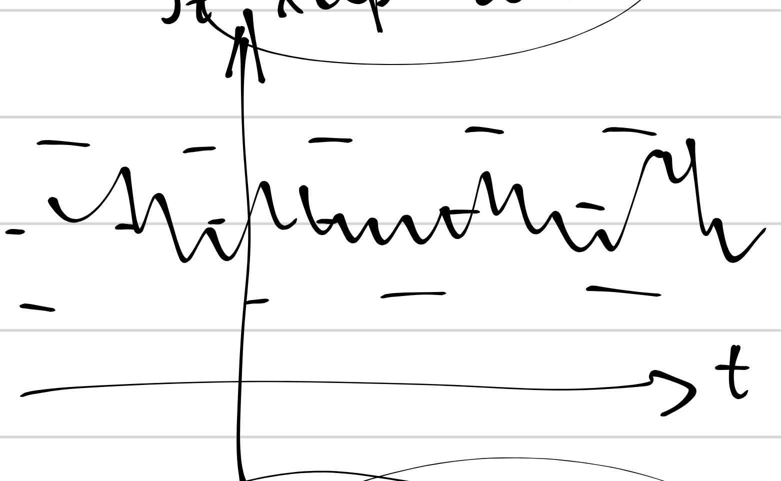
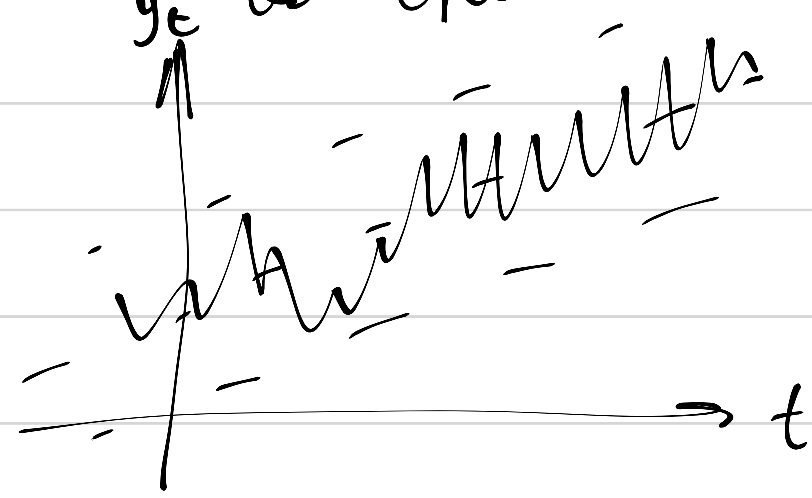
Видно / слышно?

1. Слышали стац-х и нестац-х процессов?

с пост-ми вер-ми хар-ми

с вер-ми хар-ми меняющимися во времени





$E(y_t) = \mu$

$Var(y_t) = \gamma_0$

$Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k$

Идея!

$u_t \sim N(0;16)$

A) $y_t = u_t + \frac{1}{2} u_{t-1} + \frac{1}{4} u_{t-2} + \frac{1}{8} u_{t-3} + \ldots$

B) решение вида MA(∞) отн. по (u_t)

ур-ия $y_t = \frac{1}{2} y_{t-1} + u_t$

$u_t \sim N(0;16)$

у ур-ия $y_t = \frac{1}{2} y_{t-1} + u_t$ ∞ решений.

школа! $b_n = 5 \cdot b_{n-1}$ ← есть ∞ мн-во нам прогр-ий подх-х в ур-ие.

$y_0 = 5$ $\quad y_t = \frac{1}{2} y_{t-1} + u_t$ $\quad y_1 = 2.5 + u_1$

$y_2 = 1.25 + \frac{1}{2} u_1 + u_2$

...

$5 = \frac{1}{2} y_{-1} + u_0$

...

В чем разница между AR(1) и случ-м блужданием?

