

第四章 微分方程

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映,利用函数关系又可以对客观事物的规律进行研究.在许多较复杂的运动过程中,往往不能直接找出所需要的函数关系,但是却能比较容易地列出含有要找的函数及其导数或微分之间的关系,这种关系式就是所谓的**微分方程**,建立微分方程以后,应用数学方法,找出未知函数,这就是**解微分方程**.

微分方程是近代数学的一个十分重要的学科分支.随着现代社会的发展,无论是在工程、宇航等自然科学领域,还是在经济、金融等社会科学领域,微分方程都有着十分广泛的应用.早在 17 世纪初, Galileo 在研究自由落体运动时,就发现物体运动的加速度是常数,即

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g,$$

又如 Newton 在研究天文学问题时,建立的太阳系行星运动所满足的方程也是微分方程.关于金融衍生产品定价的 Black-Scholes 方程也是一个典型的微分方程,在金融界这一微分方程几乎人所皆知.另外,微分方程在保险领域的应用也在逐渐深入.不难预见,微分方程理论及其应用今后仍将在自然科学和社会经济的各个领域发挥重要的作用。

本章只对微分方程作一些初步的介绍,包括微分方程的基本概念、一阶微分方程及某些可降阶的微分方程的初等积分法、高阶线性方程(组)解的结构定理、高阶常系数线性方程(组)的解法、某些变系数线性方程的解法、以及微分方程(组)的数值解法,本章中使用大量具有不同学科背景的实例,着重讲述它们在数学建模中的应用,并且介绍了如何使用计算机来求解微分方程.这样,读者可以获得从理论、解法到应用的一个完整的微分方程的初步知识。

4.1 微分方程的基本概念

4.1.1 基本概念

下面通过几何、力学及物理学中的几个具体问题来说明微分方程的基本概念.

例 4.1.1(曲线的方程问题) 设一曲线通过点 $(1, 2)$, 且在该曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的切线斜率为 $2x$, 求此曲线方程.

解 设所求曲线方程为 $y = y(x)$. 根据导数的几何意义, 可知未知函数 $y = y(x)$ 应满足关系式

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \quad (4.1.1)$$

此外, 未知函数 $y = y(x)$ 还应满足下列条件:

$$x = 1 \text{ 时, } y = 2. \quad (4.1.2)$$

对式(4.1.1)两端积分, 得

$$y = \int 2x dx,$$

即

$$y = x^2 + C, \quad (4.1.3)$$

其中 C 是任意常数.

把条件“ $x = 1$ 时, $y = 2$ ”代入式(4.1.3), 得

$$2 = 1^2 + C,$$

由此得出 $C = 1$, 把 $C = 1$ 代入式(4.1.3), 即得所求曲线的方程:

$$y = x^2 + 1. \quad (4.1.4)$$

例 4.1.2(放射性元素的衰变问题) 放射性元素铀, 由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素, 铀的含量就不断减少, 这种现象叫**衰变**. 由原子物理学知道, 铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 如果在时刻 $t = 0$ 时铀的含量为 M_0 , 试求在衰变过程中铀在任一时刻 t 的含量 $M(t)$.

解 铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对 t 的变化率 $\frac{dM}{dt}$. 根据衰变规律, 可列出关系式

$$\frac{dM}{dt} = -kM,$$

其中 $k(k > 0)$ 是常数, 叫做**衰变系数**. 由于铀的含量 $M(t)$ 随时间增加而减少, 故铀的衰变速度 $\frac{dM}{dt}$ 为负值. 此外, $M(t)$ 还应满足初始时刻的条件

$$M(0) = M_0.$$

求解以上两个关系式可得出 $M(t)$.

不仅铀的质量变化满足这个规律,其他放射性物质的衰变也都满足这个规律,只是衰变系数 k 不同而已.

例 4.1.3(弹簧振动问题) 设有一弹簧,它的上端固定,下端挂一个质量为 m 的物体,弹簧伸长 l 后就会处于静止状态,这个位置就是物体的平衡位置.如果用力将物体向下拉至某一位置,然后突然放开,那么物体就会在平衡位置附近作上下振动,试确定物体的运动规律.

解 取物体的平衡位置为坐标原点, x 轴竖直向下建立坐标系(图 4-1).要确定物体的运动规律,就是求物体在任意时刻 t 离开平衡位置的位移函数 $x(t)$.这是个动力学问题,需要分析物体在运动过程中所受的外力.

(1) 如果不计摩擦力和介质阻力,则物体在任意时刻所受的力只有弹性力和重力.但因为物体在平衡位置时处于静止状态,作用在物体上的重力 mg 与弹性力 cl 大小相等,方向相反,所以使物体回到平衡位置的力只是弹性恢复力:

$$f = -cx,$$

其中 $c(c > 0)$ 为弹簧的弹性系数, x 为物体离开平衡位置的位移(图 4-1),负号表示弹性恢复力的方向和物体位移方向相反.

根据牛顿第二定律,有

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$$

或

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = 0,$$

这个关系式代表的运动叫无阻尼自由振动或简谐振动.

(2) 如果物体在振动过程中还受到阻力作用,由实验知道,阻力 R 总是与运动方向相反,当振动不大时,其大小与物体的速度成正比,设比例系数为 $\mu(\mu > 0)$,则有

$$R = -\mu \frac{dx}{dt},$$

从而

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}.$$

令 $2n = \frac{\mu}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$, 则上式可化为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0.$$

这个关系式代表的运动是有阻尼的自由振动.

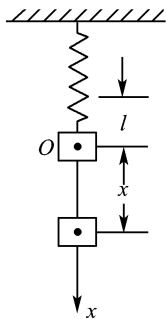


图 4-1

(3) 如果物体在振动过程中, 还受铅直干扰力

$$F = H \sin pt.$$

令 $h = \frac{H}{m}$, 则有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin pt,$$

该关系式则反映了有阻尼强迫振动的物体的运动规律.

为了分析使物体产生振动的条件, 计算物体的位移与时间的关系, 研究振动的频率、周期以及共振现象等, 就必须求解该关系式. 在电学中, 研究电磁振荡的规律, 也归纳为解决上述问题.

在例 4.1.1、例 4.1.2 中出现的关系式都含有未知函数的导数. 一般地, 包含自变量、未知函数及其导数或微分的等式称为**微分方程**. 如果微分方程中的未知函数是一元函数, 则称为**常微分方程**. 本教材只讨论常微分方程, 为叙述方便, 以下简称为**微分方程**. 有时也简称为**方程**.

微分方程中未知函数导数的最高阶数称为该微分方程的**阶**. 例 4-2 中关于放射性元素衰变的方程为一阶微分方程, 而例 4-3 中关于弹簧振动的方程都是二阶微分方程.

如果微分方程是关于未知函数和各阶导数的一次方程, 则称它为**线性微分方程**. 前面出现的几个方程都是线性微分方程. n 阶线性微分方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x),$$

其中 $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 及 $g(x)$ 为 x 的已知函数, 且 $a_0(x) \neq 0$. 不是线性方程的微分方程称为**非线性微分方程**.

当微分方程中的未知函数用已知函数代替时, 方程变为恒等式, 则该已知函数称为方程的**解**. 例如, 在例 4-2 中, 容易验证 $M(t) = e^{-kt}$ 是方程 $\frac{dM}{dt} = -kM$ 的解. 更一般地, $M(t) = ce^{-kt}$ 也是该方程的解, 其中 c 为任意常数. 再如, 在例 4-3 中, 容易验证 $x = \cos \sqrt{\frac{c}{m}}t$ 及 $x = \sin \sqrt{\frac{c}{m}}t$ 均为方程 $m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = 0$ 的解. 更一般地, $x = c_1 \cos \sqrt{\frac{c}{m}}t + c_2 \sin \sqrt{\frac{c}{m}}t$ 也是此方程的解, 其中 c_1 和 c_2 为任意常数.

如果微分方程解中含有独立的任意常数^①, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 则这样的解称为微分方程的**通解**. 例如, $M(t) = ce^{-kt}$ 及 $x = c_1 \cos \sqrt{\frac{c}{m}}t + c_2 \sin \sqrt{\frac{c}{m}}t$ 分别是上面两个方程的通解. 微分方程通解作为一族一元函数, 其图形是一族曲线, 称为微分方程的**积分曲线族**.

在通解中, 令任意常数取确定的值而得到的解称为**特解**. 特解的图形是一条曲线, 称为微分方程的**积分曲线**. 例如, 利用积分的方法易知, 方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的通解为 $y = x^2 + c$. 而过点 $(0, 1)$ 的特解为 $y = x^2 + 1$, 其积分曲线族与积分曲线如图 4-2 所示.

① 这里所说的任意常数是相互独立的, 是指它们不能合并而使任意常数的个数减少.

从通解中确定特解的条件称为**定解条件**. 因为 n 阶方程的通解中含有 n 个任意常数, 所以需要 n 个条件, 即定解条件有 n 个. 若定解条件都是在自变量的同一个点上(此点常称为初始点)给定的, 则称为**初始条件**. 一个 n 阶方程的初始条件即为

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

微分方程与初始条件一起称为**初值问题**.

下面介绍一阶微分方程的解的存在唯一性定理.

考虑导数已解出的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

这里 $f(x, y)$ 是在矩形区域

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

上的连续函数.

函数 $f(x, y)$ 称为在 R 上关于 y 满足**利普希茨(Lipschitz)条件**, 如果存在常数 $L > 0$, 使得不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

对于所有 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ 都成立, L 称为**利普希茨常数**. **定理 4.1** 如果函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 R 上连续且关于 y 满足利普希茨条件, 则方程(4-1)存在唯一的解 $y = \varphi(x)$, 定义于区间 $|x - x_0| \leq a$ 上, 连续且满足初值条件

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

这里 $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$.

4.1.2 作为数学模型的微分方程

本节我们集中讨论如何用微分方程来构造数学模型.

数学模型 我们经常需要用数学语言来描述一些现实生活中的现象, 无论是在物理学、社会学中, 还是经济学中. 这种现象的描述称为数学模型, 这些模型是为我们的某种目标建立起来的. 例如, 我们希望通过研究生态系统里动物数量的增长来了解其内在的运行机制, 或者希望通过分析化石或地层中放射性物质的衰减来判断化石的年代.

构建一个系统的数学模型的步骤如下:

(1) 识别对改变系统有作用的变量. 起初我们可以不用把所有变量都选进模型. 在这步中, 我们给出模型的求解精度.

(2) 我们做一些关于这个系统的合理假设. 这些假设也可以包括任何对系统适用的经验法则.

对于某些情况, 低精度的模型也能很好地满足我们的要求. 例如, 读者已经在物理课上学过, 为在地球表面附近做落体运动的物体建模时, 空气的摩擦阻力有时忽略不计, 但

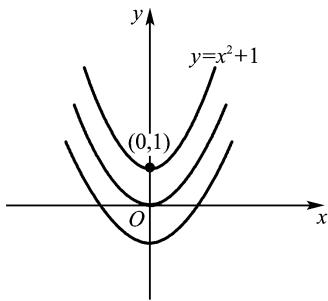


图 4-2

是如果是一名从事精确计算远程导弹飞行路径的科学家,就必须考虑空气阻力以及像地球表面曲率这样的其他因素.

因为关于系统的假设经常包括一个或几个变量的变化率,所以所有这些假设的数学模型可能是一个或几个包含导数的方程.换句话说,数学模型可能是一个微分方程或者微分方程组.

一旦建立起一个微分方程或方程组的模型,我们所面对的是解方程或方程组的问题.如果我们能解它,且当这个解和系统行为的试验数据相符,我们就认为这个模型是合理的.但是如果这个解预测能力很差的话,我们就增加求解的精度或做一些另外的假设,然后建模的过程如此反复,如图 4-3 所示.

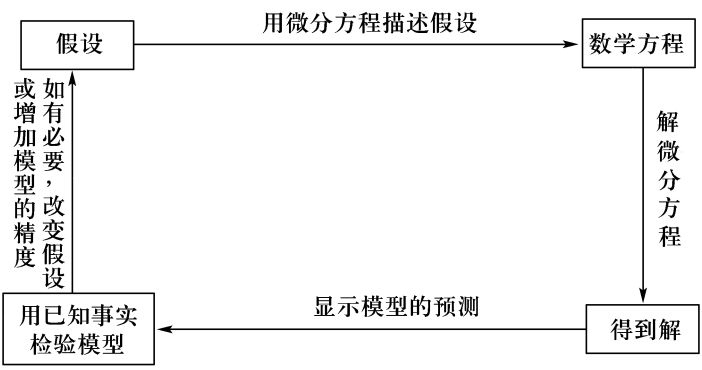


图 4-3

当然,提高模型精度增加了模型的复杂性,同时也增加了我们不能得到显示解的可能性.

物理系统的数学模型通常包括时间变量 t ,模型的解给出了系统的状态;换言之,对应于 t 的因变量的值描述了系统过去、现在和将来的状态.

人口动力学 最早通过数学方法测量人口增长的模型是英国经济学家托马斯·马尔萨斯在 1798 年所建立的模型. 马尔萨斯模型的基本假设是一个国家在某个时刻的人口增长率和当时的人口总数成一定比例,也就是在 t 时刻的人口越多,将来的人口也就越多,用数学语言描述就是,用 $P(t)$ 表示 t 时刻的总人口,则这个假设可以表达为:

$$\frac{dP}{dt} = kP. \tag{4.1.5}$$

这里的 k 是比例常数,这个简单的模型忽略了很多影响人口增长或减少的因素,但是却相当精确地预测了 1790 ~ 1860 年间的美国人口. 按照式(4.1.5)所表示的速率增长的人口是非常少的;但是,式(4.1.5) 仍然被用来描述小数量人口在短期内的增长模型.

人口增长率仅依赖于当时的人口数量而与其他时间的因素无关的假设可以由

$$\frac{dP}{dt} = Pf(P) \tag{4.1.6}$$

来描述,微分方程(4.1.6) 在动物数量模型的假设中应用广泛,称之为密度依赖假设.

牛顿热力学定律 根据牛顿热力学定律,物体内部温度的改变速率与物体的温度及其周围介质(即所谓环境温度) 温度之差成正比,如果 $T(t)$ 表示物体在 t 时刻的温度, T_m 表

示其周围介质的温度, $\frac{dT}{dt}$ 表示物体温度变化的速率, 牛顿热力学定律用数学语言描述就是:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \quad (4.1.7)$$

这里的 k 是比例常数, 不论是在冷却还是在加热模型中, 如果 T_m 是常数, 那么 $k < 0$.

化学反应 微分方程 $\frac{dx}{dt} = -kx$ ($k > 0$) 所表示的放射性物质的分解称为一阶反应.

在化学中, 有一类反应遵循一个同样的经验法则: 如果物质 A 的分子分解成更小的分子, 那么就有一个假设成立, 即这种分解的速度与原物质的剩余总量成正比; 也就是说若

$x(t)$ 表示物质 A 在任何时刻的剩余总量, 那么 $\frac{dx}{dt} = kx$, 这里 k 是负的常数, 因为 x 是不断

减少的. 一阶化学反应的一个例子就是 $(CH_3)_3CCl$ 转变为 $(CH_3)_3COH$:



其反应速率仅由 $(CH_3)_3CCl$ 的浓度决定, 但是, 在化学反应



中, 一分子 CH_3Cl 消耗一分子 $NaOH$, 然后生成一分子 CH_3OH 和一分子 $NaCl$, 这个反应的速率和剩余 CH_3Cl 及 $NaOH$ 数量的乘积成正比, 为了把这个第二种反应一般化, 我们

假设一分子 A 和一分子 B 生成一分子 C, 如果用 X 表示 C 在 t 时刻生成的总量, α, β 依次表示物质 A、B 在 $t = 0$ 时的数量 (初始数量), 那么 A、B 瞬时未反应的量分别为 $\alpha - X$ 和 $\beta - X$, 因此 C 的生成速率为

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \quad (4.1.8)$$

这里, k 是比例常数. 方程 (4.1.8) 表示的反应模型称为二阶反应.

习题 4-1

(A)

1. 指出下列各微分方程的阶数, 并指出哪些是线性的? 哪些是非线性的?

- (1) $x^2 y'' + xy' + \cos x = 0$; (2) $xyy' + y = 0$;
 (3) $y''' + 2yy'' + 2y = 0$; (4) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$;
 (5) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 5x = e^t$; (6) $\frac{dp}{d\theta} + p = \sin^2 \theta$.

2. 指出下列给定的函数是否为所给微分方程的解.

- (1) $y' = 2xy, y = ce^{x^2}$;
 (2) $y'' + y = 0, y = 3\sin x + 5\cos x$;
 (3) $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0, y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$;
 (4) $x^2 y'' + xy' + y = 0, y = \sin(\ln x)$.

3. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$,

- (1) 求出它的通解;

- (2) 求通过点(1,4)的积分曲线方程;
 (3) 求出与直线 $y = 2x + 3$ 相切的积分曲线方程;
 (4) 求出满足条件 $\int_0^1 y dx = 2$ 的解;
 (5) 绘出(1)、(3)、(4)中解的图形.

