大 连 理 工 大 学

课 程 名 称: 线性代数　　试 卷: A　　试卷形式: 闭卷

授课院(系): 数学科学学院　考试日期; 2017年1月13日　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
标准分	30	12	12	10	10	14	6	6	100
得 分									

注: $\mathbf{E}$为单位矩阵, $|\mathbf{A}|$, $\det(\mathbf{A})$均为$\mathbf{A}$的行列式, $\mathbf{A}^*$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵, $\mathbf{A}^T$为$\mathbf{A}$ 的转置矩阵, $\mathrm{r}(\mathbf{A})$为$\mathbf{A}$的秩.

得分	

一. 填空题(3分$\times 10 = 30$ 分)

1. 设$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AA^T} = \underline{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix}}$.

2. 设$\mathbf{a_1} = (1, -1, 0)^T, \mathbf{a_2} = (1, 0, -1)^T, \mathbf{a_3} = (3, -2, -1)^T$, V是由$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$生成的向量空间,$V$的一组基为$\underline{\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\ }$.

3. 设$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 是一线性无关的向量组, 若向量组$\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a_2}, \mathbf{a}_2 - k\mathbf{a_3}, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a_1}$线性相关,则$\underline{\ k = \pm 1\ }$.

4. 设$\mathbf{A}$为3阶方阵,$|\mathbf{A} - \mathbf{E}| = 0, |\mathbf{A} - \mathbf{2E}| = 0, |\mathbf{A} - \mathbf{3E}| = 0, |\mathbf{A} - \mathbf{4E}| = \underline{\ -6\ }$.

5. 已知4阶行列式D中第二列元素依次为$-1, 2, 1, 0$, 第三列元素的代数余子式依次为$4, a, 2, 2$, 则$\underline{\ a = 1\ }$.

6. 设n阶矩阵$\mathbf{E}_{i,j}$表示对调矩阵,即由n阶单位矩阵对调i, j两行所得矩阵, $\mathbf{E}_{i,j}^{2017}\underline{\ = \mathbf{E}_{i,j}\ }$.

7. 设$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A^{-1}}$的特征多项式为$\underline{\ f(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{3})(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 1)\ }$.

8. 设$\mathbf{A} = (a_{ij})$为3阶正交矩阵, 且$a_{12} = 1$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)^T$, 方程$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的解为$\underline{\ (0, 1, 0)^T\ }$.

9. 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2kx_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为正定二次型, k的取值范围为$\underline{\ 0 < k < 2\ }$.

10. 设$\mathbf{a}, \mathbf{b}$均为$n(n \geq 3)$元列向量,$\mathbf{A} = \mathbf{ab^T}$,$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*$的秩为$\underline{\ 0\ }$.

得分	

二. 单项选择题(2分×6 = 12分).

1. 设n阶矩阵$\mathbf{A}$中元素a_{ij}的代数余子式A_{ij}, 且$A_{11} \neq 0$, 若$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$是非齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的两个线性无关的解, 则对应的齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的基础解系是(B).

(A) $(A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n})^T$　　(B) $(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n})^T$

(C) 含有二个线性无关的解向量　　(D) $(A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1})^T$

2. 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$均为$n(n > 1)$阶矩阵,下列结论正确的是(　D　).

(A) 若$\mathbf{A}, \mathbf{B}$皆为正定矩阵,则$\mathbf{AB}$是正定矩阵

(B) 若$\mathbf{A}, \mathbf{B}$皆为可逆矩阵,则$\mathbf{A^{-1}} + \mathbf{B^{-1}}$是可逆矩阵

(C) 若$\mathbf{A}, \mathbf{B}$皆为正交矩阵,则$\mathbf{A^{-1}} + \mathbf{B^{-1}}$是正交矩阵

(D) 若$\mathbf{A}, \mathbf{B}$皆为正定矩阵,则$\mathbf{A^{-1}} + \mathbf{B^{-1}}$是正定矩阵

3. 设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵, $\mathbf{B}$为$n \times m$矩阵, $\mathbf{E}_m$为m阶单位矩阵, 且$\mathbf{AB} = \mathbf{E}_m$, 则(B).

(A) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$行向量组均线性相关　　(B) $\mathbf{A}$行向量组线性无关,$\mathbf{B}$列向量组线性无关

(C) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$列向量组均线性相关　　(D) $\mathbf{A}$列向量组线性无关,$\mathbf{B}$行向量组线性无关

4. 下列矩阵中,不可相似对角化的是(　C　).

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 设$\mathbf{A}$为二阶方阵,$\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$为线性无关的二元列向量,

$$\mathbf{Ap_1} = \mathbf{p_1} + \mathbf{2p_2}, \quad \mathbf{Ap_2} = \mathbf{2p_1} + \mathbf{p_2},$$

$\mathbf{A}$的特征值是(　A　)

(A) $-1, 3$　　(B) $1, -3$　　(C) $1, 2$　　(D) $2, -1$

6. 若实对称矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$合同, 则二次型$f = \mathbf{x^T A x}$的规范形为(　C　)

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$　　(B) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

(C) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$　　(D) $y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2$

得分	

三. (12分) 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\1&a&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, 且$\mathrm{r}(\mathbf{A})=3$.

