1. 设$f(x)=x^2$，$0\le x\le 1$，而$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ ，$n=1,2,\cdots$，则$S(-\frac{1}{2})=$______；设$x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$，$-\pi\le x\le\pi$，则$a_2=$_____ .

解 $S(-\frac{1}{2})=-S(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$ ；$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=1$

2. 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，且$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，$f(x)$的傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$的和函数为$S(x)$，则$S(9\pi)=$__________，$b_3=$_________.

解 $S(x)=S(\pm k\cdot 2\pi+\alpha)=S(\pm k\cdot 2l+\alpha)=S(\alpha)$

$$S(9\pi)=S(4\times 2\pi+\pi)=S(\pi)=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

3. 设$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ x-1, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$ $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$，其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$，则$S(-\frac{5}{2})$等于（　　）

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$-\frac{3}{2}$　　（D）$\frac{3}{2}$

解 $S(-\frac{5}{2})=S(-2-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=-S(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2(1-x), & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$，而$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$，则$S(-\frac{5}{2})=$_____ ；$S(9)=$_____ .

解　$S(-\frac{5}{2})=S(-2-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}+2(1-\frac{1}{2})}{2}=\frac{3}{4}$,

$S(9)=S(4\times 2+1)=S(1)=0$

5. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，在 $(-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}3,-1<x\le 0\\ x^3,0<x\le 1\end{cases}$，函数 $f(x)$ 的 Fourier（傅里叶）级数是：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，其和函数是 $S(x)$，则 $S\left(\frac{1}{2}\right)=$______，$S(11)=$_______.

解 $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$，$S(11)=S(5\times 2+1)=S(1)=\frac{3+1}{2}=2$.

6. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x<0\\ x^2, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的 Fourier（傅里叶）级数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=100\pi$ 处分别收敛于_____和_____.

解 $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$，$S(100\pi)=S(50\times 2\pi+0)=S(0)=\frac{2+0}{2}=1$

7.（**10** 分）设定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)=x$． **(1)** 将 $f(x)$ 展成余弦级数;（**2**）求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 之和；（**3**）求 $f(x)$ 的正弦级数的和函数 $S(x)$．

解 （**1**） $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$，

$$n\ge 1\text{时，}\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n\text{偶}\\ \dfrac{-4}{n^2\pi}, & n\text{奇}\end{cases},$$

经过偶延拓、周期延拓之后所得的函数在 $[-\pi,\pi]$ 上连续、有有限个单调区间，因此由 **Dirichlet** 定理知余弦级数在 $[0,\pi]$ 上处处收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \quad (x\in[0,\pi])$$ **-----6 分**

（2）在上式两端令 $x=0$，得 $0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$ **--------8 分**

（3）对经过奇延拓和周期延拓的函数验证 **Dirichlet** 定理的条件，知正弦级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\pi\\ 0, & x=\pi\end{cases}$$ **-----10 分**

8. 设函数 $f(x)$ 是周期为 **2** 的周期函数，它在 $[-1,1)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x<0\\ 0, & 0\le x<1\end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数。

解：$l=1$，傅里叶系数

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}1\mathrm{d}x=1,$$ **（2 分）**

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\cos n\pi x\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$ **（4 分）**

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}=-\frac{1-(-1)^n}{n\pi}=\begin{cases}-\frac{2}{n\pi}, & n=1,3,\cdots\\ 0, & n=2,4,\cdots\end{cases}.$$ **（6 分）**

因此，函数 $f(x)$ 傅里叶级数的展开式为

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\frac{1}{5}\sin 5\pi x+\cdots\right),$$

$$x\in(-\infty,+\infty),\ x\neq 0,\pm1,\cdots$$ **（8 分）**

当$x=0,\pm1,\cdots$时，$f(x)$的傅里叶级数收敛于$\frac{1}{2}$。　　（**10 分**）

1．n维点集　　**(教材 6.4 节)**

空间直角坐标系的建立，使空间中的点及向量与一个三元有序数组(x,y,z)形成一一对应，根据向量运算法则，可以赋予三元有序数组之间的加法、数乘等运算，如$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$，$\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$，我们把这种有序数组的全体称为三维空间，记作$\mathbf{R}^3$，并称这些数组为$\mathbf{R}^3$中的三维点.

一般地，按照上面作法，对n元有序数组之间同样赋予加法、数乘等运算．由n元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体所组成的集合称为n维空间，记作$\mathbf{R}^n$，并称每一个n元数组为$\mathbf{R}^n$中一个n维点.

这样，全体实数构成的集合$\mathbf{R}$，或数轴上一切点的集合称为一维空间，并记作$\mathbf{R}^1$；全体有序数组(x,y)构成的集合，或xOy平面上一切点的集合称为二维空间，并记作$\mathbf{R}^2$.

下面介绍$\mathbf{R}^n$中的一些集合，相关概念以后会经常遇到．为叙述方便，我们以$\mathbf{R}^2$为例.

