

1. (2022 级上学期高数, 微积分) 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, (2 分)

特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. (4 分)

对应的齐次方程的通解 $Y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$. (5 分)

设非齐次方程原方程的特解 $y^* = axe^{-x}$, (7 分)

则 $y^{*'} = a(1-x)e^{-x}$, $y^{*''} = a(x-2)e^{-x}$, 代入原方程, 得

$$a(x-2)e^{-x} - 2a(1-x)e^{-x} - 3axe^{-x} = e^{-x}$$

化简, 得 $-4a = 1$, 所以 $a = -\frac{1}{4}$, $y^* = -\frac{1}{4}xe^{-x}$ (9 分)

原方程的通解为 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{4}xe^{-x}$. (10 分)

2. (2021 级下学期工数) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

对应的齐次方程的通解 $Y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. (4 分)

设非齐次方程原方程的特解 $y^* = (ax^2 + bx)e^{2x}$, 则 (7 分)

$$y^{*'} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b)e^{2x}, \quad y^{*''} = (4ax^2 + (8a + 4b)x + (2a + 4b))e^{2x}$$

代入原方程

$$(4ax^2 + (8a + 4b)x + (2a + 4b))e^{2x} - 3(2ax^2 + (2a + 2b)x + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx)e^{2x} = xe^{2x}$$

$$2ax + (2a + b) = x$$

$$\text{故} \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}, \quad y^* = \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)e^{2x} \quad (10 \text{ 分})$$

原方程的通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)e^{2x}$.

(其中 c_1, c_2 是任意常数) (12 分)

3. 若 $f(x)$ 连续, $f(x) = x \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$.

解 $f(x) = x \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt$

两端对 x 求导得 $f'(x) = \sin x + x \cos x - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x)$

$$= \sin x + x \cos x - \int_0^x f(t)dt$$

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x - f(x)$$

得 $\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2 \cos x - x \sin x \\ f(0) = 0, f'(0) = 0 \end{cases}$ 从而 $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 \cos x + 3x \sin x)$.

4. 以 $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x \sin x$, $y_3 = e^x \cos x$ 为特解的最低阶常系数线性齐次微分方程是_____.

解 其特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)=0$, 即 $\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0$, 故所求最低阶常系数线性齐次微分方程是 $y'''-3y''+4y'-2y=0$.

5. 设 $y_1 = x$, $y_2 = x + e^{2x}$, $y_3 = x + xe^{2x}$ 是二阶常系数线性非齐次微分方程的特解, 求该微分方程及其通解.

解 $y_2 - y_1 = e^{2x}$, $y_3 - y_1 = xe^{2x}$ 为对应齐次微分方程的解, 且线性无关. 故所求通解为 $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + x$.

对应齐次微分方程的特征方程为 $(\lambda-2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, 从而对应齐次微分方程为 $y'' - 4y' + 4y = 0$, 设所求方程为 $y'' - 4y' + 4y = Q(x)$, 再将 $y_1 = x$ 代入方程得 $Q(x) = 4(x-1)$.

故所求方程为 $y'' - 4y' + 4y = 4(x-1)$.

6. (2017 级下学期工数期中) 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 则此微分方程为 _____, 此微分方程的通解为 _____.

解 $y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}$ 为对应齐次微分方程的解, 又由 $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$, 知 xe^x 也是非齐次微分方程的解. 从而 e^{2x} 和 e^{-x} 为对应齐次微分方程的解.

对应齐次微分方程的特征方程为 $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 从而对应齐次微分方程为 $y'' - y' - 2y = 0$, 设所求方程为 $y'' - y' - 2y = Q(x)$, 再将 xe^x 代入方程得 $Q(x) = e^x - 2xe^x$ 故所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

此微分方程的通解为 $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + xe^x$