习题课

1、试求以 $y^2 = C_1 x + C_2$ 为通解的微分方程

在 $y^2 = C_1 x + C_2$ 两边对 x 求导，得 $2yy' = C_1$，再求导，得 $2yy'' + 2(y')^2 = 0$ 或 $yy'' + (y')^2 = 0$ 即为所求微分方程

2、求微分方程 $y' = \dfrac{1}{(x-y)^2}$ 的通解

解 令 $x - y = u$，则 $y = x - u$。$\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{du}{dx}$，代入原方程，得 $1 - \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{u^2}$，$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^2 - 1}{u^2}$，分离变量，得

$\frac{u^2}{u^2-1}du = dx$ ，即 $\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du = dx$ 积分，得

$u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = x + C_1$ ，将 $u = x - y$ 代回，即得通解

$$\frac{x-y-1}{x-y+1} = Ce^{2y}$$

3、求微分方程 $y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$ 的通解

解 将方程变形为 $2yy' = \frac{y^2}{x} + \tan\frac{y^2}{x}$ ，方程右端是以 $\frac{y^2}{x}$ 为中间变量的函数。令 $\frac{y^2}{x} = u, y^2 = xu$

求导得 $2yy' = xu' + u$ 代入方程，得 $xu' + u = u + \tan u$

即 $xu' = \tan u$ ，分离变量，得 $\dfrac{du}{\tan u} = \dfrac{dx}{x}$ ，积分，得

$\ln|\sin u| = \ln|x| + C_1$ 或 $\sin u = Cx$ ，以 $u = \dfrac{y^2}{x}$ 代回，

得原方程通解为 $\sin\dfrac{y^2}{x} = Cx$

4、设 $y(x)$ 是一个连续函数，且满足

$y(x) = \cos 2x + \int_0^x y(t)\sin t\,dt$ 求 $y(x)$ 。

解 这种方程称为积分方程，通常将它化为微分方程的初值问题。为此，再在等式两端对自变量 x 求导，有 $y'(x)=-2\sin 2x+y(x)\sin x$ 在确定初值条件 $y(0)=1$ ，于是得到微分方程的初值问题。

$$\begin{cases} y'-y\sin x=-2\sin 2x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+C\right)=e^{\int \sin xdx}\left(-\int 2\sin 2xe^{-\int \sin xdx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\cos x}\left(-\int 2\sin 2x e^{\cos x}dx+C\right)=e^{-\cos x}\left(4\int \cos x d(e^{\cos x})+C\right)$$

$$=e^{-\cos x}\left(4[\cos x e^{\cos x}-\int e^{\cos x}d(\cos x)+C\right)$$

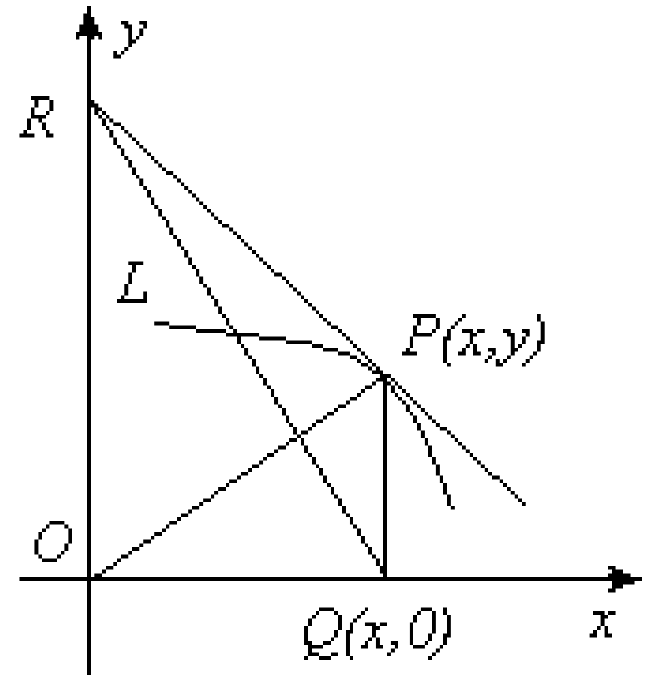
$$=e^{-\cos x}\left(4[\cos x e^{\cos x}-e^{\cos x}]+C\right)$$

$$=Ce^{-\cos x}+4\cos x-4$$

又 $y(0)=1$，得 $C=e$，从而 $y=e^{1-\cos x}+4\cos x-4$

5、设曲线 L 上任一点 $P(x,y)$ 满足 $OP \perp RQ$

（如图），其中 PR 为L在



点P处的切线，又知L过点

（1，2），求曲线L的方程。

解 一般用微分方程解决应用问题分三个主要步

骤。

（1）建立方程 根据题意，过 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，故点 R 的坐标为 $(0,y-xy')$，由此得直线 RQ 的斜率为 $k_{RQ}=\dfrac{xy'-y}{x}$，直线OP的斜率 $k_{OP}=\dfrac{y}{x}$，由于 $OP\perp QR$，所以 $k_{OP}\cdot k_{RQ}=-1$，即