Random walk.

$$\begin{cases} z_t = 1\cdot z_{t-1} + u_t \\ u_t \text{ – б. шум} \\ z_0 \text{ – конст.} \end{cases}$$

AR(1)

(1) $(a_t - \mu) = \beta (a_{t-1} - \mu) + u_t$

(2) a_t – это MA(∞) отн-но (u_t) => a_t – стац-н!

$|\beta| < 1$

$z_0 = \mu$

$z_1 = \mu + u_1$

$z_2 = \mu + u_1 + u_2$

$z_3 = \mu + u_1 + u_2 + u_3$

$Var(z_0) = 0$

$Var(z_1) = \sigma^2$

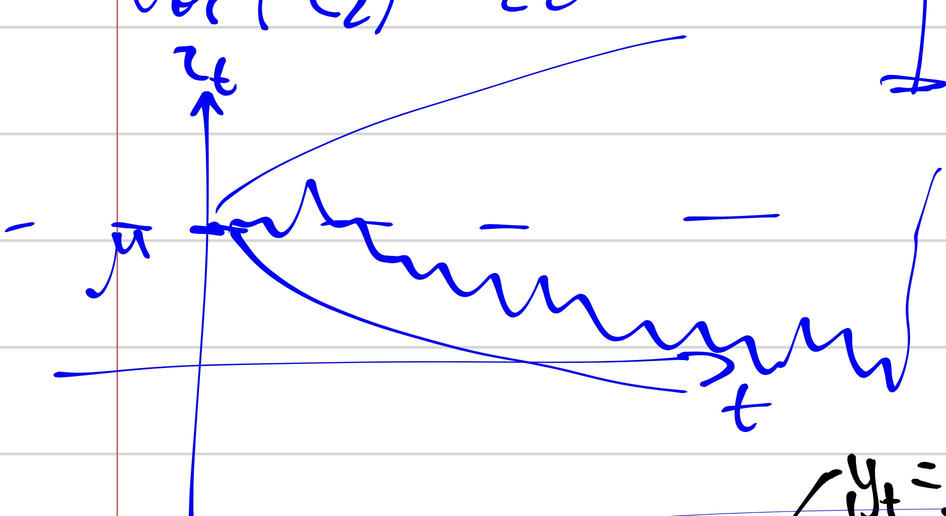
$Var(z_2) = 2\sigma^2$

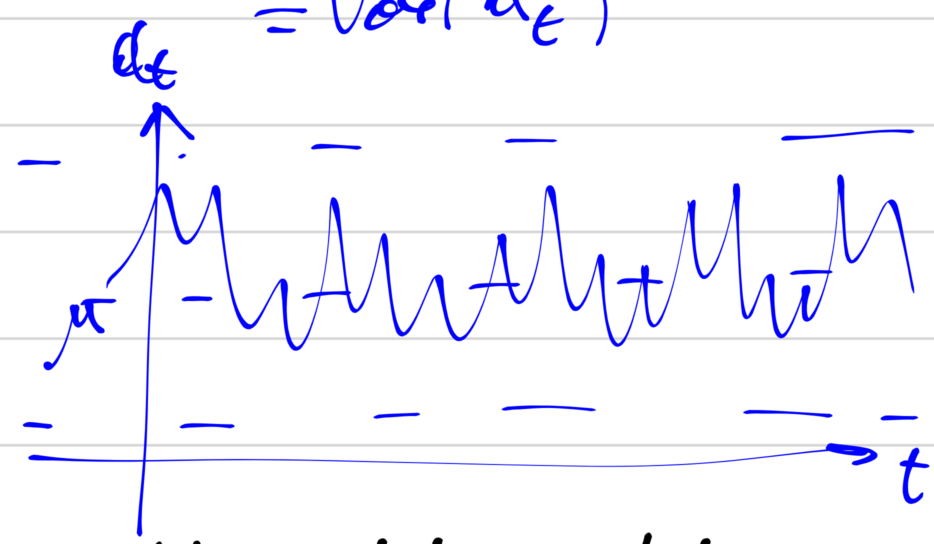
$a_0 = \mu + u_0 + \beta u_{-1} + \beta^2 u_{-2} + \beta^3 u_{-3} + \dots$

