7.1 二重积分

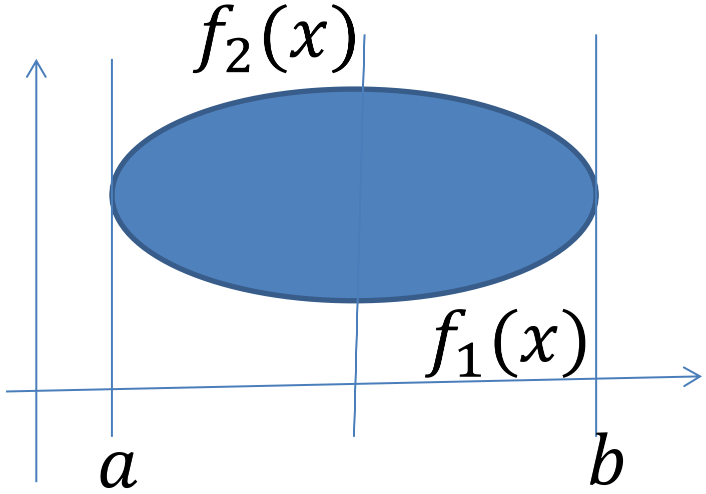
计算方法：“画线定限”⇒ 累次积分积之。

说明：**1** 方法：“画线”定限（切点**D**）

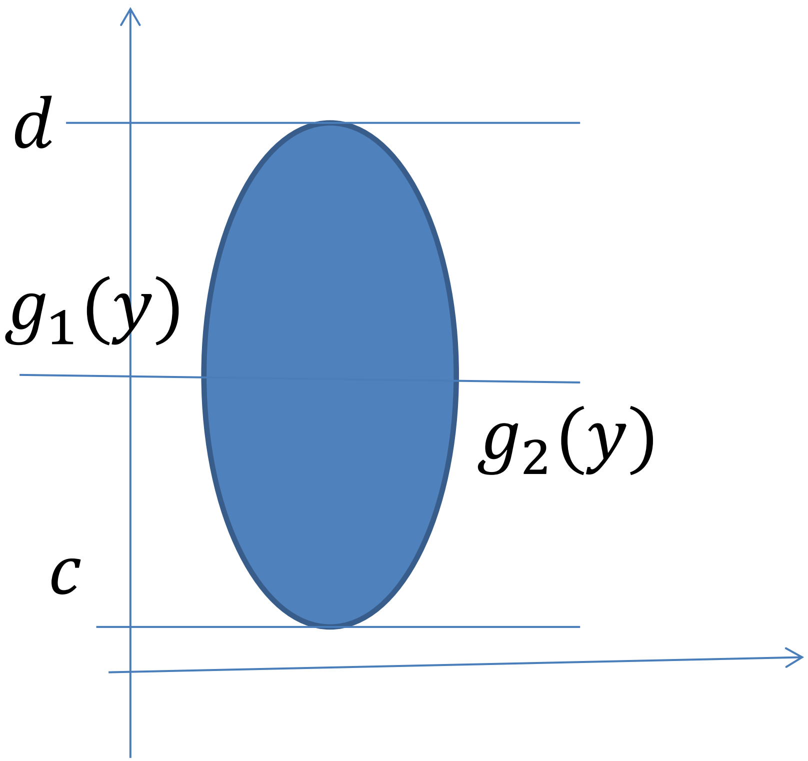
2 选择积分次序要合适，若先***y***后***x***

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dx$$ 不能积出结果。

3 不可积函数 $e^{-x^2},\cos x^2,\sin x^2,\dfrac{\sin x}{x}$ 等等

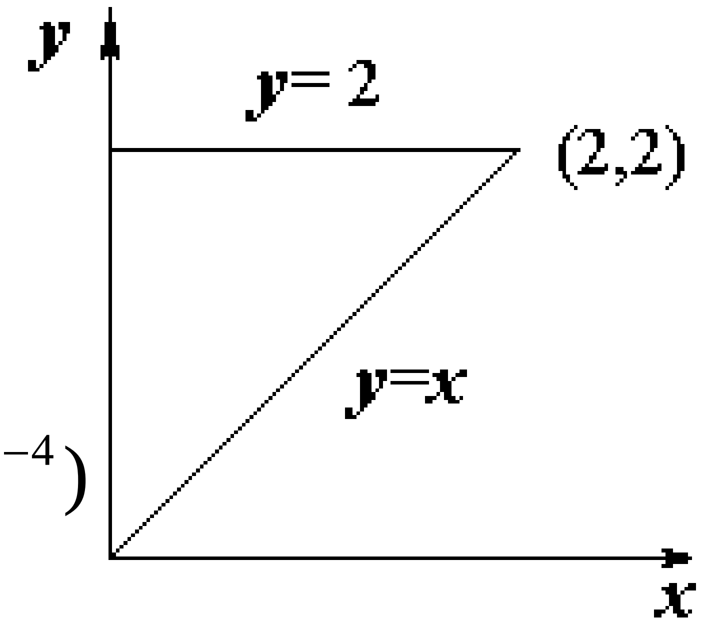


X-型区域



Y-型区域

例1 计算 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$



解 $I = \int_0^2 e^{-y^2} dy \int_0^y dx = \int_0^2 y e^{-y^2} dy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-y^2} dy^2 = -\frac{1}{2} e^{-y^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1-e^{-4})$$

例2 f 于$[0,1]$ 上连续，$\int_0^1 f(x)dx = A$

求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy$

解 令 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$， 则 $F(0) = 0$ ，$F(1) = A$

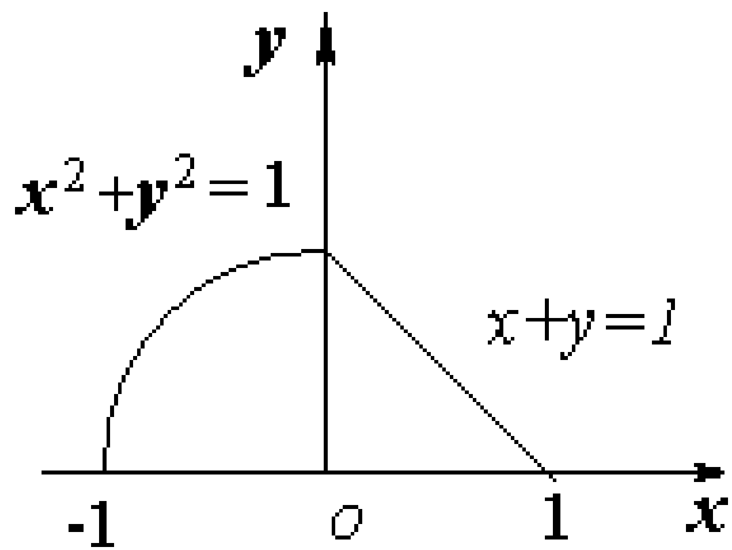
$F'(x) = f(x)$ ， 原式 $= \int_0^1 f(x)dx \int_x^1 F'(y)dy =$

$$\int_0^1 f(x)\cdot F(y)\Big|_x^1 dx = \int_0^1 F'(x)[F(1)-F(x)]dx$$

$$= AF(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}A^2$$

例3 交换积分次序

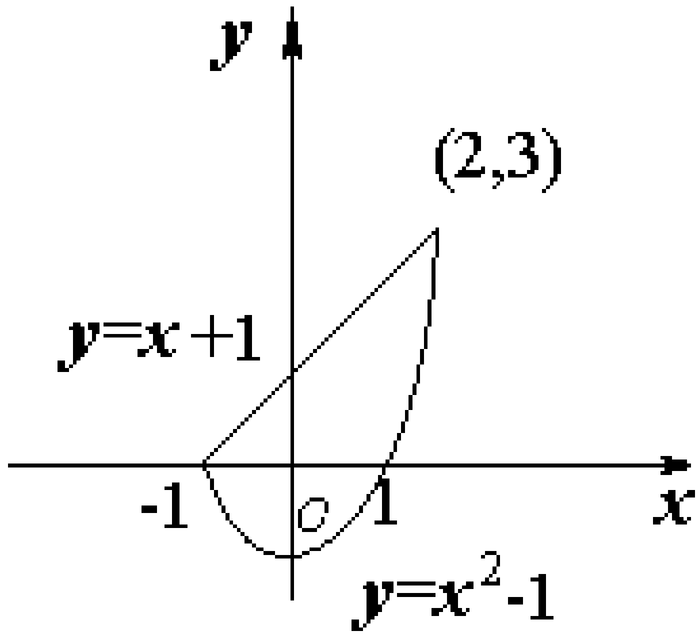
（1）$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$



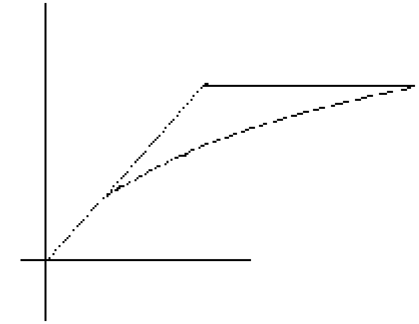
$$= \int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f dy$$

$$+ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f dy$$

（2） $I=\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}}fdx+\int_{0}^{3}dy\int_{y-1}^{\sqrt{1+y}}fdx \quad =\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2-1}^{1+x}fdy$



例4 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy=$



$$\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dx=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2}dy=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy$$

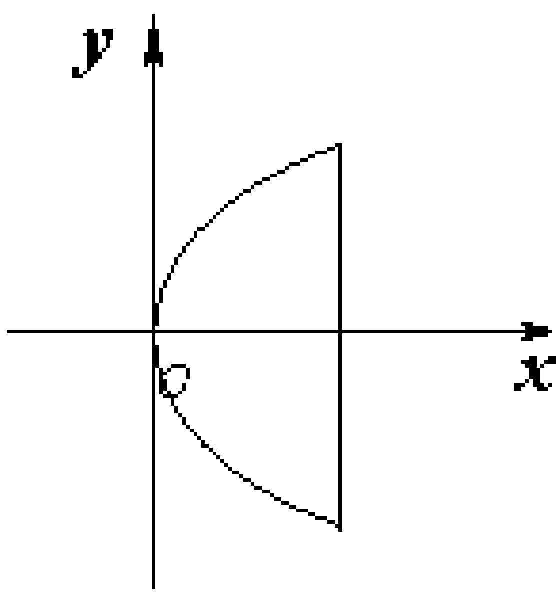
$$=-\frac{4}{\pi^2}\int_1^2 yd\sin\frac{\pi y}{2}=-\frac{4}{\pi^2}\left(y\sin\frac{\pi y}{2}\Big|_1^2-\int_1^2\sin\frac{\pi y}{2}dy\right)=-\frac{4}{\pi^2}\left(-1+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}\Big|_1^2\right)$$

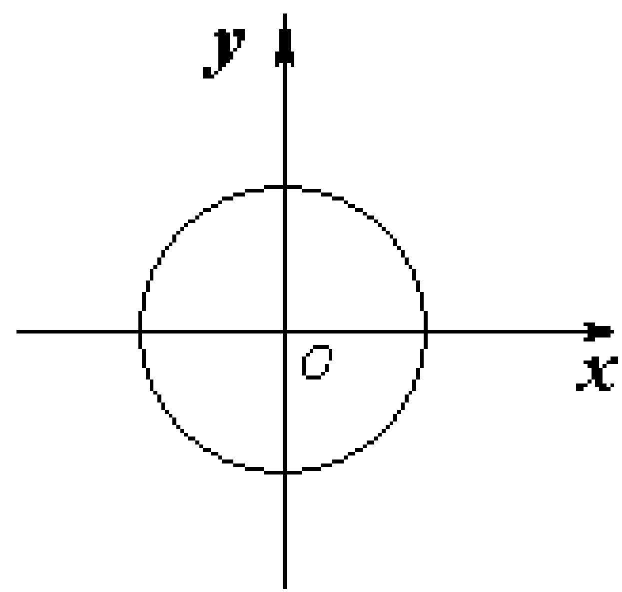
$$=\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)$$

例5 （函数的奇偶性与区域对称性）

引例 $\iint\limits_{D_1} y^3 dxdy$ $D_1: x = y^2$ 和 $x = 1$ 围成。

$$\iint\limits_{D_1} y^3 dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^3 dy = 0$$





$$\iint\limits_{D_2} y\sin xy\,dxdy \quad D_2: x^2+y^2\le R^2$$

$$\iint\limits_{D_2} y\sin xy\,dxdy=\int_{-R}^{R}dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y\sin xy\,dx=0$$

D_1 区域关于 x 轴对称 f 关于 y 是奇函数

D_2 关于 y 轴对称，f 关于 x 是奇函数。

规范语言：I_1 中被积函数关于 y 是奇函数，区域关于 $y=0$ 对称，I_2 中被积函数关于 x 奇函数，区域关于 $x=0$ 对称，则积分为零。反之，被积函数关于 x 是偶函数，区域关于 $x=0$ 对称，则积分等于一半区间上积分值的二倍。同理，被积函数关于 y 是偶函数，区域关于 $y=0$ 对称，则积分等于一半区间上积分值的二倍。

