第九讲 无穷级数

9.1 级数的知识框架

9.1.1 级数的概念与性质

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 叫做无穷级数

2. $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ 称为部分和, 若 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 称无穷级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

3．性质

1）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛到 s，则$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$收敛到 ks。

2）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛到 s, σ, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$

收敛到$s \pm \sigma$

3） 在级数中去掉,加上或改变有限项,不会改变

级数的收敛性。

4） 如果级数 $\sum_{n=1} u_n$ 收敛,则对这级数的项任意

加括号后所成的级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$$

仍收敛, 且其和不变。

5）如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

9.1.2 数项级数

1. 正项级数

基本定理 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界。

$$\begin{cases} \text{比较法} \begin{cases} \text{大收} \Rightarrow \text{小收，小发} \Rightarrow \text{大发} \\ \text{极限形式} \end{cases} \\ \text{比值法:} \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q, q < 1\text{收，} q > 1\text{发} \\ \text{根植法：} \lim \sqrt[n]{a_n} = l, l < 1\text{收，} l > 1\text{发} \\ \text{积分法:} \int_1^{+\infty} f(x)dx, \Sigma f(n)\text{同时敛散} \end{cases}$$

2. 任意项级数

$$\begin{cases} \text{交错级数：莱布尼兹判别法，} u_n \geq u_{n+1}, \lim u_n = 0 \\ \text{任意项级数}\begin{cases} \text{绝对收敛，条件收敛} \end{cases} \end{cases}$$

例1 判定下列级数的收敛性，如果收敛，求其和。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$;

解 因为 $$\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right),$$

所以 $$s_n=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right),\qquad \lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{5}.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 收敛,且其和 $s=\frac{1}{5}$ 。

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$;

由于 $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0.$

故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\ln x)^2}=+\infty$ 。

从而 $\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{(\ln n)^2}=+\infty,$

因此由极限审敛法知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$ 发散。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}})(a>0).$

因为

$$s_n=(a^{\frac{1}{3}}-a)+(a^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{1}{3}})+\cdots+(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}})$$

$$=a^{\frac{1}{2n+1}}-a$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{2n+1}}-a)=1-a.$$

故原级数收敛,且其和 $s=1-a$。

例2 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2^n}{n^2 2^n}$;

解 (1) 因为 $u_n=\frac{n^2+2^n}{n^2 2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n^2}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ **收敛,** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **收敛。所以原级数收敛;**

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$;

当 $n\to\infty$ **时,** $\ln\frac{n+2}{n}=\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\sim\frac{2}{n}, \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$,

从而 $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$ 与 $\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 同阶。

因此，利用极限审敛法有

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=2.$$

由 $p=\frac{4}{3}>1$ 知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$ 收敛。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$;

因为 $$u_n=\frac{n^{n-1}}{n^{n+1}\left(2+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^2\left(2+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\le\frac{1}{n^2}.$$

又 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 为收敛的 p 级数, 所以原级数收敛。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\frac{n-1}{n+1}$.

当 $n\to\infty$ 时, $\ln\frac{n-1}{n+1}=\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\sim\left(-\frac{2}{n+1}\right)\sim\left(-\frac{2}{n}\right)$,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}},$$

所以 $u_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\sim\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^5\left(-\frac{2}{n}\right)=\frac{-1}{2^4n^{\frac{7}{2}}}$

显然该级数是负项级数,由级数基本性质知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ 有相同的收敛性。而

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{7}{2}}(-u_n) = \frac{1}{2^4},$$

由极限审敛法知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ 收敛

故原级数收敛

在判定级数收敛时，常用等价无穷小替代级数一般项中的一些因子。记住一些等价无穷小是十分有用的。级数的一般项同为负或同为正均可用正项级数的审敛法判定级数的收敛性，因此正项级数的审敛法也可视为同号级数的审敛法。

等价代换　当$x \to 0$时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad \sqrt[n]{a} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln a$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

例3 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2n \tan \frac{\pi}{5^{n+1}}$

解 (1)利用比值审敛法:

由 $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)\tan \frac{\pi}{5^{n+2}}}{2n \tan \frac{\pi}{5^{n+1}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\tan \frac{\pi}{5^{n+2}}}{\tan \frac{\pi}{5^{n+1}}}$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\tan \frac{\pi}{5^{n+2}}}{\tan \frac{\pi}{5^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{5^{n+2}}}{\frac{\pi}{5^{n+1}}} = \frac{1}{5} < 1$$ 。

