

Elipse

Sergio Padilla López Marina Estévez Almenzar
Ignacio Córdón Castillo

22 de noviembre de 2016

1. Hipercuádricas

Un polinomio de segundo grado en \mathbb{R}^n se define como:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c$$

donde $a_{i,j}, b_i, c \in \mathbb{R}$ y algún $a_{ij} \neq 0, x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$

Se llama **hipercuádrica** asociada a Q al conjunto:

$$\mathbb{C}_Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 0\}$$

\mathbb{C}_Q puede ser vacío, por ejemplo en el caso $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$

Cuando tenemos una hipercuádrica en \mathbb{R}^2 , recibe el nombre de **cónica**. Las distintas cónicas que existen se pueden obtener intersecando el cono $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 c^2 = 0 \right\}$ con un plano afín.

Cuando tenemos una hipercuádrica en \mathbb{R}^3 , recibe el nombre de **cuádrica**.

Equivalentemente, podemos escribir una hipercuádrica de la forma $Q(x) = x^t \cdot M \cdot x + b^t \cdot x + c$

$$\text{Donde } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = (b_1, \dots, b_n)^t, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^t$$

y también de la forma $Q(x) = (1, x^t) \cdot \widetilde{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

$$\text{Donde } \widetilde{M} = \begin{pmatrix} c & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & M \end{pmatrix}$$

Decimos que \mathbb{C}_Q es degenerada si $\det(\widetilde{M}) = 0$

2. Elipse

Dados dos puntos $F_1, F_2, a > 0$ definimos una elipse como

$$E = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a\}$$

Cuando tenemos una elipse E' centrada en $(0, 0)$ cuyos ejes mayor y menor coinciden con los ejes cartesianos, tendremos que los focos se encuentran en 2 puntos sobre el eje Y , a saber $(-\lambda, 0), (\lambda, 0)$

Así, sea $p = (x, y) \in E'$

$$\begin{aligned}
d(p, F_1) &= 2a - d(p, F_2) \Leftrightarrow \\
d(p, F_1)^2 &= (2a - d(p, F_2))^2 \Leftrightarrow \\
(x + \lambda)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x - \lambda)^2 + y^2 - 4a \cdot d(p, F_2) \Leftrightarrow \\
4x\lambda &= 4a^2 - 4a \cdot d(p, F_2) \Leftrightarrow \\
x\lambda &= a^2 - a \cdot d(p, F_2) \Leftrightarrow \\
(a^2 - x\lambda)^2 &= (a \cdot d(p, F_2))^2 \Leftrightarrow \\
a^4 - 2a^2\lambda x + \lambda^2 x^2 &= a^2((x - \lambda)^2 + y^2) \Leftrightarrow \\
a^4 + \lambda^2 x^2 &= a^2 x^2 + a^2 \lambda^2 + a^2 y^2 \Leftrightarrow \\
(a^2 - \lambda^2)x^2 + a^2 \cdot y^2 &= a^2(a^2 - \lambda^2)
\end{aligned}$$

Llamando $b^2 = a^2 - \lambda^2$:

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2.1. Notación

Sea $Q \in \mathbb{P}_2[x]$. Denotamos:

- λ_i a los valores propios de $M \forall i = 1, \dots, n$
- $\tilde{\lambda}_i$ a los valores propios de $\tilde{M} \forall i = 1, \dots, n$
- $r = \text{rg}(M) = \text{n}^\circ$ de λ_i no nulos
- $\tilde{r} = \text{rg}(\tilde{M}) = \text{n}^\circ$ de $\tilde{\lambda}_i$ no nulos
- $|\Delta| = |\text{n}^\circ \text{ de } \lambda_i^+ - \text{n}^\circ \text{ de } \lambda_i^-|$
- $|\tilde{\Delta}| = |\text{n}^\circ \text{ de } \tilde{\lambda}_i^+ - \text{n}^\circ \text{ de } \tilde{\lambda}_i^-|$
- $\Lambda_Q = \{x \in \mathbb{R}^n / G_Q(x) = 0, G_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ con } G_Q(x) = Mx + \frac{b}{2}\}$

