



大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# 数量值函数的曲面积分

主讲教师：石瑞

大连理工大学





- ◆ 第一型曲面积分的概念
- ◆ 曲面积分与定积分的转化
- ◆ 典型例题

大 连 理 工 大 学





## 第一型曲面积分的概念



与引入定积分概念的四个主要步骤（分划，代替，求和，取极限）作对比，我们同样可以运用类似的步骤引入数量值函数曲面积分的概念。

设  $S$  为曲面， $f$  为定义在  $S$  上的三元函数  $f(x, y, z)$ ，可从物理角度将  $f$  看成密度函数。

首先，将  $S$  分划为  $n$  个小曲面  $\Delta S_i$ ， $i = 1, \dots, n$ ，并用  $\Delta S_i$  表示对应小曲面的面积；

其次，在每个小曲面  $\Delta S_i$  上选取特值  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ，并用  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$  代替小曲面  $\Delta S_i$  的质量；

再次，将  $n$  个小曲面  $\Delta S_i$  对应的乘积  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$  求和；

最后，令空间曲面  $S$  分划的份数  $n$  趋向无穷，考虑上一步中  $n$  项  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$  求和的极限。





## 第一型曲面积分的概念



通过上述四个步骤,  $f(x, y, z)$  在  $S$  上的曲面积分可以归结为如下和式的极限

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

上述极限称为数量值函数  $f$  在曲面  $S$  上的**第一型曲面积分**.

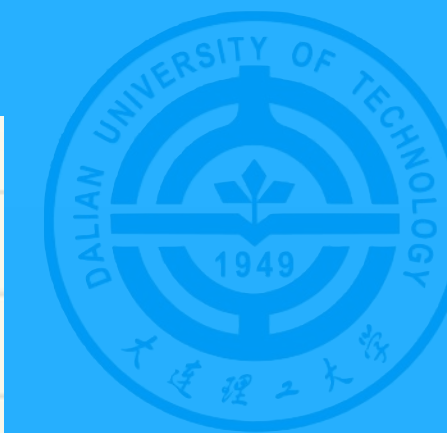




设曲面

其中  $L$

即  $S$  为



【例1】  
平面  $\alpha$  与

$R$ ) 与





## 典型例题



【总结】 设  $S$  的方程为

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}$$

其中函数  $z = z(x, y)$  在  $D_{xy}$  上有连续偏导数,  $D_{xy}$  为  $S$  在  $xOy$  上的投影域.

若  $f(x, y, z)$  在  $S$  上连续, 那么第一型曲面积分的计算公式为如下形式:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

计算步骤: 【投影】 根据具体情况确定曲面  $S$  的投影域, 作为二重积分的积分域;

【代  $z$ 】 将被积函数  $f(x, y, z)$  中的  $z$  用  $z(x, y)$  代替;

【换  $dS$ 】 将曲面  $S$  的面积微元  $dS$  转换为  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$ .