

Álgebra

Ignacio Cordón Castillo

Álgebra III

Resumen

TODO

- **TODO** 8 de dónde sale?
- **TODO** ¿Qué es exactamente F ?
- **TODO** 8 Demostrar el teorema de existencia de cuerpos de descomposición.
- **TODO** Ejemplo $X^p - t$, pág 52 apuntes de Miranda, ¿criterio de Eisenstein?
- **TODO** ¿Es toda extensión algebraica un cuerpo de descomposición?
- **TODO** Raíz de un polinomio con coeficientes algebraicos, entonces es algebraico
- **TODO** Mirarme demostraciones de cuerpos de descomposición
- **TODO** ¿Por qué en la resultante meto los coeficientes iniciales?

Polinomios simétricos, resultante, discriminante

- Polinomios simétricos

Definición. Polinomio simétrico

Un polinomio $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ se llama simétrico si para toda $\sigma \in S_n$ se verifica $\sigma \cdot f = f$

Proposición 1. El conjunto de polinomios simétricos es subanillo de $A[X_1, \dots, X_n]$ que contiene al anillo A .

Definición. En $A[X_1, \dots, X_n]$ se llaman polinomios simétricos a:

$$\begin{aligned}s_1 &= X_1 + \dots + X_n \\ s_2 &= X_1X_2 + X_1X_3 + \dots + X_{n-1}X_n \\ s_n &= X_1 \cdot X_2 \cdots X_n\end{aligned}$$

Definición. Peso de un monomio

Sea $aX_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ monomio no nulo. Se llama peso del monomio a $e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n$

Esta definición del peso está justificada por el teorema 1 donde X_i lo sustituimos por s_i que es de grado i .

Definición. El peso de un polinomio es el mayor de los pesos de sus monomios.

Teorema 1. Teorema fundamental de polinomios simétricos

Sea A dominio de integridad y $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ polinomio simétrico de grado d . Entonces existe un único $g \in A[s_1, \dots, s_n]$ de peso menor o igual que d , verificando:

$$f(X_1, \dots, X_n) = g(s_1, \dots, s_n)$$

Teorema 2. Sea $g \in A[s_1, \dots, s_n]$. Entonces $g(s_1, \dots, s_n) = 0$ si y solo si $g(X_1, \dots, X_n) = 0$

• Resultante

La motivación de la resultante son los problemas de eliminación de la forma:

Sean:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad a_0 \neq 0$$

$$g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots b_0 \quad b_0 \neq 0$$

¿tienen alguna raíz común en una extensión (o clausura) de F ? La resultante será una expresión que se anula cuando f y g tienen una raíz común, y calculable como función racional de los coeficientes de ambos polinomios.

Definición. Resultante

Sea K cuerpo de descomposición para fg . En $K[X]$:

$$f = a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$$

$$g = b_m \prod_{j=1}^m (X - \beta_j)$$

Definimos la resultante como:

$$R(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$$

Proposición 1. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $R(f, g) = 0 \Leftrightarrow f, g$ tienen alguna raíz en común
2. $R(g, f) = (-1)^{nm} R(f, g)$
3. $R(f, g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j)$
4. $R(fg, h) = R(f, h)R(g, h)$. Análogamente, $R(h, fg) = R(h, f)R(h, g)$
5. $R(f, g) = b^n$ con $g = b$ escalar.
6. $R(X^k, f) = a_0^k$ y $R(f, X^k) = (-1)^{nk} a_0^k$
7. $g = fq + r$, entonces $R(f, g) = a_n^{gr(g)-gr(r)} R(f, r)$
8. $R(f, g)$ es un polinomio simétrico en los α_i y las β_j
9. $R(f, g)$ es un polinomio homogéneo en las b_j y en las a_i

Las demostraciones de 1,2,3,4,5 son obvias.

6 se demuestra desde haciendo $a_0 = f(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \alpha_i$ y $R(X^k, f) = a_n^k (\prod_{i=1}^n -\alpha_i)^k$ y sustituyendo. Para la segunda parte, basta aplicar el apartado 3.

Para probar 7:

$$\begin{aligned} R(f, g) &= a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = a_n^m \prod_{i=1}^n (f(\alpha_i)q(\alpha_i) + r(\alpha_i)) = \\ &= a_n^m \prod_{i=1}^n r(\alpha_i) = a_n^{m-gr(r)} R(f, r) \end{aligned}$$

- Discriminante

Cuando $g = f'$. En este caso $R(f, f') = 0 \Leftrightarrow f$ tiene raíces múltiples.

$$\begin{aligned} f &= a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \\ f' &= a_n \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} (X - \alpha_i) \end{aligned}$$

Entonces:

$$R(f, f') = a_n^{n-1} \prod_{j=1}^n f'(\alpha_j) = a_n^{2n-1} \prod_{j=1}^n \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Definición. Discriminante

LLamamos f a $D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Proposición 2. Relación entre discriminante y resultante Se verifica $R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n D(f)$.

Proposición 3.

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

Extensiones de cuerpos

Definición. Una extensión de cuerpos F/K es un par de cuerpos F, K tales que K es un subcuerpo de F . K se llama cuerpo base y F cuerpo extensión.

Definición. Llamamos grado de la extensión F/K y lo representamos por $[F : K]$ a la dimensión de F como K espacio vectorial. La extensión es finita si su grado es finito.

Definición. Una torre de cuerpos es una sucesión de subcuerpos: $F_n \supset F_{n-1} \supset \dots \supset F_0$

Proposición 4. Sea $E \supset F \supset K$ torre de inclusiones. Entonces:

Sean $\{u_i \in E : i \in I\}$ un sistema de generadores (linealmente independientes, base, resp.) de E como espacio vectorial sobre F y $\{v_j \in F : j \in J\}$ un sistema de generadores (linealmente independientes, base, resp.) de F como espacio vectorial sobre K . Entonces $\{u_i v_j : i, j \in I \times J\}$ es sistema de generadores (linealmente indep., base) de E como espacio vectorial sobre K .

Teorema 3. Teorema del grado: Sea $E \supset F \supset K$ torre de cuerpos. Entonces:

$$[E : F][F : K] = [E : K]$$

La demostración se puede deducir de la proposición anterior.

Corolario 1. Se cumple:

1. $E \supset F \supset K$ torre de cuerpos. La extensión E/K es finita sii las extensiones E/F y F/K son ambas finitas.
2. Sea F/K extensión tal que $[F : K] = p$ es primo. Entonces no existe ningún cuerpo intermedio distinto de F o K .

Elementos algebraicos

Proposición 2. *Para todo anillo A existe un único homomorfismo $v : \mathbb{Z} \rightarrow A$ llamado homomorfismo unital.*

Este homomorfismo se define por inducción como $1_{\mathbb{Z}} \mapsto 1_A$ y $n_{\mathbb{Z}} \mapsto 1 + \dots + 1_n$

Definición. *Si el kernel del homomorfismo unital es $n\mathbb{Z}$, la característica del anillo A , se define como $\text{car}(A) = n$. Además n queda **caracterizado** por ser el menor número que verifica $na = 0 \quad \forall a \in A$*

La demostración se hace basándonos en el primer teorema de isomorfía. Si su característica fuese $n \neq 0$, tendríamos que $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n \cong \text{Img}(v)$ y si n no es primo, tenemos un subanillo de A , $\text{Img}(v)$ isomorfo a algo que no es dominio de integridad.

Proposición 5. *La intersección de subanillos es subanillo. La intersección de subcuerpos es subcuerpo.*

Proposición 3. Estructura del subanillo imagen del homomorfismo unital *El menor subanillo de un anillo A es la intersección de todos sus subanillos. Se llama anillo primo. Se cumple:*

1. *Este subanillo es isomorfo a \mathbb{Z} si $\text{car}(A) = 0$ y a \mathbb{Z}_n si $\text{car}(A) = n \neq 0$.*
2. *Si A es dominio de integridad, entonces o bien $\text{car}(A) = 0$ o bien $\text{car}(A) = p$ primo.*

Proposición 4. *Al menor subcuerpo de un cuerpo K lo llamamos subcuerpo primo, que es la intersección de todos los subcuerpos de K .*

El subcuerpo primo de un cuerpo K es isomorfo a \mathbb{Q} cuando $\text{car}(K) = 0$ y a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cuando $\text{car}(K) = p \neq 0$

Se deduce del lema anterior sin más que pensar que un cuerpo es un anillo en el que hay una operación inversa. Y como \mathbb{Q} es dominio de integridad, la característica debe ser un primo.

Definición. *Sea F/K extensión, S un subconjunto de F . Llamamos subanillo (resp. subcuerpo) generado por S sobre K y lo representamos por $K[S]$*

(resp. $K(S)$) a la intersección de todos los subanillos (resp. cuerpos) de F que contengan a K y a S .

Para los casos $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ notamos $K[u_1, \dots, u_n]$ en lugar de $K[\{u_1, \dots, u_n\}]$. Análogo para $K(S)$

Proposición 5. Se verifica:

1. $K[S \cap T] = K[S][T] = K[T][S]$
2. $K(S \cap T) = K(S)(T) = K(T)(S)$

Definición. Subcuerpo compuesto. pDados los cuerpos $L \supset E \supset K$, $L \supset F \supset K$, llamamos compuesto de E y F al cuerpo $EF = E(F) = F(E)$. Es decir, el menor subcuerpo de L que contiene a E y F .

Definición. Conjunto de generadores. Sea F/K extensión, S subconjunto de F . Diremos que S es conjunto de generadores para F sobre K si $F = K(S)$.

F/K extensión se dice **finitamente generada** si existe un conjunto finito de generadores de F sobre K , es decir $S = \{u_1 \dots u_n\}$ con $F = K(S)$

F/K extensión se dice **simple** si existe un único elemento $u \in F$ tal que $F = K(u)$. u se llama elemento primitivo para la extensión u .

Sea F/K extensión y $u \in F$. La **propiedad universal del anillo de polinomios** nos da un homomorfismo de anillos $\lambda : K[X] \rightarrow K[u]$ tal que conserva K y $\lambda(X) = u$. Por el primer teorema de isomorfía para anillos $K[u] \cong K[X]/\ker(\lambda)$

1. Si $\ker(\lambda) = 0$, existe un isomorfismo $K[X] \cong K[u]$. Entonces u se dirá **trascendente** sobre K . $K(u)$ se llama cuerpo de fracciones de $K[u]$ y es isomorfo a $K(X)$ (cuerpo de fracciones de $K[X]$).
2. Si $\ker(\lambda) \neq 0$ se dice que u es **algebraico** sobre K y al ser $K[X]$ dominio de ideales principales, se tendrá $\ker(\lambda) = (p(X))$ para algún polinomio que además podemos considerar mónico. Además $p(X) = \text{Irr}(u, K)$ y por tanto $K[X]/\ker(\lambda)$ es dominio de integridad (tanto por ser $p(X)$ irreducible y por tanto $(p(X))$ ideal primo, como por tenerse que $K[u]$ es un subanillo de F , cuerpo).

