幂级数的运算

主讲人：刘秀平 教授

幂级数的运算

对于这两个幂级数可以进行四则运算：

（1）加法运算

$$（a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)+$$

$$（b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)=$$

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots;$$

（2）减法运算：

$$（a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)-$$

$$（b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)=$$

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots;$$

(3) 乘法运算

$$（a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)*$$

$$（b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$$

$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k})x^n+\cdots.$$

(4)除法运算（假设$b_0\neq 0$）

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots}$$

$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

其中，c_0，c_1，$c_2,\cdots$，$c_n,\cdots$

可由如下递推运算获得：

$$a_0=b_0c_0,$$

$$a_1=c_0b_1+c_1b_0,$$

$$a_2=c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}c_kb_{n-k},$$

$$\cdots\cdots$$

幂级数的运算

幂级数的分析运算：连续，可积和可导。

关于幂级数的和函数具有如下性质：

性质1 幂级数的和函数s(x)在其收敛域I上是连续的。

性质2 幂级数的和函数s(x)在其收敛域I上是可积的，

并且有逐项积分公式：

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \quad x\in \mathrm{I}.$$

逐项积分后所得到的幂级数与原级数具有相同得收敛半径。

性质3 幂级数的和函数s(x)在其收敛区间上是可导的，

并且有逐项求导公式：

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x\in(-\mathrm{R},\mathrm{R}).$$

逐项求导后所得到的幂级数与原级数具有相同得收敛半径。

幂级数的运算

例题1 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$的和函数.

解：先求收敛域. 由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,

得收敛半径为R=1.

其次考虑端点收敛性.

在端点$x=-1$处，幂级数称为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$是发散的。

在端点$x=1$处，幂级数称为$\sum_{n=1}^{\infty} n$是发散的。

因此，收敛域为I=（−1, 1).

设和函数为$s(x)$,即

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\qquad x\in(-1,1).$$

逐项求积得

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

$$=\frac{x}{1-x},\qquad x\in(-1,1).$$

再求导得和函数

$$s(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1).$$

特别的，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=4.$$

幂级数的运算

例题2 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}$的和函数.

解：先求收敛域. 由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{1}{2}$,

得收敛半径为R=2.

其次考虑端点收敛性.

在端点$x=-2$处，幂级数称为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$是发散的。

在端点$x=2$处，幂级数称为$\sum_{n=1}^{\infty}n$是发散的。

因此，收敛域为I=（−2, 2）.

设和函数为$s(x)$,即

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{x}{2})^n,\qquad x\in(-2,2).$$

引入t=$\frac{x}{2}$,则$s(x)=u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$

$$\overset{\text{例1}}{=}t\frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\Rightarrow s(x)=\frac{2x}{(2-x)^2},x\in(-2,2).$$

幂级数的运算

例题3 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：先求收敛域. 由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1,$

得收敛半径为R=1.

其次考虑端点收敛性.

在端点$x=-1$处，幂级数称为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$是收敛的。

在端点$x=1$处，幂级数称为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$是发散的。

因此，收敛域为I=$[-1,1)$.

设和函数为$s(x)$,即

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},\qquad x\in[-1,1).$$

于是

$$xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

逐项求导得

$$(xs(x))'=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},(|x|<1).$$

积分得

$$xs(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x),x\in[-1,1).$$

于是，当$x\neq 0$时，有$s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$.

由和函数的连续性得

$$s(0)=\lim_{x\to 0}s(x)=\lim_{x\to 0}[-\frac{1}{x}\ln(1-x)]=1.$$

$$\text{所以}s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

幂级数的运算

例题4 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n$的和函数.

解：先求收敛域. 由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1$,

得收敛半径为R=1.

其次考虑端点收敛性.

在端点$x=-1$处，幂级数称为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n+1}$是发散的。

在端点$x=1$处，幂级数称为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}$也是发散的。

因此，收敛域为I=（$-1,1$）.

为了求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n$的和函数，现将其处理一下。

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1-1)^2}{n+1}x^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$$

设$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的和函数为$s_1(x)$,

则由$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$得

$$s_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\overset{m=n+1}{=}\sum_{m=1}^{\infty}mx^{m-1}=\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1).$$

再设$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$的和函数为$s_2(x)$,则有

$$s_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=s(x)$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n=s_1(x)-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n+s_2(x),$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{2}{1-x}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

幂级数的运算

例题5 设$a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$(n=2, 3,$\cdots$).

证明：当$|x|<\frac{1}{2}$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}$收敛，

并求其和函数.

证明：由$a_1=a_2=1$知，$a_{n+1}>a_n>0$(n=2, 3,$\cdots$).

当$|x|<\frac{1}{2}$时，由于

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\frac{a_{n+1}}{a_n}|x|=\frac{a_{n-1}+a_n}{a_n}|x|<2|x|<1$$

所以，由比值判别法知，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$收敛.

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_n x^{n-1}$

$$=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}(a_{n-2}+a_{n-1})x^{n-1}=$$

$$=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-1}+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}$$

$$=1+x+x^2\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-3}+x\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-2}$$

$$=1+x+x^2\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^{m-1}+x\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^{n-1}$$

$$=1+x+x\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^{n-1}+x^2\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^{m-1}$$

$$=1+x(1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^{n-1})+x^2\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^{m-1}$$

$$=1+xs(x)+x^2s(x)$$

所以$s(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$.

谢谢！