



大连理工大学
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

高阶线性微分方程

主讲人：刘秀平 教授



大连理工大学
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

二阶线性微分方程

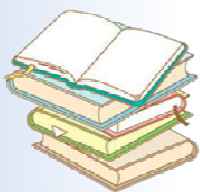
- 二阶齐次线性微分方程
- 二阶非齐次线性微分方程



二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1.1)$$

- 1.通解的结构
- 2.求解方法
- 3.特殊类型--二阶常系数齐次线性微分方程求解



1.1 通解的结构



一阶齐次线性微分方程

$$y' + p(x)y = 0$$

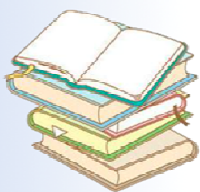
$$Y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad \Rightarrow \quad \underline{Y = Cy^*}. \quad (*)$$

$$y^* = e^{-\int p(x)dx}.$$

$$y'^3 - 4xy' + 8y^2 = 0 \quad \underline{y = C(x - C)^2}.$$

$$y'' = 0. \quad y = C_1 + C_2x. \quad y_1^* = 1, y_2^* = x \quad y = \underline{C_1y_1^* + C_2y_2^*}$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \underline{y = C_1y_1^* + C_2y_2^*}$$



1.1 通解的结构

定理1.1 若函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程(1.1) 的两个解, 则函数

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (1.2)$$

也是方程 (1.1) 的解, 其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

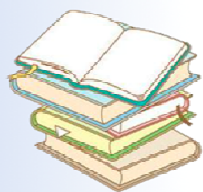
证明

$$\begin{aligned} \text{左端} &= (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= (C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + p(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2 [y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = 0. \end{aligned}$$

设 $y_1(x)$ 是方程 (1.1) 的一个解, 则 $y_2(x) = 2y_1(x)$ 也是方程 (1.1) 的解. \square

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2C_2)y_1(x) = Cy_1(x).$$

$y_2(x)/y_1(x) = D(\text{常数})$, (1.2) 不是通解; $y_2(x)/y_1(x) \neq D(\text{常数})$, (1.2) 是通解.



1.1 通解的结构

定理1.2 设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 若存在 n 个不全为零的常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得当 $x \in I$ 时, 有恒等式

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) \equiv 0$$

成立, 则称这 n 个函数在区间 I 上**线性相关**; 否则称为**线性无关**。

函数 $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是线性相关的。

$$k_1 1 + k_2 \sin^2 x + k_3 \cos^2 x \equiv 0.$$

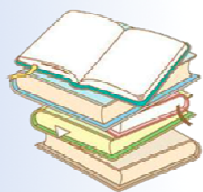
$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1 \Leftrightarrow \underline{1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 0}.$$

$$1 \cdot 1 + (-1) \cdot \sin^2 x + (-1) \cdot \cos^2 x \equiv 0. \quad \text{取 } k_1 = 1, \quad k_2 = -1, k_3 = -1, \quad \square$$

函数 $1, x, x^2$ 在任何区间 (a, b) 内是线性无关的. $k_1 1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$.

如果两个函数的比是常数, 则它们就是线性相关的;

否则, 就是线性无关的。



1.1 通解的结构



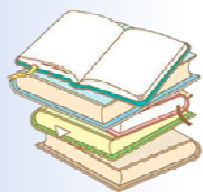
定理1.3 若函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程 (1.1) 的两个线性无关的解, 则它们的线性组合

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

是方程 (1.1) 的通解, 其中 C_1, C_2 为任意常数。

$$y'' + y = 0 \quad y_1(x) = \cos x \text{ 与 } y_2(x) = \sin x.$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq C. \quad y'' + y = 0 \text{ 的通解为 } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$



1.1 通解的结构



推理1.4 若函数 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的解，则它们的线性组合

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

是此方程通解，其中 C_1, C_2, \dots, C_n 为任意常数。