故级数收敛。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{7^{\ln n}}$

利用根植审敛法

因为 $\displaystyle\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{2^n}{7^{\ln n}}}=\frac{2}{7^{\frac{\ln n}{n}}}\to 2>1\,(n\to\infty),$

其中 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$

故原级数发散。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$

由函数 $\ln(1+x)$ 的性质可知,当 $x>0$ 时, $\ln(1+x)<x$

故知 $u_n>0$。 又当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\sim x$,从而

$x-\ln(1+x)=_o(x)$, 因此, $u_n=_o\left(\frac{1}{n}\right)$。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty} n^2 u_n = \dfrac{1}{2}.$

因此,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$ 收敛。

对比值判别法可作如下补充:

1）若 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

2）若 $0<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq r<1$($r$ 为常数),则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

例4 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^3}$ **;** **(2)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$.

解 **(1)** $u_n=\frac{2^n}{n^3}$,因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}}=2>1$

可知 u_n 无限增大, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^3}$ 发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\frac{\ln(2+\frac{1}{n})}{n}}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$.

(2) 由 $\lim_{n\to\infty} nu_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}} = \frac{\ln 2}{3}$

知原级数不绝对收敛。

显然 $u_n \to 0(n\to\infty)$ 。又 $\ln(2+\frac{1}{n})$ 单调减少。

由莱布尼茨审敛法知原级数收敛.所以原级数条件收敛。

判定 u_n 单调减少的方法通常有三种:

(1) 判定 $u_{n+1}-u_n<0$；

(2) 判定 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ ；

(3)设 $u_n = f(n)$,判定函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$内是单调

减少的,则当 n 足够大时 $u_{n+1}<u_n$ 。

例5 验证级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 是否满足莱布尼茨定理的条件,并判定该级数是否收敛?

解 记 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$,显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}=0$ 。

当 n 为偶数时

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}},u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1+(-1)^{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

则 $u_n<u_{n+1}$

当 n 为奇数时

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}, u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1+(-1)^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

则 $u_n > u_{n+1}$

可见级数不满足莱布尼茨定理的条件 $u_{n+1} \le u_n (n = 2,3,\cdots)$

因此必须利用其他方法判定该级数的收敛性。

记级数的前 $2n$ 项之和为 s_{2n}，

$$s_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

是单调减少的数列, 且

$$s_{2n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

知 s_{2n} 有界,

故根据单调有界数列必有极限的极限存在准则, 得

$\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}=s$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(s_{2n}+u_{2n+1})=s \quad ,$$

因此级数的部分和数列 $\{s_n\}$存在极限 s ,即级数收敛。

例6 验证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^2 \quad（\alpha \neq 0\text{是常数}）$$

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^2\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^2$$

因为 $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ 所以 $\left(1-\cos\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^2 \sim \frac{\alpha^4}{4n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^4}{4n^2}$**是p=2的p级数，所以收敛**

所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^2$ 绝对收敛

例7 判别下列说法正确与否

1）数列$\{a_n\}$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$同时收敛或同时发散；

错；$a_n = \dfrac{1}{n}$

2）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$发散；

对；由性质2可证。

3）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 发散；

错； $a_n = \frac{1}{n}, b_n = -\frac{1}{n}$

4）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ 收敛；

错； $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

5）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**发散，**$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **发散，则** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$**发散；**

错； $a_n = \frac{1}{n}, b_n = -\frac{1}{n}$

6） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛，则** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ **收敛；**

错； $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

7）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

错；$a_n = \dfrac{1}{n}$

8）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$a_n \sim b_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛；

错；$a_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}, b_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$

9） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛。

错； $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n}$

10） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛。

$$0 \le (a_n + b_n)^2 \le 2(a_n^2 + b_n^2)$$ 。

例8 选择题1）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，下面结论正确的是

（**A**）若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$；

（**B**）若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$；

（**C**）若 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（**D**）若 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

解 选D （A）反例， $a_n=\dfrac{1}{(2n+(-1)^n)^2}$ **，当** n **偶数时**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1}{(2n+1)^2}}{\dfrac{1}{(2n+1)^2}}=1$$ **当** n **为奇数时** $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1}{(2n+3)^2}}{\dfrac{1}{(2n-1)^2}}<1$$ **；**

（B）反例 $a_n=\dfrac{1}{n}$ **，** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}<1$ **，**

（C）反例(B)

