1 Число обусловленности матрицы

Условие:

$$A = \begin{cases} 2x + y = 2 \\ (2-\epsilon)x + y = 1 \end{cases}, \quad \epsilon > 0$$

Найти: $\mu(A),\ x,\ y$

Решение

Найдём x, y

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ x = \frac{1-y}{2-\epsilon} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2x-1}{2-\epsilon} \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\epsilon} \\ y = 2 - \frac{2}{\epsilon} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2-\epsilon & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 2 - 2 + \epsilon = \epsilon$
$||A||_1 = max(2 + |2-\epsilon|, 2)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \epsilon - 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$||A^{-1}||_1 = \frac{1}{\epsilon} max(3, |\epsilon - 2| + 1)$

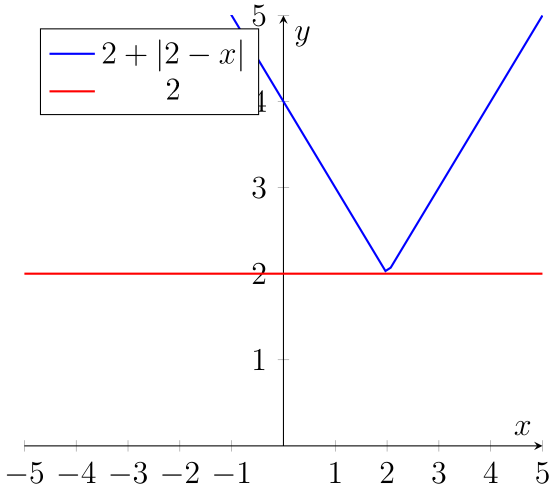

Рис. 1: Графики функций $2 + |2-x|$ и 2.

Из Рис.1 видно, что максимумом из двух функций на промежутке положительных чисел является $2 + |2-\epsilon|$.

Из рис 2 видно, что на $(0, 4)$ большей функцией является 3, а для $x \in (4, +\infty)$ – 1+|x-2|.

Рассмотрим три промежутка: $(0, 2),\ (2, 4),\ (4, +\infty)$.

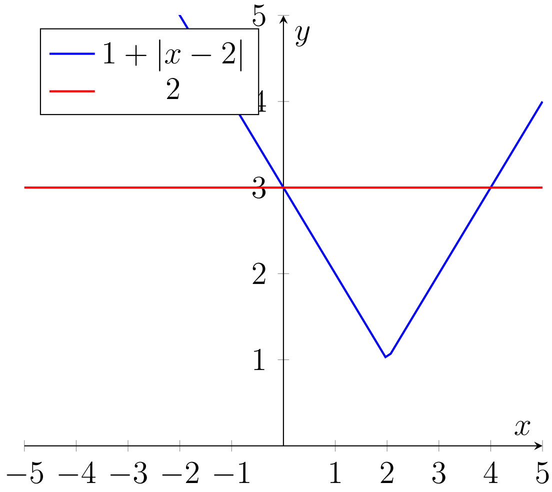

Рис. 2: Графики функций $1 + |2 - x|$ и 3.

$$(0, 2)$$

Норма $||A||_1$ будет равна $4 - \epsilon$
Норма $||A^{-1}||_1$ будет равна $\frac{3}{\epsilon}$
Таким образом, число обусловленности на данном промежутке будет равно: $\mu(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = \frac{12}{\epsilon} - 3$

$$(2, 4)$$

Норма $||A||_1$ будет равна ϵ Норма $||A^{-1}||_1$ будет равна $\frac{3}{\epsilon}$
Таким образом, число обусловленности на данном промежутке будет равно: $\mu(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = 3$

$$(4, +\infty)$$

Норма $||A||_1$ будет равна ϵ
Норма $||A^{-1}||_1$ будет равна $\frac{\epsilon-1}{\epsilon}$
Таким образом, число обусловленности на данном промежутке будет равно: $\mu(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = \epsilon - 1$

2 Ответ:

$$\mu(a) = \begin{cases} \frac{12}{\epsilon} - 3 & \epsilon \in (0, 2) \\ 3 & \epsilon \in (2, 4) \\ \epsilon - 1 & \epsilon \in (4, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\epsilon} \\ y = 2 - \frac{2}{\epsilon} \end{cases}$$