

aboba

Содержание

Введение	3
1 Построение математической модели	4
1.1 Постановка задачи	4
1.2 Формализация	4
1.3 Построение модели	5
2 Анализ модели и аналитическое решение двумерного уравнения переноса	9
2.1 Математическая постановка задачи	9
2.2 Классификация уравнения и анализ характеристик	9
2.3 Аналитическое решение при постоянной скорости	10
2.4 Выводы по аналитическому анализу	10
3 Вычислительные эксперименты	12
3.1 Аналитическое решение	12
3.2 Программа для ЭВМ	12
3.3 Ввех по потоку (upwind)	13
3.3.1 Численная схема конечных разностей	13
3.3.2 Описание экспериментов	13
3.3.3 Реализация алгоритма на Python	14
3.3.4 Визуализация результатов	15
3.3.5 Вихревое течение	15
3.3.6 Сдвиговое течение	17
3.3.7 Дивергентное течение	19
3.4 Метод Лагранжевых точек	21
3.4.1 Описание численного метода	21
3.4.2 Реализация на Python	21
3.4.3 Описание экспериментов	22
3.4.4 Визуализация результатов	23
3.4.5 Вихревое течение (Lagrangian)	23
3.4.6 Сдвиговое течение (Lagrangian)	25
3.4.7 Дивергентное течение (Lagrangian)	27
3.5 Выводы	29
Заключение	30

Введение

Одним из ключевых процессов в природе являются течения в жидких средах. Эти течения играют важную роль в переносе веществ и энергии из одной точки в другую. Примером могут служить течения в реках, морях и океанах, которые способствуют не только транспортировке питательных веществ, но и формированию экосистем.

Кроме того, аналогичные процессы происходят и в газообразной среде. В атмосфере воздух также движется, создавая ветры, которые переносят влагу, пыль и другие частицы. Эти воздушные течения влияют на климатические условия, распределение тепла и осадков, а также на миграцию животных и распространение семян растений.

Рассмотрим подобный перенос в трехмерном пространстве-время.

1 Построение математической модели

1.1 Постановка задачи

Цель работы:

- Сформулировать модель двуиерного переноса.
- Выбрать схемы решения.
- Провести численные эксперименты с различными методами аппроксимации, для понимания их влияния на решение.
- Провести анализ решений.

Дано:

- (x,y) - координаты пространства,
- t - время,
- $u(x,y,t)$ - функция, задающая концентрацию вещества в любой момент времени (удельная масса или энергия (отнесенная к единице объема)).
- $u(x,y,0)$ - поле переноса
- $\vec{v} = (v_x, v_y)$ - скорость переноса ($const$),
- $f(x,y,t)$ - описывает источники и стоки,

1.2 Формализация

Будем рассматривать задачу для линейного уравнения переноса.

Для аппроксимации будем использовать два метода: неявная схема и метод Лагранжевых частиц.

1.3 Построение модели

Рассмотрим газовую или жидкую сплошную среду. Примем: все точки среды находятся в неравновесном состоянии. Это приводит к возникновению полей концентраций, температур, давлений, а наличие градиентов этих параметров вызывает перенос массы и энергии.

Выделим элемент объема движущейся жидкости в неоднородном поле некоторого потенциала переноса. Под потенциалом переноса u понимают удельную массу или энергию (отнесенную к единице объема). $u(x, y, z, t)$ - скалярная величина.

Известно, что скалярная функция u называется потенциалом векторной функции \vec{q} , если между ними существует связь вида [?]:

$$\vec{q} = -\nabla u.$$

Далее будем рассматривать связь, как пропорциональность.

Таким образом, поток переносимой субстанции (массы или энергии) является векторной величиной \vec{q} . В случае переноса массы под потенциалом переноса u обычно понимают концентрацию компонента в смеси.

В рассматриваемой среде могут существовать, так называемые, объемные (непрерывно распределенные по объему) источники или стоки массы и энергии. В химической технологии под ними подразумеваются химические превращения.

Известно, что процессы тепло- и массообмена осуществляются двумя основными механизмами: молекулярным и конвективным. Молекулярный перенос (диффузия, теплопроводность) возникает в результате стремления системы к термодинамическому равновесию, а конвективный вызывается наличием поля скоростей в жидком или газовом объеме V .

Следует отметить, что в случае переноса энергии в форме теплоты существует еще и радиантный перенос (тепловое излучение), вклад которого учитывают при достаточно высоких температурах.

Процессы молекулярного переноса массы и энергии описываются соответствующими феноменологическими уравнениями, являющимися, как правило, линейными градиентными законами.

Опуская доказательство, изложенное в [?], можно сделать вывод: в случае молекулярного и конвективного переноса общая плотность потока массы или энергии складывается из двух векторных величин:

$$\vec{q} = \vec{q}_M + \vec{q}_K,$$

где \vec{q}_M - векторная величина молекулярного переноса, \vec{q}_K - векторная величина конвективного переноса.

В газовой или жидкой среде, находящейся в движении, выделим произвольный объем V , ограниченный поверхностью A . На поверхности

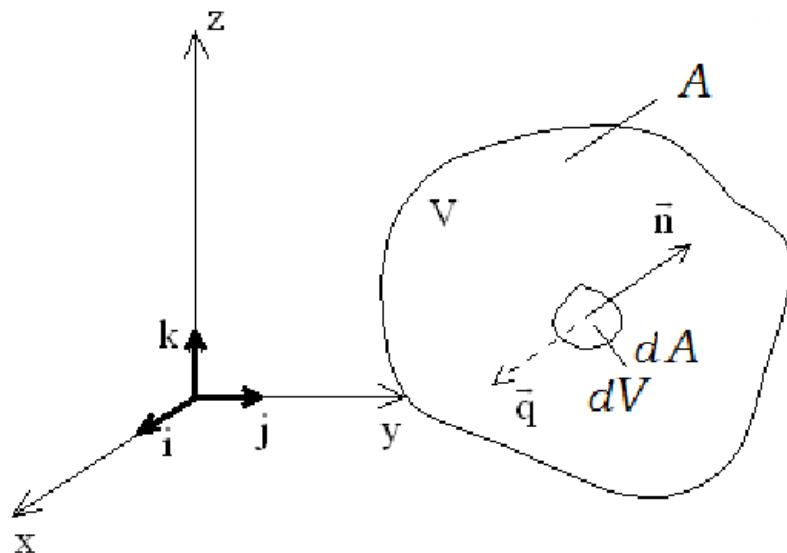


Рисунок 1.1 – Объём серды, ограниченный поверхностью A

A выделим элемент поверхности d и представим его в векторной форме, умножив на единичный вектор \vec{n} , нормальный к этому элементу и направленный из объема, $\vec{n}dA = d\vec{A}$.

Составим балансовое уравнение:

Накопление внутри объёма = вход - выход + образование.

Примем, что в произвольном объеме нет источников субстанции или стоков, т.е. образование равно нулю.

Плотность потока субстанции через площадку $d\vec{A}$ будет $-\vec{q}d\vec{A}$. Знак минут инвертирует потоки (входные становятся положительными, а выходящие - отрицательными).