$a_1 = \mu + u_1 + \beta \cdot u_0 + \beta^2 u_{-1} + \beta^3 u_{-2} \dots$

$a_2 = \mu + u_2 + \beta \cdot u_1 + \beta^2 u_0 + \beta^3 u_{-1} \dots$

$Var(a_0) = Var(a_1) = \dots = Var(a_t)$





$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \alpha_3 u_{t-3} + \dots$

$y_t = u_t + u_{t-1} + 6 u_{t-2}$

(1 стац. реш-ие (0 нестац))

(∞ нестац.)

$\alpha = \frac{1}{2}$

$y_t = \frac{1}{2} y_{t-1} + u_t$

$x = 7$

$x^{54} + x^{13} - x^{15} = 1$

Q. Как искать частную корр-цию, если изв-на ков-ая м-ца?

A. Способ с „очисткой переменных".

$$V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad Var(V) = \begin{pmatrix} 100 & 0 & -2 \\ 0 & 90 & -1 \\ -2 & -1 & 80 \end{pmatrix}$$

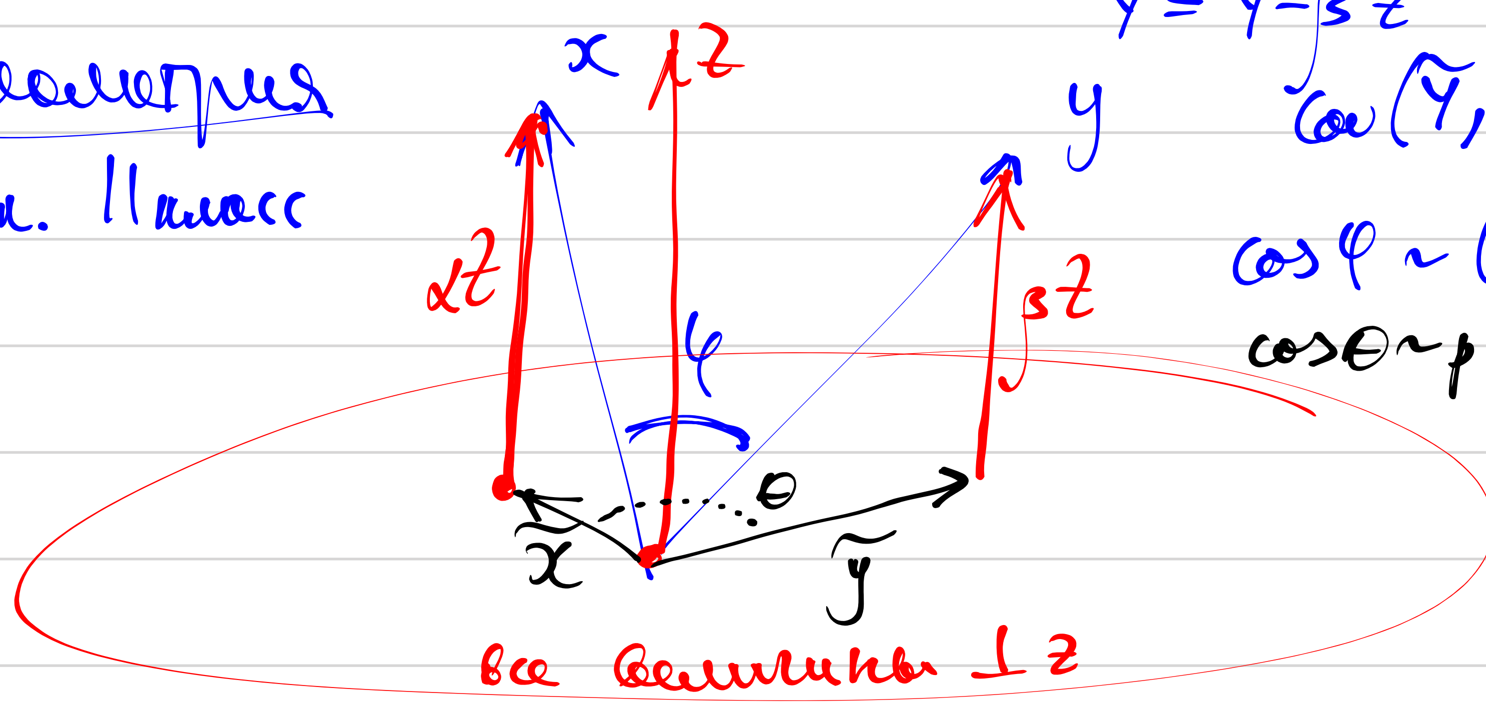
$$\underline{pCorr(X, Y; Z)\ ?} = Corr(\tilde{X}, \tilde{Y})$$

