ISSP. Семинар 5.

Вкусно? Сытно?

$E(Y|\mathcal{F})$ $\quad E(Y|\sigma(X)) = E(Y|X)$

$\boxed{\text{нюанс}}$

σ - перегружен !!

$\boxed{\sigma_X = \sqrt{Var(X)}}$ ↑ конст.

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, \{X=1\}, \{X=2\}, \{X=0\}, \{X\neq 1\}, \{X\neq 2\}, \{X\neq 0\}\}$$

$X \in \{0,1,2\}$

опр. $Var(Y|\mathcal{F}) = E(Y^2|\mathcal{F}) - (E(Y|\mathcal{F}))^2$

Упр.

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=-1$
$X=0$	0	0,3	0,4
$X=1$	0,2	0	0,1

$Var(Y) = const$

! $Var(Y|\mathcal{F})$ = rand. var-le

а) $Var(Y|X)$?

б) $E(Var(Y|X))$? $\quad Var(Var(Y|X))$?

! X - конечное мн-во значений → перебрать

X - ∞ мн-во значений → решить задачу с пар-м.

а) $Var(Y|X=0) =$

$X=0$	0	0.3	0.4
$X=1$	0.2	0	0.1

$\xrightarrow{\text{к усл. вер.}}$

0	3/7	4/7
0	0	0
$Y=0$	$Y=1$	$Y=-1$

a b c
d e f

$P(b) \to P(b|X=0) = \frac{P(b)}{P(X=0)} = \frac{0{,}3}{0{,}7}$

$$= E(Y^2|X=0) - [E(Y|X=0)]^2 =$$

$$= 1^2 \cdot \frac{3}{7} + (-1)^2 \cdot \frac{4}{7} - \left(1 \cdot \frac{3}{7} - 1 \cdot \frac{4}{7}\right)^2 = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$$

0	0,3	0,4
0,2	0	0,1

к условн $\longrightarrow$

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=-1$
$X=0$	0	0	0
$X=1$	2/3	0	1/3

a	b	c
d	e	f

$P(d)=0{,}2 \longrightarrow P(d|X=1) = \dfrac{P(d\cap X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{P(d)}{P(X=1)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}3}$

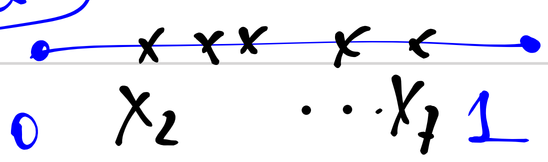
$$Var(Y|X=1) = E(Y^2|X=1) - (E(Y|X=1))^2 = (-1)^2\cdot\frac{1}{3} - \left((-1)\cdot\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}-\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\boxed{Var(Y|X) = \begin{cases} 48/49, & \text{если } X=0 \\ 2/9, & \text{если } X=1 \end{cases}}$$

а)? $Var(Y|X) = \dfrac{48}{49} + \left(\dfrac{2}{9}-\dfrac{48}{49}\right)\cdot X$ $\quad x=0$, $x=1$

б) $E(Var(Y|X)) = \dfrac{48}{49}\cdot P(X=0) + \dfrac{2}{9}\cdot P(X=1) = \dfrac{48}{49}\cdot 0{,}7 + \dfrac{2}{9}\cdot 0{,}3$

Задача-щипка



$X_1, X_2, \ldots X_n \sim iid\ U[0;1]$

$L = \min\{X_1, X_2 \ldots X_n\}$

$R = \max\{X_1, \ldots X_n\}$

а) $P(L=X_1)$? $=?$ $1/n$

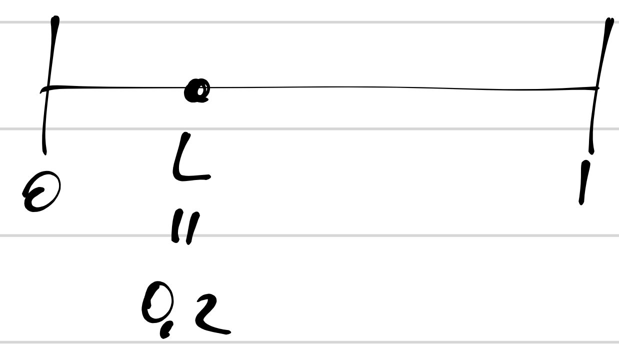
б) $E(X_1|L)$? $\quad E(L|X_1)$?

c) $Var(X_1|L)$? $\quad$ d) $E(R|L)$?