(1) 确定a的取值范围；

(2) 求$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系；

(3) 求$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的通解。

对方程的增广矩阵$(\mathbf{A},\mathbf{b})$进行初等行变换

$$(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{pmatrix}1&2&1&2&3\\0&1&1&1&2\\1&a&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&1&1&2\\0&0&1-a&1-a&2-2a\end{pmatrix}\qquad(3分)$$

(1) 由$\mathbf{A}$的秩为3, 因此$a\neq 1$. (3分)
此时,

$$(\mathbf{A},\mathbf{b})\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&2\end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系为$(-1,0,-1,1)^T$. (3分)

(3) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的通解为$k(-1,0,-1,1)^T+(1,0,2,0)^T, k$ 为任意常数. (3分)

得分	

四. (10分) 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&2\\1&-1&3&1&-2\\1&1&1&1&0\\0&2&-2&4&-6\end{pmatrix}$, 求$\mathbf{A}$的秩及$\mathbf{A}=(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3},\mathbf{a_4},\mathbf{a_5})$的列向量组$\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3},\mathbf{a_4},\mathbf{a_5}$的一个极大线性无关组, 并将其余列向量用该极大线性无关组线性表示.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&2\\1&-1&3&1&-2\\1&1&1&1&0\\0&2&-2&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad(4分)$$

因此, $\mathbf{A}$的秩为3, (2分)
$\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_4}$是列向量组的极大无关组, 且

$$\mathbf{a_3}=2\mathbf{a_1}-\mathbf{a_2},\qquad \mathbf{a_5}=\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}-2\mathbf{a_4}.\qquad(4分)$$

得分	

五. (10分) 已知$\mathbf{R}^3$的两个基

$\mathbf{a_1} = (1,1,1)^T, \mathbf{a_2} = (1,1,0)^T, \mathbf{a_3} = (1,0,0)^T$; $\mathbf{b_1} = (1,1,-1)^T, \mathbf{b_2} = (-1,1,1)^T, \mathbf{b_3} = (1,1,1)^T$.

(1) 求从基$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$到基$\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$的过度矩阵$\mathbf{P}$;

解 记

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}),$$

则 $\mathbf{B} = \mathbf{AP}$.

由

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3分)$$

得

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2分)$$

(2) 设向量$\mathbf{v}$在基$\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$下的坐标向量为$\mathbf{y} = (2,1,3)^T$, 求$\mathbf{v}$在基$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$下的坐标向量$\mathbf{x}$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{Py} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (5分)$$

得分	

六. (14分) 设三阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$, 属于特征值$\lambda_3=5$的特征向量为$\mathbf{p}_3=(1,1,1)^T$.

(1) 求一个正交矩阵$\mathbf{Q}$,使得$\mathbf{Q^{-1}AQ}$为对角矩阵并写出此对角矩阵;

设矩阵$\mathbf{A}$属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$的特征向量为$\mathbf{p}=(x_1,x_2,x_3)^T$, 则$\mathbf{p}$与$\mathbf{p}_3$正交, 即

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

因此, 属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$线性无关的特征向量为

$$\mathbf{p}_1=(-1,1,0)^T,\quad \mathbf{p}_2=(-1,0,1)^T,\qquad (3分)$$

正交化, 单位化得

$$\mathbf{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T,\ \ \mathbf{q}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T,\ \ \mathbf{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T,$$

令

$$\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\qquad (3分)$$

则$\mathbf{Q}$为正交矩阵,

且

$$\mathbf{Q^{-1}AQ}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.\qquad (2分)$$

(2) 若$\mathbf{A}+k\mathbf{E}$为正定矩阵, 则k应满足什么条件?

$\mathbf{A}+k\mathbf{E}$特征值为$k-1,k-1,k+5$, 若$\mathbf{A}+k\mathbf{E}$是正定矩阵, 则$k>1$. (3分)

(3) 矩阵$\mathbf{A}$的等价标准形, 相似标准形, 相合（合同）标准形分别是

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\qquad (3分)$$

得分	

七. (6分) 设$\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$为单位列向量, n阶方阵

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

证明：$\mathbf{A}, \mathbf{B}$相似.

证

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A},$$

设λ为$\mathbf{A}$的特征值,$\mathbf{p}$为其对应的特征向量,即

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}, \ (\mathbf{A}^{\mathbf{2}} - \mathbf{A})\mathbf{p} = (\lambda^2 - \lambda)\mathbf{p} = 0, \ \lambda^2 - \lambda = 0, \ \lambda = 0\text{或}1.$$

因$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{a} = 1$, 所以$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$分别是$n-1, 1$重特征值。又$\mathbf{A}$是对称矩阵,是可对角化的,故$\mathbf{A}$的相似标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{B}$的特征值是$\lambda_1 = 0(n-1\text{重}),\lambda_2 = 1(\text{单特征值})$, 因$\mathrm{r}(\mathbf{B}) = 1$, 故$\mathbf{B}$的属于特征值$\lambda_1 = 0$的有$n-1$个线性无关的特征向量,因此, $\mathbf{B}$可对角化,$\mathbf{B}$的相似标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因此,$\mathbf{A}, \mathbf{B}$相似.

得分	

八. (6分) 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$均为n阶矩阵, 且$\mathrm{r}(\mathbf{A})$ =$\mathrm{r}(\mathbf{B})$，若齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的解都是$\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$的解, 证明：$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$与$\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解.

证 设$\mathrm{r}(\mathbf{A})$ =$\mathrm{r}(\mathbf{B}) = r, \eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$是方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的一组解系, 由题设，$\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$也是方程组$\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$的$n-r$个线性无关的解。因此，$\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$是方程组$\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$的一组基础解系，即方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$与$\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$有一组相同的基础解系。因此$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$与$\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$同解。