日期： / /

主题：概率统计关键公式集锦 [6.1&6.2] 常用统计量

[6.1] 总体、样本、统计量

1. 定义 [总体]：研究对象全体；
   [个体]：每个研究对象；
   [样本]：试验中抽样得到的部分个体
   $X_1, X_2, \dots, X_n$
   [样本观测值]：$x_1, x_2, \dots, x_n$

☆ 样本独立同分布

☆ 2. 样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{估计}} \mu = E(X)$

☆ 3. 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \xrightarrow{\text{估计}} \sigma^2 = D(X)$

☆ 4. 样本k阶原点矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \ (k=1,2,\dots) \xrightarrow{\text{估计}} E(X^k)$

[6.2] χ^2、t、F

χ^2 1. $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ [可加] [不对称]

☆ 2. $E[\chi^2(n)] = n$, $D[\chi^2(n)] = 2n$

t 3. 设 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$, $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, X Y 独立

[对称]

F 4. $F = \frac{X/n}{Y/m}$, $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$, X Y 独立

[不对称]

☆ 5. $F(m,n) = \frac{1}{F(n,m)}$

☆ 6. $t \sim t(n)$ 则 $t^2 \sim F(1,n)$

☆ 7. $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}} \sim t(2)$

☆ 8. $\frac{X_1}{|X_2|} \sim t(1)$

总结：

日期： / /

主题：概率统计关键公式集锦[6.3]正态总体抽样

[6.3.1]单总体抽样分布。

☆ 1. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

☆ 2. $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$ 且 $\overline{X}$ 与 S^2 独立

☆ 3. $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

☆ 4. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

[6.3.2]双正态总体抽样分布

☆ 1. $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$

☆ 2. $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n-1, m-1)$

☆ 3. 若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，则

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t(n-m+2)$$

$$S_w=\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}$$

☆ 4. $U=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{S_n}$ 服从 $t(n-1)$ 分布

证明：$\overline{X_n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X_{n+1}-\overline{X_n} \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$

且 X_{n+1}，$\overline{X_n}$，S_n^2 三者两两独立

$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\frac{n}{\sigma^2}S_n^2 \sim \chi^2(n-1)$

总结：

$$\frac{\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}\frac{S_n^2}{n-1}}}=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{S_n} \sim t(n-1)$$

日期：　/　/

主题：概率统计关键公式集锦 [6.4] α分位点

[6.4] α分位点

1. $P\{Z > Z_\alpha\} = \alpha$，$Z \sim N(0,1)$，$\alpha \in (0,1)$

2. $Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$

3. $P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$，$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

4. $P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$，$t \sim t_\alpha(n)$

5. $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

6. $P\{F > F_\alpha(n,m)\} = \alpha$，$F \sim F(n,m)$

7. $F_{1-\alpha}(n,m) = \dfrac{1}{F_\alpha(m,n)}$

总结：