

1、已知事件 A 与 B 独立, $P(A) = 0.6, P(B) = 0.4$, 则 $P(A - B) = \underline{0.26}$ 。

2、设事件 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 件产品为正品}\}, i=1,2,3$, 则事件 $A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3$ 表示“三件产品中 2件 为正品”。

3、已知 $X \sim b(100, p)$, 当 $p = \underline{1/2}$ 时, DX 值最大。

4、设 $X \sim N(0, 4), Y \sim \chi^2(4)$, 且 X 与 Y 独立, 则 $Z = \frac{X}{\sqrt{Y}} \sim \underline{t(4)}$ 。

5、已知随机变量 $X \sim \pi(2), Y$ 服从参数为 2 的指数分布(记为 $Y \sim E(2)$), 且 X 与 Y 独立, 则 $E(X^2 - XY) = \underline{5}$ 。

6、假设检验中犯第 II 类错误指的是“ H_0 不真, 接受 H_0 ”。

二、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共计 15 分)

1、已知 X 的均值 $E(X) = 2$ 和方差 $D(X) = 1$, 用契比雪夫不等式估计得

$$P\{0 < X < 4\} \geq (\underline{C})。$$

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(1, 3), Y \sim N(0, 9)$, 则 $X - 2Y + 8 \sim (\underline{C})$ 。

- (A) $N(1, 2)$ (B) $N(9, 2)$ (C) $N(9, 39)$ (D) $N(1, 39)$

3、设 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0$, 且 $P(B|A) = P(B)$, 则 A 与 B 之间的关系为 (\underline{C}) 。

- (A) 互不相容 (B) 互逆 (对立关系)
(C) 相互独立 (D) 不能确定

4、设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 是来自总体 X 的一组样本, $EX = \mu$, 则下列 μ 的无偏估计量中, 最有效的是 (\underline{B}) 。

- (A) $\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ (B) $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$
(C) $\frac{X_1 + X_2}{3} + \frac{X_3 + X_4}{6}$ (D) $\frac{X_3 + X_4}{2}$

5、设 $X \sim N(0, 1)$, 则 $P\{u_{0.95} \leq X \leq u_{0.01}\} = (\underline{D})$ 。

- (A) 0.99 (B) 0.96 (C) 0.95 (D) 0.94

四、计算解答题 (本大题共 4 小题, 共计 28 分)

- 1、(5 分) 有朋友自远方来访, 他乘火车、汽车、轮船、飞机来的概率分别为 0.3、0.2、0.1、0.4。如果他乘火车、汽车、轮船来的话, 迟到的概率分别为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{12}$, 而乘飞机则不会迟到, 问这位朋友迟到的概率有多少?

$$\begin{aligned} A &= \{\text{朋友迟到}\} \quad B_1 = \{\text{乘火车}\} \quad B_2 = \{\text{乘汽车}\} \quad B_3 = \{\text{乘轮船}\} \quad B_4 = \{\text{乘飞机}\} \\ P(A) &= \sum_{i=1}^4 P(B_i) P(A|B_i) \\ &= 0.3 \times \frac{1}{4} + 0.2 \times \frac{1}{3} + 0.1 \times \frac{1}{12} + 0.4 \times 0 \\ &= \frac{3}{40} + \frac{2}{30} + \frac{1}{120} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

- 2、(6 分) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从参数 $p=1/3$ 的“0-1”分布, 求

$\max(X, Y)$ 的分布律 $X, Y \sim b(1, \frac{1}{3}), Z = XY$.
 Z 的可能取值为 0, 1.

Z	0	1
P_k	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$P(Z=0) = P(X=0, Y=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P(Z=1) = 1 - P(Z=0) = \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{另: } P(Z=1) &= P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

- 3、(10 分) 已知连续型随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1) \quad a \in (0, 1)$$

$$\int_0^a 2x dx = \int_a^1 2x dx$$

(2) 求 $Y = 1 + \frac{1}{2}X$ 的概率密度 $f_Y(y)$. $Y \in (1, \frac{3}{2})$

4、(7分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{\theta^3} x(\theta-x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(X_1, X_2, \dots, X_n) 为来自总体 X 的样本, 试求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$, 并判断 $\hat{\theta}$ 是否为无偏估计量?

$$E(X) = \int_0^\theta x \cdot \frac{6}{\theta^3} x(\theta-x) dx = \int_0^\theta \frac{6}{\theta^3} x^2 - \frac{6}{\theta^3} x^3 dx$$

$$= \left(\frac{2}{\theta^3} x^3 - \frac{3}{2\theta^3} x^4 \right) \Big|_0^\theta = 2\theta - \frac{3}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta \quad E\bar{X}_n = EX$$

$$\hat{\theta}_{矩} = 2\bar{X}_n$$

$$E(\hat{\theta}) = 2E(\bar{X}_n) = 2EX = \frac{1}{2}\theta \times 2 = \theta \quad \text{无偏估计量}$$

