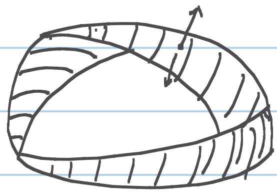
§8.3 第二型曲面积分的概念与计算

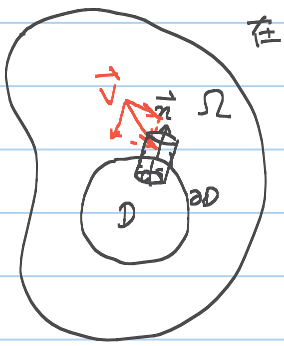
1. 可定向曲面.



莫比乌斯带（不可定向）.

2. 有向曲面：指定了正方向的可定向曲面称为有向曲面.

3. 引例：定常流. $\vec{V}(x,y,z)=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$.



在单位时间内穿过某个双侧曲面流体的体积.

$\vec{V}$ 在 $\vec{n}$ 投影为 $-\vec{V}\cdot\vec{n}$

经过 Δt 时间内从微元 dS 流入流体体积.

$$-\vec{V}\cdot\vec{n}\,\Delta t\,dS$$

Δt 时间内流入或流出整个曲面 S 的流体质量.

$$\iint_{\partial D} -\rho(x,y,z)\vec{V}\cdot\vec{n}\,\Delta t\,dS$$

单位时间内流入流出整个曲面的流体质量

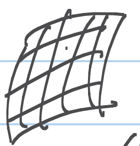
$$-\iint_{\partial D}\rho(x,y,z)\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS.$$

若 $\rho\equiv 1$. 则 $V=-\iint_{\partial D}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$.

定义：设 Σ 为一张可求面积的有向曲面. 正向单位法向量为 $\vec{n}(x,y,z)$.

$\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ 在 Σ 上有定义.

将 Σ 分成 $\{\Delta\Sigma_k\}_{k=1}^{n}$, $\Delta\Sigma_k$ 面积为 ΔS_k. $\forall(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\in\Delta\Sigma_k$.



若 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{F}(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\cdot\vec{n}(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\Delta S_k$ 存在. 且极限

值不依赖于划分选取. 也与点 (ξ_k,η_k,θ_k) 选取. 则称 $\vec{F}(x,y,z)$

在 Σ 上第二型曲面积分存在. 记作 $\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ 或 $\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{S}$

$d\vec{S}=\{dydz,\ dzdx,\ dxdy\}$

dS 在三个坐标面内有向投影面积.

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy.$$

4. 第二型曲面积分的计算. $\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ $\quad \vec{F}=\{P, Q, R\}$.

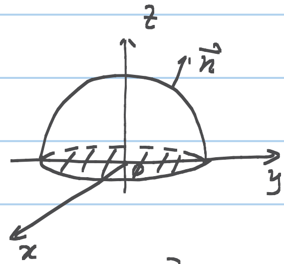
Σ: $z=f(x,y)$ f 可微.

$$\vec{n}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right\}. \qquad dS=\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}\, dxdy$$

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \pm\iint_D \left[P\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R(-1)\right] dxdy$$

例: 计算: $I=\iint_\Sigma xz\,dydz + 2zy\,dzdx + 3xy\,dxdy$

Σ: $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}$ $\quad 0\le z\le 1$ 取上侧为正.



$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x. \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{2}$$

$$I=\iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1}\left[x\cdot(1-x^2-\tfrac{y^2}{4})\cdot 2x + 2(1-x^2-\tfrac{y^2}{4})y\cdot\tfrac{y}{2} + 3xy\cdot 1\right] dxdy$$

$$=\iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1}\left[(2x^2+y^2)(1-\tfrac{y^2}{4}-x^2)+3xy\right] dxdy.$$

$$\underset{y=2r\sin\theta}{\overset{x=r\cos\theta}{=}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta)(1-r^2)\,2r\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)\,d\theta\int_0^1 2r^3(1-r^2)\,dr$$

$$=6\pi\times 2\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\pi.$$