姓名：__________

学号：__________

院系：__________

_____ 级_____ 班

装

订

线

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称：线性代数与解析几何（期中） 试卷：A 考试形式：闭卷

授课院（系）：数学科学学院 考试日期：2019 年 5 月 5 日 试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
标准分	30	10	8	16	8	10	6	6	6	100
得 分										

得 分

一、（每小题 3 分，共 30 分）填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\underline{\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&5\end{bmatrix}}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 5 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -3 倍加到第 2 列得到 $\boldsymbol{C}$，则 $\underline{\begin{bmatrix}1&0&0\\5&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\boldsymbol{A}\underline{\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}=\boldsymbol{C}$.

3. $\begin{vmatrix}0&2&2&2\\-2&0&1&1\\-2&-1&0&-1\\-2&-1&1&0\end{vmatrix}=\underline{\quad 4 \quad}$

4. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行, 而向量 $\lambda\vec{a}-3\vec{b}$ 与 $4\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 平行，则 $\lambda=\underline{\quad \pm 2\sqrt{3} \quad}$

5. 已知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为三元列向量，$|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|=2$，则 $|\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_3,2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3|=\underline{\quad -12 \quad}$

6. 已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,则 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\underline{-\dfrac{1}{21}(2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E})}$

7. 若方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1+2x_2=0\\2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0\\k^2x_1+k^2x_2+kx_3+3x_4+4x_5=0\\kx_1+kx_2+k^2x_3+9x_4+16x_5=0\end{cases}$ 有非零解，则参数 k 满足 $\underline{k=3 \text{或} k=4}$

8. 点 $P(2,-1,3)$ 到平面 $2x-y+2z=-1$ 的距离为 $\underline{4}$

9. 已知以点 $A(1,0,2)$, $B(3,1,1)$, $C(3,0,-1)$ 为顶点的三角形的面积为 $\underline{\frac{\sqrt{29}}{2}}$

10. 向量 $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ 在 $\vec{b}=-3\vec{i}+4\vec{k}$ 向量的投影为 $\underline{-2}$

得　分

二、（每小题 2 分，共 10 分）判断下列结论是否正确

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. 不对

2. 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，且 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$，则 $\vec{b}=\vec{c}$.不对

3. 若 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵. 不对

4. 若 $\boldsymbol{A}^*$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 也是可逆矩阵. 对

5. 已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 不对

则齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 一定有非零解.

得　分

三、（8 分）设非齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1-kx_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_1+2kx_2=1 \end{cases}$ 有唯一解，

（1）求 k 的取值范围，（2）求 x_1 (用 k 表示).

解: (1) $|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2k & 0 \end{vmatrix}=-k(4k+1)$

当 $k\neq 0, k\neq -\frac{1}{4}$ 时， 原方程组有唯一解。

（2）$|B_1|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2k & 0 \end{vmatrix}=k$，

由克拉默法则 $x_1=\frac{|B_1|}{|A|}=\frac{k}{-k(4k+1)}=-\frac{1}{4k+1}$

得　分

四、（16 分）设 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&1\\3&1&1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-1&-1\\3&0&2\end{bmatrix}$

计算： $2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-3B$， $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)^{70}$， $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}^{-1}$

解: $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$， $2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-3B=2\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-1&-1\\3&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&5&5\\-7&2&-4\end{bmatrix}$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)^{70}=3^{69}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\2&-1&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-1&-1\\3&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\2&-1&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\2\\10\\-4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&1\\3&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&2&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10\\2\\10\\-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&2&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60&20&20&0\\12&4&4&0\\60&20&20&0\\-24&-8&-8&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0\\-1&-1&-1&0&1&0\\3&0&2&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0&-1&0\\0&1&0&1&0&0\\3&0&2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&1&-1&-1&0\\0&1&0&1&0&0\\3&0&2&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-1&-1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&-1&3&3&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&2&2&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-3&-3&-1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&0&0\\-3&-3&-1\end{bmatrix}$$

得　分

五、（8 分）设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&-1&2\end{bmatrix}, XA^{-1}-3A^{-1}=2E+AXA^{-1}-\frac{1}{2}A^{*}$，求 X.

解: $|A|$=8，右乘A, $X-3E=2A+AX-\frac{1}{2}|A|E$,

（$A-E$）$X=E-2A$,

$$A-E=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}, E-2A=\begin{bmatrix}-3&0&0\\-2&-3&0\\0&2&-3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}A-E & E-2A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-3&0&0\\1&1&0&-2&-3&0\\0&-1&1&0&2&-3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3&0&0\\0&1&0&1&-3&0\\0&-1&1&0&2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3&0&0\\0&1&0&1&-3&0\\0&0&1&1&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&-1&-3\end{bmatrix}$$

得　分

六、（10 分）（1）求过点 P(1,2,−1) 和直线 $l:\begin{cases}3x+2y-z=4\\ x-y+z=2\end{cases}$ 的平面的方程。

