

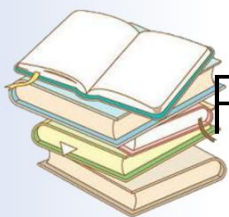


大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Fourier级数及收敛性定理

主讲人：刘秀平 教授



Fourier的收敛性定理

设函数 $f(x)$ 的fourier级数, 为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

一般来说, 一个函数的fourier级数既含有正弦项也含有余弦项。

但是都某些函数却只含有正弦或余弦项。例如

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \text{ 的fourier级数为 } \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

$$\text{而 } x^2 \text{ 的fourier级数为 } \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

一般有以下结论:

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 由于 $f(x) \cos kx$, $f(x) \sin kx$ 分别为奇函数和偶函数, 所以由积分性质有

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

此时, 函数 $f(x)$ 的fourier级数只含有正弦项, 称为正弦级数, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. (3)$$

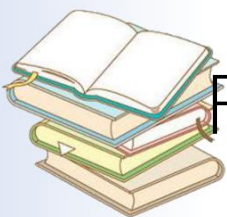
(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 由于 $f(x) \cos kx$, $f(x) \sin kx$ 分别为偶函数和奇函数, 所以由积分性质有

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0,$$

此时, 函数 $f(x)$ 的fourier级数只含有余弦项, 称为余弦级数, 即

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. (4)$$



Fourier的收敛性定理

一个以 2π 为周期且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积的函数

$f(x)$ 一定可求出其fourier级数。但其fourier级数是否收敛，是否收敛到 $f(x)$ 的答案由下面定理给出：

定理（Dirichlet收敛性定理）若以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足Dirichlet条件：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 至多只有有限个极值点。

$f(x)$ 的fourier级数收敛，并且

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$ ，

当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ ，

当 $x = \pm\pi$ 时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi^-) + f(-\pi^+)]$ 。

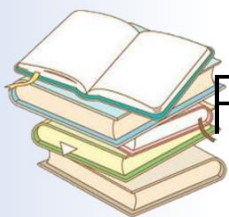
关于上述定理的几点备注：

(1) 当 $f(x)$ 是分段连续，且不作无限次震荡，则fourier级数收敛；

(2) 相比于幂级数，fourier级数条件要弱很多；

(3) 级数(7)中各项均是 2π 周期。若级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛，则对任意点 x 处级数(7)均收敛；

(4) 在具体讨论函数的fourier级数时，时常给出函数在 $(-\pi, \pi]$ 或 $[-\pi, \pi)$ 上表达式，应当理解为它是定义在整个实数轴上，且是以 2π 为周期的。即在 $(-\pi, \pi]$ 或 $[-\pi, \pi)$ 以外部分按对应关系做周期延拓。



Fourier的收敛性定理

例题1 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 它在 $(-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & (-\pi < x \leq 0) \\ x^3, & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

又设 $f(x)$ 的fourier级数的函数为 $S(x)$ 。

求 $S(-2)$, $S(0)$, $S(1)$, $S(\pi)$, $S(\frac{5\pi}{2})$.

解: 由于 $x=-2$ 是 $f(x)$ 的连续点, 且 $f(-2)=2$,

所以由收敛性定理知 $S(-2)=f(-2)=2$.

由于 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 且 $\frac{1}{2}(f(0^+)+f(0^-))=1$,

所以由收敛性定理知 $S(0)=1$.

由于 $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点, 且 $f(1)=1$,

所以由收敛性定理知 $S(1)=f(1)=1$.

由于 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 的间断点, 且 $\frac{1}{2}(f(-\pi^+)+f(\pi^-))=\frac{1}{2}(2+\pi^3)$,

所以由收敛性定理知 $S(\pi)=\frac{1}{2}(2+\pi^3)$.

对于 $x=\frac{5\pi}{2}$, 由于 $f(\frac{5\pi}{2})=f(2\pi+\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})$,

所以由收敛性定理知 $S(\frac{5\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=\pi^3/8$.

例题2 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 它在 $(-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$f(x) = x^2$, 求 $f(x)$ 的fourier级数及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 。

解: 由前面计算及收敛性定理知

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

当 $x = \pi$ 时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$.

当 $x = 0$ 时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2$.



谢谢!