

# COURS DE PROBABILITÉS

## (CHAPITRE 1 : ANALYSE COMBINATOIRE)



Pr. A. GHAZDALI  
a.ghazdali@usms.ma

2021



Université Sultan Moulay Slimane

Ce document présente un résumé de cours, sans détails superflus, sans démonstration, avec parfois des exemples.

## Programme

- 1 Chap. I : Analyse Combinatoire,
- 2 Chap. II : Notions de Probabilités,
- 3 Chap. III : Variables aléatoires,
- 4 Chap. IV : Variables aléatoires discrètes,
- 5 Chap. V : Lois discrètes classiques,
- 6 Chap. VI : Variables aléatoires continues,
- 7 Chap. VII : Lois continues classiques,

## Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre :

- 1 Rappels de théorie des ensembles
- 2 Principe de base
- 3 Arrangements
- 4 Permutations
- 5 Combinaisons

# Plan du chapitre

---

## 1 Rappels de théorie des ensembles

- Définitions
- Propriétés

## 2 Analyse combinatoire

- Introduction
- Principe de multiplication
- Arrangement
- Permutations
- Combinaisons

## 3 Exemples

# Rappels de théorie des ensembles

# Rappels de théorie des ensembles - Définitions

## Définition 1.1 (Ensemble)

*Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments. Les ensembles sont représentés en lettres majuscules ( $A, B...$ ) et les éléments, en lettres minuscules ( $x, y...$ ).*

*Il peut se représenter sous la forme accolade :  $A = \{...\}$ , par :*

- *Un ensemble peut être défini en donnant la liste exhaustive de ses éléments. On parle alors de définition en extension.*
- *On peut aussi définir un ensemble en indiquant une propriété que vérifient tous les éléments de l'ensemble, et aucun autre. Une telle propriété est dite propriété caractéristique, et elle permet une définition en compréhension de l'ensemble.*

# Rappels de théorie des ensembles - Définitions

## Définition 1.1 (Ensemble)

*Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments. Les ensembles sont représentés en lettres majuscules ( $A, B...$ ) et les éléments, en lettres minuscules ( $x, y...$ ).*

*Il peut se représenter sous la forme accolade :  $A = \{...\}$ , par :*

- *Un ensemble peut être défini en donnant la liste exhaustive de ses éléments. On parle alors de définition en extension.*
- *On peut aussi définir un ensemble en indiquant une propriété que vérifient tous les éléments de l'ensemble, et aucun autre. Une telle propriété est dite propriété caractéristique, et elle permet une définition en compréhension de l'ensemble.*

# Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 1

## Définition 1.2 (Égalité)

*Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre, autrement dit si  $a \in E$  alors  $a \in F$  et si  $b \in F$  alors  $b \in E$ .*

## Définition 1.3 (Sous-ensemble)

*On dit qu'un ensemble  $E$  est inclus dans un ensemble  $F$  si tout élément de  $E$  est un élément de  $F$ . Dans ce cas, on dit que  $E$  est un sous-ensemble de  $F$ .*

## Définition 1.4 (Ensemble vide)

*On appelle ensemble vide, l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note  $\emptyset$ .*



# Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 1

## Définition 1.2 (Egalité)

*Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre, autrement dit si  $a \in E$  alors  $a \in F$  et si  $b \in F$  alors  $b \in E$ .*

## Définition 1.3 (Sous-ensemble)

*On dit qu'un ensemble  $E$  est inclus dans un ensemble  $F$  si tout élément de  $E$  est un élément de  $F$ . Dans ce cas, on dit que  $E$  est un sous-ensemble de  $F$ .*

## Définition 1.4 (Ensemble vide)

*On appelle ensemble vide, l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note  $\emptyset$ .*

# Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 1

## Définition 1.2 (Égalité)

*Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre, autrement dit si  $a \in E$  alors  $a \in F$  et si  $b \in F$  alors  $b \in E$ .*

## Définition 1.3 (Sous-ensemble)

*On dit qu'un ensemble  $E$  est inclus dans un ensemble  $F$  si tout élément de  $E$  est un élément de  $F$ . Dans ce cas, on dit que  $E$  est un sous-ensemble de  $F$ .*

## Définition 1.4 (Ensemble vide)

*On appelle ensemble vide, l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note  $\emptyset$ .*

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 2

### Définition 1.5 (Ensemble des parties d'un ensemble)

*Soit  $E$  un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de  $E$ , l'ensemble noté  $\mathcal{P}(E)$  dont les éléments sont les sous-ensembles de  $E$ .*

### Exemple 1.1

*Soit  $E$  l'ensemble à deux éléments :  $E = \{a, b\}$ .*

*Alors  $E$  admet comme sous-ensembles  $\emptyset$ ,  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  et  $E$  lui-même :*

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}.$$

# Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 2

## Définition 1.5 (Ensemble des parties d'un ensemble)

*Soit  $E$  un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de  $E$ , l'ensemble noté  $\mathcal{P}(E)$  dont les éléments sont les sous-ensembles de  $E$ .*

## Exemple 1.1

*Soit  $E$  l'ensemble à deux éléments :  $E = \{a, b\}$ .*

*Alors  $E$  admet comme sous-ensembles  $\emptyset$ ,  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  et  $E$  lui même :*

