第七章

题量： 87

智能分析

考试时间： 2024-05-13 12:08 至 2024-05-13 12:14

一. 单选题（共 26 题）

收藏

1. (单选题) 下面选项是$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+2x_4=0\end{cases}$的解空间的标准正交基的是（　　）

A. $(0,-1,1,0)^T,(-1,1,0,1)^T$

B. $(0,-1,1,0)^T,(-2,1,1,2)^T$

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1)^T,\frac{1}{\sqrt{15}}(1,-3,2,-1)^T$

D. $(1,0,0,0)^T,(0,1,0,0)^T$

我的答案: 正确答案: C

答案解析:

知识点: 7.3

收藏

2. (单选题) 向量α的长度为（　　）

A. $\alpha\alpha^T$

B. $\alpha^T\alpha$

C. (α,α)

D. $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

我的答案: 正确答案: D

知识点:

收藏

3. (单选题) 设A是正交矩阵，若$\det(A)=-1$，则$A^*=$（　　）

A. A^T

B. $-A^T$

一. 单选题
1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26
二. 填空题
27 28 29 32 33 34 37 38 39

D. $-A$

我的答案: 正确答案: B

知识点:

4. (单选题)

在R^n中，由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$C$，若矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，则$C=$（　　）

收藏

A. AB^{-1}

B. $A^{-1}B$

C. $B^{-1}A$

D. BA^{-1}

我的答案: 正确答案: B

答案解析:

知识点:

5. (单选题) 下列矩阵中不一定可逆的是（　　）

收藏

A. 正交矩阵

B. 单位矩阵

C. 伴随矩阵

D. 初等矩阵

我的答案: 正确答案: C

知识点: 7.4

6. (单选题) 向量$\alpha=(\sqrt{3},1,0)^T$与$\beta=(0,1,0)^T$的夹角为（　　）

收藏

A. 30°

B. 60°

C. 120°

我的答案: 正确答案: B

知识点:

7. (单选题) 下列向量集合（ ）是实向量空间

收藏

A. $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$

B. $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid x_1,x_2,\cdots,x_n \in \mathbf{Z}\}$，其中 $\mathbf{Z}$ 是整数集合

C. $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$

D. $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid x_1=1\}$

我的答案: 正确答案: A

知识点:

收藏

下面哪种情况可使 $A=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1 & n & 0\\ 1 & n & 0\\ 0 & k & m\end{bmatrix}$ 成为正交矩阵__________

8. (单选题)

A. $m=1,\ n=0,\ k=1$

B. $m=-\sqrt{2},\ n=1,\ k=0$

C. $m=0,\ n=-\sqrt{2},\ k=0$

D. $m=1,\ n=\sqrt{2},\ k=1$

我的答案: 正确答案: B

知识点: 7.4

9. (单选题) 与 $(0,-1,1)^T,(1,-1,0)^T$ 等价的正交向量组为（ ）

收藏

A. $(0,-1,1)^T,(1,-1,0)^T$

B. $(0,-1,1)^T,(0,1,1)^T$

C. $(0,-2,2)^T,(2,-1,-1)^T$

一. 单选题

1 2 3

6 7 8

11 12 13

16 17 18

21 22 23

26

二. 填空题

27 28 29

32 33 34

37 38 39

我的答案: 正确答案: C

知识点: 7.3

10. (单选题) 下列集合（ ）不是$\{(a,b,c)^T\in \mathrm{R}^3 \mid a+b+c=0\}$的子空间

收藏

A. $\mathrm{span}\{(1,2,-3)^T\}$

B. $\{(a,b,c)^T\in \mathrm{R}^3 \mid c=0\}$

C. $\mathrm{span}\{(1,0,-1)^T,(0,1,-1)^T,(0,2,-2)^T\}$

D. $\{(a,b,c)^T\in \mathrm{R}^3 \mid a=b=c=0\}$

我的答案: 正确答案: B

答案解析:

知识点:

11. (单选题) 下列集合为R^3的子空间的是（ ）.

