№03

сюжет 1: альтернативный (быстрее) способ нахождения PACF для стац-го процесса.

сюжет 2. AR(p) процесс.

формал-ое опр-ие

def. (y_t) явл-ся AR(p) процессом по отношению к б. шуму (u_t) если:

$$L x_t = x_{t-1}$$

① $(1-\beta_1 L-\beta_2 L^2-\beta_3 L^3-\ldots \beta_p L^p)\cdot(y_t-\mu)=u_t$

$$(y_t-\mu)=\beta_1\cdot(y_{t-1}-\mu)+\beta_2\cdot(y_{t-2}-\mu)+\ldots+\beta_p\cdot(y_{t-p}-\mu)+ u_t$$

② y_t представим в виде MA(∞) отн-но б. шума (u_t):

$$y_t=\mu+u_t+\alpha_1 u_{t-1}+\alpha_2 u_{t-2}+\alpha_3\cdot u_{t-3}+\ldots$$

③ (u_t) - б. шум $\quad y_t=\mu+\sum_{i=0}\alpha_i u_{t-i}, \quad \alpha_0=1.$

Следствия: А. по этому ф-му опред-ию любой AR(p) процесс всегда стац-н. (в силу пункта 2)

Б. теорема.
Ур-ие ① $(1-\beta_1 L-\beta_2 L^2-\ldots-\beta_p L^p)\cdot(y_t-\mu)=u_t$ имеет решение вида y_t – MA(∞) отн-но (u_t) тогда и только тогда, когда все корни лагового многочлена:

$$\ell(x)=1-\beta_1 x-\beta_2\cdot x^2-\ldots-\beta_p x^p \quad |x|>1$$

[все корни характ-го многочлена
$$char(\lambda)=\lambda^p-\lambda^{p-1}\cdot x-\lambda^{p-2}\cdot x^2-\ldots-\beta_p \quad |\lambda|<1$$]

(u_t) – б. шум

Ур. $y_t = \frac{1}{2}\cdot y_{t-1} + u_t$ (*) — ур-ие.

$y_t - u_t = \frac{1}{2} y_{t-1}$ $\quad y_{t-1} = 2y_t - 2u_t$

а) $y_0 = 0$ получится ли стац-ый (y_t)?

б) $y_0 = 7$ — // — (y_t)?

в) $y_0 = u_0 + \frac{1}{2}u_{-1} + \frac{1}{4}u_{-2} + \frac{1}{8}u_{-3} + \ldots$ — // — (y_t)?

мораль!

мн-во решений

★ ← одно стац-ое решение

не стац-ие

ур-ие (*) имеет ∞ мн-во решений!

а) $y_0 = 0$ $\quad y_1 = u_1 \quad y_2 = \frac{1}{2}u_1 + u_2 \quad y_3 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + u_3$

$y_{-1} = -2u_0 \quad y_{-2} = -4u_0 - 2u_{-1} \quad \ldots$

$E(y_0) = 0 \quad E(y_1) = E(u_1) = 0 \quad E(y_2) = \frac{1}{2}0 + 0 = 0$

$Var(y_0) = 0 \quad Var(y_1) = \sigma^2 \quad Var(y_2) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \sigma^2 = \frac{5}{4}\sigma^2$

(y_t) – не стац-ый!

б) $y_0 = 7 \quad y_1 = \frac{7}{2} + u_1 \quad y_2 = \frac{7}{4} + \frac{1}{2}u_1 + u_2 \quad y_3 = \frac{7}{8} + \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + u_3$

$E(y_0) = 7 \quad E(y_1) = \frac{7}{2} \quad E(y_2) = \frac{7}{4} \ldots$

(y_t) – не стац-ый!

в) $y_0 = \boxed{u_0 + \frac{1}{2}u_{-1} + \frac{1}{4}u_{-2} + \frac{1}{8}u_{-3} + \ldots}$ ← AR(1) процесс отн-но (u_t)

$y_1 = \frac{1}{2}y_0 + u_1 = \boxed{u_1 + \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{4}u_{-1} + \frac{1}{8}u_{-2} + \frac{1}{16}u_{-3} + \ldots}$

$y_2 = u_2 + \frac{1}{2}y_1 = \boxed{u_2 + \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_0 + \frac{1}{8}u_{-1} + \frac{1}{16}u_{-2} + \ldots}$

$y_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1} + \frac{1}{4}u_{t-2} + \ldots$

$Var(y_t) = \sigma^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sigma^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\sigma^2 + \ldots = \gamma_0 = \boxed{\frac{b_1}{1-q}} =$

$= \frac{\sigma^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{3/4} = \frac{4}{3}\sigma^2$

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k}) = \mathrm{Cov}\Big(u_t + \tfrac{1}{2}u_{t-1} + \tfrac{1}{4}u_{t-2} \ldots,$$
$k \geq 0$
$$u_{t+k} + \tfrac{1}{2}u_{t+k-1} + \tfrac{1}{4}u_{t+k-2} + \ldots\Big)$$

от k может зависеть!