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}.$$

# Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 2

## Définition 1.5 (Ensemble des parties d'un ensemble)

*Soit  $E$  un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de  $E$ , l'ensemble noté  $\mathcal{P}(E)$  dont les éléments sont les sous-ensembles de  $E$ .*

## Exemple 1.1

*Soit  $E$  l'ensemble à deux éléments :  $E = \{a, b\}$ .*

*Alors  $E$  admet comme sous-ensembles  $\emptyset$ ,  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  et  $E$  lui même :*

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}.$$

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 3

**Proposition 1.1**

*Soit  $E$  un ensemble. Si  $A$  est un sous-ensemble de  $E$ , on a alors les relations*

$$A \subset E$$

*et*

$$A \in \mathcal{P}(E).$$

**Définition 1.6 (Cardinal d'un ensemble)**

*On dit que  $E$  est un ensemble dénombrable si on arrive à compter ses éléments. Le nombre d'éléments de  $E$  est noté  $\text{Card}(E)$  ou  $|E|$ .*

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 3

**Proposition 1.1**

*Soit  $E$  un ensemble. Si  $A$  est un sous-ensemble de  $E$ , on a alors les relations*

$$A \subset E$$

*et*

$$A \in \mathcal{P}(E).$$

**Définition 1.6 (Cardinal d'un ensemble)**

*On dit que  $E$  est un ensemble dénombrable si on arrive à compter ses éléments. Le nombre d'éléments de  $E$  est noté  $\text{Card}(E)$  ou  $|E|$ .*

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 4

**Définition 1.7 (Réunion de deux ensembles)**

*Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle réunion de  $E$  et  $F$ , l'ensemble noté  $E \cup F$  et dont les éléments appartiennent à  $E$  ou à  $F$ .*

- La notation  $E \cup F$  se lit aussi  $E$  union  $F$ .
- Cette opération réunion peut être considérer comme une opération dans l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$  d'un ensemble donné  $E$ .
- En effet si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $E$ , c'est-à-dire si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $A \cup B$  est encore un sous-ensemble de  $E$ . Il est défini par

$$A \cup B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 4

**Définition 1.7 (Réunion de deux ensembles)**

*Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle réunion de  $E$  et  $F$ , l'ensemble noté  $E \cup F$  et dont les éléments appartiennent à  $E$  ou à  $F$ .*

- La notation  $E \cup F$  se lit aussi  $E$  union  $F$ .
- Cette opération réunion peut être considérer comme une opération dans l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$  d'un ensemble donné  $E$ .
- En effet si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $E$ , c'est-à-dire si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $A \cup B$  est encore un sous-ensemble de  $E$ . Il est défini par

$$A \cup B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 5

**Définition 1.8 (Intersection de deux ensembles)**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle intersection de  $E$  et  $F$ , l'ensemble noté  $E \cap F$  et dont les éléments appartiennent à  $E$  et à  $F$ .

- La notation  $E \cap F$  se lit aussi  $E$  inter  $F$ .
- Cette opération intersection peut être considérer comme une opération dans l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$  d'un ensemble donné  $E$ .
- En effet si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $E$ , c'est-à-dire si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $A \cap B$  est encore un sous-ensemble de  $E$ . Il est défini par

$$A \cap B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

**Définition 1.9 (Ensembles disjoints)**

Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont dits disjoints si  $E \cap F = \emptyset$ .

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 5

**Définition 1.8 (Intersection de deux ensembles)**

*Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle intersection de  $E$  et  $F$ , l'ensemble noté  $E \cap F$  et dont les éléments appartiennent à  $E$  et à  $F$ .*

- La notation  $E \cap F$  se lit aussi  $E$  inter  $F$ .
- Cette opération intersection peut être considérer comme une opération dans l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$  d'un ensemble donné  $E$ .
- En effet si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $E$ , c'est-à-dire si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $A \cap B$  est encore un sous-ensemble de  $E$ . Il est défini par

$$A \cap B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

**Définition 1.9 (Ensembles disjoints)**

*Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont dits disjoints si  $E \cap F = \emptyset$ .*

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 5

**Définition 1.8 (Intersection de deux ensembles)**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle intersection de  $E$  et  $F$ , l'ensemble noté  $E \cap F$  et dont les éléments appartiennent à  $E$  et à  $F$ .

- La notation  $E \cap F$  se lit aussi  $E$  inter  $F$ .
- Cette opération intersection peut être considérer comme une opération dans l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$  d'un ensemble donné  $E$ .
- En effet si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $E$ , c'est-à-dire si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $A \cap B$  est encore un sous-ensemble de  $E$ . Il est défini par

$$A \cap B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

**Définition 1.9 (Ensembles disjoints)**

Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont dits disjoints si  $E \cap F = \emptyset$ .