Результирующий поток будет равен:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A}. \quad (1.1)$$

Физически этот интеграл представляет разницу между входящими и выходящими потоками субстанции через всю поверхность A .

Если в объёме V происходит накопление субстанции, то это вызовет изменение потенциала переноса во времени $\frac{du}{dt}$, которое для элементарного объёма dV можно представить как $\frac{du}{dt}dV$, а для всего объема V как интеграл:

$$M = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.2)$$

Приравняв выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.3)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса [?], дающей преобразование интеграла, взятого по объёму V , ограниченному поверхностью A , в интеграл, взятый по этой поверхности, будем иметь:

$$\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{q}dV. \quad (1.4)$$

С учётом (1.3), соотношение (1.4) примет вид:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} \right) dV.$$

Интеграл, взятый по произвольному объёму, может быть равен нулю только в случае равенства нулю подынтегральной функции:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0.$$

Полученное выражение есть основное дифференциальное уравнение переноса субстанции – массы или энергии.

Перепишем его для двумерной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,t). \quad (1.5)$$

Также установим начальные и граничные условия:

$$u(0,0,t) = \psi(t), \quad u(x,y,0) = \phi(x), \quad u(0,y,t) = \psi(y,t) \quad u(x,0,t) = \xi(x,t) \quad (1.6)$$

Таким образом, из (1.5) и (1.6) получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,t) \\ u(x,y,0) = \phi(x,y) \\ u(0,y,t) = \psi(y,t) \\ u(x,0,t) = \xi(x,t) \end{cases} \quad (1.7)$$

2 Анализ модели и аналитическое решение двумерного уравнения переноса

2.1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу переноса скалярной величины $u(x, y, t)$ в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ при отсутствии источников и стоков. Модель описывается линейным уравнением переноса в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_x(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + v_y(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

где $v_x(x, y), v_y(x, y)$ — компоненты заданного векторного поля скорости переноса $\vec{v}(x, y)$.

Начальное условие:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.2)$$

Границные условия задаются на входящих границах области, то есть там, где вектор скорости направлен внутрь области:

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega^-, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

где $\partial\Omega^- = \{(x, y) \in \partial\Omega \mid \vec{v}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) < 0\}$ и \vec{n} — внешняя нормаль к границе.

2.2 Классификация уравнения и анализ характеристик

Уравнение переноса 2.1 относится к классу гиперболических уравнений первого порядка. Оно описывает чистое перемещение вещества без учета диффузии или реакций.

Анализ уравнения удобно производить с использованием метода характеристик. Вдоль характеристик, т.е. кривых в пространстве (x, y, t) , решение u сохраняется неизменным.

Пусть $(x(t), y(t))$ — характеристика, тогда:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y), \quad \frac{du}{dt} = 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, u вдоль траектории движения частиц остается постоянным, и решение можно выразить через начальное распределение u_0 .

2.3 Аналитическое решение при постоянной скорости

Рассмотрим частный случай, когда поле скорости постоянно:

$$\vec{v} = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

В этом случае уравнение 2.1 принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.5)$$

Характеристики представляют собой прямые линии:

$$x(t) = x_0 + at, \quad y(t) = y_0 + bt.$$

Поскольку u сохраняется вдоль этих линий, решение имеет вид:

$$u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt). \quad (2.6)$$

Пример. Пусть

$$u_0(x, y) = \exp(-\alpha[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]),$$

где $\alpha > 0$ — параметр ширины, (x_0, y_0) — центр гауссианы. Тогда

$$u(x, y, t) = \exp(-\alpha[(x - at - x_0)^2 + (y - bt - y_0)^2]), \quad (2.7)$$

что соответствует движению начального профиля с постоянной скоростью (a, b) .

2.4 Выводы по аналитическому анализу

- Уравнение переноса описывает перемещение профиля функции без изменения формы (в отсутствии источников).
- Решение можно выразить в аналитическом виде в случае постоянной скорости.

- В общем случае решение строится вдоль характеристик, что важно для построения численных схем.
- Важным элементом анализа является определение направлений входа потока — это определяет постановку граничных условий.

3 Вычислительные эксперименты

Рассматривается задача численного решения уравнения переноса скалярной величины $u(x, y, t)$ в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. При отсутствии источников и стоков правая часть уравнения равна нулю ($f = 0$), и задача записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}(x, y, t) \cdot \nabla u = 0, \quad (3.1)$$

где $\vec{v}(x, y, t) = (v_x, v_y)$ — заданное векторное поле скоростей, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ — градиент функции u .

Границные условия принимаются периодическими. Начальное распределение $u(x, y, 0)$ задается одной из аналитических функций: гауссовой функцией, индикатором круга и т.д.

3.1 Аналитическое решение

В случае отсутствия источников ($f = 0$) и известного поля скоростей $\vec{v}(x, y, t)$, уравнение 3.1 допускает аналитическое решение вдоль траекторий частиц, заданных уравнением:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (3.2)$$

где \vec{x}_0 — начальная координата частицы. Тогда значение скалярной величины u вдоль характеристики сохраняется:

$$u(\vec{x}(t), t) = u_0(\vec{x}_0). \quad (3.3)$$

Это решение реализуется в методе лагранжевых частиц.

3.2 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для рассчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек numpy (вычисления) и matplotlib (визуализация).

3.3 Ввех по потоку (upwind)

3.3.1 Численная схема конечных разностей

Пространственная область $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ дискретизуется равномерной сеткой с $n \times n$ узлами. Шаги по пространству:

$$dx = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n - 1}, \quad dy = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{n - 1}.$$

Для аппроксимации производных используются односторонние разности в зависимости от направления скорости (схема upwind):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{dx}, & v_x \geq 0 \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{dx}, & v_x < 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \begin{cases} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{dy}, & v_y \geq 0 \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{dy}, & v_y < 0 \end{cases}$$

Временное интегрирование производится явным способом (метод Эйлера):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left(v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Стабильность обеспечивается условием Куранта–Фридрихса–Леви (CFL):

$$\max \left(\frac{|v_x| \Delta t}{dx}, \frac{|v_y| \Delta t}{dy} \right) \leq 1. \quad (3.4)$$

3.3.2 Описание экспериментов

В ходе экспериментов используются различные поля скоростей:

- **Вихревое течение (vortex):**

$$v_x = -\alpha(y - y_c), \quad v_y = \alpha(x - x_c), \quad (3.5)$$

где $\alpha = 0.1$, $x_c = y_c = 5$.

- **Сдвиговое течение (shear):**

$$v_x = 0.7(1 + \sin(y + 0.5)), \quad v_y = 0.15 \cos(x + 0.3). \quad (3.6)$$

- Дивергентное поле (divergance):

$$v_x = -\pi \sin\left(\frac{2\pi x}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{10}\right), \quad v_y = 2\pi \sin\left(\frac{\pi y}{10}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{10}\right). \quad (3.7)$$

Начальные условия представлены в виде кругов или гауссовых распределений.

