大连理工大学
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# 二阶非齐线性微分方程通解的解法

主讲人：刘秀平 教授

# 通解的求法

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

# 通解的求法

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

通解为$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

通解为$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$ （1）

其中$C_1(x)$，$C_2(x)$是待定函数。

# 通解的求法

$$y'(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)+C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x),$$

$$y''(x)=C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+2[C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)]$$

$$+C_1''(x)y_1(x)+C_2''(x)y_2(x),$$

$$\text{左端}=C_1(x)\underline{[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)]}+C_2(x)\underline{[y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)]}$$

$$+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+[C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)]p(x)$$

$$+[C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)]'p(x)=f(x) \tag{2}$$

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+[C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)]p(x)$$

$$+\underline{[C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)]'p(x)}=f(x) \tag{3}$$

# 通解的求法

选择$C_1(x),C_2(x)$

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0. \qquad (4)$$

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x), \qquad (5)$$

将（4）式和（5）式联立, 得方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0. \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x), \end{cases} \qquad (6)$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$C_1'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)},C_2'(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}. \qquad (7)$$

# 2 通解的求法

$$C_1(x)=C_1+\int -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx,$$

$$C_2(x)=C_2+\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx,$$

代入(1)

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)-y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx \tag{8}$$

$C_1,C_2$为任意常数。

□

## 通解的求法

例题 求非齐次线性微分方程 $y''+y=\sec x$ 的通解.

解：首先方程$y''+y=\sec x$对应的齐次方程为

$$y''+y=0.$$

该方程的特征方程为

$\lambda^2+1=0$, 相应的特征根为$\lambda_{1,2}=\pm \mathrm{i}$.

因此, 齐次方程的通解为

$$Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

设方程$y''+y=\sec x$的通解为

$$y(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x.$$

## 通解的求法

由于$y_1(x)=\cos x$，$y_2(x)=\sin x$，$f(x)=\sec x$,

$$因此W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=1.$$

$$C_1'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}=-\sin x\sec x=-\tan x.$$

$$\Rightarrow C_1(x)=\ln|\cos x|+C_1.$$

$$C_2'(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}=1,\Rightarrow C_2(x)=x+C_2.$$

因此方程$y''+y=\sec x$的通解为

$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x.$

其中$C_1$，$C_2$是任意常数。

谢谢！