目录

章壹

稳恒磁场

参考资料：《稳恒磁场部分补充习题》

考点1:安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i内}$$

填选题1、

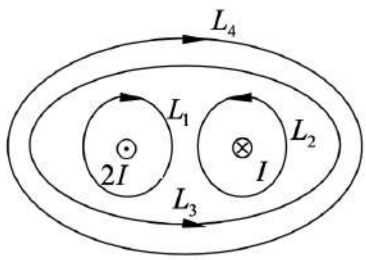
1. 如图所示，流出纸面的电流为 $2I$，流进纸面的电流为 I，求磁感应强度对各个回路的环流。

解：$\oint_{L_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = -2\mu_0 I$；

$\oint_{L_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$

$\oint_{L_3} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(2I - I) = \mu_0 I$

$\oint_{L_4} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(-2I + I) = -\mu_0 I$



1. 安培环路定理的功能

我们要求掌握的安培环路定理建立的是几何环路内的磁场线积分和该环路内包围的垂直于环路平面的电流之间的代数关系；

2. 磁场线积分的正负（即等式左边的正负）

只和几何环路的方向与载流直导线产生的环形磁场的方向是否一致有关；若一致则为正，不一致则为负；

3. 公式书写时注意磁场和环路都是向量；

填选题3、

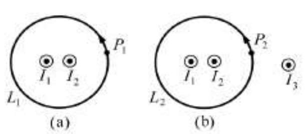
3. 在图（a）和（b）中各有一半径相同的圆形回路 L_1、L_2，圆周内有电流 I_1、I_2，其分布相同，且均在真空中，但在（b）图中 L_2 回路外有电流 I_3，P_1、P_2 为两圆形回路上的对应点，则[C]：（ ）

（A）$\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，$B_{P_1} = B_{P_2}$；

（B）$\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，$B_{P_1} = B_{P_2}$；

（C）$\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，$B_{P_1} \neq B_{P_2}$；

（D）$\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，$B_{P_1} \neq B_{P_2}$。



1. 安培环路定理中磁场

磁场的大小和方向由空间中的所有电流共同作用产生；

2. 安培环路定理揭示的磁场性质

有旋场；

考点 2:磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

填选题 2、

2. 磁场的高斯定理 $\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ 说明了下面的哪些叙述是正确的？[A]

(*a*) 穿入闭合曲面的磁感应线条数必然等于穿出的磁感应线条数；

(*b*) 穿入闭合曲面的磁感应线条数不等于穿出的磁感应线条数；

(*c*) 一根磁感应线可以终止在闭合曲面内；

(*d*) 一根磁感应线可以完全处于闭合曲面内。

（A）*ad*；（B）*ac*；（C）*cd*；（D）*ab*。

1. 高斯定理的功能

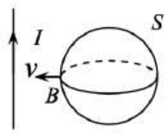
穿过任意闭合曲面的磁场的面积分始终为零即穿入几条磁感线，对称性的就会穿出几条磁感线；

2. 高斯定理揭示磁场具有的性质

无源场；所以题中说“一根感应线可以完全闭合在闭合曲面内”；

填选题 5、

5. 如图所示，在无限长载流直导线附近作一球形闭合曲面 *S*，当球面 *S* 向长直导线靠近时，穿过球面 *S* 的磁通量 Φ 和面上各点的磁感应强度 *B* 将如何变化？（ ）



（A）Φ 增大，*B* 也增大；（B）Φ 不变，*B* 也不变；

（C）Φ 增大，*B* 不变；（D）Φ 不变，*B* 增大。

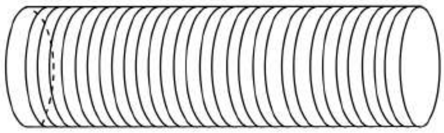
【利用磁场的高斯定理 $\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ 和长直载流直导线附近任一点的磁感应强度表达式 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$】

答案 D;

1. 高斯定理与磁通量的关系

高斯定理表明：任意闭合曲面的磁通量始终为零。

考点 3:均匀密绕螺线管的磁场



填选题 4、

4. 两根长度 L 相同的细导线分别密绕在半径为 R 和 r（$R=2r$）的两个长直圆筒上形成两个螺线管，两个螺线管长度 l 相同，通过的电流 I 相同，则在两个螺线管中心的磁感应强度的大小之比 $B_R:B_r$ 为： （ ）

（A）4; （B）2; （C）1; （D）$\frac{1}{2}$。

答案 D;

1. 均匀密绕螺线管的单位长度匝数公式

$n_R=\dfrac{L}{2\pi Rl}$，l 为螺线管长度，L 为缠绕导线长度；

这个公式可以这么理解：L 除以 2πR 求出在 l 长度上总共可以缠绕多少匝，再除以 l 求出在单位长度上的匝数；

2. 均匀密绕螺线管的中心磁场强度公式

$B=\mu_0 nI$，这里的 n 是单位长度匝数，i 是导线中通过的电流大小；

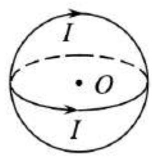
考点 4:几种形状的载流导线的磁场强度

载流直导线、长直载流直导线+载流圆线圈圆心处

填选题 6、

6. 两个载有相等电流 I 的半径为 R 的圆线圈一个处于水平位置，一个处于竖直位置，两个线圈的圆心重合，则在圆心 O 处的磁感应强度大小为多少？ [C]

（A）0;（B）$\mu_0 I/2R$;（C）$\sqrt{2}\mu_0 I/2R$;（D）$\mu_0 I/R$。



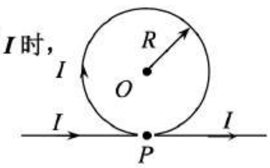
1. 载流圆线圈圆心处磁感应强度公式

$$B=\mu_0 I/2R$$

2. 磁场的叠加一定注意方向，竖直线圈方向向里，水平线圈方向向上，合磁场沿里上方向；

填选题 7、

7. 如图所示，无限长直导线在 P 处弯成半径为 R 的圆，当通以电流 I 时，则圆心 O 点处的磁感强度大小等于[C]



(A) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ ；(B) $\dfrac{\mu_0 I}{4R}$ ；(C) $\dfrac{\mu_0 I}{2R}(1-\dfrac{1}{\pi})$ ；(D) $\dfrac{\mu_0 I}{4R}(1+\dfrac{1}{\pi})$ 。

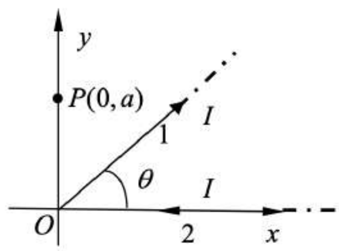
1. 无限长直导线磁场大小公式

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

大题 11、

11. 无限长直导线折成 V 形，顶角为θ，置于 xOy 平面内，且一个角边与 x 轴重合，如图所示。当导线中通有电流 I 时，试求 y 轴上一点 P（0，a）处的磁感应强度。

解：该无限长直导线可分为 1 和 2 两段，设其在场点 P 处产生的磁感应强度分别为 $\vec{B}_1$ 和 $\vec{B}_2$，则由磁场叠加原理可得



$$\vec{B}_P=\vec{B}_1+\vec{B}_2$$

第一段到 P 点的距离为 $a\cos\theta$，则

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi a\cos\theta}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a\cos\theta}\left[\cos(\pi/2-\theta)-\cos\pi\right]=\frac{\mu_0 I}{4\pi a\cos\theta}(1+\sin\theta)$$，方向 ⊙；

第二段在 P 点产生的磁感应强度大小为

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$，方向 ⊗；

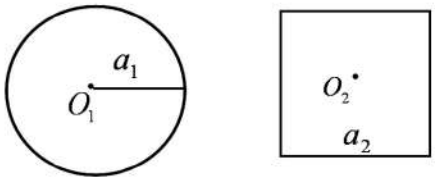
所以 $B=B_1-B_2=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a\cos\theta}(1+\sin\theta-\cos\theta)$，方向 ⊙.

1. 载流直导线磁感应强度公式

$B_1=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a\cos\theta}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$ ，将 $a\cos\theta$换为点到直导线距离 r 是一般情形；阿尔法 1 是点与直导线构成的最小锐角，阿尔法 2 是点与直导线构成的最大钝角；

填选题 12、

12. 如图所示，载流的圆形线圈（半径a_1）与正方形线圈（边长a_2）通有相同电流，若两个线圈中心O_1，O_2 处的磁感应强度大小相同，则半径a_1与边长a_2之比为[　　　]。



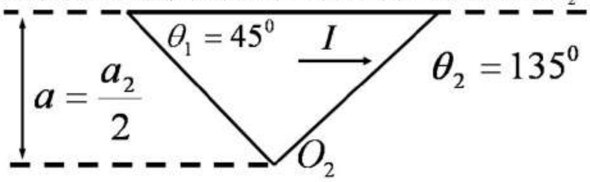
A. $\sqrt{2}\pi:4$　　B. $\sqrt{2}\pi:8$

C. $1:1$　　D. $\sqrt{2}\pi:1$

答案:【B】

解: 圆电流I 在圆心处（$x=0$），$B_1=\dfrac{\mu_0 I}{2a_1}$。

通电正方形线圈，可以看成 4 段载流直导线，由毕萨定律知道，每段载流直导线在正方形中心产生的磁场的磁感应强度大小相等，方向相同，由叠加原理$B_2=4B_2'$。



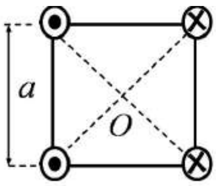
$$B_2'=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{a_2}{2}}(\cos 45^0-\cos 135^0)=\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a_2}$$

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2a_1}=B_2=4B_2'=4\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{8}{\sqrt{2}\pi}$$

填选题 13、

13. 如图所示，四条平行的无限长直导线，垂直通过边长为$a=20cm$正方形顶点，每条导线中的电流都是$I=20A$，这四条导线在正方形中心O点产生的磁感应强度为[　　　]。

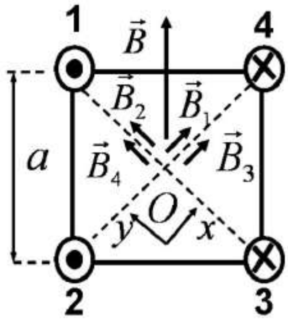


A. $B=0.8\times10^{-4}T$　　B. $B=1.6\times10^{-4}T$

C. $B=0$　　D. $B=0.4\times10^{-4}T$

答案:【A】

解: 建立直角坐标系，则 4 根无限长载流直导线在正方形中心产生的磁感应强度为



$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}\vec{i},\quad \vec{B}_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}\vec{j}$$

$$\vec{B}_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}\vec{i},\quad \vec{B}_4=\frac{\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}\vec{j}$$

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4=\frac{2\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}(\vec{i}+\vec{j})$$

$$B=8\times10^{-5}T$$

1. 载流直导线的磁感应强度一般公式:

$$B_2'=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

2. 经验性技巧：对于一个闭合对称线圈来说，如果通过线圈的电流是呈顺时针或者逆时针（而不是上面既有顺时针又有逆时针），那么其线圈中点上的磁场等于每一个对称部分产生的磁场的标量和；

考点 5:安培定律计算安培力

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

$$F = ILB\sin\theta$$

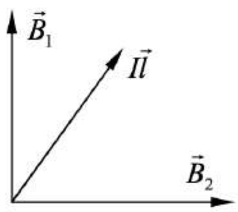
大题 8、

8．空间某处有互相垂直的两个水平磁场 $\vec{B}_1$ 和 $\vec{B}_2$，$\vec{B}_1$ 向北，$\vec{B}_2$ 向东。现在该处有一段载流直导线，则只有当这段直导线怎样放置时，才有可能使两磁场作用在它上面的合力为零？当这段导线与 $\vec{B}_2$ 的夹角为 60^0 时，欲使导线所受合力为零，则必须满足 B_1: B_2 的大小为多少？

解：如图，根据安培定律，利用右手螺旋法则可知，载流导线放置在东北方向时，才有可能使载流导线所受的合力为零。

当导线与 $\vec{B}_2$ 的夹角为 60^0 时，它与 $\vec{B}_1$ 的夹角为 30^0，则有

$$IlB_1 \sin 30^0 = IlB_2 \sin 60^0$$



1. B 与 I 夹角的确定

B 与 L 都是向量，在计算其夹角时要注意正负；以本题为例，若以 B2 与 L 的夹角为正（即 L 与 x 轴正方向夹角减去 B 与磁场正方向夹角），那么 B1 与 L 的夹角就为负；

考点 6:电子所受洛伦兹力

$$\vec{f}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

大题 9、

9. 磁场中某点处的磁感应强度为 $\vec{B} = 0.4\vec{i} - 0.2\vec{j}$ (T)，一电子以速度 $\vec{v} = 5\times10^5\vec{i} + 10\times10^5\vec{j}$ (m/s)通过该点，求作用于该电子的洛伦兹力 $\vec{f}_m$.