五、(10分) 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = e^{-x}, (0 < y < x)$, 求:

1) 边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$, 并判定 X 与 Y 是否独立;

2) $P(Y > 2 | X = 3)$

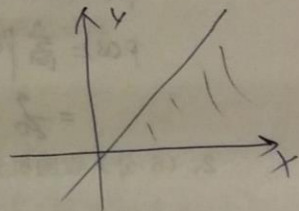
$$\textcircled{1} f_X(x) = \int_0^x e^{-x} dy = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_y^{+\infty} = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ X 与 Y 不独立

$$\textcircled{2} P(Y > 2 | X = 3) = \frac{P(X=3, Y > 2)}{P(X=3)} = 1 - \frac{P(X=3, Y \leq 2)}{P(X=3)} = 1 - \int_0^2 \frac{f(3, y)}{f_X(3)} dy$$

$$= 1 - \int_0^2 \frac{e^{-3}}{3e^{-3}} dy = 1 - \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3}$$



六、(12分) 某工厂生产的某种型号的电池, 其使用寿命 X (千小时) $\sim N(\mu, 4)$, 生产过程中工厂随时对产品进行监测, 现从中抽取容量为 25 的样本, 算得样本均值 $\bar{x} = 21.5$, 样本方差 $s^2 = 5.5$ 。(1) 试确定产品均值 μ 的置信水平为 95% 的置信区间; (2) 试推断产品寿命的方差较以往是否有显著性差异? ($\alpha = 0.05$)

$$\textcircled{1} \mu: \bar{X}_n \pm z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} = 21.5 \pm 1.96 \times 2 / \sqrt{25} = 21.5 \pm 1.96 \times \frac{2}{5}$$

$$\mu \in [20.716, 22.284]$$

$$\textcircled{2} H_0: \sigma^2 \leq 4$$

$$H_1: \sigma^2 > 4$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{24 \times 5.5}{4} = 33$$

$$\chi^2_{0.95}(24) = 12.401, \chi^2_{0.05}(24) = 36.42$$

接受 H_0 , σ^2 不显著差异

七、(5分) 已知总体 $X \sim N(0,1)$, (X_1, X_2, \dots, X_n) 为来自总体 X 的样本容量为 n

的样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 及 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 分别为样本均值和样本方差, 且

$$T = n\bar{X}^2 + S^2,$$

$$\text{证明: } D(T) = \frac{2n}{n-1}. \quad D(T) = D(n\bar{X}^2 + S^2) = n^2 D(\bar{X}^2) + D(S^2)$$

$$\bar{X}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad D(\bar{X}^2) = 2(n-1) \quad D(S^2) = D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\sigma^2 = D(X) = 1 \quad D(S^2) = \frac{2}{n-1} \quad = \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} D(S^2) = 2(n-1)$$

$$\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n}) \quad \frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{1/n}} = \sqrt{n}\bar{X} \sim N(0, 1)$$

$$D(n\bar{X}^2) = 2$$

$$n\bar{X}^2 \sim \chi^2_1$$

$$D(T) = D(n\bar{X}^2 + S^2) = D(n\bar{X}^2) + D(S^2) = 2 + \frac{2}{n-1} = \frac{2n}{n-1}.$$

一. (8分) 设两两独立的三个事件 A, B, C 满足 $ABC = \phi$, $P(A) = P(B) = P(C) < 1/2$,

且 $P(A \cup B \cup C) = 9/16$, 求 $P(A)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{9}{16}$$

设 $P(A) = x$. A, B, C 两两独立. $P(A) = P(B) = P(C)$ 有

$$3x - 3x^2 + 0 = \frac{9}{16} \quad x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \quad x = \frac{1}{4} \text{ 或 } x = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$

$$P(A) = x = \frac{1}{4}$$

二. (8分) 一个人将 6 根绳子紧握在手中, 仅露出绳子的头和尾. 然后请另一个人将 6 个头两两相接, 6 个尾两两相接. 求放开手后, 6 根绳子恰巧连成一个环的概率.

$$\begin{aligned} \text{另一头连接} \quad \frac{C_6^1 C_5^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^1 C_5^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1} &= \frac{6 \times 4 \times 4 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

三. (8分) 某工厂的车床、钻床、磨床、刨床台数之比为 9:3:2:1, 它们在一段时间内需要修理的概率之比为 1:2:3:1, 当有一台机床需要修理时, 求这台机床是车床的概率.