$\tilde{X} = X - \alpha Z$ чтобы $Cov(\tilde{X}, Z) = 0$

$\tilde{Y} = Y - \beta Z$, $Cov(\tilde{Y}, Z) = 0$

Геометрия

шк. 11 класс



$\cos\varphi \sim Corr(X, Y)$

$\cos\theta \sim pCorr(X, Y; Z)$

$$Cov(X - \alpha Z,\ Z) = 0$$

$$Cov(X, Z) - \alpha \cdot Cov(Z, Z) = 0$$

$$-2 - \alpha \cdot 80 = 0 \qquad \alpha = -\frac{1}{40}$$

по аналогии!

$$\tilde{X} = X + \frac{1}{40} Z. \qquad \tilde{Y} = Y + \frac{1}{80} Z$$

$$Corr(\tilde{X}, \tilde{Y}) \overset{def}{=} pCorr(X, Y; Z)$$

$\boxed{\text{Т. Пифагора.}}$

Если $x \perp y$ то $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

Если $Cov(X, Y) = 0$, то $Var(X) + Var(Y) = Var(X + Y)$

$$\frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = Corr(X, Y) \qquad \overset{Cov(X, Y)}{Cov(X, X) = Var(X)} \qquad \begin{cases} \langle x, y \rangle \\ \|x\|^2 = \langle x, x \rangle \\ \cos(x, y) = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \end{cases}$$

$$\text{pcorr}(X,Y;Z) = \frac{\text{Corr}(X,Y) - \text{Corr}(X,Z)\cdot\text{Corr}(Z,Y)}{\sqrt{(1-\text{Corr}^2(X,Z))(1-\text{Corr}^2(Y,Z))}}$$

$\rho_{XY\cdot Z}$

$y_t \sim MA(2)$ $\qquad\qquad$ $\Delta \ln y_t \sim MA(2)$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$

прогнозы $\qquad\qquad\qquad$ прогнозы

Техниче скучн. аспект.

(A)
$$\boxed{\begin{cases} y_t = \mu + u_t + \alpha u_{t-1} \\ u_t \sim N(0;\sigma^2) \end{cases}}$$

$MA(1)$

$\theta = (\mu, \alpha, \sigma^2)$

$E(y_t) = \mu$

$Var(y_t) = (1+\alpha^2)\cdot\sigma^2$

$Cov(y_t, y_{t-1}) = \alpha\cdot\sigma^2$

$Cov(y_t, y_{t-2}) = 0.$

(B)
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \sim N\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}}_{\mu} ; \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2(1+\alpha^2) & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\sigma^2 & \sigma^2(1+\alpha^2) & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\sigma^2 & \ddots & \alpha\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\sigma^2 & \ddots & \alpha\sigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\sigma^2 & \sigma^2(1+\alpha^2) \end{pmatrix}}_{C}\right)$$

$$f(y|\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^T\cdot\det C}}\exp\left((y-\mu)^T\cdot C^{-1}(y-\mu)\right)$$

