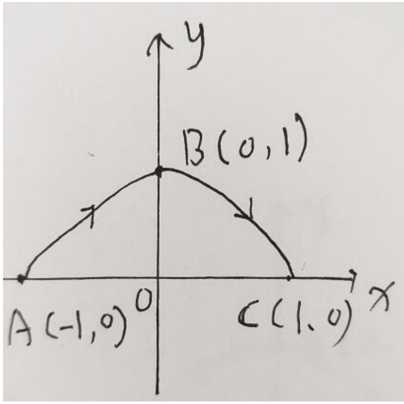
1. 计算$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，$L: y=\cos\frac{\pi}{2}x$，由$A(-1,0)$至$B(0,1)$再到$C(1,0)$弧段

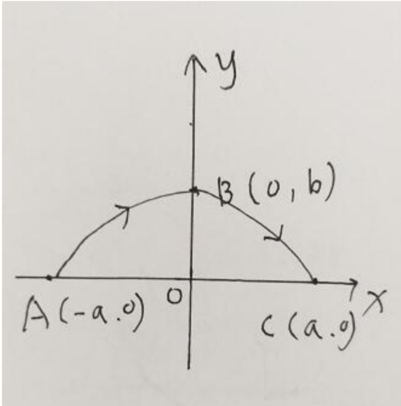
解$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

易验证$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，积分与路径无关，作上半圆周$x^2+y^2=1(y\ge 0)$（记为$L_1$）

$L_1: x=\cos t, y=\sin t, (t:\pi\to 0)$

则原式$=\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{0}(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t=-\pi$





2. 计算$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，$L$为上半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b)$由$A(-a,0)$经$B(0,b)$到$C(a,0)$的弧段。

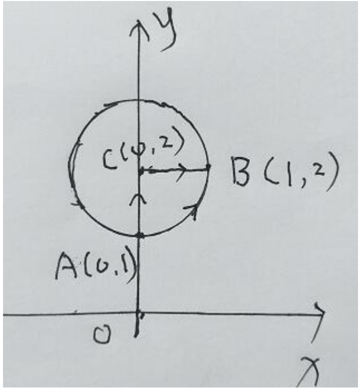
解：

因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，积分与路径无关，取$L_1: x^2+y^2=a^2$(上半圆)，

$L_1: x=a\cos t, y=a\sin t, (t:\pi\to 0)$

原式$=\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int_{\pi}^{0}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)\mathrm{d}t=-\pi$

3. (2018 级) 计算曲线积分 $I=\int\limits_{L}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y$，其中 L 为从点 $A(0,1)$ 沿圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 的四分之一弧到点 $B(1,2)$ 的一段曲线。

解：

因 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=4xy$，故积分与路径无关

令点 $C(0,2)$，加有向线段 $\overline{AC}$ 和 $\overline{CB}$，

则：$I=\int\limits_{\overline{AC}}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y+\int\limits_{\overline{CB}}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y$，

$\overline{AC}:x=0,(y:1\to 2)$，

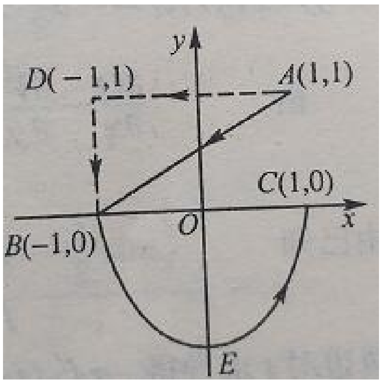
$\int\limits_{\overline{AC}}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y=\int_1^2(-y^3)\mathrm{d}y=-\dfrac{15}{4}$；

$\overline{CB}:y=2,(x:0\to 1)$，

$\int\limits_{\overline{CB}}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y=\int_0^1(x^2+8x)\mathrm{d}x=\dfrac{13}{3}$

所以，$I=\dfrac{7}{12}$.

4. (2016 级) 计算曲线积分 $\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 为从点 $A(1,\ 1)$ 沿直线到点 $B(-1,\ 0)$，再沿曲线 $y=x^2-1$ 到点 $C(1,\ 0)$.



解： $P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ，

积分与路径无关，自选路径。令点 $D(-1,1)$，选从点 $A(1,\ 1)$ 沿水平线到点 $D(-1,1)$ 后，沿铅直线到点 $B(-1,\ 0)$，再沿下半单位圆到点 $C(1,\ 0)$.

$\overline{AD}: y=1, (x:1\to -1)$， $\int_{AD} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\arctan x\Big|_1^{-1}=\frac{\pi}{2}$，

$\overline{DB}: x=-1, (y:1\to 0)$， $\int_{DB} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_1^{0}\frac{-\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\arctan y\Big|_1^{0}=\frac{\pi}{4}$，

$\overset{\frown}{BC}: x=\cos t, y=\sin t\ (t:-\pi\to 0)$，

$\int_{BC} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{-\pi}^{0}(\sin^2 t+\cos^2 t)\mathrm{d}t=\pi$ 。

所以，$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{7\pi}{4}$ 。

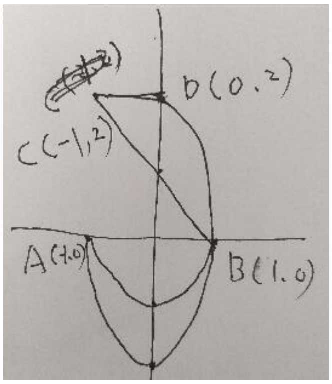
法 2：连接CA ，再作半径为r的小圆$L_1: x^2+y^2=r^2$（r充分小），取顺时针方向，由格林公式有 $L_1^-: x=r\cos t, y=r\sin t\,(t:0\to 2\pi)$

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{\overline{CA}} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\int_{\overline{CA}} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\int_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \qquad \overline{CA}: x=1, (y:0\to 1)$$

$$=-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}+\int_{L_1^-} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}t=\frac{7\pi}{4}$$

5. 计算$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中$L:ABC$，由$A(-1,\ 0)$沿下半圆$x^2+y^2=1$到$B(1,\ 0)$再沿斜直线到$C(-1,\ 2)$　答案（$\frac{7}{8}\pi$）



解　$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$

$L_1: 4x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, -\pi \le t \le \frac{\pi}{2}$,

$L_2: \begin{cases} y=2 \\ x=x \end{cases} \quad x: 0 \to -1$

$$\int_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 t+2\sin^2 t}{4}\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\pi$$

$$\int_{L_2} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_0^{-1} \frac{-2\mathrm{d}x}{4x^2+4}=\frac{\pi}{8}$$

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\frac{7}{8}\pi$$

6. 计算曲线积分$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$是曲线$(x-1)^2+y^2=4$（$y\ge 0$）上由点$A(-1,0)$到点$B(3,0)$的有向弧段.（2021 级期末试题）

解：因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ $\left(x^2+y^2\ne 0\right)$，

所以，在不包含原点的单连通域内，曲线积分与路径无关

令$L_1: y=\sqrt{1-x^2}\left(x:-1\to 1\right)$，$L_2: y=0\left(x:1\to 3\right)$，则

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{L_2} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$\int_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_1} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x=\int_\pi^0(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t=-\pi$$

$$\int_{L_2} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_1^3 0\mathrm{d}x=0$$

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\pi$$