任意一台为车床、钻床、磨床、刨床台数为 A_1, A_2, A_3, A_4

$$B = (\text{机床需要修理}), \quad P(A_1) = \frac{9}{15}, \quad P(A_2) = \frac{3}{15}, \quad P(A_3) = \frac{2}{15}, \quad P(A_4) = \frac{1}{15}$$

$$P(B|A_1) = \frac{1}{9}, \quad P(B|A_2) = \frac{2}{3}, \quad P(B|A_3) = \frac{3}{2}, \quad P(B|A_4) = \frac{1}{1}$$

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^4 P(A_i) \cdot P(B|A_i)} = \frac{\frac{9}{15} \times \frac{1}{9}}{\frac{9}{15} \times \frac{1}{9} + \frac{3}{15} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{15} \times 1} \\ &= \frac{1}{22} \end{aligned}$$

四. (8分) 设随机变量 $X \sim N(b, b)$, 且 $Y = aX + b \sim N(0, 1)$, 求 a, b

$$E(aX + b) = aEX + b = ab + b = 0$$

$$D(aX + b) = a^2 DX = a^2 b = 1$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

五. (12 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 < x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 令

$Y = X^2$, $F(x, y)$ 为 X, Y 的分布函数, 求 1) Y 的概率密度; 2) $F(2, 4)$

$-1 < X < 2$ $Y = X^2$ $Y \in [0, 4]$ $0 < Y < 1$ $|X| < 1$
 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$
 $= \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{y}$
 $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx + \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{4} dx$
 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{3}{8\sqrt{y}} \quad 0 < y < 1$
 $f_Y(y) = \frac{1}{8\sqrt{y}} \quad 1 < y \leq 4$
 $f_Y(y) = 0 \quad \text{其他}$
 $F(2, 4) = P(X \leq 2, X^2 \leq 4) = P(X \leq 2, -2 \leq X \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(-2) = 1$

六. (10 分) 把数字 $1 \sim n$ 任意排成一列, 如果数字 k 恰好出现在第 k 个位置上, 则称有一个匹配, 求匹配数的数学期望。

$X_i = \begin{cases} 0 & \text{第 } i \text{ 个位置不匹配} \\ 1 & \text{第 } i \text{ 个位置匹配} \end{cases}$
 $E(X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n E(X_1) = 1$

$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$

七. (10 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 中任意两个的相关系数均为 ρ , 试证: $\rho \geq -\frac{1}{n-1}$

$D(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n D(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$
 $= \sum_{i=1}^n D(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \rho \sqrt{D(X_i)} \sqrt{D(X_j)}$
 $\leq \sum_{i=1}^n D(X_i) + \rho \sum_{1 \leq i < j \leq n} (D(X_i) + D(X_j))$
 $= \sum_{i=1}^n D(X_i) + \rho \sum_{i=1}^n D(X_i) (n-1)$
 $n \cdot D(X_i)$
 $\rho \geq -\frac{1}{n-1}$

$(1, 2) \quad (1, 3) \quad \dots \quad (1, n)$
 $(2, 3) \quad \dots \quad (2, n)$
 $(n-1, n)$

$(a-b)^2 \geq 0$
 $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$
 $2ab \leq a^2 + b^2$

(10分) 设一袋子中装有黑、白两种球若干, 其比例为 θ , θ 为未知参数。现有放回

八. (12分) 已知随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

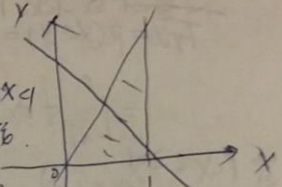
2) $P(X+Y < 1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_y^{1-y} 8xy \, dx \, dy = \frac{1}{6}$

求: 1) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$, 并判断 X 与 Y 的是否相关;

2) $P(X+Y < 1)$;

1. $f_X(x) = \int_0^x 8xy \, dy = 4x \cdot y^2 \Big|_0^x = 4x^3 \quad 0 < x < 1$

$f_Y(y) = \int_y^1 8xy \, dx = 4xy \Big|_y^1 = 4y - 4y^2 \quad 0 < y < 1$



$f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ X 与 Y 不独立

$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{8}{9} \neq 0$ X 与 Y 不独立

$EXY = \int_0^1 \int_y^1 8xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{8}{3} y^2 (1-y^2) \, dy = \frac{8}{9} y^3 - \frac{2}{3} y^5 \Big|_0^1 = \frac{8}{9}$

$EX = \int_0^1 \int_y^1 8x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{8}{3} (1-y^2) y \, dy = \frac{4}{3} y^2 - \frac{2}{3} y^4 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$EY = \int_0^1 \int_y^1 8xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 4(1-y^2) y^2 \, dy = \frac{4}{3} y^3 - \frac{2}{3} y^5 \Big|_0^1 = \frac{8}{9}$

