将函数展为幂级数的几个实例（上）

在将函数展为幂级数的间接展开时，如所给定的函数和 7 个标准函数像时，我们就利用变量代换法，其本质是将 7 个标准函数展开公式中的 x 换成 $x-x_0$ 即可。具体如下。

1、$e^x=e^{x_0}\bullet e^{x-x_0}=e^{x_0}\bullet\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!},x-x_0\in(-\infty,+\infty)$，即 $x\in(-\infty,+\infty)$。

2、$\sin x=\sin((x-x_0)+x_0)=\sin(x-x_0)\cos x_0+\cos(x-x_0)\sin x_0$

$$=\cos x_0\bullet\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin x_0\bullet\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)\text{。}$$

3、$\cos x=\cos((x-x_0)+x_0)=\cos(x-x_0)\cos x_0-\sin(x-x_0)\sin x_0$

$$=\cos x_0\bullet\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}-\sin x_0\bullet\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)\text{。}$$

4、$\ln(1+x)=\ln((1+x_0)+(x-x_0))=\ln((1+x_0)\bullet(1+\frac{x-x_0}{1+x_0}))$

$$=\ln(1+x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\frac{(x-x_0)^n}{(1+x_0)^n},-1<\frac{x-x_0}{1+x_0}\le 1\text{。}$$

5、$(1+x)^\alpha=((1+x_0)+(x-x_0))^\alpha=(1+x_0)^\alpha(1+\frac{x-x_0}{1+x_0})^\alpha$

$$=(1+x_0)^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}\bullet\frac{(x-x_0)^n}{(1+x_0)^n},\left|\frac{x-x_0}{1+x_0}\right|<1\text{。}$$

6、$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{(1+x_0)+(x-x_0)}=\frac{1}{1+x_0}\bullet\frac{1}{1+\frac{x-x_0}{1+x_0}}$

$$=\frac{1}{1+x_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-x_0)^n}{(1+x_0)^n},\left|\frac{x-x_0}{1+x_0}\right|<1\text{。}$$

7、 $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x_0)-(x-x_0)}=\frac{1}{1-x_0}\bullet\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{1-x_0}}$

$=\frac{1}{1-x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^n},\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right|<1$。