空间曲面的切平面与法线

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

回 顾：

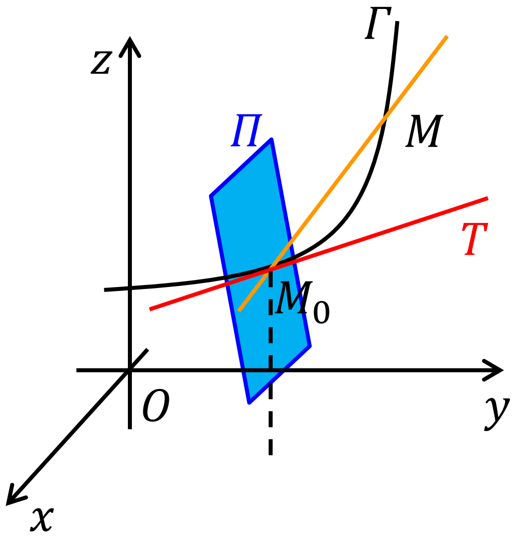
空间曲线的切线与法平面

空间光滑曲线 Γ ：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

在 $t=t_0$ 对应点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处

切线方程： $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$



空间曲面的切平面与法线:

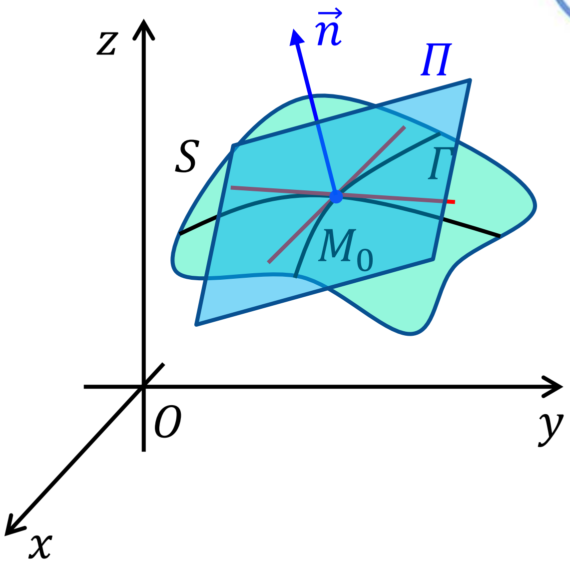
1. 隐式情况

空间曲面S的方程为：$F(x,y,z)=0$，

$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$为曲面上一点，且设

$F(x,y,z)$在该点偏导连续且不全为0。

在曲面S上，过M_0任意作曲线Γ，

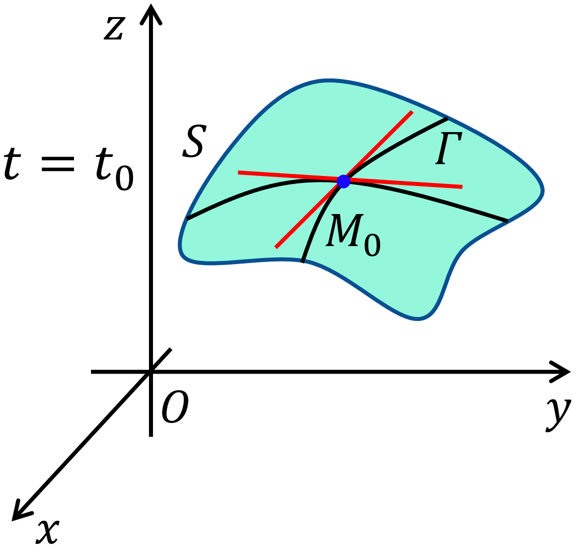


下面证：曲面S上过M_0的任何曲线的切线都处在同一个平面上。

该平面称为曲面S在M_0点处的切平面。

证： 在设曲面 S 上，过 M_0 作任意曲线 Γ

方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$，$M_0$ 点对应 $t=t_0$



且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$ 不同时为0。

则曲线 Γ 在 M_0 点处的切线的切向量为：

$$\vec{s}=(\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0))$$

另一方面，由曲线 Γ 在曲面 S 上，则：$F\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)=0$

