隐函数的求导法则

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

由方程确定的隐函数的求导法则:

1. 二元函数方程确定的一元隐函数

定理1: 设二元函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内满足:

① 具有连续偏导; ② $F(x_0,y_0)=0$; ③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内可以唯一确定一个连续且有连续导数的函数 $y=f(x)$,它满足 $y_0=f(x_0)$,并有求导公式:

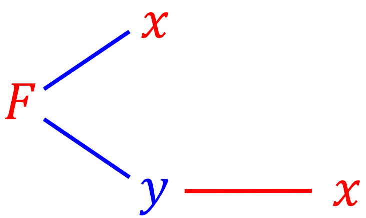
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

定理中的存在性的证明(略)

下面推导求导公式:

设 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则有：

$$F\big(x,f(x)\big)\equiv 0$$



关于 x 求导，得

$$F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

由 F_y 连续，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则存在 (x_0,y_0) 的某一邻域内 $F_y\neq 0$，

故有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

举例:

例1: 验证方程 $F(x,y)=xy+e^x-e^y=0$ 在 $(0,0)$ 的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数 $y=f(x)$，并求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$

解: 验证三个条件: 由 ① $F_x=y+e^x, F_y=x-e^y$ 连续，

并且 ② $F(0,0)=0$; ③ $F_y(0,0)=-1\neq 0$

由定理1，可唯一确定有连续导数的函数 $y=f(x)$，且 $f(0)=0$

并有求导公式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{e^x+y}{e^y-x}$$

故:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{e^x+y}{e^y-x}\right|_{(0,0)}=1$$

由方程确定的隐函数的求导法则:

2. 三元函数方程确定的二元隐函数

定理2: 设三元函数$F(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内满足:

① 具有连续偏导; ② $F(x_0,y_0,z_0)=0$; ③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程$F(x,y,z)=0$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内可以唯一确定一个连续且有连续偏导的函数$z=f(x,y)$,它满足$z_0=f(x_0,y_0)$,并有偏导公式:

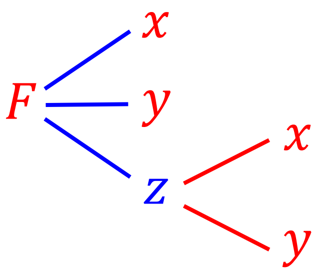
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

定理中的存在性的证明(略)

下面推导偏导公式：

设 $z=f(x,y)$ 为方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，则有：

$$F\big(x,y,f(x,y)\big)\equiv 0$$



关于 x,y 求偏导，得

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

由 F_z 连续，且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则存在 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域，

有 $F_z\neq 0$，故有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

举例：

例2：设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $e^{-xy}-2z+e^{z}=0$ 确定的隐函数，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：设 $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^{z}$，则：

$$F_x=-ye^{-xy},F_y=-xe^{-xy},F_z=e^{z}-2$$

当 $z\neq\ln 2$ 时，由定理2，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}$$

可对方程全微分求得两个偏导

对 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 关于 y 求偏导，则有

$$z = f(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}\right)$$

$$= \frac{(e^z - 2)(e^{-xy} - xye^{-xy}) - ye^{-xy}e^z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}}{(e^z - 2)^2}$$

$$= \frac{e^{-xy}[(1 - xy)(e^z - 2)^2 - xye^{z-xy}]}{(e^z - 2)^3}$$

由方程组确定的隐函数的求导法则：

定理3： 设函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内满足：

① 具有连续偏导；② $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$；

③ 雅可比行列式 $\mathcal{J}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$点不为零

则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内可以唯一确定一组连续且有连续偏导的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，

它们满足 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$， 并且有偏导公式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

定理中的存在性的证明（略）

下面推导偏导公式:

设方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定隐函数组 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$，则有:

$$\begin{cases} F\big(x,y,u(x,y),v(x,y)\big)\equiv 0 \\ G\big(x,y,u(x,y),v(x,y)\big)\equiv 0 \end{cases}$$

关于 x 求偏导，得: $\begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$ $\left(J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0\right)$

解之，得 $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$， $v_x=\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

关于 y 的偏导，同理可得。

举例:

例3：设方程组 $\begin{cases} u^3 + xv = y \\ v^3 + yu = x \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

解：（法一）

方程组关于 x 求偏导: $\begin{cases} 3u^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + v + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 3v^2 \dfrac{\partial v}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \end{cases}$

解之，得: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{3v^3 + x}{9u^2v^2 - xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{3u^2 + vy}{9u^2v^2 - xy}$

同理，得: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{3v^2 + ux}{9u^2v^2 - xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{3u^3 + y}{9u^2v^2 - xy}$

（法二） 利用全微分形式不变性

对方程组全微分：$\begin{cases} 3u^2\,\mathrm{d}u + x\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \\ 3v^2\,\mathrm{d}v + y\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{cases}$

解之，得：

$$\mathrm{d}u = \boxed{-\frac{3v^3 + x}{9u^2v^2 - xy}}\mathrm{d}x + \boxed{\frac{3v^2 + ux}{9u^2v^2 - xy}}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}v = \boxed{\frac{3u^2 + vy}{9u^2v^2 - xy}}\mathrm{d}x \boxed{-\frac{3u^3 + y}{9u^2v^2 - xy}}\mathrm{d}y$$

由全微分公式，批量可得：$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

总 结：

隐函数的求导法则

- 由方程确定的隐函数的求导法则：

  可利用求导公式或者全微分批量求得。

- 由方程组确定的隐函数的求导法则：

  可对方程组求偏导或者直接对方程组全微分批量求得。