2021级下学期工数期末考试试题与答案

一、单项选择题(共48分，每小题4分)

1. 微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+3y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=3y_1+2y_2 \end{cases}$ 的通解为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5x}$.　(B) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{5x}$.

(C) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-5x}$.　(D) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-5x}$.

解：(A)

由 $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=0$，得 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$。

$\lambda_1=-1$时，对应的特征向量为 $(1,-1)^T$，

$\lambda_2=5$时，对应的特征向量为 $(1,1)^T$.

通解为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5x}$。

2. 曲面 $x^2+y^3+z^4-xy=2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为(　　)

(A) $2x+3y+4z=9$.　(B) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

(C) $x+2y+4z=7$.　(D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

解：(C)

令 $F(x,y,z)=x^2+y^3+z^4-xy-2$，则

$$F_x=2x-y,\quad F_y=3y^2-x,\quad F_z=4z^3,$$

所以曲面在点 $(1,1,1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,4)$，

因此所求的切平面方程为 $(x-1)+2(y-1)+4(z-1)=0$，即 $x+2y+4z=7$.

法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

3. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(xy,x-y)$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=($ $)$

(A) $xyf''_{11}+(x-y)f''_{12}-f''_{22}$. (B) $f'_1+xyf''_{11}+(x-y)f''_{12}-f''_{22}$.

(C) $f'_1+xf''_{11}+(x-1)f''_{12}-f''_{22}$. (D) $f'_1+xyf''_{11}-(x+y)f''_{12}-f''_{22}$.

解: (B)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'y+f_2 \text{ ,}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left[f''_{11}x-f''_{12}\right]+f''_{21}x-f''_{22}=f_1'+xyf''_{11}+(x-y)f''_{12}-f''_{22}$$

4. 设函数 $f(x,y)$ 可微，向量 $\boldsymbol{l}_1=(1,0)$， $\boldsymbol{l}_2=(0,-1)$， $\boldsymbol{l}=(3,4)$， 且 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right|_P=3$， $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right|_P=4$， 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P=($ $)$

(A) 7. (B) -7. (C) $\dfrac{7}{5}$. (D) $-\dfrac{7}{5}$.

解: (D)

令 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P=A$， $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P=B$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right|_P=A\times1+B\times0=3\Rightarrow A=3, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right|_P=A\times0-B\times1=4\Rightarrow B=-4$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P=3\times\frac{3}{5}-4\times\frac{4}{5}=-\frac{7}{5}$$

5. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x =$ (　　)

(A) $\frac{\pi}{16}$.　　(B) $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.　　(C) $\frac{\pi}{8}$.　　(D) $\frac{\pi}{4}$.

解：(D)

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}$$

6. 设质量均匀分布的球体$V = \left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$，质量密度$\rho(x,y,z) \equiv 1$，则该球体对$z$轴的转动惯量$I_z =$ (　　)

(A) $\frac{4\pi}{5}$.　　(B) $\frac{8\pi}{5}$.　　(C) $\frac{8\pi}{15}$.　　(D) $\frac{4\pi}{15}$.

解：(C)

$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\cdot\rho(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V$$

由轮换对称性

$$\iiint_V x^2 \mathrm{d}V = \iiint_V y^2 \mathrm{d}V = \iiint_V z^2 \mathrm{d}V$$

故

$$I = \iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V = \frac{2}{3}\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^4 \sin\varphi \mathrm{d}\rho = \frac{8}{15}\pi$$

7. 设$S=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0\right\}$（$a>0$），则$\iint\limits_S (x+y+z)^2\mathrm{d}S=$（　　）

(A) $2\pi a^2$.　　(B) $2\pi a^4$.　　(C) $4\pi a^2$.　　(D) $4\pi a^4$.

解：(B)

由S的对称性和被积函数的奇偶性

$$\iint\limits_S xy\mathrm{d}S=\iint\limits_S yz\mathrm{d}S=\iint\limits_S zx\mathrm{d}S=0$$

$$I=\iint\limits_S (x+y+z)^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S [x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_S [x^2+y^2+z^2]\mathrm{d}S$$

$$=a^2\iint\limits_S \mathrm{d}S=a^2\cdot 2\pi a^2=2\pi a^4$$

8. 设曲线$L: x=t, y=\dfrac{t^2}{2}, z=\dfrac{t^3}{3}$（$0\leq t\leq 1$）上分布着质量，其质量线密度为$\rho(x,y,z)=\sqrt{2y}$，则其质量$m=$（　　）

(A) $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$.　　(B) $\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$.

