1、利用积分域的对称性、函数的奇偶性

(1) 空间曲面S关于Oxy坐标面对称时，

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & 若f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & 若f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中S_1是S在Oxy坐标面上方(或下方)的部分.

(2) 空间曲面S关于Oyz坐标面对称时，

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & 若f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & 若f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中S_1是S在Oyz坐标面前侧(或后侧)的部分.

(1) 空间曲面S关于Ozx坐标面对称时，

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & 若f(x,-y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & 若f(x,-y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中S_1是S在Ozx坐标面左侧(或右侧)的部分.

2、轮换对称性

(1) 空间曲面S关于平面$y=x$对称时，

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_S f(y,x,z)\mathrm{d}S，$$

即 被积函数中的x和y可以对调.

(2) 空间曲面S关于平面$z=y$对称时，

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_S f(x,z,y)\mathrm{d}S，$$

即 被积函数中的y和z可以对调.

(3) 空间曲面S关于平面$x=z$对称时，

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S f(z,y,x)\,\mathrm{d}S\text{，}$$

即 被积函数中的z和x可以对调.

1. 计算$I=\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，其中$S$是半球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geq 0$ $(a>0)$.

解 由于S关于Oyz坐标面和Ozx坐标面对称， x是x的奇函数，y是y的奇函数，所以

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}S=\iint\limits_S y\mathrm{d}S=0$$

S在Oxy平面的投影区域为$D_{xy}:x^2+y^2\leq a^2$ ，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3$$

2. 计算$I=\iint\limits_S (ax+by+cz)^2\mathrm{d}S$，其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$

解 由S的对称性和被积函数的奇偶性

$$\iint\limits_S xy\mathrm{d}S=\iint\limits_S yz\mathrm{d}S=\iint\limits_S zx\mathrm{d}S=0$$

由轮换对称性

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{R^2}{3}\iint\limits_S \mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi R^4$$

$$I=\iint\limits_S (ax+by+cz)^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S [a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx)]\mathrm{d}S$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{4}{3}\pi R^4=\frac{4}{3}\pi R^4(a^2+b^2+c^2)$$

3. 计算$\iint\limits_S (x+2y+xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}S$，$S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$

解　对称性　$\iint\limits_S x\mathrm{d}S=\iint\limits_S y\mathrm{d}S=\iint\limits_S xy\mathrm{d}S=0$，

再轮换对称性　$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S$，则

$$I=\iint\limits_S (3x^2+4y^2)\mathrm{d}S=7\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=7\cdot\frac{1}{3}\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{7}{3}a^2\iint\limits_S \mathrm{d}S=\frac{7}{3}a^2\cdot 4\pi a^2=\frac{28}{3}\pi a^4$$

4. 设曲面$S: |x|+|y|+|z|=1$，则$\oiint\limits_S (x+|y|)\mathrm{d}S=$______

解　由于S关于Oyz坐标面对称，x是x的奇函数，所以

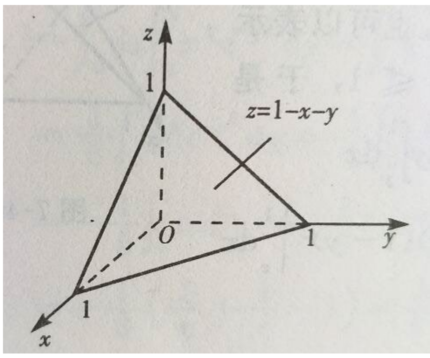
$$\oiint\limits_S x\mathrm{d}S=0$$

因为S关于平面$y=x$，平面$z=y$和平面$x=z$均对称，所以由轮换对称性

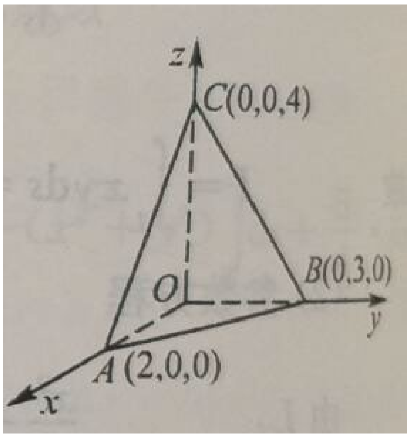
$$\oiint\limits_S |y|\mathrm{d}S=\oiint\limits_S |x|\mathrm{d}S=\oiint\limits_S |z|\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint\limits_S (|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\oiint\limits_S \mathrm{d}S=\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\oiint\limits_S (x+|y|)\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$



5. 计算$I=\iint\limits_{S}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S$，其中$S$为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限的部分.



解 **(1)** $z=4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3})$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{16}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$D_{xy}:0\le y\le 3-\frac{3}{2}x\,,\ 0\le x\le 2$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1 \ \Rightarrow\ z+2x+\frac{4}{3}y=4$$

$$I=\iint\limits_{S}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=4\times\frac{\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\times\frac{\sqrt{61}}{3}\cdot\frac{1}{2}\times 2\times 3=4\sqrt{61}$$

(2) $I=\iint\limits_{S}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S}\mathrm{d}S$

$$=4\times\Delta ABC\text{面积}=4\times\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=4\sqrt{61}$$