



CANTHO UNIVERSITY

CHƯƠNG 3

KỸ THUẬT THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

KỸ THUẬT NHÁNH CẬN (Branch and Bound)

Võ Huỳnh Trâm



Một số kỹ thuật thiết kế thuật toán

- Kỹ thuật **Chia để trị** (Divide and Conquer)
- Kỹ thuật **Tham ăn** /*Háu ăn/Tham lam* (Greedy)
- Kỹ thuật **Nhánh cận** (Branch and Bound)
- Kỹ thuật **Quy hoạch động** (Dynamic Programming)
- Kỹ thuật **Quay lui** (Backtracking)
- Kỹ thuật **Tìm kiếm địa phương** (Local Search)
- Kỹ thuật **Cắt tỉa alpha-beta** (Alpha-Beta Pruning)
trên Cây trò chơi



TỔNG QUAN VỀ THUẬT TOÁN NHÁNH CẬN

→ **Thuật toán Nhánh cận** = Phương pháp chủ yếu để giải các bài toán tối ưu tổ hợp

Thực hiện việc đánh giá theo từng bước, nếu không có khả năng tìm thấy phương án tốt hơn thì *cắt* nhánh đó, chuyển sang nhánh khác \Rightarrow **Phương án tốt dần lên**

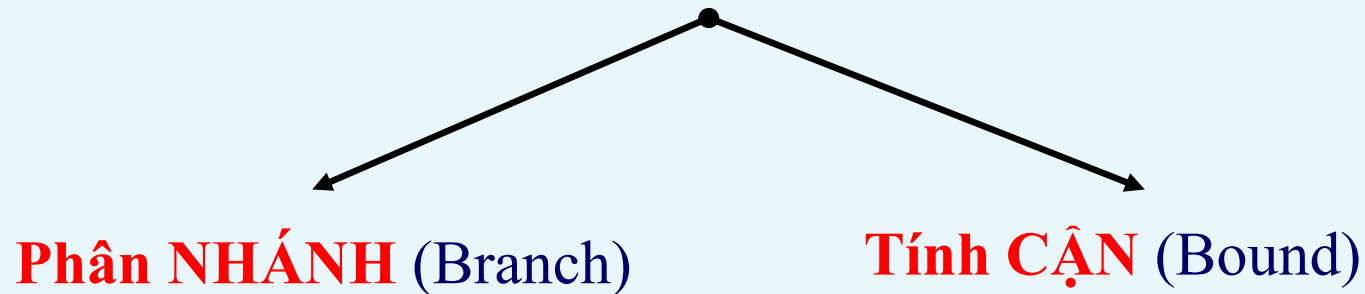
→ **Thuật toán Nhánh cận** = Cải tiến thuật toán “Vết cận”

Không xây dựng toàn bộ *cây tìm kiếm phương án*, mà dùng *giá trị cận* tại mỗi nút trên cây để hạn chế bớt việc *phân nhánh*



Kỹ thuật nhánh cận

Kỹ thuật **NHÁNH CẬN** (Branch and Bound)





Kỹ thuật nhánh cận

- **Cây tìm kiếm phương án :**
 - *Nút gốc* biểu diễn cho tập tất cả các phương án có thể có
 - *Nút lá* biểu diễn cho một phương án nào đó.
 - *Nút trong* n có các nút con tương ứng với các khả năng có thể lựa chọn tập phương án xuất phát từ n.

Kỹ thuật này gọi là **phân nhánh**.

- Với mỗi nút trên cây: tính một **giá trị cận** (giá trị gần với giá của các phương án).
 - **Bài toán tìm MIN:** xác định **cận dưới** (\leq giá phương án)
 - **Bài toán tìm MAX:** xác định **cận trên** (\geq giá phương án)



CANTHO UNIVERSITY

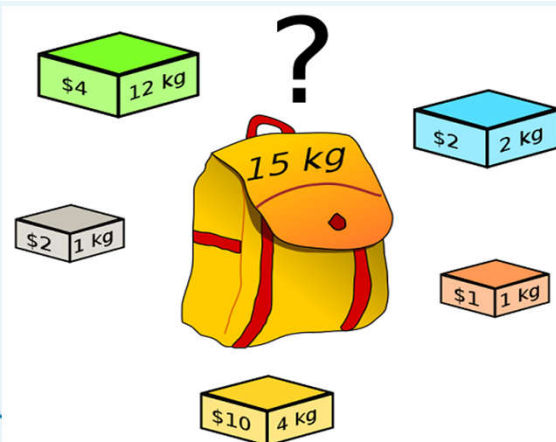
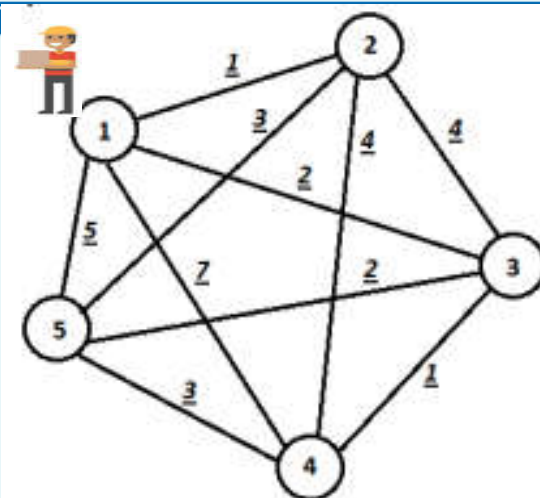
VÍ DỤ MINH HỌA KỸ THUẬT NHÁNH CẬN

- Bài toán tìm **MIN**: $f(X) \rightarrow \text{Min}$

Bài toán Đường đi người giao hàng (TSP): Tìm một chu trình nhỏ nhất đi qua các thành phố, mỗi thành phố một lần ?

- Bài toán tìm **MAX**: $f(X) \rightarrow \text{Max}$

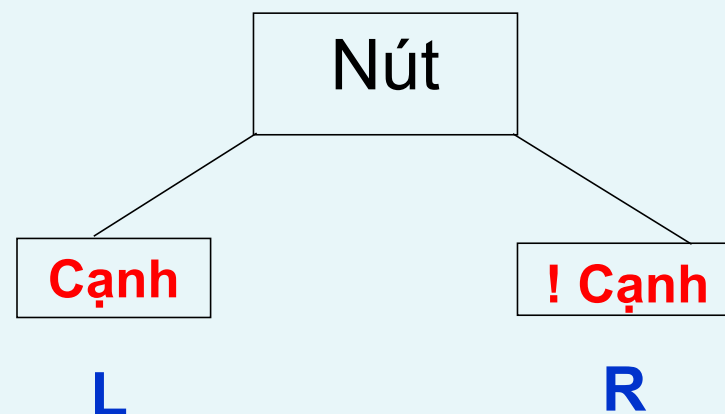
Bài toán Cái ba lô : Tìm phương án đặt đồ vật vào ba lô sao cho tổng giá trị là lớn nhất ?





Kỹ thuật nhánh cận: BÀI TOÁN TSP

- *Cây tìm kiếm phương án* = **Cây nhị phân**: $f(X) \rightarrow \text{Min: CD}$
 - *Nút gốc*: biểu diễn cấu hình gồm **tất cả các phương án**.
 - *Nút con trái*: biểu diễn cấu hình gồm tất cả các phương án **chứa một cạnh** nào đó,
 - *Nút con phải*: biểu diễn cấu hình gồm tất cả các phương án **không chứa cạnh đó** (các cạnh được xét theo thứ tự, chẳng hạn thứ tự từ điển).



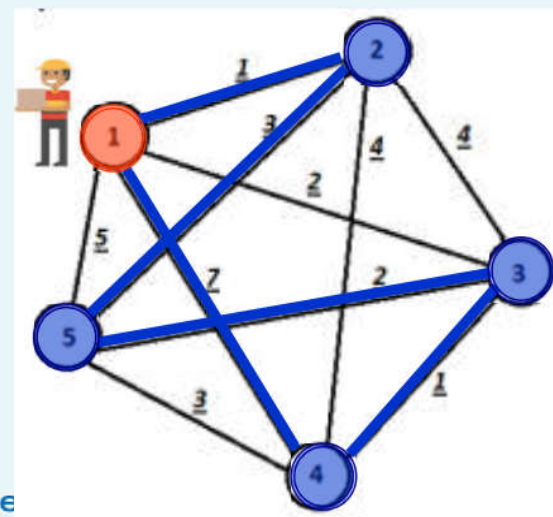


CANTHO UNIVERSITY

Kỹ thuật nhánh cận: BÀI TOÁN TSP

*Cây tìm kiếm phương án = **Cây nhị phân***

- Mỗi nút trong **kế thừa các thuộc tính của tổ tiên nó và có thêm một thuộc tính mới** (chứa hay không chứa một cạnh)
 - Nút lá: biểu diễn cho cấu hình chỉ bao gồm một phương án.
- Để quá trình phân nhánh nhanh tới nút lá, tại mỗi nút cần có quyết định bổ sung trên nguyên tắc:
 - (1) **Mọi đỉnh trong chu trình đều có cấp 2**
 - (2) **Không tạo ra một chu trình thiếu.**

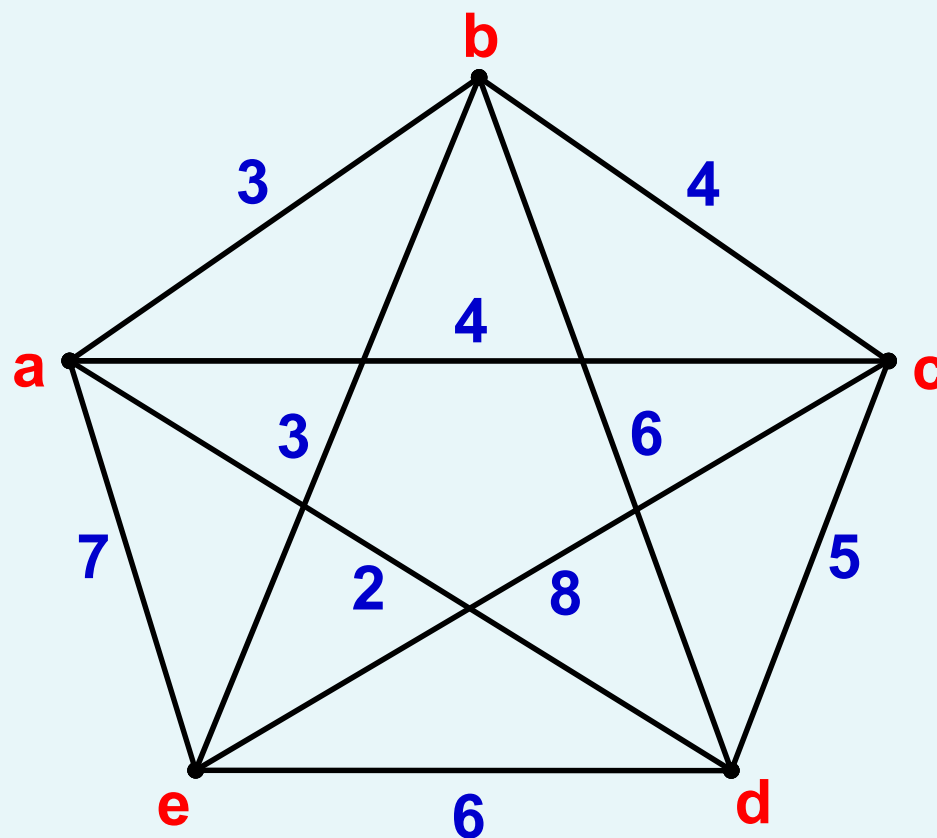




Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán TSP – Ví dụ

Ví dụ : Xét bài toán TSP có 5 đỉnh với độ dài các cạnh được cho như hình.

