绝对收敛与条件收敛

主讲人：刘秀平 教授

绝对收敛与条件收敛

若级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$各项的绝对值所构成的正项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$收敛，

则称级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$是绝对收敛的。例如$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$.

若级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛，但$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$为条件收敛。

例如,$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$　　（1）是条件收敛的。

级数的绝对收敛与级数密切相关，具体有如下定理：

定理：若级数$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$必收敛。

绝对收敛与条件收敛

证明：首先 $v_n = \frac{1}{2}(|u_n|+u_n) \geq 0.$

其次 由于 $|u_n|+u_n \leq 2|u_n|$

$v_n \leq |u_n|.$

由比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 必收敛.

再由 $u_n = 2v_n - |u_n|$ 知，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 必收敛。

该定理表明，对于一般级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$，如果用正项级数判别法判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛，则此级数必收敛。这使得一大批级数敛散性判断问题转化为正项级数的敛散性判断。

绝对收敛与条件收敛

另外，如果级数$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$发散，通常我们不能断言级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$发散。

但是，当该判断方法是由比值法或根值法获得的，则该级数必发散。

备注：$v_n=\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)=\begin{cases}u_n，& u_n\ge 0.\\ 0，& u_n\le 0.\end{cases}$

因此，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$是级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$中全体正项所构成的级数。

同样，$w_n=\frac{1}{2}(u_n-|u_n|)=\begin{cases}0，& u_n\ge 0.\\ u_n，& u_n\le 0.\end{cases}$，

则级数$\sum_{n=1}^{+\infty}w_n$是级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$中全体负项所构成的级数。

绝对收敛与条件收敛

因此可得，

当$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$绝对收敛时，其全体正、负项所构成的级数均收敛。

当$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$条件收敛时，其全体正、负项所构成的级数至少有一个是发散的。

绝对收敛与条件收敛

例题1 判断下列级数的绝地收敛和条件收敛性.

$$1.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}(p>0).2.\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}.3.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}.$$

解：$1.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}(p>0),\Rightarrow u_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$,由莱布尼兹判别法知，

交错级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$是收敛的。

其次,$|u_n|=\frac{1}{n^p}.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{收敛，} p>1.\\ \text{发散，} p\le 1.\end{cases}$

所以级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}(p>0)=\begin{cases}\text{绝对收敛，} p>1.\\ \text{条件收敛，} p\le 1.\end{cases}$

特别，当$p=1$时,$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$是条件收敛的。

绝对收敛与条件收敛

2.$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^3}{2^n}$，由于$|u_n|=\dfrac{n^3}{2^n}$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^3}{2^n}}=\dfrac{1}{2}<1.$

所以,$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^3}{2^n}$是绝对收敛的。

3.$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!},|u_n|=\dfrac{2^{n^2}}{n!},$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{2^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}}{n+1}=+\infty>1.$

所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$是发散的。

绝对收敛与条件收敛

例题2 判断级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$是绝对收敛还是条件收敛.

解：首先，由$u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$知,$|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

由极限判别法知,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$是发散的。

其次，尽管级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$是交错级数，

而且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}=0$,但由于数列$\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$不是单调的，

因此，在此处不能使用莱布尼兹判别法。

绝对收敛与条件收敛

考虑其部分和：$s_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)<0.$

又由于$s_{2n+2}=s_{2n}+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+3}}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\right)$，$s_{2n}\downarrow$单调下降。

$$s_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)>\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}>-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此，s_{2n}是单调有界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}$存在。

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=0.$

因此，由$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}$，知$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n+1}$存在。 所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在。因此该级数是收敛的。

综上，该级数是一个条件收敛的级数。

绝对收敛与条件收敛

谢谢!