[w04b]

→ решения разн-го ур-ия

→ ACF / PACF AR

упр. **пара ур-ий!**

$$\underline{y_t = 6 - 0{,}3y_{t-1} - 0.02\,y_{t-2} + u_t}$$

(u_t) – б. шум.

а) есть ли стац-ые решения?

есть ли стац-ые реш-ия вида $MA(\infty)$?

$$y_t = \mu + u_t + ?u_{t-1} + ?u_{t-2} + ?u_{t-3} \dots$$

рецепт: сост-ляем хар-ое ур-ие.

$$y_t = -0{,}3y_{t-1} - 0{,}02\,y_{t-2}$$

[убрали u_t, u_{t-1} … const]

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ $\quad b_n = b_0 \cdot \lambda^n$

$$b_0 \cdot \lambda^t = -0{,}3\, b_0 \cdot \lambda^{t-1} - 0{,}02\, b_0 \cdot \lambda^{t-2}$$

$$\boxed{\lambda^2 = -0{,}3\lambda - 0{,}02}$$

хар-ое ур-ие

characteristic eq.

$$\lambda^2 + 0{,}3\lambda + 0{,}02 = 0$$

$$\lambda_1 = -0{,}1 \qquad \lambda_2 = -0{,}2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\dfrac{b}{a} = -0{,}3 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \dfrac{c}{a} = 0{,}02 \end{cases}$$

критерий:

!! * стац-ое решение вида $MA(\infty)$ есть если и только если все $|\lambda_i| < 1$ [и ед-нное]

!! * стац-ое решение есть если и только если все $|\lambda_i| \neq 1$ [и един-нное]

а) да, стац. реш-ие есть и оно имеет вид $MA(\infty)$ отн-но (u_t).

б) рассмотрим это самое стац-ое решение вида MA(∞) отн-но (u_t).

$$y_t = 6 - 0{,}3 y_{t-1} - 0{,}02 y_{t-2} + u_t$$

$u_{100}, u_{99}, u_{98} \ldots$

доп-но: $(u_t) \sim$ незав $N(0; 25)$

$y_{100} = 9$

$y_{99} = 12$

б1) PI 95% для y_{101}

б2) PI 95% для y_{102}

$u_{99}, u_{98} \ldots$

$$y_{101} = 6 - 0{,}3 y_{100} - 0{,}02 y_{99} + u_{101}$$

незав.

$$\begin{cases} E(y_{101} \mid y_{100}, y_{99} \ldots y_1) = 6 - 0{,}3 \cdot 9 - 0{,}02 \cdot 12 + 0 = 6 - 2.7 - 0{,}24 = 3.06 \\ Var(y_{101} \mid y_{100}, y_{99} \ldots y_1) = Var(u_{101}) = 25 \end{cases}$$

$$\to PI \quad [3.06 - 1.96 \cdot \sqrt{25};\ 3.06 + 1.96 \cdot \sqrt{25}]$$

б2)

$$E(y_{102} \mid y_{100}, y_{99} \ldots y_1) =$$

$$= E(6 - 0{,}3 y_{101} - 0.02 y_{100} + u_{102} \mid y_{100} \ldots y_1) =$$

$$= 6 - 0{,}3 \cdot \underbrace{E(y_{101} \mid y_{100} \ldots y_1)}_{3.06} - 0{,}02 \cdot 9 + 0 =$$

$$= 6 - 0{,}3 \cdot 3.06 - 0.02 \cdot 9 = 4.902$$

$$\left(\frac{y_{102} - 4.902}{\sqrt{1.09 \cdot 25}} \middle| y_{100} \right) \sim N(0;1)$$

$$Var(y_{102} \mid y_{100} \ldots y_1) =$$

$$= Var(6 - 0{,}3 y_{101} - 0{,}02 y_{100} + u_{102} \mid y_{100} \ldots y_1) =$$

$$= Var(-0{,}3(6 - 0{,}3 y_{100} - 0{,}02 y_{99} + u_{101}) + u_{102} \mid y_{100} \ldots y_1)$$

$$= Var(-0{,}3 u_{101} + u_{102} \mid y_{100} \ldots y_1) = 0{,}09 \cdot 25 + 25 = 1.09 \cdot 25$$

$$PI: \quad [4.902 - 1.96 \cdot \sqrt{1.09 \cdot 25};\ 4.902 + 1.96 \sqrt{1.09 \cdot 25}]$$

