第一章第二章检测详解

一、单选题（共 8 题，40 分）

1、

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^5=(\quad)$$

A、$\begin{pmatrix}9&24&39\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$ B、$\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&8\\9&24&39\end{pmatrix}$ C、$\begin{pmatrix}39&24&9\\8&5&2\\9&6&3\end{pmatrix}$ D、$\begin{pmatrix}5&14&23\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$

正确答案： C

解析：$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$是一个倍加矩阵，

$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$是一个对调矩阵，$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^2=\mathbf{E}$，$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

先对$\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$做两次倍加行变换$r_1+2r_2$，再将得到的矩阵做 1，3 列的对调，最后所得矩阵就是答案

2、

设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则（ ）正确。

A、 $\mathbf{B}=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}$ B、 $\mathbf{B}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{A}$ C、 $\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ D、 $\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$

正确答案： A

解析：在 $\mathbf{A}$ 的左边乘初等矩阵，表示做初等行变换。

$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}$ 表示先将 $\mathbf{A}$ 的 1，2 行对调，再将得到的矩阵做倍加行变换 r_3+r_1，最后得到的恰为 $\mathbf{B}$

3、设 A 是 $t\times k$ 矩阵，B 是 $k\times t$ 矩阵，若 B 的第 j 列元素全为零，则下列结论正确的是( )

A、 AB 的第 j 行元素全为零

B、 AB 的第 j 列元素全为零

C、 BA 的第 j 列元素全为零

D、 BA 的第 j 行元素全为零

正确答案： B

解析：

注：$\mathbf{AB}$ 的第 j 列 $=\mathbf{Ab}_j$， 其中 $\mathbf{b}_j$ 为 $\mathbf{B}$ 的第 j 列，

这可从矩阵乘法的定义来想，也可从下式来想

$\mathbf{AB}$ 的第 j 列 $=(\mathbf{AB})\mathbf{e}_j=\mathbf{A}(\mathbf{Be}_j)=\mathbf{Ab}_j$， 其中 $\mathbf{b}_j$ 为 $\mathbf{B}$ 的第 j 列

4、

与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 等价的矩阵是（ ）

A、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C、 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D、 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

正确答案： A

解析： 略

5、

已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，则下列性质不正确的是（　　　）

A、 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

B、 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

C、 $\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB}$

D、 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

正确答案： D

解析：略

6、

已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, k 为正整数， $\mathbf{A}^k = m\mathbf{A}$, 则 $m =$（　　　）

A、 4^{k-1} B、 6^{k-1} C、 4^k D、 6^k

正确答案： B

解析：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [1, -1, 2]$$

记$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}^k = (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)^k = (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\cdots(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)$$

$$= \mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a})(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\cdots(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}^T = (\mathbf{a}^T\mathbf{a})^{k-1}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)$$

$$= 6^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

7、如果一个$n \geq 2$阶行列式中元素均为± 1, 则此行列式的值必为(　　)

A、 奇数

B、 偶数

C、 -1

D、 1

正确答案： B

解析：

方法 1：可用数学归纳法证明

方法 2：以三阶行列式为例，三阶行列式共有 6 项，每一项要么为 1，要么为-1.

因为总共有 6 项，若为 1 的项的个数是偶数，则为-1 的项的个数也是偶数，行列式的值就是偶数。

因为总共有 6 项，若为 1 的项的个数是奇数，则为-1 的项的个数也是奇数，行列式的值也是偶数。

对于 n 阶行列式可类似地思考

方法 3：用具体的行列式验证，比如$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$

8、

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

A、 $2(x+y)(x^2+xy+y^2)$

B、 $-2(x+y)(x^2+xy+y^2)$

C、 $2(x^3+y^3)$

D、 $-2(x^3+y^3)$

正确答案： D

解析：

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \overset{\text{把}2,3\text{列都加到第}1\text{列}}{=} \begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 2x+2y & x+y & x \\ 2x+2y & x & y \end{vmatrix}$$

$$\overset{2,3\text{行都减第}1\text{行}}{=} \begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$=(2x+2y)\begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix}$$

二、填空题（共 7 题，35 分）

1、 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 是x的一次多项式,其一次项的系数等于(　).

