§9.4 Gauss公式、Stokes公式

一、Gauss公式

闭曲面上的第二型曲面积分可转化为三重积分计算

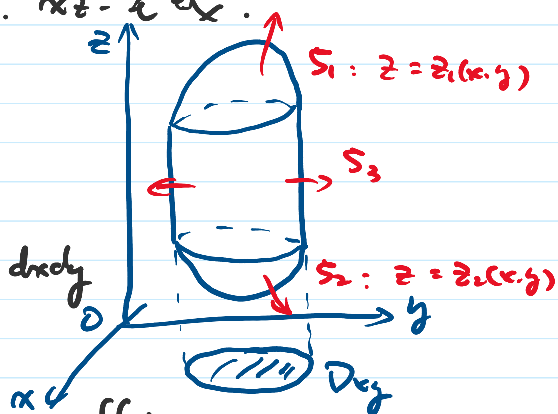
定理： 设空间区域V是由光滑或分片光滑的闭曲面S围成的有界闭区域，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在V上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oiint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

其中S取外侧.　　　Gauss公式　　　非闭则补

注： Gauss公式是Newton-Leibniz公式在三维空间上的推广.

证：若V既是xy-型区域，又是yz-型，xz-型区域.



$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}dV=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$=\iint_{D_{xy}}[R(x,y,z_1(x,y))-R(x,y,z_2(x,y))]dxdy$$

而 $$\oiint_S R\,dxdy=\iint_{S_1}R\,dxdy+\iint_{S_2}R\,dxdy+\iint_{S_3}R\,dxdy$$

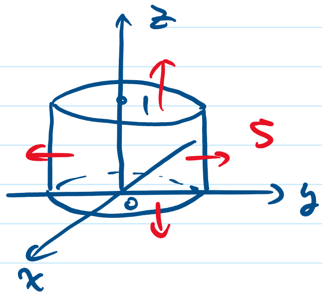
$$=\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))dxdy-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))dxdy+0$$

$$=\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}dV$$

$$= \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

同理: $\oiint_S P\, dydz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dV.$ $\oiint_S Q\, dzdx = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV$

例1: 计算 $I=\oiint_S (y-z)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $z=1$ 所围空间区域 V 的边界曲面, 取外侧.



解: 设 $P=(y-z)x$. $Q=0$. $R=x-y$

在 V 上具有一阶连续偏导.

$$\Rightarrow I = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

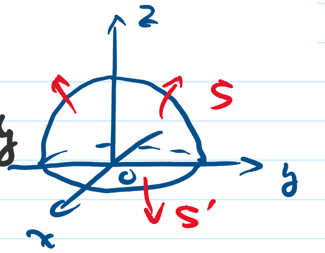
$$= \iiint_V (y-z)\, dV \quad (\text{因 } V \text{ 关于 } xoz \text{ 平面对称})$$

$$= -\iiint_V z\, dV \quad (\text{质心}: \bar{z}=\tfrac{1}{2}) \longrightarrow -\tfrac{1}{2}\iiint_V dV = -\tfrac{\pi}{2}.$$

$$= -\int_0^1 z\, dz \iint_{D_z} dxdy$$

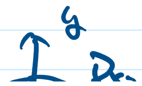
$$= -\frac{\pi}{2}.$$

例2: 计算 $I=\iint_S \dfrac{xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(R>0)$ 的上侧.

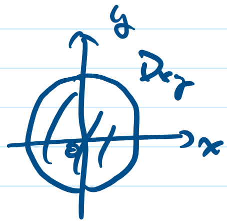


解: $I = \frac{1}{R} \iint_S xz\, dydz + yz\, dzdx + z^2 dxdy$

补 S': $z=0$. $(x,y)\in D_{xy}$ 取下侧



补 S': $z=0$. $(x,y)\in D_{xy}$ 取下侧



$$\Rightarrow I = \frac{1}{R}\oiint_{S+S'} xz\,dydz + yz\,dzdx + z^2\,dxdy$$

$$- \frac{1}{R}\iint_{S'} xz\,dydz + yz\,dzdx + z^2\,dxdy$$

$$= \frac{1}{R}\iiint_V (z+z+2z)\,dV - \frac{1}{R}\cdot 0$$

$$= \frac{4}{R}\iiint_V z\,dV$$

$$= \frac{4}{R}\cdot\frac{3}{8}R\cdot\frac{2}{3}\pi R^3 = \pi R^3.$$

- 空间单连通区域G

$$\begin{cases}\text{二维单连通 (}G\text{内任一闭曲面的内部都属于}G\text{)}\\ \text{一维单连通 (}G\text{内任一闭曲线总可以张成属于}G\text{的曲面)}\end{cases}$$

