§7.3 全微分及高阶全微分

一、全微分的概念

二、连续、可偏导及可微的关系

三、全微分的几何意义

四、全微分的计算与应用

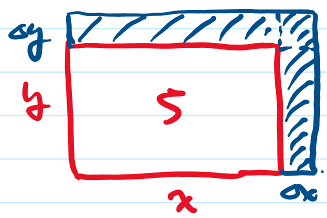
五、高阶全微分

一、全微分的概念

一元函数 $y=f(x)$ 可微 $\Longleftrightarrow$ 可导. $dy=f'(x)\,dx$.

给定 Δx. 若 $\Delta y = \underline{A\Delta x} + \underbrace{o(\Delta x)}$.

二元函数. $S=xy$. 给定 Δx. Δy.



$$\Delta S = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$
$$= (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy$$
$$= y\Delta x + x\Delta y + \underbrace{\Delta x\Delta y}.$$
$$= \underbrace{y\Delta x + x\Delta y}_{=0 \qquad =0} + \underbrace{o(\rho)}$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$$

定义： 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为：　$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$　$(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，仅与 x,y 有关，则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**可微**，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为其在 (x,y) 处的**全微分**，记作 $\mathrm{d}z$，即：

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

- 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内处处可微，称其为 D 内的**可微函数**.

二、连续、可偏导及可微的关系

例1： 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在 $(0,0)$ 点不连续，但可偏导.

证：由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (不存在) $\neq f(0,0)$. $\Rightarrow$ 不连续.

由 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x-0}=0$

$f_y(0,0)=0$. (同理).　$\Rightarrow$ 可偏导.

例2： 证明：函数 $f(x,y)=x+|y|$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可偏导.

证：由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+|y|)=0=f(0,0)$　$\Rightarrow$ 连续.

由 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1.$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{|y|}{y}$ 不存在

$\Bigg\}$ 不可偏导.

定理1：(可微的必要条件)

若函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，则有：

① $f(x,y)$在点(x,y)处连续；

② $f(x,y)$在点(x,y)处可偏导，且有$A=\frac{\partial z}{\partial x}, B=\frac{\partial z}{\partial y}$

即函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分为：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

$$\boxed{\text{全微分公式：}\ dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

证：由 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，给定 $\Delta x, \Delta y$.

$\Rightarrow \Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$. $\quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$.

由 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + o(\rho))$

$= A\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta x + B\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta y + \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} o(\rho) = 0$

$\Rightarrow z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续.

由 $\Delta_x z = A\Delta x + o(|\Delta x|)$. $\quad \Delta_y z = B\Delta y + o(|\Delta y|)$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}\cdot\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = A$

$\frac{\partial z}{\partial y} = B$. (同理)

例3: 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在 $(0,0)$ 点连续，可偏导，但不可微.

解：① 证连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \overset{?}{=} f(0,0)$

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$ $\quad (0 \le |\cdots| \le |y| \to 0)$

② 证可偏导 $\Longleftrightarrow$ 求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$

由 $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x-0} = 0$

$f_y(0,0) = 0$ (同理).

③ 是否可微. $\Longleftrightarrow \Delta z \overset{?}{=} A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$. $\quad (A = f_x(0,0).\ B = f_y(0,0))$

$\Longleftrightarrow \Delta z - A\Delta x - B\Delta y \overset{?}{=} o(\rho)$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} \overset{?}{=} 0 \quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

由 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$= \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ (不存在) $\neq 0$. $\Rightarrow$ 不可微.

定理2: (可微的充分条件)

若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，

则函数 $z=f(x,y)$ 在该点可微.

证：随便 Δx. Δy.

$\Rightarrow \Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \quad (\overset{?}{=} A\Delta x + B\Delta y + o(\rho))$

$= f(x+\Delta x, \underline{y+\Delta y}) - f(x, \underline{y+\Delta y})$

$\quad + f(\underline{\underline{x}}, y+\Delta y) - f(\underline{\underline{x}}, y)$ $\quad$ (Lagrange 中值)

可偏导

$= \underline{f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}\Delta x + \underline{f_y(x, y+\theta_2\Delta y)}\Delta y$

偏导连续

$= (f_x(x,y)+\alpha)\Delta x + (f_y(x,y)+\beta)\Delta y \quad (0<\theta_1.\ \theta_2<1)$

偏导连续 $\downarrow$ $= (f_x(x,y)+\alpha)\Delta x + (f_y(x,y)+\beta)\Delta y$ $(0<\theta_1,\theta_2<1)$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha = 0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta = 0\right)$$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \underbrace{(\alpha\Delta x+\beta\Delta y)}_{=o(\rho)}$$

又由 $\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$ $\left(0\le|\cdots|\le|\alpha|+|\beta|\to 0\right)$

例4： 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在(0,0)点连续，可偏导，可微，但偏导不连续.

证：①. 由 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} t\sin\dfrac{1}{t} = 0$.

$= f(0,0)$. $\Rightarrow$ 连续.

②. 由 $f_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x^2} = 0$.

$f_y(0,0)=0$ (同理). $\Rightarrow$ 可偏导.

③. 由 $\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho}$

$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2} = 0$.

即：$\Delta z = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$. $\Rightarrow$ 可微.

④. $f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0.\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

由 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\underbrace{2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}}_{=0} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ (不存在)

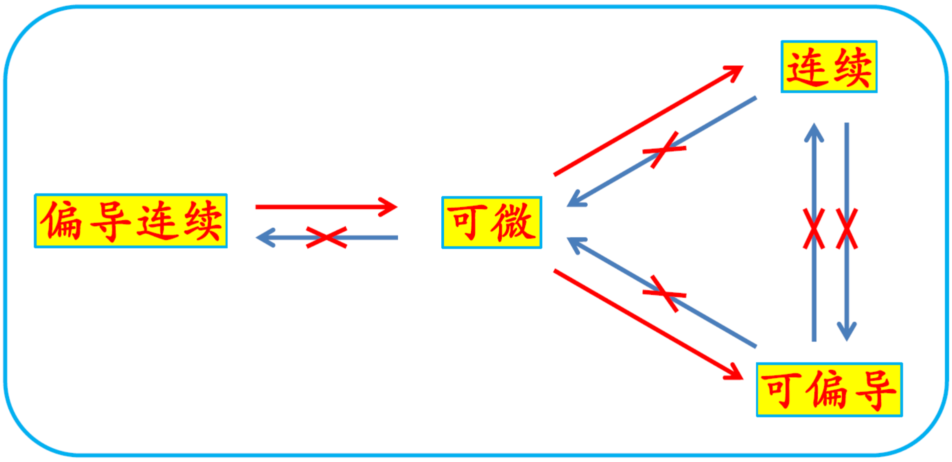
$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ (不存在)

$\Rightarrow \lim f_x(x,y) \ne f_x(0,0)$ $\Rightarrow$ 偏导不连续

$y=0$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f_x(x,y) \ne f_x(0,0) \Rightarrow \text{偏导不连续}$$

同理. $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f_y(x,y) \ne f_y(0,0)$



例5: 讨论函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的可微性,

其中函数 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

解: (1) $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} |x-y|\varphi(x,y) = 0 = f(0,0)$

$\Rightarrow$ 连续.

(2) $f_x(0,0) = \lim_{x\to0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \dfrac{|x|}{x}\varphi(x,0)$

$\left(\lim_{x\to0^-} \dfrac{|x|}{x}\varphi(x,0) = -\varphi(0,0). \quad \lim_{x\to0^+} \dfrac{|x|}{x}\varphi(x,0) = \varphi(0,0) \right)$

$\Rightarrow$ 当 $\varphi(0,0)\ne0$. $\Rightarrow$ 不可偏导. $\Rightarrow$ 不可微.

当 $\varphi(0,0)=0$ $\Rightarrow$ 可偏导. 且 $f_x(0,0)=0$. $f_y(0,0)=0$.

三、全微分的几何意义