将函数展为幂级数

前面对给定的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$或$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$，讨论了它的收敛域及和函数．例如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$的和函数是$S(x)$，收敛域为$I$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = S(x) \qquad (x \in I),$$

若将上式改写成$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$，$(x \in I)$，即换一个角度看上述等式，就是对给定的一个函数$f(x)$[用$f(x)$表示$S(x)$]，去寻找一个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$，使它在某区间$I$上收敛，且其和恰好是$f(x)$．这就是所谓**函数展开成幂级数问题**．如果能找到这样的幂级数，就得到了函数的一种新的表示形式．由于幂级数不仅形式简单，而且具有与多项式函数类似的性质，因此如果能将已知函数用幂级数表示常常更有利于问题的研究与解决.

显然，$f(x)$若能展开成幂级数，必须在包含x_0的某区间内有任意阶的导数.

下面就来讨论怎样将一个在包含x_0的某区间I内具有任意阶的导数的函数表示成幂级数，这里包含两个问题：一是函数$f(x)$在什么条件下可以表示成幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (x \in I),$$

也就是说，在什么条件下，上式右端的幂级数收敛于$f(x)$？二是如果函数$f(x)$能表示成上式的幂级数，其系数a_n $(n=0,1,\cdots)$怎样确定？

首先考查第二个问题，假定函数$f(x)$能展开成$x-x_0$的幂级数，由幂级数在收敛区间内有任意阶导数，且可逐项求导的性质，就可得到

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)+\cdots \qquad (n=0,1,\cdots),$$

上式两端令$x=x_0$，则得

$$a_0=f(x_0), a_1=f'(x_0), a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \cdots.$$

由上述讨论可知，若 $f(x)$ 可以展为 $x-x_0$ 的幂级数，则 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内必须有任意阶导数，而且幂级数的系数必为 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=0,1,\cdots)$，即**函数的幂级数展开式是唯一的**.

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有任意阶导数，称

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\qquad(n=0,1,\cdots)$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒系数**，而由 a_n 构成的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ ,$$

称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**泰勒级数**. 特别当 $x=0$ 时，称泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为**麦克劳林级数**. 可见，若函数 $f(x)$ 在某区间可以展为幂级数，则此幂级数必为泰勒级数.

由于只要函数 $f(x)$ 在某区间有任意阶导数，就可以用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 形式地写出它的泰勒级数. 那么这个泰勒级数是否收敛？如果收敛，是否收敛于 $f(x)$？回答不是肯定的，例如

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}\ ,$$

可以验证它在 $(-\infty,+\infty)$ 内有任意阶导数，并且对任何 n， $f^{(n)}(0)=0$,因此它在 $x=0$ 处的泰勒级数为

$$0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)\ ,$$

显然此级数收敛于和函数 $S(x)=0$，但当 $x\neq 0$ 时， $S(x)\neq f(x)$，即泰勒级数不收敛于 $f(x)$. 因此，还要解决第一个问题，即寻求 $f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x)$ 的条件.

根据级数收敛的定义， $f(x)$ 的泰勒级级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\qquad(x\in I)$$

是否收敛于 $f(x)$，只需考查余和

$$r_n(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]$$

是否随 $n\to\infty$ 而趋于零．由在一元函数微分学中学过的泰勒中值定理，知上式右端恰好为泰勒公式的余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（其中 ξ 在 x_0 与 x 之间），所以只要

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0 \qquad (x\in I),$$

就有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (x\in I).$$

另一方面，若 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，容易看出 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

综合以上分析，有下述定理：

函数的幂级数展开定理　设函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某区间 I 内具有任意阶导数，则 $f(x)$ 在该区间内能展开成泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0 \qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间，} x\in I).$$