例6 设 D 是 xOy 平面上以（1，1）、（−1，1）和（−1，−1）为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分,若 $I=\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)dxdy$，试问下列等式是否成立，并说明理由。

(1) $I=2\iint\limits_{D_1}xydxdy$；　(2) $I=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$；

(3) $I=4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$

解 画出区域**D**的图形（如图9－43），将区域**D**分为四个子区域 D_1, D_2, D_3, D_4 。

显然 D_1 与 D_2 关于*y*轴对称，D_3 和 D_4 关于*x*轴对称，将 I 分为两个二重积分，

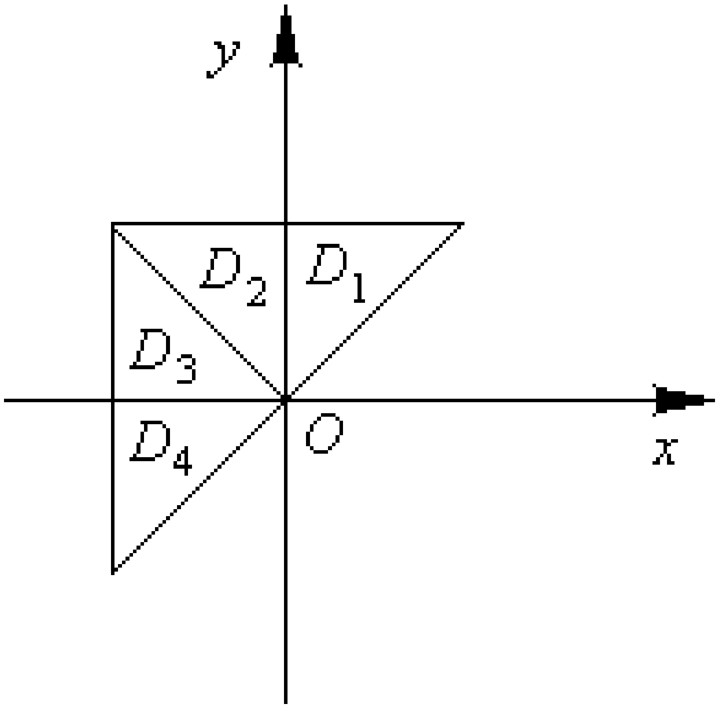


图9－43

记 $I_1 = \iint\limits_D xydxdy, \quad I_2 = \iint\limits_D \cos x \sin ydxdy$

由于 ***xy*** 关于 ***x*** 和关于 ***y*** 都是奇函数，因此

$$\iint\limits_{D_1+D_2} xydxdy = 0, \qquad \iint\limits_{D_3+D_4} xydxdy = 0$$

所以 $I_1 = 0$，而 $\cos x \sin y$ 是关于 ***y*** 的奇函数，关于 ***x*** 的偶函数，故有

$$\iint\limits_{D_1+D_2} \cos x \sin ydxdy = 2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin ydxdy$$

$$\iint\limits_{D_3+D_4} \cos x \sin ydxdy = 0$$

因此 $I = 2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y dxdy$。

综上分析可知，等式（1）、(3)不成立，等式（2）式成立。

通过上面的讨论，可利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化重积分的计算.通常有如下几种情况：

1. 设平面有界闭区域 $D = D_1 + D_2$ ，且 D_1 与 D_2 关于*y*轴 $(x = 0)$ 对称，$f(x, y)$为D上的可积函数，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy & (\text{当}f\text{为}D\text{上关于}x\text{的偶函数，} \\ & \text{即}f(-x,y)=f(x,y)) \\ 0 & (\text{当}f\text{为}D\text{上关于}x\text{的奇函数，} \\ & \text{即}f(-x,y)=-f(x,y))\end{cases}$$

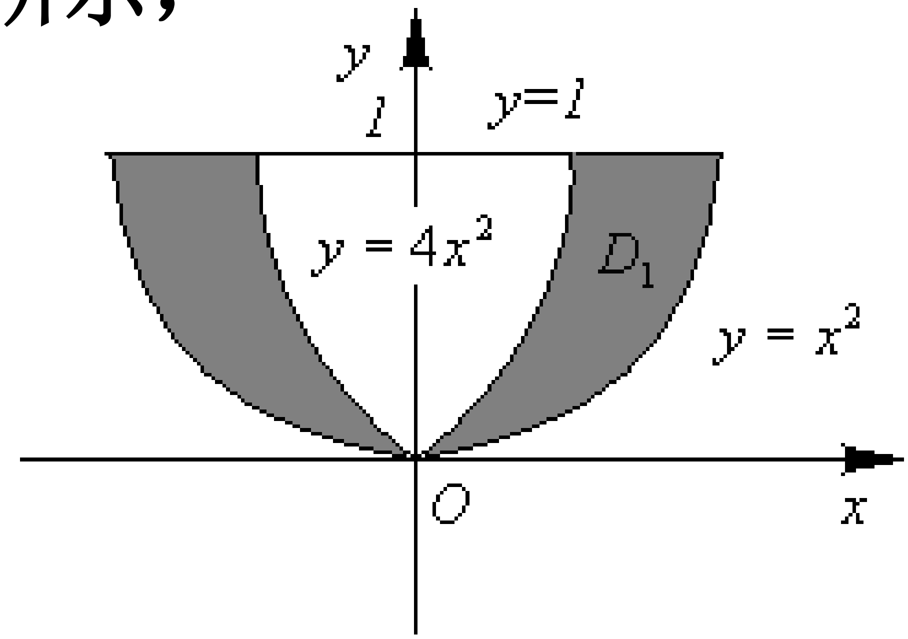
2.设平面有界闭区域 $D=D_3+D_4$**，且** D_3 **与** D_4 **关于** x **轴** $(y=0)$ **对称，**$f(x,y)$**为** D **上的可积函数，则**

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_3} f(x,y)dxdy & (\text{当}f\text{为}D\text{上关于}y\text{的偶函数，} \\ & \text{即}f(x,-y)=f(x,y)) \\ 0 & (\text{当}f\text{为}D\text{上关于}y\text{的奇函数，} \\ & \text{即}f(x,-y)=-f(x,y))\end{cases}$$

例7 计算 $\iint\limits_D (3x^3+y)dxdy$ ，其中 D 是由两条抛物线 $y=x^2$，$y=4x^2$ 之间、直线 $y=1$ 以下的闭区域。

解 积分区域如图7－44所示，

D 关于 y 轴对称，$3x^3+y$ 中 $3x^3$ 是关于 x 的奇函数，y 是关于 x 的偶函数，依对称性有



$$\iint\limits_D (3x^3+y)dxdy = \iint\limits_D ydxdy = 2\iint\limits_{D_1} ydxdy$$

图7－44

$$= 2\int_0^1 y dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} dx = \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2}{5}.$$

例8 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|} dxdy$ ，其中D是由直线 $x = 1, x = -1, y = 2$ 和 x 轴所围成的闭区域。

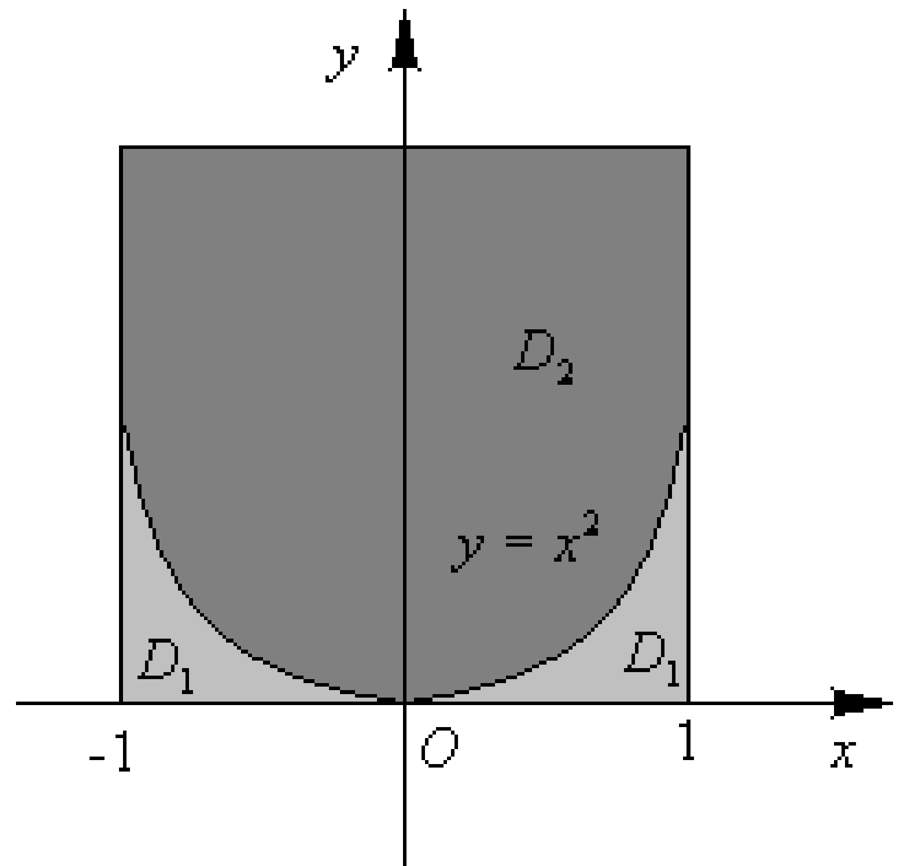
解 为计算积分，首先要将被积函数 $\sqrt{|y - x^2|}$ 中绝对值符号去掉，如图所示，抛物线 $y = x^2$ 将D分成两个子区域 D_1、D_2 ，其中

$$D_1: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2 \quad ;$$

$$D_2: -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 2$$

因此 $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - y} & (x,y) \in D_1), \\ \sqrt{y - x^2} & ((x,y) \in D_2). \end{cases}$ 。

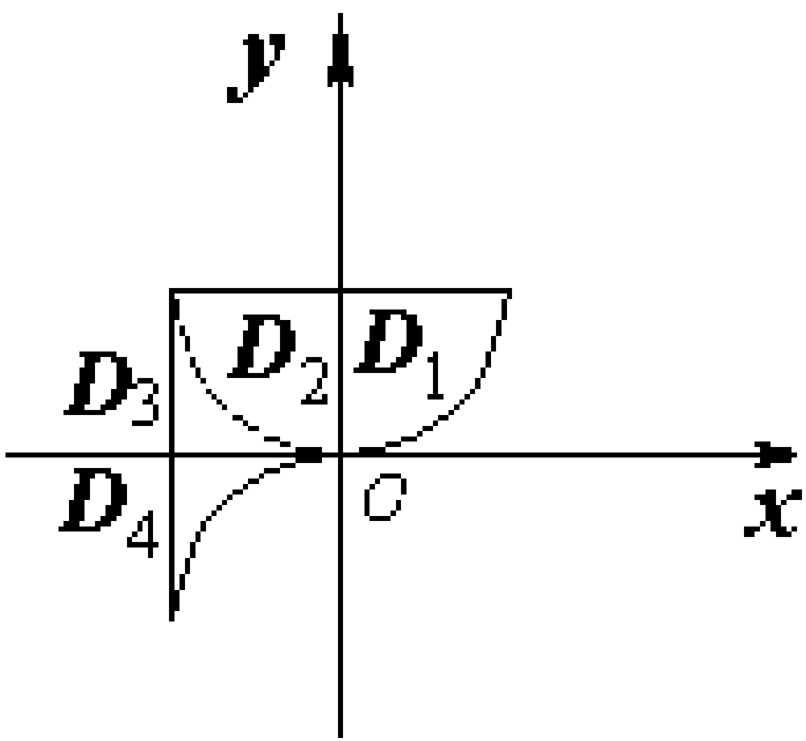
被积函数 $f(x,y)$ 在 D 上是关于 x 的偶函数，积分区域 D 关于 y 轴对称，D_1, D_2 也是关于 y 轴对称的，故



$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy = \iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}dxdy + \iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}dxdy$$

$$=2\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy + 2\int_0^1 dx\int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2}dy = \frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$$

例9 **计算** $\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$，其中 D:由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 围成，f 连续。



解 作$y=-x^3$，分区域为

D_1，D_2，D_3，D_4 如图。

原式 $= \iint_D xdxdy + \iint_{D_1+D_2} xyf(x^2+y^2)dxdy$

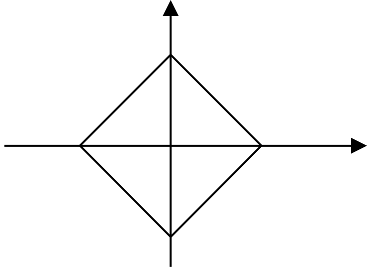
$$+ \iint_{D_3+D_4} xyf(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \iint_{D_1+D_2} xdxdy + \iint_{D_3+D_4} xdxdy = 2\iint_{D_3} xdxdy$$

$$= 2\int_{-1}^{0} xdx \int_{0}^{-x^3} dy = -\frac{2}{5}$$

注：如上奇偶性分析对三重积分，一型线积分，一型曲面积分其结论都是对的。

例10 计算 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)dxdy$



$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)dxdy \overset{\text{奇偶性}}{=} 4\iint\limits_{D_1}(|x|+|y|)dxdy \overset{\text{轮换对称性}}{=} 8\iint\limits_{D_1}xdxdy=\frac{4}{3}$$

