W03 6

→ AR(p) [занудно]

→ быстрый способ нахождения PACF

def (y_t) – AR(p) процесс относит-но (u_t), если:

стационарное $[\forall t]$ ① $y_t - \mu = \beta_1(y_{t-1} - \mu) + \beta_2 \cdot (y_{t-2} - \mu) + \ldots + \beta_p(y_{t-p} - \mu) + u_t$

② (u_t) – б. шум.

③ y_t представим в виде $MA(\infty)$ отн-но (u_t)

$[\forall t]$ $y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \alpha_3 u_{t-3} + \ldots$

Упр. $(\forall t \in \mathbb{Z})$ $y_t = \frac{1}{3} y_{t-1} + u_t$ ← ур-ие с ∞ решений

(u_t) – б. шум

→ $y_{t-1} = 3y_t - 3u_t$

а) $y_0 = 1$ найдите y_1, y_2, y_{-1}, y_{-2}

будет ли (y_t) стац-м?

будет ли (y_t) AR(1) процессом по форм-му опр-ию?

б) $y_0 = u_0$

— // —

в) $y_0 = u_0 + \frac{1}{3} u_{-1} + \frac{1}{9} u_{-2} + \frac{1}{27} u_{-3} + \ldots$

— // —

а) $y_1 = \frac{1}{3} + u_1$ $\quad y_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} u_1 + u_2$ $\quad y_{-1} = 3y_0 - 3u_0 =$

$y_0 = 1$ $\quad y_3 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} u_1 + \frac{1}{3} u_2 + u_3$ $\quad = 3 - 3u_0$

$y_{-2} = 9 - 9u_0 - 3u_{-1}$

$E(y_1) = \frac{1}{3}$ $\quad Var(y_1) = \sigma^2$ $\quad \sigma^2 = Var(u_t)$

$E(y_2) = \frac{1}{9}$ $\quad Var(y_2) = \frac{1}{9}\sigma^2 + \sigma^2 = \frac{10}{9}\sigma^2$ $\quad$ нестац.

... $\quad$ .... $\quad$ не форм. опр не AR(1)

a) $y_0 = u_0$ $\boxed{y_1 = \frac{1}{3}u_0 + u_1}$

$y_{-1} = 3u_0 - 3u_0 = 0$ $y_2 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + u_2$

. . . .

$y_{100} = \left(\frac{1}{3}\right)^{100} u_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{99} u_1 + \ldots +$

$+ \frac{1}{3} \cdot u_{99} + u_{100}$

$E(y_0) = 0$ $Var(y_0) = \sigma^2$

$E(y_1) = 0$ $Var(y_{-1}) = Var(0) = 0$

$E(y_{-1}) = 0$ $Var(y_1) = \left(\frac{1}{9} + 1\right) \cdot \sigma^2 = \frac{10}{9}\sigma^2$

(y_t) нестац. был

(y_t)

$\boxed{y_1 = 1 \cdot u_1 + \frac{1}{3} \cdot u_0 + 0 \cdot u_{-1} + 0 \cdot u_{-2} + \ldots}$

$\boxed{y_2 = u_2 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{9}u_0 + 0u_{-1} + \ldots}$

$\boxed{y_t = \frac{1}{3}y_{t-1} + u_t}$ по формулу фир-ию ке AR(1)

б) $y_0 = u_0 + \frac{1}{3}u_{-1} + \frac{1}{9}u_{-2} + \frac{1}{27}u_{-3} + \ldots\ldots$

$y_1 = \frac{1}{3}y_0 + u_1 = \boxed{u_1 + \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{9}u_{-1} + \frac{1}{27}u_{-2} + \ldots}$

(y_t) - стац. нач. AR(1) процесс.

$\boxed{y_t = \mu + u_t + \alpha_1 \cdot u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots}$

$y_2 = \frac{1}{3}y_1 + u_2 = u_2 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{9}u_0 + \frac{1}{27}u_{-1} + \ldots\ldots$

$y_{-1} = 3y_0 - 3u_0 = \boxed{u_{-1} + \frac{1}{3}u_{-2} + \frac{1}{9}u_{-3} + \frac{1}{27}u_{-4} + \ldots}$

$E(y_t) = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

$Var(y_t) = \sigma^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\sigma^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2\sigma^2 + \ldots = \boxed{\frac{b_1}{1-q}} = \frac{\sigma^2}{1-\frac{1}{9}}$

$= \frac{9}{8}\sigma^2$

$Cov(y_t, y_{t+1}) = Cov\left(u_t + \frac{1}{3}u_{t-1} + \frac{1}{3^2} \cdot u_{t-2} + \ldots,\right.$

$\left. u_{t+1} + \frac{1}{3}u_t + \frac{1}{3^2}u_{t-1} + \frac{1}{3^3}u_{t-2} + \ldots\right) =$

$= \frac{1}{3}Cov\left(u_t + \frac{1}{3}u_{t-1} + \frac{1}{3^2}u_{t-2} + \ldots, u_t + \frac{1}{3}u_{t-1} + \frac{1}{3^2}u_{t-2} + \ldots\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8}\sigma^2$

Теорема [аккур-но]

$L \cdot y_t = y_{t-1}$

рассмотрим ур-ие

мн-во реш-ий нестац-ые

$y_t - \mu = \beta_1 (y_{t-1} - \mu) + \ldots + \beta_p (y_{t-p} - \mu) + u_t$

где (u_t) – б. шум $(p \geq 1)$

А: у этого ур-ия ∞ решений [берем любые нач. усл]

Б: — // — ∞ нестац-х решений.

