8.1

2024年5月8日　　8:46

第八章 多元数量值函数积分学及其应用

§ 8.1 二重积分的概念与性质

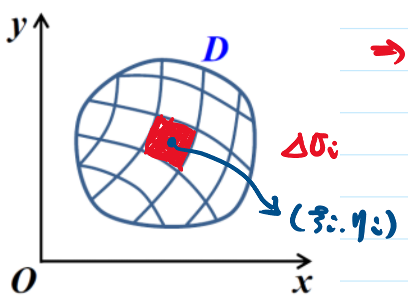
一、两个引例

引例1：求平面薄板的质量.

设有一平面薄板，占据xOy平面上的有界闭区域D，其在D上任一点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，其中$\rho(x,y)>0$且在D上连续，求该薄板的质量m.

若 $\rho(x,y)=\rho_0$(常数)

$\Rightarrow m=\rho_0\cdot S$



“分割．近似．求和．取极限”.

① “分割”：将区域D任意分割成n个小区域块.

$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$ (面积).

② "近似". $\Delta m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$ （ (ξ_i,η_i) 任取 ）.

③ "求和". $m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

④ "取极限". 令 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i$ 的直径$\}$

$$\Rightarrow m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

引例2：求曲顶柱体的体积.

给定曲顶柱体：

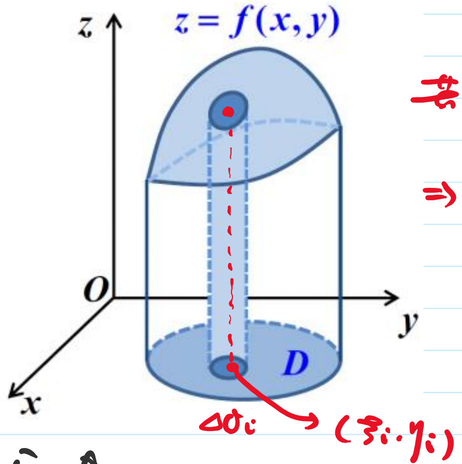
底：xOy平面上的闭区域D

顶：连续曲面$z=f(x,y)\geq 0$

侧面：以D的边界为准线，

母线平行于z轴的柱面

求该曲顶柱体的体积V.



若 $f(x,y)=z_0$(常数)

$\Rightarrow V=z_0\cdot S$.

① 分割. 将D区域分割成n个小区域.

$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n$.

② 近似: $\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$

③ 求和: $V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

④ 取极限: 令 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i$ 的直径$\}$

$$\Rightarrow V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

两个问题的共性：

① 解决问题的步骤相同

"分划、近似、求和、取极限"

② 所求量的结构式相同

曲顶柱体的体积：

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄板的质量：

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

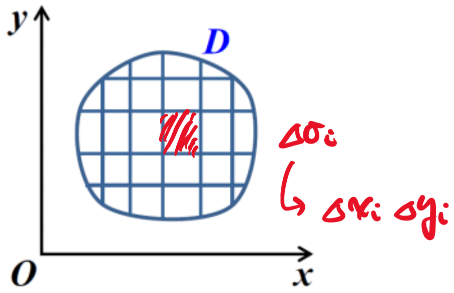
二、二重积分的概念

定义： 设D是xOy平面上的有界闭区域，$f(x,y)$是定义在D上的二元函数. 将D任意分划为n个小的闭区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，记$\Delta\sigma_i$的面积为$\Delta\sigma_i$，直径为$d_i$，$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$. 任取$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，作积分和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 若当$d\to 0$时，积分和的极限存在，且极限值与区域$D$的分划方式无关，与在$\Delta\sigma_i$中的选点方式无关，则称此极限为$f(x,y)$在$D$上的二重积分，记作$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

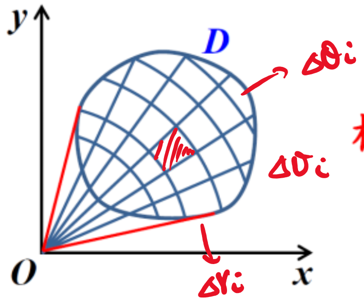
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

- 若$f(x,y)$在D上的二重积分存在，则称$f(x,y)$在D上可积.

- 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积 $\begin{cases}\text{特定分划方式}\\\text{特定选点方式}\end{cases}$



$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



极坐标 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=?$$

三、二重积分的可积条件、基本性质

定理1：(可积的必要条件)

若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

定理2：(可积的充分条件)

若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

二重积分的常用性质：

(假定 $f(x,y),g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积)

性质1： 当 $f(x,y)\equiv 1$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$ (σ 是 D 的面积).