关于轮换对称性说明：x, y 互换，区域若保持不变，微元不变，即可使用，此时被积函数常发生变化。（区域关于**y=x**对称）

例11 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$，其中 f 连续恒号。

解 $$I=\iint\limits_{D} \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\iint\limits_{D} \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy$$

则

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{D} \frac{(a+b)[f(x)+f(y)]}{f(x)+f(y)}dxdy=\frac{a+b}{2}\pi R^2$$

例12 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$$

证 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，故

$$F(x,y)=[f(x)-f(y)]^2$$

在矩形区域 $D: a \le x \le b$, $a \le y \le b$ 上连续，且

$$\iint_D [f(x)-f(y)]^2 d\sigma \ge 0$$

显然

$$\iint_D [f(x)-f(y)]^2 d\sigma$$

$$=\iint_D f(x)^2 d\sigma - 2\iint_D f(x)f(y)d\sigma + \iint_D f(y)^2 d\sigma$$

$$=\int_a^b\int_a^b f^2(x)dxdy - 2\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)dxdy + \int_a^b\int_a^b f^2(y)dxdy$$

$$=2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx - 2\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \geq 0$$

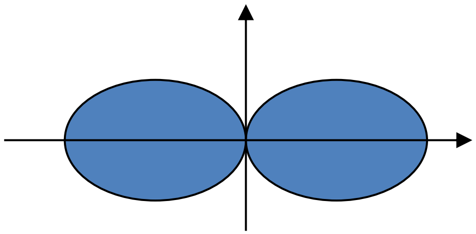
所以

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx \quad ,$$

两端同乘以 $\dfrac{1}{(b-a)^2}$ 并开方得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$$

例1（极坐标）计算双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$



围成区域的面积。

解 $r^4=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$ $r^2=\cos 2\theta$ 由对称性

$$S=4\iint_D d\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}rdr=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta=\sin 2\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1$$

注：（1）对称性分析，（2）极坐标使用原则）

例2 计算 $I=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}dy$

$$I=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}dy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^{\frac{1}{2}}rdr$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1}{2}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^{\frac{1}{2}}dr^2 \underline{\underline{r^2=t}}\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}dt=$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}$$

例3 求二重积分 $I=\iint_D(\sqrt{3}x+y)^2dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$

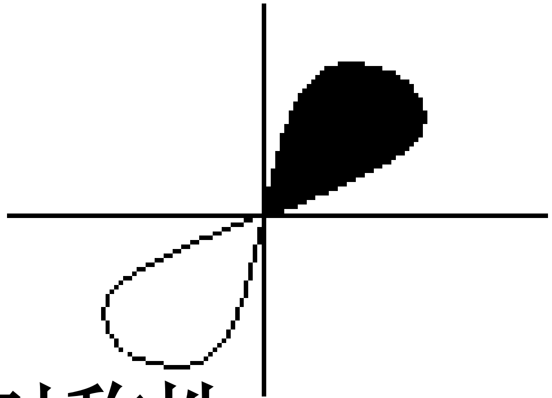
由区域对称性及被积函数得奇偶性

$$I=\iint_D(3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2)dxdy=\iint_D(3x^2+y^2)dxdy$$

轮换对称性,当区域关于直线 $y=x$ 对称时,关于 x 和 y 的二重积分相等

$$I=\iint_D 2(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2 r dr=\pi$$

例4: 计算 $\iint\limits_D xy\,dxdy$ ，其中 D 是双扭线 $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$ 所围城的闭区域.



设 D_1 为图中的黑体部分，则由对称性

$$\iint\limits_D xy\,dxdy=2\iint\limits_{D_1} xy\,dxdy$$

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ ，代入 $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$ 得

$r^2=2\cos\theta\sin\theta$ ，令 $r=0,\sin 2\theta=0$ ，利用极坐标有

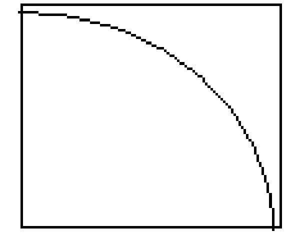
$\theta=0,\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$\iint_D xy\,dxdy = 2\iint_{D_1} xy\,dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} r^3 dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2\theta - 1) d(\cos 2\theta) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\cos^3 2\theta - \cos 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

例6:计算 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| dxdy$ ，其中



D：$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1$。

$$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)\,dxdy + \iint\limits_{\substack{1\le x^2+y^2\\ 0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}}(x^2+y^2-1)\,dxdy$$

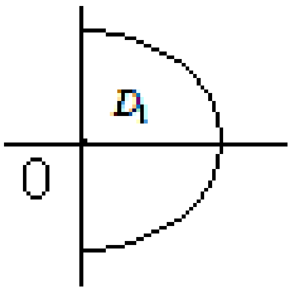
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho+\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}(\rho^2-1)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_1^{\frac{1}{\sin\theta}}(\rho^2-1)\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{8}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{4}\sec^4\theta-\frac{1}{2}\sec^2\theta+\frac{1}{4}\right)d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\csc^4\theta-\frac{1}{2}\csc^2\theta+\frac{1}{4}\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2\theta)d\tan\theta-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2\theta)d\cot\theta-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}-1$$

例7 计算 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{x^2+y^2+1}dxdy$ ，其中 D： $x^2+y^2\le 1,\quad 0\le x$ 。



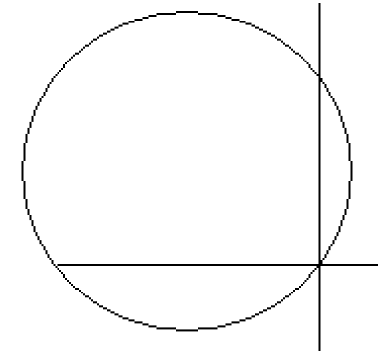
由区域的对称性及函数的奇偶性有

$$\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2+1}dxdy=0$$

$$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{x^2+y^2+1}dxdy=\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy=2\iint\limits_{D_1} \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho^2}d\rho=\frac{\pi}{2}\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

例8、 计算 $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$ ，其中 D 是有圆 $x^2+y^2=2(y-x)$ 所围城的闭区域.



解1：令 $x+1=u, y-1=v$ ， $x=u-1$，$y=v+1$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=1 \quad ,$$

$$\iint\limits_D (2x+3y)dxdy=\iint\limits_{D'} (2u+3v+1)dxdy$$

其中 $D':u^2+v^2=2$ ，令 $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$ ，

$0<\theta<2\pi$ ， $0<r<\sqrt{2}$

$$\iint_{D}(2x+3y)dxdy=\iint_{D\prime}(2u+3v+1)dudv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2rcos\theta+3rsin\theta+1)rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{4\sqrt{2}}{3}cos\theta+2\sqrt{2}sin\theta+1)d\theta$$

$$=2\pi$$

解2：令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$

$$r = 2(\sin\theta - \cos\theta) = 2\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5}{4}\pi$$

$$0 < r < 2\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$$

$$\iint_D (2x+3y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})} (2r\cos\theta + 3r\sin\theta) r dr$$

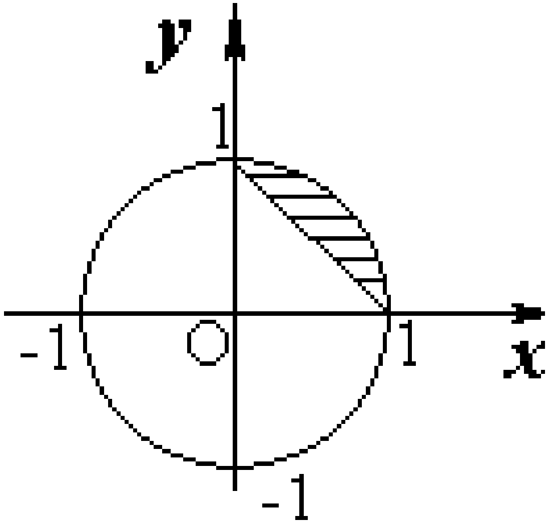
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\frac{32\sqrt{2}}{3}\sin^3(\theta - \frac{\pi}{4})\cos\theta + 16\sqrt{2}\sin^3(\theta - \frac{\pi}{4})\sin\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (\frac{32}{3}\sin^3 t(\cos t - \sin t) + 16\sin^3 t(\sin t + \cos t)) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{16}{3}\sin^4 t d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d\theta = \frac{32}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

例1 计算二重积分

$$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy, D: x^2+y^2 \le 1, x+y \ge 1$$



解 D如图所示的阴影部分。 。

$$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} \frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2} rdr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta+\sin\theta-1)d\theta = \frac{4-\pi}{2}$$

例2求 $\iint\limits_{D}(x+y)dxdy$ ，其中D是圆心 (a,b)

半径为R的圆域。

解：

$$\iint\limits_{D}(x+y)dxdy=\iint\limits_{D}((x-a)+(y-b)+(a+b))dxdy$$

$$=(a+b)\pi R^2$$

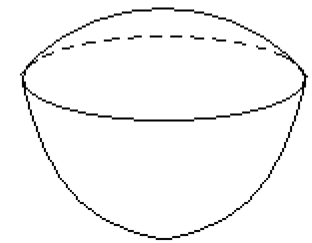
例3 计算 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-4\right| dxdy$ ，其中 D 是圆域 $x^2+y^2 \le 9$.

$$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-4\right| dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (4-x^2-y^2)\, dxdy + \iint\limits_{4\le x^2+y^2\le 9} (x^2+y^2-4)\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-\rho^2)\rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 (\rho^2-4)\rho d\rho$$

$$= \frac{41}{2}\pi$$

例1 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv$ ，其中 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$



所围成的空间闭区域。

解 被积函数 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$

由于积分区域 Ω 关于 xOz 坐标面对称，$xy+yz$ 是关于 y 的奇函数，所以 $\iiint\limits_{\Omega}(xy+yz)dv=0$ ；

类似地，由于 Ω 关于 yOz 坐标面对称，xz 是关于

是关于x的奇函数，所以 $\iiint\limits_{\Omega} xzdv = 0$ 。

采用柱面坐标计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，$\Omega$由不等式

$0 \le \theta \le 2\pi$,$0 \le r \le 1, r^2 \le z \le \sqrt{2-r^2}$ 给出

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv = \iiint\limits_{\Omega}(r^2+z^2)rdrd\theta dz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}(r^3+rz^2)dz$$

$$= 2\pi\int_0^1(r^3(\sqrt{2-r^2}-r^2)+\frac{r}{3}[(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-r^6])dr$$

$$= 2\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sqrt{2}\sin^3 t\cos^2 tdt-\frac{1}{6}\right]+\frac{2\pi}{3}\left[-\frac{1}{5}(2-r^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{8}r^8\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{15}(16\sqrt{2}-19)+\frac{2\pi}{3}\left[-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdot 2^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$=\frac{\pi}{15}(16\sqrt{2}-19)+\frac{2\pi}{3}\left[32\sqrt{2}-13\right]$$

$$=\frac{\pi}{60}(96\sqrt{2}-89)$$ 。

例2 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=a$，若

$$F(t)=\iiint_{\Omega}[z+f(x^2+y^2+z^2)]dv,$$

其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{t^2-x^2-y^2}$，求 $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^3}$.

