7 个重要函数的麦克劳林级数（上）

将函数 $f(x)$ 展开为幂级数的步骤如下.

1、求 $f^{(n)}(x)$，得 $f^{(n)}(x_0)$，写出泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

2、求处上述泰勒级数的收敛域 I .

3、验证 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$（$\xi$ 在 x_0 与 x 之间， $x\in I$ ）.

例 1、　将函数 $f(x)=e^x$ 展开为 x 的幂级数.

解　因为 $f^{(n)}(x)=e^x$， $f(0)=1$， $f^{(n)}(0)=1$ （$n=1,2,\cdots$），于是得 e^x 的麦克劳林级数为

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

它的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$，故级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

对于任何固定的 x，ξ 在 0 与 x 之间，余项的绝对值为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

因 $e^{|x|}$ 有限，而 $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项，所以当 $n\to\infty$ 时，$e^{|x|}\cdot\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$，即当 $n\to\infty$ 时，有 $|R_n(x)|\to 0$，于是得展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\qquad (x\in(-\infty,+\infty)).$$

例 2、　将函数 $f(x)=\sin x$ 展开为 x 的幂级数.

解　由 $\sin x$ 的泰勒公式得其泰勒级数

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

易知此级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，对于任何固定的 x，ξ 在 0 与 x 之间，余项的绝对值为

$$\left|R_{2n}(x)\right| = \left|\frac{\sin\left[\xi + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

用上例的方法易知当$n \to \infty$时，$\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0$，即当$n \to \infty$时，有$|R_{2n}(x)| \to 0$，于是得展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad (x \in (-\infty, +\infty)).$$