3.3.3 Реализация алгоритма на Python

Программа реализована на языке Python с использованием библиотек `numpy` и `matplotlib`. Структура кода включает:

- `FluidSimulation` — класс с основной логикой метода конечных разностей;
- `VelocityField` — статические методы для задания различных полей скоростей;
- `InitialCondition` — начальные условия;
- `Experiment, ExperimentManager` — система организации и запуска экспериментов;
- визуализация полей скоростей и решений.

Пример вставки кода:

Листинг 3.1 — Основной цикл аппроксимации переноса

```

1  for i in range(1, n - 1):
2      for j in range(1, n - 1):
3          if vx[j, i] >= 0:
4              du_dx = (u[j, i] - u[j, i - 1]) / dx
5          else:
6              du_dx = (u[j, i + 1] - u[j, i]) / dx
7
8          if vy[j, i] >= 0:
9              du_dy = (u[j, i] - u[j - 1, i]) / dy
10         else:
11             du_dy = (u[j + 1, i] - u[j, i]) / dy
12
13         u_new[j, i] = u[j, i] - dt * (vx[j, i] * du_dx + vy[j, i] * du_dy)

```

Все течения зададим стационарными (не зависящими от t)

3.3.4 Визуализация результатов

Результаты каждого эксперимента сохраняются в виде изображений, иллюстрирующих:

- исходное распределение скалярной величины $u(x,y,0)$;
- поле скоростей (стримплот);
- распределение $u(x,y,t)$ на каждом шаге.

3.3.5 Вихревое течение

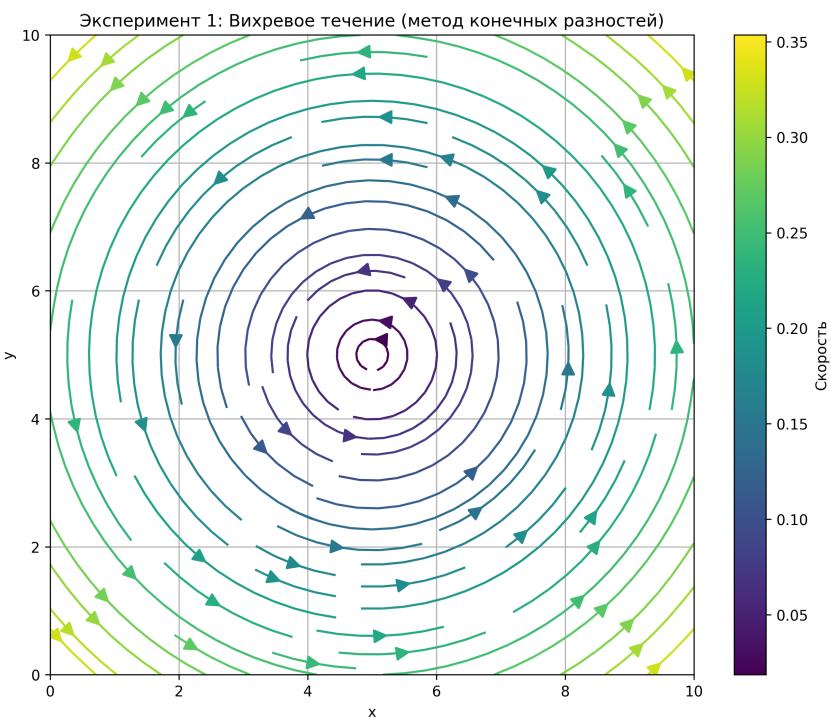


Рисунок 3.1 — Поле скоростей для вихревого течения

Поле на рис. 3.1 задаётся уравнением вихря (3.5):

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке $(2.5, 5)$ и радиусом 3 (3.2). Изображения промежуточных ходов представлены в приложении (ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ НА ПРИЛОЖЕНИЕ) Финальное распределения представлено на рис. 3.3:

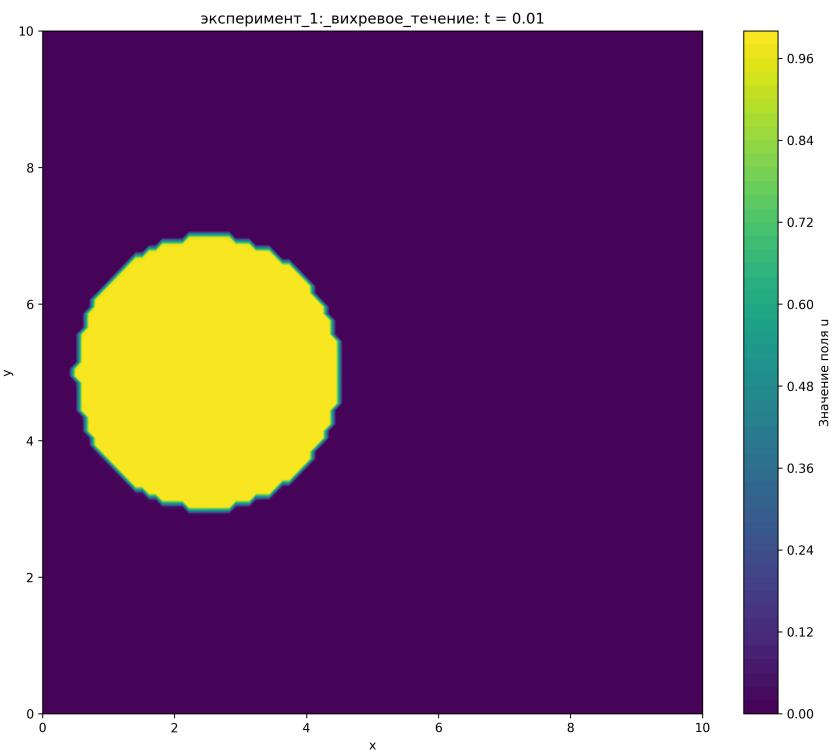


Рисунок 3.2 — Скалярное поле $u(x,y,T)$ в начальный момент времени
(0) (вихревое течение)

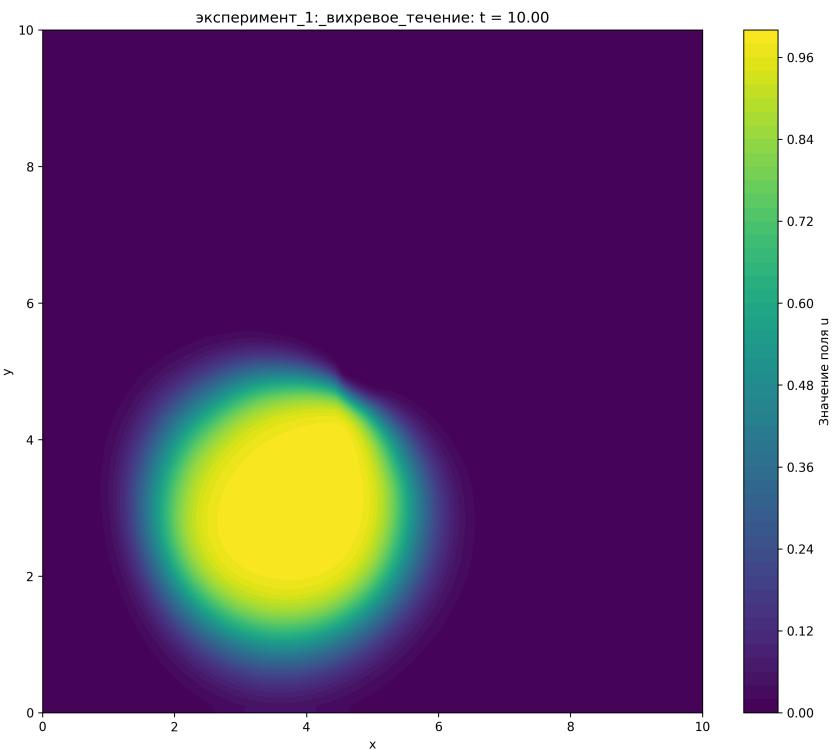


Рисунок 3.3 — Скалярное поле $u(x,y,T)$ в финальный момент времени
(10) (вихревое течение)