解：

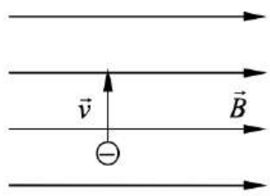
$$\begin{aligned}\vec{f}_m &= -e\vec{v} \times \vec{B} \\ &= -1.6\times10^{-19} \cdot (5\times10^5\vec{i} + 10\times10^5\vec{j}) \times \left(0.4\vec{i} - 0.2\vec{j}\right) \\ &= -1.6\times10^{-19} \cdot (-10^5\vec{k} - 4\times10^5\vec{k}) = 8\times10^{-14}\vec{k} \ \text{(N)}\end{aligned}$$

1. 坐标向量（i，j，k）计算技巧

- 自己成自己等于-1；
- 按照 i，j，k，i 的顺序相邻的两个向量（<i,j>，<j,k>,<k,i>）叉乘结果为第三个向量；
- 其余情况下，得到第三个向量的反方向（加负号）；

大题 16、

16. 如图所示，一电子以速度 $\vec{v}$ 垂直地进入磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，求此电子在磁场中运动轨道所围的面积内的磁通量。



解：电子在该磁场中所受洛伦兹力大小为 $f_m = evB$

所以可得其运动轨道半径为 $f_m = evB = m\dfrac{v^2}{R} \Rightarrow R = \dfrac{mv}{eB}$

所以轨道面积内的磁通量为 $\Phi_m = \pi R^2 B = \dfrac{\pi m^2 v^2}{e^2 B}$

此题目还可进一步计算电子运动的等效电流所对应的磁矩。

$$T = \frac{2\pi m}{eB} \Rightarrow I = \frac{e}{T} = \frac{e^2 B}{2\pi m}$$

轨道磁矩大小为 $m = I\pi R^2 = \dfrac{e^2 B}{2\pi m}\cdot\pi\left(\dfrac{mv}{eB}\right)^2 = \dfrac{mv^2}{2B}$

1. 电子在磁场中做匀速圆周运动半径公式：

$$R = \frac{mv}{eB}$$

2. 电子在磁场中做匀速圆周运动周期公式：

$$T = \frac{2\pi m}{eB}$$

3. 电子在磁场中做匀速圆周运动等效电流公式：

$$I = \frac{e}{T}$$

考点 7:磁力矩和磁矩

$$\vec{m} = NIS\vec{n}$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

大题 10、

10. 一个面积为 S，载有电流 I，且由 N 匝组成的平面闭合线圈置于磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，在什么情况下它受到的磁力矩最小？什么情况下它受到的磁力矩最大？

解：线圈的磁矩为 $\vec{m} = NIS\vec{n}$

根据磁力矩公式 $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ 可知

当 $\vec{m} // \vec{B}$ 时，所受磁力矩最小，$M=0$，此时通过线圈的全磁通最大，$\Psi = NBS$；

当 $\vec{m} \perp \vec{B}$ 时，所受磁力矩最大，$M=NISB$，此时通过线圈的全磁通最小，$\Psi = 0$.

填选题 17、

17. 通有电流 I，磁矩为 $\vec{m}$ 的线圈，置于磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中。若 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}$ 方向相同，则通过线圈的磁通量 Φ_m 与线圈所受的磁力矩 $\vec{M}$ 的大小分别为[B]

A $\Phi_m=IBm$，$M=0$；　　B $\Phi_m=\dfrac{Bm}{I}$，$M=0$；

C $\Phi_m=IBm$，$M=Bm$；　　D $\Phi_m=\dfrac{Bm}{I}$，$M=Bm$.

1. 磁矩公式中的 N 表示线圈的匝数，方向向量 n 为与电流方向成右手螺旋关系的单位矢量；
2. 记住结论：当线圈和磁场构成右手螺旋关系时，即 m//B 时，磁力矩最小，全磁通最大；当线圈和磁场平行时，即 m 垂直于 B，磁力矩最大，全磁通最小；
3. 最大磁通量和磁矩关系：

$$\Phi_m=\frac{Bm}{I}$$

填选题 18、

18. 有一磁矩为 $\vec{m}$ 的载流线圈，置于磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，设 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角为 φ，则（1）当 φ=______时，线圈处于稳定平衡状态；(2) 当 φ=______时，线圈所受磁力矩最大；（3）当线圈由 $\varphi=0°$ 转到 $\varphi=180°$ 时，外力矩必须做功 W=______。

【答：0°，90°，$2mB$】

1. 当磁力矩为 0 时，线圈稳定；
2. 外力矩做功公式：

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

考点 8:磁介质中的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_L I_0$$

$$\mu_0 \mu_r = \mu$$

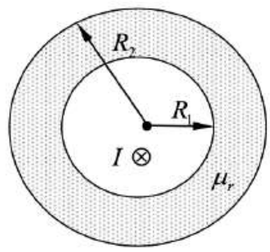
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

大题 14、

14. 一无限长圆柱形直导线，外包一层相对磁导率为 μ_r 的圆筒形磁介质，导线半径为 R_1，磁介质外半径为 R_2，如图所示，导线内有电流 I 向纸面内流入。求：介质内、外的磁感应强度的分布。

解：经分析，可知磁场的分布呈轴对称，所以选轴线上的点为圆心，任意长度为半径 r 的圆周作为积分路径，绕行方向与电流成右手螺旋关系，则根据安培环路定律 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$ 有

$$H \cdot 2\pi r = \sum I_i$$



(1) 当 $r < R_1$ 时

$$\sum I_i = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2 = \frac{r^2}{R_1^2} I$$

所以 $$H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$$

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2} \qquad (r < R_1)$$

(2) 当 $R_1 < r < R_2$ 时

$$\sum I_i = I$$

所以 $$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B_2 = \mu_0 \mu_r H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

(3) 当 $r > R_2$ 时

$$\sum I_i = I$$

所以 $$H_3 = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B_3 = \mu_0 H_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (r > R_2)$$

1. 首先判断这是一个怎样的物理模型，中间的白色圆代表一个实心的导线，外面的灰色圆环代表包裹在导线外围的圆筒形磁介质；
2. 计算导线内部某一圆形截面的电流公式：

$$\sum I_i = \frac{I}{\pi R_1^{\ 2}} \pi r^2 ;$$

章贰

电磁感应

考点 1:感应电流和感应电动势

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

填选题 1、

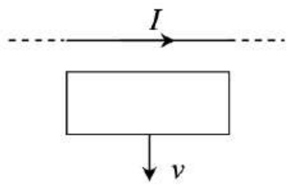
1. 如图所示，一根无限长直导线载有电流 I，一个矩形线圈位于导体平面沿垂直于载流导线方向以恒定速率运动，则[B]

（A）线圈中无感应电流；

（B）线圈中感应电流为顺时针方向；

（C）线圈中感应电流为逆时针方向；

（D）线圈中感应电流方向无法确定。



1. 感应电流的方向使用楞次定律判断，其本质满足法拉第电磁感应定律，即通过磁通量的变化情况判断感应电动势方向，进而确定感应电流方向。但是楞次定律对于判断感应电流方向而言，更加简便。本题线框内磁感应强度垂直纸面向里，根据载流直导线磁感应强度公式，线圈内磁感应强度减弱，所以产生顺时针感应电流以补强；
2. 可以记住感应电流方向与感生磁场方向关系口诀：顺内逆外；

考点 2:自感和互感

$$E_{自} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$\frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{l}$$

直螺线管自感系数公式，N 表示匝数

$$\varepsilon_i = -M\frac{dI}{dt}:$$

填选题 3、

3. 有两个线圈，线圈 1 对线圈 2 的互感系数为 M_{21}，而线圈 2 对线圈 1 的互感系数为 M_{12}。若它们分别流过随时间变化的电流 i_1 和 i_2，且 $|\frac{di_1}{dt}|<|\frac{di_2}{dt}|$，并设由 i_2 变化在线圈 1 中产生的互感电动势大小为 ε_{12}，由 i_1 变化在线圈 2 中产生的互感电动势为 ε_{21}，则论断正确的是：[D]

A $M_{21}=M_{12}$，$\varepsilon_{21}=\varepsilon_{12}$； B $M_{21}\neq M_{12}$，$\varepsilon_{21}\neq\varepsilon_{12}$；

C $M_{21}=M_{12}$，$\varepsilon_{21}>\varepsilon_{12}$； D $M_{21}=M_{12}$，$\varepsilon_{21}<\varepsilon_{12}$。

1. 互感系数相等；
2. 注意感生电动势的脚标中的两个数字，后一个数字表示该数字的线圈提供电流变化率；

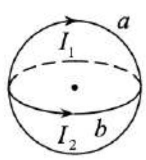
填选题 11、

11. 自感为 0.25H 的线圈中，当电流在(1/16)s 内由 2A 均匀减为零时，线圈中的自感电动势的大小为多少？

$$\varepsilon_L = \left|-L\frac{dI}{dt}\right| = 0.25\times\frac{2}{1/16} = 8 \ \text{(A)}$$

填选题 4、

4. 如图所示两个环形线圈 a、b 互相垂直放置，当它们的电流 I_1、I_2 同时发生变化时，必有下列情况发生：[D]



（A）a 中产生自感电流，b 中产生互感电流；

（B）b 中产生自感电流， a 中产生互感电流；

（C）a、b 同时产生自感电流和互感电流；

（D）a、b 中只产生自感电流，不产生互感电流。【提示：由于环形线圈 a、b 互相垂直放置，a 线圈的磁通量变化不会影响 b 线圈，反之亦然。无互感】

1. 产生互感电动势的前提是一个线圈产生的磁场会穿过另一个线圈，本题两线圈垂直放置，所以并不存在互感；
2. 当导体中的电流发生变化时，它周围的磁场就随着变化，并由此产生磁通量的变化，因而在导体中就产生感应电动势，这个电动势总是阻碍导体中原来电流的变化，此电动势即自感电动势。这种现象就叫做自感现象。

考点 3：感生电动势

填选题 5、

5. 一自感系数为 0.25H 的线圈，当线圈中的电流在 0.01s 内由 2A 均匀地减小到零。线圈中的自感电动势的大小为__________。(50 V)

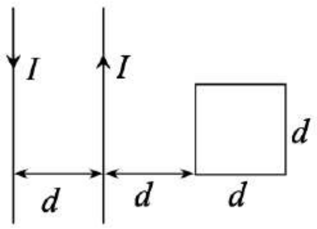
半径为 a 的无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为 n，螺线管导线中通过交变电流 $i = I_0 \sin\omega t$，则围在管外的同轴圆形回路（半径为 r）上的感生电动势为____________。

1. 无限长密绕螺线管磁感应强度公式：$B = \mu_0 ni$
2. 基于法拉第电磁感应公式计算感生电动势：

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi a^2 = -\pi a^2 \mu_0 n\omega I_0 \cos\omega t$$

大题 6、安培环路定理+法拉第电磁感应定律求感生电动势

6. 两相互平行相距为 d 的无限长的直导线载有大小相等方向相反的电流，且电流均以 $\frac{dI}{dt}$ 的变化率增长，若有边长为 d 的矩形线框与两导线共面，如图所示，求线框内的感应电动势。



解：以最左边的直导线位置为坐标原点建立水平坐标，

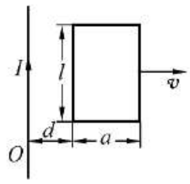
由安培环路定律 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$ 知两直导线电流在线框区域内任一位置 r 处产生的磁感应强度为：$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r-d)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$，方向⊗；

利用 $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 有：

$$\varepsilon = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\int_{2d}^{3d} d\left(\frac{1}{r-d} - \frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 d}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\left(\ln 2 - \ln\frac{3}{2}\right) = \frac{\mu_0 d}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\ln\frac{4}{3}$$，电动势方向为逆时针方向。

