第七章 多元函数微分学及其应用

§7.7 偏导数在几何中的应用

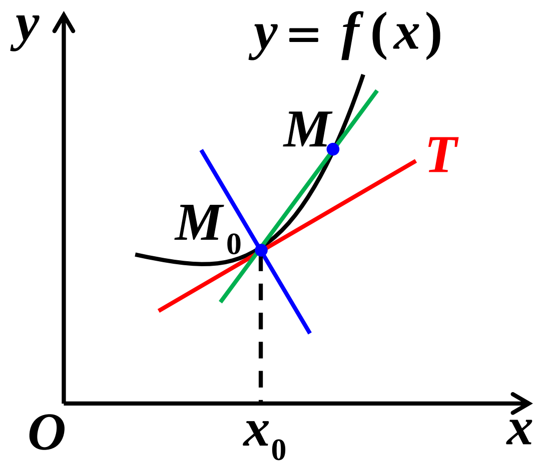
一、空间曲线的切线与法平面

二、曲面的切平面与法线

一、空间曲线的切线与法平面

平面曲线的切线与法线

平面光滑曲线$y=f(x)$在点(x_0,y_0)处



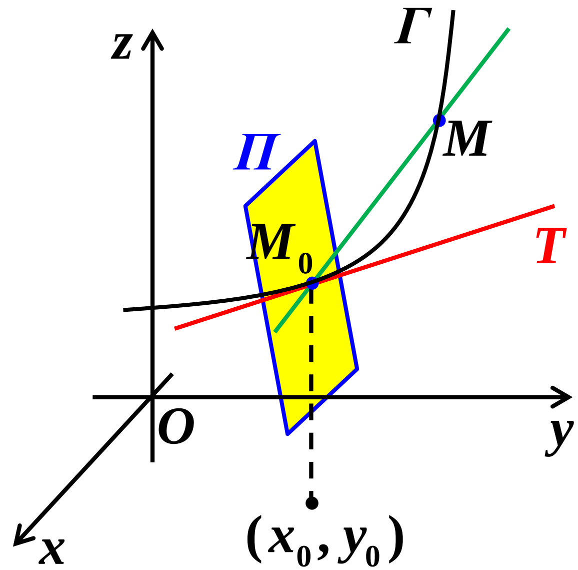
- 切线方程： $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$
- 法线方程： $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

一、空间曲线的切线与法平面

空间曲线的切线与法平面

设 M_0 为空间曲线 Γ 上一定点, M 为曲线 Γ 上另一点.

- 割线：过 M_0M 的直线, 称为曲线 Γ 的割线.
- 切线：当 M 沿着曲线 Γ 趋于 M_0 时, 割线 M_0M 的极限位置 M_0T, 称为曲线 Γ 的切线.
- 法平面：过 M_0 且与切线 M_0T 垂直的平面 Π, 称为曲线 Γ 在 M_0 点的法平面.



一、空间曲线的切线与法平面

1. 空间曲线方程为参数方程

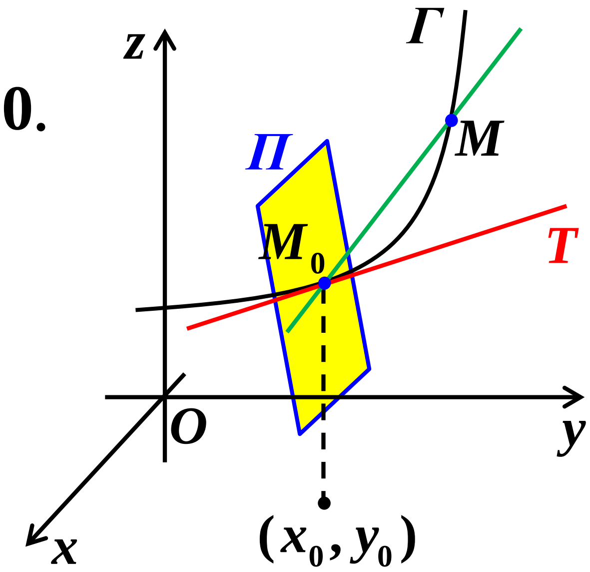
设空间曲线Γ的参数方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

其中$\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$可导，且导数不全为0.

设：点$M_0(x_0, y_0, z_0)$对应参数$t=t_0$.

另一点$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$

对应参数$t=t_0+\Delta t$.