Bài toán tìm **MIN**
→ Tính **cận dưới (CD)**





Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán TSP - **Phân nhánh**

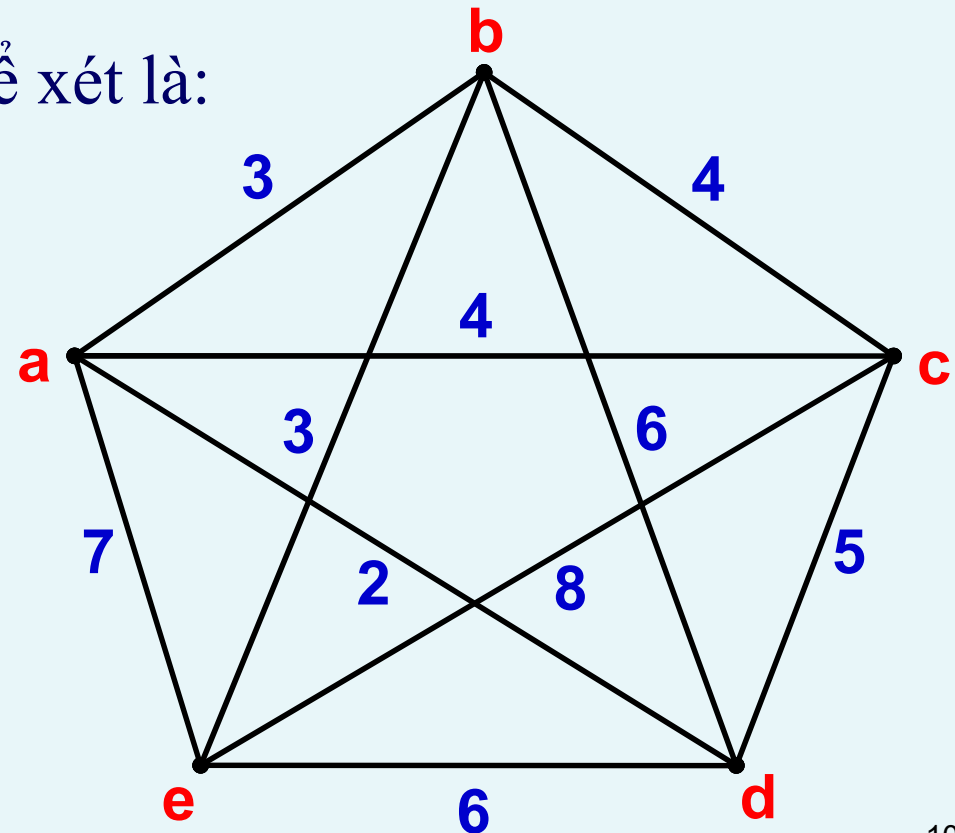
Các cạnh theo **thứ tự từ điển** để xét là:

ab, ac, ad, ae,

bc, bd, be,

cd, ce

de





CANTHO UNIVERSITY

Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán TSP - **Phân nhánh**

Các cạnh theo thứ tự từ điển để xét là:
ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce và de.

→ **Xây dựng cây tìm kiếm phương án**

→ **Bắt đầu từ nút gốc A**

A

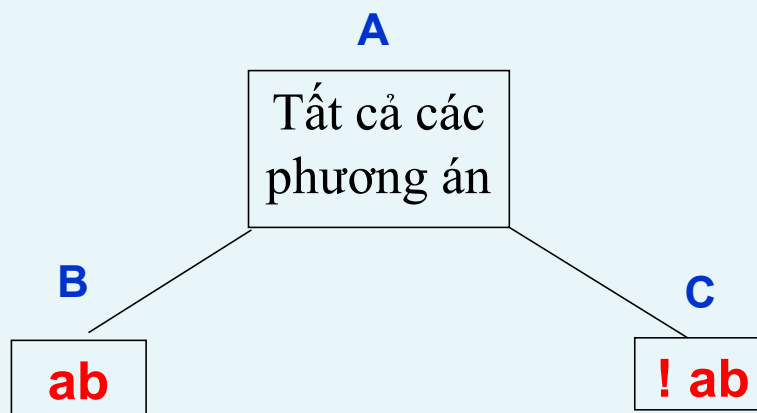
Tất cả các
phương án



CANTHO UNIVERSITY

Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán TSP – Phân nhánh nút A

Các cạnh theo thứ tự từ điển để xét là:
ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce và de.





CANTHO UNIVERSITY

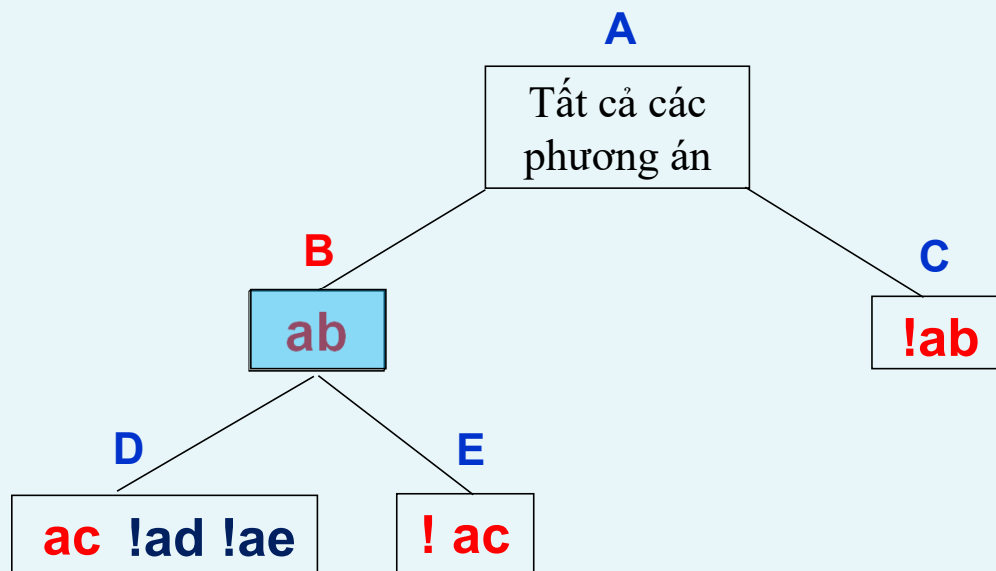
Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán TSP

- Phân nhánh nút B

Các cạnh theo thứ tự từ điển để xét là:
ab, **ac**, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce và de.

Điều kiện:

- **Đỉnh cấp 2**
- **Không tạo chu trình thiếu**





CANTHO UNIVERSITY

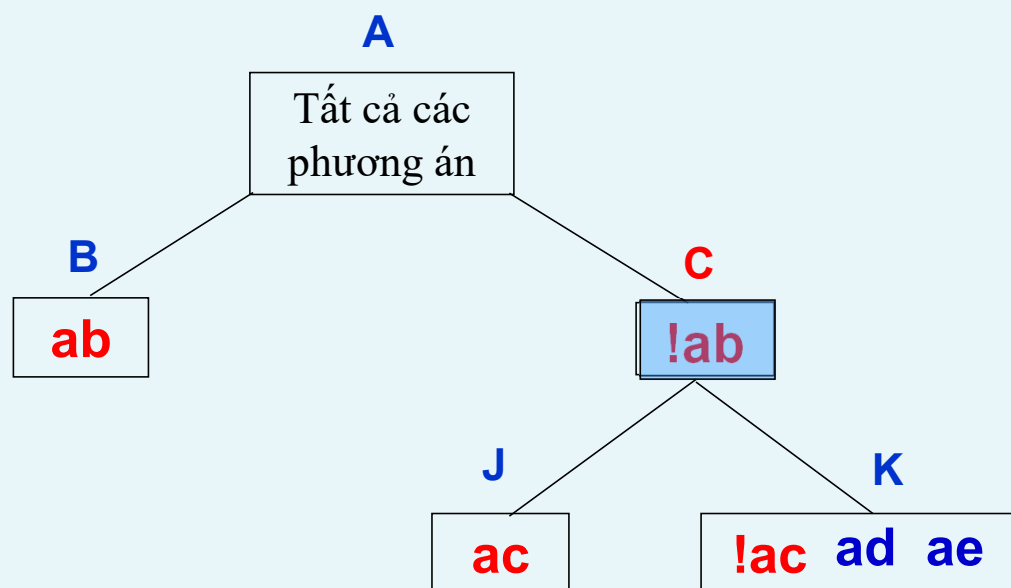
Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán TSP

- Phân nhánh nút C

Các cạnh theo thứ tự từ điển để xét là:
ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce và de.

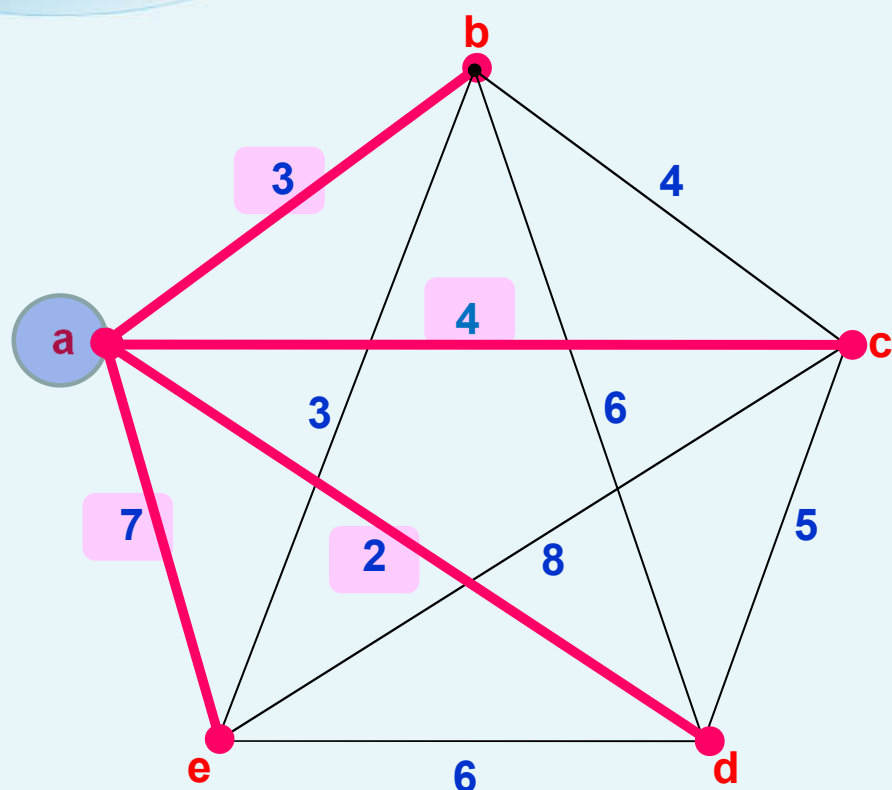
Điều kiện:

- Đỉnh cấp 2
- Không tạo chu trình thiếu





Tính cận dưới cho nút gốc A



Đỉnh: chọn 2 cạnh có độ dài nhỏ nhất
 $CD = \text{Tổng độ dài các cạnh được chọn} / 2$

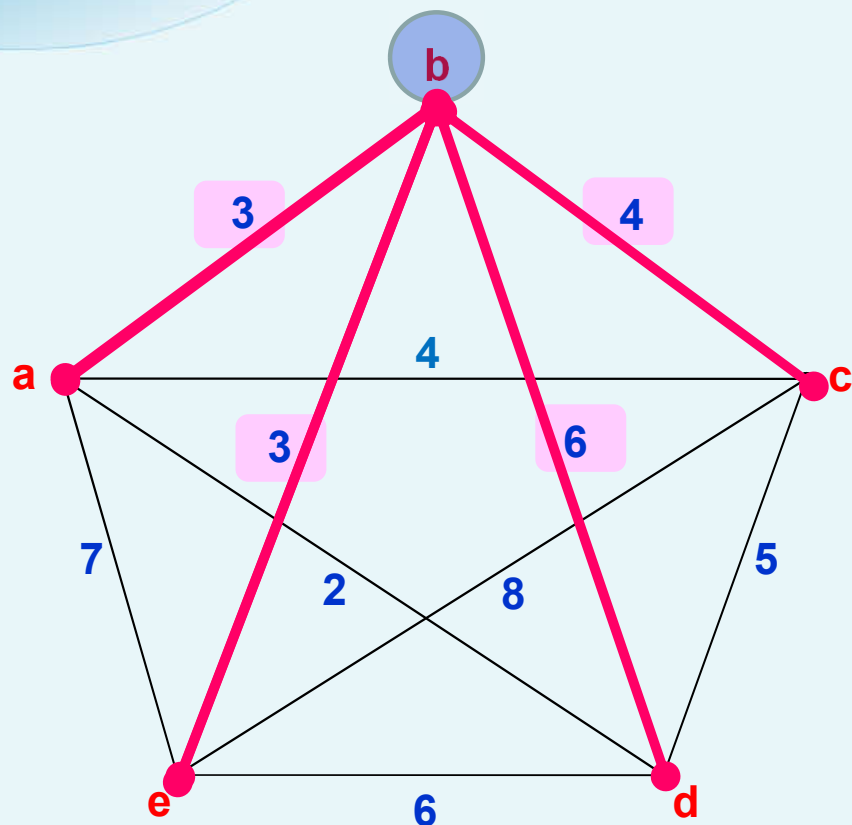
- Đỉnh a chọn $ad = 2$, $ab = 3$
- Đỉnh b chọn $ba = 3$, $be = 3$
- Đỉnh c chọn $ca = 4$, $cb = 4$
- Đỉnh d chọn $da = 2$, $dc = 5$
- Đỉnh e chọn $eb = 3$, $ed = 6$

