7A Видно? слышно?

$t \in [0;\infty)$ — непрерывное

Пуассон. процесс

Винеровский процесс

$N(t)$ — число „происшествий"

$N(t) = N[0;t]$ $\qquad N[7;8] \in \{0,1,2,3,\ldots\}$

Предположения (свойства) Пуасс. процесса.

$C(t) = A(t) + B(t)$

Ind. независимость приращений.

Ind. $\quad t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \ldots \quad t_n \quad \to t$

$$\left.\begin{aligned} N(t_0;t_1] &= N(t_1) - N(t_0) \\ N(t_1;t_2] &= N(t_2) - N(t_1) \\ &\vdots \\ N(t_{k-1};t_k] &= N(t_k) - N(t_{k-1}) \end{aligned}\right\} \text{незав.}$$

St. $N(a;b] \sim N(a+\Delta;\, b+\Delta]$

Init. $N(0) = 0$

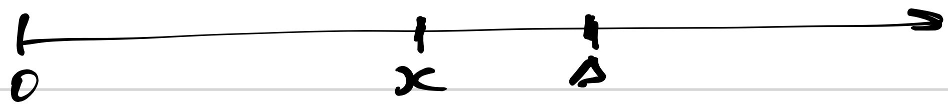
Prop. $\begin{cases} P(N[0;\Delta] = 1) = \lambda \cdot \Delta + o(\Delta) \\ P(N[0;\Delta] \geq 2) = o(\Delta) \end{cases}$

Δ^2, $\Delta^3 + \Delta^5$

вер-ть происш-ия в малый инт вр-ни пр-но пропорц-на длине

Упр. исходя из аксиом пуасс. процесса выведите точную ф-лу для

$$P(N(x)=0)=P(N[0;x]=0)=?$$



$$P(N[0;x+\Delta]=0)=P(N[0;x]=0\cap N(x;x+\Delta]=0)$$

Ind

$$=P(N[0;x]=0)\cdot P(N(x;x+\Delta]=0)=$$

Stat

$$=P(N[0;x]=0)\cdot P(N(0;\Delta]=0)$$

$$\begin{cases} P(N(0;\Delta]=1)=\lambda\cdot\Delta+o(\Delta) \\ P(N(0;\Delta]\geq 2)=o(\Delta) \end{cases}$$

$$P(N(0;\Delta]=0)=1-\lambda\Delta-o(\Delta)-o(\Delta)$$
$$=1-\lambda\Delta+o(\Delta)$$

$$+\ \begin{array}{l} o(\Delta)=\Delta^3+6\Delta^5 \\ o(\Delta)=-2\Delta^4\ 6\Delta^7 \\ \hline o(\Delta)=\dots \end{array}$$

$$P(N[0;x+\Delta]=0)=P(N[0;x]=0)\cdot(1-\lambda\Delta+o(\Delta))$$

$$P(N(x+\Delta)=0)=P(N(x)=0)\cdot(1-\lambda\Delta+o(\Delta))$$

$$P(N(x+\Delta)=0)-P(N(x)=0)=(-\lambda\Delta+o(\Delta))\cdot P(N(x)=0)$$

$$\frac{P(N(x+\Delta)=0)-P(N(x)=0)}{\Delta}=\left(-\lambda+\frac{o(\Delta)}{\Delta}\right)\cdot P(N(x)=0)$$

$$h(x)=P(N(x)=0)$$

$$\frac{h(x+\Delta)-h(x)}{\Delta}=\left(-\lambda+\frac{o(\Delta)}{\Delta}\right)\cdot h(x)$$

$\Delta\to 0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta}\overset{?}{=}0$$

опр $o(\Delta)$

$$h'(x)=(-\lambda+0)\cdot h(x)$$

$$h'(x)=-\lambda\cdot h(x)$$

$$\boxed{h(x)=h_0\cdot\exp(-\lambda x)}$$

$$P(N[0;x]=0) = h_0 \cdot \exp(-\lambda x)$$

из аксиом $N(0)=0$

$$P(N[0;0]=0)=1$$

$$\boxed{P(N[0;x]=0) = \exp(-\lambda x)}$$!!

$$= 1-\lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} - \frac{(\lambda x)^3}{3!} \ldots \ldots$$

