A 卷

一、1、B. 2、D. 3、A. 4、A. 5、A.
6、D. 7、B. 8、D. 9、D. 10、C.
11、B. 12、B. 13、C. 14、C. 15、A.

二、(15分)求解微分方程初值问题 $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{2x^2+y^2} \\ y(0)=1 \end{cases}$.

解 令 $u=\frac{y}{x}$,则 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\frac{2u}{2+u^2}$,即 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{-u^3}{2+u^2}$, (5分)

积分,$\int\frac{2+u^2}{u^3}\mathrm{d}u=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

解得 $-\frac{1}{u^2}+\ln|u|+\ln|x|=c_1$, $-\frac{x^2}{y^2}+\ln|y|=c_1$, (10分)

通解 $y=ce^{\frac{x^2}{y^2}}$. (13分)

由初值条件解得 $c=1$.

所以,所求特解 $y=e^{\frac{x^2}{y^2}}$. (15分)

三、(15分)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2x)}{(\mathrm{e}^x-1)\sin^3x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2-\sin^2x}{1+\sin^2x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4(1+\sin^2x)}$ (6分)

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (8分)

$=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cosx}{3x^2}$ (12分)

$=\frac{1}{3}$. (15分)

四、(15分)设函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续.

(1)证明:$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(2)当 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 时,利用(1)的结论求$f(x)$.

(1)证 令 $x=\pi-t$,则 (2分)

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^\pi f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^\pi tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x$$

所以，$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$ （8 分）

(2) 解 设 $A=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$, 则

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+A\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad \text{（10 分）}$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad \text{（12 分）}$$

$$=\pi\ \arctan(\cos x)\big|_{\pi}^{0}=\frac{\pi^2}{2}\ . \quad \text{（14 分）}$$

所以 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}$. （15 分）

五、（10 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$|f''(x)|\le 1$. 已知$f(x)$在$(0,1)$内取到最大值 $\frac{1}{4}$. 证明：$|f(0)|+|f(1)|\le 1$.

证 设最大值点为x_0 ，则 $f(x_0)=\frac{1}{4}$, $f'(x_0)=0$. 由泰勒公式， （2 分）

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(0-x_0)^2=\frac{1}{4}+\frac{f''(\xi)}{2!}x_0^2,$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2!}(1-x_0)^2=\frac{1}{4}+\frac{f''(\eta)}{2!}(1-x_0)^2, \quad \text{（6 分）}$$

所以，$|f(0)|+|f(1)|\le\frac{1}{2}+\left|\frac{f''(\xi)}{2!}\right|x_0^2+\left|\frac{f''(\eta)}{2!}\right|(1-x_0)^2$ （7 分）

$$\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x_0^2+(1-x_0)^2\right) \quad \text{（8 分）}$$

$$\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\le 1. \quad \text{（10 分）}$$

B 卷

一、1、A.	2、A.	3、D.	4、B.	5、A.
6、D.	7、D.	8、B.	9、A.	10、D.
11、B.	12、B.	13、C.	14、C.	15、C.

B 二 同 A 三.
B 三 同 A 四.
B 四 同 A 二.
B 五 同 A 五.