§1.2　数列极限

数列极限深入地研究了变量间的变化关系，是微积分的重要工具和思想方法. 本节我们介绍数列极限的定义，数列极限的性质，夹逼定理与单调有界收敛定理.

1.2.1 数列极限的概念

数列可以看作定义在正整数集上的函数，也就是说每一个正整数n，都有一个确定的函数值$a_n = f(n)$. 以正整数$1,2,\cdots,n,\cdots$为下标的一列实数按照下标从小到大的顺序排成一列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

称为一个数列，记为$\{a_n\}$，a_n称为数列的第n项或通项. 微积分中讨论的数列都约定为具有无穷多项的数列，不讨论有限项的数列.

我们来看几个具体的例子：

（1）$\{\frac{1}{n}\}$　（2）$\{\frac{1}{2^n}\}$　（3）$\{\frac{\sin n}{n}\}$　（4）$\{(-1)^n\}$　（5）$\{2n-3\}$.

n越来越大时，数列**(1)**，数列(2)，数列(3)的项会和实数0的距离“要多接近就可以有多接近”，.

以数列**(1)**为例，如果希望$|\frac{1}{n}-0|<\frac{1}{10^6}$，只要$n>10^6$，也就是说随着下标$n$的增大，$\frac{1}{n}$和实数0的距离要多小可以有多小.

数列$\{a_n\}$中的项和某一个实数A的距离随着下标n的增大，呈现出“要多小可以有多小”的变化趋势，我们称为数列$\{a_n\}$无限趋近于A.

值得注意的是，数列$\{a_n\}$无限趋近于A，并不意味着$\{a_n\}$是单调趋近于A

的，例如上面的数列（3），$\{\frac{\sin n}{n}\}$是“摆动地”趋于实数0的.

定义 1.12　$\{a_n\}$为一数列，A为一实数，若随着n的增大，a_n无限趋近于A，则称$\{a_n\}$的极限为A，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$或$a_n \to A\,(n\to\infty)$.

数列$\{a_n\}$存在极限，我们也称$\{a_n\}$收敛，否则称$\{a_n\}$发散.

数列(4）$\{(-1)^n\}$中，虽然有无穷多项都取到了1和-1，但随着下标n的增大，它的值没有和某一个实数保持“要多近就有多近”的趋势，第$2n-1$项取到-1，第$2n$项就变成了1，因此其不存在极限，也就是说数列$\{(-1)^n\}$发散.

数列(5)中，$2n-3$随着下标n的不断增大，其值要多大就可以有多大，虽然它不是无限趋近某一个实数，但也呈现出了一定的变化趋势，这样的数列我们称之为“无穷大量”，在后面几节再讨论.

在描述性定义中，随着n的增大，a_n无限趋近于A表示的意思是a_n和A的距离 “要多小就可以有多小”，也就是说，任意给定一个正数ε，当n充分大后，a_n充分靠后的项与A距离都可以小于预先给定的正数ε，即$|a_n - A| < \varepsilon$，于是我们从极限的描述性定义，提炼出极限的精确定义.

定义 1.13　$\{a_n\}$为一数列，A为一实数．若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使得当$n>N$时，均有$|a_n - A|<\varepsilon$，则称$\{a_n\}$的极限为A. 记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

或$a_n \to A\,(n\to\infty)$.

数列$\{a_n\}$存在极限，我们也称$\{a_n\}$收敛，否则称$\{a_n\}$发散.

用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，

要使 $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ （$\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$）

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 的基本思路

证明: $\forall\varepsilon>0$,

由 $|a_n-A|<\varepsilon$ 推出 N ，从而 $n>N$ 有

$|a_n-A|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

数列 $\{x_n\}$ 极限是 a 的充要条件是（　　）

（**A**） 对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N ，当 $n>N$ 时有无穷多个 x_n 落在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 中

（**B**） 对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N ，当 $n>N$ 时有无穷多个 x_n 落在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外

(C). 对任意 $\varepsilon>0$，至多有有限多个 x_n 落在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外

（**D**）以上结论均不对

我们看几个具体的例题.

