第七章 多元函数微分学及其应用

§7.1 多元函数的基本概念

一、多元函数的定义

二、多元函数的极限

三、多元函数的连续性

一、多元函数的定义

引例：

- 底半径为r，高为h的圆柱体的体积：

$$V=\pi r^2 h,\ \{(r,h)\mid r>0,h>0\}$$

- 定量理想气体的压强：

$$p=\frac{RT}{V}\ (R\text{为常数}),\ \{(V,T)\mid V>0,T>T_0\}$$

- 边长为a,b,c的三角形面积的Heron(海伦)公式：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad \left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\{(a,b,c)\mid a>0,b>0,c>0,a+b>c\}$$

定义：设非空点集$D\subset \mathbf{R}^n$，映射$f:D\to \mathbf{R}$称为定义在D上的n元函数，记作

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ \text{或}\ u=f(\vec{x}),\ \vec{x}\in D$$

点集D为函数的定义域，数集$\{u\mid u=f(\vec{x}),\vec{x}\in D\}$为函数的值域.

- 当$n=2$时，称为二元函数

$$z=f(x,y),\ \ (x,y)\in D\subset \mathbf{R}^2$$

- 当$n=3$时，称为三元函数

$$u=f(x,y,z),\ \ (x,y,z)\in D\subset \mathbf{R}^3$$

- 多元初等函数 $z=\dfrac{xy}{1+x^2},\ z=\cos(x+y^2),\ u=e^{x^2}\ln(y+xz)$

- 对于二元函数$z=f(x,y)$, $(x,y)\in D\subset\mathrm{R}^2$, 三维空间中的点集

$$\Gamma=\{(x,y,z)\in\mathrm{R}^3\mid z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

称为二元函数$z=f(x,y)$的图形. (三维空间中的一张曲面)

- 二元函数$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 定义域为圆域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.

- 三元函数$u=f(x,y,z)$的图形为R^4中的曲面, 称为超曲面.
- 三元函数$u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$, 定义域为单位闭球

$$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

图形为四维空间中的超球面.

二、多元函数的极限

回顾: 一元函数的极限: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

设函数$y=f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义, 若存在常数A, 使得: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$

称A为$f(x)$当$x\to x_0$时的极限. 当 $x\to x_0$. 有 $f(x)\to A$.

定义: 设二元函数$z=f(x,y)$的定义域为$D\subset\mathrm{R}^2$, P_0为D的聚点, 若存在常数A, 使得: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$P(x,y)\in D\cap\overset{o}{U}(P_0,\delta)$时, 都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$成立, $\boxed{0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta}$

称A为$f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限, 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad \text{(二重极限)}$$

注：

- $P(x,y)\in \overset{o}{U}(P_0,\delta)$ (去心圆邻域) $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}|x-x_0|<\eta,\ |y-y_0|<\eta\\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\neq 0\end{cases}$

(去心方邻域)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \Leftrightarrow$ 当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时, 有 $f(x,y)\to A$

即：$P(x,y)$以任何方式趋于$P_0(x_0,y_0)$, $f(x,y)$都以A为极限.

反之, 若两种趋近方式不同导致极限不同, 则极限不存在.

用于判别二重极限不存在

例1：证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$ $\quad |xy|\le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

($\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$. 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时. 有 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$)

证: $\forall\varepsilon>0$. 要使 $|f(x,y)-0| = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$

$= \frac{1}{4}(x^2+y^2) < \varepsilon$.

取 $\delta = 2\sqrt{\varepsilon}$ 即可.

(当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时. 有 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$)

例2：设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

$(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+\underline{2|xy|}$
$\le 2(x^2+y^2)$

证：$\forall \varepsilon>0$. 要使 $|f(x,y)-0| \le \left| x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|$

$\le |x|+|y|$

$\le \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ 即可.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A.$

$\Leftrightarrow$ 当 $\underbrace{(x,y)\to(x_0,y_0)}_{\text{以任何方式.}}$ 时. 有 $f(x,y)\to A$.

反之. 沿两种不同方式趋近时. 极限不同. $\Rightarrow$ 极限不存在.

例3：设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，讨论当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，

$f(x,y)$ 的极限是否存在.