九. (14分) (10分) 某产品指标服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 今抽取一个容量为 26 的样本,

计算的样本均值为 1637, 样本标准差为 120,

- 1) 若 $\sigma^2 = 100$, 求置信度为 95% 的置信区间的长度。
- 2) 问在 5% 的显著水平下, 是否可以认为这批产品的期望值不大于 1600。

① $\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ μ 的 95% 置信区间: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}$

$= 1637 \pm 1.96 \cdot \frac{100}{\sqrt{26}}$

长度: $2 z_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n} = 2 \times 1.96 \cdot \frac{100}{\sqrt{26}}$

2) $H_0: \mu \leq 1600$

$H_1: \mu > 1600$

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1637 - 1600}{100/\sqrt{26}} = 1.88 < 1.96$

(10 分) 设一袋子中装有黑、白两种球若干, 其比例为 θ , θ 为未知参数。现有放回地摸出 n 次球, 其中摸出黑球的次数为 Y 次。试证明: $\frac{Y}{n-Y}$ 为 θ 的极大似然估计量。

$$X \sim B\left(1, \frac{\theta}{\theta+1}\right) \quad X: \text{黑球: 白球} \quad P(X=1) = P(\text{摸黑}) = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$P(X=0) = P(\text{摸白}) = \frac{1}{\theta+1}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{x_i} \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^{1-x_i} = \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{\sum x_i} \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^{n-\sum x_i}$$

$$\ln L(\theta) = \sum x_i [\ln \theta - \ln(\theta+1)] + (n - \sum x_i) \ln(\theta+1)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{\sum x_i}{\theta+1} - \frac{n - \sum x_i}{\theta+1} \stackrel{\text{令}}{=} \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n - \sum x_i} \quad \text{而 } \sum x_i \text{ 为摸黑球数为 } Y$$

$$\hat{\theta} = \frac{Y}{n-Y}$$

$$P(A) + P(B) = 1 \quad P(A) \cdot P(B) \leq \left(\frac{P(A) + P(B)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(A) + 1 - P(B) = P(A) + P(A) = 2P(A) = \frac{2}{3}$$

$$X \sim B(1, 0.2) \quad Y \sim B(n, 0.2) \quad P(Y \geq 1) \geq 0.9$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_n^{0.2} \cdot 0.8^n \approx 0.9$$

$$n \geq 10.3 \quad n=11$$

$$A_i = (\text{摸到第 } i \text{ 盒}) \quad i=1, 2, 3$$

$B = (\text{所有取巧 (210求)})$

$$P(A_1) = \frac{3}{8} \quad P(A_2) = \frac{1}{8} \quad \begin{matrix} a & b & c \\ P(A_3) = \frac{2}{8} \end{matrix}$$

$$P(B|A_1) = \frac{1}{3} \quad P(B|A_2) = \frac{2}{3} \quad P(B|A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) P(B|A_i) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{4}{9}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

四. (8分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

① $1 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{A}{2} \Big|_0^1 + 2x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 \Rightarrow A=1$

$$\textcircled{2} \quad F_{\text{max}} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \text{ or } 3 \sim$

五. (12分) 设随机变量 $X \sim \exp(1)$, 证明 $Y = \Phi^{-1}(1 - e^{-X}) \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\Phi^{-1}(1 - e^{-X}) \leq y) = P(1 - e^{-X} \leq \Phi(y)) \\ &= P(e^{-X} \geq 1 - \Phi(y)) = P(-X \geq \ln(1 - \Phi(y))) = P(X \leq -\ln(1 - \Phi(y))) \\ &= P(X \leq -\ln(1 - \Phi(y))) = F_X(-\ln(1 - \Phi(y))) = 1 - e^{-\ln(1 - \Phi(y))} \\ &= \Phi(y) \quad Y \sim N(0,1) \end{aligned}$$

六. (10分) 设随机变量 X, Y 相互独立, $X \sim N(0,1), Y \sim N(1,1)$, 则 $P(X > Y)$

$$\begin{aligned} X - Y &\sim N(-1, 2) \\ P(X > Y) &= P(X - Y > 0) = 1 - P(X - Y \leq 0) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0+1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

七. (12分) 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$\begin{array}{c|ccccc} X^2 - Y^2 & -8 & -5 & -3 & 0 & 3 \\ \hline & \frac{1}{5} & \frac{3}{15} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} \end{array}$$

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash \\ X \end{array}$	1	2	3
1	$\frac{1}{15}$	p	$\frac{1}{5}$
2	q	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若随机变量 X 与 Y 相互独立, 试求: (1) p 及 q 的值; (2) $P\{X+Y < 3\}$;

