МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №4
«Модель движения точки на вращающейся системе»
по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9122-01.03.02мкт
Вершинин Д.А. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*
Проверил профессор д.ф.-м. н.
Пермяков М. С. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 31 » марта 2025 г.

г. Владивосток

2025

Оглавление

Введение

В нашем мире все процессы зависят от точки зрения наблюдателя. Разные наблюдатели могут видеть одни и те же явления по-разному. Например, если находиться в равномерно движущемся поезде и бросить теннисный мяч вниз, он будет отскакивать от пола, описывая прямолинейную траекторию для пассажира. Однако для наблюдателя, стоящего на земле и не движущегося вместе с поездом, траектория мяча будет выглядеть как парабола.

Аналогично, в случае движения на вращающейся поверхности, например, когда человек идет по карусели или вблизи полюса Земли, восприятие движения будет различаться в зависимости от положения наблюдателя.

Рассмотрим такое движение на вращяющейся поверхности диска и поверхности Земли.

1 Построение математической модели

1.1 Постановка задачи

Цель работы:

— Сформулировать модель движения материальной точки во вращающейся системе координат (диска и Земли).

— Проанализировать полученную модель

— Провести численные эксперименты с различными параметрами, для понимания влияния на траекторию движения.

Дано:

— $\overrightarrow{r}$ - радиус-вектор, проведенный от центра вращения к материальной точке.

— $\overrightarrow{v'} = (u,v)$ - относительная скорость материальной точки ($[u] = [v] =$м/с).

— ϕ - широта на поверхности Земли (град.).

— ω - постоянная угловая скорость поверхности (рад/с).

— m - масса материальной точки (кг).

1.2 Формализация

Для вывода математической модели будем использовать полярную систему координат, второй закон Ньютона в дифференциальной форме и кориолисову силу в общей форме.

Пусть сила трения принебрежима мала, но диск/Земля передаёт своё вращение на материальную точку без изменения.

1.3 Построение модели

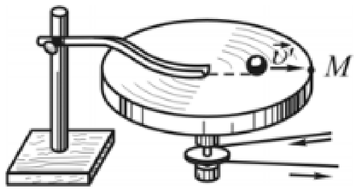

Рисунок 1 — Движение на покоящейся поверхности.

Если тело движется относительно вращающейся системы отсчета, то на него помимо центробежной силы инерции, действует еще одна сила инерции, которая зависит от относительной скорости движения тела $\vec{v}$, и от угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения системы отсчета. Этот вид инерции открыл Гаспар Кориолис. Соответственно силу называют *кориолисовой*.

Для выяснения причин, которые вызывают возникновение силы Кориолиса, рассмотрим следующий опыт. Скатим с желоба шарик на центр диска, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Таким образом, после скатывания с желоба шарик будет двигаться по радиусу неподвижного диска с постоянной скоростью $\vec{v}'$ в направлении точки M.

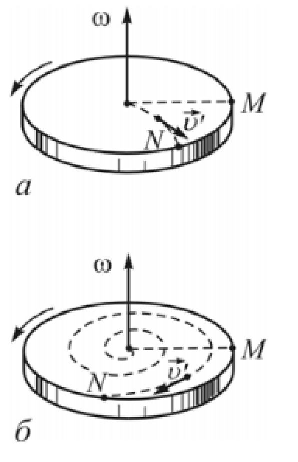

Рисунок 2 — Движение на вращающейся поверхности.

Если диск привести в движение, то шарик отклонится от первоначальной траектории и придёт в точку N (Рис. 2, а). Причём, при небольшой относительной скорости шарика $\vec{v}'$ диск повернётся на больший угол и может совершить несколько оборотов (Рис. 2, б).

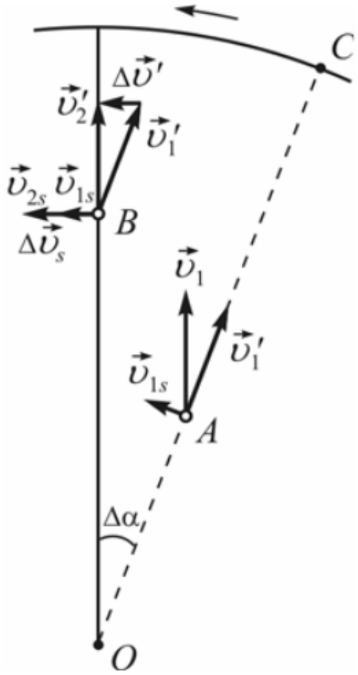

Рисунок 3 — Проекции скоростей на вращающейся поверхности.