$o(x)$

$$P(N[0;x]=0) = 1-\lambda \cdot x + o(x)$$

(по аналогии) $h(x) = P(N(x)=0)$

дифф. ур-ие. док-во

$h_1(x) = P(N(x)=1)$

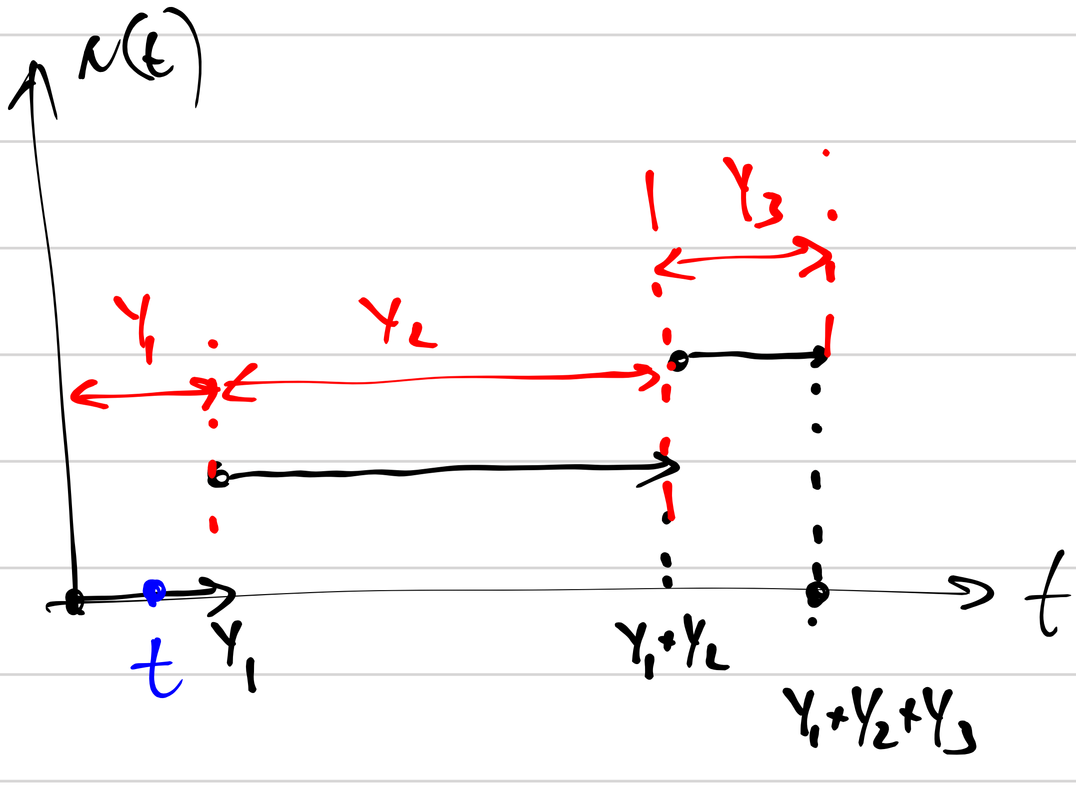
дифф. ур-ие

по аналогии

$$P(N(x)=1) = \exp(-\lambda x)\cdot\frac{(\lambda x)^1}{1!}$$

$$P(N[a;a+x]=k) = P(N(x)=k) = \exp(-\lambda x)\cdot\frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

$$\boxed{N[a; a+x] \sim Poiss(\lambda x)}$$ (поверим)



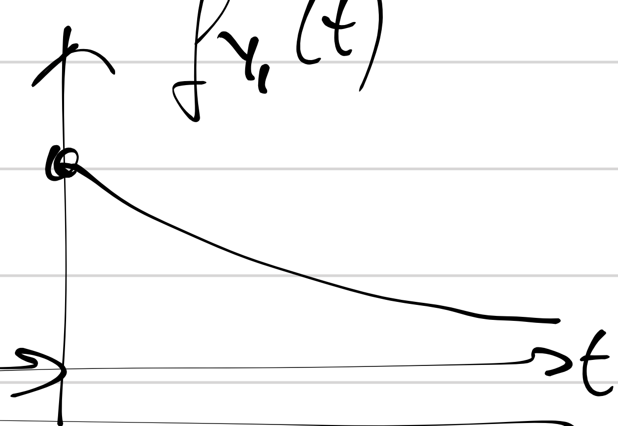
Упр. найдите закон распр-ия Y_1 для пуасс-го процесса.

