§8.6 多元数量值函数积分应用举例

一、静矩、质心、转动惯量

二、引力

几何应用：$\begin{cases} \text{立体的体积} \\ \text{曲面的面积} \\ \text{直柱面的面积} \end{cases}$

一、静矩、质心、转动惯量

● 单个质点：质量为m，坐标为(x,y,z)

● 质点对xOy坐标面、yOz坐标面、zOx坐标面的静矩：

$$M_{xy}=z\cdot m,\ M_{yz}=x\cdot m,\ M_{zx}=y\cdot m$$

● 质点的坐标：

$$x=\frac{M_{yz}}{m},\ y=\frac{M_{zx}}{m},\ z=\frac{M_{xy}}{m}$$

● 质点对x轴、y轴、z轴的转动惯量：

$$I_x=m(y^2+z^2),\ I_y=m(x^2+z^2),\ I_z=m(x^2+y^2)$$

● 质点对直线ℓ的转动惯量：$I_\ell=m\cdot d^2$

(d为质点到直线ℓ的距离)

- n个质点构成的质点系：质量为m_i，坐标为(x_i, y_i, z_i)

- 质点系对xOy坐标面、yOz坐标面、zOx坐标面的静矩：

$$M_{xy}=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i,\quad M_{yz}=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,\quad M_{zx}=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

- 质点系的质心坐标$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$：

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\quad \bar{y}=\frac{M_{zx}}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

- 质点系对x轴、y轴、z轴的转动惯量：

$$I_x=\sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2+z_i^2),\quad I_y=\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2+z_i^2),\quad I_z=\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2+y_i^2)$$

- 空间几何形体Ω：质量分布不均匀，密度为$\rho=\rho(x,y,z)$

(平面区域D、空间立体V、曲线段L、空间曲面S) 微元法

- 几何形体Ω对xOy坐标面、yOz坐标面、zOx坐标面的静矩：

$$M_{xy}=\int_{\Omega} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$M_{yz}=\int_{\Omega} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$M_{zx}=\int_{\Omega} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega$$

几何形体Ω的质量

$$m=\int_{\Omega} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega$$

- 质点系的质心坐标$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$：

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\int_{\Omega} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega},\quad \bar{y}=\frac{M_{zx}}{m}=\cdots,\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\cdots$$

- 几何形体Ω对x轴、y轴、z轴的转动惯量：

$$I_x=\int_{\Omega}\rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$I_y=\int_{\Omega}\rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$I_z=\int_{\Omega}\rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\Omega$$

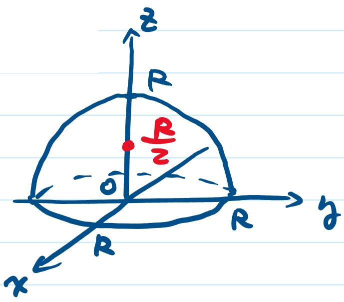
- 几何形体Ω对直线ℓ的转动惯量：

$$I_\ell=\int_{\Omega}\rho(x,y,z)\cdot d^2\,\mathrm{d}\Omega \quad (d\text{为}(x,y,z)\text{到直线}\ell\text{的距离})$$

- **二重积分、三重积分、第一型曲线积分、第一型曲面积分**

例1：求均匀半球面$S: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的质心坐标.

对z轴的转动惯量(密度$\rho=1$).



解：设 $\rho(x,y,z)=\rho_0$.　$(\rho_0=1)$

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_S x\cdot\rho_0\,dS}{\iint\limits_S \rho_0\,dS}=\frac{\iint\limits_S x\,dS}{\iint\limits_S dS}=0$$

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_S y\,dS}{\iint\limits_S dS}=0.$$ (由S关于xoz、yoz平面对称)

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_S z\,dS}{\iint\limits_S dS}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$$

$$\left(\text{由}\ \iint\limits_S z\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=R\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy=\pi R^3\right.$$

$$\left.\iint\limits_S dS=2\pi R^2.\right)$$

$$I_z=\iint\limits_S \rho(x,y,z)\cdot(x^2+y^2)\,dS=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS.\quad(\rho=1)$$

$$=\frac{1}{2}\oiint\limits_{Ⓢ}(x^2+y^2)\,dS=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\oiint\limits_{Ⓢ}(x^2+y^2+z^2)\,dS$$

$$=\frac{1}{3}R^2\oiint\limits_{Ⓢ}dS=\frac{4}{3}\pi R^4.$$

$$\Rightarrow I_x=I_y=I_z=\frac{4}{3}\pi R^4.$$

ℓ为过$(0.0.0)$的任一直线.

