Álgebra

Ignacio Cordón Castillo

Norma y traza

Consideramos extensiones finitas separables F/K con $[F : K] = n$. Entonces:

$$Hom(F/K, \bar{K}/K) = \{\sigma_1 \dots \sigma_n\}$$

Definición. *Norma y traza*

Se definen la norma y traza relativas de α a F/K como:

$$N_{F/K}(\alpha) = \prod\{\sigma_i(\alpha) : 1 \leq i \leq n\}$$

$$T_{F/K}(\alpha) = \sum\{\sigma_i(\alpha) : 1 \leq i \leq n\}$$

Cuando se sobreentienda de qué extensión hablamos las notaremos N, T resp.

Proposición 1. *Norma y traza para extensiones de Galois*

Para F/K extensión de Galois con $Gal(F/K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ entonces F es cerrado para normas y trazas.

Proof. Trivial sabiendo que F/K debe ser normal. □

Proposición 2. *Propiedades de la norma y traza* *Sean $\alpha, \beta \in F$, $a \in K$*

1. *$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$*
2. *$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$*
3. *$N(a) = a^n$*
4. *$T(a) = na$*
5. *$T(\alpha), N(\alpha) \in K$ para cada $\alpha \in F$*
6. *Existe $\alpha \in F$ verificando $T(\alpha) \neq 0$*

Proof. 1, 2, 3 y 4 son triviales.

1. Se prueba a partir de lema de independencia de Dedekind por reducción al absurdo.

□

Teorema 1. *Sea $K \subseteq F \subseteq E$ torre de cuerpos, E/K extensión finita y seprable. Entonces para cada $\alpha \in E$ se verifica:*

1. *$N_{F/K}(N_{E/F}(\alpha)) = N_{E/K}(\alpha)$*
2. *$T_{F/K}(T_{E/F}(\alpha)) = T_{E/K}(\alpha)$*

Se deduce que si $\alpha \in F$, por propiedades de norma y traza entonces:

1. *$N_{F/K}(N_{E/F}(\alpha)) = N_{F/K}(\alpha^[E : F]) = N_{F/K}(\alpha)^[E : F]$*
2. *$T_{E/K}(T_{E/F}(\alpha)) = T_{F/K}([E : F]\alpha) = [E : F]T_{F/K}(\alpha)$*

Lema 1. *Sea F/K extensión finita separable de grado n. Para $\alpha \in F$ si*

$$Irr(\alpha, K) = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \ldots + a_1X + a_0$$

entonces tenemos:

1. $N(\alpha) = (-1)^n a_0^{n/r}$
2. $T(\alpha) = -(n/r)a_{r-1}$

Lema 2. *F/K extensión con $[F : K] = n$. Equivalen:*

1. *$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ son base de F como K espacio vectorial.*
2. *Los elementos $B_j = (\sigma_j(\alpha_1), \dots, \sigma_j(\alpha_n))$.*
3. *El determinante de $(T_{F/K}(\alpha_i\alpha_j))_{ij}$ es no nulo.*

Además $det(T(\alpha_i\alpha_j)_{ij} = [det(\sigma_i(\alpha_j))_{ij}]^2$

Proof. Demostramos la fórmula para el determinante.

Sean $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ los homomorfismos $F/K \to \bar{K}/K$.

$T(\alpha_i\alpha_j) = \sum\{\sigma_k(\alpha_i)\sigma_k(\alpha_j) : 1 \leq k \leq n\}$

Por tanto $(T(\alpha_i\alpha_j))_{ij} = (\alpha_k(\alpha_i))_{ki}^t(\sigma_k(\sigma_j))_{kj}$

Y se cumple la fórmula del determinante (matriz x traspuesta). □

Sea F/K finita separable. Entonces podemos definir $T : F \times F \to K$ como $T(\alpha, \beta) = T_{F/K}(\alpha\beta)$ es una forma bilineal simétrica no degenerada.

A $\left(T_{F/K}(\alpha_i\alpha_j)\right)_{ij}$ lo llamamos discriminante de la extensión relativo a la base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Proposición 3. ***Relación entre discriminantes de extensiones y polinomios***

El discriminante de $K(\alpha)/K$ separable y de grado n. El discriminante de $K(\alpha)/K$ relativo a la base $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ coincide con el discriminante de $Irr(\alpha, K)$