

Proyecto Conjunto: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica

Anthony Ventosa Lescay

Abner Alejandro Abreu Tamayo

Ignacio Miguel Rodríguez Pacheco

Grupo C212

Tutor(es):

Resumen

Este trabajo aborda la modelación del movimiento de una persona que desciende en paracaídas, considerando la resistencia del aire como una fuerza proporcional tanto a la velocidad como a su cuadrado, según el régimen de caída. Se establece un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la evolución temporal de la altura y la velocidad, incorporando un cambio en el coeficiente de resistencia al momento de abrir el paracaídas. El estudio incluye la identificación de los parámetros físicos relevantes, el planteamiento por tramos del modelo y la obtención de soluciones analíticas para cada etapa. Además, se analizan sistemas simplificados asociados, como la ecuación $\dot{z} = \mu - z^2$, explorando sus puntos de equilibrio, estabilidad y diagrama de bifurcación. Finalmente, se examina un sistema lineal que representa la caída con resistencia proporcional, destacando la existencia de velocidad terminal y el comportamiento asintótico de las trayectorias. El análisis conjunto permite comprender de manera integral la dinámica del descenso y sus implicaciones físicas.

Abstract

This work models the motion of a parachutist descending under gravity, considering air resistance as a force proportional both to velocity and to its square, depending on the stage of the fall. A system of ordinary differential equations is formulated to describe the time evolution of height and velocity, including a change in the drag coefficient at the instant the parachute opens. The study presents the identification of all relevant physical parameters, the piecewise formulation of the model, and the analytical solution on each interval. Additionally, simplified associated systems are examined, such as the equation $\dot{z} = \mu - z^2$, focusing on equilibrium points, stability properties, and the corresponding bifurcation diagram. A linear system representing descent with linear drag is also analyzed, highlighting the existence of a terminal velocity and the asymptotic behavior of trajectories. Altogether, the analysis provides a comprehensive understanding of the dynamics of the fall and its physical implications.

Palabras Clave: Modelación matemática, Resistencia del aire, Sistemas dinámicos, Velocidad terminal, Bifurcación.

Tema: Tema 14: Resistencia proporcional a la velocidad y a su cuadrado.

1. Modelación del Problema

Resumen

Este trabajo modela el movimiento de una persona que desciende en paracaídas, considerando la resistencia del aire como una fuerza proporcional a la velocidad. La situación física se describe mediante una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden que relaciona la velocidad del cuerpo con el tiempo. El objetivo es representar matemáticamente la caída, identificar los parámetros involucrados y establecer las condiciones iniciales que caracterizan el proceso.

Contexto físico

Cuando un cuerpo cae bajo la acción de la gravedad, su movimiento está influenciado por dos fuerzas principales: el peso, que actúa hacia abajo, y la resistencia del aire, que se opone al movimiento. Si la resistencia es proporcional a la velocidad, el movimiento se rige por la ecuación:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv, \quad (1)$$

donde m es la masa del cuerpo, g la aceleración de la gravedad y k el coeficiente de resistencia. Dividiendo entre m se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = -g - rv, \quad \text{con } r = \frac{k}{m}. \quad (2)$$

Identificación de parámetros

- $g = 32 \text{ ft/s}^2$: aceleración de la gravedad en unidades inglesas.
- r : coeficiente de resistencia ($1/\text{s}$), diferente antes y después de abrir el paracaídas.
 - $r_1 = 0.15$: sin paracaídas.
 - $r_2 = 1.5$: con paracaídas.
- $y(t)$: altura (ft).
- $v(t)$: velocidad vertical (ft/s).
- $t_s = 20 \text{ s}$: instante en que se abre el paracaídas.
- Condiciones iniciales: $y(0) = 10000 \text{ ft}$, $v(0) = 0$.

