例1 **设** $f(x-y,\ln x)=\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{e^x}{e^y\ln(x^x)}$ ，**求** $f(x,y)$

解 令 $x-y=u$，$\ln x=v$。

$$f(u,v)=f(x-y,\ln x)=\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{e^x}{e^y\ln(x^x)}$$

$$=\frac{x-y}{x}\cdot\frac{e^{x-y}}{x\ln x}=\frac{(x-y)e^{x-y}}{e^{2\ln x}\ln x}$$

$$=\frac{ue^u}{ve^{2v}}$$

所以 $f(x,y)=\frac{xe^x}{ye^{2y}}$ 。

例2 设 $f(x,y)=x+y+g(x-y)$，已知 $f(x,0)=x^2$

求 $f(x,y)$ 的表达式。

解 由题设 $f(x,0)=x+g(x)=x^2$ ，有

$$g(x)=x^2-x$$ ，于是

$$f(x,y)=x+y+[(x-y)^2-(x-y)]$$

即 $f(x,y)=(x-y)^2+2y$ 。

例3 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ **求** $f(x,y)$ 。

解 令 $x+y=u,\dfrac{y}{x}=v$ **从中解出**

$$x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v}$$

代入原式，得

$$f(u,v)=(\frac{u}{1+v})^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2}$$

$$f(x,y)=\frac{x^2(1-y^2)}{(1+y)^2}=\frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

例4 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 是否存在。

解 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋向（0，0）时，

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x+kx}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{1+k}=0\ \ (k\neq -1)\text{，}$$

当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x^2-x$ 趋向（0，0）时，

$$\lim_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}}\frac{x(x^2-x)}{x+(x^2-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)}{1}=-1\text{，}$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在。

例5 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在。

证 当 (x,y) 沿三次抛物线 $y=kx^3$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{k}{1+k^2}$$

其值随**k**去不同值而取不同值。故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在。

例6 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ 。

解 原式

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2\frac{y^2}{x^2+y^2}=0$$

例7 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathbf{0}$

由于$\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 1$ 而**x**极限为**0**，

有界变量和无穷小乘积还是无穷小，故极限为**0**

例8 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\,sin\dfrac{1}{xy}$

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\,sin\dfrac{1}{xy}=\ \mathbf{0}$

由于 $\left|sin\dfrac{1}{xy}\right|\leq 1$ 而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$

有界变量和无穷小乘积还是无穷小，故极限为**0**

例9 试证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+tany}$ 的极限不存在。

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+tany}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{\ln(1)}{x}=\mathbf{0}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{\ln(1-x^2)}{x-tanx}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{x^2}{tanx-x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{2x}{sec^2x-1}$$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\dfrac{2x}{tan^2x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\dfrac{2}{tanx}=\infty$ 所以极限不存在。

例10 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right]^{-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right]^{-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$$

$$=e^0=1$$

例11 回答下列问题：

（1）若**f(x,y)**在（x_0, y_0）处连续，$f(x, y_0)$在

$x = x_0$ 处，$f(x_0, y)$在 $y = y_0$ 处连续？

（2）若 $f(x, y_0)$在 $x = x_0$ 处连续，$f(x_0, y)$在

$y = y_0$ 处连续？能否推得 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处

连续?

（1）因为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 (x,y)

以任何方式趋于(x_0,y_0)， $f(x,y)$都趋于 $f(x_0,y_0)$

当 (x,y)沿 $y=y_0$ 趋于(x_0,y_0)，$f(x,y)$也趋于

$f(x_0,y_0)$。即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$， 所以

$f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$处连续。

同理 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$处也连续。

（**2**）若 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$处连续，$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$处连续，不能推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{y\to 0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$，只能说明 (x,y)沿 $y=y_0$ 趋于 (x_0,y_0)，及沿 $x=x_0$ 趋于 (x_0,y_0)时，$f(x,y)$ 趋于 $f(x_0,y_0)$ 并不能断定 (x,y) 沿其他途径趋于 (x_0,y_0)时，$f(x,y)$ 也趋于 $f(x_0,y_0)$

例12 证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

证 因对$\forall \varepsilon > 0$，只要取$\delta = \varepsilon$，则当

$$0 < \rho = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$ 恒有

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

根据定义$\Rightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

例13 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证 $\because\ \forall\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon/2$, 则当

$$0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta \text{ 时，就有}$$

$$\left|f(x,y)-0\right|=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\le\frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}$$

$$=|x|+|y|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon\,.$$

故 $\Rightarrow\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

例14 说明 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$当$(x,y)\to(0,0)$时

极限不存在.

解 因为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿 } y=x}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ (x\neq 0)}}\frac{x+x}{x-x}=\infty\ (\text{不存在})$$

所以此极限不存在.

