TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

oOo

CÁC MÔ HÌNH NGẪU NHIÊN VÀ ỨNG DỤNG

LÝ THUYẾT XẾP HÀNG VÀ ỨNG DỤNG

Nhóm sinh viên thực hiện:	**Nhóm 5**
Lớp:	**Toán Tin - K60**
Giảng viên hướng dẫn:	**TS. Nguyễn Thị Ngọc Anh**

HÀ NỘI, 06/2019

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

———————o0o———————

LÝ THUYẾT XẾP HÀNG VÀ ỨNG DỤNG

BÁO CÁO CUỐI KỲ

Đề tài: Lý thuyết xếp hàng và ứng dụng

Nhóm sinh viên thực hiện:	Nhóm 5
Lớp:	Toán Tin - k60
Giảng viên hướng dẫn:	TS. Nguyễn Thị Ngọc Anh

HÀ NỘI, 06/2019

Mục lục

Mở đầu **4**

1 Các kiến thức cần chuẩn bị **6**

1.1 Xích Markov 6

1.2 Quá trình Markov 7

1.3 Phân phối Poisson 7

1.4 Phân phối mũ 8

2 Lý thuyết xếp hàng **9**

2.1 Các khái niệm 9

2.2 Mô hình hàng đợi M/M/1 10

2.3 Mô hình hàng đợi M/M/1/K 13

2.4 Quá trình sinh tử 14

2.5 Mô hình hàng đợi M/M/c 16

2.6 Mô hình hàng đợi M/M/c/k 17

3 Ứng dụng **19**

Tài liệu tham khảo **20**

Mở đầu

Lý thuyết xếp hàng đã được nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi trên thế giới trong nhiều lĩnh vực ngành nghề khác nhau như bưu chính viễn thông, hàng không, đường sắt, kiểm soát lưu lượng giao thông, đánh giá hiệu năng hệ thống máy tính, y tế và chăm sóc sức khỏe, không lưu, bán vé ...Trong nhiều hệ thống phục vụ, các khách hàng (costumer) phải dùng chung tài nguyên, phải chờ để được phục vụ và đôi khi bị từ chối phục vụ. Lý thuyết quá trình xếp hàng (queueing process) xác định và tìm các phương án tối ưu để hệ thống phục vụ là tốt nhất. Trong nửa đầu của thế kỷ 20 lý thuyết xếp hàng đã được ứng dụng để nghiên cứu thời đợi trong các hệ thống điện thoại. Ngày nay lý thuyết xếp hàng còn có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như trong mạng máy tính, trong việc quản lý xí nghiệp, quản lý giao thông và trong các hệ phục vụ khác ... Ngoài ra lý thuyết xếp hàng cũng còn là cơ sở toán học để nghiên cứu và ứng dụng trong nhiều bài toán kinh tế như đầu tư, kiểm kê, rủi ro của bảo hiểm, thị trường chứng khoán ... Chuỗi Markov là quá trình xếp hàng với thời gian rời rạc đã được xem xét trong giáo trình xác suất thống kê. Quá trình sinh tử cũng là quá trình xếp hàng, trong đó sinh biểu thị sự đến và tử biểu thị sự rời hàng của hệ thống. Đối với lý thuyết xếp hàng ta quan tâm đến các số đo hiệu năng, đó là các giá trị trung bình khi quá trình đạt trạng thái dừng bao gồm: độ dài hàng đợi trung bình của hàng, độ dài hàng đợi trung bình của hệ thống, thời gian đợi trung bình của hàng (trễ của hàng) và thời gian đợi trung bình của hệ thống (trễ của hệ thống). Để tính các đại lượng này ta có thể sử dụng phương pháp giải phương trình tích phân dạng Wiener - Hợp hoặc phương pháp khảo sát chuỗi Markov nhúng. Từ đó suy ra các công thức tính các phân bố ổn định cho các loại hàng M/M/k,M/M/k/N; Công thức tổng quát tính các giá trị trung bình này cho các hàng G/G/1 và công thức cụ thể cho các hàng đặc biệt.

Trên cơ sở đọc tìm hiểu các tài liệu tham khảo, dưới sự hướng dẫn của T.S Nguyễn Thị Ngọc Anh, nội dung báo cáo tập trung nghiên cứu mô hình lý thuyết xếp hang và một số ứng dụng thực tiễn của mô hình. Báo cáo được chia làm 3 chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày về một số phân bố xác suất liên quan như: Xích Markov, quá trình Markov, phân phối Poisson, phân phối mũ.