Рассмотрим эксперимент более подробно. Пусть шарик двигается равномерно из точки A радиуса OC со скоростью относительной $\vec{v}'$. Угловая скорость вращения диска равна $\vec{\omega}$ (направление вращение показано на рис. 3 стрелкой). За интервал Δt шарик переместился на расстояние $\Delta l = \vec{v}'\Delta t$. За это же время в неподвижной системе координат радиус OC повернётся на угол $\Delta\alpha = \omega\Delta t$, что перенесет шарик в точку B. В этой точке шарик будет иметь скорость, относительно неподвижной системы отчёта $\vec{v}$ (абсолютная скорость), которая складывается из $\vec{v}'$ и переносной скорости $\vec{v}_s = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_s \tag{1}$$

Распишем подробнее переносную скорость:

$$\vec{v}_s = [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$$

Теперь вычислим определитель:

$$\vec{v_s} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}$$

Вычисляя каждый из определителей, получаем:

$$\vec{v_s} = \mathbf{i}(0 - \omega y) - \mathbf{j}(0 - \omega x) + \mathbf{k}(0 - 0)$$

Таким образом, результат будет:

$$\vec{v_s} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

Таким образом, при равномерном движении вдоль радиуса в неподвижной системе отсчёта будет существовать не только переносное ускорение

$$\vec{a_s} = -\omega^2\vec{r},$$

которое вызывает изменение направления скорости $\vec{v_s}$, но и нормальное к радиусу ускорение $\vec{a_k}$, вызывающее изменение направления скорости $\vec{v'}$ и модуля скорости $\vec{v_s}$.

Чтобы определить модуль этого ускорения, найдём указанные изменения скоростей за некоторый малый интервал времени Δt. На рис. 3 изображены векторы относительных и переносных скоростей для двух положений шарика в точках A и B, а также их изменения за рассматриваемый интервал времени $\Delta\vec{v_s}$ и $\Delta\vec{v'}$.

Поскольку нас интересует изменение только модуля вектора скорости в этих положениях, а не его направления, перенесём $\vec{v_s}$ из положения A в положение B и направим вдоль вектора $\vec{v_s}$. Получим отрезок Δv_s, характеризующий изменение модуля скорости. Сумма модулей векторов $\Delta\vec{v_s}$ и $\Delta\vec{v'}$ будет представлять собой полное изменение абсолютной скорости в направлении, перпендикулярном радиусу за время Δt, то есть ускорение движения шарика.

Если за время Δt радиус повернулся на угол $\Delta\alpha = \omega\Delta t$, то

$$\Delta v' = v'\Delta\alpha = v'\omega\Delta t.$$

За это же время шарик вдоль радиуса переместился на расстояние $\Delta r = v'\Delta t$ и при этом скорость $v_s = \omega r$ возросла по величине на

$$\Delta v_s = \omega \Delta r = \omega v' \Delta t.$$

Как видно, оба эти изменения скорости равны по величине и имеют одинаковое направление. Поэтому полное изменение скорости в направлении, перпендикулярном радиусу,

$$\Delta v' + \Delta v_s = 2v'\omega \Delta t.$$

Следовательно, ускорение

$$a_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v' + \Delta v_s}{\Delta t} = 2\omega v'.$$

Это ускорение, зависящее как от относительной скорости v', так и от переносной скорости вращения ω, называется *кориолисовым ускорением.* Направление этого ускорения всегда перпендикулярно к относительной скорости $\vec{v}'$.

Очевидно, что при изменении направления вращения ($\vec{\omega}$) направление кориолисова ускорения $\vec{a}_k$ изменится на противоположное. Аналогичный результат наблюдается и при изменении направления относительной скорости $\vec{v'}$. Во всех случаях направление $\vec{a}_k$ определяется по правилу правого винта.

