多元复合函数的求导法则

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

回 顾：

一元复合函数的求导法则

若函数 $u=g(x)$ 在点 x 处可导， $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导，

则：复合函数 $y=f\big(g(x)\big)$ 在点 x 处可导， 且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$ （链式法则）

一元复合函数的微分

$$\mathrm{d}y=f'(u)\cdot \underline{g'(x)\,\mathrm{d}x}=f'(u)\,\mathrm{d}u$$ （一阶微分形式不变性）

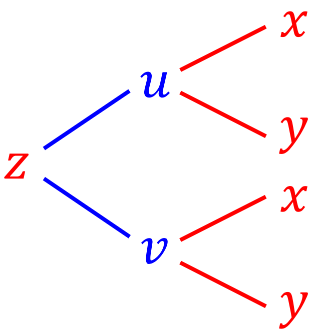
多元复合函数求导的链式法则:

定理1:（多套多型）若函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 都在点 (x,y) 处可偏导，并且函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则：

复合函数 $z=f\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ 在点 (x,y) 处可偏导，且有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$



（口诀）
分段用乘
分叉用加
单路全导
叉路偏导

证： 给定 x 的增量 Δx，y 固定，相应有函数 u,v 对 x 的偏增量：

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y),\quad \Delta_x v = v(x+\Delta x, y) - v(x,y)$$

进而使 $z = f(u,v)$ 获得增量 $\Delta_x z$，由 $z = f(u,v)$ 在 (u,v) 点可微，

则：$\Delta_x z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\Delta_x u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\Delta_x v + o(\rho)$，$\left(\rho = \sqrt{(\Delta_x u)^2 + (\Delta_x v)^2}\right)$

上式两端同除 Δx，得：

$$\boxed{\frac{\Delta_x z}{\Delta x}} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\boxed{\frac{\Delta_x u}{\Delta x}} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\boxed{\frac{\Delta_x v}{\Delta x}} + \boxed{\frac{o(\rho)}{\Delta x}}$$

令 $\Delta x \to 0$：

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} \qquad \boxed{\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad \boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta x}}$$

考虑极限：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta x}\overset{?}{=}0\quad\left(\rho=\sqrt{(\Delta_x u)^2+(\Delta_x v)^2}\right)$

由函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 关于 x 的偏导存在，当 $\Delta x\to 0$ 时，

有：$\Delta_x u\to 0$，$\Delta_x v\to 0$，进而有：$\rho\to 0$，改写 $\frac{o(\rho)}{\Delta x}$ 如下：

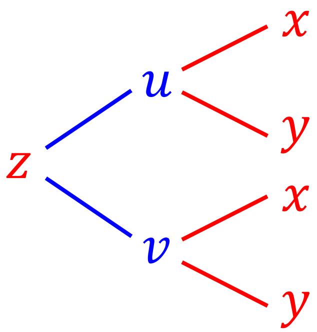
$$\frac{o(\rho)}{\Delta x}=\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta x}=\underbrace{\boxed{\frac{o(\rho)}{\rho}}}_{0}\cdot\underbrace{\sqrt{\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)^2}\cdot\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}_{\text{有界}}$$

当 $\Delta x\to 0\ (\rho\to 0)$：

则：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta x}=0$，故有：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

举例：

例1：求函数 $z=e^{xy}\sin(x+y)$ 的偏导数。



解：令 $u=xy, v=x+y$，则 $z=e^u\sin v$，

故：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1$$

$$=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

同理：（或由 x,y 对称）

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

多元复合函数求导的链式法则:

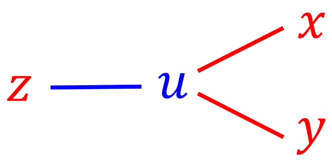
定理2:（一套多型）若函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 处可偏导,

并且函数 $z=f(u)$ 在对应点 u 处可导（可微），则:

复合函数 $z=f\big(\varphi(x,y)\big)$ 在点 (x,y) 处可偏导，且有:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$



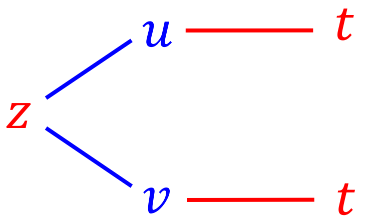
多元复合函数求导的链式法则:

定理3:（多套一型） 若函数 $u=\varphi(t), v=\psi(t)$ 都在点 t 处可导，

并且函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则：

复合函数 $z=f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)$ 在点 t 处可导，且有：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$ （全导数公式）