2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛

（A）则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ ；

（B）又设当 $n\to\infty$ 时, $a_n \sim b_n$ ，则 Σb_n 收敛。

（C）又设 $\Sigma\,|\,b_n\,|$ 收敛，则 $\Sigma\,|\,a_n b_n\,|$收敛。

（D）设 Σb_n 收敛，则 $\Sigma a_n b_n$ 收敛。

解 **C** （**A**）反例 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$

（**B**）见例**1**（**8**）；（**D**）见例**1**（**4**）

（**C**） $a_n\to 0$，$\exists N$ ，当 $n>N$ 时，

$|a_n|<1$ ， $|a_nb_n|<|b_n|$

3）设 $\sum a_n^2$ 收敛，则 $\sum(-1)^n a_n$

(A)绝对收敛；(B)条件收敛；(C)发散；(D)不定。

解 （**D**）（**A**）反例 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$

（**B**）同（**A**）；（**C**）反例 $a_n^2=\dfrac{1}{n^4}$

4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n a_n$ 收敛，则级数 Σa_n

(A)发散；**(B)**条件收敛；**(C)**绝对收敛；**(D)**敛散性不定。

解（C）因 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n a_n$ 收敛，

$\lim(-1)^n 2^n a_n = 0$，$\exists N$ 当 $n > N$ 时，

$|2^n a_n| < 1 \Rightarrow |a_n| < \dfrac{1}{2^n}$，$\Sigma \dfrac{1}{2^n}$ 收敛，所以

$\Sigma|a_n|$ 收敛。

例9 判别下列级数的敛散性(正项级数)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}+1}$ ； 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ；

解：

1. $u_n \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛；

2. $|a|>1, \frac{1}{1+a^n} \sim \frac{1}{a^n}$ 收敛，$|a|<1, \frac{1}{1+a^n} \to 1$ 发散，

$a=1, \frac{1}{1+a^n}=1$发散， $a=-1, \frac{1}{1+a^n}=\begin{cases} \frac{1}{2} \\ \infty \end{cases}$ 发散。

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{3n^2}$ ；　　**4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$ ；

3. $u_n \sim \frac{1}{3n^2}$ 收敛，

4. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n (n+1)^{n+1} n!}{2^{n+1} \cdot n^n (n+1)!} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n \to \frac{e}{2} > 1$$

发散。

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+3}{3n+2}}\right)^{n}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

5. $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt{\frac{2n+3}{3n+2}}\to\sqrt{\frac{2}{3}}<1$ 收敛，

6. $\frac{1}{n^{\alpha}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n^{\alpha+1}},\alpha>0$ 收敛，其它发散。

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$；　　**8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx$；

7. $\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，

8. $\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin xdx=1-\cos\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛。

（**1**）注意比较极限形式；（**2**）会用无穷小等价分析；

（**3**）放大法常用。

例10 判别级数的敛散性，是绝对收敛还是条件收敛

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

解 令 $f(x)=x-\ln x\,(x\geq 2)$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0$

$f(x)$ 单增，即 $\dfrac{1}{n-\ln n}$ 单减。

又 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$，由莱布尼兹收敛法，原级数收敛。

又 $\displaystyle\Sigma\frac{1}{n-\ln n}$ 发散，理由 $\dfrac{1}{n-\ln n}>\dfrac{1}{n}$，故原级数发散。

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$

解 因为

$$|a_n|=|(-1)^{n-1}\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx|\le\int_n^{n+1}e^{-x}dx=e^{-n}-e^{-(n+1)}<(\frac{1}{e})^n$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{e})^n$ 收敛，故原级数绝对收敛。

例11 （抽象级数的敛散性）

（**1**）已知 $f(x)$于 $[1,+\infty)$ 上连续，单减，且

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ，记 $u_n = f(n)$ 。证明

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n - \int_n^{n+1} f(x)dx]$ 收敛，且其和 $s \le f(1)$ 。

分析：$u_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le u_n(= f(n))$ ，故

$$0 \le u_n - \int_n^{n+1} f(x)dx \le u_n - u_{n+1}$$

$$0 \le \sum_{k=1}^{n}(u_k - \int_k^{k+1} f(x)dx) \le \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1} \le u_1 = f(1)$$

即 $\{s_n\}$ 单增，有上界，从而有极限，

即原（抽象）级数收敛。

（2）若 $\Sigma a_n, \Sigma c_n$ 都收敛，且 $a_n \le b_n \le c_n$，证明 Σb_n 收敛。

证 $a_n \le b_n \le c_n$ ， $0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 收敛

$b_n = (b_n - a_n) + a_n$ 从而 Σb_n 收敛。

（3）设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，证明：

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。

证 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛，$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_1$