解：当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时.

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

与 k 有关. $\Rightarrow$ 极限不存在.

沿 $y=x$ 趋于 $(0,0)$. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y=x}} f(x,y) = \frac{1}{2}$

沿 $y=-x$ --- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y=-x}} f(x,y) = -\frac{1}{2}$

例4: 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$, 讨论当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限是否存在.

解: 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ $(k\neq-1)$ 趋于 $(0,0)$ 时.

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x+kx} = 0. \qquad (k\neq-1)$$

当 (x,y) 沿曲线 $y=x^2-x$ 趋于 $(0,0)$ 时.

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\ y=x^2-x}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\frac{x(x^2-x)}{x^2} = \lim_{x\to0}(x-1) = -1$$

$\Rightarrow$ 极限不存在.

例5: 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}$.

解: 令 $t=xy$. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时. 有 $t\to0$

$$\Rightarrow 原式 = \lim_{t\to0}\frac{t}{\sqrt{1+t}-1}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{t}{\frac{1}{2}t} = 2$$

例6：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解：原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y = 2$.

(法二). 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot y$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} \cdot 2 = 2$.

例7：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.

解：原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{有界}} \cdot \underbrace{y}_{=\text{无穷小}} = 0$

(法二). $0 \le \left|\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \to 0 \quad (y\to 0)$.

$\Rightarrow$ 原式 $= 0$.

例8：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$.

解：原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)\,x^2y^2}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}$

$= 2\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ $\qquad 0 \le \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le y^2 \to 0$

$= 0$.

二重极限. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

(以后何示式)

累次极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))$$

注: • 累次极限不一定都存在, 存在也不一定相等.

① $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, ② $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$x\to 0$
$y\to 0$

③ $$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$$

① $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

② 累次极限 $=0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

③ 累次极限不存在

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

• 累次极限与二重极限不存在蕴含关系.

• 若累次极限、二重极限都存在, 则相等.

三、多元函数的连续性

定义： 设二元函数 $z=f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 $D\subset \mathbf{R}^2$，聚点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，即：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，$P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的连续点。否则，称不连续，此时 $P_0(x_0,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的间断点。

- 一元函数： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

  $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

- 二元函数： $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0$

  $\Delta x=x-x_0$. $\Delta y=y-y_0$

  其中：$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ （全增量）

  $$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

- 若 $f(x,y)$ 在区域 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数。（无洞无缝的连续曲面）

例如： $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，(0,0)为其间断点。

$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$，在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断。

性质： 多元连续函数的和、差、积、商(分母不为0)仍连续；多元连续函数的复合仍连续。

$\Rightarrow$ 一切多元初等函数在其定义区域内是连续的。

例1：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{\ln(x^2+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：由 $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的间断点为 $(0,0)$.

在 $(2,1)$ 点连续.

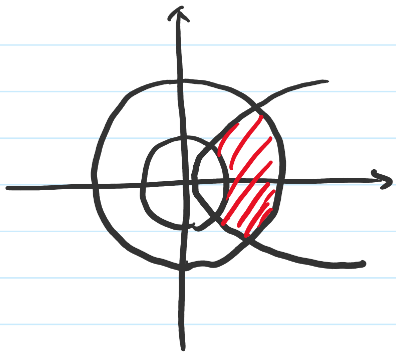
$\Rightarrow$ 原式 $= f(2,1) = \dfrac{\ln(4+e)}{\sqrt{5}}$.

例2：求 $f(x,y) = \dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解：由 $f(x,y)$ 为二元初等函数.

连续域. $\begin{cases} |3-x^2-y^2| \le 1 \\ x-y^2 > 0 \end{cases}$

即: $\begin{cases} 2 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x > y^2. \end{cases}$



- 多元连续函数在有界闭区域上的性质 (与一元函数类似)

① 有界性与最大值最小值定理

有界闭区域D上的多元连续函数, 在D上必有界;
且能取到它的最大值和最小值.

② 介值定理

有界闭区域D上的多元连续函数, 必能取到介于最大值和最小值之间的任何值.

③ 一致连续性定理

有界闭区域D上的多元连续函数, 在D上必一致连续.