CHAPITRE 2

TRIGONALISATION DES MATRICES ET APPLICATIONS A LA RESOLUTION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS

I. TRIGONALISATION

I. 1. Rappels sur les matrices

Définition : Une matrice $(m \times n)$ est un ensemble d'éléments (appelés coefficients ou composantes), rangés en tableau à m lignes et n colonnes de la forme

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Notation : On note une matrice par une lettre capitale et on la représente par un tableau à m lignes et n colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les éléments a_{ij}, où i est l'indice de ligne et j celui de la colonne peuvent être pris dans divers ensembles comme par exemple :

- Les entiers $\mathbb{N}$
- Les réels $\mathbb{R}$
- Les complexes $\mathbb{C}$
- …

Lorsque les éléments de la matrice A définie ci-dessus sont dans un ensemble $\mathbb{K}$, on écrit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Si $m = n$, alors on peut tout simplement écrire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple : La matrice suivante n'est pas à coefficients dans $\mathbb{N}$, mais plutôt dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Donc $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Lorsque $n = m$, on dit que la matrice est une matrice **carrée**. Il existe une matrice carrée ayant 1 partout sur la diagonale et 0 partout ailleurs. Cette matrice est appelée la matrice **identité** et notée I ou I_n (si la matrice a n lignes). Par exemple, lorsque $n = 3$, on a $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition : Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est $det(A - \lambda I)$ (c'est un polynôme en λ).

<u>Exemple</u> : Le polynôme caractéristique de $D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est

$$\det(D - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

Définition : Un polynôme P de $\mathbb{K}[\lambda]$ est dit **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il se factorise sous la forme

$$P(\lambda) = C(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n),$$

où tous les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Autrement dit, P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{K}$. La propriété d'être scindé dépend du corps $\mathbb{K}$. Par exemple, le polynôme $\lambda^2 + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$, car il se factorise en $(\lambda - i)(\lambda + i)$, mais il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, le polynôme P est dit **scindé à racines simples** si dans la factorisation précédente tous les a_i sont tous distincts.

I. 2. Matrices trigonalisables

Définition : On rappelle qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est ***triangulaire supérieure*** si $a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients sous la diagonale sont tous nuls. Ceux sur la diagonale ou au-dessus peuvent être nuls ou pas.

Définitions :

• Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
• Un endomorphisme f de E est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure.

Remarque : une matrice diagonalisable est en particulier trigonalisable.

Le théorème que nous énonçons ci-dessous est très utilisé pour justifier qu'une matrice est trigonalisable.

Théorème 1.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. un endomorphisme) est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique χA (resp. χf) est scindé sur $\mathbb{K}$.

Lorsque = $\mathbb{C}$, nous en déduisons le résultat suivant :

Corollaire 1. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Exemple 1.
Soit $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $\chi A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Si on considère cette même matrice A comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors elle est trigonalisable (et ici même diagonalisable) sur $\mathbb{C}$: il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Méthode : Pour trigonaliser une matrice, il n'y a pas de méthode globale à connaître a priori.
- La trigonalisabilité d'une matrice s'obtient après le calcul de son polynôme caractéristique et le constat que ce polynôme est scindé sur le corps de référence de la matrice.
- Si la matrice est considérée comme matrice complexe, elle est donc toujours trigonalisable.
- On verra les différentes situations pouvant se présenter pour une matrice 3×3

<u>Exemple 1</u> : ***A*** a deux valeurs propres, l'une simple, l'autre double et ***A*** n'est pas diagonalisable.

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est donné par

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Donc A est trigonalisable. Déterminons les sous-espaces propres.

- Pour $\lambda = 1$, on a $(A - I_3)X = 0$. Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e} \quad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}.$$

La résolution de ce système nous donne $x = y = z$. Et ainsi,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc Le sous-espace propre de A associé à $\lambda = 1$ est $\boldsymbol{E_1} = \langle \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \rangle$

- Pour $\lambda = 2$, on a

$(A - 2I_3)X = 0$. Ce qui donne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{i.e } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x = 0 \\ 3x - 2y - 2z = 0 \end{cases}.$$

La résolution nous donne $x = 0$ et $y = -z$. Et ainsi,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc Le espace propre de A associé à $\lambda = 2$ est $\boldsymbol{E_2} = \langle \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} \rangle$

<u>Exercice :</u> Il est claire que la matrice A n'est pas diagonalisable. Pourquoi ?