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程.

- (1) 曲线在点 (x, y) 处的切线斜率等于该点横坐标的平方;
 (2) 曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 y 轴平分.

(B)

1. 用微分方程表示一物理命题: 某种气体的压力 p 对于温度 T 的变化率与压力成正比, 与温度的平方成反比.

2. 求微分方程 $y' + xy'^2 - y = 0$ 的直线积分曲线.

4.2 微分方程的初等积分法

本节对几类常见的一阶微分方程及某些可降阶的高阶微分方程给出初等积分法.

4.2.1 一阶可分离变量方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \quad (4.2.1)$$

的微分方程称为一阶可分离变量方程, 其中 $h(x)$ 、 $g(y)$ 分别是 x 、 y 的连续函数.

其解法是先分离变量

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx \quad (g(y) \neq 0)^{\textcircled{1}},$$

然后两边积分得

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + c^{\textcircled{2}}.$$

令

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \quad H(x) = \int h(x)dx,$$

① 若存在 y_0 使 $g(y_0) = 0$, 显然 $y = y_0$ 也是式(1)的解. 这个解可能包含在通解里(即它可由式(2)中 c 取某个特定常数得到), 也可能不包含在通解里, 此时需要补上这个解. 如果仅要求通解, 则不需要补上这个解, 无特殊说明, 本教材一般是求通解.

② 为叙述方便, 我们把 $\int \frac{dy}{g(y)}$ 和 $\int h(x)dx$ 理解为 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $h(x)$ 的任一确定的原函数. 以后凡微分方程通解中出现 $\int f(x)dx$ 之类的记号, 都理解为 $f(x)$ 的任一确定的原函数.

则上式可写为

$$G(y) = H(x) + c. \quad (4.2.2)$$

式(4.2.2)就是所求微分方程(4.2.1)的解. 由于式(4.2.2)是隐函数形式, 并含有任意常数, 所以称式(4.2.2)为方程(4.2.1)的**隐式通解**(或**通积分**). 这种通过分离变量求解微分方程的方法称为**分离变量法**.

上面解法的依据是当 $g(y) \neq 0$ 时, 方程(4.2.1)与方程(4.2.2)的解集相同. 因为微分方程(4.2.1)的解显然满足方程(4.2.2). 反之, 设 $y = \phi(x)$ 是方程(4.2.2)的解, 将它代入方程(4.2.2)必成为恒等式, 对这个恒等式微分, 便知 $y = \phi(x)$ 也满足方程(4.2.1).

例 4.2.1 求方程 $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$ 的通解.

解 先分离变量

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{x dx}{1+x^2},$$

再两边积分

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{x dx}{1+x^2},$$

并求出积分, 便得

$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln c \quad (c > 0).$$

整理得通解为

$$1+y^2 = c(1+x^2),$$

其中, c 为大于零的任意常数.

例 4.2.2 求解初值问题
$$\begin{cases} \cos y dx + (1+e^{-x}) \sin y dy = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

解 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos y}{(1+e^{-x}) \sin y}.$$

这是个可分离变量方程, 分离变量后, 得

$$\frac{\sin y dy}{\cos y} = \frac{-e^x}{e^x + 1} dx,$$

两边积分得

$$\ln |\cos y| = \ln(e^x + 1) + \ln c_1 \quad (c_1 > 0),$$

即

$$e^x + 1 = c \cos y \quad \left(c = \pm \frac{1}{c_1} \right).$$

由初始条件 $y(0) = \frac{\pi}{4}$, 得

$$c = 2\sqrt{2},$$

故原初值问题的解为

$$e^x + 1 = 2\sqrt{2} \cos y$$

或

$$(1 + e^x) \sec y = 2\sqrt{2}.$$

4.2.2 一阶线性微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (4.2.3)$$

的方程称为一阶线性微分方程.

若 $q(x) \not\equiv 0$, 称方程(4.2.3)为一阶非齐次线性微分方程. 若 $q(x) \equiv 0$, 则方程(4.2.3)变为

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad (4.2.4)$$

称方程(4.2.4)为一阶齐次线性微分方程. 有时也称方程(4.2.4)为方程(4.2.3)对应的齐次方程.

下面首先解齐次线性方程(4.2.4). 方程(4.2.4)是可分离变量方程, 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

两边积分, 得

$$\ln |y| = -\int p(x)dx + c_1,$$

取对数, 即得方程(4)的通解

$$y = ce^{-\int p(x)dx} \quad (c = \pm e^{c_1}). \quad (4.2.5)$$

再求解非齐次方程(4.2.3). 既然方程(4.2.4)是与方程(4.2.3)对应的齐次方程, 那么两个方程的解一定有着内在的联系. 将方程(4.2.3)变形为

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= q(x) - p(x)y, \\ \frac{dy}{y} &= \left[\frac{q(x)}{y} - p(x) \right] dx. \end{aligned}$$

两边积分, 得到

$$y = (\pm e^{\int \frac{q(x)}{y} dx}) e^{-\int p(x) dx}.$$

注意到 $\pm e^{\int \frac{q(x)}{y} dx}$ 是 x 的函数, 因此我们猜想方程(3)解的形式应为

$$y = u(x) e^{-\int p(x) dx} \quad (4.2.6)$$

即把式(4.2.5)的任意常数 c 换成待定函数 $u(x)$. 将式(4.2.6)代入方程(4.2.3), 得到

$$\frac{d}{dx}(ue^{-\int p(x) dx}) + p(x)ue^{-\int p(x) dx} = q(x).$$

整理化简, 得

$$\frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

求解得

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c. \quad (4.2.7)$$

再将式(4.2.7)代入方程(4.2.6),便得一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ 的通解

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \right]. \quad (4.2.8)$$

公式(4.2.8)中的 $-\int p(x)dx$ 与 $\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$ 可分别理解为不含任意常数的某一个原函数.

上面这种将常数变易为待定函数的方法称为**常数变易法**. 常数变易法实际上是一种变量代换的方法,通过变换式(4.2.6)将方程(4.2.3)化为可变量分离的方程. 这是一个具有普遍性的方法,对于高阶线性方程也适用.

现在我们来讨论通解(4.2.8)的结构. 容易看出,它是由两项叠加而成的,其中, $ce^{-\int p(x)dx}$ 是对应的齐次线性方程(4.2.4)的通解;另一项 $e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$ 是非齐次线性方程(4.2.3)的一个特解. 由此可得出结论:

非齐次线性微分方程的通解等于它对应的齐次线性方程的通解加上原非齐次线性方程的一个特解.

以后将会看到,这个结论是所有线性微分方程的共同特征.

例 4.2.3 求方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解 这是一阶非齐次线性方程. 先求对应的齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = 0,$$

分离变量,并两端积分,得

$$y = c(x+1)^2,$$

再用常数变量法求解非齐次方程,令

$$y = u(x)(x+1)^2,$$

则

$$\frac{dy}{dx} = u'(x)(x+1)^2 + 2u(x)(x+1),$$

代入原方程并整理,得

$$u'(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}},$$

积分得

$$u(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

所以原方程的通解为

$$y = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c \right].$$

例 4.2.4 求一曲线的方程, 这条曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + y$.

解 设所求曲线为 $y(x)$, 由题意可知, $y(x)$ 满足下面初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x + y, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

这是一阶非齐次线性方程. 这里 $p(x) = -1, q(x) = 2x$, 应用公式(4.2.8) 得方程通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{\int dx} \left[\int 2xe^{-\int dx} dx + c \right] = e^x (-2xe^{-x} - 2e^{-x} + c) \\ &= -2(1+x) + ce^x. \end{aligned}$$

由初始条件 $y(0) = 0$, 得

$$c = 2,$$

所求曲线方程为

$$y = 2(e^x - 1 - x).$$

4.2.3 利用变量代换求解微分方程

变量代换是一种常用的数学方法, 在微分方程中也是如此, 通常是找一个适当的变换, 将不易直接求解的方程变为可解的方程.

1. 齐次方程

形如 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一阶微分方程称为**齐次方程**. 对于齐次方程, 只要作变换 $\frac{y}{x} = u$,

就可化为可分离变量的方程. 事实上, 由 $\frac{y}{x} = u$, 即 $y = xu$, 可得 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$. 代入原方程, 有

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u).$$

分离变量, 得

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

求解后再把 $u = \frac{y}{x}$ 代回即得齐次方程的通解.

例 4.2.5 求解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 此方程为齐次方程. 令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入原方程得

$$x \frac{du}{dx} + u = u + \tan u,$$

即

$$x \frac{du}{dx} = \tan u.$$

分离变量,得

$$\cot u du = \frac{dx}{x},$$

两边积分,得

$$\ln |\sin u| = \ln |x| + \ln |c_1|,$$

其中, c_1 为不等于 0 的常数. 化简得

$$\sin u = cx \quad (c = \pm c_1). \quad (4.2.9)$$

当 $\tan u = 0$ 时, 即 $\sin u = 0$. 如果在式 (4.2.9) 中允许 $c = 0$, 则它包含在式 (4.2.9) 中.

将原来的变量代回式 (4.2.9), 便得到原方程的通解

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx,$$

其中, c 为任意常数.

2. 形如 $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ 的方程

(1) 当 $c_1 = c_2 = 0$ 时, 原方程是齐次方程.

(2) 当 c_1, c_2 至少有一个不为零, 则原方程不是齐次方程. 此时如果方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 则可唯一确定方程组的解: $x = x^*, y = y^*$. 令

$$\begin{cases} X = x - x^* \\ Y = y - y^* \end{cases},$$

原方程组就可化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}.$$

求出这个齐次方程的通解后, 再换回原变量 x, y , 便可求出原方程的通解.

如果 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, 此时, 令 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$, 则原方程可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}.$$

引入新变量 $v = a_2x + b_2y$, 则 $\frac{dv}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx}$, 于是原方程化为

$$\frac{1}{b_2} \left(\frac{dv}{dx} - a_2 \right) = \frac{\lambda v + c_1}{v + c_2}.$$

这是可变量分离的方程.

以上方法可以应用到更一般的方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

例 4.2.6 求方程 $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解 求解 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$, 得 $x^* = 1, y^* = 2$.

令 $X = x - 1, Y = y - 2$,

得
$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}.$$

再令 $u = \frac{Y}{X}$, 求解上面的齐次方程, 得

$$X^2 - 2XY - Y^2 = c,$$

代回原变量, 得原方程通解

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = c.$$

3. 伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n (n \neq 0, 1)$ 的方程称为伯努利(Bernoulli J, 瑞士, 1654 ~ 1705) 方程. 有很多实际问题, 如: 人口的增长, 细菌的繁殖, 技术革新的推广等都可归为这种类型的方程.

此方程当 $n = 0$ 或 $n = 1$ 时是线性方程, 当 $n \neq 0, 1$ 时是非线性方程, 但经过变量代换, 可把它化为线性的. 它与一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ 形式类似, 但多了因子 y^n , 所以先将方程两边除以 y^n , 得

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

容易看出, 若令 $z = y^{1-n}$, 则

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx},$$

代入原方程得

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x),$$

这是关于 z 的一阶线性微分方程, 求出该方程的通解后, 再将 z 换成 y^{1-n} , 便得到原方程的通解.

例 4.2.7 求方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = (\ln x)y^2$ 的通解.

解 这是伯努利方程. 方程两边除以 y^2 , 得

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x.$$

令 $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$, 则 $z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'$, 于是原方程变为

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x,$$

这是关于 z 的一阶线性方程, 求解得

$$z = \left[c - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right] x,$$

代回原变量, 得到原方程通解

$$\frac{1}{y} = \left[c - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right] x.$$

注: (i) 除上述三种典型的可通过变量代换求解的微分方程, 还有许多微分方程可用变量代换的方法求解. 例如,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y},$$

若令 $u = x + y$, 则原方程变为 $\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u}$, 这是可分离变量方程.

(ii) 有时一阶微分方程对于一个变量来说是非线性的, 但对于其他变量来说是线性的. 例如,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y^2},$$

对变量 y 来说是非线性的, 但将 x 看做未知函数, 则原方程可写为

$$\frac{dx}{dy} - x = y^2,$$

这是关于 $x(y)$ 的一阶线性方程, 易求得其通解为:

$$x = -y^2 - 2y - 2 + ce^y.$$

4.2.4 某些可降阶的高阶微分方程

关于高阶线性方程, 特别是常系数的, 将在后面讨论. 这里仅讨论几类特殊的高阶微分方程的解法. 基本思想是采用某种变换来降低方程的阶数, 转为用前面的方法求解.

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

这类方程只需把 $y^{(n-1)}$ 作为新的未知函数, 则方程变为

$$(y^{(n-1)})' = f(x).$$

两边积分得

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1,$$

方程就降了一阶, 然后逐次积分就得到了原方程的通解.

例 4.2.8 求微分方程 $y''' = x - \sin x$ 的通解.

解 对原方程连续积分三次, 有

$$y'' = \int (x - \sin x) dx = \frac{1}{2}x^2 + \cos x + c,$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}x^2 + \cos x + c \right) dx = \frac{1}{6}x^3 + \sin x + cx + c_2,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{6}x^3 + \sin x + cx + c_2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{24}x^4 - \cos x + \frac{1}{2}cx^2 + c_2x + c_3 = \frac{1}{24}x^4 - \cos x + c_1x^2 + c_2x + c_3 \quad (c_1 = \frac{1}{2}c),$$

这就是原方程的通解.

2. 不显含未知函数 y 的微分方程

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

其中, $1 \leq k < n$. 对这种方程, 只要作变换 $z = y^{(k)}$, 则可化为

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0,$$

此方程为 $n-k$ 阶方程, 降了 k 阶. 如果能从此方程解出

$$z = z(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}),$$

再由 $y^{(k)} = z$ 连续积分 k 次便可得到 y . 下面以二阶方程 $F(x, y', y'') = 0$ 为例说明.

例 4.2.9 解方程 $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

解 此方程是不显含 y 的二阶方程, $k=1$. 令 $z = y'$, 则原方程化为

$$(1+x^2) \frac{dz}{dx} + z^2 + 1 = 0,$$

这是可化为一阶变量分离的方程. 分离变量即得

$$\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{1+x^2},$$

积分可得

$$\arctan z + \arctan x = \overline{c_1}.$$

利用三角公式 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$, 并注意 $\tan(\arctan \alpha) = \alpha$, 则由上式可得

$$\frac{z+x}{1-xz} = \tan \overline{c_1},$$

即有

$$y' = z = \frac{\tan \overline{c_1} - x}{1 + x \tan \overline{c_1}} = \frac{c_1 - x}{1 + c_1 x} \quad (c_1 = \tan \overline{c_1}).$$

再积分, 便得所求方程的通解

$$y = \int z dx = \int \frac{c_1 - x}{1 + c_1 x} dx = \frac{1 + c_1^2}{c_1^2} \ln(1 + c_1 x) - \frac{x}{c_1} + c_2.$$

3. 不显含自变量 x 的微分方程

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

对这种方程可作变换: 令 $y' = z(y)$, 并利用复合函数的求导法则把 y'' 化为对 y 的导数, 即

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z,$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dy} \cdot z \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{dy} \cdot z \right) \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \cdot z,$$

⋮

代入原方程, 得到关于 $y, z, z', \dots, z^{(n-1)}$ 的方程式, 记作

$$F_1(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0,$$

这是以 y 为自变量, z 为未知函数的 $n-1$ 阶方程, 比原方程降了一阶. 下面以二阶方程 $F(y, y', y'') = 0$ 为例说明.

例 4.2.10 求解初值问题 $\begin{cases} y''y^3 = 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$

解 此方程不显含自变量 x . 令 $y' = z$, 则 $y'' = z \frac{dz}{dy}$, 代入原方程得

$$z \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y^3}.$$

分离变量并积分, 得

$$\frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}y^{-2} + c_1,$$

代入初始条件, 由 $y(0) = 1, y'(0) = 0$, 得 $c_1 = \frac{1}{2}$. 方程简化为

$$z^2 = 1 - y^{-2} \text{ 或 } z = \pm \frac{1}{y} \sqrt{y^2 - 1},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{y} \sqrt{y^2 - 1}.$$

这是一个可分离变量的方程, 经积分得到

$$\sqrt{y^2 - 1} = \pm x + c_2,$$

再由 $y(0) = 1$ 得到 $c_2 = 0$. 故所求初值问题的解为

$$y^2 - x^2 = 1.$$

4. 首次积分方法

若

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

则称

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c$$

为方程 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 的**首次积分**. 这样就把原方程降了一阶. 如果原方程是二阶的, 则降为一阶方程.

例 4.2.11 求解方程 $yy'' + (y')^2 = 0$.

解 原方程可写为

$$\frac{d}{dx}(yy') = 0,$$

即方程左端是 $\Phi = yy'$ 的导数, 积分即得

$$yy' = c,$$

于是原方程降了一阶. 求解此一阶方程得

$$y^2 = c_1 x + c_2 \quad (c_1 = 2c).$$

4.2.5 一阶微分方程解的存在唯一性定理

首先讨论已解出的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.2.10)$$

这里 $f(x, y)$ 是在矩形区域

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

上的连续函数.