例15 求极限：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解1 因为

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|}{2}\cdot\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|$$

$$\le \frac{|x|}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{|x|}{2} \to 0,(x\to 0)$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right| = 0,$ 从而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

解2 或以“无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小” 性质 $\Rightarrow$

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=x\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\because\ |xy|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2),\ \therefore\ \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0.$$

例16、 求: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2-\sqrt{xy+4})\cdot(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2+\sqrt{xy+4}} = \frac{1}{4}$$

例17 求: $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

解1 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\Leftrightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0)}}\frac{1-\cos(r^2)}{r^2}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{e^{x^2y^2}}$$

$$=\lim_{r\to 0}\left(\frac{1-\cos r^2}{(r^2)^2/2}\cdot\frac{r^2}{2}\right)\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{e^{x^2y^2}}=0$$

解 2

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{e^{\frac{(xy)\cdot(xy)}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)}}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{e^{\left[\frac{(xy)}{x^2+y^2}\right]\cdot\,(xy)\cdot(x^2+y^2)}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \underline{(x^2+y^2)}\; \underline{e^{-\left[\frac{(xy)}{x^2+y^2}\right]\cdot\,(xy)\cdot(x^2+y^2)}}=0$$

无穷小量乘有界变量仍是无穷小量

例1

$$z = f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x^2+y^2 \neq 0), \\ 0 & (x^2+y^2 = 0), \end{cases}$$

1. 在（**0**，**0**）处是否连续？

2. $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 是否存在？

3. $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在（**0**，**0**）处是否连续？

4. $f(x,y)$ 在（**0**，**0**）处是否可微？

解 （1）函数 $f(x,y)$ 在（0，0）处是否连续，只要看 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \boldsymbol{f(0,0)}$是否成立。因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\rho^2 \sin\frac{1}{\rho} = 0 = f(0,0).$$

所以 $f(x,y)$ 在（0，0）处连续。

2. $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 是否存在？

如同一元函数一样，分段函数在分界点处的偏导数应按定义来求。因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}=0,$$

所以 $f_x(0,0)=0$ ，类似地可求得 $f_y(0,0)=0$

3. $f_x(x,y), f_y(x,y)$ **在（0，0）处是否连续？**

当$(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left[-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\right]$$

$$=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因为

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f_x(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

不存在。

所以 $f_x(x,y)$ 在（**0**，**0**）处不连续。同理 $f_y(x,y)$ 在（**0**，**0**）处也不连续。

2. $f(x,y)$ 在（**0**，**0**）处是否可微？

由于 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在（**0**，**0**）处不连续，所以只能按定义判别 $f(x,y)$ 在（**0**，**0**）处是否可微。

由 $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$，故

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \rho \sin \frac{1}{\rho} = 0$$

由全微分定义知 $f(x, y)$ 在（**0**，**0**）处可微，且

$df(0,0) = 0.$

说明　　1 对 x 求导视 y 为常数

2 基于如上理由，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 时，y_0 可先代入，

（因此可能简化函数）再对 x 求导。

例3

$$f(x,y)=x+\arctan y(x+\arctan y(x+\cdots\arctan y)\underbrace{\cdots)}_{n重}$$

求 $f_x'(1,0)$ 。

解 $f(x,0)=x$ ， $f_x'(x,0)=1$ ，$f_x'(1,0)=1$

例4（**1**）$z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，**求** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

由对称性 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$；$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$；

（2）$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2+y^2+z^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

由对称性 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

故 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}。$$

（3） $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

求 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 。

解

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0^2}}{\Delta x}=0$$

同理 $f_y'(0,0)=0$ ；

例5 证明函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)点两个偏导数都存在, 在该点却不可微.

证 ❶ z 在(0, 0)点两个偏导数都存在,

$$\because\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0^2}}=0$$

同理 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0.$

❷ 再证其不可微:

$$\because\quad \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}\qquad (\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\underbrace{(0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y)}^{\mathrm{d}f}]$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

不存在

故 $z=f(x,y)$ 在(0, 0)点不可微.

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在(0,0)点两个偏导数都存在，却在该点不可微.

空间曲面切平面与法线

1） $F(x,y,z)=0,\ \vec{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)|_{P_0}$

切平面： $F'_x|_{p_0}\ (x-x_0)+F'_y|_{p_0}\ (y-y_0)+F'_z|_{p_0}\ (z-z_0)=0$

法线： $$\frac{x-x_0}{F'_x|_{p_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y|_{p_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z|_{p_0}}$$

2） $z=f(x,y)\Rightarrow F=f(x,y)-z\Rightarrow \vec{n}=(f'_x,f'_y,-1)$

切平面： $f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线： $$\frac{x-x_0}{f'_x}=\frac{y-y_0}{f'_y}=\frac{z-z_0}{-1}$$

例1 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点**(1,1,1)**处的切平面及法线方程。

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$ ，

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,6z)$$

$$\vec{n}\Big|_{(1,1,1)}=（2，4，6）$$

所以在点（1，1，1）处此曲面的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-1)+6(z-1)=0$$

即

$$x+2y+3z-6=0$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

例2 求旋转抛物面 z= x^2+y^2-1 **在点(2,1,4)处的切平面及法线线方程。**

解 $f(x,y)=x^2+y^2-1$ ，

$$\vec{n}=(f_x,f_y,-1)=(2x,2y,-1)$$

$$\left.\vec{n}\right|_{(2,1,4)}=(4,2,-1) 。$$

所以在点 (2,1,4) 处的切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$$

即

$$4x+2y-z-6=0$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

例3 证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=a \ (a>0)$ 上任一点处的切平面在三个坐标轴上截距之和为一个常数。

