二阶齐次线性微分方程特解的求法

主讲人：刘秀平 教授

1. 2 求解方法

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (1.1)$$

定理1.3　若函数$y_1(x)$和$y_2(x)$是二阶齐次线性微分方程(1.1)的两个线性无关的解，则它们的线性组合

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

是方程(1.1)的通解，其中$C_1 C_2$为任意常数。

1.2 求解方法

若 $y_1(x)$是方程（1.1）的一个非零解. $y_2(x)=u(x)y_1(x).$

左端=$\underline{(u(x)y_1)}'' + \underline{p(x)(u(x)y_1)}' + q(x)(u(x)y_1)$

$$=\underline{u(x)y_1''(x)+2u'(x)y_1'(x)+u''(x)y_1(x)} + p(x)[u'(x)y_1(x)+u(x)y_1'(x)] + q(x)(u(x)y_1(x))$$

$$=\underline{\left[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)\right]}\underline{u(x)}+\left[2y_1'(x)+p(x)y_1(x)\right]\underline{u'(x)}+y_1(x)u''(x)=0.$$

$$y_1(x)u''(x)+[2y_1'(x)+p(x)y_1(x)]u'(x)=0. \quad (1.3)$$

令 $u'(x)=v(x)$，则 $v(x)$满足方程

$$y_1(x)v'(x)+\left[2y_1'(x)+p(x)y_1(x)\right]v(x)=0. \quad (1.4)$$

$$v(x)\Rightarrow u'(x)=v(x)\Rightarrow y_2=u(x)y_1(x). \quad y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

□

1. 2求解方法

例题　已知$y_1(x)=e^x$是齐次线性微分方程

$$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0 \qquad (1.5)$$

的一个解，求此方程的通解。

解：$y_2(x)=u(x)y_1(x)=u(x)e^x$.　$(y_2(x))'=(u(x)e^x)'=u'(x)e^x+u(x)e^x=(u'(x)+u(x))e^x$.

$$(y_2(x))''=(u(x)e^x)''=u''(x)e^x+2u'(x)e^x+u(x)e^x.$$

$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0$. 令$u'=v$,则上式化为

$$(2x-1)v'+(2x-3)v=0. \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{2x-3}{2x-1}.$$

$\ln|v|=-x+\ln|2x-1|+C_0$, C_0是任意常数.

$$|v|=e^{-x+\ln|2x-1|}e^{C_0}=e^{C_0}|2x-1|e^{-x}. \Rightarrow v=C(2x-1)e^{-x}.$$

□

1. 2求解方法

再由$u'=v, \Rightarrow u'=C(2x-1)e^{-x}$. (1.5)

$$\Rightarrow u=\int C(2x-1)e^{-x}dx = C\int(2x-1)e^{-x}dx = -C\int(2x-1)de^{-x}$$

$$= -C(2x-1)e^{-x} + C\int e^{-x}d(2x-1)$$

$$= -C(2x-1)e^{-x} - 2Ce^{-x} + C_2$$

$$= C_1(2x+1)e^{-x} + C_2, C_1 = -C.$$

所以$y_2(x) = u(x)e^x = C_1(2x+1) + C_2e^x$.

该方程的通解为 $y = C_1(2x+1)e^{-x} + C_2e^x$.

□