解 $$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t[r\cos\varphi+f(r^2)]r^2dr$$

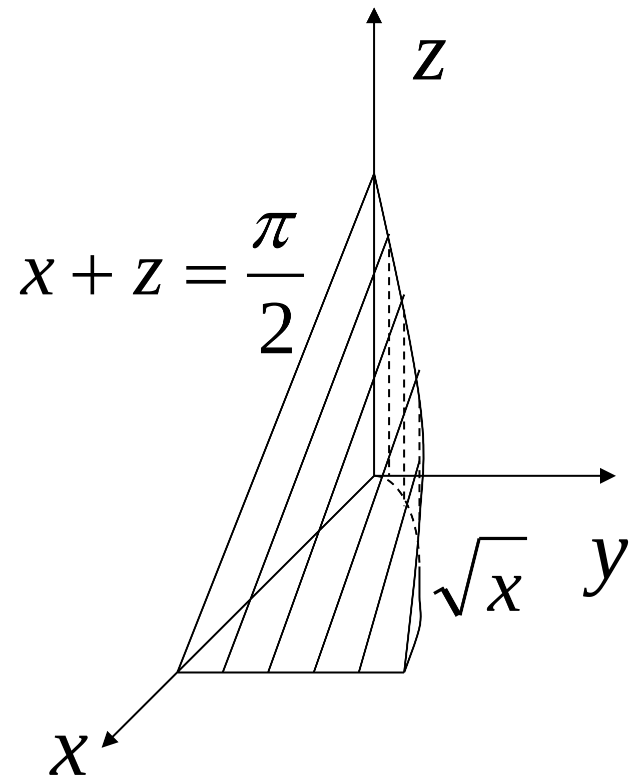
$$=2\pi\left[\frac{1}{16}t^4+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t r^2f(r^2)dr\right]$$

于是 $$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi}{t^3}\left[\frac{1}{16}t^4+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t r^2f(r^2)dr\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\left[\pi(2-\sqrt{2})\int_0^t r^2f(r^2)dr\right]=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to 0}\frac{t^2f(t^2)}{3t^2}$$

$$=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to 0}\frac{f(t^2)}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a.$$

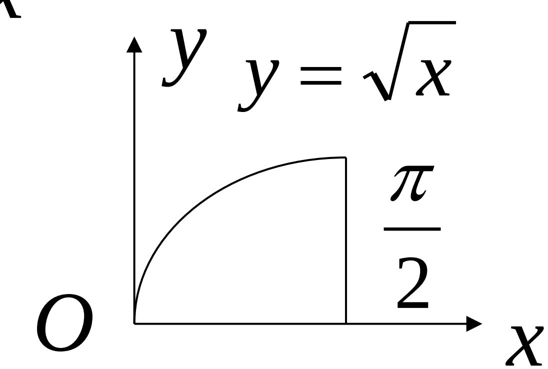
例3 计算 $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dv$， 其中V：$z=0$，$y=0$，$y=\sqrt{x}$，$x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成的区域。



解 $I=\iint\limits_{D_{xy}} ydxdy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+z)dz$

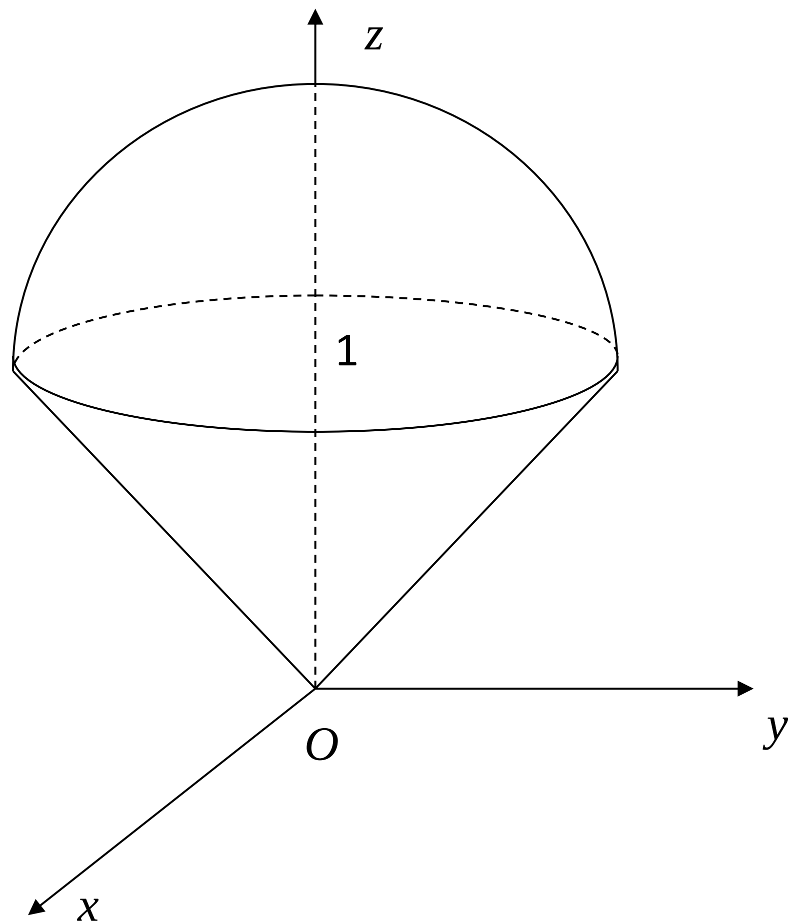
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}ydx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+z)dz$$

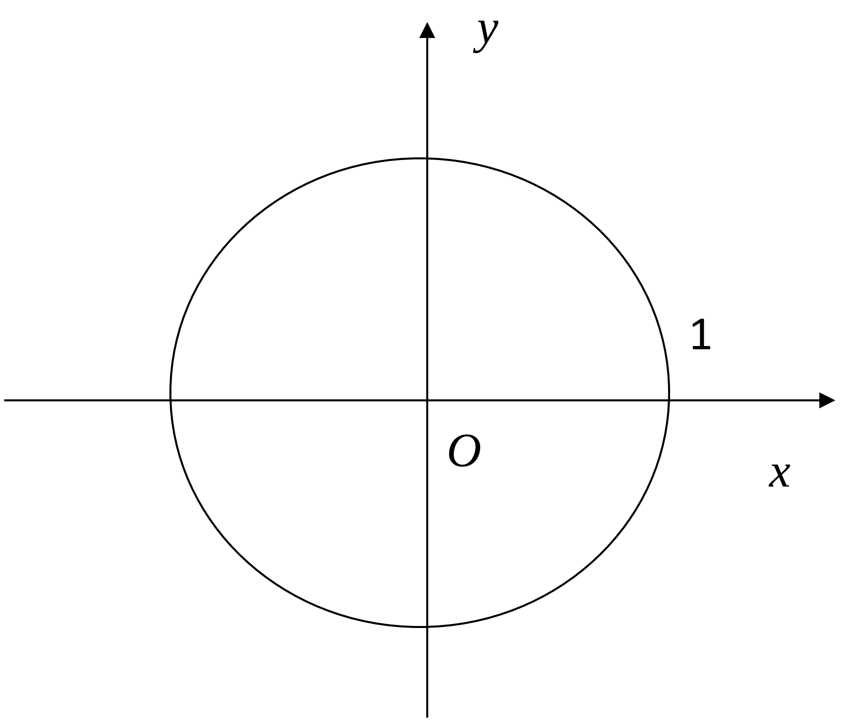
$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$



例4 将 $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ ，分别按直角坐标系，柱坐标系，球坐标系写出累次积分形式，其中V为

$(z-1)^2+x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2\le z^2$ 围成部分。





解 （1）直角坐标系下：

$$I=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz$$

（2）柱坐标系下：

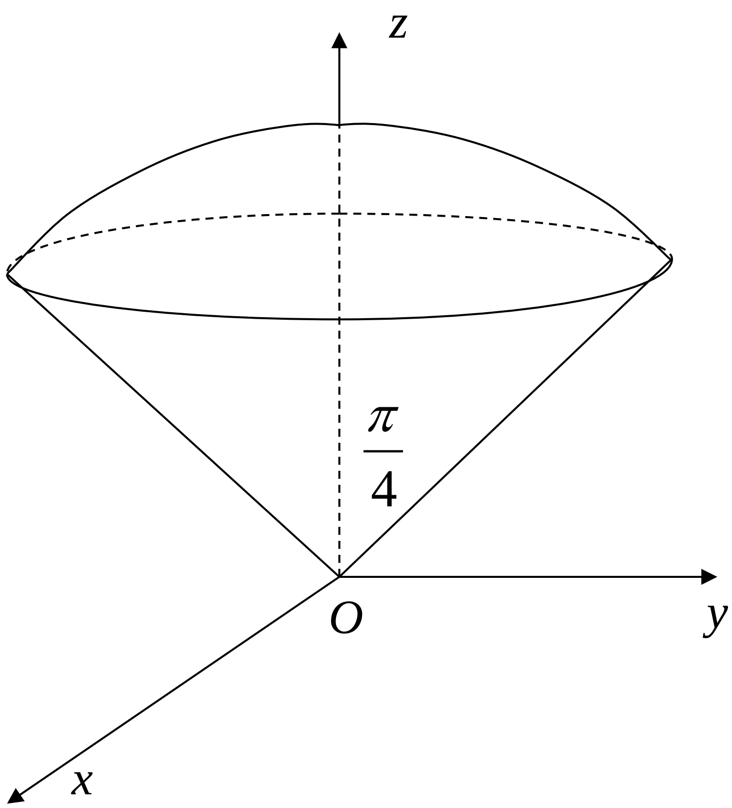
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}}fdz$$

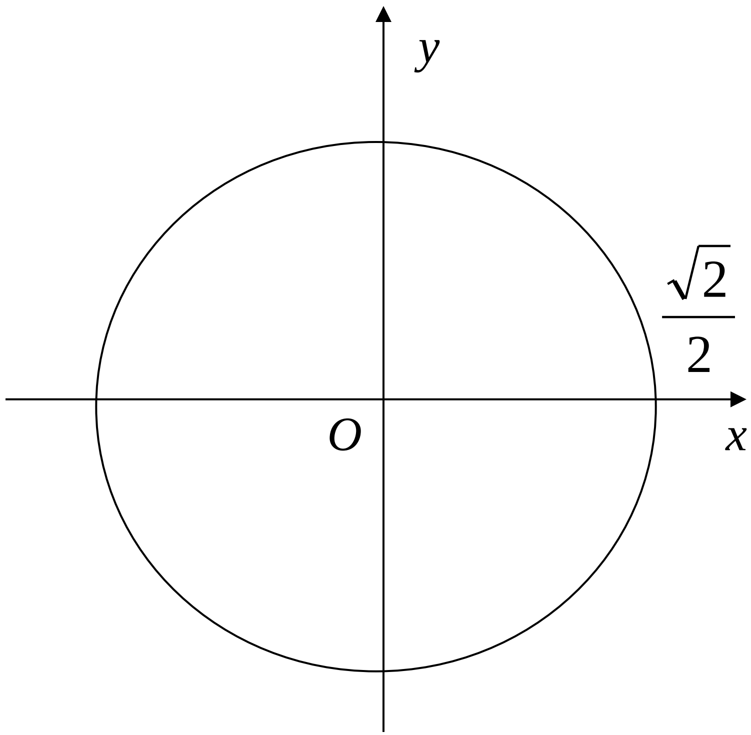
（3）球坐标系下

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2fdr$$

例5 计算 $I=\iiint\limits_V (x^3+y^2\sin y+z)dV$， 其中V：

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成区域。





解 $$I=\iiint\limits_V x^3 dV+\iiint\limits_V y^2 sinydV+\iiint\limits_V zdV$$

其中 $$\iiint\limits_V zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi r^2 dr=\frac{\pi}{8}$$

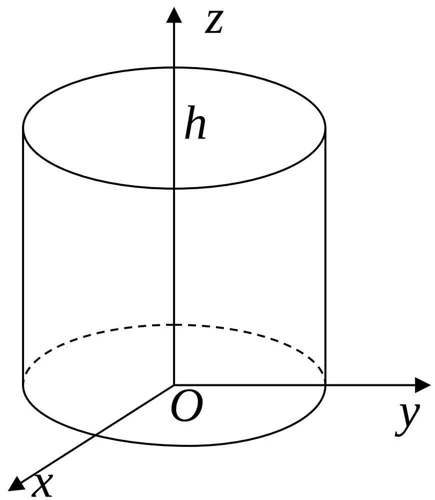
亦可用柱坐标系

$$\iiint\limits_V zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}rdr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}zdz=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{2}r(1-r^2-r^2)dr=\frac{\pi}{8}$$

例6 设$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz$，其中$f(u)$连续，

Ω为 $0\le z\le h$，$x^2+y^2\le t^2\ (t>0)$，求$\dfrac{dF}{dt}$和$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$。

解



$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz=\int_0^h dz\iint\limits_{D_z}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^h dz\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t(z^2+f(r^2))rdr\right]=\int_0^h 2\pi\left(\frac{1}{2}z^2t^2+\int_0^t f(r^2)rdr\right)dz$$

$$= \pi t^2 \frac{h^3}{3} + 2\pi h \frac{1}{2} \int_0^{t^2} f(z)dz$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{2}{3}\pi h^3 t + \pi h f(t^2) 2t = \frac{2}{3}\pi h^3 t + 2\pi h f(t^2)$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{t^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{3}\pi h^3 t^2 + \pi h \int_0^{t^2} f(t)dt}{t^2} = \frac{1}{3}\pi h^3 + \pi h f(0)$$

例7 $\iiint\limits_V (x^2+2y^2-z^2+xy+x)dV$， V：$x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 由奇偶性 $\iiint\limits_V xydV=\iiint\limits_V xdV=0$

由轮换对称性 $\iiint\limits_V x^2dV=\iiint\limits_V y^2dV=\iiint\limits_V z^2dV$

故原式 $=\iiint\limits_V 2y^2dV=\dfrac{2}{3}\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R}r^2r^2dr=\frac{8}{15}\pi R^5$$

例8 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+5y^2+7z^2)dV$, Ω：

$0\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 。

解 设 Ω_1：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，则由 $3x^2+5y^2+7z^2$

为z的偶函数，则有

$$\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+5y^2+7z^2)dV=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_1}(3x^2+5y^2+7z^2)dV$$

