



MATLAB之高等数学

董波
数学科学学院
大连理工大学





多元函数积分学

1. 二重积分的计算;
 2. 三重积分的计算;
 3. 第一型曲线积分;
 4. 第一型曲面积分;
-



int函数

1. 计算二重积分 $\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dx dy$

>> int(int(f , y , $y_1(x)$, $y_2(x)$), x , a , b)

2. 计算三重积分 $\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dx dy dz$

>> int(int(int(f , z , $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$), y , $y_1(x)$, $y_2(x)$), x , a , b)



二重积分的计算

X-型域:
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

Y-型域:
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

极坐标:
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

二重积分的计算

例：计算二重积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-x^2-y^2} dx dy$

利用极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-r^2} r dr$$

命令行窗口

```
>> syms r t;  
>> int(int(exp(-r^2)*r, r, 0, 1), t, 0, 2*pi)  
  
ans =  
  
-pi*(exp(-1) - 1)
```

for...

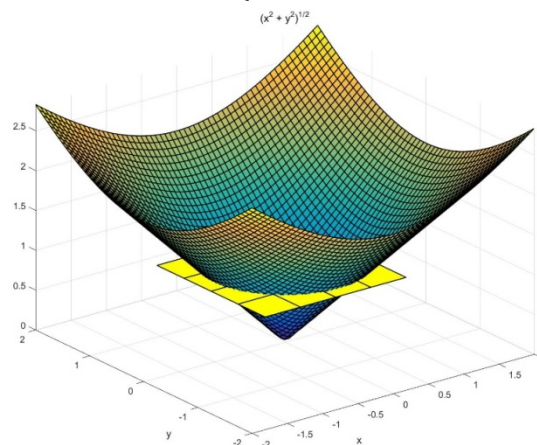
三重积分的计算

例：计算三重积分 $\iiint_D (x^2 + y^2 + z) dx dy dz$, 其中D为锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的区域。

命令行窗口

```
>> [x,y]=meshgrid(-1.2:0.5:1.2);  
>> z=ones(size(x));  
>> surf(x,y,z);  
>> hold on  
>> syms x y z;  
>> z=sqrt(x^2+y^2);  
>> ezsurf(z,[-2,2])
```

fx>>



利用柱坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$

$$\begin{aligned} & \iiint_D (x^2 + y^2 + z) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 (r^2 + z) r dz \end{aligned}$$

命令行窗口

```
>> syms r t z;  
>> int(int(int(r^3+r*z, z, r, 1), r, 0, 1), t, 0, 2*pi)  
  
ans =  
  
(7*pi)/20
```



第一型曲线积分

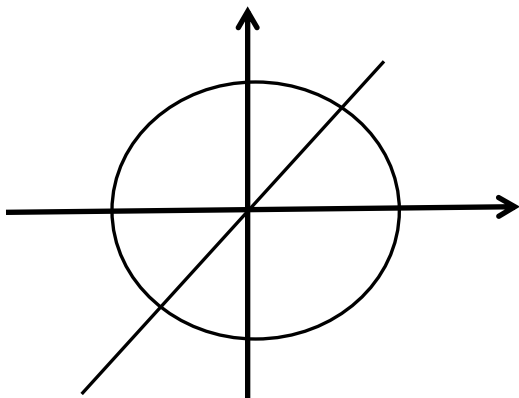
参数曲线: $\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$

$y=y(x)$: $\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$

$x=x(y)$: $\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy$

第一型曲线积分

例：计算曲线积分 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ ，其中L为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $y=x$ 及x轴在第一象限围成的扇形边界。



```
命令窗口
>> syms t a;
>> x=t;
>> y=t;
>> f2=int(exp(sqrt(x^2+y^2))*sqrt(2), t, 0, a*sqrt(2)/2)

f2 =

exp(a) - 1
```

```
命令窗口
>> syms t a;
>> x=a*cos(t);
>> y=a*sin(t);
>> dx=diff(x,t);
>> dy=diff(y,t);
>> f1=int(exp(sqrt(x^2+y^2))*sqrt(dx^2+dy^2), t, 0, pi/4)

f1 =

(pi*exp((a^2)^(1/2))*(a^2)^(1/2))/4

fx>>
```

```
命令窗口
>> syms a x y;
>> f3=int(exp(x), x, 0, a)

f3 =

exp(a) - 1
```