幂级数的收敛半径

主讲人：刘秀平 教授

幂级数收敛半径

定理：对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho.$

其中，a_n，a_{n+1}是$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$相邻两项的系数，则幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ 0, & \rho=+\infty, \\ +\infty, & \rho=0. \end{cases}$$

对于，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，考察其绝对值级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x^1| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots (1)$$

相邻两项$|a_n x^n|, |a_{n+1} x^{n+1}|$之比为： $|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}| |x|$ （2）

幂级数收敛半径

如果$\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=\rho.$

(I)若$\rho\neq 0.$当$|x|<\dfrac{1}{\rho}$=R时，即得$\rho|x|<1$。

则由比值法知，级数（1）是收敛的，

从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$是绝对收敛的。

当$|x|>\dfrac{1}{\rho}$=R时，即得$\rho|x|>1$。

则由比值法知，级数（1）是发散的。

又由于该发散是由比值判别法获得，

因此其一般项不满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_nx^n=0$,

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$是发散的。

综上可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为R=$\dfrac{1}{\rho}$.

(II)若ρ=0，则对任意的$x\neq 0$,有

$|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}||x|\to 0$，所以级数（1）是收敛的，

从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛的。

所以，R=+∞.

(III)若ρ=+∞，则对任意$x\neq 0$，有

$|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}|=|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}||x|>1,$当$n>>$.

因此，由比值法知，级数（1）的发散的，

从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$发散的，即R=0。

幂级数收敛半径

例题1求下列幂级数的收敛半径 .

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n};2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};3.\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n;4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

解:$1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\Rightarrow a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$

由于$\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$

所以R=$\frac{1}{\rho}$=1.

$2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\Rightarrow a_n=\frac{1}{n!}.$

由于$\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$

所以R=+∞.

幂级数收敛半径

$3.\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n, \Rightarrow a_n = n!.$

由于$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty.$

所以R=0.

$4.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$,缺项,$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{4(n+1)+1}}{4(n+1)}}{\frac{x^{4n+1}}{4n+1}} = x^4.$

当$x^4 < 1$时，即$|x|<1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$收敛。

当$x^4 > 1$时，即$|x|>1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$发散的。

所以R=1.

幂级数收敛半径

例题 求下列函数项级数的收敛域.

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\bullet 3^n};2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\bullet 3^n};3.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\bullet 3^n};4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\bullet 3^n\bullet x^n}.$$

解： $1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\bullet 3^n},\Rightarrow a_n=\frac{1}{n\bullet 3^n}.$

由于$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\bullet 3^n}{(n+1)\bullet 3^{n+1}}=\frac{1}{3}.$

所以$R=\frac{1}{\rho}=3$.考虑端点$x=-3$及$x=3$.

当$x=-3$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\bullet 3^n}$化为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$,

该级数是收敛的。因此, 当$x=-3$时， 是收敛点。

当$x=3$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\bullet 3^n}$化为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,

该级数是发散的。因此, 当$x=3$时， 是发散点。

综上,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\bullet 3^n}$收敛域为$[-3, 3)$.

幂级数收敛半径

$2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\bullet 3^n}$，令t=$x-3$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\bullet 3^n}$化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\bullet 3^n}\Rightarrow a_n=\frac{1}{n\bullet 3^n}$.

由于$\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\bullet 3^n}{(n+1)\bullet 3^{n+1}}=\frac{1}{3}$.

所以R=$\frac{1}{\rho}$=3.考虑端点$t=-3$及$t=3$.

当$t=-3$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\bullet 3^n}$化为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，该级数是收敛的。因此

当$t=-3$时，是收敛点。

当$t=3$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\bullet 3^n}$化为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，该级数是发散的。因此

当$t=3$时，不是收敛点。

综上，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\bullet 3^n}$收敛域为$[-3,3)$. 再由t=$x-3\Rightarrow 0\le x<6$.

幂级数收敛半径

解：$3.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\bullet 3^n}$，　（缺项级数）比值法是基本的。

由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)\bullet 3^{n+1}}}{\frac{x^{2n}}{n\bullet 3^n}}\right|=\frac{x^2}{3}.$

因此，当 $\frac{x^2}{3}<1$ 即 $|x|<\sqrt{3}$ 时，级数收敛；

当 $\frac{x^2}{3}>1$ 即 $|x|>\sqrt{3}$ 时，级数发散；

当 $|x|=\sqrt{3}$ 时

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\bullet 3^n}$ 化为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散的。

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\bullet 3^n}$ 收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

幂级数收敛半径

$$4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\bullet 3^n\bullet x^n}.$$

解:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\bullet 3^n\bullet x^n}$, （不是幂级数，但是可化成幂级数）.

令$t=\frac{1}{x}$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\bullet 3^n\bullet x^n}$可化成幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\bullet 3^n}$.

对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\bullet 3^n}$收敛域为$t\in[-3,3)$，所以由

$$-3\le t=\frac{1}{x}<3,\Rightarrow t\in(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup(\frac{1}{3},+\infty).$$

谢谢！