Привет !! ШОЧа

→ прогнозы в $AR(p)$ моделях
→ наличие $MA(\infty)$ представ-ний у рекурр-го ур-ия
→ ещё PACF !!

Упр. $(y_t) \sim AR(2)$ отн-но (u_t) | $u_t \sim N(0;16)$ незав.

$$y_t = 6 + 0{,}2 y_{t-1} + 0{,}24 y_{t-2} + u_t$$

[секрет] $(y_t) \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t)

а) постройте 95% PI для $y_{T+1|T}$

на какое время — последнее доступное

б) —//— для y_{T+2}

$$(y_{T+1} \mid y_1, y_2, \dots, y_T) \sim \ ?\ N(6 + 0{,}2 y_T + 0{,}24 y_{T-1}; 16)$$
? незав.

$$y_{T+1} = 6 + 0{,}2 y_T + 0{,}24 y_{T-1} + u_{T+1}$$

„$MA(\infty)$"

$$y_T = \mu + u_T + ?u_{T-1} + ?u_{T-2} + \dots$$

$$y_{T-1} = \mu + u_{T-1} + ?u_{T-2} + ?u_{T-3} + \dots$$

PI 95% для y_{T+1}:

$$[6 + 0{,}2 y_T + 0{,}24 y_{T-1} - 1{,}96 \cdot \sqrt{16};\ 6 + 0{,}2 y_T + 0{,}24 y_{T-1} + 1{,}96 \cdot \sqrt{16}]$$

? PI 95% для u_{T+1}:

$$[0 - 1{,}96\sqrt{16};\ 0 + 1{,}96\sqrt{16}]$$

$$y_{T+2} = 6 + 0.2\,\underbrace{y_{T+1}} + 0{,}24\,y_T + u_{T+2} =$$

$$= 6 + 0{,}2\left[6 + 0{,}2\,y_T + 0{,}24\,y_{T-1} + u_{T+1}\right] + 0{,}24\,y_T + u_{T+2} =$$

$$= \underbrace{7.2 + 0{,}28\,y_T + 0.048\,y_{T-1}}_{E(y_{T+2} \mid y_1 \dots y_T)} + \underbrace{0{,}2\,u_{T+1} + u_{T+2}}_{Var(y_{T+2} \mid y_1 \dots y_T)}$$

$$E(y_{T+2} \mid y_1 \dots y_T) = 7.2 + 0{,}28\,y_T + 0.048\,y_{T-1}$$

$$Var(y_{T+2} \mid y_1 \dots y_T) = 0 + 0{,}04 \cdot 16 + 16 = 1{,}04 \cdot 16.$$

PI 95% для y_{T+2}:

$$\left[7.2 + 0{,}28\,y_T + 0.048\,y_{T-1} - 1.96\sqrt{1.04 \cdot 16}\,;\; 7.2 + 0{,}28\,y_T + 0.048\,y_{T-1} + 1{,}96\sqrt{1.04 \cdot 16}\right]$$

Теорема:

У рекур-го ур-ия

$$(y_t - \mu) = \beta_1 (y_{t-1} - \mu) + \dots + \beta_p (y_{t-p} - \mu) + u_t,$$

где u_t - б. шум

$$\boxed{(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \dots - \beta_p L^p) \cdot (y_t - \mu) = u_t}$$

(D) ровно одно стац. решение если и только если все $|\lambda_i| \neq 1$

(A) ∞ нестац решений

(B) не более одного стац-го реш-ия [одно/нет]

(C) ровно одно стац решение вида $MA(\infty)$ отн-но (y_t), если и только если все $|\lambda_i| < 1$

хар-ое ур-ие $\lambda^p - \beta_1 \lambda^{p-1} - \dots \beta_p = 0$

Упр.

а) Сколько стац-х решений вида $MA(\infty)$?

б) — // — решений всего?

(u_t) - б. шум

(1) ур-ния: $y_t = \frac{1}{2} y_{t-1} + u_t$

(2) $y_t = 2 y_{t-1} + 3 y_{t-2} + u_t$

(3) $y_t = 6 + 0{,}2\, y_{t-1} + 0{,}24\, y_{t-2} + u_t$

(4) $y_t = 2 + y_{t-1} - y_{t-2} + y_{t-3} + u_t$

(5) $y_t = 3 + 0{,}2 y_{t-1} - 0{,}3 y_{t-2} + u_t$

Как сост-ть хар-ое ур-ие?