例 1.2.1 设常数 q 满足 $0<|q|<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

证明：$\forall \varepsilon>0$，

要使 $|q^n-0|<\varepsilon$，只需 $n>\log_{|q|}\varepsilon$. 取 $N=[|\log_{|q|}\varepsilon|]+1$，

于是 当 $n>N$ 时，有 $n>\log_{|q|}\varepsilon$，从而有

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

例 1.2.2 设 $a_n=\dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

证明：因为 $|a_n-2|=\left|\dfrac{n+8}{n^2-3}\right|(<\varepsilon)$，所以当 $n\geqslant 8$ 时，有

$$|a_n-2|=\frac{n+8}{\frac{1}{2}n^2+(\frac{1}{2}n^2-3)}\leqslant\frac{2n}{\frac{1}{2}n^2}=\frac{4}{n}<\varepsilon$$

$\forall \varepsilon>0$，取 $N=\max\{8,[\frac{4}{\varepsilon}]+1\}$，当 $n>N$ 时，$|a_n-2|\leqslant\frac{4}{n}<\varepsilon$，由极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

例 1.2.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明：记 $a_n=\sqrt[n]{n}-1$. 当 $n\geqslant 2$ 时，

$$n=(1+a_n)^n=1+C_n^1a_n+C_n^2a_n^2+\cdots+C_n^na_n^n\geqslant\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2,$$

从而 $0<a_n\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$.

$\forall\varepsilon>0$ ，要使 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，只需 $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1$.

取 $N=\max\{2,[\frac{2}{\varepsilon^2}+1]+1\}$，即 $N=[\frac{2}{\varepsilon^2}]+2$，于是当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，

由极限定义得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 1.2.4 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n}=\mathrm{e}^A$；

（2）若$a_n>0,\ (n=1,2,\cdots)$，且$A>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln A$；

证明：（1）$\forall\varepsilon>0$，要使$|\mathrm{e}^{a_n}-\mathrm{e}^A|<\varepsilon$，只需$|\mathrm{e}^{a_n-A}-1|<\varepsilon\mathrm{e}^{-A}$，即

$$1-\varepsilon\mathrm{e}^{-A}<\mathrm{e}^{a_n-A}<1+\varepsilon\mathrm{e}^{-A},$$

亦即

$$\ln(1-\varepsilon\mathrm{e}^{-A})<a_n-A<\ln(1+\varepsilon\mathrm{e}^{-A}).$$

不妨设$\varepsilon<\mathrm{e}^A$，令$\delta=\min\{-\ln(1-\varepsilon\mathrm{e}^{-A}),\ln(1+\varepsilon\mathrm{e}^{-A})\}$， 从而$\delta>0$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，所以对上述的正数$\varepsilon$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使得当$n>N$时，有$|a_n-A|<\delta$. 于是当 $n>N$时，有$|\mathrm{e}^{a_n}-\mathrm{e}^A|<\varepsilon$， 由极限定义得$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n}=\mathrm{e}^A$.

（2）$\forall\varepsilon>0$，要使$|\ln a_n-\ln A|<\varepsilon$，只需

$$-\varepsilon<\ln\frac{a_n}{A}<\varepsilon,$$

$$A\mathrm{e}^{-\varepsilon}<a_n<A\mathrm{e}^{\varepsilon}$$

即

$$A(\mathrm{e}^{-\varepsilon}-1)<a_n-A<A(\mathrm{e}^{\varepsilon}-1).$$

令$\delta=\min\{A(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}),A(\mathrm{e}^{\varepsilon}-1)\}$，显然$\delta>0$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，故$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使得当 $n>N$时，有$|a_n-A|<\delta$. 于是当$n>N$时，有$|\ln a_n-\ln A|<\varepsilon$. 由极限定义得$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln A$.

例 1.2.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$.

解：由例 1.2.3 知， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 再由例 1.2.4（2）得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\ln 1,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

例 1.2.6 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$， $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$.