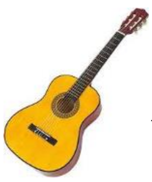
Dans ce qui suit, nous posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nous allons choisir un vecteur e_3 dans le but de compléter e_1, e_2 de façon à ce que $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Alors, la matrice A dans la nouvelle base $\mathcal{B}_0$ s'écrit alors $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On choisit par exemple : $e_3 = (1,1,0)$, de telle sorte que : $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. On vérifie en utilisant le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les composantes de e_1, e_2 et e_3 que est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, on vérifie que

$Ae_3 = (2,1,1) = 2e_3 - e_2 = \mathbf{0}\ e_1 + (\mathbf{-1})\ e_2 + \mathbf{2}e_3$.

On en déduit alors que la matrice A dans la base $\mathcal{B}_0$ est donc

$Mat_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv T$ et avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $T = P^{-1}AP$.



<u>Autre méthode :</u> (Trigonalisation de A en réduite de Jordan)

On conserve les mêmes deux premiers vecteurs (propres de A) dans cet ordre, et il est possible de trouver e_3' dans $\mathbb{R}^3$ de telle sorte que :

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e'_3)$ soit une base de de $\mathbb{R}^3$ et $Mat_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour y arriver, on pose $e_3' = (x, y, z)$ et les composantes du vecteur $e_3' = (x, y, z)$ s'obtiennent en résolvant : $Ae'_3 = \mathbf{1}\ e_2 + \mathbf{2}\ e_3$, soit en traduction matricielle dans la base canonique, en résolvant le système :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On trouve alors $x = -1, y + z = -1.$ ce qui laisse encore le choix. On peut donc choisir $z = 0$ et $y = -1$ et proposer alors $e_3' = (-1, -1, 0)$. La famille $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e'_3)$ est donc libre c'est-à-dire une base et

$Mat_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv T'$ et avec $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $T' = P'^{-1}AP'$.

<u>Exemple 2</u> : La matrice A a une valeur propre triple, et un espace propre associé de dimension 2.

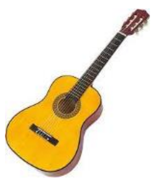
Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En développant, on trouve le polynôme caractéristique est donné par $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$.
Donc la valeur $\lambda = 1$ est l'unique valeur propre de A. Le sous-espace propre associé à cette valeur propre triple est donné par $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Il est clair que A n'est pas diagonalisable mais A est trigonalisable ; pourquoi ?

Pour trigonaliser A, on pose $e_1 = (1,0,0)$ et $e_2 = (0, -1, 1)$. Nous nous proposons de compléter les vecteurs e_1 et e_2 par un vecteur e_3 de façon à obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Nous choisissons $e_3 = (0,1,1)$ et on vérifie facilement que pour ce choix de e_3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Alors, $u(e_3) = Ae_3 = (0, -1, 3) = 2e_2 + e_3$. Ce qui conduit à poser

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on a } P^{-1}AP = T.$$



<u>Autre méthode :</u> (Trigonalisation de A en réduite de Jordan)

On peut trouver une base $\mathcal{B}_2 = (e_1', e_2', e_3')$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$Mat_{\mathcal{B}_2}(u) = T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce résultat est un théorème, mais on va le vérifier en pratique ci-dessous.
Pour obtenir $\mathcal{B}_2$, on commence par chercher e'_3 , en remarquant qu'on doit avoir :

- ➢ $e'_3 \notin E_1(u)$ donc $(u - IdE)(e'_3) \neq 0$,
- ➢ $u(e'_3) = e'_2 + e'_3$, soit $(u - IdE)(e'_3) = e'_2 \in E_1(u)$ car $(u - IdE)(e'_2) = (u - IdE)^2(e'_3) = 0$,
- ➢ $e'_1 \in E_1(u)$ avec (e'_1, e'_2) libre.

