大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

数量值函数的曲面积分

主讲教师：石 瑞

- 第一型曲面积分的概念
- 曲面积分与定积分的转化
- 典型例题

第一型曲面积分的概念

与引入定积分概念的四个主要步骤（分划，代替，求和，取极限）作对比，我们同样可以运用类似的步骤引入数量值函数曲面积分的概念.

设 S 为曲面，f 为定义在 S 上的三元函数 $f(x,y,z)$，可从物理角度将 f 看成密度函数.

首先，将 S 分划为 n 个小曲面 ΔS_i，$i=1,\ldots,n$，并用 ΔS_i 表示对应小曲面的面积;

其次，在每个小曲面 ΔS_i 上选取特值 (ξ_i,η_i,ζ_i)，并用 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 代替小曲面 ΔS_i 的质量;

再次，将 n 个小曲面 ΔS_i 对应的乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 求和;

最后，令空间曲面 S 分划的份数 n 趋向无穷，考虑上一步中 n 项 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ 求和的极限.

第一型曲面积分的概念

通过上述四个步骤，$f(x, y, z)$ 在 S 上的曲面积分可以归结为如下和式的极限

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i}$$

上述极限称为数量值函数 f 在曲面 S 上的**第一型曲面积分**.

设曲面

其中 D

即 S 为

【例1 R) 与

平面 z

典型例题

【总结】设 S 的方程为

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D_{xy}$$

其中函数 $z = z(x,y)$ 在 D_{xy} 上有连续偏导数，D_{xy} 为 S 在 xOy 上的投影域.

若 $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，那么第一型曲面积分的计算公式为如下形式：

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy\,.$$

计算步骤： 【投影】 根据具体情况确定曲面 S 的投影域，作为二重积分的积分域；

【代 z 】 将被积函数 $f(x,y,z)$ 中的 z 用 $z(x,y)$ 代替；

【换 dS 】将曲面 S 的面积微元 dS 转换为$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$.