正确答案： −18

解析：

x的系数就是x的代数余子式

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-18$$

2、

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (\quad)$$

正确答案： -35
解析： 对调 2,3 列可化成分块下三角行列式

3、

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{y}=(\quad)$.

正确答案： 2
解析：

4、
设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是三元列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,

$B=(\alpha_1-\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$, $|A|=1$, 则 $|B|=(\quad)$.

正确答案： -2
解析：

$$|\alpha_1-\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3|=2|\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3|$$

$$\overset{c_1+c_2}{\underset{c_3-c_1}{=}} 2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3| \overset{c_3-c_1}{=} 2|\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3|=-2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=-2$$

5、

已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=(\quad)$

正确答案： 0

解析： 性质 2-7 第 2 行的数乘以第 4 行的代数余子式之和等于 0

6、

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (\qquad)$$

正确答案： 5

解析： $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 这是各行元素之和相等的行列式

7、

已知 $\begin{vmatrix} a+2 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+2 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} = ma+4$，则 $m = (\qquad)$

正确答案：

第 1 空： 12

解析：

$$\begin{vmatrix} a+2 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+2 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \overset{\text{都减第一行}}{=} \begin{vmatrix} a+2 & a & a & a \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{做列变换}}{=} \begin{vmatrix} 6a+2 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12a+4$$

三、多选题（共 7 题，35 分）

1、

设 **A** 为 4×5 型矩阵，**B** 为 5×4 型矩阵，**C** 为 4×1 型矩阵，**D** 为 5×4 型矩阵，判断下列哪些表达式是正确的

A、 BAC
B、 A(B+D)
C、 ABD
D、 ABABC
E、 AD+BC

正确答案： BD

解析： 矩阵能做乘法运算的前提条件是前一矩阵的列数需要等于后一矩阵的行数

2、

设矩阵A和C满足 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}C\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，则

A、 $\mathbf{A}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\mathbf{B}_1\xrightarrow{r_3-2r_1}\mathbf{C}$
B、 $\mathbf{A}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\mathbf{B}_2\xrightarrow{r_3+2r_1}\mathbf{C}$
C、 $\mathbf{A}\xrightarrow{r_3+2r_1}\mathbf{B}_3\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\mathbf{C}$
D、 $\mathbf{A}\xrightarrow{r_3-2r_1}\mathbf{B}_4\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\mathbf{C}$

正确答案： BC

解析：

注意：矩阵的乘法满足结合律

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\mathbf{C}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\mathbf{C})\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

含义是$\mathbf{C}\xrightarrow{r_3-2r_1}\mathbf{B}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\mathbf{A}$

从上式可得

$$\mathbf{A}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\mathbf{B}\xrightarrow{r_3+2r_1}\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\mathbf{C}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}(\mathbf{C}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix})$$

含义是$\mathbf{C}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\mathbf{B}\xrightarrow{r_3-2r_1}\mathbf{A}$

从上式可得

$$\mathbf{A}\xrightarrow{r_3+2r_1}\mathbf{B}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\mathbf{C}$$

3、下列说法正确的有

A、 若 $A^2=E$，则 $A=E$ 或 $A=-E$，其中矩阵都是 n 阶方阵.

B、 若矩阵 A 和 B 等价，则 B 和 A 等价.

C、 若 A 是反称矩阵，则 A^2 是对称矩阵.

D、 若矩阵 A 和 B 等价， B 和 C 等价，则 A 和 C 等价.

E、 若 A 和 B 均为 n 阶方阵，则 $(AB)^k=A^kB^k$ （k >1 为正整数）.