Representación del problema como EDO

El sistema completo de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento es:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v(t), \\ \frac{dv}{dt} = -g - r(t)v(t), \end{cases} \quad (3)$$

donde

$$r(t) = \begin{cases} r_1, & 0 \leq t < t_s, \\ r_2, & t \geq t_s. \end{cases} \quad (4)$$

Solución general por tramos

La solución de la ecuación diferencial se obtiene separando las variables o usando el método del factor integrante. Para cada tramo:

$$v(t) = -\frac{g}{r} + \left(v_0 + \frac{g}{r}\right)e^{-rt}, \quad (5)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{r}t + \left(v_0 + \frac{g}{r}\right)\frac{1 - e^{-rt}}{r}. \quad (6)$$

Dado que r cambia en $t = t_s$, el problema se resuelve en dos etapas:

1. *Caída libre* ($0 \leq t \leq t_s$): $r = r_1$.
2. *Descenso con paracaídas* ($t \geq t_s$): $r = r_2$, con condiciones iniciales $y(t_s)$ y $v(t_s)$ heredadas del primer tramo.

Interpretación física

La solución muestra que el cuerpo alcanza una velocidad terminal

$$v_T = -\frac{g}{r}, \quad (7)$$

en cada régimen. Cuando el paracaídas se abre, el coeficiente de resistencia aumenta, reduciendo la magnitud de la velocidad terminal y extendiendo el tiempo total de caída. El modelo permite predecir la evolución de la velocidad y la altura con el tiempo, así como estimar el tiempo total de descenso hasta llegar al suelo.

2. Análisis teórico (convenio: eje positivo hacia arriba)

Solución analítica y resultados numéricos

La ecuación de la velocidad en el régimen lineal es

$$v(t) = v_T^{(1)} + (v_0 - v_T^{(1)})e^{-r_1 t}, \quad v_T^{(1)} = -\frac{g}{r_1},$$

y la posición

$$y(t) = y_0 + v_T^{(1)}t + \frac{1}{r_1}(v_0 - v_T^{(1)})(1 - e^{-r_1 t}).$$

Con $g = 32$, $r_1 = 0.15$, $r_2 = 1.5$, $t_p = 20$, $y_0 = 10000$, $v_0 = 0$ se obtiene:

$$v_T^{(1)} = -\frac{32}{0.15} \approx -213.3333 \text{ ft/s}, \quad v_T^{(2)} = -\frac{32}{1.5} \approx -21.3333 \text{ ft/s}.$$

Evaluando en $t_p = 20$ s:

$$v(20) \approx -202.712 \text{ ft/s}, \quad y(20) \approx 7083.748 \text{ ft}.$$

Para $t \geq t_p$ la altura viene dada por

$$y(t) = y(t_p) + v_T^{(2)}(t - t_p) + \frac{1}{r_2}(v(t_p) - v_T^{(2)})(1 - e^{-r_2(t - t_p)}),$$

cuya raíz (impacto) es $t^* \approx 346.383$ s. La velocidad de impacto es $v(t^*) \approx -21.33$ ft/s.

Solución con métodos numéricos

Método de Newton y Bisección:

Newton

Se cumplen las hipótesis de convergencia de Newton. La función es continuamente diferenciable en el intervalo $[20, 400]$:

$$(I) \quad f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$f(20) \approx 7,085 \text{ ft (positivo)} \quad f(400) \approx -1,187 \text{ ft (negativo)}$$

Por lo tanto:

$$f(20) \cdot f(400) < 0$$

$$(II) \quad f'(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in [a, b]$$

$$f'(t) = v(t) \approx -21.45 \text{ ft/s (velocidad terminal con paracaídas)}$$

La velocidad nunca es cero durante la caída, siempre es negativa.

$$(III) \quad f''(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in [a, b] \text{ o } f''(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in [a, b]$$

$$f''(t) = 273.525 \cdot \exp(-1.5 \cdot (t - 20))$$

$$f''(t) > 0 \quad \text{para todo } t \in [20, 400]$$

La segunda derivada es siempre positiva en el intervalo.

(iv) $|f(a)/f'(a)| < (b - a)$ y $|f(b)/f'(b)| < (b - a)$

$$\left| \frac{f(20)}{f'(20)} \right| \approx 34.77 < 380$$

$$\left| \frac{f(400)}{f'(400)} \right| \approx 55.36 < 380$$

Iteración	t_n	F(t_n)	F'(t_n)	t_{\{n+1\}}	Error
0	1	20.000000	7.068896e+03	-203.814339	54.683014
1	2	54.683014	6.203391e+03	-21.449333	343.894399
2	3	343.894399	7.958079e-13	-21.449333	343.894399

