Привет !! ETS-модели

Задачка:

* $\boxed{ETS(A\ Ad\ A)}$

→ точечный и интервальный прогноз на 1 и 2 шага вперед?

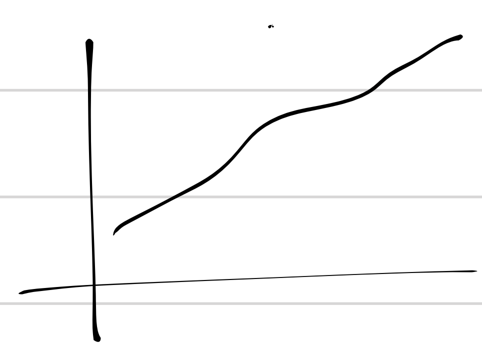
Как она устроена?

E = A - аддитивная
T = Ad - затух. аддит
S = A - аддитивн.

[идея]

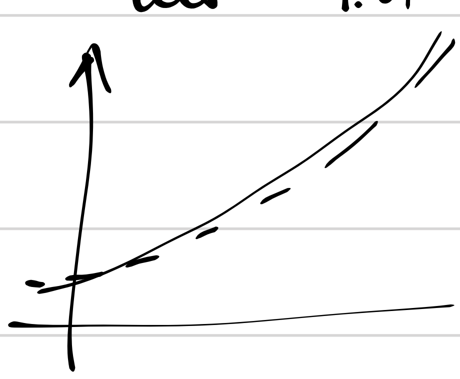
аддит:

$$l_t = \overbrace{l_{t-1}}^{\text{шт}} + \underbrace{\overbrace{b_{t-1}}^{\text{шт}}}_{\text{скорость роста}}$$



мульт.

$$l_t = \underbrace{l_{t-1}}_{\text{шт}} \cdot \underbrace{b_{t-1}}_{1.01}$$

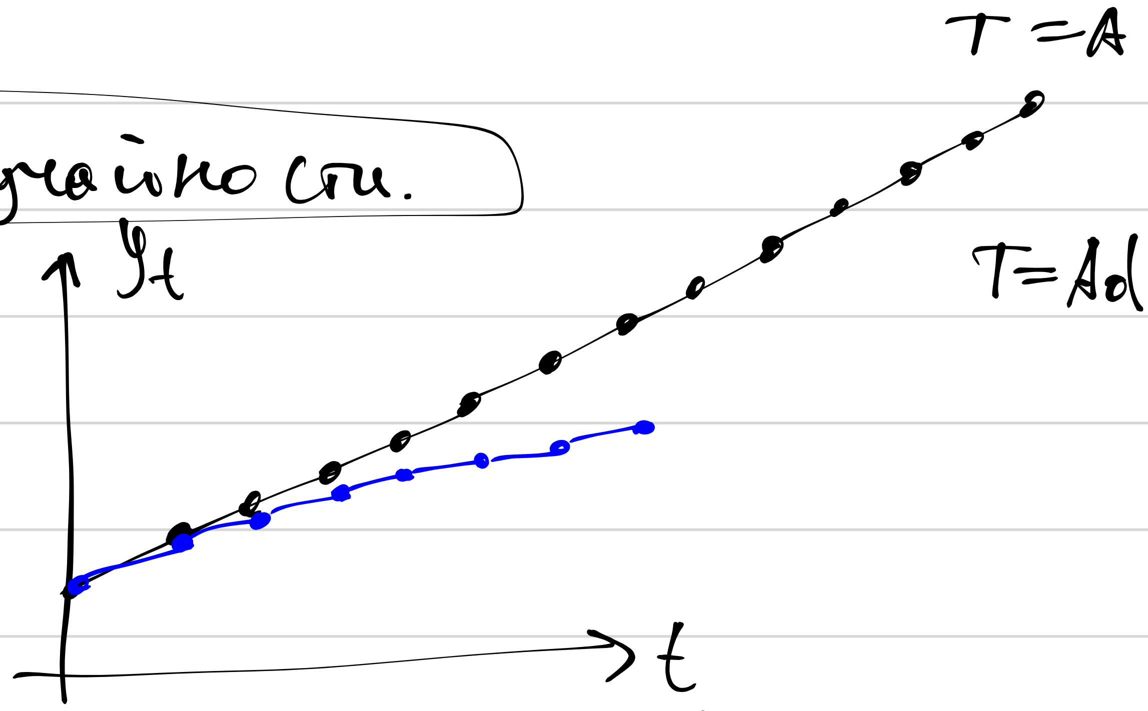


$ETS(A\ A_d\ A)$

а) поймём как устроена модель.

