大连理工大学
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# 二阶常系数齐次线性微分方程的解法

主讲人：刘秀平 教授

# 二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1.1)$$

$p(x), q(x)$是函数.

二阶变系数齐次线性微分方程.

$$p(x) = p, q(x) = q$$

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1.6)$$

二阶常系数齐次线性微分方程.

# 1. 3二阶常系数齐次线性微分方程求解

二阶常系数齐次微分方程

$$y''+py'+qy=0 \qquad (1.6)$$

$$y=e^{\lambda x}. \qquad y'=\lambda e^{\lambda x}. y''=\lambda^2 e^{\lambda x}. \qquad e^{\lambda x}(\lambda^2+p\lambda+q)=0.$$

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0.$ (1.7)

（I）特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$有两个互异实根，分别为$\lambda_1$，$\lambda_2$.

$y_1=e^{\lambda_1 x}$， $y_2=e^{\lambda_2 x}$. 由于$\frac{y_1}{y_2}=e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\neq C$（常数）.

通解 $y=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}$.

# 1.3二阶常系数齐次线性微分方程求解

（II）特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$有一对共轭复根，不妨设为$\alpha\pm\mathrm{i}\beta$.

$$\bar{y}_1=e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=\underline{e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)},$$

$$\bar{y}_2=e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}=\underline{e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)}.$$

$$y_1=\tfrac{1}{2}(\bar{y}_1+\bar{y}_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2=\tfrac{1}{2i}(\bar{y}_1-\bar{y}_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

通解　$y=\mathrm{C}_1e^{\alpha x}\cos\beta x+\mathrm{C}_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

$$=e^{\alpha x}(\mathrm{C}_1\cos\beta x+\mathrm{C}_2\sin\beta x).$$

# 1. 3二阶常系数齐次线性微分方程求解

（III）特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$有二重根$\lambda_1=\lambda_2=\lambda.$

$$y_1=e^{\lambda x},\quad y_2=u(x)e^{\lambda x}.$$

$$\Rightarrow y_2'=(u'(x)+u(x))e^{\lambda x},\qquad y_2''=(u(x)e^{\lambda x})''=(u''(x)+2\lambda u'(x)+\lambda^2 u(x))e^{\lambda x}.$$

$$y''+py'+qy=0 \qquad e^{\lambda x}[u''+(2\lambda+p)u'+(\lambda^2+p\lambda+q)u]=0.$$

$$u''+\underline{(2\lambda+p)}u'+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}u=0.$$

$$\Rightarrow u''=0. \qquad \Rightarrow u=x.$$

$$\Rightarrow y_2=u(x)e^{\lambda x}=xe^{\lambda x}.$$

通解 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}. \quad =(C_1+C_2x)e^{\lambda x}.$ □

# 1.3二阶常系数齐次线性微分方程求解

二阶常系数齐次线性微分方程通解的组成

| 特征根情况 | 方程的通解 |
| --- | --- |
| 两个不等实根$\lambda_1 \neq \lambda_2$ | $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ |
| 二重根$\lambda$ | $(C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$ |
| 一对共轭复根$\alpha \pm i\beta$ | $e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ |

□

# 1.3二阶常系数齐次线性微分方程求解

例题 求方程$y''+y'-6y=0$的通解.

解：方程$y''+y'-6y=0$的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-6=0.$$

相应的特征根为$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=2$.

因此 通解为$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$.

□

# 1. 3二阶常系数齐次线性微分方程求解

例题 求方程$y''-4y'+13y=0$的通解.

解： 方程$y''-4y'+13y=0$的特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+13=0.$$

相应的特征根为$\lambda_1=2+3\mathrm{i}$，$\lambda_2=2-3\mathrm{i}$.

因此 通解为$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

□

# 1. 3二阶常系数齐次线性微分方程求解

例题 求方程$y''+2y'+y=0$满足$y|_{x=0}=4, y'|_{x=0}=-2$的特解.