Исходя из этих рассуждений, можно сделать вывод, что кориолисово ускорение $\vec{a}_k$ выражается через удвоенное векторное произведение угловой скорости $\vec{\omega}$ и относительной скорости $\vec{v'}$:

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v'}].$$

Таким образом, в результате анализа эксперимента установлено, что в неподвижной системе отсчёта шарик движется с абсолютным ускорением, которое является векторной суммой переносного ускорения $\vec{a}_s$ и кориолисова ускорения $\vec{a}_k$:

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_k = -\omega^2 \vec{r} + 2[\vec{\omega}, \vec{v'}].$$

Рассматривая движения шарика относителя наблюдателя, находящегося на диске, можно обнаружить, что возникает кориолисова сила

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}.] \tag{2}$$

Отметим, что силу кориолиса вызывает обратное кориолисово ускорение:

$$\vec{a} = -2[\vec{\omega}, \vec{v}'] = 2[\vec{v}, \vec{\omega}],$$

- которое появляется при переходе от неподвижной к вращающейся системе отсчета.

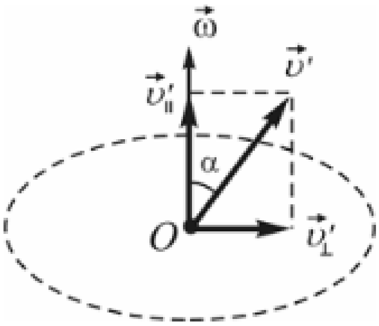

Рисунок 4 — Движение под углом к оси вращающения

В общем случае тело может двигаться с относительной скоростью, направленной под произвольным углом α к оси вращения (рис. 4). Разложим вектор скорости $\vec{v}'$на две составляющие: $\vec{v}'_{\perp}$, которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и $\vec{v}'_{\|}$, параллельную оси вращения. Составляющая $\vec{v}'_{\|}$ не изменяет переносной скорости тела, потому что угол между$\vec{v}'_{\|}$ и $\vec{\omega}$ равен нулю. Поэтому сила Кориолиса обусловлена лишь составляющей $\vec{v}'_{\perp} = \vec{v}' \sin(\alpha)$ (для случая с широтами $\cos(\phi)$).

Таким образом мы получили дифференциальное уравнение второго порядка для движения на вращающейся системе координат:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{\omega}\right]\cos(\phi) \tag{3}$$

Чтобы перейти к дифференциальным уравнениям движения по координатам x и y, нужно разложить ускорение (3) по декартовым осям:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y}\cos(\phi), \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\cos(\phi). \end{cases} \tag{4}$$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка. Следовательно для нахождения единственного решения следует ввести начальные координаты материальной точки и её относительную скорость по каждой из координат:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1 \end{cases}$$

2 Анализ математической модели

Тип системы

Данная система представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Если ϕ — постоянная, коэффициенты уравнений также постоянны. Если же $\phi = \phi(t)$, система становится с переменными коэффициентами.

Приведение к матричной форме

Введём вектор состояния:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение можно записать как систему первого порядка:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega\cos(\phi) \\ -2\omega\cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}.$$

Матрица системы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega\cos(\phi) \\ -2\omega\cos(\phi) & 0 \end{bmatrix}$$

является антисимметричной, что указывает на вращательную динамику.

Собственные числа системы

Собственные числа матрицы A находятся из характеристического уравнения:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 2\omega\cos(\phi) \\ -2\omega\cos(\phi) & -\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель:

$$\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2(\phi) = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем:

$$\lambda = \pm 2\omega \cos(\phi) i.$$

Так как собственные значения чисто мнимые, система имеет колебательное поведение.

Динамическое поведение

Так как λ чисто мнимые, движение будет периодическим. Возможны два случая:

— Если ϕ — постоянная, решение представляет собой вращательное движение.

— Если $\phi = \phi(t)$ изменяется, возможны переходные режимы и сложные траектории.

Вывод

— Система описывает вращательное движение.

— Решения имеют колебательный характер (круговые или эллиптические траектории).

— Если ϕ меняется со временем, возможны сложные нелинейные эффекты.

3 Вычислительные эксперименты

3.1 Алгоритм решения

Для реализации моделей сделаем замену переменных $u(t) = \dot{x}(t)$, $v(t) = \dot{y}(t)$, и получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \\ \dot{u} = 2\Omega v \cos(\phi), \quad \dot{v} = -2\Omega u \cos(\phi), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \\ u(0) = x_1, \quad v(0) = y_1. \end{cases}$$

Для численного решения данной системы будем использовать метод Рунге-Кутты[1], что позволит получить решение с заданными параметрами.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка (RK4) обладает порядком точности $O(h^4)$, что означает, что ошибка метода уменьшается пропорционально четвертой степени размера шага h. Локальная ошибка на каждом шаге составляет $O(h^5)$, а глобальная ошибка, накапливаясь после N шагов, составляет $O(h^3)$. Это делает метод RK4 более точным по сравнению с методами более низкого порядка, такими как метод Эйлера и метод Рунге-Кутты второго порядка. Благодаря высокой точности и простоте реализации, RK4 широко используется для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в различных областях науки и техники.

После вычисления построим фазовый портрет и график изменения угла во времени.

3.2 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для рассчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек numpy (вычисления) и matplotlib (визуализация).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python


class CircleMotion:
    def __init__(self, omega, phi):
        self.omega = omega
        self.phi = phi

    def f(self, t, x):
        return np.array([
            x[2],
            x[3],
            2 * self.omega * x[3] * np.cos(self.phi),
            -2 * self.omega * x[2] * np.cos(self.phi),
        ])

    def runge_kutta(self, y0, t0, tn, h):
        num = int(np.ceil((tn - t0) / h))
        t_values = np.linspace(t0, tn, num=num)
        y_values = np.zeros((num, len(y0)))
        y_values[0] = y0

        for i in range(num - 1):
            k1 = h * self.f(t_values[i], y_values[i])
            k2 = h * self.f(t_values[i] + h / 2, y_values[i] + k1 / 2)
            k3 = h * self.f(t_values[i] + h / 2, y_values[i] + k2 / 2)
            k4 = h * self.f(t_values[i] + h, y_values[i] + k3)
            y_values[i + 1] = y_values[i] + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6