曲线 Γ 在曲面 S 上，则：$F\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)=0$

对 t 求导，然后令 $t=t_0$，则有：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0$$

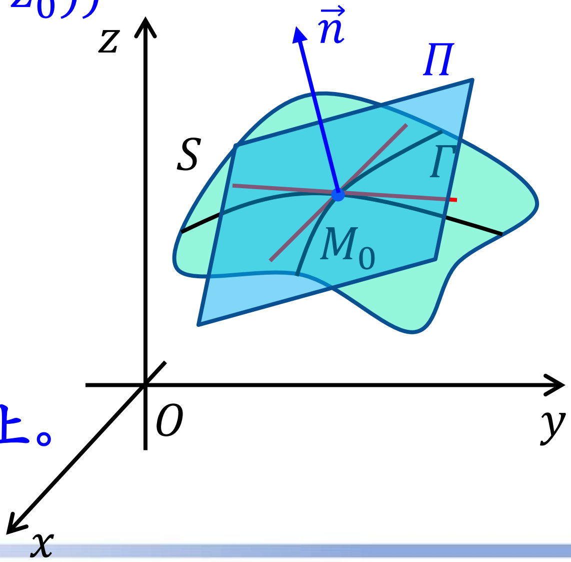
令 $\vec{n}=\big(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\big)$

由曲线 Γ 在 M_0 点处的切线的切向量：

$$\vec{s}=\big(\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0)\big)$$

则有：$\vec{n}\cdot\vec{s}=0$，即：$\vec{n}\perp\vec{s}$

故：过 M_0 的所有曲线的切线都在同一平面上。



该平面称为曲面 S 在 M_0 点处的切平面

切平面的法向量：$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

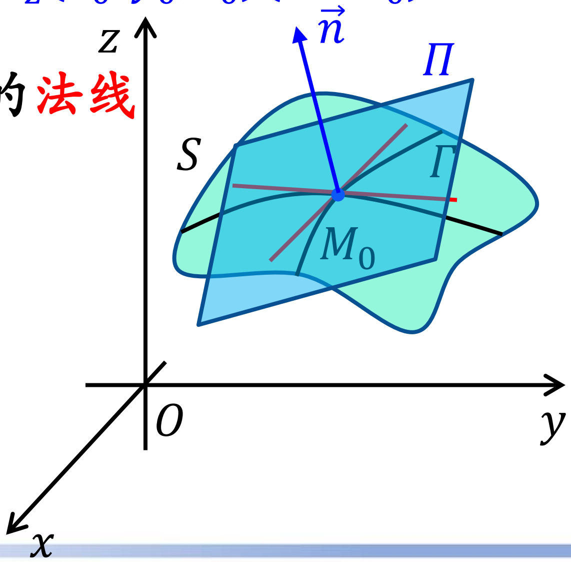
切平面方程：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

过 M_0 垂直于切平面的直线称为曲面在该点的**法线**

法线方程：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$



2. 显式情况

空间曲面S的显式方程为：$z=f(x,y)$，即：$f(x,y)-z=0$

令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$，由$F_x=f_x(x,y), F_y=f_y(x,y), F_z=-1$

故：当函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有连续偏导时，曲面S在点

$M_0(x_0,y_0,z_0)$处切平面的法向量为：$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$

切平面方程：$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

法线方程：
$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

举例：

例1：求曲面 $xy+yz+zx-1=0$ 在点 $M_0(3,-1,2)$处的切平面与法线方程。

解：令 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-1$，由

$$F_x=y+z,\ F_y=x+z,\ F_z=x+y$$

在 $M_0(3,-1,2)$点，切平面的法向量：$\vec{n}=(1,5,2)$

切平面方程：$(x-3)+5(y+1)+2(z-2)=0$ $(x+5y+2z=2)$

法线方程：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{2}$

总 结:

空间曲面 S 在曲面上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面与法线:

曲面 S 的方程为: $\begin{cases} 1.\quad F(x,y,z)=0 \\ 2.\quad z=f(x,y) \end{cases}$ (令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$)

切平面方程:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$