б) $\hat{y}_{T+1}$, $\hat{y}_{T+2}$

мир без случайности.



набл. пос-ль

тренд

сезонная прибавка.

$$y_t = l_t + s_t$$ [месяч данные]

$$s_t = s_{t-12}$$

текущая скорость роста тренда

$$l_t = l_{t-1} + b_t$$

линия тренда

$$b_t = \phi \cdot b_{t-1}$$

$\phi \in (0;1)$

y_t - набл-ые

s_t - сезонная прибавка

l_t - линия тренда

b_t - наклон линии тренда

① $\boxed{\text{сегодня}} = \boxed{\text{прошлое}} + \boxed{\text{случ. ые изменения}}$

$(u_t) \sim N(0;\sigma^2)$

сегодня = через прошлое + ошибка

fpp3 глава 8.5

$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t$$

$$b_t = \phi \cdot b_{t-1} + \beta \cdot u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \phi \cdot b_{t-1} + \alpha \cdot u_t$$

$ETS(A\ A_d\ A)$

набл

$$y_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1}) + s_{t-12} + u_t$$

$$(u_t) \sim N(0;\sigma^2)$$

Упр. В рамках ETS (A Ad A) модели постройте предск-ный интервал PI для y_{T+1}, y_{T+2} считая $y_1, y_2 \dots y_T$ и параметры модели известными.

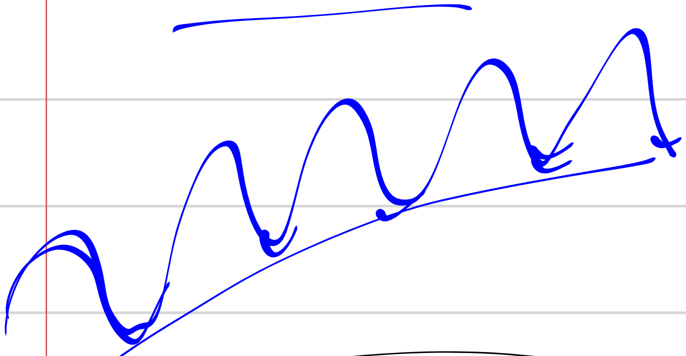
$$\begin{cases} s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t \\ b_t = \phi \cdot b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ y_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-12} + u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \end{cases}$$

не вкусны!! нач-ые условия $l_0, b_0, s_0, s_{-1}, s_{-2}, \dots s_{-11}$

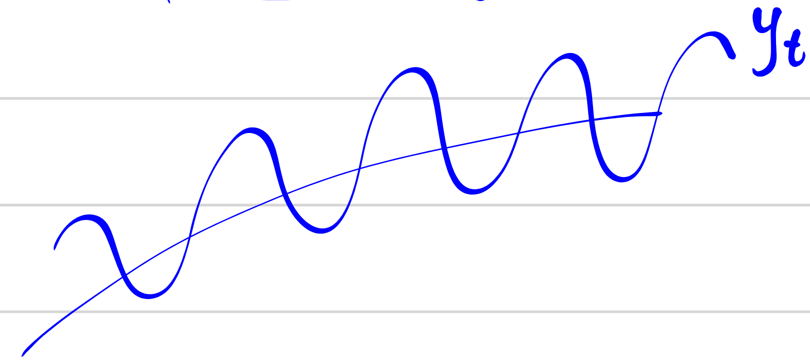
Параметры: $\theta = (\phi, \alpha, \beta, \gamma, \sigma^2, l_0, b_0, \boxed{s_0, s_{-1}, s_{-2} \dots s_{-11}})$

ур-ие на параметры: $\boxed{s_0 + s_{-1} + s_{-2} + \dots + s_{-11} = 0}$

не хотим



хотим



$$\begin{cases} s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t \\ b_t = \phi \cdot b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ y_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-12} + u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \end{cases}$$

$\hat{y}_{T+1|T}$? $\hat{y}_{T+1}$ $\hat{y}_{T+2|T}$?

