阿贝尔定理和收敛半径存在性

阿贝尔定理　如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0\ (x_0 \neq 0)$时收敛，则对于满足不等式$|x| < |x_0|$的一切$x$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$时发散，则对于满足不等式$|x| > |x_0|$的一切$x$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散.

证明　由于定理的后一部分是前一部分的逆否命题，故只需证明前一部分即可.

如果$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0\ (x_0 \neq 0)$时收敛，由级数收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$$

可知数列$\{a_n x_0^n\}$有界．于是存在一个$M > 0$，使得对任何n都有$\left|a_n {x_0}^n\right| \leqslant M$．这样

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

而当$|x| < |x_0|$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$是公比小于 1 的收敛的正项级数．依正项级数比较判别法知，$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$收敛，即$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛.

由阿贝尔定理可得如下结论.

收敛半径存在定理　如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-\infty,+\infty)$上除$x = 0$外，即有收敛点，又有发散点，则必存在一个正数$R > 0$，使

1、在$(-R, R)$上，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；

2、在$(-\infty,-R)$和$(R,+\infty)$上，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散.

证明　如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_1$（不失一般性，设$x_1 > 0$）处收敛，由阿贝尔定

理知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-x_1, x_1\right)$上绝对收敛；如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$y_1$（不失一般性，设$y_1 > x_1$）处发散，由阿贝尔定理知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-\infty, -y_1\right)$和$\left(y_1, +\infty\right)$上发散.

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = \frac{x_1 + y_1}{2}$处收敛，记$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}, y_2 = y_1$(如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = \frac{x_1 + y_1}{2}$处发散，则记$x_2 = x_1, y_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$)，同理知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-x_2, x_2\right)$上绝对收敛, 在$\left(-\infty, -y_2\right)$和$\left(y_2, +\infty\right)$上发散, 显然$y_2 > x_2, y_2 - x_2 = \frac{y_1 - x_1}{2}$.

继续进行上述过程，如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = \frac{x_2 + y_2}{2}$处收敛，记$x_3 = \frac{x_2 + y_2}{2}, y_3 = y_2$(如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = \frac{x_2 + y_2}{2}$处发散，则记$x_3 = x_2, y_3 = \frac{x_2 + y_2}{2}$)，同理知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-x_3, x_3\right)$上绝对收敛，在$\left(-\infty, -y_3\right)$和$\left(y_3, +\infty\right)$上发散, 显然$y_3 > x_3, y_3 - x_3 = \frac{y_1 - x_1}{2^2}$，….，第$n$次，如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$处收敛, 记$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}, y_n = y_{n-1}$(如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$处发散, 则记$x_n = x_{n-1}, y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$), 同理知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-x_n, x_n\right)$上绝对收敛，在$\left(-\infty, -y_n\right)$和$\left(y_n, +\infty\right)$上发散, 显然$y_n > x_n, y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$，…,这样一直进行下去，就得到 2 个数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，其中$\{x_n\}$单调增加有上界，$\{y_n\}$单调减少有下界，由单调有界数列必有极限的准则知，数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的极限存在.

又$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}} = 0$.所以数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的极限相等，记极限值为$\bar{x}$.由以上取数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的意义知，在$\left(-\bar{x}, \bar{x}\right)$上，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛，在$\left(-\infty, -\bar{x}\right)$和$\left(\bar{x}, +\infty\right)$上，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散. 故取$R = \bar{x}$即可.