一、空间曲线的切线与法平面

1. 空间曲线方程为参数方程

设空间曲线Γ的参数方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

其中$\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$可导，且导数不全为0.

- 切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

分母为0时，对应分子也为0.

- 法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

切线的切向量 $\vec{s}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$ 法平面的法向量

一、空间曲线的切线与法平面

例1: 求螺旋线 $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ z = b\theta\ (a,b>0)$ 在 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的切线及法平面方程.

解:

一、空间曲线的切线与法平面

1. 空间曲线方程为参数方程

若空间曲线Γ的参数方程为：$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 改写为：$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

若 $y = y(x), z = z(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，则切向量

$$\vec{s} = (1, y'(x_0), z'(x_0))$$

- 切线方程：$\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y(x_0)}{y'(x_0)} = \dfrac{z - z(x_0)}{z'(x_0)}$
- 法平面方程：$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y(x_0)) + z'(x_0)(z - z(x_0)) = 0$

一、空间曲线的切线与法平面

2. 空间曲线方程为一般方程

设空间曲线Γ的一般方程为：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲线Γ上一点，若函数F,G满足隐函数存在定理的条件，则在M_0的某一邻域内可唯一确定函数组$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$.

即：曲线Γ的方程改写成$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$，转化为上一种情况.

利用隐函数求导公式，则切向量为 $\vec{s}=(1,y'(x_0),z'(x_0))$

一、空间曲线的切线与法平面

切向量可改写为: $\vec{s}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}\right)$

- 切线方程:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}}=\frac{z-z(x_0)}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}}$$

- 法平面方程:

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}(z-z_0)=0$$

该方程也可表示为: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M_0) & F_y(M_0) & F_z(M_0) \\ G_x(M_0) & G_y(M_0) & G_z(M_0) \end{vmatrix}=0$

一、空间曲线的切线与法平面

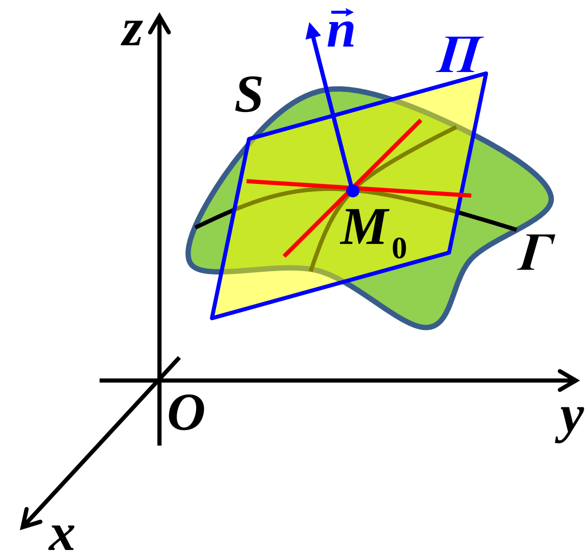
例2：求球面$x^2+y^2+z^2=4$与圆柱面$x^2+y^2=2x$的交线Γ在点$P_0(1,1,\sqrt{2})$处的切线及法平面方程.

解：

二、曲面的切平面与法线

曲面的切平面与法线

设曲面S的方程为： $F(x,y,z)=0.$



$M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲面S上的一点，且设$F(x,y,z)$在该点偏导连续且不全为0.

在曲面S上，过M_0任意作曲线Γ，

下证：曲面S上过M_0的任何曲线的切线都处在同一个平面上.

- 该平面称为曲面S在点M_0处的切平面.
- 过点M_0且与切平面垂直的直线称为曲面S在点M_0处的法线.

二、曲面的切平面与法线

曲面的切平面与法线

设曲面S的方程为： $F(x,y,z)=0.$

- 切平面方程：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

- 法线方程： 分母为0时, 对应分子也为0.

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

切平面的法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)|_{M_0}$ 法线的方向向量

二、曲面的切平面与法线

曲面的切平面与法线

若曲面S的方程为：$z = f(x,y) \Leftrightarrow F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$

当$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续时, 则法向量

$$\vec{n} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$$

- 切平面方程：

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

- 法线方程：$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

二、曲面的切平面与法线

例3: 求曲面 $xy+yz+xz-1=0$ 在点 $M_0(3,-1,2)$ 处的切平面与法线方程.

解:

二、曲面的切平面与法线

例4: 证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=a\ (a>0)$上任一点处的切平面在三个坐标轴上的截距之和为一常数.

证明: