3 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

当$p(x)=p$，$q(x)=q$时，称

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (10)$$

为二阶常系数非齐次线性微分方程。

当右端项f(x)为一些特殊函数，例如

一、 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$

二、 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$

待定系数法

3 二阶常系数非齐次线性微分方程

一、$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad y^*(x)=Q(x)e^{\lambda x}$$

其中$\boldsymbol{Q(x)}$为某一待定多项式.

$$y^{*'}(x)=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)],$$

$$y^{*''}(x)=e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)],$$

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x) \qquad (11)$$

（Ⅰ）λ不是特征方程$r^2+pr+q=0$的根，则$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$.

$$Q(x)=Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m,$$

$$y^*(x)=Q_m(x)e^{\lambda x}.$$

3　二阶常系数非齐次线性微分方程

（II）λ是特征方程$r^2+pr+q=0$的单根, 则$\lambda^2+p\lambda+q=0$,　但$p+2\lambda\neq 0$

$Q'(x)$必为m次多项式

$$\mathrm{Q}(x)=x\mathrm{Q}_m(x)=x(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m),$$

特解

$$y^*(x)=xQ_m(x)e^{\lambda x}.$$

（III）λ是特征方程$r^2+pr+q=0$的二重根,则$\lambda^2+p\lambda+q=0$,且$p+2\lambda=0$.

$$\mathrm{Q}（x）=x^2Q_m(x)=x^2(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_0),$$

$$y^*(x)=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}.$$

综上所述可得下述结论

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$$

$$y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

k 按照λ不是特征方程$r^2+pr+q=0$根、是单根和是二重根而依次取为0,1,2。

2 通解的求法

例题　求方程$2y''+y'+5y=x^2+3x+2$的一个特征解。

解：$f(x)=x^2+3x+2=e^{0x}(x^2+3x+2)$ $\lambda=0, P_m(x)=x^2+3x+2$，m=2.

齐次方程$2y''+y'+5y=0$, 特征方程$2r^2+r+5=0$ 显然$\lambda=0$不是特征方程的根。

$y^*(x)=e^{\lambda x}x^kQ_m(x)=e^{0x}Q_2(x)=ax^2+bx+c$　　（＊）

$y^{*\prime}(x)=2ax+b, y^{*\prime\prime}(x)=2a$

$$5ax^2+(2a+5b)x+(4a+b+5c)=x^2+3x+2.$$

$$\begin{cases} 5a=1 \\ 2a+5b=3 \\ 4a+b+5c=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1/5 \\ b=13/25 \\ c=17/125. \end{cases}$$

$$y^*(x)=1/5x^2+13/25x+17/125.$$

□

例题　求方程$y''-3y'+2y=xe^x$的通解.

解：该方程相应的齐次方程为　$y''-3y'+2y=0.$

其特征方程为　$r^2-3r+2=0.$

其特征根分别为 $r=1, r=2.$

所以齐次方程通解为　$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

由于λ=1是特征方程的单根，故k=1. 另外，由于$P_m(x)=x, \Rightarrow m=1.$

因此原方程的特解可设为　$y^*=x(ax+b)e^x.$

$y''-3y'+2y=xe^x, \Rightarrow -2ax+2a-b=x$　$\Rightarrow -2a=1, 2a-b=0$，$a=-\frac{1}{2}, b=-1.$

特解　$y^*=x(ax+b)e^x=-(\frac{x^2}{2}+x)e^x.$　　通解　$y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-(\frac{x^2}{2}+x)e^x.$

谢谢！