n 维 点 集

主讲人：侯中华
大连理工大学数学科学学院

A.3 n维点集

一、n维空间的定义：n个实数$x_1,\cdots,x_n$按给定的顺序排列，所得到的元素叫做n元有序数组。记为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$。其中x_i叫做x的第i个分量，$i=1,2,\cdots,n$。

所有n元有序数组所构成的集合记为R^n。在R^n上，定义两种运算如下：

1、加法：任取$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$，定义：$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$。

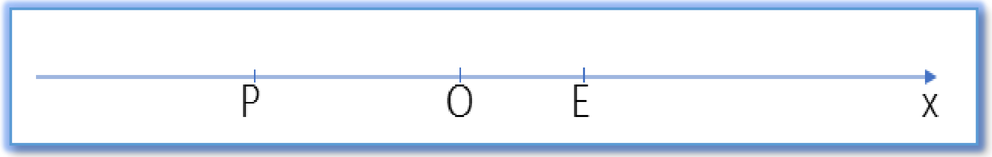
2、数乘：任取$x=(x_1,\cdots,x_n)\in Rn$以及实数c，定义：$cx=(cx_1,\cdots,cx_n)$。

3、空间：赋予了加法和数乘运算的集合R^n上叫做n维线性空间。

4、注A.4：当有序数组的分量个数较少时，可用不同的拉丁字母表示。比如(x)，(x,y)，(x,y,z),⋯, 等。当n=1时，括号可以省略。

A.3 n维点集

二、n维空间的表示



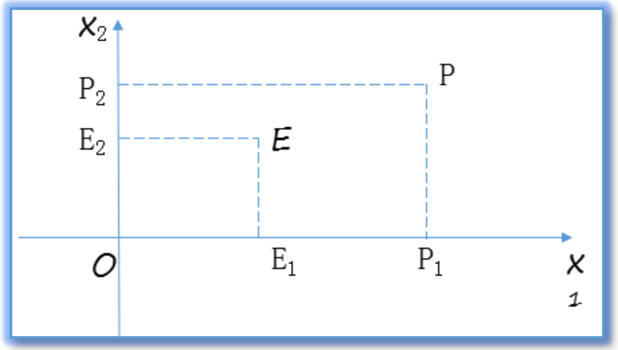
图A-4. 数轴

1、1维空间R^1：

画一条水平直线L，在上面选定两点O，E。O作为原点，E作为单位点。取OE的长度为1，取O到E的方向为正向。这样得到的有向直线$\vec{l}$叫做坐标轴，通称数轴。对于L上任取的点P，OP与OE的长度的比例记为$|x|$。若P与E在O的同侧，赋予“+”号，若P与E在O的异侧，赋予“-”号。则实数x与$\vec{l}$的点P之间有1-1对应。称x为点P关于E的坐标。