3.3.6 Сдвиговое течение

Поле на рис. 3.4 задаётся уравнением поля (3.6)

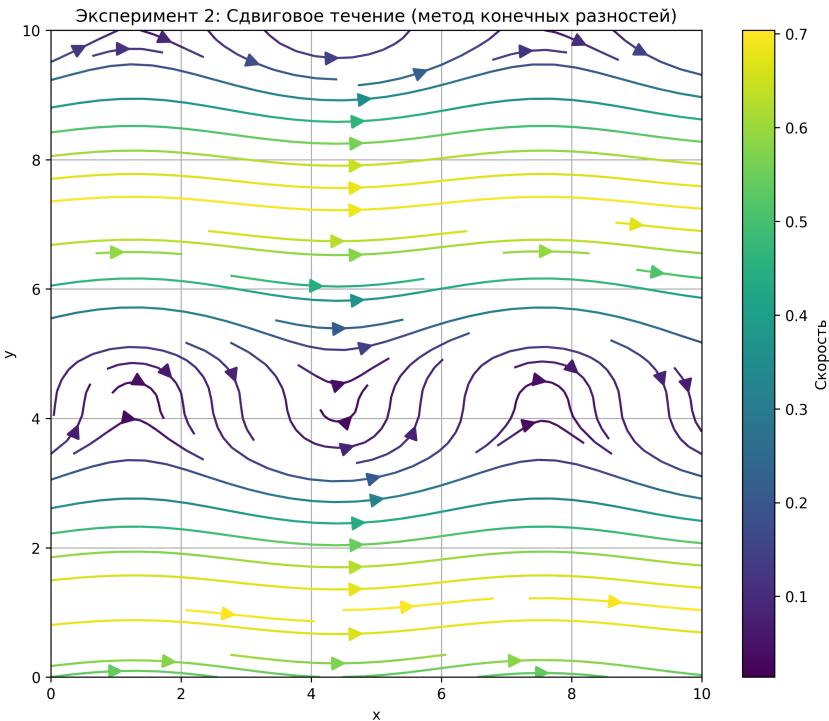


Рисунок 3.4 — Поле скоростей для сдвигового течения

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (5 , 5) и радиусом 2 (рис. 3.5).

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении (ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ НА ПРИЛОЖЕНИЕ)

Финальное распределение представлено на рис. 3.6.

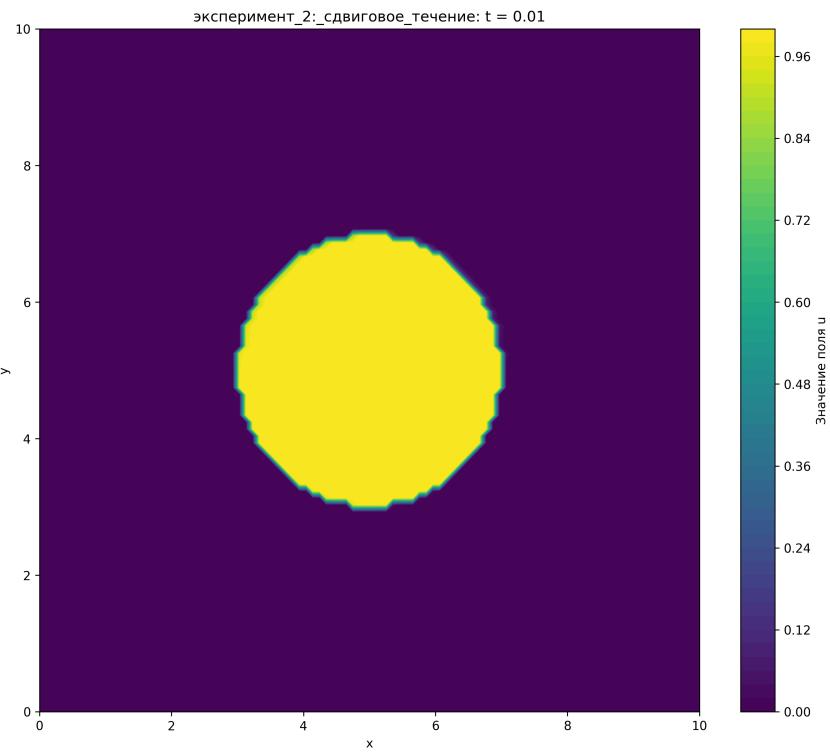


Рисунок 3.5 — Скалярное поле $u(x,y,T)$ в начальный момент времени
 (0) (вихревое течение)

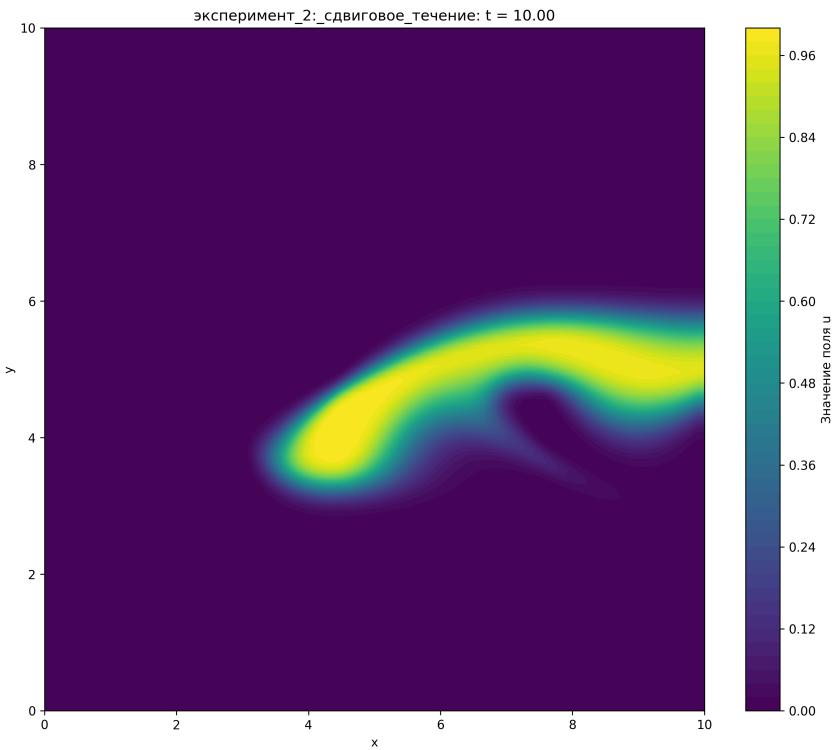


Рисунок 3.6 — Скалярное поле $u(x,y,T)$ в финальный момент времени
 (10) (вихревое течение)