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 6

**Définition 1.10 (Différence de deux ensembles)**

*Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle différence (ensembliste) de  $E$  et  $F$ , l'ensemble noté  $E \setminus F$  et dont les éléments appartiennent à  $E$  et n'appartiennent pas à  $F$ .*

- La notation  $E \setminus F$  se lit aussi  $E$  moins  $F$ .
- Cette opération différence peut être considérée comme une opération dans l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$  d'un ensemble donné  $E$ .
- En effet si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $E$ , c'est-à-dire si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $A \setminus B$  est encore un sous-ensemble de  $E$ . Il est défini par

$$A \setminus B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 6

**Définition 1.10 (Différence de deux ensembles)**

*Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle différence (ensembliste) de  $E$  et  $F$ , l'ensemble noté  $E \setminus F$  et dont les éléments appartiennent à  $E$  et n'appartiennent pas à  $F$ .*

- La notation  $E \setminus F$  se lit aussi  $E$  moins  $F$ .
- Cette opération différence peut être considérer comme une opération dans l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$  d'un ensemble donné  $E$ .
- En effet si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $E$ , c'est-à-dire si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $A \setminus B$  est encore un sous-ensemble de  $E$ . Il est défini par

$$A \setminus B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 7

**Définition 1.11 (Produit cartésien)**

*Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On note  $E \times F$  (on lit  $E$  croit  $F$ ) ou produit cartésien, l'ensemble des couples  $(x; y)$  où  $x \in E$  et  $y \in F$ .*

$$E \times F = \{(x; y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Plus généralement si  $E_1, \dots, E_n$  désigne  $n$  ensembles. On note  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ , l'ensemble formé des  $n$ -uplets de la forme  $(x_1; \dots; x_n)$  avec  $x_i \in E_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .  
Si  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$  alors

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = E^n.$$

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 7

**Définition 1.11 (Produit cartésien)**

*Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On note  $E \times F$  (on lit  $E$  croit  $F$ ) ou produit cartésien, l'ensemble des couples  $(x; y)$  où  $x \in E$  et  $y \in F$ .*

$$E \times F = \{(x; y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Plus généralement si  $E_1, \dots, E_n$  désigne  $n$  ensembles. On note  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ , l'ensemble formé des  $n$ -uplets de la forme  $(x_1; \dots; x_n)$  avec  $x_i \in E_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .  
Si  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$  alors

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = E^n.$$



## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 8

**Exemple 1.2**

*Soient  $E$  et  $F$  telque  $E = \{1, 2, 3\}$  et  $F = \{5, 6, 7\}$ . Alors on a le produit cartésien*

$$E \times F = \{(1; 5), (1; 6), (1; 7), \dots, (3; 7)\}$$

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 8

**Exemple 1.2**

*Soient  $E$  et  $F$  telque  $E = \{1, 2, 3\}$  et  $F = \{5, 6, 7\}$ . Alors on a le produit cartésien*

$$E \times F = \{(1; 5), (1; 6), (1; 7), \dots, (3; 7)\}$$

## Rappels de théorie des ensembles - Définitions - suite 9

**Définition 1.12 (Complémentaire d'un sous-ensemble)**

*Soit  $A$  un sous-ensemble d'un ensemble donné  $E$ . On appelle complémentaire de  $A$  dans  $E$  le sous-ensemble de  $E$  noté  $\overline{A}$  dont les éléments sont ceux de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ . Ainsi*

$$\overline{A} = \{x \in E \text{ tels que } x \notin A\}$$

## Rappels de théorie des ensembles -Définitions- suite 10

**Définition 1.13 (Partition d'un ensemble)**

*Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de sous-ensembles de  $E$ . On dit qu'elle forme une partition de  $E$  si*

- 1**  $\bigcup_{i \in I} A_i = E,$
- 2**  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dés que  $i \neq j \in I.$

# Rappels de théorie des ensembles - Propriétés

Rappelons rapidement quelques propriétés élémentaires satisfaites par les opérations sur les ensembles. Etant donnés trois sous-ensembles  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

## Propriété 1.1

- 1  $A \cup B = B \cup A$  (*commutativité de la réunion*)
- 2  $A \cap B = B \cap A$  (*commutativité de l'intersection*)
- 3  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$  (*associativité de la réunion*)
- 4  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  (*associativité de l'intersection*)
- 5  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (*distributivité de l'intersection par rapport à la réunion*)
- 6  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (*distributivité de la réunion par rapport à l'intersection*)

# Rappels de théorie des ensembles - Propriétés - suite 1

Etant donnés trois sous-ensembles  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

## Propriété 1.2

1  $A \cup A = A$

2  $A \cap A = A$

3  $A \cap \overline{A} = \emptyset,$

4  $A \cup \overline{A} = E.$

5  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

6  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

# Rappels de théorie des ensembles - suite fin

## Propriété 1.3

*Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  et  $B$  deux sous-ensemble de  $E$  alors on a :*

- 1**  $Card(A) \leq Card(E)$
- 2**  $Card(A) = Card(E)$  si  $A = U$
- 3**  $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
- 4**  $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

# Analyse combinatoire



# Analyse combinatoire - Introduction

- L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment dénombrer des objets ou compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini de grande cardinal.
  - comment classer 2 élèves ? 3 ? 4 ? . . . 20 ?
  - combien de façons peut-on colorier une carte avec  $k$  couleurs, de telle sorte que deux pays frontaliers soient de couleur différente ?
  - comment développer  $(x + y)^8$  rapidement (Triangle de Pascal) ?
- Comprendre comment compter devient rapidement important.