On choisit pour ce faire e'_3 hors de 1 (u) , par exemple :$e'_3 = (0,1,0)$.
On pose alors: $e'_2 = (u - IdE)(e'_3) = u(e'_3) - e'_3$, qui est non nul puisque $(u - IdE)(e'_3) \neq 0$. En effet ici, on a bien $e'_2 = (0,0,1) - (0,1,0) = (0,-1,1) \neq (0,0,0)$ et on a bien $e'_2 \in E_1(u)$.
On complète alors e'_2 avec e'_1 en une base de $E1\ (u)$, par exemple : $e'_1 = (1,0,0)$. On peut montrer dans le cas général (ou vérifier à la main) que la famille $\mathcal{B}_2 = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est toujours libre donc forme une base de $\mathbb{R}^3$, et par construction que

$$Mat_{\mathcal{B}_2}(u) = T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si enfin, on pose $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien finalement $T_2 = P'^{-1}AP'$.

<u>Exemple 3</u> : **A** a une valeur propre triple, et un espace propre associé de dimension 1.

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Après calcul du polynôme caractéristique, on trouve (et on factorise $P_A(\lambda)$) : $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$. Le seul sous espace propre de A est $E_1(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ et la matrice A n'est pas diagonalisable pour les mêmes raisons évoquées à l'exemple précédent.
On peut alors procéder par analyse-synthèse pour trigonaliser A , mais le plus simple est d'appliquer systématiquement la technique qui suit.

Trigonalisation en réduite de Jordan :

On veut trouver une base $\mathcal{B}_3 = (e''_1, e''_2, e''_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$Mat_{\mathcal{B}_3}(u) = T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On va donc chercher cette base $\mathcal{B}_3 = (e''_1, e''_2, e''_3)$ telle que :

- $e''_3 \in E_1(u)$, i.e $(u - idE)(e''_3) \neq 0$.
- e''_2 tel que $u(e''_3) = e''_2 + e''_3$ i.e $e''_2 = u(e''_3) - e''_3$
- e''_1 tel que $u(e''_2) = e''_1 + e''_2$, soit $e''_1 = u(e''_2) - e''_2$ et on veut que $e''_1 \neq 0$, donc avec $e''_2 \notin E_1(u)$.
  e''_3 doit donc vérifier $(u - idE)^2(e''_3) = (u - idE)(e''_2) = e''_1 \neq 0$, soit $e''_3 \notin Ker((u - idE)^2)$.

On calcule donc $Ker((u - idE)^2)$ et pour cela, $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puis
$Ker((u - idE)^2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = z\}$. On choisit ainsi par exemple
$e''_3 = (1,0,0) \notin Ker((u - idE)^2)$. On pose ensuite
$e''_2 = u(e''_3) - e''_3 = (0,-1,-1) - (1,0,0) = (-1,-1,-1)$.
On constate qu'on a bien $e''_2 \notin E_1(u)$. Enfin,
$e''_1 = u(e''_2) - e''_2 = (2,-1,-2) - (-1,-1,-1) = (-1,0,-1)$.
On constate à nouveau qu'on a toujours $e''_1 \in E_1(u)$. Ce dernier point était prévisible car $(u - idE)(e''_1) = (u - idE)^3(e''_3) = 0$. Ce résultat est garanti par le théorème de Cayley-Hamilton. La famille $\mathcal{B}_3 = (e''_1, e''_2, e''_3)$=est alors une base de $\mathbb{R}^3$ (facile à vérifier !) et on a $Mat_{\mathcal{B}_3}(u) = T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a alors $T_3 = P^{-1}AP$.

