Ecuación de Vlasov-Poisson. Aproximación discreta

AUTOR

Ignacio Cordón

UNIVERSITAS GRANATENSIS · 1531 ·

PLUS ULTRA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

17 de enero de 2018

Contenido

Introducción

Modelo del plasma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m}(E + v \times B) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \qquad (1)$$

donde:

- $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ es una función de densidad asociada a la probabilidad de tener una partícula con posición $x \in \mathbb{R}^3$ y velocidad $v \in \mathbb{R}^3$ en un instante de tiempo t.
- E representa el campo eléctrico.
- B representa el campo de inducción magnética.
- $F(x,t) = \frac{q}{m}(E + v \times B)$ es la fuerza de Lorentz.

Ecuación de Vlasov-Poisson

Bajo ciertas condiciones ($B \sim 0$, y existe U potencial tal que $E = -\nabla U$, verificando que es solución de la ecuación de Poisson $-\Delta U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$) nuestro modelo se reduce a la ecuación de Vlasov-Poisson, que modela el comportamiento de partículas sometidas a un campo eléctrico sin colisiones. Adimensionalizando, dicha ecuación queda como:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} + v\nabla_x f + F(x,t)\cdot\nabla_v f = 0 \\
F(x,t) = -\nabla_x U(x,t) \\
U(x,t) = \gamma \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sigma(y,t)}{|x-y|} dy \\
\sigma(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,v,t) dv
\end{aligned}
\tag{2}
$$

donde $\gamma = -1$ en el caso gravitacional y $\gamma = 1$ en el caso Coulombiano.
El problema de Cauchy es (2) con condiciones inicial $f(x,v,0) = f_0(x,v)$.

f_0 esféricamente simétrica

Simetría esférica

Definición

$f_0 : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ se dice esféricamente simétrica si y solo sii:

$$f_0(x, v) = f_0(Ax, Av)$$

donde $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ arbitrario y $A \in O(n)$ es una isometría arbitraria.

Proposición

$f_0 : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ es esféricamente simétrica si y solo podemos encontrar

$$\phi_0 : [0, +\infty[\times[0, +\infty[\times[0, \pi] \to \mathbb{R} \qquad \text{con } f_0(x, v) = \phi_0(|x|, |v|, \sphericalangle(x, v))$$

Proposición

Dada $f_0(x, v) = \phi_0(|x|, |v|, \sphericalangle(x, v))$ donde $\phi_0 \in C_0^1(]0, +\infty[^2 \times]0, +\pi[)$, con $\phi_0 \geq 0$. Entonces la solución de Vlasov-Poisson con condición inicial f_0 es esféricamente simétrica:

$$f(x, v, t) = f(Ax, Av, t) \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^3 \quad \forall A \in O(3)$$

Notaremos a partir de ahora $r = |x|, u = |v|, \alpha = \sphericalangle(x, v) = cos^{-1}\left(\frac{x \cdot v}{|x||v|}\right)$.

Vlassov-Poisson en (r, u, α)

Proposición

Sea $\phi_0 \in C_0^1(]0,+\infty[^2 \times]0,+\pi[)$ con $\phi_0 \geq 0$ y $f_0 = \phi_0$ condición inicial de la ecuación de Vlasov-Poisson. Entonces se cumple, para (2):

$$\sigma(x,t) = \sigma(|x|,t) := \rho(r,t)$$
$$\rho(r,t) = 2\pi \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \phi(r,u,\alpha,t) sen(\alpha) d\alpha \right) u^2 du$$
$$U(x,t) = 4\pi\gamma \int_0^{+\infty} \frac{\rho(s,t)}{\max(r,s)} s^2 ds$$
$$F(x,t) = \gamma M(r,t) r^{-3} x$$

donde:

$$M(r,t) = \int_{\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\}} \sigma(x,t) dx = 4\pi \int_0^r \rho(s,t) s^2 ds$$
$$M = \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(x,t) dx = 4\pi \int_0^{+\infty} \rho(s,t) s^2 ds$$

Vlassov-Poisson en (r, u, α), curvas características

$f_0 = \phi_0 \in C_0^1(]0, +\infty[^2 \times]0, \pi[)$, $\phi_0 \geq 0$, entonces f radialmente esférica:

$$f(x, v, t) = \phi(|x|, |v|, \sphericalangle(x, v)) = \phi(r, u, \alpha)$$

y se deduce:

$$\partial_t \phi(r, u, \alpha) + v \nabla_x \phi(r, u, \alpha) + F(x, t) \cdot \nabla_v \phi(r, u, \alpha) = 0$$

$$\partial_t \phi + \underbrace{\begin{pmatrix} cos(\alpha) u \\ \gamma M(r, t) r^{-2} cos(\alpha) \\ (-\gamma M(r, t) r^{-2} u^{-1} - u r^{-1}) \cdot sen(\alpha) \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}(r, u, \alpha, t)} \cdot \nabla_{(r, u, \alpha)} \phi = 0 \qquad (3)$$

