Видно / слышно?

Вычислительное упражнение.

$X_n = U[0;\frac{1}{n}]$

$X_1 \sim U[0;1]$
$X_2 \sim U[0;\frac{1}{2}]$
$X_3 \sim U[0;\frac{1}{3}]$

a) $\operatorname{plim} X_n$?
b) $\operatorname{plim} (\sqrt{n} \cdot X_n)$?
c) $\operatorname{plim} (n \cdot X_n)$?

Идеи?

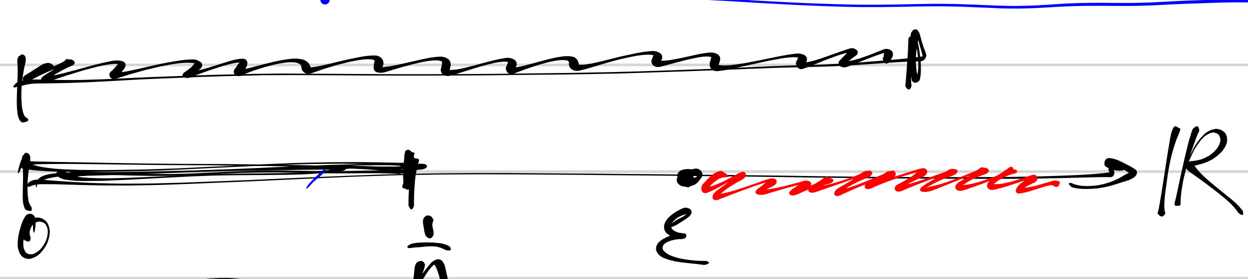
$\boxed{\operatorname{plim} X_n = 0 \ ?}$

догадка?

конц. в предел

$\varepsilon > 0$

$\boxed{\text{формально:}}$ $P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) = 0$



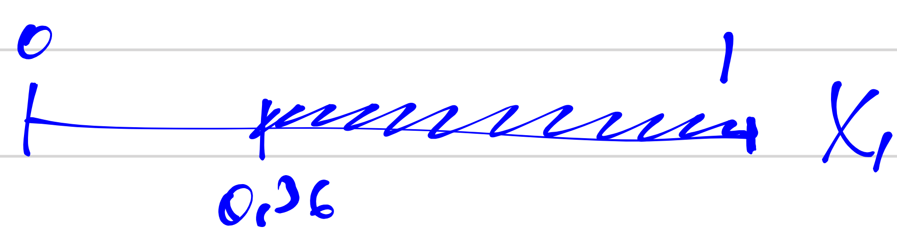
возьмём $n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\lim P(X_n > \varepsilon) = 0$

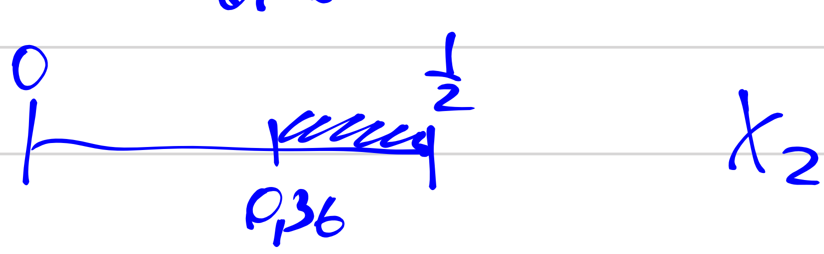
при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad P(X_n > \varepsilon) = 0$