$\dfrac{xy'-y}{x}\cdot\dfrac{y}{x}=-1$，得 $xyy'-y^2+x^2=0$。

（2）确定初值问题 因曲线L过点（1，2），得初值问题为 $\begin{cases} xyy'-y^2+x^2=0 \\ y|_{x=1}=2 \end{cases}$

（3） 解方程 根据初值条件，可以限定在 $x>0, y>0$ 的范围内求解。方程可变型为齐次方程 $y'=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$ 令 $y=xu$ ，有 $y'=xu'+u$ 代入上式，得 $xu'=-\frac{1}{u}, udu=-\frac{dx}{x}$ 方程得 $u^2=-2\ln x+C$ 。将 $y=xu$ 代回，得 $y^2=x^2(C-2\ln x)$

$y=x\sqrt{C-2\ln x}$ ，以初值条件 $y|_{x=1}=2$ 代入，得 $C=4$ ，

因此曲线L的方程为

$$y=x\sqrt{4-2\ln x}\ (0<x<e^2)$$ 。

6、求微分方程 $y''' = (y'')^2$ 的通解。

解 令 $y'' = v(x)$ ， 方程化为 $v' = v^2$ ， 分离变量并积分，$v(x) = -\dfrac{1}{x + C_1}$ 再积分两次，得

$$y' = \int v(x)dx = -\ln|x + C_1| + C_2 ,$$

$$y = C_3 + C_2 x + x - (x + C_1)\ln|x + C_1|$$

或

$$y = C_2' x + C_3 - (x + C_1)\ln|x + C_1| 。$$

7、求 $3y''+2y'=0$ 的通解

解 特征方程为 $3r^2+2r=0$ ，特征根为

$r_1=0, r_2=-\dfrac{2}{3}$ ，故方程通解为 $y=C_1+C_2e^{-\frac{2}{3}x}$

8、设 $f(x)$ 为连续函数，且满足方程

$f(x)=e^{2x}-\int_0^x (x-t)f(t)dt$ 求 $f(x)$ 。

解 将上式两边对x求导，得 $f'(x)=2e^{2x}-\int_0^x f(t)dt$

再对上式求导，得 $f''(x)=4e^{2x}-f(x)$，即

$f''(x)+f(x)=4e^{2x}$ 。有已知即上式可知

$f(0)=1, f'(0)=2$ 。

因此所求函数 $y=f(x)$ 满足下列初值问题

$$\begin{cases} y''+y=4e^{2x}, \\ y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2 \end{cases}$$ 易得其通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{4}{5}e^{2x}$$

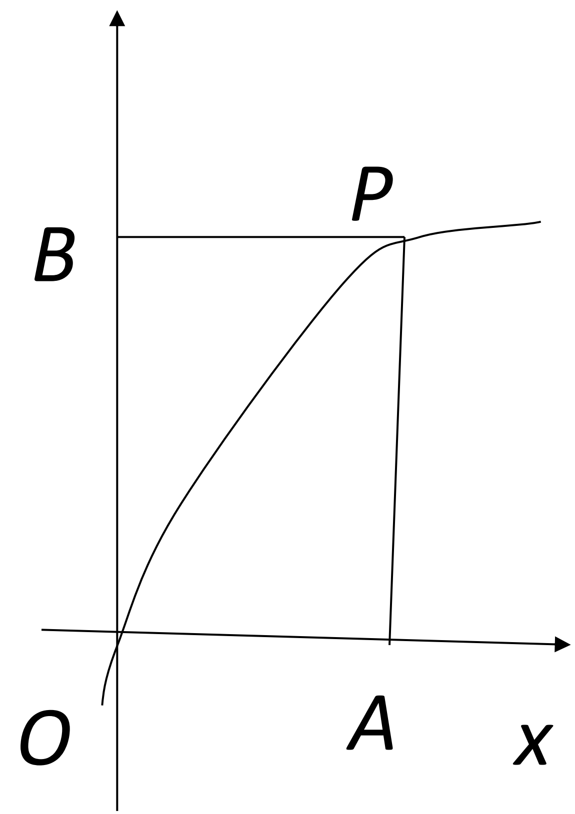
根据初值条件，得 $C_1=\frac{1}{5},C_2=\frac{2}{5}$ 。从而所求的函数为

$$f(x)=\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x+\frac{4}{5}e^{2x}$$ 。

9、光滑曲线l过原点和点（2，3），如图所示，任取l上一点$P(x,y)$,过点P作两坐标轴的平行线PA, PB，PA与x轴和曲线l所围成图形的面积等于PB与y轴和曲线l所围成图形的面积的2倍，求曲线l的方程。

