# Elipse

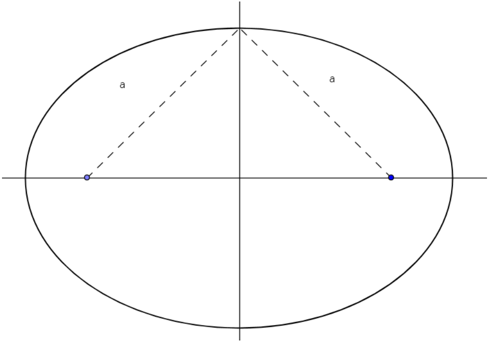
Sergio Padilla     Marina Estévez     Ignacio Cordón

13 de octubre de 2016

# Definición

Dados dos puntos $F_1, F_2, a > 0$ definimos una elipse como

$$E = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a \right\}$$



# Elipse con un foco en el 0

$d(x, y) = |x - y|$, un foco está en el 0, otro en $A \in \mathbb{R}^2$:

$$|x| + |A - x| = c \Leftrightarrow$$

$$|A - x| = c - |x| \Leftrightarrow$$

$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2 \Leftrightarrow$$

$$|A|^2 + |x|^2 - 2 < A, x >= c^2 + |x|^2 - 2c|x|$$

$$|x| + \left\langle -\frac{1}{c}A, x \right\rangle = \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \qquad (*)$$

Llamando:

$$e := -\frac{1}{c}A, \qquad k := \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \qquad (**)$$

Por la desigualdad triangular, habíamos deducido $|A| < c$, y deducimos:

$$|e| < 1, \qquad k > 0,$$

y $(*)$ se reescribe como:

$$|x| + < e, x >= k$$

Nótese que $|A| < |x| + |A - x| = c$ por la desigualdad triangular, en una elipse de la forma $|x| + |x - A| = c$, y si mantenemos esta condición en las implicaciones de la primera página, tenemos dobles implicaciones, ya que el único paso delicado es:

$$|x - A|^2 = (c - |x|)^2 \Rightarrow |x - A| = c - |x|$$

Pero no puede tenerse $|x - A| = |x| - c$ ya que en dicho caso:

$$|x| - c < |x| - |A| \leqslant |x - A| = |x| - c$$

que es contradicción.

■

Vamos a ver ahora que:

$$|x| + < e, x >= k, \qquad e \in \mathbb{R}^2, |e| < 1, \quad k > 0$$

representa una elipse, con un foco centrado en el $(0,0)$.

Es decir, veamos que $\exists A \in \mathbb{R}^2, c > 0$ verificando $d(x,0) + d(x,A) = c$. En el proceso inverso teníamos $(**)$. Intentamos buscar $A \in \mathbb{R}^2$ y $c > 0$ que verifiquen:

$$A = -ce$$
$$c^2 - 2ck - |A|^2 = 0$$

Suponiendo que existiera dicho $c$, de la primera ecuación podemos deducir que $|A| = c|e| < c$.

Sustituyendo el valor de $A$ en la segunda ecuación deducimos que:

$$c^2 - 2ck - c^2|e|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$c \cdot \Big[ c(1 - |e|^2) - 2k \Big] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ \text{ó} \\ c = \frac{2k}{1-|e|^2} \end{cases}$$

El valor $c = 0$ no nos vale, ya que en en este caso no se trataría de una elipse. Por tanto nos quedamos con $c = \frac{2k}{1-|e|^2}$. Además podemos asegurar que, en este caso, $c = \frac{2k}{1-|e|^2} > 0$, ya que $k > 0$.

Por tanto podemos expresar:

$$e = \frac{-1}{c}A \qquad\qquad k = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}$$

y así:

$$|x| + < -\tfrac{1}{c}A, x > = \tfrac{c^2 - |A|^2}{2c} \Leftrightarrow$$

$$2c|x| - 2 < A, x > = c^2 - |A|^2 \Leftrightarrow$$

$$|x|^2 - 2 < A, x > + |A|^2 = c^2 - 2cx + |x|^2 \Leftrightarrow$$

$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2 \Leftrightarrow |A - x| = \begin{cases} c - |x| \\ \text{ó} \\ |x| - c \end{cases}$$

Descartamos que $|A-x| = |x| - c$ ya que, en dicho caso:

$$|x| - c < |x| - |A| \leqslant |x - A| = |x| - c$$

Lo cual es una contradicción. Luego:

$$|A-x| = c - |x| \Leftrightarrow |x| + |A-x| \Leftrightarrow d(x,0) + d(x,A) = x$$

donde

$$A = \frac{2k}{|e|^2 - 1} e$$

$$c = \frac{2k}{1 - |e|^2}$$

$\blacksquare$

# Casos particulares

## Caso $e = 0$

En este caso tendríamos que $|x| + < x, e >= k \Leftrightarrow |x| = k$ con $k > 0$. Luego resultaría una circunferencia centrada en el origen.

## Caso gravitacional

Llamando $m = x \wedge \dot{x}$, sabemos que $m$, momento angular, es constante. Si $m \neq 0$, tenemos que $|x| + < x, e >= \frac{|m|^2}{\mu}$ describe las órbitas del cuerpo, con $\mu$ constante positiva. El eje de excentricidad toma el valor $e = \frac{1}{\mu}\dot{x} \wedge m - \frac{x}{|x|}$

Si $|e| < 1$ tendríamos una elipse.

Un foco sería $(0, 0)$ y el otro $A = \frac{2|m|^2}{\mu\left(1 - \left|\frac{1}{\mu}\dot{x} \wedge m - \frac{x}{|x|}\right|^2\right)}$

Nótese que para calcular $e$ o $A$ sólo necesitamos los valores de $x$ y $\dot{x}$ en un punto (el mismo para ambas).