(C) $\int_0^1 \sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$.　　(D) $\int_0^1 \sqrt{t}\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$.

解：(A)

$$m=\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^1 \rho(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$$

9. 设$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$（$x^2+y^2+z^2\neq 0$），则

$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(x,y,z)=($　　$)$

(A) 1.　　　　　　　　(B) 0.

(C) $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.　　　　　(D) $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

解： (B)

$$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}，\ Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}，\ R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-3y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

10. 函数$\dfrac{2}{2-x}$的麦克劳林(Maclaurin)级数为(　　　)

(A) $\dfrac{2}{2-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n}$，$x\in(-2,2)$.　(B) $\dfrac{2}{2-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}x^n$，$x\in(-2,2)$.

(C) $\dfrac{2}{2-x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$，$x\in(0,2)$.　(D) $\dfrac{2}{2-x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$，$x\in(0,2)$.

解： (A)

$$\frac{2}{2-x}=\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$$

11. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$在收敛域$[-1,1)$上的和函数$S(x)=$(　　　)

(A) $\ln(1-x)$.　　　　(B) $-\ln(1-x)$.

(C) $-x\ln(1-x)$.　　　　(D) $x\ln(1-x)$.

解: (C)

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \text{令 } S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

$$S_1(x)=S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x S_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$$

12. 以下四个级数之中，发散的是(　　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.　　　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n+1}$.

(C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}\cdot\sqrt{\ln n}}$.　　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$.

解: (D)

(A) $\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$

(B) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}+1}\cdot\frac{2^n+1}{n^2+1}=\frac{1}{2}<1$

(C) 见P_{20}例 **5.2.12**

2020级下学期工数期末考试试题与答案

一、单项选择题(共50分，每小题5分)

1. 曲面 $z=x^3+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切平面和法线方程依次为（　　）

(A) $3x+2y-z=3$，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=2-z$.

(B) $3x+2y+z=7$，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z-2$.

(C) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=2-z$，$3x+2y-z=3$.

(D) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z-2$，$3x+2y+z=7$.

解　(A)

令 $F(x,y,z)=x^3+y^2-z$，则

$$F_x=3x^2,\quad F_y=2y,\quad F_z=-1,$$

所以曲面在点 $(1,1,2)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,2,-1)$，

因此所求的切平面方程为 $3(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$，即 $3x+2y-z=3$.

法线方程为 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

2. 设函数 $f(x,y)=3x+4y-x^2-2y^2-2xy$，则 $f(x,y)$ 有唯一的（　　）

(A) 极小值 $\dfrac{5}{2}$.　　(B) 极大值 $\dfrac{5}{2}$.

(C) 极大值 $-\dfrac{15}{2}$.　　(D) 极小值 $-\dfrac{15}{2}$.

解 (B)

方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3-2x-2y=0 \\ f_y(x,y)=4-4y-2x=0 \end{cases}，得驻点\left(1,\frac{1}{2}\right).$$

再计算二阶偏导数，

$$A=f_{xx}(x,y)=-2，B=f_{xy}(x,y)=-2，C=f_{yy}(x,y)=-4.$$

在点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$处，$AC-B^2=4>0$，且$A=-2<0$，

则$f\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$是极大值.

3. 设函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则（　　）

(A) $f_x'(0,0)=0, f_{xy}''(0,0)=-1$.　(B) $f_x'(0,0)=1, f_{xy}''(0,0)=-1$.

(C) $f_x'(0,0)=0, f_{xy}''(0,0)=1$.　(D) $f_x'(0,0)=1, f_{xy}''(0,0)=1$.

解 (A)　由偏导数的定义得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

当$x^2+y^2\neq 0$时，　计算得$f_x(x,y)=y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$

由定义得

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,0+\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$$

4. 将函数$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ 1-x, & x\in(1,2] \end{cases}$展成 Fourier 级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi x}{2}$，其中

Fourier 系数$b_n=\int_0^2 f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$，级数的和函数记为$S(x)$，

则（　　）

(A) $S(1)=1, S(\frac{7}{2})=-\frac{1}{2}$.　　(B) $S(1)=\frac{1}{2}, S(\frac{7}{2})=\frac{1}{2}$.

