以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

主讲人：李正学

大连理工大学数学科学学院

主要内容

- 傅里叶系数计算公式
- 狄里克雷收敛定理
- 例子

以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

设以 2π 为周期的可积函数 $f(x)$ 能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

且右边的级数可以逐项积分，下面推导展开式的系数

$a_0, a_n, b_n\left(n=1,2,\cdots\right)$ 的计算公式。

傅里叶系数

设以 2π 为周期的可积函数 $f(x)$ 能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\big(f(x),1\big)$$

$$=\left(\frac{a_0}{2},1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(\cos nx,1)+b_n(\sin nx,1)]$$

$$=\frac{a_0}{2}\times 2\pi+0+0=\pi a_0,$$

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.}$$

傅里叶系数

设以 2π 为周期的可积函数 $f(x)$ 能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\left(f(x),\cos nx\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}(1,\cos nx)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\cos kx,\cos nx)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(\sin kx,\cos nx)$$

$$=0+a_n\left(\cos nx,\cos nx\right)+0$$

$$=\pi a_n,$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.}$$

傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1,2,\cdots.$$

傅里叶级数

以 2π 为周期的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

(1) $f(x)$ 的傅里叶级数何时收敛?

(2) $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数 $s(x)=$?

何时 $s(x)=f(x)$?

狄利克雷收敛定理

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$上满足条件

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 只有有限个单调区间。

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且

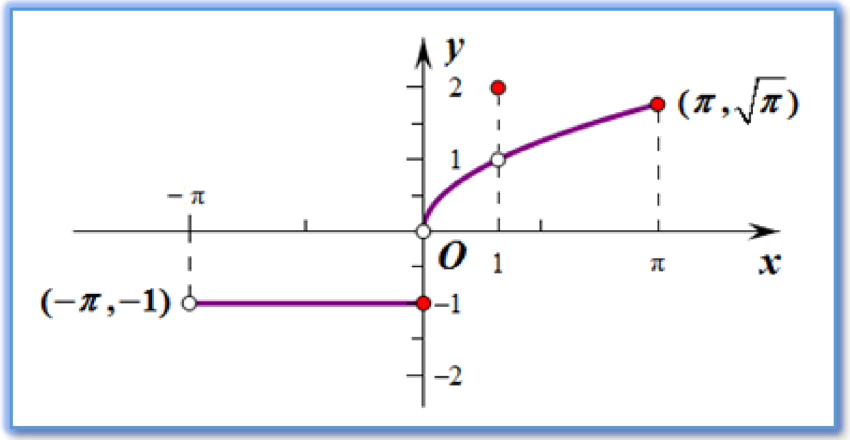
(1) 当 x 为 $f(x)$ 连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 间断点时，级数收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$；

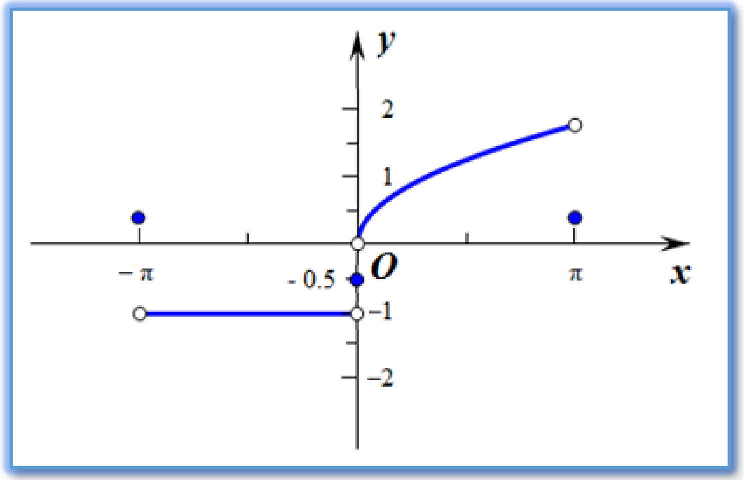
特别地， 当 $x=\pm\pi$ 时，级数收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$。

傅里叶级数的和函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ \sqrt{x}, & 0<x\le\pi,\text{且 } x\ne 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$



$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\pi}-1}{2}, & x=\pm\pi\\ -1, & -\pi<x<0\\ -0.5, & x=0\\ \sqrt{x}, & 0<x<\pi,\text{且 } x\ne 1\end{cases}$$



傅里叶级数的两点说明

(1) $f(x)$ 傅里叶级数的和函数 $s(x)$ 可根据狄里克雷收敛定理，由函数 $f(x)$ 的图形直接写出，不必利用傅里叶级数。

(2) 傅里叶收敛定理表明，函数展开成傅里叶级数的条件远比展开成幂级数的条件低，通常遇到的周期函数基本上都能展开成傅里叶级数。

小 结

- 傅里叶级数系数计算公式

- 狄里克雷收敛定理

y^*

以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

主讲人：李正学

大连理工大学数学科学学院