Álgebra

Ignacio Cordón Castillo

Ejercicios

Ejercicio 1.12

Demuestra que si un anillo verifica que cada elmento x verifica $x^n = x$ para algún $n \geq 2$ (dependiente de x) entonces todo ideal primo es maximal.

Ejercicio 1.16

Un anillo R se dice anillo de Boole si $x^2 = x$ para todo $x \in R$. Probar que en un anillo de Boole se tiene:

1. $2x = 0$ para todo $x \in R$
2. Cada ideal primo Π es maximal y R/Π es un cuerpo con dos elementos.
3. Cada ideal finitamente generado es principal.

1-

Se tiene:

$$2x^2 = 2x = (2x)^2 = 4x^2$$

Luego $2x^2 = 0$.

2-

Sea Π ideal primo. Entonces R/Π es dominio de integridad. Pero dado $x + \Pi \in R/\Pi$, x no unidad, se tiene $(x + \Pi) + (x + \Pi) = (2x + \Pi) = \Pi$ que por ser dominio de integridad $x \in Pi$. Luego R/Π es cuerpo con dos elementos y Π maximal.

3-

Solución propuesta por M42

Por inducción, $(a, b) = (a + b + ab)$ ya que $a(a + b + ab) = a^2 = a$ y análogo b.

Y el paso de inducción es trivial.

Ejercicio 1.17

En un anillo R sea Σ el conjunto de todos los ideales en los que cada elemento es un divisor de cero. Probar que el conjunto Σ tiene elementos maximales y que cada elemento maximal de Σ es un ideal primo. Por tanto el conjunto de los divisores de cero en R es una unión de ideales primos.

Ejercicio 1.18

Sea K un cuerpo, demuestra que el ideal $(X^3 - Y^2) \subseteq K[X, Y]$ es un ideal primo del anillo $K[X, Y]$.

Se puede probar, con una discusión de casos, escribiendo $X^3 - Y^2$ como producto de dos polinomios en $K[X, Y]$ que no puede ocurrir esta circunstancia, luego $X^3 - Y^2$ es irreducible en $K[X, Y]$ y por tanto, al ser K cuerpo, $(X^3 - Y^2)$ es primo.

Ejercicio 1.25

Sean α y β ideales de un anillo R

1. Demuestra que $\alpha + \beta = R$ si y sólo si $\alpha^n + \beta^n = R$ para cada natural n$
2. Demuestra que si α, β son ideales comaximales propios entonces $\alpha, \beta \subsetneq J(R)$
3. Demuestra que si $\alpha_1, \ldots \alpha_t$ son ideales comaximales dos a dos, entonces $\alpha_1 + (\alpha_2, \cdots \alpha_t)^n = R$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

1-

La implicación hacia la izquierda es trivial tomando $n = 1$.

Hacia la derecha, $n = 1$ obvio

Por inducción, supuesto que se cumple hasta $n \in \mathbb{N}$

Existen $u + v = 1, \quad u \in \alpha^n, v \in \beta^n$. Desarrollando $(u + v)^{n+1} = 1$ es fácil comprobar que pertenece a $\alpha^n + \beta^n$

2-

Supuesto sin pérdida de generalidad que $\alpha \subset J(R)$.

Como existen $x \in \alpha$, $y \in \beta$ verificando $x + y = 1$ por ser comaximales, $y = 1 - x \in U(R)$ por caracterización de radical de Jacobson, luego $\beta = R$, contradicción.

3-

Si son primos dos a dos $\exists x_{i1} \in \alpha_1, y_i \in \alpha_i$ verificando $1 = x_i + y_i$ para todo $i \geq 2$. Luego:

$$\prod_{i=1}^{t}(1 - x_{i1}) = 1 + z = y_1 \cdots y_n \in \alpha_1, \cdots \alpha_t$$

con $z \in \alpha_1$. Luego $1 \in \alpha_1 + (\alpha_1, \cdots \alpha_t)$. Y la caracterización del apartado 1 acaba teniendo en cuenta que:

$$\alpha_1^n + (\alpha_1, \cdots \alpha_t)^n \subset \alpha_1 + (\alpha_1, \cdots \alpha_t)^n$$

Ejercicio 1.24

Sea R un anillo y $\mathcal{N}$ su nilradical. Demostrar que son equivalentes:

1. R tiene exactamente un ideal primo.
2. Cada elemento de R es o una unidad o nilpotente.
3. $R/\mathcal{N}$ es un cuerpo.

$1 \Longrightarrow 2$. Entonces $\mathcal{N}$ es maximal en R, por existir los ideales maximales en un anillo, ser todo ideal maximal primo y ser $Nil(R) = \{x \in \mathbb{R} : \exists n, x^n = 0\} = \bigcap\limits_{\Pi \in Spec(R)} \Pi$ y en particular R es anillo local con maximal $\mathcal{N} \Longleftrightarrow R - \mathcal{N} \subseteq U(R)$ lo que nos da el resultado.

