TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
KHOA TOÁN ỨNG DỤNG

BÁO CÁO
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

Đề tài:

TỐI ƯU TUYẾN TÍNH CÓ THAM SỐ

Chủ nhiệm đề tài: NGUYỄN THÀNH NAM - 3122480034

LÊ ĐỨC ANH - 3122480001

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2023

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
KHOA TOÁN ỨNG DỤNG

BÁO CÁO

NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

Đề tài:

TỐI ƯU TUYẾN TÍNH CÓ THAM SỐ

Chủ nhiệm đề tài: NGUYỄN THÀNH NAM - 3122480034

LÊ ĐỨC ANH - 3122480001

Giảng viên hướng dẫn: PGS.TS TẠ QUANG SƠN

Các cán bộ phản biện:

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2023

Mục lục

1 Lời nói đầu

jhskjhdfhaksgfkjsbvckcvbxzvck àdsfsfdsjhfd sdfsdf sdfsdf sdfsd sdfsdfsdfssdfsdfsdfsd sdfsdfsdfsdfsd dfsddfsdfsdfsdf

2 Chương 1| Cơ sở lý thuyết quy hoạch tuyến tính

2.1 Bài toán đơn hình

2.1.1 Thuật toán M

2.1.2 Thuật toán 2 pha

2.2 Bài toán cải biên

2.2.1 Thuật toán đơn hình cải biên

2.2.2 Thuật toán đơn hình đối ngẫu

2.3 Bài toán đối ngẫu

2.3.1 Qui tắc cho bài toán đối ngẫu

$$
\begin{aligned}
M &= \{1,2,3,\ldots,m\}, M_1 = \{1,2,3,\ldots,m_1\}, m_1 \le m \\
N &= \{1,2,3,\ldots,n\}, N_1 = \{1,2,3,\ldots,n_1\}, n_1 \le n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Trường hợp 1: $(P)\, Min \to (D) Max$

	Gốc (P)	$\Rightarrow$	Đối ngẫu (D)
1.	$c^T x \to min$		$b^T y \to max$
2.	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ge b_i$	$i \in M_1$	$y_i \ge 0, i \in M_1$
3.	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i$	$i \in M \setminus M_1$	y_i tự do , $i \in M \setminus M_1$
4.	$x_j \ge 0$	$j \in N_1$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, j \in N_1$
5.	x_j có dấu tuỳ ý	$j \in N_1$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, j \in N \setminus N_1$
6.	$x_j \le 0$	$j \in N_2$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, j \in N_2$

Chú ý: Nếu có $\sum_{j=1}^{n} \le b_i$, thì theo nguyên tắc đối ngẫu sẽ ứng với biến $y_i \le 0$. Trong thực tế nên chuyển về trường hợp 2 bằng cách nhân cả hai vế của bđt cho -1.

Trường hợp 2: $(P)Max \to (D)Min$

	Gốc (P)	$\Rightarrow$	Đối ngẫu (D)
1.	$c^T x \to max$		$b^T y \to min$
2.	$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i$	$i \in M_1$	y_i tự do, $i \in M_1$
3.	$\sum_{j=1}^n a_{ij} = b_i$	$i \in M \backslash M_1$	y_i tự do , $i \in M \backslash M_1$
4.	$x_j \geq 0$	$j \in N_1$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j \in N_1$
5.	x_j có dấu tuỳ ý	$j \in N_1$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, j \in N \backslash N_1$
6.	$x_j \leq 0$	$j \in N_2$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j \in N_2$

Chú ý: Nếu có $\sum_{j=1}^n a_{ij} \geq b_i$, thì theo nguyên tắc đối ngẫu sẽ ứng với biến $y_i \leq 0$. Trong thực tế nên chuyển về trường hợp 2 bằng cách nhân cả hai vế của bất đẳng thức cho -1. (Các ràng buộc ẩn tự do thường ta không cần ghi và bỏ qua nó).

2.3.2 Lý thuyết đối ngẫu dạng chuẩn tắc

Bài toán chuẩn tắc có dạng như sau, với $A \in M_{m \times n}, b \in R^m, c \in R^n$

$$\begin{aligned} (P) \quad & c^T x \to Min \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Với bài toán như trên ta có bài toán đối ngẫu như sau với $y \in R^m$:

$$\begin{aligned} (D) \quad & b^T y \to Max \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Cặp bài toán trên được gọi là cặp bài toán đối ngẫu đối xứng vì chứa đủ ba phần : Hàm mục tiêu,ràng buộc đẳng thức (bất đẳng thức) và biến không âm.

Định lý 1 *Với mọi phương án x của bài toán (P) và mọi phương án y của bài toán $(P^*)/(D)$, ta có*

$$g(y) \leq f(x)$$

Định lý 2

Nếu bài toán (P) có phương án tối ưu thì bài toán $(P^*)/(D)$ cũng có phương án tối ưu và ngược lại. Đồng thời $V(P) = V(P^*)$.