收敛 $\Rightarrow a_n$ 收敛,$\{a_n\}$ 有界，即存在 $M > 0$，使

$|a_n| < M$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < M \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ ，故原级数收敛。

（**4**） 若正项数列 $\{a_n\}$ 单调上升且有上界，试证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$$ 收敛。

证:$\{a_n\}$单调上升，有上界，必有极限，从而有界，存在

$M>0$ 使 $|a_n|<M$ 记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{a_k}{a_{k+1}})=\frac{a_2-a_1}{a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$$

$$\le\frac{1}{a_2}[a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_{n+1}-a_n]=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_2}<\frac{M-a_1}{a_2}$$

$\{S_n\}$ 单增有上界，必有极限，故原级数收敛。

（小结：抽象 $\Rightarrow S_n$ 单调有界）

例12 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{8n^2-4n-1}$**是收敛的，并求其和。**

解：

$$\tan(\arctan(4n+1)-\arctan(4n-3))$$

$$=\frac{\tan(\arctan(4n+1))-\tan(\arctan(4n-3))}{1+\tan(\arctan(4n+1))\tan(\arctan(4n-3))}$$

$$=\frac{(4n+1)-(4n-3)}{1+(4n+1)(4n-3)}=\frac{2}{8n^2-4n-1}$$

故 $\arctan\frac{2}{8n^2-4n-1}=\arctan(4n+1)-\arctan(4n-3)$ 从而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{8k^2-4k-1}=\arctan 5-\arctan 1+$$

$$\arctan 9-\arctan 5+\cdots+\arctan(4n+1)-\arctan(4n-3)$$

$$=\arctan(4n+1)-\arctan 1$$ 所以 $S_n\to\frac{\pi}{4}$

例1 求下列各函数项级数的收敛域:

$$\textbf{(1)}\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}\;;\quad \textbf{(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}\;;\quad \textbf{(3)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n.$$

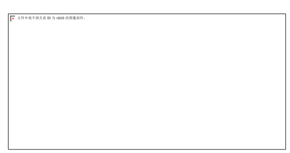
解 **(1)**不是形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 型的幂级数,其收敛域不能用阿贝尔定理先求出其收敛半径,再求其收敛域。对于这类函数项级数,可按收敛域的定义，用正项级数的比值审敛法直接求解。记

$$u_n(x)=\frac{n^2}{x^n}, n=1,2,\cdots$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^n}{x^{n+1}n^2}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|,$$

由比值审敛法知,

当 $\left|\frac{1}{x}\right|<1$,即  时, 原级数收敛;

当 $\left|\frac{1}{x}\right|>1$,即 $|x|<1$ 时, 原级数发散;

当 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ 及 $x=-1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$

都发散,所以原级数的收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

本题也可以令 $t=\frac{1}{x}$,将级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n$

求得它的收敛域为 $-1<t<1$,故原级数的收敛

域为 $-1<\frac{1}{x}<1$,即 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$；

这也不是形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 型的幂级数，用正项级数的根植审敛法，即可求得收敛域。

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| < 1 \text{ 时}, \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } |x| = 1 \text{ 时}, \\ +\infty, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

因此收敛域为 $[-1,1]$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n.$

令 $t=x+1$,则 $u(t)=\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n=a_n t^n$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]n}{(n+1)[3^n+(-2)^n]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]n}{(n+1)3^n\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}=3$$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{3}$。

当 $t=-\dfrac{1}{3}$,即 $x=-\dfrac{4}{3}$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

右端两个级数均收敛,故原级数在 $x=-\dfrac{4}{3}$ 处收敛;

当$t=\dfrac{1}{3}$,即 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

右端两个级数中,前一个发散,后一个收敛,故原级数在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时发散。

综上所述,原级数的收敛域为 $\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

例2 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(x-1)^n$ 的和函数。

解 由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1+1)(n+1+2)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

可知收敛半径为1。显然当 $|x-1|<1$,即

$0<x<2$ 时, 原级数收敛, 当 $x=0, x=2$

时易知原级数发散,故收敛域为 $(0,2)$ 。

令 $t=x-1$,则原级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)t^{n}$

将其逐项积分两次得 $\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+2}=\dfrac{t^{2}}{1-t}$,

$|t|<1$, 在逐项求导两次, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)t^{n}=\frac{2}{(1-t)^{3}},|t|<1。$$

将 $t=x-1$ 代入上式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(x-1)^{n}=\frac{2}{(2-x)^{3}}(0<x<2).$$

