一、单项选择题（共 48 分，每小题 4 分）

1. 微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=2y_1+3y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=3y_1+2y_2 \end{cases}$ 的通解为（　　）

(A) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5x}$.

(B) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{5x}$.

(C) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-5x}$.

(D) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-5x}$.

2. 曲面 $x^2+y^3+z^4-xy=2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为（　　）

(A) $2x+3y+4z=9$.

(B) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

(C) $x+2y+4z=7$.

(D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

3. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(xy,x-y)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　）

(A) $xyf''_{11}+(x-y)f''_{12}-f''_{22}$.

(B) $f'_1+xyf''_{11}+(x-y)f''_{12}-f''_{22}$.

(C) $f'_1+xf''_{11}+(x-1)f''_{12}-f''_{22}$.

(D) $f'_1+xyf''_{11}-(x+y)f''_{12}-f''_{22}$.

4. 设函数 $f(x,y)$ 可微，向量 $\boldsymbol{l}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{l}_2=(0,-1)$，$\boldsymbol{l}=(3,4)$，且 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right|_P=3$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right|_P=4$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P=$（　　）

(A) 7.

(B) -7.

(C) $\dfrac{7}{5}$.

(D) $-\dfrac{7}{5}$.

5. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{2-y^2}} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x =$ （　　）

(A) $\frac{\pi}{16}$.　　(B) $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

(C) $\frac{\pi}{8}$.　　(D) $\frac{\pi}{4}$.

6. 设质量均匀分布的球体$V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，质量密度

$\rho(x,y,z)\equiv 1$，则该球体对 z 轴的转动惯量$I_z=$（　　）

(A) $\dfrac{4\pi}{5}$.　　(B) $\dfrac{8\pi}{5}$.

(C) $\dfrac{8\pi}{15}$.　　(D) $\dfrac{4\pi}{15}$.

7. 设$S=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2=a^2,z\ge 0\right\}(a>0)$，则$\iint\limits_S (x+y+z)^2\mathrm{d}S=$（　　）

(A) $2\pi a^2$.　　(B) $2\pi a^4$.

(C) $4\pi a^2$.　　(D) $4\pi a^4$.

8. 设曲线 $L: x=t, y=\dfrac{t^2}{2}, z=\dfrac{t^3}{3}\ (0\le t\le 1)$ 上分布着质量，其质量线密度为 $\rho(x,y,z)=\sqrt{2y}$，则其质量 $m=$（　　）

(A) $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$.　　(B) $\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$.

(C) $\int_0^1 \sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$.　　(D) $\int_0^1 \sqrt{t}\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$.

9. 设 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\dfrac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\ \left(x^2+y^2+z^2\neq 0\right)$，则 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}(x,y,z)=$（　　）

(A) 1.　　(B) 0.

(C) $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.　　(D) $\dfrac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$.

10. 函数$\dfrac{2}{2-x}$的麦克劳林（**Maclaurin**）级数为（　　）

(A) $\dfrac{2}{2-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n},x\in(-2,2)$.

(B) $\dfrac{2}{2-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}x^n,x\in(-2,2)$.

(C) $\dfrac{2}{2-x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-1)^n,x\in(0,2)$.

(D) $\dfrac{2}{2-x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n,x\in(0,2)$.

11. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$在收敛域$[-1,1)$上的和函数$S(x)=$（　　）

(A) $\ln(1-x)$.　　**(B)** $-\ln(1-x)$.

(C) $-x\ln(1-x)$.　　**(D)** $x\ln(1-x)$.

12. 以下四个级数之中，发散的是（　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.　　**(B)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n+1}$.

(C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}\cdot\sqrt{\ln n}}$.　　**(D)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$.

二、（12 分）求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

三、（12 分）设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x)=|x|\,(-\pi<x\le\pi)$.

求 $f(x)$ 的傅里叶（Fourier）级数，并由此计算数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

之和.

四、（8 分）设函数 $f(x,y)$ 在圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$ 上可微，且当 $x^2+y^2<1$ 时，$f(x,y)=f_x'(x,y)+f_y'(x,y)$．当 $x^2+y^2=1$ 时，$f(x,y)\equiv 0$．求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值.

五、（10 分）计算曲线积分$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $(x-1)^2+y^2=4\ (y\ge 0)$ 上由点 $A(-1,0)$ 到点 $B(3,0)$ 的有向弧段.

六、（10 分）计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(xz+\sin y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xy+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，有向曲面$\Sigma: x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1\,(z\geq 0)$，取上侧.