2.2. Definición de equivalencia euclídea

Sean Q_1 y $Q_2 \in \mathbb{P}_2[x]$. Diremos que Q_1 y Q_2 son euclídeamente equivalentes ($Q_1 \approx Q_2$) si $\exists f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ movimiento rígido y $\exists \alpha \neq 0$ tal que $Q_2 = \alpha(Q_1 \circ f)$. Así, $\mathbb{C}_{Q_2} = f^{-1}(\mathbb{C}_{Q_1})$.

2.3. Lema

Sean $Q_1, Q_2 \in \mathbb{P}_2[x]$. Si $Q_1 \approx Q_2$ entonces se cumple:

- $r_1 = r_2$
- $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_2$
- $|\Delta_1| = |\Delta_2|$
- $|\tilde{\Delta}_1| = |\tilde{\Delta}_2|$

2.4. Teorema de las hipercuádricas reducidas

Sea $Q \in \mathbb{P}_2[x]$. Entonces existe $Q' \in \mathbb{P}_2[x]$ tal que $Q \approx Q'$. El polinomio Q' es la expresión reducida euclídea para Q y viene dada de la siguiente forma:

1. Si $\Lambda_Q \neq \emptyset$ y $\Lambda_Q \subseteq C_Q$, entonces: $Q'(x) = x_1^2 + \dots + \alpha_s x_s^2 - \alpha_{s+1} x_{s+1}^2 - \dots - \alpha_r x_r^2$ donde $r = rg(M)$, $\alpha_i > 0 \forall i$ y $1 \leq s \leq r$. Se cumple también que $s \geq r - s$, $1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_s$ y $\alpha_{s+1} \leq \dots \leq \alpha_r$. En este caso, $\tilde{r} = r$, $|\tilde{\Delta}| = |\Delta| = 2s - r$.
2. Si $\Lambda_Q \neq \emptyset$ y $\Lambda_Q \cap C_Q = \emptyset$, entonces: $Q'(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_s x_s^2 - \alpha_{s+1} x_{s+1}^2 - \dots - \alpha_r x_r^2 \pm 1$ donde $r = rg(M)$, $\alpha_i > 0 \forall i \in 1, \dots, r$ y $1 \leq s \leq r$. Se cumple también que $s \geq r - s$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_s$ y $\alpha_{s+1} \leq \dots \leq \alpha_r$. En este caso, $\tilde{r} = r + 1$, $|\Delta| = 2s - r$, $|\tilde{\Delta}| = \begin{cases} 2s - r + 1 \\ |2s - r - 1| \end{cases}$
3. Si $\Lambda_Q = \emptyset$, entonces: $Q'(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_s x_s^2 - \alpha_{s+1} x_{s+1}^2 - \dots - \alpha_r x_r^2 - x_n$ donde $r = rg(M)$, $\alpha_i > 0 \forall i \in 1, \dots, r$ y $1 \leq s \leq r$. Se cumple también que $s \geq r - s$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_s$ y $\alpha_{s+1} \leq \dots \leq \alpha_r$. En este caso, $\tilde{r} = r + 2$, $|\Delta| = |\tilde{\Delta}| = 2s - r$

2.5. Tabla de cónicas reducidas

Ecuación Euclídea	r	\tilde{r}	$ \Delta $	$ \tilde{\Delta} $	Tipo
$x^2 = 0$	1	1	1	1	Recta doble
$\lambda x^2 + 1 = 0$	1	2	1	2	\emptyset , o bien, dos rectas paralelas
$\lambda x^2 - 1 = 0$	1	2	1	0	Dos rectas paralelas
$\lambda x^2 - y = 0$	1	3	1	1	Parábola
$x^2 + \lambda y^2 = 0$	2	2	2	2	Punto
$x^2 - \lambda y^2 = 0$	2	2	0	0	Dos rectas secantes
$\lambda x^2 - \mu y^2 + 1 = 0$	2	3	2	3	\emptyset (Elipse imaginaria)
$\lambda x^2 + \mu y^2 - 1 = 0$	2	3	2	1	Elipse
$\lambda x^2 - \mu y^2 \pm 1 = 0$	2	3	0	1	Hipérbola

2.6. Corolario

Las elipses, parábolas e hipérbolas son las únicas cónicas no degeneradas.

