TSSP Class 5a

Видно? Слышно?

$E(X \mid \mathcal{F}) \qquad E(X \mid \sigma(Y,Z)) = E(X \mid Y,Z)$

$Var(X \mid Y,Z)$

Упр.

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=2$
$X=0$	0.1	0.2	0.3
$X=1$	0	0.3	0.1

$\sum_j p_{1j} = 0.6$

a) $\boxed{E(Y \mid X)} = E(Y \mid \sigma(X))$?

b) $\boxed{Var(Y \mid X)}$?

c) $E(Var(Y \mid X))$?

$Var(E(Y \mid X))$?

для дискретных рассматриваем разные случаи.

a) $E(Y \mid X=0) = -1 \cdot \frac{0.1}{0.6} + 0 \cdot \frac{0.2}{0.6} + 2 \cdot \frac{0.3}{0.6} = \frac{-1+6}{6} = \frac{5}{6}$

$E(Y \mid X=1) = -1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$E(Y \mid X) = \begin{cases} 5/6 & \text{если } X=0 \quad (0.6) \\ \frac{1}{2} & \text{если } X=1 \quad (0.4) \end{cases}$$

c₂) $Var(\underbrace{E(Y \mid X)}_{\hat{Y}}) = E(\hat{Y}^2) - (E(\hat{Y}))^2 =$

$= \boxed{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 0.6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0.4} - \left(\frac{5}{6} \cdot 0.6 + \frac{1}{2} \cdot 0.4\right)^2$

b) $Var(Y \mid X) \leftarrow$ сл. величина

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

аналогия.

$$\mathrm{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - (E(Y|X))^2$$

$$\begin{cases} 5/6 & \text{если } X=0 \\ 1/2 & \text{если } X=1 \end{cases}$$

$$E(Y^2|X=0) = (-1)^2 \cdot \frac{0.1}{0.6} + 0^2 \cdot \frac{0.2}{0.6} + 2^2 \cdot \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{6} + \frac{12}{6} = \frac{13}{6}$$

$$E(Y^2|X=1) = (-1)^2 \cdot 0 + 0^2 \cdot \frac{0.3}{0.4} + 2^2 \cdot \frac{0.1}{0.4} = 1$$

случ. вел. $\rightarrow$ $$E(Y^2|X) = \begin{cases} 13/6 & \text{если } X=0 \\ 1, & \text{если } X=1 \end{cases} = \frac{13}{6} - \frac{7}{6}X$$

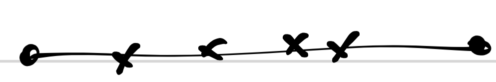
$X=0 \Rightarrow \frac{13}{6}$

$X=1 \Rightarrow 1$

$$\mathrm{Var}(Y|X) = \begin{cases} \frac{13}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2, & \text{если } X=0 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, & \text{если } X=1 \end{cases}$$

c) $$E(\mathrm{Var}(Y|X)) = \left(\frac{13}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) \cdot 0.6 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot 0.4$$

Упр. $X_i \sim$ незав $U[0;1]$ n штук

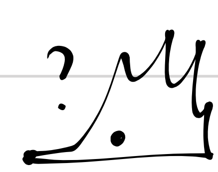


$L = \min\{X_1 \dots X_n\}$ $\quad R = \max\{X_1 \dots X_n\}$

а) $E(X_1|L)$?

б) $\mathrm{Var}(X_1|L)$?

с) $E(R|L)$?

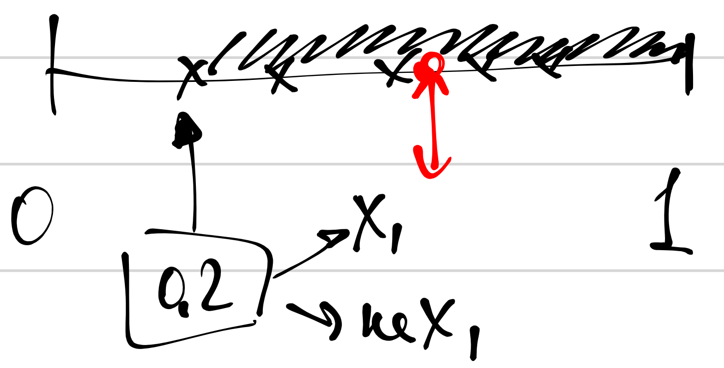


Хайрхан: если знаешь как решать!
если нет идей, замени L на конкр. конст.