        return t_values, y_values
```

3.3 Вычислительные эксперименты

В эксперименте используются следующие числовые значения параметров:

— Угловая скорость вращения системы: $\Omega = 1.$ рад/с.
— Временной шаг численного интегрирования: $\Delta t = 0.01$ с.
— Общее время моделирования: $T = 100$ с.
— Широта: 45 град.

Начальные условия

Заданы несколько наборов начальных условий для моделирования движения точки в вращающейся системе отсчёта:

#	x_0 (м)	y_0 (м)	$\dot{x}_0$ (м/с)	$\dot{y}_0$ (м/с)
1	1.0	0.0	0.0	1.0
2	0.5	0.5	-0.5	0.5
3	-1.0	0.0	0.0	-1.0
4	5.0	3.0	-3.0	3.0
5	5.0	3.0	-4.0	-2.0
6	5.0	3.0	1.0	-3.0

Каждая строка таблицы представляет один набор начальных условий, включающий координаты точки x_0, y_0 и её начальные проекции скорости $\dot{x}_0, \dot{y}_0$.

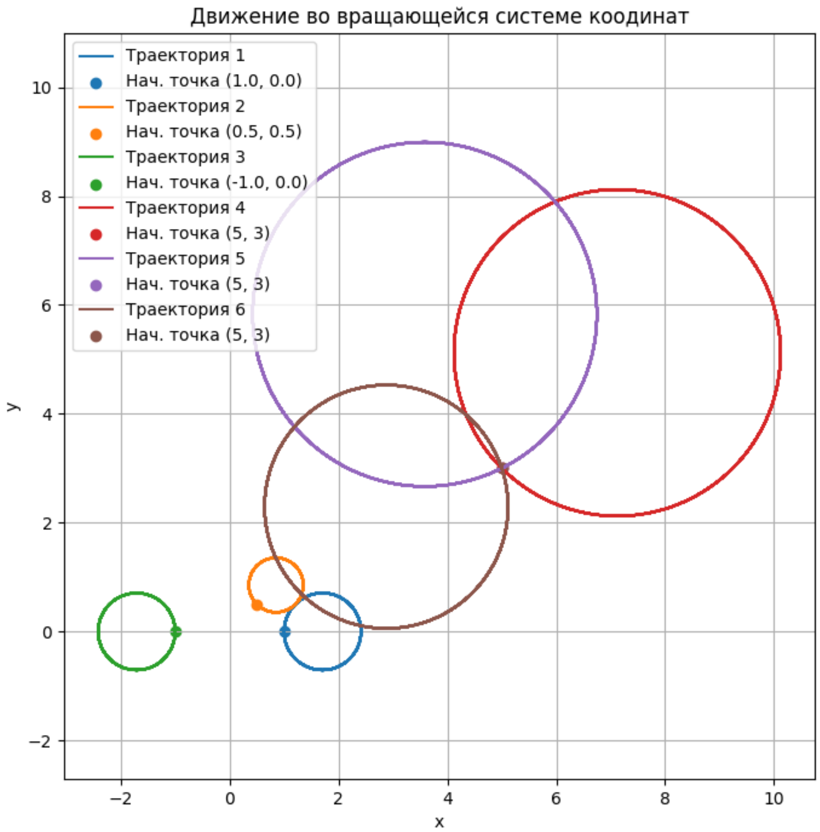

Рисунок 5 — Траектории при $\omega = 1, \phi = 45$ град.

Увеличим широту ϕ до 72 град и получим:

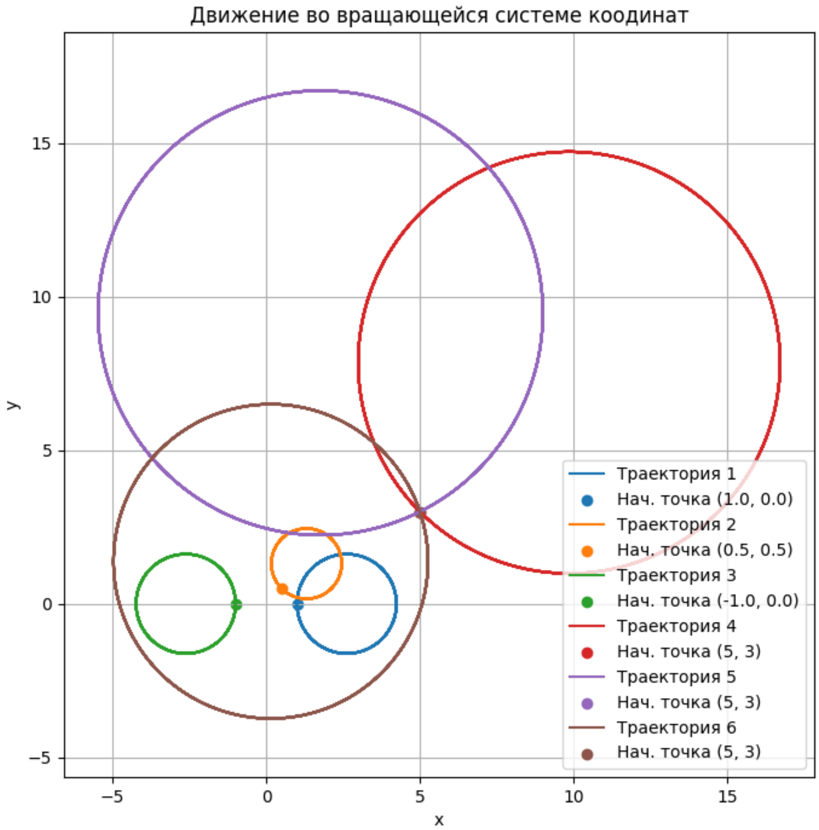

Рисунок 6 — Траектории при $\omega = 1, \phi = 72$ град.