(3) 求 $Z = X^2 - Y^2$ 的分布律。

$$\textcircled{1} \frac{1}{15} + p + \frac{1}{5} + q + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1$$

$$(p + \frac{1}{5}) \times (q + \frac{1}{5} + \frac{3}{10}) = \frac{1}{5}$$

$$p = \frac{2}{15} \quad q = \frac{1}{10}$$

$$\textcircled{2} P(X+Y < 3) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{15}$$

$$\textcircled{3} \begin{array}{c|ccccc} Z & 0 & 3 & -3 & 0 & 5 \\ \hline & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{3}{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} X^2 - Y^2 & 1 & 4 & 9 \\ \hline 1 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{3}{15} \\ 4 & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{array}$$

八. (10 分) 设随机变量 X, Y, Z 满足, $EX=EY=1, EZ=-1, DX=DY=DZ=4$,

$\rho_{xy}=0, \rho_{xz}=1/2, \rho_{yz}=-1/2$, 求 $E(X+Y+Z), D(X+Y+Z)$

$$E(X+Y+Z) = EX + EY + EZ = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$D(X+Y+Z) = D(X) + D(Y) + D(Z) + 2\text{cov}(X,Y) + 2\text{cov}(X,Z) + 2\text{cov}(Y,Z)$$

$$= 12 + 2 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} \times 4 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 4 = 12$$

$$= 12 + 2 \times 0 \times 4 + 2 \times \frac{1}{2} \times 4 - 2 \times \frac{1}{2} \times 4 = 12$$

九. (14 分) 设某支股票的价格服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 今有一股民想购买此种股票, 他

对该股票过去 16 天的价格做了统计, 得出样本均值为 18 元/每股, 样本方差为 3.77^2 。当显

著性水平 $\alpha = 0.05$ 时, 1) 试问: 该股民是否有理由认为该股票的每股平均价格低于 20 元?

($\alpha = 0.05$)

2) 求每股平均价格的置信度为 95% 的置信区间。

① $H_0: \mu = 20$

$H_1: \mu < 20$

$$t = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{18 - 20}{3.77/\sqrt{16}} = -2.1 > -t_{\alpha}(15)$$

$$t = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{18 - 20}{3.77/\sqrt{16}} = -2.1 < -t_{\alpha}(15) = -1.753$$

拒绝 H_0 , 可以认为低于 20 元。

② $\mu: \bar{X}_n \pm t_{\alpha/2}(15) \frac{S}{\sqrt{n}} = 18 \pm 2.131 \frac{3.77}{4}$

十. (10 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim U(0, \theta)$ 的简单随机样本, 其中参数 θ 为未知

参数。求参数 θ 的极大似然估计量, 并判定其是否是无偏估计量。

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \theta^{-n} \quad \frac{dL(\theta)}{d\theta} = -n \frac{1}{\theta^{n+1}}$$

$$L(\theta) \text{ 随 } \theta \text{ 增大而减小, 故 } 0 < X_1 < \dots < X_n < \theta$$

$$0 < X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)} < \theta$$

$$\hat{\theta} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_{(n)}$$

$$E(\hat{\theta}) = E(\max(X_1, X_2, \dots, X_n)) = E(X_{(n)})$$

$$P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = P(X_1 \leq x)^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

一. (8分) 设 $P(A|H) \geq P(B|H)$, $P(A|\bar{H}) \geq P(B|\bar{H})$, 试证明: $P(A) \geq P(B)$

$$P(A) = P(A|H) \cdot P(H) + P(A|\bar{H}) \cdot P(\bar{H}) \quad (P(A) = P(A|H) + P(A|\bar{H}))$$

$$P(B) = P(B|H) \cdot P(H) + P(B|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})$$

$$P(A|H) \geq P(B|H)$$

$$P(A|\bar{H}) \geq P(B|\bar{H}) \quad \text{故有} \quad P(A) \geq P(B)$$

二. (8分) 将线段 $[0, a]$ 任意折成三折, 试求这三折线段能构成三角形的概率

解: 用 x, y 表示折后三段的长度.

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < x+y < a \end{cases} \quad (\text{折后三段的长度})$$

$$\begin{cases} 0 < a-x-y < x+y \\ 0 < x < a-x \\ 0 < y < a-y \end{cases} \quad (\text{折后三段的长度})$$

$$S_a = \frac{a^2}{2} \quad S_A = \frac{a^2}{8} \quad P(A) = \frac{S_A}{S_a} = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{4}$$

三. (8分) 某种动物从出生到 20 岁的概率为 0.8, 活到 25 岁的概率为 0.4, 若已知这种动物现年为 20 岁, 求能活到 25 岁的概率.

$$P(X > 20) = 0.8 \quad P(X > 25) = 0.4$$

$$P(X > 25 | X > 20) = \frac{P(X > 20 \cap X > 25)}{P(X > 20)} = \frac{P(X > 25)}{P(X > 20)} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