$\varepsilon = 0{,}36$

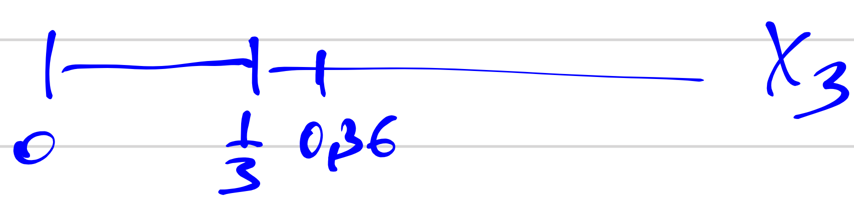
$n=1$



$n=2$

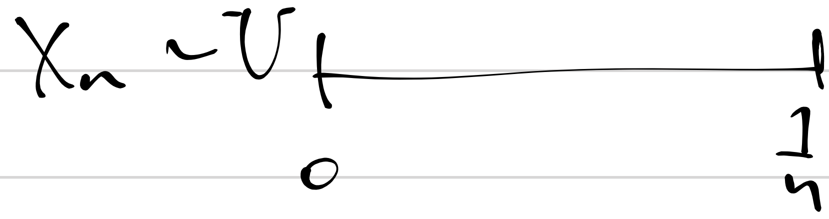


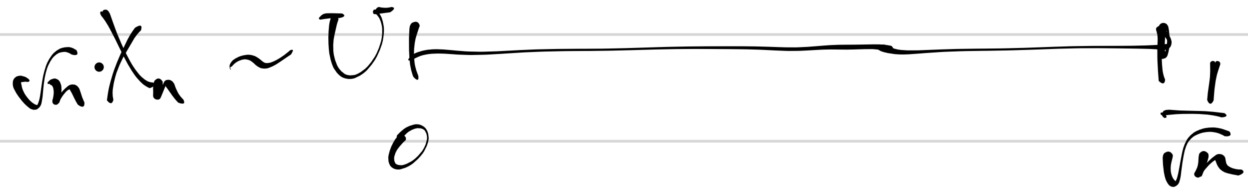
$n=3$



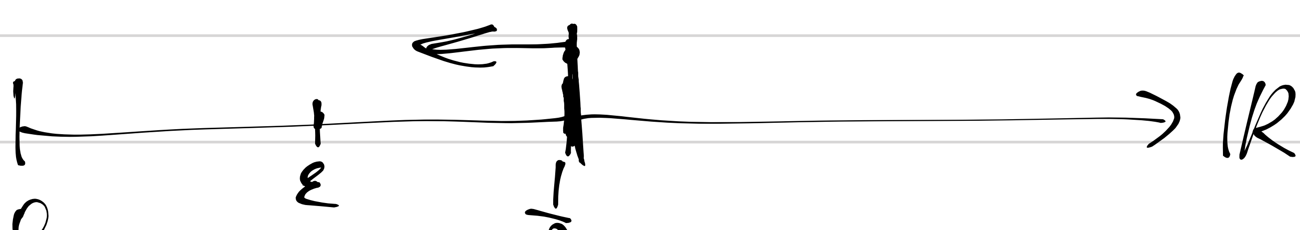
начиная с $n=3$ $\quad P(X_n > 0{,}36) = 0$.

b) $\operatorname{plim}(\sqrt{n}\cdot X_n)$ $\qquad X_n \sim U[0; \frac{1}{n}]$

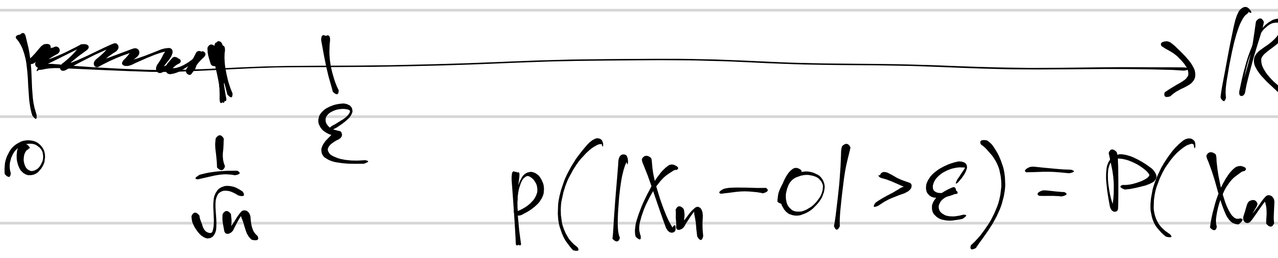




$$\frac{1}{n}\cdot\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$



начиная с некоторого n:



$$P(|X_n - 0| > \varepsilon) = \underline{P(X_n > \varepsilon)} = \underline{0}$$

$$\operatorname{plim}(\sqrt{n}X_n) = 0.$$

c) $\operatorname{plim}(\underline{n\cdot X_n})$

<u>интуиция:</u>

$X_n \sim U[0; \frac{1}{n}] \qquad n\cdot X_n \sim U[0;1]$

<u>догадка:</u> $U[0;1]$?