解： 方程$y''+2y'+y=0$的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+1=0.$$

相应的特征根为$\lambda_1=\lambda_2=-1.$ 因此 通解为$y=e^{-x}(C_1+C_2x).$

由$y|_{x=0}=e^{-x}(C_1+C_2x)|_{x=0}=C_1=4.$

$$y'=(e^{-x}(C_1+C_2x))'=(C_2-(C_1+C_2x))e^{-x}=(C_2-4-C_2x)e^{-x}.$$

$$y'|_{x=0}=C_2-4=-2,\Rightarrow C_2=2.$$

因此 特解为$y=e^{-x}(4+2x).$

□

# n阶常系数齐次线性微分方程的解法

主讲人：刘秀平 教授

# 1. 3n阶常系数齐次线性微分方程求解

n 阶常系数齐次线性微分方程通解的组成

| 特征根情况 | 方程通解中对应的项 |
| --- | --- |
| 单实根$\lambda$ | 对应一项$Ce^{\lambda x}$ |
| 一个k重根$\lambda$ | 对应k项（$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$ |
| k重共轭复根$\alpha\pm i\beta$ | 对应2k项$e^{\alpha x}[$（$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$ |

□

# 1.3 n阶常系数齐次线性微分方程求解

例题 求方程$y^{(5)}+2y'''+y'=0$的通解.

解：方程$y^{(5)}+2y'''+y'=0$的特征方程为

$$\lambda^5+2\lambda^3+\lambda=0.$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2+1)^2=0. \Rightarrow k=2.$$

相应的特征根为$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=i$，$\lambda_{4,5}=-i$.

$$\Rightarrow \alpha=0, \beta=1.$$

通解为$y=C_1e^{\lambda_1 x}+e^{\alpha x}[(C_2+C_3x)\cos\beta x+e^{\alpha x}(D_2+D_3x)\sin\beta x]$.

通解为$y=C_1+(C_2+C_3x)\cos x+(D_2+D_3x)\sin x$. □

# 1. 3 n阶常系数齐次线性微分方程求解

例题 求初值问题$\begin{cases} 9y''' - 3y'' - 5y' - y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$的特解.

解：方程$9y''' - 3y'' - 5y' - y = 0$的特征方程为

$$9\lambda^3 - 3\lambda^3 - 5\lambda - 1 = 0.$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(9\lambda^2 + 6\lambda + 1) = (\lambda - 1)(3\lambda + 1)^2 = 0.$$

相应的特征根为$\lambda_1$=1，$\lambda_{2,3}$=-$\frac{1}{3}$. $\Rightarrow k = 2.$

通解为$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}(C_2 + C_3 x) = C_1 e^{x} + e^{-\frac{1}{3}x}(C_2 + C_3 x).$

$$y|_{x=0} = C_1 e^{x} + e^{-\frac{1}{3}x}(C_2 + C_3 x)|_{x=0} = C_1 + C_2 = 1.$$

$$y'|_{x=0} = (C_1 e^{x} + e^{-\frac{1}{3}x}(C_2 + C_3 x))'|_{x=0} = C_1 e^{x} + C_3 e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}(C_2 + C_3 x)|_{x=0} = 0.$$

$$\Rightarrow C_1 - \frac{1}{3} C_2 + C_3 = 0.$$

# 1. 3 n阶常系数齐次线性微分方程求解

$$y''|_{x=0} = (C_1 e^x + e^{-\frac{1}{3}x}(C_2 + C_3 x))''|_{x=0}$$

$$= C_1 e^x + \tfrac{1}{9} e^{-\frac{1}{3}x}(C_2 + C_3 x) - \tfrac{2}{3} C_3 e^{-\frac{1}{3}x}|_{x=0} = 0.$$

$$\Rightarrow C_1 + \tfrac{1}{9} C_2 - \tfrac{2}{3} C_3 = 0.$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1. \\ C_1 - \tfrac{1}{3} C_2 + C_3 = 0. \\ C_1 + \tfrac{1}{9} C_2 - \tfrac{2}{3} C_3 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = \frac{15}{16}, C_1 = \frac{1}{4}.$$

初值问题的解为 $y = \tfrac{1}{16} e^x + e^{-\frac{1}{3}x}(\tfrac{5}{16} + \tfrac{1}{4} x).$

□