3.3.7 Дивергентное течение

Поле на рис. 3.7 задаётся уравнением поля (3.7): В качестве

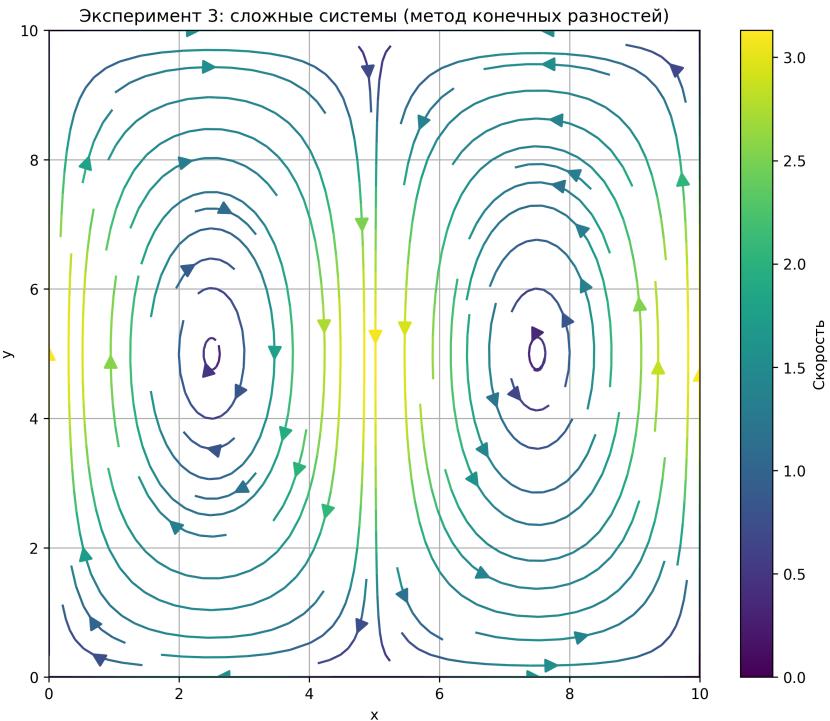


Рисунок 3.7 — Поле скоростей для Дивергентного течения

начального распределения, используется круг с центром в точке $(5, 5)$ и радиусом 2 (рис. 3.8). Изображения промежуточных ходов представлены в приложении (ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ НА ПРИЛОЖЕНИЕ) Финального распределение представлено на рис. 3.9.

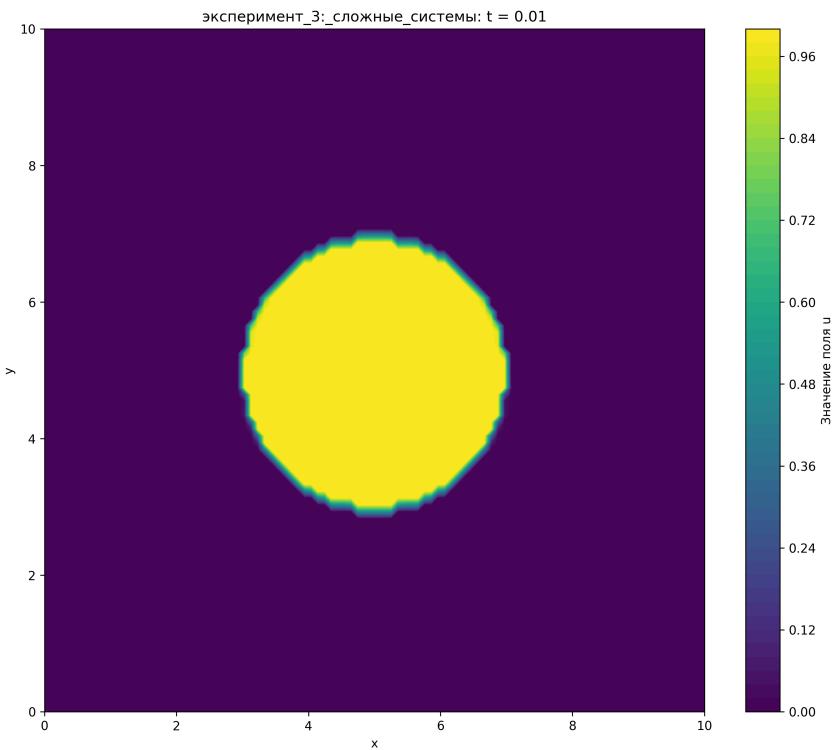


Рисунок 3.8 — Скалярное поле $u(x,y,T)$ в начальный момент времени
(0) (вихревое течение)

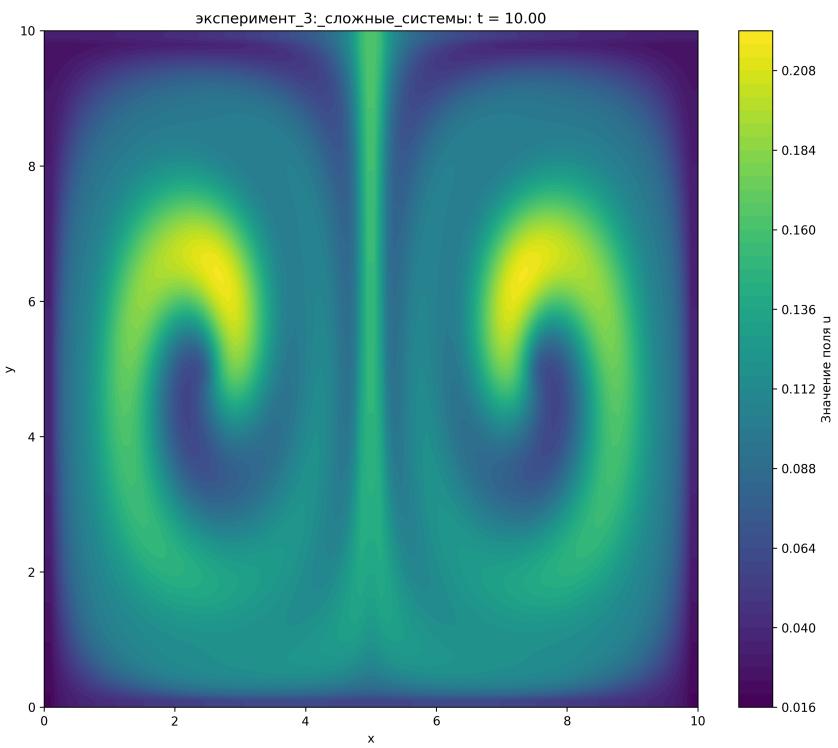


Рисунок 3.9 — Скалярное поле $u(x,y,T)$ в финальный момент времени
(10) (вихревое течение)

3.4 Метод Лагранжевых точек

3.4.1 Описание численного метода

В отличие от метода конечных разностей, лагранжев подход отслеживает движение частиц, несущих скалярную величину u , по траекториям, определяемым полем скоростей. Основная идея заключается в решении задачи Коши для системы ОДУ:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ — положение частицы во времени, а $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ — заданное поле скоростей.

