2022级工科数学分析基础1(缓补考)试题与答案

一. 单选题 (共13题52分)

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-1-x\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2\ln(1-x)}=($ $)$

A、$-\dfrac{1}{4}$. B、$\dfrac{1}{4}$. C、$-\dfrac{1}{2}$. D、$\dfrac{1}{2}$.

2. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{ax^2-bx}\right)=-1$，则两个常数( )

A、 $a=1,b=2$. B、$a=1,b=-2$.

C、$a=4,b=2$. D、$a=4,b=-2$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=($ $)$

A、 $\dfrac{\pi}{4}$. B、0. C、1. D、$+\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-x}{x^3}=($ $)$

A、 $-\dfrac{2}{3}$. B、$\dfrac{1}{3}$. C、$-\dfrac{1}{3}$. D、$\dfrac{2}{3}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}},x\neq0\\0,\ x=0\end{cases}$，则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的( )

A、 无穷间断点. B、连续但不可导的点.

C、 可去间断点. D、可导点.

6. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x+y=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=($ $)$

A、 $\dfrac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2-y}$. B、$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}-y}$.

C、$\dfrac{x-x^2-y^2}{x^2+y^2-y}$. D、$\dfrac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-y}$.

7. 设 $f(x)=\cos^2 x$，则当 $n\geq 1$ 时，$f^{(n)}(x)=$（　　）

A、$2^n\cos\left(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.　　B、$2^{n-1}\cos\left(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C、$2^n\cos(2x+n\cdot\pi)$.　　D、$2^{n-1}\cos(2x+n\cdot\pi)$.

8. 以下四个反常积分之中，发散的是（　）

A、$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^3 x\mathrm{d}x$.　　B、$\int_{-\infty}^{+\infty}x^3e^{-x^4}\mathrm{d}x$.

C、$\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\mathrm{d}x$.　　D、$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$.

9. 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x\left(n\in\mathbf{N}^+\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)=$（　）

A、$\left(1+e^{-1}\right)^{3/2}-1$.　　B、$\left(1+e^{-1}\right)^{3/2}+1$.

C、$(1+e)^{3/2}-1$.　　D、$(1+e)^{3/2}+1$.

10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$（　　）

A、$-f(x)$.　　B、$f(x)$.

C、$-f(0)$.　　D、$f(0)$.

11. $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$

A、$\dfrac{1}{16}$.　　B、$\dfrac{\pi}{16}$.

C、$\dfrac{\pi}{32}$.　　D、$\dfrac{1}{32}$.

12. 设 $\dfrac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$（　　）

A、$\ln x-\ln(\ln x)+C$.　　B、$\dfrac{1}{4}\left(x^2\ln^2 x-x^2\ln x+2x\right)+C$.

C、$x\ln x-x+C$.　　D、$\ln x-\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

13. 设 D 是由曲线 $y=x^2$（$0\leq x\leq 1$）和直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面图形，则 D 绕直线 $x=-1$ 旋转一周所成的旋转体的体积 $V=$（　　）

A、 $\dfrac{7\pi}{2}$.　　B、 $\dfrac{5\pi}{3}$.　　C、 $\dfrac{7\pi}{6}$.　　D、 $\dfrac{5\pi}{6}$.

二. (10 分)

(高数，微积分) 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{x+y}$ 满足 $y|_{x=2}=1$ 的特解.

(工数)设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明:

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $\left(f(b)-f(a)\right)g'(\xi)=\left(g(b)-g(a)\right)f'(\xi)$

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$,

令 $u=\dfrac{y}{x}$，原方程可化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\dfrac{1-u}{1+u}$，$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1-u}{1+u}-u=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u}$，　　（3 分）

分离变量并积分，$\displaystyle\int\frac{1+u}{1-2u-u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，　　（5 分）

得 $-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-2u-u^2\right|=\ln|x|+c_1$，

$2\ln|x|+\ln\left|1-2u-u^2\right|=c_2$， $\ln\left(x^2\cdot\left|1-2u-u^2\right|\right)=c_2$，