证明： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由极限定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，使得当 $n>N_1$ 时，有

$$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，故对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists N_2\in\mathbf{N}_+$，使得当 $n>N_2$ 时，有

$$|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时， 有

$$|(a_n\pm b_n)-(A\pm B)|\leqslant|a_n-A|+|b_n-B|<\varepsilon,$$

由极限定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$.

1.2.2 数列极限的性质

性质 1 （唯一性） 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它的极限是唯一的.

证明： 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$， 又有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=B$，由极限的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|a_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}$. 所以，当 $n>N$ 时，

$$|A-B|\leqslant|a_n-A|+|a_n-B|<\varepsilon,$$

即 $\forall\varepsilon>0$，有 $|A-B|<\varepsilon$，从而 $|A-B|\leqslant 0$，即 $A=B$.

性质 2 在收敛数列中任意添加、删去有限项，或者任意改变有限项的值，不改变该数列的收敛性与极限值.

证明： 设数列$\{a_n\}$的前k项$a_1,a_2,\cdots,a_k$被改变为$b_1,b_2,\cdots,b_m$，而k项以后的所有项保持不变. 记$b_{m+i}=a_{k+i},i=1,2,\cdots$，即$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$改变后所得到的数列.

若数列$\{a_n\}$有极限A，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$（不妨设$N\geqslant k$），当$n>N$时，有

$$|a_n-A|<\varepsilon.$$

由于$b_{m+i}=a_{k+i}$，且

$$k+i>N\Leftrightarrow m+i>m+N-k. \quad (i>N-k)$$

取$N_1=m+N-k$，当$n>N_1$时，就有$|b_n-A|<\varepsilon$， 即$\{b_n\}$收敛于A.

另一方面，数列$\{a_n\}$也可看作$\{b_n\}$改变后所得到的数列，所以若$\{b_n\}$收敛，则$\{a_n\}$收敛. 从而若$\{a_n\}$发散， 则$\{b_n\}$必发散.

定义 1.14 设$\{a_n\}$是一个数列，$0<n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 是一列自然数，称数列$\{a_{n_k}\}$为$\{a_n\}$的子数列或子列.

例如， $\{2n\}$与$\{2n-1\}$都是自然数列$\mathbf{N}$的子列.

设$\{a_n\}$是一个数列

$a_1,a_3,a_6,\cdots$； $a_3,a_7,a_{10},\cdots$； $a_2,a_5,a_9,\cdots$

子列的指标为k，即子列的第一项为a_{n_1}，子列的第二项为a_{n_2}，依次类推. n_k表示子列的第k项在原数列的位置，一般有$n_k\geqslant k$，且

$n_k\geqslant n_l\Leftrightarrow k>l$.

性质 3 数列$\{a_n\}$收敛于A当且仅当它的任何子列都收敛于A.

证明：充分性：数列$\{a_n\}$也为其自身的子列，充分性显然成立.

必要性：设$\{a_{n_k}\}$为$\{a_n\}$的一个子列. 由于$\{a_n\}$收敛于A， $\forall\varepsilon>0$，

$\exists N\in \mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-A|<\varepsilon$. 而 $n_k\geqslant k$，故当 $k>N$ 时，有 $n_k>N$，从而 $|a_{n_k}-A|<\varepsilon$. 即 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 A.

例 1.2.7 证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

证明： 记 $a_n=(-1)^n$，则 $a_{2n}=1$， $a_{2n-1}=-1$. 即数列 $\{(-1)^n\}$ 有两个子列分别收敛到 1 和 -1. 由性质 3， 数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

例 1.2.7 说明， 有界数列不一定收敛. 然而我们有

性质 4（有界性） 收敛数列必有界，即 $\exists M>0$，使得 $\forall n\in \mathbf{N}_+$，$|a_n|\leqslant M$.

证明：设 $\{a_n\}$ 收敛于 A. 对 $\varepsilon=1$，$\exists N\in \mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，$|a_n-A|<1$，所以 $|a_n|<|A|+1$. 取 $M=\max\left\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|A|+1\right\}$， 从而 $\forall n\in \mathbf{N}_+$，$|a_n|\leqslant M$.

例 1.2.8 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n{}^2=A^2$.

