

Elipse

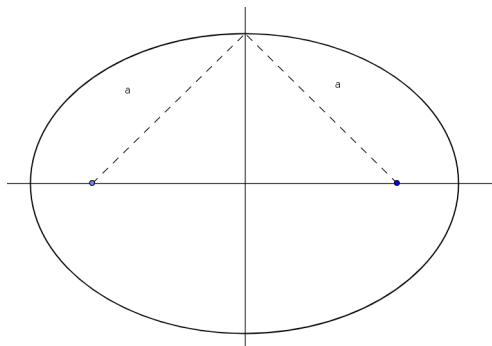
Sergio Padilla Marina Estévez Ignacio Cordón

13 de octubre de 2016

Definición

Dados dos puntos F_1, F_2 , $a > 0$ definimos una elipse como

$$E = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a\}$$



Elipse con un foco en el 0

$d(x, y) = |x - y|$, un foco está en el 0, otro en $A \in \mathbb{R}^2$:

$$|x| + |A - x| = c \Leftrightarrow$$

$$|A - x| = c - |x| \Leftrightarrow$$

$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2 \Leftrightarrow$$

$$|A|^2 + |x|^2 - 2 \langle A, x \rangle = c^2 + |x|^2 - 2c|x|$$

$$|x| + \left\langle -\frac{1}{c}A, x \right\rangle = \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \quad (*)$$

Llamando:

$$e := -\frac{1}{c}A, \quad k := \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \quad (**)$$

Por la desigualdad triangular, habíamos deducido $|A| < c$, y deducimos:

$$|e| < 1, \quad k > 0,$$

y (*) se reescribe como:

$$|x| + \langle e, x \rangle = k$$

Nótese que $|A| < |x| + |A - x| = c$ por la desigualdad triangular, en una elipse de la forma $|x| + |x - A| = c$, y si mantenemos esta condición en las implicaciones de la primera página, tenemos dobles implicaciones, ya que el único paso delicado es:

$$|x - A|^2 = (c - |x|)^2 \Rightarrow |x - A| = c - |x|$$

Pero no puede tenerse $|x - A| = |x| - c$ ya que en dicho caso:

$$|x| - c < |x| - |A| \leq |x - A| = |x| - c$$

que es contradicción.



Vamos a ver ahora que:

$$|x| + \langle e, x \rangle = k, \quad e \in \mathbb{R}^2, |e| < 1, \quad k > 0$$

representa una elipse, con un foco centrado en el $(0, 0)$.

Es decir, veamos que $\exists A \in \mathbb{R}^2, c > 0$ verificando $d(x, 0) + d(x, A) = c$. En el proceso inverso teníamos (**). Intentamos buscar $A \in \mathbb{R}^2$ y $c > 0$ que verifiquen:

$$\begin{aligned} A &= -ce \\ c^2 - 2ck - |A|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Suponiendo que existiera dicho c , de la primera ecuación podemos deducir que $|A| = c|e| < c$.

Sustituyendo el valor de A en la segunda ecuación deducimos que:

$$c^2 - 2ck - c^2|e|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$c \cdot \left[c(1 - |e|^2) - 2k \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ \text{ó} \\ c = \frac{2k}{1-|e|^2} \end{cases}$$

El valor $c = 0$ no nos vale, ya que en este caso no se trataría de una elipse. Por tanto nos quedamos con $c = \frac{2k}{1-|e|^2}$. Además podemos asegurar que, en este caso, $c = \frac{2k}{1-|e|^2} > 0$, ya que $k > 0$.

Por tanto podemos expresar:

$$e = \frac{-1}{c}A \qquad k = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}$$

y así:

$$|x| + \langle -\frac{1}{c}A, x \rangle = \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \Leftrightarrow$$

$$2c|x| - 2 \langle A, x \rangle = c^2 - |A|^2 \Leftrightarrow$$

$$|x|^2 - 2 \langle A, x \rangle + |A|^2 = c^2 - 2cx + |x|^2 \Leftrightarrow$$

$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2 \Leftrightarrow |A - x| = \begin{cases} c - |x| \\ \text{ó} \\ |x| - c \end{cases}$$

Descartamos que $|A - x| = |x| - c$ ya que, en dicho caso:

$$|x| - c < |x| - |A| \leq |x - A| = |x| - c$$

Lo cual es una contradicción. Luego:

$$|A - x| = c - |x| \Leftrightarrow |x| + |A - x| = c \Leftrightarrow d(x, 0) + d(x, A) = c$$

donde

$$A = \frac{2k}{|e|^2 - 1}e$$

$$c = \frac{2k}{1 - |e|^2}$$



Casos particulares

Caso $e = 0$

En este caso tendríamos que $|x| + \langle x, e \rangle = k \Leftrightarrow |x| = k$ con $k > 0$. Luego resultaría una circunferencia centrada en el origen.

Caso gravitacional

Llamando $m = x \wedge \dot{x}$, sabemos que m , momento angular, es constante. Si $m \neq 0$, tenemos que $|x| + \langle x, e \rangle = \frac{|m|^2}{\mu}$ describe las órbitas del cuerpo, con μ constante positiva. El eje de excentricidad toma el valor $e = \frac{1}{\mu} \dot{x} \wedge m - \frac{x}{|x|}$

Si $|e| < 1$ tendríamos una elipse.

Un foco sería $(0, 0)$ y el otro $A = \frac{2|m|^2}{\mu \left(1 - \left| \frac{1}{\mu} \dot{x} \wedge m - \frac{x}{|x|} \right|^2 \right)}$

Nótese que para calcular e o A sólo necesitamos los valores de x y \dot{x} en un punto (el mismo para ambas).