# Analyse combinatoire - Principe de multiplication

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences

## Définition 2.1

*Si une action peut être obtenue par de  $n_1$  façon différentes, puis suivant cette action, de  $n_2$  façon différentes indépendantes des précédentes et ainsi de suite jusqu'à la dernière façon, alors le nombre de possibilités correspondant à l'ensemble de ces actions est  $N = \prod_{i=1}^n n_i$ . On appelle factorielle et on le note*

$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

*par convention on a  $0! = 1$ .*

# Analyse combinatoire - Principe de multiplication - suite 1

## Remarque 2.1

*Dès que  $n$  dépasse la dizaine,  $n!$  se compte en millier ; Il est bon des fois d'utiliser la formule d'approximation dites de Sterling :*

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

# Analyse combinatoire - Principe de multiplication

## Exemple 2.1

- 1** *On veut garer 3 voitures sur un parking de 6 places. Combien y a-t-il de possibilités de garer les voitures ?*
- 2** *Combien y a-t-il de nombre de façon de placer 5 étudiants dans 5 places différentes*

- 1** Toutes les voitures sont différentes. Il y a 6 places de parking.
  - La première voiture aura donc 6 possibilités pour se garer.
  - Une fois la 1ère voiture garée, il ne restera que 5 possibilités pour la 2.
  - La 3ème voiture qui arrive n'aura que 4 possibilités.
  - Les 3 voitures qui se garent représentent 3 épreuves successives, ayant respectivement 6, 5, 4 possibilités chacune.
  - Donc au total, on aura :  $6 \times 5 \times 4 = 120$  façons de choisir l'emplacement de 3 voitures lorsqu'on a 6 places de parking.
- 2** Le nombre de façon de placer 5 étudiants dans 5 places différentes est  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .

# Analyse combinatoire - Principe de multiplication

## Exemple 2.1

- 1 *On veut garer 3 voitures sur un parking de 6 places. Combien y a-t-il de possibilités de garer les voitures ?*
  - 2 *Combien y a-t-il de nombre de façon de placer 5 étudiants dans 5 places différentes*
- 
- 1 Toutes les voitures sont différentes. Il y a 6 places de parking.
    - La première voiture aura donc 6 possibilités pour se garer.
    - Une fois la 1ère voiture garée, il ne restera que 5 possibilités pour la 2.
    - La 3eme voiture qui arrive n'aura que 4 possibilités.
    - Les 3 voitures qui se garent représentent 3 épreuves successives, ayant respectivement 6, 5, 4 possibilités chacune.
    - Donc au total, on aura :  $6 \times 5 \times 4 = 120$  façons de choisir l'emplacement de 3 voitures lorsqu'on a 6 places de parking.
  - 2 Le nombre de façon de placer 5 étudiants dans 5 places différentes est  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .

# Analyse combinatoire - Principe de multiplication

## Exemple 2.1

- 1 *On veut garer 3 voitures sur un parking de 6 places. Combien y a-t-il de possibilités de garer les voitures ?*
  - 2 *Combien y a-t-il de nombre de façon de placer 5 étudiants dans 5 places différentes*
- 
- 1 Toutes les voitures sont différentes. Il y a 6 places de parking.
    - La première voiture aura donc 6 possibilités pour se garer.
    - Une fois la 1ère voiture garée, il ne restera que 5 possibilités pour la 2.
    - La 3ème voiture qui arrive n'aura que 4 possibilités.
    - Les 3 voitures qui se garent représentent 3 épreuves successives, ayant respectivement 6, 5, 4 possibilités chacune.
    - Donc au total, on aura :  $6 \times 5 \times 4 = 120$  façons de choisir l'emplacement de 3 voitures lorsqu'on a 6 places de parking.
  - 2 Le nombre de façon de placer 5 étudiants dans 5 places différentes est  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .

# Analyse combinatoire - Définitions

## Définition 2.2 (Quelques définitions)

- *Disposition sans répétition : c'est une disposition où un élément peut apparaître 0 ou 1 fois.*
- *Disposition avec répétition : un élément peut figurer plus d'une fois.*
- *Disposition ordonnée : l'ordre d'obtention d'un élément est important.*

*Ex. les éléments constituant la plaque minéralogique d'un véhicule.*

- *Disposition non-ordonnée : l'ordre d'obtention d'un élément n'est pas important, on n'en tient pas compte dans la caractérisation de la disposition.*

*Ex. Les numéros issus d'un tirage du loto.*

# Arrangement - Définitions

## Définition 2.3 (Arrangement)

*Etant donné un ensemble  $E$  de  $n$  éléments, on appelle arrangement de  $p$  éléments **toute suite ordonnée** de  $p$  éléments pris parmi les  $n$  éléments. Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments pris parmi  $n$  éléments est noté  $\mathcal{A}_n^p$ .*

## Remarque 2.2

*On a nécessairement  $1 \leq p \leq n$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ . Si  $n < p$  alors  $\mathcal{A}_n^p = 0$ .*

Deux type d'arrangement :



# Arrangement - Définitions

## Définition 2.3 (Arrangement)

*Etant donné un ensemble  $E$  de  $n$  éléments, on appelle arrangement de  $p$  éléments **toute suite ordonnée** de  $p$  éléments pris parmi les  $n$  éléments. Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments pris parmi  $n$  éléments est noté  $\mathcal{A}_n^p$ .*

## Remarque 2.2

*On a nécessairement  $1 \leq p \leq n$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ . Si  $n < p$  alors  $\mathcal{A}_n^p = 0$ .*

Deux type d'arrangement :

# Arrangement - Définitions - suite 1

## Définition 2.4 (Arrangements sans répétition)

Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une *seule fois* dans un arrangements, le nombre d'arrangements *sans répétition* (tirage sans remise) de  $p$  éléments parmi  $n$  est alors

$$\mathcal{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq n.$$

- Réaliser un arrangement sans répétition des éléments d'ensemble  $E$ , c'est déterminer un  $p$  uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  d'éléments de deux à deux distincts.
- C'est aussi définir une application injective d'un ensemble  $F$  à  $p$  éléments dans  $E$  à  $n$  éléments.

