一．填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $P(A)=0.1$，$P(B)=0.5$，且$A\subset B$，则$P(A\cup\overline{B}\mid\overline{A})=$ ______$\frac{5}{9}$______。

2. 一个宿舍有 5 名同学，则没有两名同学的生日在同一个月份的概率为

—$\frac{A_{12}^5}{12^5}$______。

3. 已知一正方形的边长 $X\sim U(0,1)$，那么这个正方形的周长的密度函数

$f(y)=$ ________$\frac{1}{4},0<x<4$__________。

4.一海运船的甲板上放着 20 个装有化学原料的圆桶，现已知其中有 5 桶被海水污染了。若从中随机取 8 桶，X 表示被污染的桶数，

则$EX=$ ____2_____。

5. 已知总体$X\sim N(0,1),X_1,X_2,\cdots,X_n$是一组样本，$\overline{X}$是样本均值。

则$n\overline{X}^2\sim$ _$\chi^2(1)$_________。

二．选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. 将长1米的木棒折成两段，两段的长度分别为X,Y,则$\rho_{XY}=()$ C

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $-\frac{1}{2}$

2. 已知离散型随机向量X的分布律为$P(X=k)=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$.

则$E(-1)^X=()$ A

(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$; (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

3. 下列结论正确的是（ ） B

(A) 分布函数是连续函数。 (B) 分布函数之积是分布函数。

(C) 密度函数是连续函数。 (D) 密度函数之积是密度函数。

4. 下列结论正确的是（ ） C

(A) $P(F(2,3) > \frac{1}{F_{0.01}(3,2)}) = 0.01$ (B) $P(F(2,3) > F_{0.01}(3,2)) = 0.99$

(C) $P(F(2,3) < \frac{1}{F_{0.01}(3,2)}) = 0.01$ (D) $P(F(2,3) < F_{0.01}(3,2)) = 0.99$

三.（10 分）设 $X \sim U(0,1), P(Y=1)=0.2, P(Y=2)=0.5, P(Y=3)=0.3$，且$X,Y$独立。

求：1) $P(XY<1|Y=2)$; 2) $P(XY<1)$.

解：1) $P(XY<1|Y=2) = P(X<\frac{1}{2}|Y=2) = P(X<\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

2) $P(XY<1) = \sum_{i=1}^{3} P(Y=i)P(XY<1|Y=i)$

$$= 0.2 + 0.5 \times \frac{1}{2} + 0.3 \times \frac{1}{3} = 0.55$$

四.（8 分）已知 10 件产品中含有 1 件次品，从中不放回取两件，令

$$X = \begin{cases} 1 & 第一次取到次品 \\ 0 & 否则 \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} 1 & 第二次取到次品 \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

求 1) $Cov(X,Y)$; 2) $D(X+Y)$。

解：1) $EX = EY = \frac{1}{10}, DX = DY = \frac{9}{100}, EXY = 0$

$$Cov(X,Y) = 0 - \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = -\frac{1}{100}$$

2) $D(X+Y) = DX + DY + 2Cov(X,Y) = \frac{16}{100}$

五．（15 分）设 (X,Y) 的联合密度函数为：$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),x,y\in R$

求 1）边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$,；并判断 X 与 Y 是否独立；

2）条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $P(Y<0|X=0)$

解：1) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f(x,y)\neq f_Y(y)f_X(x)$

不独立

2) $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)$

$f_{Y|X}(y|0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$P(Y<0|X=0)=\frac{1}{2}$

六. （15分）设X、Y的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.3	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.2

求 1) $P(Y=0\mid X=1)$ ；2) $Z=\min\{X,Y\}$的分布律；3) X与Y是否不相关。

解:1) $P(Y=0\mid X=1)=\dfrac{0.1}{0.4}=\dfrac{1}{4}$

2) $P(Z=-1)=0.4, P(Z=0)=0.4, P(Z=1)=0.2$

3) $EX=0.4, EY=-0.1, EXY=0.1$

$EXY \neq EXEY$

相关

七.（10分）已知总体$X\sim e(\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，求 $\dfrac{1}{\theta}$ 的最大似然估计，并判定是不是无偏估计量。

解：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta e^{-\theta x_i}=\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$\widehat{\frac{1}{\theta}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{X}$$

$$E\widehat{\frac{1}{\theta}}=E\bar{X}=\frac{1}{\theta}$$

是无偏估计。

八.（15 分）已知$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,从两总体中各抽取9个样本。

$\bar{X}=8.7, \bar{Y}=8.9, S_1^2=0.81, S_2^2=0.25, (z_{0.025}=1.96, F_{0.05}(8,8)=3.44)$

1）若$\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.95的置信区间;

2）检验$H_0:\sigma_1^2 \le \sigma_2^2 \quad H_1:\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad (\alpha=0.05)$

解 1）利用$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$

有$P\left(z_{1-\alpha/2} \le \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \le z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha=0.95$

置信区间$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}-\bar{Y})-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$

代入$n_1=n_2=9, \sigma_1^2=\sigma_2^2=1, \bar{X}=8.7, \bar{Y}=8.9,$

$z_{\alpha/2}=1.96, z_{1-\alpha/2}=-1.96$

得到$[-1.12,0.72]$

2)检验统计量$F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

假设$H_0:\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$P\left(F > F_\alpha(n_1-1,n_2-1)\right)=\alpha$

拒绝域为$F > F_{0.05}(8,8)=3.44$

将$S_1^2=0.81, S_2^2=0.25$代入得到$F=3.24$

接受原假设。