* убрать u_t
* чем больше индекс у y_t, тем выше степень λ

$y_t = \frac{1}{2} y_{t-1} + \cancel{u_t}$

$\lambda^1 = \frac{1}{2} \cdot \lambda^0$ $\quad \lambda^1 = \frac{1}{2}$ $\quad |\lambda| < 1$

а) ровно 1 стац-ое решение вида $MA(\infty)$

б) $|\lambda| \neq 1$ ровно 1 стац-ое решение [всего]

$y_t = \frac{1}{2} y_{t-1} + u_t \longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$y_t = 2 y_{t-1} + 3 y_{t-2} + u_t \longrightarrow \lambda^2 = 2\lambda + 3$

$y_t = 6 + 0{,}2\, y_{t-1} + 0{,}24\, y_{t-2} + u_t \longrightarrow \lambda^2 = 0{,}2\lambda + 0{,}24$

$y_t = 2 + y_{t-1} - y_{t-2} + y_{t-3} + u_t \longrightarrow \lambda^3 = \lambda^2 - \lambda + 1$

$y_t = 3 + 0{,}2 y_{t-1} - 0{,}3 y_{t-2} + u_t \longrightarrow \lambda^2 = 0{,}2\lambda - 0{,}3$

хар. ур-ие

---

(2) $\lambda^2 = 2\lambda + 3$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 4$

$(\lambda - 1)^2 = 4 \quad \lambda - 1 = \pm 2 \quad \lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -1$

а) все $|\lambda_i| < 1$? нет — стац. реш. MA(∞) нет.

б) все $|\lambda_i| \neq 1$? нет — стац реш вообще нет.

---

(3) убрали c, u_t:

$y_t = 0{,}2 y_{t-1} + 0{,}24 y_{t-2}$

$\boxed{y_t = b_0 \cdot \lambda^t}$

$\boxed{\begin{array}{l} b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \\ b_n = b_0 \cdot q^n \end{array}}$

$\cancel{b_0} \cdot \lambda^t = 0{,}2 \cancel{b_0} \cdot \lambda^{t-1} + 0{,}24 \cancel{b_0} \cdot \lambda^{t-2}$

$\lambda^2 = 0{,}2\lambda + 0{,}24$

$\lambda^2 - 0{,}2\lambda - 0{,}24 = 0$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0{,}2 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -0{,}24 \end{cases} \quad \lambda_1 = 0{,}6 \quad \lambda_2 = -0{,}4$

все $|\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ стац. реш.-ие вида MA(∞) есть и единств.

все $|\lambda_i| \neq 1 \Rightarrow$ стац. реш.-ие есть единств все $|\lambda_i| \neq 1$ → есть ед. стац. реш.

есть $|\lambda_i| = 1$ → нет стац. реш.

есть ед. стац. реш.:

все $|\lambda_i| < 1$: стац. реш. — $MA(\infty)$ (u_t) отн-но

есть $|\lambda_i| > 1$: стац. реш-ие не вида $MA(\infty)$

(5)