# Arrangement - Définitions - suite 1

## Définition 2.4 (Arrangements sans répétition)

Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une *seule fois* dans un arrangements, le nombre d'arrangements *sans répétition* (tirage sans remise) de  $p$  éléments parmi  $n$  est alors

$$\mathcal{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq n.$$

- Réaliser un arrangement sans répétition des éléments d'ensemble  $E$ , c'est déterminer un  $p$  uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  d'éléments de deux à deux distincts.
- C'est aussi définir une application injective d'un ensemble  $F$  à  $p$  éléments dans  $E$  à  $n$  éléments.

# Arrangement - Définitions - suite 2

## Explication :

- Pour le premier élément tiré, il y a  $n$  manières de ranger l'élément parmi  $n$ .
- Pour le second élément tiré, il n'existe que  $n - 1$  manières de ranger l'élément, car le premier élément ne plus être pris en compte.
- Ainsi pour les  $p$  éléments tirés parmi  $n$ , si  $1 \leq p \leq n$  il aura :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_n^p &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) \\
 &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) \frac{(n-p)(n-p-1) \cdots 2 \times 1}{(n-p)(n-p-1) \cdots 2 \times 1} \\
 &= \frac{n!}{(n-p)!}
 \end{aligned}$$

# Arrangement - Exemples

## Exemple 2.2

*Si on considère une urne qui contient 9 boules (3 rouges, 3 noires et 3 blanches). On tire 4 boules sans remise de cette urne. Combien de nombres de tirage possible ?*

Il s'agit d'un arrangement sans répétition, le nombre de tirage possible est de  $\mathcal{A}_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

# Arrangement - Exemples

## Exemple 2.2

*Si on considère une urne qui contient 9 boules (3 rouges, 3 noires et 3 blanches). On tire 4 boules sans remise de cette urne. Combien de nombres de tirage possible ?*

Il s'agit d'un arrangement sans répétition, le nombre de tirage possible est de  $\mathcal{A}_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

# Arrangement - Exemples - suite 1

## Exemple 2.3

*Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si on utilise chaque lettre une seule fois ?*

On peut le voir comme étant le nombre possible d'arrangements que l'on peut faire avec un échantillon de 10 éléments parmi 26 :

$$\mathcal{A}_{26}^{10} = 190275022309680000$$

# Arrangement - Exemples - suite 1

## Exemple 2.3

*Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si on utilise chaque lettre une seule fois ?*

On peut le voir comme étant le nombre possible d'arrangements que l'on peut faire avec un échantillon de 10 éléments parmi 26 :

$$\mathcal{A}_{26}^{10} = 190275022309680000$$



## Arrangement - Exemples - suite 2

### Exemple 2.4

*Un cadenas à numéros a trois roues ; chacune porte les numéros 0 à 9. Chaque secret est composé de trois numéros différents. Combien de "nombres" secrets y a-t-il ?*

Il s'agit d'un arrangement sans répétition, le nombre de secrets possible est de  $\mathcal{A}_{10}^3$

## Arrangement - Exemples - suite 2

### Exemple 2.4

*Un cadenas à numéros a trois roues ; chacune porte les numéros 0 à 9. Chaque secret est composé de trois numéros différents. Combien de "nombres" secrets y a-t-il ?*

Il s'agit d'un arrangement sans répétition, le nombre de secrets possible est de  $\mathcal{A}_{10}^3$

# Arrangement - Définitions

## Définition 2.5 (Arrangements avec répétition)

Lorsqu'un élément peut être observé *plusieurs fois* dans un arrangement, le nombre d'arrangements *avec répétition* ( tirage avec remise) de  $p$  éléments pris parmi  $n$  est alors

$$\mathcal{A}_n^p = n^p.$$

Réaliser un arrangement avec répétition des éléments d'ensemble  $E$ , c'est aussi définir une application d'un ensemble  $F$  à  $p$  éléments dans  $E$  à  $n$  éléments.

# Arrangement - Définitions

## Définition 2.5 (Arrangements avec répétition)

Lorsqu'un élément peut être observé *plusieurs fois* dans un arrangement, le nombre d'arrangements *avec répétition* ( tirage avec remise) de  $p$  éléments pris parmi  $n$  est alors

$$\mathcal{A}_n^p = n^p.$$

Réaliser un arrangement avec répétition des éléments d'ensemble  $E$ , c'est aussi définir une application d'un ensemble  $F$  à  $p$  éléments dans  $E$  à  $n$  éléments.

# Arrangement - Définitions - suite 1

## Explication :

- Pour le premier élément tiré, il y a  $n$  manières de ranger l'élément parmi  $n$ .
- Pour le second élément tiré, il existe également  $n$  possibilités d'arrangements car le premier élément fait de nouveau parti des  $n$  éléments.
- En effet on a  $n$  possibilités pour chaque place.
- Ainsi pour les  $p$  éléments tirés parmi  $n$ , il y aura

$$\mathcal{A}_n^p = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$$

arrangements possible.