Cuadro 1: Iteraciones del método de Newton

$$t_0 = 20.0 \rightarrow t_1 = 54.683014 \quad (\text{error} \approx 34.683)$$

$$t_1 = 54.683014 \rightarrow t_2 = 343.894399 \quad (\text{error} \approx 289.2114)$$

$$t_2 = 343.894399 \rightarrow t_3 = 343.894399$$

con

$$F(t_2) = 7.958 \times 10^{-13}$$

y error

$$5.68 \times 10^{-14}.$$

Aquí, el criterio natural es la norma del residuo $|F(t_n)|$ o el cambio $|t_{n+1} - t_n|$. En la iteración 3 ya tienes

$$|F| \approx 8 \times 10^{-13}$$

y error

$$\approx 6 \times 10^{-14},$$

es decir, prácticamente exacto.

Bisección

El método de Bisección converge en el intervalo $[20, 400]$:

$$(I) \quad f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$f(20) \approx 7,085 \text{ ft (positivo)}$$

$$f(400) \approx -1,187 \text{ ft (negativo)}$$

Por lo tanto:

$$f(20) \cdot f(400) < 0$$

	Iteración	a	b	m	F(m)	Error
0	1	20.000000	400.000000	210.000000	2.871946e+03	190.000000
1	2	210.000000	400.000000	305.000000	8.342589e+02	95.000000
2	3	305.000000	400.000000	352.500000	-1.845844e+02	47.500000
3	4	305.000000	352.500000	328.750000	3.248373e+02	23.750000
4	5	328.750000	352.500000	340.625000	7.012642e+01	11.875000
5	6	340.625000	352.500000	346.562500	-5.722899e+01	5.937500
6	7	340.625000	346.562500	343.593750	6.448715e+00	2.968750
7	8	343.593750	346.562500	345.078125	-2.539014e+01	1.484375
8	9	343.593750	345.078125	344.335938	-9.470712e+00	0.742188
9	10	343.593750	344.335938	343.964844	-1.510998e+00	0.371094
10	11	343.593750	343.964844	343.779297	2.468858e+00	0.185547
11	12	343.779297	343.964844	343.872070	4.789299e-01	0.092773
12	13	343.872070	343.964844	343.918457	-5.160343e-01	0.046387
13	14	343.872070	343.918457	343.895264	-1.855220e-02	0.023193
14	15	343.872070	343.895264	343.883667	2.301888e-01	0.011597
15	16	343.883667	343.895264	343.889465	1.058183e-01	0.005798
16	17	343.889465	343.895264	343.892365	4.363306e-02	0.002899
17	18	343.892365	343.895264	343.893814	1.254043e-02	0.001450
18	19	343.893814	343.895264	343.894539	-3.005888e-03	0.000725
19	20	343.893814	343.894539	343.894176	4.767270e-03	0.000362
20	21	343.894176	343.894539	343.894358	8.806906e-04	0.000181
21	22	343.894358	343.894539	343.894448	-1.062599e-03	0.000091
22	23	343.894358	343.894448	343.894403	-9.095408e-05	0.000045
23	24	343.894358	343.894403	343.894380	3.948683e-04	0.000023
24	25	343.894380	343.894403	343.894392	1.519571e-04	0.000011
25	26	343.894392	343.894403	343.894397	3.050151e-05	0.000006
26	27	343.894397	343.894403	343.894400	-3.022629e-05	0.000003
27	28	343.894397	343.894400	343.894399	1.376083e-07	0.000001

Cuadro 2: Iteraciones del método de bisección

La columna *Error* es la semi-longitud del intervalo

$$\frac{b-a}{2}.$$

Se observa que ese «Error» baja hasta

$$1.0 \times 10^{-6}$$

en la fila marcada como iteración 28 (aproximadamente). Antes, en la iteración 27 era

$$2.0 \times 10^{-6}.$$

Por tanto, con la tolerancia usada en la ejecución (aproximadamente 10^{-6}) la bisección cumple el criterio en la iteración 28.