例3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域及和函数，

并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^{n}$ 的和。

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2n+1}x^2=0,$

所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

设和函数为 $s(x)$,注意到

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}\quad(-\infty<x<+\infty),\text{对 } s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$$

积分,得

$$\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$

$$=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}-1\right)=x(e^{x^2}-1)$$

$$(-\infty<x<+\infty),$$

再对两边求导，得

$$s(x)=e^{x^2}(2x^2+1)-1\ (-\infty<x<+\infty),$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=$

$$e^{x^2}(2x^2+1)-1\ (-\infty<x<+\infty),$$

比较级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} 2^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} (\sqrt{2})^{2n}$$

$$= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} \right]_{x=\sqrt{2}}$$

$$= 1 + s(\sqrt{2}) = 5e^2.$$

例4 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$

展开成 x 的幂级数。

解 因为

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\quad(-1<x<1),$$

再积分,有 $f(0)=0$,得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n}\right)dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{4n}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\qquad(-1<x<1).$$

例5 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域。

解 令 $t=\frac{x}{2x+1}$，对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}t^n$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1\;,\quad R=1$$

当 $t=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，当 $t=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

即 $-1<\frac{x}{2x+1}\leq 1$ 时级数收敛。

解得 $x\leq -1$ 或 $x>-\frac{1}{3}$ 级数收敛。

例6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域。

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{2^n+(-1)^n}=2$， $R=\frac{1}{2}$ 。

当 $x-1=\frac{1}{2}$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{n}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n2^n}\right)$$

发散。

当 $x-1=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n2^n}\right)$ 收敛。则

$-\dfrac{1}{2}\le x-1<\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}$ 是收敛域。

例7 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{2n+1}$ 的收敛域。

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{2n+3}}{\frac{2^n}{n}x^{2n+1}}\right| = 2x^2 < 1$ 得 $x^2 < \frac{1}{2}, |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}n}$ 发散，当

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2}n}$ 发散，收敛域为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

例8 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=3$ 点条件收敛，则该幂级数的收敛半径为 $R=$ ________，

收敛区间为____________ **(4,-5<x<3)**

解 于 $x=3$ 点收敛，但不绝对收敛，则 $x=3$ 是收敛区间得端点，$R=3+1=4$，$-4<x+1<4$。

$$-5 < x < 3$$

例9 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为3，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$

的收敛区间为。 （－2，4）

解 求导后收敛半径不变，故 $-3 < x-1 < 3$

从而 $-2 < x < 4$ 。

例10 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ 于 $x_0=0$ 点展开成幂级数。

解 $$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\left[\frac{1}{6\cdot 2^n}+\frac{(-1)^n}{3}\right]x^n \quad -1<x<1$$

例11 将 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ **展开成** x **的幂级数。**

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\cdot\dfrac{-2(1+2x)-(1-2x)\cdot 2}{(1+2x)^2}=-\dfrac{2}{1+4x^2}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-2\cdot 4^n\cdot(-1)^n\cdot x^{2n}$$

$f(x)-f(0)=-2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-4)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，故

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad |x|<\frac{1}{2}$$

说明：1. 如例11求导后易于展开，之后积分

2. 被展函数最多出现的是 ln，arctan，

这两类函数。

3．积分后注意考察 $f(0)$ **。**

例13 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数。

解

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{n^2+1}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=0, R=+\infty$$

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{\frac{x}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + e^{\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right)e^{\frac{x}{2}}$$

例14 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n$ 的收敛域及和函数。

解 $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1, R = 1$ 当 $x = \pm 1$ 时，级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$

令

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1-2)^2}{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right]' - 4 \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{4}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \left[\frac{x}{1-x}\right]' - \frac{4}{1-x} + \frac{4}{x}\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{4}{1-x}+\frac{4}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{4}{1-x}-\frac{4}{x}\ln(1-x)\quad x\neq 0, x\in(-1,1)$$

则 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{4}{x}\ln(1-x) & x\neq 0, x\in(-1,1)\\ 1 & x=0\end{cases}$$

例15 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛域及和函数。

解 易得 $R=+\infty$

令 $S(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$,

$$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$S'(x)+S(x)=e^x,\ S(0)=1$ ，解方程得

$$S(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

例16 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+n}{2^n}$ 的和。

解 考察 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^n$，则

$S(-\frac{1}{2})$ 即为所求。 易得收敛半径 $R=1$，而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$$

$$= x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n}\right]' = x\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right]''$$

$$= x\left(\frac{x^{2}}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^{3}}$$

$S(-\frac{1}{2})=-\frac{8}{27}$。

说明：例13，14，15体现了三种基本方法，

例16是一种应用。

例17 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}$的敛散性。

解 因 $\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$$

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛, 所以原级数收敛.