解 OAPO的面积为 $\int_0^x y(x)dx$ ，根据题意可找到含有 $y(x)$ 的积分的关系式，从而可建立微分方程。

（1）列方程 设所求曲线l的方程为



$y = y(x)$ 。

由题设条件知 $\int_0^x y(x)dx = \frac{2}{3}xy(x)$，

这是一个积分方程，两边对x 求导，得

$3y = 2(xy' + y)$ ，即 $2xy' - y = 0$。

（2）初值问题 由题设曲线过点（2，3），可得

初值条件 $y|_{x=2} = 3$ ，即初值问题为

$$\begin{cases} 2xy' - y = 0 \\ y|_{x=2} = 3 \end{cases}$$

（3）解方程 由分离变量法，解得 $y^2 = Cx$。代入

初值条件 $y|_{x=2} = 3$ 得 $C = \dfrac{9}{2}$ ，故所求曲线l的方程为

$y^2 = \dfrac{9}{2}x$ 。

例10 求 $y''' + 6y'' + (9 + a^2)y' = 1$ 的通解,其中 a 为大于零的常数。

解:特征方程 $r^3 + 6r^2 + (9 + a^2)r = 0$，特征根，$r_1 = 0$ $r_{2,3} = -3 \pm ai$ ，齐次方程通解

$$Y(x) = c_1 + e^{-3x}(c_2 \cos ax + c_3 \sin ax)\text{，}$$

特解形式 $y^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}$ ，其中 $\alpha = 0$ ，故 $k = 1$，$Q_m(x) = A$ 代入原方程,得 $y^*(x) = Ax$ $A = \dfrac{1}{9 + a^2}$

∴ 通解 $y(x) = Y(x) + \dfrac{x}{9 + a^2}$

例11 设 $y_1(x), y_2(x)$ 为二阶常系数线性齐次方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解，则由 $y_1(x)$ 与

$y_2(x)$ 能够成该方程的通解，其充分条件是

（A） $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$

（B） $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$

（C） $y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x) = 0$

（D） $y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x) \neq 0$

解：由（B）可知 $\dfrac{y_2'(x)}{y_2(x)} \neq \dfrac{y_1'(x)}{y_1(x)}$，即

$\ln y_2(x) \neq \ln y_1(x) + \ln C$，故 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq C$，可知

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关。

例12 求方程 $y'' - y = e^x + \sin x$ 的特解形式。

解：$r^2 - 1 = 0$，$r_{1,2} = \pm 1$，$y^*{}_1(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} = axe^x$

$$y_2^*(x) = x^k e^{\alpha x}(A_m(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x) = b\cos x + c\sin x$$

所以 $$y^*(x) = axe^x + b\cos x + c\sin x$$

例13在下列微分方程中,以

$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$($C_1$， C_2 ,C_3为任意常数)

为通解的是( )。

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$

(B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$

（C） $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

（D） $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ 解：选(D)

例14 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^{x}$ 的一个特解为 $y^*(x)=e^{2x}+e^{x}+xe^{x}$ 求 α,β,γ 及其通解。

解法1：由 $y^*(x)=e^{2x}+e^{x}+xe^{x}$ 可知特征根

$r_1=1,r_2=2$ 故特征方程为 $(r-r_1)(r-r_2)=r^2-3r+2=0$

从而 $\alpha=-3,\beta=2$ ，将 xe^{x} 代入原方程，得 $\gamma=-1$

通解为 $y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+xe^{x}$

解法2：将 $y^*(x)=e^{2x}+e^x+xe^x$ 代入原方程

得 $(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(3+2\alpha+\beta)e^x+(1+\alpha+\beta)xe^x=\gamma e^x$

故 $\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\alpha=-3\\\beta=2\\\gamma=-1\end{cases}$

第四章 微分方程

4.1 方程分类与解法

4.1.1 一阶，可分离变量方程

1. 一阶变量分离方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\Rightarrow\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$$

2. 齐次方程 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

令 $\frac{y}{x}=u$，$y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ $\quad u+x\frac{du}{dx}=f(u)$

4.1.2 一阶线性非齐次方程

齐次方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 通解 $y=ce^{-\int p(x)dx}$ $(c=\pm e^{c_1})$

标准形 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 通解 $y=e^{-\int p(x)dx}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$

伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)\Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

令 $z=y^{1-n}$ 得 $\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$

4.1.3 特殊二阶方程 降阶法

1. 微分方程 $y^{(n)}=f(x)$ 接连积分n次，便得到微分

方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的含有n个任意常数的通解。

2. $y''=f(x,y')$ 令 $y'=p(x)$ 则 $y''=p'(x) \Rightarrow p'=f(x,p)$

3. $y''=f(y,y')$ 令 $y'=p(y)$ 则 $y''=p'p \qquad p'p=f(y,p)$

4. 首次积分方法若 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=\dfrac{d}{dx}\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$

则称 $\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=c$ 为方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$的首次积分。这样就把原方程降了一阶。特别地，二阶的就变成一阶方程了。

5．若方程中出现 $f(xy), f(x \pm y), f(x^2 \pm y^2), f\left(\frac{y}{x}\right)$ 等形式的项时，通常要做相应的变换 $u = xy, x \pm y, x^2 \pm y^2, \frac{y}{x}, \cdots$。