大题 8、

8. 如图所示，通有电流 I 的长直导线附近放有一矩形导体线框，该线框以速度 v 沿垂直于长导线的方向向右运动，设线圈长 l，宽 a，求在与长直导线相距 d 处线框中的感生电动势。



解：利用安培环路定律 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$，有：$2\pi x \cdot B = \mu_0 I$，

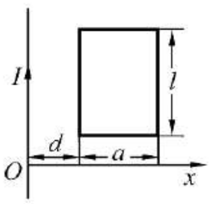
即：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$，则通量为：$\Phi_m = \int_x^{x+a} \dfrac{\mu_0 I l}{2\pi x} dx = \dfrac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \dfrac{x+a}{x}$，

$\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{\mu_0 I l}{2\pi}\left(\dfrac{1}{x+a} - \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{dx}{dt}$，而 $\dfrac{dx}{dt} = v$，

当 $x=d$ 时，此时的的感应电动势：$\varepsilon = \dfrac{\mu_0 I l}{2\pi}\left(\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{d+a}\right)v$

大题 9、

9. 直导线中通以交流电，如图所示， 置于磁导率为 μ 的介质中，已知：$I = I_0 \sin\omega t$，其中 I_0，ω 是大于零的常量.求：与其共面的 N 匝矩形回路中的感应电动势。



解：首先利用安培环路定律，求出磁场强度分布。

则利用利用安培环路定律 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$，有：$2\pi x \cdot B = \mu_0 I$，

即：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x} = \dfrac{\mu_0 I_0 \sin\omega t}{2\pi x}$；

其次，求出矩形回路的磁通量：$\Phi_m = \int_d^{d+a} \dfrac{\mu_0 I_0 \sin\omega t}{2\pi x} l dx = \dfrac{\mu_0 I_0 l \sin\omega t}{2\pi} \ln \dfrac{d+a}{d}$，

则：$\varepsilon = -N\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{N\mu_0 I_0 l \omega}{2\pi} \ln \dfrac{d+a}{d} \cos\omega t$。

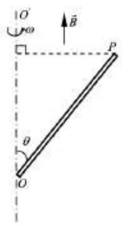
解题思路：

1. 利用安培环路定理求解出磁感应强度关于距离的函数关系；
2. 利用积分计算磁通量关于距离的函数关系
3. 利用法拉第感生电动势公式求出感生电动势关于距离的函数关系；
4. 根据题中线圈位置代入具体距离求出感生电动势；

大题 10、

10. 如图所示，长度为 L 的导体棒 OP，处于均匀磁场 $\vec{B}$ 中，并绕 OO' 轴以角速度 ω 旋转，棒与转轴间夹角恒为 θ，磁感应强度 $\vec{B}$ 与转轴平行。

求：OP 棒在图示位置处的电动势。



解法二：设想导体 OP 是三角形闭合回路 OPQO 中的一部分，则转动过程中通过闭合回路的磁通量始终为零，没有变化，所以由法拉第电磁感应定律可知回路的总电动势为

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_m}{dt}=0=\varepsilon_{OP}+\varepsilon_{PQ}+\varepsilon_{QO}$$

由题意可知 $\varepsilon_{QO}=0$，所以

$$\varepsilon_{OP}=-\varepsilon_{PQ}=\varepsilon_{QP}=\frac{1}{2}B\omega(QP)^2=\frac{1}{2}B\omega(L\sin\theta)^2$$

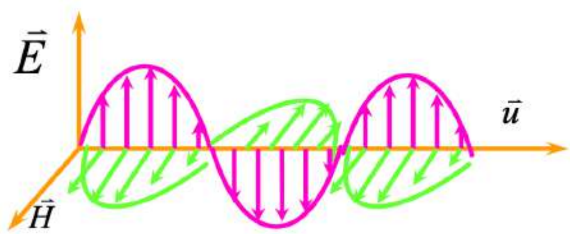
方向由 O 指向 P，P 端电势高。

1. 本题解法采用“补全法”。即，将孤立导体补全为回路。利用回路的磁通量根据法拉第电磁感应定律计算回路上产生的电动势（注意产生电动势的边可能不止一条）。
2. 单边旋转导体切割磁感线产生电动势公式：

$$\frac{1}{2}B\omega(L\sin\theta)^2$$

   其实就是将该单边旋转体在磁感线垂面上的投影长度在切割磁感线。

考点 4：电磁波



大题 15、

15. 真空中，一平面电磁波的电场由下式给出：

$E_x = 0$，$E_y = 60\times10^{-2}\cos[2\pi\times10^8(t-\frac{x}{c})]$ V/m，$E_z = 0$，求：该波的（1）波长和频率；(2) 传播方向；（3）磁场的大小和方向。

解：（1）由题意可知该波的电场方向沿 y 轴正向，将其与波动方程标准式 $E = E_0\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})] = E_0\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})]$对比，可知该波的频率为$\nu = 10^8$ Hz，波长为λ=3m；（2）该波沿 x 轴正向传播；（3）由于$\vec{E},\vec{H},\vec{u}$三者构成正交右手螺旋关系，且

$\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$，由此可确定：$H_x = 0$，$H_y = 0$，$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_y$ ，所以

$$B_z = \mu_0 H_z = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_y = \frac{E_y}{c} = 2\times10^{-9}\cos[2\pi\times10^8(t-\frac{x}{c})] \text{ (T)}$$

1. 问法 1——方向问题：看

$$E = E_0\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})] = E_0\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})]$$

- 公式里“（ ）”中的变量即为波的传播方向
- 公式里 E 的脚标即为波的电场方向

2. 问法 2——波长频率问题：看

$$E = E_0\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})] = E_0\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})]$$

- 公式里变量的分母如果是光速 u 的话，那么“（ ）”外面的值除以 2π 即为频率；
- 如果公式里“（ ）”外面只有 2π，那么变量下面的分母即是波长；

3. 问法 3——E 与 H 问题：看

$$\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E\text{，}$$

题中会给出波的电场表达式 E，那么 H 就是 $H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_y$；进而 B 就是

$$B_z = \mu_0 H_z = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_y = \frac{E_y}{c}$$

此时不要忘记 B、H、u 三个向量呈右手螺旋关系，即 x，y，z，x 关系（这个关系的详细解释在“大题 9”里）；

磁场综合型大题：

大题 12、

12. 如图所示，一矩形截面的螺绕环，$\mu_r=1$，内、外半径分别为 R_1 和 R_2，高为 b，共 N 匝。在环的轴线上，另有一长直导线 OO'。在螺绕环内通有电流 $I=I_0\cos\omega t$。试求：在 $\omega t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，无限长直导线中的互感电动势。已知 $R_1=8.0\times10^{-2}$ m，$R_2=2.4\times10^{-1}$ m，$b=6.0\times10^{-2}$ m，N=1000 匝，I_0=5A，$\omega=100\pi$ rad.s^{-1}，ln3=1.0986.

解：利用互感电动势公式计算，首先计算互感系数，然后求解即可。

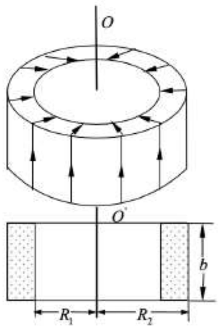
设长直导线通有电流 I'，在螺绕环截面上距中心轴线为 r 处选一宽为 dr 的矩形面元，则有

$$d\Phi=\frac{\mu_0 I'}{2\pi r}\cdot b dr \quad (\because \mu_r=1)$$

所以 $$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}d\Phi=\frac{\mu_0 I' b}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\Psi=N\Phi=\frac{\mu_0 NI'b}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

所以 $$M=\frac{\Psi}{I'}=\frac{\mu_0 Nb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



因此，$\omega t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，无限长直导线中的互感电动势

$$\varepsilon_i=-M\frac{dI}{dt}=\frac{\mu_0 Nb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\omega I_0\sin\omega t$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}\times10^{3}\times6\times10^{-2}}{2\pi}\ln\frac{2.4\times10^{-1}}{8.0\times10^{-2}}\times100\pi\times5\times\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=1.46\times10^{-2}\ \text{(V)}$$

1. 注意，在计算螺绕环的竖截面磁通量时，只计算左半边或者右半边即可。

本题的解题思路如下：

1. 选取磁通量微元；
2. 根据磁通量微元求出整个截面磁通量
3. 利用磁通量计算互感系数
4. 利用互感电动势公式求出互感电动势

大题 13、

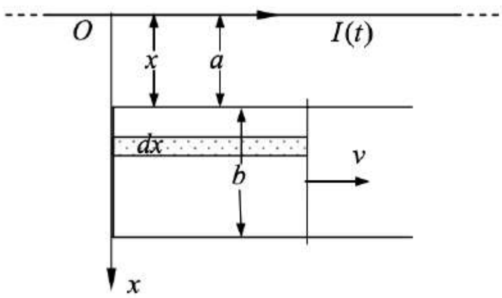
13. 如图所示，真空中一长直导线，通有电流 $I = I_0 e^{-\lambda t}$，与其平行共面有一个带滑动边的矩形导线框，滑动边的长度为 b，以匀速 v 滑动。线框与导线相距为 a. 忽略自感，设 $t=0$ 时，滑动边与对边重合。求线框内的感应电动势 $\varepsilon_i(t)$.

解：建立如图所示坐标系，距直导线为 x 处选一宽为 dx 的面元，有

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} vtdx$$

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} vt \int_a^{a+b} \frac{dx}{x}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} vt \ln\frac{a+b}{a} = \frac{\mu_0 vtI_0 e^{-\lambda t}}{2\pi} \ln\frac{a+b}{a}$$



$$\varepsilon_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 vI_0}{2\pi} \ln\frac{a+b}{a} \frac{d}{dt}(te^{-\lambda t})$$

$$= -\frac{\mu_0 vI_0}{2\pi} \ln\frac{a+b}{a} (e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t})$$

$$= \frac{\mu_0 vI_0}{2\pi} \ln\frac{a+b}{a} e^{-\lambda t}(\lambda t - 1)$$

1. 这道题有特色的地方在于电流是指数形式而且闭合回路的面积是随时间变化的；
2. 老规律先选取磁通量微元，只不过这个微元和“大题 12”相比变成了时间的函数；
3. 根据磁通量微元求出整个闭合回路的磁通量（仍然是一个时间的函数）；
4. 直接求感应电动势利用法拉第电磁感应定律，求出来的仍然是一个时间的函数；
5. 这道题根本不用费劲去考虑时间能不能利用速度消掉；

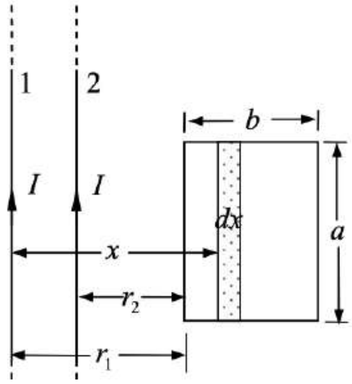
大题 14

14. 如图所示，两条平行的长直载流导线和一个矩形的导线框共面。已知两导线中电流同为 $I = I_0 \sin\omega t$，导线框的长为 a，宽为 b，试求导线框的感应电动势。

解：两同向载流长直导线在空间任一点 x 处所产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(x - r_1 + r_2)}$$

在距 1 导线为 x 处选一宽为 dx 的矩形面元，则



$$\Phi = \int BdS = \int Badx = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left[\int_{r_1}^{r_1+b}\frac{dx}{x} + \int_{r_1}^{r_1+b}\frac{dx}{x - r_1 + r_2}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{r_1+b}{r_1}\cdot\frac{r_2+b}{r_2}\right)$$

所以 $$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1 r_2}\right)\frac{dI}{dt}$$

$$= \frac{\mu_0 a\omega I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1 r_2}\right)\cos\omega t$$

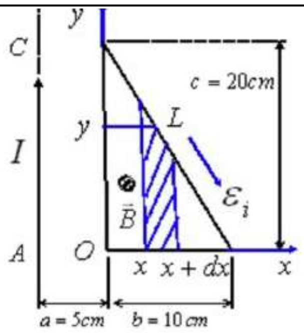
1. 本题和“大题 6”十分类似；
2. 两根导线在某一点的磁感应强度就等于连根导线分别作用于该点的磁感应强度之和（一般考试就是代数和而已）：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(x - r_1 + r_2)}$$