$$y_t = 1 + 0{,}2\, y_{t-1} - 0{,}3\, y_{t-2} + u_t$$

$$\lambda^2 = 0{,}2\lambda - 0{,}3$$

$$\lambda^2 - 0{,}2\lambda + 0{,}3 = 0$$

$$D = 0{,}04 - 4\cdot 0{,}3 = 0{,}04 - 1.2 = -1.16.$$

$$i^2 = -1$$

$$(-i)^2 = -1$$

$$(-1)^2\cdot(i)^2 = -1$$

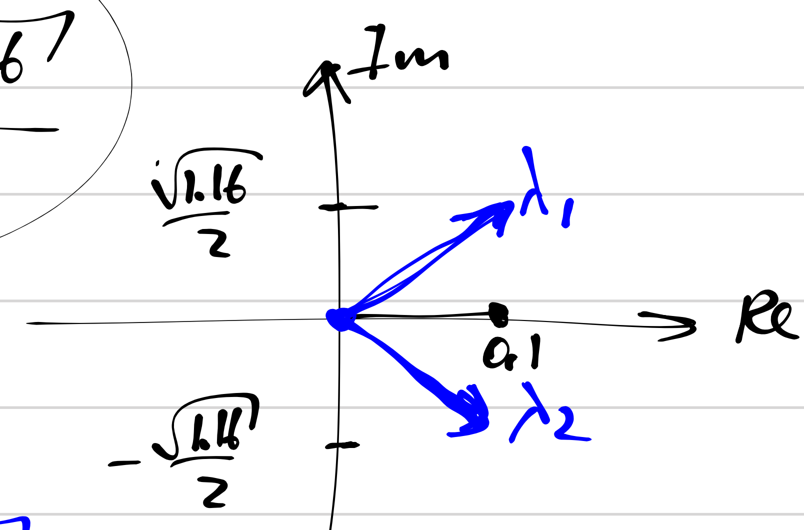
$$\left(\pm i\cdot\sqrt{1.16}\right)^2 = -1.16.$$

$$(\pm f)^2 = D$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm f}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0{,}2 \pm i\sqrt{1.16}}{2}$$

$$= 0{,}1 \pm i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1.16}$$



$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{0{,}1^2 + \left(\frac{\sqrt{1.16}}{2}\right)^2} = \sqrt{0.01 + \frac{1.16}{4}} < 1$$

в силу симметрии

по т. Пифагора

Вывод: есть ед. стац. реш-ие и оно вида $MA(\infty)$.

$L y_t = y_{t-1}$ $\qquad$ $L^5 y_t = y_{t-5}$

Теор-ма Если умножить ур-ие на $Q(L)$ многочлен от лага слева и справа то:

[A] кол-во нестац-х решений растёт

[B] кол-во стац-х не изм-ся если у Q нет корней равных 1 по модулю.

(y_t) верн-м серу (u_t) одно решение.

ур I $\quad \boxed{y_t = u_t + u_{t-1}}$

$(1+0{,}5L) = Q(L)$

$(1+0.5L)\cdot y_t = (1+0{,}5L)\cdot(u_t + u_{t-1})$

ур II $\quad y_t + 0{,}5\,y_{t-1} = u_t + 0{,}5\,u_{t-1} + u_{t-1} + 0{,}5\,u_{t-2}$

мн-во реш-ий ур-ия II

одно един-ое решение ур-ия I

def если $|q|<1$

$$\frac{1}{1-qL} = 1 + qL + q^2L^2 + q^3L^3 + \ldots\ldots$$

$L^{-1} = F$

$L^{-1}\cdot y_t = y_{t+1}$

$$\frac{1}{1-qL} = \frac{F}{-q}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q}F} = -\frac{1}{q}\cdot\left(F + \frac{1}{q}\cdot F^2 + \frac{1}{q^2}F^3 + \frac{1}{q^3}F^4 \ldots\right)$$

$|q|>1$

$$\boxed{\frac{1}{1-0{,}3L}\cdot y_t} = \left(1 + 0{,}3L + 0{,}3^2L^2 + 0{,}3^3L^3 + \ldots\right)\cdot y_t = y_t + 0{,}3\,y_{t-1} + 0.3^2\cdot y_{t-2} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-5L}\cdot y_t = \frac{1}{-5L}\cdot\frac{1}{1-0{,}2L^{-1}} = \frac{F}{-5}\cdot\frac{1}{1-0{,}2F}$$

Упр.

$$y_t = 3y_{t-1} + u_t \qquad (u_t) - б.шум.$$

Найдите стац-ое решение

$$(1-3L)\cdot y_t = u_t$$

$$y_t = \frac{1}{1-3L}\cdot u_t = \frac{-\frac{1}{3}F}{1-\frac{1}{3}F}\cdot u_t =$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{3}F\right) \qquad F\cdot L = 1$$

$$= -\frac{1}{3}F\cdot\left(1+\frac{1}{3}F+\frac{1}{3^2}F^2+\frac{1}{3^3}F^3+\ldots\right)\cdot u_t =$$

$$\boxed{y_t = -\frac{1}{3}u_{t+1} - \frac{1}{9}u_{t+2} - \frac{1}{27}u_{t+3} - \ldots\ldots}$$

стац-ое решение, но не $MA(\infty)$

y_t - это $MA(\infty)$ отн-но u_t

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots$$