Сем 6в. Мартингалы !!

Вкусно? Смешно?

опр Фильтрация — неубывающая посл-сть σ-алгебр

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \dots\dots$$

$\forall \mathcal{F}_i$ — σ-алгебра

опр. Процесс (X_n) наз-ся мартингалом по отношению к ф-ции $(\mathcal{F}_n)$, если

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad (\forall n)$$

Опр' Процесс (X_n) наз-ся мартингалом, если

$$E(X_{n+1} | \underbrace{X_1 \dots X_n}) = X_n$$

опр. Для процесса (X_n) фильтрация $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ наз-ся естеств-ой.

Упр

$X_i \sim$ независ один. распр.

x	$+1$	-1
$p(X_i = x)$	$0{,}7$	$0{,}3$

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2 \dots X_n)$

a) правда ли, что (X_n) — март отн-но $(\mathcal{F}_n)$?

в) $S_n = X_1 + \dots + X_n$

— // — (S_n) — март отн-но $(\mathcal{F}_n)$?

c) найдите такую α, что $Y_n = S_n - \alpha n$ март-л отн-но $(\mathcal{F}_n)$.

d) — // — β, что $W_n = \exp(\beta S_n)$ март-л отн-но $(\mathcal{F}_n)$.

a) $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$? $\to = X_n$ мартг
$\to \neq X_n$ не мартг

* считается с исп-м усл-х вер-стей *
есть 2 простых случая:

① $E(Y \mid X, W, R) = E(Y)$
Y не зав от X, W, R

② $E(Y \mid X, W, R) = Y$ „take out what is known"
Y идеально известен при из-вх X, W, R / $Y = h(X, W, R)$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(\underbrace{X_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots X_n}_{\text{не завис}}) = E(X_{n+1}) =$$

$$= 1 \cdot 0{,}7 + (-1) \cdot 0{,}3 = 0{,}4$$ $\to = X_n$, $\to \neq X_n$ не марг-л!

в) $E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(\underbrace{X_1 + \dots + X_n}_{\text{идеально точно знаем}} + X_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots X_n) =$

$$= X_1 + \dots + X_n + E(\underbrace{X_{n+1} \mid X_1, X_2 \dots X_n}_{\text{незав}}) = X_1 + \dots + X_n + 0{,}4 =$$

$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \to = S_n + 0{,}4$ не марг-л.

c) $Y_n = S_n - \alpha \cdot n$
(Y_n) мартг. отн-но $(\mathcal{F}_n)$

Y_n одна случ вел-на
(Y_n) ← $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \dots$

$$E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = Y_n$$

$$E(S_{n+1} - \alpha(n+1) \mid \mathcal{F}_n) = S_n - \alpha n$$

$$S_n + 0{,}4 - \alpha(n+1) = S_n - \alpha n$$

$$\alpha = ! \; 0{,}4$$

d) $W_n = \exp(\beta S_n)$ $\quad \beta$?

$$E(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = W_n$$

$$E(\exp(\beta S_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = \exp(\beta S_n)$$

$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$

X_{n+1} — не зависит от $X_1, X_2, \dots X_n$

S_n — измеримо отн-но при изв-х $X_1, X_2 \dots X_n$

$$E(\exp(\beta S_n + \beta X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = \exp(\beta S_n)$$

$$E(\exp(\beta S_n) \cdot \exp(\beta X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = \exp(\beta S_n)$$

$\exp(\beta S_n)$ — изв-н! это ф-ция от $(X_1, X_2, \dots X_n)$

$$\exp(\beta S_n) \cdot E(\exp(\beta X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = \exp(\beta S_n)$$

$$E(\underbrace{\exp(\beta X_{n+1})} \mid \underbrace{X_1, \dots X_n}) = 1$$

не зав.

$$E(\exp(\beta X_{n+1})) = 1$$

$$\exp(\beta \cdot (+1)) \cdot 0{,}7 + \exp(\beta \cdot (-1)) \cdot 0{,}3 = 1$$

$\exp(\beta) = u \qquad 0{,}7u + 0{,}3/u = 1$

$0{,}7u^2 - u + 0{,}3 = 0. \qquad u^2 - \frac{1}{0{,}7}u + \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0$