Chương 2: Một số mô hình xếp hàng. Trình bày về một số mô hình xếp hàng cơ bản gồm: Mô hình hệ thống xếp hàng Markov đơn giản gồm mô hình sinh-tử, trình bày về các mô hình hàng đợi M/M/1,M/M/1/k, M/M/c và M/M/c/K.

Chương 3: Ứng dụng Chương này tìm hiểu về một vài ứng dụng đơn giản của mô hình xếp hàng bao gồm:Chương trình mô phỏng các mô hình xếp hàng.

Trong lời mở đầu này, chúng em xin gửi lời cảm ơn chân thành tới T.S Nguyễn Thị Ngọc Anh đã tận tình hướng dẫn để chúng em hoàn thành báo cáo này. Chúng em cũng xin cảm ơn các thầy cô trong viện Toán Ứng Dụng Và Tin Học – Đại Học Bách Khoa Hà Nội đã dành sự quan tâm dạy bảo cũng như tạo điều kiện thuận lợi cho em trong quá trình học tập.

Quá trình thực hiện báo cáo trên chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Vì vậy, chúng em mong nhận được những góp ý của các cô cũng như các bạn để nội dung báo cáo được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, tháng 06 năm 2019

Chương 1

Các kiến thức cần chuẩn bị

Trong chương này, chúng em xin trình bày về xích Markov và quá trình Markov, một số phân phối xác suất liên quan đến quá trình xếp hàng là phân phối Poisson, phân phối mũ.

1.1 Xích Markov

Xét một hệ nào đó được quan sát tại các thời điểm rời rạc 0,1,2,... Giả sử các quan sát đó là $X_0, X_1, ..., X_n, ...$ Khi đó ta có một dãy các đại lượng ngẫu nhiên (ĐLNN)(X_n) trong đó X_n là trạng thái của hệ tại thời điểm n. Giả thiết rằng mỗi X_n, n = 0,1,... là một ĐLNN rời rạc. Ký hiệu E là tập giá trị của các (X_n). Khi đó E là một tập hữu hạn hay đếm được, các phần tử của nó được ký hiệu là i,j,k... Ta gọi E là không gian trạng thái của dãy.

Định nghĩa 1.1.1 Ta nói rằng dãy biến ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ là một xích Markov với phân phối ban đầu λ và ma trận chuyển P nếu với mọi $n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ và với mọi $i_1, i_2, ..., i_{k+1}... \in E$ ta có:

(i) X_0 có phân phối λ, tức là

$$P(X_0 = i) = \lambda_i, \forall i \in I;$$

(ii) $P(X_{k+1} = i_{k+1}|X_1 = i_1, ..., X_k = i_k) = P(X_{k+1} = i_{k+1}|X_k = i_k).$

Ta coi thời điểm k+1 là tương lai, k là hiện tại còn 1,2,...,k-1 là quá khứ. Như vậy, xác suất có điều kiện của một sự kiện B nào đó trong tương lai nếu biết hiện tại và quá khứ của hệ cũng giống như xác suất có điều kiện của B nếu chỉ biết trạng thái hiện tại của hệ. Đó chính là tính Markov của hệ. Đôi khi tính Markov của hệ còn phát biểu dưới dạng: Nếu biết trạng thái hiện tại của hệ thì quá khứ và tương lai độc lập với nhau

1.2 Quá trình Markov

Xét họ các ĐLNN rời rạc $(X_t)_{t\geq 0}$ với tập chỉ số t là các số thực không âm $t \in [0, \infty]$. Ký hiệu E $=X_t(\Omega)$ là tập giá trị của X_t . Khi đó E là một tập hữu hạn hay đếm được, các phần tử của nó được ký hiệu là i,j,k.... Ta gọi (X_t) là một quá trình ngẫu nhiên với không gian trạng thái E .

