

11. 以下命题中正确的是 ()

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
- (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛;
- (C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;
- (D) 若 $u_n \leq v_n, (n=1, 2, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

解 证明 C 对.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$, 由保号性, n 充分大时, $|u_{n+1}| > |u_n| \Rightarrow u_n \not\rightarrow 0$

(A) $u_n: 1, -1, 1, -1, \dots$ (B) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (D) $u_n = -\frac{1}{n}, v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

12. 设有命题

- (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} a_n$ 收敛.
- (2) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 (n=1, 2, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- (3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.
- (4) 若 $a_n \leq b_n \leq c_n (n=1, 2, \dots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

则上述命题中正确的个数为 ()

- (A). 0 (B). 1 (C). 2 (D). 3

解 答案(B)

证明 (4)对. 因为 $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛,

由 $b_n = (b_n - a_n) + a_n$, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

$$(1) a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (2) a_n = \frac{1}{n} \quad (3) a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

13. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数是

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n} \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \quad (C) \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) \quad (D) \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1}).$$

解 答案(D)

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛

$$(A) u_1 = 1, u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad n=2, 3, \dots \quad (B) u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (C) u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

14. 设 $0 \leq a_n < \frac{1}{n}$, 下列级数中肯定收敛的()

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (C) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \quad (D) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2.$$

解 答案(D)

因为 $0 \leq a_n < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq a_n^2 < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$ 收敛.

$$(A) a_n = \frac{1}{2n} \quad (B) a_n = 0 \quad n \text{ 为奇数}, a_n = \frac{1}{2n} \quad n \text{ 为偶数} \quad (C) a_n = \frac{1}{2n}$$

15. 以下命题中正确的是_____.

- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.
- B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n > 0, n=1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
- C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.
- D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

解 证明 D 对.

令 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 前 n 项和为 S_n ,

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛 $\Rightarrow S_{2n}$ 收敛, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$,

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - u_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = S + 0 = S$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

其它不对举反例如下:

$$\text{(A)} \quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad \text{(B)} \quad u_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{(C)} \quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad v_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

16. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ 的敛散性，是绝对收敛、条件收敛、还是发散？

解：因为 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty)$ ，所以原级数不绝对收敛。

设 $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})$ ，则 $y' = -\frac{1}{2x^{3/2}} \left(\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) + \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) < 0$ ，故 u_n 单调

减少，又显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，故原级数条件收敛。

17. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$ 是绝对收敛、条件收敛、还是发散？

解 因为 $3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \ln 3 (n \rightarrow \infty)$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} (3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)}{\frac{1}{n}} = \ln 3$

由比较判别法： $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)$ 发散。

令 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (3^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1)$ ， $f'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} (3^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1) + \frac{\ln 3}{\sqrt{x}} 3^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < 0 (x \geq 2)$

故 $\frac{1}{\sqrt{n}} (3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) (n \geq 2)$ 单调减少，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) = 0$

由莱布尼兹判别法原级收敛，故原级数条件收敛。

18. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$ 敛散性

解 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(\ln x)^2}} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(\ln n)^2}} = 0$$

由比较判别法极限形式, 原级数发散.

19. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 敛散性

解 由 $\ln[(\ln n)^{\ln n}] = \ln n \cdot \ln(\ln n)$, 又由 n 充分大时, $\ln(\ln n) > 2$
所以, n 充分大时, $\ln[(\ln n)^{\ln n}] = \ln n \cdot \ln(\ln n) > 2 \ln n = \ln n^2$

$$\text{从而 } n \text{ 充分大时, } (\ln n)^{\ln n} > n^2, \Rightarrow \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$$

由比较判别法, 原级数收敛.

20. 以下四个级数之中, 发散的是()

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) & \text{(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n + 1} \\ \text{(C)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1} \cdot \sqrt{\ln n}} & \text{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} \end{array}$$

21. 以下四个正项级数中，发散的是（ ）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln n}{n^4 - \cos n}$.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right)$.

解 (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 用比值法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ 收敛}$$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln n}{n^4 - \cos n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + \ln n}{n^4 - \cos n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2 \ln n}{n^4 - \cos n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\ln n}{n^2}}{1 - \frac{\cos n}{n^4}} = 1 \quad \text{由比较法极限形式}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln n}{n^4 - \cos n} \text{ 收敛}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right)$.

$$\frac{1}{2n} \leq 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}, \text{ 由比较法}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) \text{ 发散}$$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + \ln n + 2)^{\frac{n+1}{2}}}$

解:
$$\frac{n^{n-1}}{(2n^2 + \ln n + 2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(n^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(2n^2 + \ln n + 2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{(n^2)^{\frac{n+1}{2}-1}}{(2n^2 + \ln n + 2)^{\frac{n+1}{2}}} = \left(\frac{n^2}{2n^2 + \ln n + 2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{1}{n^2}$$

根值法