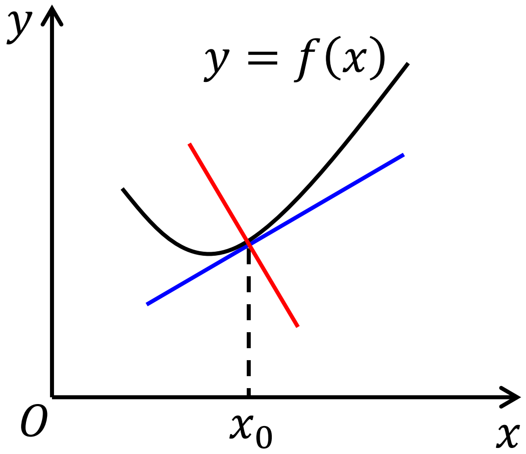
回 顾：

平面曲线的切线与法线

平面光滑曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处

切线方程： $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程： $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$



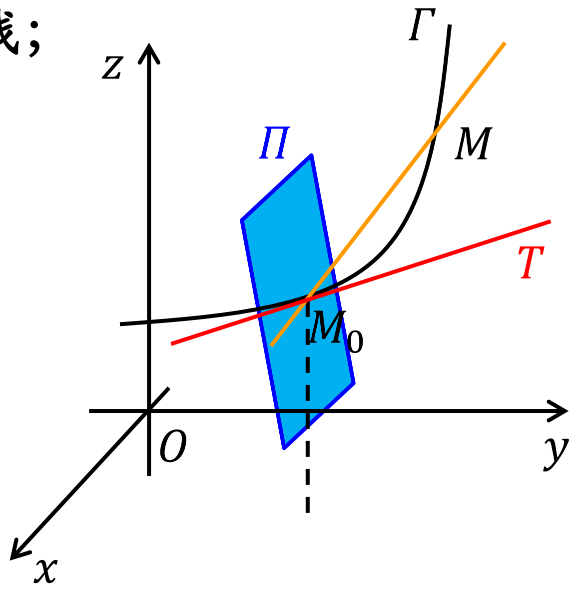
基本概念:

设 M_0 为空间曲线 Γ 上一定点，M 为曲线 Γ 上另一点。

割线: 过 M_0M 的直线，称为曲线 Γ 的割线;

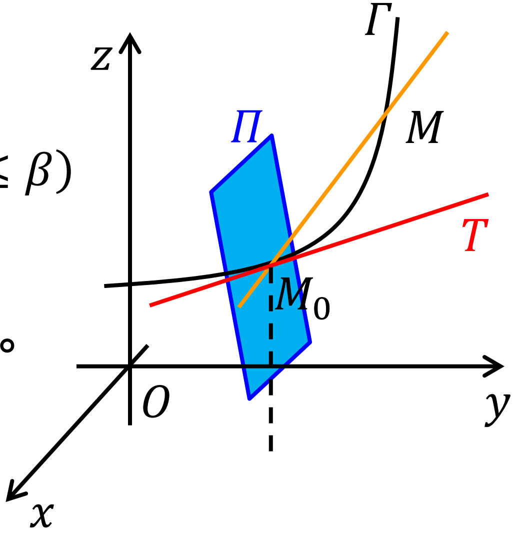
切线: 当 M 沿曲线 Γ 趋于 M_0 时，
割线 M_0M 的极限位置 M_0T，
称为曲线 Γ 的切线;

法平面: 过 M_0 且与切线 M_0T 垂直的
平面 Π ，称为曲线 Γ 在 M_0 点
的法平面。



空间曲线的切线与法平面:

1. 曲线方程为参数方程



设曲线 Γ 的参数方程为: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

其中 $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$ 可导，且导数不全为 0。

设: $t = t_0$ 对应 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$t = t_0 + \Delta t$ 对应 $M(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z)$

割线 M_0M 的方程为: $\dfrac{x - x_0}{\Delta x} = \dfrac{y - y_0}{\Delta y} = \dfrac{z - z_0}{\Delta z}$