由轮换对称性 $\iiint\limits_{\Omega_1}x^2dV=\iiint\limits_{\Omega_1}y^2dV=\iiint\limits_{\Omega_1}z^2dV$

$$=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$$

故原式 $$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_1}(3x^2+5y^2+7z^2)dV$$

$$=\frac{1}{2}\left\{3\iiint_{\Omega_1}x^2dV+5\iiint_{\Omega_1}y^2dV+7\iiint_{\Omega_1}z^2dV\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{3\cdot\left[\frac{1}{3}\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dV\right]+\right.$$

$$\left.5\cdot\left[\frac{1}{3}\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dV\right]+7\cdot\left[\frac{1}{3}\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dV\right]\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \iiint\limits_{\Omega_1} (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

$$= \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{R} r^2 r^2 dr = 2\pi R^5$$

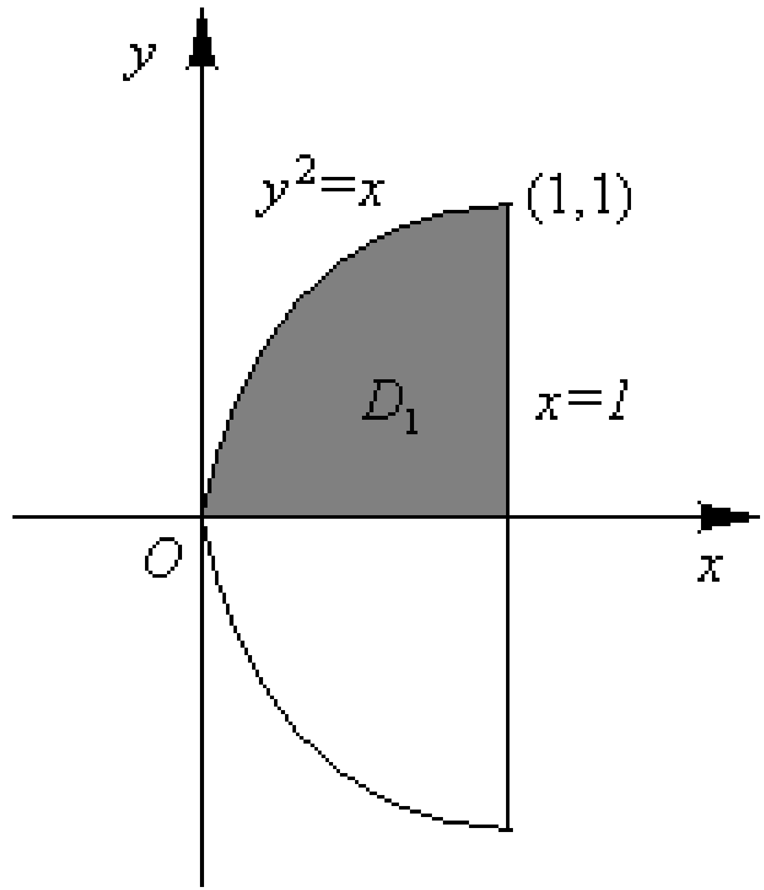
例1 求由曲线 $y^2=x$ 与直线 $x=1$ 所围成的平面均匀薄片对于通过坐标原点的任一直线的转动惯量，并讨论转动惯量在哪种情况下，取得最大值或最小值。

解 设过原点的任一直线为

$y=ax$ 平面薄片上任一点(x,y)

到该直线的距离为 $d=\dfrac{|y-ax|}{\sqrt{1+a^2}}$

则由转动惯量的计算公式，有



$$I_a=\rho\iint_D\left(\frac{|y-ax|}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2 d\sigma$$

$$=\frac{\rho}{1+a^2}\iint_D(y^2-2axy+a^2x^2)d\sigma$$

其中 ρ 为均匀薄片的面密度。

如图所示，积分区域D关于x轴对称.记D在x轴上方的子区域为D_1：$0\le y\le 1, y^2\le x\le 1$

被积函数 $y^2-2axy+a^2x^2$ 中，y^2，a^2x^2是关于 y 轴的偶函数，$-2axy$是关于 y 的奇函数，于是

$$I_a=\frac{2\rho}{1+a^2}\iint_{D_1}(y^2+a^2x^2)d\sigma=\frac{2\rho}{1+a^2}\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}(y^2+a^2x^2)dy$$

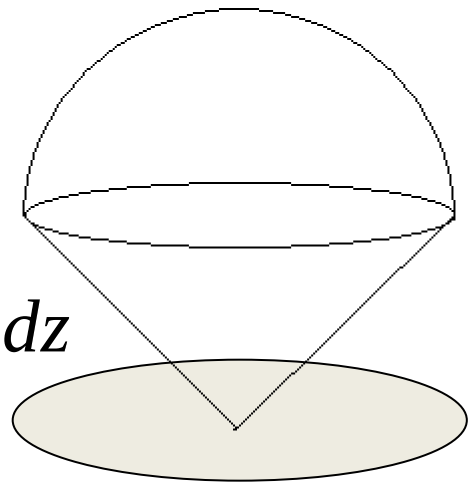
$$=\frac{2\rho}{1+a^2}\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+a^2x^{\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{4\rho}{1+a^2}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{7}a^2\right)$$

显然当 $a=0$ 时，平面薄片绕 x 轴的转动惯量最小，即 $I_{\min}=\frac{4}{15}\rho$ 当 $a\to\infty$ 时，即平面薄片绕 y 轴的转动惯量最大，$I_{\max}=\frac{4}{7}\rho$

。

例2 一均匀物体 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成，试求该物体关于 z 轴的转动惯量。

解 显然 Ω 在xOy平面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 1$，于是用柱面坐标，得

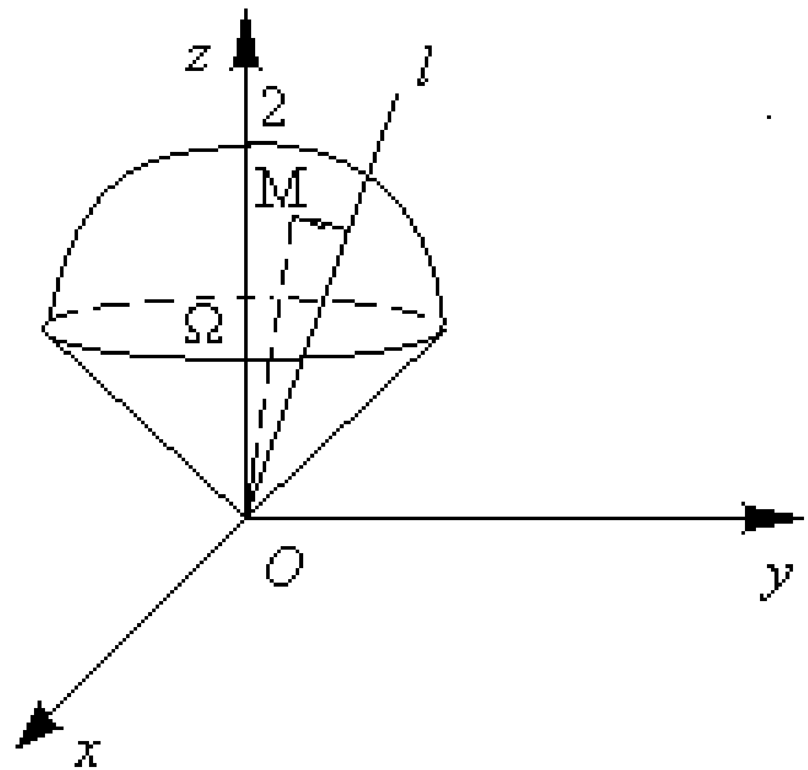


$$I_z=\rho\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}}r^3dz$$

$$=2\pi\rho\int_0^1(1+\sqrt{1-r^2}-r)r^3dr=2\pi\rho\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}\right)=\frac{11}{30}\rho\pi$$

例3 由曲面 $z=2-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的立体 Ω，其密度为1，求 Ω 绕直线 l：$x=y=z$ 旋转的转动惯量。

解 如图所示，求立体 Ω 绕直线 l 的转动惯量,必须先求得立体 Ω 内任意一点 $M(x,y,z)$ 到直线 l 的距离的平方 d^2。



设 $\overrightarrow{OM}$ 为坐标原点到点 M 的向径，则

$$d^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 - (\Pr j_l \overrightarrow{OM})^2$$

其中 $\Pr j_l \overrightarrow{OM} = (1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z)/\sqrt{3}$

所以

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2$$

$$-xy - xz - yz)$$

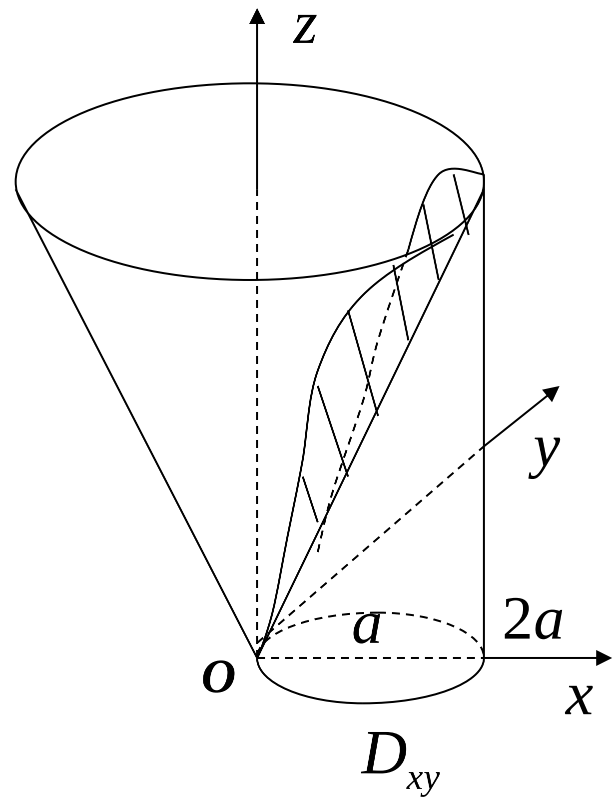
故 $I_l = \iiint\limits_{\Omega} \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)dv,$

由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega}(xy+xz+yz)dv=0,$

再用柱坐标可得

$$I_l=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{2-r^2}(r^2+z^2)dz=\frac{83}{90}\pi.$$

例4 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$ ，其中 **S** 是锥面 $z^2=4(x^2+y^2)$ 被柱面 $x^2+y^2-2ax=0$ 截下的一块面积 $(z\geq 0)$ 。