收藏

A. $\{(a,b,c)^T\in \mathrm{R}^3 \mid a+b+c=0\}$

B. $\{(a,b,c)^T\in \mathrm{R}^3 \mid a\ge 0\}$

C. $\{(a,b,c)^T\in \mathrm{R}^3 \mid a^2+b^2+c^2\le 1\}$

D. $\{(a,b,c) \mid a,b,c\in Q\}$（$Q$为有理数集合）

我的答案: 正确答案: A

知识点:

12. (单选题)

收藏

向量空间$V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in \mathrm{R}^4 \mid x_1-2x_2+x_3=0\}$，则$\dim V=$（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

我的答案: 正确答案: C

知识点:

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

A. A 和 B 都是奇异阵

B. A 和 B 的行向量组都线性无关

C. A 和 B 都是降秩阵

D. $AX=0$ 和 $BX=0$ 都有非零解

我的答案: 正确答案: B

答案解析:

知识点:

14. (单选题)

收藏

设 α,β 是 n 元实列向量，k 是实数，$\|\alpha\|$ 表示向量 α 的长度，(α,β) 表示 α,β 的内积，

则下面结论正确的是（　　）

A. $\|\alpha+\beta\|=\|\alpha\|+\|\beta\|$

B. $\|k\alpha\|=k\|\alpha\|$

C. $k(\alpha,\beta)=(k\alpha,k\beta)$

D. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\le\|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|$

我的答案: 正确答案: D

答案解析:

知识点: 7.3

15. (单选题)

收藏

设 $(1,2,3)^T,(0,0,1)^T$ 生成的 R^3 的子空间为 V，V 的一组基为（　　）

A. $(2,4,0)^T,(1,2,1)^T$

B. $(0,1,0)^T,(0,0,1)^T$

C. $(1,0,0)^T,(0,0,1)^T$

D. $(1,1,0)^T,(1,2,3)^T$

我的答案: 正确答案: A

知识点: 7.2

一. 单选题
1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26
二. 填空题
27 28 29 32 33 34 37 38 39

设向量 $\alpha=(0,-2,0)$ 的长度为 a，$\alpha=(0,-2,0)$ 与 $\beta=(\sqrt{3},1,0)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{b}$，则（　　）

A. $a=-2,b=3$

B. $a=2,b=3$

C. $a=\sqrt{2},b=\frac{3}{2}$

D. $a=2,b=\frac{3}{2}$

我的答案: 正确答案: D

答案解析:

知识点:

17. (单选题) 收藏

设向量空间 R^3 的两个基分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=-\alpha_1,\beta_3=\alpha_2-\alpha_3$，向量 v 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 下的坐标向量分别为 x 和 y，若 $y=(1,-1,2)^T$，则 $x=$（　　）

A. $(2,1,-2)^T$

B. $(-1,-2,-2)^T$

C. $(-2,1,-2)^T$

D. $(2,-2,-1)^T$

我的答案: 正确答案: A

知识点:

收藏

已知 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_1=(1,0,0)^T$ 是 R^3 的基，

向量 $(1,0,0)^T$ 在这个基下的坐标向量为（　　）

18. (单选题)

A. $(0,1,0)^T$

B. $(1,0,0)^T$

C. $(0,0,1)^T$

D. $(0,0,0)^T$

我的答案: 正确答案: C

一. 单选题

1 2 3
6 7 8
11 12 13
16 17 18
21 22 23
26

二. 填空题

27 28 29
32 33 34
37 38 39

19. (单选题)

收藏

设 V 是向量空间，$\alpha_1,\alpha_2 \in V$，若对任意 $\beta \in V$，都有 $(\alpha_1,\beta)=(\alpha_2,\beta)$，则（　　）

A. $\alpha_1=\alpha_2=0$

B. α_1,α_2 线性相关

C. $\alpha_1=\alpha_2$

D. $\alpha_1=\alpha_2=\beta$

我的答案: 正确答案: C

知识点: 7.1

20. (单选题)

收藏

设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$，向量空间 V 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 生成，

即 $V=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$，则 V 的一组基为（　　）

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

我的答案: 正确答案: B

知识点: 7.2

21. (单选题)

收藏

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$A$ 的行、列向量组生成的向量空间分别为 V_1,V_2，

齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $A^T x=0$ 的解空间分别为 W_1,W_2，则（　　）

A. $\dim V_1=\dim V_2$

B. $\dim W_1=\dim W_2$

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

C.

