二阶非齐次线性微分方程

主讲人：刘秀平 教授

二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

1.通解的结构

2.求解方法

3.特殊类型--二阶常系数非齐次线性微分方程求解

通解的结构

一阶非齐次线性微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \qquad (*)$$

$$y^* = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$Y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad y' + p(x)y = 0$$

$$y = Y + y^*$$

通解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

定理1 若函数$y^*(x)$是方程（1）的一个特解，而Y (x)是方程（1）对应的齐次方程的通解，则函数

$$y(x) = Y(x) + y^*(x) \qquad (2)$$

是方程（1）的通解。

证明 左端= $(Y + y^*)'' + p(x)(Y + y^*)' + q(x)(Y + y^*)$

$$= (Y'' + y^{*''}) + p(x)(Y' + y^{*'}) + q(x)(Y + y^*)$$

$$= \underbrace{[Y'' + p(x)Y' + q(x)Y]}_{=0} + \underbrace{[y^{*''} + p(x)y^{*'} + q(x)y^*]}_{=f(x)} = f(x)$$

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

所以 $y(x) = Y(x) + y^*(x)$ □

通解的结构

此定理说明二阶非齐次线性微分方程的**通解**等于其对应的
齐次方程的通解与其一个**特解之和**。

与一阶非齐次线性微分方程通解结构定理的结论是一致的。

此结论也可以推广到n(n>2)阶非齐次线性微分方程的情形，

即n阶非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \qquad (**)$$

的**通解等于对应齐次方程的通解与其一个特解和。**

通解的结构

求微分方程$y''+y=x$的通解。

容易验证$\cos x,\sin x$是齐次方程$y''+y=0$二个解，且线性无关。

因此$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$是$y''+y=0$的通解，其中C_1,C_2为任意常数.

容易验证，$y^*=x$是$y''+y=x$一个特解。

由定理1知，$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$是$y''+y=x$的通解。

通解的结构

定理2 （**叠加原理**）设二阶非齐次线性微分方程（1）的右端项f(x)是两个函数之和，即

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \qquad (3)$$

而函数 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则函数 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是方程（3）的特解。

通解的结构

证明　左端 $=(y_1^*+y_2^*)''+p(x)(y_1^*+y_2^*)'+q(x)(y_1^*+y_2^*)$

$$=\underbrace{y_1^{*\prime\prime}+p(x)y_1^{*\prime}+q(x)y_1^*}_{=f_1(x)}+\underbrace{y_2^{*\prime\prime}+p(x)y_2^{*\prime}+q(x)y_2^*}_{=f_2(x)}$$

$$\equiv f_1(x)+f_2(x)$$ □

注 ：1、二阶非齐次线性微分方程（3）的右端为多个。

2、n阶非齐次线性微分方程的右端项为多个函数之和的情形。

通解的结构

求微分方程$y''+y=x+\cos x$的通解.

齐次方程$y''+y=0$通解为

$C_1\cos x+C_2\sin x,$

$y_1^*=x$是$y''+y=x$一个特解。

$y''+y=\cos x$的特解y_2^*

$y_2^*(x)=\frac{1}{2}x\sin x.$

$y^*=y_1^*+y_2^*=x+\frac{1}{2}x\sin x.$

通解$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x.$

□

通解的结构

定理**3**　如果y_1与y_2分别是二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的两个解，则y_1-y_2是对应齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的解。

证明：

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = f(x),$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = f(x)$$

$$(y_1 - y_2)'' + p(x)(y_1 - y_2)' + q(x)(y_1 - y_2) = 0.$$

□

1 通解的结构

例题 若二阶非齐线性微分方程的两个通解为e^{-x}和$e^{-x}+x^2$，而对应齐次微分方程的一个解为x.试写出该二阶非齐线性微分方程的通解。

解： 令$y_1^* = e^{-x}, y_2^* = e^{-x}+x^2$.

则由定理3有$y_1=y_2^*-y_1^* = x^2$是对应齐次微分方程的一个解.

又由于$y_2=x$也是对应齐次微分方程的一个解.

所以$Y=C_1x^2+C_2x$是对应齐次微分方程的通解。

最后，由定理1知：

$$y=Y+y^*=C_1x^2+C_2x+e^{-x}$$

是该二阶非齐线性微分方程的通解。

谢谢！