证 设$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-a$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上任一点，则

$$(F_x,F_y,F_z)=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}})$$

$$\vec{n}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}})$$

从而切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

从而

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}$$

由于点 M_0在曲面上，所以有

$$\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=a$$

于是切平面在 x, y, z 轴上的截距分别为

$$a\sqrt{x_0},\ a\sqrt{y_0},\ a\sqrt{z_0}$$

其和为

$$a\sqrt{x_0} + a\sqrt{y_0} + a\sqrt{z_0} = a^2$$

例4 设 $u = f(x, y, z)$，

$z = g(x, y)$，$y = h(x,t)$，

$t = \varphi(x)$，求 $\dfrac{du}{dx}$。

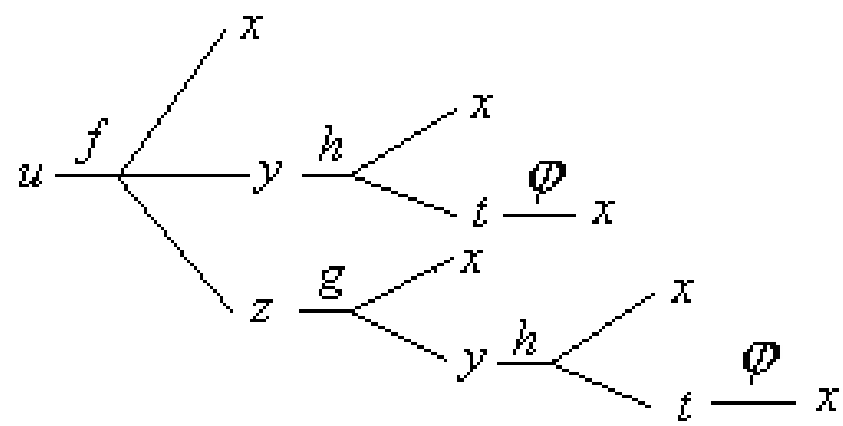
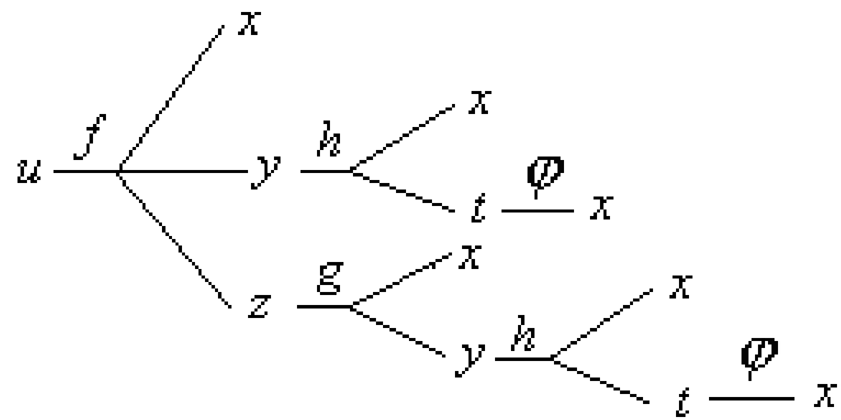


图9—1

解 对于复合函数求导来说，最主要的是搞清变量之间的关系。哪些是自变量，哪些是中间变量，可借助于“树图”来分析。

由上图可见，u 最终是x的函数，y，z，t 都是中间变量。所以



$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

其中

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial t}\frac{d\varphi}{dx}$$

带入得

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{d\varphi}{dx}.$$

从最后结论可以看出:若对x求导数(或求偏导数),有几条线通到"树梢"上的x,结果中就应有几项,而每一项又都是一条线上的函数对变量的导数或偏导数的乘积。简言之,按线相乘,分线相加。

例5 $z=\dfrac{1}{f\left(x^2+\dfrac{x}{y}\right)}$,$f$可导,求$z_x$。

解 $$z_x=-\frac{1}{f^2}\cdot f'\cdot\left(2x+\frac{1}{y}\right).$$

例6 已知 $y=e^{ty}+x$ ，而 t 是由方程

$y^2+t^2-x^2=1$ 确定的 x，y的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解 将两个方程对 x 求导数，得

$$y'=e^{ty}(t'y+y't)+1$$

$$2yy'+2tt'-2x=0$$

解方程可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t+xye^{ty}}{t+(y^2-t^2)e^{ty}}\text{。}$$

例7 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ **平行于平面** $x+4y+6z=0$ **的切平面方程。**

解 曲面在点 (x,y,z) **的法向量为** $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,6z)$**, 已知平面的法向量为** $\boldsymbol{n}_1$**=(1，4，6),因为切平面与已知平面平行，所以** $\boldsymbol{n}//\boldsymbol{n}_1$**,从而有**

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{6} \qquad \textbf{（1）}$$

又因为点在曲面上，应满足曲面方程

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \qquad \text{（2）}$$

由（1）、（2）解得切点为**(1,2,2)**及 $(-1,-2,-2)$，

所求切平面方程为：

$$(x-1) + 4(y-2) + 6(z-2) = 0$$

或

$$(x+1) + 4(y+2) + 6(z+2) = 0。$$

这里特别要指出的是不要将$\boldsymbol{n}//\boldsymbol{n}_1$不经意的写成$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1$