# Arrangement - Exemples

## Exemple 2.5

*Si on considère une urne qui contient 9 boules (3 rouges, 3 noires et 3 blanches). On tire 4 boules avec remise de cette urne. Combien de nombres de tirage possible ?*

Il s'agit d'un arrangement avec répétition, le nombre de tirage possible est de  $9^4$

# Arrangement - Exemples

## Exemple 2.5

*Si on considère une urne qui contient 9 boules (3 rouges, 3 noires et 3 blanches). On tire 4 boules avec remise de cette urne. Combien de nombres de tirage possible ?*

Il s'agit d'un arrangement avec répétition, le nombre de tirage possible est de  $9^4$

# Arrangement - Exemples - suite 1

## Exemple 2.6

*Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si on peut réutiliser les lettres ?*

A chaque position (1 à 10) on peut mettre 26 lettres différentes donc le nombre sera  $26^{10}$ .



# Arrangement - Exemples - suite 1

## Exemple 2.6

*Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si on peut réutiliser les lettres ?*

A chaque position (1 à 10) on peut mettre 26 lettres différentes donc le nombre sera  $26^{10}$ .

# Arrangement - Exemples - suite fin

## Exemple 2.7

*Un cadenas à numéros a trois roues ; chacune porte les numéros 0 à 9.  
Combien de "nombres" secrets y a-t-il ?*

Il s'agit d'un arrangement avec répétition, le nombre de secrets possible est de  $10^3$

# Arrangement - Exemples - suite fin

## Exemple 2.7

*Un cadenas à numéros a trois roues ; chacune porte les numéros 0 à 9.  
Combien de "nombres" secrets y a-t-il ?*

Il s'agit d'un arrangement avec répétition, le nombre de secrets possible est de  $10^3$

# Permutations - Définitions

## Définition 2.6 (Permutation)

*Une permutation est un rangement ordonné de  $n$  objets distinguables. C'est également une bijection d'un ensemble de  $n$  éléments vers lui même.*

Deux types de permutation

# Permutations - Définitions - suite 1

## Définition 2.7 (Permutations sans répétition)

*Etant donné un ensemble  $E$  de  $n$  éléments ; on appelle permutation de  $n$  éléments **distincts**, toutes suites ordonnées de  $n$  éléments. Le nombre de permutation de  $n$  éléments est noté  $P_n = n!$ .*

# Permutations - Définitions - suite fin

## Explication :

- La permutation sans répétition constitue un cas particulier d'arrangement lorsque  $n = p$ .

$$\mathcal{A}_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = n!.$$

- Réaliser une permutation sans répétition des éléments d'ensemble  $E$ , c'est réaliser un tirage exhaustif sans remise des éléments de  $E$  en tenant compte de l'ordre du tirage.
- C'est aussi définir une bijection de ensemble  $E$  sur lui-même.

# Permutations - Exemples

## Exemple 2.8

*Combien de mots différents peut on écrire en permutant les lettres du mot "Yasine".*

Le nombre de mots que l'on peut former est le nombre des  $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ -permutations (sans répétition) de l'ensemble des lettres "Yasine", soit

$$\mathcal{P} = 6!.$$

# Permutations - Exemples

## Exemple 2.8

*Combien de mots différents peut on écrire en permutant les lettres du mot "Yasine".*

Le nombre de mots que l'on peut former est le nombre des  $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ -permutations (sans répétition) de l'ensemble des lettres "Yasine", soit

$$\mathcal{P} = 6!.$$



# Permutations - Exemples - suite 1

## Exemple 2.9

*Combien de nombres différents peut-on écrire avec les chiffres 3,4,5,0 ?*

le nombre est  $4!$ .

# Permutations - Exemples - suite fin

## Exemple 2.10

*Combien de permutations possibles des lettres A, B et C ?*

Les permutations possibles des lettres A, B et C sont : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. soit  $3! = 6$  permutations.

# Permutations - Exemples - suite fin

## Exemple 2.10

*Combien de permutations possibles des lettres A, B et C ?*

Les permutations possibles des lettres A, B et C sont : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. soit  $3! = 6$  permutations.

# Permutations - Définitions

## Définition 2.8 (Permutations avec répétition)

Soit  $E$  un ensemble tel que  $\text{Card}(E) = n$  et soit  $n_1, n_2, \dots, n_r$  des entiers naturels tels que  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ . On appelle permutations *avec répétition* de  $E$  une disposition ordonnée de  $n$  éléments. Parmi les  $n$  éléments on trouve  $n_1$  éléments de  $a_1$ ,  $n_2$  éléments de  $a_2, \dots, n_r$  de éléments  $a_r$ .

$$\left\{ \underbrace{(a_1, \dots, a_1)}_{n_1}; \underbrace{(a_2, \dots, a_2)}_{n_2}; \dots; \underbrace{(a_r, \dots, a_r)}_{n_r} \right\}$$

Le nombre de permutations est

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

# Permutations - Exemples - suite 1

## Exemple 2.11

*Combient de mots différents peut on écrire en permutant les lettres du mot "Yassine".*

Le nombre de mots que l'on peut former est le nombre des  $\{1, 1, 2, 1, 1, 1\}$ -permutations (avec répétition) de l'ensemble des lettres "Yassine", soit

$$\mathcal{P} = \frac{7!}{1!1!2!1!1!1!} = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

