1. 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 f 连续恒正.

解 由轮换对称性

$$I=\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则 $$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{(a+b)[f(x)+f(y)]}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\pi R^2$$

2. 设函数 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2$ 及 $x=1$ 所围成的闭区域，则 $f(x,y)=$ (　　　　)

(A) $xy+\dfrac{1}{6}$.　　（B） $xy+\dfrac{1}{8}$.

(C) $xy+\dfrac{1}{12}$.　　(D) $xy+\dfrac{1}{16}$.

解 （B）

令 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 则

$$f(x,y)=xy+A$$

$$A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$A=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{x^2}y\mathrm{d}y+A\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y$$

$$A=\frac{1}{12}+A\cdot\frac{1}{3}\Rightarrow A=\frac{1}{8}$$

3. 设 $f(x,y)$ 在 $D:x^2+y^2\le a^2$ 上连续，则 $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{a^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$

(　　　)

(A) 不一定存在.　　(B) 存在且等于 $f(0,0)$.

(C) 存在且等于$\pi f(0,0)$.　　**(D)** 存在且等于$\frac{1}{\pi}f(0,0)$.

解 **(C)**

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}f(\xi,\eta)\cdot\pi a^2=\pi f(0,0)\quad(\xi,\eta)\in D$$

4. 设积分域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，二重积分$I_1=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint_D\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint_D\tan(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则（　　）

(A)　$I_1<I_2<I_3$.　　(B)　$I_2<I_1<I_3$.

(C)　$I_3<I_2<I_1$.　　(D)　$I_2<I_3<I_1$.

解 (B)

在$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$上，

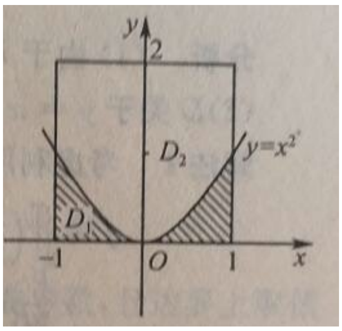
$$\sin(x^2+y^2)\le(x^2+y^2)\le\tan(x^2+y^2)$$

$$I_2<I_1<I_3$$

5. 计算$\iint_D\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，　$D:-1\le x\le 1,0\le y\le 2$

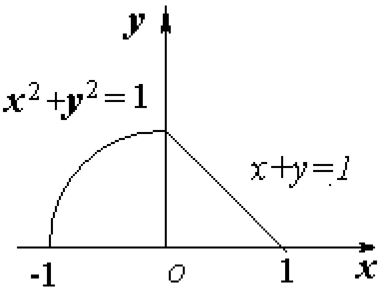
解：原式$=\iint_{D_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\mathrm{d}y$$



6. 交换积分次序$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$

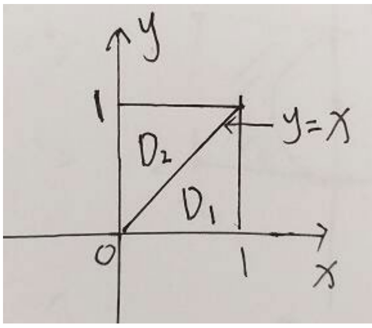
$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

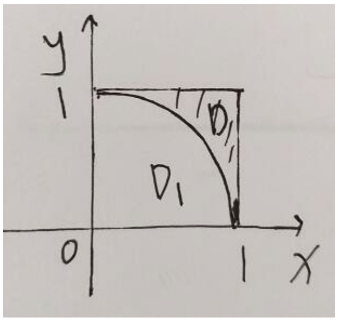


7. 求 $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}\sigma$

解： $$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} e^{y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y+\int_0^1 e^{y^2}\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}x=e-1$$





8. 求二重积分$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$x=1, y=1$和

$x^2+y^2=1\,(x,y\ge 0)$围成的区域.

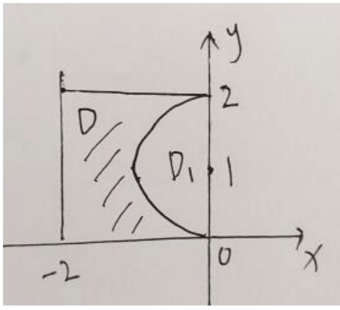
解：设$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1, x, y\ge 0\right\}$，

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}$$

9. 求二重积分 $\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2$， $y=0$， $y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。



解： 设 D_1 为曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 和 y 轴围成的区域，有

$$\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=4-\frac{\pi}{2}$$

10. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=2$， $y=0$， $y=2$ 及曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 围成的平面有界闭区域

解：将曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 和直线 $x=0$ 所围成的半圆域记为 D_1 ，则

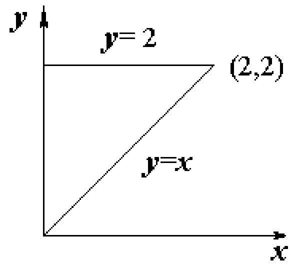
$$\iint\limits_{D} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 y^2\mathrm{d}y\int_0^2\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16}{3}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}-4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{16}{3}-\frac{5}{8}\pi$$

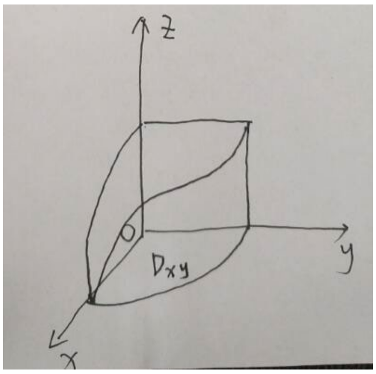
11. 计算$\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y$



解 $I=\int_0^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x=\int_0^2 ye^{-y^2}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y^2=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$$

12. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$所围立体的表面积.



解 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0\right\}$

$$=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R\right\}$$

$z=\sqrt{R^2-x^2}$,

$z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ ， $z_y=0$， $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$

$$A=16\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=16\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=16\int_0^R R\mathrm{d}x=16R^2$$

13. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=($ $)$

(A) $\frac{\pi}{16}$.　　(B) $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.　　(C) $\frac{\pi}{8}$.　　(D) $\frac{\pi}{4}$.

解: (D)

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$