Proposición 6. Sea F/K extensión de cuerpos y sea $u \in F$ elemento algebraico sobre K con polinomio mínimo $p(X) = \text{Irr}(u, K)$. Entonces:

1. $K(u) = K[u] \cong K[X]/(p(X))$
2. $[K(u) : K] = \text{gr}(p(X)) \equiv \text{grado de } u \text{ sobre } K$ y una base de $K[u]$ como K espacio vectorial es $\{1, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}$.
3. Para $f \in K[X]$ se verifica $f(u) = 0$ si y solo si $p|f$

Proposición 6. Elementos algebraicos en torres de cuerpos

Sea $F \supset E \supset K$ y sea $u \in F$ algebraico sobre K . Entonces u es algebraico sobre E y $\text{Irr}(u, E)$ divide a $\text{Irr}(u, K)$

Proposición 7. Caracterización de elementos algebraicos

Sea F/K extensión. El elemento $\alpha \in F$ es algebraico sobre K si y solo si la extensión $K(\alpha)/K$ es finita.

Se deduce a partir de 3 y 4 desde 6

Extensiones algebraicas

Definición. Una extensión F/K se llama algebraica si todos los elementos de F son algebraicos sobre K . Una extensión F/K se llama trascendente si existe algún elemento $u \in F$ que es trascendente sobre K .

Definición. La extensión F/K es finita si y solo si F está generado por un número finito de elementos algebraicos sobre F . De hecho, una extensión generada por elementos de grado n_1, \dots, n_k tiene grado menor o igual $n_1 n_2 \dots n_k$

Teorema 4. K algebraico sobre F y L algebraico sobre K entonces L es algebraico sobre F

Proposición 7. Sea F/K extensión arbitraria y sea S un subconjunto de F .

1. Para todo $u \in K[S]$ existe un subconjunto finito $\{u_1, \dots, u_n\} \subset S$ tal que $u \in K[u_1, \dots, u_n]$
2. Para todo $u \in K(S)$ existe un subconjunto finito $\{u_1, \dots, u_n\} \subset S$ tal que $u \in K(u_1 \dots u_n)$.

Proposición 8. Sean $L \supset E, F \supset K$. Entonces:

1. Si $F = K(S)$ entonces $EF = E(S)$
2. $[EF : K] \leq [E : K][F : K]$
3. Si $[E : K]$ y $[F : K]$ son primos relativos, se da la igualdad.

La primera parte se deduce de que $EF = E(F) = E(K(S)) = E(S)$

Para deducir la segunda parte: $[EF : K] = [EF : F][F : K]$ por el teorema del grado. Además si tenemos B base de E como K espacio vectorial, y B' base de F como K espacio vectorial, tendremos que $B \cap B'$ es sistema de generadores de $EF = F(E)$ y por tanto $[EF : F] \leq |B \cap B'| = [E : K]$. Además, del argumento hecho se deduce 3.

Proposición 8. Sea $F = K(u_1, \dots, u_n)$ una extensión finitamente generada por elementos u_i algebraicos. Entonces la extensión F/K es finita.

La demostración se deduce de 2 de 8 sin más que tener en cuenta que $K(u_1, \dots, u_n)$ estará contenido en $\prod_{i=1}^n K(u_i)$ y esa extensión es finita.

Corolario 2. Sea $F = K(S)$ con $S \subset F$ arbitrario. Entonces F/K es algebraica si y sólo si todo elemento $u \in S$ es algebraico sobre K

La implicación hacia la derecha es trivial. Para la implicación hacia la izquierda basta usar que dado $s \in K(S)$, existirán finitos $\{u_{1,s}, \dots, u_{n,s}\} \subset S$ algebraicos verificando $s \in K(\{u_{1,s}, \dots, u_{n,s}\})$ y la proposición anterior acaba, al tener una extensión finitamente generada por elementos algebraicos, lo que implica que la extensión es finita, y que s es algebraico sobre K .

Corolario 3. Relación de extensiones finitas y algebraicas

Se tiene:

1. Si la extensión F/K es finita, entonces es algebraica (y finitamente generada por ser finita)
2. Una extensión F/K es algebraica y finitamente generada, entonces es finita.

Se deduce trivialmente de las proposiciones y corolarios anteriores.

Corolario 4. Un elemento $u \in F$ es algebraico sobre K si y solo si existe un cuerpo intermedio E verificando que E/K es extensión finita y $u \in E$.

La implicación hacia la izquierda es trivial sin más que considerar $K(u)$. La implicación hacia la derecha se deduce de ser E extensión finita, luego algebraica sobre K .

Corolario 5. Dada una torre de cuerpos $E \supset F \supset K$ la extensión E/K es algebraica si y solo las extensiones E/F y F/K son algebraicas.

Cuerpos de descomposición

Teorema 5. Teorema de Kronecker

Sea f un polinomio de grado positivo sobre un cuerpo K . Entonces existe una extensión F/K y un $u \in F$ verificando $f(u) = 0$. Esta extensión viene dada por $K[X]/(f_1)$ con f_1 un factor irreducible del polinomio sobre K .

Definición. Extensión de homomorfismos

Sean F_i/K_i dos extensiones de cuerpos y sean $\tau : F_1 \rightarrow F_2$ y $\sigma : K_1 \rightarrow K_2$ homomorfismos verificando $\tau(a) = \sigma(a)$. A τ lo llamamos **extensión de σ** . Si $\sigma = id$, lo llamamos **homomorfismo sobre K**

Proposición 9. Sea $\alpha : K_1 \rightarrow K_2$ un isomorfismo de cuerpos. Existe una única extensión a un isomorfismo $\sigma : K_1[X] \rightarrow K_2[X]$ definido por $\sigma(x) = x$

La demostración se basa en la propiedad universal del anillo de polinomios.

Proposición 10. En las condiciones de la proposición anterior si F_i/K_i son extensiones algebraicas, $\tau : F_1 \rightarrow F_2$ un homomorfismo sobre $\sigma : K_1 \rightarrow K_2$ y $u \in F_1$ una raíz de f_1 . Entonces $\tau(u)$ es una raíz de $f_2 = \sigma(f_1)$

$$\text{Sea } f_1 = \sum_{i=1}^n a_i X^i$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f_2(\tau(u)) &= \sum_{i=1}^n \sigma(a_i) \tau(u)^i = \sum_{i=1}^n \tau(a_i) \tau(u)^i \\ &= \tau\left(\sum_{i=1}^n a_i u^i\right) = \tau(0) = 0 \end{aligned}$$

Corolario 6. Sea F/K extensión algebraica y $\sigma : F \rightarrow F$ un homomorfismo sobre K . Entonces σ es un automorfismo.

Para demostrar esto, veamos que la aplicación es sobreyectiva (es inyectiva por ser homomorfismo de cuerpos). Consideramos $u \in F$. Tomo $f = \text{Irr}(u, K)$, que puedo hacerlo por tratarse de una extensión algebraica, y se tiene que $\sigma(f) = f$. Tomo todas las raíces $\{u_1, \dots, u_k\}$ de f que hay en F . Tomo $F_1 = K(u_1 \dots u_k)$ el subcuerpo de F generado por todas ellas. La extensión F_1/K es finita y para cualquier homomorfismo $\sigma : F \rightarrow F$ verifica que $\sigma(u_i)$ es raíz de f . Así, $\sigma|_{F_1}$ es una aplicación lineal inyectiva, luego sobreyectiva y eso nos lleva a decir que $\exists v \in F_1$ verificando $\sigma(v) = u$.

Proposición 11. En las condiciones de la proposición anterior sea u_i raíz de f_i en alguna extensión F_i/K_i . Entonces existe un único isomorfismo $\tau : K_1(u_1) \rightarrow K_2(u_2)$ sobre σ tal que $\tau(u_1) = u_2$

Existen isomorfismos $\rho_i : K_i[X]/(f_i) \cong K_i(u_i)$ y vienen dados por $X + (f_i) \mapsto u_i$. $\bar{\sigma}$ lo obtenemos por la proposición anterior llevándonos (f_1) en (f_2) . La aplicación buscada será $\tau = \rho_2 \bar{\sigma} \rho_1^{-1}$

Definición. Cuerpo de descomposición de un polinomio Un cuerpo extensión $F \supset K$ se llama /cuerpo de descomposición de f sobre K sii existen $u_1 \dots u_n \in F$ tales que $f(X) = (X - u_1) \cdots (X - u_n)$, y $F = K(u_1, \dots, u_n)$. Es decir, esta última condición nos dice que es el menor cuerpo en que descompone el polinomio.

Proposición 12. Cuerpo de descomposición sobre cuerpos intermedios Sea $E \supset F \supset K$ torre de cuerpos tal que FF es cuerpo de descomposición de un polinomio f sobre K . Entonces E es también cuerpo de descomposición de f sobre F .

Definición. Sea K cuerpo, E/K extensión. $f(X) \in K[X]$ descompone en E si en $E[X]$ se factoriza como:

$$f(X) = a(X - a_1) \cdots (X - a_n), \quad a \in K, \quad a_1, \dots, a_n \in E$$

Cada $(X - a_i)$ es un factor lineal.

Si no existe F verificando $K \subseteq F \subseteq E$ y que $f(X)$ descompone en $F[X]$, $E[X]$ se llama cuerpo de descomposición.

Se deduce que $E = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donde α_i son raíces de $f(X)$ en $E[X]$. Por tanto todo polinomio $f(X) \in K[X]$ tiene un cuerpo de descomposición sobre K

Teorema 6. Grado del cuerpo de descomposición Un cuerpo de descomposición F de un polinomio de grado n sobre K es de grado como mucho $n!$ sobre K . Si el grado es $n!$ entonces el polinomio es irreducible. El recíproco no se verifica.

El recíproco no se verifica en el caso de $(X^2 - 2)(X^2 - 3) \in \mathbb{Q}(X)$ que es irreducible, pero su cuerpo de descomposición es $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ que tiene grado 4.

Teorema 7. Extensión a cuerpos de descomposición Sea $\sigma : K_1 \rightarrow K_2$ isomorfismo de cuerpos, $f_1 \in K_1[X]$ y sea $f_2 = \sigma(f_1)$. Sea F_i cuerpo de descomposición de f_i sobre K_i . Entonces existe un isomorfismo $\tau : F_1 \rightarrow F_2$ que es una extensión de σ . De aquí se deduce que dos cuerpos de descomposición de un $f \in K[X]$ son isomorfos.

Definición. Cuerpo de descomposición de un conjunto de polinomios Sea $\mathcal{F} \subset K[X]$ cualquier conjunto de polinomios no constantes. Una extensión E/K se llama cuerpo de descomposición de \mathcal{F} si es cuerpo de descomposición de cada uno de sus polinomios. Además $E = K(\{u \in F : \exists f \in \mathcal{F}, f(u) = 0\})$

Teorema 8. Existencia de cuerpo de descomposición Para todo conjunto de polinomios no constantes $\mathcal{F} \subset K[X]$ existe un cuerpo de descomposición sobre K

Clausura algebraica

Proposición 13. Caracterizaciones de cuerpos algebraicamente cerrados

Sea K un cuerpo. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Todo polinomio **no constante** $f \in K[X]$ tiene una raíz en K .
2. Para todo $f \in K[X]$ existen $u_1, \dots, u_n \in K$ tales que $f = a_n(X - u_1) \cdots (X - u_n)$
3. Un polinomio $f \in K[X]$ es irreducible si y sólo si $\text{gr}(f) = 1$.
4. Toda extensión algebraica de K es trivial. Es decir, K es la única extensión algebraica.

