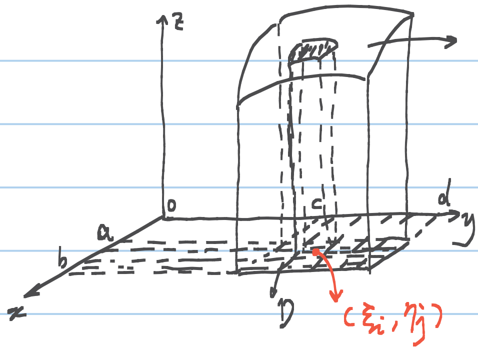
§7.1 多元数量值函数积分的概念与性质

Note Title

(一) 二重积分的定义.

例1: 求曲顶柱体的体积



$z=f(x,y)$ $\quad D=[a,b]\times[c,d]$

① 划分T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$ $\quad \Delta y_j=y_j-y_{j-1}$

$\sigma_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ $\quad \Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

② 取点. $(\xi_i,\eta_j)\in\sigma_{ij}$ $\quad \Delta V_{ij}\approx f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j$

③ 求和. $V\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j$

④ 取极限: $\lambda(T)=\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}\left\{\sup\limits_{P_1,P_2\in\sigma_{ij}} d(P_1,P_2)\right\}$ $\quad \lambda(T)$为划分之直径. 若 $\lim\limits_{\lambda(T)\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j$

存在. 且极限值不依赖于划分T之选取. 不依赖于(ξ_i,η_j)选取.

称 $f(x,y)$ 在 D 上可积. 记作 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 或 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

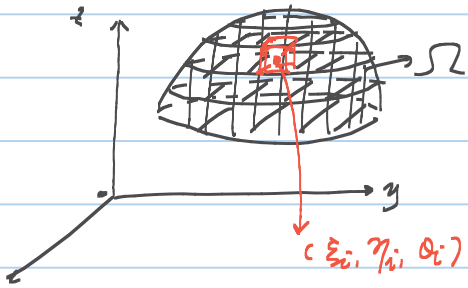
Note 1: 若f在有界闭区域D上二重积分存在

定义: $\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy}{S_D}$. (S_D为D的面积.) 为

f在D上的平均值.

2. 若 $f(x,y)\equiv1$. $\quad S_D=\iint\limits_D 1\,dxdy$. $\quad \left(\int_a^b 1\,dx=b-a\right)$

(二) 三重积分的定义:



设 $\rho(x,y,z)$ 为有界闭区域Ω上有定义.

$\rho(x,y,z)$ 体密度. 求Ω的质量.

① 将Ω划分 $\{\Delta\Omega_k\}_{k=1}^{n}$ $\quad$ ② $(\xi_i,\eta_i,\theta_i)\in\Omega_i$ $\quad i=1\cdots n$

③ $m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \theta_i)\Delta V_i$

$\lambda(T) = \max_{1\le k\le n}\left(\sup_{P_1, P_2 \in \Delta\Omega_k} d(P_1, P_2)\right)$

④ $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta V_k$ 存在，且极限值不依赖于划分选取，不依赖于 $(\xi_i, \eta_i, \theta_i)$ 选取，则称 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上可积。

记作 $\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\,dxdydz$ 或 $\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\,dv$.

(三) 可积的性质：

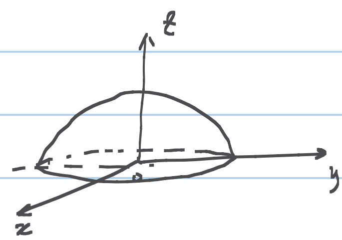
(1) 必要条件：若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，则 f 在 D 上有界。

(2) 充分条件：若 f 在有界闭区域上连续，则 f 在 D 上可积。

(3) 区域可加性：f 在 D 上可积，$D = D_1 \cup D_2$，且 $D_1 \cap D_2 = \phi$.

则 $\iint_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

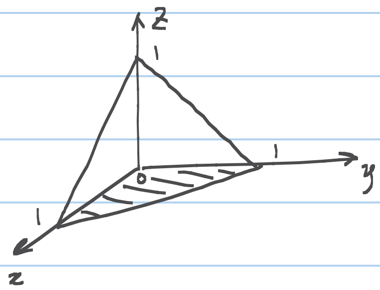
例1：计算：$I = \iint_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \quad (a>0)$



解：$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上半球面

由几何意义知 $I = \frac{2}{3}\pi a^3$.

例2：计算 $I = \iint_{\substack{0\le x, y\le 1 \\ x+y\le 1}} (1-x-y)\,dxdy$



解：$z = 1-x-y \Rightarrow x+y+z = 1$.

由几何意义知

$I = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$.

(四) 二重积分运算性质：

1. 线性性质：f, g 在有界闭域 D 上可积，$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

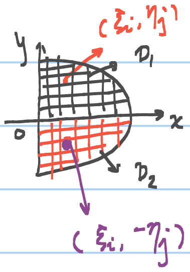
则 $\alpha f + \beta g$ 在 D 上仍可积，且

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dxdy + \beta \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

2. 奇偶性：Case 1：D 关于 x 轴对称，$f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$$

$$f(x,-y) = -f(x,y)$$



$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \lim_{\lambda_1(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j + \lim_{\lambda_2(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, -\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

$$= \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [f(\xi_i, \eta_j) + f(\xi_i, -\eta_j)]\Delta x_i \Delta y_j = 0.$$

Case 2：D 关于 x 轴对称 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数 则 $\iint_D f\,dxdy = 2\iint_{D_1} f\,dxdy$.

3. 估值定理：$f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，且 $\forall (x,y) \in D$,

$m \le f(x,y) \le M$，则 $m\,\sigma(D) \le \iint_D f(x,y)\,dxdy \le M\,\sigma(D)$

4. 绝对可积性：$f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $|f|$ 在 D 上可积

且 $\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$

5. 积分中值定理：$f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $\exists (\xi, \eta) \in D$, s.t.

$$f(\xi,\eta) = \frac{\iint_D f(x,y)\,dxdy}{\sigma(D)} \quad \left[\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\,\sigma(D)\right]$$

例1：$f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上非负，连续，不恒为零，则

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy > 0.$$

证明：由于 f 在 D 上非负，不恒为零，$\exists (x_0, y_0) \in D$, $f(x_0,y_0) > 0$

由连续性 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) > \frac{f(x_0,y_0)}{2}$.

由保号性，$\exists \delta > 0$，在 $\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\} \triangleq D_\delta$ 内，$f(x,y) > \frac{f(x_0,y_0)}{2}$

于是 $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_\delta \cap D} f(x,y)\,dxdy + \underbrace{\iint_{D \setminus D_\delta} f(x,y)\,dxdy}_{\ge 0} \ge \iint_{D_\delta \cap D} f(x,y)\,dxdy \ge \frac{f(x_0,y_0)}{2} \cdot \pi\delta^2 > 0.$