某些可降阶的高阶微分方程

主讲人：李正学
大连理工大学数学科学学院

主要内容

- $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程
- 不显含未知函数y的微分方程
- 不显含自变量x的微分方程
- 首次积分法

简单的n阶微分方程

- 方程形式： $y^{(n)} = f(x).$
- 解法

方程两边同时积分，得

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1 .$$

原方程就降了一阶。 再逐次积分，最后就可求出原方程的通解。

二阶微分方程

一般形式: $F\left(x, y, y', y''\right)=0$.

特殊形式: $y''=f\left(x, y, y'\right)$.

通解: $y=\varphi\left(x, c_1, c_2\right)$.

不显含y的二阶微分方程

- 方程形式: $F\left(x, y', y''\right)=0.$

- 解法

作变换 $y'=u$，则原方程化为

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}\right)=0,$$

$u(x)$ 的一阶方程

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=u=v\left(x, c_1\right).$$

通解: $y=\int v\left(x, c_1\right) dx+c_2.$

不显含y的二阶微分方程举例

例 $\quad x\,y'' + y' = x^2.$

解 作变换 $y' = u$, $\Rightarrow \quad x\dfrac{du}{dx} + u = x^2, \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{x}u = x.$

由一阶线性微分方程的通解公式

$$\frac{dy}{dx} = u = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\int x e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + c_1\right] = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

原方程的通解为: $\quad y = \dfrac{x^3}{9} + c_1 \ln|x| + c_2.$

不显含x的二阶微分方程

- 不显含 x 的二阶微分方程: $F(y, y', y'') = 0$.
- 解法

作变换 $y' = u(y)$, 则 $y'' = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy} \times \dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{du}{dy}$.

原方程化为: $F\left(y, u, u\dfrac{du}{dy}\right) = 0$.

这是以 y 为自变量, u 为未知函数的一阶方程.

不显含x的二阶微分方程举例

例 $y'' + \frac{y'^2}{1+y} = 0.$

解 作变换 $y' = u(y)$, 原方程化为: $u\frac{du}{dy} + \frac{u^2}{1+y} = 0.$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dy}{1+y}.$$

积分，整理得: $\frac{dy}{dx} = u = \frac{c}{1+y}, \Rightarrow (1+y)dy = c dx.$

积分，得原方程的通解为: $y + \frac{y^2}{2} + c_1 x + c_2 = 0.$

首次积分法

若 $F\left(x,y,y',y''\right)=\dfrac{d}{dx}\Phi\left(x,y,y'\right)$，则称

$$\Phi\left(x,y,y'\right)=c$$

为方程 $F\left(x,y,y',y''\right)=0$

易知，首次积分可将原来的二阶方程降为一阶方程。

首次积分法例子

例 $$\frac{yy''-y'^2}{y^2}=0.$$

解 $$\frac{yy''-y'^2}{y^2}=\left(\frac{y'}{y}\right)'=0,\ \Rightarrow\ \frac{y'}{y}=c_1,\ \Rightarrow\ \frac{dy}{y}=c_1dx.$$

两边积分，得： $\ln|y|=c_1x+c.$

原方程的通解为： $y=c_2e^{c_1x}\ \ (c_2\neq 0).$

小 结

➢ 某些可降阶的高阶微分方程的解法

y^*

某些可降阶的高阶微分方程

主讲人：李正学
大连理工大学数学科学学院