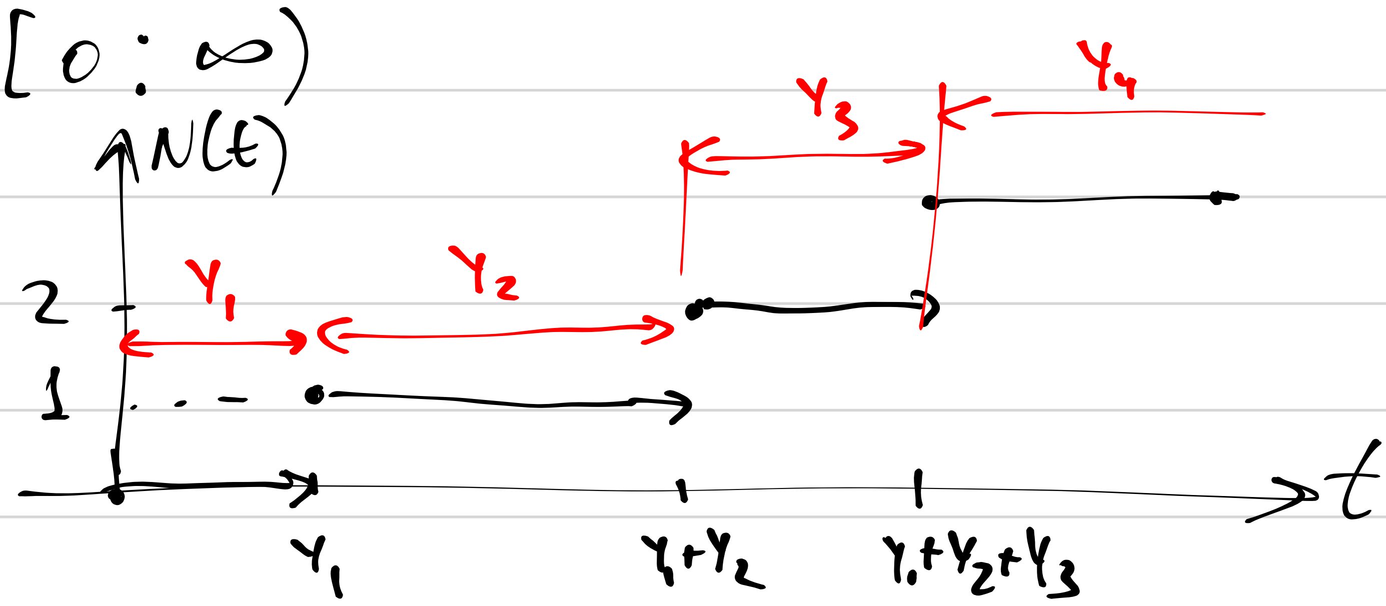
# Видно? Слышно?

→ пуассоновский процесс
→ винеровский процесс.

$t \in [0 : \infty)$




$N(t) = N[0; t]$ - число „прошли" за период $[0; t]$

## Аксиомы

**Init.** $N(0) = 0$

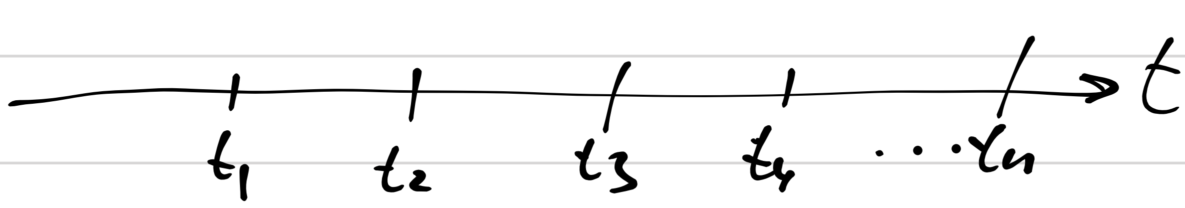
**Stat.** Стац-сть приращ-ий

$$N(a; b] \sim N(a+s; b+s]$$

одинак. распр.

