比值判别法（达朗贝尔判别法）

主讲人：刘秀平 教授

比值判别法

定理（比值判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，$u_n>0$（$n>N$），

且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho.$

则（I）当$\rho<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（II）当$\rho>1$(或$\rho=+\infty$)时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

（III）当$\rho=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛，可能发散。

证明：(I) 首先，由$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$知，

对$\in=\frac{1-\rho}{2}>0,\exists N,$当$n\geq N$时，有

$$-\frac{1-\rho}{2}<\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho<\frac{1-\rho}{2}.n\geq N \qquad (1)$$

即

$$u_{n+1}<\frac{1+\rho}{2}u_n\overset{\Delta}{=}\bar{\rho}u_n,n\geq N \qquad (2)$$

其中 $\bar{\rho}=\frac{1+\rho}{2}<1.$

因此，有$u_{N+1}<\bar{\rho}u_N$

$$u_{N+2}<\bar{\rho}u_{N+1}<\bar{\rho}^2u_N$$
$$u_{N+3}<\bar{\rho}u_{N+2}<\bar{\rho}^3u_N$$
$$\vdots$$
$$u_{N+m}<\cdots<\bar{\rho}^mu_N,\forall m.$$

由比较判别法知, 级数$\sum_{n=N}^{\infty}u_n$是收敛，

所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

（II）当$\rho>1$(或$\rho=+\infty$)时，

由$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$知，

对$\in=\frac{\rho-1}{2}>0,\exists N,$当$n\geq N$时，有

$$-\frac{1-\rho}{2}<\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho<\frac{1-\rho}{2}.n\geq N \qquad (3)$$

即

$$u_{n+1}>\frac{1+\rho}{2}u_n\overset{\Delta}{=}\bar{\rho}u_n,n\geq N \qquad (4)$$

其中 $\bar{\rho}=\frac{1+\rho}{2}>1.$

因此，有$u_{N+1}>\bar{\rho}u_N$

$$u_{N+2}>\bar{\rho}u_{N+1}>\bar{\rho}^2u_N$$
$$u_{N+3}>\bar{\rho}u_{N+2}>\bar{\rho}^3u_N$$
$$\vdots$$
$$u_{N+m}>\cdots>\bar{\rho}^mu_N,\forall m.$$

由比较判别法知级数$\sum_{n=N}^{\infty}u_n$是发散的，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

（III）当$\rho=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛，可能发散。

例如$u_n=\frac{1}{n^p}.\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=1.$

比值判别法

例题1 判断下列级数的敛散性

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\quad 2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}\quad 3.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}\quad 4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}.$$

解：$1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\Rightarrow u_n=\frac{1}{n!},\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$

因此，由比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 是收敛的。

$$3.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n^n},\Rightarrow u_n=\frac{(2n)!!}{n^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{(2n)!!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1.$$

因此，由比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n^n}$ 是收敛的。

$$2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}\Rightarrow u_n=\frac{n!}{e^n},\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}\frac{e^n}{n!}=+\infty。$$

因此，由比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}$ 是发散的。

$$4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2},\Rightarrow u_n=\frac{n^n}{(n!)^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}(1+\frac{1}{n})^n$$

$$=0<1.$$

因此，由比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 是收敛的。

比值判别法

例题2 设a>0, s>0，讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$的敛散性.

解：首先$u_n=\frac{a^n}{n^s}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}\frac{n^s}{a^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^s}{(n+1)^s}=a.$$

所以，当$a<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$是收敛的.

当$a>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$是发散的.

当a=1时，原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

所以，当$s>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$是收敛的.

当$s\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$是发散的.

例题3.判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$的敛散性. ，

解:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}\Rightarrow u_n=\frac{e^n n!}{n^n}$，考虑比值法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{e^n n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{en^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}=1.$$

至此，比值法失效。但是我们知道$(1+\frac{1}{n})^n\uparrow\to e$，

因此有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1.$

表明，$u_{n+1}>u_n$.又u_1=e，于是当$n\to\infty$时，$u_n\neq 0$，
所以不满足级数收敛的必要条件，

因此，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$是发散。

谢谢！