大连理工大学
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

二阶常系数非齐次线性微分方程（II）

主讲人：刘秀平 教授

二阶常系数非齐次线性微分方程

二、 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

由Euler公式，得

$$\cos\omega x=\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega w}}{2},\qquad \sin\omega x=\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i},$$

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega w}}{2}+P_n(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}]$$

$$=[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{P_n(x)}{2i}]e^{(\lambda+i\omega)x}+[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{P_n(x)}{2i}]e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=\boxed{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\bar{P}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x}}=f_1(x)+f_2(x)$$

$$\frac{P_l(x)}{2}+\frac{P_n(x)}{2i}=\frac{P_l(x)}{2}-\frac{iP_n(x)}{2}=P_m(x)\qquad \frac{P_l(x)}{2}-\frac{P_n(x)}{2i}=\frac{P_l(x)}{2}+\frac{iP_n(x)}{2}=\bar{P}_m(x)$$

其中$m=\max\{l,n\}$。

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

$$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$$

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}，\ f_2(x)=\overline{P}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$y'' + py' + qy = f_1(x) = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$y_1^*(x) = x^k Q_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \qquad (2)$$

k 按λ+iω不是特征方程$r^2 + pr + q = 0$根、是特征方程的根而依次取为0,1。

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$f_2(x)=\overline{P}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x}=\overline{f}_1(x)$$

与$y_1^*(x)$共轭的函数

$$y_2^*(x)=x^k\overline{Q}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x} \qquad （3）$$

$$y''+py'+qy=f_2(x)$$

其中$\overline{Q}_m(x)$为$Q_m(x)$的共轭m次多项式。

$$y^*(x)=y_1^*(x)+y_2^*(x)=x^kQ_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+x^k\overline{Q}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=x^ke^{\lambda x}[Q_m(x)e^{i\omega x}+\overline{Q}_m(x)e^{-i\omega x}]$$

$$=x^ke^{\lambda x}[Q_m(x)(\cos\omega x+i\sin\omega x)+\overline{Q}_m(x)(\cos\omega x+i\sin\omega x)]$$

$$=x^ke^{\lambda x}[(Q_m(x)+\overline{Q}_m(x))\cos\omega x+i(Q_m(x)-\overline{Q}_m(x))\sin\omega x]$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$令Q_m^{(1)}(x)=Q_m(x)+\bar{Q}_m(x), Q_m^{(2)}(x)=i(Q_m(x)-\bar{Q}_m(x)).$$

$$y^*(x)=x^k e^{\lambda x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\omega x+Q_m^{(2)}(x)\sin\omega x].$$

综上所述，可得下述结论：

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_n^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

特解为

$$y^*(x)=x^k e^{\lambda x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\omega x+Q_m^{(2)}(x)\sin\omega x] \quad （13）$$

其中$m=\max\{l,n\}$, $Q_m^{(1)}(x)$与$Q_m^{(2)}(x)$均为m次多项式，

k 按λ+iω不是特征方程$r^2+pr+q=0$根、是特征方程的根而依次取为0,1。

特解的求法

例题 方程$y''-2y'+2y=e^x(x\cos x+2\sin x)$具有什么样形式的特解?

解: $f(x)=e^x(x\cos x+2\sin x)=e^{\lambda x}(P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_n^{(2)}(x)\sin\omega x)$

$\lambda=1,\omega=1,P_l^{(1)}(x)=x,P_n^{(2)}(x)=2.\ \Rightarrow \lambda+i\omega=1+i$

$\Rightarrow l=1,n=0,m=\max\{l,n\}=1$

齐次方程$y''-2y'+2y=0$

特征方程为$r^2-2r+2=0$ 特征根为$r_{1,2}=1\pm i$

$\lambda+i\omega=1+i$是特征方程$r^2-2r+2=0$的根, $\Rightarrow$ k=1

$$y^*(x)=x^k e^{\lambda x}(Q_m^{(1)}(x)\cos\omega x+Q_m^{(2)}(x)\sin\omega x)$$

$$=xe^x(Q_1^{(1)}(x)\cos x+Q_1^{(2)}(x)\sin x).$$

□

特解的求法

例题　求微分方程$y''+y=x+\cos x$的通解.

解：（1）先求齐次方程的通解。

齐次方程$y''+y=0$　特征方程为 $r^2+1=0$

相应的特征根为 $r_{1,2}=\pm i$,　齐次方程$y''+y=0$通解为

$$C_1\cos x+C_2\sin x,$$

其中C_1,C_2为任意常数.

（2）求非齐次方程的特解。

$f(x)=x+\cos x$　$f_1(x)=x$, $f_2(x)=\cos x$

设$y''+y=f_1(x)=x$的特解为y_1^*，$y''+y=f_2(x)=\cos x$的特解为y_2^*

则$y^*=y_1^*+y_2^*$是原方程的特解。

特解的求法

$y''+y=x\ =e^{0x}x\ =e^{\lambda x}P_m(x)\ \Rightarrow \lambda=0, m=1.$ 由于$\lambda=0$不是特征方程的根，

$y_1^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x)\ =Q_1(x)=ax+b$

$y_1^{*\prime}=a, y_1^{*\prime\prime}=0\ \ y''+y=x\ \ \Rightarrow a=1, b=0.$

$y_1^*=x$是$y''+y=x$一个特解。

$y''+y=\cos x$的特解y_2^* $\ f_2(x)=\cos x$

$y_2^*(x)=x^k e^{\lambda x}(Q_m^{(1)}(x)\cos\omega x+Q_m^{(2)}(x)\sin\omega x).$ （13）

$\Rightarrow \lambda=0, \omega=1, m=0.$ 由于$\lambda+i\omega=i$是特征方程的根， 所以k=1.

$y_2^*(x)=x(Q_0^{(1)}(x)\cos x+Q_0^{(2)}(x)\sin x)=x(a\cos x+b\sin x).$

$y_2^{*\prime\prime}(x)=2(b\cos x-a\sin x)-x(a\cos x+b\sin x)\ \ y_2^{*\prime\prime}(x)+y_2^*(x)=2(b\cos x-a\sin x)=\cos x.$

$\Rightarrow a=0, b=\frac{1}{2}.\ y_2^*(x)=\frac{1}{2}x\sin x.\ \ y^*=y_1^*+y_2^*\ =x+\frac{1}{2}x\sin x.$

通解$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x.$ □

谢谢！