大连理工大学
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

方向导数与梯度

主讲人：刘小雷

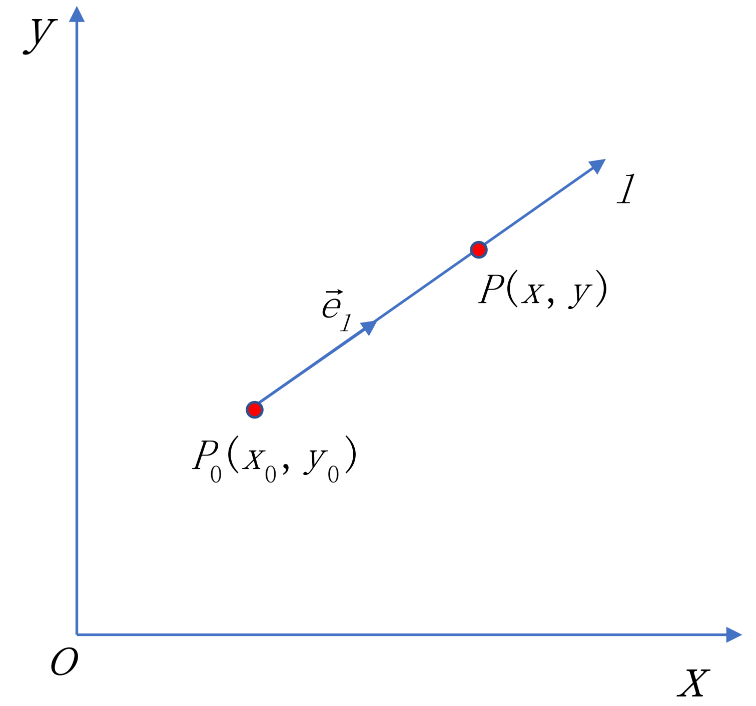
定义

$P_0(x_0,y_0)$是xoy平面上一点

l是以P_0为始点的一条射线

$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与$l$同方向的单位向量

l的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases} (t \geq 0).$



设$z=f(x,y)$在点P_0的某邻域$U(P_0)$内有定义,

$P(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$为$l$上另一点，且$P\in U(P_0)$

定义

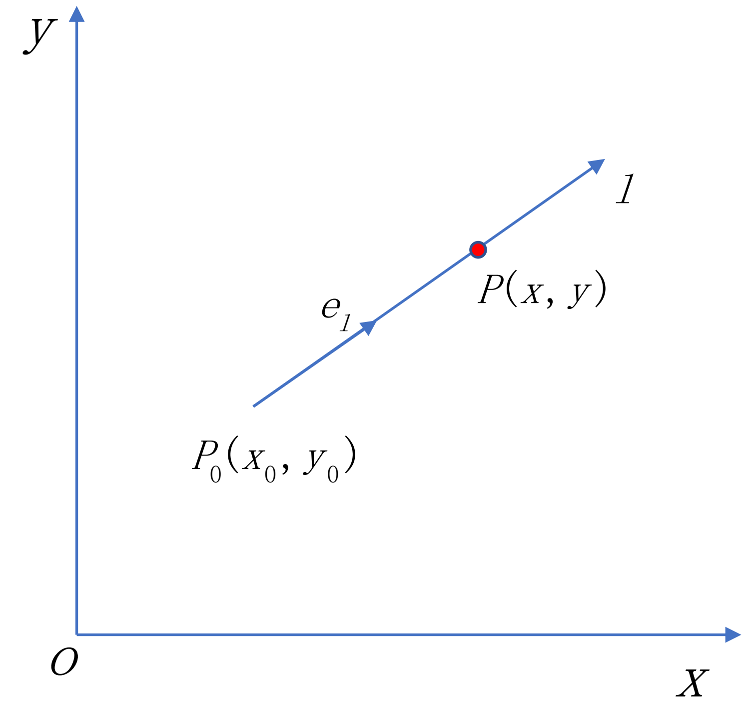
若

$$\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

在$t\to 0^+$（即P沿着l趋于P_0）时的极限存在，

则称此极限为$f(x,y)$在点P_0沿方向l的方向导数，

记作$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}$，即



$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

方向导数也可表示为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}\quad\left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right).$$

方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}$是$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿$l$方向的变化率

方向导数与偏导数

方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$ $\longrightarrow$ $t \to 0^+$

偏导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$\longrightarrow$ $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

偏导数是沿直线的变化率

方向导数导数是沿射线的变化率

方向导数的计算

定理　如果函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微，那么函数在该点沿任一方向l的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中，$\cos\alpha,\cos\beta$是方向l的方向余弦。

证明　$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微 $\Longrightarrow$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right) \quad (1)$$

点$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$在射线$l$上 $\Longrightarrow$

$$\Delta x=t\cos\alpha, \Delta y = t\cos\beta, \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = t, \quad (2)$$

方向导数的计算

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})-f(x_0,y_0)}{t} \quad (3)$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})}{t} \quad (4)$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{f_x(x_0,y_0)t\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)t\cos\beta+o(t)}{t} \quad (5)$$

$$= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

证毕。

多元函数的梯度

问题：沿哪一个方向其方向导数最大？最大值是多少？

设函数$f(x,y)$在平面区域D内具有一阶连续偏导数，

则对于每一点$P_0(x_0,y_0)\in D$，都可确定一个向量

$$f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j},$$

此向量称为函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的梯度，

记作 $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)$或$\nabla f(x_0,y_0)$，即

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}.$$

多元函数的梯度

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta = \nabla f(x_0,y_0)\bullet \vec{e}_l,$$

$\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$

与l同方向的单位向量

$$\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \left|\nabla f(x_0,y_0)\right|\cos\theta$$

θ为$\vec{e}_l$与$\nabla f(x_0,y_0)$的夹角

函数在某点沿l方向的方向导数，等于梯度在l方向上的投影。

若$\theta=0$，即l与梯度方向一致时，

方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}$取得最大值

最大值是梯度的模长$|\nabla f(x_0,y_0)|$

谢谢！