Всё видно? Слышно?

Опр. $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ дискретное

Фильтрация — $\boxed{\text{посл-сть}}$ $\boxed{\sigma\text{-алгебр.}}$ $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \dots$

Опр. если $X_0, X_1, X_2 \dots$ сл. процесс, то $\boxed{\text{естественная фильтрация}}$ — это

natural filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots X_n)$$

Опр. (X_n) наз-ся мартингалом по отнош к фильтрации $(\mathcal{F}_n)$, если

① $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$

② X_n изм. на отн-но $\mathcal{F}_n$

Упр. $X_i \sim iid$

x	-1	$+1$
$P(X_i = x)$	0,3	0,7

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, X_3, X_4 \dots X_n)$$

а) сколько событий в σ-алгебре $\mathcal{F}_n$?

б) правда ли, что (X_n) — март отн-но $(\mathcal{F}_n)$?

в) $S_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ X_1 + \dots + X_n, & n > 0 \end{cases}$

(S_n) — март. отн-но $(\mathcal{F}_n)$?

г) подберите α так, чтобы $M_n = \exp(\alpha S_n)$ был март-м отн-но $(\mathcal{F}_n)$.

д) —//— β так, чтобы $Y_n = S_n - \beta n$ был март-м отн-но $(\mathcal{F}_n)$.

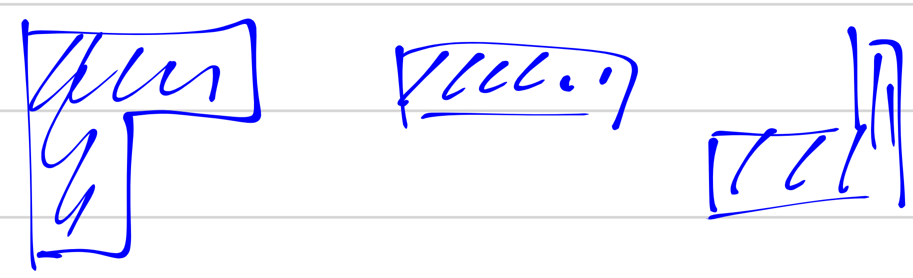
$P(X_i = -1) = 0.3$

$P(X_i = +1) = 0.7$

а) $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{X_1 = -1\}, \{X_1 = 1\}\}$ card $\mathcal{F}_1 = 4$

$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{X_1 = -1\}, \{X_1 = +1\}, \{X_2 = 1\}, \dots \{X_2 > X_1\} \dots \{X_2 \neq X_1\} \}$

	$X_2=-1$	$X_2=1$
$X_1=-1$	•	••
$X_1=+1$	•	•



$$\operatorname{card} \mathcal{F}_2 = 2^4$$

$$\operatorname{card} \mathcal{F}_3 = 2^8$$

$$\operatorname{card} \mathcal{F}_n = 2^{(2^n)}$$

б) (X_n) – март по отн-ию к $(\mathcal{F}_n)$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) = E(X_{n+1}) =$$

независимы

$$= 0.7 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot (-1) = 0{,}4.$$

правда ли, что $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$?

нет (X_n) – не мартингал.

в) $S_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ X_1 + \ldots + X_n & n>0. \end{cases}$

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n + X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots X_n)$$

то что знаем – выносим!

$$= X_1 + X_2 + \ldots + X_n + E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots X_n) =$$

$$= X_1 + \ldots + X_n + 0{,}4 = S_n + 0{,}4$$

правда ли, (S_n) – март? нет.

г) $\boxed{Y_n = S_n - \beta \cdot n}$ β? чтобы Y_n был мартингалом.

$\beta = 0{,}4$?

$$E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(S_{n+1} - \beta \cdot (n+1) \mid \mathcal{F}_n) =$$

$$= \boxed{S_n} + 0{,}4 \boxed{-\beta n} - \beta = \boxed{Y_n + 0{,}4 - \beta} = Y_n$$

[чтобы был (Y_n) – март $\beta = 0.4$]

2) $M_n = \exp(\alpha \cdot S_n)$ $\quad \alpha ?$

M_n – мартингал.