γ_k [не зависит от t]

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+1}) = \mathrm{Cov}\Big(u_t + \tfrac{1}{2}u_{t-1} + \tfrac{1}{4}u_{t-2} + \ldots,$$
$$\cancel{u_{t+1}} + \tfrac{1}{2}u_t + \tfrac{1}{4}u_{t-1} + \tfrac{1}{8}u_{t-2} + \ldots\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Cov}\big(u_t + \tfrac{1}{2}u_{t-1} + \tfrac{1}{4}u_{t-2} + \ldots, u_t + \tfrac{1}{2}u_{t-1} + \ldots\big)$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Var}\big(u_t + \tfrac{1}{2}u_{t-1} + \tfrac{1}{4}u_{t-2} + \ldots\big) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+2}) = \mathrm{Cov}\Big(u_t + \tfrac{1}{2}u_{t-1} + \tfrac{1}{4}u_{t-2} + \ldots,$$
$$u_{t+2} + \tfrac{1}{2}u_{t+1} + \tfrac{1}{4}u_t + \tfrac{1}{8}u_{t-1} + \tfrac{1}{16}u_{t-2}\ldots\Big)$$
$$= \tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{Var}(y_t) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\sigma^2$$

г) для решения вида MA(∞) [из пункта в]

① $y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + u_t$ ← ур-ие

② $y_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1} + \frac{1}{4}u_{t-2} + \ldots$

$(y_t) \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t)

конкр. решение ур-ия и горзо нау-т AR(1)

ρ_k ?

$$\rho_1 = \mathrm{Corr}(y_t, y_{t-1}) = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1})}{\mathrm{Var}(y_t)}$$

$$\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}\big(\tfrac{1}{2}y_{t-1} + u_t\big) = \tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{Var}(y_{t-1}) + \sigma^2 +$$
$$+ 2\cdot\tfrac{1}{2}\underbrace{\mathrm{Cov}(y_{t-1}, u_t)}_{0}$$

$$\gamma_0 = \tfrac{1}{4}\gamma_0 + \sigma^2$$

[для решения из в]

$$\tfrac{3}{4}\gamma_0 = \sigma^2 \qquad \gamma_0 = \tfrac{4}{3}\sigma^2$$

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \mathrm{Cov}\big(\tfrac{1}{2}y_{t-1} + u_t, y_{t-1}\big) = \tfrac{1}{2}\gamma_0 + 0$$

$\gamma_1 = \frac{1}{2}\gamma_0 \qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \rho_1 = \frac{1}{2}$

$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \qquad \gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) =$ $\quad u_{t-2}, u_{t-3}, u_{t-4}, \ldots$

$= Cov\left(\frac{1}{2} y_{t-1} + u_t, y_{t-2}\right) =$

$= Cov\left(\frac{1}{2} y_{t-1}, y_{t-2}\right) + \underbrace{Cov(u_t, y_{t-2})}_{0} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \gamma_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\gamma_0\right)$

$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \gamma_0 \qquad \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \rho_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

по аналогии $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \ldots = ?\left(\frac{1}{2}\right)^k$

MA(1) $\quad y_t = 3 + u_t + 2u_{t-1} \qquad (u_t)$ - б. шум.

а) $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$

б) $\varphi_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{33} \ldots$

$\gamma_0 = Var(y_t) = \sigma^2 + 4\sigma^2 = 5\sigma^2$

$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t+1}) = 2\sigma^2$

$\gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = 0 \ldots$

Теор. для стац-го процесса (y_t) коэф-т частной корр-ции $\varphi_{kk} = pCorr(y_t, y_{t+k}; y_{t+1}, \ldots y_{t+k-1})$ можно найти из ур-ия.

$$y_t = \alpha + \varphi_{k1} y_{t-1} + \varphi_{k2} \cdot y_{t-2} + \ldots + \varphi_{kk} y_{t-k} + w_t,$$

где w_t не корр-но с $y_{t-1}, y_{t-2} \ldots y_{t-k}$

$\rho_1 = Corr(y_t, y_{t+1}) = Corr(y_t, y_{t-1}) = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{2}{5}$

$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0 \qquad \rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = 0 \ldots$

$\varphi_{11} = pCorr(y_t, y_{t+1}; \varnothing) = \rho_1 = \frac{2}{5}$

какие фикс-ны

$\varphi_{22} = pCorr(y_t, y_{t+2}; \underline{y_{t+1}})$ $\quad \boxed{СлI}$ с ошибк. $\quad \tilde{y}_t = y_t - \alpha \cdot y_{t+1}$, $\quad \tilde{y}_{t+1} = y_{t+1} - \beta y_{t+1}$

y_{t+1}

$y_t \text{ — } y_{t+2}$

y_{t+1}

$\tilde{y}_t \text{ — } \tilde{y}_{t+2} \qquad Corr(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+2})$

Способ II через теор-ое ур-ие регрессии.

$$\begin{cases} y_t = \alpha + \varphi_{21} \cdot y_{t-1} + \varphi_{22} \cdot y_{t-2} + w_t \\ \boxed{\begin{array}{l} Cov(w_t, y_{t-1}) = 0 \\ Cov(w_t, y_{t-2}) = 0 \end{array}} \end{cases} \rightarrow \varphi_{22}$$

$$\begin{cases} Cov(LHS, y_{t-1}) = Cov(RHS, y_{t-1}) \\ Cov(LHS, y_{t-2}) = Cov(RHS, y_{t-2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sigma^2 = \varphi_{21} \cdot 5\sigma^2 + \varphi_{22} \cdot 2\sigma^2 \\ 0 = \varphi_{21} \cdot 2\sigma^2 + \varphi_{2} \cdot 5\sigma^2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 2 = \varphi_{21} \cdot 5 + \varphi_{22} \cdot 2 \\ 0 = \varphi_{21} \cdot 2 + \varphi_{22} \cdot 5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 5 \end{array} \right.$$

$$4 = \varphi_{22} \cdot (4 - 25) \qquad \varphi_{22} = \frac{4}{4-25};$$