Para demostrar $1 \implies 2$ tenemos que podemos escribir $f = (X - u_1)f_1$ y $f_1 = a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Basta demostrar que los coeficientes de f_1 están en K para aplicar inducción.

La implicación de 2 a 3 es trivial.

Veamos $3 \implies 4$. Sea E/K extensión algebraica $u \in E$. Entonces $f = \text{Irr}(u, K)$ es de grado 1. Por tanto $f = a(X - u)$ con $a \in K$, lo que implica $u \in K$.

Veamos $4 \implies 1$. Supongamos que existe un polinomio $f \in K[X]$ no constante. Por teorema de Kronecker, existe una extensión F/K en la que f tiene una raíz $u \in F$. Pero por hipótesis, $K = F$, luego $u \in K$.

Proposición 14. Todo cuerpo algebraicamente cerrado es infinito

Sea $K = \{u_1, \dots, u_n\}$ cuerpo finito. Entonces K no puede ser algebraicamente cerrado puesto que el polinomio $f = (X - u_1) \cdots (X - u_n) + 1$ incumple la caracterización 2 de cuerpos algebraicos, ya que $f(u_i) = 1 \neq 0$

Proposición 15. Sea E/K extensión con E algebraicamente cerrado. Entonces el conjunto de elementos de E algebraicos sobre K forman un cuerpo algebraicamente cerrado.

(Esta proposición nos dice que podemos "reducir" el tamaño de la extensión algebraicamente cerrada)

Sea F el conjunto de elementos algebraicos sobre K de E . F es cuerpo. Sea $f \in F[X]$. Entonces existe $u \in E$ tal que $f(u) = 0$. Luego u es algebraico sobre F ...

Definición. Clausura algebraica

Decimos que E es clausura algebraica de K si E/K es una extensión algebraica y E es algebraicamente cerrado.

Definición. Caracterización clausura algebraica

1. E es clausura algebraica de K .
2. La extensión E/K es algebraica y todo polinomio no constante $f \in K[X]$ descompone en factores lineales en $E[X]$
3. E es cuerpo de descomposición sobre K de los polinomios de $K[X]$
4. La extensión E/K es algebraica y todo polinomio no constante tiene una raíz en E .

1,2 y 4 equivalen por las proposiciones anteriores.

Para probar la equivalencia entre 2 y 3. De 3 a 2 es trivial. Veamos $2 \implies 3$

LLamando $S = \{u \in E : \exists f \in K[X] : f(u) = 0\}$. Como E/K es algebraica, $S = E$, y $K(S) = E$. Luego E es cuerpo de descomposición de los polinomios con coeficientes en K sobre K .

Proposición 16. Sea $E \supset F \supset K$ torre de cuerpos con F/K algebraica. Entonces E es clausura algebraica de F si y sólo si E es clausura algebraica de K .

E/F y F/K son extensiones algebraicas si y solo si E/K es extensión algebraica. el hecho de que todo polinomio de $e[x]$ descompone en $e[x]$ se mantiene en ambas implicaciones por tener que E es clausura algebraica de un cuerpo.

Teorema 9. Teorema de Steinitz

Para todo cuerpo K existe una clausura algebraica \bar{K}

Es consecuencia del teorema de existencia de cuerpos de descomposición 8

Teorema 10. Isomorfía entre clausuras algebraicas

Dos clausuras algebraicas E_1 y E_2 del mismo cuerpo K son isomorfas sobre K .

Consecuencia del teorema de isomorfía de cuerpos de descomposición.

Teorema 11. Extensión a una clausura algebraica *Sea una torre de cuerpos $K \subset F \subset E$ con E/K algebraica y sea \bar{K} clausura algebraica de K . Entonces todo homomorfismo $\sigma : F \rightarrow \bar{K}$ sobre K tiene una extensión $\tau : E \rightarrow \bar{K}$ (¡jojo! extensión del homomorfismo)*

Tomamos:

$$S = \{(E_i, \sigma_i) : F \subset E_i \subset E, \sigma_i : E_i \rightarrow \bar{K} \quad \sigma_i|_F = \sigma\}$$

S es no vacío y es inductivamente ordenado por inclusión, considerando como orden la inclusión y la igualdad en la restricción de aplicaciones.

Por lema de Zorn existe por tanto un elemento maximal (E_1, σ_1) . Supongamos $E_1 \subsetneq E$ existe un $u \in E, u \notin E_1$ del que podemos tomar $f = \text{Irr}(u, K)$ (porque E/K es algebraica) y por la proposición 11, como todos los α_i mantienen K , llamando $f_1 = f_2 = f$ en dicha proposición, tengo que existen un $\sigma_2 : E_1(u) \rightarrow (\sigma_1(E_1))(u)$ que extiende $\sigma'_1 : E_1 \rightarrow \sigma(E_1)$ y el par $(E_1(u), \sigma_2)$ sería entonces maximal, contradicción, luego $E_1 = E$ y $\tau = \sigma_1$.

Proposición 17. Cardinal clausura algebraica *Sea K cuerpo, \bar{K} su clausura algebraica.*

1. Si K es finito, entonces su clausura es infinito numerable.
2. Si K es infinito, entonces su clausura tiene el mismo cardinal que K .

Extensiones normales y conjuntos separables

Proposición 18. Sean $u, v \in \bar{K}$. Los siguientes enunciados equivalen:

1. $\text{Irr}(u, K) = \text{Irr}(v, K)$
2. Existe isomorfismo $\tau : K(u)/K \rightarrow K(v)/K$ tal que $\tau(u) = v$
3. Existe homomorfismo $\alpha_1 : K(u)/K \rightarrow \bar{K}/K$ tal que $\sigma(u) = v$
4. Existe un automorfismo $\alpha : \bar{K}/K \rightarrow \bar{K}/K$ tal que $\sigma(u) = v$

$1 \Rightarrow 2$ Por 1 se tiene que:

$$K(u) \cong K/(\text{Irr}(u, K)) = K/(\text{Irr}(v, K)) \cong K(v)$$

Donde llevamos $u \mapsto p(x)$ y $v \mapsto p(x)$ en los isomorfismos correspondientes.

$2 \Rightarrow 3$ Componemos $i \circ \tau$

$3 \Rightarrow 4$ implica que si tenemos $p(x)$ irreducible tal que $p(u) = 0$. Entonces $\sigma(p(x)) = p(x)$ y $p(v) = \sigma(p(v)) = 0$

$4 \Rightarrow 1$ por el teorema 11

Definición. Dos elementos $u, v \in \bar{K}$ se llaman conjugados sobre K si verifican las propiedades de la proposición anterior.

Proposición 19. Sean $F_1/K, F_2/K$ dos extensiones algebraicas. Equivalen:

1. Existe un isomorfismo $\sigma : F_1 \rightarrow F_2$ sobre K .
2. Existe un homomorfismo $\sigma_1 : F_1 \rightarrow \bar{K}$ sobre K tal que $\sigma_1(F_1) = F_2$
3. Existe un isomorfismo $\sigma_2 : \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ sobre K tal que $\sigma_2(F_1) = F_2$.

$1 \Rightarrow 2$ trivialmente, y $3 \Rightarrow 1$, componiendo i en el primer caso, y restringiendo F_1

La implicación $2 \Rightarrow 3$ viene dada por 11 y 6

Definición. Extensiones conjugadas

Dos extensiones F_1/K y F_2/K se llaman conjugadas si verifican las propiedades de la proposición anterior.

Teorema 12. Sea F/K una extensión algebraica, con F subcuerpo de \bar{K} . Equivalen.

1. $\sigma : F \rightarrow \bar{K}$ homomorfismo sobre K , entonces $\sigma(F) = F$
2. Todo polinomio irreducible de $K[X]$ con una raíz en F descompone en factores lineales en $F[X]$.
3. F es el cuerpo de descomposición sobre K de una familia de polinomios de $K[X]$

Para la implicación $1 \implies 2$, las raíces de un polinomio irreducible u, v son conjugadas con $u \in F$, luego existe un homomorfismo $\sigma_1 : K(u) \rightarrow \bar{K}$ verificando $\sigma_1(u) = v$, pero como por el primer punto, $\sigma_1(F) = F$, entonces $v \in F$

Para $2 \implies 3$ tenemos que podemos coger como familia todos los polinomios irreducibles de $K[X]$ con una raíz en F , y es todo F porque para cada elemento de F podemos coger su polinomio irreducible.

Para $3 \implies 1$, tenemos que todo elemento $k \in F$ está en la clausura algebraica, porque la clausura algebraica contiene más elementos que F al ser el cuerpo de descomposición de **todos** los polinomios de $K[X]$, luego k tiene un polinomio irreducible f en K , al estar en la clausura. σ por tanto se lleva raíces de f en raíces de f por tener que F será por 3 cuerpo de descomposición de f . Luego $\sigma(F) \subset F$ y tenemos un homomorfismo $\sigma : F \rightarrow F$ con F extensión algebraica, luego por 6 es isomorfismo y $\sigma(F) = F$

Definición. Una extensión F/K se llama normal si verifica las propiedades de la proposición anterior.

Nótese la diferencia con la definición dada en clase, donde se definía una extensión normal como una extensión finita. Con la definición que hemos dado aquí, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{7}, \dots)$ es una extensión infinita y normal.

Proposición 20. Propiedades de las extensiones normales

1. Sea E/K extensión normal, F/K extensión algebraica arbitraria. Entonces la extensión EF/F es normal
2. Sea $K \subset F \subset E$ torre de cuerpos con E/K normal. Entonces E/F es extensión normal
3. Sean $F_1/K, F_2/K$ extensiones normales. Entonces F_1F_2/K es extensión normal.
4. Sean $F_\lambda/K, \lambda \in \Delta$ una familia arbitraria de extensiones normales y $E = \cap_\lambda F_\lambda$. Entonces la extensión E/K es normal.

1. La extensión EF/F es normal ya que dado un homomorfismo $\sigma : EF/F \rightarrow \bar{K}/F$ puedo restringirlo a E y por ser E normal, como $\sigma|_E$ fija K , entonces debe fijar E (caracterización de normal). Luego σ fija E, F , y por tanto fija EF .
2. Cualquier homomorfismo que fija F fija también K y por ser E/K normal, fijará E , luego E/F es normal.
3. Dado un homomorfismo $F_1F_2/K \rightarrow \bar{K}/K$ al restringirlo a F_i , debe fijar F_i , por ser F_i/K normal, luego fija F_1F_2
4. Dado un homomorfismo $E/K \rightarrow \bar{K}/K$ lo puedo extender a \bar{K} y restringirlo a F_λ para todo λ y fijaría F_λ por ser F_λ/K normal, luego fijaría la intersección.