3. 根据磁感应强度和面积微元求出磁通量微元进而得到磁通量；
4. 利用法拉第电磁感应定律求出磁感应强度；
5. 题做多了就发现其实方法都是几乎一模一样的；

大题 17、

17. 如图所示，长直导线 AC 中的电流 I 沿导线向上，并以 $\frac{dI}{dt}=2A/s$ 的速度均匀增长，在导线附近放一个与之同面的直角三角形线圈，其一边与导线平行。求线圈中的感应电动势的大小和方向。



解：电流 I（变化：增加），在直角三角形回路处产生磁场，方向垂直纸面向里。由于电流 I 变化，磁场变化，穿过回路的磁通量变化，所以在直角三角形回路处产生感应电动势。

规定：L 和 ε_i 的正方向如图所示，则由于 L 的法线方向与 $\vec{B}$ 相同，故 $\Phi>0$。

建立如图所示的直角坐标系，则在 x 处的磁场

$$B(t)=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I(t)}{x+a}$$

在 x 处取 dx 宽的长条，穿过长条的磁通量为

$$d\Phi(t)=B(t)\,y\,dx=\frac{\mu_0 I(t)}{\pi}\frac{-\frac{c}{b}x+c}{x+a}dx$$

穿过直角三角形回路的磁通量为

$$\Phi(t)=\int d\Phi(t)=\frac{\mu_0 I(t)}{\pi}\int_0^b\frac{-\frac{c}{b}x+c}{x+a}dx=2.59\times10^{-8}I(t)$$

回路中的感应电动势

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi(t)}{dt}=-2.59\times10^{-8}\frac{dI(t)}{dt}=-5.18\times10^{-8}(V)<0$$

由于 $\varepsilon_i<0$，所以感应电动势的实际方向与规定的正方向（顺时针）相反，即感应电动势的实际方向为逆时针，大小为 $\varepsilon_i=5.18\times10^{-8}V$。

1. 本题的唯一特点在于闭合回路是三角形回路，面积微元更加复杂；
2. 面积微元：

$$\frac{-\frac{c}{b}x+c}{x+a}dx$$

用到的是基本的根据相似三角形求变长的知识求出 y，用 ydx 矩形面积代替梯形面积（反正微分到极致时，梯形和矩形的面积相差无几）；

3. 利用面积微元和磁感应强度求出磁通量微元
4. 求出磁通量再求出感应电动势：注意感应电动势的方向，由于电动势小于零，所以方向应该和规定的方向相反（我们可以规定感生电动势产生感生磁场的方向和导线产生磁场的方向一致即感应电动势是顺时针方向）；

章叁

真空中的静电场

考点 1：静电场中的高斯定理

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

填选题 1、

1．下列说法正确的是：

A　闭合曲面上各点电场强度都为零时，曲面内一定没有电荷；

B　闭合曲面上各点电场强度都为零时，曲面内电荷的代数和必定为零；

C　闭合曲面的电通量为零时，曲面上各点的电场强度必定为零；

D　闭合曲面的电通量不为零时，曲面上任意一点的电场强度都不可能为零。

答：　B

1. 对高斯定理必要的理解 1：高斯定理描述的是闭合曲面的曲面积分（闭合曲面的电场强度通量）和曲面内包围电荷代数和的代数关系；

填选题 2、

2. 关于高斯定理的理解有下面几种说法，其中正确的是[　　　]

A　如果高斯面上 $\vec{E}$ 处处为零，则该高斯面内必无电荷；

B　如果穿过高斯面上电通量为零，则该高斯面上的电场强度一定处处为零；

C　如果高斯面内有净电荷，则通过该高斯面的电通量必不为零；

D　高斯面上各点的电场强度仅由高斯面内的电荷提供。

答：C

1. 对高斯定理必要的理解 2:高斯定理中电场强度 E 由空间中每个电荷的电场决定；

填选题 4、

4. 如图所示，把点电荷+q 从高斯面 S 外由 P 处移到 R 处（$OP=OR$），O 为 S 上一点，则

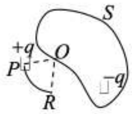
[　　]

A 穿过高斯面 S 的电通量 Φ_e 发生改变，O 处场强变化；

B 穿过高斯面 S 的电通量 Φ_e 发生改变，O 处场强不变；

C 穿过高斯面 S 的电通量 Φ_e 不变，O 处场强变化；

D 穿过高斯面 S 的电通量 Φ_e 不变，O 处场强不变。

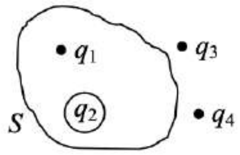


答：C

1. 只要整个空间中任何一个点荷移动，整个空间内任意一点的电场强度就很有可能发生改变，所以 0 点处点电场强度会变；从本质上讲和 0 点是否在高斯面上无关；

填选题 5、

5. 电荷 q_1、q_2、q_3 和 q_4 在真空中的分布如图所示，其中 q_2 是半径为 R 的均匀带电球体，S 为闭合曲面。则曲面 S 上任一点的电场强度 $\vec{E}$ 是由________产生的，通过闭合曲面S 的电通量 $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=$__________。

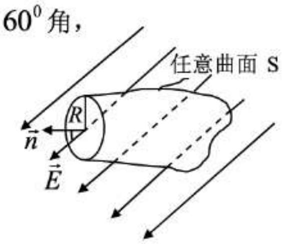


1. 本题是对“理解 1”的外延，被高斯面包围的电荷代数和不仅仅可能是点电荷还有可能是带电导体；

填选题 20、

20. 在匀强电场 $\vec{E}$ 中，取一半径为 R 的圆，圆面的法线 $\vec{n}$ 与 $\vec{E}$ 成 60^0 角，如图所示，则通过以该圆周为边线的如图所示的任意曲面S 的电通量 $\Phi_e=\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=$__________。

答：$-\frac{1}{2}E\pi R^2$



1. 在处理不规则曲面的电通量时应该很自然的想到构造一个闭合高斯面，且构造需要填补的那个面是一个对称，规则（电通量易求）的规则平面。
2. 通过高斯定理求出闭合曲面的电通量再减去补充平面的电通量即是不规则曲面的电通量。

填选题 22、

22. 把一个均匀带有电荷 $+Q$ 的球形肥皂泡由半径 r_1 吹胀到 r_2，则半径为 R（$r_1<R<r_2$）的高斯球面上任一点的场强大小 E 是否变化：__________。　答：变化

1. 根据高斯定理，将肥皂泡的半径变大，高斯面包围的电荷大小不变，所以高斯面的电场强度通量不变，而球面面积变大且对于规则球面法向量和电场强度处处垂直，所以场强一定变化；

填选题26、

26. 内、外半径分别为 R_1、R_2 的均匀带电厚球壳，电荷体密度为 ρ。则，在 $r<R_1$ 的区域内场强大小为________，在 $R_1<r<R_2$ 的区域内场强大小为________，在 $r>R_2$ 的区域内场强大小为________。

1. 本题是22题的变形，现在电荷不再是在高斯面中心的点电荷了而是分布在了某一球面的表面上，这就使得在小于球面内部场强处处为零，在球面外场强与新取高斯面的半径成反比。

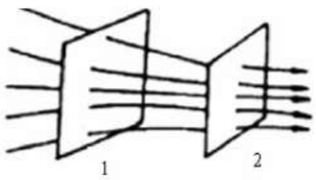
填选题30、

30. 把一个均匀带电量 $+Q$ 的球形肥皂泡由半径 r_1 吹胀到 r_2，则半径为 R（$r_1<R<r_2$）的高斯球面上任一点的场强大小 E 由 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ 变为________。

1. 本题继续变形，球面现在也像肥皂泡一样可以变大变小，而且电荷就分布在球面上。现在不变的是高斯面的大小，一开始高斯面在球面外部，电通量不为零。肥皂泡变大后，高斯面到了肥皂泡内部，包围的电荷为零，电场强度一定是零。

填选题29、

29. 同一束电场线穿过大小不等的两个平面1和2，如图所示。则两个平面的 E 通量和场强关系是：



A. $\Phi_1>\Phi_2$　$E_1=E_2$；　B. $\Phi_1<\Phi_2$　$E_1=E_2$；

C. $\Phi_1=\Phi_2$　$E_1>E_2$；　D. $\Phi_1=\Phi_2$　$E_1<E_2$。

答：D

1. 本题考查对于电场强度通量的理解。我们知道通量的一般定义是通过某一面积的某一物理量的多少。那么电场强度就是通过某一面积的电场强度的多少。而电场强度可以用电场线根数直接定量表示。

考点2：电势

公式 1 电势是场强的线积分

$$U_a=\frac{W_a}{q_0}=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

公式 2 场强是电势的梯度

$$\vec{E}=-gradU=-\nabla U$$

公式 3 电势的定量计算

$$U=\begin{cases}\sum U_i=\sum \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}\\[2ex] \int dU=\int \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}\end{cases}$$

填选题 6、

6. 判断下列说法正确与否

A. 电场强度为零的点，电势也一定为零；

B. 电场强度不为零的点，电势也一定不为零；

C. 电势为零的点，电场强度也一定为零；

D. 电势在某一区域为常量，则电场强度在该区域内必定为零；

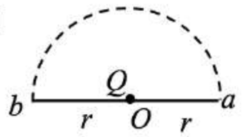
E. 电场强度相等的区域内，电势必定处处相等。

答： D

1. 通俗地讲，电场强度和电势在是否为零的问法下是毫无关系的：
   如果在某一个空间范围内电场强度为零，那么说明电势梯度为零，说明电势在该空间范围内是一个常量；最常见的例子就是电场中处于静电平衡的导体；
   如果电势在一个空间范围内为零，只能说明在空间范围内所有场强的线积分之和为零，这说明不了场强的任何特征；

填选题 7、

7. 真空中有一点电荷 Q，在与它相距为 r 的 a 点处有一试验电荷 q。现使试验电荷 q 从 a 点沿半圆弧轨道运动到 b 点，如图所示。则电场力对 q 作功为[ ]



A $\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\dfrac{\pi r^2}{2}$； B $\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}2r$； C $\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\pi r$； D 0。

答：D 利用电场力做功特点—与路径无关，只与始末位置有关或点电荷等势面的是同心球面，在等势面上移动电荷，电场力不做功，均可直接得到答案。

1. 电场力做功和电势的关系是：
   电场力做功只与首末位置的电势有关；

填选题 8、

8. 将 q=1.7×10^{-8} C 的点电荷从电场中的 A 点移到 B 点，外力需做功 5.0×10^{-6}J，则[ ]

A V_B-V_A=-2.94×10^2 V，B 点电势低；

B V_B-V_A=-2.94×10^2 V，B 点电势高；

C V_B-V_A=2.94×10^2 V，B 点电势低；

D V_B-V_A=2.94×10^2 V，B 点电势高.

