

Álgebra

Ignacio Cordón Castillo



Álgebra conmutativa

Resumen

Ejercicios

Ejercicio 1.17

En un anillo R sea Σ el conjunto de todos los ideales en los que cada elemento es un divisor de cero. Probar que el conjunto Σ tiene elementos maximales y que cada elemento maximal de Σ es un ideal primo. Por tanto el conjunto de los divisores de cero en R es una unión de ideales primos.

Ejercicio 1.18

Sea K un cuerpo, demuestra que el ideal $(X^3 - Y^2) \subseteq K[X, Y]$ es un ideal primo del anillo $K[X, Y]$.

Se puede probar, con una discusión de casos, escribiendo $X^3 - Y^2$ como producto de dos polinomios en $K[X, Y]$ que no puede ocurrir esta circunstancia, luego $X^3 - Y^2$ es irreducible en $K[X, Y]$ y por tanto, al ser K cuerpo, $(X^3 - Y^2)$ es primo.

Ejercicio 1.25

Sean α y β ideales de un anillo R

1. Demuestra que $\alpha + \beta = R$ si y sólo si $\alpha^n + \beta^n = R$ para cada natural n
 2. Demuestra que si α, β son ideales comaximales propios entonces $\alpha, \beta \subsetneq J(R)$
 3. Demuestra que si $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ son ideales comaximales dos a dos, entonces $\alpha_1 + (\alpha_2 \cdots \alpha_t)^n = R$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
-

1-

La implicación hacia la izquierda es trivial tomando $n = 1$.

Hacia la derecha, $n = 1$ obvio

Por inducción, supuesto que se cumple hasta $n \in \mathbb{N}$

Existen $u + v = 1$, $u \in \alpha^n, v \in \beta^n$. Desarrollando $(u + v)^{n+1} = 1$ es fácil comprobar que pertenece a $\alpha^n + \beta^n$

2-

Supuesto sin pérdida de generalidad que $\alpha \subset J(R)$.

Como existen $x \in \alpha, y \in \beta$ verificando $x + y = 1$ por ser comaximales, $y = 1 - x \in U(R)$ por caracterización de radical de Jacobson, luego $\beta = R$, contradicción.

3-

Si son primos dos a dos $\exists x_{i1} \in \alpha_1, y_i \in \alpha_i$ verificando $1 = x_i + y_i$ para todo $i \geq 2$. Luego:

$$\prod_{i=1}^t (1 - x_{i1}) = 1 + z = y_1 \cdots y_t \in \alpha_1, \cdots \alpha_t$$

con $z \in \alpha_1$. Luego $1 \in \alpha_1 + (\alpha_1, \cdots \alpha_t)$. Y la caracterización del apartado 1 acaba teniendo en cuenta que:

$$\alpha_1^n + (\alpha_1, \cdots \alpha_t)^n \subset \alpha_1 + (\alpha_1, \cdots \alpha_t)^n$$

Ejercicio 1.24

Sea R un anillo y \mathcal{N} su nilradical. Demostrar que son equivalentes:

1. R tiene exactamente un ideal primo.
2. Cada elemento de R es o una unidad o nilpotente.
3. R/\mathcal{N} es un cuerpo.

$1 \implies 2$. Entonces \mathcal{N} es maximal en R , por existir los ideales maximales en un anillo, ser todo ideal maximal primo y ser $\text{Nil}(R) = \{x \in R : \exists n, x^n = 0\} = \bigcap_{\Pi \in \text{Spec}(R)} \Pi$ y en particular R es anillo local con maximal $\mathcal{N} \iff R - \mathcal{N} \subseteq U(R)$ lo que nos da el resultado.

$2 \implies 3$. Trivialmente, ya que todo elemento no nulo es invertible.

$3 \implies 1$. Los ideales primos de R/\mathcal{N} son de la forma $\alpha + \mathcal{N}$ con α ideal primo de R . Pero como R/\mathcal{N} es cuerpo, se tiene que sus únicos ideales son el total y $\mathcal{N} \equiv 0$. Es decir $\alpha \subseteq \mathcal{N} \subseteq \alpha$ donde el último contenido viene dado por ser $\mathcal{N}^\infty = \bigcap_{\Pi \in \text{Spec}(R)} \Pi$.

Luego $\alpha = \mathcal{N}$ único ideal primo de R .

Resumen de Álgebra III

Proposición. *El elemento α es algebraico sobre F si y solo si la extensión $F(\alpha)/F$ es finita.*

Proposición. *Si la extensión K/F es finita, entonces es algebraica*

Definición. *La extensión K/F es finita si y solo si K está generado por un número finito de elementos algebraicos sobre F . De hecho, una extensión generada por elementos de grado n_1, \dots, n_k tiene grado menor o igual $n_1 n_2 \dots n_k$*

Teorema. *K algebraico sobre F y L algebraico sobre K entonces L es algebraico sobre F*

Cuerpos de descomposición

Definición. *Sea K cuerpo, E/K extensión. $f(X) \in K[X]$ descompone en E si en $E[X]$ se factoriza como:*

$$f(X) = a(X - a_1) \cdots (X - a_n), \quad a \in K, \quad a_1, \dots, a_n \in E$$

Cada $(X - a_i)$ es un factor lineal.

Si no existe F verificando $K \subseteq F \subseteq E$ y que $f(X)$ descompone en $F[X]$, $E[X]$ se llama cuerpo de descomposición.

Se deduce que $E = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donde α_i son raíces de $f(X)$ en $E[X]$. Por tanto todo polinomio $f(X) \in K[X]$ tiene un cuerpo de descomposición sobre K

Proposición. *Un cuerpo de descomposición de un polinomio de grado n sobre F es de grado como mucho $n!$ sobre F . Si el grado es $n!$ entonces el polinomio es irreducible. El recíproco no se verifica.*