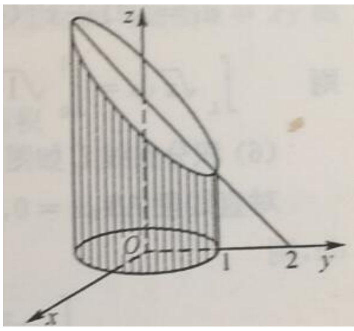
6. 计算 $I=\iint\limits_{S} y\mathrm{d}S$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z+y=2$ 及 $z=0$ 所截得.



解:

S 分为两块 S_1+S_2， $S_1: x=\sqrt{1-y^2}$， $S_2: x=-\sqrt{1-y^2}$ 得

S 关于 yOz 坐标面对称，y 是 x 的偶函数，所以

$$I=\iint\limits_{S} y\mathrm{d}S=2\iint\limits_{S_1} y\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2+0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

且 S_1 在 Oyz 平面上的投影区域为 $D_{yz}:-1\le y\le 1, 0\le z\le 2-y$

$$I=\iint\limits_{S} y\mathrm{d}S=2\iint\limits_{S_1} y\mathrm{d}S=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{2-y}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}z=2\int_{-1}^{1}\frac{y(2-y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-1}^{1}\frac{-y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y+2\int_{-1}^{1}\frac{2y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=-4\int_{0}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y+0$$

(令 $y=\sin t$)　　$$=-4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi$$

7. 设 $S=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2=a^2,z\geq 0\right\}$ （ $a>0$ ）， 则 $\iint\limits_S (x+y+z)^2 \mathrm{d}S=$ （ ）

(A) $2\pi a^2$. (B) $2\pi a^4$. (C) $4\pi a^2$. (D) $4\pi a^4$.

解: (B)

由 S 的对称性和被积函数的奇偶性

$$\iint\limits_S xy\mathrm{d}S=\iint\limits_S yz\mathrm{d}S=\iint\limits_S zx\mathrm{d}S=0$$

$$I=\iint\limits_S (x+y+z)^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S [x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_S [x^2+y^2+z^2]\mathrm{d}S$$

$$=a^2\iint\limits_S \mathrm{d}S=a^2\cdot 2\pi a^2=2\pi a^4$$

8. 设曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2+z^2+4x+2y+6z-2=0$，计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma (x+y)\mathrm{d}S$

解：曲面 Σ 的方程为 $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=16$

利用对称性

$$\oiint\limits_\Sigma (x+y)\mathrm{d}S=\oiint\limits_\Sigma (x+2+y+1-3)\mathrm{d}S=-3\oiint\limits_\Sigma \mathrm{d}S=-192\pi$$

9. 设 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$，计算 $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$

解 $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_S [(x-a)+(y-b)+(z-c)]\mathrm{d}S+\iint\limits_S (a+b+c)\mathrm{d}S$

由于球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$ 关于平面 $x=a,y=b,z=c$ 对称，因

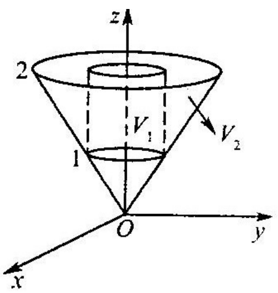
而

$$\iint_S (x-a)\mathrm{d}S = \iint_S (y-b)\mathrm{d}S = \iint_S (z-c)\mathrm{d}S = 0$$

故原积分等于

$$\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S = \iint_S (a+b+c)\mathrm{d}S = 4\pi(a+b+c)$$

10. 计算$\oiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中$S$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$，平面$z=1$及$z=2$所围空间域的整个边界曲面，$f(x,y,z)=\begin{cases} 0, & x^2+y^2>1 \\ x^2+y^2+z^2, & x^2+y^2\le 1 \end{cases}$.



解：　$S_1: z=1, x^2+y^2\le 1$ ，$S_2: z=2, x^2+y^2\le 1$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+0+0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D: x^2+y^2\le 1$$

$$\oiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint_{S_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D (x^2+y^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D (x^2+y^2+4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+5\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+5\pi=6\pi$$

1. 计算$\int_L xy\mathrm{d}s$，其中L是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$在第一象限部分.

解 $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sqrt{3}\sin t \end{cases},\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_L xy\mathrm{d}s=2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\cos t\cdot\sqrt{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}(3+\sin^2 t)=\frac{2\sqrt{3}}{3}(8-3\sqrt{3})$$

2. $I=\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中$L$为球面$x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$与平面$x+z=1$的交线.

解 L $$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2} \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(1-x)^2=\dfrac{9}{2} \\ x+z=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x+z=1 \end{cases}$$

令 $$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2} \\ y=2\sin\theta \\ z=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta \end{cases},\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)+z'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$$

$$I=\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{9}{2}\oint_L\mathrm{d}s=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\mathrm{d}\theta=18\pi$$

3. 设曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，求$I=\oint_L xy\mathrm{d}s$

解　由 $x+y+z=0 \quad \Rightarrow \quad xy+y^2+yz=0 \Rightarrow xy+yz=-y^2$

L关于平面$x=z$均对称，由轮换对称性，

$$\oint_L xy\mathrm{d}s=\oint_L yz\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L (xy+yz)\mathrm{d}s=-\frac{1}{2}\oint_L y^2\mathrm{d}s$$

L关于平面$y=x$，平面$z=y$和平面$x=z$均对称，由轮换对称性

$$\oint_L y^2\mathrm{d}s=\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L \mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}$$

所以

$$\oint_L xy\mathrm{d}s=\oint_L yz\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L (xy+yz)\mathrm{d}s=-\frac{1}{2}\oint_L y^2\mathrm{d}s=-\frac{\pi}{3}$$