从而得出切点为 $(\frac{1}{2},1,1)$ 的错误结论。

例8 $u = yf(x^2 - y^2, xy)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

解 $$\frac{\partial u}{\partial x} = y[f_1' \cdot 2x + f_2' \cdot y] = 2xyf_1' + y^2 f_2'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xyf_1') + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 f_2') = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) f_1' +$$

$$2xy\frac{\partial}{\partial y}(f_1') + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) f_2' + y^2 \frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$

$$= 2xf_1' + 2xy\left[f_{11}''(-2y) + f_{12}''x\right] +$$

$$2yf_2' + y^2\left[f_{21}''(-2y) + f_{22}''x\right]$$

$$= 2xf_1' - 4xy^2 f_{11}'' + 2x^2 yf_{12}'' + 2yf_2' - 2y^3 f_{21}'' + xy^2 f_{22}''$$

例9 $z = f(xy, \frac{y}{x}) + g\left(\frac{y}{x}\right)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot y + f_2' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + g' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y\left[f_{11}'' \cdot x + f_{12}'' \frac{1}{x}\right]$$

$$-\frac{1}{x^2} f_2' - \frac{y}{x^2}\left[f_{21}'' x + f_{22}'' \frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^2} g'' \frac{1}{x}$$

$$= f_1' + xyf_{11}'' + \frac{y}{x} f_{12}'' - \frac{1}{x^2} f_2' - \frac{y}{x} f_{21}'' - \frac{y}{x^3} f_{22}'' - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g''$$

例10 $u = f(x+y, x-y, \dfrac{y}{x})$，求 du。

解 **（1）** $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ ；

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_2' + f_3' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_1' + f_2'(-1) + f_3'\frac{1}{x}$$

故

$$du = \left[f_1' + f_2' - \frac{y}{x^2} f_3' \right]dx + \left[f_1' - f_2' + \frac{1}{x} f_3' \right]dy$$

（2）

$$du = f_1' d(x+y) + f_2' d(x-y) + f_3' \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$= f_1'(dx+dy) + f_2'(dx-dy) + f_3' \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$= [f_1' + f_2' - \frac{y}{x^2} f_3']dx + [f_1' - f_2' + \frac{1}{x} f_3']dy$$

例11 设$z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$

确定，**F**有连续一阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解（1）方程两边对 *x* 求导

$$F_1'\left(1+\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{y}\right)+F_2'\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x-z}{x^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_1'+\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{-xyF_1'+\frac{yz}{x}F_2'}{xF_1'+yF_2'}$$ ；

方程两边对 y 求导

$$F_1'\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y-z}{y^2}\right)+F_2'\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y^2}F_1'-F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{\frac{xz}{y}F'-xyF_2'}{xF_1'+yF_2'}\quad ;$$

解（2）方程两边取微分

$$F_1'd(x+\frac{z}{y})+F_2'd(y+\frac{z}{x})=0$$

$$F_1'(dx+\frac{ydz-zdy}{y^2})+F_2'(dy+\frac{xdz-zdx}{x^2})=0$$

$$dz=\frac{(-F_1'+\frac{z}{x^2}F_2')dx+(\frac{z}{y^2}F_1'-F_2')dy}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_1'+\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{-xyF_1'+\frac{yz}{x}F_2'}{xF_1'+yF_2'}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{xz}{y}F'-xyF_2'}{xF_1'+yF_2'};$$

例12 设$y=f(x,t)$，$t=t(x,y)$ 由 $F(x,y,t)=0$ 确定 F,f可微，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解 （1） 对方程取微分

$$\begin{cases} dy = f_x' dx + f_t' dt & \cdots(1) \\ F_x' dx + F_y' dy + F_t' dt = 0 & \cdots(2) \end{cases}$$

由（1）解得 dt 代入（2）得

$$F_x' dx + F_y' dy + F_t' \frac{dy - f_x' dx}{f_t'} = 0$$

则 $$dy=\frac{-F_x'+F_t'f_x'/f_t'}{F_y'+\dfrac{F_t'}{f_t'}}dx=\frac{-F_x'f_t'+F_t'f_x'}{F_y'f_t'+F'}dx$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x'f_t'+F_t'f_x'}{F_y'f_t'+F'}$$

解（2） $y = f(x, t(x, y))$

$$\frac{dy}{dx} = f_x' + f_t'\left[\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_x' + f_t' \frac{\partial t}{\partial x}}{1 - f_t' \frac{\partial t}{\partial y}}$$

而 $\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_t'}$ ； $\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_t'}$ ， 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x' f_t' + F_t' f_x'}{F_y' f_t' + F'}$$

例14 证明：当 $\xi = \dfrac{y}{x}, \eta = y$ 时，方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

可化成标准形式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$，其中 $u = u(x, y)$

二阶偏导数连续。

证明：将 $\boldsymbol{u}$ 看成由 $u(\xi, \eta)$，而 $\xi = \dfrac{y}{x}$，$\eta = y$

复合成 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的函数， $u = u(\xi(x, y), \eta(y))$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right) = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{y}{x^2}\right)^2 - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}(2\frac{y}{x^3}) =$$

$$\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right]+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{1}{x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 1 \quad \text{则}$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cdots=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