$2 \Longrightarrow 3$. Trivialmente, ya que todo elemento no nulo es invertible.

$3 \Longrightarrow 1$. Los ideales primos de $R/\mathcal{N}$ son de la forma $\alpha + \mathcal{N}$ con α ideal primo de R. Pero como $R/\mathcal{N}$ es cuerpo, se tiene que sus únicos ideales son el total y $\mathcal{N} \equiv 0$. Es decir $\alpha \subseteq \mathcal{N} \subseteq \alpha$ donde el último contenido viene dado por ser $\mathcal{N}\infty = \bigcap\limits_{\Pi \in Spec(R)} \Pi$.

Luego $\alpha = \mathcal{N}$ único ideal primo de R.

Ejercicio 2.2

1. Tomamos:

$$F = X^2Y + XY^2 = XY(X+Y)$$

$$G = XY^4$$

$mcd(F,G) = XY$, pero sin embargo $XY \neq (F,G)$, luego no se verifica la identidad de Bezout. En general, dados dos polinomios cualesquiera, dicha identidad no se verifica

1. Queda como ejercicio.

TODO Ejercicio 2.15

Ejercicio 2.16

Sea $\leq$ un orden en $\mathbb{N}^n$ que es total y compatible. Haciendo usod e la teoría de ideales monoiales, probad que $\leq$ es un buen orden sii es monótono.

Hacia la izquierda, como $\leq$ es monomial, entonces es buen orden.

Hacia la derecha, si 0 no fuese mínimo, $\exists x \in \mathbb{N}^n$ verificando $x < 0$. Como el orden es compatible tendríamos que $x + x < x$, lo que es contradicción.

Ejercicio 2.17

Sean $I, J \subset K[X_1, \ldots X_n]$ ideales monomiales generados por $\{A_1, \ldots A_s\}$ y $\{B_1 \ldots B_t\}$, A_i, B_j monomios:

1. Demuestra que $I \cap J$ es un ideal monomial.

2. Prueba que $\{M_{ij:i=1\ldots s,j=1\ldots t}\}$ donde $M_{ij}=mcm(A_i,B_j)$ es un sistema de generadores de $I\cap J$

---

1. Se tiene $F\in I$ sii todos los monomios de $F∈ I4.

Además $I\cap J=(F_1,\ldots F_r)$, con $F_i=\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}R_ij$ monomios.

Si $F_i\in I\cap J$, entonces $F_i\in I$ y $F_i\in J$. Lueg $R_{ij}\in I$, $R_{ij}\in J$ y por tanto $R_{ij}\in I\cap J$

Por tanto $I\cap J=(R_{ij}:i=1\ldots r,1\leq j\leq n_i)$, luego $I\cap J$ es monomial.

1. Es claro que $(M_{ij})\subset I\cap J$

Para el otro contenido, si $X^\alpha\in I\cap J$ entonces $X\alpha\in I\implies X^\alpha=FA_i$ y análogo para $X^\alpha\in J$, luego $M_{ij}|X^\alpha$.

1. $I=(X=A_1,Y^2Z=A_2,YZ^2=A_3)$, y por otor lado $J=(X^3YZ=B_1,X^2Y=B_2,Y^2Z^3=B_3)$

Calculando $M_{11}=mcm(A_1,B_1)$, $M_{12}=X^2Y$.

Al final $I\cap J=(X^2Y,Y^2Z^3)$

Ejercicio 2.18

Sean I_1,I_2 ideales monomiales con sistema de generadores G_1,G_2 resp. Demuestra que:

1.I_1+I_2 está generado por $G_1\cup G_2$ 2.I_1I_2 está generado por $\{HL:H\in G_1,L\in G_2\}$

Hay que comprobar que si $I_1 = (G_1, \dots G_k)$, $I_2 = (H_1, \dots H_s)$ entonces:

$$I_1 + I_2 = (G_1, \dots G_k, H_1, \dots H_s)$$
$$I_1 I_2 = (G_i H_j : i = 1 \dots k, j = 1 \dots s)$$

Ejercicio 2.21

Demostrar que si I, J son dos ideales monomiales entonces $(I : J)$ es un ideal monomial.

Definición. *Llamo soporte de $F \in K[X_1, \dots X_n]$ a $Sop(F) = \{X^{\alpha : \alpha \in N(F)\}}$*

Dado $F \in (I : J) \implies FJ \subset I$. En particular $FX^\beta \forall X^\beta \in J$

Esto implica que $X\alpha X\beta \in I \forall \alpha \in N(F) X^\alpha \in J$. Entonces $X\alpha J \subset I \implies X^\alpha \in (I : J) \forall \alpha \in N(F)$. Luego $(I : J)$ es monomial.