割线 M_0M 的方程为：$\dfrac{x-x_0}{\Delta x}=\dfrac{y-y_0}{\Delta y}=\dfrac{z-z_0}{\Delta z}$

在上述方程的分母同除以 Δt，即：$\dfrac{x-x_0}{\Delta x/\Delta t}=\dfrac{y-y_0}{\Delta y/\Delta t}=\dfrac{z-z_0}{\Delta z/\Delta t}$

当 M 沿曲线 Γ 趋于 M_0 时，相应有 $\Delta t\to 0$，则有：

切线 M_0T 的方程为：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$ （分母为 0 时，对应分子也为 0）

切线的方向向量称为切向量，记作 $\vec{s}$

即：$\vec{s}=(\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0))$ （法平面的法向量）

法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

举例：

例1：求螺旋线 $x=a\cos\theta\,, y=a\sin\theta\,, z=b\theta$ 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线与法平面方程。

解：由 $x'(\theta)=-a\sin\theta\,, y'(\theta)=a\cos\theta\,, z'(\theta)=b$

对应 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点 M_0 为$\left(0,a,\frac{\pi}{2}b\right)$，切向量：$\vec{s}=(-a,0,b)$

切线方程为：$\dfrac{x}{-a}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z-\frac{\pi}{2}b}{b}$ 即：$\begin{cases} bx+az=\frac{\pi}{2}ab \\ y=a \end{cases}$

法平面方程为：$-ax+b\left(z-\frac{\pi}{2}b\right)=0$ 即：$ax-bz+\frac{\pi}{2}b^2=0$

注：若曲线 Γ 的参数方程为：

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad (a \le x \le b) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad (a \le x \le b)$$

若 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 在 x_0 可导，则切向量 $\vec{s} = \big(1, y'(x_0), z'(x_0)\big)$

切线方程： $\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{y'(x_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(x_0)}$

法平面方程： $(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0$

空间曲线的切线与法平面:

2. 曲线方程为一般方程

设光滑曲线 Γ 的方程为: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为曲线 Γ 上一点，若函数 F,G 在 M_0 点满足隐函数存在定理的条件 (①⋯,②⋯,③⋯)

当雅可比行列式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时，曲线 Γ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

且有求导公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$$

曲线上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{s}=\left(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\right)=\left(1,\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_{M_0},\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_{M_0}\right)$$

或改写为：

$$\vec{s}=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg|_{M_0},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_{M_0},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_{M_0}\right)$$

则在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点有

切线方程：$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}}$$

法平面方程：

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}(z-z_0)=0$$

该方程也可表示为：

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M_0) & F_y(M_0) & F_z(M_0) \\ G_x(M_0) & G_y(M_0) & G_z(M_0) \end{vmatrix}=0$$

举例：

例2：求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线 Γ 在点 $P_0(1,1,\sqrt{2})$ 处的切线与法平面方程。

解：由曲线 Γ 的方程为：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$$

令：$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$，$G(x,y,z)=x^2+y^2-2x$

则：$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix}\right|_{P_0}=-4yz\Big|_{P_0}=-4\sqrt{2}$

同理：

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0} = 4$$

故：切向量 $\vec{s} = \left(-4\sqrt{2}, 0, 4\right)$ （平行于向量 $\vec{s} = \left(\sqrt{2}, 0, -1\right)$）

切线方程：$\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-\sqrt{2}}{-1}$ 即：$\begin{cases} x + \sqrt{2}z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

法平面方程：$\sqrt{2}(x-1) - \left(z - \sqrt{2}\right) = 0$ 即：$\sqrt{2}x - z = 0$

解法二： 曲线 Γ 的方程为：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$$

对方程组两端关于 x 求导，则有

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2=0 \end{cases}$$

代入点 $P_0\left(1,1,\sqrt{2}\right)$，解得： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

故：切向量 $\vec{s}=\left(1,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ （平行于向量 $\vec{s}=(\sqrt{2},0,-1)$）

总 结:

空间曲线 Γ 在曲线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线与法平面:

曲线 Γ 的参数方程为: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

曲线 Γ 的参数方程为: $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad (a \le x \le b)$

曲线 Γ 的一般方程为: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$