$(u - u_1) \cdot (u - u_2) = 0$

$u_1 = 1 \qquad u_2 = \frac{3}{7}$

$\exp(\beta) = 1 \qquad \exp(\beta) = \frac{3}{7}$

$\underline{\beta = 0} \qquad \beta = \ln\left(\frac{3}{7}\right)$

мартингал обобщение !! пост-ой посл-сти

$W_n = \exp(0 \cdot S_n) = 1 \qquad W_n = \exp\left(S_n \cdot \ln\left(\frac{3}{7}\right)\right)$ - март.

$$E(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 1 = W_n$$

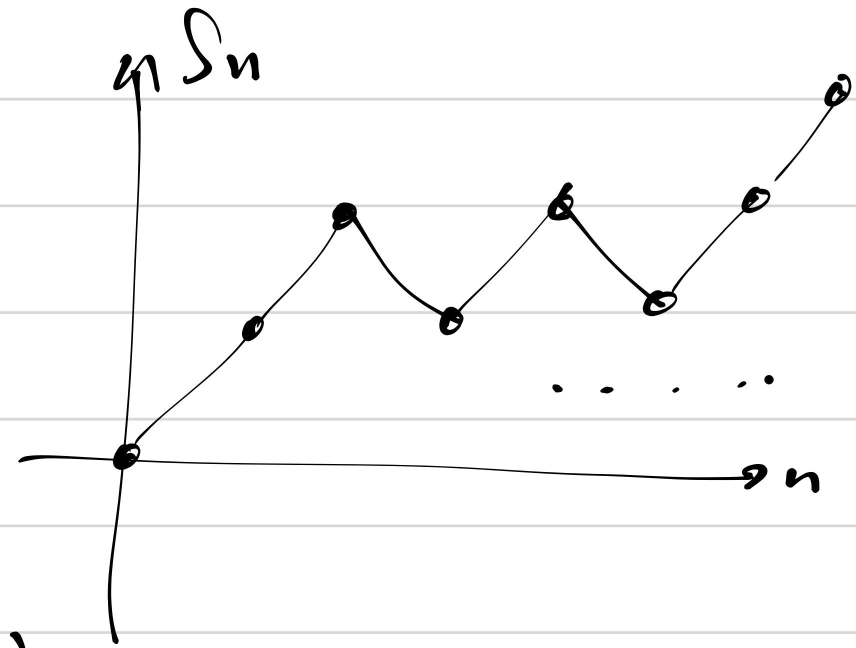
Упр

x	$+1$	-1
$P(X_n=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, X_i незав

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$

$S_0 = 0$



$\mathcal{A}_n$ – естеств фильтр.

$\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \ldots X_n)$

ф-ция Глафиры Лукиничны $\mathcal{H}_n = \sigma(X_1, X_2 \ldots X_{n+1})$

наделена в.Зм полене

приворот / сильный маг

ф-ция Кузьмич (выписывает КП почтой России)

$$\mathcal{K}_n = \sigma(X_1, X_2 \ldots X_{n-1})$$

а) Правда ли, что:

$\{X_2 = X_5\} \in \mathcal{A}_4$? нет

$\{X_2 = X_5\} \in \mathcal{H}_4$? да

$\{X_2 = X_5\} \in \mathcal{K}_4$? нет

а') сколько событий в $\mathcal{K}_4$? 256!!

б) отн-но каких фильтр-ций (X_n) – мартингал?

а') $X_1 \to -1, 1$ $X_2 \to -1, 1$ $X_3 \to -1, 1$

пример: $\{X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1\}$ 8 штук исходов.

$A = \{X_1=1, X_2=-1, X_3=1\} \cup \{X_1=1, X_2=1, X_3=1\} \in \mathcal{K}_4$

$\mathrm{card}\, \mathcal{K}_4 = 2^8 = 256$

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = E(\underbrace{X_1 + \ldots + X_n}_{\text{известно!}} + X_{n+1} \mid \underbrace{X_1, \ldots X_n}) =$$

март

$$= X_1 + \ldots + X_n + E(\underbrace{X_{n+1} \mid X_1 \ldots X_n}_{\text{незав}}) = X_1 + \ldots + X_n + \underbrace{E(X_{n+1})}_{0} = S_n$$

$*\quad E(S_{n+1} \mid \mathcal{H}_n) = E(X_1 + \dots + X_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) =$

$$= X_1 + \dots + X_{n+1} = S_{n+1} \neq S_n$$

$$P(S_{n+1} = S_n) = 0$$

(S_n) – не марг отн-но $(\mathcal{H}_n)$

$*\quad E(S_{n+1} \mid \mathcal{K}_n) = E(X_1 + \dots + X_{n-1} + X_n + X_{n+1} \mid X_1 \dots X_{n-1})$

изв-но!