答：D. 由 A 点移到 B 点，外力做正功，即需要克服电场力做功，所以 A 点电势低于 B 点，由 W=qU 即可求出

1. 如何判断做功的正负和电势高低的关系呢？

如果是外力做功：做正功则向系统补充能量，电势升高；做负功则从系统吸收能量，电势降低；和重力场条件下外力做功一模一样，将石块举起，补充能量，重力势能升高。

Chart 1 举起石块（外力做功）使石块重力势能升高

如果是系统内的电场力做功，则和重力系统中重力做功同理。如果电场力作正功，则电势能减小；如果电场力作负工，则电势能增大。

填选题 15、

15. 在均匀电场中，下列哪种说法是正确的（B）

A 各点电势相等；

B 各点电势梯度相等；

C 电势梯度沿场强方向增强；

D 电势梯度沿场强方向减少。

1. 均匀电场一般指匀强电场；即电场强度大小和方向处处相等的电场；由于电势的梯度是电场强度，所以各点处电势的梯度是相同的，但是电势是电场强度的线积分。

填选题 17、

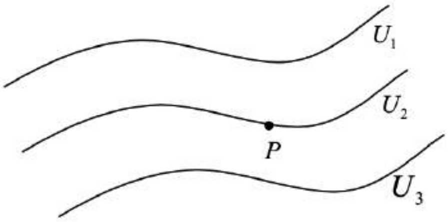
17. 如图所示，U_1、U_2、U_3 为相邻的三个等势面，它们的关系为 $U_1>U_2>U_3$，则 P 点场强 $\vec{E}$ 的方向为[　　　]

A　沿 P 点切线方向；

B　垂直 U_2 指向 U_1；

C　垂直 U_2 指向 U_3；

D　无法判断。



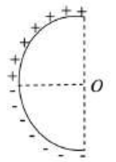
答：C　顺着电场线的方向电势逐点降低。

1. 电势降低的方向即是电场线的箭头方向；
2. 电场线和等势线始终垂直；

考点 3：电场强度的计算

填选题 11、

11. 一弯成半径为 R 的半圆形的细塑料棒，沿其上半部均匀分布有电荷 $+Q$，沿其下半部均匀分布有电荷 $-Q$，如图所示，则在环心 O 处的电场强度 $\vec{E}$ 的量值为[　　　]



A $\dfrac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$；　B $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$；　C $\dfrac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R}$；　D $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

1. 本题作为选择题实际上不必将 E 求出来；场强的数量级永远是 r **方分之一**；而 B 是真空中点电荷的场强公式，本题环心场强绝对和真空中点电荷的场强无法等效；

填选题 12、

12. 下列哪种说法正确[　　　]

A　电荷在电场中某点受到的电场力很大，该点的电场强度一定很大；

B　在某一点电荷附近的任一点，如果没有把试验电荷放进去，则这点的电场强度为零；

C　如果把质量为 m 的点电荷 q 放在一电场中，由静止状态释放，电荷一定沿电场线运动；

D　电场线上任意一点的切线方向，代表点电荷 q 在该点处获得的加速度方向。

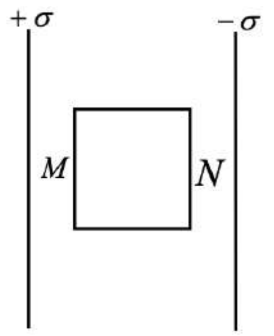
答：　D

1. 电场力和电场强度的关系：

- 只有当带点量已知时研究二者才有关系，否则二者之间没有关系；
- 电场线的切线方向永远是电荷的受力方向，即加速度的方向；
- 由高中所学曲线运动速度和加速度关系得，只有直线运动加速度才会一直和速度在同一条直线；所以电场线和运动轨迹不一定重合；

填选题 13、

13．两块“无限大”均匀带电平行平板，电荷面密度分别为$+\sigma$和$-\sigma$，两板间是真空。在两板间取一立方体形的高斯面，设其每一侧面的面积是 S，立方体的两个面 M、N 与平板平行，如图所示。则通过 M 面的电场强度通量Φ_1=______________，则通过 N 面的电场强度通量Φ_2=______________.



（答： $\Phi_1=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}S$， $\Phi_2=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}S$ 分析： 利用无限大带电平面的场强，注意是立方体形的高斯面。）

1．无限平行金属板间场强公式：

$$, \Phi_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}S$$

2． 根据高斯定理时我们定义的面的法向量垂直于平面指向面外，本题中 M 面的场强方向向内，而法向量向外所以电场强度通量是一个负值；而 N 面的场强方向向右，电场强度方向也向右，所以电场强度通量是一个正值；

3．或者根据高斯面的总电场强度通量为零（高斯定理中高斯面内没有电荷），可知 M 和 N 面的电场强度通量一定互为相反数；

填选题 23、

23． 两块金属板的面积均为 S，相距为 d（d 很小），分别带电荷 $+q$ 与 $-q$，两板间为真空，则两板之间的作用力为[　　　]

A $F=\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$； B $F=\dfrac{q^2}{\varepsilon_0 S}$； C $F=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$； D $F=\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 d^2}$.

1．无限大带电平面附近处场强公式：

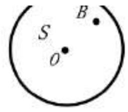
$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

而考察两板间的相互作用力那么一定就等于一个板产生的电场对于另一块板的作用力，我们知道一个板产生匀强场$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，而处于这个匀强场中另一块板子的电荷量是 q，所以可以求得另一板受力$q\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，即$\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 S}$。

2．本题还有一个隐藏考点：两板很快达到静电平衡，所以电荷只分布在板的一侧。在求电荷密度是用 q 除以 s 即可。

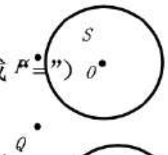
填选题 31、

答：0

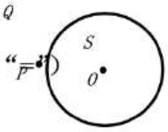


31. 如图所示，S 是一闭合曲面，当电荷 q 分别处在球心 O 点处和球面内 B 点处时，通过 S 面的电通量 Φ_O 与 Φ_B 的关系为：Φ_O_____ Φ_B.（填 “>”、“<” 或 “=”）

如图所示，S 是一闭合曲面，当电荷 q 分别处在球面外的 P 点处和 Q 点处时，通过 S 面的电通量 Φ_P 与 Φ_Q 的关系为：Φ_P_____ Φ_Q.（填 “>”、“<” 或 “=”）



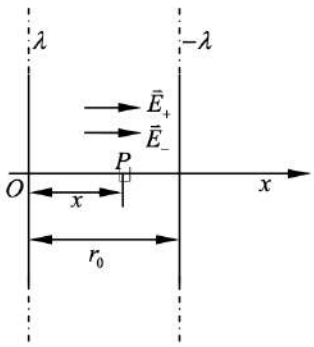
如图所示，S 是一闭合曲面，当正点电荷 q 分别处在球心 O 点处和球面外 P 点处时，通过 S 面的电通量 Φ_O 与 Φ_P 的关系为：Φ_O_____ Φ_P.（填 “>”、“<” 或 “=”）



1. 第一问两点在高斯面内，电场通量都是相同的，和与 q 的距离无关；

答案：=; =;>

大题 1、



1. 两条无限长平行带电直导线相距为 r_0，均匀带有等量异号电荷,电荷线密度为 λ. (1)求两导线构成的平面上任一点的电场强度(设该点到其中一线的垂直距离为 x)；(2)求每一根导线上单位长度导线受到另一根导线上电荷的电场力。

解：(1) 设两根导线在 P 点产生的电场分别用 $\vec{E}_+$ 和 $\vec{E}_-$ 表示（如图所示），其中

$$\vec{E}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{i}\,,\quad \vec{E}_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(r_0 - x)}\vec{i}$$

所以，按照场强叠加原理可得

$$\vec{E}_P = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(r_0 - x\right)}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{\lambda r_0}{2\pi\varepsilon_0 x(r_0 - x)}\vec{i}$$

(2) 设 $\vec{F}_+$ 和 $\vec{F}_-$ 分别表示正、负带电导线单位长度所受的电场力，则有

$$\vec{F}_+ = \lambda\vec{E}_-(r_0) = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\vec{i}\,,\qquad \vec{F}_- = -\lambda\vec{E}_+(r_0) = -\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\vec{i}$$

由此可知 $\vec{F}_+ = -\vec{F}_-$，二力大小相等，方向相反，这一对导线相互吸引。

1. 本题最重要的是找好坐标系。
2. 复习一下通电直导线周围的电场强度：

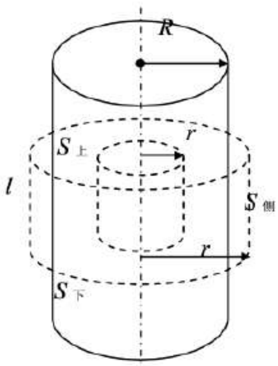
$$\vec{E}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

3. 本题求单位长度导线的受力情况，所以电荷线密度λ就是单位长度的带电量。

考点 4、根据高斯定理求场强分布大题

大题 2、柱体

2. 一对无限长的均匀带电共轴直圆筒，内外半径分别为 R_1 和 R_2，沿轴线方向上单位长度的电量分别为 λ_1 和 λ_2。求（1）各区域内的场强分布；（2）若 $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$，情况如何？画出此情形下的 $E \sim r$ 的关系曲线。



解：（1）取半径为r，高为l的同轴圆柱面为高斯面，则通过高斯面的电通量为： $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,2\pi r l$　　1分

由高斯定理　$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$　　1分

对 $r < R_1$ 的区域：　$\sum q = 0$，1 分　　$\therefore\ E = 0$　　1 分

对 $R_1 < r < R_2$ 的区域：　$\sum q = l\lambda_1$　　1 分

$\therefore$　$E = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$　　1 分

对 $r > R_2$ 的区域：　$\sum q = l(\lambda_1 + \lambda_2)$　　1 分

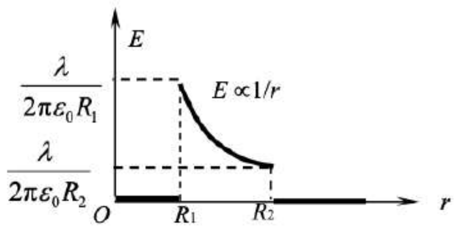
$\therefore$　$E = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$　　1 分

（2）当 $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ 时，由上问结果：

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & R_1 < r < R_1 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$　　1 分

$E \sim r$ 的关系曲线：

1 分



1. 本题请务必注意采分点的设置：

- 高斯 main 的选取所决定的高斯定理的左端电通量的面积分对于对称图形的最终表达式占一分；
- 高斯定理建立电通量和电荷大小的等式占一分；
- 对于三种分类，每种分类高斯面内总电荷数占一分；
- 对于三种分类，每种分类求出的场强大小占一分；

大题 2、带电均匀球壳

2. 如图所示，有一均匀带电球壳，带电量为 Q，内、外半径分别为 a、b，在球心处有一点电荷 q。求：（1）$r<a$，$a<r<b$，$r>b$ 三个区域的电场强度。

解：由于电荷均匀分布在球壳上，所以其所激发的电场呈球对称分布，因此选任意的通过场点 P 的半径为 r 的同心球面作高斯面，则通过此高斯面的电通量为

$$\Phi_e = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\oint\!\!\!\oint_S dS = E4\pi r^2$$

当 $r<a$ 时，高斯面内包围的电荷为 $\sum q_i = q$

所以由高斯定理可得 $E_1 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$

所以 $E_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad(r<a)$

同理，当 $a<r<b$ 时，$\sum q_i = q + Q\dfrac{r^3-a^3}{b^3-a^3}$

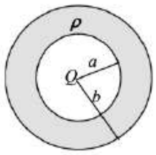
所以由高斯定理可得

所以 $E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\dfrac{r^3-a^3}{b^3-a^3}\right)$, $\quad(a<r<b)$

当 $r>b$ 时，$\sum q_i = q + Q$

所以由高斯定理可得

所以 $E_3 = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\quad(r>b)$



1. **根据高斯定理求场强分布大题的解题步骤：**

- **选取高斯面；**
- **根据高斯面列出对应的高斯定理方程**

根据分类情况，对于每种分类做如下操作：

- **求出高斯面内包围电荷**
- **代入高斯定理表达式计算场强**

大题 3、带电不均匀球壳

3. 如图所示，有一带电球壳，内、外半径分别为 a、b，电荷体密度为 $\rho = A/r$，在球心处有一点电荷 Q。求：(1) 在 $a \le r \le b$ 区域的电场强度；(2) 当 A 取何值时，球壳区域内电场强度 $\vec{E}$ 的大小与半径 r 无关。

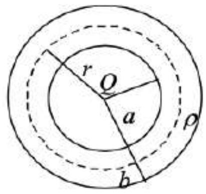
解：在 $a \le r \le b$ 区域，用高斯定理求球壳内场强：

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q + \iiint_V \rho \cdot dV\right) \qquad 1\text{分}$$

而 $$\iiint_V \rho \cdot dV = \int_a^r \frac{A}{r} \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_0^r r\,dr = 2\pi A\left(r^2 - a^2\right) \qquad 2\text{分}$$

故：$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 2\pi A\left(r^2 - a^2\right)$$

即：$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2} \qquad 3\text{分}$$



要使 $\vec{E}$ 的大小与 r 无关，则应有：

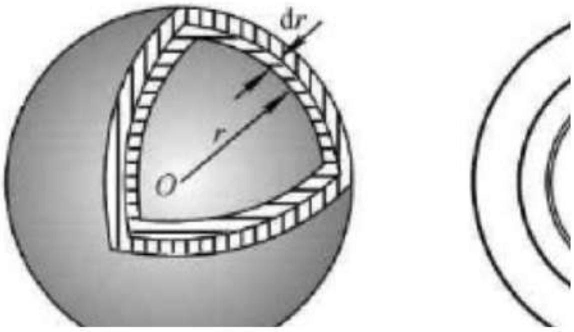
$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2} = 0 \qquad 2\text{分}$$

$$\text{即 } A = \frac{Q}{2\pi a^2} \qquad 2\text{分}$$

1. 对于带电不均匀球壳的电场强度，方法步骤完全不变；只是在“求出高斯面内包围电荷”这一步中，电荷大小需要使用电荷体密度对于体积的线积分的方式进行计算；
2. 对于线积分，面结分，题积分在计算时的小技巧：
   他们的积分变量都是 dr；
   线积分 dr 前面直接乘上线密度；
   面积分 dr 前面先乘上 2πr 再乘以面密度；
   题积分 dr 前面先乘上 4πr 方再乘以体密度；

