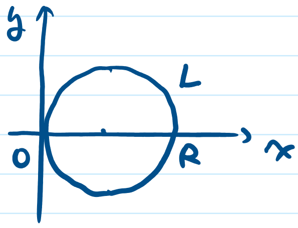
第八章习题课

例1： 计算 $I=\oint_L (x^2+(y-1)^2)\mathrm{d}s$, 其中 L: $x^2+y^2=Rx\ (R>0)$.

解: $I=\oint_L (x^2+y^2+1-\underline{\underline{2y}})\,ds$



$=\oint_L (x^2+y^2)\,ds + \oint_L ds$

$=R\oint_L x\,ds + \oint_L ds$

质心. $\bar{x}=\frac{R}{2}$.

$\Rightarrow \oint_L x\,ds = \frac{R}{2}\oint_L ds$

$\Rightarrow \quad I=\frac{\pi}{2}R^3+\pi R.$

① L: $(x-\frac{R}{2})^2+y^2=(\frac{R}{2})^2$

$\Rightarrow \begin{cases} x-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}\cos\theta \\ y=\frac{R}{2}\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

② L: $x^2+y^2=Rx$

$\Rightarrow r=R\cos\theta$ $(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

例2： 计算 $I=\oint_L xy\,\mathrm{d}s$, 其中 L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

解: $I=\oint_L xy\,ds=\oint_L yz\,ds=\oint_L xz\,ds$ $\left(\ast\ \oint_L x^2\,ds\right)$

$(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+xz)$

$\Rightarrow \quad I=\frac{1}{3}\oint_L (xy+yz+xz)\,ds$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\oint_L \left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right] ds$

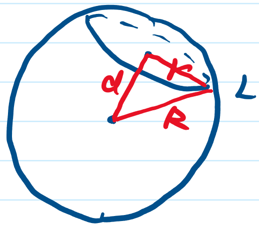
$=-\frac{1}{6}\oint_L ds$

$=-\frac{\pi}{3}.$

例3： 计算 $I=\oint_L (\sqrt{2}x+y)^2\,\mathrm{d}s$, 其中 L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}. \\ x+z=1 \end{cases}$

例3: 计算 $I=\oint_L(\sqrt{2}x+y)^2\,ds$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}\\ x+z=1\end{cases}$.

解: $I=\oint_L(2x^2+y^2+2\sqrt{2}xy)\,ds$



(L关于 xoz 平面对称)

$=\oint_L(2x^2+y^2)\,ds$

(L关于 z=x 平面对称)

$=\oint_L(x^2+y^2+z^2)\,ds$

$=\frac{9}{2}\oint_L ds$

$=\frac{9}{2}\cdot 4\pi=18\pi.$

$R=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

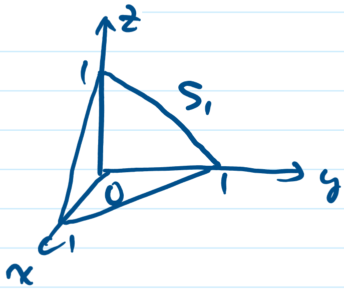
$d=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow r=2$

例4: 计算 $I=\oiint_S(x+|y|)\,dS$，其中 $S:|x|+|y|+|z|=1$.

解: $I=\oiint_S x\,dS+\oiint_S|y|\,dS$

$=0+8\iint_{S_1}y\,dS$



①. 直接计算 (一投. 二代. 三换).

② $\iint_{S_1}y\,dS=\frac{1}{3}\iint_{S_1}(x+y+z)\,dS=\frac{1}{3}\iint_{S_1}dS$

③ 质心: $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=\frac{1}{3}$. $\Rightarrow\iint_{S_1}y\,dS=\frac{1}{3}\iint_{S_1}dS$

$\Rightarrow I=\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$

例5: 计算 $I=\oiint_S(ax+by+cz+d)^2\,dS$，其中 $S:x^2+y^2+z^2=1$.