на какой период делаем прогноз

последнее доступное наблюдение

$\hat{y}_{T+100|T}$?

y_{T+1} = то, что знаем в момент T + будущие ошибки

$$\begin{cases} s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t \\ b_t = \phi \cdot b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ l_t = l_{t-1} + \phi \cdot b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ y_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-12} + u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \end{cases}$$

ETS(AAdA)

ETS(AAN)

затух-ия нет $\phi = 1$

сез-сти нет $s_t = 0$

$$\begin{cases} b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \end{cases}$$

$$y_{T+1} = \underbrace{l_T + \phi b_T + s_{T-11}}_{\text{известно к моменту } T} + \underbrace{u_{T+1}}_{\text{будущий шок.}}$$

$$E(y_{T+1} | y_1 \ldots y_T) = l_T + \phi b_T + s_{T-11}$$

$$Var(y_{T+1} | y_1 \ldots y_T) = Var(u_{T+1}) = \sigma^2$$

$$(y_{T+1} | y_1 \ldots y_T) \sim N(l_T + \phi \cdot b_T + s_{T-11}; \sigma^2)$$

$$PI(95\%) \quad [l_T + \phi b_T + s_{T-11} - 1.96\sqrt{\sigma^2}; \; l_T + \phi b_T + s_{T-11} + 1.96\sqrt{\sigma^2}]$$

$$y_{T+2} = \underbrace{l_{T+1} + \phi b_{T+1}}_{\text{раскрываем!}} + \underbrace{s_{T-10}}_{\text{знаю}} + \underbrace{u_{T+2}}_{\text{не предск.}} =$$

$$= (l_T + \phi b_T + \alpha \cdot u_{T+1}) + \phi(\phi b_T + \beta \cdot u_{T+1}) + s_{T-10} + u_{T+2}$$

$$= \underbrace{(l_T + \phi b_T + \phi^2 \cdot b_T + s_{T-10})}_{\text{знаем}} + \underbrace{(\alpha + \beta) u_{T+1} + u_{T+2}}_{\text{непр. часть.}}$$

$$E(y_T | y_1 \ldots y_T) = l_T + (\phi + \phi^2) \cdot b_T + s_{T-10}$$

$$Var(y_T | y_1 \ldots y_T) = Var((\alpha+\beta) u_{T+1} + u_{T+2}) = (\alpha+\beta)^2 \cdot \sigma^2 + \sigma^2$$

95% PI для $y_{T+2} = [l_T + (\phi + \phi^2) \cdot b_T + s_{T-10} - 1.96 \cdot \sqrt{(\alpha+\beta)^2 \sigma^2 + \sigma^2};$

лосв $+ 1.96\sqrt{\text{аналог.}}]$

$$\hat{y}_{T+100|T} \ ? = E(y_{T+100} \mid y_1 \dots y_T) =$$

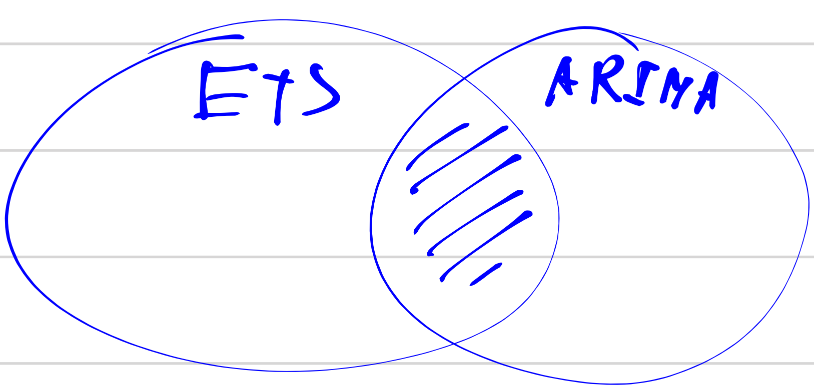
$$= \ell_T + (\phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots + \phi^{100})\cdot b_T + S_{T-8} =$$

$$100 \to 100 - 9\cdot 12 = 100 - 108 = -8$$

$$= \boxed{\ell_T + \frac{\phi - \phi^{101}}{1-\phi}\cdot b_T + S_{T-8}}$$

$\hat{y}_{T+h|T}$ $(h \to \infty)$ $\quad \frac{\phi}{1-\phi}\cdot b_T$

Упр. перепишите ETS(AAN) модель для (y_t) как ARMA модель для Δy_t или $\Delta^2 y_t$.



