



大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

某些可降阶的高阶微分方程

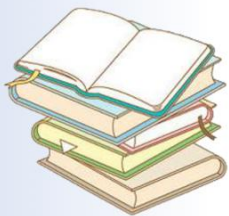
主讲人：李正学
大连理工大学数学科学学院



主要内容



- $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程
- 不显含未知函数 y 的微分方程
- 不显含自变量 x 的微分方程
- 首次积分法



简单的n阶微分方程



➤ 方程形式: $y^{(n)} = f(x)$.

➤ 解法

方程两边同时积分, 得

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1.$$

原方程就降了一阶。再逐次积分, 最后就可求出原方程的通解。



二阶微分方程



一般形式: $F(x, y, y', y'') = 0.$

特殊形式: $y'' = f(x, y, y').$

通解: $y = \varphi(x, c_1, c_2).$



不显含 y 的二阶微分方程

➤ 方程形式: $F(x, y', y'') = 0$.

➤ 解法

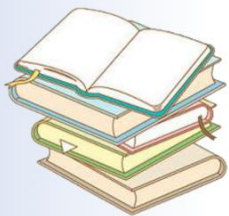
作变换 $y' = u$, 则原方程化为

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) = 0,$$

$u(x)$ 的一阶方程

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u = v(x, c_1).$$

通解: $y = \int v(x, c_1) dx + c_2.$



不显含 y 的二阶微分方程举例

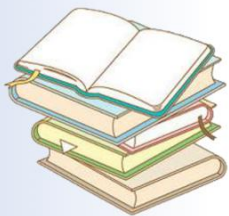
例 $x y'' + y' = x^2.$

解 作变换 $y' = u$, $\Rightarrow x \frac{du}{dx} + u = x^2$, $\Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{x} u = x.$

由一阶线性微分方程的通解公式

$$\frac{dy}{dx} = u = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c_1 \right] = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

原方程的通解为: $y = \frac{x^3}{9} + c_1 \ln|x| + c_2.$



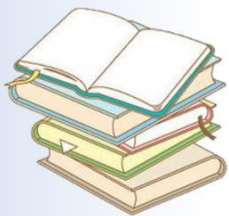
不显含 x 的二阶微分方程

- 不显含 x 的二阶微分方程: $F(y, y', y'') = 0$.
- 解法

作变换 $y' = u(y)$, 则 $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \times \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$.

原方程化为: $F\left(y, u, u \frac{du}{dy}\right) = 0$.

这是以 y 为自变量, u 为未知函数的一阶方程。



不显含x的二阶微分方程举例

例 $y'' + \frac{y'^2}{1+y} = 0.$

解 作变换 $y' = u(y)$, 原方程化为: $u \frac{du}{dy} + \frac{u^2}{1+y} = 0.$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dy}{1+y}.$$

积分, 整理得: $\frac{dy}{dx} = u = \frac{c}{1+y}, \Rightarrow (1+y)dy = cdx.$

积分, 得原方程的通解为: $y + \frac{y^2}{2} + c_1x + c_2 = 0.$



首次积分法



若 $F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y')$, 则称

$$\Phi(x, y, y') = c$$

为方程 $F(x, y, y', y'') = 0$

易知, 首次积分可将原来的二阶方程降为一阶方程。



首次积分法例子



例 $\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 0.$

解 $\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)' = 0, \Rightarrow \frac{y'}{y} = c_1, \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 dx.$

两边积分, 得: $\ln|y| = c_1 x + c.$

原方程的通解为: $y = c_2 e^{c_1 x} \ (c_2 \neq 0).$



小 结



- 某些可降阶的高阶微分方程的解法

y^*



大连理工大学

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

某些可降阶的高阶微分方程

主讲人：李正学
大连理工大学数学科学学院