例1 求曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 上与平面

$x+2y+z=4$ 平行的切线方程。

解 切向量 $\vec{\tau}=(1,-2t,3t^2)$，$\vec{n}=(1,2,1)$

由 $\vec{\tau}\perp\vec{n}$，则 $\vec{\tau}\cdot\vec{n}=0$，即

$$1-4t+3t^2=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=\frac{1}{3},$$

当 $t=1$ 时 $\vec{\tau}=(1,-2,3), x_1=1, y_1=-1, z_1=1$

切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$$

当 $t=\frac{1}{3}$时 $\vec{\tau}_2=(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}),x_2=\frac{1}{3},y_2=-\frac{1}{9},z_2=\frac{1}{27}$，

切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$$

例2 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2+z^2=10 \end{cases}$ 在点 $(3,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程。

解 $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2+z^2=10 \end{cases}$ 确定了 $y=y(x), z=z(x)$

对x求导 $\begin{cases} 2x+2yy'=0 \\ 2x+2zz'=0 \end{cases}$

$$y'=-\frac{x}{y} \quad z'=-\frac{x}{z}$$ 于 $M(3,1,1)$ 点：

$y' = -3, z' = -3, \vec{v} = (1, -3, -3)$ 切线方程为

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-3}$$

法平面方程为

$$x - 3 - 3(y-1) - 3(z-1) = 0$$

即

$$x - 3y - 3z + 3 = 0$$

例3 求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面。使之与平面$x-y-\frac{z}{2}=2$垂直，同时也与$x-y-z=2$垂直。

解 切平面法向量 $\vec{n}=(2x-1,2y,2z)$

$\vec{n_1}=(1,-1,-\frac{1}{2})$ $\quad\quad$ $\vec{n_2}=(1,-1,-1)$

依题意 $\vec{n_1}\cdot\vec{n}=0$ 既有 $\quad 2x-1-2y-z=0$ （1）

$\vec{n_2}\cdot\vec{n}=0 \quad\quad 2x-1-2y-2z=0$ （2）

联立（1）（2）和原方程 得解

$$\begin{cases} x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n}_{01} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \quad \vec{n}_{02} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

得切平面

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{2+\sqrt{2}}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\sqrt{2}}{4})=0$$

即

$$x+y=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}(y+\frac{\sqrt{2}}{4})=0$$

即

$$x+y=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

例4 设$\boldsymbol{a, b, c}$为常数，$F(u,v)$有连续一阶偏导数。

证明 $F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 上任一点切平面都通过某定点。

证 $F'_x=F'_1\cdot\frac{1}{z-c}$ $F'_y=F'_2\cdot\frac{1}{z-c}$

$$F'_z=-F'_1\cdot\frac{x-a}{(z-c)^2}-F'_2\cdot\frac{y-b}{(z-c)^2}$$

则切平面方程为

$$F_1' \cdot \frac{1}{z-c}(X-x) + F_2' \cdot \frac{1}{z-c}(Y-y)$$

$$-\frac{1}{(z-c)^2}\left[F'(x-a) + F_2'(y-b)\right](Z-z) = 0$$

取 $X=a, Y=b, Z=c$ ，则对任一的 (x,y,z) 点上

式均满足，即过任一点的切平面都过 (a,b,c) 点。

例5 设 a,b 为常数，证明曲面 $F(x-az,y-bz)=0$

上任一点切平面都通过某定直线平行（**F**具有连续

偏导数）。

证 $F'_x = F'_1$ ，$F'_y = F'_2$ ，$F'_z = -aF'_1 - bF'_2$

即 $\vec{n} = (F'_1, F'_2, -aF'_1 - bF'_2)$

取 $\vec{l} = (a,b,1)$，则 $\vec{n} \cdot \vec{l} = 0$ ，$\vec{n} \perp \vec{l}$

曲面平行***l***，取直线

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{1}$$

则曲面上任一点的切平面都与上述直线平行。

6. 设$u = u(x, y)$有二阶连续偏导,且满足方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 及\ u(x,2x) = x,\ \ u'_x(x,2x) = x^2,$$

求: $u''_{xx}(x,2x)$, $u''_{xy}(x,2x)$, $u''_{yy}(x,2x)$.

解 由所给的三个方程, 通过求偏导运算, 易得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 即 \quad u''_{xx} - u''_{yy} = 0$$

从 $u'_x(x, 2x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad u''_{xx} + 2\, u''_{xy} = 2x$

从 $u(x,2x) = x \quad \Rightarrow \quad u'_x + 2u'_y = 1$

进而 $\Rightarrow \quad u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{yx} + 2 \cdot 2u''_{yy} = 0$

于是得到下列方程组$\Rightarrow$

$$\begin{cases} u''_{xx} - u''_{yy} = 0 & ❶ \\ u''_{xx} + 4u''_{xy} + 4u''_{yy} = 0 & ❷ \\ u''_{xx} + 2u''_{xy} = 2x & ❸ \end{cases}$$

解此方程组$\Rightarrow$

$$u''_{xx} = -\frac{4x}{3} = u''_{yy}, \quad u''_{xy} = \frac{5x}{3}.$$

7. 与解微分方程有关的偏导运算

设 $u = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 是Laplace方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$ 的解，变换该方程.

