Tema 14: Resistencia proporcional a la velocidad y a su cuadrado

Anthony Ventosa Lescay

Abner Alexandro Abreu Tamayo

Ignacio Miguel Rodríguez Pacheco

Grupo C212

Tutor(es):

Resumen

El resumen en español debe constar de 100 a 200 palabras y presentar de forma clara y concisa el contenido fundamental del artículo.

Abstract

The English abstract must have have 100 to 200 words, and present the essentials of the article content in a clear and concise form.

Palabras Clave: Separadas, Por, Comas.
Tema: Tema, Subtema.

1. Modelación del Problema

Resumen

Este trabajo modela el movimiento de una persona que desciende en paracaídas, considerando la resistencia del aire como una fuerza proporcional a la velocidad. La situación física se describe mediante una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden que relaciona la velocidad del cuerpo con el tiempo. El objetivo es representar matemáticamente la caída, identificar los parámetros involucrados y establecer las condiciones iniciales que caracterizan el proceso.

Contexto físico

Cuando un cuerpo cae bajo la acción de la gravedad, su movimiento está influenciado por dos fuerzas principales: el peso, que actúa hacia abajo, y la resistencia del aire, que se opone al movimiento. Si la resistencia es proporcional a la velocidad, el movimiento se rige por la ecuación:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv, \tag{1}$$

donde m es la masa del cuerpo, g la aceleración de la gravedad y k el coeficiente de resistencia. Dividiendo entre m se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = -g - rv, \quad \text{con } r = \frac{k}{m}. \tag{2}$$

Identificación de parámetros

- $g = 32\,ft/s^2$: aceleración de la gravedad en unidades inglesas.
- r: coeficiente de resistencia (1/s), diferente antes y después de abrir el paracaídas.
  - $r_1 = 0.15$: sin paracaídas.
  - $r_2 = 1.5$: con paracaídas.
- $y(t)$: altura (ft).
- $v(t)$: velocidad vertical (ft/s).
- $t_s = 20\,s$: instante en que se abre el paracaídas.
- Condiciones iniciales: $y(0) = 10000\,ft$, $v(0) = 0$.

Representación del problema como EDO

El sistema completo de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento es:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v(t), \\ \dfrac{dv}{dt} = -g - r(t)v(t), \end{cases} \tag{3}$$

donde

$$r(t) = \begin{cases} r_1, & 0 \le t < t_s, \\ r_2, & t \ge t_s. \end{cases} \tag{4}$$

Solución general por tramos

La solución de la ecuación diferencial se obtiene separando las variables o usando el método del factor integrante. Para cada tramo:

$$v(t) = -\frac{g}{r} + \left(v_0 + \frac{g}{r}\right) e^{-rt}, \tag{5}$$

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{r}t + \left(v_0 + \frac{g}{r}\right) \frac{1 - e^{-rt}}{r}. \tag{6}$$

Dado que r cambia en $t = t_s$, el problema se resuelve en dos etapas:

1. *Caída libre* $(0 \leq t \leq t_s)$: $r = r_1$.
2. *Descenso con paracaídas* $(t \geq t_s)$: $r = r_2$, con condiciones iniciales $y(t_s)$ y $v(t_s)$ heredadas del primer tramo.

Interpretación física

La solución muestra que el cuerpo alcanza una velocidad terminal

$$v_T = -\frac{g}{r}, \tag{7}$$

en cada régimen. Cuando el paracaídas se abre, el coeficiente de resistencia aumenta, reduciendo la magnitud de la velocidad terminal y extendiendo el tiempo total de caída. El modelo permite predecir la evolución de la velocidad y la altura con el tiempo, así como estimar el tiempo total de descenso hasta llegar al suelo.

2. Análisis del Sistema: Parte B

1. Puntos de Equilibrio en función de μ

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2.$$

Los puntos de equilibrio satisfacen:

$$\frac{dz}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu - z^2 = 0.$$

Por tanto:

$$z^2 = \mu.$$

- **Si $\mu > 0$:** existen dos puntos de equilibrio:

$$z = \sqrt{\mu}, \qquad z = -\sqrt{\mu}.$$

- **Si $\mu = 0$:** existe un único punto de equilibrio:

$$z = 0.$$

- **Si $\mu < 0$:** no existen puntos de equilibrio reales.

2. Clasificación de Estabilidad

Para estudiar la estabilidad, derivamos el campo vectorial:

$$\frac{d}{dz}(\mu - z^2) = -2z.$$

Evaluamos en los puntos de equilibrio:

- **Para $\mu > 0$:**
  - En $z = \sqrt{\mu}$:

$$-2\sqrt{\mu} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Punto estable.}$$

  - En $z = -\sqrt{\mu}$:

$$2\sqrt{\mu} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Punto inestable.}$$

- **Para $\mu = 0$:**
  - En $z = 0$:

$$0 \quad \Rightarrow \quad \text{Caso crítico.}$$

3. Diagrama de Bifurcación

El diagrama de bifurcación se describe mediante:

- Eje horizontal: parámetro μ.
- Eje vertical: variable z.

Las curvas de equilibrio son:

$$z = \sqrt{\mu} \quad \text{(estable, línea continua)},$$

$$z = -\sqrt{\mu} \quad \text{(inestable, línea discontinua)}.$$

El punto de bifurcación ocurre en:

$$\mu = 0,$$

y corresponde a una **bifurcación tipo nodo-silla**.

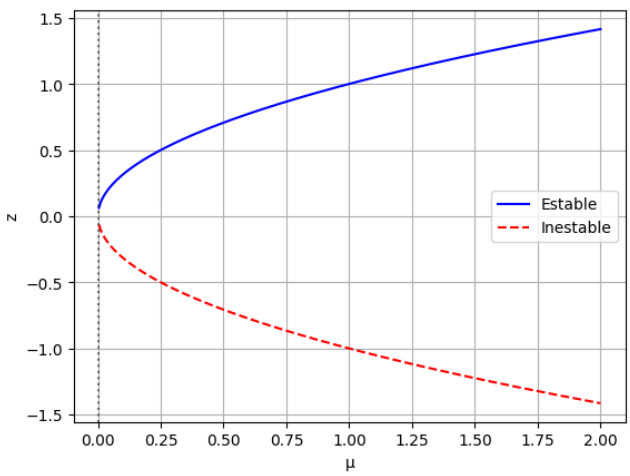

Figura 1: Diagrama de Bifurcación.

4. Interpretación Física

En el contexto de movimiento con resistencia no lineal:

- **$\mu > 0$:** el sistema alcanza una **velocidad terminal estable**:

$$z = \sqrt{\mu}.$$

- **$\mu = 0$:** se encuentra el umbral o transición crítica entre regímenes dinámicos.

- **$\mu < 0$:** no existe velocidad terminal; el comportamiento dinámico es no acotado.

La bifurcación en $\mu = 0$ marca el punto donde desaparece la posibilidad de equilibrio, separando comportamientos físicos cualitativamente distintos.