В: решение вида $MA(\infty)$ существует если и только если характеристический многочлен

$\text{char}(\lambda) = \lambda^p - \beta_1 \lambda^{p-1} - \beta_2 \lambda^{p-2} \ldots - \beta_p$

имеет только корни $|\lambda| < 1$

(*) $y_t = 0.1 y_{t-1} + 0.3 y_{t-2} + u_t$

теор: у этого ур-ия есть $MA(\infty)$ решение

$y_t - 0{,}1\, y_{t-1} - 0{,}3\, y_{t-2} = u_t$

хар-ое ур-ие

(**) $\lambda^2 - 0{,}1 \lambda - 0{,}3 = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0{,}1$

$\lambda_1 = 0{,}6 \quad \lambda_2 = -0{,}5$

$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -0{,}3$

$|0{,}6| < 1 \quad |-0{,}5| < 1$

У стац-го процесса

def $\varphi_{kk} = pCorr(y_t, y_{t+k}; y_{t+1}, y_{t+2}, \dots y_{t+k-1})$

$$y_t \; \{\underbrace{y_{t+1}, y_{t+2}, \dots y_{t+k-1}}_{\text{фикс}}\} \; y_{t+k}$$

Способ I
$$\tilde{y}_t = y_t - \alpha_1 y_{t+1} \dots - \alpha_{k-1} y_{t+k-1}$$
$$\tilde{y}_{t+k} = y_{t+k} - \beta_1 y_{t+1} \dots - \beta_{k-1} y_{t+k-1}$$
$$pCorr(y_t, y_{t+k}; y_{t+1} \dots y_{t+k-1}) = Corr(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+k})$$

Способ II [Теор] у стац-го процесса частную корр-цию φ_{kk} можно найти разложив y_t в виде

$$y_t = \alpha + \varphi_{k1} y_{t-1} + \varphi_{k2} y_{t-2} + \dots + \varphi_{kk} \boxed{y_{t-k}} + w_t$$

где $Cov(w_t, y_{t-1}) = 0$
$\vdots$
$Cov(w_t, y_{t-k}) = 0$

MA(1) $\quad y_t = 6 + u_t + 2u_{t-1} \quad (u_t)$ - б. шум. $Var(u_t) = \sigma^2$

а) $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots \quad \gamma_k = Cov(y_t, y_{t+k})$

б) $\varphi_{11}, \varphi_{22}$

$$\gamma_0 = Var(y_t) = \sigma^2 + 4\sigma^2 = 5\sigma^2$$
$$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t+1}) = Cov(u_t + 2u_{t-1}, u_{t+1} + 2u_t) = 2\sigma^2$$
$$\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t+2}) = Cov(u_t + 2u_{t-1}, u_{t+2} + 2u_{t+1}) = 0$$
$$\gamma_3 = \dots = 0$$

$$\rho_k = \mathrm{Corr}(y_t, y_{t+k}) = \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k})}{\sqrt{\mathrm{Var}(y_t)\mathrm{Var}(y_{t+k})}} =$$

$$= \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0 \cdot \gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2/5 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases} \qquad 2\delta^2/5\delta^2$$

b)

$$\varphi_{11} = \mathrm{pCorr}(y_t, y_{t+1}; \phi) = \mathrm{Corr}(y_t, y_{t+1}) = \frac{2}{5}$$

$$\varphi_{22} = \mathrm{pCorr}(y_t, y_{t+2}; y_{t+1})$$

$$\boxed{y_{t+2} = \underbrace{\alpha + \varphi_{21} \cdot y_{t+1} + \varphi_{22} \cdot y_t + w_t}_{RHS}}$$

?

$$\mathrm{Cov}(w_t, y_{t+1}) = 0$$
$$\mathrm{Cov}(w_t, y_t) = 0$$

φ_{22} ?

$$\mathrm{Cov}(y_{t+2}, y_{t+1}) = \mathrm{Cov}(RHS, y_{t+1})$$
$$\mathrm{Cov}(y_{t+2}, y_t) = \mathrm{Cov}(RHS, y_t)$$

$\delta^2 = \mathrm{Var}(w_t)$

$\gamma_0 = \mathrm{Var}(y_t)$

$$2\delta^2 = 0 + \varphi_{21} \cdot 5\delta^2 + \varphi_{22} \cdot 2\delta^2$$
$$2 = 5\varphi_{21} + 2\varphi_{22}$$
$$0 = 0 + \varphi_{21} \cdot 2\delta^2 + \varphi_{22} \cdot 5\delta^2$$
$$0 = 2\varphi_{21} + 5\varphi_{22}$$

$$-\begin{cases} 2 = 5 \cdot \varphi_{21} + 2\varphi_{22} & (\times 2) \\ 0 = 2 \cdot \varphi_{21} + 5 \cdot \varphi_{22} & (\times 5) \end{cases}$$

$$4 = 0 + (4 - 25)\varphi_{22}$$

$$\varphi_{22} = \frac{4}{-21} \quad !!$$

$\mathrm{pCorr}(y_t, y_{t+2}; y_{t+1})$