习题课

例1 计算$\oint_{ABCDA}\dfrac{dx+dy}{|xy|+1}$，其中 $ABCDA$ 为

$|x|+|y|=1$，取逆时针方向。

解 积分路径如图8－21

利用对称性。将原式分

成两部分，即

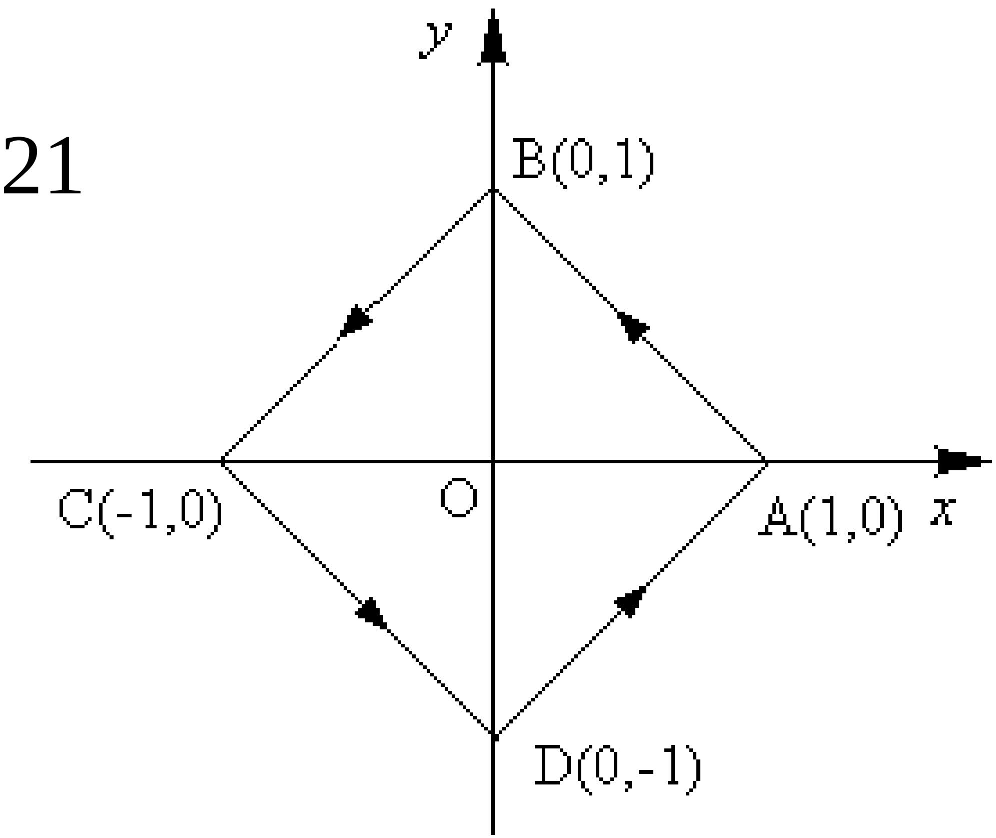


图8－21

$$\oint_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|xy|+1}$$

$$=\oint_{ABCDA}\frac{dx}{|xy|+1}+\oint_{ABCDA}\frac{dy}{|xy|+1}$$

第一个积分，曲线关于 x 轴对称，L在上半平面部分的走向与L在下半平面部分的走向相反(前者 $A\to C$, 后者 $C\to A$)，被积函数是 y 的偶函数。

第二个积分，曲线关于y轴对称，L在右半平面部分的走向与L在左半平面部分的走向相反(前者 $D\to B$ ，后者 $B\to D$)，被积函数是 x 的偶函数。

所以两个积分均为零。即

$$\oint_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|xy|+1}=0$$

上述结论再一般情况下也成立。

对坐标的曲线积分，当平面曲线L是分段光滑的，关于 x 轴对称，L在上半平面与下半平面部分的走向相反时，

（1）若 $P(x,y)=P(x,-y)$（即 $P(x,y)$ 为 y 的偶函数）

则

$$\int_L P(x,y)dx = 0$$

（2）若 $P(x,y) = -P(x,-y)$（即$P(x,y)$为 y 的奇函数），则

$$\int_L P(x,y)dx = 2\int_{L_1} P(x,y)dx$$

其中 L_1 为L的上半平面的部分。

类似地，对$\int_L Q(x,y)dy$ 的讨论也有相应的结论。

例2 计算 $I=\oint_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$ **。其中** C **是曲线**

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=Rx \end{cases} (R>0, z\geq 0)$$

从*x*轴正向看去，逆时针方向。

解（1）令 $\begin{cases} x-\dfrac{R}{2}=\dfrac{R}{2}\cos\theta \\ y=\dfrac{R}{2}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=R\sin\dfrac{\theta}{2}$

$$I=\int_0^{2\pi}[-\frac{R^2}{4}\sin^2\theta\frac{R}{2}\sin\theta+R^2\sin^2\frac{\theta}{2}\frac{R}{2}\cos\theta+\frac{R^2}{4}(1+\cos\theta)^2\frac{R}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}]d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\pi R^3$$

解（2） 由对称性 $\oint_C z^2dy \neq 0$，而 $\oint_C y^2dx = 0$，$\oint_C x^2dz = 0$，由上述参数法

$$I = \int_0^{2\pi} R^2\sin^2\frac{\theta}{2}\frac{R}{2}\cos\theta d\theta \xlongequal{\frac{\theta}{2}=t} \int_0^{\pi}\frac{R^3}{2}\sin^2 t\cos 2t\cdot 2dt$$

$$= R^3\int_0^{\pi}\sin^2 t(1-2\sin^2 t)dt = 2R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t - 2\sin^4 t)dt$$

$$= 2R^3\left[\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\right]\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4}\pi R^3$$

注（1）设参数注重平面，“抓住平面痕迹，解得空间曲线

(2)对称性问题，以直观（几何）定义解之为好

例3 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在光滑的有向曲线 C 上连续，L 为曲线弧 C 的弧长，而 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$，

证明

$$\left|\int_C Pdx+Qdy\right|\le LM.$$

证 由两类曲线积分的联系和性质，有

$$\left|\int_C Pdx+Qdy\right|=.\left|\int_C (P\cos\theta+Q\sin\theta)ds\right|$$

$$\le\int_C |(P\cos\theta+Q\sin\theta)|\,ds$$

$$= \int_C |(P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}) \cdot (\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})|\,ds$$

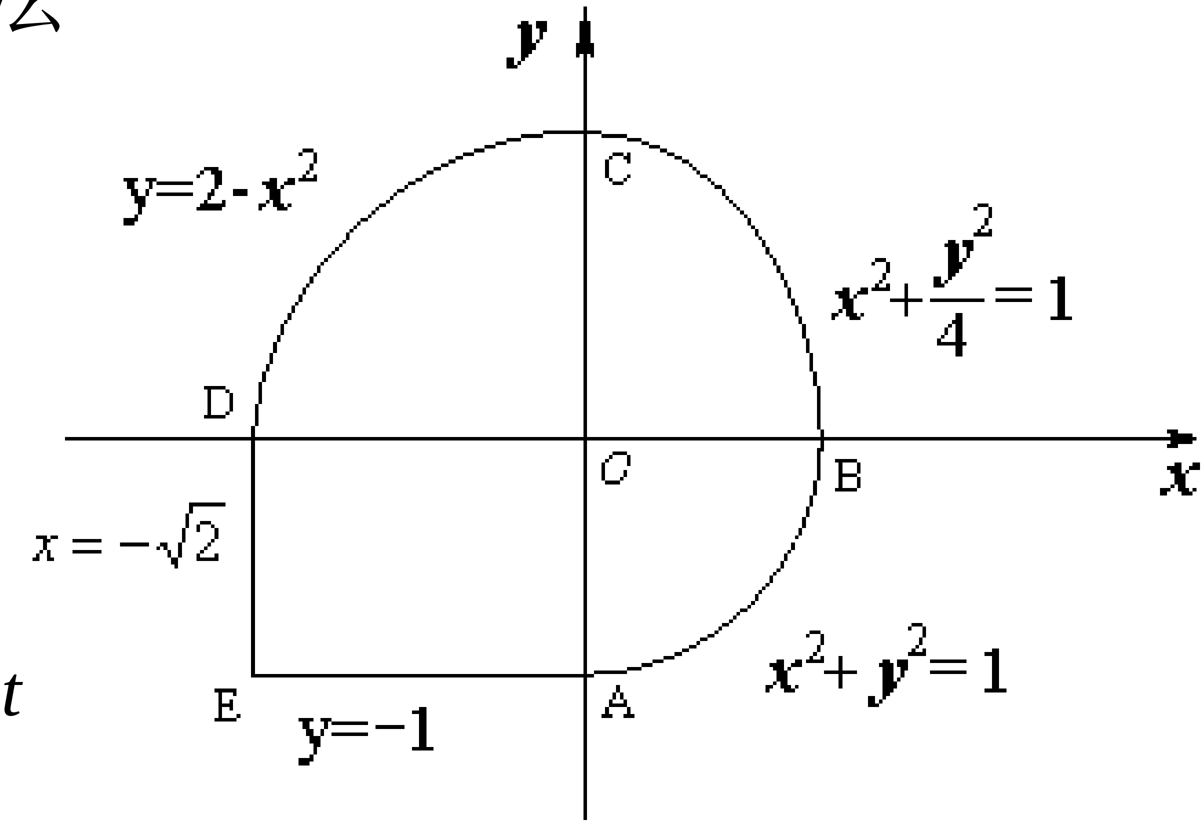
$$\leq \int_C |(P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j})\|(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})|\,ds$$

$$= \int_C \sqrt{P^2 + Q^2}\,ds \leq M\int_C ds = ML.$$

例4 计算 $I=\oint_L xdy-ydx$ L：如图ABCDEA

解 （1）设参数法

$$\oint_L=\sum_{i=1}^{5}\int_{L_i}$$



在 L_1 上 设

$$x=\cos t\ ,\ y=\sin t$$

$$\int_{L_1}xdy-ydx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\frac{\pi}{2}$$