$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_t - y_{t-1}) = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} =$$

$$= y_t - y_{t-1} - y_{t-1} + y_{t-2} =$$

$$= y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

$$\Delta^2 y_t = (1-L)^2 \cdot y_t = (1 - 2L + L^2)\cdot y_t =$$

ETS (AAN)

$$\begin{cases} b_t = b_{t-1} + \beta u_t \to \Delta b_t = \beta\cdot u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \to \Delta \ell_t = b_{t-1} + \alpha u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \end{cases}$$

ARMA модель без ~~ℓ_t~~ ~~b_t~~ только (y_t) и (u_t)

Δ

$$\Delta y_t = \Delta \ell_{t-1} + \Delta b_{t-1} + \Delta u_t$$

$$\Delta y_t = (b_{t-2} + \alpha u_{t-1}) + (\beta u_{t-1}) + \Delta u_t \qquad \ell_t \text{ уже нет!}$$

$$\Delta(\Delta y_t) = \Delta b_{t-2} + \alpha\cdot \Delta u_{t-1} + \beta\cdot\Delta u_{t-1} + \Delta(\Delta u_t)$$

$$\Delta(\Delta y_t) = \Delta b_{t-2} + \alpha\cdot\Delta u_{t-1} + \beta\cdot\Delta u_{t-1} + \underbrace{\Delta(\Delta u_t)}$$

$\Delta b_{t-2} \leftarrow \beta\cdot u_{t-2}$

$$\boxed{\Delta b_t = \beta\cdot u_t}$$
$$\boxed{b_t = b_{t-1} + \beta u_t}$$

$$\Delta^2 y_t = \beta\cdot u_{t-2} + (\alpha+\beta)(u_{t-1} - u_{t-2}) + (u_t - 2u_{t-1} + u_{t-2})$$

$$\Delta^2 y_t = u_t + (\alpha+\beta-2)u_{t-1} + (\beta-\alpha-\beta+1)u_{t-2}$$

$$\Delta^2 y_t = \boxed{u_t + \underline{(\alpha+\beta-2)}u_{t-1} + \underline{(1-\alpha)}u_{t-2}}$$

$$\Delta^2 y_t \sim MA(2)$$

$$\boxed{y_t \sim ETS(\underline{A}\,\underline{A}\,N)} \longrightarrow \boxed{\Delta^2 y_t \sim MA(2)}$$

$$\Delta^2 y_3 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

Упр. $y_t \sim ETS(AAN)$

а) $E(y_t)$ $\quad$ $\underline{Var(y_1)}$ $\quad$ $\underline{Var(y_2)}$ $\quad$ $\boxed{Var(y_t)}$ *

$Cov(y_1, y_2)$

б) стац-н ли ряд (y_t)? [нет]

параметры: $\boxed{l_0, b_0, \alpha, \beta, \sigma^2}$

$$\begin{cases} b_t = b_{t-1} + \underline{\beta u_t} \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \underline{\alpha u_t} \\ y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \underline{u_t} \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \end{cases}$$

$$E(y_1) = E(l_0 + b_0 + u_1) = l_0 + b_0$$
$$E(y_2) = E(l_1 + b_1 + u_2) =$$
$$= E(\underbrace{l_0 + b_0 + \alpha u_1} + \underbrace{b_0 + \beta u_1} + u_2) =$$
$$= l_0 + 2b_0 + 0.$$

$$E(y_t) = l_0 + t\cdot b_0$$

$E(y_2) \neq E(y_1) \rightarrow$ ряд нестац.

$$Var(y_1) = Var(u_1) = \sigma^2$$
$$Var(y_2) = Var((\alpha+\beta)u_1 + u_2) =$$
$$= (\alpha+\beta)^2\cdot\sigma^2 + \sigma^2$$