- 球面所围区域 (既是一维又是二维单连通区域)
- 环面所围区域 (是二维但不是一维单连通区域)
- 两个同心球面之间的区域 (是一维但不是二维单连通区域)

第二型曲面积分与曲面无关，仅取决于曲面的边界曲线的条件

定理： 设G为空间中的二维单连通区域，S是G内任一分片光滑曲面，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在G上具有一阶连续偏导数，则曲面积分

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

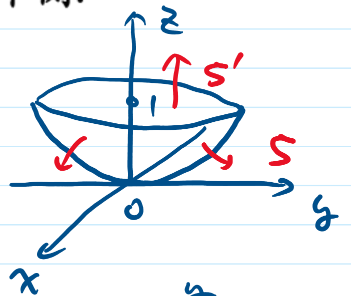
的值在G内与曲面S无关而仅取决于曲面S的边界曲线(或沿G内任一分片光滑闭曲面的积分为零)的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

在G内处处成立.

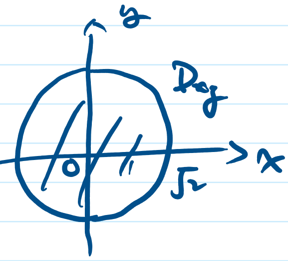
例3：计算$I=\iint_S (x+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$为旋转抛物面$2z=x^2+y^2$介于平面$z=0$和$z=1$之间的部分的下侧.

解：补 S'：$z=1$．$(x,y)\in D_{xy}$．上侧.



$$\Rightarrow I=\oiint_{S+S'}(x+z^2)dydz-zdxdy$$

$$-\iint_{S'}(x+z^2)dydz-zdxdy$$



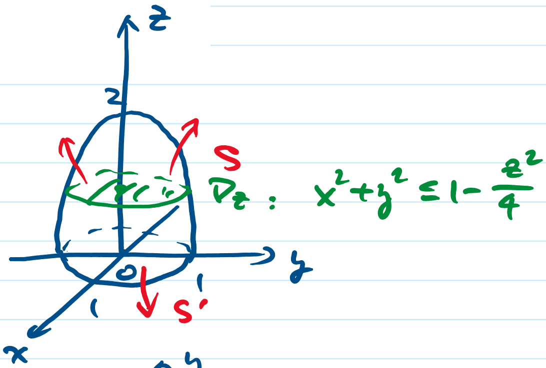
$$=\iiint_V(1-1)\,dV-\iint_{S'}(x+z^2)dydz-zdxdy$$

$$=\iint_{S'}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}dxdy=2\pi.$$

例4： 计算 $I=\iint\limits_S \underbrace{(x^2+2xy)}_{P}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\underbrace{yz}_{Q}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\underbrace{(x^2+\sin y)}_{R}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

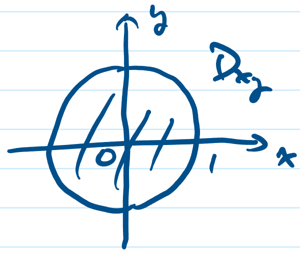
其中 S 是曲面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1\ (z\geq 0)$，取上侧.



解：补 S'：$z=0$，$(x,y)\in D_{xy}$，取下侧.

$$\Rightarrow I=\oiint\limits_{S+S'} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint\limits_{S'}\cdots$$



$$=\iiint\limits_V(2x+2y+z+0)\,\mathrm{d}V$$

$$-\iint\limits_{S'}(x^2+\sin y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+\sin y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

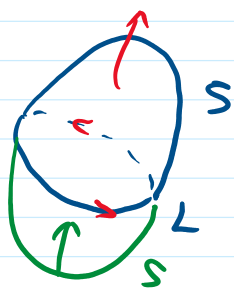
$$=\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 z\cdot\pi\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cdots$$