在 L_2 上 设 $x=\cos t$， $y=2\sin t$

$$\int_{L_2} xdy-ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t\cdot 2\cos t+2\sin t\cdot \sin t)dt=\pi$$

在 L_3 上 以x为参数，$dy=-2xdx$

$$\int_{L_3} xdy-ydx=\int_0^{-\sqrt{2}}[x(-2x)-(2-x^2)]dx=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

在 L_4 上 以y为参数 $x=-\sqrt{2}$，$dx=0$

$$\int_{L_4} xdy-ydx=\int_0^{-1}-\sqrt{2}dy=\sqrt{2}$$

在L_5上$y=-1$，以x为参数($dy=0$)

$$\int_{L_5} xdy-ydx=\int_{-\sqrt{2}}^{0}-(-1)dx=\sqrt{2}$$

综上

$$\int_L xdy-ydx=\frac{3}{2}\pi+\frac{14}{3}\sqrt{2}$$

解（2）（用格林公式）

$$\int_L xdy-ydx=\iint_D 2dxdy=2(S_1+S_2+S_3+S_4)$$

$$=2\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{4}\pi\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}2\sqrt{2}\cdot 2+\sqrt{2}\right)=\frac{3}{2}\pi+\frac{14}{3}\sqrt{2}$$

例5 计算 $I=\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - my)dy$ ，

其中 L 是 $x^2+y^2=ax$ 从点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$

的上半圆弧，m 为常数。

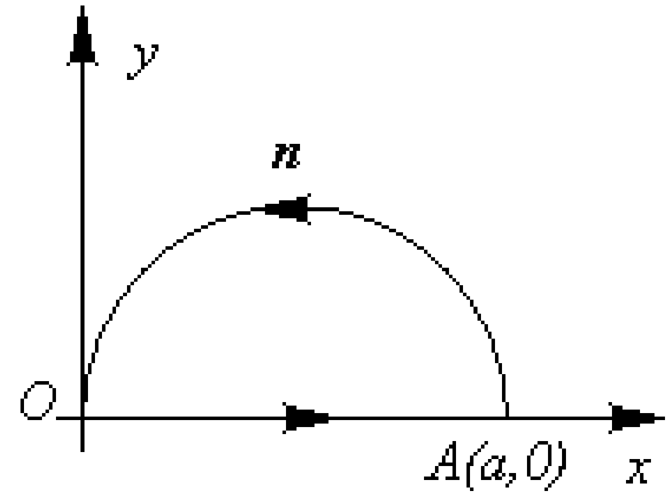


图8—23

解 我们补一条直线 **OA**

得闭曲线 **AnOA** ， 从而由

格林公式

$$I+\int_{\overline{OA}} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - my)dy$$

$$=\oint_{AnOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-my)dy$$

$$=\iint_D[e^x\cos y-(e^x\cos y-m)]dxdy=\iint_D mdxdy$$

$$=m\cdot\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}=\frac{m\pi a^2}{8}.$$

其中 D 为半圆 $x^2+y^2\le ax, y\ge 0, \iint_D dxdy=\dfrac{\pi a^2}{8}.$

又 $\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-my)dy=0$ ，故

$$I=\frac{m\pi a^2}{8}.$$

例6 格林公式（加线减线）

（1） 计算 $\int_C [e^x \sin y - b(x+y)]dx + (e^x \cos y - ax)dy$，

C： 从点 $A(0,2a)$ 沿曲线 $x = -\sqrt{2ay - y^2}$ 到点 $O(0,0)$

的曲线。

连接O，A直线段（记为L）

$$I = \oint_{C \cup L} Pdx + Qdy - \int_L Pdx + Qdy$$

$$= \oint_{C \cup L} [e^x \sin y - b(x+y)]dx + (e^x \cos y - ax)dy$$

$$-\oint_L [e^x \sin y - b(x+y)]dx + (e^x \cos y - ax)dy$$

$$=\iint_D [(e^x \cos y - a) - (e^x \cos y - b)]dxdy - \int_0^{2a} \cos y dy$$

$$=\iint_D (b-a)dxdy - \sin y |_0^{2a} = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a) - \sin 2a$$

例7．L是不过原点的简单闭曲线（正向）计算

曲线积分$\int_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$ 。

解 （1）当L不包围原点时

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_D\left[\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}-\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right]dxdy=0$$

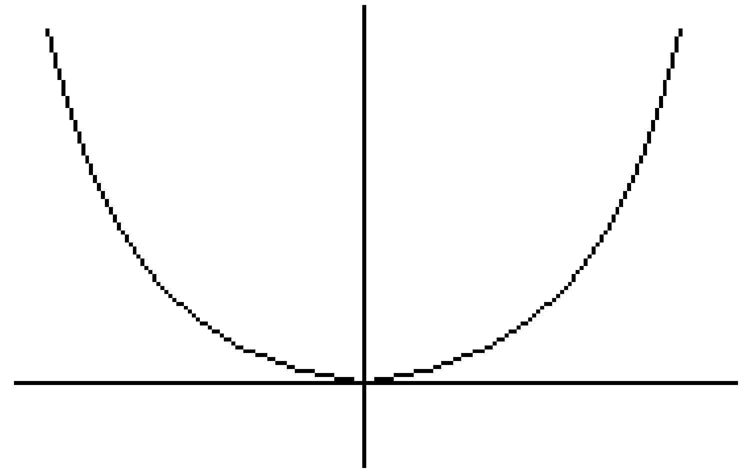
（2）当L包围原点时，做小椭圆 $L_\varepsilon : 4x^2+y^2=\varepsilon^2$

(使ε 充分小,从而 L_e 含于闭曲线内)。则

$$\int_{L^+}=\int_{L_\varepsilon}=\oint_{L_\varepsilon}\frac{xdy-ydx}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D(1+1)dxdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot\pi\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi$$

注：本题为一特殊类型，形式：闭曲线围奇点；只当满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 可微，此时对于任意围奇点的闭曲线积分相等。

例8 求 $I=\int(12xy+e^{y})dx+(xe^{y}-\cos y)dy$ ， 其中 L 为曲线 $y=x^{2}$ 上从 $A(-1,1)$ 到 $B(1,1)$ 的曲线。



$$I=\int_{L}12xydx-\cos ydy+\int_{L}e^{y}dx+xe^{y}dy$$

$$=\int_{L}e^{y}dx+xe^{y}dy+\int_{-1}^{1}(12x^{3}-2x\cos x^{2})dx$$

$$\int_{L}d(xe^{y})=xe^{y}\Big|_{(-1,1)}^{(1,1)}=e-(-e)=2e$$

例 9 计算 $\oint_{\Gamma} - x^2 y dx + xy^2 dy$ ， 其中 C 为逆时针方向的圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 。

由格林公式：

$$\oint_{\Gamma} - x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{D} (y^2 + x^2) dx dy = \int_0^{2\pi} dx \int_0^R r^2 r dr = \frac{\pi R^4}{2}$$

例1 设函数 $f(x)$ 有连续的导数，且曲线积分

$$\int_L [e^{-x} - f(x)]ydx + f(x)dy$$

与路径无关，求 $f(x)$。

解 由于积分与路径无关，所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，从而

$$f'(x) = e^{-x} - f(x)$$

由一阶线性微分方程的通解公式，有

$$f(x) = e^{-\int dx}\left(c + \int e^{-x} e^{\int dx} dx\right) = e^{-x}(c + x)$$

例2 设函数 $f(x)$有连续的导数，满足条件 $f(0)=0$

且曲线积分 $\int_L xy^2dx + yf(x)dy$ 与路径无关，求 $f(x)$ 。

并计算

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + yf(x)dy$$

解 由于积分与路径无关，所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ ，从而

$f'(x)=2x$ 。

由一阶线性微分方程的通解公式，有 $f(x)=x^2+c$。

又 $f(0)=0$ ，所以c=0, 从而 $f(x)=x^2$ 。

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}$$

例3 设函数 $f(u)$ 有连续的导数，计算

$$I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$$

其中L是由 $(3,\frac{2}{3})$ 至 $(1,2)$ 的直线段。

解1 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 所以，在不包含 $y=0$ 区域内积分与路径无关，由于抽象函数 f 以 xy 作为整

体，而起点 $(3,\frac{2}{3})$ 和终点 $(1,2)$ 都恰好 $xy=2$，

所以把路径L改为 L_1：沿 $xy=2$ 由 $(3,\frac{2}{3})$ 至 $(1,2)$。

$$I=\int_{L_1}\frac{1+y^2f(2)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(2)-1]dy$$

$$I=\int_3^1(\frac{x}{2}+f(2)\frac{2}{x})\,dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}(\frac{2}{y}f(2)-\frac{2}{y^3})dy$$

$$=-4$$

解2 $I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$

$$=\int_L \frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy+\int_L yf(xy)dx+xf(xy)dy$$

$$=\int_L d(\frac{x}{y})+\int_L f(xy)d(xy)$$

$$=\frac{x}{y}\Big|_{(3,\frac{2}{3})}^{(1,2)}+F(xy)\Big|_{(3,\frac{2}{3})}^{(1,2)}=-4$$