Частицы не взаимодействуют и перемещаются независимо друг от друга. Величина u сохраняется вдоль траектории:

$$\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u(\mathbf{x}(t), t) = u(\mathbf{x}_0, 0).$$

Для численного интегрирования используется метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4). \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.4.2 Реализация на Python

Программа реализована на языке Python с использованием библиотек `numpy`, `matplotlib`, `scipy`. Структура кода включает:

- `ParticleSet` — класс, отвечающий за координаты и значения частиц;
- `VelocityField` — статические методы для различных полей скоростей;

- `Integrator` — численные методы интегрирования траекторий (Euler, RK4);
- визуализацию движения частиц и их распределений;
- построение плотности $u(x, y, t)$ через гауссово размывание или биннинг в сетку.

Листинг 3.2 — Основной шаг метода Рунге–Кутты 4-го порядка для перемещения частиц

```

1  def rk4_step(x, y, vx_func, vy_func, dt):
2      k1x = vx_func(x, y)
3      k1y = vy_func(x, y)
4
5      k2x = vx_func(x + 0.5 * dt * k1x, y + 0.5 * dt * k1y)
6      k2y = vy_func(x + 0.5 * dt * k1x, y + 0.5 * dt * k1y)
7
8      k3x = vx_func(x + 0.5 * dt * k2x, y + 0.5 * dt * k2y)
9      k3y = vy_func(x + 0.5 * dt * k2x, y + 0.5 * dt * k2y)
10
11     k4x = vx_func(x + dt * k3x, y + dt * k3y)
12     k4y = vy_func(x + dt * k3x, y + dt * k3y)
13
14     x_next = x + dt / 6 * (k1x + 2 * k2x + 2 * k3x + k4x)
15     y_next = y + dt / 6 * (k1y + 2 * k2y + 2 * k3y + k4y)
16
17     return x_next, y_next

```

3.4.3 Описание экспериментов

В экспериментах используются те же три стационарных поля скоростей (3.5), (3.6), (3.7). Начальные положения частиц задаются равномерно либо случайно в пределах области $\Omega = [0, 10]^2$. Начальные значения u задаются по формуле:

$$u(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c\| \leq r, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где \mathbf{x}_c — центр круга, r — радиус.

3.4.4 Визуализация результатов

Для каждого эксперимента строятся:

- карта начального положения и значений частиц;
- стримплот поля скоростей;
- финальное распределение частиц с учётом перемещения;
- по желанию: реконструированная плотность скалярной величины на сетке.

3.4.5 Вихревое течение (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.1, задаётся уравнением вихря (3.5)).

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (2.5, 5) и радиусом 3 (3.10).

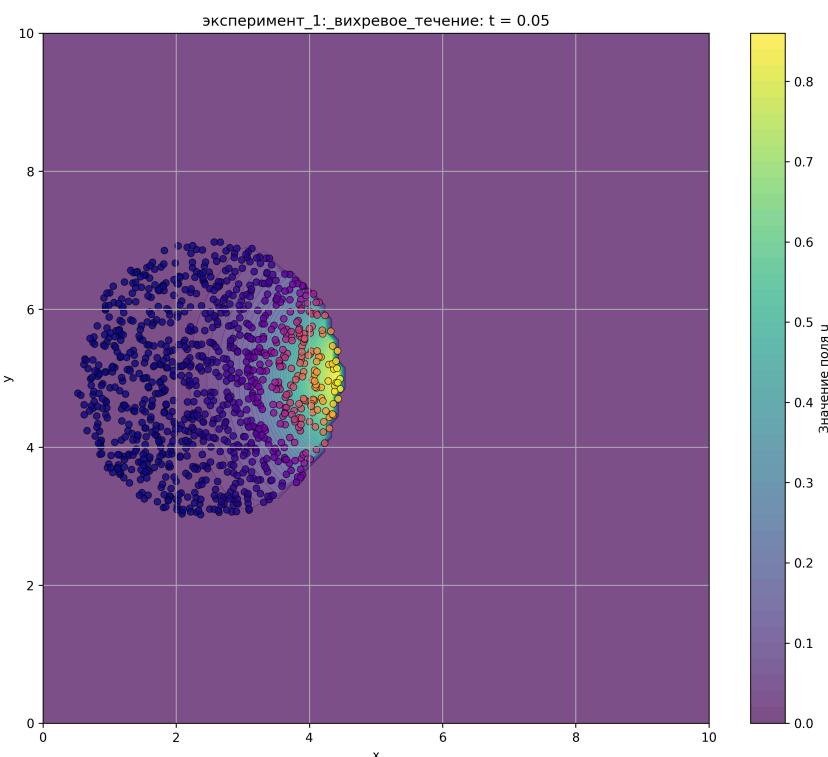


Рисунок 3.10 — Начальное распределение частиц (вихревое течение)

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении (ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ НА ПРИЛОЖЕНИЕ). Финального распределение представлено на рис. 3.11. Траектории 50 из 1000 точек представлены на рис. 3.12

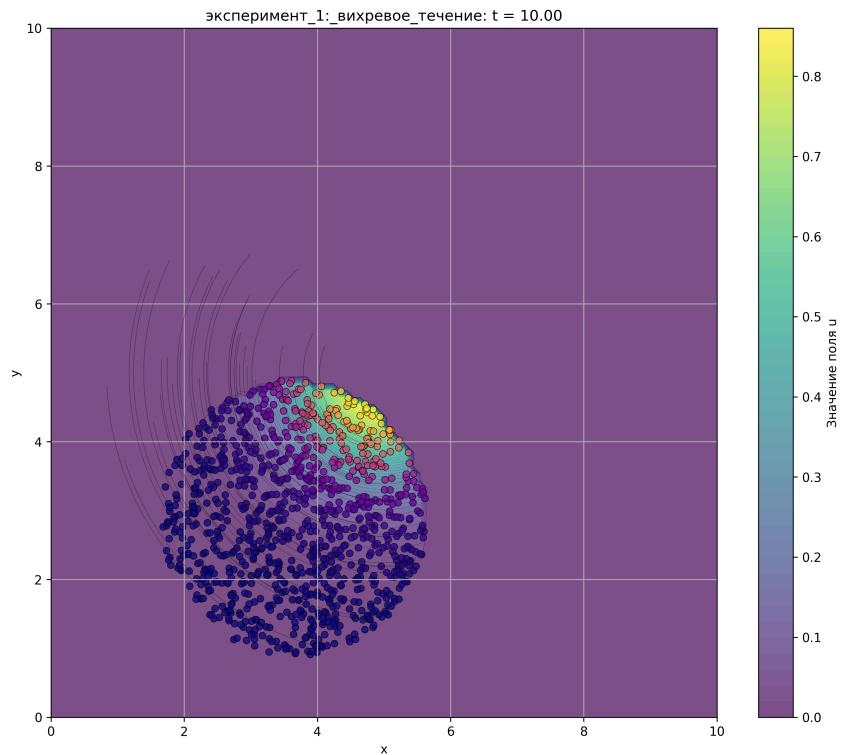


Рисунок 3.11 — Финальное распределение частиц (вихревое течение)

