全微分的概念

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

回 顾:

一元函数的微分

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，给定自变量的增量 Δx，

若函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\,\Delta x+o(\Delta x)$，

（其中 A 与 Δx 无关），则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微，

$A\,\Delta x$ 称为 $y=f(x)$ 在 x_0 点处相应于增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，

即：$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\,\Delta x$

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导。（$A=f'(x_0)$）

偏增量与全增量:

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，给定自变量 x,y 在 (x_0,y_0) 处的增量 $\Delta x,\Delta y$，相应的函数值的增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta y)$$

分别称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 和对 y 的**偏增量**，

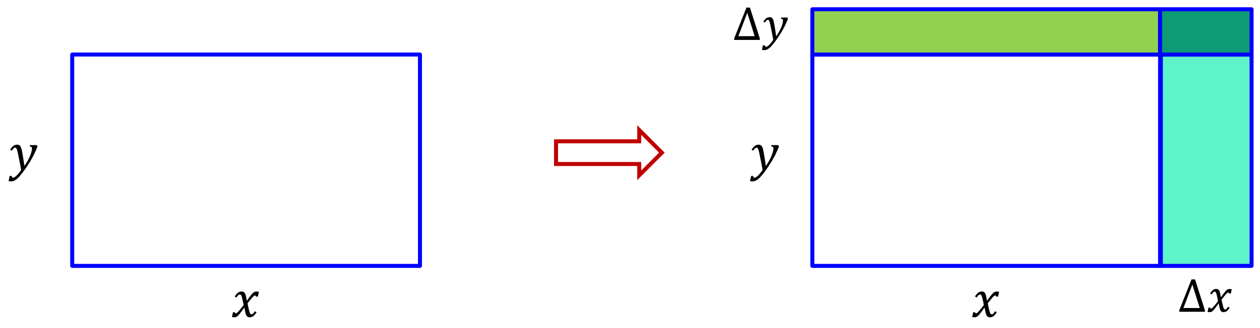
$f_x(x_0,y_0)\Delta x$ 和 $f_y(x_0,y_0)\Delta y$ 分别称为对 x 和对 y 的**偏微分**。

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**全增量**。

引 例：

一个长为 x，宽为 y 的长方形，当长增加 Δx，宽增加 Δy 时，考虑其面积的改变量。



解：面积的改变量 ΔS 为

$$\Delta S = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy$$
$$= y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x\Delta y$$

当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 很小时，有：$\Delta S \approx y\,\Delta x + x\,\Delta y$

由极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$$

令 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，即：$\Delta x\Delta y = o(\rho)$

故：$\Delta S = y\,\Delta x + x\,\Delta y + o(\rho)$

二元函数的全微分:

定义: 若函数 $z=f(x,y)$ 在定义域 D 的内点 (x,y) 处全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示成

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+o(\rho),\qquad \left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

（其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 仅与 x,y 有关），

则称 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，$A\,\Delta x+B\,\Delta y$ 称其在点 (x,y) 的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即： $\mathrm{d}z=A\,\Delta x+B\,\Delta y$

- 若函数在 D 内处处可微，则称此函数为 D 内的可微函数。

思 考:

一元函数的微分

一元函数 $y=f(x)$ 在 x 点可微，其微分定义为

$$\mathrm{d}y = A\,\Delta x,\ \text{则：}\ A = f'(x)$$

二元函数的全微分

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，其全微分定义为

$$\mathrm{d}z = A\,\Delta x + B\,\Delta y,\ \text{则：}\ A = ?\,,B = ?$$