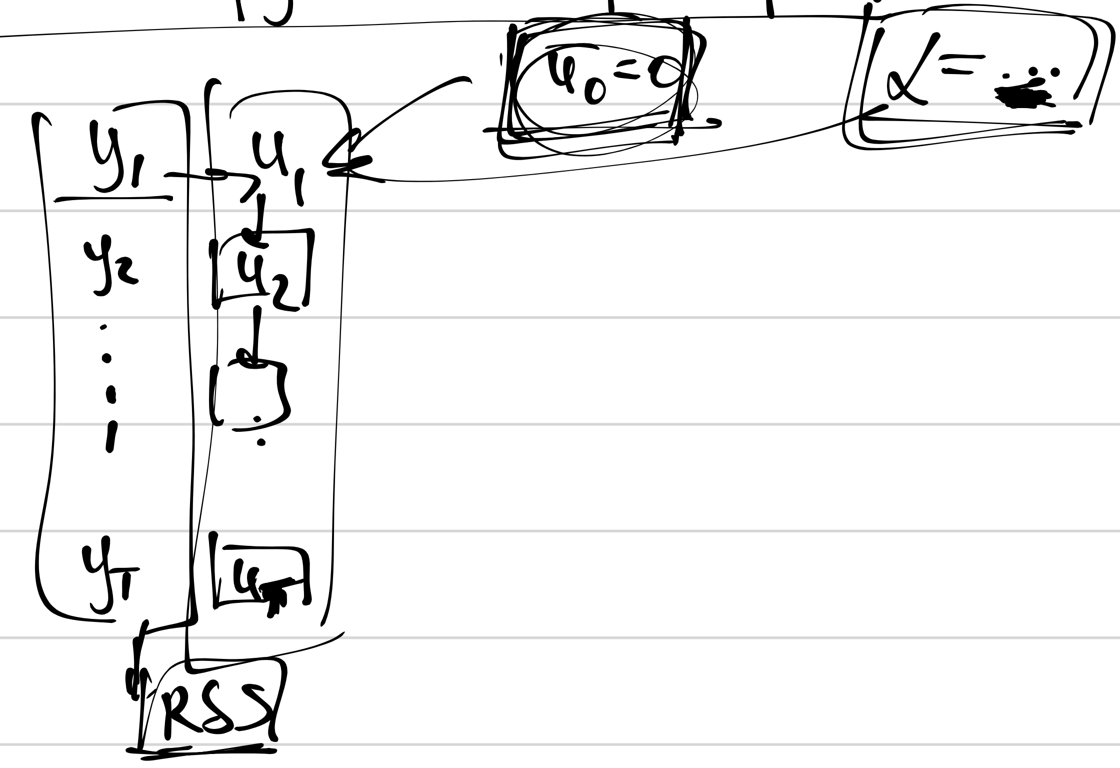
есть! наши данные

$C(\alpha, \sigma^2)$

$\max\limits_{\alpha, \sigma^2, \mu}$ $\qquad$ $\hat{\alpha}_{ML}$, $\hat{\sigma}^2_{ML}$, $\hat{\mu}_{ML}$

$\max\limits_{\alpha, \mu, \sigma^2} \ln f(y|\theta)$

как выкрутиться формально?



$F = 1/L \qquad F y_t = y_{t+1}$

$y_t = \frac{1}{2} y_{t-1} + \cancel{u_t}$

$y_t = \frac{1}{2} y_{t-1}$

какие реш. ур-сти?