Định nghĩa 1.2.1 Ta nói rằng (X_t) là một quá trình Markov nếu nó thỏa mãn:

$$P(X_{t+s} = i | X_u, u \leq t) = P(X_{t+s} = i | X_t = i)$$

Như vậy, xác suất có điều kiện của một sự kiện B nào đó trong tương lai nếu biết hiện tại và quá khứ của hệ cũng giống như xác suất có điều kiện của B nếu chỉ biết trạng thái hiện tại của hệ. Đó chính là tính Markov của hệ. Đôi khi tính Markov của hệ còn phát biểu dưới dạng: "Nếu biết trạng thái hiện tại X_t của hệ thì quá khứ X_u,u $<$ t và tương lai X_s,s $>$ t là độc lập với nhau."

1.3 Phân phối Poisson

a.Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo phân phối Poisson với tham số λ nếu:

$$P(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, x = 0, 1, 2, ...$$

Ký hiệu: $X \sim \wp(\lambda)$

b.Các giá trị đặc trưng

Kỳ vọng: $E(X) = \lambda$

Phương sai :$V(X) = \lambda$.

1.4 Phân phối mũ

a.Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo phân phối mũ với tham số $\lambda(\lambda > 0)$ có hàm mật độ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda e}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ký hiệu: $X \sim \xi(\lambda)$

Hàm phân phối xác suất:

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

b.Các giá trị đặc trưng:

Kỳ vọng: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Phương sai: $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

c.Các tính chất:

(i) $P(X > a) = e^{-\lambda a}(a \geq 0)$

(ii) Tính không nhớ: $X \sim \xi(\lambda) \Leftrightarrow P(X > t + s|X > s) = P(X > t)$

Chương 2

Lý thuyết xếp hàng

2.1 Các khái niệm

Một quá trình xếp hàng là quá trình là khách hàng đến được 1 thời điểm ngẫu nhiên nào đó và phải chờ hoặc được phục vụ với trong một khoảng thời gian ngẫu nhiên nào đấy.
Quá trình xếp hàng có thể được biểu diễn bằng 1 bộ:

$$\left(\begin{array}{c}\text{arrival}\\ \text{process}\end{array} \Big/ \begin{array}{c}\text{service}\\ \text{process}\end{array} \Big/ \begin{array}{c}\text{number}\\ \text{of servers}\end{array} \Big/ \begin{array}{c}\text{maximum}\\ \text{possible}\\ \text{in system}\end{array} \Big/ \begin{array}{c}\text{queue}\\ \text{discipline}\end{array} \right)$$

Trong đó:
Arrival Process: Dòng vào.
Service Process: Quá trình phục vụ.
Number of servers: Số lượng server(hay số kênh phục vụ).
Maximum Possible: Số lượng vị trí trong hệ thống.
Queue Disipline: Nguyên tắc phục vụ.

Một số kí hiệu của Kendall:

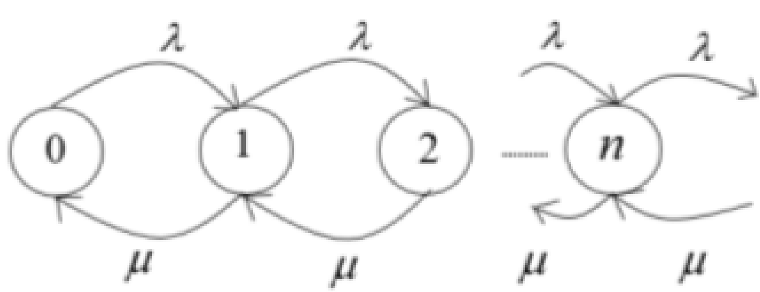
Kí hiệu	Giải thích
M	dòng vào, thời gian phục vụ theo phân phói mũ (Markov)
D	dòng vào, thời gian phục vụ tất định
E_k	dòng vào, thời gian phục vụ theo phân phối Erlang(k,_)
G	dòng vào, thời gian phục vụ tổng quát
1,2,3,...,∞	số lượng kênh phục vụ
FIFO	hàng chờ vào trước thì được phục vụ trước (first in first out)
LIFO	hàng chờ vào sau thì được phục vụ trước (last in first out)
SIRO	được phục vụ ngẫu nhiên(serve in random orders)
PRI	hàng chờ/phục vụ có ưu tiên
GD	hệ thống tổng quát

Sau đây chúng em xin trình bày về một số mô hình xếp hàng.