解: $I=\oiint_S\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2+2abxy+\cdots+2adx+\cdots\right)dS$

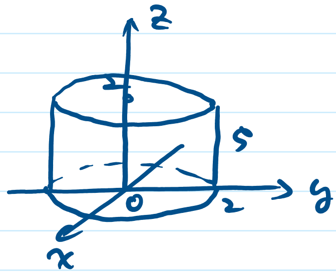
解: $I=\oiint\limits_S\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2+2abxy+\cdots+2adx+\cdots\right)dS$

$$=\oiint\limits_S(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,dS+d^2\oiint\limits_S dS$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{1}{3}\oiint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\,dS+d^2\oiint\limits_S dS.$$

$$=\left[\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+d^2\right]\cdot 4\pi.$$

例6: 计算$I=\iint\limits_S\dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2}$，其中$S$为柱面$x^2+y^2=4$夹在平面$z=0$和$z=2$之间的部分.

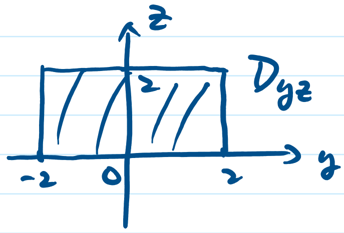


解: $I=\iint\limits_S\dfrac{1}{4+z^2}\,dS$

$$=2\iint\limits_{S_1}\frac{1}{4+z^2}\,dS.$$

S_1: $x^2+y^2=4\ (x\ge 0)$

$\hookrightarrow x=\sqrt{4-y^2}.$



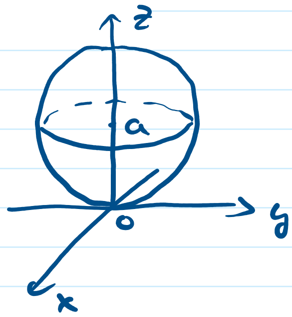
$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1}{4+z^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dy\,dz$$

$$=4\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-y^2}}\,dy\int_0^2\frac{1}{4+z^2}\,dz=2\pi^2.$$

$[z,z+dz]$ $\quad dm=\dfrac{1}{4+z^2}\cdot 4\pi\,dz$

$\Rightarrow m=\displaystyle\int_0^2\frac{1}{4+z^2}\cdot 4\pi\,dz=2\pi^2.$

例7: 计算$I=\oiint\limits_S(\sqrt{2}\,x+z)^2dS$，其中$S$: $x^2+y^2+z^2=2az\ (a>0)$.



解: $I=\oiint\limits_S(2x^2+z^2+2\sqrt{2}\underline{\underline{xz}})\,dS$

$$=\oiint\limits_S(2x^2+z^2)\,dS$$

$$=\oiint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\,dS$$

$$=2a\oiint\limits_S z\,dS=8\pi a^4.$$

质心：$\bar{z} = a \Rightarrow \oiint_S z\,dS = a\oiint_S dS = 4\pi a^3$

例8：设S为椭球面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分，点$P(x,y,z)\in S$，$\Pi$为$S$在点$P$处的切平面，$\rho(x,y,z)$为$O(0,0,0)$到平面$\Pi$的距离，求$\iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解：由 $P(x.y.z)$ 处切平面法向量 $\vec{n}=(x.\ y.\ 2z)$

$\Rightarrow$ 切平面：$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$

即：$xX+yY+2zZ=x^2+y^2+2z^2=2 \quad (P\in S)$

$\Rightarrow \rho(x.y.z)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$

$\Rightarrow I=\iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x.y.z)}dS=\dfrac{1}{2}\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\,dS$

$=\dfrac{1}{4}\iint\limits_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)\,dxdy=\dfrac{3}{2}\pi.$

例9：设曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x^2+y^2=Rx,\end{cases}(z\geq 0,\ R>0)$的线密度为$\sqrt{x}$，求其对三个坐标轴的转动惯量之和$I_x+I_y+I_z$.

解：$I_x+I_y+I_z=\oint_L\sqrt{x}\,(y^2+z^2+x^2+z^2+x^2+y^2)\,ds$

例10：设S为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的第一卦限部分，L为其与三个坐标平面的交线，V为其与三个坐标平面围成的几何体，分别求它们的质心及对z轴的转动惯量(密度$\rho=1$).

例11：把均匀的旋转抛物体 $x^2+y^2 \leq z \leq 1$ 放在水平的桌面上，求当形体处于稳定平衡时，它的轴线与桌面的夹角 α.