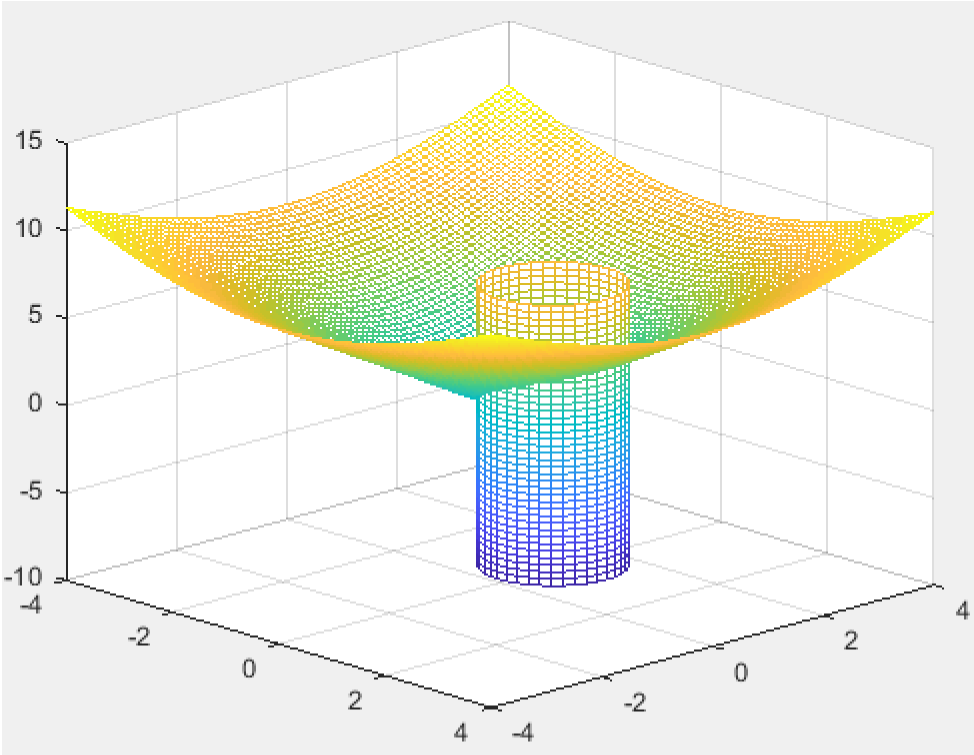
解 ***S***的方程为

$$z=2\sqrt{x^2+y^2},\quad D_{xy}: x^2+y^2-2ax\leq 0$$ ，

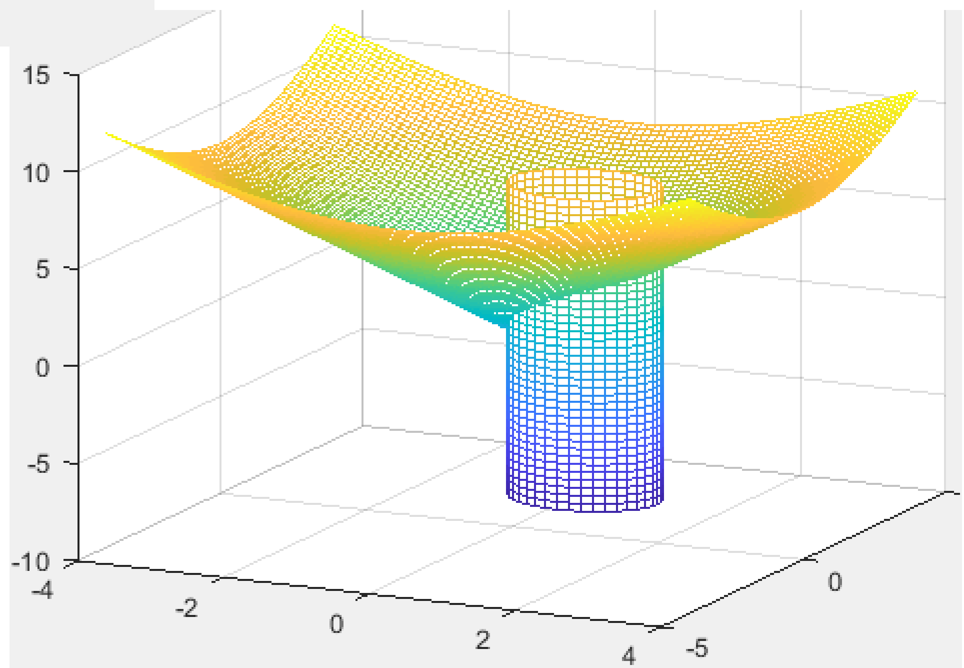
用极坐标表示为：

。

$$0\leq r\leq 2a\cos\theta,\qquad -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$



15
10
5
0
-5
-10
-4
-2
0
2
4
-4
-2
0
2
4



15
10
5
0
-5
-10
-4
-2
0
2
4
-5
0

于是由公式（2），得

$$I=\iint_{D_{xy}}[x^2+y^2+4(x^2+y^2)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}5(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{4x^2+4y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}5\sqrt{5}(x^2+y^2)dxdy=5\sqrt{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$=5\sqrt{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\theta d\theta=40\sqrt{5}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=40\sqrt{5}a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{15\sqrt{5}}{2}\pi a^4.$$

例5 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}$ **，其中** Σ **是球面**

$x^2+y^2+z^2=a^2$ **被平面** $z=h\ (0<h<a)$ **截出的顶部**

（图7—26）。

解 Σ **的方程为** $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Σ **在** xOy **面上**

的投影区域为圆形闭区域 D_{xy}

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2 - h^2\}$

又

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

根据公式（2），有

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z} = \iint_{D_{xy}} \frac{adxdy}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

利用极坐标，得

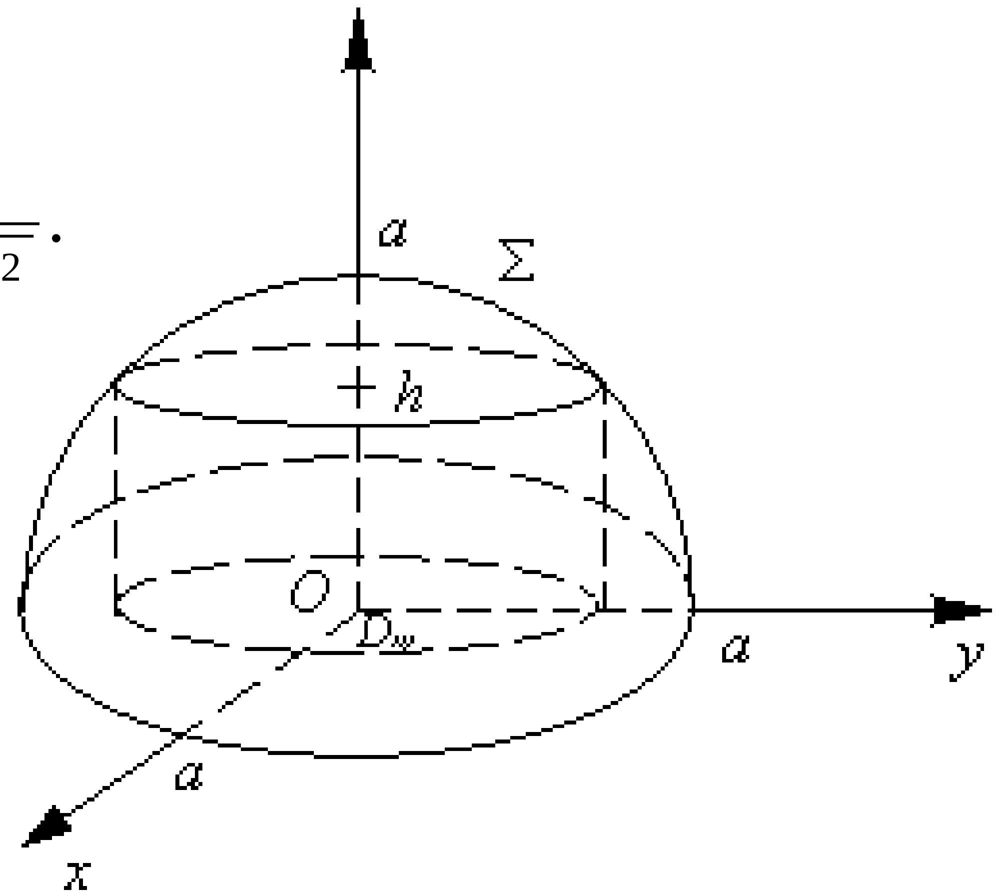


图7—26

$$\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\rho d\rho d\theta}{a^2-\rho^2}=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho d\rho}{a^2-\rho^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

例6 **计算** $\oiint_{\Sigma} xyzdS$**，其中** Σ **是由平面** $x=0, y=0, z=0$ **及** $x+y+z=1$ **所围成的四面体的整个边界曲面（图7—27）。**

解 **整个边界曲面** Σ **在平面** $x=0$、$y=0$、$z=0$ **及**

$x+y+z=1$上的部分依次记为Σ_1、Σ_2、Σ_3及Σ_4，于是

$$\oiint_{\Sigma} xyzdS = \oiint_{\Sigma_1} xyzdS + \oiint_{\Sigma_2} xyzdS + \oiint_{\Sigma_3} xyzdS + \oiint_{\Sigma_4} xyzdS$$

由于在 Σ_1、Σ_2、Σ_3 上，被积函数

$f(x,y,z)$ 均为零，所以

$$\oiint_{\Sigma_1} xyzdS = \oiint_{\Sigma_2} xyzdS = \oiint_{\Sigma_3} xyzdS = 0$$

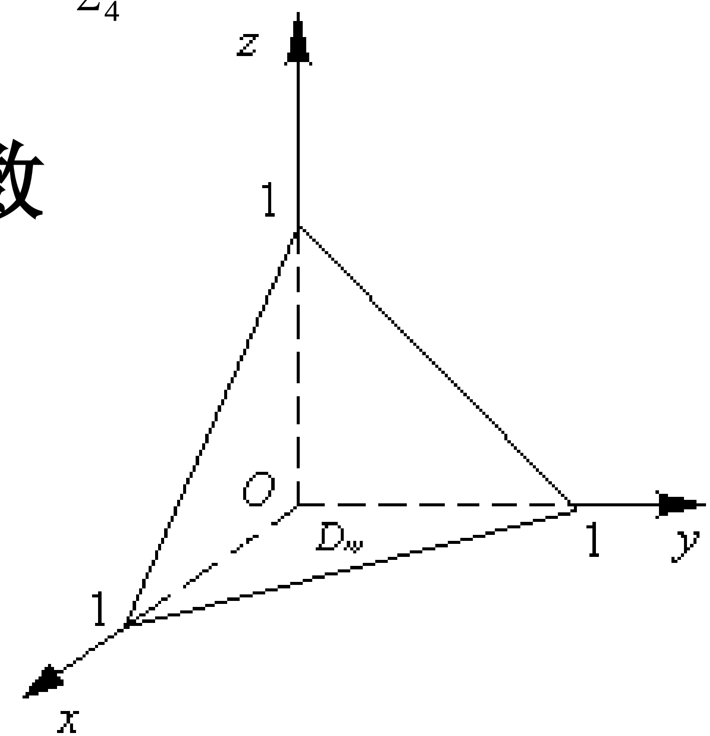


图7—27

在 Σ_4 上，$z=1-x-y$ ，所以

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

从而

$$\oiint_{\Sigma} xyzdS=\oiint_{\Sigma_4} xyzdS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}xy(1-x-y)dxdy$$

其中D_{xy} 是Σ_4在***xOy***面上的投影区域，即由直线

$x=0$、$y=0$ 及 $x+y=1$所围成的闭区域。因此

$$\oiint_{\Sigma} xyzdS=\sqrt{3}\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} y(1-x-y)dydx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^3}{6}\,dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (x-3x^2+3x^3-x^4)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

例7 计算 $\oiint\limits_{S} z dS$ ，其中S是由圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ ，平面 $z=0$ 和 $z-x=R$ 所围立体表面（图7-28）。记号 $\oiint$ 表示积分在闭曲面S上进行。

解 S由曲顶面 S_1 ，底面 S_2 及侧面 S_3 构成，其中

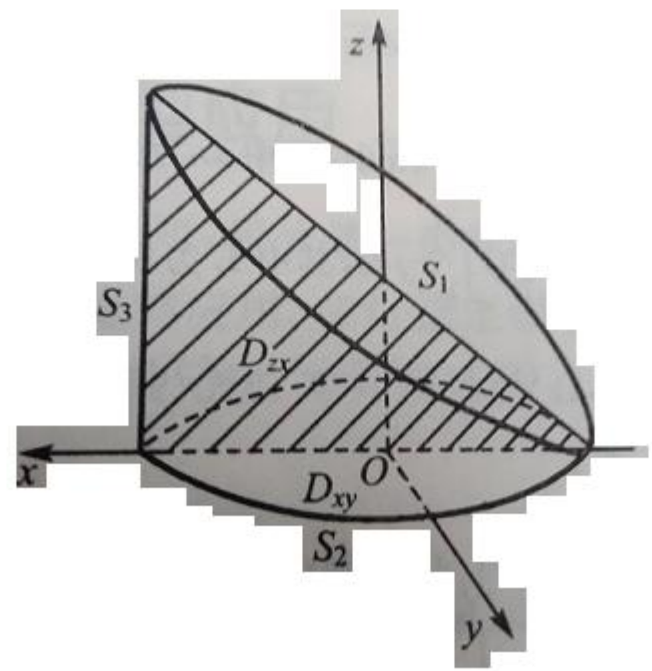


图7-28

$$S_1: \quad z - x = R \quad (x, y) \in D_{xy}$$

$$S_2: \quad z = 0 \quad (x, y) \in D_{xy}$$

D_{xy}： $x^2 + y^2 \leq 1.$

由公式（2）得

$$\iint_{S_1} z dS = \iint_{D_{xy}} (R + x)\sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2} dxdy$$

$$= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} (R + x)\, dxdy$$

$$= \sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{R} (R + rcos(\theta)rdr$$

$$= \sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} (\frac{1}{2}R^3 + \frac{1}{3}R^3 \cos\theta)d\theta = \sqrt{2}\pi R^3$$

$$\iint_{S_2} zdS = \iint_{D_{xy}} 0dxdy = 0$$

由对称性，S_3 分为两块，它们的方程分别为

$$y=\sqrt{R^2-x^2} \quad 和 \quad y=-\sqrt{R^2-x^2}$$

将其投影到zOx面上，投影域均为

D_{zx}：$0\le z\le R+x$，$-R\le x\le R$，且都有

$$\sqrt{1+{y_z}^2+{y_x}^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

于是

$$\iint_{S_3} zdS=2\iint_{D_{xy}} z\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy$$

$$= 2\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx \int_{0}^{R+x} zdz$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}(R + x)^2 dx$$

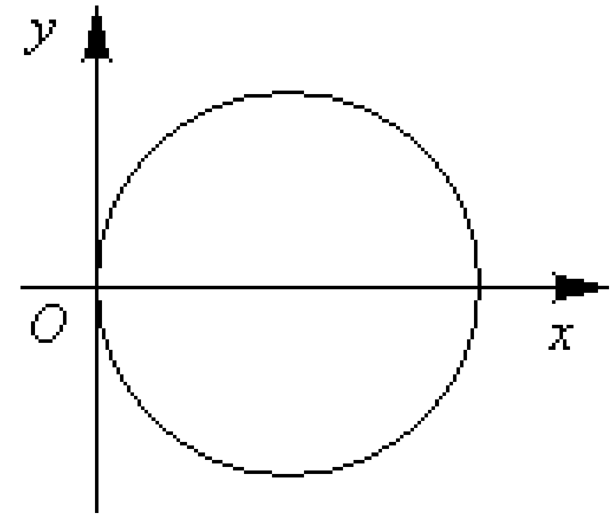
$$= R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + sint)^2 dt$$

$$= R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2sint + sin^2 t)\ dt = \frac{3}{2}\pi R^3$$