Nếu hàm mục tiêu của bài toán này không bị chặn thì tập các phương án của bài toán kia là rỗng.

Hệ quả 1 *Nếu các bài toán (P) và (P^*) đều có các phương án khác rỗng thì chúng đều có phương án tối ưu.*

Hệ quả 2 *Giả sử x^* và y^* lần lượt là các phương án tối ưu tương ứng của bài toán (P) và (P^*). Ta có:*

$$V(P) = f(x^*) = g(y^*) = V(P^*)$$

Hệ quả 3 *Giả sử x^* và y^* tương ứng là các phương án chấp nhận được của các bài toán (P) và $(P^*)/(D)$. Nếu $f(x^*) = g(y^*)$ thì x^* và y^* lần lượt là phương án tối ưu của (P) và $(P^*)/(D)$.*

Định lý 3 ***Độ lệch bù trong đối ngẫu đối xứng***
Cho x^* và y^* tương ứng là phương án của bài toán (P) và (P^*). Phương án x^* và y^* tối ưu khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_j^* > 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* = c_j \ \vee \ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* < c_j \Longrightarrow x_j^* = 0, j = \overline{1,n} \\ y_j^* > 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* = b_j \ \vee \ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* < b_j \Longrightarrow y_j^* = 0, j = \overline{1,m} \end{cases}$$

2.3.3 Lý thuyết đối ngẫu dạng chính tắc

Bài toán chính tắc có dạng như sau, với $A \in M_{m\times n}, b \in R^m, c \in R^n$:

$$\begin{aligned} (P) \quad c^T x &\to Min \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Với bài toán như trên ta có bài toán đối ngẫu như sau với $y \in R^m$:

$$\begin{aligned} (D) \quad b^T y &\to Max \\ A^T y &\leq c \end{aligned} \tag{5}$$

"Bài toán đối ngẫu không đối xứng như trên có tất cả cá tính chất như đối ngẫu đối xứng".
Định lí về độ lệch bù trong đối ngẫu không đối xứng (hay còn gọi là độ lệch bù yếu).

Định lý 4 *Cặp* (x^*, y^*) *tướng ứng là nghiệm tối ưu của bài toán* (1) *và* (2) *khi và chỉ khi*

$$\text{Nếu } x_j^* > 0 \text{ thì } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ hoặc}$$

$$\text{Nếu } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* < c_j \text{ thì } x_j^* = 0$$

2.3.4 Ví dụ minh hoạ

1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính như sau:

$$(P) \quad f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \longrightarrow Min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x - 2 + 3x_3 - x_4 = 20 & (1) \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 + 7x_4 \leq 32 & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \geq 18 & (3) \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$Ta có bài toán đối ngẫu như sau :$(D) \quad g(y) = 20y_1 + 32y_2 + 18y_3 \longrightarrow Max$

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 + 2y_3 \leq 2 & (4) \\ 2y_1 - y_2 + 4y_3 \leq -3 & (5) \\ 3y_1 + 7y_2 + y_3 \leq 4 & (6) \\ -y_1 + 7y_2 + y_3 = -6 & (7) \\ y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Cặp ràng buộc : $\begin{matrix} x_1 \geq 0 \;\&(4) & y_2 \leq 0 \;\&(2) \\ x_2 \geq 0 \;\&(5) & y_3 \leq 0 \;\&(3) \end{matrix}$

2.Cho bài toán quy hoạch tuyến tính như sau:

$$(\text{P}) \quad f(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} 5x_1+x_2+x_3+6x_4=50 \\ -3x_1+x_3+2x_4 \geq 16 \\ 4x_1+3x_3+x_4 \leq 23 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3,4 \end{cases}$$

1. Viết bài toán đối ngẫu $\big(\mathrm{D}\big)$
2. Cho biết x^*=$(0,14,6,5)$ là nghiệm tối ưu của bài toán (P).Tìm nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu (D)

Giải

i.Ta có bài toán đối ngẫu như sau:

$$(D)\text{: } g(y)=50y_1+16y_2+23y_3 \longrightarrow Min$$

$$\begin{cases} 5y_1-3y_2+4y_3 \geq 2 \\ y_1 \geq 2 \\ y_1+y_2+3y_3 \geq 1 \\ 6y_1+2y_2+y_3 \geq 1 \\ y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Áp dụng định lí độ lệch bù của bài toán đối ngẫu đối xứng,với **PATƯ** của (P) là $(0,14,6,5)$ có $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ ta suy ra : $\begin{cases} y_1=2 \\ y_1+y_2+3y_3=1 \\ 6y_1+2y_2+y_3=1 \end{cases}$; $\iff y^*=\left(2,\dfrac{-32}{5},\dfrac{9}{5}\right)$

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu (D) là $y^*=\left(2,\frac{-32}{5},\frac{9}{5}\right)$