D. $\dim V_1 = \dim W_2$

我的答案: 正确答案: A

知识点: 7.2

22. (单选题)

设$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases}$和$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases}$的解空间分别为$V$和$W$，则（　　）

A. $V \subseteq W$，但是$V \neq W$

B. $V \supseteq W$，但是$V \neq W$

C. $V = W$

D. $V \not\subset W$且$W \not\subset V$

我的答案: 正确答案: C

知识点: 7.1

23. (单选题)

在向量空间R^2中，从基底$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1]^{\mathrm{T}}$到基底$\boldsymbol{\beta}_1=[1,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[2,4]^{\mathrm{T}}$

的过渡矩阵为（　　）

A. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

我的答案: 正确答案: C

知识点:

一. 单选题
1 2 3
6 7 8
11 12 13
16 17 18
21 22 23
26
二. 填空题
27 28 29
32 33 34
37 38 39

设 A 为正交矩阵，若 a_j 是 A 的第 j 列，则 a_j 与 a_j 的内积为（　　）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

我的答案: 正确答案: B

知识点: 7.4

25. (单选题) 已知 $V=\{(a,b,c,d)^T\in \mathrm{R}^4 \mid a+b+c+d=0\}$ 是向量空间，将向量 $(1,-1,0,0)^T$ 扩充为 V 的基得（　　）

收藏

A. $(1,-1,0,0)^T,(0,1,-1,0)^T,(0,0,1,-1)^T,(-1,0,0,1)^T$

B. $(-1,,0,0,1)^T,(0,-1,0,1)^T,(0,0,-1,1)^T$

C. $(1,,-1,0,0)^T,(0,1,-1,0)^T,(0,0,1,-1)^T$

D. $(1,-1,0,0)^T,(0,1,-1,0)^T,(0,0,-1,1)^T,(0,0,0,1)^T$

我的答案: 正确答案: C

知识点:

26. (单选题) 设 A 和 B 都是 n 阶方阵，下列结论只有（　　）不对

收藏

A. 若 A 和 B 都是对称矩阵，则 AB 也是对称矩阵

B. 若 A 和 B 都是正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵

C. 若 A 和 B 都是上三角形矩阵，则 AB 也是上三角形矩阵

D. 若 A 和 B 都是可逆矩阵，则 AB 也是可逆矩阵

我的答案: 正确答案: A

知识点:

二. 填空题（共 29 题）

1. (填空题) 向量 $b_1=[1,1,1]^T$ 在 R^3 的基 $a_1=[1,-1,0]^T$， $a_2=[2,1,3]^T$， $a_3=[3,1,2]^T$ 下的坐标向量为________

收藏

我的答案:

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

(1) $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T$

知识点:

2. (填空题)

在 R^3 中，向量 $v=[5,0,7]^T$ 在基 $a_1=[1,-1,0]^T$，$a_2=[2,1,3]^T$，$a_3=[3,1,2]^T$ 下的坐标向量为________

收藏

我的答案:

正确答案:

(1) $(2,3,-1)^T$

知识点:

3. (填空题)

收藏

已知 $A=\begin{bmatrix} a & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ b & c & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & d \end{bmatrix}$. 若 A 为正交矩阵，则 $b=$____________，$d=$____________.

