

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN  
KHOA TOÁN-ỨNG DỤNG



# BÁO CÁO NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

**Đề tài:**

**TỐI ƯU TUYẾN TÍNH CÓ THAM SỐ**

Chủ nhiệm đề tài: NGUYỄN THÀNH NAM - 3122480034

LÊ ĐỨC ANH - 3122480001

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2023

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN  
KHOA TOÁN-ỨNG DỤNG



BÁO CÁO  
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

Đề tài:  
TỐI ƯU TUYỂN TÍNH CÓ THAM SỐ

Chủ nhiệm đề tài: NGUYỄN THÀNH NAM - 3122480034

LÊ ĐỨC ANH - 3122480001

Giảng viên hướng dẫn: PGS.TS TẠ QUANG SƠN

Các cán bộ phản biện:

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2023

# Mục lục

<b>Chương 1. Lý thuyết quy hoạch tuyến tính</b>	<b>2</b>
1.1 Bài toán đơn hình . . . . .	2
1.1.1 Thuật toán M . . . . .	2
1.1.2 Thuật toán 2 pha . . . . .	2
1.2 Bài toán cải biên . . . . .	2
1.2.1 Thuật toán đơn hình cải biên . . . . .	2
1.2.2 Thuật toán đơn hình đối ngẫu . . . . .	2
1.3 Bài toán đối ngẫu . . . . .	2
1.3.1 Qui tắc cho bài toán đối ngẫu . . . . .	2
1.3.2 Lý thuyết đối ngẫu dạng chuẩn tắc . . . . .	4
1.3.3 Lý thuyết đối ngẫu dạng chính tắc . . . . .	5
1.3.4 Ví dụ minh họa . . . . .	6
1.4 Tài liệu tham khảo . . . . .	8
<b>Chương 2. Tối ưu tuyến tính chứa tham số</b>	<b>9</b>
1.5 Phương pháp giải Bài toán QHTT chứa tham số ở hàm mục tiêu . . . . .	9
1.5.1 Cơ sở lý thuyết và thuật toán . . . . .	9
1.6 Phương pháp giải Bài toán QHTT chứa tham số về phải ràng buộc . . . . .	10

## Lời nói đầu

## Lời cam đoan

## Chương 1

# CƠ SỞ LÝ THUYẾT QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

## 1.1 Bài toán đơn hình

### 1.1.1 Thuật toán M

### 1.1.2 Thuật toán 2 pha

## 1.2 Bài toán cải biên

### 1.2.1 Thuật toán đơn hình cải biên

### 1.2.2 Thuật toán đơn hình đôi ngẫu

## 1.3 Bài toán đôi ngẫu

### 1.3.1 Qui tắc cho bài toán đôi ngẫu

$$M = \{1, 2, 3, \dots, m\}, M_1 = \{1, 2, 3, \dots, m_1\}, m_1 \leq m$$

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n\}, N_1 = \{1, 2, 3, \dots, n_1\}, n_1 \leq n$$

Trường hợp 1:  $(P) Min \rightarrow (D) Max$

	Gốc ( $P$ )	$\Rightarrow$	Đổi ngẫu ( $D$ )
1.	$c^T x \rightarrow \min$		$b^T y \rightarrow \max$
2.	$\sum_{j=1}^n a_{ij} \geq b_i$	$i \in M_1$	$y_i \geq 0, i \in M_1$
3.	$\sum_{j=1}^n a_{ij} = b_i$	$i \in M \setminus M_1$	$y_i$ tự do, $i \in M \setminus M_1$
4.	$x_j \geq 0$	$j \in N_1$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j \in N_1$
5.	$x_j$ có dấu tùy ý	$j \in N_1$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, j \in N \setminus N_1$
6.	$x_j \leq 0$	$j \in N_2$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j \in N_2$

Chú ý: Nếu có  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i$ , thì theo nguyên tắc đổi ngẫu sẽ ứng với biến  $y_i \leq 0$ . Trong thực tế nên chuyển về trường hợp 2 bằng cách nhân cả hai vế của bất đẳng thức(bđt) cho  $-1$ .