Tổng độ dài các cạnh được chọn = 35

Cận dưới của nút gốc A = $35/2 = 17.5$



Tính cận dưới cho nút gốc A



Đỉnh: chọn 2 cạnh có độ dài nhỏ nhất
 $CD = \text{Tổng độ dài các cạnh được chọn} / 2$

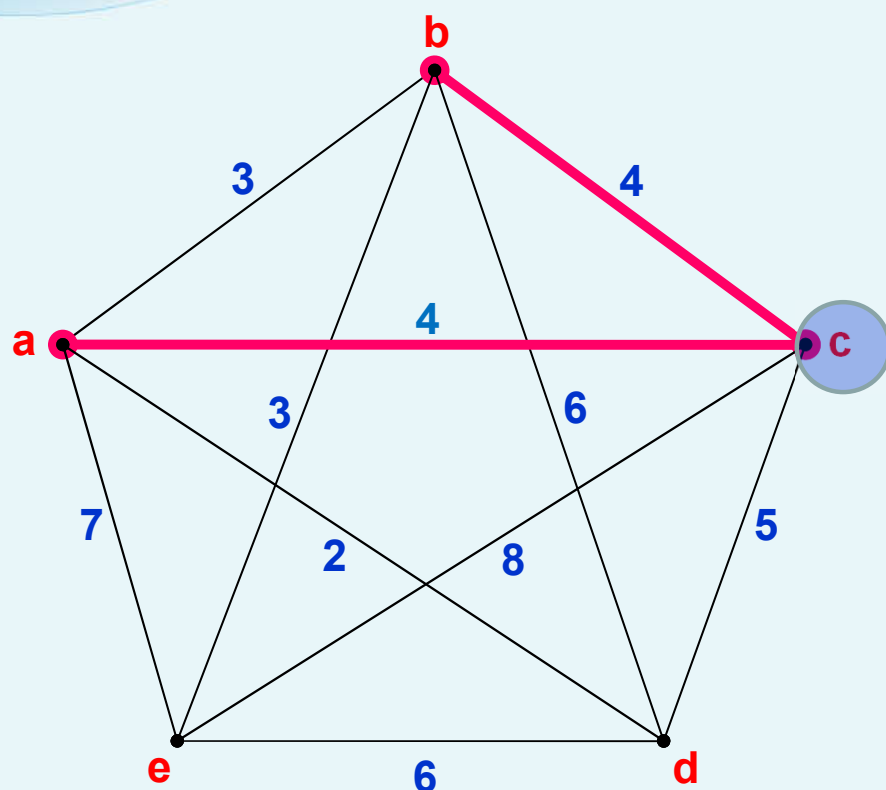
- Đỉnh a chọn $ad = 2$, $ab = 3$
- Đỉnh b chọn $ba = 3$, $be = 3$
- Đỉnh c chọn $ca = 4$, $cb = 4$
- Đỉnh d chọn $da = 2$, $dc = 5$
- Đỉnh e chọn $eb = 3$, $ed = 6$

Tổng độ dài các cạnh được chọn = 35

Cận dưới của nút gốc A = $35/2 = 17.5$



Tính cận dưới cho nút gốc A



Đỉnh: chọn 2 cạnh có độ dài nhỏ nhất
 $CD = \text{Tổng độ dài các cạnh được chọn} / 2$

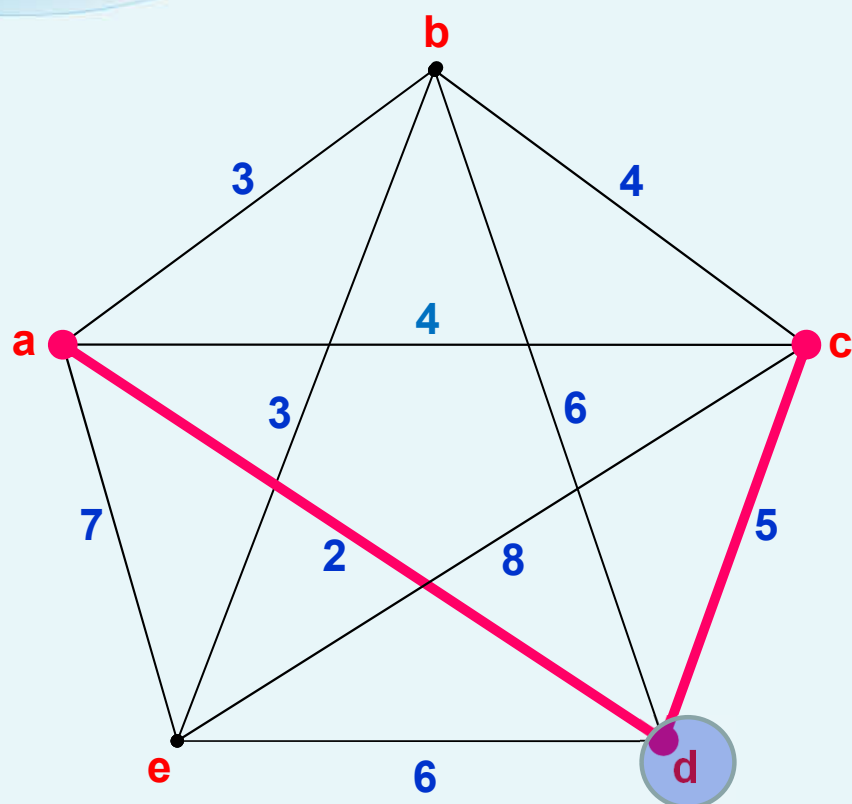
- Đỉnh a chọn **ad** = 2, **ab** = 3
- Đỉnh b chọn **ba** = 3, **be** = 3
- Đỉnh c chọn **ca** = 4, **cb** = 4
- Đỉnh d chọn **da** = 2, **dc** = 5
- Đỉnh e chọn **eb** = 3, **ed** = 6

Tổng độ dài các cạnh được chọn = **35**

Cận dưới của nút gốc A = $35/2 = \mathbf{17.5}$



Tính cận dưới cho nút gốc A



Đỉnh: chọn 2 cạnh có độ dài nhỏ nhất
CD = Tổng độ dài các cạnh được chọn / 2

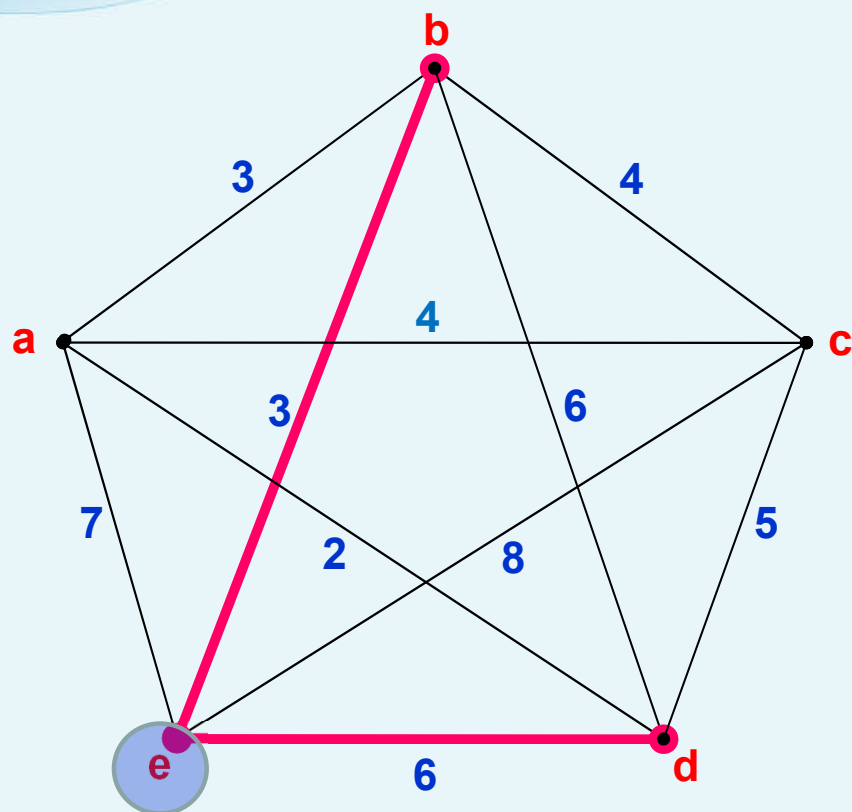
- Đỉnh a chọn **ad** = 2, **ab** = 3
- Đỉnh b chọn **ba** = 3, **be** = 3
- Đỉnh c chọn **ca** = 4, **cb** = 4
- Đỉnh d chọn **da** = 2, **dc** = 5
- Đỉnh e chọn **eb** = 3, **ed** = 6

Tổng độ dài các cạnh được chọn = **35**

Cận dưới của nút gốc A = $35/2 = \mathbf{17.5}$



Tính cận dưới cho nút gốc A



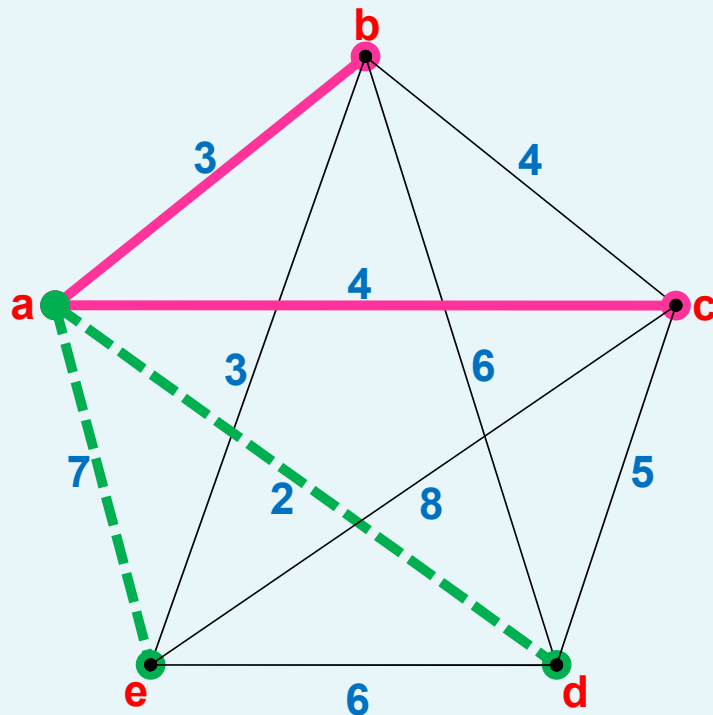
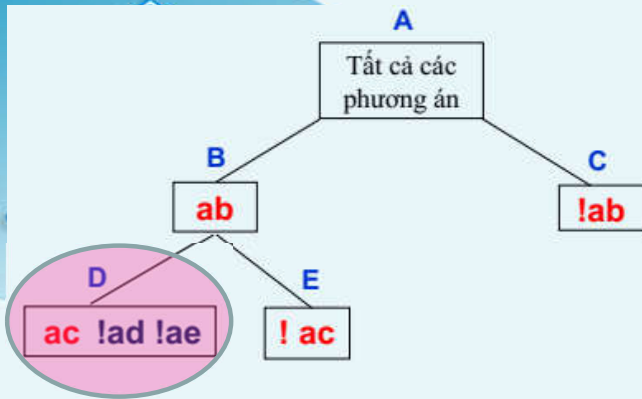
Định: chọn 2 cạnh có độ dài nhỏ nhất
CD = Tổng độ dài các cạnh được chọn / 2

- Đỉnh a chọn **ad** = 2, **ab** = 3
- Đỉnh b chọn **ba** = 3, **be** = 3
- Đỉnh c chọn **ca** = 4, **cb** = 4
- Đỉnh d chọn **da** = 2, **dc** = 5
- Đỉnh e chọn **eb** = 3, **ed** = 6

Tổng độ dài các cạnh được chọn = **35**

Cận dưới của nút gốc A = $35/2 = \mathbf{17.5}$

Tính cận dưới cho nút D (ab, ac, !ad, !ae)



*Đỉnh: chọn 2 cạnh có độ dài nhỏ nhất
thỏa ràng buộc của nút*

- Đỉnh a chọn **ab** = 3, **ac** = 4, do 2 cạnh này buộc phải chọn.
- Đỉnh b chọn **ba** = 3, **be** = 3
- Đỉnh c chọn **ca** = 4, **cb** = 4
- Đỉnh d chọn **de** = 6, **dc** = 5, do không được chọn đa nên phải chọn de.
- Đỉnh e chọn **eb** = 3, **ed** = 6

Tổng độ dài các cạnh được chọn = **41**

Cận dưới của nút D là $41/2 = \mathbf{20.5}$



Áp dụng kỹ thuật nhánh cận cho Bài toán TSP

(1). Xây dựng nút gốc, tính cận dưới cho nút gốc.