$$cdf_{Y_1}(t) = P(Y_1 \le t) = 1 - P(Y_1 > t) = 1 - P(N(t)=0) =$$

$$= 1 - \exp(-\lambda t)$$

$$cdf_{Y_1}(t) = P(Y_1 \le t) = 1 - P(Y_1 > t) = 1 - P(N(t)=0) =$$
$$= 1 - \exp(-\lambda t)$$

$$pdf_{Y_1}(t) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda t), & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Теор: из предп-к пуасс-го процесса:

$$N[a; a+x] \sim Poiss(\lambda x)$$

время между процессами $: Y_1, Y_2 \dots Y_n \sim iid\ Exp(\lambda)$. !!

$$N[a; a+x] \sim Poiss(\lambda x)$$
$$P(N[a; a+x] = k) = \exp(-\lambda x) \cdot \frac{(\lambda x)^k}{k!}$$
$$E(N[a; a+x]) \overset{?}{=} \lambda x$$
$$Var(N[a; a+x]) \underset{?}{=} \lambda x$$

λ - intensity / rate интенс-вность.

Упр.

Оля и Юля пишут смс Маше.

Оля $\xrightarrow[\lambda_1 = 10\text{ смс/час}]{}$ Маше (пуасс процессу)

Юля $\xrightarrow[\lambda_2 = 5\text{ смс/час}]{}$ Маше (пуасс процессу) незав

а) P(за час Маша получит 14 смс)?

б) P(за ближайшую минуту Маше никто не напишет)?

$A(t) = A[0;t]$ Оля $\xrightarrow{\lambda=10}$ маше

$B(t) = B[0;t]$ Коля $\xrightarrow{\lambda=5}$ маше

$C(t) = A(t) + B(t)$

Страшно!

трудно:

$$P(C(1)=14) = P(A(1)=14,\ B(1)=0) + P(A(1)=13,\ B(1)=1) + \ldots + P(A(1)=0,\ B(1)=14) =$$

[час] покупаемая

$$= P(A(1)=14)\cdot P(B(1)=0) + \ldots + P(A(1)=0,\ B(1)=14) =$$

$$= \exp(-10\cdot 1)\cdot\frac{10^{14}}{14!}\cdot\exp(-5\cdot 1)\cdot\frac{5^0}{0!} + \ldots\ldots$$

Страх 2.

$$\left.\begin{matrix} A(t) \sim Poiss(\lambda_1\cdot t) \\ B(t) \sim Poiss(\lambda_2\cdot t)\end{matrix}\right\} \text{незав}$$

$$Poiss(\lambda_1\cdot t) + Poiss(\lambda_2\cdot t) \sim ?$$

$$P(C[0;\Delta]=1) = P(A[0;\Delta]=1)\cdot P(B[0;\Delta]=0) + P(A[0;\Delta]=0)\cdot P(B[0;\Delta]=1) =$$

$$= (\lambda_1\cdot\Delta + o(\Delta))\cdot(1-\lambda_2\Delta + o(\Delta)) + (1-\lambda_1\Delta + o(\Delta))\cdot(\lambda_2\Delta + o(\Delta)) =$$