设$P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$\delta$是某一正数，与点$P_0(x_0,y_0)$距离小于$\delta$的点$P(x,y)$的全体，称为点$P_0$的$\delta$邻域，记作$U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\left\{P\middle||PP_0|<\delta\right\}$$

或

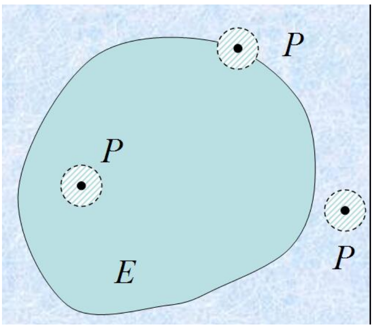
$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

若点P_0不包含在该邻域，则称该邻域为点P_0的去心δ邻域，记作$\overset{0}{U}(P_0,\delta)$.显然，点$P_0$的$\delta$邻域在几何上就是以点$P_0(x_0,y_0)$中心，以$\delta>0$为

半径的圆内部的点$P(x,y)$的全体.

如果不需要强调邻域的半径δ，则用$U(P_0)$表示点P_0的某个邻域，用$\overset{0}{U}(P_0)$表示点P_0的某个去心邻域.

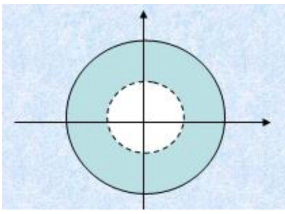
设集合$E\subset\mathbf{R}^2$，$P\in\mathbf{R}^2$，如果存在$\delta>0$，使得$U(P,\delta)\subset E$，则称P是E的内点；若$U(P,\delta)\cap E=\varnothing$，则称$P$是$E$的外点. 如果点$P$的任何一个邻域内既有属于$E$的点，又有不属于$E$的点，则称$P$是$E$的边界点. 如图所示.



E的边界点的全体，称为E的边界，记作∂E.

E的内点必属于E；E的外点必不属于E；而E的边界点可能属于E，也可能不属于E

如果对于任意给定的$\delta>0$，点P的去心邻域$\overset{0}{U}(P,\delta)$内总有E中的点，则称P是E的聚点.


例如，平面点集$E=\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2\le 2\right\}$，满足$1<x^2+y^2<2$的一切点$(x,y)$都是$E$的内点；满足$x^2+y^2=1$的一切点$(x,y)$都是$E$的边界点，它们都不属于$E$；满足$x^2+y^2=2$的一切点$(x,y)$也是$E$的边界点，它们都属于$E$；点集$E$以及它的边界$\partial E$上的一切点都是$E$

的聚点.

可见，一个点集的聚点可以属于该点集，也可以不属于该点集.

如果E中的点都是E的内点，则称E为$\mathbf{R}^2$中的开集.

如果E中的所有聚点都属于E，则称E为$\mathbf{R}^2$中的闭集.

例如，集合$\left\{(x,y)\middle|0<x<1,0<y<1\right\}$是开集；集合$\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$是闭集；而集合$\left\{(x,y)\middle|0<x\le 1,0<y\le 1\right\}$是既非开集，也非闭集.

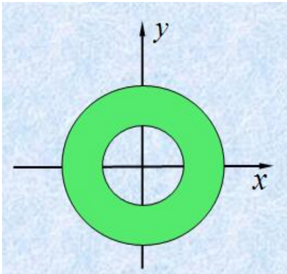
如果点集E内的任何两点，都可以用折线连接起来，且该折线上的点都属于E，则称E为连通集.

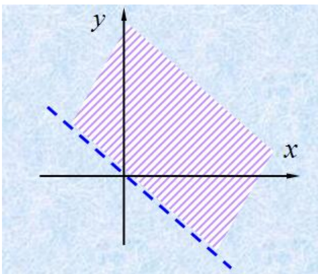
连通的开集称为区域或开区域.

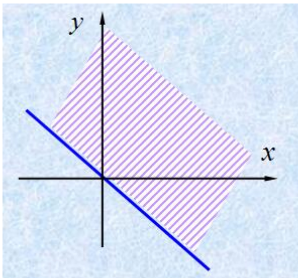
开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

对于平面点集E，如果存在某一正数r，使得$E\subset U(O,r)$，其中O是坐标原点，则称E为有界集，否则称为无界集.

例如，集合$\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2\}$是有界闭区域；集合$\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$是无界开区域，集合$\{(x,y)\,|\,x+y\ge 0\}$是无界闭区域







上面我们仅在$\mathbf{R}^2$中给出了平面点集的一些概念, 这些概念可以自然地推广到n维空间$\mathbf{R}^n$中. 相应于平面上两点间的距离公式, 对于$\mathbf{R}^n$中点$M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和点$N(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，规定M， N两点间的距离

$$|MN|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

在$\mathbf{R}^n$中，点$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与原点$O=(0,0,\cdots,0)$的距离

$$\rho(\boldsymbol{x},O)=\sqrt{\sum_{i}^{n}x_i^2}$$

称为变量(向量)$\boldsymbol{x}$的范数(也称为$\boldsymbol{x}$的模)，记为$\|\boldsymbol{x}\|$，即$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{i}^{n}x_i^2}$

对于$\mathbf{R}^n$中点$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则点$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的距离为

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

在$\mathbf{R}^n$中规定两点间距离之后，就可使前面讨论的有关平面点集的一系列概念，方便地推广到n($n\geq 3$)维空间中来. 例如

设$P_0\in\mathbf{R}^n$，δ是某一正数，则n维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\left\{P\,\middle|\,|PP_0|<\delta, P\in\mathbf{R}^n\right\}$$

就定义为$\mathbf{R}^n$中点P_0的δ邻域. 以邻域为基础，可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点，以及开集、闭集、区域等一系列概念.