3. Ecuación ejercicio

Sea

$$|z| + \langle z, e \rangle = k,$$

donde $z, e \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$, desarrollando la ecuación, tomando $z = (x, y)$ y $e = (e_1, e_2)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} + \langle (x, y), (e_1, e_2) \rangle &= k \\ \sqrt{x^2 + y^2} + xe_1 + ye_2 &= k \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= k - xe_1 - ye_2 \\ x^2 + y^2 &= (k - xe_1 - ye_2)^2 \\ (1 - e_1^2)x^2 + (1 - e_2^2)y^2 - 2e_1e_2xy + 2ke_2y + 2ke_1x - k^2 &= 0\end{aligned}$$

luego, estamos ante la ecuación de una cónica. Sabemos que las cónicas nos quedan definidas por una matriz simétrica, \widetilde{M} , que queda definida como:

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} -k^2 & ke_1 & ke_2 \\ ke_1 & (1 - e_1^2) & -e_1e_2 \\ ke_2 & -e_1e_2 & (1 - e_2^2) \end{pmatrix}$$

Además tenemos la matriz M definida como:

$$M = \begin{pmatrix} (1 - e_1^2) & -e_1e_2 \\ -e_1e_2 & (1 - e_2^2) \end{pmatrix}$$

Observando la tabla de cónicas, y en virtud del corolario posterior, para que la ecuación defina una elipse, necesitamos que sea no degenerada ($|\widetilde{M}| \neq 0$) y además como $r=2$ y $\Delta=2$, todos los λ_i tienen el mismo signo ($|M| > 0$).

Veamos que condiciones tiene que cumplir la ecuación para que $|M| > 0$:

$$\begin{aligned}|M| &= (1 - e_1^2)(1 - e_2^2) - e_1^2e_2^2 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - e_2^2 - e_1^2 + e_1^2e_2^2 - e_1^2e_2^2 &> 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 > e_2^2 - e_1^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 > \|e\|^2\end{aligned}$$

Por tanto, para que la ecuación sea de tipo elipse, e tiene que cumplir $\|e\| < 1$, veamos que condiciones tiene que cumplir la ecuación para que $|\widetilde{M}| \neq 0$:

$$|\widetilde{M}| = \begin{vmatrix} -k^2 & ke_1 & ke_2 \\ ke_1 & (1 - e_1^2) & -e_1e_2 \\ ke_2 & -e_1e_2 & (1 - e_2^2) \end{vmatrix} = -k^2$$

entonces,

$$|\widetilde{M}| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$$

Caben 2 posibilidades: o tenemos una elipse, o el vacío (deduciéndolo de la tabla anterior).

Si $k < 0$, por Cauchy-Schwarz: $|z| + \langle z, e \rangle \geq |z| - |z||e| \geq 0$, y no habría solución real (realmente estamos ante una elipse en los complejos).

Si $k \geq 0$ veamos ahora que suponiendo $y = 0$ y veamos que $\exists x$ tal que (x, y) cumple la ecuación (luego no sería vacía): Buscamos un x tal que $(1 - e_1^2)x^2 + 2ke_1x - k^2 = 0$, estamos ante una ecuación de segundo grado, luego tenemos dos soluciones que son:

$$x_1 = \frac{k}{e_1 + 1} \quad x_2 = \frac{k}{e_1 - 1}$$

Luego, tanto $(x_1, 0)$ como $(x_2, 0)$ son soluciones de la ecuación.

Resumiendo, la ecuación define una elipse $\Leftrightarrow \begin{cases} \|e\| < 1 \\ k \geq 0 \end{cases}$