22-23-2

2024年6月2日　　14:24

一、选择题（共 50 分，每答对一道小题得 5 分）

1.（工数）微分方程 $y'+2xy=xe^{-x^2}$ 的通解为（　　）

(A) $y=\frac{x^2}{2}e^{-x^2}+ce^{-x^2}$（$c$ 为任意常数）.

(B) $y=-\frac{1}{4}e^{-3x^2}+ce^{-x^2}$（$c$ 为任意常数）.

(C) $y=\frac{x^2}{2}e^{x^2}+ce^{x^2}$（$c$ 为任意常数）.

(D) $y=-\frac{1}{4}e^{-x^2}+ce^{x^2}$（$c$ 为任意常数）.

1.（高数）设曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切平面为 Π，则点 $(3,4,3)$ 到 Π 的距离为（　　）

(A) 3.　　(B) 11.　　(C) 9.　　(D) $\frac{11}{3}$.

1. （微积分）设函数 $f(x,y)$ 处处有定义，且在点 $O(0,0)$ 的某去心邻域内满足

$f(x,y)=f(0,0)+x+2y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，则 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处（　　）

(A) 可微.　　(B) 不连续，可偏导.

(C) 可偏导，不可微.　　(D) 连续，不可偏导.

2. 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1, y\ge 0\right\}$，则 $\iint\limits_D (x-3y)^2\,\mathrm{d}\sigma=$（　　）

(A) $\dfrac{5\pi}{2}$.　　(B) $\dfrac{5\pi}{3}$.　　(C) $\dfrac{5\pi}{4}$.　　(D) $\dfrac{10\pi}{3}$.

3. 设平面曲线 $L:(x-1)^2+y^2=1$，则 $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=$（　　）

(A) -4π.　　(B) 4π.　　(C) -2π.　　(D) 2π.

4. 设 $V=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\right\}$，则 $\iiint\limits_V \left(2x^2+(z-1)^2\right)\mathrm{d}V=$（　　）

(A) $\dfrac{2\pi}{3}$.　　(B) $\dfrac{2\pi}{5}$.　　(C) $\dfrac{4\pi}{3}$.　　(D) $\dfrac{4\pi}{5}$.

5. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x)=x\,(-\pi\le x<\pi)$，在其 **Fourier** 级数

$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 之中，**Fourier** 系数（　　）

(A) $a_2=0,b_2=1$.　　　　**(B)** $a_2=0,b_2=-1$.

(C) $a_2=1,b_2=0$.　　　　**(D)** $a_2=-1,b_2=0$.

6. 在以下四个数项级数之中，发散的是（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^2}$.　　　　**(B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n-2^n}$.

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$.　　　　**(D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{\ln n}}$.

7. 函数$\ln(2-x)$的 **Maclaurin** 级数是（　　）

(A) $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n\ \left(x\in[-2,2)\right)$.

(B) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}x^n\ \left(x\in[-2,2)\right)$.

(C) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n\ \left(x\in[-2,2)\right)$.

(D) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}x^n\ \left(x\in[-2,2)\right)$.

8. 设函数$f(x,y)=3x-x^3+y^2+2y$，则$f(x,y)$有一个（　　）

(A) 极大值 -3．　　**(B)** 极大值 1．

(C) 极小值 -3．　　**(D)** 极小值 1．

9. 设函数 $f(x,y)=\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^4}\right)$，则（　　）

(A) $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在.

(B) $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都存在.

(C) $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在.

(D) $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都不存在.

10. 设 Oxy 面内的有向曲线 $C: y=x^2\ (x:2\to 0)$，$\boldsymbol{l}$ 为 C 在点 $(1,1)$ 处的切向量，其方向与曲线 C 的方向一致，$f(x,y)=xy^2$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,1)}=$（　　）

(A) $\sqrt{5}$.

(B) $-\sqrt{5}$.

(C) 5 .

(D) -5 .

二（高数）、（10 分）设直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，直线 $L_2: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

(1) 判别 L_1 与 L_2 是否共面？ **(2)** 若 L_1 与 L_2 共面，求 L_1 与 L_2 确定的平面方程；

二（微积分）、（10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

二（工数）、（10 分）求微分方程 $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$ 的通解.

三、（10 分）设函数 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足偏微分方程

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

利用变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x - \dfrac{2}{5}y \end{cases}$ 将上述方程化为以 u, v 为自变量的方程.

四、（10 分）求曲线积分 $I=\int_L \frac{\left(\mathrm{e}^x \sin y + x\sin x + y^2\right)\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^x \cos y + x^6\right)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为上半单位圆周线 $x^2+y^2=1\,(y\geq 0)$ 上从点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的有向弧段.

五、(10 分)计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x(8y+\sin z+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-2y^2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(xz-4yz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1}, \\ x=0 \end{cases}(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，其法向量与 y 轴正向的夹角大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

六、（10 分）(1) 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$是绝对收敛、条件收敛还是发散？

(2) 若级数收敛，求该级数的和.