函数 $f(x, y)$ 称为在 R 上关于 y 满足李普希茨(Lipschitz)条件:如果存在常数 $L > 0$, 使得不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

对所有 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ 都成立, L 称为李普希茨常数.

定理 4.1 如果 $f(x, y)$ 在 R 上连续且关于 y 满足李普希茨条件, 则方程(4.2.10) 存在唯一解 $y = \varphi(x, y)$, 定义于区间 $|x - x_0| \leq h$ 上, 连续且满足初始条件

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

其中 $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$.

附注 1 设方程(4.2.10) 是线性的, 即方程为

$$\frac{dy}{dx} + P(x, y) = Q(x),$$

那么容易知道, 当 $P(x), Q(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续时, 定理 4.1 的条件就能满足. 不仅如此, 这时由任一初值 $(x_0, y_0), x_0 \in [\alpha, \beta]$ 所确定的解在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上都有定义.

附注 2 由于李普希茨条件比较难于检验, 常用 $f(x, y)$ 在 R 上有对 y 的连续偏导数来代替. 事实上, 如果在 R 上 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在且连续, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上有界. 设在 R 上 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$, 这时,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))}{\partial y} \right| \cdot |y_1 - y_2| \leq L |y_1 - y_2|,$$

其中 $(x, y_1), (x, y_2) \in R, 0 < \theta < 1$. 但是反过来, 满足李普希茨条件的函数 $f(x, y)$ 不一定有偏导数存在, 例如, 函数 $f(x, y) = |y|$ 在任何区域都满足李普希茨条件, 但 $f(x, y)$ 在 $y = 0$ 处导数不存在.

现在讨论一阶隐式微分方程

$$F(x, y, y') = 0 \quad (4.2.11)$$

根据隐函数存在定理, 若于 (x_0, y_0, y'_0) 的某一邻域内 $F(x, y, y')$ 连续且 $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ 而 $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, 则必可把 y' 唯一地表示为 x, y 的函数

$$y' = f(x, y),$$

并且 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一邻域内连续, 且满足

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

更进一步, 如果 $F(x, y, y')$ 关于所有变元存在连续偏导数, 则 $f(x, y)$ 对 x, y 也存在连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial y'},$$

显然它是有界的, 于是根据定理 1, 方程 (4.2.11) 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解存在且唯一, 即方程 (4.2.11) 的过点 (x_0, y_0) 且切线斜率为 y'_0 的积分曲线存在且唯一. 这样便得到下面的定理.

定理 4.2 如果在点 (x_0, y_0, y'_0) 的某一邻域内:

1° $F(x, y, y')$ 对所有变元连续, 且存在连续偏导数;

2° $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$;

3° $\frac{\partial F(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y'} \neq 0$,

则方程 (4.2.11) 存在唯一解

$$y = y(x), \quad |x - x_0| \leq h \quad (h \text{ 为足够小的正数})$$

满足初始条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

习题 4-2

(A)

1. 求解下列方程:

$$(1) \sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2};$$

$$(2) \sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \cdot \tan x dy = 0;$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = 10^{x+y};$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy+x^3y}.$$

2. 求解下列方程或初值问题:

$$(1) \frac{dy}{dx} = y + \sin x;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x};$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x; \\ y(0) = 0 \end{cases};$$

$$(4) \begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = e^x; \\ y(1) = e + 1 \end{cases}.$$

3. 求下列齐次方程的通解:

$$(1) x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2};$$

$$(2) x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x};$$

$$(3) (x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0;$$

$$(4) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

4. 求下列伯努利方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = y^2 (\cos x - \sin x);$$

$$(2) \frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2;$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4;$$

$$(4) xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0.$$

5. 用适当变换求解下列方程:

$$(1) y' = 6 \frac{y}{x} - xy^2;$$

$$(2) y' = -\frac{2x+y-4}{x+y-1};$$

$$(3) xy' + y = y(\ln x + \ln y);$$

$$(4) y' = \frac{1}{(x+y)^2};$$

(B)

1. 求下列方程的通解:

$$(1) y'' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(2) xy'' + y' = 0;$$

$$(3) xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right);$$

$$(4) y''' = \sqrt{1+y''^2}.$$

2. 求解下列方程或初值问题:

$$(1) y'' = \frac{1}{2y'};$$

$$(2) yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0;$$

$$(3) yy'' + y'^2 - 1 = 0;$$

$$(4) yy'' - y'^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

3. 试求 $y'' = x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 相切的积分曲线.

4.3 一阶微分方程建模

建立微分方程的方法很多,常用的基本方法有3种:(1)利用几何、物理、化学、电学等学科的有关结论,直接列出未知函数的变化率满足的方程.(2)利用微元法.取微元后,一般利用“增量=输入量-输出量”,得到增量满足的关系式,从而建立微分方程.(3)模拟近似法.对于较复杂的自然现象和社会问题很难定量描述,通常先作一些假设,在此假设下,近似模拟实际现象建立方程,求解后检验是否与实际相符,然后再修改,直到得出令人满意的结果.

4.3.1 线性方程

回顾 4.2 节,在一阶线性方程的标准型

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = f(t)$$

两边乘以积分因子 $e^{\int P(t)dt}$, 可将方程改写为

$$\frac{d}{dt}[e^{\int P(t)dt}y] = e^{\int P(t)dt}f(t).$$

可以通过对最后这个等式两边积分求得方程的解.

增长与衰减 初值问题

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.3.1)$$

其中, k 为一个比例常数, 用于不同的增长或衰减模型. 我们看到在 4.1.2 节中的生物学应用中, 某时刻人口数量 (也适用于细菌、动物) 的增长率与 t 时刻的人口数量成正比. 已知在某任意初始时刻 t_0 的人口数量, 我们可以用式 (4.3.1) 来预测未来的人口数量, 即通过测量在时间 $t_1 > t_0$ 时的 x , 再由初值问题得到比例常数 k 的值. 在物理和化学模型中, 式 (4.3.1) 被认为是一阶反应 —— 即在 t 时刻, 其比率或速率 $\frac{dx}{dt}$ 直接与还未变化的或剩余的 x 成正比.

例 4.3.1 (细菌增长问题) 一个细菌培养过程在初始时刻的细菌数量为 P_0 . 在 $t = 1$ h 时, 测得细菌数量为 $\frac{3}{2}P_0$. 如果在 t 时刻的增长速度与此时细菌的数量 $P(t)$ 成正比, 求细菌数量增至原来的 3 倍所需时间.

解 首先我们求解式 (1) 中的微分方程, 这里用 P 代表 x . 当 $t_0 = 0$ 时, 初值条件为 $P(0) = P_0$. 然后我们利用经验观察值 $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ 来确定比例常数 k .

注意到微分方程 $\frac{dP}{dt} = kP$ 是可分离的并且是线性的, 将其整理成一阶微分方程的标准型

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0, \quad (4.3.2)$$

我们可以看到积分因子为 e^{-kt} . 在方程两边同乘以这一项后积分得

$$\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0 \text{ 和 } e^{-kt}P = c,$$

所以 $P(t) = ce^{kt}$. 当 $t = 0$ 时有 $P_0 = ce^0 = c$, 所以 $P(t) = P_0e^{kt}$. 当 $t = 1$ 时我们有 $\frac{3}{2}P_0 = P_0e^k$, 即 $e^k = \frac{3}{2}$. 从最后一个等式中我们可得 $k = \ln \frac{3}{2} = 0.4055$, 所以 $P(t) = P_0e^{0.4055t}$. 为了求细菌数量变为原来 3 倍所需时间, 我们解出 $3P_0 = P_0e^{0.4055t}$ 中的 t , 有 $0.4055t = \ln 3$, 或

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ h}.$$

如图 4-4 所示.

注意, 在例 4-15 中, 细菌在 $t = 0$ 时的数量 P_0 对其增至原来 3 倍所需时间并没有什么影响. 增至原来 3 倍所需时间在一个初始值下, 比如是 100 或 1 000 000 个细菌, 都为 2.71 h.

如图 4-5 所示, 当 $k > 0$ 时, 指数函数 e^{kt} 随着 t 的增加而增加, 而当 $k < 0$ 时反之. 所以增长问题 (人口、细菌, 甚至资本) 可以由这个正数 k 来描述, 而一些与衰减有关的问题 (例如放射性分解) 则取决于一个负的 k 值. 由此, 我们称 k 为增长常数 ($k > 0$) 或衰减常数 ($k < 0$).

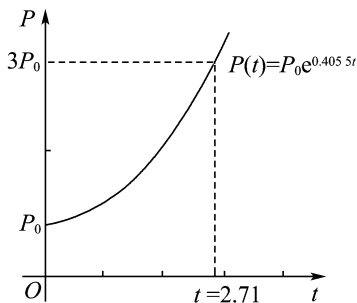


图 4-4

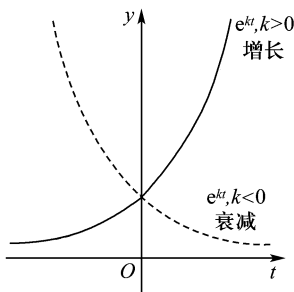


图 4-5

例 4.3.2(串联电路) 将一个 12 V 的电池连入串联电路, 电路中电感线圈的感应系数为 $\frac{1}{2}$ H, 电阻为 10 Ω . 如果初始时刻电流为 0, 求电流的表达式.

解 由基尔霍夫第二定律可知需求解方程

$$\frac{1}{2} \frac{di}{dt} + 10i = 12, \quad (4.3.3)$$

使得 $i(0) = 0$. 首先我们在方程两边同乘以 2, 然后得到积分因子 e^{20t} , 然后有

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}.$$

对最后一个等式关于 i 积分, 得 $i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$. $i(0) = 0$ 意味着 $0 = \frac{6}{5} + c$ 或 $c = -\frac{6}{5}$.

所以感应为 $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$.

例 4.3.3(蛋糕的冷却) 当一块蛋糕从烤箱中被拿出时, 测得其温度为 300 $^{\circ}\text{F}$. 3 min 后其温度变为 200 $^{\circ}\text{F}$, 使蛋糕冷却到 70 $^{\circ}\text{F}$ 需要多长时间?

解 在 4.1.2 节中的式(7)中, 定义 $T_m = 70$. 我们需要求解初值问题

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), T(0) = 300 \quad (4.3.4)$$

并确定 k 的值, 使得 $T(3) = 200$.

方程(4.3.4)既是线性的又是可分离的. 分离变量得

$$\frac{dT}{T - 70} = k dt.$$

然后有 $\ln |T - 70| = kt + c_1$, 因此有 $T(t) = 70 + c_2 e^{kt}$. 当 $t = 0$ 时, $T(0) = 300$, 再由 $300 = 70 + c_2$ 得 $c_2 = 230$, 所以 $T = 70 + 230e^{kt}$. 最后测得的 $T(3) = 200$ 使得 $e^{3k} = \frac{13}{23}$,

因此 $k = \left(\frac{1}{3}\right) \ln\left(\frac{13}{23}\right) = -0.19018$. 这样可得

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t}. \quad (4.3.5)$$

我们注意到, 式(4.3.5)没有有限解 $T(t) = 70$, 因为 $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 70$. 从直观感觉上我们认

为蛋糕将在合理长的时间后冷却至 70°F . 那么“合理长”是多长呢? 我们当然没必要被式(4)的结果扰乱了直觉. 图 4-6 的(a)和(b)清楚地显示了蛋糕将在半小时后近似等于 70°F .

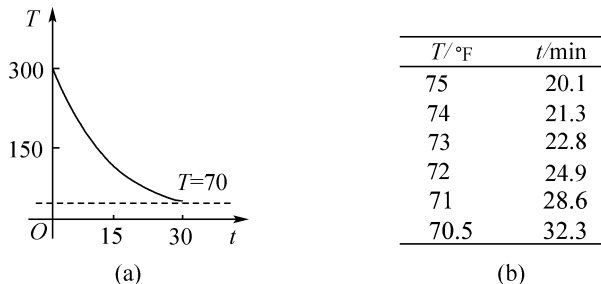


图 4-6

4.3.2 非线性方程

例 4.3.4(求探照灯反射镜面的形状) 探照灯要有良好的方向性, 它的反射镜面要将点光源射出的光线平行地反射出去, 探照灯反射镜面形状的设计正是考虑了这一特点.

为此, 建立坐标系: 将坐标原点取在光源处, x 轴的正向取为反射光方向, 并将反射镜面看做平面曲线 $y = f(x)$ 绕 x 轴旋转所形成的旋转面. 于是, 问题归结为求曲线 $y = f(x)$ 的形状(图 4-7).

解 设曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $M(x, y)$ 处的切线 MT 交 x 轴于点 N , 根据入射角 α_1 等于反射角 α_2 可以推出, 光线平行于 x 轴反射出去的条件是 $OM = ON$. 易见 $\frac{dy}{dx} = \frac{MP}{NP}$, 而 $MP = y$, $NP = ON + OP = OM + OP = \sqrt{x^2 + y^2} + x$, 所以得到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

为求解方便, 将上式变为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

或写为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2},$$

这是个齐次方程. 令 $\frac{x}{y} = z$, 代入上式得

$$z + y \frac{dz}{dy} = z + \sqrt{1 + z^2},$$

即

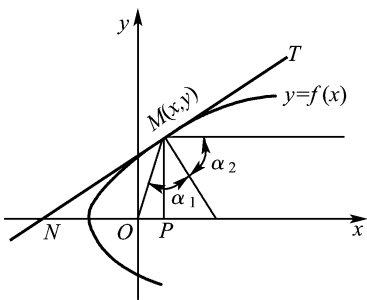


图 4-7

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dy}{y}.$$

两边积分,得

$$\ln(z + \sqrt{1+z^2}) = \ln|y| + \ln|c_1|,$$

即

$$z + \sqrt{1+z^2} = c_2 y \quad (c_2 = \pm c_1).$$

再用 $\frac{x}{y} = z$ 代回上式并整理,得

$$1 = c_2^2 y^2 - 2c_2 x.$$

令 $c = \frac{1}{c_2}$, 则得

$$y^2 = c(c + 2x).$$

可见探照灯的反射镜面是以 x 轴为对称轴的抛物线, 绕 x 轴旋转而产生的旋转抛物面.

例 4.3.5(逻辑斯谛方程) 假设一个环境能容纳不多于数量 K 的人口. K 称为这个环境的承载能力. 所以对于 4.1.2 节的式(6)中的函数 f , 我们有 $f(K) = 0$, 为简单起见, 我们设 $f(0) = r$. 图 4-8 给出了三个符合上述两个条件的函数 f . 我们假设 $f(P)$ 为最简单的线性函数, 即 $f(P) = c_1 P + c_2$. 利用 $f(0) = r$ 和 $f(K) = 0$, 依次可得 $c_2 = r, c_1 = -\frac{r}{K}$, 所以 f 有形式 $f(P) = r - \left(\frac{r}{K}\right)P$. 则人口发展方程变为

$$\frac{dP}{dt} = P\left(r - \frac{r}{K}P\right). \quad (4.3.6)$$

对常数进行重新定义, 非线性方程(4.3.6)等价于

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP). \quad (4.3.7)$$

1840 年前后, 比利时数学家和生物学家 P. F. Verhulst 利用这一模型预测了一些国家的人口数量. 他的研究中就应用了式(4.3.7), 其中 $a > 0, b > 0$. 方程(4.3.7)后来称为**逻辑斯谛方程**. 它的解称为**逻辑斯谛函数**. 逻辑斯谛函数的图像称为**逻辑斯谛曲线**.

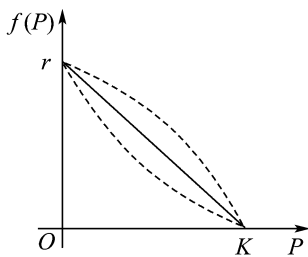


图 4-8

当人口数量很大或人口过于拥挤时, 人口会对环境造成有害影响, 而人对食物、能源的竞争也对人口的增长产生了消极影响, 所以微分方程 $\frac{dP}{dt} = kP$ 并不能准确地描述人口模型. 现在我们看到当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 方程(4.3.7)的解是有界的. 如果我们将方程(4.3.7)改写为 $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$, 则非线性项 $-bP^2$ ($b > 0$) 可解释为“抑制”或“竞争”项. 在大多数实际应用中, 正常数 a 会远大于常数 b .

逻辑斯谛曲线已被证明可以非常准确地预测在有限空间中的增长形式, 如细菌、原生

动物、水蚤、果蝇等.

逻辑斯谛方程的解 求解方程(4.3.7)的一种方法是分离变量. 将方程 $\frac{dP}{P(a-bP)} = dt$ 的左边分解, 然后两边积分得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a-bP}\right)dP &= dt, \\ \frac{1}{a}\ln|P| - \frac{1}{a}\ln|a-bP| &= t + c, \\ \ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| &= at + ac, \\ \frac{P}{a-bP} &= c_1 e^{at}.\end{aligned}$$

由最后一个等式得

$$P(t) = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} = \frac{ac_1}{bc_1 + e^{-at}}.$$

如果 $P(0) = P_0, P_0 \neq \frac{a}{b}$, 我们可以求得 $c_1 = \frac{P_0}{a - bP_0}$, 因此在代换和简化后, 解可写为

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}. \quad (4.3.8)$$

逻辑斯谛曲线 从式(4.3.8)中我们可以看到

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $P(t) \rightarrow \frac{aP_0}{bP_0} = \frac{a}{b}$; 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $P(t) \rightarrow 0$.