我的答案:

正确答案:

(1) $b=\frac{2}{7}$

(2) $d=\frac{6}{7}$

知识点:

4. (填空题)

收藏

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，齐次线性方程组 $Ax=0$

和 $Bx=0$ 的解空间分别为 S_1 和 S_2，线性空间 $S_1 \cap S_2$ 的维数为______

我的答案:

正确答案:

(1) 1

知识点: 7.2

一. 单选题

1 2 3
6 7 8
11 12 13
16 17 18
21 22 23
26

二. 填空题

27 28 29
32 33 34
37 38 39

5. (填空题)

我的答案:

正确答案:

(1) $k(1,1,-2)^T$ ，k 为任意实数.

知识点: 7.3

6. (填空题)

收藏

若 $A=\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{2} & 0 \\ b & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，且 $\det(A)=-1$，则 $a=$_______，$b=$______

我的答案:

正确答案:

(1) $a=\sqrt{\frac{1}{2}}$，$b=\sqrt{\frac{1}{2}}$

知识点: 7.4

收藏

7. (填空题)

已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 解空间的维数是______

解空间一组基是_______

我的答案:

正确答案:

(1) 2

(2) $\eta_1=(-3,1,0,0)^T, \eta_2=(1,0,-2,1)^T$

知识点:

8. (填空题)

收藏

设 $A=(a_{st})$ 是 3 阶正交矩阵，且 $a_{1,2}=1$，$b=(1,0,0)^T$，则方程组 $Ax=b$ 的解为______

我的答案:

正确答案:

(1) $(0,1,0)^T$

知识点: 7.4

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

已知向量组 $\alpha_1=[1,1,1]^T$， $\alpha_2=[-1,0,2]^T$，记 $\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$. 若 β_1,β_2 正交，

则 $k=$__________.

我的答案:

正确答案:

(1) $\frac{1}{3}$

知识点:

10. (填空题)

向量空间 R^4 的子空间 $V=\{(x_1,x_2,x_3,0)^T \mid x_1+x_2=0\}$ 的维数为______

它的一组基为______

收藏

我的答案:

正确答案:

(1) 2

(2) $\alpha_1=(1,-1,0,0)^T,\alpha_2=(0,0,1,0)^T$

知识点:

11. (填空题)

设 α 是单位列向量， $A=E-k\alpha\alpha^T$ 是正交矩阵，则 k 满足______

收藏

我的答案:

正确答案:

(1) $k=0$ 或 2

知识点: 7.4

12. (填空题)

已知 A 是奇数阶正交矩阵，且 $\det(A)=1$，则 $\det(A-E)=$______

收藏

我的答案:

正确答案:

(1) 0

知识点: 7.4

13. (填空题)

向量空间 $V=\left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \middle| 2x+3y-z=0\right\}$ 的一组基为__________.

收藏

我的答案:

正确答案:

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$（答案不唯一）

(1)

知识点:

14. (填空题)

收藏

向量空间 $V=\{(x_1,x_2,x_3,0)^T \mid x_1=x_2\}$ 的一组基为 $\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(0,0,1,0)^T$，

V 中向量 $\beta=(1,1,1,0)^T$ 在这个基下的坐标向量为_________

我的答案:

正确答案:

(1) $(1,1)^T$

知识点: 7.2

15. (填空题)

收藏

给出齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0 \\ x_1+5x_2+3x_3+3x_4=0 \end{cases}$ 解空间的一组基_________

我的答案:

正确答案:

(1) $\eta_1=(-3,0,1,0)^T,\eta_2=(2,-1,0,1)^T$

知识点:

16. (填空题)

收藏

方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ 的解生成的实向量空间为_________________

我的答案:

正确答案:

(1) $\mathrm{span}\{(1,1)^T\}$ 或 $\{k(1,1)^T \mid k\in\mathrm{R}\}$

知识点:

17. (填空题)

收藏

设 R^3 的两组基为 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(0,1,1)^T$ 和 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,1,2)^T$，$\beta_3=(1,2,1)^T$，则基 α_1，α_2，α_3 到基 β_1，β_2，β_3 的过渡矩阵为_________

我的答案:

正确答案:

一. 单选题
1 2 3
6 7 8
11 12 13
16 17 18
21 22 23
26
二. 填空题
27 28 29
32 33 34
37 38 39

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
(1)

知识点:

收藏

18. (填空题) 设 R^4 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，令

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_1+\alpha_4,$$

则 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 生成向量空间的维数为______，一组基为________

我的答案:

正确答案:

(1) 3

(2) β_1,β_2,β_3.