кол-во „прошли" за период $(a; b]$

**Indep** приращения за непер-ся интервалы независимы.




$$\left.\begin{aligned} N(t_1; t_2] &= N(t_2) - N(t_1) \\ N(t_2; t_3] &= N(t_3) - N(t_2) \\ &\vdots \\ N(t_{n-1}; t_n] &= N(t_n) - N(t_{n-1}) \end{aligned}\right\} \text{незав-мы}$$

**Prop** Вер-сть ровно одного происш-ия за малый интервал времени примерно проп-на длине интервала, а вер-сть 2-х и более происш-ий на порядок меньше.

$$\begin{cases} P(N[0;\Delta]=1) = \lambda\cdot\Delta + o(\Delta) \\ P(N[0;\Delta]\geq 2) = o(\Delta) \end{cases}$$

$o(\Delta)$ - какая-то ф-ция, убыв-ая быстрее $\Delta$ (при $\Delta\to 0$)

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta}\overset{?}{=}0$$

$o(\Delta)=\Delta^2+6\Delta^3$

$o(\Delta)=-\Delta^5+\Delta^7$

$o(\Delta)=\Delta\cdot\sin\Delta$

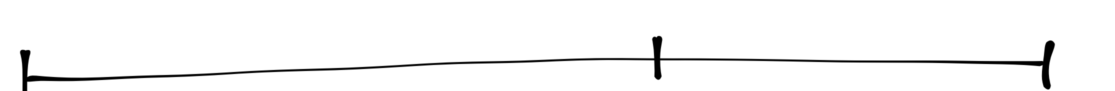
Init, Stat, Indep, Prop $\Rightarrow$ $o(\Delta)$ найдем!

**Упр 1** Исходя из 4-х аксиом

а) найдите (точно!) $P(N[0;t]=0)$.

б) pdf $Y_1$ (время до 1-го происш-ия).

примерно: $P(N[0;t]=0) = 1 - P(N[0;t]=1) - P(N[0;t]\geq 2) = 1-(\lambda t+o(t)) - o(t) = 1-\lambda t\underbrace{-o(t)-o(t)}_{o(t)} = 1-\lambda t+o(t)$



$t$ $\quad$ $t+\Delta$

$$P(N[0;t+\Delta]=0) = P(N[0;t]=0,\ N(t;t+\Delta]=0) \overset{\text{незав.}}{=}$$

$$= P(N[0;t]=0)\cdot P(N(t;t+\Delta]=0) \overset{\text{Stat}}{=}$$

$$= P(N[0;t]=0)\cdot P(N(0;\Delta]=0) = P(N[0;t]=0)\cdot P(N[0;\Delta]=0)$$

$N(t) = N[0;t]$

$$\underbrace{P(N(t+\Delta)=0)}_{h(t+\Delta)} = \underbrace{P(N(t)=0)}_{h(t)} \cdot \underbrace{P(N(\Delta)=0)}_{1-\lambda\Delta+o(\Delta)}$$

$1-\lambda t+o(t)$

$$h(t+\Delta) = h(t)\cdot(1-\lambda\Delta+o(\Delta))$$

$$h(t+\Delta) - h(t) = h(t)(-\lambda\Delta + o(\Delta))$$

магия !!

$$\frac{h(t+\Delta)-h(t)}{\Delta} = h(t)\left(-\lambda + \frac{o(\Delta)}{\Delta}\right)$$

$$\lim_{\Delta\to 0} LHS = \lim_{\Delta\to 0} RHS$$

Опр. $o(\Delta)$ – любая ф-ция, у к-рой $\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta}=0$

$$h'(t) = h(t)\cdot\Big(-\lambda + \underbrace{\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta}}_{=0}\Big)$$

$$\boxed{h' = -\lambda\cdot h}$$

$$\boxed{h(t) = c\cdot\exp(-\lambda t)} = \exp(-\lambda t)$$

$h(0) = P(N[0;0]=0) = 1$

$$P(N[0;t]=0) = \exp(-\lambda t) =$$

$$= 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!}\ldots$$

$$= 1 - \lambda t + \underbrace{\frac{\lambda^2}{2!}\cdot t^2 - \frac{\lambda^3}{3!}t^3 \ldots\ldots}_{o(t)}$$

