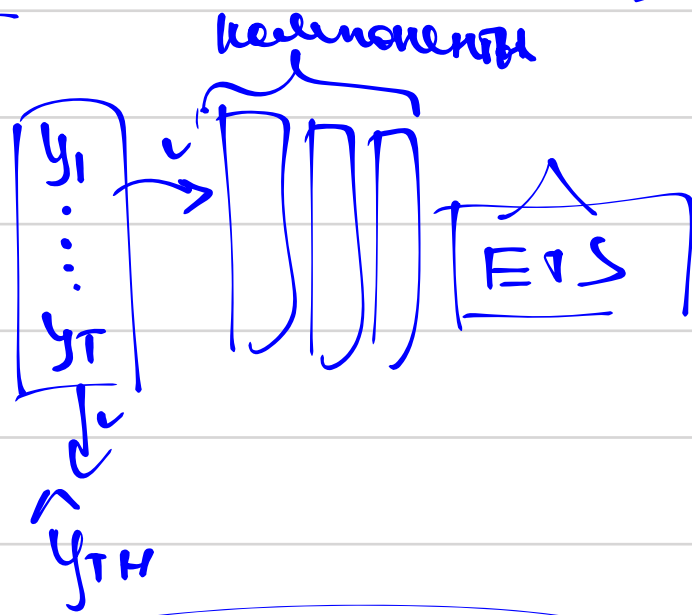


sem 06 ↓

Ypo!

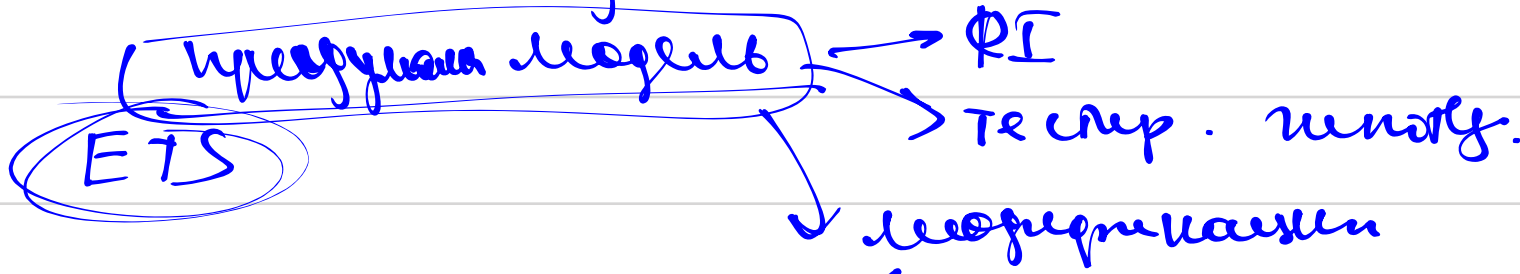
ETS = Error Trend Seasonality



Exponential smoothing models

~1970 → Exponential smoothing models  
[day degree]

~2005 Rob Hyndman + ...



и nowhere  
~2021 DLT (Uber)

- ETS(AAA)
- ETS(MMM)
- ETS(AAA)

~25 models

E = error → Agg.  
→ Mystr.

T = trend → Add it  
→ Multipl

→ No  
→ Ad (гарантия)

S = Seasonality → A  
→ M  
→ N

ETS(AAA)

ETS(MMM)

пыр к ETS(AAA)  $\hat{y}'' \hat{y}'' \hat{y}''$

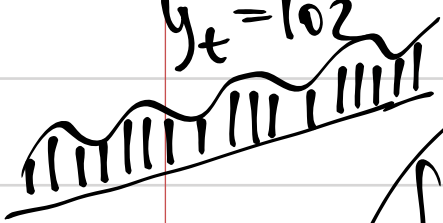
→ мыр ду мыр-х эрорект.

[всё идеально предс-мо]

идея - все  
данные

$$\begin{cases} l_t = 100 & s_t = 2 \\ l_t = 105 & s_t = -3 \end{cases}$$

$$y_t = 102$$



квар:

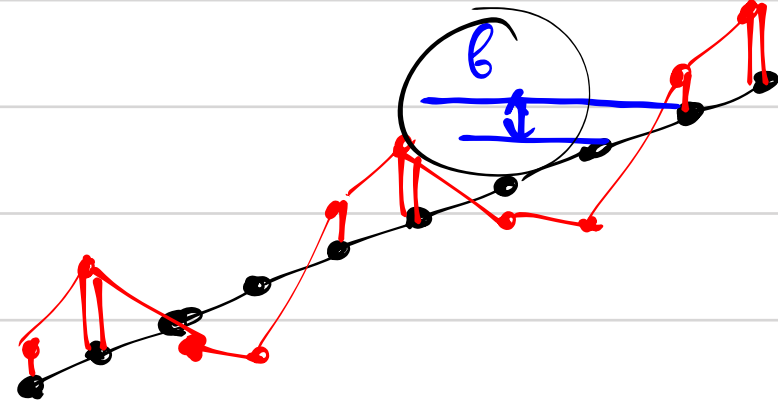
$$\begin{cases} y_t = l_t + s_t \\ l_t = l_{t-1} + b \\ s_t = s_{t-4} \end{cases}$$

$y_t$  trend (A) + season (A)

(level)

$l_t$  = линия  
тренда

$s_t$  = сезонная  
интервал



$t$

Дуга:

хочу добавить  
всё мыр-ве  
цикл.