$y_t = \lambda^t$

$\lambda^t = \frac{1}{2}\lambda^{t-1}$

хар-ое ур-ие: $\lambda - \frac{1}{2} = 0$

лаговый полином: $1 - \frac{1}{2}L = 0 \qquad \left(1 - \frac{1}{2}L\right)\cdot y_t = 0$

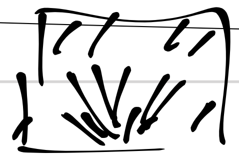
$y_t = 0{,}4 y_{t-1} - 0{,}03 y_{t-2} + u_t \qquad y_t = \lambda^t$

$\boxed{\lambda^2 - 0{,}4\lambda + 0{,}03 = 0} \qquad \lambda^t = 0{,}4\lambda^{t-1} - 0{,}03\lambda^{t-2}$

$\lambda_1 = 0{,}3 \quad \lambda_2 = 0{,}1$

если убрать u_t, то все реш-ия имеют вид $y_t = \boxed{c_1 \cdot 0{,}3^t} + \boxed{c_2 \cdot 0{,}1^t}$

без рояля в кустах



$y_t = \boxed{0{,}3 y_{t-1} + 0{,}1 y_{t-1}} - 0{,}03 y_{t-2}$

$\boxed{y_t - 0{,}3 y_{t-1}} = 0{,}1(y_{t-1} - 0{,}3 y_{t-2})$

$\boxed{a_t = 0{,}1 \cdot a_{t-1}} \Rightarrow \boxed{a_t = c_0 \cdot 0{,}1^t}$

$$\boxed{y_t - 0{,}3\,y_{t-1} = c\cdot 0{,}1^t}$$

$$y_t - 0{,}3\,y_{t-1} = \alpha\cdot c\, 0{,}1^t + (1-\alpha)\cdot c\cdot 0{,}1^t$$

$$y_t - \alpha c\cdot 0{,}1^t = 0{,}3\,y_{t-1} + (1-\alpha)\cdot c\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1^{t-1}$$

$$y_t - \alpha c\; 0{,}1^t = 0{,}3\left(y_{t-1} + \frac{(1-\alpha)\cdot c\cdot 1}{3}\,0{,}1^{t-1}\right)$$

$$-\alpha \cancel{c} = \frac{(1-\alpha)\cdot \cancel{c}}{3}$$

$$-3\alpha = 1-\alpha$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y_t - 0{,}3\,y_{t-1} = -\frac{1}{2}c\cdot 0{,}1^t + \frac{3}{2}c\cdot 0{,}1^t}$$

$$\underbrace{\left(y_t - \frac{1}{2}c\,0{,}1^t\right)}_{b_t} = 0{,}3\underbrace{\left(y_{t-1} - \frac{1}{2}c\cdot 0{,}1^{t-1}\right)}_{b_{t-1}}$$

$$b_t = 0{,}3\,b_{t-1}$$

$$b_t = d\cdot 0{,}3^t$$

$$\boxed{y_t = \frac{1}{2}c\cdot 0{,}1^t + d\cdot 0{,}3^t}$$ все

Теорема. $(y_t - \mu) = \beta_1(y_{t-1} - \mu) + \dots + \beta_p(y_{t-p} - \mu) + u_t$

а) Стац-ое решение есть и ед-во iff $\forall |\lambda_i| \neq 1$

б) Стац-ое решение вида MA(∞) отн-но (u_t) есть и ед-не iff $\forall |\lambda_i| < 1.$

$$y_t = \mu + u_t + ?u_{t-1} + ?u_{t-2} + ?u_{t-3} + ?u_{t-4} + \dots$$

$$y_t = 0{,}3y_{t-1} - 0{,}04\,y_{t-2} + u_t$$

хар: $\quad char(\lambda) = \lambda^2 - 0{,}3\lambda + 0{,}04.$

лаг: $\quad P(L) = 1 - 0{,}3L + 0{,}04L^2$

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{t+1} \\ \vdots \\ y_{t+k} \end{pmatrix}$$

как найти решения?