! Нам мало закона распределения! нам нужна с.в!

$\operatorname{plim}(nX_n) \overset{?}{=} X_1$? $\qquad X_1 \sim U[0;1]$

$\operatorname{plim}(n\cdot X_n) \overset{?}{=} 17\cdot X_{17}$? $\qquad 17X_{17} \sim U[0;1]$

$P(X_1 = 17X_{17}) = 0$!

$\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ $\quad nX_n \sim U[0;1]$

начиная с нек-рого N — независимы!

$n \geq N$

$$P(|n \cdot X_n - K| > \varepsilon) < \delta$$

K - возможный предел! $\delta = 0{,}1$

$$P(|10^6 \cdot X_{10^6} - K| > \varepsilon) < \delta$$
$$P(|2 \cdot 10^6 \cdot X_{2 \cdot 10^6} - K| \geq \varepsilon) < \delta$$

Хотя (!) $n \cdot X_n \sim U[0;1]$

plim (nX_n) не существует!

$\mathcal{F}$ - σ-algebra / σ-алгебра.

Опыт: подбр. кубик. $\boxed{\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$

К полностью видит и осознает результат.

М считает: 1, 2, много

Че отличает четные от нечетных

Инт: Список событий / вопросов, про которые индивид может однозначно ответить, произошли они или нет.

	К	М	Че
Правда ли, что выпало 3?	+	−	−

$\{3\} \in \mathcal{F}_К$ $\quad \{3\} \notin \mathcal{F}_М$ $\quad \{3\} \notin \mathcal{F}_{Че}$

Правда ли, что выпало чётное число?

$\{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}_К$

$\notin \mathcal{F}_М$

$\in \mathcal{F}_{Че}$

$$\mathcal{F}_k = \{\underline{\phi}, \underline{\Omega}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,6\}, \dots \}$$

$$\text{card}\, \mathcal{F}_k \overset{?}{=} 2^6$$

$$\mathcal{F}_{ч} = \{\underline{\phi}, \underline{\Omega}, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\} ?$$

правда ли, что хоть что-то выпало? (да)

правда ли, что ничего не выпало? (нет)

$$\text{card}\, \mathcal{F}_{ч} = 4$$

? $\mathcal{F}_м$? $\quad \text{card}\, \mathcal{F}_м = 2^3 = 8$

1 2 3 — 4 — 5 — 6

$$\mathcal{F}_м = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3,4,5,6\}, \{1,2\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}\}$$

Опр. $\mathcal{F}$ - σ-алгебра для множ-во исходов Ω, если:

1. тривиальные события ϕ и $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если события $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{F}$, то любое конструируемое из них событие с пом-ью $\cap, \cup, ()^c, \setminus$ должно $\in \mathcal{F}$.

Пример.

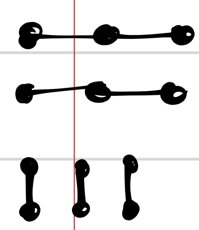
$$\mathcal{F} = \{\phi, \Omega, \{1,3\}, \{2,3\}\} \text{ — не σ-алгебра}$$

$$\{1,3\} \cap \{2,3\} = \{3\} \notin \mathcal{F}.$$

Упр:

	Y=0	Y=1	Y=2
X=1	0,2	0,1	0,1
X=2	0,1	0,3	0,2

Неф. Опр. $\sigma(Y)$ — минимальная σ-алгебра, позволяющая сказать, чему равен Y.

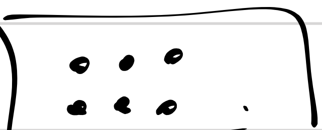
а) 
в)

а) $\sigma(X) \overset{?}{=} \{\emptyset, \Omega, \{X=1\}, \{X=2\}\}$

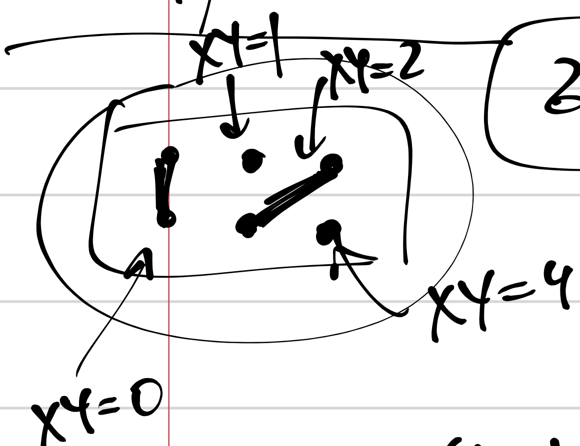
$\{X=1\} \setminus \{X=1\} = \emptyset \in \mathcal{F}$