正确答案： BCD

解析：

A错的原因：$\mathbf{A}^2=\mathbf{E}\Rightarrow(\mathbf{A}+\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{O}$, 但$\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 和$\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 可以都不是$\mathbf{O}$

反例$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

B、D都对

若能经过有限次初等变换将矩阵$\mathbf{A}$化成矩阵$\mathbf{B}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$等价。

初等变换都是可逆的。

C对的原因： $(\mathbf{A}^2)^T=(\mathbf{A}^T)^2=(-\mathbf{A})^2=\mathbf{A}^2$

E 错的原因：矩阵的乘法不满足交换律

4、下列矩阵那些是等价标准形？

A、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B、$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

正确答案： ACDE

解析： 好好看一下等价标准形的定义即可

5、

设 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 都是 n 元列向量，则下列选项正确的是（　　　　）

A、$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\mathbf{b}^T\mathbf{a}$ B、$\mathbf{a}\mathbf{b}^T=\mathbf{b}\mathbf{a}^T$ C、$(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)^2=(\mathbf{b}^T\mathbf{a})(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)$ D、$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\mathbf{b}\mathbf{a}^T$

正确答案： AC

解析：

A对　设$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$,则$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\mathbf{b}^T\mathbf{a}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\mathbf{b}^T\mathbf{a}$

B错　设$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$,则$\mathbf{ab}^T=\begin{bmatrix}2&3&4\\2&3&4\\2&3&4\end{bmatrix}_3,\mathbf{ba}^T=\begin{bmatrix}2&2&2\\3&3&3\\4&4&4\end{bmatrix}_3,\mathbf{ab}^T\neq\mathbf{ba}^T$

注意：$\mathbf{a}^T\mathbf{b}$和$\mathbf{b}^T\mathbf{a}$是数，$\mathbf{ab}^T$和$\mathbf{ba}^T$是矩阵

C对　$(\mathbf{ab}^T)^2=(\mathbf{ab}^T)(\mathbf{ab}^T)=\mathbf{a}(\mathbf{b}^T\mathbf{a})\mathbf{b}^T$

注意：$\mathbf{b}^T\mathbf{a}$是数，可以提到前面

$(\mathbf{ab}^T)^2=(\mathbf{b}^T\mathbf{a})(\mathbf{ab}^T)$

D错　注意：$\mathbf{a}^T\mathbf{b}$是数，$\mathbf{ba}^T$是矩阵

6、

设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$都是n阶方阵，$\mathbf{E}$为n阶单位矩阵，则下列选项正确的是（　　　）

A、$(\mathbf{AB})^2=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

B、$\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-2\mathbf{E}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E})$

C、若$\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$

D、若$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$

E、$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$

正确答案： BD

解析：

A错　原因是矩阵不满足交换律

$(\mathbf{AB})^2=\mathbf{ABAB}\neq\mathbf{AABB}$

B对　由于单位矩阵$\mathbf{E}$与同阶方阵相乘时都可交换，所以这样的公式都对。

C错　反例　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$，$\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$

D对　把$\mathbf{A}$设出来，再把$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$算出来，重点观察$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$的对角元，

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$的对角元都是平方和的样子，

由$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{O}$可知，$\mathbf{A}$中的元素全为0

E错　注意$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

7、

设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$都是n阶方阵，k为数，则下列选项正确的是（　　　　）

A、$\left|k\mathbf{A}\right|=k^{n}\left|\mathbf{A}\right|$

B、$\left|\mathbf{A}+\mathbf{B}\right|=\left|\mathbf{A}\right|+\left|\mathbf{B}\right|$

C、$\left|\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\right|=\left|\mathbf{A}\right|^{2}$

D、$\begin{vmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{A} & \mathbf{A}\end{vmatrix}=\left|\mathbf{A}\right|^{2}$

正确答案： AC

解析：

$\left|\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\right|=\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right|\left|\mathbf{A}\right|$，$\begin{vmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{A} & \mathbf{A}\end{vmatrix}=(-1)^{n}\left|\mathbf{A}\right|^{2}$，这两个式子与第 2 章第 4 节的内容有关