Привет :)

Видно? Слышно?   [встаньте :)]

→ вопросы / ответы → голосом?
                     → чате?] (ТГ)

→ время?
→ другой Семинарист   95%   99.99%
                              + запись + pdf

четверг вечер   ок   ┌ 16:20
пятница вечер   хуже   │ 18:10
                         │ 19:40
                         └ 21:00

┌ → σ-алгебра / σ-algebra
│ → $E(X|F)$
└

опр. σ-алгебра — это ...

Цель: Описать наблюдаемость микро-мира

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

* Рома — отличает все исходы

        F_R
       ↗
  $\not F$ $\not \exists$
        F_Y

* Юра — см. Лунда-Кинда
        1, 2, много ⊂ ┌ 3
                      │ 4
                      │ 5
                      └ 6

* Che — отличает чётные и нечётные.
        F_C

$\mathcal{F}$ — список вопросов (события), на что
k-рые индивид точно сможет ответить.

Правда ли, что выпало $\{1,3,5\}$?
                                        (или)

$A=\{1,3,5\}$ $B=\{1,2\}$

	$A=\{1,3,5\}$	$B=\{1,2\}$
R	+	+
Y	−	+
C	+	−

$A \in \mathcal{F}_R$ $A \in \mathcal{F}_C$
$B \in \mathcal{F}_R$ $B \in \mathcal{F}_Y$

$\mathcal{M}$?

события: $A, B, C, D \dots$
σ-алгебры (списки событий): $A\ B\ D\ \mathcal{E}\ \widehat{\mathcal{F}}^C$

\mathcal{F}

$\operatorname{card} \mathcal{F}_C = 4$

$\mathcal{F}_C = \left\{ \underline{\{1,3,5\}} , \underline{\{2,4,6\}} , \overbrace{\underline{\{1,2,3,4,5,6\}}}^{\Omega} , \underset{\text{``нет''}}{\underbrace{\{\}}_{\text{``}\phi\text{''}}} \right\}$
$\underset{\text{``да''}}{}$

$\boxed{\operatorname{card} Y = 8}\ \cancel{\mathcal{A}}\ \boxed{?!}$

$\mathcal{F}_Y = \left\{ \underline{\{1\}} , \underline{\{2\}} , \underline{\{1,2\}} , \underline{\{1,3,4,5,6\}} , \{2,3,4,5,6\} \right.$
$\{3,4,5,6\},$
$\left. \{1,2,3,4,5,6\} , \{\} \right\}$

$\Omega = \left\{ \underset{\cdot}{\underline{1}} , \underset{\cdot\cdot}{\underline{2}} , \underset{\cdots}{\boxed{3, 4, 5, 6}} \right\}$

underbrace Ω

$\mathcal{F}_R = \{ \dots \dots \}$ $\mathcal{M}$? сколько событий
$\Omega = \{ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \}$ в $\mathcal{F}_R$?

$\operatorname{card}(\mathcal{F}_R) = ?\ 2^6 = 64$
cardinality of $\mathcal{F}_R$?

$\Omega = \left\{ \underset{\text{вып}}{\overset{\text{не вып}}{\underline{\bullet\!-\!\bullet\!-\!\bullet}}}\ \underset{\text{вып}}{\overset{\text{не вып}}{\underline{\bullet\!-\!\bullet}}}\ \underset{\text{вып}}{\overset{\text{не вып}}{\bullet}} \right\}$

$A = \{ \cdot \ \cdot \ \cdot \}$ $2^3 = 8$

Форм-но опр. $\mathcal{F}$ – это σ-алгебра для мн-ва исходов Ω.

1) $\boxed{\phi \in \mathcal{F}}$, $\Omega \in \mathcal{F}$.

2) Если $A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathcal{F}$ то любая (счётная) комбинация из A_i с помощью $\cap, \cup, (\cdots)^c, \setminus$ тоже $\in \mathcal{F}$

$C, A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow C \cap (A \cup B) \in \mathcal{F}$

Минимл. опр-ие σ-алгебры.

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) Если $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$, то любая комб-ция из A_i с помощью $\cup$ и $(\cdots)^c$ тоже $\in \mathcal{F}$

$\phi = (\Omega)^c$

$\left((A_1 \cup A_2)^c \cup (A_3 \cup A_4)^c \cup A_6 \right)^c$

A – событ

доп-тие $\overline{A} = A^c$ к A (не A)

Чаще всего $\sigma(X, Y)$ – инфо порожд-ая значением X и Y.

$\sigma(X), \sigma(Y), \boxed{\sigma(X, Y)}, \sigma(X \cdot Y)$

общ σ): $\sigma(X) \subseteq \sigma(X, Y)$ $\sigma(X \cdot Y) \subseteq \sigma(X, Y)$
$\sigma(Y) \subseteq \sigma(X, Y)$

	Y=0	Y=1	Y=2
X=0	0,1	0,2	0,1
X=1	0,1	0,3	0,2

а) сколько событий в каждой?
б) какая является частью? другой.
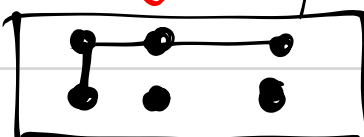
$\sigma(X \cdot Y) = \{\{XY=0\}, \{XY=1\}, \{XY=2\} \ldots\}$ 3 соб.