4.1.4 二阶（高阶）线性常系数方程

1．线性方程解的结构理论

定理1（叠加原理） 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是齐次方程的解，则它们的线性组合

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$$

也是齐次方程的解，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是任意常数。

定理2 设 $\tilde{y}(x)$ 是非齐次方程的一个解，$y_1(x), y_2(x), \cdots$

$y_n(x)$ 是对应的齐次方程的解，则 $\sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x) + \tilde{y}(x)$ 也是

非齐次方程的解，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是任意常数。

定理3 （二阶齐次线性微分方程通解的结构）设

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ $(a \le x \le b)$ 是方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{3}$$

的两个线性无关特解，则 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$（c_1,c_2 是任意常数）是方程（3）的通解。

对于二阶非齐次线性微分方程

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x) \tag{4}$$

有如下的定理。

定理4（二阶非齐次线性微分方程通解的结构）设 $y^*(x)$ 是方程（4）的一个特解，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)(a\le x\le b)$ 是

方程（4）对应的齐次次线性方程（3）的两个线性无关解，则

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y^*(x) \tag{5}$$

是方程（4）的通解。

定理5 设 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 是方程(4)的两个特解，则 $y_1^*(x) - y_2^*(x)$ 是方程(3)的解。

2．齐次方程 $\boldsymbol{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0}$⇒特征方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

求二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解的步骤如下：

第一步 写出微分方程的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$。

第二步 求出特征方程的两个根 λ_1, λ_2。

第三步 根据特征方程两个根的不同情形，按照下列表格写出微分方程（3）的通解

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解

的两个根 λ_1,λ_2

两个不相等的实根 λ_1,λ_2 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$ $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$

一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

对于高阶常系数齐次线性微分方程可以根据下表给

出的特征方程的根写出对应齐次线性微分方程的解

如下：

特征方程的根　　　　微分方程通解中的对应项

单实根 λ　　　　给出一项 $Ce^{\lambda x}$

一对单复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$　给出两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

k重实根　λ　　　给出k项：$e^{\lambda x}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$

k重复根　$\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$　给出2k项：

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$$

$$+\ (D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

3．非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$

其通解是 $y = y_1 + y^*$ 其中 y_1 是对应齐次方程的解，

y^* 是非齐次方程的解。

$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ 特解 $y^*(x) = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$ k是特征根 α 的重

复次数， $f(x) = e^{\alpha x}[A_l(x)\cos\beta x + B_n(x)\sin\beta x]$

特解 $y^* = x^k e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$ k是特征根 $\alpha + i\beta$

的重复次数。$m = \max\{l, n\}$

4．欧拉方程 $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$

令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$ ，则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$ ，

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \cdots$$

若引入微分算子符号 $D = \dfrac{d}{dt}$ ，则上述结果可简记为

$$xy' = Dy \text{，} x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y$$

$$x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y \cdots$$

一般地 $x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

4.2 解法选例

4.2.1 基本题目类

例1 求解微分方程 $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x$

解 令 $x^2 + y^2 = u$ ， 则 $2x + 2yy' = u'$ ， 原方程

$2x + e^{\frac{u}{x}} + \frac{u}{x} - 2x = u'$ 即 $u' = \frac{u}{x} + e^{\frac{u}{x}}$， 再令 $v = \frac{u}{x}$ ， 而 $u = xv$ ，

$u' = v + xv'$， 代入上式，有 $v + xv' = v + e^{v} \Rightarrow e^{-v}dv = \frac{1}{x}dx$， 从而

$-e^{-v} = \ln x + C \Rightarrow -e^{-\frac{x^2+y^2}{x}} = \ln x + C$

例1 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 \cos x}{(1+\sin x)^2} \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解 首先观察此类方程：一阶，可分离变量

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)^2} + c$$

$-\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{1+\sin x} + c$ ，代入初值 $c = 0$ 故 $y = 1 + \sin x$

例2 $xy' + 2y = 3x$

解 首先观察此类方程：一阶，线性非齐次方程

$y' + \dfrac{2}{x} y = 3$ $p(x) = \dfrac{2}{x}, q(x) = 3$ $y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int 3e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = x + \dfrac{C}{x^2}$ 。

例3 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$

令 $u=x+y$ ， $\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx}$ ， 则 $\dfrac{du}{dx}=1+u^2$ $\displaystyle\int\frac{du}{1+u^2}=\int dx$,

$\arctan u=x+c \quad x+y=\tan(x+c)$

例4 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2x+y^2}$

解 $\dfrac{dx}{dy}=2x+y^2 \quad x'-2x=y^2$

$$x=e^{-\int -2dy}\left(\int y^2 e^{\int -2dy}dy+c\right)=ce^{2y}-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}$$

例5 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2} \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$

解 观察：一阶，齐次方程

令 $\dfrac{y}{x} = u,\ y = ux\ \ \dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ 代入方程消去 y 得

