多元函数的极值

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

基本概念：

定义：设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，

若 $\forall(x,y)\in\overset{o}{U}(P_0)$，有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$）

则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极大值（或极小值）。

- 极大值和极小值统称为极值，使函数取得极值的点称极值点

例如： ① 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点取得极小值 0；

② 函数 $z=1-x^2-y^2$ 在 $(0,0)$ 点取得极大值 1；

③ 函数 $z=xy$ 在 $(0,0)$ 点无极值。

回 顾：

一元函数的极值（必要条件、一阶和二阶充分条件）

- 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，且在该点取得极值，则 $f'(x_0)=0$;
- 函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 可导 $\begin{cases} f'(x) \text{ 左正右负} \Rightarrow x_0 \text{ 为极大值点} \\ f'(x) \text{ 右正左负} \Rightarrow x_0 \text{ 为极小值点} \end{cases}$
- 函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$

$$\begin{cases} f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{ 为极小值点} \\ f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{ 为极大值点} \end{cases}$$

二元函数极值的必要条件:

定理1: 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可偏导， 且在该点取得极值， 则: $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$。

证: 由 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值, 则:

函数 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值 $\Longrightarrow$ $f_x(x_0,y_0)=0$

函数 $z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处取得极值 $\Longrightarrow$ $f_y(x_0,y_0)=0$

- **驻点:** 使偏导数均为 0 的点。

注: 可偏导的函数的极值点一定是驻点。

注：可偏导的函数的极值点一定是驻点；

驻点不一定是极值点。（例：$z = xy$ 在 $(0,0)$ 点不取极值）

例：函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0,0)$ 点取得极小值，

但该函数在 $(0,0)$ 点偏导不存在。

$$\text{可疑极值点}\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{偏导不存在点}\end{cases}$$

二元函数极值的充分条件:

定理2: 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导，

且 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的驻点 $(f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0)$

记：$A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0)$

① 当 $AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极值 $\begin{cases} A>0 \text{ 时为极小值} \\ A<0 \text{ 时为极大值} \end{cases}$

② 当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值；

③ 当 $AC-B^2=0$ 时，不能确定，需另行讨论。

举例：

例1：求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解：第一步：求驻点

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得：$x=1$ 或 -3，$y=0$ 或 2

即：驻点为 $(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$

第二步：判别

求函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数：

$$f_{xx}(x,y)=6x+6, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

① 在点 $(1,0)$ 处：$A=12, B=0, C=6$

$$AC-B^2=12\times 6>0, \qquad A>0$$

故：$f(1,0)=-5$ 为极小值；

② 在点 $(1,2)$ 处：$A=12, B=0, C=-6$

$$AC-B^2=-12\times 6<0$$

故：$f(1,2)$ 不是极值；

$$f_{xx}(x,y)=6x+6, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

③ 在点 $(-3,0)$ 处：$A=-12, B=0, C=6$

$$AC-B^2=-12\times 6<0$$

故：$f(-3,0)$ 不是极值；

④ 在点 $(-3,2)$ 处：$A=-12, B=0, C=-6$

$$AC-B^2=12\times 6>0,\qquad A<0$$

故：$f(-3,2)=31$ 为极大值。

总 结：

多元函数的极值：

- **二元函数极值的必要条件**

  若极值点处可偏导，则该点一定是驻点。

- **二元函数极值的充分条件**

  利用二阶偏导判别驻点是否是极值点。