图 4-9 中的虚线 $P = \frac{a}{2b}$ 与逻辑斯谛曲线交于其拐点处. 为了证明这一点, 我们对式(7)求微分, 由乘积规则得:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 P}{dt^2} &= P\left(-b \frac{dP}{dt}\right) + (a - bP) \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dt}(a - 2bP) \\ &= P(a - bP)(a - 2bP) \\ &= 2b^2 P\left(P - \frac{a}{b}\right)\left(P - \frac{a}{2b}\right).\end{aligned}$$

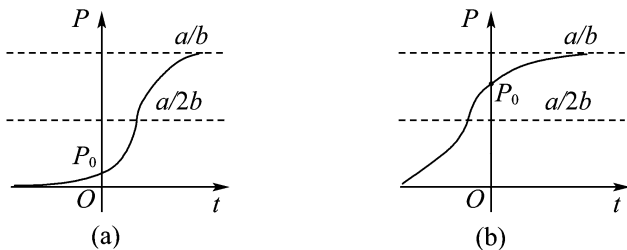


图 4-9

由微积分可知, 满足 $\frac{d^2 P}{dt^2} = 0$ 的点可能是拐点, 而 $P = 0$ 和 $P = \frac{a}{b}$ 显然被排除在外.

所以 $P = \frac{a}{2b}$ 是曲线唯一可能改变凹凸性的地方, 当 $0 < P < \frac{a}{2b}$ 时有 $P'' > 0$, 当 $\frac{a}{2b} < P <$

$\frac{a}{b}$ 时有 $P'' < 0$. 所以曲线以 $P = \frac{a}{2b}$ 为界, 从左到右由上凹变为下凹. 当初值满足 $0 < P_0 < \frac{a}{2b}$ 时, $P(t)$ 的曲线为 S 形, 如图 4-9(a) 所示. 当 $\frac{a}{2b} < P_0 < \frac{a}{b}$ 时, 曲线仍为 S 形, 但其拐点出现在 t 取负值时, 如图 4-9(b) 所示.

例 4.3.6(逻辑斯蒂增长) 假设一个携带流感病毒的学生回到了有 1 000 个学生的孤立校园. 假设病毒的传播速度不仅与已感染的人数 x 而且与未感染的人数成正比. 观察发现, 4 天后 $x(4) = 50$, 确定 6 天后感染的人数.

解 假设在疾病的传播过程中没有人离开校园, 所以我们要求解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = kx(1\,000 - x), x(0) = 1.$$

可以看出 $a = 1\,000k, b = k$, 则由式(8) 立即可得

$$x(t) = \frac{1\,000k}{k + 999ke^{-1\,000kt}} = \frac{1\,000}{1 + 999e^{-1\,000kt}}.$$

现在利用 $x(4) = 50$, 从

$$50 = \frac{1\,000}{1 + 999e^{-4\,000k}}$$

中求出 k , 然后有

$$-1\,000k = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{19}{999}\right) = -0.990\,6.$$

所以

$$x(t) = \frac{1\,000}{1 + 999e^{-0.990\,6t}}.$$

最后得

$$x(6) = \frac{1\,000}{1 + 999e^{-5.943\,6}} = 276.$$

习题 4-3

1. 1976 年 3 月, 世界人口达到 340 亿. 当时一本很受欢迎的新闻杂志预测人口将以每年 1.8% 的速度增长, 在 45 年后将达到 80 亿. 把这一结果和传统的模型做比较. 传统的模型认为增长速率与任意时刻的人口数量成正比.

2. 考虑牛顿热力学定律 $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), k < 0$, 其中物体周围媒质温度 T_m 随时间而变化. 假设初始时一个物体温度为 T_1 , 周围媒质温度为 $T_2, T_m = T_2 + B(T_1 - T)$, 其中, B 为大于零的常数.

(1) 求出物体在 t 时刻的温度.

(2) 当 $t \rightarrow +\infty$ 时物体温度的极限值是多少?

(3) 当 $t \rightarrow +\infty$ 时 T_m 的极限值是多少?

3. 微积分学中有一个经典的问题就是找出一条曲线 l , 一个小珠子可在重力作用下以最短的时间从此曲线上点 $A(0, 0)$ 滑到点 $B(x_1, y_1)$, 如图 4-11 所示. 可以得到关于曲线形状的一个非线性微分方程 $y[1 + (y')^2] = k$, 这里的 k 是一个常数. 首先用 y 和 dy 解出 dx , 然后利用代换 $y = k \sin^2 \theta$ 求出参数形

式的解. 可以看到曲线 l 是一条圆滚线.

4. 两种动物的数量由以下非线性一阶微分方程组描述:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x(\alpha - x), \\ \frac{dy}{dt} = k_2 xy. \end{cases}$$

求解 x 和 y , 用 t 表示它们.

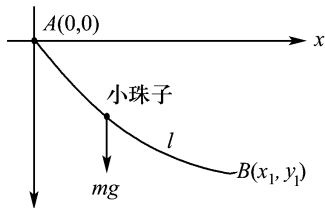


图 4-10

4.4 高阶线性微分方程

在微分方程的理论中, 线性微分方程是非常重要的一部分, 这不仅是因为线性微分方程的一般理论已被研究得十分清楚, 而且线性微分方程是研究非线性微分方程的基础, 它在物理、力学和工程技术中有着广泛的应用. 本节重点讲述线性微分方程的基本理论和常数系数方程的解法.

4.4.1 线性微分方程通解的结构

形如 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$ (4.4.1)

的微分方程称为线性微分方程. 其中 $a_i(x) (i = 1, 2, \cdots, n)$ 及 $f(x)$ 都是连续函数. 若 $n > 1$, 称之为高阶线性微分方程.

若 $f(x) \neq 0$, 则称式(1) 为非齐次线性微分方程. 若 $f(x) = 0$, 则式(1) 变为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0, \quad (4.4.2)$$

称式(4.4.2) 为齐次线性微分方程, 或方程(4.4.1) 所对应的齐次线性方程.

同一阶方程一样, 高阶方程也存在着是否有解和解是否唯一的问题. 因此作为讨论基础, 我们首先给出方程(1) 的解的存在唯一性定理.

定理 4.3 如果 $a_i(x) (i = 1, 2, \cdots, n)$ 及 $f(x)$ 都是区间 $a \leq x \leq b$ 上的连续函数, 则对于任意 $x_0 \in [a, b]$ 及任意的 $y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$, 方程(1) 存在唯一解 $y = \varphi(x)$, 定义于区间 $a \leq x \leq b$ 上, 且满足初始条件:

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

为方便讨论, 引入求导运算的一种常用记号, 即算子符号

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x),$$

它满足

$$L[y(x)] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = \sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(n-i)},$$

其中, $a_0(x) = 1$. 于是方程(1) 和方程(2) 可分别简记为

$$L(y) = f(x)$$

和

$$L(y) = 0.$$

容易证明算子 L 具有如下线性性质:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2), \quad L(cy) = cL(y), \text{ 其中 } c \text{ 为常数.}$$

给定一个方程,人们总想知道它的所有解,可这一点往往很难办到.但对于线性微分方程却能得到令人满意的结论.下面我们来研究线性微分方程通解的结构.为此首先给出解的叠加原理.

定理 4.4(叠加原理) 设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是齐次线性微分方程(4.4.2)的解,则它们的线性组合

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(x)$$

也是方程(2)的解,其中 c_1, c_2, \dots, c_n 是任意常数.

定理 4.5 设 $\bar{y}(x)$ 是非齐次线性微分方程(4.4.1)的一个解, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是方程(4.4.1)对应的齐次方程(4.4.2)的解,则 $\sum_{j=1}^n c_j y_j(x) + \bar{y}(x)$ 也是方程(4.4.1)的解,其中 c_1, c_2, \dots, c_n 是任意常数.

关于这两个定理的证明,读者可将其表达式代入方程自行完成.

观察定理 4-3 的结论,由于 $\sum_{j=1}^n c_j y_j(x) + \bar{y}(x)$ 中含有 n 个任意常数,自然会想到这个解是否就是方程(4.4.1)的通解呢?为了讨论的需要,我们引进函数线性相关及线性无关的概念.

定义 4.1 设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一组函数,如果存在一组不全为零的常数 k_1, k_2, \dots, k_n ,使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) \equiv 0,$$

则称这组函数 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上**线性相关**,否则称它们**线性无关**.

例 4.4.1 证明在任何区间 I 上,

(1) 函数组 $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ 是线性相关的;

(2) 函数组 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 是线性无关的.

证明 (1) 由 $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ 可知,只要取 $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 1$,就有

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \sin^2 x + k_3 \cos^2 x \equiv 0 \quad (x \in I),$$

所以函数组 $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ 在区间 I 上线性相关.

(2) 用反证法.假设存在常数 k_0, k_1, \dots, k_n ,使 $k_0 \cdot 1 + k_1 x + \dots + k_n x^n \equiv 0 (x \in I)$,则可推出所有的 $k_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 均为零.因为若有某个 $k_i \neq 0$,则上式左端是一个不高于 n 次的代数方程,由代数基本定理知,此方程至多只有 n 个实根,即上式左端多项式至多只能在 n 个点上为零,这与假设它在区间 I 上处处为零矛盾.所以函数组 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 在区间 I 上是线性无关的.

至于两个函数的情形,由上述定义知,只需在考虑的区间上看它们的比是否为常数.若比为常数,则线性相关;否则就线性无关.

有了线性无关的概念后,可得关于二阶齐次(非齐次)线性微分方程的通解结构定理.相应结论可推广到 n 阶情形.

定理 4.6(二阶齐次线性微分方程通解结构) 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.4.3)$$

的两个线性无关特解,那么

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (c_1, c_2 \text{ 是任意常数})$$

是方程(4.4.3)的通解.

例如,方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 是二阶齐次线性微分方程,容易验证, $y_1(x) = e^x$ 和 $y_2(x) = xe^x$ 是方程的两个解,且 $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = x \neq \text{常数}$,故 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关,因此方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

关于二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (4.4.4)$$

有如下的通解结构定理.

定理 4.7(二阶非齐次线性微分方程通解结构) 设 $y^*(x)$ 是方程(4.4.4)的一个特解, $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是与方程(4.4.4)对应的齐次线性方程(4.4.3)的两个线性无关解,则

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y^*(x) \quad (c_1, c_2 \text{ 是任意常数}) \quad (4.4.5)$$

是方程(4)的通解.

证明 由定理 4-4 和定理 4-5 易知式(4.4.5)是方程(4.4.4)的解.又因它含有两个独立的任意常数,因此式(4.4.5)是方程(4.4.4)的通解.

由定理 4-6 和定理 4-7 可知,二阶齐次或非齐次线性微分方程通解的表达式并不是唯一的.

例 4.4.2 验证 $y^*(x) = -x$ 是方程

$$y'' - y = x$$

的一个特解, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ 是对应的齐次线性微分方程的两个解,并写出非齐次线性微分方程的通解.

解 将 $y^*(x) = -x$ 和 $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ 分别代入原方程和对应的齐次线性微分方程,不难验证.

因 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = e^{-x}$ 线性无关,故 $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ 为对应的齐次线性微分方程的通解.因此非齐次线性微分方程的通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x.$$

定理 4.8(非齐次线性微分方程解的叠加原理) 设 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的特解,则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

这个定理请读者自己证明.

4.4.2 高阶常系数齐次线性微分方程的解法

至此,关于线性方程的通解的结构问题,从理论上说,可以认为已经解决了,但是求方程通解的方法还没有具体给出.事实上,对于一般的线性微分方程没有普遍的解法.本节介绍能够彻底解决求解问题的一类方程——常系数线性方程.我们将看到,为了求得常系数线性齐次方程的通解,只需解一个代数方程而不必通过积分运算.对于某些特殊的非齐次线性方程也可以通过代数运算和微分运算求得它的通解.形如

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \quad (4.4.6)$$

的方程称为高阶($n > 1$)时) **常系数线性微分方程**,其中 a_1, a_2, \cdots, a_n 是已知常数, $f(x)$ 是已知函数.本节假定 $f(x)$ 是定义在 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数.当 $f(x) \equiv 0$ 时,方程(4.4.6)变为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \quad (4.4.7)$$

称方程(7)为**常系数非齐次线性微分方程**(4.4.6)对应的**常系数齐次线性微分方程**.

根据上节所述,求方程(4.4.7)的通解问题归为求它的 n 个线性无关的解,也称为求它的**基本解组**.下面介绍求基本解组的方法,这种方法是瑞士数学家欧拉于1743年提出的,称为**欧拉待定指数函数法**.

根据方程(4.4.7)常系数的特点,猜想此方程应有形如 $y = e^{\lambda x}$ 的解,将它代入方程(4.4.7)并整理得

$$e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0.$$

因 $e^{\lambda x} \neq 0$,所以上式化为

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \quad (4.4.8)$$

这说明只要 λ 是多项式方程(4.4.8)的根,则函数 $y = e^{\lambda x}$ 就是微分方程(4.4.7)的解,因而称方程(4.4.8)为微分方程(4.4.7)的**特征方程**,它的根称为**特征根**.

这样,求方程(4.4.7)的解就归为求代数方程(4.4.8)的根,而特征根可能有不同情况,下面分别进行讨论.为叙述方便,仅以二阶线性微分方程为例,所得结论可推广到 n 阶情形.

二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$y'' + p y' + q y = 0. \quad (4.4.9)$$

它的特征方程为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

这里 p, q 为常数,特征根为 $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.下面分三种情况讨论:

(1) $p^2 - 4q > 0$,此时特征方程有两个相异的实根 λ_1 和 λ_2 ,方程有两个特解 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 和 $y_2 = e^{\lambda_2 x}$,因为 $\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{常数}$,所以 y_1 与 y_2 线性无关,从而得到方程(4.4.9)的通解为

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(2) $p^2 - 4q = 0$, 此时特征方程有两个相等的实根 $\lambda_1 = \lambda_2$, 仅能得到方程(4.4.9)的一个特解 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, 要求通解, 还需找一个与 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 线性无关的特解 y_2 .

既然 y_2 与 y_1 线性无关, 则必有 $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{常数}$, 故可设 $y_2 = u(x)y_1 = u(x)e^{\lambda_1 x}$, 其中 $u(x)$ 是待定的函数. 对 y_2 求导, 得

$$y_2' = e^{\lambda_1 x}(u' + \lambda_1 u), y_2'' = e^{\lambda_1 x}(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u).$$

代入方程(4.4.9)中, 便有

$$e^{\lambda_1 x}[(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u) + p(u' + \lambda_1 u) + qu] = 0,$$

从而

$$u'' + (2\lambda_1 + p)u' + (\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)u = 0.$$

由于 λ_1 是特征方程的二重根, 故有 $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$, 并且 $2\lambda_1 + p = 0$, 于是便得到

$$u'' = 0.$$

我们只需取满足上式的最简单的函数 $u = x$, 便可得到方程(4.4.9)的另一个与 y_1 线性无关的特解

$$y_2 = xe^{\lambda_1 x},$$

从而得到方程(4.4.9)的通解

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}.$$

(3) $p^2 - 4q < 0$, 此时特征方程为一对共轭复根: $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. 不难验证 $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ 和 $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ 是方程(9)的解, 并且 y_1 与 y_2 线性无关. 由此得到方程(9)的通解

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

综上所述, 可得表 4-1.

表 4-1 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

特征根情况	通解形式
相异实根 λ_1, λ_2	$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
相等实根 λ	$(c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$
共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

例 4.4.3 求方程 $y'' + y' - 6y = 0$ 的通解.

解 因特征方程 $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ 的特征根为

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2,$$

故通解为

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}.$$

例 4.4.4 求方程 $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + s = 0$ 满足初始条件 $s \Big|_{t=0} = 4, \frac{ds}{dt} \Big|_{t=0} = -2$ 的特解.

解 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$,

特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,

故方程通解为

$$s = (c_1 + c_2 t)e^{-t}.$$

将初始条件 $s|_{t=0} = 4$ 代入上式,可解出 $c_1 = 4$,从而 $s = (4 + c_2 t)e^{-t}$.

由 $\frac{ds}{dt}|_{t=0} = (c_2 - 4 - c_2 t)e^{-t}|_{t=0} = c_2 - 4 = -2$,知 $c_2 = 2$,故所求特解为

$$s = (4 + 2t)e^{-t}.$$

例 4.4.5 求方程 $y'' - 4y' + 13y = 0$ 的通解.

解 由特征方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$,解出特征根

$$\lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = 2 - 3i,$$

所以方程的通解为

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).$$

二阶常系数齐次线性微分方程的上述解法可推广至 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

其相应的特征方程为

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

此时微分方程通解的构成,见表 4-2.