证明： 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，根据性质 4，$\exists M>0$，使得 $\forall n\in \mathbf{N}_+$，$|a_n|\leqslant M$. 另一方面由极限的定义， $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{M+|A|}$.

于是当 $n>N$ 时

$$|a_n{}^2-A^2|=|a_n+A|\cdot|a_n-A|\leqslant(M+|A|)|a_n-A|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n{}^2=A^2$.

性质 5（保号性） 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，数列 $\{b_n\}$ 收敛于 B.

（1）若 $A>B$，则 $\exists N\in \mathbf{N}_+$，使得当 $n>N$ 时，有 $a_n>b_n$.

（2）若 $\exists N\in \mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有 $a_n\geqslant b_n$，则 $A\geqslant B$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}=2>1 \Rightarrow \exists N\in \mathbf{N}_+$，使得当 $n>N$ 时，有 $\dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}>1$.

$$a_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$$

$$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \geq 0$$

证明：(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 且 $A > B$， 对 $\varepsilon = \frac{1}{2}(A-B)$， $\exists N_1 \in \mathbf{N}_+$， 当 $n > N_1$ 时，有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$a_n - A > -\varepsilon = \frac{1}{2}(B-A),$$

即

$$a_n > \frac{1}{2}(A+B).$$

同时 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，故 $\exists N_2 \in \mathbf{N}_+$，使得当 $n > N_2$ 时， 有

$$|b_n - B| < \varepsilon$$

$$b_n - B < \varepsilon = \frac{1}{2}(A-B),$$

即

$$b_n < \frac{1}{2}(A+B).$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时， 有

$$a_n > \frac{1}{2}(A+B) > b_n.$$

(2) 假设 $A < B$，由 (1) 知， $\exists N_1 \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N_1$ 时 $a_n < b_n$，则当 $n > \max\{N_1, N\}$ 时， $a_n < b_n$ 且 $a_n \geqslant b_n$，矛盾！故 $A \geqslant B$.

定理 1.2（四则运算法则）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则

（1）对任意实数 c，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = cA$.（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.　　（4）若 $b_n \neq 0$，$B \neq 0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

证明：（1）的证明留给读者作为练习.（2）在例 1.2.6 中已给出证明.

下面证明（3）和（4）.

（3） 因为 $\{a_n\}$ 为收敛数列，所以 $\exists M > 0$，使得 $\forall n \in \mathbf{N}_+$，$|a_n| \leqslant M$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，由极限定义， $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，同时有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}\ ,\qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}\ .$$

于是当 $n > N$ 时，有

$$|a_n b_n - AB| \leqslant |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| = |a_n||b_n - B| + |a_n B - AB|$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}|B| < \varepsilon,$$

由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.

（4） 根据(3)，只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$.

由于 $B \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ 由极限定义， 对于 $\varepsilon_0 = \dfrac{|B|}{2}$，$\exists N_1 \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N_1$ 时，有 $|b_n - B| < \dfrac{|B|}{2}$，所以当 $n > N_1$ 时 $|b_n| > \dfrac{|B|}{2}$，即 $\left|\dfrac{1}{b_n}\right| < \dfrac{2}{|B|}$.

另一方面，再由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_2 \in \mathbf{N}_+$ 当 $n > N_2$ 时，有 $|b_n - B| < \dfrac{B^2}{2}\varepsilon$. 从而当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}\right|=\left|\frac{B-b_n}{Bb_n}\right|<\frac{1}{|B|}\cdot\frac{2}{|B|}\cdot\frac{B^2}{2}\varepsilon=\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{B}.$$

▌

例 1.2.9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}$.

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$，根据极限的四则运算法则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{1-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}}{2+3\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-2\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

例 1.2.10 设实数 a,b 满足 $0<|a|<1,0<|b|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$.

解：因为

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},\quad 1+b+b^2+\cdots+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

§1.2.3 夹逼定理与单调有界收敛定理

讨论了极限的定义与性质，我们来讨论极限存在的两个充分条件.

