1. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-2019z=\varphi(y-2020z)$ 确定，其中 φ 为可微函数，则 $2019\frac{\partial z}{\partial x}+2020\frac{\partial z}{\partial y}=($ $)$.

(A) 0；（B）1；（C）2；（D）3.

解 **（B）**

$$1-2019\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(y-2020z)\cdot(-2020\frac{\partial z}{\partial x})=\varphi'\cdot(-2020\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2019-2020\varphi'}$$

$$-2019\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(y-2020z)\cdot(1-2020\frac{\partial z}{\partial y})=\varphi'\cdot(1-2020\frac{\partial z}{\partial y})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\varphi'}{2019-2020\phi'}$$

$$2019\frac{\partial z}{\partial x}+2020\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

2. 函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 有连续偏导数，且 $F_2'\neq 0$ 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=($ $)$.

（A）$-x$；（B）$-z$；（C）x；（D）z.

解 **（D）**

$$F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}\right)=0\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$$

$$F_1'\left(\frac{1}{x}\right)+F_2'\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{x}\right)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_1'}{F_2'}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

3.设 $z=f\left(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，则

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　　）.

（**A**）$xy(f''_{11}-f''_{22})+f'_1+(x^2-y^2)f''_{12}$；（**B**）$xy(f''_{11}+f''_{22})+f'_1+(x^2-y^2)f''_{12}$；

（**C**）$xy(f''_{11}+f''_{22})+f'_1+(x^2+y^2)f''_{12}$；（**D**）$xy(f''_{11}-f''_{22})+f'_1+(x^2+y^2)f''_{12}$.

解　（**A**）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+xf_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf''_{11}-yf''_{12}\right)+x\left(xf''_{21}-yf''_{22}\right)=xy(f''_{11}-f''_{22})+f'_1+(x^2-y^2)f''_{12}$$

4. 设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))\cdot y+f_2'(xy,yg(x))\cdot yg'(x)$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(xy,yg(x))+y\left[f''_{11}(xy,yg(x))\cdot x+f''_{12}(xy,yg(x))\cdot g(x)\right]$$

$$+f_2'(xy,yg(x))\cdot g'(x)+yg'(x)\left[f''_{21}(xy,yg(x))\cdot x+f''_{22}(xy,yg(x))\cdot g(x)\right]$$

由于 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，故 $g'(1)=0$。将 $g(1)=1$，$g'(1)=0$ 代入上式得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)$$ 。

5. 设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，则在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域内，该方程__.

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$

答案: C

6.求函数 $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解 由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b}{a}$

即该点的切向量为 $(-a, b)$，所以该点法向量为 $\pm(b, a)$，该点的内法线方向为 $\boldsymbol{l} = -(b, a) = (-b, -a)$， $\quad e_l = \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\left.\frac{2x}{a^2}\right|_{x=\frac{a}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\left.\frac{2y}{b^2}\right|_{y=\frac{b}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{b}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{a}\right) \cdot \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{b}\right) \cdot \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$$

7.求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=2y \end{cases}$ 在点$M_0(1,1,\sqrt{2})$处的切线方程与法平面方程.

解 $$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$$

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{1-y}$$

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2y+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2y=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1-y}{x}=0$$

曲线在点$M_0(1,1,\sqrt{2})$处的切向量为$\boldsymbol{s}=\left(0,1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(0,\sqrt{2},-1\right)$，因此所求的切线方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{z-\sqrt{2}}{-1},$$

法平面方程为

$$\sqrt{2}(y-1)-(z-\sqrt{2})=\sqrt{2}y-z=0$$

8. 在曲线$x=t,y=-t^2,z=t^3$的所有切线中，与平面$x+2y+z=4$平行的切线（　　）.

（A）只有 1 条；　（B）只有 2 条；　（C）至少有 3 条；　（D）不存在.

解 （B）只有 2 条；

$$x'(t)=1, \quad y'(t)=-2t, \quad z'(t)=3t^2 \quad , \quad (1,2,1)$$

$$1-4t+3t^2=0$$

9. 设函数$z=f(x,y)$在点$(0,1)$的某邻域内可微，且$f(x,y+1)=1+2x+3y+o(\rho)$，其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，则曲面$z=f(x,y)$在点$(0,1,f(0,1))$处的切平面方程(　　　　).

(A) $2x+3y+z=2$；　　**(B)** $2x+3y-z=2$；

(C) $2x+3y+z=1$；　　**(D)** $2x+3y-z=1$.

解　**(B)**

$$f(x,y+1)=1+2x+3y+o(\rho) \quad \Rightarrow \quad f(0,1)=1$$

$$f(x,y+1)-f(0,1)=2x+3y+o(\rho)$$

$$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y+1)-f(0,1)=2\Delta x+3\Delta y+o(\rho) \quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$f_x(0,1)=2, \qquad f_y(0,1)=3$$

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

曲面在点$(0,1,f(0,1))=(0,1,1)$的法向量 $(2,3,-1)$

切平面方程$2(x-0)+3(y-1)-(z-1)=0 \quad \Rightarrow 2x+3y-z=2$