1. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$收敛.

证明 $\left|\frac{u_n}{n}\right|\le\frac{1}{2}\left(u_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$收敛.

2. 设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛？并说明理由.

解 $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$，

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\frac{1}{a+1}<1$，由根值判别法知，

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

3. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$都收敛，且$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\ (n=1,2,\cdots)$，试证级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

证明 因为$0\le b_n-a_n\le c_n-a_n$， 所以$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛，

由$b_n=(b_n-a_n)+a_n$，可知$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

4. 下列数项级数中收敛的个数为________.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$； **(2)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{2}{n})$； **(4)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

A．**1** **B**．**2** **C**．**3** **D**．**4**

解 答案 **D**

(1) $\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

(4) $\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}<\left(\frac{5}{2}\right)^n\frac{n^3}{3^n}=\left(\frac{5}{6}\right)^n n^3$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}(n+1)^3}{\left(\frac{5}{6}\right)^n(n)^3}=\frac{5}{6}$ 收敛

5. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\alpha}{n}$收敛，则$\alpha$的取值范围是 <u>0</u>；

6. 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n}}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ （ ）

(A) 条件收敛； **(B)** 绝对收敛；

(C) 发散； **(D)** 敛散性不能确定。

解 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$收敛

$\frac{\sqrt{a_{2n}}}{\sqrt[3]{n^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(a_{2n}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{2}{3}}}\right)$， $\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{2}{3}}}<\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 绝对收敛

7. 已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^{\alpha}}$收敛，则$\alpha$应满足______.

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}}=1$，$\alpha-\frac{1}{2}>1\Rightarrow\alpha>\frac{3}{2}$

8. 设有两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若$\lim_{n\to\infty}a_n=0$， 则（　　）

（**A**）当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛 （**B**）当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

（**C**）当$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛（**D**）当$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散

解 证明（**C**）对.

当$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\Rightarrow|b_n|\to0\Rightarrow$由保号性，$n$充分大时，$|b_n|<1\Rightarrow n$充分大时，$b_n^2<|b_n|$. 又由$\lim_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow$由保号性，$n$充分大时，$a_n^2<1$

从而n充分大时，$a_n^2b_n^2<|b_n|$，由比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛.

(A) $a_n=b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ **(B)** $a_n=b_n=\frac{1}{n}$ **(D)** $a_n=b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$

9. 以下四个数项级数中，发散的是__________.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1.001}}$；　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$；

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$；　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

解　**D**　$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}$

10. 以下命题中正确的是__________.

A. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛.

B. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛.

C. 若$u_n>0$，且$u_n=o(\frac{1}{n})\quad(n\to\infty)$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

D. 若$u_n>0$，且$\lim_{n\to\infty}u_n\sqrt{n}=1$，则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛.

解　证明 **B** 对.

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛

A. $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$　　**C.** $u_1=1$，$u_n=\frac{1}{n\ln n}$，$n=2,3,\cdots$ **D.** $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$