解 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则对 $r\neq 0$,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=f'\cdot\frac{x}{r}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'\cdot\frac{x}{r}\right) = f''\cdot\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r} + f'\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$= f''\cdot\frac{x^2}{r^2} + f'\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}\right) = f''\cdot\frac{x^2}{r^2} + f'\cdot\frac{y^2+z^2}{r^3},$$

由于三个自变量 x, y, z 具有字母轮换对称性,故

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = f''\cdot\frac{y^2}{r^2} + f'\cdot\frac{x^2+z^2}{r^3}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = f''\cdot\frac{z^2}{r^2} + f'\cdot\frac{x^2+y^2}{r^3}$$

以下把这三个结果分别相加再代回原方程 $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= f''\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}+f'\cdot\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{r^3}=0$$

$$\Rightarrow \qquad f''+\frac{2}{r}f'=0.$$

这是一个可解的常微分方程.

例8 求曲面 $x^2+y^2-z^2=4$ 在点 $(2,-3,3)$ 处的切平面和法线方程.

解 先求出在已知点处曲面的法向量, 记

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4=0$$

则 $\vec{n}\big|_{(2,-3,3)}=\{F'_x, F'_y, F'_z\}\big|_{(2.-3,3)}$

$$=\{2x,\ 2y,\ -2z\}_{(2,-3,3)}=\{4,\ -6,\ -6\}$$

实际取 $\vec{n}\big|_{(2,-3,3)}=\{2,\ -3,\ -3\}$

于是在该点所求切平面和法线方程分别为

$$2(x-2)-3(y+3)-3(z-3)=0$$

或为 $$2x-3y-3z-4=0$$

第六章 多元函数微分学及其应用

6.1 多元函数的基本概念

一、二元函数的极限

定义 $f(P)=f(x,y)$的定义域为D, $P_0(x_0,y_0)$是D的聚点。对常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当点$P(x,y)\in D\cap\overset{o}{U}(P_0,\delta)$，即

$$0<|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，都有

$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，那么就称常数A为

函数$\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$)当($\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$)→ (x_0, y_0) 时的极限， 记作

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 或 $\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$)→$\boldsymbol{A}$(($\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$)→(x_0, y_0))，

也记作 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = A$ 或 $\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{P}$) →$\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{P}$→P_0)

为了区别于一元函数的极限，上述二元函数的极限也称做二重极限。

二、二元函数的连续性

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)\ ,\quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = 0$$

如果函数$f(x,y)$在D的每一点都连续，那么就称函数$f(x,y)$在D上连续，或者称$f(x,y)$是D上的连续函数。

如果函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$不连续，则称$P_0(x_0,y_0)$为函数$f(x,y)$的间断点。

多元连续函数的和、差、积仍为连续函数；连续函数的商在分母不为零处仍连续；多元连续函数的复合函数也是连续函数。

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的。

多元初等函数的极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{p \to p_0} f(P) = f(P_0)$$

有界性与最大值最小值定理 在有界闭区域***D***上的多元连续函数，必定在***D***上有界，且能取得它的最大值和最小值。

介值定理 在有界闭区域D上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值。

6.2 偏导数与高阶导数

6.2.1 偏导数

概念

$$z = f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

说明　**1** 对 x 求导视 y 为常数，几何意义也说明了这个问题

$M_0(x_0, y_0)$ 的偏导数有下述几何意义。

偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$，就是曲面 $z = f(x, y)$ 与平面

$y=y_0$ 的交线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率。

同样，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率。

可微，偏导数存在，连续的关系

可微 $\Rightarrow \begin{cases} \text{偏导数存在} \\ \text{连续} \end{cases}$，偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微，f''_{xy} 和 f''_{yx} 都连续， 则 $f''_{xy}=f''_{yx}$；

6.2.2 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)\ ,$$

那么在 D 内 $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ 都是 x、y 的函数。

如果这两个函数的也存在，则称它们是函数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数。按照对变量求导次序的

不同有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

偏导数，微分运算公式

1. $\boldsymbol{z=f(u,v)}$ $u=\varphi(x,y)$ $v=\psi(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

2. $dz = f_u' du + f_v' dv$

$$= f_u' \cdot (u_x' dx + u_y' dy) + f_v' \cdot (v_x' dx + v_y' dy)$$

$$= (f_u' \cdot u_x' + f_v' \cdot v_x') dx + (f_u' \cdot u_y' + f_v' \cdot v_y') dy$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(u \cdot v) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

3. $F(x,y,z)=0$ 确定 $z=z(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}\quad;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

4. $F(x,y,z)=0$ 也可确定 $x=x(y,z),y=y(z,x)$

的函数，写出相应公式

6.2 偏导数应用

偏导数应用注意四个方面：空间曲面曲线切平面、法线、切线、法平面；方向导数；梯度、散度、旋度；极值与条件极值。

6.3.1 内容小结

空间曲线切线与法平面

1）$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 切向量 $\vec{v} = (x'_t, y'_t, z'_t)$

切线方程： $$\frac{x-x_0}{x_t'}=\frac{y-y_0}{y_t'}=\frac{z-z_0}{z_t'}$$

法平面方程： $x_t'(x-x_0)+y_t'(y-y_0)+z_t'(z-z_0)=0$

2） $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \qquad \vec{v}==(1,y',z')$

类似的，切线方程： $$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'}=\frac{z-z_0}{z'}$$

法平面方程： $x-x_0+y'(y-y_0)+z'(z-z_0)=0$

3） $\begin{cases} F(x,z,y)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x + F'_y y'_x + F'_z z'_x = 0 \\ G'_x + G'_y y'_x + G'_z z'_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (1, y'_x, z'_x)$