Trường hợp 2:  $(P) \text{Max} \rightarrow (D) \text{Min}$

	Gốc ( $P$ )	$\Rightarrow$	Đổi ngẫu ( $D$ )
1.	$c^T x \rightarrow \max$		$b^T y \rightarrow \min$
2.	$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i$	$i \in M_1$	$y_i$ tự do, $i \in M_1$
3.	$\sum_{j=1}^n a_{ij} = b_i$	$i \in M \setminus M_1$	$y_i$ tự do, $i \in M \setminus M_1$
4.	$x_j \geq 0$	$j \in N_1$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j \in N_1$
5.	$x_j$ có dấu tùy ý	$j \in N_1$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, j \in N \setminus N_1$
6.	$x_j \leq 0$	$j \in N_2$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j \in N_2$

Chú ý: Nếu có  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \geq b_i$ , thì theo nguyên tắc đổi ngẫu sẽ ứng với biến  $y_i \leq 0$ . Trong thực tế nên chuyển về trường hợp 2 bằng cách nhân cả hai vế của bđt cho  $-1$ . (Các ràng buộc ẩn tự do thường ta không cần ghi và

bỏ qua nó).

### 1.3.2 Lý thuyết đối ngẫu dạng chuẩn tắc

Bài toán chuẩn tắc có dạng như sau, với  $A \in M_{m \times n}, b \in R^m, c \in R^n$

$$\begin{aligned}(P) \quad & c^T x \rightarrow \text{Min} \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0\end{aligned}$$

Với bài toán như trên ta có bài toán đối ngẫu như sau với  $y \in R^m$  :

$$\begin{aligned}(D) \quad & b^T y \rightarrow \text{Max} \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0\end{aligned}$$

Cặp bài toán trên được gọi là cặp bài toán đối ngẫu đối xứng vì chứa đủ ba phần : Hàm mục tiêu, ràng buộc đẳng thức (bất đẳng thức) và biến không âm.

**Định lý 1** Với mọi phương án  $x$  của bài toán  $(P)$  và mọi phương án  $y$  của bài toán  $(P^*)/(D)$ , ta có

$$g(y) \leq f(x)$$

### Định lý 2

Nếu bài toán  $(P)$  có phương án tối ưu thì bài toán  $(P^*)/(D)$  cũng có phương án tối ưu và ngược lại. Đồng thời  $V(P) = V(P^*)$ .

Nếu hàm mục tiêu của bài toán này không bị chặn thì tập các phương án của bài toán kia là rỗng.

**Hệ quả 1** Nếu các bài toán  $(P)$  và  $(P^*)$  đều có các phương án khác rỗng thì chúng đều có phương án tối ưu.

**Hệ quả 2** Giả sử  $x^*$  và  $y^*$  lần lượt là các phương án tối ưu tương ứng của bài toán  $(P)$  và  $(P^*)$ . Ta có:

$$V(P) = f(x^*) = g(y^*) = V(P^*)$$

**Hệ quả 3** Giả sử  $x^*$  và  $y^*$  tương ứng là các phương án chấp nhận được của các bài toán  $(P)$  và  $(P^*)/(D)$ . Nếu  $f(x^*) = g(y^*)$  thì  $x^*$  và  $y^*$  lần lượt là phương án tối ưu của  $(P)$  và  $(P^*)/(D)$ .

### **Định lý 3 Độ lệch bù trong đối ngẫu đối xứng**

Cho  $x^*$  và  $y^*$  tương ứng là phương án của bài toán  $(P)$  và  $(P^*)$ . Phương án  $x^*$  và  $y^*$  tối ưu khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_j^* > 0 \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}y_i^* = c_j \vee \sum_{i=1}^n a_{ij}y_i^* < c_j \implies x_j^* = 0, j = \overline{1, n} \\ y_j^* > 0 \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i^* = b_j \vee \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i^* < b_j \implies y_j^* = 0, j = \overline{1, m} \end{cases}$$

#### **1.3.3 Lý thuyết đối ngẫu dạng chính tắc**

Bài toán chính tắc có dạng như sau, với  $A \in M_{m \times n}, b \in R^m, c \in R^n$ :

$$\begin{aligned} (P) \quad & c^T x \rightarrow \text{Min} \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Với bài toán như trên ta có bài toán đối ngẫu như sau với  $y \in R^m$ :

$$\begin{aligned} (D) \quad & b^T y \rightarrow \text{Max} \\ & A^T y \leq c \end{aligned} \tag{2}$$

"Bài toán đối ngẫu không đối xứng như trên có tất cả các tính chất như đối ngẫu đối xứng".