故 $x^2(1-2u-u^2)=c$，　　（7 分）

原方程的通解为 $x^2-2xy-y^2=c$（c 为任意常数）.　　（8 分）

再由 $y|_{x=2}=1$，得 $c=-1$，

所以所求特解为 $x^2-2xy-y^2=-1$. （也可写成其它等价形式）　　（10 分）

证 令 $F(x)=\left(f(b)-f(a)\right)g(x)-\left(g(b)-g(a)\right)f(x)\ \left(x\in[a,b]\right)$，（4 分）

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)=F(b)$，

所以由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，（9 分）

即 $\left(f(b)-f(a)\right)g'(\xi)=\left(g(b)-g(a)\right)f'(\xi)$.（10 分）

【注】辅助函数也可取为

$F(x)=\left(f(b)-f(a)\right)\cdot\left(g(x)-g(a)\right)-\left(g(b)-g(a)\right)\cdot\left(f(x)-f(a)\right)\ \left(x\in[a,b]\right)$.

三.（10 分）求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\left(e^{\sin x}-1\right)\sin x}\cdot\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin x}\cdot\ln\left(\dfrac{\sin x-x}{x}+1\right)$（3 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\sin x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$（6 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$.（10 分）

四.（10 分）证明：当 $x>0$ 时，有 $x^2>(1+x)\ln^2(1+x)$.

证 令 $f(x)=x^2-(1+x)\cdot\ln^2(1+x)\quad\left(x\in[0,+\infty)\right)$，（2 分）

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，

且 $f'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)$，（4 分）

$f''(x)=2-\dfrac{2\ln(1+x)}{1+x}\ln^2(1+x)-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{2\left(x-\ln(1+x)\right)}{1+x}>0\ (x>0)$，（6 分）

所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$.（8 分）

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，（10 分）

即 $x^2>(1+x)\cdot\ln^2(1+x)$.

五. （8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有二阶连续导数，其中常数 $a>0$，证明：**(1)** 若 $f(0)=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}\left(f(a)+f(-a)\right)$；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$，使得

$$\left|f''(\eta)\right|\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$$

证 **(1)** $\begin{cases} f(a)=f(0)+f'(0)a+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}a^2, \\ f(-a)=f(0)-f'(0)a+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}a^2 \end{cases}$ $\quad(-a<\xi_2<0<\xi_1<a)$

两式相加，得 $f(a)+f(-a)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}a^2$.

由于 $f''(x)$ 连续，所以由连续函数的介值定理，存在 $\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subset(-a,a)$，使得

$f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，所以 $f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}\left(f(a)+f(-a)\right)$.　　　　（4 分）

(2) 设 $c\in(-a,a)$ 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(c)=0$.

$$\begin{cases} f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\dfrac{f''(\eta_1)}{2}(a-c)^2, \\ f(-a)=f(c)+f'(c)(-a-c)+\dfrac{f''(\eta_2)}{2}(-a-c)^2 \end{cases} \quad (-a<\eta_2<0<\eta_1<a)$$

两式相减，得

$$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{f''(\eta_1)}{2}(a-c)^2-\frac{f''(\eta_2)}{2}(-a-c)^2\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\left(|f''(\eta_1)|(a-c)^2+|f''(\eta_2)|(a+c)^2\right)$$

取 $\eta=\eta_1$ 或 $\eta=\eta_2$，使得 $|f''(\eta_1)|=\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}$，则

$$|f(a)-f(-a)|\le\frac{|f''(\eta)|}{2}\left((a-c)^2+(a+c)^2\right)=|f''(\eta)|\left(a^2+c^2\right)\le 2a^2\cdot|f''(\eta)|.$$ （8 分）

六. （10 分） (1) 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，其中常数 $a>0$，

证明: $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x$； (2) 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{e^x+1}\mathrm{d}x$.

证 (1) $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$. （1 分）

$$\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}-\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x,$$

$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x$. （5 分）

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x}{\mathrm{e}^x+1}+\frac{\cos^2 x}{\mathrm{e}^{-x}+1}\right)\mathrm{d}x$. （7 分）

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ （8 分）

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$. （10 分）