

# Tensores y Autovalores

**E.D Fonseca\***

*Universidad Industrial de Santander*

*Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones*

Versión 1 1 de Oct 2021

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>2</b>
2.1. Sistema conformado por n partículas . . . . .	2
2.2. Porcentaje PIB destinado durante los ultimos 15 años . . . . .	4
<b>3. Resultados</b>	<b>6</b>
<b>4. Conclusiones</b>	<b>8</b>

## Resumen

El propósito de estudio consistió en el análisis de un conjunto de datos y sus respectivos momentos (orden 0, 1 y 2), correspondientes al valor total de la variable del sistema, promedio pesado de la variable y la matriz de covarianza, respectivamente. La primera parte del presente estudio consistió en la distribución de una serie de partículas, con un valor correspondiente de masas respectivamente, y el objetivo con ellas fue encontrar una base en la cual se obtenga la menor dispersión de los datos y posteriormente efectuar la transformación de las coordenadas cartesianas a esta base.

La segunda parte del estudio constituyo en el análisis del porcentaje del Producto Interno Bruto destinado para educación, salud, defensa y ciencia y tecnología en un periodo de tiempo comprendido entre el año 2004 y 2018, mediante el uso de las matrices de correlación y covarianza. De igual modo se obtuvo la matriz de covectores.

## 1. Introducción

El uso de los autovectores y autovalores es muy extendido, los autovectores indican características relevantes de un conjunto de datos como lo cual beneficia a su interpretación, por ejemplo, gracias a

---

\*e-mail:duvanfonsecabril@gmail.com

ellos se pueden obtener los ejes principales de una matriz de dispersión y determinar la tendencia de su alineación, la familia de algoritmos 'Page Rank' de Google, utiliza autovectores para decidir qué páginas son realmente más relevantes a la hora de resolver búsquedas. En los casos de estudio en específico mediante la obtención de los diferentes momentos, autovalores y autovectores para el caso de las partículas y los datos del Banco Mundial, se busco estudiar el grado de variación conjunta entre sus variables y las interrelaciones entre ellos.

## 2. Metodología

### 2.1. Sistema conformado por n partículas

Se plantea un sistema de n partículas de masas diferentes dispersas en un volumen, como se muestra en la figura 2, para el cual se consideran los casos en 2D y 3D. En el cuadro 1 se muestra el listado de partículas con sus respectivas posiciones en 2D(x,y) y 3D(x,y,z).

Cuadro 1: Listado de partículas, con sus respectivas masas y posiciones

Partícula	Masa	X	Y	Z
1	2	-53	79	-91
2	2	13	-142	-177
3	2	-109	-103	-120
...	...	...	...	...
1531	5	1626	1537	96
1532	2	1390	1480	160
1533	2	1717	1464	-59

Considerando las masas en el caso 2D se encontraron los primeros 3 momentos para la distribución de las mismas, la figura 1 muestra los puntos en coordenadas X, Y con el centro geometrico (naranja), en la cual se aprecia una relación de aumento constante entre X y Y, por su parte la figura 2 muestra las masas en coordenadas X,Y,Z

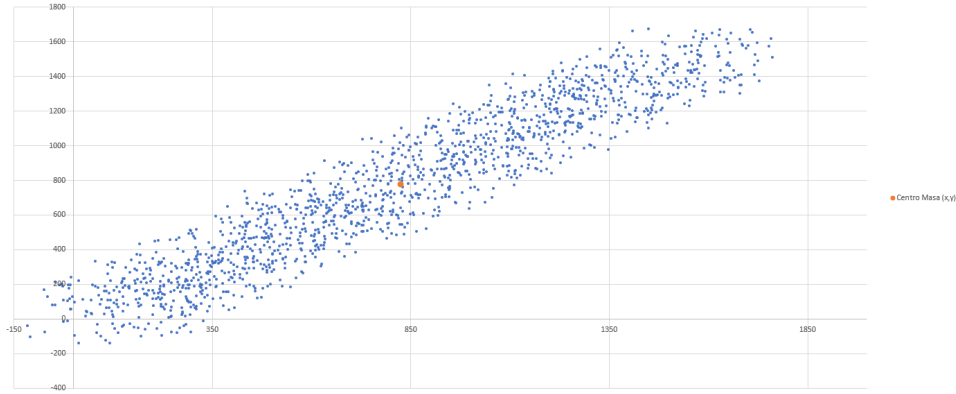


Figura 1: Representación gráfica en 3 coordenadas para las distintas masas

El momento de orden cero corresponde a la sumatoria total de las masas del sistema, el cual da como resultado 4627 unidades de masa.

El centro geometrico del sistema que viene dado por el promedio de las posiciones de las particulas

$$= [825,81521, 776,9185217, 15,5033499] \quad (1)$$

Por su parte el momento de orden 1 del sistema es el centro de masa o el promedio pesado de la variable, para su obtención segun la definición planteada, éste momento se halla con la sumatoria de cada una de las coordenadas menos el promedio de las mismas, (anteriormente descrito) multiplicado por la masa

$$u_1(v) = \sum_{i=1}^N v_i(x_i - \bar{x})$$

De lo cual se obtiene:

$$x = 17773, 7305, y = 4850, 6347, z = 2036, 2283 \quad (2)$$

Dividiento por la masa total del sistema, se obtiene la desviación en del centro de masa con respecto al centro geométrico del sistema

$$3,8413, 1, 0483, 0, 44 \quad (3)$$

Y respecto al centro al eje de coordenadas

$$x = 825, 8152, y = 776, 9185, z = 15, 5033 \quad (4)$$

El momento de orden 2 o tensor momento de inercia se puede obtener mediante una linea de codigo por la función COV, no obstante la matematica tras ella corresponde a la siguiente ecuación:

$$u_2(v) = \sum_{i=1}^n (x - \bar{X}) * (y - \bar{Y})$$

A partir del tensor momento de inercia fue posible la obtención de los autovalores y autovectores, mediante la línea de código de python `"valores, vectores = np.linalg.eig(Matriz)"`, y por definición los ejes principales de inercia son precisamente las rectas o ejes formadas por los vectores propios del tensor de inercia,

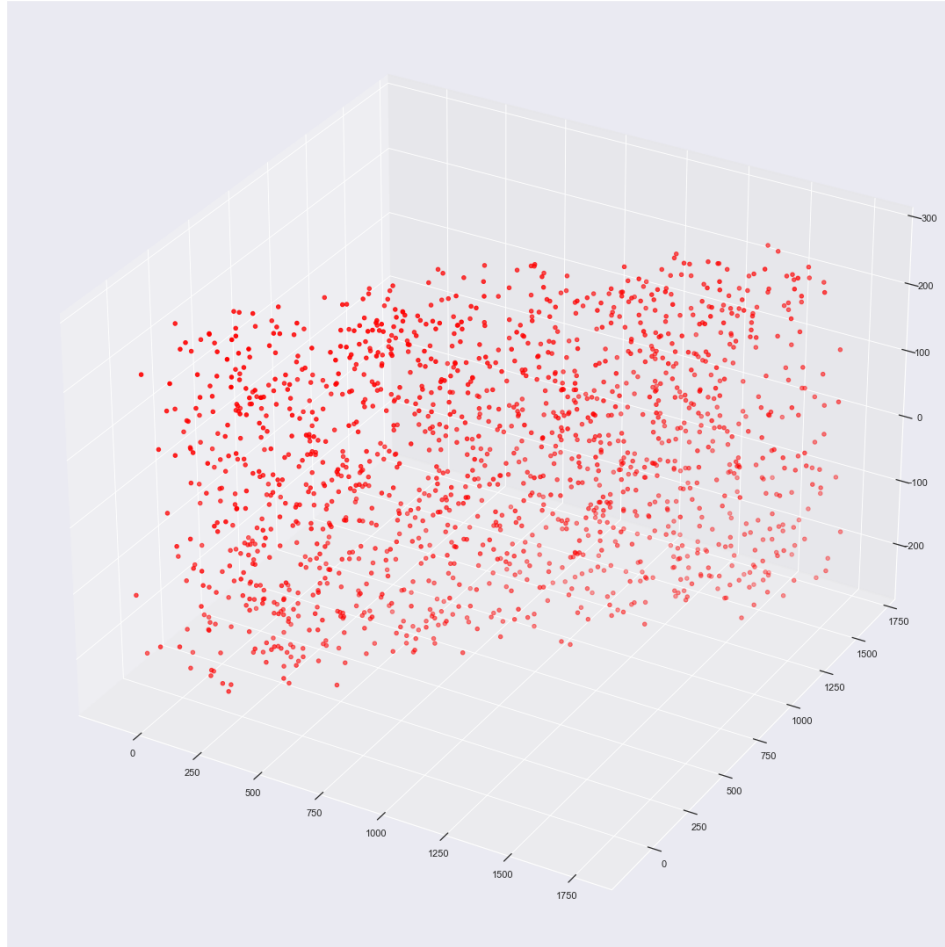


Figura 2: Representación gráfica en 3 coordenadas para las distintas masas.

## 2.2. Porcentaje PIB destinado durante los últimos 15 años

Para el caso de los datos del Banco Mundial se seleccionaron desde el año 2004 hasta el 2018, en los cuales se tenía continuidad para los 4 datos correspondientes a defensa, salud, educación, ciencia y tecnología, los datos se muestran en el cuadro 2, a partir de ellos se calculó la matriz de covarianza y la matriz de correlación.

Cuadro 2: Datos Banco Mundial años 2004 hasta el 2018

Year	Military	Health	Research	Education
1	3,4650	5,7989	0,1535	4,0793
2	3,3529	6,0671	0,1513	4,0210
3	3,2761	6,3355	0,1499	3,9167
4	3,2667	6,4910	0,1850	4,0830
5	3,7446	6,8419	0,2016	3,9388
6	3,8854	7,3113	0,1960	4,7765
7	3,6428	7,0713	0,1953	4,8338
8	3,0816	6,7808	0,2063	4,4661
9	3,1590	6,7460	0,2340	4,3704
10	3,2744	7,0172	0,2713	4,8786
11	3,1083	7,1855	0,3056	4,6295
12	3,1100	7,5234	0,2898	4,4704
13	3,0711	7,5312	0,2669	4,4772
14	3,2091	7,6786	0,2429	4,5355
15	3,0621	7,6398	0,2370	4,4575

La representación grafica de dichos valores se muestra en la figura 3

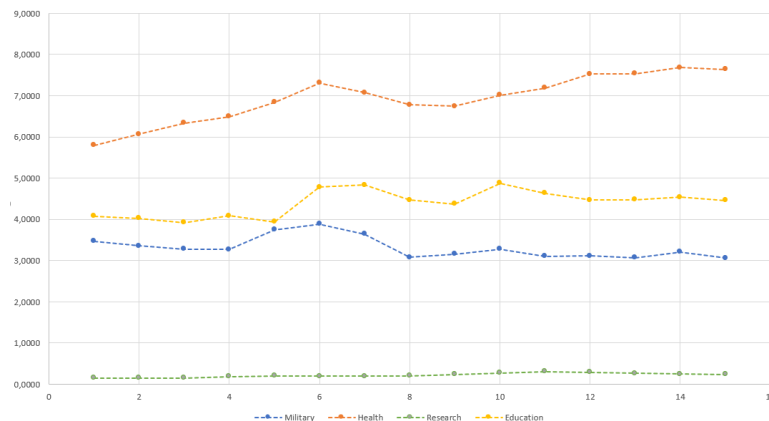


Figura 3: Representación gráfica de los valores del PIB del BANCO MUNDIAL.

Para el calculo de la matriz de matriz de covarianza se uso la linea de codigo `cov()` La obtención de la matriz de correlación se efectuo mediante la linea de codigo `corr()`

A partir de la matriz de covarianza se encontraron los autovectores y autovalores haciendo uso de la siguiente linea de codigo "valores3, vectores3 = `np.linalg.eig(df3.cov())`"

### 3. Resultados

El tensor momento de inercia para el caso 2D es igual a:

$$\begin{bmatrix} 958603863,3765 & 911766544,1163 \\ 911766544,1163 & 963665233,3609 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para el caso 2D los autovalores y autovectores correspondientes son:

$$\begin{bmatrix} 49364492,1942 & 0 \\ 0 & 1872904604,5432 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} -0,70808741 & -0,70612479 \\ 0,70612479 & -0,70808741 \end{bmatrix} \quad (7)$$

La matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores es la misma matriz de autovectores:

$$\begin{bmatrix} -0,70808741 & -0,70612479 \\ 0,70612479 & -0,70808741 \end{bmatrix} \quad (8)$$

En la figura 4 se observa, en azul los datos originales con media cero, es decir, el momento de orden uno, donde a cada posición x, y menos la media. En amarillo se observa la rotación de los ejes, obtenido al multiplicar la matriz de transformación (matriz de autovectores) por cada componente x, y.

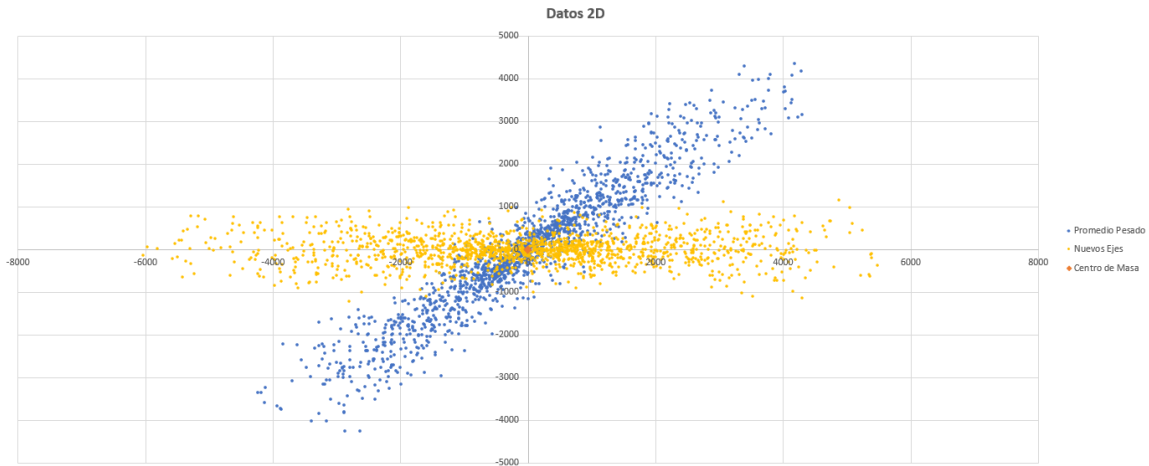


Figura 4: Representación transformaciones

El tensor momento de inercia para el caso 3D es:

$$\begin{bmatrix} 958603863,376532 & 911766544,1164 & -7134226,8564 \\ 911766544,1164 & 963665233,3609 & -1927462,5927 \\ -7134226,8564 & -1927462,5927 & 101844216,7918 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para el caso 3D los autovalores y autovectores son:

$$\begin{bmatrix} 1872927750,0 & 0 & 0 \\ 0 & 49106111,0 & 0 \\ 0 & 0 & 102079453,0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 0,70612535 & 0,70653155 & -0,04690577 \\ 0,70807762 & -0,70422699 & 0,05186931 \\ -0,00361499 & 0,06983916 & 0,99755171 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Los resultados obtenidos para los datos correspondientes al Banco Mundial se muestran a continuación. El cálculo realizado por la operación 'cov()' da como resultado la matriz de covarianza y los resultados se muestran en el cuadro 2.

	<b>Military</b>	<b>Health</b>	<b>Research</b>	<b>Education</b>
<b>Military</b>	0.067496	-0.032281	-0.006362	-0.000677
<b>Health</b>	-0.032281	0.332120	0.021801	0.120600
<b>Research</b>	-0.006362	0.021801	0.002501	0.009748
<b>Education</b>	-0.000677	0.120600	0.009748	0.103029

Los resultados obtenidos para la matriz de correlación son los siguientes (ver cuadro 3).

	<b>Military</b>	<b>Health</b>	<b>Research</b>	<b>Education</b>
<b>Military</b>	1.000000	-0.215604	-0.489671	-0.008114
<b>Health</b>	-0.215604	1.000000	0.756396	0.651958
<b>Research</b>	-0.489671	0.756396	1.000000	0.607257
<b>Education</b>	-0.008114	0.651958	0.607257	1.000000

Los autovalores obtenidos son los siguientes:

0.38825238   0.07193011   0.04429485   0.07406754

Y por su parte los autovectores

0.09408332   -0.85910103   -0.497602   0.07406754  
 -0.9142683   0.11920111   -0.38490038   -0.04190777  
 -0.0630515   0.04657868   0.05581949   0.99535879  
 -0.38895541   -0.49554711   0.77532453   -0.04492904

## 4. Conclusiones

El uso de los autovalores y autovectores, brinda la posibilidad de efectuar una transformación de un conjunto de datos a una base en la cual la dispersión entre estos es mínima y además sin perder información de los mismos. Las medidas de dispersión son importantes porque muestran la variabilidad que encontramos en una determinada muestra o conjunto de datos. Condicionando el error que se puede obtener a la hora de realizar cálculos como la media.