1. 设曲线$L:x^2+y^2=1\,(x\geq 0,y\geq 0)$，质量线密度$\rho\equiv 1$，则$L$对$x$轴的转动惯量等于（   ）

(A) $\frac{\pi}{8}$.　　(B) $\frac{\pi}{4}$.　　(C) $\frac{\pi}{2}$.　　(D) π.

解　$I_x=\int_L \rho y^2 \mathrm{d}s=\int_L y^2 \mathrm{d}s$

平面曲线L关于直线$y=x$对称，由轮换对称性

$$\int_L y^2 \mathrm{d}s=\int_L x^2 \mathrm{d}s$$

$$I_x=\int_L \rho y^2 \mathrm{d}s \int_L y^2 \mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_L \mathrm{d}s=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

2. 曲线L是上半单位圆周$y=\sqrt{1-x^2}$，线密度为1，质心坐标为$(\bar{x},\bar{y})$，则$\bar{y}=$（   ）

(A) $\frac{1}{\pi}$，(B) $\frac{2}{\pi}$，(C) $\frac{3}{\pi}$，(D) $\frac{1}{2\pi}$

解　$$\bar{y}=\frac{\int_L y\cdot\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s}=\frac{\int_L y\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s}$$

$L_1:x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\leq t\leq \pi$，$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$

$$\int_L y\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2,\qquad \int_L \mathrm{d}s=\pi$$

$$\bar{y}=\frac{\int_L y\cdot\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s}=\frac{\int_L y\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s}=\frac{2}{\pi}$$

3. 均匀锥面$S:z^2=x^2+y^2,0\leq z\leq 1$的质心坐标是$(0,0,\bar{z})$，则$\bar{z}=$（   ）

（A）$\frac{1}{3}$.　　（B）$\frac{1}{2}$.　　（C）$\frac{2}{3}$.　　(D) $\frac{3}{4}$.

解 $$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{S} z\cdot\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}=\frac{\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S}\mathrm{d}S}$$

$S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xOy 面上投影域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，

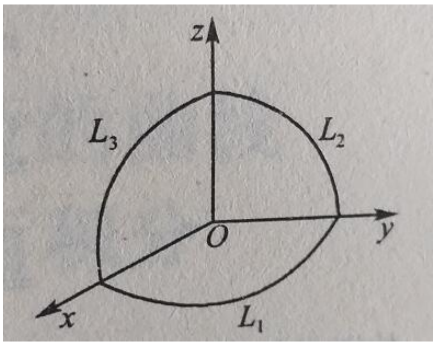
$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

$$\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi$$

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{S} z\cdot\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}=\frac{\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S}\mathrm{d}S}=\frac{2}{3}$$

4. 求八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的边界曲线的质心，设曲线的线密度为1.



解 $$\bar{x}=\frac{\oint_L x\cdot\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\oint_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}=\frac{\oint_L x\,\mathrm{d}s}{\oint_L\mathrm{d}s}$$

$$\oint_L x\,\mathrm{d}s=\int_{L_1}x\mathrm{d}s+\int_{L_2}x\mathrm{d}s+\int_{L_3}x\mathrm{d}s$$

$L_1: x=R\cos t, y=R\sin t, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$， $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=R\mathrm{d}t$

$$\int_{L_1}x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\cos t\mathrm{d}t=R^2$$

$L_3: x=R\cos t, z=R\sin t, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$， $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t=R\mathrm{d}t$

$$\int_{L_3} x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos t\mathrm{d}t=R^2$$

$$\int_{L_2} x\mathrm{d}s=0$$

$\oint_L x\mathrm{d}s=\int_{L_1} x\mathrm{d}s+\int_{L_2} x\mathrm{d}s+\int_{L_3} x\mathrm{d}s=2R^2$， $\oint_L \mathrm{d}s=3\times\frac{1}{4}\times 2\pi R=\frac{3}{2}\pi R$

$$\bar{x}=\frac{\oint_L x\cdot\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\oint_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s}=\frac{\oint_L x\mathrm{d}s}{\oint_L \mathrm{d}s}=\frac{4R}{3\pi},$$

由对称性知， $\bar{y}=\frac{4R}{3\pi}$， $\bar{z}=\frac{4R}{3\pi}$ 所求质心坐标为$(\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi})$

5. 求由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=1$所围成的均质几何体V（密度$\rho=1$）的质心坐标.

解 由对称性知, $\bar{x}=\bar{y}=0$

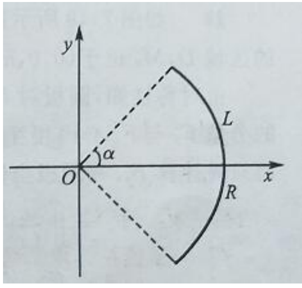
$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\cdot\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V}=\frac{\iiint\limits_V z\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V}$$

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 z\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{r^2}{2}\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 \mathrm{d}z=2\pi\int_0^1(1-r)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}$$

$\bar{z}=\frac{3}{4}$，所求质心坐标为$\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$

6. 计算半径为R，圆心角为2α的圆弧L对于它的对称轴的转动惯量（设线密度$\rho=1$）.



解 建立如图所示坐标系，则问题变为求L对x轴的转动惯量

$$I_x=\int_L \rho y^2 \mathrm{d}s$$

由于L的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases} \quad (-\alpha \le t \le \alpha)$$

$$I_x=\int_L \rho y^2 \mathrm{d}s=\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho R^2 \sin^2 t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\rho R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$$

7. 求密度为常数ρ的均匀锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{b^2}$ $(0\le z\le b)$对z轴的转动惯量$(a,b>0)$.

解　因为$z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$，在$xOy$面上投影域为$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_z=\iint_S \rho(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\rho\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\rho\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r$$

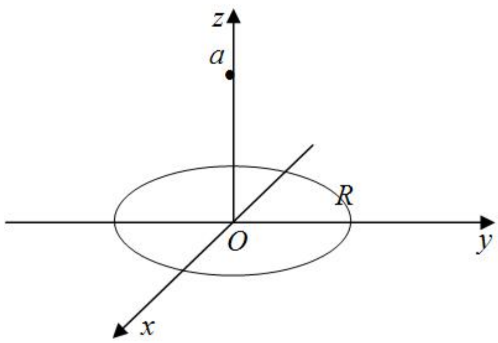
$$=\frac{\pi}{2}\rho a^3\sqrt{a^2+b^2}$$

8. 设质量均匀分布，总质量为M 的圆线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases},\ (R>0)$$

求此圆线对质量为m、位于点$(0,0,a)$处的质点的引力$\boldsymbol{F}$

解　设圆线的线密度为μ，则$2\pi R\mu=M$，故$\mu=\dfrac{M}{2\pi R}$，



由对称性知，$F_x=0$，$F_y=0$

$$F_z=\int_L \frac{G\mu m(0-a)}{\left[x^2+y^2+(0-a)^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}s$$

$$=G\mu m\int_L \frac{-a}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}s$$

$$=-\frac{G\mu ma}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}}\int_L \mathrm{d}s=-\frac{G\mu ma}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}}\cdot 2\pi R=-\frac{GmaM}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}}$$