数项级数的基本概念

1、**数项级数的定义**：一般地，将数列$\{u_n\}$的各项依次用"+"连接起来的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

叫做**常数项无穷级数**，简称**数项级数**或**级数**，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots.$$

其中$u_1,u_2,\Lambda,u_n,\Lambda$，称为级数的**项**，$u_n$称为级数的**一般项**或**通项**.

2、**数项级数的敛散性的定义**：我们知道，任意有限项之和的意义是十分明确的，而无穷多个数"相加"，这是一个新的概念，这种加法是不是具有"和数"？这个"和数"的确切意义又是什么？从上述实例知道，我们可以从有限项的和出发，研究其变化趋势，由此来理解无穷多个数相加的意义.

令

$$S_1=u_1,S_2=u_1+u_2,\cdots,S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\cdots,$$

这样，对任何一个无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，总可以作出一个数列$\{s_n\}$，通项

$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k(n=1,2,\cdots)$，并称$\{s_n\}$为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的**部分和数列**.

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{s_n\}$收敛于有限值s，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=S,$$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，这时极限s叫做这个级数的和，并写成

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots.$$

若部分和数列$\{s_n\}$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**，此时级数没有"和数".

可见级数收敛与否，与它的部分和数列是否有极限是等价的.

当级数收敛时，其部分和s_n是级数的和s近似值，它们之间的差值

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

叫做级数的**余和**. 用近似值s_n代替s所产生的绝对误差为这个余和的绝对值

$$|r_n| = |S - S_n|.$$

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件也可以是

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

3、**数项级数解决的问题**：研究无穷级数，需要解决两个问题：① 该级数是收敛还是发散（即级数的敛散性）？② 如果级数收敛，它的和等于什么？其中第一个问题更为重要，这不仅由于①是②的前提，即只有收敛级数才能讨论求和问题，而且，如果已知级数收敛，在求和比较困难的情况下，我们总可以用级数的部分和作为级数和的近似值，只要项数取得足够多，近似的精度就可以足够高，所以后面的内容主要是围绕着判定级数的敛散性展开的.