大 连 理 工 大 学

课 程 名 称: 线性代数与解析几何　　试 卷: A　　试卷形式: 闭卷

授课院(系): 数学科学学院　考试日期; 2016年6月20日　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
标准分	30	12	10	8	10	14	8	8	100
得 分									

注: $\mathbf{E}$为单位矩阵, $|\mathbf{A}|$, $\det(\mathbf{A})$均为$\mathbf{A}$的行列式, $\mathbf{A}^*$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵, $\mathbf{A}^T$为$\mathbf{A}$ 的转置矩阵, $\mathrm{r}(\mathbf{A})$为$\mathbf{A}$的秩.

一. 填空题(3分×10 = 30 分)

1. 已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{pmatrix}$, 则$|\mathbf{A}|=$______.

2. 设$\mathbf{a_1}=(1,3,2)^T,\mathbf{a_2}=(2,3,1)^T,\mathbf{a_3}=(4,9,5)^T$, V是由$\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$生成的向量空间，$V$的维数$\dim(V)=$______.

3. 设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 是一线性无关的向量组, 若向量组$\mathbf{a}_1+k\mathbf{a_2},\mathbf{a}_2-k\mathbf{a_3},\mathbf{a}_3+\mathbf{a_1}$的秩为2，则$k$满足______.

4. 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*$的相似标准形为=

______

5. 已知$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A^2}+\mathbf{A}-\mathbf{7E}=\mathbf{O}$, 则$(\mathbf{A}+\mathbf{3E})^{-1}=$______

6. 在空间直角坐标系$\mathbf{Oxyz}$ 中，过点$(0,0,4)$且与平面$6x-4y+3z-1=0$平行的平面的截距式方程为______.

7. 在空间直角坐标系$Oxyz$中，$\vec{\mathbf{a}}=2\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}-2\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}$, 求一个即垂直向量$\vec{\mathbf{a}}$又垂直于向量$\vec{\mathbf{b}}$的单位向量______.

8. 设矩阵$\mathbf{A}$经初等变换化为矩阵$\mathbf{C}$: $\mathbf{A}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\mathbf{B}\xrightarrow{r_2+2r_1}\mathbf{C}$, 则

$\mathbf{C}=$______.

9. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+2kx_2x_3+4x_2^2+x_3^2$为正定二次型，则$k$的取值范围为__________.

10. 二次型$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}\mathbf{x}$ 的矩阵为= __________

二. 单项选择题(2分×6 = 12分).

1. 已知$\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_4}$是齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系, 下列哪组向量也是方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系(　　).

(A) $\boldsymbol{\eta_1}+\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_2}+\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_3}+\boldsymbol{\eta_4},\boldsymbol{\eta_4}+\boldsymbol{\eta_1}$ (B) 与$\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_4}$等价的向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$

(C) $\boldsymbol{\eta_1}-\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_2}-\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_3}-\boldsymbol{\eta_4},\boldsymbol{\eta_4}-\boldsymbol{\eta_1}$ (D) 与$\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_4}$等秩的向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$

2. 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为$n(n>1)$阶正定矩阵，下列结论不正确的是(　　).

(A) $\mathbf{2A^{-1}}$是正定矩阵 (B) $\mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$是正定矩阵

(C) $\mathbf{3A}+\mathbf{2B}$是正定矩阵 (D) $\mathbf{AB}$是正定矩阵

3. 设矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{P}$均为$n$阶矩阵，若$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$, 且$\mathbf{P}$可逆，则(　　).

(A) $\mathbf{A}$的行向量组与$\mathbf{B}$的行向量组的极大无关组一一对应

(B) $\mathbf{A}$的列向量组与$\mathbf{B}$的列向量组等价

(C) $\mathbf{A}$的列向量组与$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组一一对应

(D) $\mathbf{P}$的列向量组与$\mathbf{B}$的列向量组等价

4. 已知$\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_3}$是一组线性无关的3元列向量组，$\mathbf{A}$为3阶方阵，且$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta_1}=\boldsymbol{\eta_1},\mathbf{A}\boldsymbol{\eta_2}=\mathbf{2}\boldsymbol{\eta_2},\mathbf{A}\boldsymbol{\eta_3}=\mathbf{2}\boldsymbol{\eta_3}$, 下列那组向量均是$\mathbf{A}$的特征向量(　　)

(A) $\mathbf{3}\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2}-\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_2}+\mathbf{2}\boldsymbol{\eta_3}$ (B) $\boldsymbol{\eta_1}+\mathbf{2}\boldsymbol{\eta_2},\mathbf{2}\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_1}+\boldsymbol{\eta_2}$

(C) $\boldsymbol{\eta_1}+\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_2}+\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_3}+\boldsymbol{\eta_1}$ (D) $\boldsymbol{\eta_1}+\boldsymbol{\eta_2}+\boldsymbol{\eta_3},\boldsymbol{\eta_1}+\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_1}$

5. 空间直角坐标系$Oxyz$中，直线l与平面π的方程分别为

$$l:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3},\qquad \pi:\ x+2y-3z-11=0,$$

则(　　)

(A) l,π相交但不垂直 (B) l,π垂直相交

(C) l,π平行 (D) l在π上

6. 设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$是3阶非零矩阵，$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*=\mathbf{A^T}$, 则(　　).

(A) $\mathrm{r}(\mathbf{A}^*)=0$ (B) $\mathrm{r}(\mathbf{A}^*)=1$ (C) $\mathrm{r}(\mathbf{A}^*)=2$ (D) $\mathrm{r}(\mathbf{A}^*)=3$

三. (10分) 求向量组

$$\mathbf{a_1}=(-1,1,-1,-1)^T,\mathbf{a_2}=(1,1,0,-1)^T,\mathbf{a_3}=(2,4,-1,-4)^T,\mathbf{a_4}=(2,1,0,-5)^T$$

的秩及一个极大线性无关向量组，并将其余向量用极大线性无关向量组线性表示.

四. (8分) 已知$\mathbf{R}^3$的两个基

$$\mathbf{a_1}=(1,1,1)^T,\mathbf{a_2}=(1,1,0)^T,\mathbf{a_3}=(1,0,0)^T;\quad \mathbf{b_1}=(1,2,-2)^T,\mathbf{b_2}=(-2,2,1)^T,\mathbf{b_3}=(2,1,2)^T.$$

求从基$\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$到基$\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\mathbf{b_3}$的过度矩阵$\mathbf{P}$.

五. (10分) 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & -6 & -3\\ 0 & 1 & k\end{pmatrix}$, k为何值时，存在秩为1的3阶矩阵$\mathbf{B}$, 使得$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, 并求出所有满足条件的矩阵$\mathbf{B}$.

六. (14分) 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$,

(1) 求一个正交矩阵$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{Q^{-1}AQ}$为对角矩阵;

(2) 求出矩阵$\mathbf{A}$的合同标准形；

(3) 在空间直角坐标系$\mathbf{Oxyz}$ 中，方程$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})^{\mathbf{T}}=1$表示何种曲面.

七. (8分) 设$\mathbf{a}, \mathbf{b}$均为$n(n>1)$元列向量，且$\mathbf{a}, \mathbf{b}$不正交，$\mathbf{A}=\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}$. 证明：$\mathbf{A}$可相似对角化.

八. (8分) 设n阶矩阵$\mathbf{A}$的列分块为$\mathbf{A}=(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n})$，且$\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_{n-1}}$线性无关，$\mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$线性相关, $\mathbf{b}=\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}+\cdots+\mathbf{a_n}$. 证明，若$\mathbf{c}=(c_1, \ldots, c_n)^T$是方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$的解向量，则$c_1=1$.