$u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2u}{1-u^2}$ 整理 $\dfrac{1-u^2}{u+u^3}du = \dfrac{dx}{x}$

积分 $\displaystyle\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \int \frac{1}{x}dx + \ln c_1 \quad \int\left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2+1}\right)du = \int \frac{1}{x}dx + \ln c_1$

$\ln\dfrac{u}{1+u^2} = \ln c_1 x \quad \dfrac{u}{1+u^2} = c_1 x$ 将 $u = \dfrac{y}{x}$ 代入得 $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = cx$

代入初值 $y(1) = 1\ c = \dfrac{1}{2}$ 整理 $x^2 + y^2 = 2y$ 。

例6 $\begin{cases} yy'' = (y')^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

解 （1）令 $y' = p(y)$　$y'' = p'p$ 代入方程 $yp'p = p^2$

$yp' = p$ 或　$p = 0$（$y = c$舍不符合初值）

积分 $\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} + \ln c$　$\ln p = \ln cy$　$p = cy$ 即 $\frac{dy}{dx} = cy$代初值

$c = 1$ $\int \frac{dy}{y} = \int dx + c$　$\ln y = x + c$　$y = c_1 e^x$ 代初值 $y = e^x$

解 （2）$\left(\frac{y'}{y}\right)' = 0$　$\frac{y'}{y} = c$代初值 $c = 1$ ，$\int \frac{dy}{y} = \int dx + c$

$\ln y = x + c$　$y = c_1 e^x$ 代初值 $y = e^x$

例7 填空

a 方程 $y''+y=-2x$ 通解为（ ）$y=-2x+c_1\cos x+c_2\sin x$

b 方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为（ ）

$$y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x+1)$$

c 方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为（ ）$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+\dfrac{1}{4}xe^{2x}$

d 方程 $y''+2y'+y=e^{-x}$ 的通解为（ ）

$$y=(\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_2)e^{-x}$$

4.2.2 综合题目类

例8 设 $f(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$，若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$，求 $f(x)$。

解 对 x 求导 $g(f(x))f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$，即 $xf'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ 故 $f'(x) = 2e^x + xe^x$ $f(x) = (x+1)e^x + c_1$，即 $f(x) = (x+1)e^x - 1$。

例9 $f(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 上可导。$f(0)=1$ 且满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=0$$

（1）求 $f'(x)$

（2）证明当 $x\geq 0$ 时 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 。

解 $(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$

求导 $f'(x)+(x+1)f''(x)+f(x)+(x+1)f'(x)-f(x)=0$

则 $(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$ $\qquad (x+1)\dfrac{df'}{dx}=-(x+2)f'(x)$

$$\int \frac{df'}{f'} = -\int \frac{x+2}{x+1}dx + c_1 \qquad \ln|f'| = -x - \ln|x+1| + c_1$$

代初值 $f(0)=1$ 得 $f'(0)=-1$ $c_1=0$ $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{1+x}$

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x \frac{e^{-x}}{1+x}dx \le 0 \quad f(x) \le 1 \text{ 又}$$

$$f(x) - 1 = -\int_0^x \frac{e^{-x}}{1+x}dx \ge -\int_0^x e^{-x}dx = e^{-x} - 1$$

故 $f(x) \ge e^{-x}$ 即 $e^{-x} \le f(x) \le 1$ 。

例10 $x \geq 0$ $f(x)$ 有连续一阶导数，且满足

$$f(x) = -1 + x + 2\int_0^x (x-t) f(t) f'(t) dt$$ ，求 $f(x)$。

解 $f(x) = -1 + x + 2x\int_0^x f \cdot f' dt - 2\int_0^x tf \cdot f' dt$

$$f'(x) = 1 + 2\int_0^x f(t) \cdot f'(t) dt + 2xf(x)f'(x) - 2xf(x)f'(x)$$

$f''(x) = 2f(x)f'(x)$ $f'(x) = f^2(x) + C$（注意到 $f(0) = -1$，

$f'(0) = 1$ ）代入初值 $c = 0$ $\dfrac{df}{f^2} = dx$，积分 $-\dfrac{1}{f(x)} = x + c$

代初值 得 $c = 1$ ，则 $f(x) = \dfrac{-1}{1+x}$

例11 已知 $y_1 = e^x$ 是方程 $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ 的一个特解，求方程通解。

解 设 $y_2 = ue^x$ 也是方程的解，代入方程有

$$x(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) - 2(x+1)(u'e^x + ue^x) + (2+x)ue^x = 0$$

整理 $xu'' - 2u' = 0$ $\quad x\dfrac{du'}{dx} = 2u'$ $\quad \dfrac{du'}{u'} = \dfrac{2dx}{x}$ $\quad \ln u' = \ln c_1 x^2$ $\quad u' = c_1 x^2$