$\{X=1\} \cup \{X=1\}^c = \Omega \in \mathcal{F}$

в) card $\sigma(Y) \overset{?}{=}$

c) card $\sigma(X,Y) \overset{?}{=}$ 

d) card $\sigma(X \cdot Y) ?$



$\sigma(Y) = \{\emptyset, \Omega, \{Y=0\}, \{Y=1\}, \{Y=2\}, \{Y \neq 0\}, \{Y \neq 2\}, \{Y \neq 1\}\}$ - интуи

c) $\sigma(X,Y) \leftarrow \{\emptyset, \Omega, \{X=1\}, \{Y=2\}, \{Y>X\} \ldots\}$

$A = \{X=1, Y=0\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}_c$

$\{X=2, Y=1\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}_c$

$\{X=1, Y=0\}$ или $\{X=2, Y=1\} ? \in \mathcal{F}_c$

card $\sigma(X,Y) = 2^6 = 64$

d) card $\sigma(X \cdot Y) = 2^{?} = 2^4 = 16$

e) $\sigma(X,Y) \supseteq \sigma(X \cdot Y)$

$E(X|\mathcal{F})$ – обобщение $E(X)$

1. X – случ. величина
   $\mathcal{F}$ – σ-алгебра
2. $E(X|\mathcal{F})$ – случ. величина
   ! $E(X)$ – конст.
3. обозначение:
$$E(Y|X) = E(Y|\sigma(X))$$
$$E(Y|X,W) = E(Y|\sigma(X,W))$$

Что же такое $E(X|\mathcal{F})$?

Интуиция:

$E(X|\mathcal{F})$ – „наилучший" прогноз X, сделанный игроком с инфо $\mathcal{F}$.

на пути: формально мат-ка!

↓

никакое событие из $\mathcal{F}$ не позволяет „уточнить" прогноз.

↓

для любого $A \in \mathcal{F}$
$$\mathrm{Cov}(I_A, X - E(X|\mathcal{F})) = 0.$$

↓

Формально:

Если X – с.в, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, то $E(X|\mathcal{F})$ – это такая с.в $\hat{X}$, что
$$E(I_A \cdot X) = E(I_A \cdot \hat{X}) \text{ для } A \in \mathcal{F}.$$

Упр 1 $A = \Omega$ $I_A \overset{?}{=} 1$ $E(X) = E(\hat{X})$
$$E(X) = E(E(X|\mathcal{F}))$$

$E(I_A \cdot X) = E(I_A \cdot \hat{X})$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Упр 1 $E(X) = E(\hat{X})$

Упр 2. $Cov(I_A, X - \hat{X}) = ?$

$$= E(I_A(X - \hat{X})) - E(I_A) \cdot E(X - \hat{X}) =$$

$$= \underbrace{E(I_A X) - E(I_A \cdot \hat{X})}_{0 \text{ по опр}} - E(I_A) \cdot 0 = 0.$$

↑ по упр 1.

$Cov(I_A, X - \hat{X}) = 0$

Упр.

$\hat{x}$	a	a	b
x	0	1	2
вер	0,3	0,5	0,2

$A = \{X = 2\}$

$\mathcal{F} = \{\{X = 2\}, \{X \neq 2\}, \varnothing, \Omega\}$

$\hat{X} = E(X | \mathcal{F})$?

$E(X) = E(\hat{X})$

$0{,}9 = 0{,}8a + 0{,}2b$

$E(I_{X=2} \cdot X) = E(I_{X=2} \cdot \hat{X})$

$0.2 \cdot 2 = 0{,}2 \cdot b$ $\quad b = 2$

$a = \frac{5}{8}$

$$\hat{X} = E(X | \mathcal{F}) = \begin{cases} 2, & \text{если } X = 2 \\ \frac{5}{8}, & \text{если } X = 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$