大题 4、不均匀带电球体

4. 设在半径为 R 的球体内，其电荷为球对称分布，电荷体密度为 $\begin{cases} \rho = kr & (0 \le r \le R) \\ \rho = 0 & (r > R) \end{cases}$，$k$ 为一常量，试分别用高斯定理和电场叠加原理求电场强度与 r 的关系。



解法 1:由于电荷呈球对称分布,所以分析得出电场的分布亦呈球对称分布,选任意半径为 r 的同心球面为高斯面，有

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2$$

在球体内（$0\le r\le R$），$\sum q_i = \int_0^r \rho dV = \int_0^r kr4\pi r^2 dr = \pi k r^4$

所以由高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ 有

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi k r^4}{\varepsilon_0}$$

所以球体内的场强分布为

$$\vec{E} = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (0\le r\le R)$$

在球体外（$r > R$），$\sum q_i = \int_0^R \rho dV = \int_0^R kr4\pi r^2 dr = \pi k R^4$

所以由高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ 有

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi k R^4}{\varepsilon_0}$$

所以球体外的场强分布为

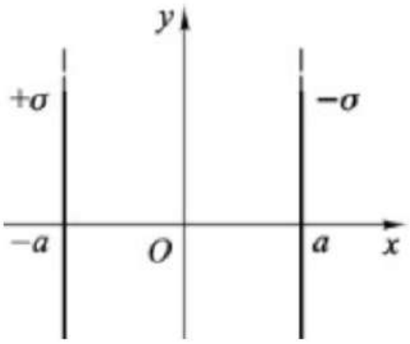
$$\vec{E} = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (0\le r\le R)$$

1. 体密度函数球体带电量球法：

将球体微分为无数以 dr 为厚度的球壳，求出每个球壳的带电量再体积分后即可求出带电量关于半径的函数；

考点 5、根据电势场强关系求电势分布大题

5. 电荷面密度分别为$+\sigma$和$-\sigma$的两块“无限大”均匀带电的平行板，如图放置，取坐标原点为零电势点，求空间各点的电势分布并画出电势随位置坐标 x 的变化曲线。



解：因为无限大均匀带电平板周围的电场强度分布为$\vec{E}=\pm\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$，由场强叠加原理可求各区间的场强分别为

$E=0$　　$(x<-a)$ 和 $(x>a)$

$\vec{E}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}$　　$(-a<x<a)$

按题中规定的零势点，选过场点的一条电场线为积分路径，由电势定义式可得

$$V=\int_x^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_x^0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dl=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x \qquad (-a<x<a)$$

$$V=\int_x^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_x^{-a} \vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{-a}^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{-a}^0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dl=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a \qquad (x<-a)$$

$$V=\int_x^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_x^{a} \vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{a}^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{a}^0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dl=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a \qquad (x>a)$$

电势变化曲线如图(b)所示。

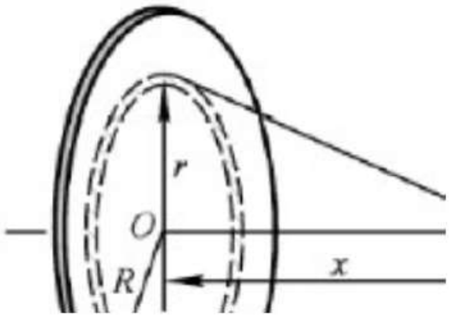
1. 解题思路：
   a） 先求出空间场强分布；
   b） 利用

$$V=\int_x^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

   根据分类，分别求出电势大小；
2. 一定注意规定的零势点在哪里！

大题 6、均匀带电圆盘

*6. 一圆盘半径为 $R=3.00\times10^{-2}\,m$，圆盘均匀带电，电荷面密度为 $\sigma=2.00\times10^{-5}\,\mathrm{C.m^2}$。试求：(1) 轴线上的电势分布；(2) 根据电场强度和电势梯度的关系求电场分布；(3) 计算离盘心 30.0cm 处的电势和电场强度。



解：（1）如图，将带电圆盘分割成一组半径不同的同心带电细圆环，则任一带电细圆环带电量为 $dq=\sigma 2\pi r dr$，其在中心轴线上一点的电势为

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

则整个带电圆盘在 P 点的总电势为

$$V=\int dV=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

（2）由 $\vec{E}=-\nabla V$ 可得中心轴线上任一点的场强为

$$\vec{E}=-\frac{dV}{dx}\vec{i}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]\vec{i}$$

（3）将 x=30.0cm 带入（1）、（2）中的 V 和 $\vec{E}$ 的表达式中，得

$$V==\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)=1691\ (\mathrm{V})$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]=5607\ (\mathrm{V/m})$$

1. 均匀带电圆盘微分为均匀带电圆环求电势微分；
2. 如果按照“1。”中方式微分，积分时积分变量是半径长度。

大题 7、

7. 两个很长的共轴圆柱面($R_1=3.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$，$R_2=0.10\mathrm{m}$)，带有等量异号电荷，两者的电势差为 450V，求：(1)圆柱面单位长度上带有多少电荷？(2) $r=0.05\mathrm{m}$ 处的电场强度。

解：(1) 由于电荷分布在无限长同轴圆柱面上，所以电场强度必定沿轴线对称分布。因此选半径为 r，长度为 l 的同轴圆柱面为高斯面，根据高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ 有

$$E\cdot 2\pi rl=\frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

当 $R_1<r<R_2$，有 $\sum q_i=\lambda l$，所以两圆柱面间的场强为 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

由此可得两圆柱面间电势差为

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

解得 $\lambda=2\pi\varepsilon_0 U_{12}/\ln\frac{R_2}{R_1}=2.1\times10^{-8}\ (\mathrm{C/m})$

(2)将 $r=0.05\mathrm{m}$ 及 λ 带入 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 中，得

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\approx 7557\ (\mathrm{V/m})\text{或 }7560(\mathrm{V/m})$$

1. 柱面的场强和通电导线的场强形状一样且公式一样，都是

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

   其中，λ是线密度；
2. 柱间的电场是垂直于柱面的电场，类似于平行板间电场，但并不均匀，而是和到轴线的距离呈反比；

章肆

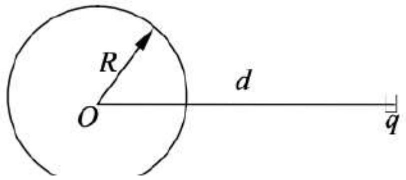
静电场中的导体和电介质

考点 1:静电平衡

填选题 1、

1. 如图所示，将一个电量为 q 的点电荷放在一个半径为 R 的不带电的导体球附近，点电荷距导体球心为 d。设无穷远处为零电势，则在导体球心 O 点有[　　　]

A $E=0, V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$；



B $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}, V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$；

C $E=0, V=0$；

D $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}, V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$。

答案：A

分析：由于静电感应，使得导体球表面感应出等量异号的电荷，虽然它们在球表面的分布是不均匀的，但是它们到球心的距离相等，均为 R，所以利用 $V=\int dV=\int\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 可以求出球表面两端在球心处的电势分别为 $V_+=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dq_+=\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R}$，$V_-=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dq_-=-\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R}$。所以，球心的总电势为 $V_O=V_++V_-+V_q=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$

1. 感应出的正负电荷到圆心的距离相等，正负电荷大小相等，所以他们在圆心处的电动势大小相等，符号相反，相互抵消。
2. 球心处的电势是两部分的叠加：球面感应电荷和外电荷；由于感应电荷电势合为零，所以球心处的电势等价于外电荷在该点处的电势，即

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

填选题 2、

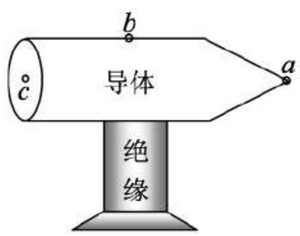
2. 如图所示，绝缘带电导体上 a、b、c 三点，电荷密度是[　　　]；电势是[　　　]：

A　a 点最大；

B　b 点最大；

C　c 点最大；

D　一样大。



【答：电荷密度 A，电势 D。提示：在静电平衡状态下，孤立导体在曲率较大处电荷面密度和场强的值较大；导体是等势体】

1. 电荷密度：可以根据无限带电平面附近的场强大小来定性理解，即某点的电荷密度和该点的曲率半径成正比；

2. 静电平衡下导体的特性

静电平衡下导体的特性：

（1）整个导体是等势体，导体表面是个等势面；

（2）导体内部场强处处为零，导体表面附近场强的大小与该表面的电荷面密度成正比，方向与表面垂直；

（3）导体内部没有净电荷，净电荷只分布在外表面。

填选题 3、

3. 当一个带电导体达到静电平衡时：[　　　]

A　表面上电荷密度较大处电势较高；　B　导体内部的电势比导体表面电势高；

C　表面上曲率较大处电势较高；　D　导体内任一点与其表面上任一点的电势差为零。

答：D

填选题 5、

5. 对于带电的孤立导体球：[　　　]

A　导体内的场强与电势大小均为零；　B　导体内的场强为零，而电势为恒量；

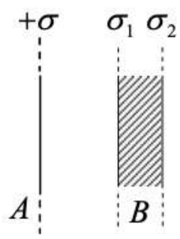
C　导体内的电势比导体表面高；　D　导体内的电势与导体表面的电势高低无法确定。

答：B

1. 因为静电平衡的导体的电荷分布在导体表面，所以导体内场强为零，电势为零；（不是说场强为零，电势一定为零）

填选题 9、

9. 一“无限大”均匀带电平面 A，其附近放一与它平行的有一定厚度的“无限大”平面导体板 B，如图所示。已知 A 上的电荷面密度为 $+\sigma$，则在导体板 B 的两个表面 1 和 2 上的感应电荷面密度分别为：$\sigma_1=$__________；$\sigma_2=$__________。



答：$\sigma_1=-\dfrac{\sigma}{2}$，$\sigma_2=\dfrac{\sigma}{2}$

1. 由于静电平衡，B 上左右两面的电荷大小相等，相互抵消；
2. A 与 B 发生静电平衡，整个 B 在 A 的σS 的电荷影响下，也应有σS个电荷发生移动。
3. 移动的电荷总共σS个，由于静电平衡，所以 B 左右两面每个面移动电荷数为其一半。左侧感应负电，右侧感应正电；
4. 所以左右两板的电荷面密度分别为：

$$\sigma_1=-\frac{\sigma}{2},\quad \sigma_2=\frac{\sigma}{2}$$

考点 2：电容

$$C=\frac{Q}{U} \qquad C=\frac{Q}{\Delta U}$$

填选题 4、

4. 一个半径为 R 带有电量为 Q 的孤立导体球电容的决定式为：[　　　]

A $C=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$； B $C=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$； C $C=\frac{\varepsilon_0}{4\pi R}$； D $C=4\pi\varepsilon_0 R$。

答：D

1. 球形孤立导体电容：

$$4\pi\varepsilon_0 R$$

填选题 7、

7. 极板间为真空的平行板电容器，充电后与电源断开，将两极板用绝缘工具拉开一些距离，则下列说法正确的是　　（　）

A 电容器极板上电荷面密度增加； B 电容器极板间的电场强度增加；

C 电容器的电容不变； D 电容器极板间的电势差增大。

【答：D。电源断开，极板上电荷量不变，电荷面密度不变。只增大间距，介质不变，所以场强不变，电容减小，电场能量增大，电势差增大。此题目还可以改变介质情况，讨论相关物理量变化情况。此外，针对平行板电容器，还可以讨论保持电源连接（极板间电势差不变），改变某一参数，讨论上述物理量的变化情况，如下面的 10 题】