(3) tiene curvas características $X(t; 0, (r, u, \alpha)) = \begin{pmatrix} z(r, u, \alpha, t) \\ q(r, u, \alpha, t) \\ \theta(r, u, \alpha, t) \end{pmatrix}$ con:

$$\partial_t X(t; 0, (r, u, \alpha)) = \mathcal{A}\big(X(t; 0(r, u, \alpha)), t\big) = \mathcal{A}\big(z, q, \theta, t\big) \qquad (4)$$

Vlassov-Poisson en (r, u, α)

Proposición

$zq \cdot sen(\theta)$ es independiente de t y z es solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} z_{tt} - (ru \cdot sen\alpha)^2 \cdot z^{-3} - \gamma M(z,t) z^{-2} &= 0 \\ z(r,u,\alpha,0) &= r \\ z_t(r,u,\alpha,0) &= u \cdot cos(\alpha) \end{aligned} \tag{5}$$

Proposición

Llamando $z = z(t; 0, r, u, \alpha), q = q(t; 0, r, u, \alpha), \theta = \theta(t; 0, r, u, \alpha)$, tenemos que para todo $\varphi \in L^\infty(]0, +\infty[^2 \times]0, \pi[)$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(r,u,\alpha) \cdot \phi(r,u,\alpha,t) dv dx = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(z,q,\theta) \cdot \phi_0(r,u,\alpha,t) dv dx$$

En particular:

$$M = 4\pi \int_0^\infty \rho(s,t) s^2 ds = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \phi(r,u,\alpha,t) dv dx = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_0(r,u,\alpha,t) dv dx$$

Vlassov-Poisson en (r, u, α)

Llamando $\mathcal{C} \subseteq]0, +\infty[^2 \times]0, \pi[$ al soporte de ϕ_0, puede verse fácilmente que existen $r_0, R_0, l_0, L_0, U_0, \rho_0 > 0$, dependientes sólo de ϕ_0, verificando que para todo $(r, u, \alpha, t) \in \mathcal{C} \times]0, +\infty[$ se cumple:

$$\begin{aligned} r_0 \leq z(r, u, \alpha, t) &\leq R_0 + U_0 t \\ l_o \leq ru &\leq L_0 \\ l_0 \leq ru \cdot sen(\alpha) = zq \cdot sen(\theta) &\leq L_0 \\ q(r, u, \alpha, t) &\leq U_0 \\ \rho(r, t) &\leq \rho_0 \end{aligned} \tag{6}$$

Lema (Desigualdad de Gronwall)

Sean $\alpha, \beta \geq 0, u$ funciones continuas, con α no decreciente, verificando para todo $t \in I$, siendo I es un intervalo de tipo $[a, b], [a, b[$ o $[a, +\infty[$, se cumple:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) u(s)$$

Entonces: $u(t) \leq \alpha(t) \cdot exp\left\{\int_a^t \beta(s) ds\right\}$ para todo $t \in I$.

z, z' son lipschitzianas en fase

Proposición

Existe una función creciente $K(t) \geq 1$ dependiente sólo de ϕ_0 verificando que para todo $c_1 = (r_1, u_1, \alpha_1)$, $c_2 = (r_2, u_2, \alpha_2) \in \mathcal{C}$ y para todo $t \geq 0$:

$$|z(c_1, t) - z(c_2, t)| + |z_t(c_1, t) - z_t(c_2, t)| \leq K(t)|c_1 - c_2|$$

Sketch de la prueba.

- Definir $Q(t) = \sup\{|z_1(s) - z_2(s)| + |z_1'(s) - z_2'(s)| : 0 \leq s \leq t\}$
- $\left|z''(c_1, t) - z''(c_2, t)\right| \leq K|c_1 - c_2| + K(t)\left|z(c_1, t) - z(c_2, t)\right|$
- $|z(c_1, t) - z(c_2, t)| + |z'(c_1, t) - z'(c_2, t)| \leq K_1(t)|c_1 - c_2| + K_1(t) \int_0^t Q(s) ds$
- Se deduce por Gronwall: $Q(t) \leq K_2(t)|c_1 - c_2|$

$\square$

Modelo discreto

Suposiciones iniciales

Asumamos que C, soporte de ϕ_0, puede escribirse como $C = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$ donde S_i son conexos, y que $\delta = \max_{i=1,\dots,N} diam(S_i) \leq \{1, r_0\}$.
Fijamos $c_i = (r_i, u_i, \alpha_i) \in S_i$ y llamamos:

- $L_i = r_i u_i \cdot sen(\alpha_i)$
- $M_i = \int_{S_i} \phi_0(r, u, \alpha) dv dx$
- $z_i(t) = z(c_i, t)$
- $\xi(r) = \min\left(\frac{r}{\delta}, 1\right) \mathbb{1}_{]0,\infty[}$

z_i cumpliría la ecuación (5), luego:

$$z_i'' - L_i^2 z_i^{-3} - \gamma M(z_i, t) z_i^{-2} = 0$$
$$z_i(0) = r_i \qquad z_i'(0) = u_i \cdot cos(\alpha_i)$$

Intuitivamente, las siguientes ecuaciones diferenciales deberían aproximar z_i:

$$\tilde{z}_i'' - L_i^2 \tilde{z}_i^{-3} - \gamma \widetilde{M}(\tilde{z}_i, t) \tilde{z}_i^{-2} = 0$$
$$\tilde{z}_i(0) = r_i \qquad \tilde{z}_i'(0) = u_i \cdot cos(\alpha_i)$$
$$\widetilde{M}(r, t) = \sum_{i=1}^{N} M_i \xi(r - \tilde{z}_i(t)) \tag{7}$$

Aproximación numérica

Puede tomarse la solución maximal (definida en $[0, T[$), verificando:

$$\frac{1}{2} r_0 \leq \widetilde{z}_i(t) \leq 2(R_0 + U_0 t) \tag{8}$$

Teorema

Existe una función $\widetilde{K}$ (dependiente sólo de ϕ_0) verificando que para $i = 1, \ldots, N$, para todo $t \in [0, T[$:

$$\begin{aligned} |z(c,t) - \widetilde{z}_i(t)| + |z'(c,t) - \widetilde{z}_i'(t)| &\leq \widetilde{K}(t)\delta \qquad \forall c = (r, u, \alpha) \in S_i \\ |M(s,t) - \widetilde{M}(s,t)| &\leq \widetilde{K}(t)\delta \qquad \forall s \geq 0 \end{aligned}$$

Además $T \to +\infty$ cuando $\delta \to 0$.

Demostración del resultado principal

Sketch de la prueba.

- Definir $\widetilde{\widetilde{M}}(r,t) = \sum_{i=1}^{N} M_i \xi(r - z_i(t))$.
- Probar $|M(r,t) - \widetilde{\widetilde{M}}(r,t)| \leq \widetilde{K}_1(t)\delta$ para $r \in z(C,t)$, después para $r \geq 0$.
- Probar $|\widetilde{M}(r,t) - \widetilde{\widetilde{M}}(r,t)| \leq \widetilde{K}_2(t) ||z_{|[0,t]} - \widetilde{z}_{|[0,t]}||_\infty + \widetilde{K}_2(t)\delta \quad \forall r,t \geq 0$.
- Por des. triangular: $|M(r,t) - \widetilde{M}(r,t)| \leq \widetilde{K}_3(t) ||z_{|[0,t]} - \widetilde{z}_{|[0,t]}||_\infty + \widetilde{K}_3(t)\delta$.
- Acotar $|z(c,t) - \widetilde{z}_i(t)| + |z'(c,t) - \widetilde{z}'_i(t)| \leq \widetilde{K}_4(t)\delta$.
- Deducir $||z_{|[0,t]} - \widetilde{z}_{|[0,t]}||_\infty \leq \widetilde{K}_4(t)\delta$ y $|M(r,t) - \widetilde{M}(r,t)| \leq \widetilde{K}_5(t)\delta$.

$\square$

Definición de la energía

Proposición

La energía de la ecuación de Vlasov-Poisson se define como la constante:

$$\begin{aligned}E &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,v,t)v^2 dvdx + \int_{\mathbb{R}^3}\sigma(x,t)U(x,t)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_0(r,u,\alpha)\Big\{z_t^2(r,u,\alpha,t) + \frac{ru\cdot sen(\alpha)^2}{z^2(r,u,\alpha,t)}\\ &+\gamma\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\phi_0(r',u',\alpha')}{\text{máx}(z(r,u,\alpha,t),z(r',u',\alpha',t))}dv'dx'\Big\}dvdx\end{aligned}$$

Corolario

Existe una función creciente $\tilde{\tilde{K}}(t)$ (dependiente solamente de ϕ_0) verificando que para todo $0 \leq t < T$:

$$\left| E - \sum_{i=1}^{N} M_i\Big\{\tilde{z}_i'(t)^2 + L_i^2\tilde{z}_i'(t)^{-2} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma M_j}{\text{máx}(\tilde{z}_i(t),\tilde{z}_j(t))}\Big\}\right| \leq \tilde{\tilde{K}}(t)\delta$$

Referencias

SHAEFFER, JACK.
Discrete approximation of the Poisson-Vlasov system.
Quaterly of applied mathematics
Volume XLV, Number 1, April 1987, p. 59-73

BATT, JÜRGEN.
Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics
Journal of Differential Equations
Volume 25, 1977, p. 342-364

SONNENDRÜCKER, ERIC.
Numerical methods for the Vlasov equation. Lecture Notes.
Instituto Max-Plank.