表 4-2 n 阶常系数齐次线性微分方程通解的组成函数

特征根情况	方程通解中对应的项
单实根 λ	对应一项 $c e^{\lambda x}$
一个 k 重根 λ	对应 k 项 $(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$
单重共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	对应两项 $e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$
k 重共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	对应 $2k$ 项 $e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) \cos \beta x + (c'_1 + c'_2 x + \cdots + c'_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

例 4.4.6 求方程 $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$ 的通解.

解 因特征方程 $\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0$ 的特征根为

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -i,$$

故通解为

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x) \cos x + (c_4 + c_5 x) \sin x.$$

例 4.4.7 求初值问题 $\begin{cases} 9y''' - 3y'' - 5y' - y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ 的解.

解 特征方程为 $9\lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 1 = 0$,因式分解得

$$(\lambda - 1)(9\lambda^2 + 6\lambda + 1) = 0,$$

由此可知,特征根为

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{3} \text{ (二重根)},$$

故通解为

$$y = c_1 e^x + e^{-\frac{1}{3}x} (c_2 + c_3 x).$$

再由初始条件可得 $c_1 = \frac{1}{16}, c_2 = \frac{15}{16}, c_3 = \frac{1}{4}$,故初值问题的解为

$$y = \frac{1}{16}e^x + e^{-\frac{1}{3}x} \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{4}x \right).$$

4.4.3 高阶常系数非齐次线性微分方程的解法

下面重点讨论二阶非齐次线性微分方程的求解问题. 二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (4.4.10)$$

其中, p, q 为常数, $f(x)$ 是连续函数.

根据非齐次线性微分方程通解的结构, 为求该方程的通解, 只需求它的一个特解和它相应的齐次微分方程的通解, 而齐次微分方程通解的问题前面已解决, 因此这里只需求非齐次微分方程的一个特解. 显然特解与方程右端的非齐次项函数 $f(x)$ 有关. 在工程技术中, $f(x)$ 常以多项式、指数函数和三角函数、或它们之间的某种组合形式出现, 对于这些函数可以用所谓**待定系数法**求出特解. 下面介绍当 $f(x)$ 取以下两种常见形式时特解的求法.

第一种形式: $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$

这里 α 是常数, $P_m(x)$ 是 m 次多项式, $P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$. 根据方程具有常系数和 $f(x)$ 的形式特点, 考虑到多项式与指数函数的乘积的导数仍是多项式和指数函数的乘积, 因而可设方程 $y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_m(x)$ 的特解形式为

$$y^* = e^{\alpha x} Q(x),$$

其中, $Q(x)$ 为多项式, 于是

$$\begin{aligned} y^{*'} &= e^{\alpha x} [Q'(x) + \alpha Q(x)], \\ y^{*''} &= e^{\alpha x} [Q''(x) + 2\alpha Q'(x) + \alpha^2 Q(x)], \end{aligned}$$

代入方程(4.4.10)并消去 $e^{\alpha x}$ 得

$$\begin{aligned} Q''(x) + (2\alpha + p)Q'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q(x) &= P_m(x) \\ &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m. \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

注意到上式右边是一个 m 次多项式, 左边也必须是 m 次多项式.

(1) 若 α 不是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根, 即 $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, 那么可令 $Q(x)$ 是 m 次多项式

$$Q_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m.$$

代入式(4.4.11)并比较两边 x 同次幂的系数, 可以得到以 a_0, a_1, \cdots, a_m 为未知数的 $m+1$ 个方程联立的方程组, 从而解出 a_0, a_1, \cdots, a_m , 并得到所求特解 $y^* = Q_m(x)e^{\alpha x}$.

(2) 若 α 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的单根, 即 $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, 而 $2\alpha + p \neq 0$, 那么此时 $Q'(x)$ 为 m 次多项式, 则可令 $Q(x) = xQ_m(x)$, 并用同样的方法解出 $Q_m(x)$ 中的各个系数.

(3) 若 α 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的二重根, 即 $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, 且 $2\alpha + p = 0$, 那么此时 $Q''(x)$ 应为 m 次多项式, 则可令 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$, 同样用上面的方法确定出 $Q_m(x)$.

综上所述, $y'' + py' + qy = e^{ax}P_m(x)$ 具有形如

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{ax}$$

的特解, 其中 $Q_m(x)$ 与 $P_m(x)$ 均为 m 次多项式, 而 k 根据 α 不是特征根, 是特征方程的单根或二重根, 分别取 0, 1, 或 2.

上面的结论可以推广到非齐次项 $f(x) = e^{ax}P_m(x)$ 的 n 阶常系数非齐次线性微分方程, 其特解仍可设为 $y^* = x^k Q_m(x) e^{ax}$ 的形式, 其中 k 是特征方程含根 α 的重复次数, 即若 α 不是特征根, 则 k 取 0; 若 α 是 s 重特征根, 则 k 取 s .

例 4.4.8 求方程 $2y'' + y' + 5y = x^2 + 3x + 2$ 的一个特解.

解 非齐次项函数 $f(x) = x^2 + 3x + 2 = e^{0x}(x^2 + 3x + 2)$, 而 $\alpha = 0$ 不是特征方程 $2\lambda^2 + \lambda + 5 = 0$ 的根, 故可设特解为

$$y^* = ax^2 + bx + c.$$

将 $y^{*'} = 2ax + b$, $y^{*''} = 2a$ 及 $y^* = ax^2 + bx + c$ 代入原方程, 整理得

$$5ax^2 + (2a + 5b)x + (4a + b + 5c) = x^2 + 3x + 2.$$

比较 x 同次幂的系数, 得联立方程

$$\begin{cases} 5a = 1 \\ 2a + 5b = 3 \\ 4a + b + 5c = 2 \end{cases},$$

解之, 得 $a = \frac{1}{5}, b = \frac{13}{25}, c = \frac{17}{125}.$

由此得原方程的一个特解为 $y^* = \frac{1}{5}x^2 + \frac{13}{25}x + \frac{17}{125}.$

例 4.4.9 求方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解.

解 方程相应的齐次微分方程为 $y'' - 3y' + 2y = 0$, 其特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

特征根为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 2$.

由于 $\alpha = 1$ 是特征方程的单根, 故设原方程的一个特解为

$$y^* = x(ax + b)e^x,$$

将其代入原方程, 整理得

$$-2ax + 2a - b = x.$$

于是有 $-2a = 1, 2a - b = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{2}, b = -1$, 所以

$$y^* = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x,$$

从而所求通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x.$$

例 4.4.10 求解微分方程 $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x$.

解 这是一个三阶常系数非齐次线性微分方程, 其对应的齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$, 解出特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i$.

原方程非齐次项为 e^x , $\alpha = 1$ 为特征方程的单根, 故设特解为

$$y^* = Ax e^x,$$

从而

$$y^{*'} = A(x+1)e^x, \quad y^{*''} = A(x+2)e^x, \quad y^{*'''} = A(x+3)e^x,$$

代入原方程, 可解得 $A = 1$, 于是得原方程的通解为

$$y = c_1 e^x + e^x (c_2 \cos x + c_3 \sin x) + x e^x.$$

第二种形式: $f(x) = e^{\alpha x} [A_l(x) \cos \beta x + B_n(x) \sin \beta x]$

其中, α, β 为常数, $A_l(x)$ 和 $B_n(x)$ 分别是 l 次和 n 次多项式. 此时方程 $y'' + py' + qy = e^{\alpha x} [A_l(x) \cos \beta x + B_n(x) \sin \beta x]$ 有如下形式的特解

$$y^* = x^k e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x],$$

其中, k 是 $\alpha + i\beta$ 作为特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根的重数, 即当 $\alpha + i\beta$ 是特征根时, 取 $k = 1$. 当 $\alpha + i\beta$ 不是特征根时, 取 $k = 0$. $m = \max\{l, n\}$, $P_m(x)$ 和 $Q_m(x)$ 分别是 x 的 m 次多项式, 其系数待定.

特解 y^* 形式的导出过程, 需要较多的复变函数的知识, 这里从略.

上面的结果可以推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程, 其特解形式仍是

$$y^* = x^k e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x],$$

但要注意 k 是特征方程的根 $\alpha + i\beta$ 的重数.

例 4.4.11 方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x (x \cos x + 2 \sin x)$ 具有什么形式的特解?

解 因特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ 的特征根为

$$\lambda = 1 \pm i,$$

$\alpha = 1, \beta = 1, \alpha + i\beta = 1 + i$ 是 1 重特征根, 故 $k = 1$; $A_l(x) = x, l = 1, B_n(x) = 2, n = 0$, $m = \max\{l, n\} = 1$, 故设 $P_m(x) = a_0 x + a_1, Q_m(x) = b_0 x + b_1$. 于是, 特解形式为

$$y^* = x e^x [(a_0 x + a_1) \cos x + (b_0 x + b_1) \sin x].$$

例 4.4.12 求微分方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的一个特解.

解 因特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$ 的特征根为

$$\lambda = \pm i,$$

而 $\alpha = 0, \beta = 2, \alpha + i\beta = 2i$ 不是特征根, 故 $k = 0$;

又 $A_l(x) = x, B_n(x) = 0; m = \max\{l, n\} = 1$,

故特解可设为

$$y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x,$$

代入原方程得

$$(-3ax - 3b + 4c) \cos 2x - (3cx + 3d + 4a) \sin 2x = x \cos 2x.$$

先比较 $\cos 2x, \sin 2x$ 同类项系数, 得

$$\begin{cases} -3ax - 3b + 4c = x \\ 3cx + 3d + 4a = 0 \end{cases},$$

再比较 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d + 4a = 0 \end{cases},$$

解得: $a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = 0, d = \frac{4}{9}$. 于是求得一个特解为

$$y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$$

例 4.4.13 求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

解 方程右端 $f(x) = x + \cos x$ 是由两项组成的. 根据 4.4.1 节定理 4.7 的叠加原理, 可分别求出方程

$$y'' + y = x \text{ 和 } y'' + y = \cos x$$

相应的特解 y_1^* 与 y_2^* .

因特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$ 的特征根为 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, 故原方程对应的齐次微分方程的通解为

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

设方程 $y'' + y = x$ 的特解为 $y_1^* = Ax + B$, 代入方程可解得 $B = 0, A = 1$. 从而 $y_1^* = x$.

设方程 $y'' + y = \cos x$ 的特解为 $y_2^* = Ex \cos x + Dx \sin x$, 将其代入方程, 可得 $E = 0, D = \frac{1}{2}$. 因而 $y_2^* = \frac{1}{2}x \sin x$. 于是原方程的一个特解为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = x + \frac{1}{2}x \sin x,$$

故所求方程的通解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

4.4.4 某些变系数线性微分方程的解法

变系数线性微分方程在应用中是经常遇到的, 可惜的是没有一般的解法. 这里只能介绍几类特殊的变系数线性微分方程的解法.

1. 欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

的微分方程称为**欧拉方程**, 其中, a_1, a_2, \dots, a_n 是常数. 它的特点是, y 的 k 阶导数 ($k = 0, 1, \dots, n$; 规定 $y^{(0)} = y$) 的系数是 x 的 k 次方乘以常数.

从形式上看, 欧拉方程很像 n 阶常系数线性微分方程. 由此猜想能否找到一个变换, 使方程仍保持线性, 且将变系数化为常系数. 作变量代换

$$x = e^t \quad \text{或} \quad t = \ln x^{①}$$

就可达到此目的.事实上

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right), \\ &\vdots\end{aligned}$$

若引用微分算子符号 $D = \frac{d}{dt}$, 则上述结果可简记为

$$xy' = Dy,$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y,$$

$$x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,$$

\vdots

一般地

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y,$$

将上述结果代入原方程, 就可以得到关于 $y(t)$ 的常系数线性微分方程, 进而求解.

例 4.4.11 求解方程 $x^2 y'' + xy' - y = x^2$.

解 这是欧拉方程. 令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 并利用上面引入的微分算子符号, 可直接将变换后的方程写成

$$D(D-1)y + Dy - y = e^{2t},$$

即

$$D^2 y - y = e^{2t}$$

或

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = e^{2t}.$$

这是关于 $y(t)$ 的二阶常系数非齐次线性微分方程, 求得通解为

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t},$$

再将 t 换成 $\ln x$, 即得

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^2.$$

例 4.4.15 求解方程 $t^3 x''' - 3t^2 x'' + 6tx' - 6x = 0$.

解 这是欧拉方程. 令

$$t = e^\tau \quad \text{或} \quad \tau = \ln t,$$

① 这里设 $x > 0$. 当 $x < 0$ 时, 取 $x = -e^t$, 以后为确定起见, 假定 $x > 0$.

则原方程可写成

$$D(D-1)(D-2)x - 3D(D-1)x + 6Dx - 6x = 0,$$

即

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)x = 0$$

或

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0.$$

这是关于 $x(\tau)$ 的三阶常系数齐次线性微分方程, 容易求出通解为

$$x = c_1 e^\tau + c_2 e^{2\tau} + c_3 e^{3\tau},$$

把 τ 换成 $\ln t$, 得

$$x = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3.$$

2. 降阶法

考虑 n 阶变系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) y = 0,$$

其中, $a_i(x) (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 当 $n \geq 2$ 时, 变系数微分方程一般不能用初等积分法求解, 而且阶数越高越困难. 我们联想下一元 n 次代数方程, 如果知道它的 k 个根 ($k < n$), 则可提出 k 个因式, 使 n 次方程降低 k 次, 化为 $n-k$ 次方程. 微分方程与代数方程, 甚至其他方程, 有很多基本思想方法是一脉相通的. 如果能知道该 n 阶方程的 k 个线性无关解, 则可选择一系列同类型的变换, 使方程降低 k 阶, 并且新得到的 $n-k$ 阶方程仍是齐次线性的, 这种方法称为降阶法. 对于二阶微分方程, 如果知道它的一个解 (猜出来也可), 就可将其化为一阶线性微分方程, 从而能求出通解. 下面以二阶微分方程为例说明这种方法.

设有二阶线性微分方程

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

其中, $P_1(x), P_2(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数. 设 $y_1(x)$ 是方程的一个不恒为零的解, 为寻找与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个解, 作变量代换

$$y = y_1(x)z,$$

求导数得

$$\begin{aligned} y' &= y_1' z + y_1 z', \\ y'' &= y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''. \end{aligned}$$

代入方程, 整理得

$$y_1 z'' + [2y_1' + P_1(x)y_1]z' + [y_1'' + P_1(x)y_1' + P_2(x)y_1]z = 0.$$

注意到 $y_1(x)$ 是方程的解, 故上式化简为

$$y_1 z'' + [2y_1' + P_1(x)y_1]z' = 0.$$

令 $z' = u$, 则上式变为

$$u' + \frac{2y_1' + P_1(x)y_1}{y_1} u = 0.$$

这是一个一阶可分离变量方程, 求出其通解

$$u = c_1 e^{-\int \frac{2y'_1 + P_1(x)y_1}{y_1^2} dx} = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x) dx},$$

再积分,得

$$z = c_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P_1(x) dx} dx + c_2.$$

最后得到方程的通解

$$y = y_1(x) \left[c_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P_1(x) dx} dx + c_2 \right],$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

例 4.4.16 容易验证 $y_1(x) = e^x$ 是齐次线性微分方程

$$(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$$

的一个解,求此方程的通解.

解 令 $y = e^x z$, 则

$$y' = e^x z + e^x z', \quad y'' = e^x z + 2e^x z' + e^x z'',$$

代入原方程,并整理,得

$$(2x-1)z'' + (2x-3)z' = 0.$$

令 $z' = u$, 则上式变为

$$(2x-1)u' + (2x-3)u = 0,$$

这是一阶可分离变量方程,易知其通解为

$$u = c(2x-1)e^{-x}.$$

再积分,得

$$z = \int c(2x-1)e^{-x} dx = c_1[(2x-1)e^{-x} + 2e^{-x}] + c_2 \quad (c_1 = -c),$$

所以原方程通解为

$$y = c_1(2x+1) + c_2 e^x,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

习题 4-4

(A)

1. 验证 $y_1 = x-1, y_2 = x^2 - x + 1$ 是方程

$$(2x-x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0$$

的两个线性无关解,并写出方程的通解.

2. 若二阶非齐次线性微分方程的两个解为 $e^{-x}, x^2 + e^{-x}$, 而对应的齐次微分方程的一个解为 x , 试写出该非齐次线性微分方程的通解.

3. 试验证 $y_1(x) = \ln(x+1) + 1, y_2(x) = \ln(x+1)$ 都是非线性微分方程 $y'' = -y'^2$ 的解, 但 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ 却不是它的解.

4. 求解下列常系数线性微分方程:

$$(1) y'' - 4y' = 0;$$

$$(2) y'' + y' - 2y = 0;$$

$$(3) y''' - 3ay'' + 3a^2 y' - a^3 y = 0;$$

$$(4) y'' + 2y' + 10y = 0;$$

(5) $y'' + y' + y = 0$;

(7) $y'' - a^2 y = x + 1$;

(9) $y'' + 2y' + y = xe^x$;

(11) $y''' - y = e^x$;

(13) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$;

(15) $y'' + y = \sin x - \cos 2x$;

(6) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;

(8) $y'' - 5y' + 4y = x^2 - 2x + 1$;

(10) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;

(12) $y'' + 2ay' + a^2 y = e^x$;

(14) $y'' - 2y' + 3y = e^{-t} \cos t$;

(16) $y'' + 9y = x \sin 3x$.