例4 **设** $f(x)$ **有连续一阶导数，** $f(1)=\frac{1}{3}$ **，曲线积分**

$I=\int_L (x-f(x))y\,dx+x\,f(x)\,dy$ **与路径无关，求*f*(*x*)。**

解 由于曲线积分与路径无关,所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,而

$P=(x-f(x))y$, $Q=xf(x)$,故 $f(x)+xf'(x)=x-f(x)$

从而有 $f'(x)+\frac{2}{x}f(x)=1$,故

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}(\int 1e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c)=\frac{1}{x^2}(\int x^2dx+c)$$

$$=\frac{1}{x^2}(\frac{1}{3}x^3+c)=\frac{c}{x^2}+\frac{x}{3}$$

例5（积分与路径无关问题）

a. P，Q已知，积分与路径无关，自选路径

（1）计算 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，L：$y = \cos\frac{\pi}{2}x$，由 $A(-1,0)$ 至 $B(0,1)$ 再到 $C(1,0)$ 弧段。

解 易验证 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，积分与路径无关，做 $x^2 + y^2 = 1(y \ge 0)$ 段（记为 L_1）则原式

$$= \int_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_L xdy - ydx = \int_{\pi}^{0} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = -\pi$$

（2）计算 $\int_{\overset{\wedge}{AOB}}(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$ ，其中 $\overset{\wedge}{AOB}$ 为起于 $A(-1,1)$ 沿 $y=x^2$ 到 $O(0,0)$ 再沿 $y=0$ 至 $B(2,0)$ 。

解

$$I=\int_{\overset{\wedge}{AO}}+\int_{OB}=\int_{\overset{\wedge}{AO}}e^y dx+xe^y dy+\int_{\overset{\wedge}{AO}}12xydx-\cos ydy+\int_0^2(0+1)dx$$

$$=\int_{\overset{\wedge}{AO}}d(xe^y)+\int_{-1}^{0}12xx^2dx-\int_1^0\cos ydy+2$$

$$=xe^y\Big|_{(-1,1)}^{(0,0)}+12\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}-\sin y\Big|_1^0+2=e-1+\sin 1$$

b．P，Q之一未知，已知积分于路径无关问题。

（1）设 f 具有连续二阶导数，且 $f(1)=f'(1)=1$，

$$\int_L \left[\frac{y^2}{x}+xf\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx+\left[y-xf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy=0$$

其中L是任一不与y轴相交的简单光滑闭曲线，求

$f(x)$ 。

解 $\forall L$ 原积分为零，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$\frac{2y}{x}+\frac{x}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)=-f'\left(\frac{y}{x}\right)-x\left(-\frac{y}{x^2}\right)f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

即

$$\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)-2f'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2y}{x}$$

令 $\frac{y}{x}=t$，得 $tf''(t)-2f'(t)=2t$ ，$f''(t)-\frac{2}{t}f'(t)=2$

$$f'(t)=e^{\int\frac{2}{t}dt}\left(\int 2e^{\int-\frac{2}{t}dt}dt+c\right)=t^2\left(\int 2\frac{1}{t^2}dt+c\right)=-\frac{2t^2}{t}+ct^2=$$

$$-2t+ct^2$$

代入 $f'(1)=1$ 得 $1=-2+c$，$c=3$，$f'(t)=3t^2-2t$，

$f(t)=t^3-t^2+c_1$ ，代入初值 $f(1)=1$ 得 $1=1-1+c_1$，$c_1=1$

则 $f(t)=t^3-t^2+1$ 即 $f(x)=x^3-x^2+1$

（2）设函数 $Q(x,y)$ 在xOy平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关，且 $\forall t$ 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy$$

求 $Q(x,y)$。

解 由于积分与路径无关，得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$，则 $Q(x,y)=x^2+c(y)$，$c(y)$ 为待定函数，则

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x,y)dy = \int_0^1 (t^2 + c(y))dy = t^2 + \int_0^1 c(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x,y)dy = \int_0^t Q(1,y)dy = \int_0^t (1+c(y))dy = t + \int_0^t c(y)dy$$

从而 $t^2 + \int_0^1 c(y)dy = t + \int_0^t c(y)dy$ ，对t求导得 $2t = 1 + c(t)$ ，

$c(t) = 2t - 1$ $c(y) = 2y - 1$ 从而 $Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$ ；

小注：上述两例由积分与路径无关，和 P，Q 之一未知而导得微分方程，称为解方程问题。

例6 计算曲线积分

$$I=\int_{\overset{\frown}{OmA}}[\varphi(y)\cos x-y]dx+[\varphi'(y)\sin x-1]dy$$

这里$\varphi''(y)$连续，$\overset{\frown}{OmA}$是位于连接$O(0,0)$与$A(\pi,\pi)$的线段$\overline{OA}$下方的任一光滑曲线。且$\overset{\frown}{OmA}$与$\overline{OA}$所围图形的面积为2.

解：加辅助线 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BO}$ ，其中 $B(0,\pi)$ ，

$$I=\int_{\overset{\frown}{OmA}}-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$-\int_{\pi}^{0}(\varphi(\pi)\cos x-\pi)dx-\int_{\pi}^{0}(-1)dy=2-\frac{\pi^{2}}{2}-\pi$$

例7 计算 $\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，$L$ 为上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$

由 $A(-a,0)$ 经 $B(0,b)$ 到 $C(a,0)$ 的弧段。

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial Q}{\partial x}$，积分与路径无关，取

$l: x^2+y^2=a^2$（上半圆），即 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$

原式=

$$\int_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_l xdy-ydx=\frac{1}{a^2}\int_\pi^0 (a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)dt=-\pi$$

例8 设 $u(x,y),v(x,y)$ 在区域 $D: x^2+y^2\le 2x-2y$ 上具有连续的偏导数，在 D 的边界曲线 C 上

$u(x,y)=x, v(x,y)=y$，求

$$\iint\limits_D [(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})v+(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})u]dxdy$$

解：

$$\iint\limits_D [(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})v+(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})u]dxdy$$

$$=\oint_C uvdx+uvdy=\oint_C xydx+xydy$$

$$= \iint_D (y - x)dxdy = \iint_D [(y+1) - (x-1) - 2]dxdy$$

$$= -2\iint_D dxdy = -2\pi$$

例9 设 D为曲线 $C: r=1+\cos\theta$所包围的闭区域，面积为 A, C 的方向为逆时针方向，函数 $u=u(x,y)$ 在 D上具有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1$ ，证明 $\oint_C \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = A$ ，其中 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$是$u$ 沿 D 的边界外法线的方向导数，并求此积分值。

证明：$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta'\right) ds$$

$$= \oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right) ds = \oint_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy = \iint_D dxdy = A$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r dr = \frac{3}{2}\pi$$

例10 设 $f(u)$ 存在连续的导数，且 $\int_0^4 f(u)du = A \neq 0$

L为半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 起点为原点，终点为 $B(2,0)$。

计算

$$\int_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)\ ;$$

解 令 $X(x,y)=f(x^2+y^2)\cdot x, Y(x,y)=f(x^2+y^2)\cdot y$ ，则

$$\int_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=\int_L Xdx+Ydy$$

由于 $X(x,y),Y(x,y)$ 都是连续可导函数，并且

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 2xyf'(x^2 + y^2) = \frac{\partial X}{\partial y}$$

所以这个积分于路径无关，于是

$$\int_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = \int_{\overrightarrow{OB}} f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$$

$$= \int_0^2 f(x^2)xdx = \frac{1}{2}\int_0^4 f(u)du = \frac{A}{2}$$

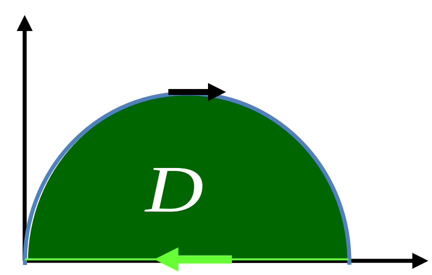
例11. 计算 $\int_L (x^2+3y)dx+(y^2-x)dy$ 其中L为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O\,(0,0)$ 到 $A\,(4,0)$.

解: 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$ 它与L所围区域为D, 则

$$\text{原式} = \oint_{L+\overline{AO}} (x^2+3y)dx+(y^2-x)dy$$

$$+\int_{\overline{AO}} (x^2+3y)dx+(y^2-x)dy$$

$$=4\iint_D dxdy+\int_0^4 x^2dx = 8\pi+\frac{3}{49}$$



例1 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ ，其中Σ为任一不经过原点的闭曲面的外测。

解 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0\ (x^2+y^2+z^2\neq 0)$ ，所以

（1）当 Σ 不包围原点时，由高斯公式即得

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

（2）当 Σ 包围原点时，取 Σ_1：$x^2+y^2+z^2=r$ 的外测，由高斯公式，得

$$\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\text{。}$$

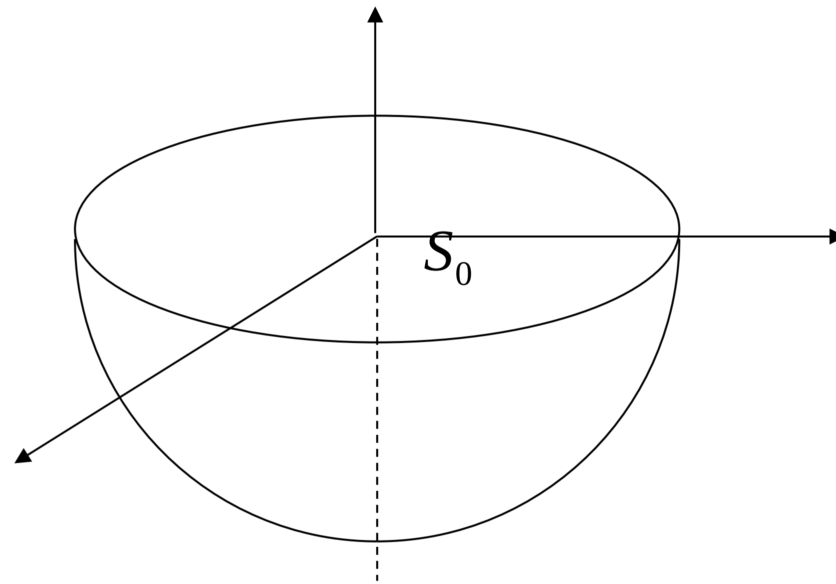
而 $$\oiint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r^3}\oiint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{r^3}\iiint_{\Omega_1}3dv=4\pi.$$

即 $$\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi.$$

例2 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(x+a)dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ ，Σ: 下半球面

$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧 $(a>0)$ 。



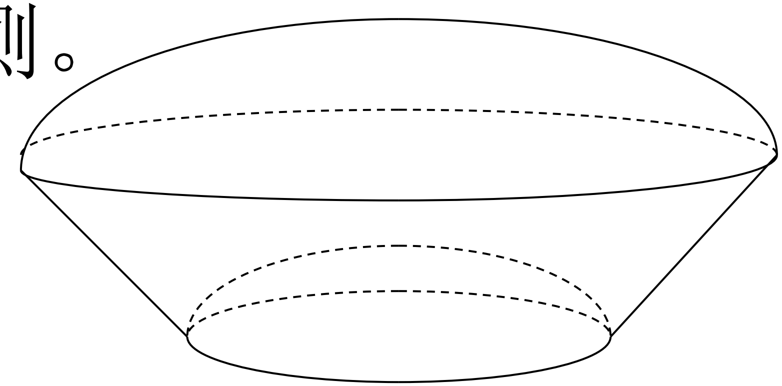
解 做 xoy 面，记S_0 ， 则

$$\text{原式}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+(x+a)dxdy=\left(\frac{1}{a}\oiint\limits_{\Sigma+S_0}-\frac{1}{a}\iint\limits_{S_0\text{下}}\right)(axdydz+(x+a)dxdy$$

$$=-\frac{1}{a}\iiint\limits_{V}adv-\frac{1}{a}\iint\limits_{S_0\text{下}}axdydz(=0)-(-1)\frac{1}{a}\iint\limits_{D_{xy}}(x(=0)+a)dxdy=-\frac{2}{3}\pi a^3+\pi a^2$$

例3 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + \left(\frac{1}{z} f(\frac{y}{z}) + y^2\right) dzdx + \left(\frac{1}{y} f(\frac{y}{z}) + z^2\right) dxdy$

其中 f 具有连续偏导数，$\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围立体表面外测。



解

$$I = \iiint\limits_{v} [2x + \frac{1}{z^2} f' + 2y + \frac{1}{y}(-\frac{y}{z^2}) f' + 2z] dv$$

$$= 2\iiint\limits_{v} (\overbrace{x}^{0} + \overbrace{y}^{0} + z) dv = 2\iiint\limits_{v} z dv = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \int_1^2 r^2 r dr$$

$$= \frac{15\pi}{4}$$

例4 设S为上半球面：$x^2+y^2+z^2=a^2\,(z\geq 0),(a>0)$

下列积分不为零的是

（A）$\iint\limits_{S上} x^2 dydz$（B）$\iint\limits_{S上} x dydz$（C）$\iint\limits_{S} x dS$（D）$\iint\limits_{S} xyz dS$

（B）

例5 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是由曲面

$x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$ 和 $z=-R(R>0)$

所围立体表面的外侧。

解：设 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 依次为 Σ 的上、下底和圆柱面部

分，则

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=0,\quad \iint\limits_{\Sigma_3}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \frac{R^2 dxdy}{x^2+y^2+R^2} - \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \frac{(-R)^2 dxdy}{x^2+y^2+R^2} = 0$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2} dydz - \iint\limits_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2} dydz$$

$$= 2\iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2} dydz = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-y^2} dy \int_{-R}^{R} \frac{dz}{R^2+z^2} = \frac{\pi^2}{2} R$$

例6 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(f(x,y,z)+x)dydz+(2f(x,y,z)+y)dzdx$

$+(f(x,y,z)+z)dxdy$， 其中 f 连续，$\Sigma: x-y+z=1$被坐标

面所截部分， 上侧

解：$F(x,y,z)=x-y+z-1$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}((f(x,y,z)+x)\frac{F_x}{F_z}+(2f(x,y,z)+y)\frac{F_y}{F_z}+(f(x,y,z)+z))dxdy$$

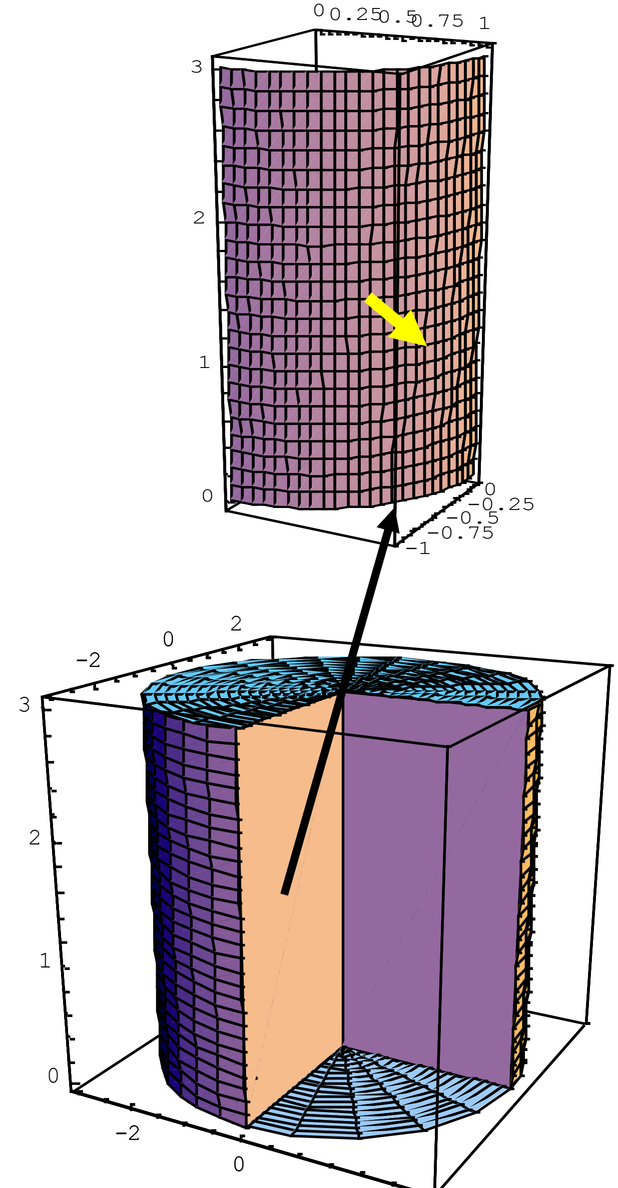
$$=\iint\limits_{\Sigma}((f(x,y,z)+x)\frac{1}{1}+(2f(x,y,z)+y)\frac{-1}{1}+(f(x,y,z)+z))dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}dxdy=\frac{1}{2}$$

例7 计算曲面积分:

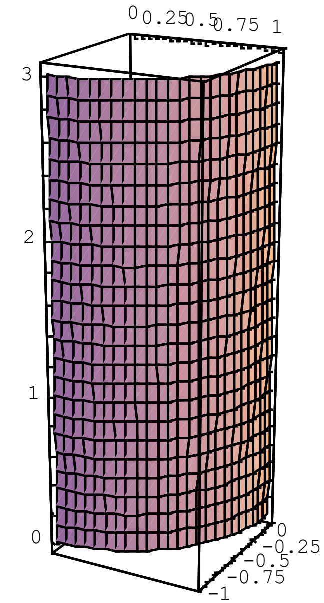
$$I=\iint_{\Sigma} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$

其中Σ是柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$和$z=3$所截得的在第一卦限内的部分的外侧.



$x^2+y^2\le 1, z=0$

解1 $I = \iint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$



$$= \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}\,dydz + \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{1-x^2}\,dzdx + \iint\limits_{D_{xy}} \underbrace{z\,dxdy}_{=0}$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy + \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\cdot 3\cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t\,dt = 2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

解2 $I = \iint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$

用Gauss公式及对称性

$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{\iiint\limits_{\Omega} (1+1+1)\,dxdydz}_{\frac{1}{4}\cdot 9\pi} - \underbrace{\iint\limits_{S_{1(下)} \cup S_{2(上)}} \overset{=0}{x\,dydz} + \overset{=0}{y\,dzdx} + z\,dxdy}_{\frac{1}{4}\cdot 3\pi}\right] = \frac{3\pi}{2}$$

下底　　上底

例8 计算 $\iint\limits_{\Sigma} dydz + zdzdx + \dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 和 $z=2$ 所截得的部分的下侧。

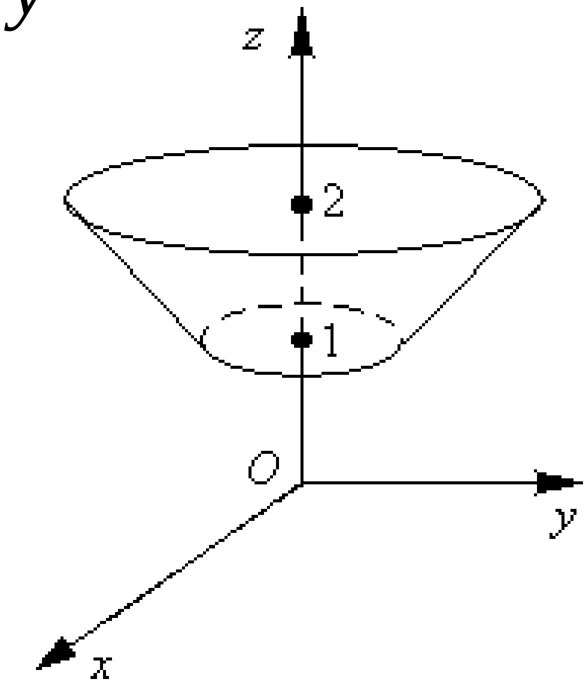


图8—22

解 在计算 $\iint\limits_{\Sigma} dydz$ 时, Σ 可分为两块，即前面一块 Σ_1 和后面一块 Σ_2，Σ_1在yOz平面上的投影为正，Σ_2在yOz平面上的投影为负，其

投影区域 D_{yz} 相同。见图8—22。

故

$$\iint\limits_{\Sigma} dydz = \iint\limits_{\Sigma_1} dydz + \iint\limits_{\Sigma_2} dydz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz - \iint\limits_{Dyz} dydz = 0.$$

在计算 $\iint\limits_{\Sigma} zdzdx$ 时，Σ 可分为两块，即右面一块 Σ_3 和左面一块 Σ_4 ，Σ_3 在zOx平面上的投影为正，Σ_4 在zOx平面上的投影为负，其投影区域 D_{zx} 相同。故

$$\iint\limits_{\Sigma} zdzdx = \iint\limits_{\Sigma_3} zdzdx + \iint\limits_{\Sigma_4} zdzdx = \iint\limits_{D_{zx}} zdzdx - \iint\limits_{D_{zx}} zdzdx = 0.$$

在计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^{z}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}dxdy$, 时，注意被积函数

$R(x,y,z)=\frac{e^{z}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$ 中，$e^{z}=e^{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$, Σ 在 xOy 平面上的投

影为负，投影区域 D_{xy} 可用极坐标表示为

$1\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$ ， 故

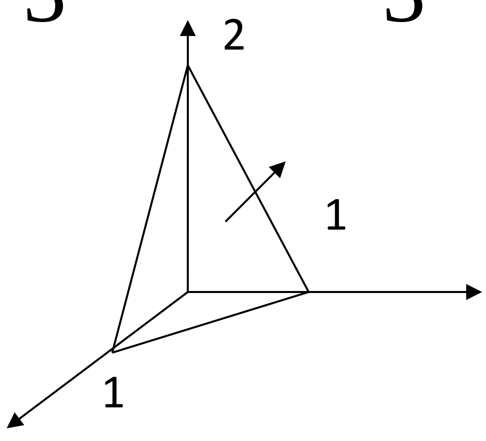
$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^{z}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{e^{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}dxdy$$

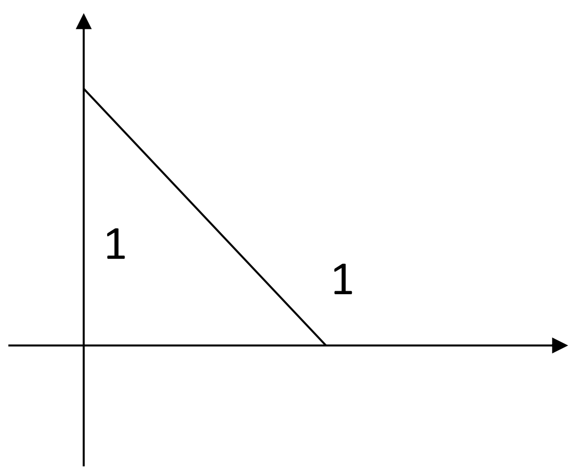
$$=-\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{1}^{2}\frac{e^{r}}{r}rdr=2\pi e(1-e).$$

例9 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (x+z)dxdy$ ，其中 Σ 是平面 $2x+2y+z=2$ 在第一卦限部分的上侧。

解 因为 Σ 取上侧，因此法向量 n 与 z 轴正向的夹角为锐角，其方向余弦是 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$,

$\cos\beta=\dfrac{2}{3},\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$ ，则有





$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (x+z)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z\right)dS = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(3x + 2y + z)dS$$

计算 $\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(3x+2y+z)dS$ 。Σ的方程为$z = 2 - 2x - 2y$

其在xOy平面的投影区域 D_{xy}：$0 \le y \le 1 - x, 0 \le x \le 1$

又曲面的面积元素

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2}\,dxdy = 3dxdy$$

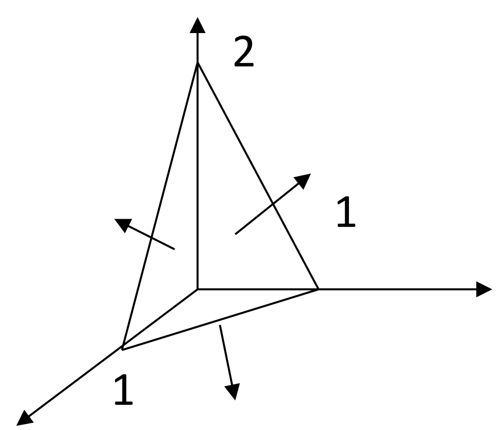
所以

$$\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + (x+z) dx dy$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{D_{xy}} (3x+2y+2-2x-2y) 3 dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+2) dy$$

$$= \frac{7}{6}.$$



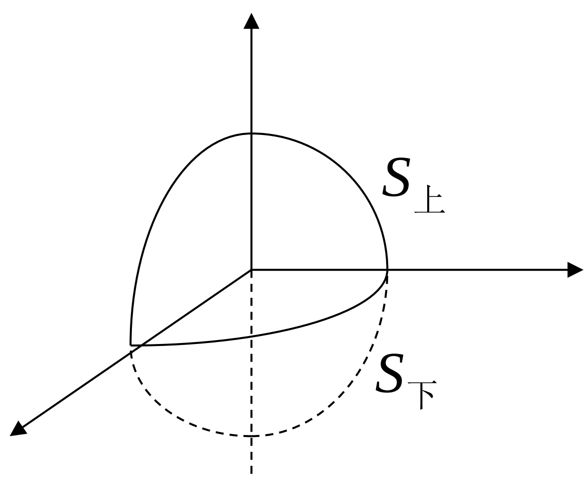
也可以补三个面用高斯公式

例10 求积分$\iint\limits_{S_{外}} xyzdxdy$，其中 $S: x^2+y^2+z^2=1$ ，

$x \ge 0, y \ge 0$ 部分外测

解 把 S 分成两部分：$S_{上}: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，

$$S_{下}: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$$

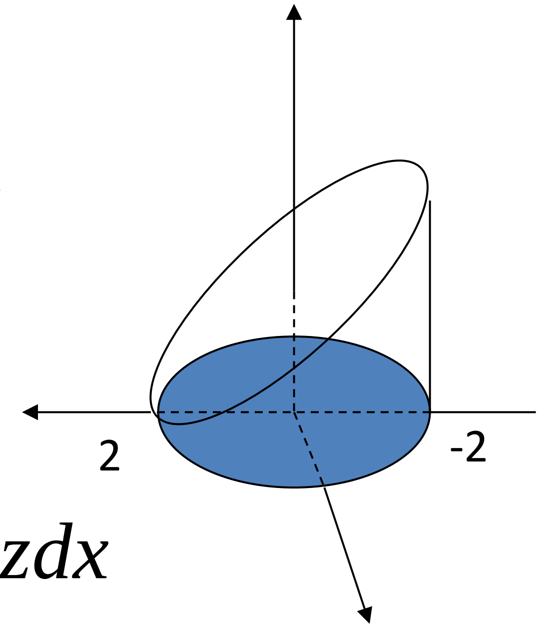


$$\iint\limits_{S外} = \iint\limits_{S上外} + \iint\limits_{S下外} = \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy + (-1)\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}rdr = \frac{2}{15}$$

。

例11 $I=\iint\limits_{S}-ydzdx+(z+1)dxdy$，其中 $S:x^2+y^2=4$ 被 $z+x=2,z=0$ 所截部分曲面外测。



解：

$$\iint\limits_{S外}-ydzdx=\iint\limits_{S左外}-ydzdx+\iint\limits_{S右外}-ydzdx$$

$$=-\iint\limits_{D_{zx}}-(-\sqrt{4-x^2})dzdx+\iint\limits_{D_{zx}}-\sqrt{4-x^2}dzdx$$

$$=-2\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2}dzdx=-2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx\int_{0}^{2-x}dz=-8\pi$$

$$\iint_{S外}(z+1)dxdy=0$$ 综上，原式 $=-8\pi$

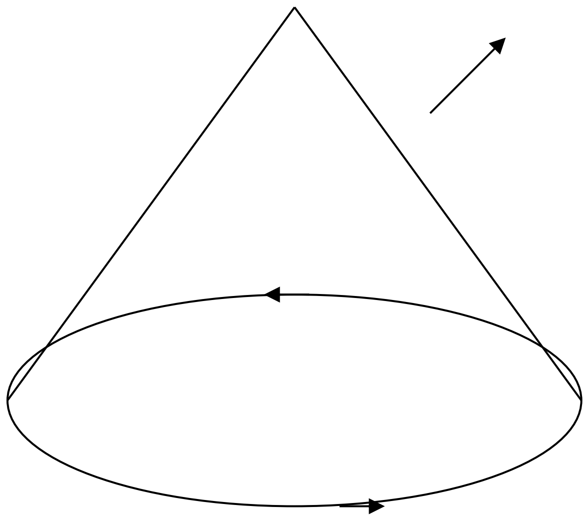
例1 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$，其中 $\boldsymbol{F}=(x-z,x^3+yz,-3xy^2)$

Σ 是锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在xOy平面上方的部分，n是

Σ 的上侧的单位法向量。

解 曲面Σ 与xOy平面的交线

（即其边界）为 $\Gamma: x^2+y^2=2^2, z=0$



并取 Γ 为逆时针方向。

由斯托克斯公式，知 $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=\oint_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$