知识点:

19. (填空题)

收藏

从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为______.

我的答案:

正确答案:

(1) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

知识点:

收藏

20. (填空题) 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$，若 kA 是正交阵，则 k 等于________

我的答案:

正确答案:

(1) $\pm\frac{1}{3}$

知识点:

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_1+\alpha_4,$$

则由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 生成的向量空间的维数为________

21. (填空题)

我的答案:

正确答案:

(1) 3

知识点: 7.2

22. (填空题)

收藏

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间的一组基，则从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_2+3\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_3$ 的过渡矩阵为__________

我的答案:

正确答案:

(1) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$

知识点:

23. (填空题)

收藏

已知三维向量空间的一组基是 $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(1,-1,0),\alpha_3=(2,1,1)$，

则向量 $\beta=(3,2,1)$ 在这组基下的坐标向量是____________

我的答案:

正确答案:

(1) (−1，0，2)

知识点:

24. (填空题)

收藏

设向量空间 $V=\{(a,b,c,d)^T\in\mathrm{R}^4\mid a+b+c+d=0\}$，则由线性无关向量组

$\alpha=(1,,-1,0,0)^T,\beta=(0,1,-1,0)^T$ 扩充得到的 V 的一个基为____________

我的答案:

正确答案:

(1) $(1,,-1,0,0)^T,(0,1,-1,0)^T,(0,0,1,-1)^T$

知识点:

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

25. (填空题)

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间的维数为__________

我的答案:

正确答案:

(1) 1

知识点: 7.2

26. (填空题)

若 $\alpha=(1,-1,0)^T,\beta=(a,a,2)^T$ 是向量空间 $\{(a,b,c)^T\in\mathrm{R}^3\mid a+b+c=0\}$ 的一个正交基.

则 $a=$__________

我的答案:

正确答案:

(1) -1

知识点:

27. (填空题)

齐次线性方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0\\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0\\ 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$ 解空间的维数为_____，一组基为________

我的答案:

正确答案:

(1) 2

(2) $\alpha_1=(-\frac{1}{9},\frac{8}{3},1,0)^T,\alpha_2=(\frac{2}{9},-\frac{7}{3},0,1)^T$

知识点:

28. (填空题)

写出由 $\alpha_1=(0,-1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,1,1)^T,\alpha_3=(0,1,1,0)^T$ 生成的向量空间的一个标准正交基________

我的答案:

正确答案:

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1,0)^T,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^T$

答案解析:

单位化 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1,\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2$

知识点:

29. (填空题)

写出一个与 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,2,1)^T$ 等价正交的向量组____________

我的答案:

正确答案:

(1) $\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,2,0)^T$

知识点:

三. 判断题（共 16 题）

1. (判断题) 正交矩阵的行向量组是标准正交向量组

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

知识点:

2. (判断题) 向量空间 $\{(a,b,0)^T \mid a,b\in \mathrm{R}\}$ 与 $\{(a,b)^T \mid a,b\in \mathrm{R}\}$ 相等

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 错

知识点: 7.1

3. (判断题) 由两两正交的向量组成的向量组是正交向量组.

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 错

知识点:

一. 单选题
1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26
二. 填空题
27 28 29 32 33 34 37 38 39

4. (判断题)

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

答案解析:

知识点:

5. (判断题) 若非齐次线性方程组 $Ax=\mathrm{b}$ 有解，则其解集是向量空间

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 错

知识点:

6. (判断题) 若方阵 A 的列向量组是正交向量组，则 A 是可逆矩阵.