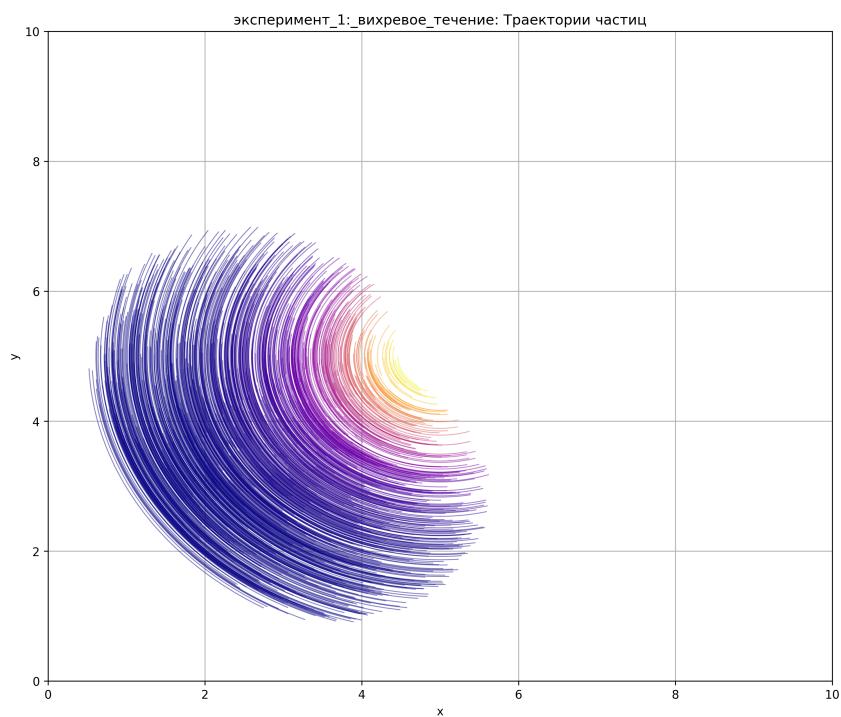


Рисунок 3.12 — Финальное распределение частиц (вихревое течение)

3.4.6 Сдвиговое течение (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.4, задаётся уравнением вихря (3.6).

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (5, 5) и радиусом 2 (3.13). Дополнительно добавлена область вокруг распределения в виде квадрата для отрисовки поведения среды.

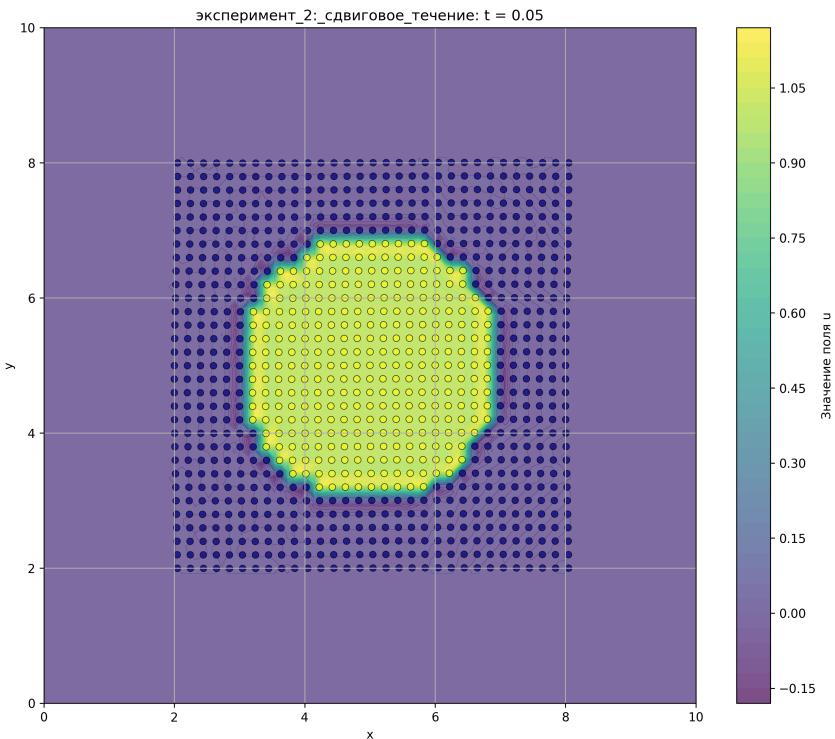


Рисунок 3.13 — Начальное распределение частиц (сдвиговое течение)

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении (ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ НА ПРИЛОЖЕНИЕ). Финального распределение представлено на рис. 3.14. Траектории 50 из 1000 точек представлены на рис. 3.15

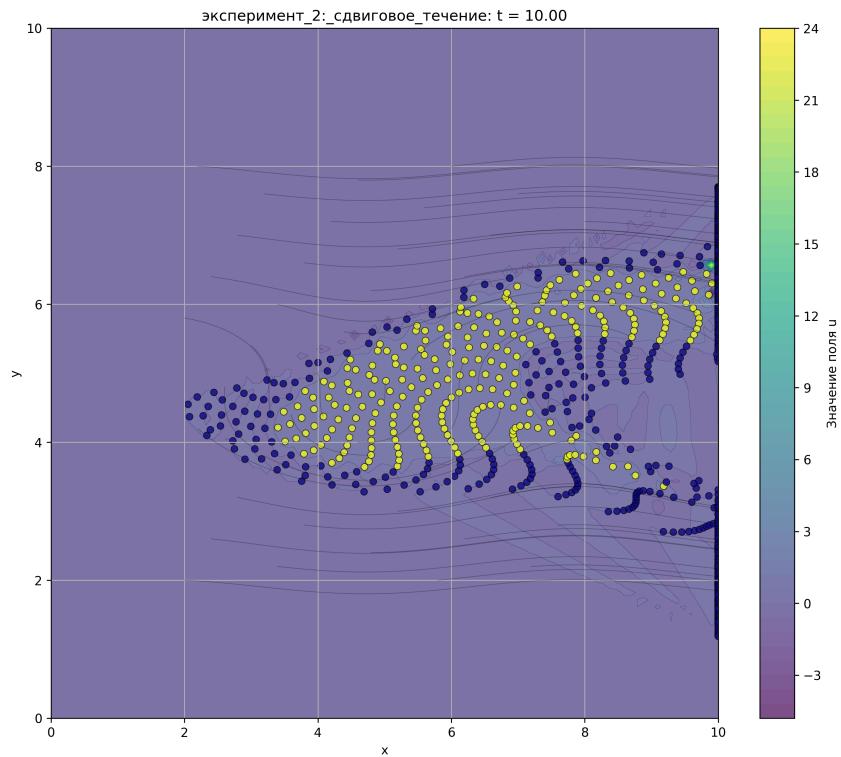


Рисунок 3.14 — Финальное распределение частиц (сдвиговое течение)