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$$

$$E\left[\exp(\alpha(X_1 + \dots + X_{n+1})) \mid X_1 \dots X_n\right] = M_n$$

$$E\left[\exp(\alpha X_1 + \dots + \alpha X_n) \cdot \exp(\alpha X_{n+1}) \mid X_1 \dots X_n\right] = M_n$$

выносим известное! (!)

$$M_n \cdot E\left[\exp(\alpha X_{n+1}) \mid X_1 \dots X_n\right] = M_n$$

$$E(\exp(\alpha X_{n+1}) \mid X_1 \dots X_n) = 1$$

при незав-сти инфо бесполезна (!)

$$E(\exp(\alpha X_{n+1})) = 1$$

$$0.3 \cdot \exp(-\alpha) + 0{,}7 \cdot \exp(+\alpha) = 1$$

$$\exp(\alpha) = t$$

$$\frac{0{,}3}{t} + 0{,}7 \cdot t = 1$$

$$0{,}3 + 0{,}7t^2 - t = 0$$

$t_1 = 1$ $\qquad t^2 - \frac{1}{0{,}7} t + \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0$

$$t_2 = \frac{0{,}3}{0{,}7}$$

$\exp(\alpha) = 1$

$\alpha_1 = 0$ $\qquad \alpha_2 = \ln \frac{3}{7}$

$M_n = \exp(0 \cdot S_n)$ $\qquad M_n = \exp\left(S_n \cdot \ln \frac{3}{7}\right)$

$M_n = 1$ (всегда, неслуч)

/мартингал/

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(1 \mid \mathcal{F}_n) = 1$$

⊕ прогнозир. то, что знаем

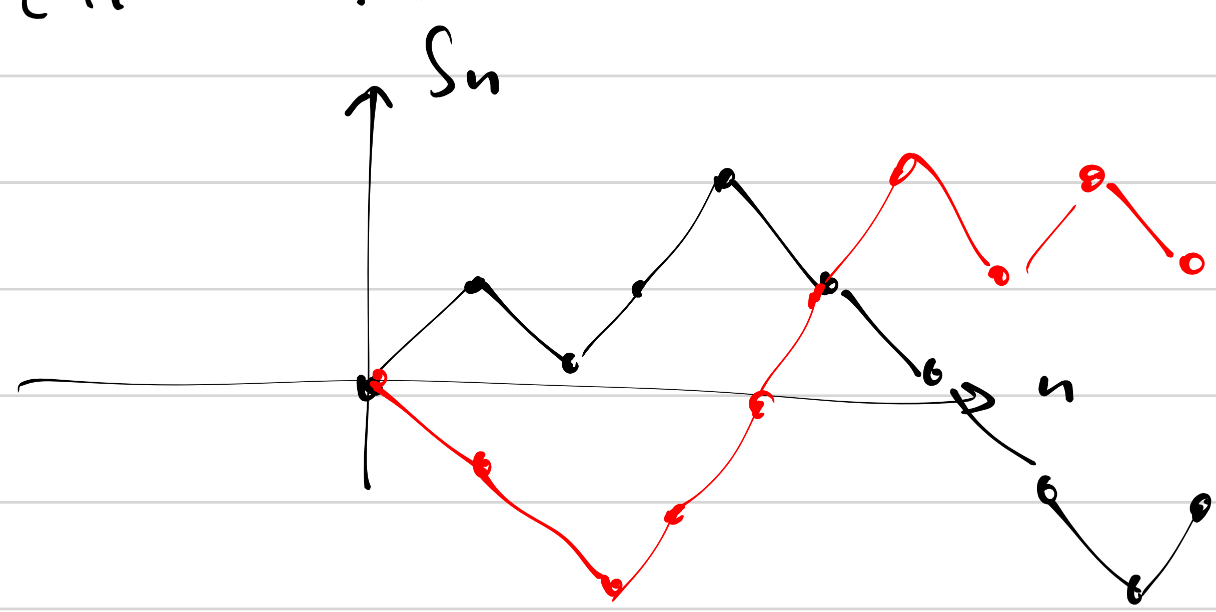
⊗ прогн. то, что не зависит от инфо

Посмотрим на роль σ-алгебры.

Упр.

$P(X_n=+1)=P(X_n=-1)=\frac{1}{2}$ незав.

$$S_n=\begin{cases}0, & n=0\\ X_1+\dots+X_n & n>0\end{cases}$$



а) естеств: $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1 \dots X_n)$ правда ли, что (X_n) — март отн-но $(\mathcal{F}_n)$?

б) Глаф. Лукинична в 3-м поколении снимает порчу/сглаз. по фото

200% гар.

