Elipse

Sergio Padilla López Marina Estévez Almenzar
Ignacio Cordón Castillo

6 de octubre de 2016

1. Hipercuádricas

Un polinomio de segundo grado en $\mathbb{R}^n$ se define como:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c$$

donde $a_{i,j}, b_i, c \in \mathbb{R}$ y algún $a_{ij} \neq 0, x = (x_1, \dots x_n)^t \in \mathbb{R}^n$

Se llama **hipercuádrica** asociada a Q al conjunto:

$$\mathbb{C}_Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 0\}$$

$\mathbb{C}_Q$ puede ser vacío, por ejemplo en el caso $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$

Cuando tenemos una hipercuádrica en $\mathbb{R}^2$, recibe el nombre de **cónica**. Las distintas cónicas que existen se pueden obtener intersecando el cono $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2c^2 = 0\right\}$ con un plano afín.

Cuando tenemos una hipercuádrica en $\mathbb{R}^3$, recibe el nombre de **cuádrica**.

Equivalentemente, podemos escribir una hipercuádrica de la forma $Q(x) = x^t \cdot M \cdot x + b^t \cdot x + c$

Donde $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad b = (b_1, \dots b_n)^t, \qquad x = (x_1, \dots x_n)^t$

y también de la forma $Q(x) = (1, x^t) \cdot \widetilde{M} \cdot (1, x)$

Donde $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} c & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & M \end{pmatrix}$

Decimos que $\mathbb{C}_Q$ es degenerada si $det(\widetilde{M}) \neq 0$

2. Elipse

Dados dos puntos $F_1, F_2, a > 0$ definimos una elipse como

$$E = \left\{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a\right\}$$

Cuando tenemos una elipse E'centrada en $(0, 0)$ cuyos ejes mayor y menor coinciden con los ejes cartesianos, tendremos que los focos se encuentran en 2 puntos sobre el eje Y, a saber $(-\lambda, 0)$, $(\lambda, 0)$

Así, sea $p = (x, y) \in E'$

$$
\begin{aligned}
d(p,F_1) = 2a - d(p,F_2) &\Leftrightarrow \\
d(p,F_1)^2 = (2a - d(p,F_2))^2 &\Leftrightarrow \\
(x+\lambda)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-\lambda)^2 + y^2 - 4a \cdot d(p,F_2) &\Leftrightarrow \\
4x\lambda = 4a^2 - 4a \cdot d(p,F_2) &\Leftrightarrow \\
x\lambda = a^2 - a \cdot d(p,F_2) &\Leftrightarrow \\
(a^2 - x\lambda)^2 = (a \cdot d(p,F_2))^2 &\Leftrightarrow \\
a^4 - 2a^2\lambda x + \lambda^2 x^2 = a^2((x-\lambda)^2 + y^2) &\Leftrightarrow \\
a^4 + \lambda^2 x^2 = a^2 x^2 + a^2\lambda^2 + a^2 y^2 &\Leftrightarrow \\
(a^2 - \lambda^2)x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2(a^2 - \lambda^2)&
\end{aligned}
$$

Llamando $b^2 = a^2 - \lambda^2$:

$$
b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
$$

2.1. Notación

Sea $Q \in \mathbb{P}_2[x]$. Denotamos:

- λ_i a los valores propios de M $\forall i = 1, \ldots, n$
- $\widetilde{\lambda}_i$ a los valores propios de $\widetilde{M}$ $\forall i = 1, \ldots, n$
- r = rg(M) = nº de λ_i no nulos
- $\widetilde{r}$ = rg$(\widetilde{M})$ = nº de $\widetilde{\lambda}_i$ no nulos
- $|\Delta|$ = | nº de λ_i^+ - nº de λ_i^- |
- $|\widetilde{\Delta}|$ = | nº de $\widetilde{\lambda}_i^+$ - nº de $\widetilde{\lambda}_i^-$ |
- $\Lambda_Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / G_Q(x) = 0, G_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n con G_Q(x) = Mx + \frac{b}{2} \right\}$

2.2. Definición de equivalencia euclídea

Sean Q_1 y $Q_2 \in \mathbb{P}_2[x]$. Diremos que Q_1 y Q_2 son euclídeamente equivalentes ($Q_1 \approx Q_2$) si $\exists f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ movimiento rígido y $\exists \alpha \neq 0$ tal que $Q_2 = \alpha(Q_1 \circ f)$. Así, $\mathbb{C}_{Q_2} = f^{-1}(\mathbb{C}_{Q_1})$.

2.3. Lema

Sean Q_1, $Q_2 \in \mathbb{P}_2[x]$. Si $Q_1 \approx Q_2$ entonces se cumple:

- $r_1 = r_2$
- $\widetilde{r}_1 = \widetilde{r}_2$
- $|\Delta_1| = |\Delta_2|$
- $|\widetilde{\Delta}_1| = |\widetilde{\Delta}_2|$

2.4. Teorema de las hipercuádricas reducidas

Sea $Q \in \mathbb{P}_2[x]$. Entonces existe $Q' \in \mathbb{P}_2[x]$ tal que $Q \approx Q'$. El polinomio Q' es la expresión reducida euclídea para Q y viene dada de la siguiente forma:

