将函数展为幂级数的几个实例（下）

例 1、将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展为 $x-1$ 的幂级数。

解： 因为 $\dfrac{1}{x^2-3x-4}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+1})$，

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{(x-1)-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-1}{3})^n, x\in(-2,4),$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{2})^n, x\in(-1,3),$$

所以，$\dfrac{1}{x^2-3x-4}=-\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}})(x-1)^n, x\in(-1,3)$。

例 2、将 $f(x)=\ln(2+x)$ 展为 x 的幂级数。

解： $f(x)=\ln(2+x)=\ln 2(1+\dfrac{x}{2})=\ln 2+\ln(1+\dfrac{x}{2})$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\frac{x^n}{2^n}, -1<\frac{x}{2}\le 1$$，即 $-2<x\le 2$。

例 3、（1）将 $f(x)=\arctan x$ 展成麦克劳林级数；（2）求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ 的和。

解：（1） $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, |x|<1$，

$$f(x)=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n})dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\in[-1,1]。$$

（2）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}=f(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$。