Elipse

Sergio Padilla López Marina Estévez Almenzar
Ignacio Cordón Castillo

13 de octubre de 2016

1. Definición

Dados dos puntos $F_1, F_2, a > 0$ definimos una elipse como

$$E = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a \right\}$$

2. Elipse con un foco en el 0

Como $d(x, y) = |x - y|$, y un foco está en el 0, y el otro en $A \in \mathbb{R}^2$:

$$|x| + |A - x| = c \Leftrightarrow$$

$$|A - x| = c - |x| \Leftrightarrow$$

$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2 \Leftrightarrow$$

$$|A|^2 + |x|^2 - 2 < A, x >= c^2 + |x|^2 - 2c|x|$$

Dividiendo por $2c > 0$ en ambos lados:

$$|x| + \left\langle -\frac{1}{c}A, x \right\rangle = \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \qquad (*)$$

Llamando:

$$e := -\frac{1}{c}A, \qquad k := \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \qquad (**)$$

Por la desigualdad triangular, $|A| < |x| + |A - x| = c$, y deducimos que

$$|e| < 1, \qquad k > 0,$$

y $(*)$ se reescribe como:

$$|x| + < e, x >= k$$

■

Vamos a ver ahora que:

$$|x| + < e, x >= k, \qquad e \in \mathbb{R}^2, |e| < 1, \quad k > 0$$

representa una elipse, con un foco centrado en el $(0, 0)$.

Es decir, veamos que $\exists A \in \mathbb{R}^2, c > 0$ verificando $d(x, 0) + d(x, A) = c$. En el proceso inverso teníamos $(**)$. Intentamos buscar $A \in \mathbb{R}^2$ y $c > 0$ que verifiquen:

$$A = -ce$$
$$c^2 - 2ck - |A|^2 = 0$$

Suponiendo que existiera dicho c, de la primera ecuación podemos deducir que $|A| = c|e| < c$.

Sustituyendo el valor de A en la segunda ecuación deducimos que:

$$c^2 - 2ck - c^2|e|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$c \cdot \Big[c(1 - |e|^2) - 2k\Big] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ \text{ó} \\ c = \dfrac{2k}{1 - |e|^2} \end{cases}$$

El valor $c = 0$ no nos vale, ya que en en este caso no se trataría de una elipse. Por tanto nos quedamos con $c = \dfrac{2k}{1 - |e|^2}$. Además podemos asegurar que, en este caso, $c = \dfrac{2k}{1 - |e|^2} > 0$, ya que $k > 0$. Por tanto podemos expresar:

$$e = \frac{-1}{c} A$$

$$k = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}$$

Sustituimos estas expresiones en nuestra ecuación inicial $|x| + < x, e >= k$, que queda expresada en función de los A y c que podemos despejar del paso anterior:

$$|x| + < -\frac{1}{c}A, x >= \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \Leftrightarrow$$

$$2c|x| - 2 < A, x >= c^2 - |A|^2 \Leftrightarrow$$

$$2c|x| - 2 < A, x > +|x|^2 = c^2 - |A|^2 + |x|^2 \Leftrightarrow$$

$$|x|^2 - 2 < A, x > +|A|^2 = c^2 - 2cx + |x|^2 \Leftrightarrow$$

$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2 \Leftrightarrow$$

$$|A - x| = \begin{cases} c - |x| \\ \text{ó} \\ |x| - c \end{cases}$$

Descartamos que $|A - x| = |x| - c$ ya que, en dicho caso:

$$|x| - c < x - |A| \leqslant |x - A| = |x| - c$$

Lo cual es una contradicción. Luego:

$$|A - x| = c - |x| \Leftrightarrow |x| + |A - x| \Leftrightarrow d(x, 0) + d(x, A) = x$$

donde

$$A = \frac{2k}{|e|^2 - 1}e$$

$$c = \frac{2k}{1 - |e|^2}$$

$\blacksquare$

2.1. Casos particulares

2.1.1. Caso $e = 0$

En este caso tendríamos que $|x| + < x, e >= k \Leftrightarrow |x| = k$ con $k > 0$. Luego resultaría una circunferencia centrada en el origen.

2.1.2. Caso gravitacional

Sabemos que en este caso $k = \dfrac{|m|^2}{\mu}$ con μ constante positiva, y m el momento angular $(m = x \wedge \dot{x})$, se tiene que el eje de excentricidad toma el valor:

$$e = \frac{1}{\mu}\dot{x} \wedge m - \frac{x}{|x|}$$

Puesto que m es constante, bastaría con conocer el valor de x y $\dot{x}$ en un mismo punto para conocer los valores e y k.

En este caso, según lo explicado, la elipse tendría uno de sus focos en $(0, 0)$ y el otro en:

$$A = \frac{2|m|^2}{\mu\left(1 - \left|\frac{1}{\mu}\dot{x} \wedge m - \frac{x}{|x|}\right|^2\right)}$$