5. 求下列初值问题的解:

(1) $y'' + 9y = 6e^{3x}, y(0) = y'(0) = 0$;

(2) $y^{(4)} + y = 2e^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$.

6. 求解下列欧拉方程:

(1) $x^2 y'' + xy' - y = 0$;

(2) $x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x$;

(3) $t^3 x''' - t^2 x'' + 2tx' - 2x = t^3 + 3t$.

(B)

1. 设 $y_1(x) \neq 0$ 是二阶齐次方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

的解, 其中 $a_1(x)$ 与 $a_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 试证: 该方程的通解可表为

$$y = y_1 \left[c_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(s) ds \right) dx + c_2 \right],$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, $x_0, x \in [a, b]$.

2. 已知 $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$ 有解 $y = x$, 试求它的通解.

3. 已知 $y = e^x$ 是方程 $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ 的一个特解, 求方程的通解.

4. 方程 $t^3 x''' - 3t^2 x'' + 7tx' - 8x = 0$ 的哪一条积分曲线在点 $(1, 0)$ 处有水平切线, 且 $(1, 0)$ 点为曲线拐点?

5. 已知 $\tilde{y}_1 = -e^{x^2}, \tilde{y}_2 = e^{x^2}(e^x - 1)$ 是方程

$$y'' - 4xy' - (3 - 4x^2)y = e^{x^2}$$

的两个特解, 试求此方程的通解.

4.5 线性微分方程组

4.5.1 线性微分方程组通解的结构

考查形如

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nm}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (4.5.1)$$

的一阶线性微分方程组,其中已知函数 $a_{ij}(x) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 和 $f_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$ 是连续函数.

其初始条件为

$$y_i(x_0) = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

方程组(4.5.1)的解是如下一组函数

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.5.2)$$

为了方便,引入向量函数及函数矩阵的记号.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nm}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

为了下面研究的需要,我们给出矩阵函数 $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))_{n \times m} (x \in [a, b])$ 连续、可微、可积的概念及其运算.

如果 $\mathbf{A}(x)$ 的每个元素 $a_{ij}(x) (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ 均在区间 $[a, b]$ 上连续,则称矩阵函数 $\mathbf{A}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

如果 $\mathbf{A}(x)$ 的每个元素 $a_{ij}(x)$ 均在区间 $[a, b]$ 上可导、可积,则称矩阵函数 $\mathbf{A}(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导、可积,且定义

$$\frac{d\mathbf{A}(x)}{dx} = \left(\frac{da_{ij}(x)}{dx} \right)_{n \times m}, \quad x \in [a, b],$$

$$\int_a^b \mathbf{A}(x) dx = \left(\int_a^b a_{ij}(x) dx \right)_{n \times m}.$$

例如,若

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2 \\ 1 & \sin x \end{pmatrix},$$

则

$$\frac{d\mathbf{A}(x)}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & \cos x \end{pmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{A}(x) dx = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 - \cos 1 \end{pmatrix}.$$

特别地,当 $m = 1$ 时,矩阵函数则为向量函数.于是方程组(1)可写为

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x). \quad (4.5.3)$$

若 $\mathbf{f}(x) \not\equiv \mathbf{0}$,则称方程组(4.5.3)为非齐次线性方程组;若 $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$,则称方程组

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \quad (4.5.4)$$

为齐次线性微分方程组.

同高阶线性方程一样,作为研究基础,我们也是不加证明地给出方程组(4.5.3)解的存在唯一性定理.

定理 4.9 若函数矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 及向量函数 $\mathbf{f}(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,则对任一 $x_0 \in [a, b]$ 及任意的常向量 \mathbf{y}^0 ,方程组(3)存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(x)$,定义在整个区间 $[a, b]$,且满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \mathbf{y}^0$.

从上面看到,将方程组表示为矩阵和向量形式后,结论的表述简洁;而且还会看到,线

性方程组与单个线性方程的基本理论的共性. 因而可以用类似于研究高阶线性方程的方法来讨论线性方程组的通解问题.

设齐次线性微分方程组(4.5.4)有如下 n 个解

$$\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x), \quad (4.5.5)$$

这 n 个解能否构成(4.5.4)的通解呢? 同高阶线性方程一样, 先给出几个与 § 4.4.1 类似的基本概念.

定义 4.2 设 $\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的一组 n 维向量函数, 如果存在一组不全为零的常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使

$$k_1 \mathbf{y}_1(x) + k_2 \mathbf{y}_2(x) + \dots + k_n \mathbf{y}_n(x) \equiv \mathbf{0}, \quad x \in [a, b],$$

则称 $\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是**线性相关**的; 否则称此向量函数组在 $[a, b]$ 上是**线性无关**的.

定义 4.3 设有 n 个定义在区间 $[a, b]$ 上的 n 维向量函数 $\mathbf{y}_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$, 依次以其分量 $y_{ij}(x) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为列所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

称为这个向量函数组的 **Wronski 行列式**, 记为 $W[\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)]$ 或 $W(x)$.

与齐次线性方程的情形类似, 齐次线性微分方程组(4.5.4)的任一解组(4.5.5)在 $[a, b]$ 上是线性无关的充要条件是存在一点 $x_0 \in [a, b]$, 使得这 n 个解的 Wronski 行列式在 x_0 处的值 $W(x_0) \neq 0$.

由方程组(4.5.4)的 n 个线性无关解构成的解组称为(4.5.4)的一个**基本解组**. 以 n 个解的分量为列所构成的矩阵称为**解矩阵**, 记为

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & \cdots & y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{n2}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

由基本解组构成的解矩阵称为方程组(4.5.4)的**基解矩阵**.

有了上述基础知识, 可得出下面的通解结构定理.

定理 4.10(齐次线性微分方程组通解结构) 设 $\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ 是齐次线性微分方程组(4.5.4)的基本解组, 则方程组(4.5.4)的通解为

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{y}_1(x) + c_2 \mathbf{y}_2(x) + \cdots + c_n \mathbf{y}_n(x),$$

其中, c_1, c_2, \dots, c_n 为任意常数, 且通解包含了方程组(4.5.4)的所有解.

定理 4.11(非齐次线性微分方程组通解结构) 方程组(4.5.3)的通解等于它的任一特解 $\mathbf{y}^*(x)$ 与对应的齐次线性微分方程组的通解之和, 即

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{y}_1(x) + c_2 \mathbf{y}_2(x) + \cdots + c_n \mathbf{y}_n(x) + \mathbf{y}^*(x),$$

其中, c_1, c_2, \dots, c_n 为任意常数, 且通解包含了方程组(4.5.3)的所有解.

定理 4.10 和定理 4.11 的证明与高阶方程的情形类似, 读者可自行完成. 若使用基解

矩阵,则方程组(4.5.4)的通解可写为

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}.$$

方程组(4.5.3)的通解可写为

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c} + \bar{\mathbf{y}}(x),$$

其中,常数向量 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$.

可以证明齐次线性微分方程组(4.5.4)的解的集合构成一个 n 维线性空间,此结论的证明留作习题,基本解组就是解空间的一组基.

4.5.2 常系数齐次线性微分方程组的解法

我们采用向量和矩阵记号,则常系数非齐次线性微分方程组的一般形式为

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \quad (4.5.6)$$

其中 \mathbf{A} 是 $n \times n$ 阶常数矩阵, $\mathbf{f}(x)$ 为区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的 n 维连续向量函数, \mathbf{y} 是未知的 n 维向量函数. 当 $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$ 时,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (4.5.7)$$

称为非齐次方程组(4.5.6)对应的齐次方程组.

由于采用了向量与矩阵的记号,方程组与单个方程在形式上是类似的;特别在解法思路也是类似的,但本质上是不同的. 因此,在学习方程组的解法时,既要看到它与单个方程的类似之处,又要掌握它与单个方程的不同点. 下面先讨论齐次方程组(4.5.7)的解法,在此基础上,再讨论非齐次方程组(4.5.6)的解法.

由定理 4.8 知,求方程组(4.5.7)的通解归结为求它的基本解组. 与常系数齐次线性方程类似,我们仍采用 Euler 待定指数法,猜想方程组(4.5.7)有形如

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}e^{\lambda x}$$

的解,其中 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 为常数向量, $e^{\lambda x}$ 是数值函数,数 λ 和向量 \mathbf{a} 均为待定的. 将 $\mathbf{y} = \mathbf{a}e^{\lambda x}$ 代入方程组(7),得

$$\mathbf{a} \lambda e^{\lambda x} = \mathbf{A} \mathbf{a} e^{\lambda x}.$$

在上式中消去 $e^{\lambda x}$, 整理得

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (4.5.8)$$

其中, \mathbf{E} 是 $n \times n$ 阶单位阵. 式(4.5.8)是关于 a_1, a_2, \dots, a_n 的 n 元齐次线性代数方程组,它有非零解 \mathbf{a} 的充要条件是系数行列式为零,即 λ 满足如下的代数方程

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0. \quad (4.5.9)$$

称(4.5.9)为矩阵 \mathbf{A} 的特征方程,其根 λ 称为特征根,或称为矩阵 \mathbf{A} 的特征值. 与 λ 对应的式(4.5.8)的非零解 \mathbf{a} 称为特征向量.

欲求方程组(4.5.7)的基本解组,也就是求 n 个线性无关的解向量,使它们构成解空间的一组基底,为此,给出下面的定理:

定理 4.12 如果矩阵 \mathbf{A} 有 n 个线性无关的特征向量 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$, 它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (不必各不相同), 则矩阵

$$\Phi(x) = (\mathbf{a}^1 e^{\lambda_1 x}, \mathbf{a}^2 e^{\lambda_2 x}, \dots, \mathbf{a}^n e^{\lambda_n x})$$

是方程组(4.5.7)的一个基解矩阵.

证明 由于每一个向量函数 $\mathbf{a}^i e^{\lambda_i x}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是方程组(4.5.7)的一个解, 所以矩阵 $\Phi(x)$ 是(4.5.7)的一个解矩阵. 它们所构成的 Wronski 行列式在某点 x_0 (如取 $x_0 = 0$) 的值为

$$W(0) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

因 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$ 线性无关, 故 $W(0) \neq 0$, 因此 $\Phi(x)$ 是方程组(4.5.7)的一个基解矩阵.

现在的问题是如何得到方程组(4.5.7)的 n 个线性无关的解向量. 显然这一点与特征值 λ 有关, 因此下面根据特征值的几种情况分别给出基本解组.

情形 1 矩阵 \mathbf{A} 有 n 个互异的特征值

设互异的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 它们所对应的特征向量分别为 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$, 根据线性代数的定理: 任何 n 个不同特征值所对应的 n 个特征向量都是线性无关的, 再由定理 4.12 可知, 此时方程组(4.5.7)的一个基解矩阵为

$$\Phi(x) = (\mathbf{a}^1 e^{\lambda_1 x}, \mathbf{a}^2 e^{\lambda_2 x}, \dots, \mathbf{a}^n e^{\lambda_n x}).$$

例 4.5.1 求解方程组

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} y,$$

其中, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$.

解 特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$.

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 它对应的特征向量 $\mathbf{a}^1 = (a_1^1, a_2^1)^T$ 满足 $2a_1^1 + 2a_2^1 = 0$; 取 $a_1^1 = 1$, 则 $a_2^1 = -1$, 所以特征向量 $\mathbf{a}^1 = (1, -1)^T$.

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 它对应的特征向量 $\mathbf{a}^2 = (a_1^2, a_2^2)^T$ 满足 $-4a_1^2 + 2a_2^2 = 0$; 取 $a_1^2 = 1$, 则 $a_2^2 = 2$, 所以特征向量 $\mathbf{a}^2 = (1, 2)^T$.

由此可知, 方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5x}.$$

或写为

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}, \\ y_2 = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{5x}, \end{cases}$$

其中, c_1, c_2 为任意常数.

定理 4.12 对于矩阵 \mathbf{A} 有互异复特征值时也是成立的. 不过这时可能会出现复向量值的解. 应用上常常希望避免复运算, 这就需要用实解来代替复解. 因为矩阵 \mathbf{A} 是实矩阵, 所

以若有复根必共轭成对出现. 不妨设有一对复特征值 $\alpha \pm i\beta$, 对应的复的向量解为 \mathbf{y}_1^* 和 \mathbf{y}_2^* . 与高阶常系数齐次线性方程有复根的情形类似, 这时

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{y}_1^* + \mathbf{y}_2^*}{2} \quad \text{和} \quad \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{y}_1^* - \mathbf{y}_2^*}{2i}$$

也是齐次方程组(4.5.7)的解, 但它们都是实向量解, 同常系数齐次线性方程一样, 可以证明, 用后者代替前者并不改变 Wronski 行列式的值是否为零的特性, 因而所得的矩阵仍是方程组(4.5.7)的基解矩阵.

例 4.5.2 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

解 特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -5 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0,$$

特征值为 $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$. 求出对应的特征向量分别为 $\mathbf{a}^1 = (5, 1 - 3i)^T, \mathbf{a}^2 = (5, 1 + 3i)^T$. 对应的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1^* &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} e^{3ix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cos 3x \\ \cos 3x + 3 \sin 3x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ \sin 3x - 3 \cos 3x \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_2^* &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} e^{-3ix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cos 3x \\ \cos 3x + 3 \sin 3x \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ \sin 3x - 3 \cos 3x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

为了求实向量解, 取基本解组:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1^* + \mathbf{y}_2^*) = \begin{pmatrix} 5 \cos 3x \\ \cos 3x + 3 \sin 3x \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_2 &= \frac{1}{2i}(\mathbf{y}_1^* - \mathbf{y}_2^*) = \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ \sin 3x - 3 \cos 3x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是通解为

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 5 \cos 3x \\ \cos 3x + 3 \sin 3x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ \sin 3x - 3 \cos 3x \end{pmatrix}.$$

代入初始条件得

$$\begin{cases} 5c_1 = 1, \\ c_1 - 3c_2 = 0. \end{cases}$$

解得 $c_1 = \frac{1}{5}, c_2 = \frac{1}{15}$. 故所求的特解为

$$\mathbf{y} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \cos 3x \\ \cos 3x + 3 \sin 3x \end{pmatrix} + \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ \sin 3x - 3 \cos 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \\ \frac{2}{3} \sin 3x \end{pmatrix}.$$

情形 2 矩阵 \mathbf{A} 有重特征值

为叙述简单,不妨设矩阵 \mathbf{A} 有一个 k 重特征值 λ , 其余 $n-k$ 个特征值均为单重的. 下面分两种情况讨论.

1° 若对应于 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^k$, 则由线性代数知识可知, 这 k 个特征向量与其余 $n-k$ 个特征值所对应的特征向量 $\mathbf{a}^{k+1}, \mathbf{a}^{k+2}, \dots, \mathbf{a}^n$ 的全体构成矩阵 \mathbf{A} 的 n 个线性无关的特征向量. 再由定理 4.12 可知, 此时齐次方程组 (4.5.7) 的一个基解矩阵为

$$\Phi(x) = (\mathbf{a}^1 e^{\lambda x}, \mathbf{a}^2 e^{\lambda x}, \dots, \mathbf{a}^k e^{\lambda x}, \mathbf{a}^{k+1} e^{\lambda_{k+1} x}, \dots, \mathbf{a}^n e^{\lambda_n x}). \quad (4.5.10)$$

例 4.5.3 求解方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

解 特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0,$$

特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ (二重根).

对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为 $\mathbf{a}^1 = (a_1, a_2, a_3)^T = (1, 1, 1)^T$.

对应于 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量满足方程

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

由于矩阵 $\mathbf{A} - (-1)\mathbf{E}$ 的秩为 1, 故得到两个线性无关的特征向量

$$\mathbf{a}^2 = (1, -1, 0)^T, \quad \mathbf{a}^3 = (1, 0, -1)^T.$$

从而由式 (4.5.10) 可得此方程组的通解为

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= c_1 \mathbf{a}^1 e^{2x} + c_2 \mathbf{a}^2 e^{-x} + c_3 \mathbf{a}^3 e^{-x} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}, \end{aligned}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

2° 若对应于 λ 的线性无关特征向量的个数 n_k 小于 k , 则仍可得到对应于 λ 的 k 个线性无关解. 这种情形, 解法很多, 其中特定系数法是一种较为常用的易于掌握的方法. 由于证明要用到较多的线性代数知识, 故略去, 这里只写出它的解题步骤.

步骤 1 对应于 λ , 设有形如

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x} \quad (4.5.11)$$

的解,其中, $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ 是系数为待定的 x 的 $k-1$ 次多项式.

步骤 2 将式(4.5.11)代入方程组(4.5.7),比较等式两边 x 的同次幂的系数,得到关于 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ 的系数方程组.