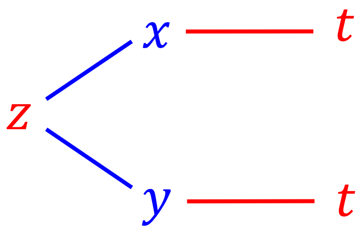


$$\boxed{\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\mathrm{d}v}$$ （全微分公式）

举 例:

例2: 设 $z=e^{x-2y}, x=\sin t, y=t^3$，求全导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$。

解: 由 $z=f(x,y)=f\big(x(t),y(t)\big)$，



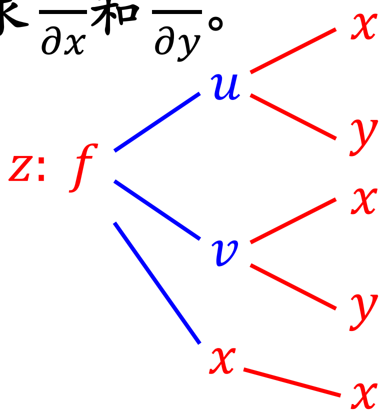
故:
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$=e^{x-2y}\cdot\cos t-2e^{x-2y}\cdot 3t^2$$

$$=e^{\sin t-2t^3}\left(\cos t-6t^3\right)$$

举例:

例3: 设 $z = e^u \sin v + x^2, u = x + y, v = xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。



解: 记 $z = f(u, v, x) = f(u(x, y), v(x, y), x)$,

故: $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}$$ (与 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 不同)

$$= e^u \sin v \cdot 1 + e^u \cos v \cdot y + 2x$$

$$= e^{x+y}[\sin(xy) + y \cos(xy)] + 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = e^u \sin v \cdot 1 + e^u \cos v \cdot x$$

$$= e^{x+y}[\sin(xy) + x \cos(xy)]$$

微分形式不变性：

一元函数的微分

- 若函数 $y=f(u)$可微，则：$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ （u为自变量）
- 若 $u=g(x)$也可微，则复合函数 $y=f\big(g(x)\big)$的微分：

$$\mathrm{d}y=f'(u)\cdot\underline{g'(x)\,\mathrm{d}x}=f'(u)\,\mathrm{d}u$$ （u为中间变量）

即：不管 u是自变量还是中间变量，微分 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$

注：高阶微分不具有形式不变性 （一阶微分形式不变性）

全微分形式不变性：

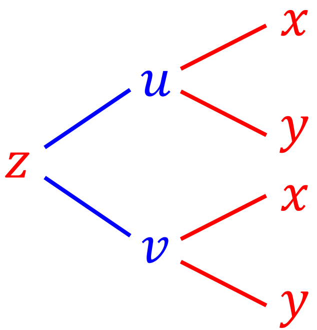
多元函数的全微分

- 若 $z=f(u,v)$可微，则：$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\mathrm{d}u+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\mathrm{d}v$　（u,v为自变量）
- 若 $u=u(x,y),v=v(x,y)$也可微，则复合函数

$z=f\big(u(x,y),v(x,y)\big)$也可微，且：$\mathrm{d}z=\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial x}}\cdot\mathrm{d}x+\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial y}}\cdot\mathrm{d}y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$



复合函数 $z=f\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ 的全微分：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\mathrm{d}z=\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}}\cdot\mathrm{d}x+\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}}\cdot\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\mathrm{d}v$$

（u,v 为中间变量）

即：不管 u,v 是自变量还是中间变量，全微分 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\mathrm{d}v$

注：高阶全微分不具有形式不变性

（一阶全微分形式不变性）

举例：

例4： 设 $z=\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解： 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $z=\ln(1+u)$，

$$z \text{ — } u \begin{cases} x \\ y \end{cases}$$

由全微分形式不变性：

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{x(x+y)}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$$

$$=\boxed{-\frac{y}{x(x+y)}}\mathrm{d}x+\boxed{\frac{1}{x+y}}\mathrm{d}y \qquad \left(\mathrm{d}z=\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}}\cdot\mathrm{d}x+\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}}\cdot\mathrm{d}y\right)$$

故：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x(x+y)}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y}$

总 结:

多元复合函数的求导法则

- 链式法则（多套多型、一套多型、多套一型）：

  可结合函数结构图和“口诀”来记。

- 全微分形式不变性:

  可利用全微分形式不变性批量求偏导。