# Permutations - Exemples - suite 1

## Exemple 2.11

*Combient de mots différents peut on écrire en permutant les lettres du mot "Yassine".*

Le nombre de mots que l'on peut former est le nombre des  $\{1, 1, 2, 1, 1, 1\}$ -permutations (avec répétition) de l'ensemble des lettres "Yassine", soit

$$\mathcal{P} = \frac{7!}{1!1!2!1!1!1!} = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

# Permutations - Exemples - suite 2

## Exemple 2.12

*Combien de nombres différents peut-on écrire avec les chiffres 3,4,5,0,3 ?*

Le nombre est

$$\mathcal{P} = \frac{5!}{2!}.$$

## Permutations - Exemples - suite 2

### Exemple 2.12

*Combien de nombres différents peut-on écrire avec les chiffres 3,4,5,0,3 ?*

Le nombre est

$$\mathcal{P} = \frac{5!}{2!}.$$



# Permutations - Exemples - suite fin

## Exemple 2.13

*Combien de permutations possibles des lettres A, B, B, B et C ?*

sont : ABBBC, ABBCB, ABCBB, ACBBB, CABBB, BABBC, BABCB, BACBB, BCABB, CBABB, BBABC, BBACB, BBCAB, BCBAB, CBBAB, BBBAC, BBBCA, BBCBA, BCBBA, CBBBA,

Le nombre est  $\mathcal{P} = \frac{5!}{3!} = 20$  permutations.

# Permutations - Exemples - suite fin

## Exemple 2.13

*Combien de permutations possibles des lettres A, B, B, B et C ?*

sont : ABBBC, ABBCB, ABCBB, ACBBB, CABBB, BABBC, BABCB, BACBB, BCABB, CBABB, BBABC, BBACB, BBCAB, BCBAB, CBBAB, BBBAC, BBBCA, BBCBA, BCBBA, CBBBA,

Le nombre est  $\mathcal{P} = \frac{5!}{3!} = 20$  permutations.

## Permutations - suite 7

### Exemple 2.14

*Combien de permutations possibles des lettres A, B, B, C et C?*

Le nombre est  $\mathcal{P} = \frac{5!}{2!2!} = 30$  permutations.

# Permutations - suite 7

## Exemple 2.14

*Combien de permutations possibles des lettres A, B, B, C et C?*

Le nombre est  $\mathcal{P} = \frac{5!}{2!2!} = 30$  permutations.

# Combinaisons - Définitions

## Définition 2.9 (Combinaisons)

*Etant donné un ensemble de  $n$  éléments; on appelle combinaison de  $p$  éléments, tout sous-ensemble de  $p$  éléments **non ordonné** pris parmi les  $n$  éléments.*

# Combinaisons - Définitions - suite 1

## Définition 2.10 (Combinaisons sans répétition)

On appelle combinaison sans répétition de  $p$  éléments pris parmi  $n$  et sans remise d'un ensemble  $E$  toute disposition non ordonnée de  $p$  éléments de  $E$ . Le nombre de combinaison est

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad \text{avec } p \leq n.$$

# Combinaisons - Définitions - suite 2

## Explication :

Pour une disposition ordonnée de  $p$  éléments parmi  $n$  sans répétition.

- Il y a  $\mathcal{A}_n^p$  possibilités de tirer  $p$  élément parmi  $n$  en les ordonnant :  

$$\mathcal{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$
- Une fois les  $p$  élément tirés, il y a  $p!$  manières de les ordonner.
- Il y a donc  $\mathcal{C}_n^p = \frac{\mathcal{A}_n^p}{p!}$  manières de tirer  $p$  élément parmi  $n$  sans les ordonner.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_n^p &= \text{Nombre de combinaisons possibles} \\
 &= \frac{\text{Nombre d'arrangements possibles}}{\text{Nombre de permutations possibles dans cet arrangement}} \\
 &= \frac{\mathcal{A}_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.
 \end{aligned}$$

# Combinaisons - Exemples

## Exemple 2.15

*Combien de couleurs peut-on obtenir en mélangeant deux couleurs non identiques des trois couleurs : Rouge, Bleu, Jaune ?*

On considère des échantillons non ordonnés : Rouge + Bleu = Bleu + rouge.

Il n'y a pas répétition : Jaune + Jaune ne convient pas.

La réponse est donc :  $C_3^2$  mélange possibles.

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$



# Combinaisons - Exemples

## Exemple 2.15

*Combien de couleurs peut-on obtenir en mélangeant deux couleurs non identiques des trois couleurs : Rouge, Bleu, Jaune ?*

On considère des échantillons non ordonnés : Rouge + Bleu = Bleu + rouge.

Il n'y a pas répétition : Jaune + Jaune ne convient pas.