Definición. Clausura normal

Sea F/K extensión algebraica arbitraria. Llamamos clausura normal de F/K a la extensión E/K donde:

$$E = \cap \{F_1 : F_1 \supset F, F_1/K \text{ normal}\}$$

La estamos definiendo como la menor extensión normal y **existe** porque la clausura algebraica es normal.

NOTA: hay que percatarse que la definición es para una extensión, no para un cuerpo.

Teorema 13. *Dos clausuras algebraicas E_1, E_2 del mismo cuerpo K son isomorfas sobre K .*

Proposición 21. *Sea $K \subset F \subset E$ una torre de cuerpos tal que la extensión E/K es normal. Entonces todo homomorfismo $\tau : F \rightarrow E$ se extiende a un automorfismo $\sigma : E \rightarrow E$*

Tomo $\sigma_1 = i \circ \sigma : F \rightarrow \bar{K}$.

Extiendo por 11 a un isomorfismo $\sigma_2 : E \rightarrow \bar{K}$ por ser E/K algebraica, y por tanto E/F algebraica.

Proposición 22. *Clausura normal de una extensión finita*

Sea $F = K(u_1, \dots, u_n)$ una extensión finita y sea $f_i = \text{Irr}(u_i, K)$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces la clausura normal es E/K donde E es el cuerpo de descomposición de $f = f_1 \cdots f_n$ sobre K . Además E/K es finita.

E/K es normal por la caracterización 3 de extensiones normales (es cuerpo de descomposición de un polinomio). Veamos que es la mínima extensión normal.

Sea N/K clausura normal de F/K . Entonces debe contener a los u_i y por tanto las raíces de los f_i deberían estar en N/K , y descomponer ahí por segunda caracterización de extensión normal. Ello me dice que el cuerpo de descomposición debe ser $N \subset E$, que unido a lo anterior me da el resultado buscado.

Definición. *Polinomio normal*

Sea $f \in K[X]$ polinomio irreducible. Decimos que f es polinomio normal sobre K si para toda extensión algebraica F/K tal que en F exista una raíz de f el polinomio f descompone como producto de factores lineales.

Proposición 23. *Caracterización de polinomios normales* Sea f un polinomio irreducible en $K[X]$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *El polinomio f es normal sobre K .*
2. *El cuerpo de descomposición de f sobre K es $K(u)$ donde u es raíz de f*

3. Todas las raíces de f se expresan como polinomios en un $K(u)$ con u raíz arbitraria de f .

$1 \implies 2, 2 \implies 3$ son obvios.

Veamos $3 \implies 1$. Sea F/K extensión (no tiene porqué ser algebraica) en la que existe una raíz del polinomio f , u . Entonces $K(u) \subset F$ y por tanto todas las raíces de f están en F

Extensiones separables

Definición. *Elemento separable*

Un elemento algebraico u sobre un cuerpo K se llama separable si $\text{Irr}(u, K)$ no tiene raíces múltiples.

Definición. *Extensión separable*

Una extensión algebraica F/K se llama separable si todo elemento de F es separable sobre K .

Proposición 24. Torres separables Sea $E \supset F \supset K$ torre de cuerpos tal que E/K es extensión separable. Entonces E/F y F/K son extensiones separables.

F/K es separable, por tener menos elementos que E . E/F es separable porque $\text{Irr}(u, F) | \text{Irr}(u, K)$ y $\text{Irr}(u, K)$ no tiene raíces múltiples, pero $\text{Irr}(u, F)$ sí.

NOTA: Pongamos un ejemplo de cuerpo normal no separable.

$$\mathbb{Z}_p(t^p)(t) \supset \mathbb{Z}_p(t^p)$$

con p primo y t trascendente sobre \mathbb{Z}_p

Definición. *Grado separable*

Sea una torre de cuerpos

$$\bar{K} \supset F \supset K$$

donde \bar{K} es una clausura algebraica de K

Llamamos **grado separable** de F sobre K al conjunto $[F : K]_s = |\{\sigma : F/K \rightarrow \bar{K}/K\}|$

Proposición 25. *Grado separable de una torre de cuerpos*

$$\bar{K} \supset E \supset F \supset K$$

donde \bar{K} es una clausura algebraica de K . Entonces:

$$[E : K]_s = [E : F]_s [F : K]_s$$

Proposición 26. *Sea F/K extensión finita. Entonces $[F : K]_s$ divide a $[F : K]$.*

Proposición 27. Caracterización de separabilidad *Sea E/K extensión finita. La extensión E/K es separable si y sólo si $[E : K]_s = [E : K]$*

Proposición 28. *Sea $E \supset F \supset K$ torre de cuerpos con E/K finita. Entonces $[E : K]_s = [E : K]$ si y solo si $[E : F]_s = [E : F]$ y $[F : K]_s = [F : K]$.*

Proposición 29. *Sea F/K extensión algebraica y $S \subset F$ tal que $F = K(S)$. Entonces la extensión F/K es separable sii todo elemento es separable sobre K*

Proposición 30. 1. *Sea $E \supset F \supset K$ torre de cuerpos con E/K algebraica. La extensión E/K es separable sii lo son las extensiones E/F y F/K*

2. *Sean E/K extensión algebraica separable y F/K extensión arbitraria. Entonces EF/F es separable.*

3. *Sean $E/K, F/K$ dos extensiones algebraicas separables. Entonces EF/K es separable.*

Corolario 7. *La clausura normal de una extensión separable es separable*

Definición. *Definimos como clausura separable de K cuerpo, y lo notamos como K^{sep} al subcuerpo formado por todos los elementos de \bar{K} separables sobre K forman un subcuerpo de \bar{K}*

Teorema 14. Teorema del elemento primitivo Sea F/K extensión finita. La extensión es **simple** si y sólo si el conjunto de cuerpos intermedios $\{E : F \supset E \supset K\}$ es finito.

Si una extensión F/K es finita y separable, entonces es simple.

Definición. Endomorfismo de Frobenius Sea K un cuerpo de característica p . El homomorfismo $\phi : K \rightarrow K$ definido por $\phi(u) = u^p$ se llama endomorfismo de Frobenius del cuerpo K .

Teorema 15. Caracterizaciones de cuerpos perfectos

Para un cuerpo K son equivalentes:

1. Todo polinomio $f \in K[X]$ irreducible tiene sólo raíces simples.
2. Toda extensión algebraica es separable.
3. Toda extensión finita es separable.
4. $\text{car}(K) = 0$ o $\text{car}(K) = p$ y el endomorfismo de Frobenius es sobreyectivo.

En este caso el cuerpo se llama **cuerpo perfecto**

Las implicaciones $1 \implies 2 \implies 3$ son claras. Para la implicación $3 \implies 1$, dado $f \in K[X]$ polinomio irreducible, con raíces $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en una extensión algebraica, $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es finita, y 3 acaba.

Como ejemplos: cuerpos de característica 0, cuerpos finitos, cuerpos algebraicamente cerrados.

- Derivada y raíces múltiples

Definición. Multiplicidad de raíces

Sea $f \in F[X]$ polinomio, $u \in F$ es raíz de f de multiplicidad k si $f = (X - u)^k f_1$ con $f_1(u) \neq 0$.

El elemento u es una raíz simple si $k = 1$ y es una raíz múltiple si $k > 1$.

Definición. *Derivada de un polinomio en un cuerpo K*

Dado $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ definimos la derivada de f como:

$$f' = \sum_{i=0}^n i a_i X^{i-1}$$

Proposición 31. 1. $(f + g)' = f' + g'$

2. $(fg)' = f'g + fg'$

3. $(f^m)' = m f^{m-1} f'$

Corolario 8. *Condiciones para que las raíces sean simples*

1. f irreducible, $f' \neq 0$. Entonces las raíces de f son simples.
2. $\text{car}(K) = 0$ y f irreducible sobre K . Entonces las raíces de f son simples.
3. $\text{car}(K) = p > 0$. El polinomio f irreducible tiene raíces múltiples sii $f(X) = g(X^p)$

Definición. *Polinomio separable*

Un polinomio $f \in K[X]$ se llama separable sobre K si sus factores irreducibles tienen solo raíces múltiples.

Teoría de Galois

Proposición 9. *Dados n homomorfismos $\sigma_1 \dots \sigma_n$ de G grupo al grupo multiplicativo de un cuerpo F , entonces son linealmente independientes.*

Supongamos una combinación de longitud mínima s de homomorfismos independientes de entre esos n . Podemos suponer s.p.g. que son los s primeros.

$$\sum_{i=1}^s a_i \sigma_i = 0$$

Entonces, podemos despejar $\sigma_s = -\sum_{i=1}^{s-1} a_i / a_s \sigma_i$.

Sea $y \in G$ fijo tal que $\sigma_1(y) \neq \sigma_s(y)$ (existe por ser homomorfismos distintos).

Entonces:

$$\sigma_s(xy) = \sigma_s(x)\sigma_s(y) = \sum_{i=1}^{s-1} a_i/a_s \sigma_i(x)\sigma_i(y)$$

Y multiplicando por $\sigma_s(y)$:

$$\sigma_s(x)\sigma_s(y) = \sum_{i=1}^{s-1} a_i/a_s \sigma_i(x)\sigma_s(y)$$

Restando ambas igualdades llegamos a una combinación lineal finita nula y con el primer coeficiente no cero de longitud $s - 1$, contradicción.

A partir del lema anterior deducimos:

Proposición 10. Lema de Dedekind *Dados n homomorfismos distintos de F_1 a F_2 , con F_i cuerpos, entonces son linealmente independientes sobre F_2*

Corolario 9. *Si $[F_1 : K] = n$ existen a lo sumo n homomorfismos distintos de F_1 a F_2 que fijan K . Es decir $|Hom(F_1/K, F_2/K)| \leq n$*

Sea una base de F_1 sobre K $\{u_1, \dots, u_n\}$. Supongamos que existen $(n + 1)$ homomorfismos distintos $\alpha_i : F_1 \rightarrow F_2$ sobre K . El sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \sigma_i(u_j) = 0 \quad j = 1 \dots n$$

tiene una solución no trivial (ninguna columna contiene el elemento 0 por tener homomorfismos de cuerpos y podemos triangular por Gauss, luego hay una solución $c_1 \dots c_{n+1} \in F_2$ al sistema.

Y por tanto al conseguir la misma combinación lineal que anula a todos los elementos por separado de la base, tenemos que $\forall u \in F_1$:

$$\sum_i^{n+1} c_i \sigma_i(u) = 0$$

Lo que entra en contradicción con el corolario anteriormente probado.

Definición. Para toda extensión finita F/K llamamos **grupo de la extensión** al grupo:

$$G(F/K) = \{\sigma \in \text{Aut}(F) | \forall u \in F \sigma(u) = u\}$$

Corolario 10. Para toda extensión finita F/K se verifica $|G(F/K)| \leq [F : K]$

Trivial a partir del corolario anterior.