$$E(X_1 \mid L = 0{,}2) =$$

n - проезд

$$L = \min(X_1, \ldots, X_n)$$



$$= E(X_1 \mid X_1 = L, L = 0{,}2) \cdot P(X_1 = L \mid L = 0{,}2) +$$

$$+ E(X_1 \mid X_1 > L, L = 0{,}2) \cdot P(X_1 > L \mid L = 0{,}2) =$$

$$= \boxed{0{,}2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1 + \boxed{0{,}2}}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$E(X_1 \mid L) = L \cdot \frac{1}{n} + \frac{1+L}{2} \cdot \frac{n-1}{n} = \text{упростить}$$

c) $E(R \mid L)$

$X_i \sim U[0;1]$ незав

! игнорируем соб-ия с вер-стью 0 !

$$P(X_1 = X_3) = 0.$$

Типичная сит. $X_i = L$ $\quad X_1, X_2 \ldots X_{i-1}, X_{i+1}, X_{i+2} \ldots X_n > L$

точно не кандидат на должность R

$$(X_1, X_2 \ldots X_{i-1}, X_{i+1} \ldots X_n \mid L) \sim U[L;1] \text{ незав.}$$

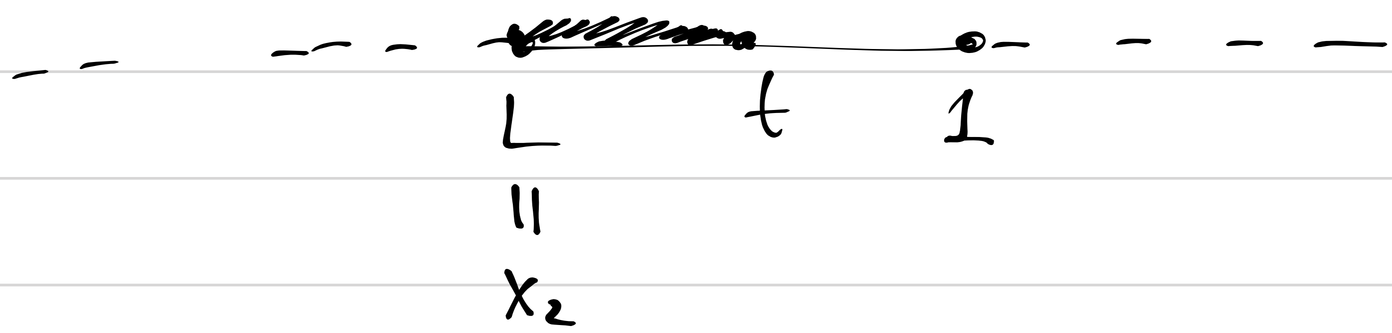
$n-1$ случ. вел.