$E(X_1|L)$?

Подск.: Если не знаешь, с чего начать, рассмотри конкретное значение величины в условии.

$E(X_1|L=0{,}2)$



$$E(X)=E(X|A)\cdot P(A)+E(X|A^c)\cdot P(A^c)$$

$$\hookrightarrow E(X_1|L)=E(X|L,A)\cdot P(A|L)+E(X|L,A^c)\cdot P(A^c|L)$$

старые формулы действуют при добавлении $\boxed{|L}$

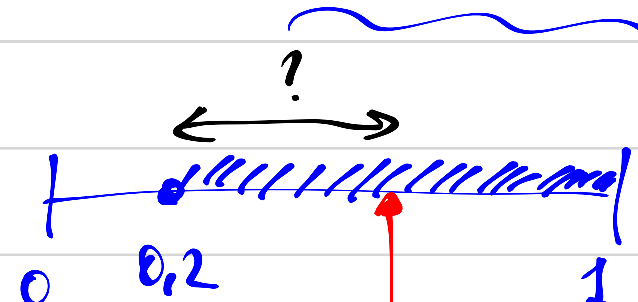
A - событие.

$L=X_1$ A

$L\neq X_1$ A^c

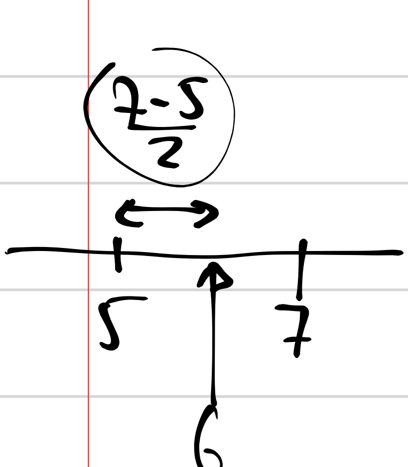
$$E(X_1|L=0{,}2)=\underbrace{E(X_1|L=0{,}2,\ L=X_1)}_{0{,}2}\cdot\underbrace{P(L=X_1|L=0{,}2)}_{1/n}+E(X_1|L=0{,}2,\ L<X_1)\cdot\underbrace{P(L<X_1|L=0{,}2)}_{1-\frac{1}{n}}=$$

$$=0{,}2\cdot\frac{1}{n}+E(X_1|L=0{,}2,\ L<X_1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=$$



$(X_1|L=0{,}2,\ L<X_1)\sim U[0{,}2;1]$?

$E(X_1|0{,}2<X_1)=\frac{1+0{,}2}{2}$,



$6=\frac{5+7}{2}$

$$=0{,}2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1+0{,}2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right);$$

$$\boxed{E(X_1|L)=\frac{L}{n}+\frac{1+L}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

„задача с пар-м“

$E(L|X_1)$

$E(L|X_1=0{,}2)=$

$L=X_1$

$L<X_1$

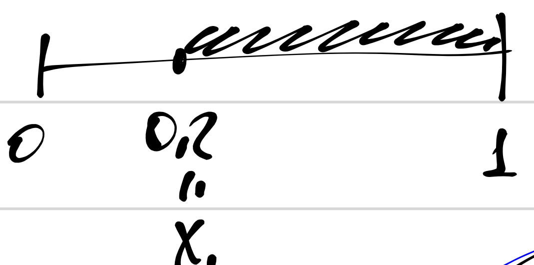
$? = 0{,}2$ → ?

$$E(L|X_1=0{,}2) = E(L|L=X_1, X_1=0{,}2)\cdot \boxed{P(L=X_1|X_1=0{,}2)} +$$
$$+E(L|L<X_1, X_1=0{,}2)\cdot P(L<X_1|X_1=0{,}2)$$

n всего

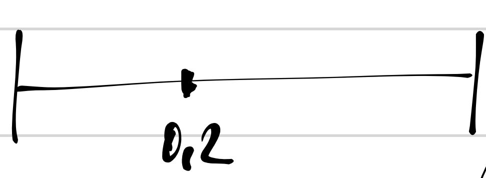
$$P(L=X_1|X_1=0{,}2) > P(L=X_1|X_1=0{,}99)$$

$$P(L=X_1|X_1=0{,}2) = (1-0.2)^{n-1}$$



$$P(L<X_1|X_1=0{,}2) = 1-(1-0{,}2)^{n-1}$$

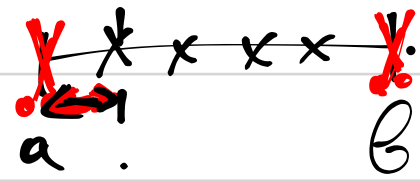
$$E(L|L<X_1, X_1=0{,}2) \overset{?}{=}$$



Вспом. задача.