1. 平行板电容器：平行板电容器中产生匀强场，该场强度大小和板上电荷面密度有关，与板间距无关；当充电后与电源断开，则电荷量一定，板上电荷面密度与板相对面积成反比；由于场强和板间距无关，所以电势和板间距成正比；电容和板间距成反比；

填选题 8、

8. 如果在空气平行板电容器的两极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板，则由于金属板的插入及其相对于极板所放的位置的不同，对电容器电容的影响为：[　　　]

A 使电容减少，但与金属板相对极板所放的位置无关；

B 使电容减少，且与金属板相对极板所放的位置有关；

C 使电容增大，但与金属板相对极板所放的位置无关；

D 使电容增大，且与金属板相对极板所放的位置有关。

答：C。

1. 插入金属板相当于在金属板厚度的那个区域内增大了相对介电常数，使得该区域内电容增大（利用平行板电容器电容表达式理解，而与位置无关。）
2. 平行板电容器参数表达式：

根据高斯定理 $\iint E \bullet dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ [4]

它的两板间的电场是 $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$ [1]

两板的电压就是 $U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$ [1]

将电压代入电容的定义式就可得出平行板电容器的电容 $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$ [1]

填选题 10、

10. 一空气平行板电容器，两极板间接上恒定电源，然后注入相对电容率为 ε_r 的电介质。则注入介质后与未注入介质前各物理量之比为：

（A）电容器的电容 $C/C_0 =$ ____________；（B）电容器中的场强 $E/E_0 =$ ____________；

（C）电容器中的电位移 $D/D_0 =$ ________；（D）电容器中储存的能量 $W/W_0 =$ __________。

【答：两极板间接上恒定电源，极板间电势差不变 $U = U_0$。未注入电介质前，平行板电容器电容为 $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$，注入介质后，$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$；所以极板上电荷量就由 $Q_0 = C_0 U_0 = \frac{\varepsilon_0 S U_0}{d}$ 变为 $Q = CU_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S U_0}{d} = \varepsilon_r Q_0$；$E = E_0$；由 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ 得 $D = \varepsilon_r D_0$；由 $W_e = \frac{1}{2} CU^2$ 得 $W_e = \varepsilon_r W_{e0}$】

1. 本题一直连接电源所以不变的电势差；电势差不变两个板子间距不变则场强不变。Q = CU 可知 Q 与 C 的变化情况同相关性。

填选题 11、

11. 半径分别为 R 和 r 的两个弧立球形导体（$R>r$），它们的电容之比 C_R/C_r 为______，若用一根细导线将它们连接起来，并使两个导体带电，则两导体球表面电荷面密度之比 σ_R/σ_r 为___________。

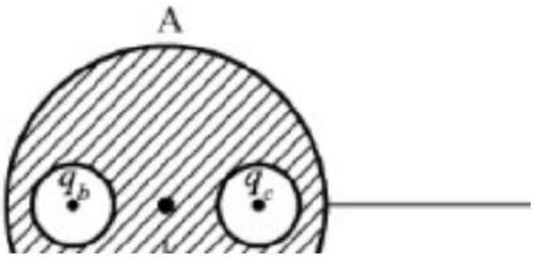
【提示：由弧立球形导体电容表达式 $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ 可得 $C_R : C_r = R : r$。用金属丝连接两个导体球，两球达到新的静电平衡状态，电荷两球电势相等，电荷按比例重新分配。则有 $V_R = \frac{Q_R}{4\pi\varepsilon_0 R} = V_r = \frac{Q_r}{4\pi\varepsilon_0 r}$，而 $Q_R = \sigma \cdot 4\pi R^2$ 所以 $\sigma_R : \sigma_r = r : R$】

1. 本题电势相等是一个非常重要的条件！

$$V_R = \frac{Q_R}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

大题 1、

1. 不带电的导体球 A 内含有两个球形空腔，两空腔中心分别有一点电荷 q_b、q_c，导体球外距导体球较远的 r 处还有一个点电荷 q_d，如图所示。试求点电荷 q_b、q_c、q_d 各受多大的电场力。



解：根据导体静电平衡时电荷分布的规律可知，空腔内点电荷的电场线终止于空腔内表面的感应电荷，而它们在导体 A 外表面的感应电荷可以近似看作均匀分布，因而可以近似看作均匀带电球对点电荷 q_d 施加作用力，所以

$$F_d = q_d \frac{(q_b + q_c)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

点电荷 q_d 与导体 A 外表面感应电荷在球形空腔内激发的电场为零，点电荷 q_b、q_c 处于球形空腔的中心，空腔内表面感应电荷均匀分布，所以点电荷 q_b、q_c 受到的作用力均为零。

1. 本题涉及到一个等效的理想化模型：
   离球体较远处的电荷的场强可以把球体等效成点电荷，利用点电荷场强公式计算电场分布；
2. 静电屏蔽会导致导体内部如果有空腔的话，空腔内场强为零（这是由于空腔外电荷产生的场强所产生的电荷移动始终在导体表面发生，并不会影响导体内部电荷分布的变化，而且空腔表面的电荷分布在静电平衡时始终均匀，所以电场处处抵消，空腔内电荷不受导体外电场影响）；也会导致空腔内的电荷的电场会被困在球内而不会分布到球体壳外！
3. 空腔内电荷对导体外电荷的作用是间接的，不是提供一个场强，而是改变导体外表面的电荷数，从而改变导体外表面电场强度的大小，间接影响外电荷。

考点 3:静电场中的电介质

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q \text{（自由电荷）}$$

填选题 6、

6. 对于各向同性的均匀电介质，下列概念正确的是[　　　]

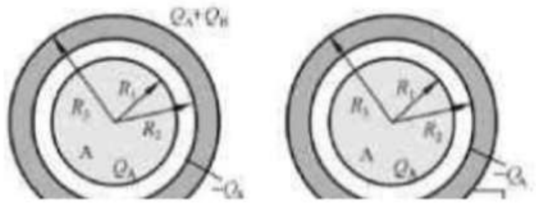
A　介质充满整个电场且自由电荷的分布不变化时，介质中的场强为真空中场强的$1/\varepsilon_r$倍；
B　电介质中的场强一定等于没有介质时该点场强的$1/\varepsilon_r$倍；
C　介质充满整个电场时，介质中的场强为真空中场强的$1/\varepsilon_r$倍；
D　电介质中的场强一定等于没有介质时该点场强的ε_r倍。
答：A

1. 充满电场的各向同性均匀电介质内部的场强大小等于真空中场强的的$1/\varepsilon_r$倍，方向与真空中场强方向一致。

电场综合大题

大题 2、电势叠加原理

2. 在一半径为 R_1=6.0cm 的金属球外面套有一个同心的金属球壳 *B*. 已知球壳 *B* 的内、外半径分别为 R_2=8.0cm，R_3=10.0cm. 设球 *A* 带有总电荷 $Q_A=3.0\times10^{-8}$ C, 球壳 B 带有总电荷 $Q_B=2.0\times10^{-8}$ C. (1) 求球壳 *B* 内、外表面上所带的电荷以及球 *A* 和球壳 *B* 的电势；(2) 将球壳 *B* 接地，然后断开，再把金属球 *A* 接地，求金属球 *A* 和球壳 *B* 内、外表面上所带的电荷以及球 *A* 和球壳 *B* 的电势。



解：(1) 根据静电感应和静电平衡时 导体表面电荷分布规律可知，电荷 $Q_A=3.0\times10^{-8}$ C 均匀分布在球 *A* 的表面，球壳 *B* 内表面感应出$-Q_A=-3.0\times10^{-8}$ C，外表面带电荷 $Q_B+Q_A=5.0\times10^{-8}$ C,，电荷在导体表面均匀分布。由电势叠加原理可得

球 *A* 的电势为　$$V_A=\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{-Q_A}{4\pi\varepsilon_0R_2}+\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0R_3}=5.6\times10^3\ \text{(V)}$$

球壳 *B* 的电势为　$$V_B=\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0R_3}=4.5\times10^3\ \text{(V)}$$

(2)（导体接地，表明导体与大地等电势，而大地电势通常取为零）
球壳 *B* 接地后，其外表面的电荷与大地中和，球壳内表面带电$-Q_A$，断开球壳 *B* 的接地后，*A* 球接地，意味着此时 *A* 球与大地等电势，电势为零，电势的变化必将引起电荷的重新分布，重新达到新的静电平衡。设此时 *A* 球带电 q_A，则由静电平衡特性可知球壳 B 内表面感应电荷 $-q_A$，外表面带电荷 q_A-Q_A，因此有

$$V_A=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{-q_A}{4\pi\varepsilon_0R_2}+\frac{q_A-Q_A}{4\pi\varepsilon_0R_3}=0$$

解得球 *A* 的带电量为　$$q_A=\frac{R_1R_2Q_A}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}=2.12\times10^{-8}\ \text{(C)}$$

球壳 *B* 的电势为　$$V_B=\frac{-Q_A+q_A}{4\pi\varepsilon_0R_3}=7.92\times10^2\ \text{(V)}$$

球壳 *B* 内表面带电为　$-q_A=-2.12\times10^{-8}$ (C)

球壳 *B* 外表面带电为　$q_A-Q_A=-0.88\times10^{-8}$ (C)

1. 本题的分析从电势叠加原理的角度上着手：
   a） A 球会受到哪些电势的影响？A 球自身电荷的电势 + B 球壳内表面电荷电势 + B 球壳外表面电荷的电势；
   b） B 壳表面内部电势处处相等；将 A 球电荷的电势和 B 球壳表面电荷的电势叠加可以求得 B 球壳外表面电势，B 球壳外表面电势即是 B 球壳上所有点的电势：

$$V_B = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_3};$$

2. 第二问需要将导体与大地导通后球壳剩余电荷大小作为未知数设出来；利用电势叠加原理（与 1 问相同），以 A 球壳与大地导通后电势为 0 作为方程条件；

补充题、

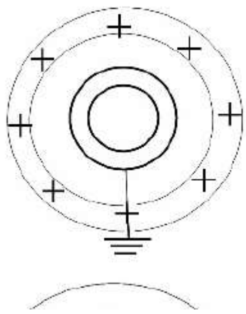
补充： 如图所示，两个同心金属球壳，它们离地球很远，内球壳用细导线穿过外球壳上的绝缘小孔与地连接，外球壳上带有正电荷，则内球壳上[　　]。

A 不带电荷

B 带正电

C 带负电荷

D 外表面带负电荷，内表面带等量正电荷



答案： C

如果内球壳的外表面不接地，那么毫无疑问内球壳外表面应该感应出负电荷，内球壳内表面应该感应出正电荷；

当内球壳外表面接地时，不能确定外表面是否还有电荷，以及有那种电荷；但是内球壳一定处于静电平衡状态，所以内部场强必定为零；如果用高斯面包围内球壳的得表面，会发现内球壳内表面如果带电那么球壳内场强必不为零，所以内球壳内表面不带电。

不妨假设内球壳外表面也不带电。那么整个内球壳都不带电，外球壳内表面不带电；外表面带正电，所以整个系统电势不为零，这与内球壳接地相矛盾；

设内球壳外表面带电量为 q（这也就是内球壳带电量），外球壳带电为 Q，则由高斯定理可知，外球壳内表面带电为 $-q$，外球壳外表面带电为 $q+Q$。这样，空间电场强度分布

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}，（两球壳之间：R_2 < r < R_3）$$

$$\vec{E}_2(\vec{r})=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$，（外球壳外：$R_4<r$）

其他区域（$0<r<R_2$，$R_3<r<R_4$），电场强度为零。内球壳电势为

$$U=\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_2}^{R_3}\vec{E}_1(\vec{r})\cdot d\vec{r}+\int_{R_4}^{\infty}\vec{E}_2(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_{R_2}^{R_3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}+\int_{R_4}^{\infty}\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R_4}=0$$

则

$$\frac{q}{R_2}-\frac{q}{R_3}+\frac{q}{R_4}+\frac{Q}{R_4}=0,\quad q=-Q\frac{R_4}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}$$

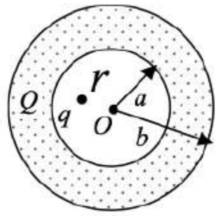
由于$R_2<R_3<R_4$，$Q>0$，所以

$$q<0$$

即内球壳外表面带负电，因此内球壳负电。

大题 8、

8. 球形金属腔带有电荷 $Q>0$，如图所示，内半径为 a、外半径为 b，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q，设无限远处为电势零点，试求：（1）球壳内外表面上的电荷；（2）球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势；（3）球心 O 点处的总电势。