Remarques :
- *La matrice P (ou la nouvelle base de $\mathbb{R}^3$) permettant de trigonaliser A n'est pas unique,*
- *Dans les deux derniers exemples, si la matrice A admet pour valeur propre triple la valeur α, la matrice T semblable à A sera égale à celle proposée, mais en changeant ses coefficients diagonaux en α.*

II. APPLICATION A LA RESOLUTION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS

EXEMPLE : On se propose de résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'(t) = 3x(t) - y(t) - z(t) + 1} \\ \boldsymbol{y'(t) = -x(t) + 2y(t) - 2} \\ \boldsymbol{z'(t) = 3x(t) - 2y(t) - 1} \end{cases}$$

Avec la condition initiale $x(0) = 3, y(0) = -1$ et $z(0) = 0$.
Nous allons mettre ce système sous la forme matricielle. Ainsi, il s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + B \\ X(0) = X_0 \end{cases} \qquad (1)$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notons que la matrice A a été trigonalisée à **l'exemple 1**. Donc dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e'_3)$, la matrice A vérifie la relation $T_0 = P_0^{-1}AP_0$ avec

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la résolution du système (1), Nous faisons un changement d'inconnue. On pose $X = P_0 Y$ i.e $Y = P_0^{-1} X$. Alors, en écrivant notre système avec la nouvelle variable Y, on obtient :

$$Y'(t) = P_0^{-1} X'(t) = P_0^{-1}(AX(t) + B) = P_0^{-1}AX(t) + P_0^{-1}B = P_0^{-1}AP_0 Y + P_0^{-1}B$$

Ainsi, comme $P_0^{-1}AP_0 = T_0$, on obtient : $Y'(t) = T_0\, Y + P_0^{-1}B$. De même, $Y_0 = P_0^{-1}\, X$ avec $P_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $Y_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $P_0^{-1}B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, le nouveau système en Y s'écrit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 4 \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) - 3 \\ y_3'(t) = 2\, y_3(t) - 5 \end{cases} \qquad (2)$$

Nous allons résoudre le système (2). En résolvant la troisième équation du système par la méthode de la variation des constantes, on a $y_3(t) = \frac{5}{2} + Ce^{2t}$. Comme $y_3(0) = -7$, on obtient alors $y_3(t) = \frac{5}{2} - \frac{19}{2}e^{2t}$.

En substituant l'expression de $y_3(t)$ dans la seconde équation, on obtient :

$y_2'(t) = 2y_2(t) - \frac{1}{2} - \frac{19}{2}e^{2t}$, avec $y_3(0) = -4$. En se servant de la méthode par la variation des constantes, on obtient $y_2(t) = \frac{1}{4} - \left(\frac{19}{2}t + \frac{17}{4}\right)e^{2t}$. Par le même procédé, la première équation du système (2) donne $y_1(t) = 4 - 8e^t$.

Pour en déduire les solutions du système (1), nous nous servons de la relation $X = P_0Y$. On trouve alors : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - 8e^t \\ \frac{1}{4} - \left(\frac{19}{2}t + \frac{17}{4}\right)e^{2t} \\ \frac{5}{2} - \frac{19}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{3}{2} - 8e^t + \frac{19}{2}e^{2t} \\ y(t) = \frac{7}{4} - 8e^t - \frac{19}{2}te^{2t} + \frac{55}{4}e^{2t} \\ z(t) = \frac{15}{4} - 8e^t + \frac{19}{4}te^{2t} + \frac{17}{4}e^{2t} \end{cases}$$

TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE 1

Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables ? Si oui, là trigonaliser et calculer M^n et N^n le cas échéant.

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le polynôme caractéristique de K_i, $i = 1,2,3$. Après avoir justifié que K_i est trigonalisable, trigonaliser K_i.

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3

Rappel sur la résolution des équations différentielles affines par la méthode de variation de la constante. Soit l'équation différentielle à résoudre :

$$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}) = 2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}). \qquad (2)$$

où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. Soit x et y deux solutions de l'équation (2). Montrer que la fonction $x - y$ est solution de l'équation différentielle linéaire suivante :
$$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}) = 2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \qquad (3)$$
2. En déduire que toute solution x de l'équation $(\mathbf{2})$ s'écrit sous la forme $x(t) = z(t) + r(t)$, où r est une solution fixée de (2), dite solution particulière, et où z parcourt l'ensemble des solutions de $(\mathbf{2})$.
3. Chercher une solution particulière de (2) sous la forme $r(t) = k(t)e^{2t}$. En déduire la solution de (2) satisfaisant la condition initiale $(0) = x_0$.