四. (8分) X_1, X_2, \dots, X_n 为相互独立的连续型随机变量, 且 X_i 的分布函数为

$$F_i(x_i), i=1, 2, \dots, n. \text{ 试证明: 随机变量 } Y = -2 \sum_{i=1}^n \ln F_i(X_i) \text{ 服从自由度为 } 2n \text{ 的 } \chi^2 \text{ 分布.}$$

$$Y_i = -2 \ln F_i(X_i) \quad F_i(Y_i) = P(Y_i \leq y) = P(-2 \ln F_i(X_i) \leq y)$$

$$Y_i \sim \chi^2_2 \quad (Y_i \sim e^{-\frac{y}{2}}) = P(-2 \ln F_i(X_i) \leq -\frac{y}{2})$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = -2 \sum_{i=1}^n \ln F_i(X_i) = P(F_i(X_i) \geq e^{-\frac{y}{2}})$$

$$\sim \chi^2_{2n}$$

$$= P(X_i \geq F_i^{-1}(e^{-\frac{y}{2}}))$$

$$= 1 - P(X_i \leq F_i^{-1}(e^{-\frac{y}{2}}))$$

五. (12分) 设随机变量 $(X, Y) \sim N(1, 1, 4, 4, 1/2)$, $W = X + Y$, $V = X - 2Y$.

求 (W, V) 的联合分布, 并判定独立性.

$$W = X + Y \quad Z_W = Z_X + Z_Y = 2 \quad D(W) = D(X) + D(Y) + 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 4 + 4 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 = 12$$

$$V = X - 2Y \quad Z_V = Z_X - 2Z_Y = 1 - 2 = -1 \quad D(V) = D(X) + 4D(Y) - 4\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 4 + 16 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 = 12$$

$$\rho_{W,V} = \frac{\text{cov}(W, V)}{\sqrt{D_W} \sqrt{D_V}} = \frac{\text{cov}(X+Y, X-2Y)}{\sqrt{12} \sqrt{12}} = \frac{1}{12} (\text{cov}(X, X) - 2\text{cov}(Y, Y) - \text{cov}(X, Y))$$

$$= \frac{1}{12} (D_X - 2D_Y - \text{cov}(X, Y)) = \frac{1}{12} (4 - 8 - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$$(W, V) \sim N(2, -1, 12, 12, -\frac{1}{2})$$

W, V 不独立.

六. (10分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 求 $E(X^2 + e^x)$

$$EX^2 = \int_{-1}^0 x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$Ee^X = \int_{-1}^0 e^x(1+x)dx + \int_0^1 e^x(1-x)dx = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 xe^x dx = e^{-1} + e^1$$

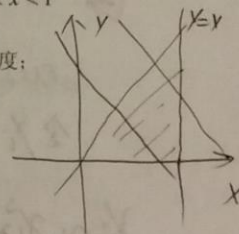
$$E(X^2 + e^X) = e + e^{-1} - \frac{1}{2}$$

七. (12分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = 3x$; $0 < y < x < 1$

试求: (1) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$; (2) $Z = X + Y$ 的概率密度;

$$(1) f_X(x) = \int_0^x 3x dy = 3xy \Big|_0^x = \frac{3}{2}x^2 \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 3x dx = \frac{3}{2}x^2 \Big|_y^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}y^2 \quad 0 < y < 1$$



$$(2) Z = X + Y \quad 0 < Z < 2$$

$$0 < Z < 1 \text{ 时 } F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} 3x dx dy = \int_0^{\frac{z}{2}} \int_y^{z-y} 3x dx dy$$

$$1 < Z < 2 \text{ 时 } F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = 1 - P(X+Y > z) = \frac{3}{8}z^3$$

八. (10分) 设随机变量 X, Y 相互独立, $X \sim N(0, \sigma^2), Y \sim N(0, \sigma^2)$.

证明: $E[\min(X, Y)] = -\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$

$$\min(X, Y) = \begin{cases} X & X \leq Y \\ Y & X > Y \end{cases}$$

$$E[\min(X, Y)] = \frac{1}{2} EX + \frac{1}{2} EY - \frac{1}{2} E|X - Y| = -\frac{1}{2} E|X - Y|$$

$$\text{令 } Z = X - Y, \quad E|X - Y| = E|Z|, \quad Z \sim N(0, 2\sigma^2)$$

$$E|Z| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz = 2 \int_0^{+\infty} z \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz$$

$$= 4\sigma^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} d\left(\frac{z^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{4\sigma^2}{2\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \Big|_0^{+\infty} = +\frac{2\sigma}{\sqrt{2}}$$

$$E[\min(X, Y)] = -\frac{1}{2} \frac{2\sigma}{\sqrt{2}} = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