解：（1）由导体的静电平衡，可知金属球壳内表面的电荷为$-q$，金属球壳外表面的电荷为 $Q+q$；

（2）由 $dV=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 知，由球壳内表面上电荷在球心 O 处产生的电势：$V_2=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$；

（3）距离球心 r 处点电荷 q 在 O 处产生的电势：$V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，

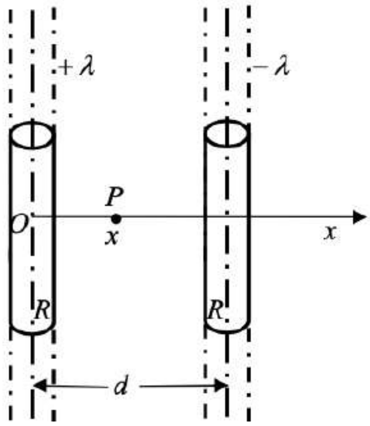
再由 $dV=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 知，由球壳外表面上电荷在球心 O 处产生的电势：$V_3=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$，

∴球心 O 点处的总电势为：$V=V_1+V_2+V_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$。

大题 3、

3. 两输电线，其导线半径为 R=3.26mm，两线中心间距为 d=0.50m，导线位于地面上空很高处，因而大地影响可以忽略。求输电线单位长度的电容。

解：设两根输电线单位长度的电量为±λ，将原点选在左边导线的轴线上，x 轴通过两输电线轴线并与之垂直，则在两轴线组成的平面上 $R<x<(d-R)$ 区域内，距原点为 x 处的 P 点的场强为



$$E=E_{+}+E_{-}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)},$$

由此可得两输电线间的电势差为

$$U=\int_R^{d-R}Edx=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_R^{d-R}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)dx=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-R}{R}$$

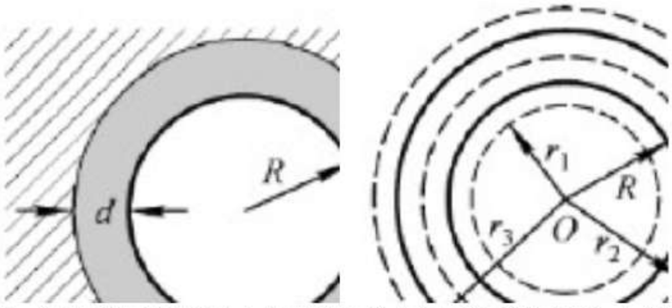
因此，输电线单位长度的电容为

$$C=\frac{\lambda}{U}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-R}{R}}\approx\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{R}}=5.52\times10-12\ (\text{F})$$

1. 求电势的思路如下：
    - 根据电荷分布求场强分布（使用高斯定理结合场强叠加原理）；
    - 场强分布关于位置求积分得到电势分布（电势关于位置的函数）；

大题 4、

4．如图所示，半径 R=0.10m 的导体球带有电荷 Q=1.0×10^{-8}C，导体外有两层均匀介质，一层介质的ε_r=5，厚度 d=0.10m，另一层介质为空气，充满其余空间。求：（1）离球心 r=5cm、15cm、25cm 处的 D 和 E；（1）离球心 r=5cm、15cm、25cm 处的 V；*（3）极化电荷面密度σ'.



解：带电导体球上的自由电荷均匀分布在导体球的表面，电介质的极化电荷也均匀分布在介质的球形界面上，因而介质内的电场是球对称分布的，因此取半径为 r 的同心球面为高斯面，则由高斯定理可得

$r<R$　　$D_1 \cdot 4\pi r^2 = 0$

$$\therefore \quad D_1 = 0, \quad E_1 = 0$$

$R<r<(R+d)$　　$D_2 \cdot 4\pi r^2 = Q$

$$\therefore \quad D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$r>(R+d)$　　$D_3 \cdot 4\pi r^2 = Q$

$$\therefore \quad D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

r_1=5cm 时，该点在导体球内，则

$$D_{r1} = 0, \quad E_{r1} = 0$$

r_2=15cm 时，该点在介质层内，ε_r=5，则

1. 利用电位移矢量的高斯定理公式时使用的电荷是自由电荷，静电平衡的导体的自由电荷只均匀分布在导体表面；
2. 一般带电导体均指的是处于静电平衡状态下的带电导体；

$$D_{r2}=\frac{Q}{4\pi r_2^{\ 2}}=3.5\times10^{-8}\,\mathrm{C.m^{-2}},\quad E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}=8.0\times10^2\,\mathrm{V/m}$$

r_2=15cm 时，该点在介质层内，ε_r=5，则

$$D_{r2}=\frac{Q}{4\pi r_2^{\ 2}}=3.5\times10^{-8}\,\mathrm{C.m^{-2}},\quad E_{r2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}=8.0\times10^2\,\mathrm{V/m}$$

r_3=25cm 时，该点在空气层内，$\varepsilon\approx\varepsilon_0$，则

$$D_{r3}=\frac{Q}{4\pi r_2^{\ 2}}=1.3\times10^{-8}\,\mathrm{C.m^{-2}},\quad E_{r3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=1.4\times10^3\,\mathrm{V/m}$$

(2) 取无穷远为电势零点，选过场点的一条电场线为积分路径，则由电势定义可得

r_3=25cm 处的电势为

$$V_3=\int_{r_3}^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}=\int_{r_3}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=360\mathrm{V}$$

r_2=15cm 处的电势为

$$V_2=\int_{r_2}^{R+d}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\int_{R+d}^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_2}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R+d)}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)}=480\mathrm{V}$$

r_1=5cm 处的电势为

$$V_1=\int_{R}^{R+d}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\int_{R+d}^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R+d)}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)}=540\mathrm{V}$$

*(3)均匀介质的极化电荷分布在介质界面上。因空气的电容率 $\varepsilon\approx\varepsilon_0$，其极化电荷可忽略。

故在介质的外表面有

$$P_n=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0E_n=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_r(R+d)^2}$$

$$\sigma=P_n=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_r(R+d)^2}=1.6\times10^{-8}\,\mathrm{C.m^{-2}}$$

在介质内表面有

$$P_n=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0E_n=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^2}$$

$$\sigma'=-P_n=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^2}=-6.4\times10^{-8}\,\mathrm{C.m^{-2}}$$

介质球壳内、外表面的极化电荷面密度虽然不同，但是两表面极化电荷的总量还是等量异号的。

1. 对于已知场强分布求电势分布在积分时注意分段，不同段的场强随未知的表达式是不同的；

大题 5、

5. 有一半径为 R_1=0.10cm 的长直导线，外面套有内半径为 R_2=1.0cm 的共轴导体圆筒，导线

与圆筒间为空气，略去边缘效应，求：（1）导线表面最大电荷面密度；（2）沿轴线单位长度的最大电场能量。（提示：空气的击穿电场强度为 $E_b=3.0\times10^6\,\mathrm{V/m}$）

解：（1）由于只有当空气中的电场强度 $E\le E_b$，空气才不会被击穿，并且在导线表面附近电场强度最大，由此即可以求出σ 的极限值。

设长直导线上单位长度的电荷为λ，则导线表面附近的电场强度为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

所以，导线表面最大电荷面密度为

$$\sigma_{\max}=\varepsilon_0 E_b=2.66\times10^{-5}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$$

（2）由上述分析可得 $\lambda_{\max}=2\pi\varepsilon_0 R E_b$，此时导线与圆筒间各点的电场强度为

$$E_m=\frac{\lambda_{\max}}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{R_1}{r_0}E_b\quad(R_1<r<R_2)$$

E=0　　　（其他）

所以有，　$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_m{}^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{R_1{}^2}{r^2}E_b{}^2$

沿轴线单位长度的最大电场能量为

$$W_e=\iiint_V w_e dV=\iiint_V w_e 2\pi r dr=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{R_1{}^2}{r^2}E_b{}^2 2\pi r dr=\varepsilon_0\pi R_1{}^2E_b{}^2\ln\frac{R_2}{R_1}=5.76\times10^{-4}\,\mathrm{J/m}$$

1. 长直导线和空心圆桶的模型实质是平行金属板模型；
2. 平行金属板场强表示为：

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

3. 最大的临界场强就是大到刚刚击穿空气的电场强度；
4. 电场能量是电场能量密度关于空间的积分；电场能量密度的计算公式如下：

$$w_e=\frac{W_e}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE$$

$$W_e=\int_V \mathrm{d}W_e=\iiint_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V$$

大题 6、

6. 一平行板空气电容器，极板面积为 S，极板间距为 d，充电至带电量为 Q 后与电源断开，然后用力缓缓地把两极板间距拉开到 $2d$。求：（1）电容器能量的改变；（2）此过程中外力所做的功，并讨论此过程中的功能转换关系。

解：（1）电源断开后，极板上的电荷保持不变，因此极板间的均匀电场保持不变，

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

所以两极板间的电场能量密度为

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$$

在外力作用下，两极板间距由 d 被拉开到 $2d$，电场能量密度不变，电场占据的空间由 V 增大到 $2V$，所以电场能量增量为

$$\Delta W_e=w_e\Delta V=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

（2）两极板带等量异号的电荷，在外力 $\vec{F}$ 将其拉开过程中，应有 $\vec{F}=-\vec{F}_e$，则此过程中外

力所做的功为

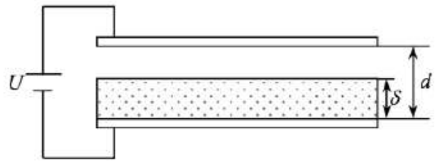
$$A=-\vec{F}_e\cdot\Delta\vec{r}=QEd=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

外力克服静电力所做的功等于静电场能量的增量。

1. 本题电场尽在板间有，所以电场能量密度的空间积分等于能量密度直接乘以体积 Sd；
2. 本题第二问可以尝试首先判断一下做功的正负：外力将两板拉开，两板拉开其场强不变，但是电场体积增大，所以系统电场能增大，外力做功使系统能量增大，则外力一定做的是正功；

大题 7、

7. 如图所示，一个空气平板电容器极板的面积为 S，间距为 d，保持极板两端充电电源电压 U 不变，求：（1）充足电后，电容器极板间的电场强度 E_0，电容 C_0、极板上的电荷 Q_0 和电场能量 W_{e0}；（2）将一块面积相同，厚度为 δ（$\delta < d$），相对介电常数为 ε_r 的玻璃板平行插入极板间，求极板上的电荷 Q_1，玻璃板内的电场强度 E_1、电容器的电容 C_1 和电场能量 W_{e1}。(3) 将一块面积相同，厚度为 δ（$\delta < d$）的金属板平行插入极板间，求极板上的电荷 Q_2，金属板内的电场强度 E_2、电容器的电容 C_2 和电场能量 $We2$。



解：(1) 由于是空气平板电容器，有：

$$E_0 = \frac{U}{d}, \qquad C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

所以 $Q_0 = C_0 U = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} U$；

而 $W_{e0} = \dfrac{1}{2} C_0 U^2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d} U^2$

（2）插入玻璃板时，设极板上带电量为 Q_1，则有：

$E_0 = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$，玻璃板内场强为 $E_1 = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$，

由于电压不变，有：$U = E_0(d-\delta) + E_1\delta = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 S}(d-\delta) + \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}\delta$，

解得：$Q_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S U}{\varepsilon_r(d-\delta)+\delta}$，$\therefore E_1 = \dfrac{U}{\varepsilon_r(d-\delta)+\delta}$，

$$C_1 = \frac{Q_1}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\varepsilon_r(d-\delta)+\delta}; \quad W_{e1} = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2\left[\varepsilon_r(d-\delta)+\delta\right]} U^2$$

（3）插入金属板情况下，由于静电平衡状态下金属内部场强处处为零，所以 $E_2 = 0$，设此时极板上带电量为 Q_2，则有：

$E_0 = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_2}{\varepsilon_0 S}$，金属板内场强为 $E_2 = 0$，

由于电压不变，有：$U = E_0(d-\delta) = \dfrac{Q_2}{\varepsilon_0 S}(d-\delta)$，

解得：$Q_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S U}{(d-\delta)}$， $E_2 = 0$，

$$C_2 = \frac{Q_2}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-\delta}; \qquad W_{e2} = \frac{1}{2} C_2 U^2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2(d-\delta)} U^2$$