§8.1 第二型曲线积分的概念与计算

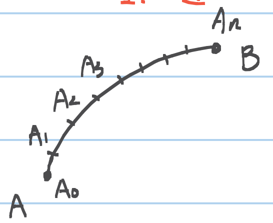
Note Title

例1：引例：变力作功

质点在变力 $\vec{F}(x,y,z)$ 的作用下沿曲线 L 从 A 到 B 运动.

如何计算功？

1. 定义： ①分割. 将 L 从 A 到 B 划分 $\{\Delta I_k\}_{k=1}^{n}$



② 取点 $P_k \in \widehat{A_{k-1}A_k}$. $P_k=(\xi_k,\eta_k,\theta_k)$

③ $W \approx \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k}$

求和

$\vec{F}=\{u(x,y,z),V(x,y,z),w(x,y,z)\}$

$\overrightarrow{A_{k-1}A_k}=\{\Delta x_k,\Delta y_k,\Delta z_k\}$.

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(u(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\Delta x_k+v(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\Delta y_k+w(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\Delta z_k\right)$$

④取极限：$W=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\vec{F}(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\cdot\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ 存在. 且极限值

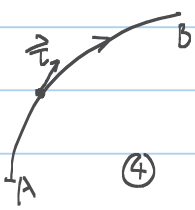
不依赖于划分之选取、不依赖于点 (ξ_k,η_k,θ_k) 选取. 则称 $\vec{F}(x,y,z)$

在 L 上从 A 到 B 的第二型曲线积分存在.

Note: ① 定义了正方向的曲线称为有向曲线.

② 讨论之曲线. 限于可求长度之曲线. "不打结"

③ 表示：$\int_L \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{l}$ 或 $\int_L u(x,y,z)dx+v(x,y,z)dy+w(x,y,z)dz$



$$d\vec{l}\stackrel{\Delta}{=}\{dx,dy,dz\}=\vec{\tau}\,dl$$

④ $\int_{L:A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_{L:B\to A}\vec{F}\cdot d\vec{l}$

⑤ $\underbrace{\int_L u\,dx+v\,dy+w\,dz}_{第二型}=\underbrace{\int_L \underbrace{\boxed{\{u,v,w\}\cdot\vec{\tau}}}_{标量}\,dl}_{第一型}$

(两类曲线积分之基本关系).

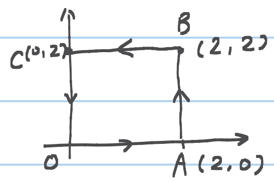
2. 第二型曲线积分的计算.
- ① 化第一型曲线积分.
- ② 化定积分 ※
- ③ Green公式化为二重积分
- ④ 空间曲线 (1) 化定积分 (2) 降维 (3) Stokes公式

(1) 化定积分. $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t). \end{cases}$ 起点对应参数 α. 终点对应参数 β. $x(t)$. $y(t)$. $z(t)$ 可微

$$\int_{L:A\to B} f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[f(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + g(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + h(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t) \right] dt$$

例1: $I = \oint_{L^+} \underbrace{(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy}$ $\quad L^+: O\to A\to B\to C\to O$



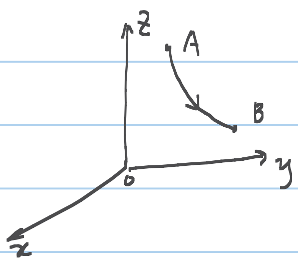
解: $I = \int_{\overrightarrow{OA}} + \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BC}} + \int_{\overrightarrow{CO}}$

$$= \int_0^2 x^2\,dx + \int_0^2 4y\,dy + \int_2^0 (x^2-4)\,dx + \int_2^0 0\,dy$$

$$= \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16.$$

Note: $\vec{F} = \{x^2-y^2,\ 2xy,\ 0\}$ 不是保守力.

例2: 质量为 m 的质点只受重力作用, 沿光滑曲线 L 从 A 运动到 B. 求重力作功.



解: $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ A: 对应参数 α. B: 对应参数 β.