в) рассмотрим это самое стац-ое решение вида $MA(\infty)$ отн-но (u_t).

$$y_t = 6 - 0{,}3\,y_{t-1} - 0{,}02\,y_{t-2} + u_t$$

доп-но: $(u_t) \sim$ незав $N(0; 25)$

найдите ACF / PACF: $\rho_1, \rho_2, \varphi_{11}, \varphi_{22}$

г) частично найдите решение !! (это $MA(\infty)$)

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \alpha_3 u_{t-3} + \ldots$$

μ? α_1? α_2?

$$\rho_1 = Corr(y_t, y_{t+1}) = Corr(y_t, y_{t-1})$$

$$y_t = 6 - 0{,}3\,y_{t-1} - 0{,}02\,y_{t-2} + u_t$$

$$Cov(LHS, y_{t-1}) = Cov(RHS, y_{t-1})$$
$$Cov(LHS, y_{t-2}) = Cov(RHS, y_{t-2})$$
ρ_1, ρ_2

$y_t \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t)

$$0 = Cov(y_t, u_{t+1})$$

$$\rho_k = Corr(y_t, y_{t+k}) = Corr(y_t, y_{t-k})$$
$$\gamma_k = Cov(y_t, y_{t+k}) = Cov(y_t, y_{t-k})$$

$$\boxed{Cov(LHS, y_{t-1})} = Cov(RHS, y_{t-1})$$
$$\gamma_1 = -0{,}3\,\gamma_0 - 0{,}02\,\gamma_1 + 0 \quad \Big| \; /\gamma_0$$

$$Cov(LHS, y_{t-2}) = Cov(RHS, y_{t-2})$$
$$\gamma_2 = -0{,}3\,\gamma_1 - 0{,}02\,\gamma_0 + 0 \quad \Big| \; /\gamma_0$$

$$\boxed{\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{Var(y_t)\,Var(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = -0{,}3 - 0{,}02\,\rho_1 \\ \rho_2 = -0{,}3\,\rho_1 - 0{,}02 \end{cases}$$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{-0{,}3}{1{,}02} \qquad \rho_2 = \ldots}$$

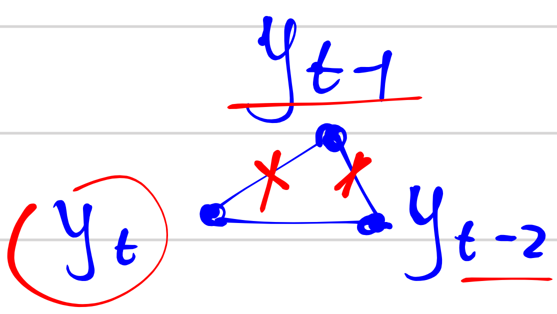
$\rho_1 = \frac{-0,3}{1.02}$ $\quad \rho_2 = \frac{0.09}{1.02} - 0,02 > 0.$

PACF: $\varphi_{11} = \text{pCorr}(y_t, y_{t-1}; \varnothing) = \text{corr}(y_t, y_{t-1}) =$

$= \rho_1 = \frac{-0,3}{1,02}$

$\varphi_{22} = \text{pCorr}(y_t, y_{t-2}; y_{t-1})$ → универс. способ

→ быстрый для стац-х



универс:

$y_t - \alpha y_{t-1} = \tilde{y}_t$

$y_{t-2} - \beta y_{t-1} = \tilde{y}_{t-2}$

$\varphi_{22} = \text{Corr}(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t-2})$

быстрый способ для стац-х процессов.

(Yule-Walker equations)

$$y_t = \underbrace{\alpha + \varphi_{21} \cdot y_{t-1} + \varphi_{22} y_{t-2}}_{\text{прогноз}} + \underbrace{w_t}_{\text{ош. на прогноз}}$$

$$\begin{cases} \text{Cov}(y_{t-1}, w_t) = 0 \\ \text{Cov}(y_{t-2}, w_t) = 0. \end{cases} \Rightarrow \varphi_{22} \quad \varphi_{21}$$

О! когда был MA(q) процесс надо было решать, а у AR(p) процесса ответ виден!