На рис. 5 - 6 видно, что при увеличении широты сила Кориолиса уменьшается, что влечёт уменьшение влияния на относительную скорость, а следовательно, увеличения радиусов описываемых траекторий.

Увеличим угловую скорость ω в 10 раз и также построим траектории при широтах 45 и 72 град:

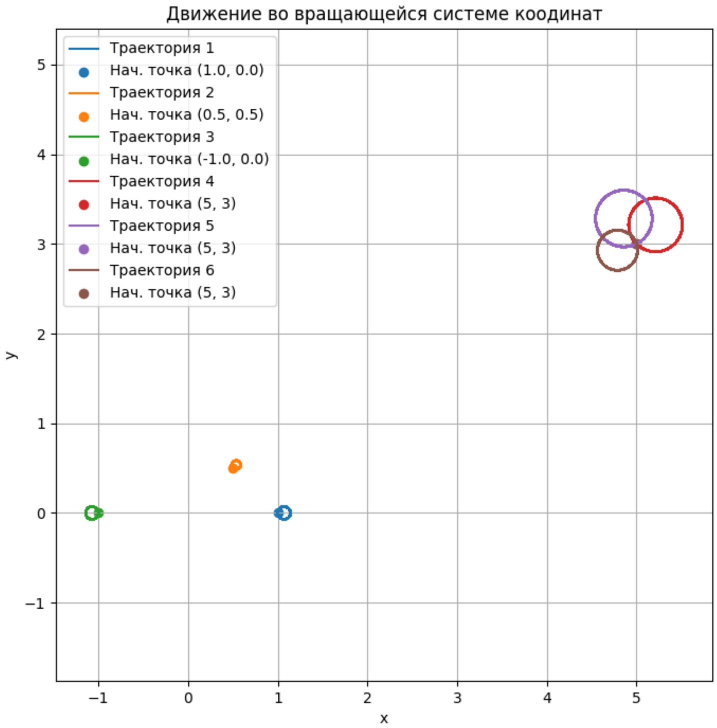

Рисунок 7 — Траектории при $\omega = 10, \phi = 45$ град.

Заметим (рис. 7 - 8), что при увеличении угловой скорости, радиусы траекторий значительно уменьшились. Но при увеличении широты заметен эффект уменьшения проекци силы Кориолиса.

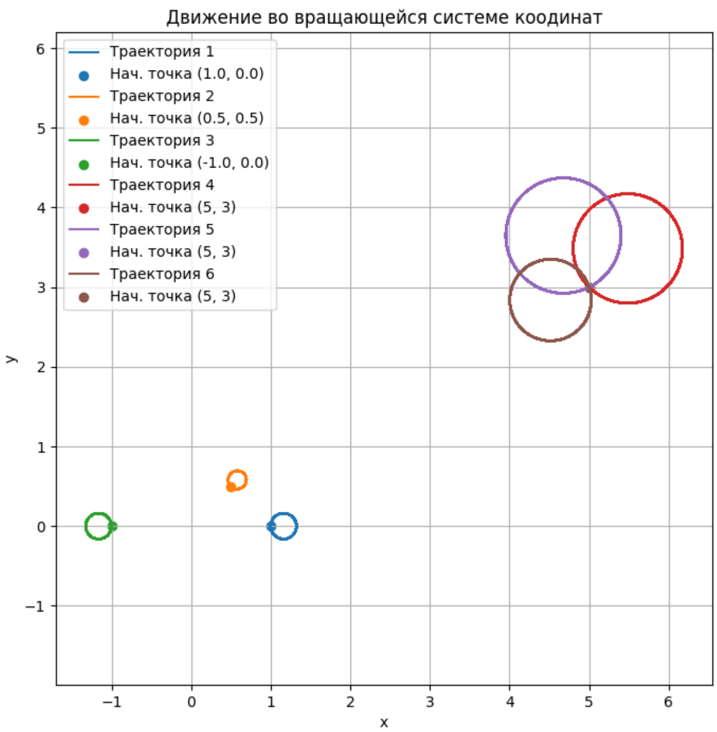

Рисунок 8 — Траектории при $\omega = 10, \phi = 72$ град.

4 Заключение

Была разработана математическая модель перемещения материальной точки во вращающейся системе координат, представляющая собой систему из двух дифференциальных уравнений второго порядка.

Проведён анализ модели, представлена вычислительная схема и программа для ЭВМ, которая находит численное решение методом Рунге-Кутты.

Построены графики движения материальной точки с различными параметрами и начальными условиями.

Список использованных источников

1. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. — Наука, 1975.