九. (14分) 已知某机器在正常状态下生产元件的重量服从正态分布 $N(14.30, 2)$, 某天为

了检测机器是否正常工作, 随机地从生产的元件中抽取 9 个, 得样本均值为 15.82, 得样本方差为 2, 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件下, 问此机器是否正常工作.

$$n=9, \quad \bar{x}=15.82, \quad s^2=2$$

$$H_0: \mu = 14.3$$

$$H_1: \mu \neq 14.3$$

$$H_0: \sigma^2 = 2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq 2$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{15.82 - 14.3}{\sqrt{2}/3} = 3.22 > t_{\alpha/2}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(9-1) \times 2}{2} = 8$$

十. (10分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的一组样本, 且总体的密度函数为

$f(x) = \theta C \theta x^{-(\theta+1)}, x > C$, 求 C 和 θ 的极大似然估计量

$$L(C, \theta) = \prod_{i=1}^n \theta C \theta x_i^{-(\theta+1)} = \theta^{2n} C^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-(\theta+1)}$$

$$\ln L(C, \theta) = 2n \ln \theta + n \ln C - (\theta+1) \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(C, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = 0$$

五. (12分) 甲乙两人各有赌本 a 元, 约定谁先胜 3 局就赢得全部 $2a$ 元赌本, 假定两人在美剧中取胜的概率相等. 现在已赌 3 局, 结果甲是二胜一负, 由于某种原因赌博终止, 问如何分 $2a$ 元赌本才合理.

✓ (8分) 设 A, B 是两独立的事件, $P(A) + P(B) = 1$, 证明: $P(A \cup B) \geq 3/4$

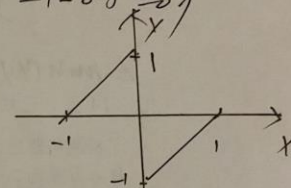
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + 1 - P(A) - P(A) = 1 - P(A) \\ &= 1 - P(A) + P(A)^2 = (P(A) - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

二. (8分) 设每次设计的命中率为 0.2, 则至少必须进行多少次独立射击才能是至少击中一次的概率达到 0.9

设需 n 次独立射击, 则 n 次中击中次数 $X \sim B(n, 0.2)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0 0.2^0 0.8^n = 1 - 0.8^n \geq 0.9$$

$$n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} = 11$$



✓ 三. (8分) 已知随机变量 $X \sim U(-1, 1)$, 令 $Y = \begin{cases} X+1 & \text{若 } X < 0 \\ X-1 & \text{若 } X > 0 \end{cases}$, 求 Y 的密度函数 $f_Y(y)$

当 $0 < X < 1$ 时 $-1 < Y < 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq y) + P(0 < X \leq y) = P(X \leq y+1) = P(X \leq 0) \\ &= P(0 < X \leq y+1) = P(X \leq y+1) - P(X \leq 0) \\ &= \frac{y+1+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{y+1}{2} \quad f_Y(y) = \frac{1}{2} \quad -1 < y < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < X \leq 1 \text{ 时 } 0 < Y < 1 \quad F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq y+1) = P(X \leq y+1) \\ &= P(Y \leq 0) + P(0 < Y \leq y) = \frac{1}{2} + P(X \leq y+1) = \frac{1}{2} + \frac{y+1}{2} = \frac{y+2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \end{aligned}$$

四. (8分) 设随机变量 $X \sim U(1, b)$, 且方程 $x^2 + Xx + 1 = 0$ 有实根的概率为 $1/3$, 求 b

$$\Delta = X^2 - 4 \times 1 = X^2 - 4 \quad P(X^2 - 4 \geq 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(X^2 - 4 \geq 0) = P((X \leq -2) \cup (X \geq 2)) = P(X \geq 2) = \frac{b-2}{b-1} = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{5}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < y < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < y < 1 \end{cases}$$

五. (12分) 甲乙两人各有赌本 a 元, 约定谁先胜 3 局就赢得全部 $2a$ 元赌本. 假定两人在美制取胜的概率相等. 现在已赌 3 局, 结果甲是二胜一负, 由于某种原因赌博终止, 问如何分 $2a$ 元赌本才合理.