18. 多选题：下列命题正确的有(**A, D**).

A. 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛;

B. 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定发散;

C. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$必定收敛;

D. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$必定发散.

A 正确, 因绝对收敛的级数必收敛;

B 不对, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,

此例又说明 C 也不对,

反证法可以说明 D 对, 故正确答案为 A, D.

19. 多选题：下列命题正确的有（**A，B**）.

A. 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$必定收敛;

B. 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$必定发散;

C. 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$必定发散;

D. 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$必定收敛.

A 是基本性质, 是正确的.

由反证法因 $\boldsymbol{v_n = (u_n + v_n) - u_n}$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{v_n}$ 收敛, 矛盾, 所以 B 对;

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 都发散, 但

$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n + (-1)^{n-1}] = 0$, 故 C 不对,

同时也说明 D 不对, 正确的是 A, B.

20. 设 $u_n=(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$, 试判定 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 的敛散性, 并指出是绝对收敛, 还是条件收敛？

解 $u_n^2=\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 为正项级数,

$\because u_n^2=\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}^2}=\frac{1}{n}$ 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散 .

再分析 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 由于 $u_n=(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$,

$\forall n>1,\ \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})>0,$ 且满足:

① $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}})-\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})<0$

即 $\{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\}$ 单减，

② $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})=0,$

① ②满足*Leibniz*定理，故交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$$ 收敛，

但因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$发散，故其为条件收敛.

9.4 付氏级数

付氏级数基本知识点有两点：函数展开成付氏级数；付氏级数的收敛性。

一、函数展开成付氏级数

1. $f(x)$ 定义于 $(-\pi,\pi)$ 上，连续或分段连续。

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, & n = 0,1,2,\cdots, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, & n = 1,2,\cdots, \end{cases}$$

2. $f(x)$ 定义于 $(-l,l)$ 上

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中
$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \ (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \ (n=1,2,3,\cdots). \end{aligned}\right\}$$

3. $f(x)$ 定义于 $[0,\pi]$ 上

展开成正弦级数，做奇延拓，则

$$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,3,\cdots). \ f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

展开成余弦级数，做偶延拓，则

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

4. $f(x)$ 定义于 $[0,l]$ 上

将 $f(x)$展成正弦级数，做奇延拓，则

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \; (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

将 $f(x)$ 展成余弦级数，做偶延拓，则

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

二、收敛性讨论

以 $[-\pi,\pi]$ 为例

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx] = \begin{cases} f(x) & x\text{是连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] & x_0\text{是间断点} \\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)] & x=\pm\pi \end{cases}$$