Definición. Sea E cuerpo arbitrario y $G < \text{Aut}(E)$ subgrupo del grupo de automorfismos de E . Llamamos subcuerpo de E fijo por G .

$$E^G = \{u \in E | \forall \sigma \in G \sigma(u) = u\}$$

Teorema 16. Teorema de Artin Sea G subgrupo finito de $\text{Aut}(E)$. Entonces $[E : E^G] = |G|$

Llamamos $K = E^G$. Por el corolario anterior sabemos que $|\text{Aut}(E/K)| \leq [E : K]$ y $G \subseteq |\text{Aut}(E/K)|$, luego $n = |G| \leq [E : E^G]$.

Llamamos $G = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

Supongamos la desigualdad estricta. Tomamos $n + 1$ elementos linealmente independientes sobre E^G . Formamos el sistema:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \sigma_j(u_i) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Sea $a_1, \dots, a_{n+1} \in E$ solución con el mínimo número de elementos no nulos. Sea Un automorfismo $\sigma \in \text{Aut}(K)$ decimos que fija un elemento $\alpha \in K$ si $\sigma\alpha = \alpha$. Fija K si fija todos sus elementos.

Definición. Una extensión E/K se llama extensión de Galois si existe un grupo $G < \text{Aut}(E)$ tal que $E^G = K$. En este caso, el grupo se representa por $\text{Gal}(E/K)$ y se llama grupo de Galois de la extensión E/K

Proposición 32. Una extensión finita E/K es de Galois si y sólo si es normal y separable.

Por ser de Galois, $K = E^G$ para algún grupo G . Cada automorfismo $\sigma \in G$ se extiende a un homomorfismo $\sigma : E \rightarrow \bar{K}$, luego $[E : K]_S \geq |G| = [E : K] \geq [E : K]_S$

Por tanto $[E : K]_S = [E : K] = |G|$ (Por Artin)

Como para cada homomorfismo $\tau : E \rightarrow K$ puedo tomarme $i \circ \tau$ extensión a \bar{K}

Hacia el lado opuesto. Sea E/K extensión normal y separable. Existen $n = [E : K]_S = [E : K]$ homomorfismos $\tau : E \rightarrow \bar{K}$ sobre K y para todos ellos $\tau(E) = E$. Por ello $G = G(E/K)$ tiene orden n . Por el teorema de Artin $[E : E^G] = [E : K]$.

Además tenemos la torre de cuerpos $K \subset E^G \subset E$, lo que sumado a lo anterior da $[E^G : K] = 1$ y por tanto $E^G = K$ y la extensión E/K es de Galois.

- Correspondencia de Galois

Sea E/K extensión finita de Galois, $G = \text{Gal}(E/K)$. Definimos una correspondencia entre el conjunto $\mathcal{S}(G)$ de subgrupos de G y el conjunto $\mathcal{F}(E/K)$ de cuerpos intermedios de E/K . Para $H < G$ definimos $E^H = H^*$. A cada cuerpo intermedio F entre E y K le hacemos corresponder el grupo de Galois de la extensión E/F y llamamos $G^F = F^*$. A $F \mapsto F^*, H \mapsto H^*$ las denominamos correspondencia de Galois para la extensión E/K

Proposición 33. Sean F, F_1, F_2 cuerpos intermedios de E/K y H, H_1, H_2 subgrupos de $G = \text{Gal}(E/K)$. Entonces:

1. $F_1 \subset F_2 \implies F_2^* \subset F_1^*; H_1 \subset H_2 \implies H_2^* \subset H_1^*$
2. $F \subset F^{**}; H < H^{**}$

$$3. F^* = F^{***}; H^* = H^{***}$$

Teorema 17. Teorema fundamental Sea E/K una extensión de Galois finita con grupo $G = \text{Gal}(E/K)$

1. La correspondencia de Galois establece una biyección $\mathcal{F}(E/K) \cong \mathcal{S}(G)$ dada por $F = H^* \leftrightarrow H = F^*$. Además $F_1 \subset F_2$ si y solo si $H_1 \subset H_2$
2. Dicha biyección es antiisomorfismo de retículos: $(F_1 \cdot F_2)^* = F_1^* \cap F_2^*$ y $(F_1 \cap F_2)^* = F_1^* \vee F_2^*$
3. $F_1/K, F_2/K$ son conjugadas si y sólo si los subgrupos F_1^* y F_2^* son conjugados en G .
4. F/K es normal sii F^* es un subgrupo normal de G . En este caso $\text{Gal}(F/K) \cong G/F^*$
5. Para todo subgrupo $H < G$ se tiene $|H| = [E : H^*]$ y $[G : H] = [H^* : K]$. Para todo $F \in \mathcal{F}(E/K)$ se verifica $[E : F] = |F^*|$ y $[F : K] = [G : F^*]$

Demostración de 5.

$|G| = [E : E^G] = [E : K]$ y $|H| = [E : E^H] = [E : H^*]$ por teorema de Artin.

Por Lagrange $|G| = [G : H]|H|$. Simplificando factores $[F : K] = [G : F^*]$

Por el grado de las extensiones: $[E : K] = [E : H^*][H^* : K]$

Demostración de 1.

Tenemos la torre $G > H^{**} > H$ y:

$$[G : H^{**}] = [H^{***} : K] = [H^* : K] = [G : H]$$

Tenemos la torre $E \supset F^{**} \supset F$ y:

$$[E : F] = |F^*| = |F^{***}| = [E : F^{**}]$$

La segunda parte sale de la proposición anterior y de haber probado que la conexión de Galois nos da una biyección.

Demostración de 2.

Por ser antiisomorfismos de conjuntos ordenados (son biyecciones de conjuntos que invierten el orden).

Demostración de 3.

Sea $f : E/K \rightarrow E/K$ isomorfismo que conjugue F_2 y F_1 (esto es $f(F_1) = F_2$). Sea $u = f(v) \in F_2; v \in F_1$. Así, dado $\tau \in F_1^*$ automorfismo, se tiene $f\tau f^{-1}(u) = f\tau(v) = f(v)$, luego $fF_1^*f^{-1} \subset F_2^*$

El otro contenido es igual.

Demostración de 4.

Desde 3.

Para demostrar la isomorfía: $\Phi : G = \text{Gal}(E/K) \rightarrow \text{Gal}(F/K)$ dado por restricción. Aplicando primer teorema de isomorfía:

$$\text{Img}(\Phi) = \text{Gal}(F/K) \cong \text{Gal}(E/K)/\text{Ker}(\Phi)$$

Y $\text{Ker}(\Phi) = F^*$. Estamos usando 18 y que E es normal por ser de Galois.

- Propiedades de extensiones de Galois

Proposición 34. Sea $K \subset F \subset E$ una torre de cuerpos tal que E/K es una extensión de Galois finita. Entonces la extensión E/F es de Galois finita y el grupo $\text{Gal}(E/F)$ es un subgrupo de $\text{Gal}(E/K)$

Definición. Una extensión finita E/K **de Galois** se dice:

1. **Abeliana** si el grupo $G = \text{Gal}(E/K)$ es abeliano.
2. **Cíclica** si $G = \text{Gal}(E/K)$ es cíclica.

3 **Soluble** si G es soluble

???

Denotamos $\text{Aut}(K/F)$ los automorfismos de K que fijan F . Si $F = (1)$ entonces $\text{Aut}(K/F) = \text{Aut}(K)$.

Proposición 35. $\text{Aut}(K)$ es grupo bajo la composición y $\text{Aut}(K/F)$ es un subgrupo.

Proposición 36. *Dado un polinomio con coeficientes en K , $\sigma \in K$, si α es raíz del polinomio, entonces $\sigma\alpha$ es raíz del polinomio.*

Proposición 37. *Si H es un subgrupo del grupo de automorfismos de K , los elementos de K fijos por H son subcuerpo de K , con K cuerpo.*

Proposición 38. 1. $F_1 \subseteq F_2 \subseteq K$ son dos subcuerpos de K entonces $\text{Aut}(K/F_2) \leq \text{Aut}(K/F_1)$

2. $H_1 \leq H_2 \leq \text{Aut}(K)$ son dos subgrupos de automorfismos con cuerpos fijos asociados F_1 y F_2 , resp. entonces $F_2 \subseteq F_1$

Esto último establecerá una relación entre los subgrupos del grupo de Galois y los subcuerpos de una extensión.

Proposición 39. *Sea E el cuerpo de descomposición sobre F del polinomio $f(x) \in F[x]$. Entonces:*

$$|\text{Aut}(E/F)| \leq [E : F]$$

con igualdad si $f(x)$ es separable sobre F

Nótese que este número da la cantidad de diagramas de la forma que se detalla a continuación que pueden construirse.

Conviene tener presente siempre el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \sigma : & E & \xrightarrow{\sim} & E' \\ & | & & | \\ \tau : & F(\alpha) & \xrightarrow{\sim} & F'(\beta) \\ & | & & | \\ \phi : & F & \xrightarrow{\sim} & F' \end{array}$$

donde la anterior proposición es un caso particular con $F = F'$, y $E = E'$

Definición. K/F extensión finita. Entonces K se llama de Galois sobre F y K/F es una extensión de Galois si $|\text{Aut}(K/F)| = [K : F]$. Si K/F es de Galois el grupo de automorfismos $\text{Aut}(K/F)$ es llamada grupo de Galois de K/F , denominada $\text{Gal}(K/F)$.

Corolario 11. *Si K es el cuerpo de descomposición sobre F de un polinomio separable $f(x)$ entonces K/F es de Galois.*

Esto motiva la siguiente definición:

Definición. Si $f(x)$ es un polinomio separable sobre F , entonces se llama grupo de Galois de $f(x)$ sobre F a E/F con E cuerpo de descomposición de f sobre F

Como ejemplo,

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ es extensión de Galois con grupo de Galois $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma\} \cong \mathbb{Z}_2$
2. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ no es de Galois ya que dado un $\sigma \in Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$, debe conservar raíces del polinomio $Irr(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = x^3 - 2$, pero dos de ellas son complejas, luego no pertenecientes a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ por tanto, y no podemos construir más que un elemento de $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$, la identidad. Nótese que aunque todas las raíces de $x^3 - 2$ estuviesen en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, ello no nos garantiza que podamos construir siempre "suficientes" automorfismos (por ejemplo si el polinomio no tiene factores lineales de grado 1 sobre la extensión).
3. **El cuerpo de descomposición de cualquier polinomio sobre \mathbb{Q} es de Galois** según el corolario anterior. Por ejemplo, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ donde como sabemos que el grupo de Galois tiene dimensión 4 (la de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, cuerpo de descomposición del polinomio $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$), y los únicos automorfismos posibles se obtienen de asignar $\sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}$ y $\sqrt{3} \mapsto \pm\sqrt{3}$
4. El cuerpo de descomposición de $x^3 - 2$ sobre \mathbb{Q} es Galois de grado 6. Las raíces de esta ecuación son $\sqrt[3]{2}, \rho\sqrt[3]{2}, \rho^2\sqrt[3]{2}$, y esto da 9 combinaciones distintas de raíces para formar automorfismos, pero como el grupo de Galois tiene orden 6, no todos ellos serán realmente automorfismos.

5.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$$

muestra que no toda extensión de Galois de una extensión de Galois lo es (ya que tenemos **una extensión de grado 2, es de Galois por tanto**), pero las raíces de $x^4 - 2 = Irr(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$ son $\{\pm\sqrt[4]{2}, \pm i\sqrt[4]{2}\}$ y de esas 4 raíces hay 2 que no están en $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$

6. Automorfismo de Frobenius

NOTA: Conveniente para efectuar demostraciones de estructura de subgrupos de Galois:

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \tau : \sigma^2 = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma \rangle &= K_4 \\ \langle \sigma, \tau : \sigma\tau = \tau\sigma^2, \tau^2 = 1, \sigma^3 = 1 \rangle &= S_3 \end{aligned}$$

Ejercicios

Ejercicio 1.24

Dado un término $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ con $e_1 \geq \dots \geq e_n$, el polinomio simétrico mínimo que contiene a $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ lo representamos por $(X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n})$, y podemos escribirlo fácilmente como

$$(X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}) = \frac{1}{k} \sum_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)}^{e_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{e_n}$$

donde k es el número de términos $X_{\sigma(1)}^{e_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{e_n}$ que son iguales a $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$. Calcula el valor de k , y el número de monomios de $(X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n})$.

Notamos d_1, \dots, d_m , $d_1 > \dots > d_m$, donde $d_1, \dots, d_m \in \{e_1, \dots, e_n\}$

y $k_i = \text{card}(\{e_j : e_j = d_i\})$

Por combinatoria, sabemos por tanto que $k = \prod k_i!$ y que tendremos un número $\frac{k}{n}$ de monomios de tipo $(X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n})$.

Ejercicio 1.25

Se considera el polinomio $p(x) = x^3 - 5x - 5$ con raíces α, β, γ . Calcula el valor de $\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^3 + \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^3 + \left(\frac{1}{\gamma+1}\right)^3$

$\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\beta+1}, \frac{1}{\gamma+1}$ anulan a $p(\frac{1}{x}-1)$ donde:

$$p\left(\frac{1}{x}-1\right) = \frac{-1}{x^3} \cdot (x^3 + 2x^2 + 3x - 1)$$

Luego $a = \frac{1}{\alpha+1}, b = \frac{1}{\beta+1}, c = \frac{1}{\gamma+1}$ son raíces de:

$$q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)$$

Definimos:

$$e_1 = a + b + c$$

$$e_2 = ab + ac + bc$$

$$e_3 = abc$$

Por un teorema visto en clase, podemos expresar de forma única $a^3 + b^3 + c^3$ (que es lo pedido por el enunciado, y un polinomio simétrico en las variables a, b, c) como un polinomio de grado 3 en función de e_1, e_2, e_3

Se comprueba fácilmente que $a^3 + b^3 + c^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3$ Por otro lado, igualando los coeficientes de q factorizado y sin factorizar:

$$e_1 = -2$$

$$e_2 = 3$$

$$e_3 = 1$$

$$\text{Así } a^3 + b^3 + c^3 = 13$$

Ejercicio 2.14

Sea A un anillo y $\phi : A[X] \rightarrow A[X]$ un homomorfismo tal que $\phi(a) = a$ para cada $a \in A$. Supongamos que $\phi(X) = f(X) \in A[X]$.

1. Si A es un dominio de integridad (DI), ¿qué condición tiene que verificar $f(X)$ para que ϕ sea un isomorfismo?*
2. ¿Qué ocurre cuando A no es un DI?

1-

Se tiene $\phi(\sum_{i=0}^n a_i X^i) = \sum_{i=0}^n a_i f(X)^i$, si $f(X) = ux + a$ con u unidad en A .

Para $g(x) = u^{-1}(x - a)$ se tiene $f \circ g = id = g \circ f$ y por tanto definiendo $\gamma(\sum_{i=0}^n a_i X^i) = \sum_{i=0}^n a_i g(X)^i$ se cumple que $\gamma \circ \phi = id = \phi \circ \gamma$

Claramente, $f(X)$ no puede ser constante, ya que entonces tendríamos $Img(\phi) \subseteq A$.

Si $gr(f(X)) = m \geq 2$, puesto que al ser dominio de integridad, no se anula el coeficiente del término de mayor grado, tendríamos que:

$$gr(\phi(p(x))) = gr(p(X)) \cdot m$$

Y por tanto la función ϕ no podría ser sobreyectiva, ya que en $Img(\phi)$ sólo estarían contenidos los polinomios de grado un múltiplo de m . También se verifica que en $f(X) = ux + a$, u no puede ser no unidad, puesto que en dicho caso tendríamos que el término líder de un polinomio $\phi(p(x))$ debería estar en el ideal generado por u , que sería todo A si y solo si u es unidad.

2-

Podría ocurrir que si el coeficiente líder de $f(X)$ es nilpotente, ϕ fuera isomorfismo, como por ejemplo con $f(X) = 2X^2 + X$ en \mathbb{Z}_4 . Con dicho

f , tendríamos $\phi(X^2 + 2X) = X$, lo que asegura sobreyectividad, y como $gr(\phi(x)) \geq gr(p(x))$, el kernel de ϕ debería ser $\{0\}$, lo que asegura inyectividad.

Ejercicio 2.15

Consideramos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

1. Si $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible, prueba que $f(X)$ es irreducible sobre \mathbb{Q}
 2. Si $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible, entonces $F = \frac{\mathbb{Q}[X]}{(f(X))}$ es un cuerpo y tenemos inclusiones $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset F$.
 3. Si llamamos $x = X + (f(X)) \in F$, prueba que x es una raíz de $f(X) \in F[X]$
-

Supongamos que $f(X)$ es reducible sobre \mathbb{Q} . Entonces:

$$f(X) = p_1(X) \cdot p_2(X), \quad gr(p_1) \geq 1, gr(p_2) \geq 1$$

Tomamos el menor $n \in \mathbb{N}$ verificando $nP = (b_l + b_{l-1}x^{l-1} + \dots + b_0) \cdot (c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_0)$ donde todos los b_i y todos los c_j son enteros.

Si tuviéramos $n = 1$, ya habríamos acabado. Suponemos $n > 1$. Sea p divisor primo de n . Entonces no todos los b_i ni todos los c_j son divisibles por p , puesto que n es mínimo.

Sean k, t los índices de los primeros b_i, c_j verificando que $p \nmid b_i, p \nmid c_j$

$$\text{Así, } n_{k+t} = b_{k+t}c_0 + b_{k+t-1}c_1 + \dots + b_kc_t + \dots + b_0c_{k+t}$$

Pero como $p \mid b_{k+t}c_0, p \mid b_{k+t-1}c_1, \dots, b_{k+1}c_{t-1}, b_{k-1}c_{t+1}, \dots, b_0c_{k+l}$ necesariamente debe tenerse, por $p \mid n$ que $p \mid b_kc_t$, lo cual es contradicción.

Por tanto $n = 1$.

2-

Sabemos que A/I con A anillo, I ideal, es cuerpo si y solo si I es maximal.

$I = (f(X))$ es maximal en $\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$, ya que dado otro ideal $(f(X)) \subsetneq M$, como $\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$ es DIP, $M = (g(X))$, con $g(X) \in \mathbb{Q}[\mathbb{X}]$, pero eso quiere decir que $f(X) = a(X) \cdot g(X)$ con $a(X)$ no constante, ya que en caso opuesto, los dos ideales serían iguales, pero esto entra en contradicción con el hecho de que $f(X)$ es irreducible.

Luego $(f(X))$ es maximal y F cuerpo.

Además, a cada elemento $q \in \mathbb{Q}$ podemos asignarle un elemento $q + (f(X))$. Dados $q, q' \in \mathbb{Q}$, se tiene que $q + \mathbb{Q} \neq q' + \mathbb{Q}$, ya que caso opuesto tendríamos $q - q' \in (f(X))$, lo que es imposible, puesto que $q - q' \neq 0$ y es una constante.

3-

Sea $f(X) = \sum a_i X^i$ en $\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$. Entonces tenemos que en $F[X]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum (a_i + (f(X))) \cdot (X^i + (f(X))) = \sum (a_i \cdot X^i + (f(X))) = \\ &= (\sum a_i X^i + (f(X))) = (f(X) + (f(X))) = (f(X)) \end{aligned}$$

Luego es una raíz del polinomio.

Ejercicio 2.16

Describe los elementos del cuerpo $\frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^3 + X + 1)}$, completando las tablas de la suma y el producto.

Los elementos del cuerpo citado son de la forma $p(X) + (X^3 + X + 1)$ con $p(X)$ un polinomio producto de irreducibles en $\mathbb{F}_2[X]$. Así, los elementos de este cuerpo son:

$$0 = 0 + (X^3 + X + 1)$$

$$\begin{aligned}
1 &= 1 + (X^3 + X + 1) \\
a &= X + (X^3 + X + 1) \\
b &= X + 1 + (X^3 + X + 1) \\
c &= X^2 + X + 1 + (X^3 + X + 1) \\
d &= X^2 + X + (X^3 + X + 1) \\
e &= X^2 + (X^3 + X + 1) \\
f &= X^2 + 1 + (X^3 + X + 1)
\end{aligned}$$

- Tabla del producto

\cdot	0	1	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	d	e	f
a	0	a	e	d	f	c	b	1
b	0	b	d	f	a	1	c	e
c	0	c	f	a	b	e	1	d
d	0	d	c	1	e	a	f	b
e	0	e	b	c	1	f	d	a
f	0	f	1	e	d	b	a	c

- Tabla de la suma

$+$	0	1	a	b	c	d	e	f
0	0	1	a	b	c	d	e	f
1	1	0	b	a	d	c	f	e
a	a	b	0	1	f	e	d	c
b	b	a	1	0	e	f	c	d
c	c	d	f	e	0	1	b	a
d	d	c	e	f	1	0	a	b
e	e	f	d	c	b	a	0	1
f	f	e	c	d	a	b	1	0

Ejercicio 2.17

Se considera $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \in F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$

1. Prueba que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 8$
 2. Prueba que $F = \mathbb{Q}(\alpha)$
 3. Calcula $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$
 4. Encuentra elementos $\beta \in F$, de grado cuatro sobre \mathbb{Q}
-

1-

Tenemos la torre de cuerpos:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{5})$$

Y por tanto se cumple:

$$\begin{aligned} [\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] &= \\ &= [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})] \end{aligned}$$

Se verifica:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})] = 2$$

ya que es conocido que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$, y además se tienen las otras dos igualdades, al no poder expresar $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ ni $\sqrt{2} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

2-

Claramente $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ Se tiene que:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{6} + 10$$

Por tanto $\beta = \sqrt{15} + \sqrt{10} + \sqrt{6} \in F$

Además $\beta^2 = 4\sqrt{15} + 6\sqrt{10} + 10\sqrt{6} + 31$

Y por tanto $\gamma = 4\sqrt{15} + 6\sqrt{10} + 10\sqrt{6} \in F$

Además:

$$\delta = \frac{1}{2}(\gamma - 4\beta) = \sqrt{10} + 3\sqrt{6}$$

$$\theta = \frac{1}{2}(6\beta - \gamma) = \sqrt{15} - 2\sqrt{6}$$

$$\delta^2 = 10 + 9 \cdot 6 + 4\sqrt{15}$$

$$\theta^2 = 15 + 4 \cdot 6 - 12\sqrt{10}$$

Juntando toda esta información con que $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ deducimos que $1, \sqrt{15}, \sqrt{10}, \sqrt{6}, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \in F$, 5 elementos linealmente independientes, y F sólo puede tener grado 8, 4 o 2 luego debe ser 8.