$\sigma(X) = \{\{X=0\}, \{X=1\}, \Omega, \phi\}$

$\sigma(Y) = \{\{Y=0\}, \{Y \neq 0\}, \{Y=1\}, \{Y \neq 1\} \ldots\}$

$\sigma(X, Y) = \{\{X=Y\}, \{X=Y+1\}, \ldots\} \sigma_2^6$ 3 событ.
$= 64$ соб.

$\mathcal{B}(X, Y)$ — самая маленькая $\mathcal{B}$-алгебра, позволяющая сравнить X и Y с любыми числами a и b, соответственно, то есть,

$$\{X \leq a, \; Y \leq b\} \in \mathcal{B}(X, Y) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{инт}}$ $\boxed{E(X | \mathcal{F}) \Leftarrow \text{наилучший прогноз } X \text{ при наличии инфор } \mathcal{F}.}$

$\left[\; \textcolor{red}{\text{! случайная вел !}} \atop \textcolor{red}{! \; E(X) - const \; !} \right]$

$\to$ дождь 0,2
$\to$ паси 0,3
$\to$ солнце 0,5

$\boxed{\text{дождь облигаю на слух}}$

$\boxed{\text{Упр.}}$
$\boxed{\text{инт}}$

$$\Omega = \{ \varnothing, \; \Pi, \; C \}$$

$w \in \Omega$	$\varnothing$	Π	C
X	$6°$	$8°$	$12°$
вер.	0,2	0,3	0,5
$\hat{X}$	?	?	?
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	$6°$	$<$	$<$
$\hat{X}$	$6°$	$10.5°$	$10.5°$

$\mathcal{F} = \{ \{\varnothing\}, \{\Pi, C\}, \Omega, \varnothing \}$

$\boxed{\text{с.в. !}}$

$$E(X | \mathcal{F}) = \hat{X}$$

$\Pi \quad C$
$0,2 \; 0,3 \; 0,5$
$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$
$0 \quad \frac{0,3}{0,8} \quad \frac{0,5}{0,8}$

$\boxed{\substack{\text{М.} \\ ?}}$

$$< = 8 \cdot \frac{0,3}{0,8} + 12 \cdot \frac{0,5}{0,8} = 3 + 1.5 \cdot 5 =$$
$$= 3 + 7.5 = 10.5$$

как записать свелычину?

$\to$ мало знач $\Rightarrow$ все знач.

$\to$ много знач $\Rightarrow$ выразить через другие

$\to$ $\boxed{\text{завуал.}}$

$$\boxed{\hat{X} = \begin{cases} 6, & \text{если } X = 6 \\ 10.5 & \text{если } X > 6 \end{cases}}$$

$$\boxed{\hat{X} = -\frac{4.5}{12}(x-8)(x-12) + 10.5}$$

общ $E(X \mid \underset{\sim}{\delta}(W)) = E(X \mid W)$

формал-ое опр-ие
$\mathcal{F}$ - δ-алгебра, X - с.в. $\boxed{\delta(\hat{X}) \subseteq \mathcal{F}}$
$\hat{X} = E(X \mid \mathcal{F})$ если
$\forall A \in \mathcal{F}$ $\boxed{E(X \cdot I(A)) = E(\hat{X} \cdot I(A))}$

раб-т в дискр, в непр, ...

$\underset{\sim}{\mathcal{Y}}$? $I(A)? = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

простейшие события из $\mathcal{F}$:
$\emptyset$ $I(\emptyset) = 0$ $E(X \cdot 0) = E(\hat{X} \cdot 0)$ ∥
Ω $I(\Omega) = 1$ $\boxed{E(X) = E(\hat{X})}$

ожидание
прогноз-ой

ожидание
прогноза.

произв-ое A:
$E(? \cdot ?)$

$Cov(W, V) = E(W \cdot V) - E(W) \cdot E(V)$

*смысл:
$Cov(X, I(A)) = E(X \cdot I(A)) - E(X) \cdot P(A)$

инфо в $\mathcal{F}$
не позволяет
узнать что-то
про ошибку $X - \hat{X}$.

то, что прогн,

$Cov(\hat{X}, I(A)) = E(\hat{X} \cdot I(A)) - E(\hat{X}) \cdot P(A)$

прогноз

интерпр

$I_A = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ $E(I_A) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(A^c) = P(A)$
$\boxed{Cov(X, I_A) = Cov(\hat{X}, I_A)}$ $\boxed{Cov(X - \hat{X}, I_A) = 0}$