例1 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\ (0\le x\le 2\pi)$

展开为以 2π 为周期的傅里叶级数,并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$$ 的和。

解 将函数 $f(x)$ 以 2π 为周期作周期延拓,得到

函数 $F(x)$ 为奇函数,故得正弦级数

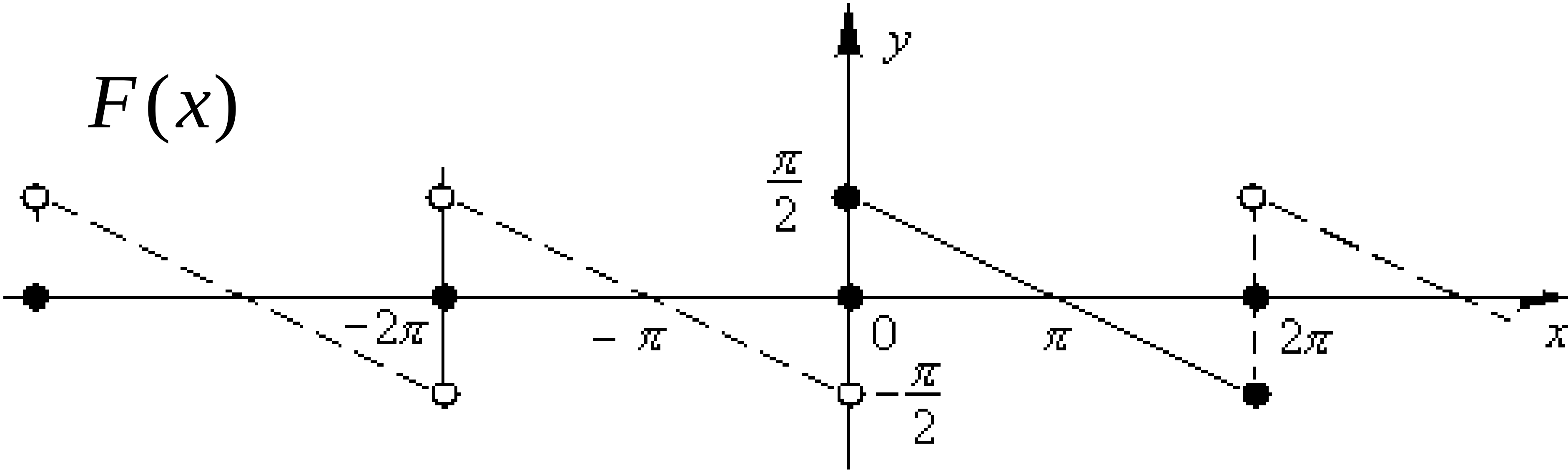


图11-18

其中 $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \dfrac{\pi - x}{2}\sin nx dx$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi - x}{2n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

所以 $$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx \qquad (0<x<2\pi).$$

在 $f(x)$ 的展开式中令 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin 2kx=0$,

$$\sin(2k-1)x=\sin(k\pi-\frac{\pi}{2})=(-1)^{k+1},$$

所以 $$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}。$$

例2 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上具有连续导数,试证:

（1）$\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin pxdx=0$ ；

（2）$\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos pxdx=0$ 。

证 (1)由题设知, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上均连续,故 $f(x)$ 与 $f'(x)$在 $[a,b]$上有界,所以必存在一个正数 M ,使得对于任意的 $x\in[a,b]$,恒有

$|f(x)|\le M$, $|f'(x)|\le M$ 。于是

$$\int_a^b f(x)\sin px dx = -\frac{1}{p}\int_a^b f(x) d(\cos px)$$

$$= -\frac{1}{p} f(x)\cos px\Big|_a^b + \frac{1}{p}\int_a^b f'(x)\cos px dx,$$

从而

$$\left| \int_a^b f(x)\sin px dx \right| \le \frac{1}{p}\cdot 2M + \frac{1}{p} M(b-a)$$

$$= \frac{2+b-a}{p} M,$$

故 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px dx=0$ 。

类似地可证**(2)**。

例3 将 $f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x\le\pi \\ x & -\pi\le x<0 \end{cases}$

展开成付氏级数。

解： $a_0=\dfrac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}xdx+\int_0^{\pi}(x+1)dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x dx + \int_0^{\pi} dx\right] = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x \cos nx dx + \int_0^{\pi} (x + 1) \cos nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x \sin nx dx + \int_0^{\pi} (x + 1) \sin nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[- \frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx\right]$$

$$- \frac{1}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n - 2\pi(-1)^n\right]$$

则

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n - 2\pi(-1)^n] \sin nx$$

$$= \begin{cases} x+1 & 0 < x < \pi \\ x & -\pi < x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0, x = \pm\pi \end{cases}$$

例4 将 $f(x)=x-1\ (0\le x\le 2)$

展开成周期为4的余弦函数。

解 将 $f(x)$ 进行偶延拓

$$b_n=0 \qquad a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)dx=0$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)d\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx \right]$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 [(-1)^n - 1]$$

则

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 [(-1)^n - 1] \cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= x - 1 \ (0 \le s \le 2)$$

例5 设 $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi \le x \le 0 \\ 1+x^2 & 0 < x \le \pi \end{cases}$

的付氏级数的和函数为 $S(x)$，则

$S(0)=$____ $S(\pi)=$_____ $S(\frac{9}{2}\pi)=$________

解 $x=0$ 是间断点，

$$S(0)=\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)]=0$$

$S(x)$ 以 2π 为周期，在 π 点

$$S(\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi + 0) + f(\pi - 0)] = \frac{\pi^2}{2}$$

在 $x = \frac{9}{2}\pi$ ，

$$S(\frac{9}{2}\pi) = S(\frac{\pi}{2}) = 1 + (\frac{\pi}{2})^2$$

21. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}(x-2)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$.

