交错级数判别法

主讲人：刘秀平 教授

交错级数判别法

所谓的交错级数是这样的级数，它的各项是正负交错的，

从而可写成下面的形式：

u_1-$u_2+u_3-u_4+\cdots$,(1)

或者　　-u_1+u_2-u_3+u_4-$\cdots$,(2)

其中，u_1，u_2,$\cdots$，u_{n},$\cdots$都是正数。

以下按照（1）来介绍交错级数的性质，对于（2）是类似的。：

(1) 一般可以表示成$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1$-$u_2+u_3-u_4+\cdots$

关于(1)，我们有如下定理：

定理（莱布尼兹定理）如果交错级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件：

(1) $u_n\geq u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$;　(2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

则交错级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$是收敛的，且其和$s\leq u_1$，余项$|r_n|\leq u_{n+1}$.

交错级数判别法

证明：（I）$s_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{2n}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}.$

$=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\geq 0.$(3)

$=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}\leq u_1.$(4)

所以，s_{2n}是非负有界数列。又由于$s_{2n+2}=s_{2n}+u_{2n+2}$。

所以，s_{2n}是单调有界数列。从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}$存在。

其次，$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$知，$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n+1}$存在。

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s\leq u_1$。

（II）$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots)$，$|r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots$。

由（I）知，$|r_n|\leq u_{n+1}$。

交错级数判别法

例题1 判断下列级数的敛散性.

$1.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}(p>0).2.\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}.3.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(1+n)}{n+1}.$

解：$1.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}(p>0),\Rightarrow u_n=\frac{1}{n^p}\downarrow 0.$由莱布尼兹判别法知，

交错级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$是收敛的。特别当$p=1$时，$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$是收敛的。

$2.\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}$，由于$\cos n\pi=(-1)^n$，

因此$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n}}$。

注意$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\downarrow 0.$由莱布尼兹判别法知，

交错级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}$是收敛的。

交错级数判别法

$$3.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(1+n)}{n+1}, u_n=\frac{\ln(1+n)}{n+1}=f(n),$$

于是$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}$.

$$f'(x)=\left(\frac{\ln(1+x)}{x+1}\right)'=\frac{1-\ln(1+x)}{(x+1)^2}<0,\quad 当x>5.$$

所以，$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}\downarrow$，当$x>5$.

另外，由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

因此，有$u_n=\dfrac{\ln(1+n)}{n+1}\downarrow 0$。由莱布尼兹判别法知，

交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln(1+n)}{n+1}$是收敛的。

交错级数判别法

例题2 设α为实数，讨论级数$1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots$的敛散性。

解：（I）当$\alpha=1$时，所求级数为$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$是收敛的。

（II）当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$是收敛的，但是级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n\text{-}1}$是发散的。

所以，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2n\text{-}1}-\frac{1}{(2n)^\alpha})$ 是发散的。

由此知,$1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots$是发散的。

（加括号后级数发散，原级数一定是发散的）。

交错级数判别法

（III）当$\alpha<1$时，将级数加括号后为

$$1-\left(\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^{\alpha}}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{6^{\alpha}}-\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{(2n)^{\alpha}}-\frac{1}{2n+1}\right)-\cdots$$

除第一项外，均为负数。

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)^{\alpha}}-\frac{1}{2n+1}\right)$是正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n)^{\alpha}}-\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n^{\alpha}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-(2n)^{\alpha}}{(2n+1)2^{\alpha}}=\frac{1}{2^{\alpha}}.$

说明，该级数与α-级数具有相同的敛散性。

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)^{\alpha}}-\frac{1}{2n+1}\right)$是发散的。

从而级数$1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$是发散。

综上可知，只有当$\alpha=1$时，级数$1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$是收敛的。

谢谢！