Fourier级数及收敛性定理

主讲人：刘秀平 教授

Fourier的收敛性定理

设函数$f(x)$的fourier级数，为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

其中

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, k = 0,1,2,\cdots \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, k = 1,2,\cdots \end{cases} \qquad (2)$$

一般来说，一个函数的fourier级数既含有正弦项也含有余弦项。但是都某些函数却只含有正弦或余弦项。例如

$f(x) = \begin{cases} -1, -\pi \le x < 0, \\ 1, 0 \le x < \pi, \end{cases}$的fourier级数为$\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$.

而x^2的fourier级数为$\dfrac{1}{3}\pi^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos kx.$

一般有下面结论：

（1）当$f(x)$为奇函数时，由于$f(x)\cos kx$，$f(x)\sin kx$分别为奇函数和偶函数，所以由积分性质有

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx,$$

此时，函数$f(x)$的fourier级数只含有正弦项，称为正弦级数，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. (3)$$

（2）当$f(x)$为偶函数时，由于$f(x)\cos kx$，$f(x)\sin kx$分别为偶函数和奇函数，所以由积分性质有

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0,$$

此时，函数$f(x)$的fourier级数只含有余弦项，称为余弦级数，即

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. (4)$$

Fourier的收敛性定理

一个以2π为周期且在$[-\pi, \pi]$上可积的函数
$f(x)$一定可求出其fourier级数。但其fourier级数
是否收敛，是否收敛到$f(x)$的答案由下面定理给出：
定理（Dirichlet收敛性定理）若以2π为周期的函数
$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上满足Dirichlet条件：
(1) 连续或只有有限个第一类间断点；
(2) 至多只有有限个极值点。
$f(x)$的fourier级数收敛，并且
当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$，
当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$，
当$x=\pm\pi$时，级数收敛于$\frac{1}{2}[f(\pi^-)+f(-\pi^+)]$.

关于上述定理的几点备注：
(1)当$f(x)$是分段连续，且不作无限次震荡，则fourier级数收敛；
(2）相比于幂级数，fourier级数条件要弱很多；
(3）级数（7）中各项均是2π周期。若级数在$[-\pi, \pi]$上收敛，
则对任意点x处级数（7）均收敛；
(4）在具体讨论函数的fourier级数时，时常给出
函数在（$-\pi, \pi$]或[$-\pi, \pi$）上表达式，应当理解为
它是定义在整个实数轴上，且是以2π为周期的。即
在（$-\pi, \pi$]或[$-\pi, \pi$）以外部分按对应关系做周期延拓。

Fourier的收敛性定理

例题1 设$f(x)$以2π为周期，它在（$-\pi$，π]上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}2, & (-\pi<x\le 0)\\ x^3, & (0<x\le\pi)\end{cases},$$

又设$f(x)$的fourier级数的函数为$S(x)$。

求$S(-2)$，$S(0)$，$S(1)$，$S(\pi)$，$S(\frac{5\pi}{2})$.

解：由于$x=-2$是$f(x)$的连续点，且$f(-2)=2$，

所以由收敛性定理知$S(-2)=f(-2)=2$.

由于$x=0$是$f(x)$的间断点，且$\frac{1}{2}(f(0^+)+f(0^-))=1$，

所以由收敛性定理知$S(0)=1$.

由于$x=1$是$f(x)$的连续点，且$f(1)=1$,

所以由收敛性定理知$S(1)=f(1)=1$.

由于$x=\pi$是$f(x)$的间断点，且$\frac{1}{2}(f(-\pi^+)+f(\pi^-))=\frac{1}{2}(2+\pi^3)$，

所以由收敛性定理知$S(\pi)=\frac{1}{2}(2+\pi^3)$.

对于$x=\frac{5\pi}{2}$，由于$f(\frac{5\pi}{2})=f(2\pi+\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})$,

所以由收敛性定理知$S(\frac{5\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=\pi^3/8$.

例题2 设$f(x)$以2π为周期，它在（$-\pi$，π]上的表达式为

$f(x)=x^2$,求$f(x)$的fourier级数及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$。

解：由前面计算及收敛性定理知

$$x^2=\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

当$x=\pi$时，有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}\pi^2$.

当$x=0$时，有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{12}\pi^2$.

谢谢!