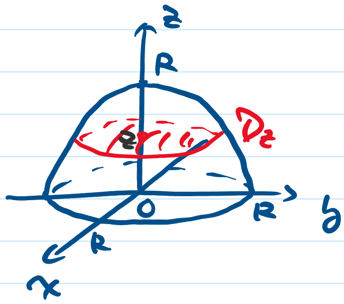
$$I_\ell = \iint_S d^2\, dS = \frac{4}{3}\pi R^4$$

$\ell: \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$

$d^2 = \cdots$

例2：求均匀上半球体$V: 0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$的质心坐标.

对z轴的转动惯量(密度$\rho = 1$). (对直线$\ell: x = y = z$)



解：由对称性. $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z\, dV}{\iiint_V dV} = \frac{\frac{\pi}{4}R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R$$

$$\left(由 \iiint_V z\, dV = \int_0^R z\, dz \iint_{D_z} dx\,dy = \int_0^R z \cdot \pi(R^2 - z^2)\, dz = \pi R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{4}R^4 \right.$$

$$\left. \iiint_V dV = \frac{2}{3}\pi R^3 \right)$$

$$I_z = \iiint_V \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\, dV = \iiint_V (x^2+y^2)\, dV$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_{V} (x^2+y^2)\, dV = \frac{1}{3} \iiint_{V} (x^2+y^2+z^2)\, dV$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho$$

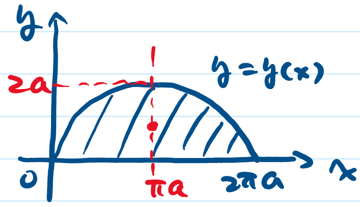
$$= \frac{4}{15}\pi R^5.$$

$$I_x = I_y = I_z = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

$$I_\ell = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

例3: 求由摆线的一拱 $L:\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(0\le t\le 2\pi, a>0)$ 和 x 轴所围的均匀平面薄片的质心坐标(密度 $\rho=1$).

解：由对称性. $\Rightarrow$ $\bar{x}=\pi a$.



$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy}=\pi a$$

由 $\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}dy=\int_0^{2\pi a}y(x)\,dx$

$$\xlongequal{令 x=a(t-\sin t)}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=3\pi a^2$$

$$\iint_D x\,dxdy=\int_0^{2\pi a}x\,y(x)\,dx=\cdots=3\pi^2a^3.$$

由 $\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy}=\dfrac{\frac{5}{2}\pi a^3}{3\pi a^2}=\dfrac{5}{6}a$

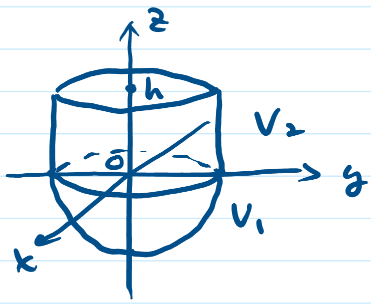
由 $\iint_D y\,dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}y^2(x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\,dt=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt$$

$$=\frac{5}{2}\pi a^3$$

例4: 有一半径为 a 的均质半球体 V_1，在其大圆上拼接一个材质相同的半径为 a 的圆柱体 V_2，当圆柱体的高为多少时，拼接后的的立体 V 的质心恰好在球心.

解：由对称性. $\bar{x}=\bar{y}=0$.



要使 $\bar{z}=0$.

即： $\bar{z}=\dfrac{\iiint_V z\,dV}{\iiint_V dV}=0$

$$\iiint_{V_1} z\,dV=-\frac{3}{8}a\cdot\iiint_{V_1}dV=-\frac{1}{4}\pi a^4.$$

$$\Rightarrow 0=\iiint_V z\,dV=\iiint_{V_1}z\,dV+\iiint_{V_2}z\,dV$$

$$=-\frac{1}{4}\pi a^4+\int_0^h z\,dz\iint_{D_z}dxdy.$$

$$= -\frac{1}{4}\pi a^4 + \int_0 z\,dz \iint_{D_z} dx\,dy.$$

$$= -\frac{1}{4}\pi a^4 + \frac{h^2}{2}\cdot \pi a^2$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

例5： 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 对 z 轴的转动惯量(密度 $\rho=1$).

