多元函数的概念

主讲人：侯中华
大连理工大学数学科学学院

6.1 多元函数的概念

一、 n元函数的定义：

1、定义1： 设X为R^n的一个子集。X到R的映射$f:X\to R$称为n元函数。记为(X,f)，或 $u=f(x)$， $x\in X$。记$x=(x_1,\cdots,x_n)$。则函数亦可记为$u=f(x_1,\cdots,x_n)$。 此时， $x_1,\cdots,x_n$叫自变量， u叫因变量。

2、定义2： 称两个函数(X_1,f_1)与(X_2,f_2)相等， 若$X_1=X_2$且$f_1=f_2$ 。

3、注6.1： (1).给定函数(X,f)。使对应规则f有意义的所有实数的集合记为D(f)，称为该函数的自然定义域。显然， $D(f)\supseteq X$。

(2).当只给出函数f的表达式时， 我们默认其定义域是自然定义域。

6.1 多元函数的概念

二、n元函数的几何表示及性态

1、定义1：给定n元函数$u=f(x_1,\cdots,x_n),(x_1,\cdots,x_n)\in X$。定义$R^{n+1}$中的集合

$G(f)=\{(x_1,\cdots,x_n,u);\ u=f(x_1,\cdots,x_n),(x_1,\cdots,x_n)\in X\}$。

称其为函数f的图像。函数u=f(x)叫做G(f)的方程。

2、注6.2：n元函数的几何表示除了图像表示之外，还有柱形表示、表格表示、动图表示等。几何表示的直观性，使得我们在探讨函数的性态时更便于思考。

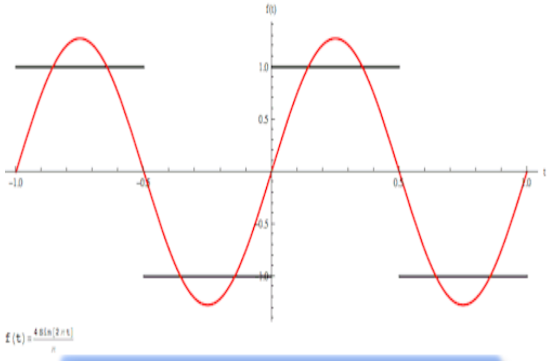

图6-1. 动图表示

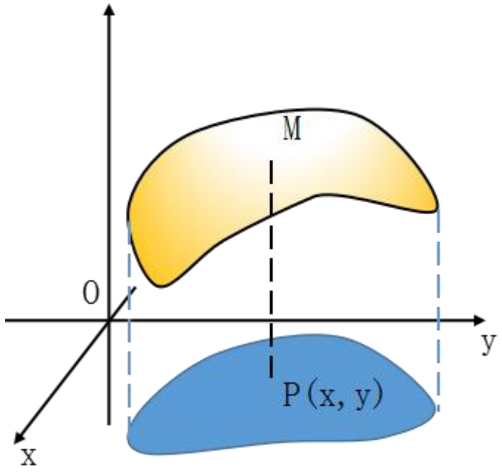

图6-2. 图像表示

6.1 多元函数的概念

3. 定义域的表示：(1). 给定n元函数$u=f(x_1,\cdots,x_n)$。对于常数c,

集合$f^{-1}(c)=\{(x_1,\cdots,x_n);\ f(x_1,\cdots,x_n)=c\}$称为等值面。它是$R^n$中的一个超曲面。

当n=2时，$f^{-1}(c)=\{(x_1,x_2);\ f(x_1,x_2)=c\}$称为等高线。它是$R^2$中的一条曲线。

当n=3时，$g^{-1}(c)=\{(x_1,x_2,x_3);\ f(x_1,x_2,x_3)=c\}$称为等势面。它是$R^3$中的一个曲面。

(2). 注6.3：为了便于研究函数的性态，我们通常选取函数的定义域为由若干等值面所围成的区域或闭区域。例如：[1]. $D=\{(x,y);$ 由$y=x$和$y=16x^5$围成$\}$;

[2]. $V=\{(x,y,z);$ 由$z=0$，$2y=x^2+y^2$和$4=x^2+y^2+z^2$围成的内部区域$\}$;

6.1 多元函数的概念

四、n元函数的极限

1. **“趋近于”**：为了更细致地研究函数的性态，人们需要讨论函数值随自变量的变化规律。给定集合$X\subset R^n$，用P表示X中的任一点，称为**动点**。取定$P_0\in R^n$，称为**定点**。称动点P**趋近于**P_0，若$\|P-P_0\|$充分接近于0。记为 $P\to P_0$。

2. **n重极限的定义**：设n元函数f(P)在定点$P_0\in R^n$附近有定义。若存在实数a，只要P趋近于P_0，便有$f(P)\to a$，则称**f(P)在P_0处有n重极限a**，记为 $a=\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$。$P_0$叫**极限点**。

3. **注6.4**：(1). P_0**未必属于**f的定义域，a**未必属于**f的值域。

(2). 由重极限的定义可以看出，重极限的存在**不依赖于**动点趋近定点的**方式**。

6.1 多元函数的概念

4. 重极限的基本性质：

(1). 唯一性：重极限若存在，则必唯一；

(2). 局部有界性：函数在极限点附近必有界；

(3). 局部保号性：若重极限不为0，则函数在极限点附近与重极限同号；

(4). 夹挤定理：若f(P)≤h(P)≤g(P)并且 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = \lim\limits_{P\to P_0} g(P) = a$，则 $\lim\limits_{P\to P_0} h(P) = a$。

5. 重极限的运算性质：设 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = a$， $\lim\limits_{P\to P_0} g(P) = \mathrm{b}$ 存在。则

(1). $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P) \pm g(P)] = a + b$； (2). $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P) \cdot g(P)] = a \cdot b$；

(3). $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P)/g(P)] = a/b$（若b≠0）；

(4). 注6.5：多元函数的复合运算比较复杂，此处从略。

6.1 多元函数的概念

6. **2元函数的累次极限**：设2元函数f(x, y)在$P_0(x_0, y_0)$附近有定义。如果当动点P(x, y)充分接近$P_0(x_0, y_0)$时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$存在，并且$\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=a$存在，则称a是先x后y的累次极限。

记为$a=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$。同理可定义先y后x的累次极限 $b=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$。

7. **注6.6**：(1). 对于n元函数，我们也可以定义各种不同次序的累次极限，至多有n!个。

(2). 累次极限和重极限的关系比较复杂。累次极限存在不意味着重极限存在。但是，如果重极限和累次极限都存在，它们必相等。因此，当两者同时存在时，我们可以通过计算累次极限来得到重极限的值。此外，若两个累次极限存在但不相等，则重极限一定不存在！

6.1 多元函数的概念

五、 n元函数的连续性

1. 连续的定义：若P_0点属于f的定义域并且f(P)在P_0处有重极限$f(P_0)$，则称f在P_0点连续。若f在其定义域的所有点处都连续，则称其为连续函数。

2. 连续函数的局部性质： (1).若两个n元函数在P_0点处连续，则其和、差、积函数在P_0点处连续。若商函数的分母在P_0点处的值不为0，则商函数在P_0点处连续。

(2). 所有初等多元函数在其自然定义域内都连续。

3. 连续函数的整体性质： (1). 有界闭区域上的n元连续函数必可取到最大、最小值；

(2). 有界闭区域上的n元连续函数必可取到最大、最小值之间的任何值；

(3). 有界闭区域上的n元连续函数必定一致连续；

谢谢!