# 大 连 理 工 大 学

课 程 名 称: 线性代数与解析几何　　试 卷: A　　试卷形式: 闭卷

授课院(系): 数学科学学院　考试日期; 2018年1月12日　试卷共 6 页

| | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 标准分 | 36 | 10 | 8 | 8 | 12 | 14 | 6 | 6 | 100 |
| 得 分 | | | | | | | | | |

注: $\mathbf{E}$为单位矩阵, $|\mathbf{A}|$, $\det(\mathbf{A})$均为$\mathbf{A}$的行列式, $\mathbf{A}^*$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵, $\mathbf{A}^T$为$\mathbf{A}$ 的转置矩阵, $\mathrm{r}(\mathbf{A})$为$\mathbf{A}$的秩.

| 得分 | |
|---|---|

**一. 填空题**(3分×12 = 36 分)

1. 设3阶方阵$\mathbf{A}$的特征值是1,2,3, 则$|\mathbf{A}^* - 3\mathbf{A}^{-1}| =$ $\underline{\ \frac{9}{2}\ }$.

2. 已知向量组$\mathbf{a_1} = (1,-1,0)^T, \mathbf{a_2} = (1,0,-1)^T, \mathbf{a_3} = (k,-2,-1)^T$线性相关，则$k$满足$\underline{\ k = 3\ }$.

3. 设$\mathbf{a} = (1,2,3)^T$，则$(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)^{100} =$ $\underline{14^{99}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}$.

4. 已知矩阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A^2} + \mathbf{A} - \mathbf{E} = \mathbf{O}$, 则$(\mathbf{A} - \mathbf{2E})^{-1} = -\frac{\mathbf{A+3E}}{5}$.

5. 已知4阶行列式$D$中第二列元素依次为$-1,2,1,0$, 第二列元素的余子式依次为$5,3,-7,4$, 则$\underline{\ D = 18\ }$.

6. 设矩阵$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$的秩为2，$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3, \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, 则方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的通解为$\underline{\ (1,1,1)^T + k(1,-2,-3)^T\ }$（注意答案的不唯一性）.

7. 若实对称矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$合同, 则$\mathbf{A}$的合同标准形为$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

8. 设$\mathbf{A}$为3阶矩阵，$|\mathbf{A}| = 2$, 将$\mathbf{A}$的1,2两列对调得到矩阵$\mathbf{B}$, 则$\underline{\ \mathbf{B}^*\mathbf{A} = -2\mathbf{E}_{1,2}\ }$.

9. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$在正交变换$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$下的标准形为$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 则$\underline{\ a = 2\ }$.

10. 设$\mathbf{a},\mathbf{b}$均为$n(n\geq 3)$元非零列向量, $\mathbf{A}=\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}$, 则$\mathbf{A}$的等价标准型为 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$.

11. 过点$(1,1,1)$且垂直于平面$x-y+z-2=0, 3x+2y-2z+1=0$的平面方程 $\underline{\ y+z-2=0\ }$.

12. OXY面上的曲线$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$绕$y$轴旋转一周所形成的旋转面方程为 $\underline{\ \frac{x^2+z^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\ }$.

| 得分 | |
|---|---|

**二. 单项选择题**(2分×5 = 10分).

1. 设$\mathbf{A}$是$n$阶方阵, $\mathbf{b}$是$n$元列向量, 若矩阵$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$与$\mathbf{A}$的秩相等, 则( B ).

(A) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$无解　(B) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解
(C) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解　(D) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有非零解

2. 设$\mathbf{a}$是$n$元单位向量, 下列矩阵中( C )是正交矩阵.

(A) $\mathbf{E}-\mathbf{aa}^T$　(B) $\mathbf{E}+\mathbf{aa}^T$　(C) $\mathbf{E}-\mathbf{2aa}^T$　(D) $\mathbf{E}+\mathbf{2aa}^T$

3. 设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵, $\mathbf{B}$为$n\times s$矩阵, $\mathbf{A},\mathbf{B}$均不为零, 且$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, 则( D ).

(A) $\mathbf{A},\mathbf{B}$行向量组均线性相关　(B) $\mathbf{A}$行向量组线性相关, $\mathbf{B}$列向量组线性相关
(C) $\mathbf{A},\mathbf{B}$列向量组均线性相关　(D) $\mathbf{A}$列向量组线性相关, $\mathbf{B}$行向量组线性相关

4. 设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则( A ).

(A) $\mathbf{A},\mathbf{C}$相似　(B) $\mathbf{B},\mathbf{C}$相似　(C) $\mathbf{A},\mathbf{B}$相似　(D) $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$皆相似

5. 设$\lambda_1,\lambda_2$是矩阵$\mathbf{A}$的两个不同特征值, $\mathbf{p_1},\mathbf{p_2}$分别是$\lambda_1,\lambda_2$对应的特征向量, 则$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2$是特征向量的充要条件是( D ).

(A) $k_1,k_2$不全为0　(B) $k_1=0,k_2\neq 0$
(C) $k_1\neq 0,k_2=0$　(D) $k_1,k_2$中有且只有一个不为0

| 得分 | |
|---|---|

三. (8分) 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ 解空间$S$的一组正交基.