$$= \Delta\cdot(\lambda_1+\lambda_2) + o(\Delta)$$

$\Delta^2 = o(\Delta)$

$\Delta\cdot o(\Delta) = o(\Delta)$

$$\boxed{C[0;t] \sim Poiss((\lambda_1+\lambda_2)\cdot t)}$$

$0! = 1$

$C(t) \sim Poiss(15t)$

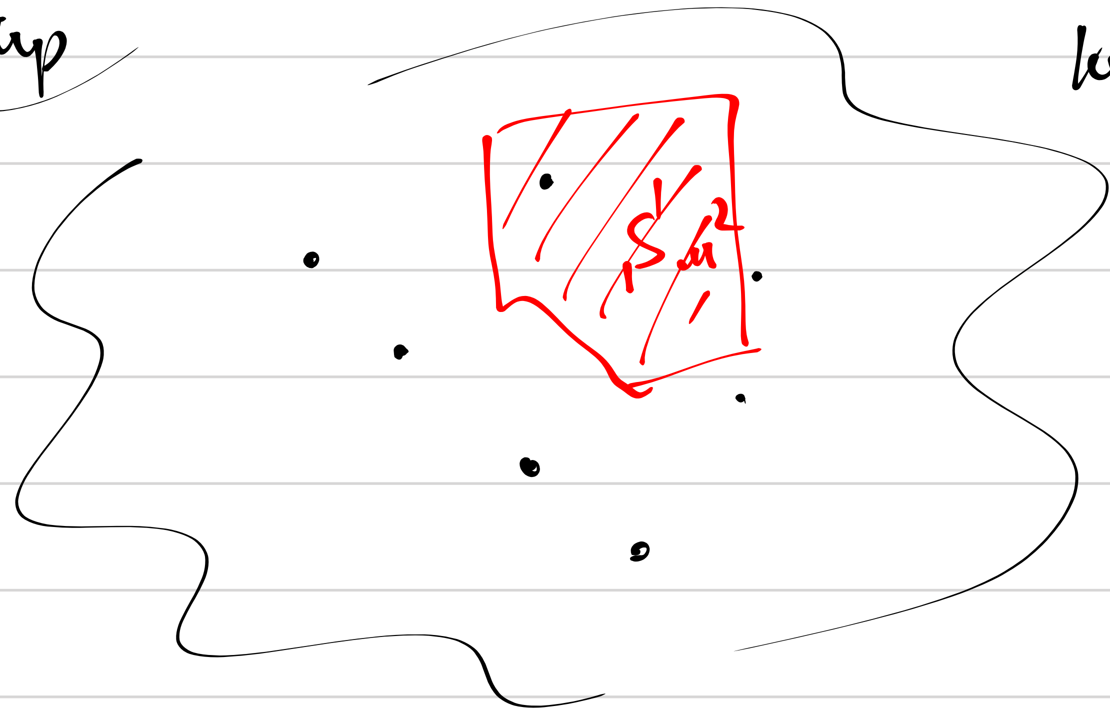
$$P(\underset{\text{[час]}}{C(1)}=14) = \exp(-15\cdot 1)\cdot\frac{(15\cdot 1)^{14}}{14!}$$

б) $$P(Y_1 > \tfrac{1}{60}) = 1 - \underbrace{P(Y_1 \le \tfrac{1}{60})}_{cdf} = 1 - \left(1-\exp\left(-\tfrac{15}{60}\right)\right) = \exp\left(-\tfrac{15}{60}\right) = \exp(-0.25)$$

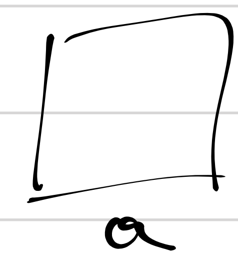
[час]

$$P(N(\tfrac{1}{60})=0) = \exp\left(-\tfrac{15}{60}\right)\cdot\frac{(15/60)^0}{0!}$$

Упр



Кузн. ~ по пуассону с интенсивн. 3 на м²



$$N[S] \sim Poiss(3S)$$

какой должна быть сторона квадрата, чтобы P(хотя бы одного кузн) = 0.8 ?

$S = a^2$

$$N[a^2] \sim Poiss(3a^2)$$

$$P(N[a^2] \geq 1) = 0{,}8$$

$$P(N[a^2] = 0) = 0{,}2$$

$$\exp(-3a^2) \cdot \frac{(3a^2)^0}{0!} = 0{,}2$$

$$-3a^2 = \ln 0{,}2 \qquad 0{,}2 = \frac{1}{5}$$

$$3a^2 = \ln 5 \qquad a > 0$$

$$a = \sqrt{\frac{\ln 5}{3}}$$

Упр. $X \sim \exp(20)$

$Y = 60 \cdot X$ $\qquad Y \sim ?\exp\left(\frac{20}{60}\right)$

инт.

$$P(X \leq t) = 1 - \exp(-20t)$$

$$P(Y \leq t) = P(60X \leq t) = P\left(X \leq \frac{t}{60}\right) =$$

$$Y \sim \exp\left(\frac{20}{60}\right) \qquad = 1 - \exp\left(-\frac{20}{60}t\right)$$