空间曲面切平面与法线

1） $F(x,y,z)=0,\ \vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)|_{P_0}$

切平面：$F'_x|_{p_0}(x-x_0) + F'_y|_{p_0}(y-y_0) + F'_z|_{p_0}(z-z_0) = 0$

法线：
$$\frac{x-x_0}{F'_x|_{p_0}} = \frac{y-y_0}{F'_y|_{p_0}} = \frac{z-z_0}{F'_z|_{p_0}}$$

2） $z = f(x,y) \quad \Rightarrow F = f(x,y) - z \Rightarrow \vec{n} = (f'_x, f'_y, -1)$

切平面： $f_x'(x-x_0)+f_y'(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线： $$\frac{x-x_0}{f_x'}=\frac{y-y_0}{f_y'}=\frac{z-z_0}{-1}$$

3）* $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ （参数方程形式）

切线 $\vec{v}_1=(x_u',y_u',z_u'),\ \vec{v}_2=(x_v',y_v',z_v')$

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

方向导数

$$u=u(x,y,z) \quad \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=gradu\cdot\vec{l^{\circ}}$$

（梯度在 $\vec{l}$ 方向投影）

梯度、散度、旋度

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad gradu=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$div\vec{A}=\nabla\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \quad rot\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

例4 求 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在 $(1,1,1)$ 点沿

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 的外法线方向的方向导数。

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$

$F_x' = 2x, F_y' = 2y, F_z' = 2z$ 于 $P(1,1,1)$ 点

$$\vec{n} = (2,2,2) \quad , \quad \vec{n}^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$= \left[2x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 4y \frac{1}{\sqrt{3}} + 6z \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \Big|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

例5 设 $f(x,y)$ 在 p_0 点可微，$\vec{L_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\vec{L_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\frac{\partial f}{\partial L_1} = 1, \frac{\partial f}{\partial L_2} = 0$ 试确定 $\vec{L_3}$ 使

$\frac{\partial f}{\partial L_3}\Big|_{p_0} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ 。

解 $$\frac{\partial f}{\partial L_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_1 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial L_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_2 = 0$$ ，则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

设 $\vec{L}_3=(\cos\alpha_3,\cos\beta_3)$ 从而

$$\frac{\partial f}{\partial L_3}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_3+\frac{\partial f}{\partial x}\cos\beta_3=\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

即 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha_3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta_3=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ $\cos\alpha_3+\sin\alpha_3=\dfrac{7}{5}$

解得 $\cos\alpha_3 = \dfrac{3}{5}$ 或 $\cos\alpha_3 = \dfrac{4}{5}$

此时 $\cos\beta_3 = \dfrac{4}{5}$ 或 $\cos\beta_3 = \dfrac{3}{5}$

即 $\vec{L}_3 = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ 或 $\vec{L}_3 = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

例6 $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，求 $div(gradu)$。

解 $div(gradu) = \nabla\cdot(\nabla u) = \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 。

$$u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)，\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2+y^2+z^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

由对称性 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

从而 $div(gradu)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

例9 求二元函数 $u = x^2 - xy + y^2$ 在点 $M(-1,1)$

沿方向 $n^\circ = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ 的方向导数，并指出 $\boldsymbol{u}$ 在该点

沿哪个方向的方向导数最大？这个最大的方向导数

值是多少？$\boldsymbol{u}$ 沿那个方向减少得最快，沿哪个方向

$\boldsymbol{u}$的值不变？

解 $gradu|_{(-1,1)} = (2x - y, 2y - x)|_{(-1,1)} = (-3,3)$

$\boldsymbol{u}$ 在 $M(-1,1)$ 沿 n° 方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n^\circ}\right|_M = (gradu)\cdot n^\circ |_M = (-3,3)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

方向导数取得最大值的方向为梯度方向，其最大值为 $\|gradu|_M\| = 3\sqrt{2}$，**u** 沿负梯度方向减少最快。

为求使 **u** 变化的变化率为零的方向，令

$l^\circ = (\cos\theta, \sin\theta)$，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = (gradu|_M)\cdot l^\circ = -3\cos\theta + 3\sin\theta = 3\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

令 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$，得 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\pi+\dfrac{\pi}{4}$，故在点 $(-1,1)$ 处沿 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 函数 $\boldsymbol{u}$ 得值不变化。

例10 一条鲨鱼在发现血腥味时，总是沿血腥味最浓的方向追寻。在海上进行试验表明，如果血源在海平面上，建立坐标系为：坐标原点在血源处， xOy **坐标面为海平面，** Oz **轴铅直向下，则点** (x,y,z) **处血源的浓度C（每百万份水中所含血的份数）的**

近似值 $C=e^{-(x^2+y^2+2z^2)/10^4}$。

（1）求鲨鱼从点 $\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$（单位为海里）出发向血源前进的路线 Γ 的方程；

（2）若鲨鱼以40海里/小时的速度前进，鲨鱼从 $\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$ 点出发需要用多少时间才能到达血源处？

