比较判别法

主讲人：刘秀平 教授

比较判别法

定理（比较判别法） 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n (n > N)$。

（1）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（2）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散。

证明：(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n = \sigma$.

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为$s_n$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和为$\sigma_n$，则

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le \sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \le \sigma.$$

即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$\{s_n\}$是有界的，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是收敛。

（2） 反之，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛， 则由（1）知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛，

与已知矛盾。因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散。

常见不等式：

(1). $\sin x < x, , 0 < x < 1;$

(2). $\ln(1+x) < x, 0 < x < 1;$

(3). $\ln x < x < e^x, \Rightarrow \ln n < n;$

(4). $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}};$

(5). $2ab \le a^2 + b^2.$

(6). $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$, 当$f(x) \le g(x)$时.

比较判别法

例题1　判断下列正项级数的敛散性

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}\quad(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}\quad(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\quad(4)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx$$

解：（1）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}$，$u_n=2^n\sin\frac{1}{3^n}$.

由于 $\sin x<x$, 所以 $\sin\frac{1}{3^n}<\frac{1}{3^n}\Rightarrow u_n<(\frac{2}{3})^n$.

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$ 是收敛的，由比较定理知

$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}$ 是收敛的。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$，$u_n=\frac{1}{\ln n}$.

由于 $\ln n<n$, 所以 $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$.

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，因此，由比较定理知

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 是发散的。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$，$u_n=\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

由于 $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$, 所以 $\frac{1}{n\sqrt{(n+1)}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow u_n<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 是收敛的，因此，由比较定理知

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 是收敛的。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx$，$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx$.

由于 $\frac{\sin x}{1+x}<x,(0<x<1),\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{n}}xdx=\frac{C}{n^2}$.

即 $u_n<\frac{C}{n^2}$.

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，因此，由比较定理知

$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx$ 是收敛的

比较判别法

例题2 设$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$, 证明对任意的$\lambda>0$,

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^\lambda}$是收敛的。

证明：由$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$, 知$u_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2} xdx.$

$u_n+u_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\tan x$

$\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$.显然$u_n>u_{n+2}$,所以

$2u_{n+2}<u_n+u_{n+2}<\frac{1}{n+1}$,即$u_n<\frac{1}{2(n-1)}<\frac{1}{n}(n>2).$

于是$v_n=\frac{u_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$.由比较判别法知：

对任意的$\lambda>0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^\lambda}$是收敛的。

例题3 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且都收敛。

证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛。

证明：$a_n=(u_n+v_n)^2=u_n^2+2u_nv_n+v_n^2\geq 0.$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，知$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.(收敛必要条件）。

$\{v_n\}$是有界的，$0\leq v_n\leq M$。$\Rightarrow\begin{cases}v_n^2\leq Mv_n.\\ u_nv_n\leq Mu_n.\end{cases}$

由比较判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$都是收敛的。

同理,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$也是收敛的。由收敛级数运算性质知：

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛。

谢谢！