解：$I_z = \oint_L \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)\,ds = \oint_L (x^2+y^2)\,ds$

$$= \frac{2}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\,ds$$

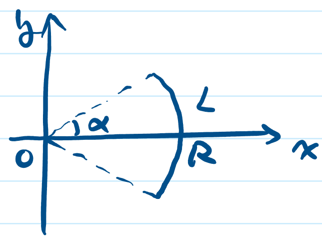
$$= \frac{2}{3}R^2 \oint_L ds$$

$$= \frac{2}{3}R^2 \cdot 2\pi R$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3.$$

例6： 求半径为 R, 圆心角为 2α 的圆弧 L 对它的对称轴的转动惯量(密度 $\rho=1$).

解：$I_x = \int_L \rho\cdot y^2\,ds = \int_L y^2\,ds$



$L:\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\theta \cdot R\,d\theta$$

$$= 2R^3\int_0^{\alpha} \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= R^3\int_0^{\alpha}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= R^3\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

$$= R^3\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

二、引力

● 两个质点: 质量分别为m_1和m_2, 距离为r

一个质点对另一个质点的引力大小为: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

● 几何形体Ω(密度$\rho(x,y,z)$)对其外一质点m_0的引力: **微元法**

$$\mathrm{d}\vec{F} = G\frac{m_0\,\mathrm{d}m}{r^2}\vec{r^0},\quad \text{单位向量}\ \vec{r^0} = \frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{r}$$

$$= G\frac{m_0\rho(x,y,z)}{r^3}\mathrm{d}\Omega\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

● 设$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 则有 $\boxed{\left(r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right)}$

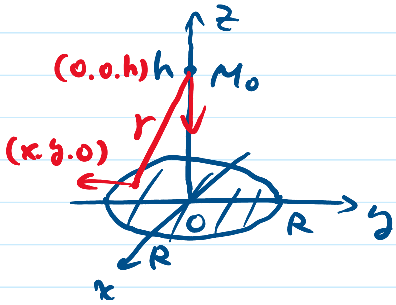
$$F_x = \int_\Omega G\frac{m_0\rho(x,y,z)\cdot(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}\Omega$$

$$F_y = \int_\Omega G\frac{m_0\rho(x,y,z)\cdot(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}\Omega,\quad F_z = \cdots$$

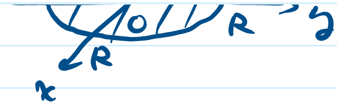
例7: 设有一半径为R, 密度为常数ρ的圆板, 在板中心垂线上有一质量为1的质点M_0, 距板中心距离为h, 求圆板对质点的引力.

解: 由对称性. $F_x = F_y = 0$

由 $F_z = \iint\limits_D G\dfrac{1\cdot\rho\cdot(0-h)}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy$



$= \cdots \iint \dfrac{1}{\cdots}\,dxdy$



$$= -G\rho h \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy$$

$$= -G\rho h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{1}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot r dr$$

$$= -2\pi G\rho \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

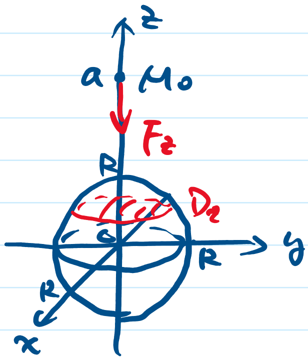
$$\Rightarrow \vec{F} = -2\pi G\rho \left(0.\ 0.\ 1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

例8: 设半径为R的均质球(密度$\rho=\rho_0$)占有空间闭区域

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}$$

求它对位于$M_0(0,0,a)$ $(a>R)$处质点m_0的引力.

解: 由对称性. $F_x = F_y = 0$.



$$F_z = \iiint_V G \frac{m_0 \rho_0 (z-a)}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} dV$$

$$= G m_0 \rho_0 \iiint_V \frac{z-a}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} dV$$

$$= G m_0 \rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a) dz \iint_{D_z} \frac{1}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy$$

$D_z: x^2+y^2 \le R^2 - z^2$

$$= \cdots$$

$$= -G \frac{m_0 M}{a^2} \quad \left(M = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \rho_0\right)$$