

W06

Всего? Сумма? //

- ① ETS = error - trend - seasonality
exponential smoothing (Holt, Holt-Winters)
- ② 30 лет модели не было!!
первые формулы для прогнозов
≈ 2005 снова модели

ETS

Error → A (additive)
→ M (multiplicative)

trend → A
→ M
→ N (no)
→ Ad (additive - but jump - up)

seasonality → A (additive)
→ M (multiplicative)
→ N (no)

ETS(MNM)

ETS(AAdA)

ETS(ANN)

ETS(AAA)

ETS

• ETS(AAA)
• ETS(AAA)
•

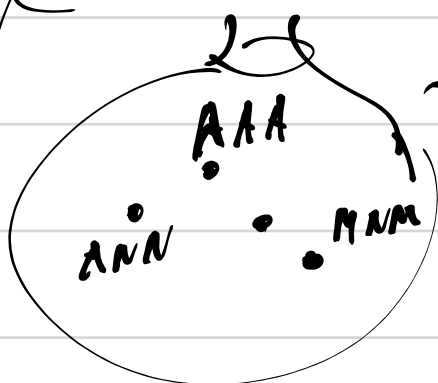
dexts.com/fpp3/ ← участь

~ 25 мая

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ независ} \\ y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ s_t = s_{t-4} + \gamma \cdot u_t \end{array} \right\} \text{--- ETS (AAA)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = l_{t-1} + s_{t-4} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + \alpha u_t \\ s_t = s_{t-4} + \gamma u_t \end{array} \right\} \text{--- ETS (ANA)}$$

$\begin{array}{c} | \quad | \quad \backslash \\ A \quad N \quad A \end{array}$



~25 ETS моделей

→ какая модель?

→ оценить все
и выбрать опт-ку
по AIC или
по качеству прогнозов
на тестовой выборке

→ искусство

- оценивание
- разбиение на компоненты
- прогнозирование.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ независ} \\ y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ s_t = s_{t-4} + \gamma \cdot u_t \end{array} \right\}$$

Q. Сколько здесь [своих] пар-ов?

→ ? какими

4, (7)

неизменяемые

всего: $\sigma^2, \alpha, \beta, \gamma$, $l_0, b_0, s_0, s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}$

Своих пар-ов:

$\sigma^2, \alpha, \beta, \gamma, l_0, b_0, s_0, s_{-1}, s_{-2}$
[9 пар-ов]

$\begin{array}{cc} (100) & (+2 \ -1 \ +3 \ -4) \\ (105) & (-3 \ -6 \ -2 \ -9) \\ \hline [s_0 + s_{-1} + s_{-2} + s_{-3} = 0] \end{array}$

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$ независ
 (1) $y_t = l_t + b_{t-1} + s_{t-2} + u_t$
 (2) $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t$
 (3) $b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t$
 (4) $s_t = s_{t-2} + \gamma \cdot u_t$

Q. Как найти (y_t)
 и оценить пар-ры
 $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \sigma^2, l_0, b_0, s_0, s_{-1}, s_{-2})$
 найдем параметры?

А. вручную!!

$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = 16$

- 1) $u_1 = ?$
- $y_1 = l_0 + b_0 + s_{-2} + u_1$
- $l_0 = 8 + 4 - 1 + u_1$
- $u_1 = -1$
- 2) $l_1, b_1, s_1 = ?$
- 3) $u_2 = ?$
- 4) $l_2, b_2, s_2 = ?$
- 5) $u_3 = ?$
- 6) $l_3, b_3, s_3 = ?$

| t | y_t | l_t | b_t | s_t | u_t |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| -3 | x | x | x | -1 | x |
| -2 | x | x | x | -2 | x |
| -1 | x | x | x | 2 | x |
| 0 | x | 8 | 4 | 1 | x |
| 1 | 10 | 11.5 | 3.5 | -1.5 | -1 |
| 2 | 12 | | | | ? |
| 3 | 16 | | | | ? |

минимизация
 суммы квадратов
 ошибок

Q. Как проверить гипотезу с помощью ETS?

y_1, y_2, \dots, y_T $\xrightarrow{\text{max lik}}$ $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}^2, \hat{l}_0, \hat{b}_0, \hat{s}_0, \hat{s}_{-1}, \hat{s}_{-2})$
 оценка

проверка параметров

$\hat{l}_1, \hat{b}_1, \hat{s}_1, \hat{u}_1$
 \vdots
 $\hat{l}_T, \hat{b}_T, \hat{s}_T, \hat{u}_T$

