高阶线性微分方程

主讲人：刘秀平 教授

二阶线性微分方程

- 二阶齐次线性微分方程
- 二阶非齐次线性微分方程

二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \textbf{(1.1)}$$

1.通解的结构

2.求解方法

3.特殊类型--二阶常系数齐次线性微分方程求解

1.1 通解的结构

一阶齐次线性微分方程

$$y' + p(x)y = 0$$

$$Y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad \Rightarrow \underline{Y = Cy^*.} \qquad (*)$$

$$y^* = e^{-\int p(x)dx}.$$

$$y'^3 - 4xy' + 8y^2 = 0 \qquad \underline{y = C(x-C)^2.}$$

$$y'' = 0. \qquad y = C_1 + C_2 x. \qquad y_1^* = 1,\ y_2^* = x \qquad y = \underline{C_1 y_1^* + C_2 y_2^*}$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad y = \underline{C_1 y_1^* + C_2 y_2^*}$$

1. 1 通解的结构

定理1.1 若函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程（1.1）的两个解，则函数

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{1.2}$$

也是方程（1.1）的解，其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

证明

$$\begin{aligned}
\text{左端}&=\left(C_1y_1+C_2y_2\right)''+p(x)\left(C_1y_1+C_2y_2\right)'+q(x)\left(C_1y_1+C_2y_2\right)\\
&=\left(C_1y_1''+C_2y_2''\right)+p(x)\left(C_1y_1'+C_2y_2'\right)+q(x)\left(C_1y_1+C_2y_2\right)\\
&=C_1\left[\underline{y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1}\right]+C_2\left[\underline{y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2}\right]=0.
\end{aligned}$$

设 $y_1(\mathrm{x})$ 是方程（1.1）的一个解，则 $y_2(x)=2y_1(x)$ 也是方程（1.1）的解. □

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=(C_1+2C_2)y_1(x).=Cy_1(x).$$

$y_2(x)/y_1(x)=D$(常数），(1. 2) 不是通解；$y_2(x)/y_1(x)\neq D$(常数），(1. 2) 是通解.

1.1 通解的结构

定理1.2 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，若存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots k_n$,使得当 $x \in \mathrm{I}$ 时,有恒等式

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0$$

成立，则称这 n 个函数在区间 I 上**线性相关**；否则称为**线性无关**。

函数 $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是线性相关的.

$$k_1 1 + k_2 \sin^2 x + k_3 \cos^2 x \equiv 0.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 0.$$

$$1 \cdot 1 + (-1) \cdot \sin^2 x + (-1) \cdot \cos^2 x \equiv 0.$$ 取 $k_1 = 1$， $k_2 = -1, k_3 = -1,$ □

函数 $1, x, x^2$ 在任何区间（a，b）内是线性无关的. $k_1 1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0.$

如果两个函数的比是常数，则它们就是线性相关的；

否则，就是线性无关的。

1.1 通解的结构

定理1.3 若函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程（1.1）的两个线性无关的解，则它们的线性组合

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

是方程（1.1）的通解，其中 C_1,C_2 为任意常数。

$$y''+y=0 \qquad y_1(x)=\cos x \text{与} y_2(x)=\sin x.$$

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x\neq C. \quad y''+y=0\text{的通解为}y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

1.1 通解的结构

推理1.4 若函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的解，则它们的线性组合

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

是此方程通解，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数。

□