(2). Sau khi **phân nhánh** cho mỗi nút, **tính cận dưới** cho cả hai con.

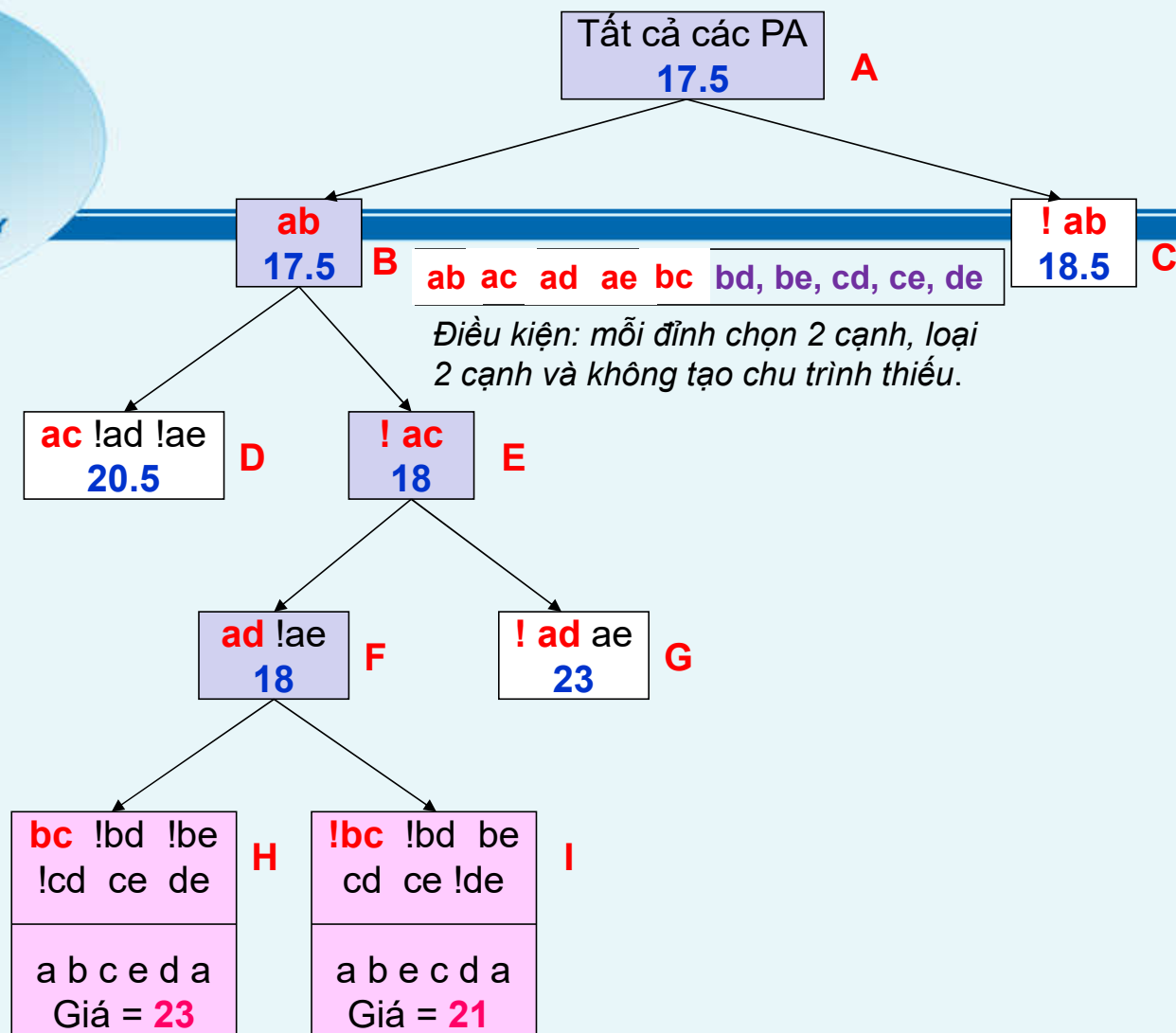
*Trong quá trình xây dựng cây có thể phát sinh một số nút lá (biểu diễn phương án). Giá nhỏ nhất trong số các phương án = **giá nhỏ nhất tạm thời (GNNTT)***

(3). Nếu **cận dưới của một nút con \geq giá nhỏ nhất tạm thời** : không cần xây dựng các cây con cho nút này nữa (Ta gọi là cắt tỉa các cây con của nút đó).

(4). Nếu cả hai nút con đều có cận dưới $<$ **giá nhỏ nhất tạm thời** : nút con nào có **cận dưới nhỏ hơn sẽ được ưu tiên phân nhánh trước** (vì hy vọng ở hướng đó sẽ có phương án tối ưu)

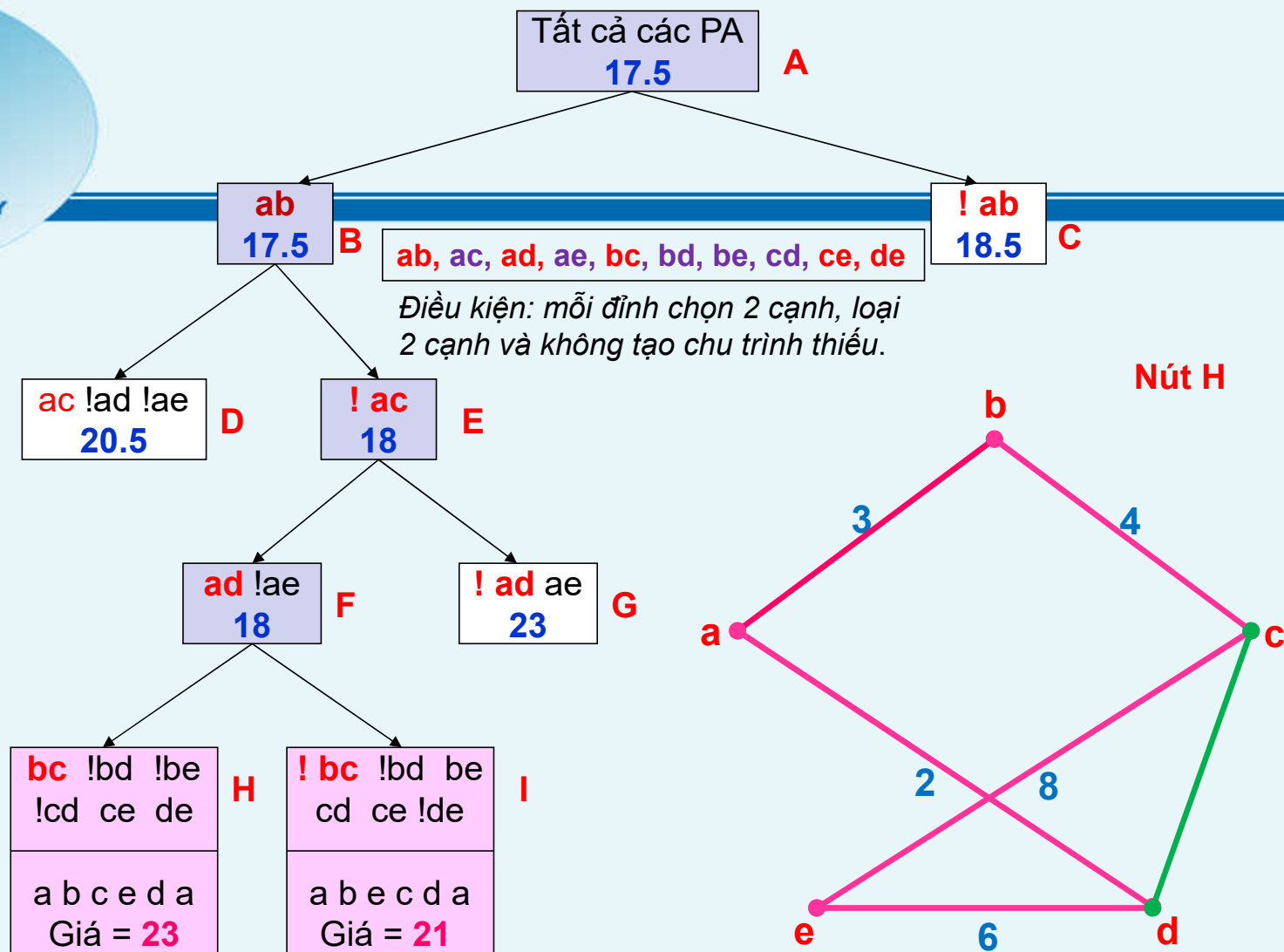
(5). Mỗi lần **quay lui để xét nút con chưa được xét**: phải xem lại nút con đó để cắt tỉa các cây con của nó vì có thể phát sinh một **giá nhỏ nhất tạm thời** mới.

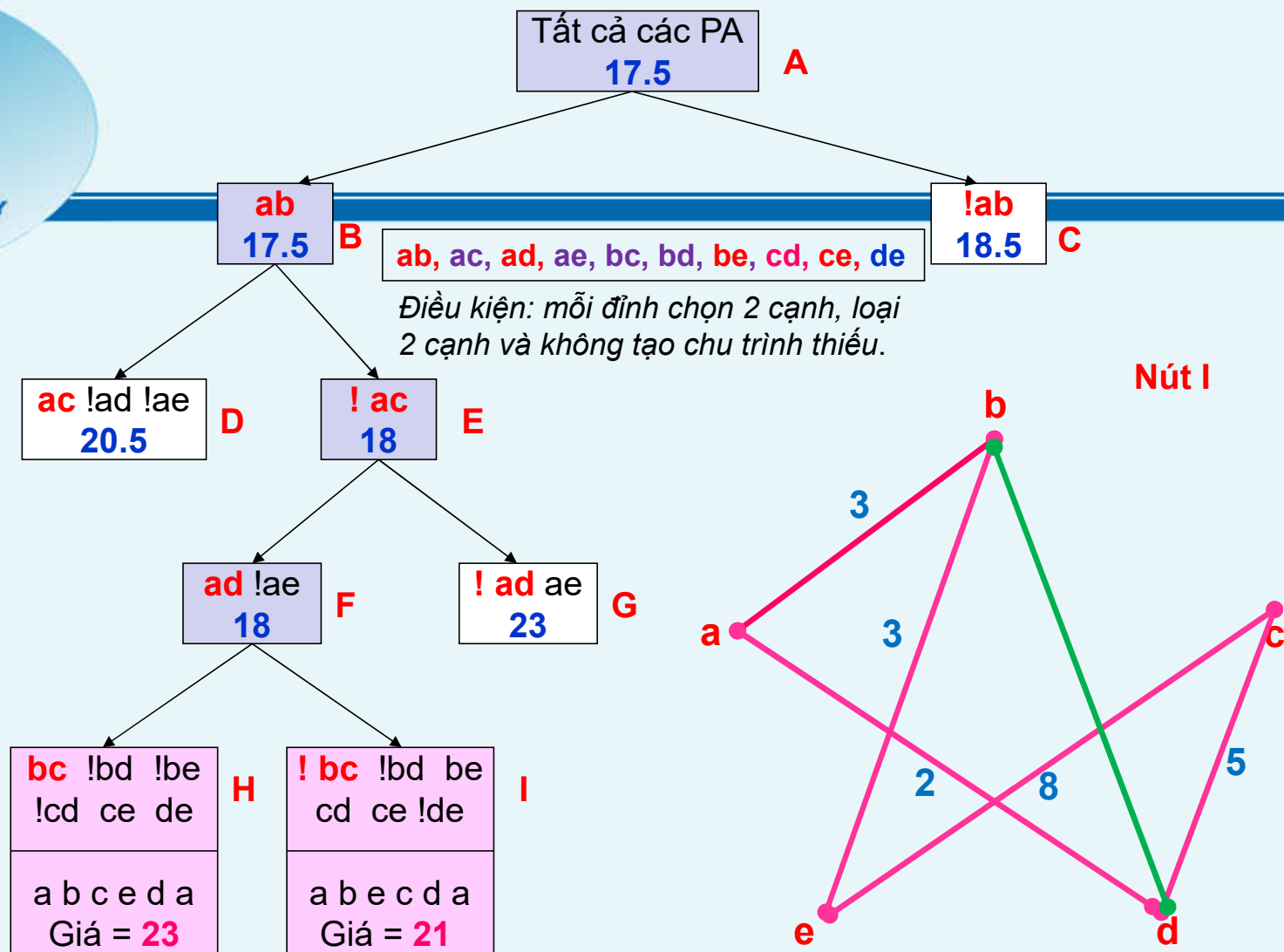
Khi tất cả các con đã *được phân nhánh hoặc bị cắt tỉa* thì phương án có giá nhỏ nhất trong các phương án tìm được là phương án tối ưu cần tìm.