故

$$\iint_S zdS = \sqrt{2}\pi R^3 + 0 + \frac{3}{2}\pi R^3 = (\sqrt{2} + \frac{3}{2})\pi R^3$$

例1．计算曲线积分$\oint(x^2+y^2)ds$ ，其中L是圆周$x^2+y^2=ax$。



解 利用L的极坐标方程

$$r(\theta)=a\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},$$

$$x^2+y^2=r^2(\theta)=a^2\cos^2\theta,$$

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=ad\theta$$ ，于是

$$\oint (x^2 + y^2)ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta \cdot a d\theta$$

$$= 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2a^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3}{2}.$$

例2 计算 $\oint_L (x+y^3)ds$，其中L是圆周 $x^2+y^2=R^2$。

解 利用曲线积分的性质，得

$$\oint_L (x+y^3)ds = \oint_L xds + \oint_L y^3 ds$$

对于 $\oint_L xds$ ，因为积分曲线L是关于y轴对称的，被积函数 $f_1(x,y)=x$ 是L上关于 x 的奇函数，所以

$\oint_L xds = 0$ 。

对于 $\oint_L y^3 ds$，因为积分曲线L是关于 x 轴也是对

称的，被积函数 $f_2(x,y)=y^3$ 是 L 上关于 y 的奇函数，所以 $\oint_L y^3 ds=0$。

综上所述，得 $\oint_L (x+y^3)ds=0$。

关于对称性的一般法则

设函数 $f(x,y)$ 在一条光滑（或分段光滑）的曲线L上连续，L关于 y 轴（或 x 轴）对称，则

（1）当 $f(x,y)$ 是L上关于x（或y）的奇函数时，

$$\int_L f(x,y)ds = 0;$$

（2）当 $f(x,y)$是L上关于x（或y）的偶函数时，

$\int_L f(x,y)ds = 2\int_{L_1} f(x,y)ds$ ，其中曲线 L_1 是曲线 L 落在y（或x）轴一侧的部分。

例3 计算 $I=\oint_L xds$，L: 如图ABCDEA

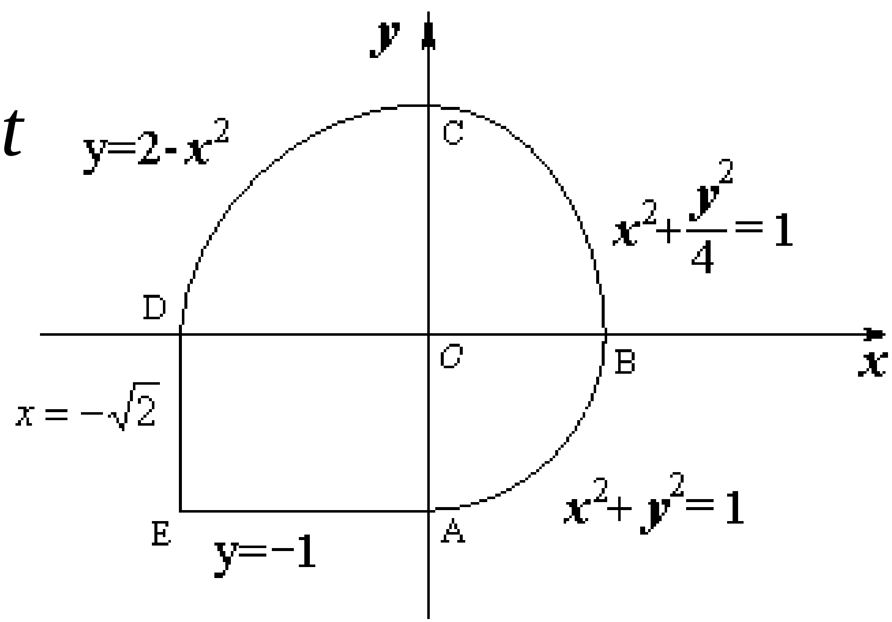
解

$$I=\int_{L_1}xds+\int_{L_2}xds+\cdots+\int_{L_5}xds$$

其中

$$L_1:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\quad ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt$$

$$\int_{L_1}xds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos t\,dt=1$$



$$L_2:\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases} \qquad ds=\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=\sqrt{4-3\sin^2 t}\,dt$$

$$\int_{L_2} x\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{4-3\sin^2 t}\,dt=\int_0^1\sqrt{4-3x^2}\,dx=\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$L3: y=2-x^2 \qquad ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx$$

$$\int_{L_3} x\,ds=\int_{-\sqrt{2}}^{0} x\sqrt{1+4x^2}\,dx=-\frac{13}{6}$$

$$L_4: x=-\sqrt{2}, \quad ds=dy \qquad \int_{\mathrm{L}_4} x\,ds=\int_{-1}^{0}-\sqrt{2}\,dy=-\sqrt{2}$$

$L_5: y=-1$ ， $ds = dx$ $\int_{L_5} xds = \int_{-\sqrt{2}}^{0} xdx = -1$

故原式 $=1+\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{13}{6}-\sqrt{2}-1=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}-\frac{10}{6}-\sqrt{2}$

$$\int_{L_2} xds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{4-3\sin^2 t}\,dt = \int_0^1 \sqrt{4-3x^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}\,dx$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2\theta+1)d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

例4 设 L 为周长为a的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 。计算

$$\oint_L (x+2y+3x^2+4y^2)ds$$

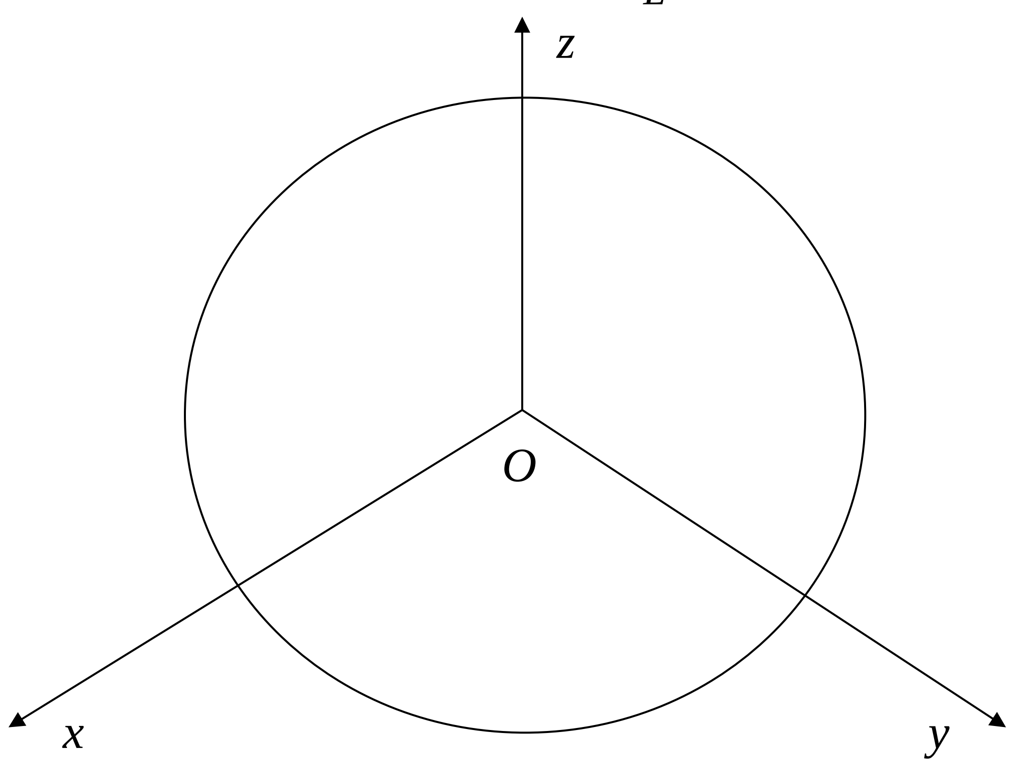
解 由对称性

$$\oint_L xds=\oint_L 2yds=0\ ,\qquad \oint_L (3x^2+4y^2)ds=\oint_L 12ds=12a$$

例5 计算 $\oint_L x^2 ds$，$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 交线。

解 由轮换对称性 $\oint_L x^2 ds = \oint_L y^2 ds = \oint_L z^2 ds$，

原式 $=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)ds = \frac{1}{3}R^2\int_L ds = \frac{1}{3}R^2\cdot 2\pi R = \frac{2}{3}\pi R^3$



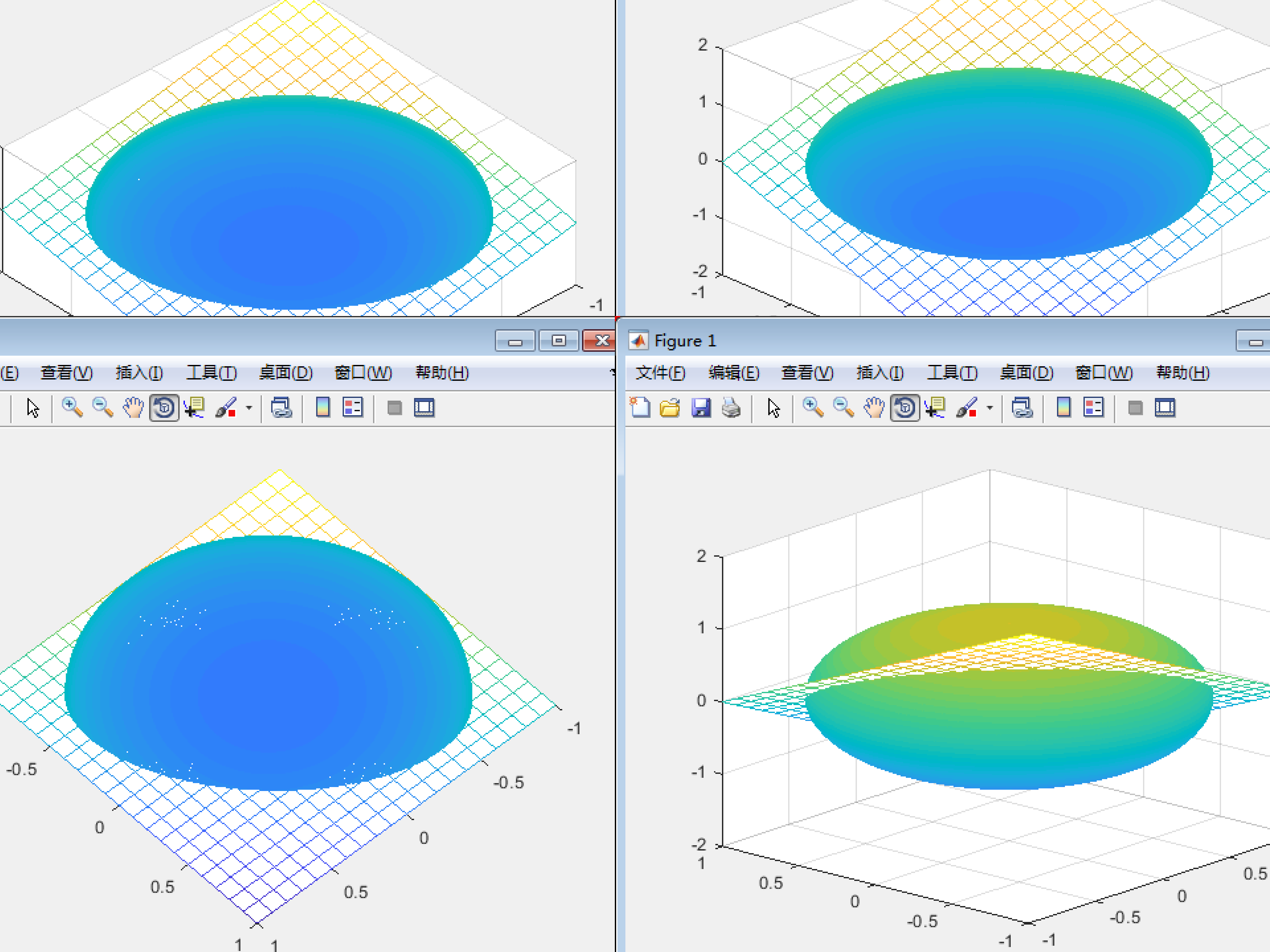


Figure 1
文件(F)
编辑(E)
查看(V)
插入(I)
工具(T)
桌面(D)
窗口(W)
帮助(H)

例6计算 $I=\int_c (z+y^2)ds$, c 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解 曲线 c 即球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和平面