2.2 Mô hình hàng đợi M/M/1

Mô hình hàng đợi M/ M/ 1 là mô hình đơn giản nhất trong các mô hình hàng đợi được sử dụng trong thực tế với các lượt đến theo phân phối Poisson, thời gian phục vụ theo phân phối mũ và có duy nhất một server.
- Dòng vào là quá trình Poisson tham số λ
- Dòng phục vụ có thời gian tuân theo luật phân phối mũ $\frac{1}{\mu}$
- $[p_0, p_1, ...]$ là phân phối lượng khách hàng ổn định,
- Với Nq là số lượng khách trong hàng đợi và 1 là số lượng khách hàng dang được phục vụ.

Hệ thống được minh họa như hình dưới đây:



Suy ra

$$\begin{cases} p_0\lambda = p_1\mu \\ p_0\lambda + p_2\mu = p_1(\mu + \lambda) \\ ... \\ p_{n-1}\lambda + p_{n+1}\mu = p_n(\mu + \lambda) \forall n \leq 1 \end{cases}$$

Số server rỗi

$$N_q = N$$

, số server phục vụ

$$N_q = N - 1$$

Ma trận sinh:

Ta có

$$P(t) = e^{Gt}$$

. Trong đó:

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & ... & ... \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & ... \\ 0 & \mu & -(\mu + \lambda) & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

p được gọi là phân phối dừng nếu p là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} p.G = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{cases}$$

$$p = \left[p_0, p_1, \cdot \cdot \cdot, p_n\right],$$

Ta được

$$\begin{cases} \lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + \mu p_2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra:

$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$
$p_2 = \frac{\lambda+\mu}{\mu} p_1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda+\mu}{\mu} p_0 - \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$

Tương tự như vậy:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

, ta gọi p_n là xác suất khi hệ thống phục vụ hết khách hàng. Do$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ nên

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1 \tag{2.1}$$

Đặt ρ là tỉ lệ có ích của hệ thống(xác suất để hệ thống bận việc

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{dv}{dpv} \tag{2.2}$$

Trong đó:

- dv: dòng vào

- dpv: dòng phục vụ

$$(2.1) \Leftrightarrow p_0 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n = 1 \Leftrightarrow p_0 \lim_{n \to +\infty} \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} = 1$$

Biểu thức trên sẽ không tồn tại nếu $\rho > 1$
Còn nếu $\rho < 1$ ta được $\frac{p_0}{1-\rho} = 1 \Leftrightarrow p_0 = 1 - \rho$.
Từ phân phối hình học suy ra $p_n = \rho(1-\rho)$ với $\rho < 1$
Khi đó số lượng khách trung bình trong hệ thống:

$$L = E[\mathrm{N}] = \sum_{n=0}^{+\infty} np^n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Số lượng khách hàng trung bình trong dòng chờ: L_q

$$L_q = E[\mathrm{N}_q] = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Và

$$V[N] = E[N^2] - (E[N])^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$V[N_q] = E[{N_q}^2] - (E[N_q])^2 = -\frac{\rho^4 + \rho^3 + \rho^2}{(1-\rho)^2}$$

Theo luật Little

Thời gian trung bình mà một khách hàng phải mất trong hệ thống: W_s

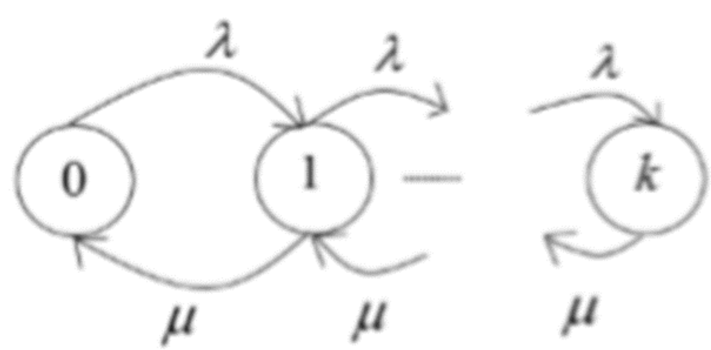
$$\mathrm{W}_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Thời gian trung bình mà một khách hàng phải mất để xếp hàng:W_q

$$\mathrm{W}_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

2.3 Mô hình hàng đợi M/M/1/K

Sơ đồ $M/M/1/K$ được minh họa như hình dưới:



Ma trận sinh

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & ... & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p.G = 0 \\ \sum_{i=0}^{k} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu p_1 = \lambda p_0 \\ \mu p_{n+1} = (\lambda+\mu)p_n - \lambda p_{n-1} \\ \mu p_k = \lambda p_{k-1} \\ \sum_{i=0}^{k} p_i = 1 \end{cases}$$

Suy ra

$$p_n = p^n p_0$$

với

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{k+1}}, \rho \neq 1 \\ \frac{1}{k+1}, \rho = 1 \end{cases}$$

Số lượng khách hàng trung bình trong hệ thống là:

$$L = \sum_{n=0}^{k} np_n = p_0\rho \sum_{n=1}^{k} np^{n-1} = \begin{cases} \rho\frac{1+kp^{k+1}-(k+1)\rho^k}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})}, \rho \neq 1 \\ \frac{k}{2}, \rho = 1 \end{cases}$$

Số lượng khách hàng trung bình trong hàng đợi:

$$L_q = \sum_{n=1}^{k-1} np_{n+1} = p_0\rho^2 \sum_{n=1}^{k-1} np^{n-1} = \begin{cases} L - \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}, \rho \neq 1 \\ \frac{k(k+1)}{2(k+1)}, \rho = 1 \end{cases}$$

Và

$$V[N] = \begin{cases} (2k^2+2k-1)\rho^{k+1} - k^2\rho^{k+2} - L^2, \rho \neq 1 \\ \frac{k(k+2)}{12}, \rho = 1 \end{cases}$$

$$V[N_q] = V[N] - p_0(L + L_q), \lambda_e = \lambda(1 - p_k)$$

Theo luật Little, Thời gian trung bình mà một khách hàng phải mất trong hệ thống là:

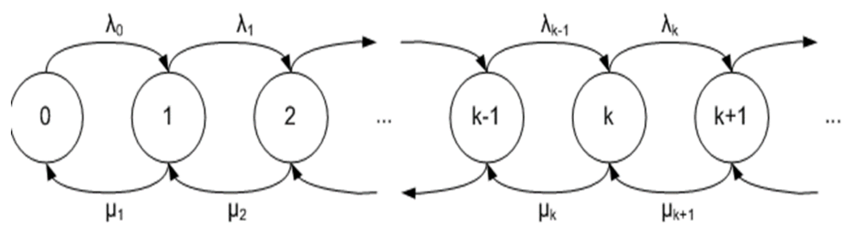
$$\mathrm{W}_s = \frac{L}{\lambda(1-p_k)}$$

Thời gian trung bình mà một khách hàng phải mất để xếp hàng là:

$$\mathrm{W}_q = \mathrm{W} - \frac{1}{\mu}$$

2.4 Quá trình sinh tử

Qúa trình sinh tử là một loại đặc biệt của quá trình Markov, nó có ứng dụng rất nhiều trong rất nhiều loại hệ thống chờ Markov. Quá trình sinh-tử là quá trình mà 1 trạng thái chỉ có thể chuyển sang các trạng thái kề nó.



Ma trận sinh:

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \\ & & & ... & ... \\ & & & ... & ... \end{bmatrix}$$

p được gọi là phân phối dừng nếu p là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} p.G = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{cases}$$

Từ hệ trên ta được:

$$p_1 = p_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} \tag{2.3}$$

$$p_2 = p_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2}$$

$$\vdots$$

$$p_n = p_0 \frac{\lambda_0 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1 ... \mu_n}$$

với

$$p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right]^{-1} \tag{2.4}$$

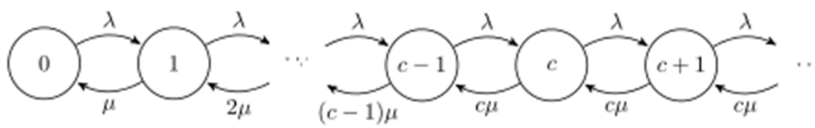
Quá trình sinh-tử có thể được sử dụng trong rất nhiều hệ thống hàng chờ. Như với hệ thống M/M/1, từ phương trình (2.3), ta để tỉ lệ sinh bằng hăng số λ, tỉ lệ tử bằng hằng số μ. Với hệ thống $M/M/1/K$, ta để $\lambda_n = 0$ với mọi $n > k$.

