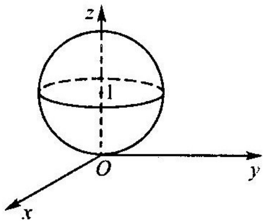
1. 计算$I=\iiint\limits_V (ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中$V: x^2+y^2+z^2\le 2z$

解：积分区域V如图所示



由于V关于oyz和ozx平面对称，且x关于x是奇函数， y关于y是奇函数，所以

$$\iiint\limits_V x\mathrm{d}V=\iiint\limits_V y\mathrm{d}V=0$$

从而

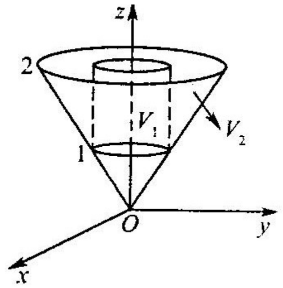
$$I=c\iiint\limits_V z\mathrm{d}V=c\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 先二后一法

$$=c\pi\int_0^2 z(2z-z^2)\mathrm{d}z=\frac{4c}{3}\pi$$

其中$D_z: x^2+y^2\le 2z-z^2$

2. 计算$I=\iiint\limits_V z\mathrm{d}V$，其中$V$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=1$和$z=2$所围成。

解法 1. “先一后二法”，积分区域V如图所示



（1）$I=\iiint\limits_V z\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V_1} z\mathrm{d}V+\iiint\limits_{V_2} z\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma\int_1^2 z\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}\sigma\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z\mathrm{d}z$

$$=\frac{3}{2}\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_2}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2(4-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{15}{4}\pi$$

其中$D_1: x^2+y^2\le 1$，　$D_2: 1\le x^2+y^2\le 4$

（2）

$$I=\iiint\limits_V z\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V_大} z\mathrm{d}V-\iiint\limits_{V_小} z\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}\sigma\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_4}\mathrm{d}\sigma\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{15}{4}\pi$$

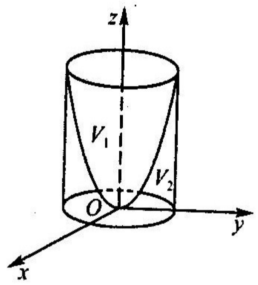
其中$V_大$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=2$所围成，$V_小$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=1$所围成，$D_3: x^2+y^2\le 4$，　$D_4: x^2+y^2\le 1$

解法 2. “先二后一法”，V在z轴上的投影区间是$[1,2]$，过$[1,2]$上任一点作垂直于z轴的平面截V所得截面为$D_z: x^2+y^2\le z^2$，则

$$I=\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 z\cdot\pi z^2\mathrm{d}z==\frac{15}{4}\pi$$

3. 计算$I=\iiint\limits_{V}\left|z-x^2-y^2\right|\mathrm{d}V$，其中$V$由$x^2+y^2=1$，$z=0$， 和$z=1$所围成

解：



采用柱面坐标，则

$$
\begin{aligned}
I&=\iiint\limits_{V_1}\left|z-x^2-y^2\right|\mathrm{d}V+\iiint\limits_{V_2}\left|z-x^2-y^2\right|\mathrm{d}V\\
&=\iiint\limits_{V1}(z-x^2-y^2)\mathrm{d}V+\iiint\limits_{V_2}(x^2+y^2-z)\mathrm{d}V\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(z-r^2)r\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{r^2}(r^2-z)\mathrm{d}z\\
&=\frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

$z=x^2+y^2=r^2$　　$D:x^2+y^2\le 1$

4. 计算$I=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中$V:x^2+y^2+z^2\le a^2$

解：因为V关于平面$y=x$，平面$z=y$和平面$x=z$均对称，所以由轮换对称性

$$\iiint\limits_{V}x^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V}y^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V}z^2\mathrm{d}V$$

故　　$$I=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)\mathrm{d}V=\frac{2}{3}\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}\rho^4\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{8}{15}\pi a^5$$

$$\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}\rho^4\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{4}{5}\pi a^5,$$

$$V:x^2+y^2+z^2\le a^2$$

5. 计算三重积分$\iiint\limits_V(3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}V$，$V$：$0\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

解 设V_1：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，由$3x^2+5y^2+7z^2$为z的偶函数，则

$$\iiint\limits_V(3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V_1}(3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}V$$

由轮换对称性知: $\iiint\limits_{V_1}x^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{v_1}y^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{v_1}z^2\mathrm{d}V$,

故原式$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{v_1}(3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}V=\frac{15}{2}\iiint\limits_{V_1}x^2\mathrm{d}V$

$$=\frac{5}{2}\iiint\limits_{V_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^2\rho^2\mathrm{d}\rho=2\pi R^5$$