La réponse est donc :  $\mathcal{C}_3^2$  mélange possibles.

$$\mathcal{C}_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

# Combinaisons - Exemples - suite 1

## Exemple 2.16

*Dans un jeu de 32 cartes, on tire 4 cartes au hasard. Combien de tirages possibles.*

On a donc  $C_{32}^4$  tirages possibles.

$$C_{32}^4 = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35960.$$

# Combinaisons - Exemples - suite 1

## Exemple 2.16

*Dans un jeu de 32 cartes, on tire 4 cartes au hasard. Combien de tirages possibles.*

On a donc  $C_{32}^4$  tirages possibles.

$$C_{32}^4 = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35960.$$

## Combinaisons - Exemples - suite 2

### Exemple 2.17

*Nombre de tirages du Loto. Les boules sont numérotées de 1 à 49. On tire 6 boules. Combien le nombre de tirages possibles*

Un tirage de 6 numéros parmi 49, est une combinaison de 6 parmi 49. Le nombre de tirages possibles vaut donc

$$C_{49}^6 = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13983816.$$

## Combinaisons - Exemples - suite 2

### Exemple 2.17

*Nombre de tirages du Loto. Les boules sont numérotées de 1 à 49. On tire 6 boules. Combien le nombre de tirages possibles*

Un tirage de 6 numéros parmi 49, est une combinaison de 6 parmi 49. Le nombre de tirages possibles vaut donc

$$C_{49}^6 = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13983816.$$

# Combinaisons - Exemples - suite fin

## Exemple 2.18

*On tire au hasard trois billes d'un sac contenant une bille rouge (R), une bille bleue (B), une bille jaune (J) et une bille verte (V). Déterminer le nombre de combinaisons possibles*

$$\text{Nombre de combinaisons possibles} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

# Combinaisons - Exemples - suite fin

## Exemple 2.18

*On tire au hasard trois billes d'un sac contenant une bille rouge (R), une bille bleue (B), une bille jaune (J) et une bille verte (V). Déterminer le nombre de combinaisons possibles*

$$\text{Nombre de combinaisons possibles} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

# Combinaisons - Définitions

## Définition 2.11 (Combinaisons avec répétition)

On appelle combinaison avec répétition de  $p$   $p$  éléments parmi  $n$  éléments avec répétition (remise) d'un ensemble  $E$  toute disposition non ordonnée de  $p$  éléments, *non nécessairement distincts* de  $E$ . Le nombre de combinaison est

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$



# Combinaisons - Exemples

## Exemple 2.19

*Combien de combinaisons avec répétition à deux éléments de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$*

Sont  $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}$  et  $\{3, 3\}$

Et on  $C_{3+2-1}^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = 6$ .

# Combinaisons - Exemples

## Exemple 2.19

*Combien de combinaisons avec répétition à deux éléments de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$*

Sont  $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}$  et  $\{3, 3\}$

Et on  $C_{3+2-1}^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = 6$ .

# Combinaisons - Exemples - suite 1

## Exemple 2.20

*On tire au hasard trois billes dans une urne qui contient une bille rouge, deux billes bleues distinctes et quatre billes vertes distinctes. Déterminer le nombre de combinaisons possibles si on effectue les tirages avec remise.*

$$\text{Nombre de combinaisons possibles} = \frac{(7 + 3 - 1)!}{3!(7 - 1)!} = 84.$$

# Combinaisons - Exemples - suite 1

## Exemple 2.20

*On tire au hasard trois billes dans une urne qui contient une bille rouge, deux billes bleues distinctes et quatre billes vertes distinctes. Déterminer le nombre de combinaisons possibles si on effectue les tirages avec remise.*

$$\text{Nombre de combinaisons possibles} = \frac{(7 + 3 - 1)!}{3!(7 - 1)!} = 84.$$

# Combinaisons - Exemples - suite fin

## Exemple 2.21

*Après développement et réduction combien de termes comportera  $(a + b + c)^3$  ?*

On a

$$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$$

Le nombre de combinaison de  $p = 3$  éléments parmi  $n = 3$  éléments avec répétition est  $C_{3+3-1}^3 = 10$  (termes).

# Combinaisons - Exemples - suite fin

## Exemple 2.21

*Après développement et réduction combien de termes comportera  $(a + b + c)^3$  ?*

On a

$$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$$

Le nombre de combinaison de  $p = 3$  éléments parmi  $n = 3$  éléments avec répétition est  $\mathcal{C}_{3+3-1}^3 = 10$  (termes).

## Exemples

# Exemple 1

## Exemple 3.1

*Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.*

- 1** *Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?*
- 2** *Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.*
- 3** *Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.*



## Exemple 1 - suite 1

- 1 Pour chaque boulangerie, il y a 7 choix possibles. Il y a donc  $7^4$  façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.
- 2 On peut procéder comme suit pour dénombrer le nombre de possibilités :
  - La première boulangerie peut fermer n'importe quel jour de la semaine, ce qui lui laisse 7 choix.
  - La seconde boulangerie peut fermer n'importe quel autre jour : 6 choix.
  - La troisième ne peut pas fermer l'un des jours déjà choisi, ce qui lui laisse 5 choix,
  - Pour la dernière, il ne reste que 4 choix. Le nombre de possibilités est donc  $7 \times 6 \times 5 \times 4$ .
- 3 On va raisonner par différence, et compter plutôt le nombre de possibilités pour que toutes les boulangeries ferment le même jour : il y a 7 choix (on choisit juste le jour de fermeture commun). Le nombre de possibilités pour qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour est donc  $7^4 - 7$ .

## Exemple 2

### Exemple 3.2

*Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes.*

*Traditionnellement, trèfle, carreau, cœur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dénombrer les mains suivantes :*

- 1** *quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).*
- 2** *carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).*
- 3** *full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).*
- 4** *quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.*
- 5** *brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).*