$\boxed{\text{для удобства!}}$

$X_2 = L$ $\quad X_1, X_3 \ldots X_n \mid L \sim U[L;1]$

$$F_{X_1}(t|L) = P(X_1 \le t | L) =$$

$X_2 = L$



$$= \frac{t-L}{1-L}$$

cdf

$$F_R(t|L) = P(R \le t | L) =$$

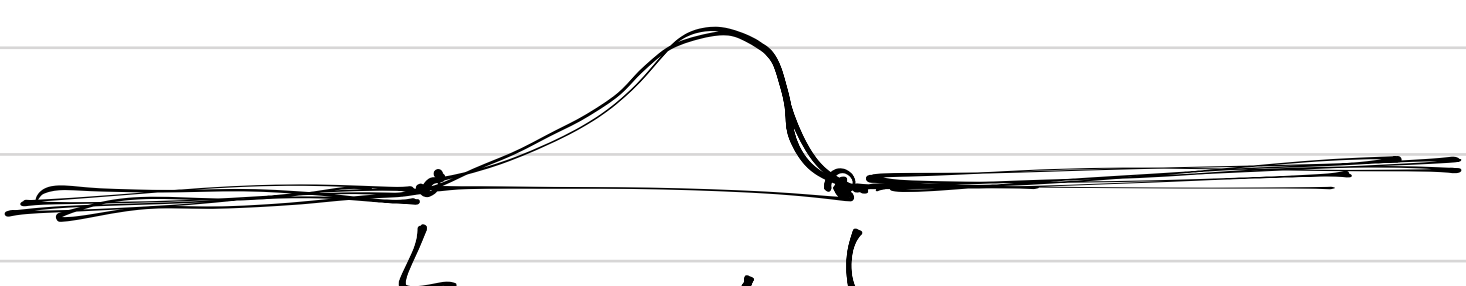
$$= P(X_1 \le t, X_3 \le t \dots X_n \le t | L) =$$

ну?

$$= \left(\frac{t-L}{1-L}\right)^{n-1}$$

pdf

$$f_R(t|L) = \begin{cases} (n-1)\cdot\left(\frac{t-L}{1-L}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{1-L}, & t\in[L;1] \\ 0, & t\notin[L;1] \end{cases}$$



$$E(R|L) = \int_L^1 t\cdot f(t|L)\,dt =$$

$$= \int_L^1 t\cdot(n-1)\cdot\left(\frac{t-L}{1-L}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{1-L}\,dt$$

$$= (n-1)\cdot\left(\frac{1}{1-L}\right)^{n-1}\cdot\int_L^1 t\,(t-L)^{n-2}\,dt$$

нуль?

$t = L + a$
$dt = da$

$t - L = a$

$$\int_0^{1-L}(a+L)\cdot a^{n-2}\,da$$

в) $Var(X_1|L)$

$$Var(X_1|L=0{,}2) = E(X_1^2|L=0{,}2) - \boxed{E(X_1|L=0{,}2)}^2$$

считали!

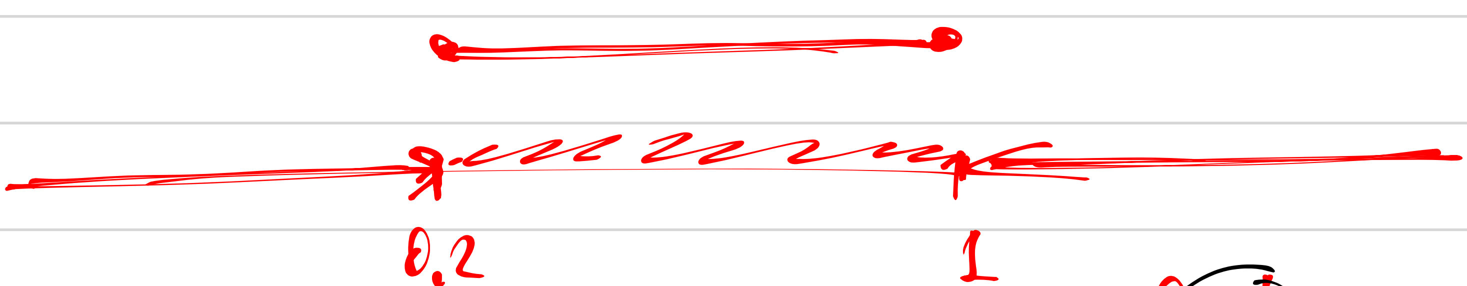
$$E(X_1^2|L=0{,}2) = E(X_1^2|X_1=L, L=0{,}2) \cdot P(X_1=L|L=0{,}2) + E(X_1^2|X_1>L, L=0{,}2) \cdot P(X_1>L|L=0{,}2)$$

вер.	событие
$\frac{1}{n}$	$X_1 = L$
$\frac{n-1}{n}$	$X_1 > L$

$$= 0{,}2^2 \cdot \frac{1}{n} + E(X_1^2|X_1>L, L=0{,}2) \cdot \frac{n-1}{n}$$

ну!!

$$(X_1|L=0{,}2, X_1>L) \sim U[0.2;1]$$



$$f(x_1|L=0{,}2, X_1>L) = \begin{cases} \frac{1}{0{,}8}, & x_1 \in [0{,}2;1] \\ 0, & x_1 \notin [0{,}2;1] \end{cases}$$

$$E(X_1^2|X_1>L, L=0{,}2) = \int_{0{,}2}^{1} x_1^2 \cdot \frac{1}{0.8}\, dx_1 = \ldots$$

верно!