$= \oint_\Gamma (x-z)dx+(x^3+yz)dy-3xy^2dz$ ，在 Γ 和 Γ 所围成的平面 Σ_1：$x^2+y^2\le 4$ 上，对上式右端闭路积分再次应用斯托克斯公式，得

$$\oint_\Gamma (x-z)dx+(x^3+yz)dy-3xy^2dz=\iint_{\Sigma_1}\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

其中 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}3x^2dxdy=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\cos^2\theta\, r^3dr=12\pi$$

例2 计算 $\oint_C ydx+zdy+xdz$ ， C为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

其方向为从 z轴正向看去为反时针方向。

解 原式 $=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \iint_S -dydz-dzdx-dxdy$

$$=-\iint_S (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$$

由 $F(x,y,z)=x+y+z=0$ ，$F_x'=1$, $F_y'=1$, $F_z'=1$ ，$\vec{n}=(1,1,1)$ 。

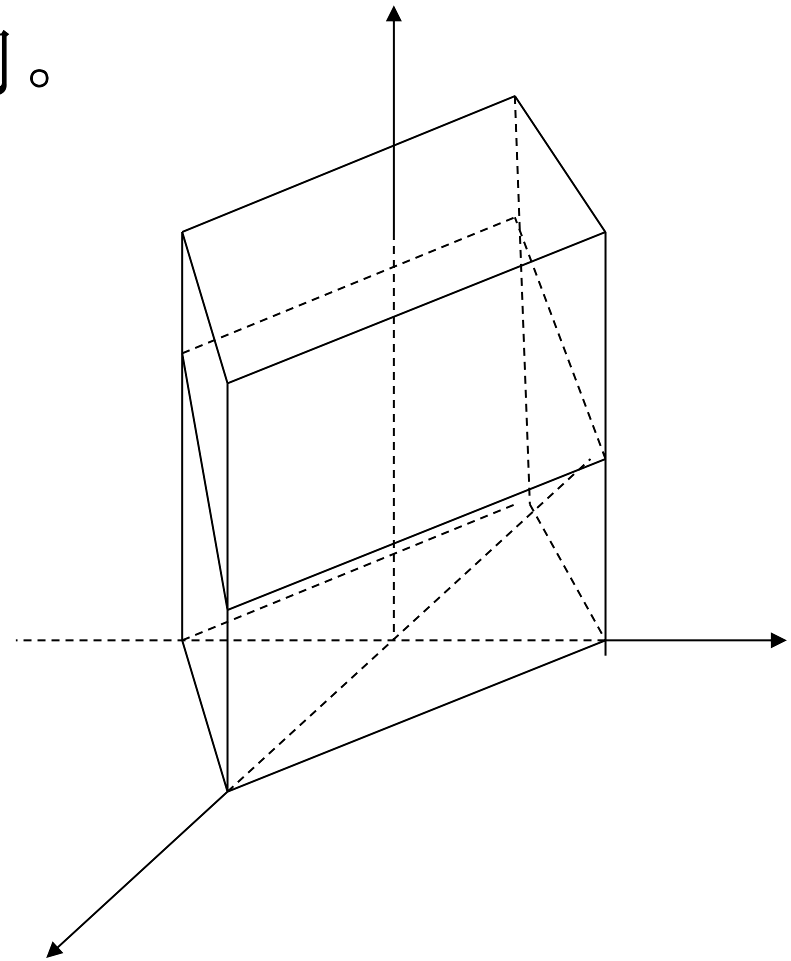
$$\vec{n}^0=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\text{，}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\cos\beta=\cos\gamma\text{。}$$

上式 $=-\sqrt{3}\iint\limits_{S}dS=-\sqrt{3}\pi a^2$

例3 计算 $I=\oint_{L}(y^{2}-z^{2})dx+(2z^{2}-x^{2})dy+(3x^{2}-y^{2})dz$

其中L是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从

z轴正向看去为逆时针方向。



解 原式 $=\iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}$

$$=\iint\limits_S(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

注意到 $dydz=\cos\alpha dS=\dfrac{1}{\sqrt{3}}dS$，$dzdx=\cos\beta dS=\dfrac{1}{\sqrt{3}}dS$，

$dxdy=\cos\gamma dS=\dfrac{1}{\sqrt{3}}dS$

上式 $=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_S(4x+2y+3z)dS=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_S[4x+2y+3(2-x-y)]\sqrt{3}dxdy$

$$=-2\iint\limits_D(x-y+6)dxdy=-12\iint\limits_D dxdy=-24$$

注：此类问题命题方式通常都是平面与曲面交线，且总是要化成第一型曲面积分来处理。同时为减少计算量P，Q，R通常为一次函数，充其量不过二次。

例4 求微分方程

$$\left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy = 0$$

的通解。

解　由于 $$\frac{\partial(4x^3y^3 - 3y^2 + 5)}{\partial y} = 12x^3y^2 - 6y$$

$$\frac{\partial(3x^4y^2 - 6xy - 4)}{\partial x} = 12x^3y^2 - 6y$$

所以方程为全微分方程。

解法1 利用曲线积分，在所设域中任取一点作起点，

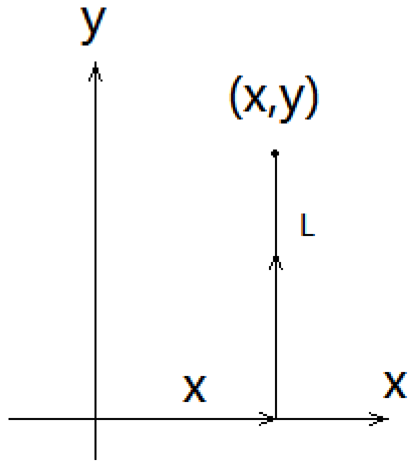
如取点（0，0），以动点 (x,y) 作终点路径是任意

的，一般可取折线L：

$$\int_L \left(4x^3y^3-3y^2+5\right)dx+\left(3x^4y^2-6xy-4\right)dy$$

$$=\int_0^x 5dx+\int_0^y\left(3x^4y^2-6xy-4\right)dy$$

$$=5x+x^4y^3-3xy^2-4y$$



则 $5x+x^4y^3-3xy^2-4y=C$ 即为通解。

解法2 设

$$df(x,y)=\left(4x^3y^3-3y^2+5\right)dx+\left(3x^4y^2-6xy-4\right)dy$$

应有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=4x^3y^3-3y^2+5$$

$$f(x,y)=x^4y^3-3xy^2+5x+C1(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^4y^2-6xy+C1'(y)=3x^4y^2-6xy-4$$

$$C1'(y)=-4\quad C1(y)=-4y+C$$

$f(x,y)=x^4y^3-3xy^2+5x-4y+C$ 即为所求通解。

例5 选取n的值，使 $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ 为某函数

$u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$。

解　设 $P=\dfrac{x-y}{(x^2+y^2)^n}$ 　$Q=\dfrac{x+y}{(x^2+y^2)^n}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(2n-1)y^2-x^2-2nxy}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(1-2n)x^2-y^2-2nxy}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

因为Pdx+Qdy为某函数全微分的充要条件是

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ，比较以上二式，可得到n=1，此时

$\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分。

取 $u_1(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$

$$=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+arctan\frac{y}{x}$$

故 $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+arctan\frac{y}{x}+C$

例6 确定常数 λ，使在右半平面$x>0$上的向量场

$$A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}i-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}j$$

为某个二元函数 $u(x,y)$的梯度，并求$u(x,y)$。

令 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda},Q(x,y)-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$

如果存在二元函数$u(x,y)$，使得

$$gradu(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$$

则必有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ，由此确定 λ ，然后用曲线

积分或者不定积分求出 $u(x,y)$。

解

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2\mathrm{x}(x^4 + y^2)^{\lambda} - 4\lambda x^5(x^4 + y^2)^{\lambda-1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^{\lambda} + 4\lambda xy^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1}$$

令两者相等得到 $4(x^2 + y^2)^{\lambda}(\lambda + 1) = 0$，于是

$\lambda = -1$，即

$$P = \frac{2xy}{x^4 + y^2} \qquad Q = \frac{-x^2}{x^4 + y^2}$$

方法1　用曲线积分。

取定点 $M_0(1.0)$，对于右半平面任意一点 $M(x,y)$,令

$$v(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy}{x^4+y^2}dx-\frac{x^2}{x^4+y^2}dy$$

$$=\int_1^x\frac{2s\times 0}{s^4+0^2}dx-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+t^2}dt$$

$$=-\int_0^y\frac{1}{1+\left(\frac{t}{x^2}\right)^2}dt=-arctan\frac{y}{x^2}$$

于是 $u(x,y)=-arctan\frac{y}{x^2}+C$

方法2　用不定积分

因为 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{x^4+y^2}$ ，所以

$$\mathrm{u(x,y)}=-\int\frac{x^2}{x^4+y^2}dy+f(x)$$

$$=-arctan\frac{y}{x^2}+f(x)$$

另一方面，由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{P(x,y)}=\frac{2xy}{x^4+y^2}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-arctan\frac{y}{x^2}+f(x)\right]=\frac{2xy}{x^4+y^2}$$

由此得到 $f'(x)=0$ ，从而 $f(x)=c$

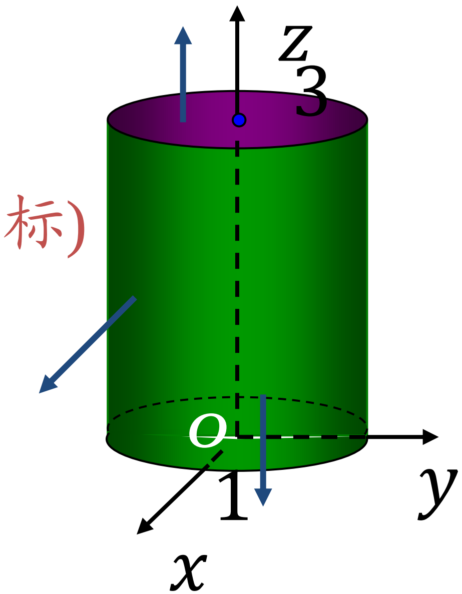
$$u(x,y)=-arctan\frac{y}{x^2}+\mathrm{C}$$

