Koordináta geometria feladatok - Ancsin Ádám

2. feladat

a)

Pontok:
$A\left(\sqrt{7},\quad 2\right)$ $\qquad B\left(-1,\quad 1+\sqrt{7}\right)$

A két pont távolsága függőleges és víszintes komponensekre bontható szét; *itt* ezek:

> víszintes: $d_x = \sqrt{7} - (-1) = \sqrt{7} + 1$
> függőleges: $d_y = \left(1 + \sqrt{7}\right) - 2 = \sqrt{7} - 1$

Végül, az ezen távolságok által meghatározott derékszögű háromszög átfogójának hossza megegyezik a két pont távolságával:

$$d = \sqrt{{d_x}^2 + {d_y}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{7}+1\right)^2 + \left(\sqrt{7}-1\right)^2} = \sqrt{2\cdot\sqrt{7}^2 + 2\cdot 1^2} = \sqrt{2\cdot 7 + 2} = \sqrt{16} = 4$$

Tehát a távolság A és B pont között: 4.

b)

Általánosan (A és B pontok között):

> $d_x = b_x - a_x$
Ennyit kell elmozdulni A-ból vízszintesen, hogy a B-vel azonos x pozícióval rendelkezzünk.

> $d_y = b_y - a_y$
Ennyit kell elmozdulni A-ból függőlegesen, hogy a B-vel azonos y pozícióval rendelkezzünk.

Végül, az ezen távolságok által meghatározott derékszögű háromszög átfogójának hossza megegyezik a két pont távolságával:

$$d = \sqrt{{d_x}^2 + {d_y}^2}$$
$$d = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$
$$(d = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2})$$

3. feladat

a) Egy olyan egyenes, amely átmegy az $A(2,3)$ és a $B(5,-1)$ pontokon.

A lineáris egyenletek képlete: $y = a \cdot x + c$

Az egyenes meredeksége a két pont alapján:
$x \to x+3 \quad \Rightarrow \quad y \to y-4$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{3} =$ *a háromszög meredeksége*

Így tudjuk, a keresett egyenes párhuzamos az $y = \frac{-4}{3} \cdot x$ egyenessel.

A konstans tagot (az eltolást) pedig a megadott pontok alapján számíthatjuk ki;
tudjuk, hogy a függvény $x = 2$ helyen $y = 3$ értéket vesz fel, *így*
$\to$
$(y = a \cdot x + c)$
$3 = \frac{-4}{3} \cdot 2 + c$
$c = 3 - \frac{-8}{3}$
$c = \frac{17}{3}$

A feladatnak megfelelő egyenes képlete tehát:

$$y = \frac{-4}{3}x + \frac{17}{3}$$

b) Egy félkör.

A körök egyenletének képlete: $\sqrt{x^2+y^2} = r$

Hogy elhagyjuk az y negatív értékeit azt a tényt használhatjuk ki, hogy ha a $\sqrt{}$-jel alatt negatív szám van, azt nem értelmezzük, így azon helyeken nem vesz fel a függvény értéket (a valós számok halmazában).

$\to$ Így az alábbi egyenleteket kaphatjuk:
$(\sqrt{x^2+y^2}) \Rightarrow \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{y}\right)^4} = r$
$\to$ Amennyiben ezt nem találjuk korrektnek – mivel az egyenlet bizonyos tekintetben könnyen egyszerűsíthető a teljes kör képletére – az alábbi egyenlethez fordulhatunk:

$$\sqrt{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)} = r$$

Ez valóban egy r sugarú félkört rajzol ki, ugyanis hasonló egy teljes kör képletéhez; míg amennyiben y negatív, értékét nem értelmezzük.

Mivel a feladat *egy* félkörre utal, egy 3 sugarú félkör képlete: $\sqrt{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)} = 3$

c) Két különböző pont (és semmi más).

Olyan egynletre van szükség, melynek pontosan 2 (különböző) x-y-pár megoldása van.

Úgy szabályozhatunk le könnyen egy változót, hogy ha egy adott értékhez való eltérése nem 0, akkor annak abszolút értékenek ellentetje negatív. Így annak gyöke csak egy adott érték esetén értelmes.
$\sqrt{-|a-x|}$ $(=0)$

Ezt könnyen módosíthatjuk úgy, hogy két érték esetén is megfeleljen a feltételnek.
$\sqrt{-|a-|x||}(=0)$, mely a korábbi *egyedüli* „érvényes” x értékhez képest, már annak ellentetjével is értelmezhető.

Mivel 2 pontot szeretnénk létrehozni, mondhatjuk, hogy x „lehessen” 2-féle, míg y, csak 1 értéket vehessen fel.
Az így létrehozott függvény:

$$\sqrt{-|a-|x||}\cdot\sqrt{-|b-y|}=0$$

Ez pontosan $P(a,b)$ és $Q(-a,b)$ pontokban értelmezhető.

Példa: $\sqrt{-|3-|x||}\cdot\sqrt{-|2-y|}=0$
Mely a $(3,2)$ és $(-3,2)$ pontokban értelmezhető.

4. feladat

Amennyiben a BC egyenes x-tengellyel bezárt szögét meg tudjuk határozni, a C pont ordinátája is meghatározható. (Egy ábra segítségével könnyen belátható, hogy:)

$[A\ BC\ \textit{egyenes x-tengellyel bezárt szöge}] = 180° + [AB\ \textit{x-tengellyel bezárt szöge}] - 60°$

$[AB\ \textit{x-tengellyel bezárt szöge}] = \tan[AB\ \textit{meredeksége}]$

$[AB\ \textit{meredeksége}] = \frac{d_{AB,y}}{d_{AB,x}} = \frac{7-2}{-4-1} = \frac{5}{-5} = -1$

$\Rightarrow [AB\ \textit{x-tengellyel bezárt szöge}] = -45°$

$$\Rightarrow [A\ BC\ \textit{egyenes x-tengellyel bezárt szöge}] = 180° + (-45°) - 60° = \alpha = 75°$$

Ezt és C abszcisszáját felhasználva:

$$\tan\alpha = \frac{c_y-b_y}{c_x-b_x}$$
$$\tan 75° = \frac{p-(-4)}{11-7} = \frac{p+4}{4}$$
$$p = 4(\tan 75° - 1)$$
$$p = 4(2+\sqrt{3}-1)$$
$$p = 4+\sqrt{48}$$