# 傅里叶级数

主讲人：李正学
大连理工大学数学科学学院

# 主要内容

- 三角级数
- 以 $2\pi$ 为周期的函数的傅里叶级数
- 在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义的函数的傅里叶级数
- 在 $[0,\pi]$ 上有定义的函数的傅里叶级数
- 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

# 三角级数

在自然界和工程技术中周期现象是经常出现的，如物体的振动和电磁波等。在数学上需要用周期函数来描述这些现象。若把周期函数用幂级数表达，虽然运算上方便，但也有其不足之处。首先是条件苛刻，至少要求函数具有任意阶导数；其次是在计算中，幂级数截断余项后不是周期函数。而用简单的正弦函数和余弦函数叠加，来表示一般的周期函数，就可以较好地解决这一问题。

# 三角函数系

函数列

$$\boxed{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots}$$

称为三角函数系。

# 三角函数系及其正交性

- $\forall f, g \in C[-\pi,\pi]$，$f$ 和 $g$ 的内积定义为

$$\boxed{(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.}$$

- 三角函数系中任何两个不同的函数做内积，其值为零，

这一性质称为三角函数系的正交性。

# 三角函数系的正交性

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

$$(1, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$(1, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0.$$

# 三角函数系的正交性

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

当 $m \neq n$ 时，

$$(\cos mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

# 三角函数系的正交性

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

---

类似地， 当 $m \neq n$ 时 $(\sin mx, \sin nx) = 0.$

任取正整数 $m, n$ ，

$$(\sin mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0.$$

从而三角函数系中任意两个不同的函数正交。

# 三角函数系的正交性

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

函数自已和自己做内积

$$(1,1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \times 1 dx = 2\pi,$$

$$(\cos nx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left( x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi .$$

同理，$(\sin nx, \sin nx) = \pi$ .

# 小 结

- 三角函数系的概念及其正交性

$y^*$

# 傅里叶级数

主讲人：李正学
大连理工大学数学科学学院