分析: 甲: 2 胜 1 负 (2:1) 乙: 1 胜 2 负 (1:2)

甲: 2 胜 1 负

甲: 2 胜 1 负

甲: 2 胜 1 负

X	0	2a
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Y	0	2a
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$EX = 2a \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}a$$

$$EY = 2a \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}a$$

六. (10分) 已知随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, |y| < x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求: 1) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$, 并判断 X 与 Y 的独立性;

2) $P(X > \frac{1}{2} | Y < \frac{1}{2})$; 3) $Z = X + Y$ 的概率密度.

$$f_X(x) = \int_{-x}^x 1 dy = 2x \quad 0 < x < 1$$

$$-1 < y < 0$$

$$f_Y(y) = \int_{-y}^y 1 dx = x \Big|_{-y}^y = 1 + y \quad 0 \leq y < 1$$

$$-1 < y < 0$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 1 dx = x \Big|_y^1 = 1 - y \quad 0 \leq y < 1$$

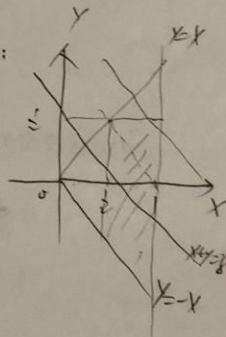
$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_X(x) = 1 \neq f_Y(y)$$

$$P(X > \frac{1}{2} | Y < \frac{1}{2}) = \frac{P(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2})}{P(Y < \frac{1}{2})} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-x}^{\frac{1}{2}} 1 dy dx}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-y}^y 1 dx dy} = \frac{1}{7}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < z < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = P(Z \in dz) = P(X+Y \in dz) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 dy dx = \frac{1}{2}$$



七. (10 分) 设袋中装有红球、白球、黑球各一个, 今从中有放回地摸取两次, 每次取出一球, 随机变量 X, Y 分别表示这两次摸取到的红球、白球个数。

试求: (1) X 与 Y 的联合分布律; (2) $P(Y=0|X=0)$ 。

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

$$X \sim B(2, \frac{1}{3})$$

$$Y \sim B(2, \frac{1}{3})$$

$$P(Y=0|X=0) = \frac{P(X=0)P(Y=0)}{P(X=0)}$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=1, Y=0) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=2, Y=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=0, Y=1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=2, Y=1) = 0$$

$$P(X=0, Y=2) = P(Y=2) \cdot P(X=0|Y=2) = \frac{1}{9} \times 1 = \frac{1}{9}$$

$$P(X=1, Y=2) = 0$$

$$P(X=2, Y=2) = 0$$

$$P(Y-X < 4)$$

八. (12 分) 设随机变量 $X \sim P(2), Y \sim B(5, 0.8), \rho_{XY} = 1/2$, 估计概率 $P(0 < Y-X < 4)$

$$Z(X-Y) = Z_X - Z_Y$$

$$Z_X = 2 \quad Z_Y = 5 \times 0.8 = 4$$

$$Z(Y-X) = Z_Y - Z_X = 4 - 2 = 2 \quad \text{取 } Z = 2$$

$$P(|Y-X - Z(Y-X)| < 2) = P(0 < Y-X < 4) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$D(Y-X) = D(X) + D(Y) - 2 \rho_{XY} \sqrt{D(X)D(Y)} = 2 + 5 \times 0.8 \times 0.2 - 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{5 \times 0.8}$$

$$\approx 1.5$$

$$P(0 < Y-X < 4) \geq 1 - \frac{1.5}{2} \approx 0.85$$

九. (14 分) (10 分) 设枪弹的速度服从正态分布, 为了比较两种枪弹的速度, 在相同条件下进行速度测定. 枪弹甲测定了 110 次, 样本均值为 2805, 样本方差为 120.

枪弹乙测定了 100 次, 样本均值为 2680, 样本方差为 105.

1) 能否认为甲的速度明显大于乙的速度. ($\alpha = 0.05$)

$$n_1 = 110 \quad \bar{x}_1 = 2805 \quad s_1^2 = 120$$

$$n_2 = 100 \quad \bar{y} = 2680 \quad s_2^2 = 105$$

2) 试求两种枪弹的速度的方差比的置信水平近似为 95% 的置信区间

$$1) H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

大样本可用 z 检验

$$z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{2805 - 2680}{\sqrt{\frac{120}{110} + \frac{105}{100}}} = 8.06 > 1.64$$

拒绝 H_0 , 接受 H_1 , 可以认为甲的速度明显大于乙.

$$2) P(F_{0.95} < \frac{s_1^2/s_2^2}{s_1^2/s_2^2} < F_{0.05}(109, 99)) = 1 - \alpha = 0.95$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} : \left(\frac{120/105}{1.45}, 120/105 \times 1.26 \right)$$

十. (10 分) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, 0 < x < \infty$. 试求参数 θ 的极大似

然估计, 并验证它是否是无偏的.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \prod_{i=1}^n x_i \cdot \theta^{-n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum x_i}$$

$$\ln L(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum x_i$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} \quad \hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$E \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E x_i^2 = \frac{1}{n} n E x_i^2 = E x_i^2 = \theta$$

$$E x = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(-\frac{x}{\theta}\right) = -x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$