数轴通常记为Ox。易见，实数的加法和乘法运算与1元有序数组的加法和数乘运算一致。因此，实数集R可视为1维空间R^1。故n维空间的概念是实数集概念的推广。

A.3 n维点集

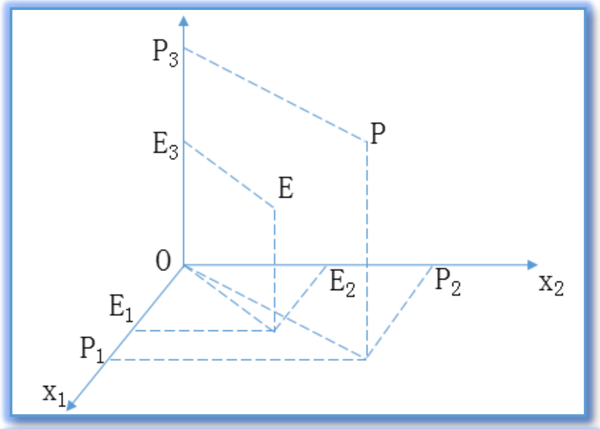


图A-4. 平面直角坐标系

2、**2维空间R^2**：

在平面Π上画一条水平直线L_1和一条垂直的直线L_2，取交点O为公共原点。再取两条直线外的点E作为单位点。过E作L_2和L_1的平行线依次与L_1和L_2相交于E_1和E_2。**令OE_1和OE_2的长度均为1，OE_1和OE_2的方向为L_1和L_2的正向**。所得到的两条有向直线$\overrightarrow{L_1}$和$\overrightarrow{L_2}$叫做**坐标轴**。在Π上任取一点P，过P作$\overrightarrow{L_2}$和$\overrightarrow{L_1}$的平行线依次与$\overrightarrow{L_1}$和$\overrightarrow{L_2}$相交于P_1和P_2。P_1和P_2关于E_1和E_2的**坐标**记为x_1和x_2。则有序数组(x_1, x_2)与Π上的点P之间是1-1对应。$\overrightarrow{L_1}$和$\overrightarrow{L_2}$通常记为Ox_1和Ox_2。称取定坐标轴的平面Π为**平面直角坐标系**，记为Ox_1x_2。

A.3 n维点集



图A-6. 空间直角坐标系

2、**3维空间R^3**：

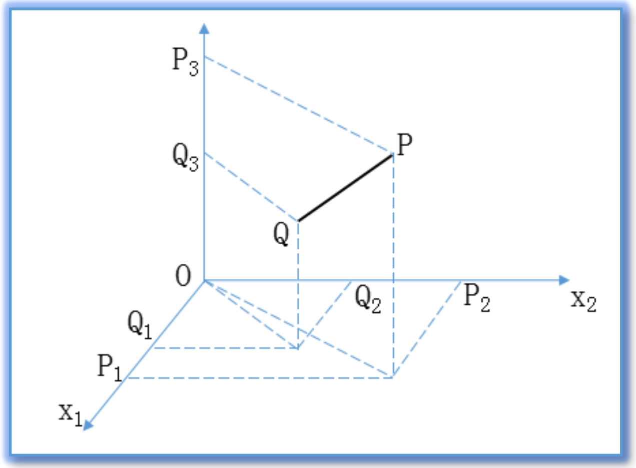
在空间中取定一点O为原点。过O点画三条互相垂直的直线L_1、L_2和L_3，再取直线外的点E作为单位点。过E作平行于L_2和L_3、 L_3和L_1、 L_1和L_2的平行平面依次与L_1、L_2和L_3相交于E_1 、E_2和E_3。**令OE_1、OE_2和OE_3的长度均为1，取OE_1、OE_2和OE_3方向为L_1、L_2和L_3的正向**。所得到的有向直线$\overrightarrow{L_1}$ 、$\overrightarrow{L_2}$和$\overrightarrow{L_3}$ 叫做**坐标轴**。在空间中任取一点P，过X作平行于$\overrightarrow{L_2}$和$\overrightarrow{L_3}$、 $\overrightarrow{L_3}$和$\overrightarrow{L_1}$、 $\overrightarrow{L_1}$和$\overrightarrow{L_2}$的平行平面依次与$\overrightarrow{L_1}$ 、$\overrightarrow{L_2}$ 和 $\overrightarrow{L_3}$ 相交于P_1 、P_2和P_3。 P_1 、P_2和P_3关于E_1 、E_2和E_3的**坐标**记为x_1、x_2和x_3。则可定义3元有序数组(x_1, x_2, x_3)与空间中的点P之间的1-1对应。 $\overrightarrow{L_1}$ 、$\overrightarrow{L_2}$和$\overrightarrow{L_3}$通常记为Ox_1、Ox_2和Ox_3。称取定坐标轴的空间为**空间直角坐标系**，记为$Ox_1x_2x_3$。

A.3 n维点集

三、n维空间的度量

1、度量的定义：任取$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$，则x与y之间的度量定义为：

$$\|x-y\|=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}。$$



图A-7. 两点间距离

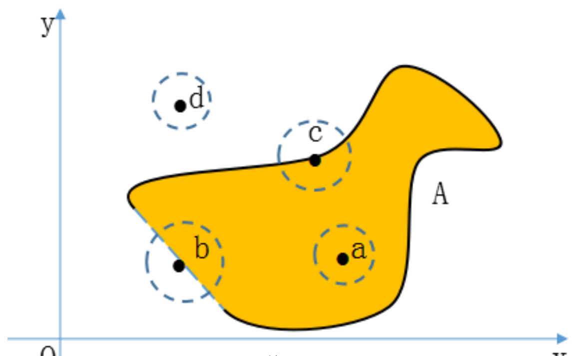
2、度量的性质：任取$x,y,z\in R^n$，则(1).$\|x-y\|\geqslant 0$且$\|x-y\|=0$当且仅当$x=y$；(非负性) (2).$\|x-y\|=\|y-x\|$；(对称性) (3).$\|x-z\|\leqslant \|x-y\|+\|y-z\|$；(三角不等式)

