收敛级数的性质

性质 1 设 k 为任一不等于零的常数，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，并且有 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也发散. 即级数的每一项同乘一个不为零的常数后，不改变其敛散性.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 S_n 和 σ_n，则

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = kS_n .$$

于是当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S 时，有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = k \lim_{n\to\infty} S_n = kS .$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 kS .

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收散时， $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，因为 $k \neq 0$ ，所以 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ 也不存在，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也发散.

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S 和 σ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $S \pm \sigma$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 S_n、σ_n ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的部分和

$$\begin{aligned} w_n &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = S_n \pm \sigma_n \end{aligned}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = S \pm \sigma .$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛，且其和为 $S \pm \sigma$.

从性质 1 和性质 2 容易得到如下推论：

推论 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S 和 σ，α 和 β 是不为零的任意常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛于 $\alpha S \pm \beta\sigma$.

性质 3 在级数中去掉、增加或改变有限项后，级数的敛散性不变.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 增加前 m 项得到的，这两个级数的部分和分别记为 σ_{n} 和 S_n，那么当 $n > m$ 时

$$\sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_m + u_1 + \cdots + u_{n-m} = \sigma_m + S_{n-m}.$$

注意到 σ_{m} 是常数，且 $\lim_{n\to\infty} S_{n-m} = \lim_{n\to\infty} S_n$，这表示 $\{\sigma_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 有相同的收敛性，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的收敛性，亦即级数增减有限项不改变其收敛性. 而级数改变有限项，可以看做先删减若干项再另增加若干项，因此仍不改变其敛散性.

当然，当原级数收敛时，一般来说新的级数的和要发生改变.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，则对该级数的项任意加（有限个或无限个）括号后所得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$$

仍收敛，且其和仍为 S.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 的部分和为 σ_k，显然

$$\sigma_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = S_{n_k}.$$

其中 $n_k \geqslant k$，所以当 $k \to \infty$ 时，$n_k \to \infty$，因此有

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \lim_{n_k\to\infty} S_{n_k} = S.$$

由这个性质易知，若加括号后的级数发散，原级数必定发散.

需要指出的是，收敛级数一般不能去掉无穷多个括号，发散级数一般不能加无穷多个括号. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

是收敛的，其和为零，但去掉括号后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

发散.

性质 5 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要条件是$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

证明 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，从而$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

由性质 5.5 可给出级数发散的一个充分条件，即如果某级数的一般项不趋于零，那么此级数一定发散.

例 1、 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

所以此级数发散.

应当指出，一般项趋于零只是级数收敛的必要条件，而不是充分条件，即若一般项$u_n \to 0$，并不能断定级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛. 例如调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{n}} + \cdots,$$

虽然当$n \to \infty$时，一般项$u_n = \frac{1}{n} \to 0$，但它却是发散的.