1. 函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$；

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$；

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$；

(D) $\lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0)=f_x'(0,0)$ 且 $\lim\limits_{y\to 0} f_y'(0,y)=f_y'(0,0)$.

($\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x'(x,y)=f_x'(0,0)$， $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_y'(x,y)=f_y'(0,0)$)

解　**(C)**

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}=0$

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=0,$$

同理 $f_y'(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

2. 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

(　　)

(A）不连续；　　　　(B）连续，但两个偏导数不存在；

(C）两个偏导数存在，但不可微；　　(D）可微.

解　**(D)**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)+2x}{|x|}=0$$

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,0)-f(0,0)+2x}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}-2\right)=-2,$$

类似 $f_y'(0,0)=1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的连续性、可偏导性与可微性.

解 （1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$， $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

（2） $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$，

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2},$$

$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导.

（3） $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{\pi}{2})=0$， $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

4. 下列条件成立时能够推出 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，且全微分 $\mathrm{d}z=0$ 的是(　　　　).

(A) 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x'=0$， $f_y'=0$ ；

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$；

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=\dfrac{\sin\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$；

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$.

解 **(D)** $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=0$$

同理 $f_y'(x_0,y_0)=0$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-f_x{}'(0,0)\Delta x-f_y{}'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

5. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是

(　　　).

(A) 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微；

(B) 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微；

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在；

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

解 **(B)**

由函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续和 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

$$\Rightarrow f(0,0)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x^2}\text{存在}$$

$$\Rightarrow f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x^2}\cdot\frac{x}{1}=0$$

类似 $f_y'(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=0$$

(A) $f(x,y)=|x|+|y|$ ， (C) $f(x,y)=1$ ， (D) $f(x,y)=1$

6. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$

解 $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}$

当 $y\neq 0$ 时

$$f_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-y\arctan\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}=-y$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$$

类似得 $f_{yx}(0,0)=1$

7. 设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ ，其收敛域为 $(-1,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\left[\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

11. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数，并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解： $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},-1<x<1$

左端点 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+1}$，由莱布尼兹判别法收敛.

收敛域 $[-1,1)$. 由于 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$，所以：

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad [-1,1)$$

当 $x=-1$ 时， $0=f(-1)=\dfrac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$， $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}$

12. 已知 $f_n(x)$ 满足

$$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x \qquad (n\text{为正整数})$$

且 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的和.

解 $f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x$ 是一阶线性微分方程

$$f_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^x e^{\int -dx}dx+c\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+c\right),\quad \text{由 } f_n(1)=\frac{e}{n}\Rightarrow c=0$$

所以 $f_n(x)=e^x\dfrac{x^n}{n}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

由书中例 5.4.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ ， $x \in [-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -e^x \ln(1-x) \quad , \quad x \in [-1,1).$$

13. 将函数 $f(x) = xe^x$ 展为 $x-1$ 的幂级数.

解 $f(x) = xe^x = (x-1+1)e \cdot e^{x-1} = (x-1+1)e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$

$$= e\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}\right)$$

$$= e\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-1)!} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}\right)$$

$$= e\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)(x-1)^n\right] \quad , \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

14. 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{4-x}$ 在 $x_0 = 1$ 处展为幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$.

解 $\frac{1}{4-x} = \frac{1}{3-(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(\frac{x-1}{3})}$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}, \qquad \left|\frac{x-1}{3}\right| < 1，即\ |x-1| < 3$$

$$f(x) = \frac{x-1}{4-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n} \quad , \quad |x-1| < 3$$

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{3^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = \frac{n!}{3^n}$$

15. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 展成 $(x-2)$ 的幂级数.

解 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=-\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\left(\dfrac{1}{x-2+2}\right)'=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^n\right)'$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}(x-2)^{n-1}\text{，}\quad 0<x<4$$

16. 将 $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$ 展成 x 的幂级数.

解 $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，$\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}$

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{x}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n}\text{，}$$

$|x|<1$