$u = \dfrac{c_1}{3}x^3 + c_2$ 取 $c_1 = 3$，$c_2 = 0$ ，则 $u = x^3$。

故 $y = c_1 e^x + c_2 x^3 e^x$ 是方程通解

例12 求解欧拉方程

（1） $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$；

（2） $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$ 。

解 （1） 令 $x = e^t$ 则

$$D(D-1)(D-2)y + 3D(D-1)y - 2Dy + 2y = 0$$

$$(D^3 - 3D + 2)y = 0 \qquad y''' - 3y' + 2y = 0$$

特征方程为 $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0 \quad \lambda_1=\lambda_2=1 \quad \lambda_3=-2$ 则

$$y=c_1e^{-2t}+e^t(c_2+c_3t)=c_1x^{-2}+x(c_2+c_3\ln x)$$ 。

（2） 令 $x=e^t$ 则

$$D(D-1)y-4Dy+6y=e^t \qquad (D^2-5D+6)y=e^t$$

$y''-5y'+6y=e^t$ 特征方程：$\lambda^2-5\lambda+6=0 \quad \lambda_1=2,\lambda_2=3 \quad \lambda=1$

不是特征根，故设特解 $y^*=Ae^t$ 代入方程 $2Ae^t=e^t \quad A=\frac{1}{2}$

则方程通解 $y=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}+\frac{1}{2}e^t=c_1x^2+c_2x^3+\frac{1}{2}x$ 。

例13 已知 $y_1=\cos x, y_2=e^{-x}$ 是二阶线性齐次方程的解，试建立此方程

解 y_1, y_2 线性无关，则

$$y=c_1\cos x+c_2e^{-x}$$ 是方程的通解 （1）

又 $$y'=-c_1\sin x-c_2e^{-x}$$ （2）

$$y''=-c_1\cos x+c_2e^{-x}$$ （3）

联立（1）（3）求 c_1, c_2，代入（2）整理得

$$(\cos x-\sin x)y''+2\cos x\cdot y'+(\sin x+\cos x)y=0$$

例14 设 $y_1=e^{-x}$，$y_2=2x$ 是 $y'''+ay''+by'+cy=0$ 的两个解，求 a,b,c 值。

解 $y=e^{-x}$ 是解，则 $\lambda_1=-1$ 是特征根，$y=2x$ 是解，则 $\lambda=0$ 是特征根，且是二重根。

特征方程为 $(\lambda+1)\lambda^2=0$ 即 $\lambda^3+\lambda^2=0$，比较原特征方程 $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0$ 得 $a=1,b=0,c=0$。

也可以将 e^{-x} 代入方程得 $-1+a-b+c=0$；将 $y=2x$ 代入方程得 $2b+2cx=0$，从而 $b=0,c=0$，$a=1$。

例15 已知 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个特解为

$y_1=x, y_2=e^x$, $y_3=e^{2x}$ 试求 $y(0)=1, y'(0)=3$ 特解。

解 非齐次方程的任两个特解之差是齐次方程特

解，故 e^x-x, $e^{2x}-x$ 是齐次方程的解，且线性无关，

故 $y=c_1(e^x-x)+c_2(e^{2x}-x)+x$ 是非齐次方程通解。

代入初值 $\begin{cases} 1=c_1+c_2 \\ 3=\left[c_1(e^x-1)+c_2(2e^{2x}-1)+1\right]_{x=0} \\ 3=c_2+1 \end{cases}$ ，则

$c_2=2, c_1=-1$ 从而特解为 $y=2e^{2x}-e^x$ 。

4.3 微分方程应用问题

解题总的步骤

1. 分析题意建立方程

$\begin{cases} a.\ \text{几何问题} \\ b.\ \text{物理问题} \\ c.\ \text{微元分析法} \\ d.\ \text{“翻译”数学语言} \end{cases}$

2. 依题意写出初始条件

3. 识别方程类型解方程

4.3.1 几何问题

例1 设曲线 l 过 $(1,1)$ 点，曲线上任一点 $p(x,y)$ 处的切线交 x 轴于 T 点，若 $|TP|=|OT|$（O 是原点），求 l 的方程。

解 1. 列方程 切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$

令 $Y=0$ 的 $X=x-\dfrac{y}{y'}$（＝OT）

$|PT|=\sqrt{(x-x+\dfrac{y}{y'})^2+y^2}$，由 $|TP|=|OT|$ 有 $\sqrt{(\dfrac{y}{y'})^2+y^2}=|x-\dfrac{y}{y'}|$

整理得 $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

2．结合初值条件得初值问题 $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2} \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$

3．方程是齐次方程 令 $\dfrac{y}{x} = u,\ y = ux \quad \dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$

代入方程消去 y 得 $u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2u}{1-u^2}$ 整理 $\dfrac{1-u^2}{u+u^3}du = \dfrac{dx}{x}$

积分

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \int \frac{1}{x}dx + \ln c_1 \qquad \int\left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2+1}\right)du = \int \frac{1}{x}dx + \ln c_1$$

$\ln\frac{u}{1+u^2}=\ln c_1x$ $\frac{u}{1+u^2}=c_1x$ 将 $u=\frac{y}{x}$ 代入得 $\frac{xy}{x^2+y^2}=cx$