$x+y+z=0$ 的交线，且对于 x,y,z 具有轮换对称性，

从而

$$\int_c zds=\int_c yds=\int_c xds$$

$$=\frac{1}{3}\int_c (x+y+z)ds=\frac{1}{3}\int_c 0ds=0$$

$$\int_c y^2 ds = \int_c x^2 ds = \int_c z^2 ds = \frac{1}{3}\int_c (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

$$= \frac{1}{3}\int_c R^2 ds = \frac{1}{3} R^2 \cdot 2\pi R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

故 $$I = \int_c (z + y^2) ds = \frac{2}{3}\pi R^3$$ 。

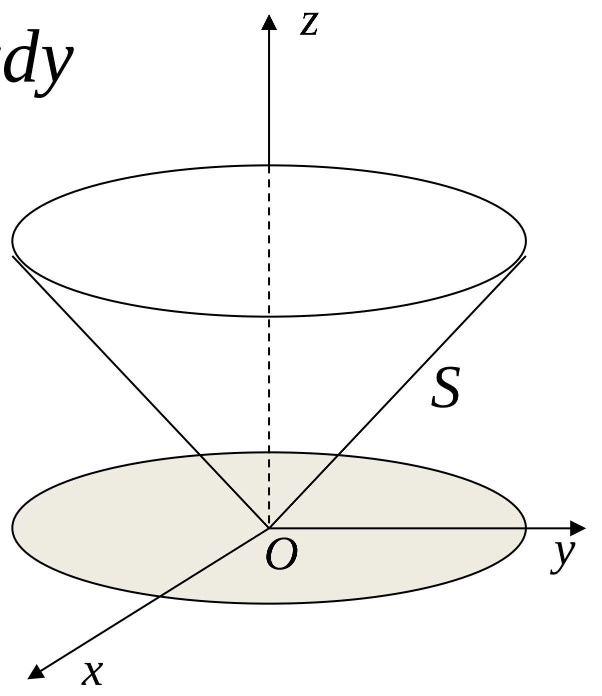
例1 计算 $\iint_S (x^2+y^2)dS$, $S: x^2+y^2=z^2\ (0\le z\le 1)$表面。

解 原式 $=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$



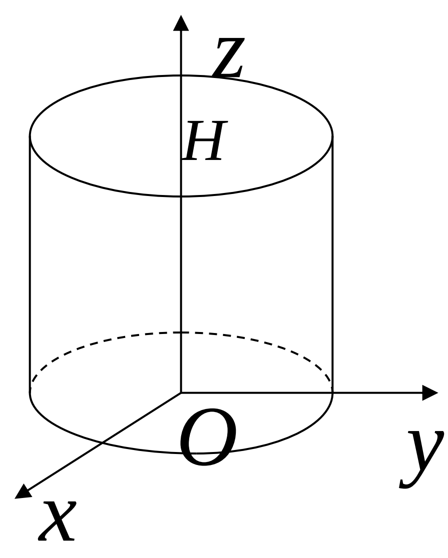
例2 计算 $\iint\limits_{S} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是介于 $z=0$，$z=H$ 之间的柱面 $x^2+y^2=R^2$。

解 （1）曲面向 yOz 面投影，由对称性原式

$$=2\iint\limits_{S_1} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2},$$

$S_1: x^2+y^2=R^2 (x \geq 0)$，

$$x'_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}, x'_z=0$$



原式

$$= 2\iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\,dydz = 2\iint_{D_{yz}} \frac{R}{R^2+z^2}\sqrt{\frac{1}{R^2-y^2}}\,dydz$$

$$= 2R\int_0^H \frac{dz}{R^2+z^2}\int_{-R}^{R}\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}} = 2\pi\arctan\frac{H}{R}\text{，}$$

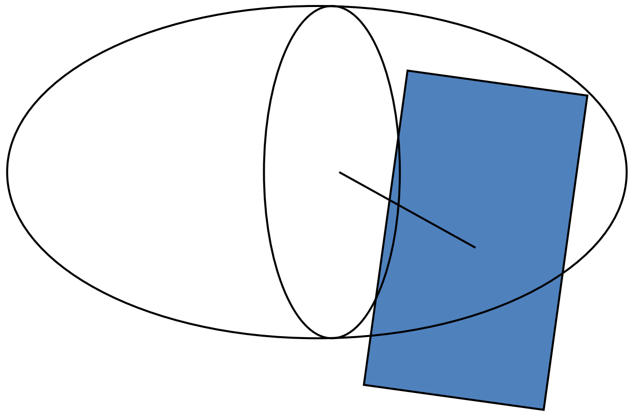
解（2）取微元 $dS = 2\pi R dz$

原式 $= \int_0^H \frac{2\pi R dz}{R^2+z^2} = 2\pi\arctan\frac{H}{R}$

例3 s 是椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点

$P(x,y,z)\in S$，Π 是 S 在 P 点的切平面，$d(x,y,z)$ 为原

点O到切平面 Π 的距离。



求 $\iint\limits_S \frac{z}{d(x,y,z)}dS$ 。

解 设 (X,Y,Z) 是切平面上任意点，则切平面 Π

的方程为 $\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1$

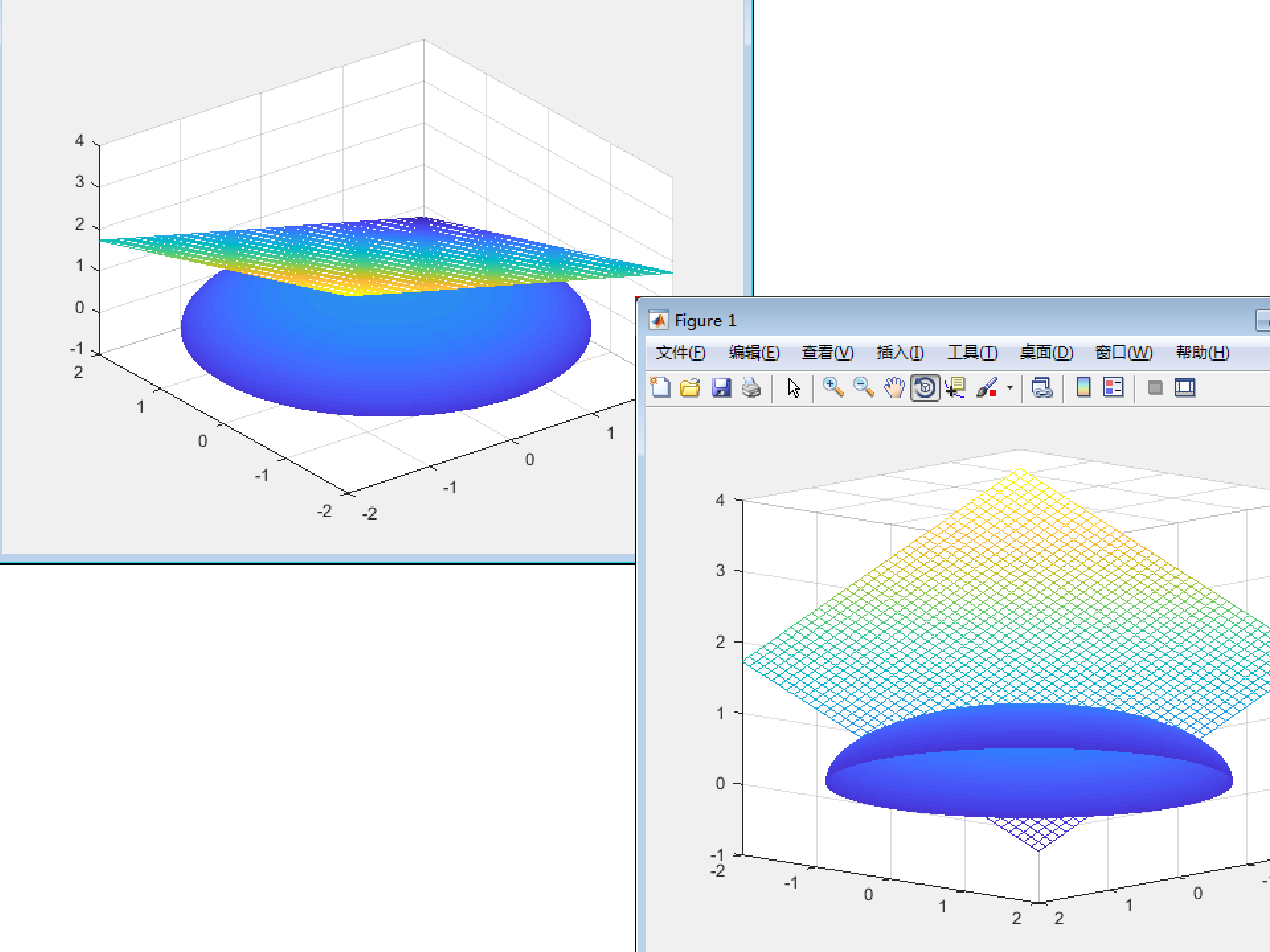


Figure 1
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)

$$d(x,y,z)=\left|\frac{\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ-1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+z^2}}\right|_{(0,0,0)}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+z^2}}$$

又由S：$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$，得 $z'_x=-\frac{x}{2z}$ ， 由对称性

$$z'_y=-\frac{y}{2z}, \quad dS=\sqrt{1+z'^2_x++z'^2_y}=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2z}$$

故

$$\iint_S \frac{z}{d(x,y,z)}dS=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{4}(4-x^2-y^2)dxdy=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr=\frac{3\pi}{2}$$

例4 计算 $\iint\limits_S (x+2y+xy+3x^2+4y^2)dS$ ，

$S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$

解 依对称性 $\iint\limits_S xdS=\iint\limits_S ydS=\iint\limits_S xydS=0$

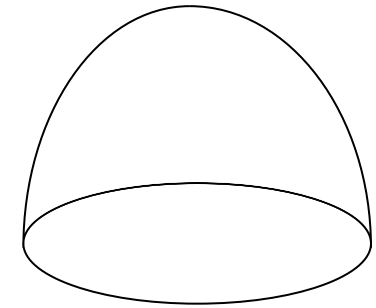
再轮换对称性 $\iint\limits_S x^2dS=\iint\limits_S y^2dS=\iint\limits_S z^2dS$， 则

$$I=\iint\limits_S (3x^2+4y^2)dS=7\cdot\frac{1}{3}\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\frac{7}{3}a^2\iint\limits_S dS=\frac{7}{3}a^2\cdot 4\pi a^2=\frac{28}{3}\pi a^4$$

例5 求面密度为常数 ρ 的均匀抛物面壳

$z=2-(x^2+y^2)\,(z\geq 0)$ 的重心坐标。



解 由抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 的对称性和均匀性知，

重心坐标中 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$ ，下面求坐标 $\bar{z}$ 。

抛物面 Σ 在xOy平面上的投影区域 D_{xy} 为

$x^2+y^2\leq 2$ ，故有

$$M=\iint_{\Sigma}\rho dS=\rho\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}dr=\frac{13\pi}{3}\rho.$$

$$M_{xOy}=\iint_{\Sigma}z\rho dS=\rho\iint_{D_{xy}}[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}dr=\frac{37\pi}{10}\rho.$$

所以 $\bar{z}=\dfrac{M_{xOy}}{M}=\dfrac{\frac{37\pi}{10}\rho}{\frac{13\pi}{3}\rho}=\dfrac{111}{130}$ 重心坐标为 $(0,0,\dfrac{111}{130})$.

例6 求均匀椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 绕直线 $y=kx$ 的转动惯量，并说明 k 为何值时转动惯量最大。

解

$$J_k=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\mu\frac{(y-kx)^2}{1+k^2}dxdy=\frac{ab\mu\pi}{4}\cdot\frac{b^2+a^2k^2}{1+k^2}$$

$$=\frac{ab\mu\pi}{4}\left[b^2+(a^2-b^2)\frac{k^2}{1+k^2}\right]$$

若 $a=b$，转动惯量与 k 无关；若 $a<b$，$k=0$ 绕 x 轴的转动惯量最大。若 $a>b$，$k=\infty$，绕 y 轴的转动惯量最大，此时直线为 $x=0$

例7求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2+xy^2+x^2y+z)dS$ ，其中

$\Sigma: x^2+y^2=z^2\ (0\le z\le 1)$

解：由对称性，得 $\iint\limits_{\Sigma} xy^2 dS=\iint\limits_{\Sigma} x^2 y dS=0$

$\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}=\sqrt{2}$

原式= $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}(2(x^2+y^2)+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy=\frac{10}{6}\sqrt{2}\pi$

例8 设 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$，计算

$$\iint_S (x+y+z)dS$$

解 $\iint_S (x+y+z)dS$

$$=\iint_S [(x-a)+(y-b)+(z-c)]dS+\iint_S (a+b+c)dS$$

由于球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$ 关于平面

$x=a, y=b, z=c$ 对称，因而

$$\iint_S (x-a)dS = \iint_S (y-b)dS = \iint_S (z-c)dS = 0$$

故原积分等于

$$\iint_S (x+y+z)dS = \iint_S (a+b+c)dS = 4\pi(a+b+c)$$