利用定义判别数项级数敛散性的典型例子

例 1、　讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$的敛散性.

解　级数的通项$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

于是部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

即级数收敛，且和为 1.

注意该题的结构特点是：通项=相同形式二项差.

例 2　讨论等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+\cdots+aq^{n-1}+\cdots\quad(a\neq 0)$$

的敛散性.

解　当$q\neq 1$时，该级数的部分和

$$S_n=a+aq+aq^2+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当$|q|<1$时，$\lim_{n\to\infty}q^n=0$，$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q}$，即级数收敛，它的和为$S=\frac{a}{1-q}$.

当$|q|>1$时，$\lim_{n\to\infty}q^n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$，即级数发散.

当$q=1$ 时，级数变为$a+a+\cdots+a+\cdots$，而$S_n=na$，$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$，即级数发散.

当$q=-1$ 时，级数变为$a-a+a-a+\cdots$，而$S_n=\begin{cases}0 & (n\text{为偶数})\\ a & (n\text{为奇数})\end{cases}$，因此$S_n$没有极限，即级数发散.

综上可知，$|q|<1$时级数收敛，$|q|\geqslant 1$ 时级数发散。等比级数在无穷级数中有着重要的应用，它的结论应该熟知.

例 3、　讨论调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$的敛散性.

解　该级数的通项u_n满足下列关系式

$$u_n=\frac{1}{n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx>\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\,.$$

于是部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\int_3^4\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\,.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\,|_1^{+\infty}=+\infty\,.$$

所以　$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$，即该级数发散.

该题是将级数与反常积分进行比较，由反常积分发散，推出级数发散. 事实上级数与反常积分的敛散性有着密切的联系.