1．对于级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^p}$，当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

解　当$p>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\ln n}{n^p}}{\dfrac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{p-1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0$

因为$\dfrac{p+1}{2}>1$，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}$收敛.　由比较判别法极限形式，原级数收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\lambda}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\lambda}=0<1\quad(\lambda>0)$　由保号性，n充分大时，$\ln n<n^\lambda$

n充分大时，$\dfrac{\ln n}{n^p}<\dfrac{n^{\frac{p-1}{2}}}{n^p}=\dfrac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}$

当$p\le 1$时，$n\ge 3$时　有$\dfrac{1}{n^p}<\dfrac{\ln n}{n^p}$

因为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散，由比较判别法，原级数发散.

2. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$均收敛

解　$|u_nv_n|\le\dfrac{u_n^2+v_n^2}{2}$

$(u_n+v_n)^2\le(|u_n|+|v_n|)^2=u_n^2+v_n^2+2|u_nv_n|$

3. 下列命题是否正确？若正确，请给予证明；若不正确，请举出反例.

（1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也发散；

（2）设 $u_n > 0$ 且数列 $\{nu_n\}$ 有界，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 必收敛；

（3）若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{u_n, v_n\}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{u_n, v_n\}$ 都发散.

解 **(1)** 不正确　　如 $u_n = \dfrac{1}{n}$

(2)　正确

$$|nu_n| \le M \Rightarrow |u_n| \le \frac{M}{n} \quad \Rightarrow u_n^2 \le \frac{M^2}{n^2}$$

(3) 不正确

$$u_n \le \max\{u_n, v_n\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \max\{u_n, v_n\} \text{ 发散}$$

$$u_n : 1,0,1,0,1,\cdots \quad , \qquad v_n : 0,1,0,1,0,\cdots$$

4. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$，证明对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

解　　$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{n+1}$$

所以　$a_n < \dfrac{1}{n}$，　$\dfrac{a_n}{n^{\lambda}} < \dfrac{1}{n^{\lambda+1}}$，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

5. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\ (n=1,2,\cdots)$，证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

证明（1）$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geq 1$，$a_n$ 有下界.

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leq 0$，单调递减.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(2) $\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leq a_n-a_{n+1}$

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$，$S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}$

收敛

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 收敛，所以由比较判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.