可微的必要条件

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

引 入:

一元函数

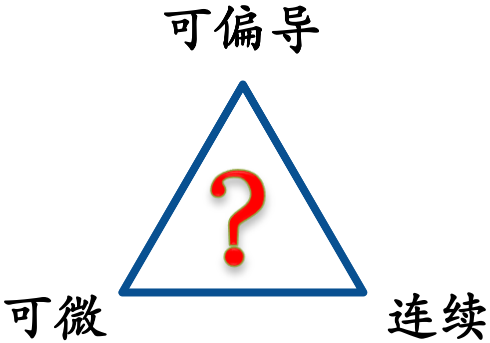
$f(x)$在 x_0点可微

$\Downarrow \Uparrow$

$f(x)$在 x_0点可导

$\Rightarrow$ 连续

多元函数



连续与可偏导:

例：二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点处 $f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$，故：可偏导;

但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处不连续（沿 $y=kx$）。

注：二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可偏导，但不一定连续。

连续与可偏导:

例：二元函数

$$f(x,y)=x+|y|$$

在 $(0,0)$ 点处连续；

$$f_x(0,0)=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}$$

故：函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处不可偏导。

注：二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，但不一定可偏导。

可微与连续、可偏导:

定理1：（可微的必要条件）

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微（$\mathrm{d}z=A\,\Delta x+B\,\Delta y$），则

① 函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续；

② 函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可偏导，且有 $A=\dfrac{\partial z}{\partial x},B=\dfrac{\partial z}{\partial y}$，

即：$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$（全微分公式）

证：①由 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则：

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + o(\rho), \qquad \left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

故：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \big(A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\big) = 0$$

即：$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$

故：$f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续。

② 由 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\,\Delta x + B\,\Delta y + o(\rho)$

令 $\Delta y = 0$，则：

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\,\Delta x + o(|\Delta x|)$$

故：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A$$

同理：$\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$。

故：可微必连续，可微必可偏导。

全微分公式：

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

注：可微必连续，可微必可偏导。

连续未必可微，可偏导未必可微。

例：证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\[2ex] 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点处连续，可偏导，但不可微。

证：① （函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续）

当 $x \to 0, y \to 0$ 时，由

$$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le |x| \to 0$$

利用夹逼法则，故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$$

即： $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

② （函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可偏导）

由偏导的定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

同理：$f_y(0,0)=0$

故：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导。

③ （函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微）

由可微的定义，即证

$$\Delta z - f_x(0,0)\,\Delta x - f_y(0,0)\,\Delta y \overset{?}{=} o(\rho)$$

考虑极限：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - f_x(0,0)\,\Delta x - f_y(0,0)\,\Delta y}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\dfrac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} - 0 - 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x\,\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

由该极限不存在，故：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。

总结: