1. 利用积分域的对称性、函数的奇偶性

(1) 平面曲线 L 关于 x 轴对称时，

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{若} f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s, & \text{若} f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 L_1 是 L 在 x 轴上方(或下方)的部分.

(2) 平面曲线 L 关于 y 轴对称时，

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{若} f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s, & \text{若} f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 L_1 是 L 在 y 轴左侧(或右侧)的部分.

(3) 空间曲线 L 关于 Oxy 坐标面对称时，

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{若} f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\\ 2\int_{L_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s, & \text{若} f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中 L_1 是 L 在 Oxy 坐标面上方(或下方)的部分.

(4)空间曲线 L 关于 Oyz 坐标面对称时，

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{若} f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\int_{L_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s, & \text{若} f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中 L_1 是 L 在 Oyz 坐标面前侧(或后侧)的部分.

(5)空间曲线 L 关于 Ozx 坐标面对称时，

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{若} f(x,-y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\int_{L_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s, & \text{若} f(x,-y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中 L_1 是 L 在 Ozx 坐标面左侧(或右侧)的部分.

2. 轮换对称性

(1) 平面曲线 L 关于直线 $y=x$ 对称时，

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\mathrm{d}s,$$

即 被积函数中的 x 和 y 可以对调.

(2) 空间曲线 L 关于平面 $y=x$ 对称时，

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x,z)\mathrm{d}s,$$

即 被积函数中的 x 和 y 可以对调.

(3) 空间曲线 L 关于平面 $z=y$ 对称时，

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L f(x,z,y)\mathrm{d}s,$$

即 被积函数中的 y 和 z 可以对调.

(4) 空间曲线 L 关于平面 $x=z$ 对称时，

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L f(z,y,x)\mathrm{d}s,$$

即 被积函数中的 z 和 x 可以对调.

1. 设L为圆周$x^2+y^2=1$，计算$I=\oint_L (x+2xy+x^2)\mathrm{d}s$

解：由于L关于y轴对称，x和$2xy$是x的奇函数，故

$$\oint_L x\mathrm{d}s=0,\qquad \oint_L 2xy\mathrm{d}s=0$$

L关于直线$y=x$对称，由轮换对称性

$$\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L y^2\mathrm{d}s$$

$$I=\oint_L (x+2xy+x^2)\mathrm{d}s=\oint_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L \mathrm{d}s=\pi$$

2. 设L为圆周$x^2+y^2=1$，计算$I=\oint_L [(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{y}{2}+1)^2]\mathrm{d}s$

解：$I=\oint_L (x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{5}{4}+x+y)\mathrm{d}s$，

由L的对称性和被积函数的奇偶性 $\oint_L x\mathrm{d}s=\oint_L y\mathrm{d}s=0$

由轮换对称性 $\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L y^2\mathrm{d}s$

$$I=\oint_L (x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{5}{4})\mathrm{d}s=\oint_L [\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{8}(x^2+y^2)]\mathrm{d}s+\frac{5}{4}\oint_L \mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}\oint_L \mathrm{d}s+\frac{1}{8}\oint_L \mathrm{d}s+\frac{5}{4}\oint_L \mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi+\frac{1}{8}\cdot 2\pi+\frac{5}{4}\cdot 2\pi=\frac{15}{4}\pi$$

3. 设L为周长为a的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，计算$\oint_L (x+2y+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$

解 由对称性 $\oint_L x\mathrm{d}s=\oint_L 2y\mathrm{d}s=0$，

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow\ 3x^2+4y^2=12$$

$$\oint_L (x+2y+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L 12\mathrm{d}s=12a$$

4. 设曲线L的方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$，计算曲线积分$I=\oint_L (z+2)\mathrm{d}s$

解：曲线L为平面$z=1$上的圆周$x^2+y^2=4$

$$I=\oint_L (z+2)\mathrm{d}s=\oint_L 3\mathrm{d}s=3\oint_L \mathrm{d}s=12\pi$$

5. 求$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是圆心$(a,b)$半径为$R$的圆域.

解：

$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D ((x-a)+(y-b)+(a+b))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(a+b)\pi R^2$$

6. 设积分域$D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$，则二重积分

$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　　）

(A)　$\frac{\pi}{4}$.　(B)　$\frac{\pi}{3}$.　(C)　$\frac{\pi}{2}$.　(D)　π.