3-

$$\begin{aligned}
\beta &= \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow (\beta - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 2\sqrt{5}\beta - 2\sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\beta^2 - 2\sqrt{6})^2 = 4 \cdot 5\beta^2 \Leftrightarrow \beta^4 - 4\sqrt{6}\beta^2 - 20\beta^2 + 24 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\beta^4 - 20\beta^2 + 24)^2 - 16 \cdot 6 \cdot \beta^4 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \beta^8 - 40\beta^6 + 352\beta^4 - 960\beta^2 + 576 = 0
\end{aligned}$$

Por tanto $X^8 - 40X^6 + 352X^4 - 960X^2 + 576$, al ser polinomio de grado 8, que es el grado de la extensión, debe ser irreducible, $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$

4-

Nos basta demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ y por tanto $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \omega$ sería elemento de grado 4.

Claramente $\mathbb{Q}(\omega) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, y como $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\omega)$ tendrá grado 4 o 2 sobre \mathbb{Q} . Además:

$$\omega^2 = 2 + 3 + \sqrt{6}$$

,

$$\omega^3 = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$$

y podemos obtener a partir de combinaciones de $\omega, \omega^2, \omega^3$ los elementos $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$, que pertenecen a $\mathbb{Q}(\omega)$, y que están en la base $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Por tanto ω es elemento de grado 4.

Ejercicio 3.11

Sea K una extensión de \mathbb{F}_2 de grado $n > 1$, y $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ un polinomio no constante*

1. Prueba que si $\alpha \in K$ es una raíz de $f(X)$, entonces $\{\alpha^2, \alpha^4, \alpha^{2n-1}\}$ son raíces de $f(X)$ en K
2. Prueba que en general $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^{2n-1}\}$ no son todas las raíces de $f(X)$

3. Prueba que si β es una raíz primitiva de K , que es raíz de $f(X)$, entonces el grado de $f(X)$ es mayor o igual que n

1-

Trivialmente, en \mathbb{F}_2 tenemos que: $\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^k a_i^2$

Por inducción: $\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{2n} = \sum_{i=1}^k a_i^{2n}$

Así:

$$f(\alpha^{2n}) = \sum_{i=1}^m \alpha^{2ni} = \left(\sum_{i=1}^m \alpha^i\right)^{2n} = f(\alpha)^{2n} = 0$$

2-

Tenemos el caso trivial $x(x+1)$, en el que las raíces $0, 1$ están en $\mathbb{F}_2 \subseteq K$, pero 0 no es potencia de 1 (entendiendo como 0 y como 1 los del cuerpo K que cojamos como extensión, que puede ser por ejemplo $\frac{\mathbb{F}_2[X]}{x^2+x+1}$ con x^2+x+1 irreducible en $\mathbb{F}_2[X]$)

3-

Si β es raíz primitiva de K , se tiene que $\{1, \beta, \dots, \beta^{n-1}\}$ es base de K sobre \mathbb{F}_2 .

Si el grado de $f(X)$ fuese menor que n , tendríamos que $f(\beta) = 0$ es una combinación lineal de los elementos de la base que vale 0 , y esto entra en contradicción con que sea base.

Ejercicio 4.17

Sea $K \subseteq E \subseteq F$ una torre de cuerpos y supongamos que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son algunas de las raíces de $f(X) \in K[X]$ y $E = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Demuestra que F es el cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre K si, y sólo si, F es el cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre E

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ todas las raíces de $f(X)$ con $n > r$

Basta con afirmar que el cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre K es:

$$G = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Y el de $f(X)$ sobre E :

$$G' = E(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = G$$

Ejercicio 4.18

Sea $a \in \mathbb{Q}$ y n un número entero positivo impar tal que $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demuestra que la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{a})/\mathbb{Q}$ no es normal

La extensión no es normal ya que si lo fuese, como $x^n - a$ es un polinomio que divide a $p(X) = \text{Irr}(\alpha, K)$ sobre $\mathbb{Q}[X]$, y como n es impar, $x^n - a$ sólo puede tener una raíz real, por ser sus raíces de la forma $\omega^k \sqrt[n]{a}$, con ω raíz n -ésima de la unidad. Luego todas las raíces de $p(X)$ deberían estar en la extensión $E = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{a})/\mathbb{Q}$. Además $E \subseteq \mathbb{R}$, luego $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q}$, es decir, el polinomio debería ser forzosamente $x - \sqrt[n]{a}$, que implica que $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q}$, ¡contradicción!

Ejercicio 4.19

Sea E/K una extensión normal y $f(X) \in K[X]$ un polinomio(mónico) irreducible. Si $f(X)$ se factoriza en E como producto de dos polinomios(mónicos) irreducibles $f_1(X)$ y $f_2(X)$. Demuestra que existe un ho-

homomorfismo $\sigma : E/K \longrightarrow E/K$ tal que $f_1^\sigma(X) = f_2(X)$

Sea α raíz de f_1 y β raíz de f_2 en una clausura de K . Como $f = \text{Irr}(\alpha, K)$, $f = \text{Irr}(\beta, K)$, tenemos que existe un isomorfismo $\sigma : \overline{K}/K \longrightarrow \overline{K}/K$ verificando $\sigma(\alpha) = \beta$.

Por ser E extensión normal, luego finita, \overline{K} es también su clausura algebraica, y por tanto $E \subseteq \overline{K}$. Así $E^\sigma = E$, luego $\sigma|_E$ es isomorfismo. Y como $f_1^\sigma(\beta) = f_1(\alpha) = 0$, tenemos que $f_1^\sigma | f_2$, pero un isomorfismo se lleva polinomios irreducibles en irreducibles, luego $f_1^\sigma = f_2$

Ejercicio 5.10

Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$ y t una indeterminada sobre K . Prueba que el polinomio $X^p - t^p \in K(t^p)[X]$ es irreducible.

En una extensión $K' = K(t)$ de K tenemos $X^p - t^p = (X - t)^p$, ya que los términos intermedios del desarrollo valen 0, al ser p la característica de K .

Como $K(t^p) \subseteq K'$, tenemos que los únicos factores que pueden dividir a $X^p - t^p$ son de la forma $(X - t)^m$. Supongamos que alguno tuviese coeficientes en $K(t^p)$. Entonces tendríamos que sus coeficientes también están en K' , y por tanto podríamos reescribir t^m como raíz de un polinomio con coeficientes en K , pero t era trascendente.

Ejercicio 5.11

Estudiar si son o no ciertas las siguientes afirmaciones:

1. $\sqrt[3]{-1}$ es separable sobre \mathbb{F}_9
2. $\sqrt[3]{-1}$ es separable sobre \mathbb{F}_{49}
3. $\sqrt[7]{5}$ es separable sobre \mathbb{F}_{77}
4. t es separable sobre $\mathbb{F}_{p^2}(t^p)$, siendo p un número entero positivo y t una indeterminada sobre \mathbb{F}_{p^2}

1-

\mathbb{F}_3 es cuerpo perfecto por ser finito. Luego por ser \mathbb{F}_9 extensión finita de \mathbb{F}_3 tenemos que es separable, y todo elemento suyo es separable.

2,3-

Se resuelven de manera análoga al primer apartado, ya que \mathbb{F}_7 es cuerpo perfecto por ser finito, y \mathbb{F}_{7^7} es extensión finita, luego todo elemento es separable.

4-

El cuerpo \mathbb{F}_p tiene característica p y su extensión \mathbb{F}_{p^2} tiene también por tanto característica p .

Por el primer ejercicio $X^p - t^p = (X - t)^p = \text{Irr}(t, \mathbb{F}_{p^2}(t^p))$, luego t no es separable.

Ejercicio 5.12

Sea E un cuerpo y $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ un conjunto de n automorfismos distintos de E . llamamos $K = \{e \in E \mid \phi_i(e) = e, 1 \leq i \leq n\}$. demuestra que $[E : K] \geq n$

El teorema de Artin nos afirma que $[E : K] = n$

Ejercicio 7.25

Sea $f \in K[X]$ un polinomio no constante sin raíces múltiples y $G = \text{Gal}(f/K)$. Prueba que son equivalentes: list-style-type: lower-roman

1. $f(X)$ es irreducible
2. G actúa transitivamente sobre las raíces de f

Llamamos E al cuerpo de descomposición de f sobre K . Se tiene $Gal(f/K) = Gal(E/K)$. Sabemos que E/K es de Galois $\iff E/K$ es normal y separable, luego:

$$f(x) = \alpha(x - \alpha_i) \cdots (x - \alpha_n) \quad \alpha, \alpha_i \in E, \quad \alpha_i \neq \alpha_j \quad i \neq j$$

2 \implies 1.

Supongamos que f no es irreducible.

Entonces $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ con $p(x), q(x) \in K[x]$ no constantes.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad:

$$p(x) = \alpha \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)$$

$$q(x) = \prod_{i=m+1}^n (x - \alpha_i)$$

Dadas $\alpha_i \neq \alpha_j$ raíces de f , $\exists \varphi_{i,j} \in G : \varphi(\alpha_i) = \alpha_j$

Tomo $\varphi_{1,n}$. Se tiene que $\varphi_{1,n}(p) = p$, $\varphi_{1,n}(q) = q$, ya que $\varphi_{1,n}$ conserva K .

Pero $\varphi_{1,n}(p(\alpha(n))) = p(\varphi_{1,n}(\alpha(n))) = p(\alpha(1)) = 0$, lo que es contradicción, ya que α_1 no era raíz de p . Luego f es irreducible.

1 \implies 2.

Si f es irreducible, ninguna de sus raíces puede estar en K , ya que en ese caso $f(x)/(x - \alpha_i)$ estaría en $K[x]$ y eso entra en contradicción con que sea irreducible.

En esas condiciones es claro que $\exists \varphi : K(\alpha_i)/K \longrightarrow K(\alpha_j)/K$ isomorfismo verificando $\varphi(\alpha_i) = \alpha_j$ y podemos extenderlo a un isomorfismo $\sigma : K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow K(\alpha_1, \alpha_n)$ sobre φ .

Por tanto σ es automorfismo sobre E que conserva K y cumple $\sigma(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i) = \alpha_j$

Ejercicio 7.27

Prueba que los subgrupos transitivos de S_4 son los subgrupos siguientes:

1. S_4 , que es normal.
2. A_4 , que es normal.
3. $D_4 = \langle (1234), (13) \rangle$ y todos sus conjugados.
4. $C_4 = \langle (1234) \rangle$, y todos son conjugados.
5. $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ que es normal.