$Y_j \sim iid\ [a;b]$

$L=\min\{Y_1,\dots,Y_n\}$



$E(L)\ ? = \boxed{\frac{b-a}{n+1}+a}$

$a \quad \ell \quad b$

$$f_L(\ell) = \frac{\partial F}{\partial \ell}$$

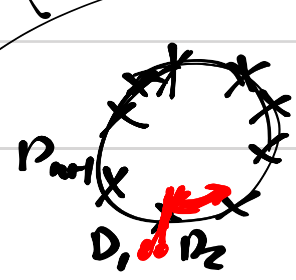
$$E(L) = \int_a^b \ell\cdot f(\ell)\,d\ell$$

$$F(\ell) = P(L\le \ell) = 1-P(L>\ell) =$$
$$= 1-P(Y_1\dots Y_n>\ell) = 1-\left(\frac{b-\ell}{b-a}\right)^n$$

?

сделать задачу симм-ой.

устно



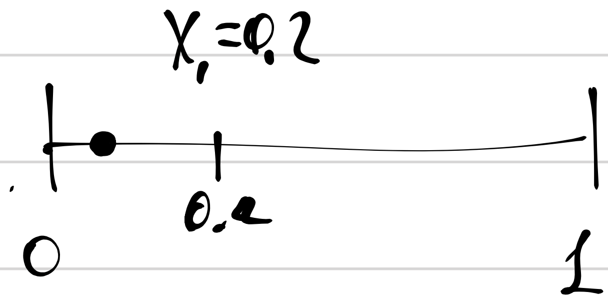
$n+1$

$$E(D_i) = \frac{\text{длина}}{n+1}$$

вспом:

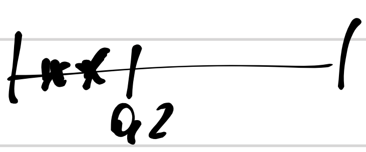
$Y_j \sim U[a;b]$ незав. n штук

$$E(L) = \frac{b-a}{n+1} + a$$



$$E(L \mid \text{левее } 0.2 \text{ ровно } 1 \text{ из } X_j) \overset{?}{=} \frac{0.2}{2}$$

$$E(L \mid \text{левее } 0.2 \text{ ровно } 2 \text{ из } X_j) \overset{?}{=} \frac{0.2}{3}$$



$$E(L \mid L<X_1,\ X_1=0.2) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{0.2}{j+1} \cdot P(\text{левее } X_1=0.2 \text{ ровно } j \text{ точек} \mid L<X_1, X_1=0.2)$$

вспом

$$\frac{C_{n-1}^{j}\, 0.2^{j} \cdot (1-0.2)^{(n-1)-j}}{1-(1-0.2)^{n-1}}$$

[Всё подставить и сократить ....]

Теор:

$$E(E(Y|X)) = E(Y)$$ tower property

т. Пифагора → $$Var(Y) = E(Var(Y|X)) + Var(E(Y|X))$$

Упр

Шаг 1. $X_1 \sim N(10; 20)$

Шаг 2. (зная X_1) $(X_2|X_1) \sim N(X_1;\ 15+X_1^2)$

а) $E(X_2|X_1) \overset{?}{=} X_1$; $Var(X_2|X_1) \overset{?}{=} 15+X_1^2$

б) $E(X_2) = ?$; $Var(X_2) = ?$

$E(X_1^2) = Var(X_1) + (E(X_1))^2$

$$E(X_2) = E(E(X_2|X_1)) = E(X_1) = 10$$

$$Var(X_2) = Var(E(X_2|X_1)) + E(Var(X_2|X_1)) = Var(X_1) + E(15+X_1^2) = 20 + 15 + E(X_1^2) = 20+15+20+10^2$$