例1: 求方程 $x^2y''+xy'-y=x^2$ 的通解.

解: 令 $x=e^t$ (或 $t=\ln x$). 记 $D=\frac{d}{dt}$

$\Rightarrow$ $xy'=Dy$

$x^2y''=D(D-1)y$

$\Rightarrow$ 原方程为: $D(D-1)y+Dy-y=e^{2t}$

即: $D^2y-y=e^{2t}$

即: $\frac{d^2y}{dt^2}-y=e^{2t}$. $(\lambda^2-1=0)$

$\Rightarrow$ 特征根 $\lambda_1=1$. $\lambda_2=-1$.

特解 $y^*=Ae^{2t}$ 代入. 解之. $A=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ 通解: $y=C_1e^t+C_2e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}$

$\Rightarrow$ 原方程: $y=C_1x+C_2\frac{1}{x}+\frac{1}{3}x^2$.

例2: 设 $y=y(x)$ 满足: $xy+\int_1^x[3y(t)+t^2y''(t)]\mathrm{d}t=5\ln x$ $(x\geq 1)$

且 $y'(1)=0$, 求 $y(x)$.

解: 对方程求导.

$\Rightarrow$ $y+xy'+3y+x^2y''=\frac{5}{x}$

即: $x^2y''+xy'+4y=\frac{5}{x}$

令 $x=e^t$ $(t=\ln x)$. 记 $D=\frac{d}{dt}$

$\Rightarrow$ $D(D-1)y+Dy+4y=5e^{-t}$

即: $y''(t)+4y(t)=5e^{-t}$

特征方程: $\lambda^2+4=0$

$\Rightarrow$ 特征根: $\lambda_{1,2}=\pm 2i$

由 $f(t)=5e^{-t}$. 令特解为: $y^*=Ae^{-t}$

代入方程. $\Rightarrow$ $A=1$. 即: $y^*=e^{-t}$

通解: $y(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+e^{-t}$

通解：$y(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + e^{-t}$

即：$y(x) = C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x) + \frac{1}{x}$

又由 $y(1)=0$. $y'(1)=0$

$\Rightarrow C_1 = -1$. $C_2 = \frac{1}{2}$

即：$y(x) = -\cos(2\ln x) + \frac{1}{2}\sin(2\ln x) + \frac{1}{x}$.

2. 降阶法

以二阶齐次线性微分方程为例：

$0=\lambda^3-3\lambda+2$
$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)$

- 齐次 $\qquad y''+p(x)y'+q(x)y=0$

已知方程的一个非零解 $y_1(x)$, 求另一个线性无关解. (通解)

令 $y_2(x) = u(x)y_1(x) \Rightarrow y_2' = u'y_1 + uy_1'$

$\Rightarrow y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$

代入方程：$\underline{u''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)u'} + \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0}u = 0$.

即：$u''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0$.

令 $z = u'$. $\Rightarrow z'y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)z = 0$

例3：易知 $y_1(x) = e^x$ 是齐次线性微分方程

$$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$$

的一个解, 求此方程的通解.

解：令 $y_2(x) = u(x)e^x$. 代入方程.

$y_2' = u'e^x + ue^x$. $\qquad y_2'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$

$\Rightarrow (2x-1)u'' + (2x-3)u' = 0$

令 $u' = z(x)$. $\Rightarrow (2x-1)z' + (2x-3)z = 0$

即：$\frac{dz}{z} = -\frac{2x-3}{2x-1}dx = \left(-1 + \frac{2}{2x-1}\right)dx$

积分：$\ln|z| = -x + \ln|2x-1| + C_1'$

即：$z = \tilde{C}_1 e^{-x}(2x-1) = \frac{du}{dx}$

积分. $\Rightarrow u(x) = C_1(2x+1)e^{-x} + C_2 \quad (C_1 = -\tilde{C}_1)$

积分. $\Rightarrow u(x) = C_1(2x+1)e^{-x} + C_2 \quad (C_1 = -C_1)$

$\Rightarrow$ 通解为：$y = C_1(2x+1) + C_2 e^{x}$.