Como consecuencia, si $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ es un polinomio irreducible de grado cuatro, el grupo de Galois de $\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}$ es isomorfo a uno de estos.

1. Es claro que S_4 es transitivo, ya que $E = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23), id\} \subseteq S_4$ y con alguno de estos elementos, dado $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ puedo tomar un $\tau \in E$ verificando $\tau(x) = y$.
2. A_4 es transitivo, ya que dado $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$, si $x \neq y$, siempre me puedo tomar $z, u \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{x, y\}$ con $z \neq u$ y la permutación $\tau = (xy)(zu)$ está en A_4 , y cumple $\tau(x) = y$.
3. D_4 es transitivo porque contiene a C_4 que lo es, ya que uno de sus generadores es (1234) .
4. C_4 es transitivo porque:

$$\tau_0 = (1234)$$

$$\tau_1 = (1234)^2 = (13)(24)$$

$$\tau_2 = (1234)^3 = (1234)(13)(24) = (1432)$$

$$\tau_3 = (1234)^4 = id$$

Estos elementos pertenecen a C_4 y se tiene:

$$\begin{aligned}\tau_0(1) &= 2, \tau_0(2) = 3, \tau_0(3) = 4, \tau_0(4) = 1 \\ \tau_1(1) &= 3, \tau_1(2) = 4, \tau_1(3) = 1, \tau_1(4) = 2 \\ \tau_2(1) &= 4, \tau_2(2) = 1, \tau_2(3) = 2, \tau_2(4) = 3 \\ \tau_3(x) &= x \quad \forall x \in \{1, 2, 3, 4\}\end{aligned}$$

$$1. V = \{\sigma_0 = 1, \sigma_1 = (12)(34), \sigma_2 = (13)(24), \sigma_3 = (14)(23)\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_0(x) &= x \quad \forall x \in \{1, 2, 3, 4\} \\ \sigma_1(1) &= 2, \sigma_1(2) = 1, \sigma_1(3) = 4, \sigma_1(4) = 3 \\ \sigma_2(1) &= 3, \sigma_2(2) = 4, \sigma_2(3) = 1, \sigma_2(4) = 2 \\ \sigma_3(1) &= 4, \sigma_3(2) = 3, \sigma_3(3) = 2, \sigma_3(4) = 1\end{aligned}$$

Veamos por otro lado que el conjugado de un subgrupo transitivo, es transitivo, ya que si tengo $H < S_4$ subgrupo transitivo, $\sigma \in S_4$, $A = \sigma^{-1}H\sigma$, y dados $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Si $\sigma(y) = z \neq y$, tomo $\tau \in H$ verificando $\tau(\sigma(x)) = z$, que existe por ser H transitivo y se tendrá que $\sigma^{-1}\tau\sigma(x) = \sigma^{-1}(z) = y$

Veamos ahora que son los únicos subgrupos transitivos. El orden de un subgrupo $H < G$ debe dividir a $|G|$. Además, un subgrupo transitivo debe tener necesariamente 4 o más elementos, ya que hay 4 posibles mapeos $x \mapsto y$ con $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ y 3 elementos sólo pueden darme 12 mapeos diferentes (4 cada uno).

Los posibles subgrupos, salvo conjugación e isomorfismo, de S_4 son:

Subgrupo
A_4
D_4
S_3
C_4
V
$V_4 = \{1, (12), (34), (12)(34)\}$
$\{1, (123), (132)\}$
$\{1, (12)\}$
$\{1, (12), (34)\}$
$\{1\}$

Claramente, S_3 es intransitivo, puesto que $\sigma(4) = 4, \forall \sigma \in S_3$; V_4 también es intransitivo, puesto que $\sigma(1) \neq 3, \forall \sigma \in V_4$. Y el resto de subgrupos tienen menos de 4 elementos.

Ejercicio 7.28

Sea $f(X) \in K[X]$ un polinomio separable y g un factor irreducible de f .
¿Actúa transitivamente $G = \text{Gal}(f/K)$ sobre las raíces de g ?

Sean u, v raíces de g en E cuerpo de descomposición de f . Entonces como $K[X]/(\text{Irr}(u, K)) = K[X]/(g) \cong K(u)$ y $K[X]/(\text{Irr}(v, K)) = K[X]/(g) \cong K(v)$ dados por $X + (g) \mapsto u$ y $X + (g) \mapsto v$ respectivamente. Entonces existe un isomorfismo $\tau : K(u) \rightarrow K(v)$ verificando $\tau(u) = v$. Este isomorfismo puede extenderse a un automorfismo $\sigma : E \rightarrow E$ y por tanto tenemos un automorfismo que fija K y que lleva una raíz en otra. Pero la elección de las raíces la hemos hecho arbitrariamente.

Ejercicio 7.29

Sea $f(X) = X^4 + bX^2 + c \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio bicuadrático irreducible.

1. Prueba que $\text{Gal}(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q})$ es isomorfo a V , C_4 o D_4
2. Se considera $n, m \in \mathbb{Q}$ tales que n, m, nm no son cuadrados. Prueba que $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})/\mathbb{Q})$ es isomorfo a V .

3. Determina el polinomio $\text{Irr}(\sqrt{n}+\sqrt{m}, \mathbb{Q})$ y prueba que es un polinomio bicuadrático.
4. (Opcional) Prueba que si $\text{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong V$ entonces existen n, m como en (1) verificando $F = \mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$
5. Da ejemplos de polinomios bicuadráticos $f_i \in \mathbb{Q}[X]$ tales que:

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(f_1)/\mathbb{Q}) \cong V, \quad \text{Gal}(\mathbb{Q}(f_2)/\mathbb{Q}) \cong C_4, \quad \text{Gal}(\mathbb{Q}(f_3)/\mathbb{Q}) \cong D_4$$

6. Prueba que si $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$ entonces $\text{Gal}(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}) \cong V$
7. Prueba que si $\sqrt{b^2 - 4c}\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$, entonces $\text{Gal}(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}) \cong C_4$ (estos dos casos son excluyentes, ya que $\sqrt{b^2 - 4c} \notin \mathbb{Q}$).

1. Por el ejercicio de la semana anterior, $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(f))/\mathbb{Q}$ es isomorfo a S_4, A_4, V, C_4 o D_4

Podemos identificar por tanto G con uno de esos subgrupos. Además el polinomio será de la forma $f = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$ y tendrá por raíces $\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$.

Dado $\sigma \in G$ se cumplirá $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha), \sigma(-\beta) = -\sigma(\beta)$. S_4, A_4 no verifican esta propiedad ya que $\sigma = (\alpha, \beta) \in S_4, A_4$, y se tendría por tanto $-\beta = \sigma(-\beta) = -\sigma(\beta) = -\alpha$, que contradiría el hecho del que f es irreducible al tenerse $\alpha = \beta$ y por tanto $f = X^4 - 2\alpha^2 x^2 + \alpha^4 = (x^2 - \alpha^2)^2$ con $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$. Luego solo podemos tener isomorfía a V, C_4 , o D_4

2. Por las hipótesis $\mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$ es cuerpo de descomposición sobre \mathbb{Q} del polinomio

$$(x^2 - n)(x^2 - m) = x^4 - (n + m)x^2 + nm = f$$

Por el apartado 1, $\mathbb{Q}(f)$ es isomorfo a V, C_4 o D_4

Como nm no es cuadrado tenemos $n \neq m$. Luego $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \beta & -\beta \end{pmatrix} \in C_4, D_4$ no puede estar en el grupo de Galois de $\mathbb{Q}(f)$ porque $\sigma(-\alpha) = \beta \neq -\sigma(\alpha) = \alpha$

Forzosamente $Gal(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}) = V$

3. $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ es raíz de $x^4 - 2(n+m)x^2 + (n-m)^2$ ya que:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{m} + \sqrt{n} &\implies x^2 = n+m+2\sqrt{n}\sqrt{m} \implies (x^2-n-m)^2 = 4nm \implies \\ &\implies x^4 - 2(n+m)x^2 + (n-m)^2 = 0 \end{aligned}$$

El polinomio es irreducible ya que es de la forma $(x^2 - (\sqrt{n} + \sqrt{m})^2)(x^2 - a^2)$ y si tuviésemos $a^2 \in \mathbb{Q}$ se tendría $a^2(m+n+2\sqrt{nm}) = (n-m)^2$, es decir:

$$2\sqrt{nm} = \frac{(n-m)^2}{a^2} - m - n$$

Lo que es contradicción porque \sqrt{nm} es irracional.

4.

5. Por el apartado 2, podemos tomar $f_1 = (x^2 - 2)(x^2 - 3) = x^4 - 5x^2 + 6$

Por el apartado 7, podemos tomar $f_2 = x^4 + 5x^2 + 5$, que es irreducible por criterio de Eisenstein y verifica $\sqrt{5^2 - 4 \cdot 5\sqrt{5}} = 5 \in \mathbb{Q}$

Podemos tomar $f_3 = x^4 + 3$, irreducible por criterio de Eisenstein. Expresando $f_3 = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$, como $\sqrt{3}, \sqrt{-12}\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ no estamos ni en el caso 6 ni 7. Estos elementos no quedan fijos por todos los automorfismos de $G = Gal(\mathbb{Q}(f_3)/\mathbb{Q})$, y la única posibilidad entonces es que $G \cong D_4$

6. El polinomio bicuadrático lo podemos expresar de la forma $f = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$ con $\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$ sus raíces.

Como $\sqrt{c} = \alpha\beta \in \mathbb{Q}$ $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \beta & -\beta \end{pmatrix} \in C_4, D_4$ no puede estar en el grupo de Galois de $\mathbb{Q}(f)$ porque $\sigma(\alpha)^2 = \sigma(\alpha\alpha) = \alpha^2 = -\sigma(\alpha)\sigma(-\alpha) = \alpha\beta$. Pero esto implicaría que $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$, y análogamente $\beta^2 \in \mathbb{Q}$ y que f no es irreducible.

Forzosamente $Gal(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}) = V$

7. Como se tiene $\sqrt{b^2 - 4c} \notin \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b^2 - 4c}\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$ se deduce $\sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$ y no estamos en el caso 6.

Si tenemos $f = x^4 + bx^2 + c$ y llamamos $x^2 = y$, tenemos $f = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$ y $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$, por tanto $\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{b^2 - 4c}$, con α, β tomados convenientemente.

Por otro lado es obvio $\alpha^2\beta^2 = c$ mirando las dos expresiones de f .

Como $\sigma = (\alpha\beta)(-\alpha-\beta) \in V, D_4$, y $\omega = \sqrt{c}\sqrt{b^2 - 4c} = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) \in \mathbb{Q}$, tendríamos que $\sigma(\omega) = -\omega$ que es contradicción por estar ω en el cuerpo base, y no poder anularse, porque en ese caso $\sqrt{c} = 0$ o $\sqrt{b^2 - 4c} = 0$ y eso es contradicción con que ninguno es racional y σ automorfismo del grupo de Galois que mantiene el cuerpo base.