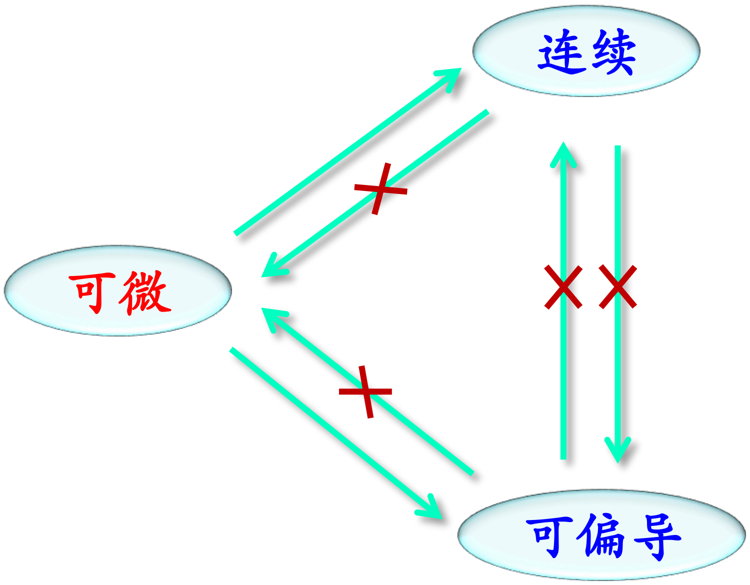
可微的充分条件

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

可微与连续、可偏导:



偏导连续与可微:

定理2: （可微的充分条件）

若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，

则函数 $f(x,y)$ 在该点可微。

注：偏导连续的函数一定可微。

证：由全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= \big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\big)$$

$$+ \big(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\big)$$ （拉格朗日中值定理）

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x$$ $(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$

$$+ f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$ （根据偏导连续）

$$= (f_x(x,y)+\alpha)\Delta x + \big(f_y(x,y)+\beta\big)\Delta y$$

（其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0,\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0$）

即：$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

由极限:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - f_x(x,y)\,\Delta x - f_y(x,y)\,\Delta y}{\rho}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \qquad (|\cdots| \le |\alpha| + |\beta| \to 0)$$

故:函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微。

注：偏导连续一定可微，可微未必偏导连续。

例：证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点处连续，可偏导，可微，但偏导不连续。

证：① （函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续）

当 $x \to 0, y \to 0$ 时，由

$$0 \le \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le |x^2+y^2| \to 0$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

即： $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

② （函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可偏导）

由偏导的定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$$

同理：$f_y(0,0)=0$

故： $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导。

③ （函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微）

由可微的定义，即证

$$\Delta z - f_x(0,0)\,\Delta x - f_y(0,0)\,\Delta y \overset{?}{=} o(\rho)$$

考虑极限：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - f_x(0,0)\,\Delta x - f_y(0,0)\,\Delta y}{\rho}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0$$

故： $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

④（函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点偏导不连续）

由

$$f_x(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

当 $x\to 0, y\to 0$时，由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x^2}=0,$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$ 极限不存在

故：$f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，同理 $f_y(x,y)$也不连续。

总结：