$b \rightarrow b_t$

\* введем возможность разных  $b_t$

$$\begin{cases} y_t = l_t + s_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} \\ b_t = b_{t-1} \\ s_t = s_{t-4} \end{cases}$$

\* приведем систему к виду

состояние = вектор + мыр. цик-м.

$$\begin{cases} y_t = (l_{t-1} + b_{t-1}) + s_{t-4} \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} \\ b_t = b_{t-1} \\ s_t = s_{t-4} \end{cases}$$

$$v_t = \begin{pmatrix} y_t \\ l_t \\ b_t \\ s_t \end{pmatrix}$$

\* добавим мыр-ве моу в  $t$  ур-м.

$(u_t) \sim N(0, \sigma^2)$  шум

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + (u_t)$$

$$s_t = s_{t-4} + \gamma u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta u_t$$

ETS(AAA)

$$(u_t) \sim N(0, \sigma^2) \text{ независ}$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + (u_t)$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta u_t$$

$$s_t = s_{t-4} + \gamma u_t$$

$$E + S(AAA)$$

1) Q. как оценивать?

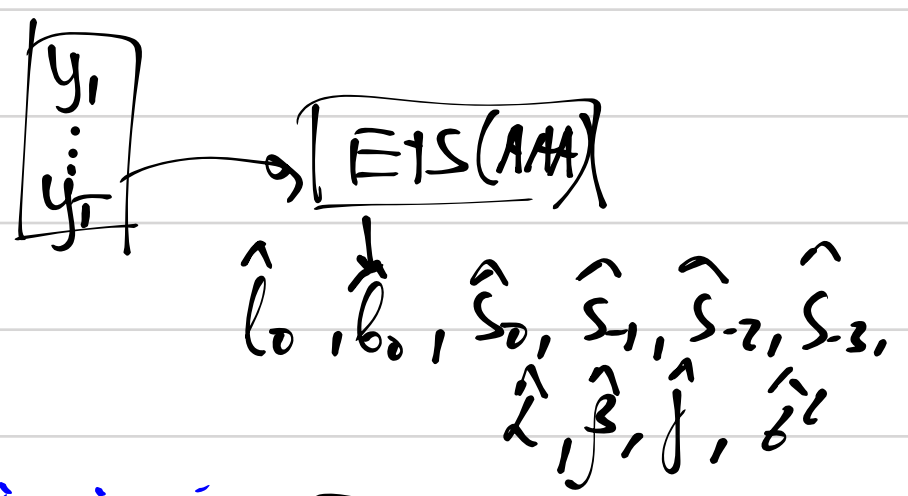
{ сильно пер-б? }

Q. как имея оценки получить компоненты ряда  $(l_t, s_t)$ ?

Q как имея разложение на компоненты прогнозировать?

Параметры:  $b_0, b_0, (s_0, s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}), \alpha, \beta, \gamma, \sigma^2$   
 + уа-ви:  $(s_0 + s_{-1} + s_{-2} + s_{-3} = 0)$

своб пар-ры: 9 штук.



Упр.  $(u_t) \sim N(0, \sigma^2) \text{ независ}$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + (u_t)$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta u_t$$

$$s_t = s_{t-4} + \gamma u_t$$

$$E + S(AAA)$$

исходные:  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$   $\sigma^2 = 25$  пар-ры модели

3)  $u_2 = 2$ , т.к:  
 $20 = 15.5 + 5.5 - 3 + u_2$

t	$y_t$	$l_t$	$b_t$	$s_t$	$u_t$
-3	X	X	X	-2	X
-2	X	X	X	-3	X
-1	X	X	X	4	X
0	X	10	4	1	X
1	15	15.5	5.5	-0.5	3
2	20	22	6.5	-2	2
3	22				

$l_1, l_2, l_3?$   
 $b_1, b_2, b_3?$   
 $s_1, s_2, s_3?$

1)  $u_1?$   
 $15 = 10 + 4 - 2 + u_1$   
 $u_1 = 3$

набл. ( $y_t$ ) 2

$s_1 = -2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = -0.5$   $l_1 = 10 + 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 15.5$   
 $b_1 = 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 5.5$