例1. 用Gauss 公式计算 $\oiint_{\Sigma} (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$

其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0\,,z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解: 这里 $P=(y-z)x, Q=0, R=x-y$

利用Gauss 公式, 得



$$原式=\iiint_{\Omega} (y-z)dxdydz$$

(用柱坐标)

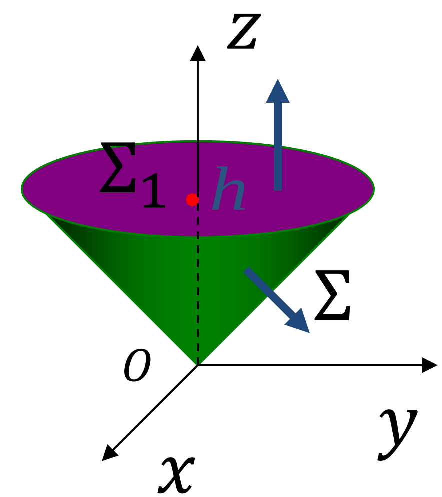
$$=\iiint_{\Omega} (r\sin\theta-z)rdrd\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^3(r\sin\theta-z)dz=-\frac{9\pi}{2}$$

例2. 利用Gauss公式计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

其中 $\sum$ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧.



解: 作辅助面

$$\sum\nolimits_1: z=h,(x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2$$ 取上侧

记Σ，Σ_1 所围区域为Ω, 则在Σ_1上$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$， $\gamma=0$

$$I=(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\oiint_{\Sigma_1})(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz-\iint_{D_{xy}}h^2dxdy$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz - \pi h^4$$

$$= 2\int_{o}^{h} z\pi z^2 dz - \pi h^4$$

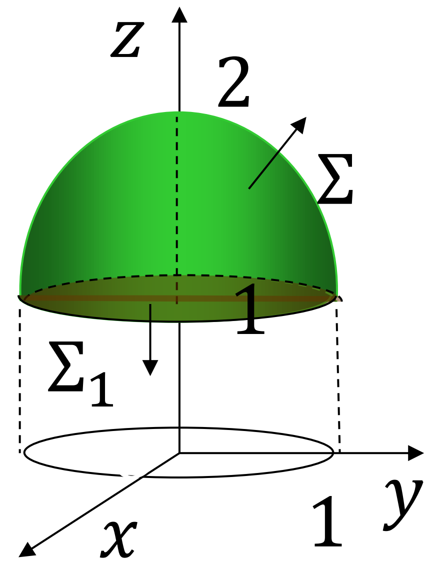
$$= -\frac{1}{2}\pi h^4$$

例3. 设Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2, 1\le z\le 2$取上侧, 求

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)dydz-x^2yzdzdx-x^2z^2dxdy$$

解: 作取下侧的辅助面

$$\Sigma_1: z=1\ \ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$



$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标

用极坐标

$$=\iiint_{\Omega}dxdydz-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_1^{2-r^2}dz\quad-\int_0^{2\pi}cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr\ =\frac{13\pi}{12}$$

例4 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ ，其中 Σ 为任一不经过原点的闭曲面的外测。

解 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0\ (x^2+y^2+z^2\neq 0)$ ，所以

（1）当 Σ 不包围原点时，由高斯公式即得

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

（2）当 Σ 包围原点时，取 Σ_1：$x^2+y^2+z^2=r$ 的外测，由高斯公式，得

$$\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

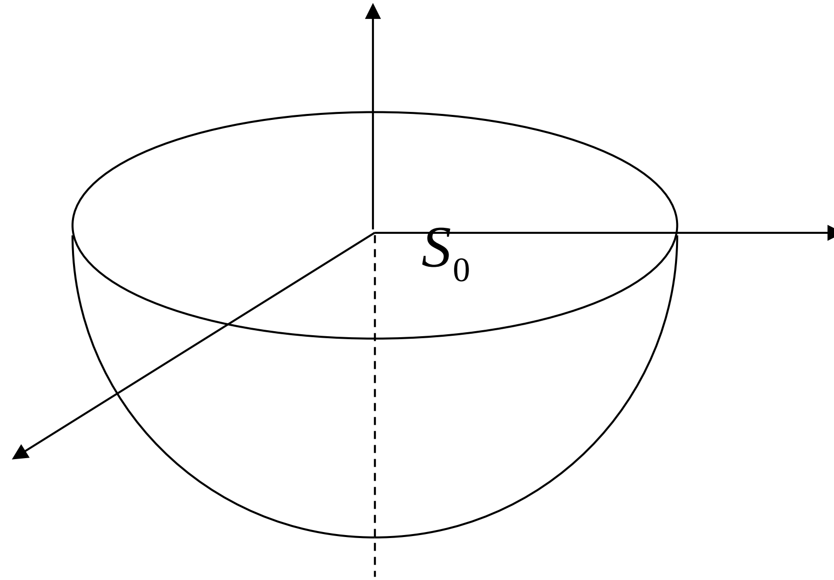
而 $$\oiint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r^3}\oiint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{r^3}\iiint_{\Omega_1}3dv=4\pi.$$

即 $$\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi.$$

例5 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(x+a)dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，$\Sigma$：下半球面

$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧 $(a>0)$。



解 做 xoy 面，记S_0，则

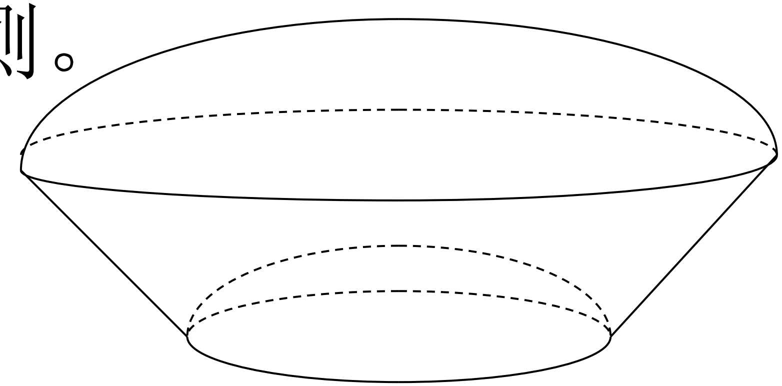
$$\text{原式}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+(x+a)dxdy=\left(\frac{1}{a}\oiint\limits_{\Sigma+S_0}-\frac{1}{a}\iint\limits_{S_0\text{下}}\right)(axdydz+(x+a)dxdy$$

$$=-\frac{1}{a}\iiint\limits_{V}adv-\frac{1}{a}\iint\limits_{S_0\text{下}}axdydz(=0)-(-1)\frac{1}{a}\iint\limits_{D_{xy}}(x(=0)+a)dxdy=-\frac{2}{3}\pi a^3+\pi a^2$$

例6 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + \left(\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^2\right) dzdx + \left(\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^2\right) dxdy$

其中 f 具有连续偏导数，$\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围立体表面外测。



解

$$I = \iiint\limits_{v} [2x + \frac{1}{z^2} f' + 2y + \frac{1}{y}(-\frac{y}{z^2}) f' + 2z] dv$$

$$= 2\iiint\limits_{v} (\overbrace{x}^{0} + \overbrace{y}^{0} + z) dv = 2\iiint\limits_{v} z dv = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \int_1^2 r^2 r dr$$

$$= \frac{15\pi}{4}$$

例7 计算 $\iint\limits_{\Sigma} dydz + zdzdx + \dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 和 $z=2$ 所截得的部分的下侧。

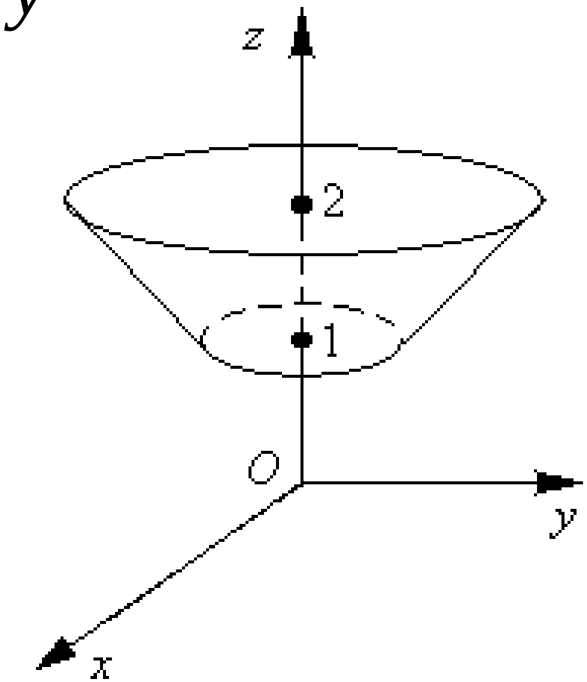


图8—22

解 在计算 $\iint\limits_{\Sigma} dydz$ 时, Σ 可分为两块，即前面一块 Σ_1 和后面一块 Σ_2，Σ_1 在 yOz 平面上的投影为正，Σ_2 在 yOz 平面上的投影为负，其

投影区域 D_{yz} 相同。见图8—22。

故

$$\iint\limits_{\Sigma} dydz = \iint\limits_{\Sigma_1} dydz + \iint\limits_{\Sigma_2} dydz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz - \iint\limits_{Dyz} dydz = 0.$$

