极限判别法

主讲人：刘秀平 教授

极限形式判别法

定理（极限形式判别法） 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数。

（1）如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho(0\le\rho<+\infty)$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

（2）如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho(0<\rho$，或$\rho=+\infty)$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

证明：(1) 由极限定义可知，对$\varepsilon=1$，$\exists N$，当$n>N$时，

有 $\frac{u_n}{v_n}<\rho+1$.即 $u_n<(\rho+1)v_n$.

因级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

(2) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho(0<\rho$，或$\rho=+\infty)$成立，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}$存在。

（反证法）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则由（1）知，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$必收敛。

与已知矛盾。因此级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必发散。

几个重要的等价关系：

(1). $\sin x\sim x;\tan x\sim x;$

(2). $\ln(1+x)\sim x;e^x-1\sim x;$

(3). $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x;$

(4). $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$

极限形式判别法

例题 判断下列级数的敛散性.

$$(1)\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}\quad(2)\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})\quad(3)\sum_{n=2}^{+\infty}(\sqrt[n]{e}-1)\quad(4)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8n^3-4n}{4n^6+3n^5}\quad(5)\sum_{2}^{+\infty}\sqrt{n+1}(1-\cos\frac{1}{n}).$$

解：$(1)\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}.\Rightarrow u_n=\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$是发散的.

所以，由极限形式判别法知，$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}$是发散的.

$(2)\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2}).\Rightarrow u_n=\ln(1-\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的.

所以，由极限形式判别法知，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})$是收敛的.

$(3)\sum_{n=2}^{+\infty}(\sqrt[n]{e}-1).\Rightarrow u_n=\sqrt[n]{e}-1=e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}$,

而调和级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$是发散的.

所以，由极限形式判别法知，级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(\sqrt[n]{e}-1)$是发散的。

$(4)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8n^3-4n}{4n^6+3n^5}.u_n=\frac{8n^3-4n}{4n^6+3n^5}\sim\frac{8n^3}{4n^6}=\frac{2}{n^3}.$

而级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}$是收敛的。

所以，由极限形式判别法$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8n^3-4n}{4n^6+3n^5}$是收敛的。

$(5)\sum_{2}^{+\infty}\sqrt{n+1}(1-\cos\frac{1}{n}).$

$$\Rightarrow u_n=\sqrt{n+1}(1-\cos\frac{1}{n})\sim\sqrt{n}\,\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}},$$

而级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$是收敛的. 所以

由极限判别法知，$\sum_{2}^{+\infty}\sqrt{n+1}(1-\cos\frac{1}{n})$是收敛的。

谢谢！