代入初值 $y(1)=1$ $c=\frac{1}{2}$ 整理 $x^2+y^2=2y$ 。

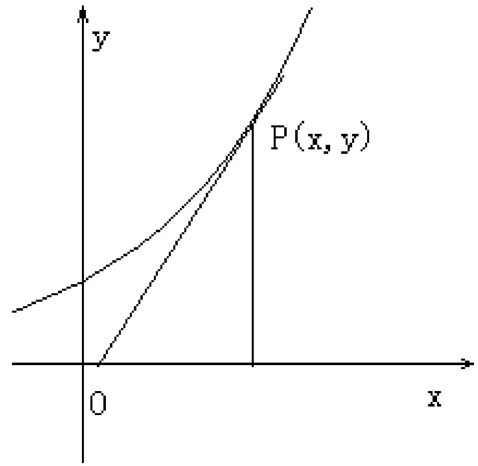
例2 设函数 $y=y(x)$ $(x\geq 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$，

$y(0)=1$ 。过曲线上任一点 $P(x,y)$ 作切线及 x 轴的垂

线，上述两条直线与 x 轴所围成的三角形的面积记

为 S_1 ，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形的面

积记为 S_2 ，且 $2S_1-S_2\equiv 1$ ，求曲线 $y=y(x)$ 。



解$y=y(x)$在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$

它与 x 轴的交点为$\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$，由 $y(0)=1,y'(x)>0$ 知，

$y(x)>y(0)=1>0(x>0)$ 于是$S_1=\dfrac{1}{2}|y|\left|x-\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)\right|=\dfrac{y^2}{2y'}$

又$S_2=\int_0^x y(t)dt$ ，由 $2S_1-S_2\equiv 1$ 得 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)dt=1$由此知

$y'(0)=1$ 上式两端对 x 求导并化简得 $yy''=y'^2$ 令

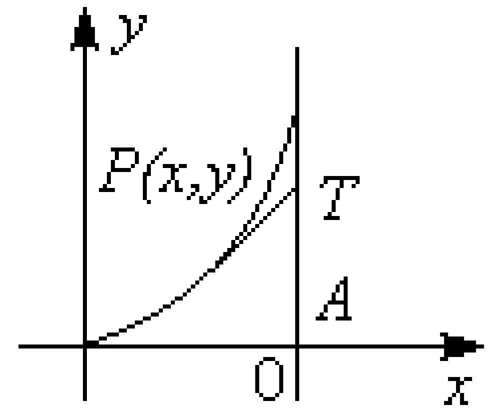
$y'=p, y''=p\dfrac{dp}{dy}$ ，则方程变形为 $py\dfrac{dp}{dy}=p^2$ 由 $y'>0$ ，即

$p>0$ ，故有 $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dy}{y}$ 解得 $p=c_1y$ 代入初始条件 $y=1, p=1$

得 $c_1=1$ ，即 $\dfrac{dy}{dx}=y$ 于是 $y=c_2e^x$ 代入初始条件 $y(0)=1$

得 $c_2=1$ 故所求曲线为 $y=e^x$。

例3 位于坐标原点的我舰向位于点 $A(1,0)$ 处的敌舰发射制导鱼雷，设鱼雷永远对准敌舰，已知敌舰航速为 v 。在直线 $x=1$ 上行驶，鱼雷速度为 $5v$ 。求鱼雷航迹曲线。又敌舰行驶多远时被鱼雷击中？



解 如图，设 t 时刻鱼雷行至 $P(x,y)$ 点，敌舰至 T 点，则 $|\overset{\frown}{OP}|=5|AT|$ 。$|\overset{\frown}{OP}|=\int_0^x ds=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$ 。

以下求|AT|。过点P的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令

$X=1$，$Y=y+y'(1-x)$（＝AT）

故得方程：$\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx=5[y+y'(1-x)]$ 求导整理得

$$\begin{cases}\sqrt{1+y'^2}=5y''(1-x)\\ y'(0)=0\\ y(0)=0\end{cases}$$

解方程：

$$\int\frac{5dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\int\frac{dx}{1-x}-\ln c_1 \quad 5\ln(y'+\sqrt{1+y'^2})=-\ln(1-x)-\ln c_1$$

$y' + \sqrt{1+y'^2} = C(1-x)^{-\frac{1}{5}}$ 将 $y'(0)=0$ 代入 $c=1$ 即

$y' + \sqrt{1+y'^2} = (1-x)^{-\frac{1}{5}}$　　$\sqrt{1+y'^2} - y' = (1-x)^{\frac{1}{5}}$

故 $2y' = (1-x)^{-\frac{1}{5}} - (1-x)^{\frac{1}{5}}$　　$2y = -\frac{5}{4}(1-x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{6}(1-x)^{\frac{6}{5}} + c_2$

代入初值 $y(0)=0$ $c_2 = \frac{5}{12}$　故 $y = \frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}} - \frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{24}$