$\mathcal{H}_n=\sigma(X_1, X_2 \dots X_{n+1})$ правда ли, что (X_n) — март отн-но $(\mathcal{H}_n)$

в) Семен Петрович выписывает КП Почтой России

$\mathcal{A}_n=\sigma(X_1, X_2 \dots X_{n-1})$

— // — (X_n) — март отн-но $(\mathcal{A}_n)$

а) $E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)=$

$$=E(\underbrace{X_1+X_2+\dots+X_n}_{\text{идеально знаем}}+X_{n+1}\,|\,X_1\dots X_n)=$$

$$=X_1+\dots+X_n+E(\underbrace{X_{n+1}\,|\,X_1\dots X_n}_{\text{не зав.}})=X_1+\dots+X_n+E(X_n)=$$

$$=X_1+\dots+X_n+\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}(-1)\right)=S_n$$

да, мартингал.

б) $E(S_{n+1} | \mathcal{H}_n) = E(\underbrace{X_1 + \ldots + X_{n+1}} | X_1, \ldots, X_{n+1}) =$

известны!

$= X_1 + \ldots + X_{n+1} \overset{?}{=} S_n$?

нет! (S_n) - не мартг. отн-но $(\mathcal{H}_n)$

в) $E(S_{n+1} | \mathcal{A}_n) =$

tex: \mathcal{A}_n

$= E(\underbrace{X_1 + \ldots + X_{n-1}} + X_n + X_{n+1} | X_1, \ldots, X_{n-1}) =$

известное — выносим!

$= X_1 + \ldots + X_{n-1} + E(X_n + X_{n+1} | X_1, \ldots, X_{n-1}) =$

незав-мо

$= X_1 + \ldots + X_{n-1} + \underbrace{E(X_n + X_{n+1})}_{=0} = X_1 + \ldots + X_{n-1} \overset{?}{=} S_n$?

не мартг.

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$\boxed{\text{формал. опр} \quad (S_n) \text{ - мартг отн-но } (\mathcal{Z}_n) \quad \boxed{E(S_{n+1} | \mathcal{Z}_n) = S_n}}$

$E(S_{n+1} | \mathcal{A}_n) = \underbrace{X_1 + \ldots + X_{n-1}} = S_{n-1} \neq S_n$

$P(S_{n-1} = S_n) = 0$!

$E(X_n + X_{n+1}) = E(X_n) + E(X_{n+1})$

$p(X_n = +1) = p(X_n = -1) = \frac{1}{2}$

Опр. Марк. цепь
вер-сть любого слу-го значения полностью опр-ся текущим.

не д. быть зав-сти.

$$\boxed{P(Y_{t+1}=a_{t+1} \mid Y_t = a_t, Y_{t-1}=a_{t-1}, \dots Y_1 = a_1) = h(a_t, a_{t+1})}$$

Упр. Извлекаем карты по одной из колоды.
Колода 52 карты = 4 масти × 13 дост.

$\forall n$ $\mathcal{F}_n = \{$ я знаю первые n карт колоды $\}$.

$\{$карта №1 – туз$\} \in \mathcal{F}_1$
$\{$карта №2 той же масти, что №1$\} \in \mathcal{F}_3$

X_n – доля тузов в нераскрытой части колоды

а) X_n – март-л?
б) X_n – марк. цепь?

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{\text{карта №1 Т}\}, \{\text{карта №1-К}\}, \{\text{карт №1 не 7}\}, \dots \}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega, \dots \}$$

$\{$6 карт – красн. вам$\} \notin \mathcal{F}_5$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) =$$

не взял туза

$$= X_n \cdot \left(\frac{X_n(52-n)-1}{52-n-1}\right) + (1-X_n)\cdot\left(\frac{X_n(52-n)}{52-n-1}\right) =$$

↑ усл. вер-ть открыть туза

откр.	не откр.
карт: ← n откр. →	← $(52-n)$ →
тузов: $4 - X_n(52-n)$	$X_n\cdot(52-n)$ тузов

$= (\text{алгебра}) =$

$= \frac{X_n}{52-n-1}(\ldots) = (\text{пров-те}) = X_n$

def март.

X_n - доля тузов в нераскр. части колоды после игры n карт.

б) (X_n) – марк. цепь.

$P\left(X_{49} = \frac{1}{3} \,\middle|\, X_{48} = \frac{1}{2}\right) \overset{?}{=} \frac{1}{2}$ туза.

$P\left(X_{51} = \frac{1}{3} \,\middle|\, X_{50} = \frac{1}{2}\right) \overset{?}{=} 0$ $\quad X_{51} \in \{0, 1\}$

X_n – не марк. цепь