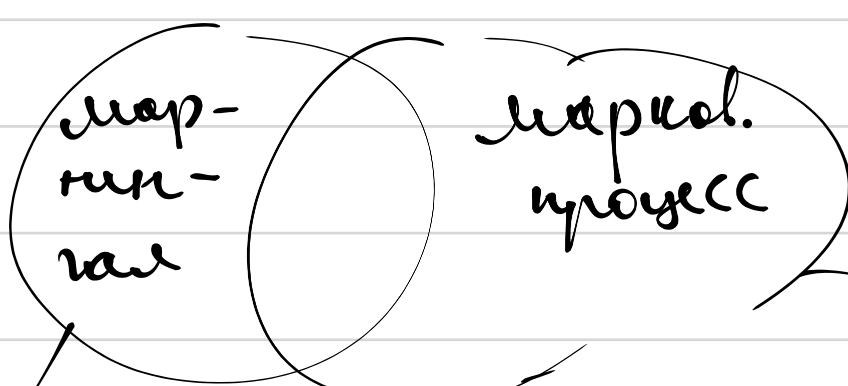
$= X_1 + \dots + X_{n-1} + E(X_n + X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_{n-1}) =$

не зав

$$= X_1 + \dots + X_{n-1} + \underbrace{E(X_n + X_{n+1})}_{E(X_n) + E(X_{n+1}) = 0 + 0 = 0} = X_1 + \dots + X_{n-1} = S_{n-1}$$

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{K}_n) = S_{n-1} \neq S_n$$

(S_n) отн-но $(\mathcal{K}_n)$ не мартингал.



(M_n) - март-л по отн. ко $(\mathcal{F}_n)$

наил. прогноз на завтра – сег-ее значение

$$\forall n \quad E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$$

$$P(M_{n+1} = x_{n+1} \mid M_n = x_n, M_{n-1} = x_{n-1}, \dots, M_1 = x_1) =$$

$$= P(M_{n+1} = x_{n+1} \mid M_n = x_n) \quad \forall n$$

для прогноза на завтра важно только текущее значение.

Упр. Колода 52 карты, хорошо перемешанная.

$\mathcal{F}_n$: в момент n я открыл n карт и все их помню.

{первая карта - туз} $\in \mathcal{F}_2$
{карта №7 той же масти, что карта №3} $\notin \mathcal{F}_2$

$\boxed{X_n \text{ - доля тузов в нераскрытой части колоды}}$

а) чему равно X_0? $X_0 = \frac{4}{52}$
какие значения принимает X_{49}, X_{50}, X_{51}?

б) (X_n) - марг-л отн-но $(\mathcal{F}_n)$?
в) (X_n) - цепь маркова?

$X_{51} \in \{0, 1\}$
$X_{50} \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ $X_{49} \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
$X_{48} \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\}$

$P(X_{49} = \frac{1}{3} \mid X_{48} = \frac{1}{4}) \overset{?}{=} \frac{3}{4}$
$p(X_{49} = \frac{1}{3} \mid X_{49} = \frac{1}{2}) \overset{?}{=} \frac{1}{2}$ $\neq$ не цепь маркова.
$P(X_{51} = \frac{1}{3} \mid X_{50} = \frac{1}{2}) \overset{?}{=} 0$

$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = ⊛$

сейчас момент n

$$\underset{X_n}{T} \qquad \underset{1-X_n}{\text{нт}}$$

число Т в нер. колоде

$$X_{n+1} = \frac{X_n(52-n)-1}{52-(n+1)} \qquad X_{n+1} = \overbrace{\frac{X_n\cdot(52-n)}{52-(n+1)}}$$

$$⊛ = X_n \cdot \frac{X_n(52-n)-1}{52-(n+1)} + (1-X_n)\cdot\frac{X_n(52-n)}{52-(n+1)} =$$

$$= \frac{X_n}{51-n}\cdot\Big(X_n(52-n)-1+(1-X_n)(52-n)\Big) =$$

$$= \frac{X_n}{51-n}\cdot\Big((X_n+1-X_n)\cdot(52-n)-1\Big) =$$

$$= \frac{X_n}{51-n}\cdot(51-n) = X_n$$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

(X_n) – март.-л отн-но $(\mathcal{F}_n)$!!