解 (1) 只要令 $x-2=t$,

$$\because \quad \rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt{n+1}}=1$$

因此当 $|t|=|x-2|<1$, 即 $1<x<3$ 时,

幂级数收敛; 再分析端点的敛散性 $\Rightarrow$

$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n}$为收敛的交错级数，

当 $x=3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}$因通项

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}(n\to\infty),$$

根据比较审敛法 $\Rightarrow$ 幂级数在 $x=3$发散，

故收敛区间为: $[1,\ 3)$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$ 属于缺项情况,

如下求收敛半径 R:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2^{n+1}}|x|^{2n+1}\right)\Big/\left(\frac{2n-1}{2^n}|x|^{2n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{|x|^2}{2}=\frac{|x|^2}{2}=\rho,$$

当 $\rho<1$, 即 $|x|^2<2$, $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 幂级数收敛,

当 $\rho>1$, 即 $|x|^2>2$, $|x|>\sqrt{2}$, 级数发散,

所以收敛半径: $R=\sqrt{2}$,

另分析端点 $x=\pm\sqrt{2}$ 处的敛散性,

因数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(\pm\sqrt{2})^{2n-1}=\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{2}}$

都发散 $\Rightarrow$ 故收敛域为:

$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

22. 求和函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n}, (-1<x<1).$$

解 记 $S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1} \quad = x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)''$

$$= x\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right) = x\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}\right)$$

$$= x\cdot\left(\frac{(-2x+2)(1-x)^2+(-x^2+2x)2(1-x)}{(1-x)^4}\right) = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

$$(-1<x<1).$$

23. 求收敛域与和函数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot 4^n}(x-1)^{2n}.$$

解 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}(\frac{x-1}{2})^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1}^{x}(\frac{t-1}{2})^{2n-1}\mathrm{d}\frac{t-1}{2}$

$$=\int_{1}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{t-1}{2})^{2n-1}\right)\mathrm{d}\frac{t-1}{2}=\int_{1}^{x}\frac{\frac{t-1}{2}}{1-(\frac{t-1}{2})^2}\mathrm{d}\frac{t-1}{2}$$

$$\boxed{(\frac{t-1}{2})^2<1,\Rightarrow -1<t<3}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln[1-(\frac{t-1}{2})^2]\Big|_{t=1}^{t=x}=-\frac{1}{2}\ln[4-(x-1)^2]+\ln 2$$

收敛域：$-1<x<3.$

24 求收敛域与和函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n.$$

解1 记 $S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^x t^n dt\quad (x\neq 0)$

$$\overset{①}{=}\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n\right)dt=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t u^{n-1}du\right)dt$$

$$\overset{②}{=}\frac{1}{x}\int_0^x\left(\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}u^{n-1}du\right)dt=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\int_0^t\frac{1}{1-u}du\right)dt\quad (|u|<1)$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x[-\ln(1-t)]dt=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x),\left(x\in[-1,0)\cup(0,1)\right)$$

此外 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}.$

解2 记 $S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$, $\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$

$$\sigma''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right)''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(x^{n+1}\right)''$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad (|x|<1)$$

$$\sigma'(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$$

$$\sigma(x)=-\int_0^x\ln(1-t)dt=-t\ln(1-t)\Big|_0^x+\int_0^x\frac{-t}{1-t}dt$$

$$=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$$

$$\therefore S(x)=\frac{1}{x}[x-x\ln(1-x)+\ln(1-x)],\left(x\in(-1,0)\cup(0,1)\right)$$

点 $x=0,\pm1$ 的收敛性如解1.

25.将函数 $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f(x)=\ln(1+x-2x^2)=\ln(1+2x)+\ln(1-x)$

利用 $\ln(1+x)$ 的基本展开式 ④ $\Rightarrow$

$$\ln(1+2x)+\ln(1-x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n}-\frac{1}{n}]x^n$$ 由 $(-0.5,\ 0.5]\cap[-1,1)$

$\Rightarrow$ 收敛域 $(-0.5,\ 0.5]$

26.将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数，并指出展开式成立的区间.

解 $$\left(f(x)\right)'=\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$$

注意到：$f(0)=\left(\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\right)_{|x=0}=\dfrac{\pi}{4}$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$x \in [-1,\ 1]$$

27. 将函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ 展开成 x 的幂级数,并指出展开式成立的区间.

解 $$f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}=(1+x)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)''$$

$$=\frac{1}{2}(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=\frac{1}{2}(1+x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}(1+x)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-1}\right)$$

令 $n-2=k-1$,然后仍记 k 为 n

令$n-2=k-1$,然后仍记k为n

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n)x^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=2}^{\infty}(n^2+n+n^2-n)x^{n-1}\right)$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^{n-1},$$

$x\in(-1,\ 1)$