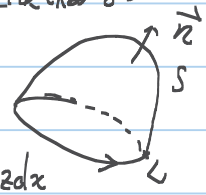
§8.4 斯托克斯公式 (Stokes)

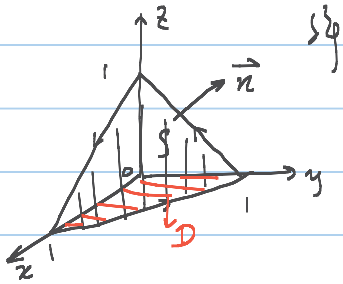
定理：设 L 为分段光滑的空间有向闭曲线，S 为以 L 为边界的分片光滑的有向曲面，L 正向与 S 法向呈成右手系，P,Q,R 在包含曲面 S 的一个空间区域内有一阶连续偏导数，则



$$\oint_{L^+} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

例1：计算曲线积分 $I=\oint_{L^+} z\,dx+x\,dy+y\,dz$ 其中 L 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截得的三角形 S 的整个边界，其正方向与三角形上侧的法向呈成右手系。



解：$I = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$

$= \iint_S dydz + dzdx + dxdy$

$\vec{n} \parallel \{1,1,1\}$

$= \iint_D 3\,dxdy = 3\times\frac{1}{2}\times1\times1 = \frac{3}{2}.$