EXERCICE 4

1. Soit le système différentiel suivant :
$$(E) \qquad \begin{cases} x'(\mathrm{t}) = x(\mathrm{t}) + y(\mathrm{t}) + z(\mathrm{t}) \\ y'(\mathrm{t}) = 2y(\mathrm{t}) + 2z(\mathrm{t}) \\ z'(\mathrm{t}) = x(\mathrm{t}) - y(\mathrm{t}) + 3z(\mathrm{t}) \end{cases}$$
Exprimer le système (E) sous la forme $X' = AX$, où A est une matrice 3×3 à coefficients réels.
2. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = P\,T\,P^{-1}$.
3. En posant $Y = P^{-1}$ X, montrer que les coordonnées u, v et w de Y satisfont un système différentiel triangulaire. Résoudre ce système triangulaire en utilisant la méthode de la variation de la constante.
4. En déduire l'expression de l'unique solution $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ du système (E) satisfaisant les conditions initiales
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{z}(0) = 1.$$

EXERCICE 5

On considère le système différentiel ci-dessous

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) - z(t) + 3 \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \quad -1 \\ z'(t) = 2x(t) + 2z(t) - 5 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (1) sous la forme $X' = AX + b$, où, A, X et b sont à préciser
2. Trigonaliser A
3. Résoudre (1) lorsque $x(0) = 1, y(0) = 0$ et $z(0) = -2$.

EXERCICE 6

On considère le système différentiel ci-dessous

$$(2)\qquad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = -x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

4. Ecrire le système (1) sous la forme $X' = BX$, où, A et X sont à préciser
5. Trigonaliser B
6. Résoudre (1) lorsque $x(0) = -1, y(0) = 1$ et $z(0) = 2$.

EXERCICE 7

On considère la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de E et le factoriser.
2. Déterminer ses valeurs propres et les sous espaces propres associés.
3. Trigonaliser E et calculer $E^n, n \in \mathbb{N}^*$.
4. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 3z + 4 \\ y' = 4x + 10y - 12z - 1 \\ z' = 3x + 6y - 7z + 7 \end{cases} \qquad \text{avec } x(0) = -1, y(0) = 4 \text{ et } z(0) = 0.$$

EXERCICE 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et le factoriser.
2. Déterminer les valeurs propres de A
3. Justifier que la matrice A est trigonalisable.
4. Déterminer les sous espaces propres associés.
5. Trigonaliser alors A.
6. On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$\textbf{(S)}\qquad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) - z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

muni des conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 2$ et $z(0) = -1$.

a. Ecrire le système sous la forme matricielle $X' = AX$ en précisant X.
b. Effectuer un changement d'inconnu $X = PY$ de façon à obtenir un système triangulaire de la forme $Y' = TY$ (On précisera les matrices Pet T ainsi que

les conditions initiales du nouveau système différentiel en Y).

c. Résoudre le système $Y' = TY$ avec ses conditions initiales et en déduire la solution du système (S).

EXERCICE 9

On considère la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Quelles sont ses valeurs propres ? On désignera par λ_1 la plus grande valeur propre et par λ_2 la plus petite.
3. A est-elle trigonalisable ? Justifier !
4. Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2 associés respectivement à λ_1 et à λ_2.
5. On suppose que les sous-espaces E_1 et E_2 associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont engendrés par les vecteurs v_1 et v_2 respectivement. Compléter ces vecteurs avec le vecteur $v_3 = (1, 0, 0)$. Trigonaliser alors A. (On vous demande de construire une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire supérieure que nous noterons T)
6. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = 4x(t) - 7y(t) + 8z(t) \\ z'(t) = 6x(t) - 7y(t) + 7z(t) \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

muni des conditions initiales suivantes $x(0) = 2,\ y(0) = -1$ et $z(0) = 1$.

a. Ecrire le système (S) sous forme matricielle.
b. Après un changement de variables bien précis, écrire le nouveau système (S') sous une forme plus simple, ainsi que ses conditions initiales.
c. Résoudre le système (S').
d. En déduire les solutions du système (S).