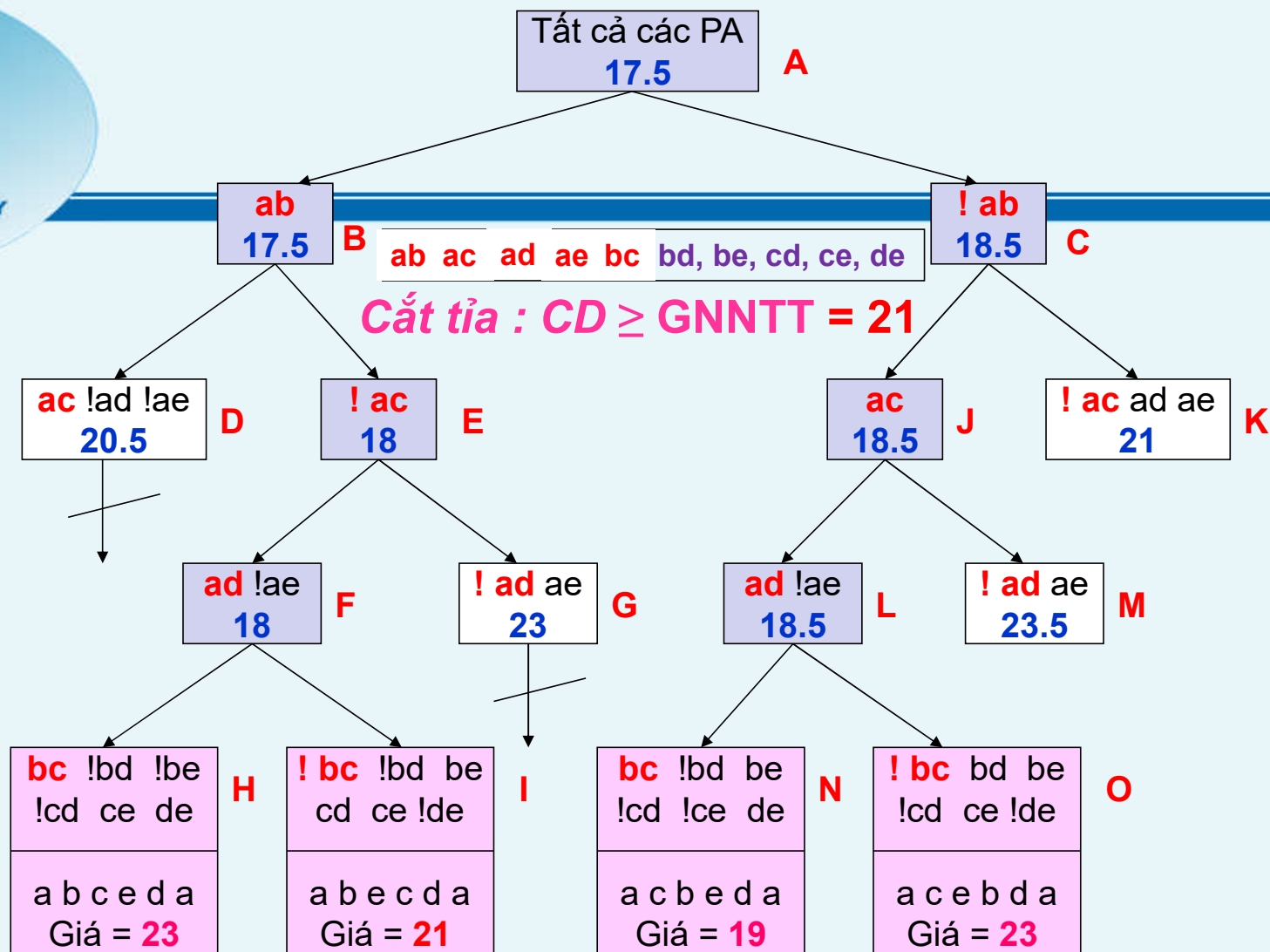




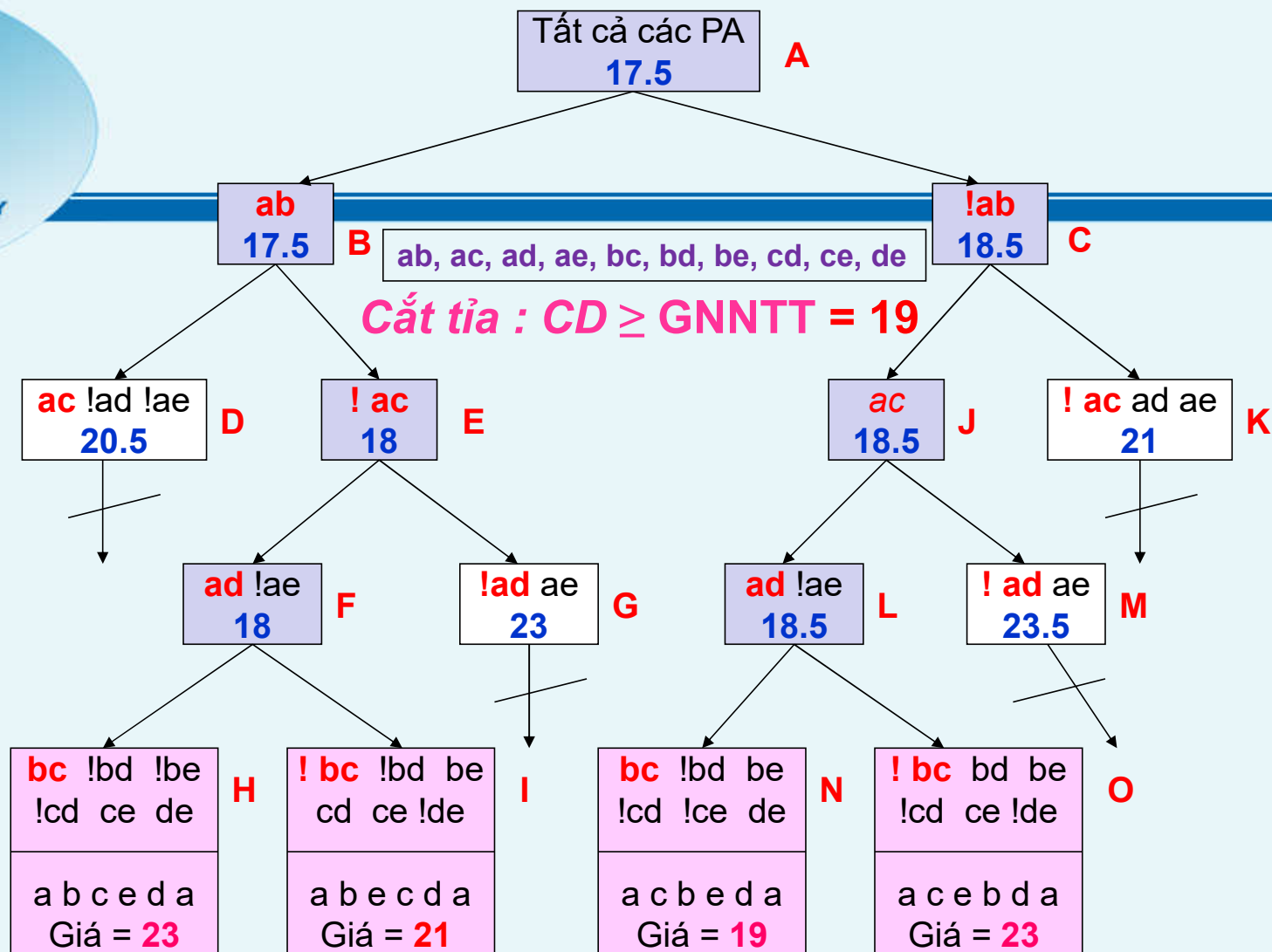
CANTHO UNIVERSITY







GNNTT = 23 → 21 → 19





CANTHO UNIVERSITY

Phương án kỹ thuật nhánh cận cho Bài toán TSP

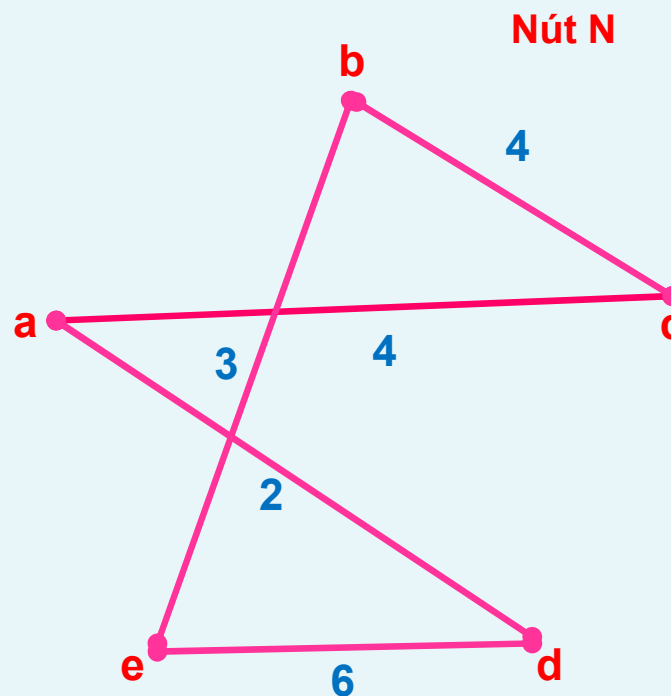
ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de

N

bc	!bd	be
!cd	!ce	de

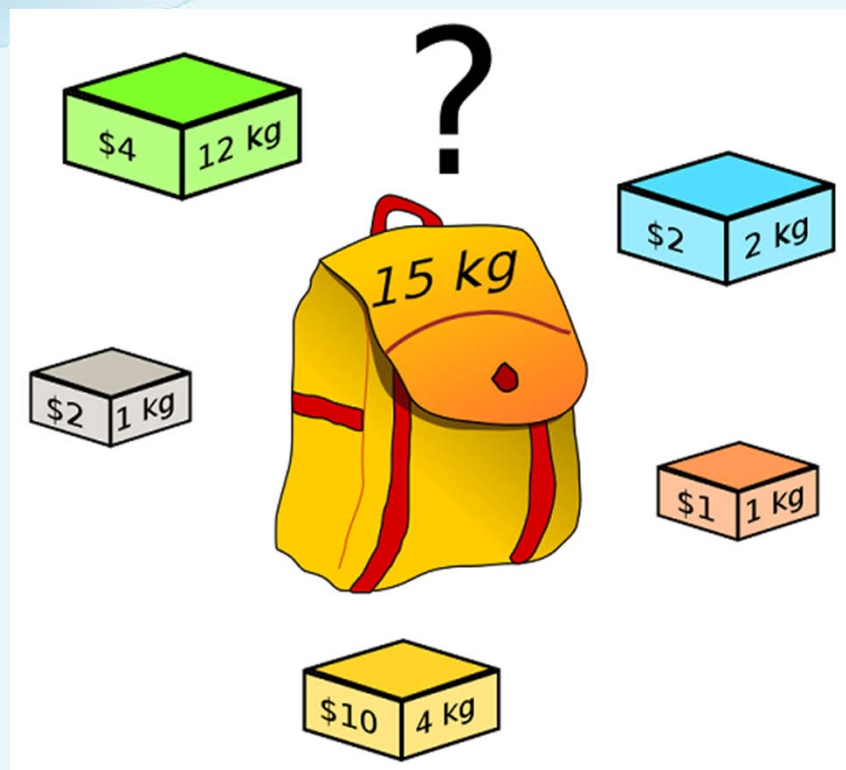
a c b e d a
Giá = 19

Giá phương án = GNNTT = 19





Bài toán CẢI BA LÔ



Trọng lượng = W

CBL 1

Số đồ vật = n

Đồ vật i

TL g_i

GT v_i

SL --

$f(X) \rightarrow \text{Max: CT}$



Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán cái ba lô

Danh sách đồ vật: sắp xếp theo **thứ tự giảm** của đơn giá **ĐG = GT : TL**

(1). Nút gốc biểu diễn trạng thái ban đầu của ba lô (chưa chọn một vật nào)

- **Tổng giá trị** được chọn: **TGT = 0.**
- **Cận trên** của nút gốc: **CT = W * Đơn giá lớn nhất.**

(2) Nút gốc có các nút con tương ứng với các khả năng chọn đồ vật có đơn giá lớn nhất. Với mỗi nút con, tính:

- **TGT** = TGT (nút cha) + số đồ vật được chọn * giá trị vật.
- **W** = W (nút cha) - số đồ vật được chọn * trọng lượng vật.
- **CT** = TGT + W * Đơn giá vật xét kế tiếp.



Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán cái ba lô

- (3). Trong các nút con, ưu tiên phân nhánh cho nút con có ***cận trên lớn hơn*** trước (Bài toán MAX). Các con của nút này tương ứng với các khả năng chọn đồ vật có đơn giá lớn tiếp theo. Với mỗi nút, xác định lại các thông số **TGT, W, CT** theo công thức bước (2).
- (4). Lặp lại bước 3 với chú ý: đối với những nút có ***cận trên \leq giá lớn nhất tạm thời (GLNTT)*** của phương án đã được tìm thấy thì không cần phân nhánh cho nút đó (cắt tỉa).
- (5). Nếu tất cả các nút đều đã được phân *nhánh* hoặc *bị cắt tỉa* thì phương án có giá lớn nhất là phương án cần tìm.



Công thức nhánh cận: BT cái ba lô

(1) Nút gốc

$$- \text{TGT} = 0$$

$$- \text{CT} = W * \text{ĐG (Vật max)}$$

(2) Nút trong

$$- \text{TGT} = \text{TGT (cha)} + \text{SL} * \text{GT}$$

$$- W = W (\text{cha}) - \text{SL} * \text{TL}$$

$$- \text{CT} = \text{TGT} + W * \text{ĐG (Vật kế)}$$



Kỹ thuật nhánh cận: Bài toán cái ba lô

Ví dụ: Có một ba lô có trọng lượng là $W = 37$ và 4 loại đồ vật với trọng lượng và giá trị tương ứng được cho trong bảng bên dưới:

$$\text{ĐG} = \text{GT} : \text{TL}$$

ĐV	TL	GT
A	15	30
B	10	25
C	2	2
D	4	6



ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0



CANTHO UNIVERSITY

Nút gốc

$$TGT = 0$$

$$CT = W * \text{ĐG (Vật max)}$$

$$TGT = 0$$
$$CT = 92.5$$

A

ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0

$$\text{CBL 1 } W = 37$$
$$n = 4$$

Phương án $X = (X_A, X_B, X_C, X_D)$

$$CT_A = W * \text{ĐG (Vật max)}$$
$$= 37 * \text{ĐG (B)}$$
$$= 37 * 2.5$$
$$= 92.5$$

J



CANTHO UNIVERSITY

CBL 1 $W = 37$
 $n = 4$

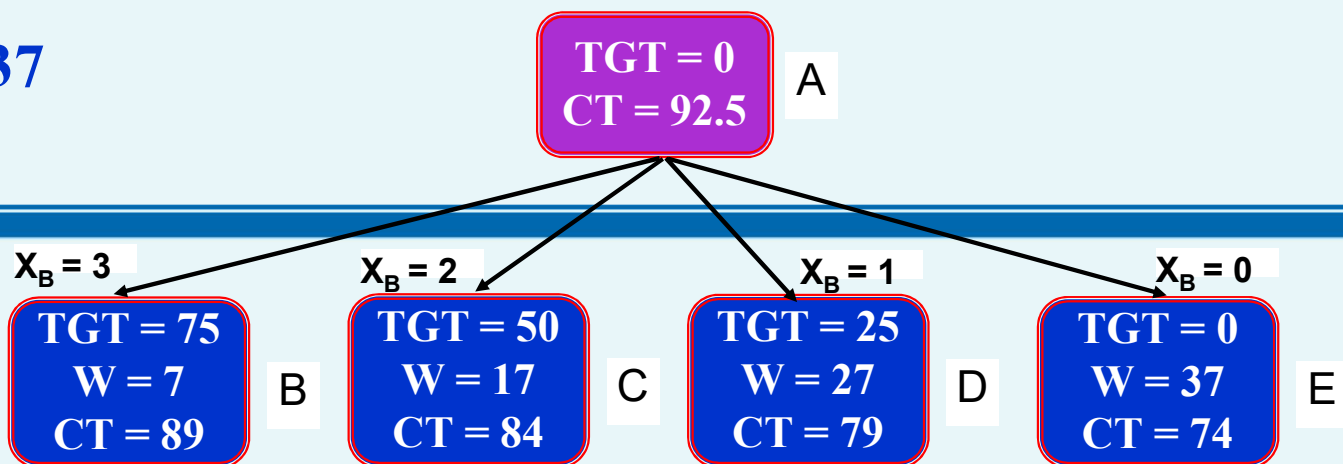
ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0

Nút trong

$$TGT = TGT(\text{cha}) + SL * GT$$

$$W = W(\text{cha}) - SL * TL$$

$$CT = TGT + W * \text{ĐG}(\text{Vật kế})$$



Xét vật B (ĐG lớn nhất, TL = 10)

$$X_B = 37/10 = 3$$

$$\text{Vậy } X_B : 0 \rightarrow 3$$

$$CT_B = TGT + W * \text{ĐG}(\text{Vật kế})$$
$$= 75 + 7 * 2.0 = 89$$



CBL 1 $W = 37$
 $n = 4$

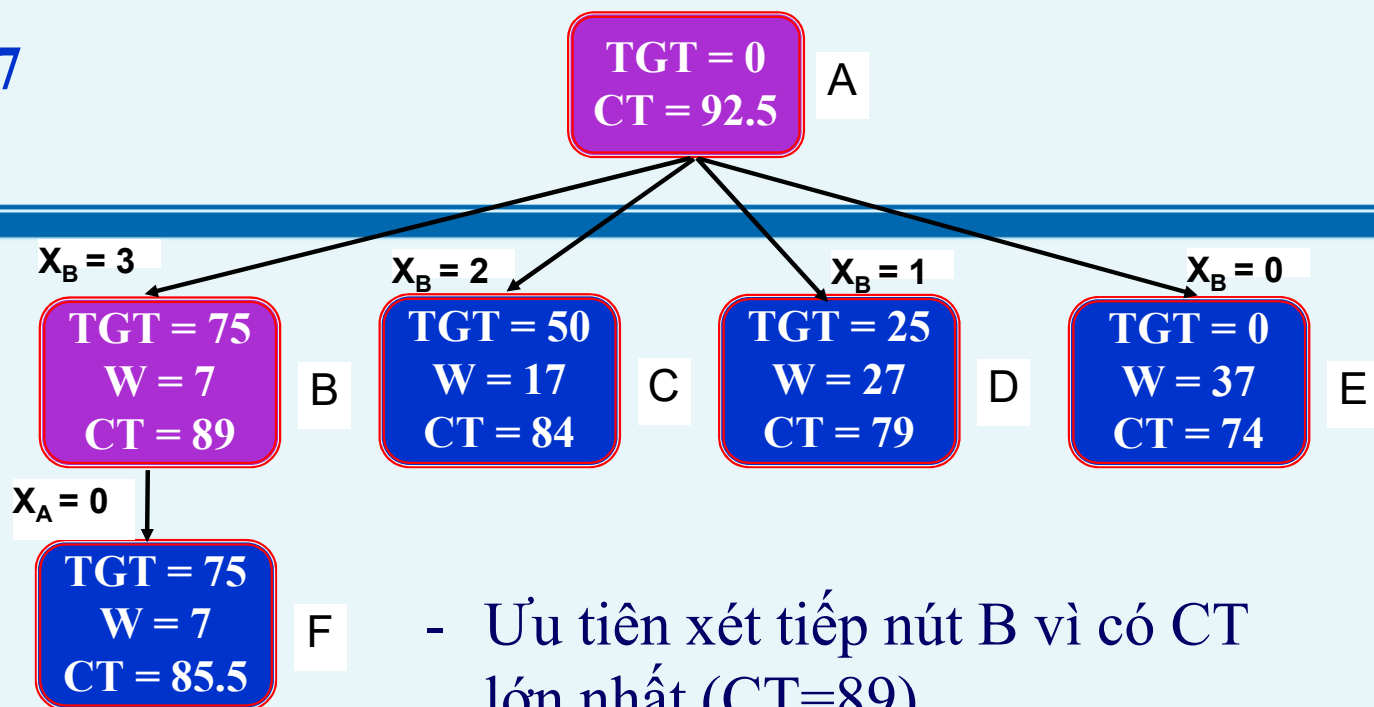
ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0

Nút trong

$$TGT = TGT(\text{cha}) + SL * GT$$

$$W = W(\text{cha}) - SL * TL$$

$$CT = TGT + W * \text{ĐG}(\text{Vật kế})$$



- Ưu tiên xét tiếp nút B vì có CT lớn nhất (CT=89)
- Xét vật kế tiếp A (TL=15)

$$X_A = 7/15 = 0$$

$$\text{Vậy } X_A = 0$$

$$CT_F = 75 + 7 * 1.5 = 85.5$$



CBL 1 $W = 37$
 $n = 4$

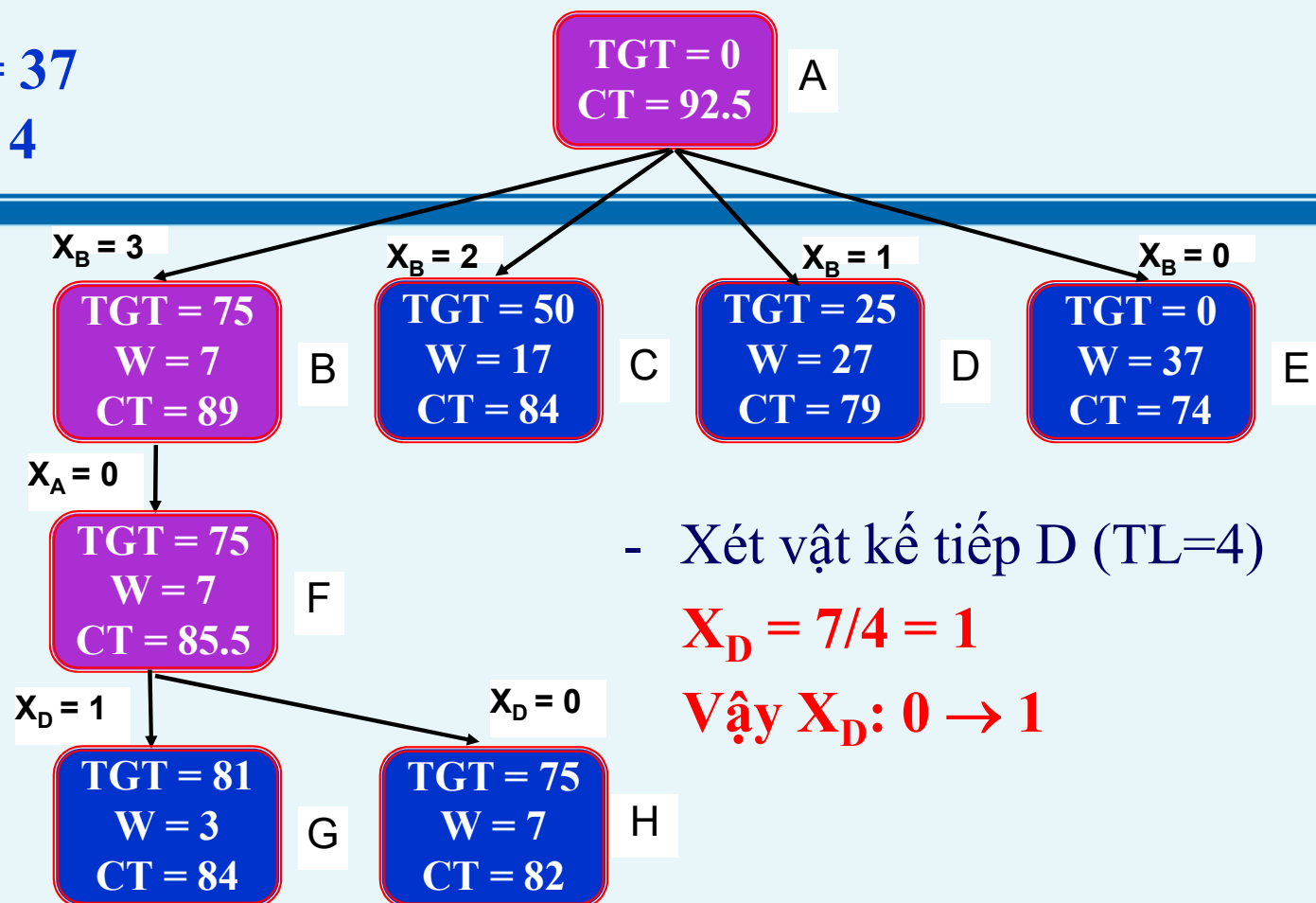
ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0