1. Si $\Lambda_Q \neq \emptyset$ y $\Lambda_Q \subseteq C_Q$, entonces: $Q'(x) = x_1^2 + ... + \alpha_s x_s^2 - \alpha_{s+1} x_{s+1}^2 - ... - \alpha_r x_r^2$ donde $r = rg(M)$, $\alpha_i > 0\ \forall i$ y $1 \leq s \leq r$. Se cumple también que $s \geq r - s$, $1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_s$ y $\alpha_{s+1} \leq ... \leq \alpha_r$. En este caso, $\widetilde{r} = r$, $|\widetilde{\Delta}| = |\Delta| = 2s - r$.
2. Si $\Lambda_Q \neq \emptyset$ y $\Lambda_Q \cap C_Q = \emptyset$, entonces: $Q'(x) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_s x_s^2 - \alpha_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \alpha_r x_r^2 \pm 1$ donde $r = rg(M)$, $\alpha_i > 0\ \forall i \in 1, ..., r$ y $1 \leq s \leq r$. Se cumple también que $s \geq r - s$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_s$ y $\alpha_{s+1} \leq ... \leq \alpha_r$. En este caso, $\widetilde{r} = r + 1$, $|\Delta| = 2s - r$, $|\widetilde{\Delta}| = \begin{cases} 2s - r + 1 \\ |2s - r - 1| \end{cases}$
3. Si $\Lambda_Q = \emptyset$, entonces: $Q'(x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_s x_s^2 - \alpha_{s+1} x_{s+1}^2 - ... - \alpha_r x_r^2 - x_n$ donde $r = rg(M)$, $\alpha_i > 0\ \forall i \in 1, ..., r$ y $1 \leq s \leq r$. Se cumple también que $s \geq r - s$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_s$ y $\alpha_{s+1} \leq ... \leq \alpha_r$. En este caso, $\widetilde{r} = r + 2$, $|\Delta| = |\widetilde{\Delta}| = 2s - r$

2.5. Tabla de cónicas reducidas

Ecuación Euclidea	r	$\widetilde{r}$	$\lvert\Delta\rvert$	$\lvert\widetilde{\Delta}\rvert$	Tipo
$x^2 = 0$	1	1	1	1	Recta doble
$\lambda x^2 + 1 = 0$	1	2	1	2	$\emptyset$, o bien, dos rectas paralelas
$\lambda x^2 - 1 = 0$	1	2	1	0	Dos rectas paralelas
$\lambda x^2 - y = 0$	1	3	1	1	Parábola
$x^2 + \lambda y^2 = 0$	2	2	2	2	Punto
$x^2 - \lambda y^2 = 0$	2	2	0	0	Dos rectas secantes
$\lambda x^2 - \mu y^2 + 1 = 0$	2	3	2	3	$\emptyset$ (Elipse imaginaria)
$\lambda x^2 + \mu y^2 - 1 = 0$	2	3	2	1	Elipse
$\lambda x^2 - \mu y^2 \pm 1 = 0$	2	3	0	1	Hipérbola

2.6. Corolario

Las elipses, parábolas e hipérbolas son las únicas cónicas no degeneradas.

3. Ecuación ejercicio

Sea

$$|z| + < z, e >= k,$$

donde $z, e \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$, desarrollando la ecuación, tomando $z = (x, y)$ y $e = (e_1, e_2)$ obtenemos:

$$\sqrt{x^2+y^2} + < (x,y), (e_1, e_2) >= k$$
$$\sqrt{x^2+y^2} + xe_1 + ye_2 = k$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = k - xe_1 - ye_2$$
$$x^2 + y^2 = (k - xe_1 - ye_2)^2$$
$$(1-e_1^2)x^2 + (1-e_2^2)y^2 - 2e_1e_2xy + 2ke_2y + 2ke_1x - k^2 = 0$$

luego, estamos ante la ecuación de una cónica. Sabemos que las cónicas nos quedan definidas por una matriz simétrica, $\widetilde{M}$, que queda definida como:

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} -k^2 & ke_1 & ke_2 \\ ke_1 & (1-e_1^2) & -e_1e_2 \\ ke_2 & -e_1e_2 & (1-e_2^2) \end{pmatrix}$$

Además tenemos la matriz M definida como:

$$M = \begin{pmatrix} (1-e_1^2) & -e_1e_2 \\ -e_1e_2 & (1-e_2^2) \end{pmatrix}$$

Observando la tabla de cónicas, y en virtud del corolario posterior, para que la ecuación defina una elipse, necesitados que sea no degenerada ($|\widetilde{M}| \neq 0$) y además como r=2 y Δ=2, todos los λ_i tienen el mismo signo ($|M| > 0$).

Veamos que condiciones tiene que cumplir la ecuación para que $|M| > 0$:

$$|M| = (1-e_1^2)(1-e_2^2) - e_1^2e_2^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - e_2^2 - e_1^2 + e_1^2e_2^2 - e_1^2e_2^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 > e_2^2 - e_1^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 > ||e||^2$$

Por tanto, para que la ecuación sea de tipo elipse, e tiene que cumplir $||e|| < 1$, veamos que condiciones tiene que cumplir la ecuación para que $|\widetilde{M}| \neq 0$:

$$|\widetilde{M}| = \begin{vmatrix} -k^2 & ke_1 & ke_2 \\ ke_1 & (1-e_1^2) & -e_1e_2 \\ ke_2 & -e_1e_2 & (1-e_2^2) \end{vmatrix} = -k^2$$

entonces,

$$|\widetilde{M}| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$$

Por tanto, veamos ahora que suponiendo $y = 0$ y veamos que $\exists x$ tal que (x, y) cumple la ecuación (luego no sería vacía): Buscamos un x tal que $(1-e_1^2)x^2 + 2ke_1x - k^2 = 0$, estamos ante una ecuación de segundo grado, luego tenemos dos soluciones que son:

$$x_1 = \frac{k}{e_1 + 1} \qquad x_2 = \frac{k}{e_1 - 1}$$

Luego, tanto $(x_1,0)$ como $(x_2,0)$ son soluciones de la ecuación.

Resumiendo, la ecuación define una elipse $\Leftrightarrow \begin{cases} ||e|| < 1 \\ k \neq 0 \end{cases}$