Общие свойства !!

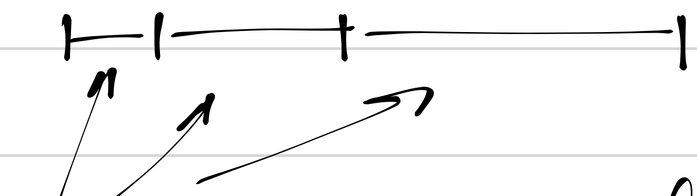
$$E(X_1+X_2|Y) = E(X_1|Y) + E(X_2|Y)$$

! $$E(E(X|Y)) = E(X)$$

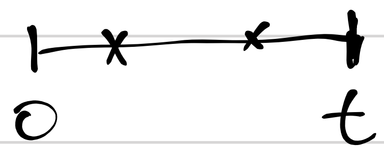
! $$Var(X) = Var(E(X|Y)) + E(Var(X|Y))$$

Пифагор наносит отв.-вей удар

Упр.



$Y_i \sim Exp(1)$ незав.



$N_{[0;t]}$ — кол-во авт. в за время $[0;t]$

$\sim Poisson(t)$

день 1: пришел на ост-ку. засёк время Y_1 (до 1-го авт)

незав.

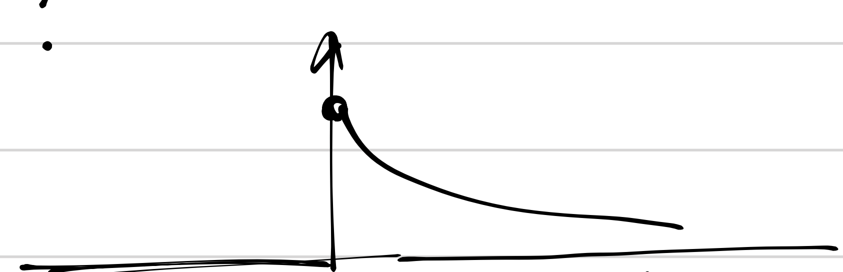
день 2: ждал в течение Y_1 минут и считал автобусы. насчитал R.

а) $E(R)$?

$Var(R)$?

б) $P(R=2)$?

$Y_1 \sim Exp(1)$



$$f(y_1) = \begin{cases} e^{-y_1}, & y_1 \geq 0 \\ 0, & y_1 < 0 \end{cases}$$

$E(Y_1) = 1$

$Var(Y_1) = 1.$

$N_{[0;t]} \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$$P(N_{[0;t]} = k) = e^{-t} \cdot \frac{t^k}{k!}$$

$E(N_{[0;t]}) = t$

$Var(N_{[0;t]}) = t.$

$E(R)$

$$E(R|Y_1=t)=E(N_{[0;t]}|Y_1=t)=$$
$$=t$$

$$E(R|Y_1)=Y_1$$

$$E(R)=E(E(R|Y_1))=E(Y_1)=1$$

$$Var(R)=E(Var(R|Y_1))+Var(E(R|Y_1))$$

$$Var(E(R|Y_1))=Var(Y_1)=1$$

экп. распр

$$Var(R|Y_1=t)=Var(N_{[0;t]}/Y_1=t)=t$$

распр. Пуассона

$$Var(R|Y_1)=Y_1$$

$$E(Var(R|Y_1))=E(Y_1)=1$$

(эксп)

$$Var(R)=E(Var(R|Y_1))+Var(E(R|Y_1))=1+1=2$$

Идея. схема

R $\qquad E(R|Y_1)$ – прогноз этой величины.

$$R=\underset{\text{прогноз}}{E(R|Y_1)}+\underset{\text{ошибка}}{W}$$

$$Var(R)=Var(E(R|Y_1))+\underbrace{Var(W)}_{E(Var(R|Y_1))}+\underbrace{2Cov(\cdot,\cdot)}_{0}$$