当 $x=1$，$y=\frac{5}{24}$ 击中。

小结：用几何关系建立方程 $\begin{cases} \text{线段长} = \text{线段长} \\ \text{面积} = \text{面积} \\ \text{曲线长} = \text{线段长} \end{cases}$

4.3.2 物理问题

例4 物理问题

从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系，设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用。设仪器的质量为m，体积为B，

海水比重为 ρ ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比 $k(k>0)$ ，比例系数为试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$ 。

解 取沉放点为原点 O，Oy 轴正向铅直向下，则由牛顿第二定牛顿第二定律得 $m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv$

依题意，$\frac{d^2y}{dt^2}=(\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=)v\frac{dv}{dy}$ ，代入上式消去 t ，得 $mv\frac{dv}{dy}=mg-B\rho-kv$ 分离变量得 $dy=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv$

积分后得 $y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+c$

由初始条件 $v|_{y=0}=0$ 定出 $c=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)$

故所求函数关系式为 $y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}$

4.3.3 微元分析法

例5 设一半径为6cm，高为25cm的圆柱体容器充满水，其底部有一0.2（cm^2）的小孔，那么水就以 $v=0.6\sqrt{2gh}cm/s$ 的速度从小孔流出。（h为自由水面到柱底的高度）$g=980cm/s^2$，求水流规律（h（t）＝？）

解 设 t 时刻，自由水面高度为 $h(t)$，再经dt时段

水位下降位dh，则 $dh \cdot \pi R^2 = -v \cdot sdt$ ，则 $\frac{dh}{dt} = -\frac{s \cdot 0.6\sqrt{2gh}}{\pi R^2}$

记 $\begin{cases} \frac{dh}{dt} = K\sqrt{2gh} \\ h(0) = 25 \end{cases}$ 解得 $t = \frac{30\sqrt{10}}{7}\pi(5 - \sqrt{h})$ ，令 $h = 0$

t＝213秒

例6 设一车间容积为10000M ^{3} 。空气中含有 $0.12\% CO_2$（以容积记计算）。现将含有 $0.04\% CO_2$ 的新鲜空气以 1000 M^3 / mm 的速度输入车间，同时以 $1000 M^3 / mm$ 的流量抽出混合气体。问10分钟后，车间内 CO_2 的浓度

降到多少？

解：设t时刻，车间内含 CO_2 x M^3，经dt时段 CO_2

改变量为dx，则 $dx=$ 输入 CO_2 一输出 CO_2 ＝10^3dt

$\cdot 0.04\%$ 一 $10^3 dt \cdot \dfrac{x}{10^4}$

整理得 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{x}{10}=\dfrac{4}{10} \\ x|_{x=0}=10^4\cdot 0.12\%=12 \end{cases}$ 解得 $X=8e^{-\frac{t}{10}}+4$

$X(10)\approx 9.96(M^3)$ 此时浓度为 $\dfrac{6.96}{10000}=0.0696\%$

4.3.4 “翻译”！

例7 一半球形雪堆其溶化速度与半球表面积成正比，比例系数 $K>0$，假设溶化过程中，雪堆始终保持半球体状。已知半径 r_0 的雪堆开始溶化3小时，其体积是原来的 $\frac{1}{8}$，问全部溶化需多少时间？

解 t 时段 $v(t)=\frac{2}{3}\pi r^3(t)$ $\frac{dv}{dt}=-KS \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot 3\pi r^2\frac{dr}{dt}=-2K\pi r^2 \Rightarrow$

$\begin{cases}\frac{dr}{dt}=-K\end{cases}$ $r(0)=r_0$ $r(3)=\frac{1}{2}r_0$ $r=-\frac{1}{6}r_0t+r_0$ 令 $r=0\Rightarrow t=6$ **全部融化**

例8 人口问题、细菌繁殖、种群繁殖、新产品推广

某种群增长速度除与该种群个体数量 $x(t)$ 成正比还由于受环境制约而与 $(1-\alpha x(t))$ 成正比，试求该种群 $x=x(t)$ 函数关系。

解 $\dfrac{dx}{dt}=kx(1-\alpha x)$ $\dfrac{dx}{x(1-\alpha x)}=kdt$ 积分得 $\ln\dfrac{x}{1-\alpha x}=kt+c_1$

$x=\dfrac{1}{\alpha+ce^{-kt}}$ 若给定 $x(0)=x_0$ 初值，则可定 $c=\dfrac{1}{x_0}-\alpha$ ，

从而 $x=\dfrac{x_0}{\alpha x_0+(1-\alpha x_0)e^{-kt}}$ 令 $t\to\infty\ x(t)\to\dfrac{1}{\alpha}$ ，是该环境

对此种群的容纳量。

注：（1）原始：$\dfrac{dx}{dt}=kx(A-x)=kAx(1-\dfrac{x}{A})$，$A$为总容量。

（2）本模型适应，种群繁殖、疾病传染、信

息传播、新技术、新产品推广等等。