магия (анс)

$$\boxed{P(N[0;t]=0) = 1 - \lambda t + o(t)}$$

д) pdf $Y_1$

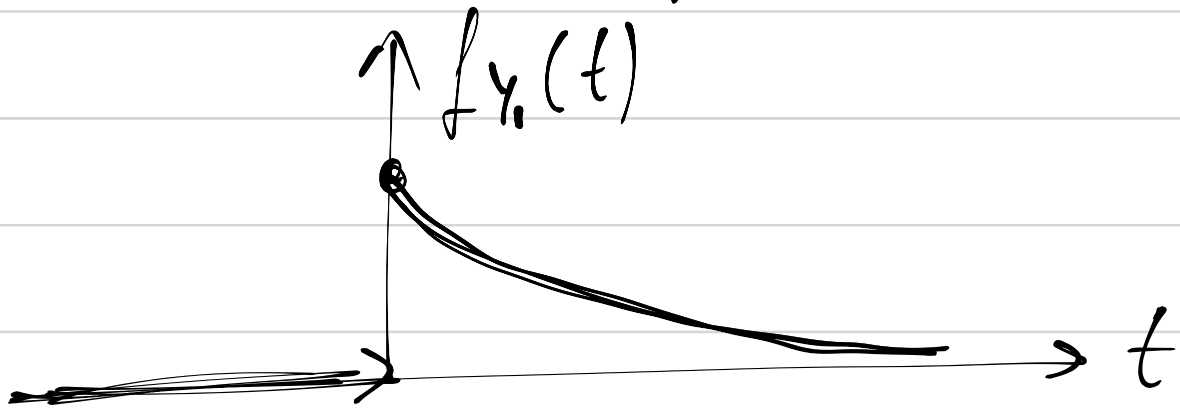
$Y_1$ – время до 1-го происш-ия.

$$P(N[0;t]=0) = P(Y_1>t) = 1 - \underbrace{P(Y_1\le t)}_{cdf}$$

ф. распр-ия.

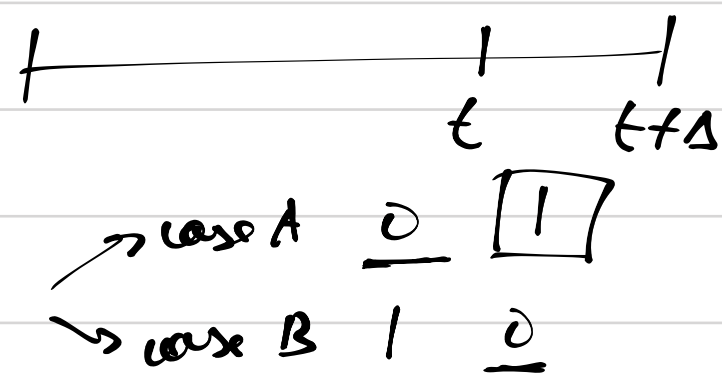
cdf: $P(Y_1 \le t) = 1 - P(N[0;t]=0) =$
$= 1 - \exp(-\lambda t)$

pdf: $f_{Y_1}(t) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda t), & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$




$P(N[0;t]=1)$ ?

выв-ся через диф. ур.




Теорема: из 4-х аксиом пуасс. потока следует: $Y_1, Y_2, \ldots \sim iid\ \mathrm{Exp}(\lambda)$ !!

$$N[a;a+\Delta] \sim \mathrm{Pois}(\lambda \cdot \Delta)$$

$Y_i$:

$$f_{Y_i}(t) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda t), & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$E(Y_i) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(Y_i) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(N[a;a+\Delta]=k) = \exp(-\lambda\Delta) \cdot \frac{(\lambda\Delta)^k}{k!}$$

$$E(N[a;a+\Delta]) = \lambda \cdot \Delta$$

$$\mathrm{Var}(N[a;a+\Delta]) = \lambda \cdot \Delta.$$

Упр.

ЕВ


бабочки ~ пуассону ($\lambda = \frac{1}{2}$ на м$^2$)

$$N[S] \sim Poiss\left(\frac{1}{2} \cdot S\right)$$

Какой должна быть сторона квадрата, чтобы там была бабочка хотя бы одна с вер $= 0.9$?

$$P(N[a^2] \geq 1) = 0{,}9$$

$$P(N[a^2] = 0) = 0{,}1$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \cdot a^2\right) = 0{,}1$$

$$-\frac{1}{2} a^2 = \ln 0{,}1 \qquad 0{,}1 = \frac{1}{10}$$

$$\ln \frac{1}{10} = -\ln 10$$

$$\frac{1}{2} a^2 = \ln 10$$

$$a^2 = 2 \ln 10 \qquad a > 0 \qquad a = \sqrt{2 \ln 10}$$

Петя (пуасс) 10 смс/час $\xrightarrow{A(t)}$ Маша $\xleftarrow{B(t)}$ Коля 5 смс/час (пуасс)

а) $P($Маша получит ровно 12 смс за час$)$? независимо.