Comparaci'on

Newton tiene convergencia cuadrática cerca de la raíz, por eso alcanza precisión extrema en pocas iteraciones. Bisección converge linealmente, por eso necesita muchas más iteraciones para la misma tolerancia. En la comparación de métodos numéricos para determinar el instante de impacto, se observó un comportamiento marcadamente diferente entre el método de Newton y el método de bisección. Con la tolerancia utilizada (10^{-6}), el método de Newton alcanzó la convergencia en 3 iteraciones, gracias a su naturaleza de convergencia cuadrática, que permite reducir drásticamente el error una vez que el punto inicial se encuentra en la vecindad de la raíz. En contraste, el método de bisección — caracterizado por su convergencia lineal — requirió 28 iteraciones para lograr un nivel de precisión comparable. Este resultado refleja la diferencia fundamental entre ambos enfoques: Newton es extremadamente eficiente cuando la función es suave y se dispone de una buena primera aproximación, mientras que la bisección ofrece robustez pero a costa de una velocidad de convergencia considerablemente menor.

Complejidad Computacional de los Métodos Numéricos

Método de Newton:

- Convergencia cuadrática: el error se reduce aproximadamente al cuadrado en cada iteración.
- Número de iteraciones para alcanzar una precisión ε es

$$O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Costo por iteración depende de la evaluación de la función y su derivada, denotado como $O(C_f + C_{f'})$.
- Por lo tanto, la complejidad total es:

$$O\left((C_f + C_{f'}) \cdot \log \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Método de Bisección:

- Convergencia lineal: el error se reduce a la mitad en cada iteración.
- Número de iteraciones para alcanzar una precisión ε es

$$O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Costo por iteración es solo la evaluación de la función, denotado como $O(C_f)$.
- Por lo tanto, la complejidad total es:

$$O\left(C_f \cdot \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Planteamiento general

Tomamos como variable de estado la velocidad vertical $v(t)$ (positiva hacia arriba) y la altura $y(t)$. El sistema es

$$\begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = f(t, v), \end{cases} \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0,$$

donde el campo f viene dado por tramos según el instante t_p de apertura del paracaídas:

$$f(t, v) = \begin{cases} -g - r_1 v, & 0 \leq t < t_p, \\ -g - r_2 v|v|, & t \geq t_p, \end{cases}$$

con $g > 0$ y $r_1, r_2 > 0$. (Obs.: la notación $r_i = k_i/m$ se comprende como coeficiente de amortiguamiento por unidad de masa.)

Existencia y unicidad

Las funciones involucradas son continuas en v y, sobre intervalos acotados, admiten derivadas finitas con respecto a v . Además, la resistencia actúa siempre en sentido opuesto al movimiento, lo que impide crecimientos explosivos de la velocidad. Por tanto, para cualquier condición inicial dadas, la solución por tramos existe, es única y puede concatenarse en $t = t_p$ imponiendo continuidad del estado:

$$v(t_p^+) = v(t_p^-), \quad y(t_p^+) = y(t_p^-).$$

Velocidades terminales y estabilidad local

En cada tramo existe un valor de v que anula la aceleración (velocidad terminal):

$$\text{Tramo lineal: } -g - r_1 v = 0 \implies v_T^{(1)} = -\frac{g}{r_1}.$$

Tramo cuadrático (considerando caída con $v < 0$):

$$-g - r_2 v|v| = 0.$$

Para $v < 0$ se tiene $v|v| = -v^2$, de modo que la ecuación se reduce a $-g + r_2 v^2 = 0$, y la velocidad terminal física (negativa) es

$$v_T^{(2)} = -\sqrt{\frac{g}{r_2}}.$$

Para estudiar la estabilidad local, analizamos el signo de la derivada de f respecto de v :

$$\partial_v f(t, v) = \begin{cases} -r_1, & (\text{lineal}), \\ -2r_2 v, & (\text{cuadrático}). \end{cases}$$

Evaluando en las velocidades terminales (recordando $v_T^{(i)} < 0$):

$$\partial_v f|_{v_T^{(1)}} = -r_1 < 0,$$

$$\partial_v f|_{v_T^{(2)}} = -2r_2 v_T^{(2)} = -2r_2 (-\sqrt{g/r_2}) = -2\sqrt{gr_2} < 0.$$

Ambas derivadas son negativas, por lo que los puntos $v_T^{(1)}$ y $v_T^{(2)}$ son *linealmente asintóticamente estables*: las trayectorias en v se acercan a dichos valores cuando el tiempo avanza en el tramo correspondiente.