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

答案解析:

知识点:

7. (判断题)

收藏

设 A,B 是 n 阶方阵，且齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 的解空间分别为 S_1 和 S_2，定义 $S_1+S_2=\{\alpha+\beta\,|\,\alpha\in S_1,\beta\in S_2\}$，则 S_1+S_2 是线性空间.

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

答案解析:

知识点: 7.1

8. (判断题) $\{(a,b,c)^T\in\mathrm{R}^3\,|\,ab=0\}$ 是向量空间

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 错

知识点:

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

9. (判断题)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量空间 V 的一个基，若 $\beta\in V$ 且 $(\beta,\alpha_1)=(\beta,\alpha_2)=\cdots=(\beta,\alpha_n)=0$，

则 $\beta=0$

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

知识点: 7.3

若 A,B 是正交矩阵，则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 是正交矩阵

收藏

10. (判断题)

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

知识点:

11. (判断题) 若两个向量空间的维数相等，则这两个向量空间相等

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 错

知识点:

12. (判断题) 若两个向量空间的基等价，则这两个向量空间相等

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

知识点:

向量空间的一个向量在一个基下的坐标向量是唯一的

收藏

13. (判断题)

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

知识点:

一. 单选题

1 2 3

6 7 8

11 12 13

16 17 18

21 22 23

26

二. 填空题

27 28 29

32 33 34

37 38 39

14. (判断题) 向量空间的基之间的过渡矩阵是可逆矩阵

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

答案解析:

知识点:

15. (判断题) $\{(a,b,c)^T \in \mathrm{R}^3 \mid a=b\}$ 是向量空间

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 对

知识点: 7.1

16. (判断题) 方阵 A 的列向量组是正交向量组，则 A 是正交矩阵

收藏

A. 对

B. 错

我的答案: 正确答案: 错

知识点: 7.4

四. 简答题（共 1 题）

1. (简答题)

收藏

已知行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right]$，求一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}$ 的第一个行的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

我的答案:

正确答案:

方程 $x_1+2x_2-2x_3=0$ 的通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$ 正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\left[\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right]^{\mathrm{T}},$$

再进行单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}[-2,1,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{45}}[2,4,5]^{\mathrm{T}}.$$

故可取

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{5}{\sqrt{45}}\end{bmatrix}.$$

答案解析:

注解：答案不唯一，另一个可能的答案为 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{4}{\sqrt{45}}\end{bmatrix}$，

只要满足行列组为正交单位向量组的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 均为正确答案.

知识点: 7.4

五. 论述题（共 8 题）

1. (论述题) 设 A 是 n 阶正交矩阵，若 $A^*=-A^T$，则 $|A|=-1$.

收藏

我的答案:

正确答案:

证明 $-A^T=A^*=|A|A^{-1}=|A|A^T$，$A^T$ 可逆

知识点:

2. (论述题)

收藏

设 V 是 n 维向量空间，$\alpha\in V$，$W=\{\beta\in V\mid(\alpha,\beta)=0\}$，证明 W 是 V 的 $n-1$ 维子空间.

我的答案:

正确答案:

若 $\gamma\in W$，令 $\gamma=l\alpha+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n$，由 $(\gamma,\alpha)=0$，得 $\gamma=k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n$，

即 $W\subseteq \text{span}\{\beta_2,\cdots,\beta_n\}$，反包含显然.

知识点: 7.3

3. (论述题)

收藏

设 A,B 是阶数相同的正交矩阵，且 $|A|\neq|B|$. 证明 $A+B$ 是不可逆矩阵.