$\vec{F} = \{0,\ 0,\ -mg\}$.

$$W = \int_{L:A\to B} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{L:A\to B} 0\,dx + 0\,dy - mg\,\underline{\underline{dz}}$$

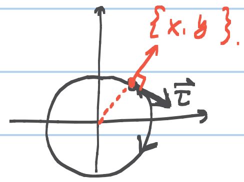
$$= -mg\int_\alpha^\beta z'(t)\,dt = -mg\big(z(\beta)-z(\alpha)\big)$$

$$= mg\big(\underline{\underline{z(\alpha)-z(\beta)}}\big)$$

例3: 计算: $I=\oint_{L^+}\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy$

$L^+: x^2+y^2=R^2\ (R>0)$ 沿顺时针方向为正.

法1: 化为定积分. $\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}$ $\theta: 2\pi\to 0$



$$I=\frac{1}{R^2}\int_{2\pi}^{0}\left[R\cos\theta\cdot R(-\sin\theta)+R\sin\theta\cdot R\cos\theta\right]d\theta=0$$

$\{y,-x\}$ ✓

$\{-y,x\}$ ✗

法2: $I=\int_{L^+}\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy$

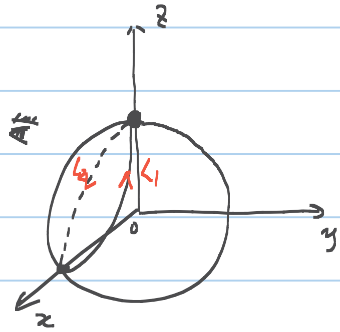
$$=\int_L\left\{\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right\}\cdot\vec{\tau}\,dl$$

$$=\int_L\left\{\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right\}\cdot\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}dl$$

$$=\int_L 0\,dl=0.$$

例4: 计算 $I=\oint_{L^+}y\,dx+z\,dy+x\,dz$ $\quad L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+z=R\end{cases}(R>0)$

从z轴正向朝xoy面看去 L为逆时针方向.



法1: (化定积分)、选取x为参数

$L_1^+:\begin{cases}x=x\\ y=\sqrt{2Rx-2x^2}\\ z=R-x\end{cases}$ $x: R\to 0$ $\qquad L_2^+:\begin{cases}x=x\\ y=-\sqrt{2Rx-2x^2}\\ z=R-x\end{cases}$ $x: 0\to R.$

$$I=\int_{L_1^+}+\int_{L_2^+}=\int_R^0\left[\sqrt{2Rx-2x^2}+(R-x)\frac{R-2x}{\sqrt{2Rx-2x^2}}+x(-1)\right]dx$$

$$+\int_0^R\left[-\sqrt{2Rx-2x^2}+(R-x)(-1)\frac{R-2x}{\sqrt{2Rx-2x^2}}+x(-1)\right]dx$$

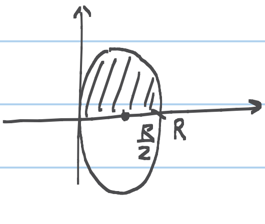
$$=-2\int_0^R\left(\sqrt{2Rx-2x^2}+\frac{(R-x)(R-2x)}{\sqrt{2Rx-2x^2}}\right)dx.$$

$y=\sqrt{2Rx-2x^2}$

$y^2+2x^2-2Rx=0$

$$=-\pi\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R}{\sqrt2}-2\int_0^R\frac{R-x}{\sqrt{2Rx-2x^2}}d(Rx-x^2)$$

$2(x-\frac{R}{2})^2+y^2=\frac{R^2}{2}.$



$$=-\frac{\sqrt2}{4}\pi R^2-2\int_0^R(R-x)\,d\left(\sqrt{2Rx-2x^2}\right)$$

$\frac{(x-\frac{R}{2})^2}{\frac{R^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{R^2}{2}}=1$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R^2 - 2\left[\underbrace{(R-x)\sqrt{2Rx-2x^2}\,\Big|_{x=0}^{x=R}} + \int_0^R \sqrt{2Rx-2x^2}\,dx \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2 .$$

法2：(降维法)．消去 z．由 L： $z = R - x$.

$$I = \oint_{L^+} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \oint_{L'} \left[y\,dx + (R-x)\,dy + x(-1)\,dx \right]$$

$$L': \begin{cases} x^2 + y^2 + (R-x)^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-\frac{R}{2})^2}{\frac{R^2}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{R^2}{2}} = 1 \\ z = 0 . \end{cases}$$