Comportamiento cualitativo e interpretación de signos

Dado que $v_T^{(i)} < 0$, la dinámica empuja la velocidad hacia valores más negativos si está por encima del terminal (más cerca de cero), o hacia valores menos negativos si está por debajo (más lejos de cero). Formalmente:

- Si $v > v_T$ (es decir, v menos negativo que v_T), entonces $\dot{v} < 0$ y v disminuye hasta acercarse a v_T .

- Si $v < v_T$ (más negativo que v_T), entonces $\dot{v} > 0$ y v aumenta (se vuelve menos negativo) hasta acercarse a v_T .

Así, el signo negativo de v_T refleja que la caída ocurre en dirección negativa del eje elegido.

Isoclinas e información cualitativa

Las *isoclinas* se definen fijando valores constantes de \dot{v} . La *isocлина nula* (línea donde $\dot{v} = 0$) es especialmente útil:

$$\dot{v} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = -\frac{g}{r_1}, & 0 \leq t < t_p, \\ v = -\sqrt{\frac{g}{r_2}}, & t \geq t_p. \end{cases}$$

En el plano (t, v) estas son líneas horizontales (con valores negativos) que separan regiones de $\dot{v} > 0$ y $\dot{v} < 0$. El campo de direcciones muestra que las flechas apuntan hacia la respectiva línea nula en cada tramo: antes de t_p las trayectorias se acercan a $v_T^{(1)}$, y tras t_p al nuevo valor $v_T^{(2)}$. Dado que $r_2 \gg r_1$ en el caso físico de apertura del paracaídas, se cumple $|v_T^{(2)}| \ll |v_T^{(1)}|$ y la transición en t_p provoca una desaceleración rápida hacia el nuevo equilibrio negativo.

Efecto del cambio de régimen en t_p

El cambio en t_p es puramente temporal (no depende del estado), por lo que la solución se obtiene concatenando la solución única del primer tramo con la del segundo tramo usando las condiciones de continuidad en t_p . No aparecen discontinuidades en v ni ambigüedades tipo sistemas con frontera dependiente del estado.

Condicionamiento y robustez

La atracción asintótica hacia los equilibrios implica que pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales o en parámetros producen diferencias que se atenúan con el tiempo: el problema es cualitativamente bien condicionado. Esto facilita tanto la interpretación física como la aproximación numérica de la solución.

Conclusión

Las ecuaciones diferenciales, las velocidades terminales y la interpretación geométrica mediante isoclinas concuerdan entre sí y explican por qué la apertura del paracaídas produce una rápida transición hacia una velocidad terminal negativa de menor magnitud absoluta.

3. Análisis del Sistema: Parte B

1. Puntos de Equilibrio en función de μ

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2.$$

Los puntos de equilibrio satisfacen:

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \mu - z^2 = 0.$$

Por tanto:

$$z^2 = \mu.$$

- Si $\mu > 0$: existen dos puntos de equilibrio:

$$z = \sqrt{\mu}, \quad z = -\sqrt{\mu}.$$

- Si $\mu = 0$: existe un único punto de equilibrio:

$$z = 0.$$

- Si $\mu < 0$: no existen puntos de equilibrio reales.

2. Clasificación de Estabilidad

Para estudiar la estabilidad, derivamos el campo vectorial:

$$\frac{d}{dz}(\mu - z^2) = -2z.$$

Evaluamos en los puntos de equilibrio:

- Para $\mu > 0$:

- En $z = \sqrt{\mu}$:

$$-2\sqrt{\mu} < 0 \Rightarrow \text{Punto estable.}$$

- En $z = -\sqrt{\mu}$:

$$2\sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow \text{Punto inestable.}$$

- Para $\mu = 0$:

- En $z = 0$:

$$0 \Rightarrow \text{Caso crítico.}$$

3. Diagrama de Bifurcación

El diagrama de bifurcación se describe mediante:

- Eje horizontal: parámetro μ .

- Eje vertical: variable z .

Las curvas de equilibrio son:

$$z = \sqrt{\mu} \quad (\text{estable, línea continua}),$$

$$z = -\sqrt{\mu} \quad (\text{inestable, línea discontinua}).$$

El punto de bifurcación ocurre en:

$$\mu = 0,$$

y corresponde a una **bifurcación tipo nodo-silla**.

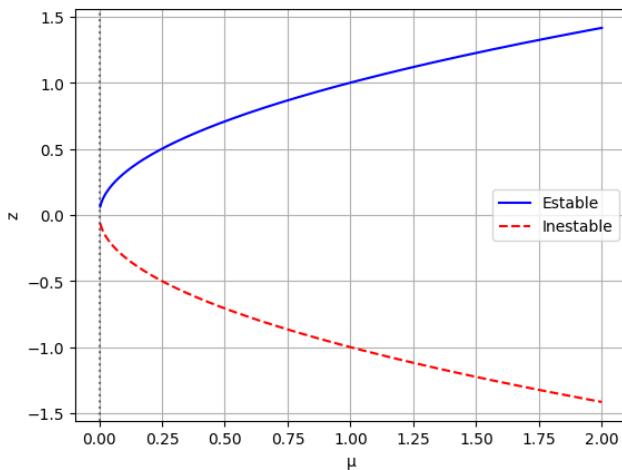


Figura 1: Diagrama de Bifurcación.

4. Interpretación Física

En el contexto de movimiento con resistencia no lineal:

- $\mu > 0$: el sistema alcanza una **velocidad terminal estable**:

$$z = \sqrt{\mu}.$$

- $\mu = 0$: se encuentra el umbral o transición crítica entre regímenes dinámicos.
- $\mu < 0$: no existe velocidad terminal; el comportamiento dinámico es no acotado.

La bifurcación en $\mu = 0$ marca el punto donde desaparece la posibilidad de equilibrio, separando comportamientos físicos cualitativamente distintos.

4. Análisis del Sistema: Parte C

Sistema de Ecuaciones

El sistema considerado es:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -32 - 0.5v.\end{aligned}$$

1. Cálculo de Puntos Críticos

Los puntos críticos satisfacen:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0, \\ \frac{dv}{dt} = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} v = 0, \\ -32 - 0.5v = 0. \end{cases}$$

Resolviendo:

- De la primera ecuación: $v = 0$.

- Sustituyendo en la segunda:

$$-32 - 0.5(0) = -32 \neq 0.$$

Conclusión: El sistema presenta una contradicción ($-32 = 0$), por tanto:

NO EXISTEN PUNTOS CRÍTICOS

2. Análisis del Comportamiento

La velocidad terminal se obtiene imponiendo:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow -32 - 0.5v = 0 \Rightarrow v = -64 \text{ ft/s.}$$

Las líneas nulas son:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{cuando} \quad v = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{cuando} \quad v = -64.$$

3. Interpretación Física

- $\frac{dy}{dt} = v$: define la velocidad vertical.
- $\frac{dv}{dt} = -32 - 0.5v$:
 - -32 : aceleración gravitacional constante.
 - $-0.5v$: resistencia lineal proporcional a la velocidad.

Comportamiento del sistema:

- No existe estado de equilibrio (ningún punto crítico real).

- La velocidad terminal es:

$$v = -64 \text{ ft/s.}$$

- Todas las trayectorias del sistema satisfacen:

$$v(t) \rightarrow -64 \quad (\text{convergencia asintótica}).$$

Diagrama de Fase

El diagrama de fase se basa en:

- La línea nula horizontal $v = -64$ (velocidad terminal).
- La línea nula vertical $v = 0$.

Las trayectorias se desplazan verticalmente hacia abajo hasta aproximarse asintóticamente a $v = -64$.

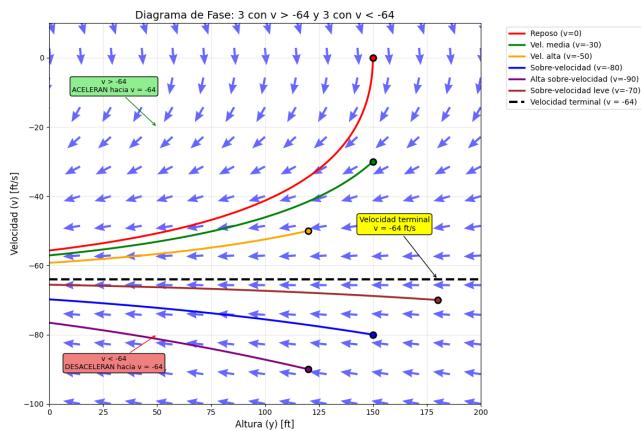


Figura 2: Diagrama de Fase.