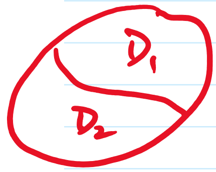
性质2：(线性运算性质)

设 α,β 为常数，则 $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ 在 D 上可积，且

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质3：(积分区域的可加性)

设 $D=D_1\cup D_2$，且 D_1 和 D_2 无公共内点，则 $f(x,y)$ 在 D_1 和 D_2 上均可积，且 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$



性质4：(比较性质)

① 若在 D 上有 $f(x,y)\ge g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\ge\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

- 若在 D 上有 $f(x,y)\ge 0$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\ge 0.$
- $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\le\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$ $-|f(x,y)|\le f(x,y)\le |f(x,y)|$

② 若 $f(x,y),g(x,y)$ 在 D 上连续，且 $f(x,y)\ge g(x,y)$，但不恒等，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma>\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

- 若 $f(x,y)$ 在 D 上非负连续，且不恒等0，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma>0.$

性质5：(估值性质)

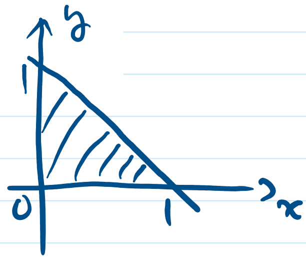
设M,m分别是$f(x,y)$在D上的最大值和最小值，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma.$$

性质6：(积分中值定理)

设$f(x,y)$在D上连续，则在D上至少存在一点(ξ,η)，使得$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$

例1： 设D是由直线$x+y=1$与两坐标轴围成的三角形闭区域，估计二重积分$\iint_D \sqrt{\cos(x+y)}\,\mathrm{d}\sigma$的大小.



解：由在D上，$0 \le x+y \le 1$

$\Rightarrow \quad \cos 1 \le \cos(x+y) \le 1$

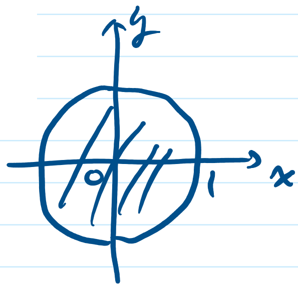
$\Rightarrow \quad \sqrt{\cos 1} \le \sqrt{\cos(x+y)} \le 1$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{\cos 1} \le \iint_D \sqrt{\cos(x+y)}\,d\sigma \le \frac{1}{2}$

又由 $z=\sqrt{\cos(x+y)}$ 在D上连续，且不恒等于 $\sqrt{\cos 1}$，1.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{\cos 1} < \iint_D \sqrt{\cos(x+y)}\,d\sigma < \frac{1}{2}$

例2： 设区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，试比较$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，$\iint_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$和$\iint_D \tan(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$的大小.

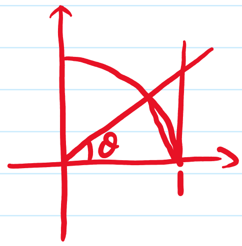


解：当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，有 $\sin\theta < \theta < \tan\theta$

在D上，$0 \le x^2+y^2 \le 1$

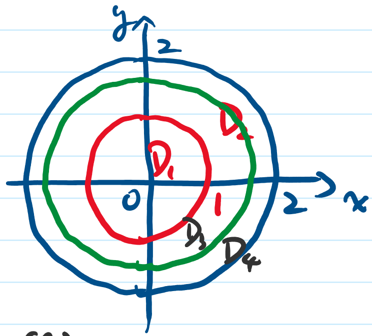
$$\Rightarrow \quad \sin(x^2+y^2) \le x^2+y^2 \le \tan(x^2+y^2). \quad (正确)$$

(不恒等)



$$\Rightarrow \iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\,d\sigma < \iint\limits_D (x^2+y^2)\,d\sigma < \iint\limits_D \tan(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

例3： 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$，判断积分 $\iint\limits_D \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma$ 的正负号.



解：设 $D = D_1 \cup D_2$.

$$\Rightarrow \iint\limits_D \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma.$$

$$= \iint\limits_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma - \iint\limits_{D_2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,d\sigma$$

设 $D_1: 0 \le x^2+y^2 \le 1$. $\Rightarrow \iint\limits_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma \le \pi$.

设 $D_2 = D_3 \cup D_4$. $\quad D_4: \ 3 \le x^2+y^2 \le 4$

$$\hookrightarrow \sqrt[3]{2} \le \sqrt[3]{x^2+y^2-1} \le \sqrt[3]{3}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_D \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma$$

$$= \underbrace{\iint\limits_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma}_{\le \pi} - \underbrace{\iint\limits_{D_3} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,d\sigma}_{>0} - \underbrace{\iint\limits_{D_4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,d\sigma}_{\ge \sqrt[3]{2}\,\pi}$$

$$< 0.$$