(C) $S(1)=\frac{1}{2}, S(\frac{7}{2})=-\frac{1}{2}$.　　(D) $S(1)=1, S(\frac{7}{2})=\frac{1}{2}$.

解 (C)

$$S(1)=\frac{1+(1-1)}{2}=\frac{1}{2},$$

$$S(x)=S(\pm k\cdot 2l+\alpha)=S(\alpha) \quad 2l=4$$

$$S(\frac{7}{2})=S(4-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=-S(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则级数 $f(0)+f'(0)+\cdots+f^{(n)}(0)+\cdots$

(　　)

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散，且部分和数列趋于 $+\infty$.　(D) 发散，且部分和数列趋于 $-\infty$

解 (B) $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$f(0)=1$,, $f''(0)=-\frac{1}{3}$, $f^{(4)}(0)=\frac{1}{5}$, $f^{(6)}(0)=-\frac{1}{7}$, $f^{(8)}(0)=\frac{1}{9}$

$f'(0)=0$, $f'''(0)=0$, $f^{(5)}(0)=0$, $f^{(7)}(0)=0$,

$$f(0)+f'(0)+\cdots+f^{(n)}(0)+\cdots=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

其绝对值级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1$

调和级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}$发散$\Rightarrow$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$发散

6. 以下四个正项级数中，发散的是（　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$. 书 15 页例题收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$.

解　(D)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$　　用比值法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\text{，收敛}$$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2\ln n}{n^4-\cos n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\ln n}{n^2}}{1-\frac{\cos n}{n^4}}=1$$ 由比较法极限形式

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛$\Rightarrow$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$收敛　　$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$.

$$\frac{1}{2n}\le 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}$$，由比较法

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散$\Rightarrow$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$发散

7. 设曲面$S:z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$，则曲面积分$\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=$（　　）

(A) $\frac{2}{3}\pi$.　　(B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

(C) $\sqrt{2}\pi$.　　(D) π.

解　(B)

曲面$S:z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$在$oxy$面投影区域$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

8. 设V是由两个曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-x^2-y^2$围成的$\mathbf{R}^3$中的有界闭区域，则三重积分$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=$（　　）

(A) $\frac{4}{3}\pi$.　　(B) $\frac{8}{3}\pi$.

(C) π.　　(D) $\frac{1}{2}\pi$.

解 (C)

V在在oxy面投影区域$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$，采用柱面坐标

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V==\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{r^2}^{2-r^2}z\mathrm{d}z==\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^{2-r^2}z\,\mathrm{d}z=\pi$$

9. 二次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}x\cos(1-y)^2\mathrm{d}y=$（　　）

(A) $\frac{1}{4}\sin 1$.　　(B) $-\frac{1}{4}\sin 1$.

(C) $\frac{1}{4}\cos 1$.　　(D) $-\frac{1}{4}\cos 1$.

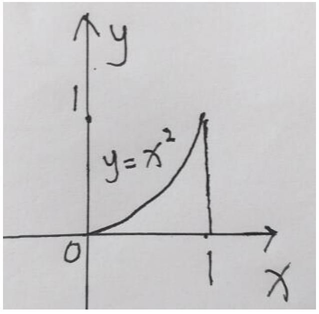
解 (A)

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} x\cos(1-y)^2\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 x\cos(1-y)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)\cos(1-y)^2\mathrm{d}y \quad \text{令 } 1-y=u$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^0 u\cos u^2\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^1 u\cos u^2\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\cos u^2\mathrm{d}u^2=\frac{1}{4}\sin 1$$



10. 设曲线 $L: x^2+y^2=1\ (x\geq 0, y\geq 0)$，质量线密度 $\rho\equiv 1$，则 L 对 x 轴的转动惯量等于（ ）

(A) $\frac{\pi}{8}$. (B) $\frac{\pi}{4}$.

(C) $\frac{\pi}{2}$. (D) π.

解 (B)

$$I_x=\int_L \rho y^2\mathrm{d}s$$

由于 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\quad (0\leq t\leq \frac{\pi}{2})$$

$$I_x=\int_L \rho y^2\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$