姓名：________

学号：________

院系：________

_____级　班

装

订

线

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称： 线性代数　　　A 卷　　　考试形式： 闭卷

授课院（系）： 数学科学学院　考试日期：2017 年 6 月 2 日　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
标准分	30	10	8	10	8	10	12	6	6	100
得　分										

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设α,β为三元列向量，$\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\2&4&6\end{bmatrix}$，则$\alpha^T\beta=$____

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都是三元列向量，$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\boldsymbol{B}=(\alpha_1,2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)$,

$|\boldsymbol{A}|=1$, 则$|\boldsymbol{B}|=$______

3. 设方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 则$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$____________

4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&1&0&1\\3&0&1&1\\4&0&0&a\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=3$，则$a$需满足_______

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系，$\beta_1=\alpha_1+k\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+k\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_1-\alpha_3$，

则β_1,β_2,β_3也是$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系的条件是k满足________

6.设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$都是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2=(2,2,-2)^T$，

$\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3=(2,0,0)^T$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为____________________

7. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&x\\0&1&y\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&z\end{pmatrix}$相似，则$x=$___, $y=$ $\underline{-1}$, $z=$___

8. 设$f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+kx_2^2+kx_3^2-(x_1+x_2+x_3)^2$为正定二次型，

则k需满足________

9. 设$\boldsymbol{A}$为三阶实对称阵，$r(\boldsymbol{A})=2, |2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0, tr(\boldsymbol{A})=4$，

则 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形为

______

10. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 既是正交阵又是正定阵，则 $\left|\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{E}\right|=$ ____

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}+a_{23}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}+a_{13}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}+a_{33}&a_{33}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$

$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，则必有（ C ）

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1$ (C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2^{-1}$ (D) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1^{-1}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 4 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=1$, 则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=$（ B ）

（A）$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ （B）$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{B}^*&-\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$ （C）$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵，则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是（ C ）

（A） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关 （B） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关
（C） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关 （D） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

4. 设 $\boldsymbol{u}$ 为 n 元单位列向量, $n>1$， $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$，则下列选项中不正确的是（ D ）

（A） 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 （B） 1 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
（C） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆 （D）$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆

5．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是正定阵, 则下列选项中不一定是正定阵的是（ B ）

（A） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ （B）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

（C） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ （D）$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

三、（8 分）计算行列式

$$\begin{vmatrix}1+a_1&a_2&a_3&a_4\\2a_1&1+2a_2&2a_3&2a_4\\4a_1&4a_2&1+4a_3&4a_4\\6a_1&6a_2&6a_3&1+6a_4\end{vmatrix}=$$

四、（10 分）设$\boldsymbol{V}$是由向量组$\boldsymbol{a}_1=(1,0,-1,3)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(2,1,0,0)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(3,2,1,-3)^T$，$\boldsymbol{a}_4=(1,1,1,-3)^T$所生成的向量空间，$\boldsymbol{b}=(4,3,2,k)^T$.（1）求$\boldsymbol{V}$的维数和$\boldsymbol{V}$的一个基.（2）当$k$满足什么条件时，$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{V}$？

五、（8 分）已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$, $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$, 求$\boldsymbol{B}$.

六、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k+1 & -1 \\ 1 & k+1 & -k \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，求 k 及方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ 的通解。

七、（12 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$，（1）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

（2）设 $\boldsymbol{x}=\left[x_1,x_2,x_3\right]^T, \boldsymbol{y}=\left[y_1,y_2,y_3\right]^T$，求出二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下所化成的标准形。

八、（6 分）设α为n元列向量，$n \geq 2,\ \alpha^T\alpha = 2,\ \boldsymbol{A} = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$, 证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = n - 1.$

九、（6 分）设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是线性无关的三元列向量组，$\boldsymbol{A}\alpha_1 = \alpha_1$，$\boldsymbol{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$，$\boldsymbol{A}(\alpha_2 + \alpha_3) = -\alpha_2 + \alpha_3$, 证明：$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}.$