积分判别法

积分判别法　设非负函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性相同.

证明　由于 $f(x)$ 单调减少，且 $f(x) \geqslant 0$，则当 $x \in [n-1,n]$ 时，有

$$f(n) \leqslant f(x) \leqslant f(n-1)\text{，}$$

从而

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leqslant f(n-1) \quad (n=2,3,\cdots)\text{，}$$

相加得

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \leqslant \int_1^m f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{m-1} f(n)\,.$$

因此若反常积分收敛，对任何自然数 m，有部分和

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^m f(x)dx \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx\,.$$

即 $\{S_m\}$ 有界，故级数收敛.

若反常积分发散，由函数 $f(x)$ 的非负性，即知 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$，级数的部分和

$$\sum_{n=1}^{m} f(n) \geqslant \int_1^{m+1} f(x)dx\,.$$

显然，$\lim\limits_{m\to\infty} S_m = +\infty$，故级数发散.

由积分判别法，很容易推导出 $p-$ 级数的敛散性.

例、　讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^p n}$ 的敛散性, 其中 $p>0$.

解　$p>0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^p x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上是非负递减函数. 由于反常积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^p x} = \begin{cases} +\infty & (p \leqslant 1) \\ \dfrac{1}{(p-1)\ln^{p-1} 2} & (p>1) \end{cases}\text{，}$$

故当 $p \leqslant 1$ 时级数发散，当 $p>1$ 时级数收敛.