在计算 $\iint\limits_{\Sigma} zdzdx$ 时，Σ 可分为两块，即右面一块 Σ_3 和左面一块 Σ_4 ，Σ_3 在zOx平面上的投影为正，Σ_4 在zOx平面上的投影为负，其投影区域 D_{zx} 相同。故

$$\iint\limits_{\Sigma} zdzdx = \iint\limits_{\Sigma_3} zdzdx + \iint\limits_{\Sigma_4} zdzdx = \iint\limits_{D_{zx}} zdzdx - \iint\limits_{D_{zx}} zdzdx = 0.$$

在计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, 时，注意被积函数

$R(x,y,z) = \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 中，$e^z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, Σ 在xOy平面上的投

影为负，投影区域 D_{xy} 可用极坐标表示为

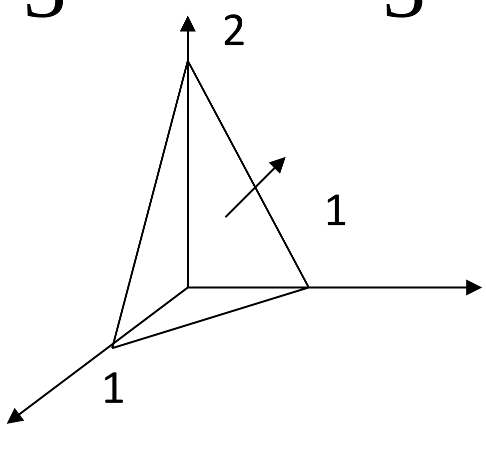
$1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$ ， 故

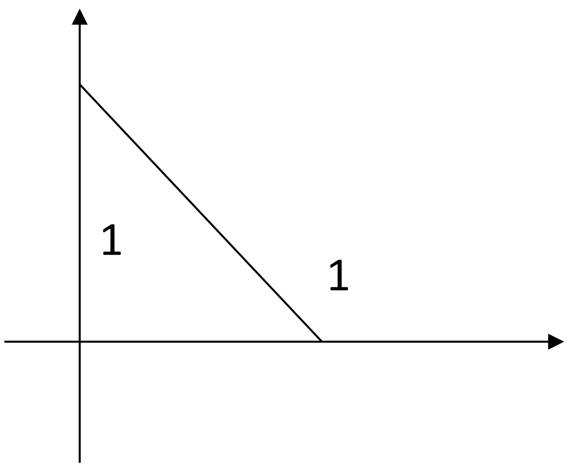
$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{e^r}{r} r dr = 2\pi e(1-e).$$

例8 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (x+z)dxdy$ ，其中Σ是平面 $2x+2y+z=2$ 在第一卦限部分的上侧。

解 因为 Σ 取上侧，因此法向量 n 与 z 轴正向的夹角为锐角，其方向余弦是 $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}, \cos\gamma = \dfrac{1}{3}$ ，则有





$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (x+z)dxdy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z\right)dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(3x+2y+z)dS$$

计算 $\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(3x+2y+z)dS$ 。Σ的方程为$z = 2-2x-2y$

其在xOy平面的投影区域 D_{xy}：$0 \le y \le 1-x, 0 \le x \le 1$

又曲面的面积元素

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\,dxdy = 3dxdy$$

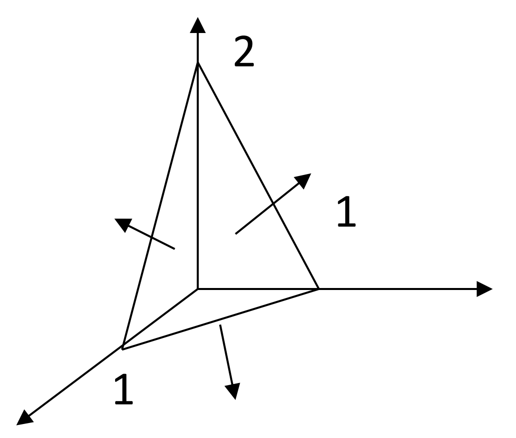
所以

$$\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+(x+z)dxdy$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{D_{xy}}(3x+2y+2-2x-2y)3dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+2)dy$$

$$=\frac{7}{6}.$$



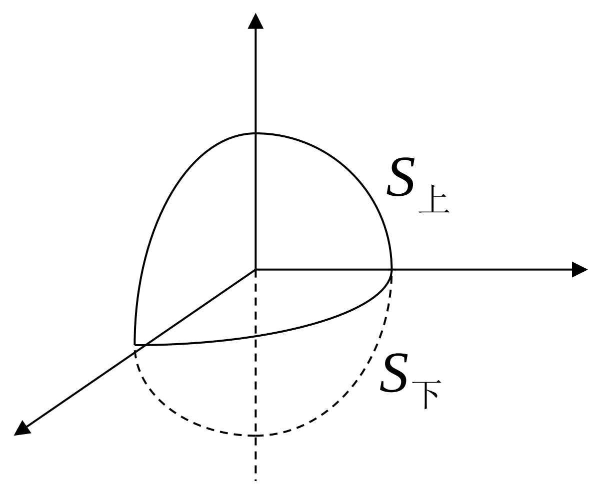
也可以补三个面用高斯公式

例9 求积分 $\iint\limits_{S_{外}} xyzdxdy$，其中 $S: x^2+y^2+z^2=1$ ，

$x \geq 0, y \geq 0$ 部分外测

解 把 s 分成两部分：$S_{上}: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，

$$S_{下}: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$$



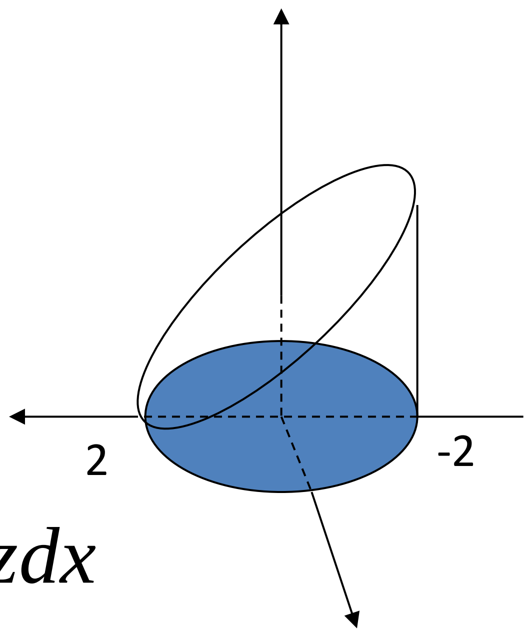
$$\iint_{S外} = \iint_{S上外} + \iint_{S下外} = \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy + (-1)\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}rdr = \frac{2}{15}$$

。

例10 $I=\iint\limits_{S}-ydzdx+(z+1)dxdy$，其中 $S:x^2+y^2=4$

被 $z+x=2, z=0$ 所截部分曲面外测。



解：

$$\iint\limits_{S外}-ydzdx=\iint\limits_{S左外}-ydzdx+\iint\limits_{S右外}-ydzdx$$

$$=-\iint\limits_{D_{zx}}-(-\sqrt{4-x^2})dzdx+\iint\limits_{D_{zx}}-\sqrt{4-x^2}dzdx$$

$$=-2\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2}dzdx=-2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx\int_{0}^{2-x}dz=-8\pi$$

$$\iint_{S外}(z+1)dxdy=0$$ 综上，原式 $=-8\pi$

第8章 曲线积分与曲面积分

8.1 向量值函数在有向曲线上的积分 第二型曲线积分

一、概念与形式

恒力沿直线方向做功 $w=|\vec{F}||\vec{l}|\cdot\cos\theta=\vec{F}\cdot\vec{l}$

变力沿曲线运动 $\Rightarrow$ 取微元 $dw=|\vec{F}|\cdot ds=Pdx+Qdy$，则

$$W=\int_{L^+}Pdx+Qdy$$ 。

平面曲线 $\int_{L^+}Pdx+Qdy$，空间曲线 $\int_{L^+}Pdx+Qdy+Rdz$，

性质 $\int_{L^+}=-\int_{L^-}$

二、计算方法

1. 设参数，化定积分

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1}\{P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$$

2．平面闭曲线上积分一用格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

其中L是D的取正向的边界曲线，D为单连通区域，P，Q在 $D \cup L$上有连续一阶偏导数。

3．对于积分与路径无关的可自选路径

4．积分与路径无关

$P(x,y),Q(x,y)$ 及偏导数于 $D\cup L$ 上连续。下列四个命题

等价

（1）$\oint_C Pdx+Qdy=0$，对D内任意闭曲线C。

（2）$\int_L Pdx+Qdy$ 积分与路径无关

（3）存在 $u(x,y)$ 使du＝$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$$\Rightarrow \int_L Pdx+Qdy=\int_L du=u\,|_A^B$$

（4）$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在D内恒成立。

常以（4）为条件，（2）作为结论，自选路径积分

8.2 向量值函数在有向曲面上的积分

一、概念与形式

1. 定义

流量 $Q=|\vec{v}|\cdot S\cdot\cos(n,\vec{v})\triangleq\vec{v}\cdot\vec{s}$，$dQ=\vec{v}\cdot\vec{ds}\triangleq Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$$\iint_{S^+}\vec{v}\cdot dS=\iint_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \qquad \vec{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

2. 物理意义：计算流量，通量

3. 性质：$\iint\limits_{S^+}=-\iint\limits_{S^-}$

4. 计算方法：投影，定号：上正下负，右正左负，前正后负，做二重积分

5.高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

或

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

这里Σ是Ω的整个边界曲面的外测, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$

是Σ在点(x,y,z)处的法向量的方向余弦。

8.3 Stoks公式应用例

一、公式：

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

l 与 S 的方向满足右手定则。