3、注A.5: (1). 度量的概念是两个实数之差的绝对值概念的推广；

(2). 从几何表示来看，x与y之间的度量恰是这两点之间的距离。故度量通常被称为距离。但需要注意的是，两者是不同的概念！

A.3 n维点集

4、球形邻域：给定$x=(x_1,\cdots,x_n)\in Rn$和正数 $r>0$。作点集 $B(x,r)=\{y\in R^n;\ \|y-x\|<r\}$, 称之为点x的半径为r的球形邻域，简称r-邻域。作点集 $B^{\circ}(x,r)=\{y\in R^n;\ 0<\|y-x\|<r\}$,称之为点x的去心r-邻域。



图A-8. 点与集合的关系

注A.6：图7中，a是A的内点，内点必属于A；d是A的外点，外点必不属于A；b是不属于A的边界点，c是属于A的边界点。

5、点与集合的关系：给定R^n的子集A，其余集记为Ac。

(1).内点和外点：称点x为A的内点，若存在r>0,使得 $B(x,r)\cap Ac=\varnothing$，亦即 $B(x,r)\cap A$;

称点x为A的外点，若存在r>0,使得 $B(x,r)\cap A=\varnothing$，亦即 $B(x,r)\subseteq Ac$;

(2).边界点：若x既不是A的内点又不是A的外点，则称其为A的边界点。x是A的边界点当且仅当对任意的r>0，总有$B(x,r)\cap Ac\neq\varnothing$和 $B(x,r)\cap A\neq\varnothing$ 。

A.3 n维点集

(3). 内部、外部和边界：A的全体内点的集合叫做A的**内部**，记为A°；A的全体外点的集合叫做A的**外部**(**A的外部是其余集的内部**)；A的全体边界点的集合叫做A的**边界**，记为∂A；A的内部和边界的并集称为A的闭包，记为$\bar{A}$为。易见 $\bar{A}=A^{\circ}\cup\partial A=A\cup\partial A$。

(4). 聚点和孤立点：x称为A的**聚点**，如果对任意的$r>0$，总有$B^{\circ}(x,r)\cap A\neq\varnothing$。聚点若不属于A，则必属于A的边界。**若x属于A并且**x不是A的聚点，则称其为A的**孤立点**。

6. n维点集的类型

(1). 开集和闭集：若A的所有点均为内点，则称其为**开集**。A是开集当且仅当 $A=A^{\circ}$；若A的所有聚点都在其中，则称其为**闭集**。 A是闭集当且仅当 $A=\bar{A}$；

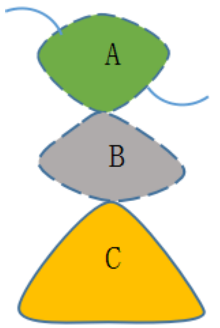
A.3 n维点集

(2). **折线的定义**：给定k+1个点 $P_0, P_1, \cdots, P_m \in R^n$。连接$P_{k-1}$和$P_k$的直线段记为 $[P_{k-1}P_k]=\{P=(t-1)P_{k-1}+tP_k；0\le t\le 1\}$。这些线段的并集叫做以$P_0, P_1, \cdots, P_m$为顶点的折线。$P_0$和$P_m$叫该折线的**端点**。

(3). **连通集**：给定R^n中的子集A。若其中任意两点都是包含于A中的某一条折线的端点，则A是一个**连通集**。

(4). **区域和闭区域**：连通的开集D称为**区域**。区域的闭包称为**闭区域**。

(5). **有界集和无界集**：给定R^n中的子集A。若其任意一点到原点的距离都小于某个给定的正数，则称A为**有界集**。否则称为**无界集**。



图A-9.连通集、区域和闭区域

注A.7：1). 图8中，A是连通集；B是区域；C是闭区域；A∪B不是连通集；B∪C是连通集。这里，虚线表示不在集合中的点，实线表示含在集合中的点。2). 连通集的精确定义需要用到“连续”的概念。我们以后再补充它的定义。

谢谢!