2l周期的Fourier级数

主讲人：刘秀平 教授

2l周期的Fourier级数

3.以2l为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$是以2l为周期的函数，则通过变量代换

$\frac{\pi x}{l}=t$或者$x=\frac{lt}{\pi}$,

则F(t)=$f(\frac{lt}{\pi})$是以2π为周期的t的函数。

若$f(x)$在$[-l,l]$上可积，则F(t)在$[-\pi,\pi]$上也可积。

这时F(t)的Fourier级数为

$$\mathrm{F}(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt \qquad (1)$$

其中

$$\begin{cases} a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{F}(t)\cos ktdt, k=0,1,2,\cdots \\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{F}(t)\sin ktdt, k=1,2,\cdots \end{cases} \qquad (2)$$

作代换t=$\frac{\pi x}{l}$,则(1)变成下面形式：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_n\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (3)$$

同时有dt=$\frac{\pi}{l}dx$.代入（2）则得

$$\begin{cases} a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, k=0,1,2,\cdots \\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, k=1,2,\cdots \end{cases} \qquad (4)$$

（4）即为2l为周期的函数$f(x)$的Fourier系数计算公式，

（3）为其Fourier级数。

关于收敛性定理，将$[-\pi,\pi]$换成$[-l,l]$即可。

Fourier级数的计算

例题1. 设$f(x)$的周期为2，它在区间（-1, 1]上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & (-1<x\le 0)\\ x^3, & (0<x\le 1)\end{cases},$$

则$f(x)$的Fourier级数在$x=1$处收敛于（　　）.

解：函数$f(x)$满足收敛性定理条件。

设$f(x)$的Fourier级数的和函数为S(x)。

由收敛性定理有$S(1)=\frac{1}{2}(f(1^-)+f(-1^+))=\frac{3}{2}.$

例题2. 将$f(x)=x^2$在$-1\le x\le 1$上展开为以2为周期的Fourier级数.

解：首先l=1. 将$f(x)$进行周期延拓后，由于$f(x)=x^2$是偶函数，

因此有$b_n=0$，$n=1,2,\cdots$，

而 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx$

$$=2\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx=(-1)^n\frac{4}{(n\pi)^2}, n=0,1,2,\cdots$$

由于$f(x)=x^2$在$[-1,1]$上是连续的，又

$$\frac{1}{2}[f(1^-)+f(-1^+)]=f(1)=f(-1),$$

所以由收敛性定理知，在$[-1,1]$上

$$x^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}[-\frac{\cos\pi x}{1^2}+\frac{\cos 2\pi x}{2^2}-\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\cdots+(-1)^n\frac{\cos n\pi x}{n^2}+\cdots].$$

特别地，当x=0时，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

例题3. 设$f(x)=x^2, 0<x\le 1$，而$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, x\in(-\infty,+\infty)$,

其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n=1,2,\cdots$，则$S(-\frac{1}{2})=?$

解：对函数$f(x)$进行奇延拓为F(x):

$$F(x)=\begin{cases}x^2, 0<x\le 1,\\ -x^2, -1<x\le 0,\end{cases}$$ 则F(x)是（-1, 1）上的奇函数。

在此基础上在进行周期为2的延拓，即

F(x+2)=F(x).

显然，F(x)满足收敛性定理。又$x=-\frac{1}{2}$是连续点，

因此由收敛性定理知，$S(-\frac{1}{2})=F(-\frac{1}{2})=-x^2\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}.$

谢谢!