Định lý về độ lệch bù trong đối ngẫu không đối xứng (hay còn gọi là độ lệch bù yếu).

**Định lý 4** Cặp  $(x^*, y^*)$  tương ứng là nghiệm tối ưu của bài toán (1) và (2) khi và chỉ khi

$$\text{Nếu } x_j^* > 0 \text{ thì } \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* = c_j \text{ hoặc}$$

$$\text{Nếu } \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* < c_j \text{ thì } x_j^* = 0$$

#### 1.3.4 Ví dụ minh họa

**1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT) như sau:**

$$(P) \quad f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \longrightarrow \text{Min}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2 + 3x_3 - x_4 = 20 & (1) \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 + 7x_4 \leq 32 & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \geq 18 & (3) \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$\implies$  Ta có bài toán đối ngẫu như sau :  $(D) \quad g(y) = 20y_1 + 32y_2 + 18y_3 \longrightarrow \text{Max}$

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 + 2y_3 \leq 2 & (4) \\ 2y_1 - y_2 + 4y_3 \leq -3 & (5) \\ 3y_1 + 7y_2 + y_3 \leq 4 & (6) \\ -y_1 + 7y_2 + y_3 = -6 & (7) \\ y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Cặp ràng buộc :  $x_1 \geq 0 \&(4) \quad y_2 \leq 0 \&(2)$

$x_2 \geq 0 \&(5) \quad y_3 \leq 0 \&(3)$

**2. Cho bài toán QHTT như sau:**



$$(P) \quad f(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 23 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

1. Viết bài toán đối ngẫu (D)

2. Cho biết  $x^* = (0, 14, 6, 5)$  là nghiệm tối ưu của bài toán (P). Tìm nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu (D)

### Giải

i. Ta có bài toán đối ngẫu như sau:

$$(D): g(y) = 50y_1 + 16y_2 + 23y_3 \longrightarrow \text{Min}$$

$$\begin{cases} 5y_1 - 3y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ y_1 \geq 2 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ 6y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Áp dụng định lí độ lệch bù của bài toán đối ngẫu đối xứng, với **PATU**

$$\text{của (P) là } (0, 14, 6, 5) \text{ có } x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \text{ ta suy ra: } \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 = 1 \\ 6y_1 + 2y_2 + y_3 = 1 \end{cases} ;$$

$$\Longleftrightarrow y^* = \left(2, -\frac{32}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu ( $D$ ) là  $y^* = \left(2, \frac{-32}{5}, \frac{9}{5}\right)$

#### **1.4 Tài liệu tham khảo**

## Chương 2

# TỐI ƯU TUYẾN TÍNH CHỨA THAM SỐ

Trong thực tế, ở một số mô hình Bài toán QHTT, các hệ số ban đầu như  $a_{ij}, b_i, c_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ , có thể không xác định một cách chính xác mà có thể dao động, biến đổi phụ thuộc vào một hay nhiều tham số như thời gian, bảo lụt, tắc đường, nguyên liệu v.v... Đồng thời sẽ phải giải từng bài toán quy hoạch tuyến tính ứng với từng giá trị khác nhau của tham số đấy thì chi phí tính toán phát sinh rất lớn. Do đó việc tìm phương án tối ưu cho bài toán QHTT sẽ bị mất đi ý nghĩa kinh tế của nó. Để khắc phục tình trạng này,

### 1.5 Phương pháp giải Bài toán QHTT chứa tham số ở hàm mục tiêu

#### 1.5.1 Cơ sở lý thuyết và thuật toán

Ta xét Bài toán quy hoạch sau đây:

*Tìm giá trị của  $x_1, x_2, \dots, x_n$  làm cực tiểu hàm mục tiêu*

$$f(x) = \sum_{j=1}^n (c_j + d_j t) x_j \longrightarrow \text{Min} \quad (3)$$

*ứng với các ràng buộc đẳng thức như sau :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1, m} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \quad (5)$$

$$u \leq t \leq v \quad (6)$$

## **1.6 Phương pháp giải Bài toán QHTT chứa tham số về phải ràng buộc**