Nút trong

$$TGT = TGT(\text{cha}) + SL * GT$$

$$W = W(\text{cha}) - SL * TL$$

$$CT = TGT + W * \text{ĐG}(\text{Vật kế})$$



- Xét vật kế tiếp D (TL=4)

$$X_D = 7/4 = 1$$

Vậy $X_D: 0 \rightarrow 1$



CBL 1 $W = 37$
 $n = 4$

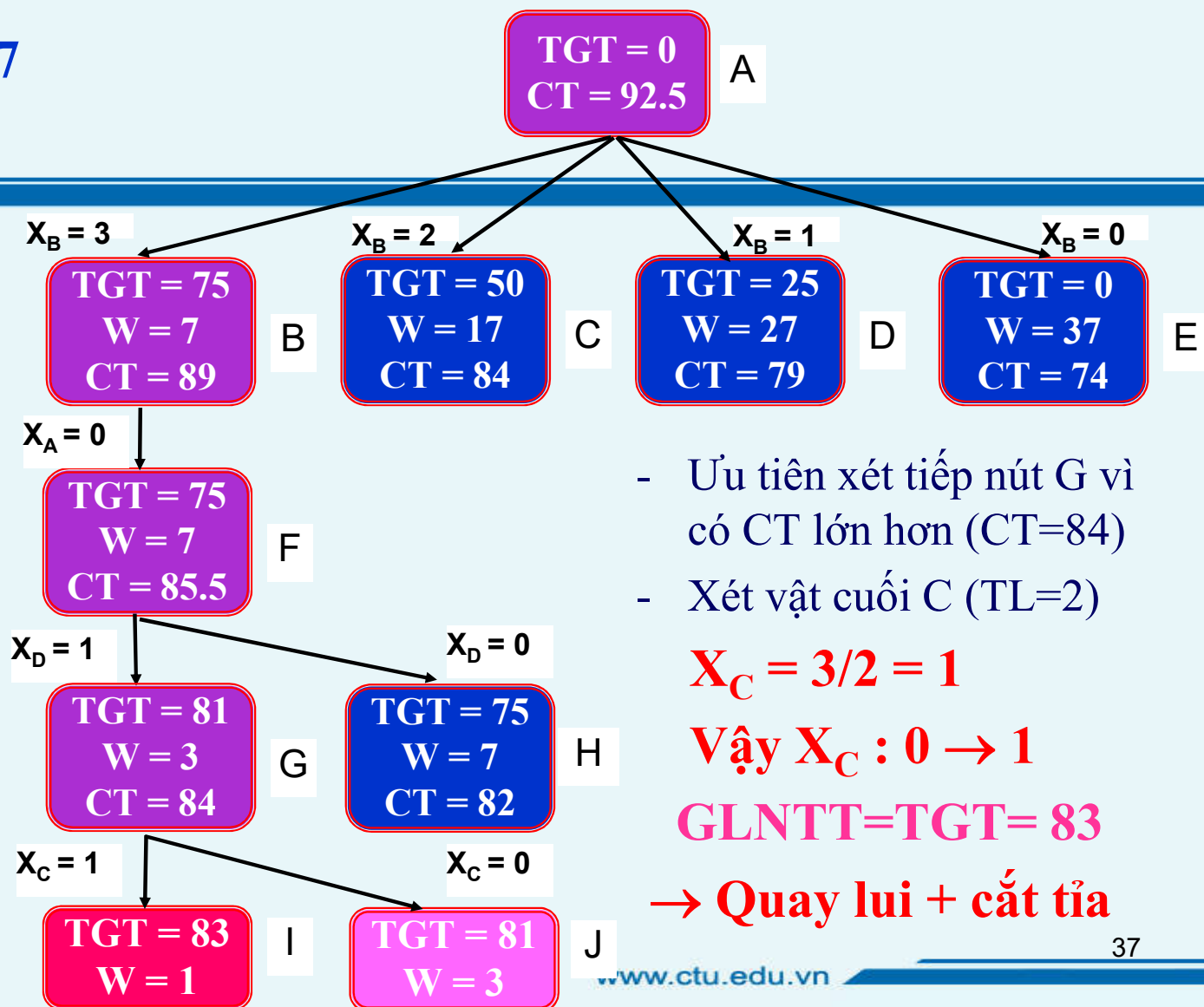
ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0

Nút trong

$TGT = TGT(\text{cha}) + SL * GT$

$W = W(\text{cha}) - SL * TL$

$CT = TGT + W * \text{ĐG}(\text{Vật kế})$



- Ưu tiên xét tiếp nút G vì có CT lớn hơn ($CT=84$)
- Xét vật cuối C ($TL=2$)

