# 条件极值

主讲人：张文龙

大连理工大学数学科学学院

# 条件极值:

极值问题 $\begin{cases} \text{无条件极值（只有定义域限制）} \\ \text{条件极值（除定义域限制外，还有其它约束条件）} \end{cases}$

例： 求表面积为 $a^2$ 的体积最大的长方体。

分析：设长方体的长、宽、高分别为 $x$, $y$, $z$

所求问题为在约束条件 $2(xy+yz+xz)=a^2$ 下，

求体积 $V=xyz$（目标函数）的最大值（极大值）。

## 条件极值的求法:

求在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下，目标函数 $u=f(x,y,z)$ 的极值

**方法一：代入法（约束条件比较简单）**

- 从约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 解出 $z=z(x,y)$;
- 代入目标函数 $u=f(x,y,z)$，得 $u=f\big(x,y,z(x,y)\big)$;
- 求函数 $u=f\big(x,y,z(x,y)\big)$ 的无条件极值。

求在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下，目标函数 $u=f(x,y,z)$ 的极值

**方法二：拉格朗日乘数法**

构造辅助函数（拉格朗日函数）：

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

解方程组 $\begin{cases} L_x=f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)=0 \\ L_y=f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)=0 \\ L_z=f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)=0 \\ L_\lambda=\varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$ 解得：$x,y,z,\lambda$

则 $(x,y,z)$ 为目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下可能的极值点。

## 注：拉格朗日乘数法可推广至多个自变量和多个约束条件情形。

例如，求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值。

构造辅助函数：$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

解方程组
$$\begin{cases} L_x=f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)+\mu\psi_x(x,y,z)=0 \\ L_y=f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)+\mu\psi_y(x,y,z)=0 \\ L_z=f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)+\mu\psi_z(x,y,z)=0 \\ L_\lambda=\varphi(x,y,z)=0 \\ L_\mu=\psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

可得条件极值的可疑极值点。

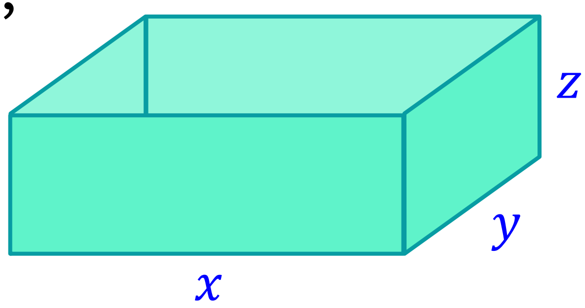
## 举例：

例1：要设计一个容量为 $V_0$ 的长方体开口水箱，试问水箱长、宽、高分别等于多少时所用材料最省？

解：设长方体水箱的长、宽、高分别为 $x, y, z$，

则问题为求 $x, y, z$ 使在条件 $xyz = V_0$ 下，

水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小。



## 利用拉格朗日乘数法：

构造辅助函数：

$$L(x,y,z,\lambda)=2(xz+yz)+xy+\lambda(xyz-V_0)$$

解方程组
$$\begin{cases} L_x=2z+y+\lambda yz=0 \\ L_y=2z+x+\lambda xz=0 \\ L_z=2(x+y)+\lambda xy=0 \\ L_\lambda=xyz-V_0=0 \end{cases}$$

解之，得唯一驻点：$x=y=2z=\sqrt[3]{2V_0},\ \lambda=-4/\sqrt[3]{2V_0}$

由题意知：合理的设计是存在的

故：当长宽高之比为 2:2:1 时，所用材料最省。

## 思考:

① 当水箱封闭时，长、宽、高的尺寸应如何?

② 当开口水箱底部的造价是侧面的 2 倍时，欲使造价最省，应如何构造拉格朗日函数? 长、宽、高的尺寸如何?

## 总 结:

多元函数的极值:

- 无条件极值（二元函数）：

  函数 $z = f(x, y)$ 在无条件限制下的极值。

- 条件极值（拉格朗日乘数法）：

  函数 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 限制下的极值。