

1. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)}$  的收敛域为\_\_\_\_\_.

A.  $(-5, 5)$ ;

B.  $[-5, 5)$ ;

C.  $(-3, 3)$ ;

D.  $[-3, 3]$ .

解 答案 B

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n[5^n + (-3)^n]}{(n+1)[5^{n+1} + (-3)^{n+1}]} = \frac{1}{5}, \quad R = 5$$

当  $x=5$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)}$  发散 (因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)}}{\frac{1}{n}} = 1$ )

当  $x=-5$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)}$  收敛

$$\text{因为 } \frac{(-5)^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)} = (-1)^n \frac{5^n + (-3)^n - (-3)^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{3^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)}$  收敛 (由比值法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1) \cdot (5^{n+1} + (-3)^{n+1})}}{\frac{3^n}{n \cdot (5^n + (-3)^n)}} = \frac{3}{5} < 1$$

2. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $x=\sqrt{6}$  与  $x=\sqrt{10}$  依次为幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$  的\_\_\_\_\_.

A. 收敛点, 收敛点

B. 收敛点, 发散点

C. 发散点, 收敛点

D. 发散点, 发散点

解 答案 B

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为 1, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  的收敛半径为

$1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$  的收敛半径为1  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-2)^n$  收敛半径为1

3. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $x = \sqrt{2}$  与  $x = 2\sqrt{2}$  依次为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$  的  
( )

- (A) 收敛点, 收敛点;                      (B) 收敛点, 发散点;  
(C) 发散点, 收敛点;                      (D) 发散点, 发散点。

解 答案 C

4. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$  在  $x = -1$  处条件收敛, 则该级数在  $x = 2$  处\_\_\_\_\_.

- A. 条件收敛;                      B. 绝对收敛;  
C. 发散;                              D. 由已知条件不能确定敛散性.

解 答案 B

5. 设数列  $\{a_n\}$  单调减少,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  无界, 则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$  收敛域是 ( )

- (A)  $(-1, 1]$     (B)  $[-1, 1)$     (C)  $[0, 2)$     (D)  $(0, 2]$

解 答案 C

6. 已知幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n}$ ，求：1、收敛域；2、和函数。

解：1、收敛半径  $R = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(2n+1)}{1/(2(n+1)+1)}} = 1$ ，

左端点  $x = -1$  代入，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$  发散，

右端点  $x = 1$  代入，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$  发散，

收敛域  $(-1, 1)$ 。

2、令和函数  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，

设  $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ， $S_1'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1})' = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^{2n+1}}{2n+1})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}$ ，

$$S_1(x) = S_1(x) - S_1(0) = \int_0^x S_1'(x) dx = \int_0^x \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - x,$$

$$\text{所以, } S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

7. 设有幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^n$  1、求其收敛域；2、求其和函数  $S(x)$  的表达式.

解：1、  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n!}}{\frac{2(n+1)+1}{(n+1)!}} = +\infty$ ，收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ 。

2、设

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)-1}{n!} x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 2S_1(x) - e^x,$$

$$\text{其中： } S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n,$$

$$\int_0^x S_1(x) dx = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{n+1}{n!} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x e^x$$

两边对  $x$  求导，得  $S_1(x) = (x+1)e^x$ ，

$$S(x) = (2x+1)e^x, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

8. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2^n}$

解 方法一： 令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2^n} x^{2n+4}$  ,  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

所以

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n+5} = x^5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} = x^5 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2}{2} \right)^n = x^5 \frac{\frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x^7}{2 - x^2}$$

$$x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

则  $S(x) = \left( \frac{x^7}{2 - x^2} \right)' = \frac{14x^6 - 5x^8}{(2 - x^2)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2^n} = S(1) = 9$

方法二： 拆项  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

关于第一项级数，令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  ,  $|x| < 1$

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \Rightarrow S(x) = \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

关于第二项级数，  $5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 5 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2^n} = 4 + 5 = 9$

9. 求  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$

解 方法一：令  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$  ,  $x \in (-\infty, +\infty)$

所以  $\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(n+1)^2}{n!} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$

$$= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = (x^2 + x)e^x$$

$$S(x) = \left( (x^2 + x)e^x \right)' = (x^2 + 3x + 1)e^x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = S(1) = 5e$$

方法二：拆项

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1) + 3n + 1}{n!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 5e$$

10. 将函数  $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$  展开为  $x-2$  的幂级数.

解 方法一:  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, (-1 < x \leq 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + 3x + 2) = \ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(3 + (x-2)) + \ln(4 + (x-2)) \\ &= \ln 3 \left(1 + \frac{x-2}{3}\right) + \ln 4 \left(1 + \frac{x-2}{4}\right) = \ln 3 + \ln 4 + \ln \left(1 + \frac{x-2}{3}\right) + \ln \left(1 + \frac{x-2}{4}\right) \\ &= \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n 3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n 4^n}, (-1 < x \leq 5) \\ &= \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) \frac{(x-2)^n}{n}, (-1 < x \leq 5) \end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+x-2} + \frac{1}{4+x-2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{3}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{4^n}, (-1 < x < 5) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) (x-2)^n, (-1 < x < 5) \\ \int_2^x f'(x) dx &= \int_2^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) (x-2)^n dx \\ \text{即 } f(x) - f(2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_2^x (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) (x-2)^n dx \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$$

当  $x = -1$  时,  $f(x)$  无意义,  $x = 5$  时, 级数收敛, 故收敛域是  $-1 < x \leq 5$

$$f(x) = \ln 12 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}, -1 < x \leq 5$$