2.5 Mô hình hàng đợi M/M/c

Ta thấy mô hình hàng đợi M/M/C cũng là một quá trình sinh tử với các hệ số sinh, tử:

$$\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, ...,$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 1, ..., c-1 \\ c\mu & n = c, c+1, ... \end{cases}$$



Lí do $\mu_n = n\mu$ với $n = 1, ..., c-1$ là khi có ít hơn c khách hàn traong hệ thống, mỗi khách hàng sẽ được phục vụ ngay do đó tỉ lệ phục vụ sẽ bằng số khách hàng vì những server chưa được phục vụ vẫn còn rảnh rỗi. Nếu có nhiều hơn c khách hàng trong hệ thống thì sẽ có chính xác c server bận và do đó tỉ lệ phục vụ phải là $c\mu$.

Từ đó ta có ma trận sinh

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & & & \\ & \dots & & & & \\ & c\mu & -(\lambda + c\mu) & \lambda & & \\ & & c\mu & -(\lambda + c\mu) & \lambda & \\ & & & \ddots & & \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \frac{r^n}{n!} & n = 0, 1, ..., c-1 \\ p_0 \frac{r^n}{(c^{n-c} c!)} & n = c, c+1, ... \end{cases} \tag{2.5}$$

với

$$p_0 = \left[\frac{c r^c}{c!(c-r)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} \right]^{-1} \tag{2.6}$$

trong đó $r = \frac{\lambda}{\mu}$ và $\rho = \frac{r}{c} < 1$

Số lượng khách hàng chờ trung bình trong hệ thống:

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)p_n = \frac{p_0 r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \tag{2.7}$$

Áp dụng luật Little ta được:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

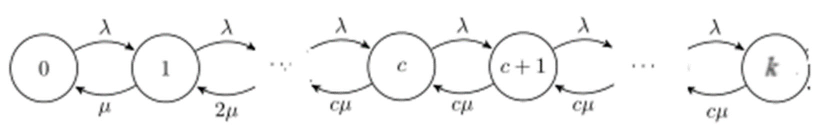
$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Và cuối cùng áp dụng luật Little một lần nữa:

$$L = L_q + r$$

2.6 Mô hình hàng đợi M/M/c/k

Khi vào phòng chờ trong một hệ thống xếp hàng có một giới hạn, chúng ta sẽ có một hàng đợi xếp hàng hữu hạn. Trong hầu hết các tình huống thực tế, một hàng đợi hữu hạn xảy ra nhiều hơn nhiều so với một hàng đợi với một hàng chờ có kích thước vô hạn.



Xem xét một hệ thống xếp hàng có c - server với lượt đến tuân theo phân phối Poisson, thời gian phục vụ theo phân phối mũ và giới hạn K cho số lượng khách hàng trong hệ thống. Rõ ràng,$K \neq c$. Giả sử rằng λ và μ lần lượt là tốc độ đến và tốc độ phục vụ:

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, ..., K-1$$
$$\mu_n = n\mu, \quad n = 1, 2, ..., s-1$$
$$\mu_n = s\mu, \quad n = s, s+1, ..., K$$

Ma trận sinh G là:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & & & \\ & \dots & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & c\mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ & & & c\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

Khi hệ thống đang ở trạng thái cân bằng, xác suất mà các khách hàng đến sẽ không được tham gia vào hệ thống là . Do đó, khi có $n(n < K)$ khách hàng trong hệ thống, xác suất mà một khách hàng đến được tham gia vào hệ thống là $\frac{p_k}{1-p_k}$
Thời gian trung bình khách hàng trong hệ thống là:

$$W_q = \frac{1}{c\mu(1-p_k)} \sum_{n-c}^{K-1} (n-c+1)p_n,$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Số lượng trung bình của khách hàng trong hàng đợi và trong hệ thống lần lượt là:

$$L_q = \lambda(1-p_k)W_q$$
$$L = \lambda(1-p_kW)$$

Chương 3

Ứng dụng

Sau đây chúng em xin trình bày về chương trình mô phỏng các mô hình xếp hàng.

Tài liệu tham khảo

[1] Ngô Hoàng Long (2015), Lí thuyết nhập môn quá trình ngẫu nhiên

[2] Richard M.Feldman, Ciriaco Valdez-Flores(2010),Applied Probability and Stochastic Processes Second Edition

[3] http://www.wikipedia.net