定理 1.3（夹逼定理） 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足条件：$\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，当$n>n_0$时有

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n \quad .$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

证明：由于当$n>n_0$时

$$a_n-A\leqslant b_n-A\leqslant c_n-A\,,$$

从而

$$|b_n-A|\leqslant\max\{|a_n-A|,|c_n-A|\}\,.$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}_+$，当$n>N_1$时，有

$$|a_n-A|<\varepsilon\,,\quad |c_n-A|<\varepsilon\,.$$

从而当$n>\max\{n_0,N_1\}$时，有$|b_n-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$. ▮

例 1.2.11 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$.

解：$\forall n\in\mathbf{N}_+$，有

$$0\leqslant\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}=\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}<\frac{4}{\sqrt{n}}\,.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=0$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$$

解 $\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}\leq\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leq\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$$

例 1.2.12 设常数$a>0$，证明：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证明:当$a\geqslant1$时，$\forall n\geqslant a$，$1\leqslant\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{n}$. 又由例 1.2.3 知$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，应用夹逼定理得$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}>1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1 \quad .$$

例 1.2.13 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$是m个正数，求$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

解：记$a=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\{a_k\}$，则

$$a\leqslant(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(ma^n)^{\frac{1}{n}}=am^{\frac{1}{n}}.$$

由例 1.2.12 知$\lim_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=1$，应用夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\{a_k\}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}=$$

定义 1.15 对于数列$\{a_n\}$，如果$\forall n\in \mathbf{N}_+$，均有$a_n \leqslant a_{n+1}$ ($a_n \geqslant a_{n+1}$)，则称数列$\{a_n\}$单调递增(单调递减）. 单调递增的数列与单调递减的数列统称为单调数列.

定理 1.4（单调有界收敛定理）单调递增(减)且有上(下)界的数列必收敛，极限为数列的上(下)确界.

证明：设数列$\{a_n\}$单调递增且有上界. 根据确界存在定理，$\{a_n\}$存在上确界，记 $A=\sup\limits_{n\geq 1}\{a_n\}$. $\forall \varepsilon>0$，由于$A-\varepsilon$不再是$\{a_n\}$的上界，于是$\exists N\in \mathbf{N}_+$，使得 $A-\varepsilon<a_N \leqslant A$. 注意到 $\{a_n\}$ 单调递增，从而当 $n>N$ 时，有 $A-\varepsilon<a_N \leqslant a_n \leqslant A$，$\Rightarrow A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<a_n-A<\varepsilon$

故当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. ▌

单调有界收敛定理是实数系的一个非常重要的结论，今后将有许多应用.

例 1.2.14 证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在.

证明：记$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$. 首先证明数列$\{a_n\}$单调递增. $\forall n\in \mathbf{N}_+$，由二项式定理，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{1}{n^k} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \\
&< 1+\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})
\end{aligned}
$$

$$=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=a_{n+1},$$

另一方面，

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

$$\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=3-\frac{1}{n}<3,$$

所以数列$\{a_n\}$有上界. 由定理 1.4，数列$\{a_n\}$收敛，即极限$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在.

极限$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$的值困扰了很多数学家，1727 年由数学家欧拉（Euler）使用字母e表示其值，即定义$\mathrm{e}\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. 因为$2<(1+\frac{1}{n})^n<3$，由极限的保号性，可知$\mathrm{e}$是介于2和3之间的实数， 它就是初等数学中读者早已熟悉的自然对数的底数. 学过第二章之后可以证明： e是一个无理数，它的近似值为$\mathrm{e}\approx 2.71828$.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

例 1.2.15 证明： $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$存在.

证明：令$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$，显然$\{a_n\}$单调递增. 又因为

$$a_n<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=2-\frac{1}{n}<2,$$

所以$\{a_n\}$有上界，根据单调有界收敛定理，极限$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$存在.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}$$

例 1.2.16　设常数$a>1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

证明：　记$x_n=\frac{n}{a^n}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{a},$$

且$\frac{1}{a}<1$，由极限的保号性，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，有$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$，即$x_{n+1}<x_n$.

又因为$x_n>0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在等式$x_{n+1}=\frac{n+1}{na}x_n$两边令$n\to\infty$，得$A=\frac{A}{a}$，解得$A=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.