б) $P($за ближ. 5 минут Маша не получит ни одного$)$?

---

$$C(t) = A(t) + B(t) \qquad [\text{час}]$$

$\boxed{\text{рутинный}}$

$$P(C(1)=12) = P(A(1)=12,\ B(1)=0) + P(A(1)=11,\ B(1)=1) + \ldots + P(A(1)=0,\ B(1)=12) =$$

$$= \underbrace{P(A(1)=12)}_{\lambda_A=10}\cdot \underbrace{P(B(1)=0)}_{\lambda_B=5} + \ldots\ldots =$$

$$= \exp(-10\cdot 1)\cdot\frac{(10\cdot 1)^{12}}{12!}\cdot \exp(-5\cdot 1) + \ldots\ldots$$

---

Элегантный

$$A(0)=0 \quad B(0)=0 \Rightarrow \boxed{C(0)=0}$$

акс !

$$C(a+\Delta; b+\Delta] = A(a+\Delta; b+\Delta] + B(a+\Delta; b+\Delta]$$

независ

$$\sim \qquad\qquad \sim \qquad\qquad \sim$$

$$C(a; b] = A(a; b] + B(a; b]$$

нез

$$P(C[0;\Delta]=1) = P(A(\Delta)=0)\cdot P(B(\Delta)=1) + P(A(\Delta)=1)\cdot P(B(\Delta)=0) =$$

$1\cdot o(\Delta) = o(\Delta)$

$\Delta^2 = o(\Delta)$

$\lambda\cdot o(\Delta) = o(\Delta)$

$$= (1-\lambda_A\cdot\Delta + o(\Delta))\cdot(\lambda_B\cdot\Delta + o(\Delta)) + (\lambda_A\cdot\Delta + o(\Delta))\cdot(1-\lambda_B\cdot\Delta + o(\Delta)) =$$

$$= o(\Delta) + (\lambda_A+\lambda_B)\cdot\Delta$$

$\boxed{C(t) \text{ — пуасс. поток}, \quad \lambda_C = \lambda_A+\lambda_B = 10+5}$

$c(t)$ – пуасс процесс с интен (rate) $= 15$ /час

$$P(c(1)=12) = \exp(-15\cdot 1)\cdot\frac{(15\cdot 1)^{12}}{12!}$$

б) $P$(никто не пон-т за 5 минут)

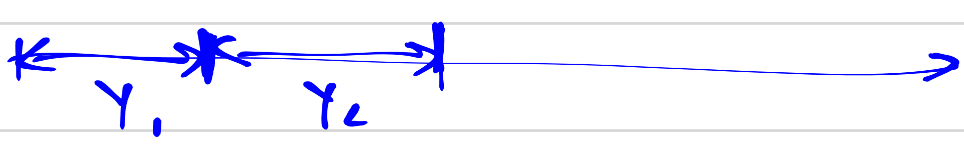
$$= P\left(Y_1 > \tfrac{5}{60}\right) = \underbrace{P\left(c\left[0;\tfrac{5}{60}\right] = 0\right)}_{\exp(-\lambda t)}$$

$$= \exp\left(-15\cdot\tfrac{5}{60}\right) = \exp\left(-\tfrac{5}{4}\right)$$

Упр. $Y \sim Exp(3)$

$W = 60\cdot Y$ $\quad W \sim ?$ $\quad Exp\left(\frac{3}{60}\right)$

инт.




$\lambda = 3$ $\quad$ 3 смс/час

$E(N[0;\Delta]) = 3\cdot\Delta$

формы

$$P(W>t) = P(60Y>t) = P\left(Y > \tfrac{t}{60}\right) =$$

$$= \exp\left(-\lambda\cdot\tfrac{t}{60}\right) = \exp\left(-\tfrac{\lambda}{60}\cdot t\right)$$

cdf $\quad P(W\le t) = 1 - \exp\left(-\tfrac{\lambda}{60}t\right)$

pdf $\quad f_W(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{60}\cdot\exp\left(-\frac{\lambda}{60}t\right), & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

$$W \sim Exp\left(\tfrac{\lambda}{60}\right)$$