二、Stokes公式

空间闭曲线上的第二型曲线积分可转化为第二型曲面积分

定理： 设 L 为分段光滑的空间有向闭曲线，S 是以 L 为边界的分片光滑有向曲面，L 的正向与 S 的法向量满足右手定则，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在包含曲面 S 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数，则有 **Stokes公式**

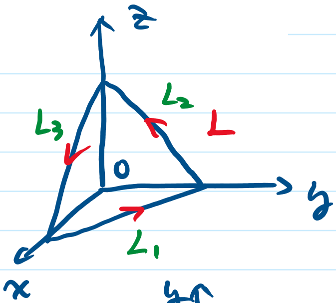


$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

- **注：若 L 为 xOy 平面闭曲线，S 为平面区域，可得Green公式.**

例5: 计算$I=\oint_L z\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$，其中$L$为平面$x+y+z=1$被三个坐标面所截得的三角形$S$的整个边界，其正向与这个三角形上侧的法向量满足右手定则.



解：(法一). $I=3\oint_L z\,dx$

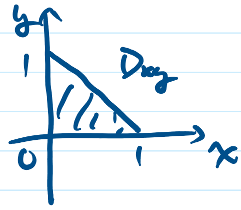
$$=3\left(\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}\right)z\,dx$$

L_1: $z=0$. $y=1-x$. $x:1\to 0$.

L_2: $x=0$. $z=1-y$. $y:1\to 0$.

L_3: $y=0$. $z=1-x$. $x:0\to 1$

$\Rightarrow$ $I=3\int_0^1(1-x)\,dx=\frac{3}{2}$.



$I=\frac{1}{\sqrt3}\iint_S 3\,dS$

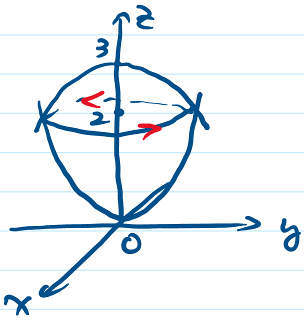
(法二). 取S: $x+y+z=1$. 上侧. $\longrightarrow$ $\vec{n}=(1,1,1)$

$\Rightarrow \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt3}$

$$\Rightarrow I=\iint_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\iint_S dydz+dzdx+dxdy=3\iint_S dxdy$$

$$=3\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{3}{2}.$$

例6: 计算$I=\oint_L z^3\mathrm{d}x+x^3\,\mathrm{d}y+y^3\,\mathrm{d}z$，其中$L$为曲面$z=2(x^2+y^2)$与$z=3-x^2-y^2$的交线，从$z$轴正向往负向看，$L$为逆时针方向.



解：由 L: $\begin{cases} z=2(x^2+y^2)\\ z=3-x^2-y^2\end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} x^2+y^2=1\\ z=2\end{cases}$

$\Rightarrow$ L: $\begin{cases} x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=2.\end{cases}$ $\theta: 0\to 2\pi$. $\Rightarrow$ $I=\int_0^{2\pi}\cdots d\theta=\cdots$

(法二). 取S: $z=2$. $(x,y)\in D_{xy}$ $(x^2+y^2\le 1)$ 取上侧.

$$\Rightarrow I=\iint_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^3 & x^3 & y^3\end{vmatrix}=3\iint_S x^2\,dxdy$$

$$=3\iint_{D_{xy}}x^2\,dxdy=\frac{3}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr=\frac{3}{4}\pi.$$

例7： 计算$I=\oint_L 3y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+2x^2\mathrm{d}z$, 其中$L$为曲面$z=x^2+y^2$与平面$2x+2y+z=2$的交线, 从$z$轴正向看$L$为逆时针方向.

三、空间曲线积分与路径无关的条件

空间第二型曲线积分与路径无关的条件

定理: 设G是空间一维单连通区域, 函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在G上具有一阶连续偏导数, 则下列四个命题等价:

(1) 对G内任意分段光滑的闭曲线L, 有$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=0$;

(2) 曲线积分$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$的值在$G$内与路径无关;

(3) 表达式$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$在$G$内是某个三元函数$u(x,y,z)$的全微分, 即: $\mathrm{d}u(x,y,z)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$;

(4) 等式$\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$G$内处处成立.

例8: 计算$I=\int_L (x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z$, 其中$L$为从点$A(a,0,0)$沿螺旋线$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=\dfrac{h}{2\pi}t\ (a>0,\ h>0)$到点$B(a,0,h)$的一段弧.