Y<sub>up</sub>

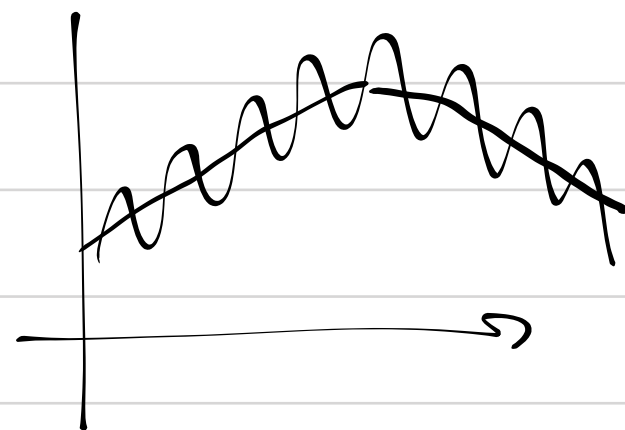
y<sub>1</sub>  
⋮  
y<sub>T</sub>

прогнозирование в ETS можно  
и  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta^2, l_0, b_0, s_0, s_1, s_2)$

↓ введенные нами в ряд  
 $l_1, \dots, l_T, b_1, \dots, b_T, s_1, \dots, s_T$ .

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2} \quad \delta^2 = 25$$

t	y <sub>t</sub>	l <sub>t</sub>	b <sub>t</sub>	s <sub>t</sub>	u <sub>t</sub>
97	⚡	⚡	⚡	3	⚡
98	⚡	⚡	⚡	6	⚡
99	⚡	⚡	⚡	-5	⚡
100	⚡	40	4	-3	⚡



a) точечный прогноз

$\hat{y}_{101}$

$\hat{y}_{101/100}$

на какое  
время прогноз  
последнее  
доступное

PI 95% для  $y_{101}$

b) — // —  $\hat{y}_{102}$

PI 95% для  $y_{102}$

$y_{101} = (\text{то, что мы знаем}) + (\text{будущие моки})$

$$y_{101} = [l_{100} + b_{100} + s_{97}] + [u_{101}]$$

$$(y_{101} | y_1, \dots, y_{100}) \sim N(40 + 4 + 3; 25)$$

$$95\% \text{ PI} : [47 - 1.96\sqrt{25}; 47 + 1.96\sqrt{25}]$$

$y_{102} = (\text{то, что знаем}) + (\text{непр.-ая часть}) =$

$$= \underbrace{l_{101}}_{\text{точно знаем}} + \underbrace{b_{101}}_{\text{знаем}} + \underbrace{s_{98}}_{\text{знаем}} + \underbrace{u_{102}}_{\text{буд. моки}} = (l_{100} + b_{100} + \alpha \cdot u_{101}) +$$

$$+ (b_{100} + \beta \cdot u_{101}) + s_{98} + u_{102} = (l_{100} + 2b_{100} + s_{98}) + ((\alpha + \beta)u_{101} + u_{102})$$

$$y_{102} = (\underbrace{l_{100} + 2b_{100} + s_{98}}_{\text{уст.}}) + ((\alpha + \beta)u_{101} + u_{102})$$

$$l_{100} = 40$$

$$b_{100} = 4$$

$$s_{98} = 6$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = 25$$

$$(y_{102} | y_1, \dots, y_{100}) \sim N(\underbrace{40 + 2 \cdot 4 + 6}_{54}; 50)$$

$$\text{Var}((\alpha + \beta)u_{101} + u_{102}) =$$

$$= (\alpha + \beta)^2 \cdot \sigma^2 + \sigma^2 = 25 + 25 = 50$$

$$95\% \text{ PI } [54 - 1.96\sqrt{50}; 54 + 1.96\sqrt{50}]$$

упрощенная версия ↓

ETS(AN)

= simple exponential smoothing

$$\begin{cases} u_t \sim N(0; \sigma^2) \\ y_t = l_{t-1} + 0 + 0 + u_t \\ l_t = l_{t-1} + 0 + \alpha \cdot u_t \end{cases}$$

пар-ры:  $[\sigma^2, \alpha, l_0]$

уст. — это  $u_t$ !

вопрос:

ETS(AN) —  
— мартов?  
да

$$y_{t+1} = (l_t) + (u_{t+1})$$

$$\hat{y}_{t+1|t} = l_t \leftarrow \text{это прогноз на } 1 \text{ шаг вперед в ETS(AN)}$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot (y_t - l_{t-1})$$

прогноз  
на шаг  
(t+1)

прогноз  
на шаг  
(t)

(ошибка прогноза  
на шаг)

$$l_t = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha) \cdot l_{t-1}$$

или прогноз =  
была в прош-м  
прогноза и сейчас

$t$	$y_t$	$l_t$
1	105	$\checkmark$
2	102	$\checkmark$
$\vdots$	103	$\checkmark$
$\vdots$	$\vdots$	$\checkmark$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	110	<del><math>\checkmark</math></del>

$$\alpha = 0.5 \quad (l_0 = 100)$$

$$l_t = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha) \cdot l_{t-1}$$