一、选择题（共 50 分，每答对一道小题得 5 分）

1、曲面 $z=x^3+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切平面和法线方程依次为（　　）

(A) $3x+2y-z=3$，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=2-z$.

(B) $3x+2y+z=7$，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z-2$.

(C) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=2-z$，$3x+2y-z=3$.

(D) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z-2$，$3x+2y+z=7$.

2、设函数 $f(x,y)=3x+4y-x^2-2y^2-2xy$，则 $f(x,y)$ 有唯一的（　　）

(A) 极小值 $\dfrac{5}{2}$.　　(B) 极大值 $\dfrac{5}{2}$.

(C) 极大值 $-\dfrac{15}{2}$.　　(D) 极小值 $-\dfrac{15}{2}$.

3、设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则（　　）

(A) $f'_x(0,0)=0, f''_{xy}(0,0)=-1$.　　(B) $f'_x(0,0)=1, f''_{xy}(0,0)=-1$.

(C) $f'_x(0,0)=0, f''_{xy}(0,0)=1$.　　(D) $f'_x(0,0)=1, f''_{xy}(0,0)=1$.

4、将函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ 1-x, & x\in(1,2] \end{cases}$ 展成 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$，其中 Fourier 系数 $b_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$，级数的和函数记为 $S(x)$，则（　　）

(A) $S(1)=1, S(\frac{7}{2})=-\frac{1}{2}$.　　(B) $S(1)=\frac{1}{2}, S(\frac{7}{2})=\frac{1}{2}$.

(C) $S(1)=\frac{1}{2}, S(\frac{7}{2})=-\frac{1}{2}$.　　(D) $S(1)=1, S(\frac{7}{2})=\frac{1}{2}$.

5、设函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$，则级数 $f(0)+f'(0)+\cdots+f^{(n)}(0)+\cdots$（　　）

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散，且部分和数列趋于 $+\infty$.　　(D) 发散，且部分和数列趋于 $-\infty$.

6、以下四个正项级数中，发散的是（　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$.

7、设曲面 $S: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$，则曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=$（　　）

(A) $\frac{2}{3}\pi$.

(B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

(C) $\sqrt{2}\pi$.

(D) π.

8、设V是由两个曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-x^2-y^2$围成的$\mathbf{R}^3$中的有界闭区域，则三重积分$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=$（　　）

(A) $\frac{4}{3}\pi$.　　(B) $\frac{8}{3}\pi$.

(C) π.　　(D) $\frac{1}{2}\pi$.

9、二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} x\cos(1-y)^2 dy =$（　　）

(A) $\frac{1}{4}\sin 1$.　　(B) $-\frac{1}{4}\sin 1$.

(C) $\frac{1}{4}\cos 1$.　　(D) $-\frac{1}{4}\cos 1$.

10、设曲线 $L: x^2+y^2=1\ (x\ge 0, y\ge 0)$，质量线密度 $\rho\equiv 1$，则 L 对 x 轴的转动惯量等于（　　）

(A) $\frac{\pi}{8}$.　　(B) $\frac{\pi}{4}$.

(C) $\frac{\pi}{2}$.　　(D) π.

二、（10 分）求微分方程 $y''+y'-2y=\mathrm{e}^x$ 的通解.

三、（10 分）通过 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u \\ y=\mathrm{e}^v \end{cases}$，变换方程 $2x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

四、（10 分）求曲线积分$\int_L f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y$，其中函数$f(x)$具有二阶连续导数，$L$是圆周线$(x-1)^2+(y-\pi)^2=1+\pi^2$上从点$A(2,2\pi)$沿逆时针方向到点$O(0,0)$的有向弧段.

五、（10 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+2}{n+1}x^{n+1}$的收敛域、和函数$S(x)$.

六、（10 分）求曲面积分$\iint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Sigma$是曲面$z=x^2+y^2$被平面$z=x$所截下

的有限部分，取下侧.