7 个重要函数的麦克劳林级数（下）

例 1、　将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解　对 $\sin x$ 的幂级数展开式逐项求导，得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (x\in(-\infty,+\infty)).$$

例 2、　将 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数.

解　因为

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1),$$

从 0 到 x 逐项积分，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1),$$

由于 $x=1$ 时，右端级数收敛，故上式当 $x=1$ 也成立.

例 3、　将 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 展开为 x 的幂级数.

解　由 $(1+x)^{\alpha}$ 的泰勒公式知其泰勒级数为

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

很容易求出级数的收敛半径为1，故收敛区间为 $(-1,1)$. 设其和为 $S(x)$，即

$$S(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

逐项求导，得

$$S'(x)=\alpha+\alpha(\alpha-1)x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots,$$

由此得

$$(1+x)S'(x)=\alpha\left\{1+\left[(\alpha-1)+1\right]x+\cdots+\left[\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right]x^n+\cdots\right\}$$

$$=a\left[1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\right]=\alpha S(x).$$

这是可分离变量的一阶微分方程，解之并注意初始条件 $S(0)=1$，即得

$$S(x)=(1+x)^{\alpha},$$

于是

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots \quad (-1<x<1).$$

注意，由于端点$x=\pm 1$处的敛散性和具体的α值有关，因此$-1<x<1$仅为收敛区间.

当$\alpha=-1$时，得

例 4、$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-\cdots+(-1)^{n}x^{n}+\cdots \ (-1<x<1)$.

在该式中，用$-x$代替x，得

例 5、$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+\cdots \quad (-1<x<1)$.