ETS (AAA)

параметры

параметры на компоненты

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = 16$$

| t | y _t | l _t | b _t | s _t |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 97 | ... | ... | ... | 5 |
| 98 | ... | ... | ... | 1 |
| 99 | ... | ... | ... | -3 |
| 100 | ... | 20 | 2 | -2 |

Q: точечный прогноз и 95%PI для y₁₀₁? y₁₀₂?

$$y_{101} = \underbrace{l_{100} + b_{100} + s_{97}}_{\text{знаем}} + \underbrace{u_{101}}_{\text{не зависит от } y_1, y_2, \dots, y_{100}}$$

$$(y_{101} | y_1, \dots, y_{100}) \sim N(l_{100} + b_{100} + s_{97}; \sigma^2)$$

$$E(y_{101} | y_1, \dots, y_{100}) = 20 + 2 + 5 = 27$$

$$\text{Var}(y_{101} | y_1, \dots, y_{100}) = \text{Var}(u_{101}) = \sigma^2 = 16$$

PI $[27 - 1.96 \cdot \sqrt{16}; 27 + 1.96 \cdot \sqrt{16}]$

$$y_{102} = \underbrace{l_{101}}_{\substack{\uparrow \\ \text{расширенное} \\ \text{значение}}} + \underbrace{b_{101}}_{\substack{\uparrow \\ \text{расширенное} \\ \text{значение}}} + \underbrace{s_{98}}_{\text{знаем}} + \underbrace{u_{102}}_{\text{незав-т от истории}}$$

$$= \underbrace{(l_{100} + b_{100} + \alpha \cdot u_{101})}_{l_{101}} + \underbrace{(b_{100} + \beta \cdot u_{101})}_{b_{101}} + s_{98} + u_{102} =$$

$$y_{102} = \underbrace{(l_{100} + 2b_{100})}_{\text{знаем}} + \underbrace{(\alpha + \beta) \cdot u_{101} + u_{102}}_{\text{другие слагаемые}}$$

$$y_{103} = l_{100} + 3b_{100} + (? u_{101} + ? u_{102} + ? u_{103})$$

$$y_{102} = \underbrace{(l_{100} + 2b_{100})}_{\text{знаем}} + \underbrace{(\alpha + \beta) \cdot u_{101} + u_{102}}_{\text{случайные слагаемые}}.$$

$$E(y_{102} | y_1, \dots, y_{100}) = l_{100} + 2b_{100} = 20 + 2 \cdot 2 = 24$$

$$\text{Var}(y_{102} | y_1, \dots, y_{100}) = \text{Var}((\alpha + \beta) \cdot u_{101} + u_{102}) =$$

$$= (\alpha + \beta)^2 \cdot \sigma^2 + \sigma^2 = 32$$

$$\alpha = \beta = 1/2 \quad \sigma^2 = 16$$

$$PI \text{ для } y_{102} : [24 - 1.96 \cdot \sqrt{32}; 24 + 1.96 \cdot \sqrt{32}]$$

Интервал сая невре :)

ETS(ANN) - ^{наименее} популярная модель для одношаговых прогнозов.

TS

$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + \alpha u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \end{cases}$$

смысл: l_0

все параметры:
 $\theta = (\sigma^2, \alpha, l_0)$

Знаем! $y_{t+1} = l_t + u_{t+1}$ не зависит от u_t !

$\hat{y}_{t+1|t} = l_t \leftarrow$ прогноз на $t+1$ шаг вперед.

уход от u_t в первых уравнениях!

$$\begin{aligned} y_t &= l_{t-1} + u_t \\ l_t &= l_{t-1} + \alpha u_t \end{aligned}$$

$$u_t = y_t - l_{t-1}$$

$$l_t = \underbrace{l_{t-1}}_{\text{прогноз на } t} + \underbrace{\alpha}_{\text{сильна}} \cdot \underbrace{(y_t - l_{t-1})}_{\text{прогноза на } t.}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

| y_t | |
|-------|----|
| 52 | 50 |
| 56 | ↓ |
| 67 | ↓ |
| 48 | ↓ |
| ⋮ | ⋮ |
| 1 | ↓ |

$$l_t = \underbrace{\alpha}_{\text{сильн. прогноз}} \cdot \underbrace{y_t}_{\text{прямое знач.}} + \underbrace{(1-\alpha)}_{\text{прогноз предыдущего знач.}} \cdot l_{t-1}$$

запр. найти популярнее уравнения для прогноза на t шаг вперед для ETS(ANN) ETS(AAA)

убер. DLT