我的答案:

正确答案:

证明 $|A||A+B||B|=-|A+B|$，$|A||A+B||B|=|A^TAB^T+A^TBB^T|=|B^T+A^T|$

知识点:

收藏

设 V 是向量空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in V$，令行列式

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{vmatrix},$$

证明 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0$ 当且仅当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

4. (论述题)

我的答案:

正确答案:

证明 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$，

$$\text{则}\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_1)x_1+(\alpha_1,\alpha_2)x_2+\cdots+(\alpha_1,\alpha_m)x_m=0\\ (\alpha_2,\alpha_1)x_1+(\alpha_2,\alpha_2)x_2+\cdots+(\alpha_2,\alpha_m)x_m=0\\ \cdots\cdots\\ (\alpha_m,\alpha_1)x_1+(\alpha_m,\alpha_2)x_2+\cdots+(\alpha_m,\alpha_m)x_m=0\end{cases}$$

此方程组有非零解当且仅当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0$ 当且仅当此方程组有非零解.

知识点: 7.1

5. (论述题)

收藏

设 $k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0$，且 $k_1k_3\neq0$. α,β 和 β,γ 生成的向量空间分别为 V_1,V_2，证明 $V_1=V_2$.

一. 单选题

1 2 3

6 7 8

11 12 13

16 17 18

21 22 23

26

二. 填空题

27 28 29

32 33 34

37 38 39

我的答案:

正确答案:

证明 等价向量组生成空间相等.

知识点:

6. (论述题)

收藏

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 3 维向量空间 V 的向量组，满足

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)，\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)，\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)$$

证明若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 V 的一个标准正交基，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 V 的一个标准正交基.

我的答案:

正确答案:

证明 $$\begin{pmatrix} (\beta_1,\beta_1) & (\beta_1,\beta_2) & (\beta_1,\beta_3) \\ (\beta_2,\beta_1) & (\beta_2,\beta_2) & (\beta_2,\beta_3) \\ (\beta_3,\beta_1) & (\beta_3,\beta_2) & (\beta_3,\beta_3) \end{pmatrix}=E$$

知识点: 7.3

7. (论述题) 证明 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,0,2)^T$ 生成的向量空间为 R^3.

收藏

我的答案:

正确答案:

证明 因为 $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，故 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 与 (e_1,e_2,e_3) 等价，

因此生成向量空间相等, 都为 R^3.

知识点:

8. (论述题) 设 A 是正交矩阵，证明 A^* 是正交矩阵.

收藏

我的答案:

正确答案:

证明 $(A^*)^T A^*=(|A|A^{-1})^T\,|A|A^{-1}=|A|^2E=E$

知识点:

六. 计算题（共 1 题）

一. 单选题

1 2 3 6 7 8 11 12 13 16 17 18 21 22 23 26

二. 填空题

27 28 29 32 33 34 37 38 39

我的答案:

正确答案:

解 $\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}u=0$， $u=\frac{1}{2}k_1(-1,1,2,0)^T+\frac{1}{2}k_2(1,3,0,2)^T$

知识点:

七. 其它（共 6 题）

1. (其它)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 V 的一个基，

$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，

（1）证明 β_1,β_2,β_3 是 V 的基，

（2）求 $\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标向量

收藏

我的答案:

正确答案:

（1） $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{pmatrix}$， $\det\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{vmatrix}=2\neq0$，

β_1,β_2,β_3 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 秩相等，故 β_1,β_2,β_3 线性无关，因此是基.

（2） $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&-1&3/2\\1&1&-2\\-1&-1&5/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}11/2\\-5\\13/2\end{pmatrix}$$

知识点:

2. (其它)

已知 R^3 的基 $a_1=(2,1,2)^T,a_2=(-2,2,1)^T,a_3=(1,2,-2)^T$ 和

基 $b_1=(9,0,0)^T,b_2=(9,9,0)^T,b_3=(9,9,9)^T$

（1）求由 a_1,a_2,a_3 到 b_1,b_2,b_3 的过渡矩阵 T；

（2）已知向量 v 在 a_1,a_2,a_3 下的坐标向量为 $x=[2,1,4]^T$，求 v 在 b_1,b_2,b_3 下的坐标向量 y .

收藏

我的答案:

正确答案:

$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)T$， $T=\begin{pmatrix}2&3&5\\-2&0&1\\1&3&1\end{pmatrix}$