根值判别法（柯西判别法）

主讲人：刘秀平 教授

根值判别法

定理（根值判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，$u_n>0$（$n>N$），且$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho.$

则（I）当$\rho<1$时，级数$\sum_{n=1} u_n$收敛；

（II）当$\rho>1$(或$\rho=+\infty$)时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

（III）当$\rho=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛，可能发散。

证明：(I)首先，由$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$,知，

对$\in=\frac{1-\rho}{2}>0,\exists N$,当$n\geq N$时, 有

$$-\frac{1-\rho}{2}<\sqrt[n]{u_n}-\rho<\frac{1-\rho}{2}.n\geq N \qquad (1)$$

即 $$u_n<(\frac{1+\rho}{2})^n u_n \overset{\Delta}{=} \bar{\rho}^n u_n, n\geq N \qquad (2)$$

其中 $\bar{\rho}=\frac{1+\rho}{2}<1.$

因此，由等比级数的收敛性知,$\sum_{n=N}^{\infty} u_n$是收敛，

所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

根值判别法

（II）当$\rho > 1$(或$\rho=+\infty$)时，

由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$,知，

对$\in = \dfrac{\rho-1}{2} > 0, \exists N$,当$n \geq N$时, 有

$$-\frac{1-\rho}{2} < \sqrt[n]{u_n} - \rho < \frac{1-\rho}{2}. n \geq N \qquad (3)$$

即 $$u_n > \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^n u_n \overset{\Delta}{=} \bar{\rho}^n u_n, n \geq N \qquad (4)$$

其中 $\bar{\rho} = \dfrac{1+\rho}{2} > 1.$

因此，由等比级数的发散性知,$\sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n$是发散的，

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

（III）当$\rho=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛，可能发散。

例如$u_n = \dfrac{1}{n^p}. \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1.$

根值判别法

例题 判断下列级数的敛散性

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n\quad 2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}\quad 3.\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}\quad 4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}\quad 5.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\alpha n}.$$

解：$1.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n \quad \Rightarrow u_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}<1,$

因此，由根值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$ 是收敛的。

$$2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}\Rightarrow u_n=\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1。$$

因此，由根值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ 是收敛的。

$$3.\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n},\Rightarrow u_n=2^{-n-(-1)^n},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}}=\frac{1}{2}<1.$$

因此，由根值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$ 是收敛的。

$$4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n},\frac{1}{2^n}\le u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}\le\frac{1}{2}，\ 即\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}<1.$$

因此，由根值法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 是收敛的。

$$5.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\alpha n},u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\alpha n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\alpha}=\frac{1}{2^\alpha}=\begin{cases}收敛，当\alpha>0时，\\ 发散，当\alpha<0时，\\ 发散，当\alpha=0时。\end{cases}$$

谢谢！