解：$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3分)$$

$S$的一组基为 $$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3分)$$

$S$的正交基为 $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (2分)$$

**注意：**答案的不唯一性，如果由方程组的求解直接求出正交基，分数全给.

| 得分 | |
|---|---|

四. (8分) 已知$\mathbf{R}^3$的两个基

$\mathbf{a_1} = (1,0,0)^T, \mathbf{a_2} = (1,1,0)^T, \mathbf{a_3} = (1,1,1)^T$; $\quad \mathbf{b_1} = (2,1,2)^T, \mathbf{b_2} = (-2,2,1)^T, \mathbf{b_3} = (1,2,-2)^T$.

(1) 求从基$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$到基$\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$的过度矩阵$\mathbf{P}$;

(2) 设向量$\mathbf{v}$在基$\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$下的坐标向量为$\mathbf{y} = (1,3,2)^T$, 求$\mathbf{v}$在基$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$下的坐标向量$\mathbf{x}$.

解 (1) $$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)\mathbf{P} \quad (2分)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3分)$$

(2) $$\mathbf{x} = \mathbf{Py} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3分)$$

| 得分 | |
|---|---|

五. (12分) 已知4元向量组$\mathbf{b}_1=(1-a,1,1,1)^T,\mathbf{b}_2=(2,2-a,2,2)^T,\mathbf{b}_3=(3,3,3-a,3)^T,\mathbf{b}_4=(4,4,4,4-a)^T$的秩为3，求$a$及$\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\mathbf{b_3},\mathbf{b_4}$的一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解： $$\begin{vmatrix} 1-a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2-a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3-a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4-a \end{vmatrix} = a^3(a-10), \qquad (3分)$$

当$a=10$时, 向量组$\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\mathbf{b_3},\mathbf{b_4}$的秩为3 (2分)

$$(\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\mathbf{b_3},\mathbf{b_3})=\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3分)$$

$\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\mathbf{b_3}$为其极大线性无关组, (2分)

$\mathbf{b_4}=-\mathbf{b_1}-\mathbf{b_2}-\mathbf{b_3}$ (2分)

六. (14分) 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

(1) 求正交矩阵$\mathbf{Q}$和对角矩阵$\mathbf{\Lambda}$, 使得$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{\Lambda}$;

(2) 求3元二次型$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的规范形;

(3) 设$\mathbf{u}=(x,y,z)^T$, 在空间直角坐标系中，方程$\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{u}=1$表示何种曲面?

解 (1) $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda+1)\quad \lambda_1=4,\lambda_2=5,\lambda_3=-1$ (3分)

对应$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量分别为

$\mathbf{p}_1=(0,0,1)^T$, $\mathbf{p}_2=(1,1,0)^T,\mathbf{p}_3=(1,-1,0)^T$ (3分)

令$\mathbf{q}_1=\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_2=\frac{\mathbf{p}_2}{\sqrt{2}},\mathbf{q}_3=\frac{\mathbf{p}_3}{\sqrt{2}}$ (2分)

令$\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{Q^{-1}AQ}=\mathrm{diag}(4,5,-1)$ (2分)

**注意: Q**的不唯一性.

(2) $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的规范形为$y_1^2+y_2^2-y_3^2$ (2分)

(3) $\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{u}=1$表示单叶双曲面. (2分)

| 得分 | |
|---|---|

七. (6分) 设$n$元非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解, 且$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$, 令$S=\{\mathbf{x}|\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\}$, 即$S$是方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的所有解向量的集合，

证明: $S$的秩$\mathrm{r}(S)=n-r+1$.

证　设$\eta_0$是方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一个解, $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$

是对应齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系，

则解向量组$S$中的任意一个向量都可由向量组$\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{n-r}$线性表出，

因此向量组$S$的秩$r(S)\le n-r+1$, (3分)

设$\xi_1=\eta_0$, $\xi_2=\eta_1+\eta_0$, $\ldots$, $\xi_{n-r+1}=\eta_{n-r}+\eta_0$,

则$\xi_i\in S, i=1,\ldots,n-r+1$，且$\xi_1,\ldots,\xi_{n-r+1}$线性无关.

因此，$S$的秩$\mathrm{r}(S)=n-r+1$. (3分)

| 得分 | |
|---|---|

八. (6分) 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为$n$阶实对称矩阵，且$\mathbf{A},\mathbf{B}$的特征值都大于0, 证明：$\mathbf{AB}$的特征值也都大于0.

证　由题意，$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为正定矩阵，故存在可逆矩阵$\mathbf{P},\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{P^TP}$, $\mathbf{B}=\mathbf{Q^TQ}$ (3分)

$\mathbf{AB}=\mathbf{P^TPQ^TQ}=\mathbf{Q^{-1}}(\mathbf{QP^T})(\mathbf{QP^T})^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{SS^T})\mathbf{Q}$, 其中$\mathbf{S}=\mathbf{QP^T}$,

$\mathbf{S}$为可逆矩阵，$\mathbf{SS^T}$是正定矩阵，

于是$\mathbf{SS^T}$的特征值均大于零，而$\mathbf{AB}$与$\mathbf{SS^T}$相似，因此$\mathbf{AB}$的特征值都大于零. (3分)