

# Proyecto Conjunto: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica

Anthony Ventosa Lescay

Abner Alexandro Abreu Tamayo

Ignacio Miguel Rodríguez Pacheco

Grupo C212

Tutor(es):

## Resumen

Este trabajo aborda la modelación del movimiento de una persona que desciende en paracaídas, considerando la resistencia del aire como una fuerza proporcional tanto a la velocidad como a su cuadrado, según el régimen de caída. Se establece un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la evolución temporal de la altura y la velocidad, incorporando un cambio en el coeficiente de resistencia al momento de abrir el paracaídas. El estudio incluye la identificación de los parámetros físicos relevantes, el planteamiento por tramos del modelo y la obtención de soluciones analíticas para cada etapa. Además, se analizan sistemas simplificados asociados, como la ecuación  $\dot{z} = \mu - z^2$ , explorando sus puntos de equilibrio, estabilidad y diagrama de bifurcación. Finalmente, se examina un sistema lineal que representa la caída con resistencia proporcional, destacando la existencia de velocidad terminal y el comportamiento asintótico de las trayectorias. El análisis conjunto permite comprender de manera integral la dinámica del descenso y sus implicaciones físicas.

## Abstract

This work models the motion of a parachutist descending under gravity, considering air resistance as a force proportional both to velocity and to its square, depending on the stage of the fall. A system of ordinary differential equations is formulated to describe the time evolution of height and velocity, including a change in the drag coefficient at the instant the parachute opens. The study presents the identification of all relevant physical parameters, the piecewise formulation of the model, and the analytical solution on each interval. Additionally, simplified associated systems are examined, such as the equation  $\dot{z} = \mu - z^2$ , focusing on equilibrium points, stability properties, and the corresponding bifurcation diagram. A linear system representing descent with linear drag is also analyzed, highlighting the existence of a terminal velocity and the asymptotic behavior of trajectories. Altogether, the analysis provides a comprehensive understanding of the dynamics of the fall and its physical implications.

**Palabras Clave:** Modelación matemática, Resistencia del aire, Sistemas dinámicos, Velocidad terminal, Bifurcación.

**Tema:** Tema 14: Resistencia proporcional a la velocidad y a su cuadrado.

## 1. Modelación del Problema

### Resumen

Este trabajo modela el movimiento de una persona que desciende en paracaídas, considerando la resistencia del aire como una fuerza proporcional a la velocidad. La situación física se describe mediante una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden que relaciona la velocidad del cuerpo con el tiempo. El objetivo es representar matemáticamente la caída, identificar los parámetros involucrados y establecer las condiciones iniciales que caracterizan el proceso.

### Contexto físico

Cuando un cuerpo cae bajo la acción de la gravedad, su movimiento está influenciado por dos fuerzas principales: el peso, que actúa hacia abajo, y la resistencia del aire, que se opone al movimiento. Si la resistencia es proporcional a la velocidad, el movimiento se rige por la ecuación:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv, \quad (1)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $k$  el coeficiente de resistencia. Dividiendo entre  $m$  se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = -g - rv, \quad \text{con } r = \frac{k}{m}. \quad (2)$$

## Identificación de parámetros

- $g = 32 \text{ ft/s}^2$ : aceleración de la gravedad en unidades inglesas.
- $r$ : coeficiente de resistencia (1/s), diferente antes y después de abrir el paracaídas.
  - $r_1 = 0.15$ : sin paracaídas.
  - $r_2 = 1.5$ : con paracaídas.
- $y(t)$ : altura (ft).
- $v(t)$ : velocidad vertical (ft/s).
- $t_s = 20 \text{ s}$ : instante en que se abre el paracaídas.
- Condiciones iniciales:  $y(0) = 10000 \text{ ft}$ ,  $v(0) = 0$ .

## Representación del problema como EDO

El sistema completo de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento es:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v(t), \\ \frac{dv}{dt} = -g - r(t)v(t), \end{cases} \quad (3)$$

donde

$$r(t) = \begin{cases} r_1, & 0 \leq t < t_s, \\ r_2, & t \geq t_s. \end{cases} \quad (4)$$

## Solución general por tramos

La solución de la ecuación diferencial se obtiene separando las variables o usando el método del factor integrante. Para cada tramo:

$$v(t) = -\frac{g}{r} + \left(v_0 + \frac{g}{r}\right)e^{-rt}, \quad (5)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{r}t + \left(v_0 + \frac{g}{r}\right)\frac{1 - e^{-rt}}{r}. \quad (6)$$

Dado que  $r$  cambia en  $t = t_s$ , el problema se resuelve en dos etapas:

1. *Caída libre* ( $0 \leq t \leq t_s$ ):  $r = r_1$ .
2. *Descenso con paracaídas* ( $t \geq t_s$ ):  $r = r_2$ , con condiciones iniciales  $y(t_s)$  y  $v(t_s)$  heredadas del primer tramo.

## Interpretación física

La solución muestra que el cuerpo alcanza una velocidad terminal

$$v_T = -\frac{g}{r}, \quad (7)$$

en cada régimen. Cuando el paracaídas se abre, el coeficiente de resistencia aumenta, reduciendo la magnitud de la velocidad terminal y extendiendo el tiempo total de caída. El modelo permite predecir la evolución de la velocidad y la altura con el tiempo, así como estimar el tiempo total de descenso hasta llegar al suelo.

## 2. Análisis teórico (convenio: eje positivo hacia arriba)

### Solución analítica y resultados numéricos

La ecuación de la velocidad en el régimen lineal es

$$v(t) = v_T^{(1)} + (v_0 - v_T^{(1)})e^{-r_1 t}, \quad v_T^{(1)} = -\frac{g}{r_1},$$

y la posición

$$y(t) = y_0 + v_T^{(1)}t + \frac{1}{r_1}(v_0 - v_T^{(1)})(1 - e^{-r_1 t}).$$

Con  $g = 32$ ,  $r_1 = 0.15$ ,  $r_2 = 1.5$ ,  $t_p = 20$ ,  $y_0 = 10000$ ,  $v_0 = 0$  se obtiene:

$$v_T^{(1)} = -\frac{32}{0.15} \approx -213.3333 \text{ ft/s}, \quad v_T^{(2)} = -\frac{32}{1.5} \approx -21.3333 \text{ ft/s}.$$

Evalutando en  $t_p = 20 \text{ s}$ :

$$v(20) \approx -202.712 \text{ ft/s}, \quad y(20) \approx 7084.748 \text{ ft}.$$

Para  $t \geq t_p$  la altura viene dada por

$$y(t) = y(t_p) + v_T^{(2)}(t - t_p) + \frac{1}{r_2}(v(t_p) - v_T^{(2)})(1 - e^{-r_2(t - t_p)}),$$

cuya raíz (impacto) es  $t^* \approx 346.429 \text{ s}$ . La velocidad de impacto es  $v(t^*) \approx -21.33 \text{ ft/s}$ .

### Solución con métodos numéricos

Método de Newton y Bisección:

#### Newton

Se cumplen las hipótesis de convergencia de Newton. La función es continuamente diferenciable en el intervalo  $[20, 400]$ :

$$(I) \quad f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$f(20) \approx 7,085 \text{ ft (positivo)} \quad f(400) \approx -1,187 \text{ ft (negativo)}$$

Por lo tanto:

$$f(20) \cdot f(400) < 0$$

$$(II) \quad f'(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in [a, b]$$

$$f'(t) = v(t) \approx -21.45 \text{ ft/s (velocidad terminal con paracaídas)}$$

La velocidad nunca es cero durante la caída, siempre es negativa.

$$(III) \quad f''(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in [a, b] \text{ o } f''(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in [a, b]$$

$$f''(t) = 273.525 \cdot \exp(-1.5 \cdot (t - 20))$$

$$f''(t) > 0 \quad \text{para todo } t \in [20, 400]$$

La segunda derivada es siempre positiva en el intervalo.

$$(iv) \quad |f(a)/f'(a)| < (b-a) \text{ y } |f(b)/f'(b)| < (b-a)$$

$$\left| \frac{f(20)}{f'(20)} \right| \approx 34.77 < 380$$

$$\left| \frac{f(400)}{f'(400)} \right| \approx 55.36 < 380$$

	Iteración	t.n	F(t.n)	F'(t.n)	t_{n+1}	Error
0	1	20.000000	7.084747e+03	-202.712092	54.949801	34.949801
1	2	54.949801	6.218232e+03	-21.333333	346.429443	291.479642
2	3	346.429443	-4.263256e-13	-21.333333	346.429443	0.000000

Cuadro 1: Iteraciones del método de Newton

$$t_0 = 20.0 \rightarrow t_1 = 54.949801 \quad (\text{error} \approx 34.949801)$$

$$t_1 = 54.949801 \rightarrow t_2 = 346.429443 (\text{error} \approx 291.479642)$$

$$t_2 = 346.429443 \rightarrow t_3 = 346.429443$$

con error 0

## Bisección

El método de Bisección converge en el intervalo [20, 400]:

$$(i) \quad f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$f(20) \approx 7,085 \text{ ft (positivo)}$$

$$f(400) \approx -1,187 \text{ ft (negativo)}$$

Por lo tanto:

$$f(20) \cdot f(400) < 0$$

	Iteración	a	b	m	F(m)	Error
0	1	20.000000	400.000000	210.000000	2.910495e+03	190.000000
1	2	210.000000	400.000000	305.000000	8.838281e+02	95.000000
2	3	305.000000	400.000000	352.500000	-1.295052e+02	47.500000
3	4	305.000000	352.500000	328.750000	3.771614e+02	23.750000
4	5	328.750000	352.500000	340.625000	1.238281e+02	11.875000
5	6	340.625000	352.500000	346.562500	-2.838559e+00	5.937500
6	7	340.625000	346.562500	343.593750	6.049477e+01	2.968750
7	8	343.593750	346.562500	345.078125	2.882811e+01	1.484375
8	9	345.078125	346.562500	345.820312	1.299477e+01	0.742188
9	10	345.820312	346.562500	346.191406	5.078108e+00	0.371094
10	11	346.191406	346.562500	346.376953	1.119775e+00	0.185547
11	12	346.376953	346.562500	346.469727	-8.593920e-01	0.092773
12	13	346.376953	346.469727	346.423340	1.301914e-01	0.046387
13	14	346.423340	346.469727	346.446533	-3.646003e-01	0.023193
14	15	346.423340	346.446533	346.434937	-1.172045e-01	0.011597
15	16	346.423340	346.434937	346.429138	6.493461e-03	0.005798
16	17	346.429138	346.434937	346.432037	-5.535550e-02	0.002899
17	18	346.429138	346.432037	346.430588	-2.443102e-02	0.001450
18	19	346.429138	346.430588	346.429863	-8.968778e-03	0.000725
19	20	346.429138	346.429863	346.429501	-1.237658e-03	0.000362
20	21	346.429138	346.429501	346.429319	2.627901e-03	0.000181
21	22	346.429319	346.429501	346.429410	6.951215e-04	0.000091
22	23	346.429410	346.429501	346.429455	-2.712685e-04	0.000045
23	24	346.429410	346.429455	346.429433	2.119265e-04	0.000023
24	25	346.429433	346.429455	346.429444	-2.967097e-05	0.000011
25	26	346.429433	346.429444	346.429438	9.112778e-05	0.000006
26	27	346.429438	346.429444	346.429441	3.072841e-05	0.000003
27	28	346.429441	346.429444	346.429443	5.287198e-07	0.000001

Cuadro 2: Iteraciones del método de bisección

La columna *Error* es la semi-longitud del intervalo

$$\frac{b-a}{2}.$$

Se observa que ese «Error» baja hasta

$$1.0 \times 10^{-6}$$

en la fila marcada como iteración 28 (aproximadamente). Antes, en la iteración 27 era

$$2.0 \times 10^{-6}.$$

Por tanto, con la tolerancia usada en la ejecución (aproximadamente  $10^{-6}$ ) la bisección cumple el criterio en la iteración 28.

## Comparación

Newton tiene convergencia cuadrática cerca de la raíz, por eso alcanza precisión extrema en pocas iteraciones. Bisección converge linealmente, por eso necesita muchas más iteraciones para la misma tolerancia. En la comparación de métodos numéricos para determinar el instante de impacto, se observó un comportamiento marcadamente diferente entre el método de Newton y el método de bisección. Con la tolerancia utilizada ( $10^{-6}$ ), el método de Newton alcanzó la convergencia en 3 iteraciones, gracias a su naturaleza de convergencia cuadrática, que permite reducir drásticamente el error una vez que el punto inicial se encuentra en la vecindad de la raíz. En contraste, el método de bisección — caracterizado por su convergencia lineal — requirió 28 iteraciones para lograr un nivel de precisión comparable. Este resultado refleja la diferencia fundamental entre ambos enfoques: Newton es extremadamente eficiente cuando la función es suave y se dispone de una buena primera aproximación, mientras que la bisección ofrece robustez pero a costa de una velocidad de convergencia considerablemente menor.

## Complejidad Computacional de los Métodos Numéricos

### Método de Newton:

- Convergencia cuadrática: el error se reduce aproximadamente al cuadrado en cada iteración.

- Número de iteraciones para alcanzar una precisión  $\varepsilon$  es

$$O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Costo por iteración depende de la evaluación de la función y su derivada, denotado como  $O(C_f + C_{f'})$ .

- Por lo tanto, la complejidad total es:

$$O\left((C_f + C_{f'}) \cdot \log \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

### Método de Bisección:

- Convergencia lineal: el error se reduce a la mitad en cada iteración.
- Número de iteraciones para alcanzar una precisión  $\varepsilon$  es

$$O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Costo por iteración es solo la evaluación de la función, denotado como  $O(C_f)$ .
- Por lo tanto, la complejidad total es:

$$O\left(C_f \cdot \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

### Planteamiento general

Tomamos como variable de estado la velocidad vertical  $v(t)$  (positiva hacia arriba) y la altura  $y(t)$ . El sistema es

$$\begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = f(t, v), \end{cases} \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0,$$

donde el campo  $f$  viene dado por tramos según el instante  $t_p$  de apertura del paracaídas:

$$f(t, v) = \begin{cases} -g - r_1 v, & 0 \leq t < t_p, \\ -g - r_2 v|v|, & t \geq t_p, \end{cases}$$

con  $g > 0$  y  $r_1, r_2 > 0$ . (Obs.: la notación  $r_i = k_i/m$  se comprende como coeficiente de amortiguamiento por unidad de masa.)

### Existencia y unicidad

Las funciones involucradas son continuas en  $v$  y, sobre intervalos acotados, admiten derivadas finitas con respecto a  $v$ . Además, la resistencia actúa siempre en sentido opuesto al movimiento, lo que impide crecimientos explosivos de la velocidad. Por tanto, para cualquier condición inicial dadas, la solución por tramos existe, es única y puede concatenarse en  $t = t_p$  imponiendo continuidad del estado:

$$v(t_p^+) = v(t_p^-), \quad y(t_p^+) = y(t_p^-).$$

### Velocidades terminales y estabilidad local

En cada tramo existe un valor de  $v$  que anula la aceleración (velocidad terminal):

$$\text{Tramo lineal: } -g - r_1 v = 0 \implies v_T^{(1)} = -\frac{g}{r_1}.$$

$$\text{Tramo cuadrático (considerando caída con } v < 0): \\ -g - r_2 v|v| = 0.$$

Para  $v < 0$  se tiene  $v|v| = -v^2$ , de modo que la ecuación se reduce a  $-g + r_2 v^2 = 0$ , y la velocidad terminal física (negativa) es

$$v_T^{(2)} = -\sqrt{\frac{g}{r_2}}.$$

Para estudiar la estabilidad local, analizamos el signo de la derivada de  $f$  respecto de  $v$ :

$$\partial_v f(t, v) = \begin{cases} -r_1, & \text{(lineal),} \\ -2r_2 v, & \text{(cuadrático).} \end{cases}$$

Evalando en las velocidades terminales (recordando  $v_T^{(i)} < 0$ ):

$$\partial_v f|_{v_T^{(1)}} = -r_1 < 0,$$

$$\partial_v f|_{v_T^{(2)}} = -2r_2 v_T^{(2)} = -2r_2 \left(-\sqrt{g/r_2}\right) = -2\sqrt{gr_2} < 0.$$

Ambas derivadas son negativas, por lo que los puntos  $v_T^{(1)}$  y  $v_T^{(2)}$  son *linealmente asintóticamente estables*: las trayectorias en  $v$  se acercan a dichos valores cuando el tiempo avanza en el tramo correspondiente.

### Comportamiento cualitativo e interpretación de signos

Dado que  $v_T^{(i)} < 0$ , la dinámica empuja la velocidad hacia valores más negativos si está por encima del terminal (más cerca de cero), o hacia valores menos negativos si está por debajo (más lejos de cero). Formalmente:

- Si  $v > v_T$  (es decir,  $v$  menos negativo que  $v_T$ ), entonces  $\dot{v} < 0$  y  $v$  disminuye hasta acercarse a  $v_T$ .
- Si  $v < v_T$  (más negativo que  $v_T$ ), entonces  $\dot{v} > 0$  y  $v$  aumenta (se vuelve menos negativo) hasta acercarse a  $v_T$ .

Así, el signo negativo de  $v_T$  refleja que la caída ocurre en dirección negativa del eje elegido.

### Isoclinas e información cualitativa

Las *isoclinas* se definen fijando valores constantes de  $\dot{v}$ . La *isoclina nula* (línea donde  $\dot{v} = 0$ ) es especialmente útil:

$$\dot{v} = 0 \implies \begin{cases} v = -\frac{g}{r_1}, & 0 \leq t < t_p, \\ v = -\sqrt{\frac{g}{r_2}}, & t \geq t_p. \end{cases}$$

En el plano  $(t, v)$  estas son líneas horizontales (con valores negativos) que separan regiones de  $\dot{v} > 0$  y  $\dot{v} < 0$ . El campo de direcciones muestra que las flechas apuntan hacia la respectiva línea nula en cada tramo: antes de  $t_p$  las trayectorias se acercan a  $v_T^{(1)}$ , y tras  $t_p$  al nuevo valor  $v_T^{(2)}$ . Dado que  $r_2 \gg r_1$  en el caso físico de apertura del paracaídas, se cumple  $|v_T^{(2)}| \ll |v_T^{(1)}|$  y la transición en  $t_p$  provoca una desaceleración rápida hacia el nuevo equilibrio negativo.

### Efecto del cambio de régimen en $t_p$

El cambio en  $t_p$  es puramente temporal (no depende del estado), por lo que la solución se obtiene concatenando la solución única del primer tramo con la del segundo tramo usando las condiciones de continuidad en  $t_p$ . No aparecen discontinuidades en  $v$  ni ambigüedades tipo sistemas con frontera dependiente del estado.

### Condicionamiento y robustez

La atracción asintótica hacia los equilibrios implica que pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales o en parámetros producen diferencias que se atenúan con el tiempo: el problema es cualitativamente bien condicionado. Esto facilita tanto la interpretación física como la aproximación numérica de la solución.

### Conclusión

Las ecuaciones diferenciales, las velocidades terminales y la interpretación geométrica mediante isoclinas concuerdan entre sí y explican por qué la apertura del paracaídas produce una rápida transición hacia una velocidad terminal negativa de menor magnitud absoluta.

## 3. Análisis del Sistema: Parte B

### 1. Puntos de Equilibrio en función de $\mu$

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2.$$

Los puntos de equilibrio satisfacen:

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \mu - z^2 = 0.$$

Por tanto:

$$z^2 = \mu.$$

- Si  $\mu > 0$ : existen dos puntos de equilibrio:

$$z = \sqrt{\mu}, \quad z = -\sqrt{\mu}.$$

- Si  $\mu = 0$ : existe un único punto de equilibrio:

$$z = 0.$$

- Si  $\mu < 0$ : no existen puntos de equilibrio reales.

### 2. Clasificación de Estabilidad

Para estudiar la estabilidad, derivamos el campo vectorial:

$$\frac{d}{dz}(\mu - z^2) = -2z.$$

Evaluamos en los puntos de equilibrio:

- Para  $\mu > 0$ :

- En  $z = \sqrt{\mu}$ :

$$-2\sqrt{\mu} < 0 \Rightarrow \text{Punto estable.}$$

- En  $z = -\sqrt{\mu}$ :

$$2\sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow \text{Punto inestable.}$$

- Para  $\mu = 0$ :

- En  $z = 0$ :

$$0 \Rightarrow \text{Caso crítico.}$$

### 3. Diagrama de Bifurcación

El diagrama de bifurcación se describe mediante:

- Eje horizontal: parámetro  $\mu$ .
- Eje vertical: variable  $z$ .

Las curvas de equilibrio son:

$$z = \sqrt{\mu} \quad (\text{estable, línea continua}),$$

$$z = -\sqrt{\mu} \quad (\text{inestable, línea discontinua}).$$

El punto de bifurcación ocurre en:

$$\mu = 0,$$

y corresponde a una **bifurcación tipo nodo-silla**.

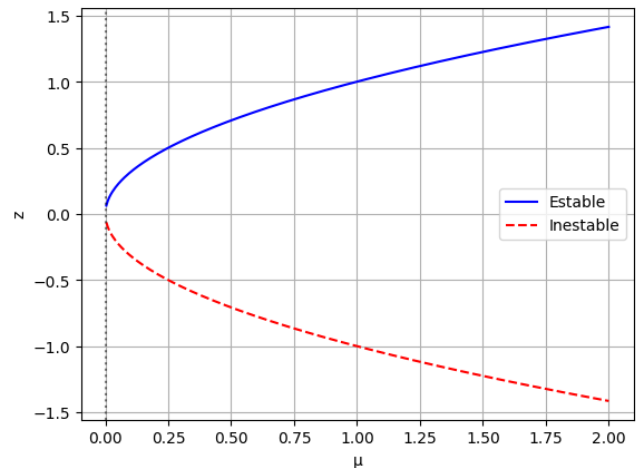


Figura 1: Diagrama de Bifurcación.

### 4. Interpretación Física

En el contexto de movimiento con resistencia no lineal:

- $\mu > 0$ : el sistema alcanza una **velocidad terminal estable**:

$$z = \sqrt{\mu}.$$

- $\mu = 0$ : se encuentra el umbral o transición crítica entre regímenes dinámicos.

- $\mu < 0$ : no existe velocidad terminal; el comportamiento dinámico es no acotado.

La bifurcación en  $\mu = 0$  marca el punto donde desaparece la posibilidad de equilibrio, separando comportamientos físicos cualitativamente distintos.

#### 4.1 Comportamiento fuera del intervalo de estabilidad

Para  $\mu > 0$ , si la condición inicial  $z_0$  se encuentra por debajo del punto crítico inestable  $z = -\sqrt{\mu}$ , el campo vectorial

$$\dot{z} = \mu - z^2$$

toma valores negativos, lo que implica que  $z(t)$  decrece indefinidamente. En este régimen, la solución se aleja del equilibrio y diverge hacia  $-\infty$  en un tiempo finito. Este fenómeno, conocido como explosión en tiempo finito, indica que el modelo pierde validez física fuera del dominio de atracción del equilibrio estable. Por tanto, es esencial restringir el análisis a condiciones iniciales dentro del intervalo  $(-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu})$ , donde el comportamiento dinámico es acotado y físicamente interpretable.

### 4. Análisis del Sistema: Parte C

#### Sistema de Ecuaciones

El sistema considerado es:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -32 - 0.5v.\end{aligned}$$

#### 1. Cálculo de Puntos Críticos

Los puntos críticos satisfacen:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0, \\ \frac{dv}{dt} = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} v = 0, \\ -32 - 0.5v = 0. \end{cases}$$

Resolviendo:

- De la primera ecuación:  $v = 0$ .
- Sustituyendo en la segunda:

$$-32 - 0.5(0) = -32 \neq 0.$$

**Conclusión:** El sistema presenta una contradicción ( $-32 = 0$ ), por tanto:

NO EXISTEN PUNTOS CRÍTICOS

#### 2. Análisis del Comportamiento

La velocidad terminal se obtiene imponiendo:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow -32 - 0.5v = 0 \Rightarrow v = -64 \text{ ft/s.}$$

Las líneas nulas son:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{cuando} \quad v = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{cuando} \quad v = -64.$$

### 3. Interpretación Física

- $\frac{dy}{dt} = v$ : define la velocidad vertical.
- $\frac{dv}{dt} = -32 - 0.5v$ :
  - $-32$ : aceleración gravitacional constante.
  - $-0.5v$ : resistencia lineal proporcional a la velocidad.

#### Comportamiento del sistema:

- No existe estado de equilibrio (ningún punto crítico real).
- La velocidad terminal es:

$$v = -64 \text{ ft/s.}$$

- Todas las trayectorias del sistema satisfacen:

$$v(t) \rightarrow -64 \quad (\text{convergencia asintótica}).$$

#### Diagrama de Fase

El diagrama de fase se basa en:

- La línea nula horizontal  $v = -64$  (velocidad terminal).
- La línea nula vertical  $v = 0$ .

Las trayectorias se desplazan verticalmente hacia abajo hasta aproximarse asintóticamente a  $v = -64$ .

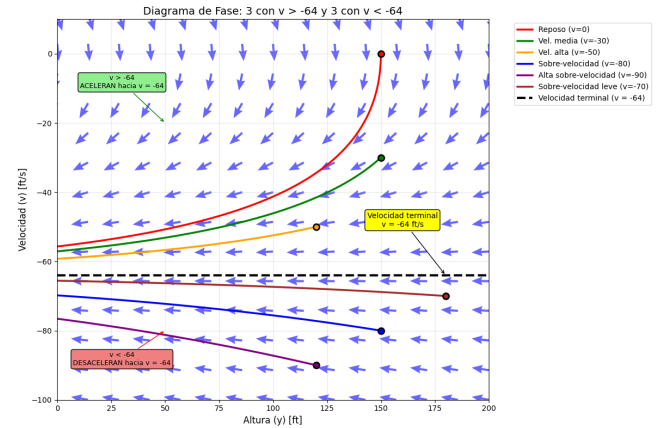


Figura 2: Diagrama de Fase.

### 5. Apéndice

Para la realización de este trabajo se emplearon scripts y programas (escritos fundamentalmente en Python) que pueden encontrarse en el [Repositorio en GitHub](#). Adicionalmente se desarrolló un bot de Telegram que facilita la visualización de los resultados para diferentes parámetros, el código del mismo se encuentra en el mismo repositorio. Usuario del bot: [@EDOMNProjectbot](#). Para el uso del bot ejecutar el archivo TelegramBot.py (debe tener instaladas las librerías: telebot, torch, matplotlib, asyncio, pandas, numpy, aiofiles). Para más información ejecutar el comando /help.