$$X_C = 3/2 = 1$$

Vậy $X_C : 0 \rightarrow 1$

$GLNTT = TGT = 83$

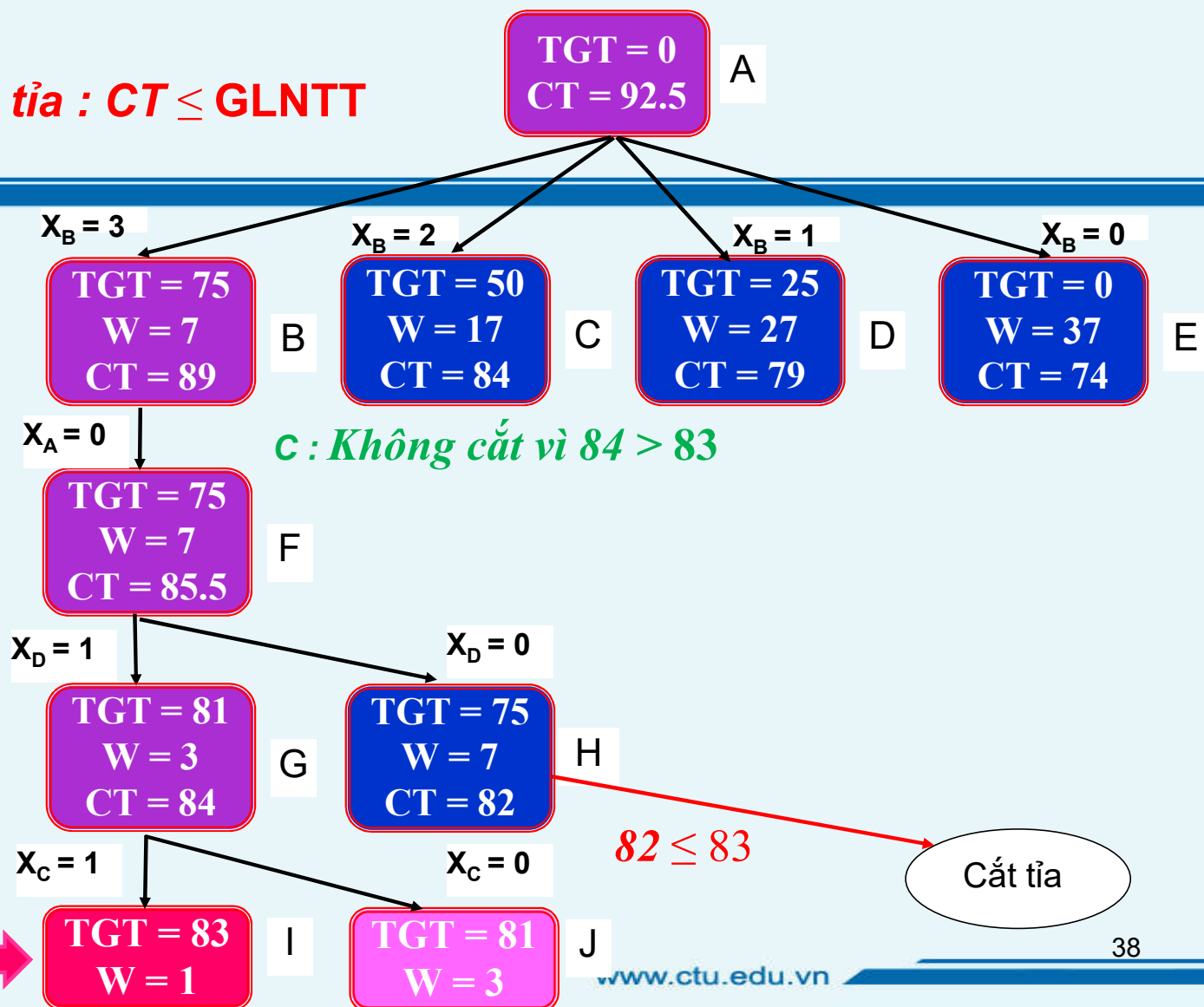
→ Quay lui + cắt tỉa



Cắt tỉa : $CT \leq GLNTT$

ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0

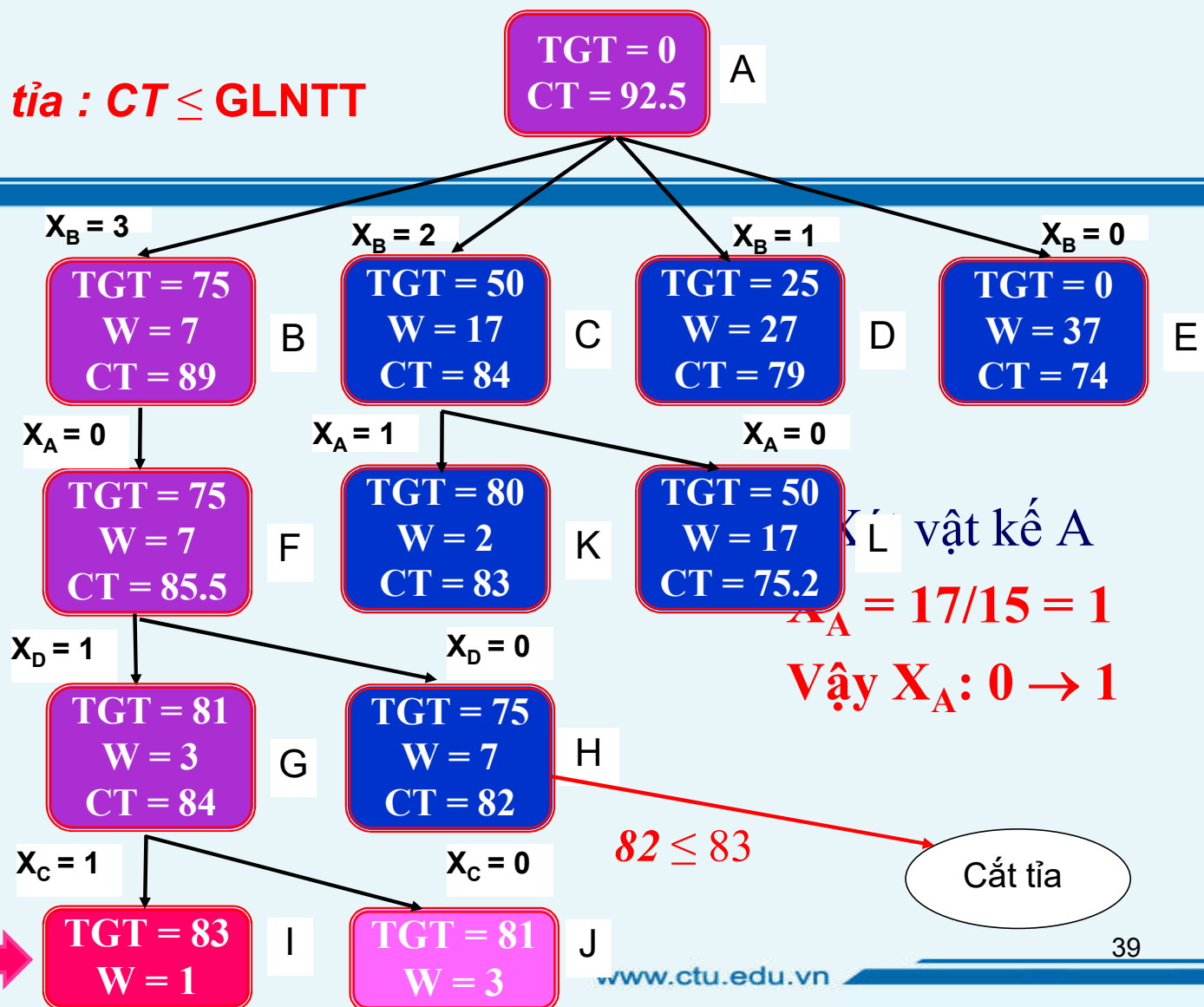
GLNTT = 83





Cắt tỉa : $CT \leq GLNTT$

ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0

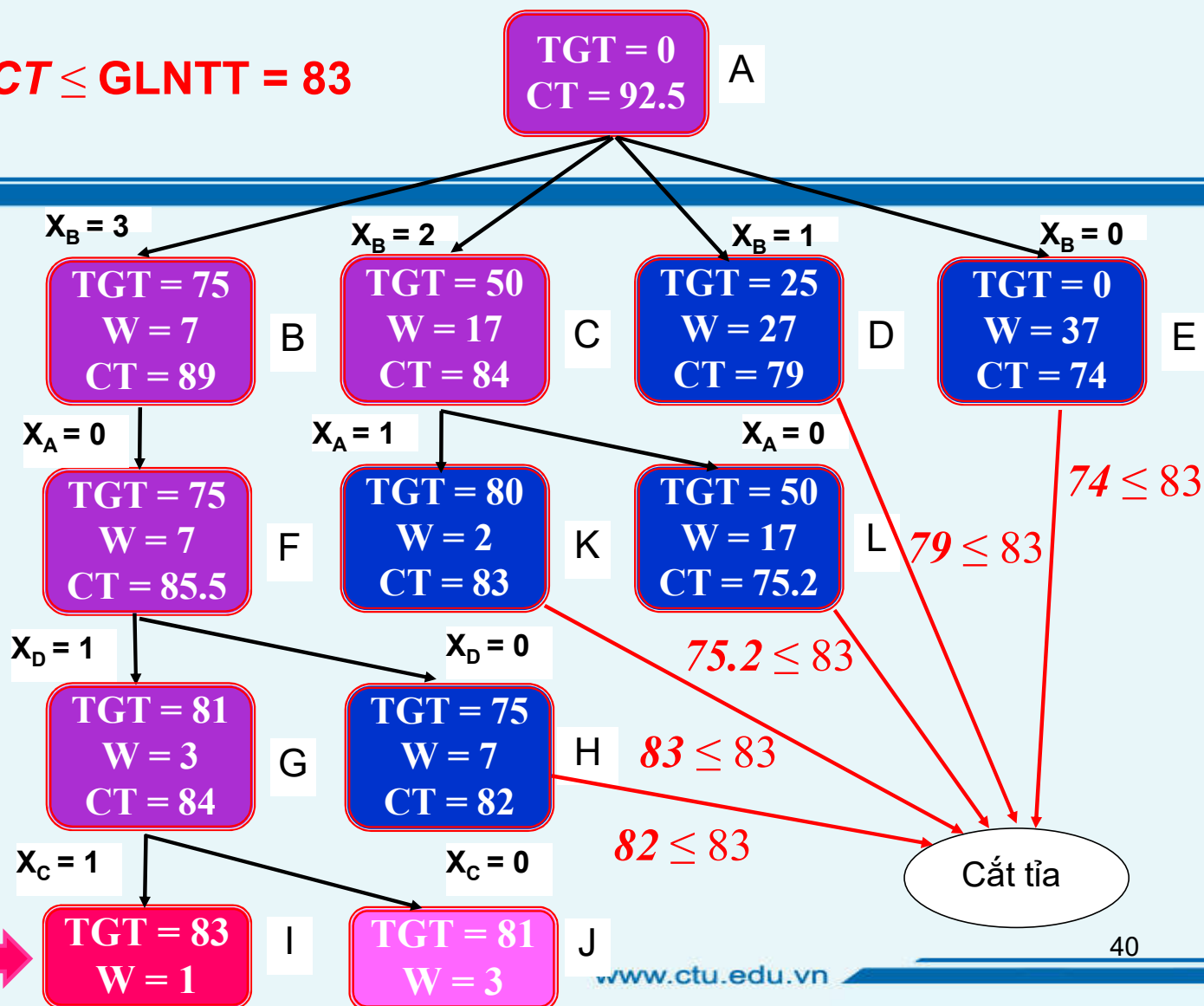




CANTHO UNIVERSITY

Cắt tỉa : $CT \leq GLNTT = 83$

ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0



GLNTT = 83



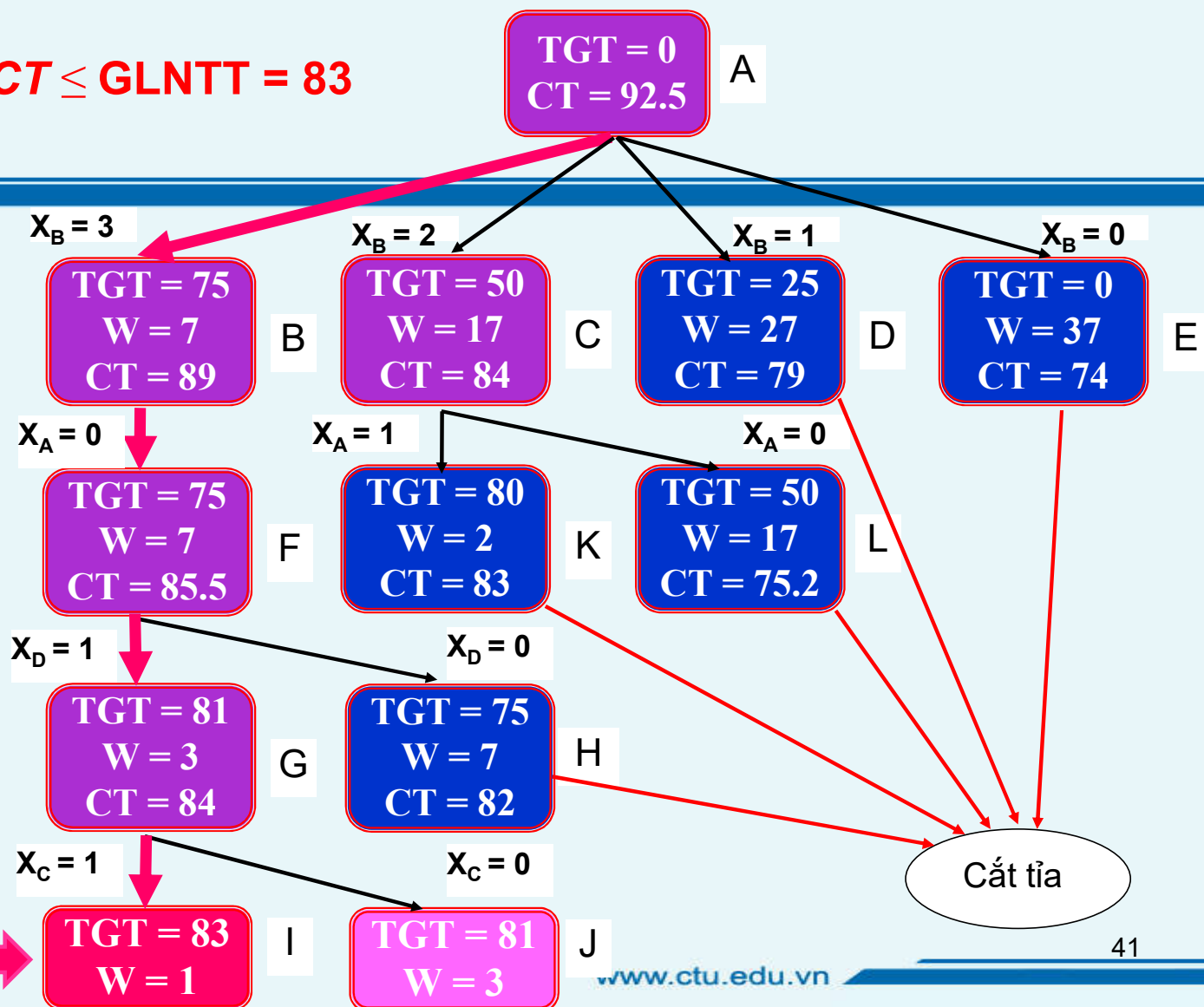
CANTHO UNIVERSITY

Cắt tỉa : $CT \leq GLNTT = 83$

ĐV	TL	GT	ĐG
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
D	4	6	1.5
C	2	2	1.0

PA: $X = (0, 3, 1, 1)$
TTL = 36
TGT = 83

GLNTT = 83





Ghi nhớ

Điều kiện cắt tỉa nhánh trên cây tìm phân nhánh khi áp dụng Kỹ thuật nhánh cận: Với mỗi nút trên cây, cần tính một *giá trị cận* (giá trị gần với giá của các phương án).

Bài toán MIN: Xác định **cận dưới**

Cắt khi $CD \geq GNNTT$

Bài toán MAX: Xác định **cận trên**

Cắt khi $CT \leq GLNTT$



Kỹ thuật NHÁNH CẬN: Ưu và khuyết điểm

- **Ưu điểm:** Cho phép tìm được **phương án tối ưu**
- **Khuyết điểm:** Cần phải có cách *ước lượng giá trị cận tốt* mới có thể cắt được nhiều nhánh → hạn chế không gian tìm kiếm nhằm nhanh chóng xác định phương án tối ưu.



Bài tập

Bài tập: Cho bài toán cái ba lô với trọng lượng của ba lô $W=30$ và 4 loại đồ vật được cho trong bảng bên dưới. Tất cả các đồ vật có thể được lấy với số lượng không hạn chế. Giải bài toán bằng **kỹ thuật nhánh cận** ?

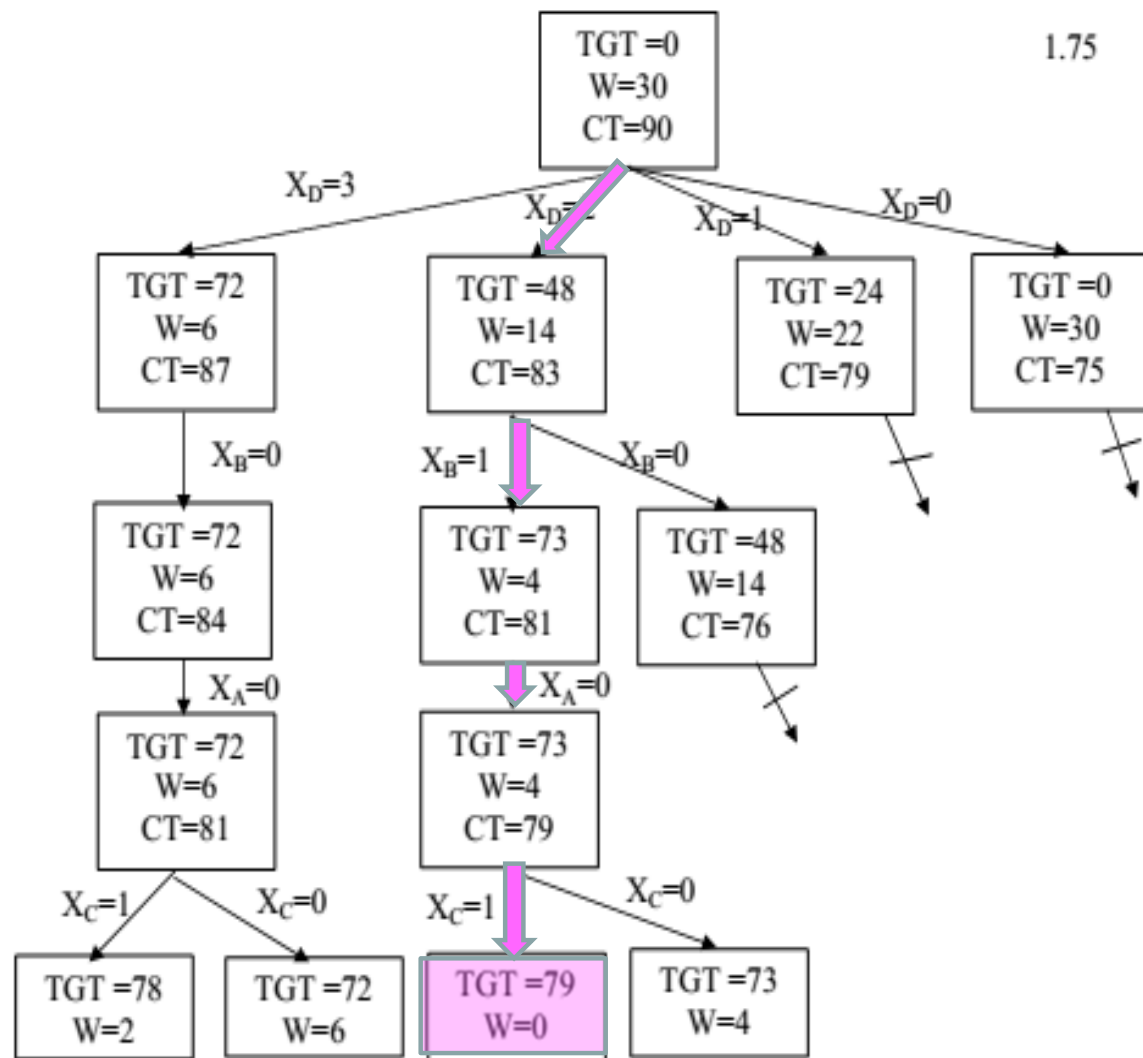
Loại đồ vật	Trọng lượng	Giá trị
A	15	30
B	10	25
C	4	6
D	8	24



CBL 1 $W = 30$
 $n = 4$

ĐV	TL	GT	ĐG
D	8	24	3.0
B	10	25	2.5
A	15	30	2.0
C	4	6	1.5

PA: $X = (0, 1, 1, 2)$
TTL = 30
TGT = 79



Vậy: Phương án cần tìm là: 2D, 1B, 0A, 1C.
Tổng giá trị = 79, tổng trọng lượng = 30

1.75

0.25