5.3

2024年3月10日 17:05

§ 5.3 任意项级数敛散性的判别法

一、交错级数敛散性的判别法

二、绝对收敛与条件收敛

一、交错级数敛散性的判别法

设 $u_n > 0$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ 为交错级数.

定理1: (Leibniz 判别法)

若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \ (u_n > 0)$ 满足条件:

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$

① 数列 $\{u_n\}$ 单减, 即 $u_{n+1} \le u_n \ (n = 1, 2, \cdots)$;

② $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛, 且其和 S 满足 $0 \le S \le u_1$,

余和 r_n 的绝对值 $|r_n| \le u_{n+1}$.

证: 由 $S_{2n} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(u_{2n-1} - u_{2n})}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \{S_{2n}\}$ 单增.

又由 $S_{2n} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(u_{2n-2} - u_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{u_{2n}}_{\geq 0}$

$\le u_1$

$\Rightarrow \{S_{2n}\}$ 有上界. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ (存在)

∴ $0 \le S_{2n} \le u_1 \Rightarrow 0 \le S \le u_1$

由 $0 \le S_{2n} \le u_1 \Rightarrow 0 \le S \le u_1$

又由 $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. $(0 \le S \le u_1)$

余项. $r_n = S - S_n = (-1)^n u_{n+1} - (-1)^n u_{n+2} + \cdots$

$\Rightarrow |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 交错级数

由上述结论. $\Rightarrow |r_n| \le u_{n+1}$

注： • 判别法中的条件是充分非必要条件.

即：若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，数列 $\{u_n\}$ 未必单减.

• 判别数列 $\{u_n\}$ 的单调性，可借助于函数的导数进行判别.

• 若数列 $\{u_n\}$ 单减，且交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n > 0)$ 发散，

则：数列 $\{u_n\}$ 极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a > 0$.

例1： 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ 的敛散性. (条件) $= \ln 2$

解：由 $u_n = \frac{1}{n}$ 单减. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

由 Leibniz 判别法.

由 Leibniz 判别法.

⇒ 原级数收敛. (若 s: $0 \le s \le 1$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发.

例2: 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$的敛散性. 绝收

解: 由 $u_n = \frac{1}{n!}$ 单减. 且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由 Leibniz 判别法.

⇒ 原级数收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收.

例3: 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\tan\frac{\pi}{3n}$的敛散性. 条收.

解: 由 $u_n = \tan\frac{\pi}{3n}$ 单减. 且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由 Leibniz 判别法.

⇒ 原级数收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{\pi}{3n}$ 发.

例4: 判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$的敛散性. 条收

解: 由 $u_n = \frac{\ln n}{n}$. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ⇒ $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$.

⇒ $x > e$. ⇒ 当 $n \ge 3$. $\{u_n\}$ 单减.

由 Leibniz 判别法.

⇒ 原级数收敛.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 发.

例5： 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的敛散性. 条件收敛. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 发.

证：由 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$. $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

$\left(u_2=\frac{1}{\sqrt3}.\ u_3=\frac{1}{\sqrt2}.\ u_4=\frac{1}{\sqrt5}.\ u_5=\frac{1}{\sqrt4}\ \cdots\right.$ 非单减$\left.\right)$

$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right.$ 发. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2k}}$ 发 $\left.\right)$

由 $S_{2n}=\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{<0}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt4}\right)}_{<0}+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)}_{<0}$

$\Rightarrow S_{2n}>S_{2n+2}$. 即 $\{S_{2n}\}\downarrow$

又由 $S_{2n}=-\frac{1}{\sqrt2}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt4}\right)}_{>0}+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)}_{>0}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}_{>0}$

$>-\frac{1}{\sqrt2}$

即 $\{S_{2n}\}$ 单减 有下界 $-\frac{1}{\sqrt2}$. $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$ (存在)

又由 $S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\quad\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$.

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=S$. (存在). 即 原式收敛.

(方法2). $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-\frac12}$

$\left((1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2).\right.$ $\underline{x\to0}$

$=\frac{(-1)^n}{\sqrt n}\left(1-\frac12\cdot\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac1n\right)\right)$

$=\frac{(-1)^n}{\ }-\frac{1}{\ }\frac{1}{\ 3}+o\left(\frac{1}{n^{\frac32}}\right)$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ 收. $\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n. \quad v_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$

收 $\Leftarrow$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} v_n = 0\right)$

$\Rightarrow$ 原级数收.

二、绝对收敛与条件收敛

对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，称正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 为其绝对值级数.

(u_n 可正. 可负. 可0) ($|u_n| \geq 0$)

定理2：若绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.

此时，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. (绝对收敛的级数一定收敛)

证：设 $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$ $\quad \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收}\right)$

又由 $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 收敛. (正项级数)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

定义： 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$**条件收敛**.

例6： 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$的敛散性.

解：由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$

由 $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow$ 原级绝对收敛.

$\Rightarrow$ 原级数收敛.

例7： 判别下列级数的敛散性，如果收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$;　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$.

解：(1). 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 收. (Leibniz 判别法).

即：原级数 条件收敛.

(2). 由 $|u_n| = \frac{|\sin(n\alpha)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收

即：原级数绝对收敛.

注： 对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 考虑其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$

- 若用比值或者根值判别法, 判别出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,

则：原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散.

(∵ $\lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n \neq 0$)

例8： 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ $(s>0,\ \alpha>0)$ 的敛散性.

解：∵ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^s}$.

∵ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{(\sqrt[n]{n})^s} = \alpha$

则：当 $\alpha<1$ 时. 原级数绝对收敛.

当 $\alpha>1$ 时. $\Rightarrow$ 绝对值级数发散. (根值).

$\Rightarrow$ 原级数发散.

当 $\alpha=1$. 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$.

绝对值级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

$\Rightarrow$ 当 $s>1$. 原级数绝对收敛.

当 $s\le 1$. 绝对值级数发散.

交错级收敛. (Leibniz 判别法)

即: 交错级条件收敛.

综上. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ $\begin{cases} 0<\alpha<1. & \text{绝收.} \\ \alpha>1 & \text{发散.} \\ \alpha=1 & \begin{cases} s>1. & \text{绝收.} \\ 0<s\le 1. & \text{条收.} \end{cases} \end{cases}$