（2）求经过点 $P(3,1,-3)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ 垂直相交的直线的对称式方程。

解: （1）设 $\lambda_1(3x+2y-z-4)+\lambda_2(x-y+z-2)=0$，将点 P 的坐标代入

$4\lambda_1+\lambda_2(-4)=0$，$\lambda_1=\lambda_2$，消去 $\lambda_1=\lambda_2$ 得 $4x+y-6=0$

（2）过点 $P(3,1,-3)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ 垂直的平面

π: $(x-3)-(y-1)+2(z+3)=0$

将直线的参数方程为$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=3+2t \end{cases}$代入平面方程得$t=-2$

交点坐标M$(-1,1,-1)$，

两点式方程

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{1}$$

得　分

七、(6 分) 设非零矩阵$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 5}$和方阵$B=\begin{bmatrix} 0 & x & x & x & x \\ 1 & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$满足$AB=O$，

求实数x.

解: 因为$A\neq O$，所以$|B|=0$

$$|B|\overset{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\c_4-c_1}}{=}\begin{vmatrix} 0 & x & x & x & x \\ 1 & -1 & x-1 & x-1 & x \\ 1 & 0 & -1 & x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -1 & x-1 & x-1 & x \\ 0 & -1 & x-1 & x \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\c_4-c_1}}{=}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & x & x+1 \\ 0 & -1 & x-1 & x \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} x & x & x+1 \\ -1 & x-1 & x \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{=}x\begin{vmatrix} x & 0 & x+1 \\ -1 & x & x \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3-c_2}{=}x\begin{vmatrix} x & 0 & x+1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=}x\begin{vmatrix} x & 0 & x+1 \\ -1 & x & 0 \\ -x & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=x(x+1)\begin{vmatrix} -1 & x \\ -x & -1 \end{vmatrix}=x(x+1)(x^2+1)$$

所以$x=0$或$x=-1$.

得　分

八、（6 分）设 n 阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，证明:

（1）矩阵$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$都可逆，（2）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明：$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 都可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{-1}=-\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)$，

$$-\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$$

得　分

九、（6 分）（1）设 $\boldsymbol{G}$ 为（m－1）× m 型矩阵，$\boldsymbol{H}$ 为 n ×（n－1）型矩阵，

$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}$，证明：$\left|\boldsymbol{F}\right|=0$..

（2）设 $\boldsymbol{B}$ 为 m 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，

证明：$\boldsymbol{A}^{*}=(-1)^{mn}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \left|\boldsymbol{B}\right|\boldsymbol{C}^{*}\\ \left|\boldsymbol{C}\right|\boldsymbol{B}^{*} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

证明：（1）将 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 按列分块 $\boldsymbol{G}=\left[\boldsymbol{g}_1,\ \ \boldsymbol{g}_2,\ \ \cdots,\ \ \boldsymbol{g}_m\right]$，$\boldsymbol{H}=\left[\boldsymbol{h}_1,\ \ \boldsymbol{h}_2,\ \ \cdots,\ \ \boldsymbol{h}_{n-1}\right]$

令 $\boldsymbol{F}_{11}=\left[\boldsymbol{g}_1,\ \ \boldsymbol{g}_2,\ \ \cdots,\ \ \boldsymbol{g}_{m-1}\right]$，$\boldsymbol{F}_{12}=\left[\boldsymbol{g}_m,\ \ \boldsymbol{0},\ \ \cdots,\ \ \boldsymbol{0}\right]$

$\boldsymbol{F}_{22}=\left[\boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{h}_1,\ \ \cdots,\ \ \boldsymbol{h}_{n-1}\right]$，则 $\boldsymbol{F}_{11}$ 和 $\boldsymbol{F}_{22}$ 分别为 $\mathrm{m}-1$ 阶和 n 阶方阵，且 $\left|\boldsymbol{F}_{22}\right|=0$，

$$\left|\boldsymbol{F}\right|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{F}_{11} & \boldsymbol{F}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{F}_{22}\end{vmatrix}=\left|\boldsymbol{F}_{11}\right|\left|\boldsymbol{F}_{22}\right|=0$$

（2）$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\left|\boldsymbol{B}\right|\left|\boldsymbol{C}\right|\neq 0$，因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆，

$$\boldsymbol{A}^{*}=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}=(-1)^{mn}\left|\boldsymbol{B}\right|\left|\boldsymbol{C}\right|\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$
$$=(-1)^{mn}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \left|\boldsymbol{B}\right|\left|\boldsymbol{C}\right|\boldsymbol{C}^{-1}\\ \left|\boldsymbol{B}\right|\left|\boldsymbol{C}\right|\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=(-1)^{mn}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \left|\boldsymbol{B}\right|\boldsymbol{C}^{*}\\ \left|\boldsymbol{C}\right|\boldsymbol{B}^{*} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$