步骤 3 求解上述线性代数方程组,得到这些多项式的系数,从而确定出这些多项式.

需要注意的是,关于 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ 的系数方程组线性无关解的个数有 k 个,于是得到方程组(4.5.7)形如(4.5.11)的 k 个线性无关解.

步骤 4 这 k 个解与其他 $n-k$ 个特征值对应的线性无关解的全体恰好构成方程组(4.5.7)的一个基本解组.

为了叙述简明,下面仅讨论 $k=2$ 的情形.

例 4.5.4 求方程组 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$ 的通解.

解 特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

特征值为 $\lambda = 1$, 二重根,故 $k=2$.

步骤 1 设 $\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ b_1 + b_2 x \end{pmatrix} e^x$.

步骤 2 将上述解的表达式代入方程组得

$$\begin{aligned} (4b_2 - 2a_2)x + (2a_1 - a_2 - 4b_1) &= 0, \\ (a_2 - 2b_2)x + (a_1 - 2b_1 - b_2) &= 0. \end{aligned}$$

比较 x 的同次幂的系数,得到关于 a_1, a_2, b_1, b_2 的四元线性代数方程组

$$\begin{cases} 4b_2 - 2a_2 = 0 \\ a_2 - 2b_2 = 0 \\ 2a_1 - a_2 - 4b_1 = 0 \\ a_1 - 2b_1 - b_2 = 0 \end{cases}.$$

步骤 3 求解此线性代数方程组. 其系数阵的秩为 2,故有两个线性无关解

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

取 $a_1 = 2, a_2 = 0, b_1 = 1, b_2 = 0$, 得微分方程组的一个解为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$; 取 $a_1 = 1, a_2 = 2, b_1 =$

$0, b_2 = 1$, 得微分方程组另一线性无关解为 $\begin{pmatrix} 1+2x \\ x \end{pmatrix} e^x$.

步骤 4 写出通解为

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1+2x \\ x \end{pmatrix} e^x,$$

其中, c_1, c_2 为任意常数.

4.5.3 常系数非齐次线性微分方程组的解法

由定理 4.11 可知, 求解常系数非齐次线性方程组, 只要求出对应的齐次方程组 (4.5.7) 的一个基本解组和非齐次方程组 (4.5.6) 的一个特解即可. 而前面已解决求齐次方程组 (4.5.7) 的基本解组问题, 现在只需研究如何求出非齐次方程组 (4.5.6) 的一个特解即可. 类似于求解一阶非齐次线性方程的方法, 仍采用常数变易法.

设 $\mathbf{Y}(x)$ 是齐次方程组 (4.5.7) 的基解矩阵, 则方程组 (4.5.7) 的通解可表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x)\mathbf{C}.$$

其中 \mathbf{C} 为任意 n 维常数向量. 现将向量 \mathbf{C} 变易为未知向量函数 $\mathbf{u}(x)$, 设想方程组 (4.5.6) 的特解为

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(x)\mathbf{u}(x).$$

将其代入方程组 (4.5.6), 得

$$\mathbf{Y}'(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{u}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{f}(x).$$

因 $\mathbf{Y}(x)$ 是方程组 (4.5.7) 的基解矩阵, 所以 $\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(x)$, 于是得

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{f}(x),$$

积分得

$$\mathbf{u}(x) = \int \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{f}(x)dx + \mathbf{C}.$$

上式也可用定积分表示, 这时假定 $\mathbf{u}(x_0) = \mathbf{0}$, 则上式变为

$$\mathbf{u}(x) = \int_{x_0}^x \mathbf{Y}^{-1}(\xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi, \quad x_0 \in [a, b].$$

于是非齐次方程组 (4.5.6) 的通解为

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{C} + \mathbf{Y}(x) \int_{x_0}^x \mathbf{Y}^{-1}(\xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi.$$

例 4.5.5 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

解 特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

的特征值为 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. 对应的特征向量分别为

$$\mathbf{a}^1 = (1, i)^T, \quad \mathbf{a}^2 = (1, -i)^T.$$

复的基解矩阵为

$$\mathbf{Y}^*(x) = \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix},$$

化为实的基解矩阵为

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix},$$

其逆阵

$$\mathbf{Y}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

特解为

$$\bar{\mathbf{y}}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \int_0^x \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} 1 - \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

所以通解为

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos x \\ \sin x \end{pmatrix},$$

其中 \bar{c}_1, \bar{c}_2 为任意常数. 若令 $c_1 = \bar{c}_1 - 1, c_2 = \bar{c}_2$, 则上式可写成

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1 \\ y_2 = -c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{cases}.$$

代入初始条件得

$$\begin{cases} c_1 + 1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases},$$

解得 $c_1 = -1, c_2 = 1$. 所以初值问题的解为

$$\begin{cases} y_1 = -\cos x + \sin x + 1 \\ y_2 = \sin x + \cos x \end{cases}.$$

本题也容易用待定系数法求出非齐次方程组的一个特解, 读者可作为练习自行求之.

习题 4-5

(A)

1. 求解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x - y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - 8x + y = 0 \\ x(0) = 1, y(0) = 4 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases};$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}.$$

2. 求解方程组: $y' = Ay + Q(x)$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 5x \\ 8e^x \end{pmatrix}.$$

3. 求解初值问题: $y' = Ay + Q(x)$, $y(0) = y_0$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ 4e^{-x} \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. 求解方程组: $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} x.$

(B)

1. 求解方程组: $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}.$

2. 设有两种物质, 其数量分别为 $x(t), y(t)$, 此两种物质的数量因相互影响而减少, 其减少的速度与另一种物质的数量成正比, 设比例系数分别为正常数 k_1 和 k_2 , 且当 $t = 0$ 时, $x = x_0, y = y_0$. 试求这两种物质数量的变化规律, 并分析当初始条件分别满足何种关系时, 第一种物质最终将消失? 第二种物质最终将消失? 这两种物质最终都将消失?

3. 设有两种生物群体是互惠关系, 它们在时刻 t 的个数分别为 $x(t), y(t)$, 并已知 $x(t), y(t)$ 满足的方程组为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases},$$

当 $t = 0$ 时, $x = 1\,000, y = 2\,000$, 试求出 $x(t), y(t)$, 并画出它们的图形.

4. 挑流能量问题: 设水射出时的初速 v_0 为已知, v_0 和 x 轴所成之角为 θ . 据实验得知, 如果忽略空气阻力、风速和风向等影响, 则水质点在只受重力作用下, 其水平方向的运动是匀速直线运动, 铅直方向的运动是匀加速直线运动. 如将水抛出的时刻记为零, 并以 $x(t), y(t)$ 分别表示水质点在任何时刻 t 的水平位移和铅直位移, 则它们应满足什么样的初值问题? 并求出水质点的运动规律和运动轨道, 由此确定水抛射的水平距离 x_A 及入射角 β_A (图 4-15).

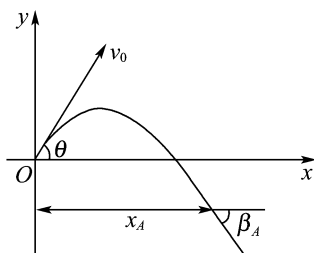


图 4-11

4.6 微分方程的数值解

不是每个微分方程都有解. 但是, 有些时候即使可以证明微分方程的解存在, 我们也可能写不出显式解或隐式解. 在很多情况下, 我们只能求得解的近似值. 如果解存在, 那么它表示笛卡儿平面上的一个点集合. 本章构造出微分方程的一些算法, 以得到精确解曲线上点坐标的近似值.

本章我们讨论的中心主要是一阶初值问题 $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$. 在 4.5 节中我们看到, 一阶方程的数值解法可以扩展到一阶方程组上, 因此我们也可以通过把高阶微分方程写成一阶微分方程组的形式, 来求解高阶微分方程的近似解. 本章最后给出了求解线性二阶边界值问题近似解的方法.

4.6.1 欧拉方法与误差分析

在 4.2 节中, 我们给出了球形如 $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 的一阶初值问题近似解的一个最简单的例子. 回顾欧拉方法最主要的部分是公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (4.6.1)$$

这里 f 是从微分方程 $y' = f(x, y)$ 中得到的. 由 (4.6.1) 式的递归方法可以得到解曲线的连续“切线”在 x_1, x_2, x_3, \dots 或 $x_n = x_0 + nh$ 处对应的 y 坐标 y_1, y_2, y_3, \dots, h 为常数, 也是 x_n 和 x_{n+1} 之间的步长. 可以用 y_1, y_2, y_3, \dots 来近似初值问题的解 $y(x)$ 在 x_1, x_2, x_3, \dots 处的值. 但是 (4.6.1) 式这种简化形式的近似值过于粗糙.

一个比较 如果用欧拉方法求初值问题 $y' = 2xy, y(1) = 1$ 的解在 $y(1.5)$ 处的近似值, 我们可以得到解析解 $y = e^{x^2-1}$ 以及类似于表 4-3 和表 4-4 中所给的数值.

表 4-3 欧拉方法, $h = 0.1$

x_n	y_n	真值	绝对误差	相对误差 / %
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.10	1.200 0	1.233 7	0.033 7	2.73
1.20	1.464 0	1.552 7	0.088 7	5.71
1.30	1.815 4	1.993 7	0.178 4	8.95
1.40	2.287 4	2.611 7	0.324 4	12.42
1.50	2.927 8	3.490 3	0.562 5	16.12

表 4-4 欧拉方法, $h = 0.05$

x_n	y_n	真值	绝对误差	相对误差 / %
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.05	1.100 0	1.107 9	0.007 9	0.72
1.10	1.215 5	1.233 7	0.018 2	1.47
1.15	1.349 2	1.380 6	0.031 4	2.27
1.20	1.504 4	1.552 7	0.048 3	3.11
1.25	1.684 9	1.755 1	0.070 2	4.00
1.30	1.895 5	1.993 7	0.098 2	4.93
1.35	2.141 9	2.276 2	0.134 3	5.90
1.40	2.431 1	2.611 7	0.180 6	6.92
1.45	2.771 4	3.011 7	0.240 3	7.98
1.50	3.173 3	3.490 3	0.317 1	9.08

在这种情况下,令步长 $h = 0.1, y(1.5)$ 近似值的相对误差大于 16% 是不可接受的. 把计算量加大一倍,可令步长 $h = 0.05$ 以提高精度.

数值方法的误差 在选择和使用数值方法解初值问题时,我们必须意识到各种可能的误差来源. 各种不断传递的误差会降低近似计算的精度,以致使近似计算显得毫无意义. 另一方面,基于数值方法的计算,没有必要要求非常高的精度,那样只会耗费资源,增加复杂度.

误差的一个来源是计算过程中产生的舍入误差. 这个误差的来源是因为任何计算器或计算机只能利用有限位数来存储数据. 这里只是为了说明这个情况,假定一个 10 进制的计算器只能存储 4 位数字,因此在计算器中 $\frac{1}{3}$ 表示为 0.333 3, $\frac{1}{9}$ 表示为 0.111 1. 若我

们用这个计算器计算当 $x = 0.333 4$ 时 $\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) / \left(x - \frac{1}{3}\right)$ 的值,则可以得到

$$\frac{(0.333\ 4)^2 - 0.111\ 1}{0.333\ 4 - 0.333\ 3} = \frac{0.111\ 2 - 0.111\ 1}{0.333\ 4 - 0.333\ 3} = 1.$$

然而,利用代数知识可以得到

$$\frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x - \frac{1}{3}} = \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x - \frac{1}{3}} = x + \frac{1}{3},$$

因此,当 $x = 0.333 4$ 时, $\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) / \left(x - \frac{1}{3}\right) \approx 0.333 4 + 0.333 3 = 0.666 7$. 这个例子说明舍入误差的影响是很大的,使用时必须要多加注意. 减少舍入误差影响的一种方法是使数值计算量减到最少. 另一种计算机技术是使用双精度十进制表示结果. 一般来说,舍入误差是不可预测并且是很难分析的,所以在接下来的误差分析中我们将忽略它. 我们将集

中分析用公式或四则运算求解近似值时所产生的误差.

欧拉方法的截断误差 在由(1)式所产生的序列值 y_1, y_2, y_3, \dots 中, 通常 y_1 的值和精确解在 x_1 处的值即 $y_1(x)$ 不一致, 因为四则运算只给出了解的线性近似. 这种误差称为**局部截断误差**、**公式误差**或**离散误差**. 每一步都会产生截断误差; 也就是说若假设 y_n 是精确值, 那么 y_{n+1} 将会包括局部截断误差.

为了推导欧拉方法局部误差的计算公式, 我们使用带余项的泰勒公式. 如果函数 $y(x)$ 有 $k+1$ 阶导数, 这些导数在一个包含 a 和 x 的开区间上是连续的, 那么

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + \dots + y^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

其中 c 是 a 和 x 之间的某个点. 令 $k=1, a=x_n, x=x_{n+1}=x_n+h$, 可以得到

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n) \frac{h}{1!} + y''(c) \frac{h^2}{2!}$$

或

$$y(x_{n+1}) = \underbrace{y_n + hf(x_n, y_n)}_{y_{n+1}} + y''(c) \frac{h^2}{2!}.$$

欧拉方法是上一个公式中去除最后一项的公式; 因此, y_{n+1} 的局部截断误差为

$$y''(c) \frac{h^2}{2!}, \quad \text{其中 } x_n < c < x_{n+1}.$$

c 的值通常是未知的(理论上讲是存在的), 所以准确的误差是不能计算出来的, 但是误差的绝对值的上界为

$$M \frac{h^2}{2!}, \quad \text{其中 } M = \max_{x_n < x < x_{n+1}} |y''(x)|.$$

在讨论由数值方法产生的误差时, 使用记号 $O(h^n)$ 是有帮助的. 为了定义这个概念, 令 $e(h)$ 表示依赖于 h 的数值误差. 如果存在常数 C 和一个正整数 n 使得 $|e(h)| \leq Ch^n$ 在 h 充分小时成立, 那么 $e(h)$ 称为是 h^n 阶的, 用符号 $O(h^n)$ 来表示. 因此欧拉方法的局部截断误差为 $O(h^2)$. 我们注意到, 一般来说如果数值方法中的 $e(h)$ 是 h^n 阶的, 并且当 h 取一半时, 新的误差近似于 $C\left(\frac{h}{2}\right)^n = \frac{Ch^n}{2^n}$; 也就是说误差通过因子 $\frac{1}{2^n}$ 减少了.

例 4.6.1(局部截断误差的误差界) 求用欧拉方法求解 $y' = 2xy, y(1) = 1$ 时产生的局部截断误差的误差界.

解 从解 $y = e^{x^2-1}$, 我们可以得到 $y'' = (2 + 4x^2)e^{x^2-1}$, 因此局部截断误差为

$$y''(c) \frac{h^2}{2} = (2 + 4c^2)e^{(c^2-1)} \frac{h^2}{2},$$

这里 c 是 x_n 和 x_n+h 之间的一个值. 特别地, $h=0.1$ 时, 我们可以用 1.1 代替 y_1 中的 c , 然后求得其局部截断误差的上界为:

$$(2 + 4 \times 1.1^2)e^{[(1.1)^2-1]} \frac{0.1^2}{2} = 0.0422.$$

从表 4-3 中我们可以看到, 第一次计算后的误差为 0.0337, 比上界值小.

类似地, 我们可以用 1.5 代替 c (这个 c 值给出了每步 $y''(c)$ 的最大值, 不过可能对前

几步来说有点过大),得到表 4-3 前五步中任何一步的局部截断误差. 计算后得到

$$(2 + 4 \times 1.5^2) e^{[(1.5)^2 - 1]} \frac{0.1^2}{2} = 0.192\,0 \tag{4.6.2}$$

作为每步局部截断误差的上界.

注意,若例 4.6.1 中的 h 取 0.05 时,误差界为 0.048 0,大约只有(2)的四分之一. 这和预测的一样,因为欧拉方法的局部截断误差为 $O(h^2)$.

在以上的分析中,我们假设在计算 y_{n+1} 时 y_n 的值是精确的,这并不是因为它包含了前一步的局部截断误差. y_{n+1} 中的总误差是前面步骤中的误差的积累值. 这个总的误差称为全局截断误差. 全局误差的完整分析超出了本书讨论的范围,但是可以证明欧拉方法的全局误差是 $O(h)$.

我们期望对于欧拉方法来说,如果步长减半,则误差也近似减半. 这个结论在表 4-3 和表 4-4 中给出,在这两个表中,步长为 $h = 0.1$ 时,在 $x = 1.50$ 处的误差是 0.562 5, $h = 0.05$ 时误差是 0.317 1,近似减半.

一般地,可以证明如果求微分方程数值解的方法有局部误差 $O(h^{a+1})$,那么全局误差为 $O(h^a)$.

本节余下来的部分以及下一节我们将学习一个比欧拉方法明显精确的方法.