$y_t = 6 - 0,3 y_{t-1} - 0,02 y_{t-2} + u_t$

узнаём: $6 = \alpha \quad -0,3 = \varphi_{21}$

$\boxed{-0,02 = \varphi_{22}}$

$u_t = w_t$

подходит ли (u_t) в ур-ия Yule-Walker?

$\varphi_{22} = \text{pCorr}(y_t, y_{t-2}; y_{t-1}) = -0,02$

φ_{33} ? $\quad \varphi_{33} = \text{pCorr}(y_t, y_{t-3}; \underbrace{y_{t-1}, y_{t-2}}_{\text{фикс.}})$ $\quad \rho_2 > 0$

(A) $$\boxed{y_t = 6 - 0{,}3\, y_{t-1} - 0{,}02\, y_{t-2} + 0 \cdot y_{t-3} + u_t}$$

$$Cov(u_t, y_{t-1}) = 0$$
$$Cov(u_t, y_{t-2}) = 0$$
$$Cov(u_t, y_{t-3}) = 0$$

!!

2) найдите первые коэф-ты α_1 и α_2 и μ в $MA(\infty)$ решении ур-ия

(B) $$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \alpha_3 u_{t-3} + \ldots$$

по B: $E(y_t) = \mu$

по A: $E(LHS) = E(RHS)$

$$\mu = 6 - 0{,}3\mu - 0{,}02\mu + 0$$

$$\mu = \frac{6}{1{,}32};$$

нет u_{t-2}!

A $$y_t = \text{const} - 0{,}3\,\overbrace{(\text{const} - 0{,}3\, y_{t-2} - 0{,}02\, y_{t-3} + u_{t-1})}^{y_{t-1}} - 0{,}02\, y_{t-2} + u_t =$$

$$= (\ldots) + u_t - 0{,}3\, u_{t-1} + 0{,}07\, y_{t-2} =$$

помех, $u_{t-3}, u_{t-4} \ldots$

$$= (\ldots) + u_t - 0{,}3\, u_{t-1} + 0{,}07\, u_{t-2}$$

$$\alpha_1 = -0{,}3 \qquad \alpha_2 = 0{,}07$$

$$L y_t = y_{t-1} \qquad F y_t = y_{t+1}$$

$$(1 + 2L + 3L^2) \cdot y_t \overset{?}{=} y_t + 2y_{t-1} + 3y_{t-2}$$

$$(1-qL)\cdot\frac{1}{1-qL}\cdot y_t = y_t$$

def

$$|q|<1$$

$$\frac{1}{1-qL} = 1+qL+q^2L^2+q^3L^3+q^4L^4+q^5L^5+\dots$$

Упр

$$\frac{1}{1-0{,}2L}\cdot y_t = \left((1+0{,}2L+0{,}2^2L^2+0{,}2^3L^3+\dots)\cdot y_t = \right.$$

$$= y_t+0{,}2\,y_{t-1}+0{,}2^2y_{t-2}+\dots$$

$$\frac{1}{1+0{,}3F}\cdot y_t = \left(1-0{,}3F+0{,}3^2F^2-0{,}3^3F^3\dots\right)y_t =$$

$$= y_t-0{,}3\,y_{t+1}+0{,}3^2y_{t+2}\dots$$

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+q^4+\dots$$

А как определить $\frac{1}{1-qL}$ при $|q|>1$?

необх-мо!

$$\frac{1}{1-qL}\,\frac{1-qL}{1-qL} = \frac{-\frac{1}{q}\cdot F}{1-\frac{1}{q}\cdot F}$$

$$\left|\frac{1}{q}\right|<1$$

$$L^{-1}=F$$

Упр.

$$\frac{1}{1-5L}\cdot y_t = \frac{-0{,}2F}{1-0{,}2F}\,y_t =$$

$$= -0{,}2F\cdot\frac{1}{1-0{,}2F}\cdot y_t =$$

$$= -0{,}2F\left(y_t+0{,}2\,y_{t+1}+0.2^2y_{t+2}+0{,}2^3y_{t+3}\dots\right)$$

$$= -0{,}2\,y_{t+1}-0{,}2^2y_{t+2}-0{,}2^3y_{t+3}-0{,}2^4y_{t+4}\dots$$