解（1）鲨鱼追踪最强的血腥味，所以每一瞬时它都将按血液浓度变化最快，即C的梯度方向前进。由梯度的计算公式，得

$$gradC=\left(\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial C}{\partial y},\frac{\partial C}{\partial z}\right)=10^{-4}e^{-(x^2+y^2+2z^2)/10^4}(-2x.-2y,-4z)$$

设曲线 Γ的方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$，则 Γ 的切线向量 $\tau=(dx,dy,dz)$ 必与 $gradC$ 平行，从而有

$$\frac{dx}{-2x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{-4z}$$

解初始值问题 $\begin{cases} \dfrac{dx}{-2x} = \dfrac{dy}{-2y} \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$ 得 $y = x$

解初始值问题 $\begin{cases} \dfrac{dx}{-2x} = \dfrac{dz}{-4z} \\ z|_{x=1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 得 $z = \dfrac{1}{2}x^2$

所以所求曲线 Γ 的方程为

$$x = x\text{，}\ y = x\text{，}\ z = \frac{1}{2}x^2 \quad (0 \le x \le 1)$$

（2）曲线 Γ 的长度

$$s=\int_0^1\sqrt{1+y_x'^2+z_x'^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{2+x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}\ln 2$$ （海里）

因此到达血源处所用的时间为

$$T=\frac{1}{40}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}\ln 2\right]$$ （小时）。

6.4 多元函数的极值

无条件极值 限于二元函数 $z=f(x,y)$

1. 求驻点 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 P

2. 于驻点P处计算 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$AC-B^2>0$ 。是极值点，$A>0$ 可取得极小值，$A<0$

可取极大值。

3. 条件极值： $\begin{cases} \min u = f(x, y, z) \\ S.t. \quad \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

$L = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$ 求无条件极值。

例1 求内接于椭球面，且棱平行对称轴的体积最大的长方体。

解 设椭球面方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ **，长方体于第一卦限上的点的坐标为** (x, y, z)**，则**

$V=8xyz$， **s.t.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$， 令

$$L=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$L_x'=8yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0 \quad \cdots(1)$$

$$L_y'=8xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0 \quad \cdots(2)$$

$$L_z'=8xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0 \quad \cdots(3)$$

及 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

由（**1**）（**2**）（**3**）得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=t$

代入（**3**）得 $t=\frac{1}{3}$ ，从而

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}}，y=\frac{b}{\sqrt{3}}，z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$，此时

$$V=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}abc$$ 。

例2 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的二元函数 $z=f(x,y)$ 的极值。

解 方程两边对 x,y 求偏导数得：

$$4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+8z+8x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

$$4y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+8x\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得 $\begin{cases}4x+8z=0\\4y=0\end{cases}$

和原方程联立得驻点 $(-2,0)$ ，$(\frac{16}{7},0)$ 。方程（**1**）对 x,y 再求偏导，方程（**2**）对 y 求偏导

$$4+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+8\frac{\partial z}{\partial x}+8\frac{\partial z}{\partial x}+8x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad (\mathbf{3})$$

$$2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial z}{\partial y}+8x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \quad (\mathbf{4})$$

$$4+2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+8x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad (\mathbf{5})$$

将驻点 $(-2,0)$ 代入（此时 $z=1$）

$$4+2A-16A-A=0 \qquad A=\frac{4}{15}$$

$$2B-16B-B=0 \qquad B=0$$

$$4+2C-16C-C=0 \qquad C=\frac{4}{15}$$

$AC-B^2>0$, $z=1$是极小值（因**A>0**）

将驻点 $\left(\frac{16}{7},0\right)$代入（**3**）（**4**）（**5**）（此时 $z=-\frac{8}{7}$）

同上过程有

$A=-\frac{4}{15}$， $B=0$， $C=-\frac{4}{15}$ ， $AC-B^2>0$，$A<0$ ， $z=-\frac{8}{7}$

是极大值。

例8 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

在该点沿 $\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大。

所以 $$\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot 0=\sqrt{2}(x-y)$$

由题意，要考查函数 $\sqrt{2}(x-y)$

在条件 $2x^2+2y^2+z^2=1$

下的最大值，为此构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$$

$$\begin{cases} F_x = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0,, \\ F_y = -\sqrt{2} + 4\lambda y = 0, \\ F_z = 2\lambda z = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

解得可能取极值的点为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 及 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$。

因为所要求的最大值一定存在，比较

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)} = \sqrt{2} \text{，} \left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)} = -\sqrt{2}$$

知 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 为所求的点。

例9 求函数 $z=x^2+y^2$ 在圆 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9$ 上的最大值与最小值。

解 先求函数 $z=x^2+y^2$ 在圆内的可能极值点。为此令 $z_x=0, z_y=0$ ，解得点 **(0,0)** 。显然 ***z*(0,0)=0** 为最小值。

再求 $z=x^2+y^2$ 在圆上的最大、最小值。为此做拉格朗日函数

$$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda[(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9],$$

$$\begin{cases} F_x=2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0, & (1) \\ F_y=2y+2\lambda(y-\sqrt{2})=0, & (2) \\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9. & (3) \end{cases}$$

由（1）、（2）可知 $x=y$ ，代入（3）解得

$$x=y=\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad 和 \quad x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)=25,\quad z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1.$$

比较

$$z(0,0)、z\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)、z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

三值可知：在 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9$ 上，最大值为 $z=25$，最小值为 $z=0$。