改进的欧拉方法 用公式

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \tag{4.6.3}$$

定义的数值方法一般称为改进的欧拉方法,其中

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n). \tag{4.6.4}$$

为了用(4.6.3)式计算 y_{n+1} ($n = 0, 1, 2, \cdots$),我们必须在做每一步时先用欧拉方法(4.6.4)得到初始估计值 y_{n+1}^* . 例如,令(4.6.4)中的 $n = 0$,可以得到 $y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0)$,则利用(4.6.3)式可知 $y_1 = y_0 + h \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$,其中 $x_1 = x_0 + h$. 这些方程非常容易识别. 在图 4-12 中,观察到 $m_0 = f(x_0, y_0)$ 和 $m_1 = f(x_1, y_1^*)$ 分别是通过点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1^*) 的直线的斜率. 利用这些斜率,可以得到 $m_{\text{ave}} = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$,我们可以得到与之平行的虚线的斜率. 我们用通过 (x_0, y_0) 且斜率为 m_{ave} 的虚线来代换通过改进点 (x_1, y_1^*) 且斜率为 m_{ave} 的虚线,直到到达 x_1 . 从图像来看, y_1 和 y_1^* 是改进.

一般来说,改进的欧拉方法是**预测真值法**的一个特例. 由(4)给出的 y_{n+1}^* 的值可以预测 $y(x_n)$ 的值,但是公式(3)所定义的 y_{n+1} 的值修正了这个估计.

4.6.2 龙格 - 库塔法

也许解初值问题 $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 近似解的最流行的且最精确的一种数值方法是**四阶龙格 - 库塔法**. 恰如其名,有解不同阶的龙格 - 库塔法. 这些方法可以用带余项函数为 $y(x)$ 的泰勒级数的展开推得.

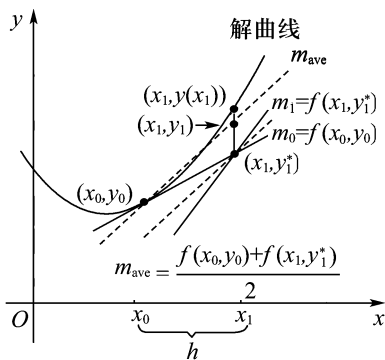


图 4-12

一阶龙格 - 库塔法 在上一节中, 我们看到, 如果函数 $y(x)$ 有 $k+1$ 阶导数, 这些导数在一个含有 a 和 x 的开区间上连续, 那么可以记

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + y''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

其中 c 是 a 和 x 之间的某个数. 如果用 x_n 代替 a , 用 $x_{n+1} = x_n + h$ 代替 x , 那么上述公式可以写为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(x_n) + \cdots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(c),$$

这里 c 是 x_n 和 x_{n+1} 之间的某个数. 在这种情况下, 当 $k=1$ 和余项 $\frac{h^2}{2} y''(c)$ 很小时, 我们可以得到一个很熟悉的公式

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n).$$

换言之, 基本欧拉方法也就是一阶龙格 - 库塔法.

二阶龙格 - 库塔法 现在考虑二阶龙格 - 库塔法. 这个方法需要确定常数 a, b, α 和 β , 因此这个公式为

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2, \quad (4.6.5)$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1), \end{aligned}$$

这和二阶泰勒多项式是一致的. 可以证明, 只要常数满足

$$a+b=1, b\alpha = \frac{1}{2}, b\beta = \frac{1}{2}, \quad (4.6.6)$$

则式(4.6.5)成立. 这是一个由含四个未知量的三个方程组成的方程组, 它有无穷多个解. 注意到当 $a=b=\frac{1}{2}, \alpha=\beta=1$ 时, 式(4.6.5)变为改进的欧拉公式. 因为这个公式和二阶泰勒多项式是一致的, 这个方法的局部截断误差是 $O(h^3)$, 全局截断误差为 $O(h^2)$.

注意到式(4.6.5)中的和式 $ak_1 + bk_2$ 是 k_1 和 k_2 的加权平均, 因为 $a+b=1$. k_1 和 k_2 是解曲线 $y(x)$ 在区间 x_n 到 x_{n+1} 上两个不同点处的斜率的近似值.

四阶龙格 - 库塔法 四阶龙格 - 库塔法需要下面公式中的常数

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4,$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2), \\ k_4 &= hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3), \end{aligned}$$

它和四阶泰勒多项式是一致的. 这些常数可以通过含有 13 个变量 11 个方程的方程组解出. 这些常数最常使用的值是从下面的公式中求出的:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3). \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

请读者仔细阅读公式(4.6.7); 注意到 k_2 依赖于 k_1 , k_3 依赖于 k_2 , k_4 依赖于 k_3 . 同时, k_2 和 k_3 是近似解在 x_n 和 x_{n+1} 之间中点处的斜率的近似值.

例 4.6.2(龙格-库塔法) 当 $h = 0.1$ 时, 用龙格-库塔法求解 $y(1.5)$ 的近似值, $y(1.5)$ 是 $y' = 2xy$, $y(1) = 1$ 的解.

解 出于举例的目的, 我们计算 $n = 0$ 时的情形. 由式(7) 可以求出

$$\begin{aligned} k_1 &= (0.1)f(x_0, y_0) = (0.1)(2x_0 y_0) = 0.2, \\ k_2 &= (0.1)f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.2)\right) \\ &= (0.1)2\left[x_0 + \frac{1}{2}(0.1)\right]\left[y_0 + \frac{1}{2}(0.2)\right] = 0.231, \\ k_3 &= (0.1)f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.231)\right) \\ &= (0.1)2\left[x_0 + \frac{1}{2}(0.1)\right]\left[y_0 + \frac{1}{2}(0.231)\right] = 0.234\ 255, \\ k_4 &= (0.1)f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.234\ 255) \\ &= (0.1)2(x_0 + 0.1)(y_0 + 0.234\ 255) = 0.271\ 536\ 1 \end{aligned}$$

同时, 因为

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1 + \frac{1}{6}[0.2 + 2(0.231) + 2(0.234\ 255) + 0.271\ 536\ 1] \\ &= 1.233\ 674\ 35. \end{aligned}$$

余下的计算结果在表 4-5 中给出, 其结果四舍五入到四位小数.

表 4-5 龙格 - 库塔法, $h = 0.1$

x_n	y_n	真值	绝对误差	相对误差 / %
1.00	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.00
1.10	1.233 7	1.233 7	0.000 0	0.00
1.20	1.552 7	1.552 7	0.000 0	0.00
1.30	1.993 7	1.993 7	0.000 0	0.00
1.40	2.611 6	2.611 7	0.000 1	0.00
1.50	3.490 2	3.490 4	0.000 1	0.00

仔细观察表 4-5,说明为什么四阶龙格 - 库塔法如此流行. 若四位小数的精确度足够满足我们的需要,那就没有必要用更小的步长了. 表 4-6 比较了用欧拉方法、改进的欧拉方法以及四阶龙格 - 库塔法解初值问题 $y' = 2xy, y(1) = 1$ 的结果.

表 4-6 $y' = 2xy, y(1) = 1$

几种方法的比较, $h = 0.1$					几种方法的比较, $h = 0.05$				
x_n	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格 - 库塔法	真值	x_n	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格 - 库塔法	真值
1.00	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.00	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
1.10	1.200 0	1.232 0	1.233 7	1.233 7	1.05	1.100 0	1.107 7	1.107 9	1.107 9
1.20	1.464 0	1.547 9	1.552 7	1.552 7	1.10	1.215 5	1.233 2	1.233 7	1.233 7
1.30	1.815 4	1.983 2	1.993 7	1.993 7	1.15	1.349 2	1.379 8	1.380 6	1.380 6
1.40	2.287 4	2.590 8	2.611 6	2.611 7	1.20	1.504 4	1.551 4	1.552 7	1.552 7
1.50	2.927 8	3.450 9	3.490 2	3.490 4	1.25	1.684 9	1.753 1	1.755 1	1.755 1
					1.30	1.895 5	1.990 9	1.993 7	1.993 7
					1.35	2.141 9	2.272 1	2.276 2	2.276 2
					1.40	2.431 1	2.606 0	2.611 7	2.611 7
					1.45	2.771 4	3.003 8	3.011 7	3.011 7
					1.50	3.173 3	3.479 5	3.490 3	3.490 4

龙格 - 库塔法的截断误差 因为式(7) 中的第一个方程和四阶泰勒多项式是一致的,所以该方法的局部截断误差为

$$y^{(5)}(c) \frac{h^5}{5!} \quad \text{或} \quad O(h^5),$$

全局截断误差为 $O(h^4)$. 现在很明显地可以看出为什么这个方法叫做四阶龙格 - 库塔法.

习题 4-6

在 1~4 题中构造一个表格,比较用欧拉方法、改进的欧拉方法以及龙格 - 库塔法计算 $y(x)$ 值. 计算保留四位小数. 依次令 $h = 0.1, h = 0.05$.

1. $y' = 2\ln xy, y(1) = 2; y(1.1), y(1.2), y(1.3), y(1.4), y(1.5).$
2. $y' = \sin x^2 + \cos y^2, y(0) = 0; y(0.1), y(0.2), y(0.3), y(0.4), y(0.5).$
3. $y' = \sqrt{x+y}, y(0.5) = 0.5; y(0.6), y(0.7), y(0.8), y(0.9), y(1.0).$
4. $y' = xy + y^2, y(1) = 1; y(1.1), y(1.2), y(1.3), y(1.4), y(1.5).$
5. 用欧拉方法求 $y(0.2)$ 的近似值,其中 $y(x)$ 是初值问题 $y'' - (2x+1)y = 1, y(0) = 3, y'(0) = 1$

的解. 先用单步法计算, 令 $h = 0.2$, 再用两步法计算, 令 $h = 0.1$.

习题参考答案与提示

习题 4-1(A)

1. (1) 非线性, 二阶; (2) 非线性, 一阶; (3) 非线性, 三阶; (4) 非线性, 一阶; (5) 线性, 二阶; (6) 线性, 一阶.

2. (1) 通解; (2) 特解; (3) 通解; (4) 特解.

3. (1) $y = x^2 + c$; (2) $y = x^2 + 3$; (3) $y = x^2 + 4$; (4) $y = x^2 + \frac{5}{3}$

4. (1) $y' = x^2$; (2) $yy' + 2x = 0$

(B)

1. $\frac{dp}{dT} = k \frac{p}{T^2}$, k 为比例系数.

2. $y = 0$ 及 $y = x + 1$.

习题 4-2(B)

1. (1) $\arcsin y = \arcsin x + c$;

(2) $\tan x \tan y = c$;

(3) $10^{-y} + 10^x = c$

(4) $(1 + x^2)(1 + y^2) = cx^2$

2. (1) $y = ce^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$;

(2) $y \sin x + 5e^{\cos x} = c$;

(3) $y = e^{-\sin x} + \sin x - 1$;

(4) $y = x(e^x + 1)$

3. (1) $\arcsin \frac{y}{x} = \ln |x| + c$, $y^2 = x^2$; (2) $y = xe^{cx+1}$;

(3) $x^2 + y^2 = c$;

(4) $y^2 = 2x^2(\ln x + c)$

4. (1) $\frac{1}{y} = -\sin x + ce^x$;

(2) $\frac{3}{2}x^2 + \ln \left| \frac{1}{y} + \frac{1}{3} \right| = c$;

(3) $\frac{1}{y^3} = ce^x - 1 - 2x$;

(4) $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3 \left(\frac{2}{3} + \ln x \right) + c$

5. (1) $\frac{x^6}{y} - \frac{x^8}{8} = c$;

(2) $2x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 2y = c$;

(3) $xy = e^{cx}$;

(4) $y = \arctan(x + y) + c$;

(B)

1. (1) $y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c_1 x + c_2$; (2) $y = c_1 \ln |x| + c_2$;

(3) $y = \frac{1}{c_1} e^{c_1 x+1} \left(x - \frac{1}{c_1} \right) + c_2$;

(4) $y = \operatorname{sh}(x + c_1) + c_2 x + c_3$

2. (1) $9(x - c_2)^2 + 4(x + c_1)^3$;

(2) $y + c_1 \ln |y| = x + c_2$, $y = c$;

(3) $y^2 - x^2 + c_1 x + c_2 = 0$;

(4) $y = e^{2x}$

3. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + 1$.

习题 4-3

1. $P(45) = 8.99$.

2. (1) $T(t) = \frac{T_2 + BT_1}{1+B} + \frac{T_1 - T_2}{1+B} e^{k(1+B)t}$; (2) $\frac{T_2 + BT_1}{1+B}$; (3) $\frac{T_2 + BT_1}{1+B}$.

$$3. x(\theta) = k\theta - \frac{k}{2} \sin 2\theta + c, y(\theta) = k \sin^2 \theta.$$

$$4. x(t) = \frac{\alpha c_1 e^{\alpha k_1 t}}{1 + c_1 e^{\alpha k_1 t}}, y(t) = c_2 (1 + c_2 e^{\alpha k_1 t})^{\frac{k_2}{k_1}}$$

习题 4-4

$$1. y = c_1(x-1) + c_2(x^2 - x + 1)$$

$$2. y = c_1 x + c_2 x^2 + e^{-x}$$

$$4. (1) y = c_1 + c_2 e^{4x}; \quad (2) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x;$$

$$(3) y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{ax}; \quad (4) y = (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) e^{-x};$$

$$(5) y = \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}}; \quad (6) y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x;$$

$$(7) a \neq 0 \text{ 时, } y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} - \frac{1}{a^2}(x+1), \quad a = 0 \text{ 时, } y = c_1 + c_2 x + \frac{1}{6} x^2 (x+3);$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} x + \frac{9}{32};$$

$$(9) y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x;$$

$$(10) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{2}{5} \cos 2x - \frac{6}{5} \sin 2x;$$

$$(11) y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_3 e^x + \frac{1}{3} x e^x;$$

$$(12) a \neq -1 \text{ 时, } y = e^{-ax} (c_1 + c_2 x) + \frac{1}{(a+1)^2} e^x,$$

$$a = -1 \text{ 时, } y = e^x \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right);$$

$$(13) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x} + \frac{1}{21} e^{2x};$$

$$(14) y = e^t (c_1 \cos \sqrt{2} t + c_2 \sin \sqrt{2} t) + \frac{1}{4} (5 \cos t - 4 \sin t) e^{-t};$$

$$(15) y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{3} \cos 2x - \frac{1}{2} x \cos x;$$

$$(16) y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{1}{12} x^2 \cos 3x + \frac{1}{36} x \sin 3x$$

(B)

$$1. y = c_1 x + c_2 e^x \quad 2. y = c_1 e^x + c_2 x^3 e^x \quad 3. x = 0$$

$$4. y = (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) e^{x^2} - e^{x^2}$$

习题 4-5(A)

$$1. (1) \begin{cases} x = e^t, \\ y = 4e^t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = -2c_1 e^{3t} + c_2 (1+2t) e^{3t}, \\ y = c_1 e^{3t} - c_2 t e^{3t} \end{cases}$$

$$2. y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4x - \frac{26}{5} - 6e^x + c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} \\ -6x + \frac{24}{5} + 2e^x + c_1 e^{5x} - c_2 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

3. $y = \frac{1}{6} \left(e^{5x} - 12xe^{-x} - 7e^{-x} \right).$

4. $\begin{cases} x_1(t) = -2c_1 + 2c_2e^t + c_3e^{-t} \\ x_2(t) = -c_1 - c_2e^t \\ x_3(t) = c_1 + 2c_2e^t + c_3e^{-t} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = -c_1e^{-t} - c_2e^{-t} + c_3e^{2t} \\ y = c_1e^{-t} + c_3e^{2t} \\ z = c_2e^{-t} + c_3e^{2t} \end{cases}$

(B)

1. $\begin{cases} x = 2500 - 1500e^{-4t} \\ y = 1250 + 750e^{-4t} \end{cases}$

习题 4-6

1.

$h = 0.1$ 时的数值方法比较

x_0	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格 - 库塔法
1. 00	2. 000 0	2. 000 0	2. 000 0
1. 10	2. 138 6	2. 154 9	2. 155 6
1. 20	2. 309 7	2. 343 9	2. 345 4
1. 30	2. 513 6	2. 567 2	2. 569 5
1. 40	2. 750 4	2. 824 6	2. 827 8
1. 50	3. 020 1	3. 115 7	3. 119 7

$h = 0.05$ 时的数值方法比较

x_0	欧拉方法	改进的欧拉方法	龙格 - 库塔法
1. 00	2. 000 0	2. 000 0	2. 000 0
1. 05	2. 069 3	2. 073 5	2. 073 6
1. 10	2. 146 9	2. 155 4	2. 155 6
1. 15	2. 232 9	2. 245 9	2. 246 2
1. 20	2. 327 2	2. 345 0	2. 345 4
1. 25	2. 429 9	2. 452 7	2. 453 2
1. 30	2. 541 0	2. 568 9	2. 569 5
1. 35	2. 660 4	2. 693 7	2. 694 4
1. 40	2. 788 3	2. 826 9	2. 827 8
1. 45	2. 924 5	2. 968 6	2. 969 6
1. 50	3. 069 0	3. 118 7	3. 119 7

5. $h = 0.2; y(0.2) \approx 3.2; h = 0.1; y(0.2) \approx 3.23.$