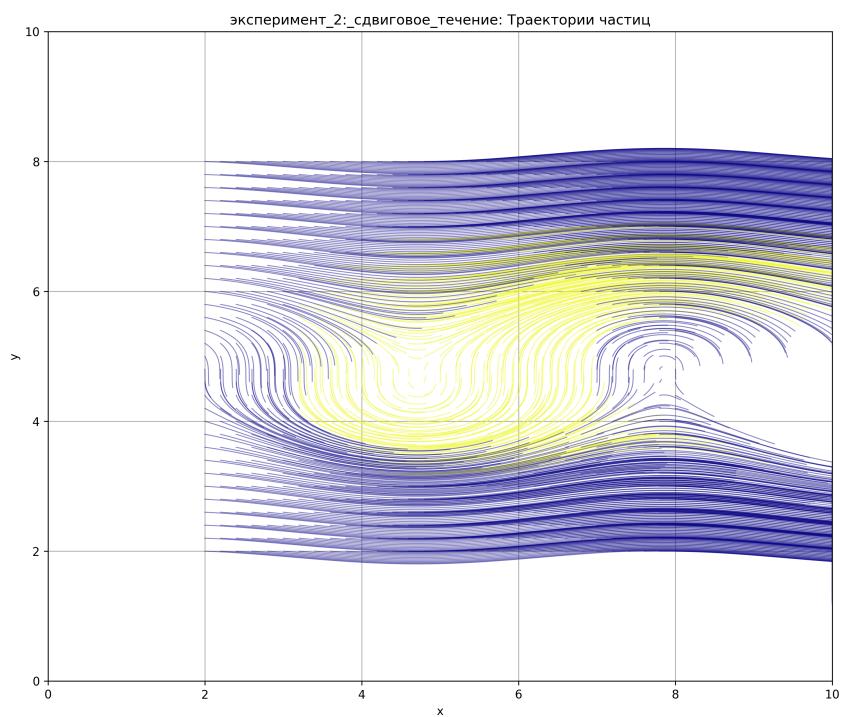


Рисунок 3.15 — Траектории частиц (сдвиговое течение)

3.4.7 Дивергентное течение (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.7, задаётся уравнением вихря (3.7).

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (5, 5) и радиусом 2 (3.16). Дополнительно добавлена область вокруг распределения в виде квадрата для отрисовки поведения среды.

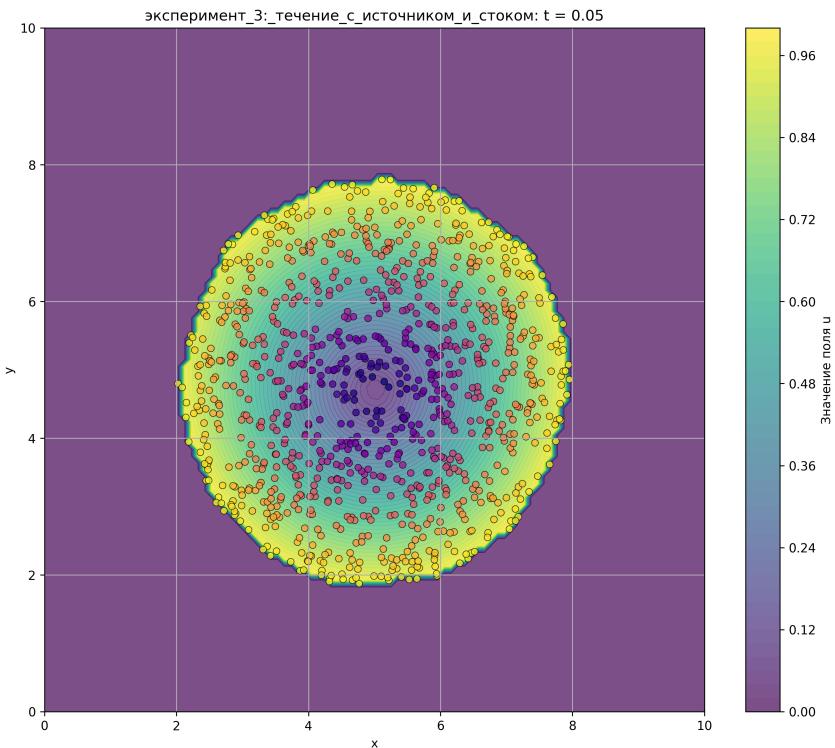


Рисунок 3.16 — Начальное распределение частиц (дивергентное течение)

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении (ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ НА ПРИЛОЖЕНИЕ). Финального распределение представлено на рис. 3.17. Траектории 50 из 1000 точек представлены на рис. 3.18

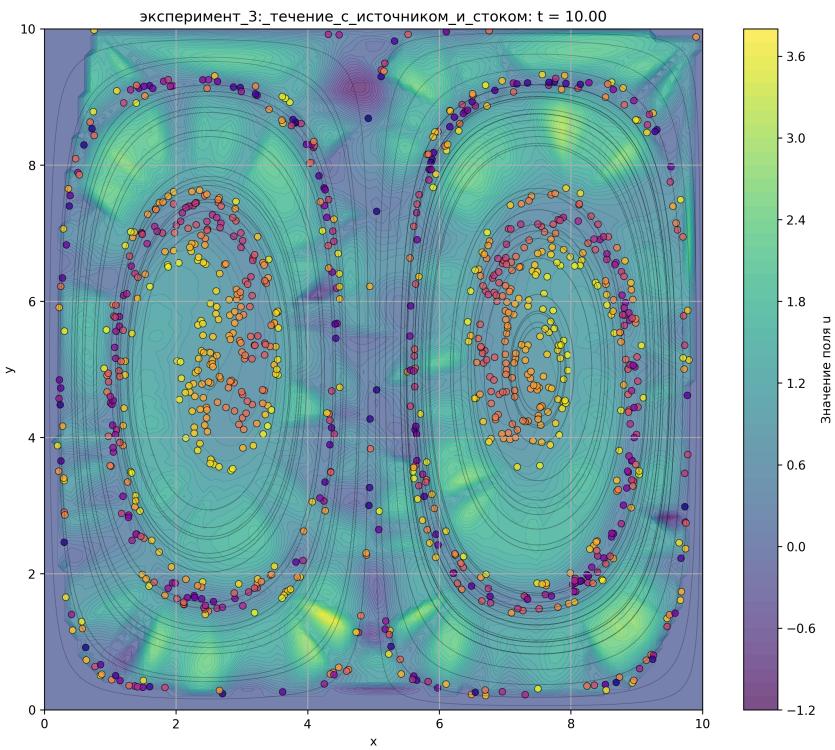


Рисунок 3.17 — Финальное распределение частиц (дивергентное течение)

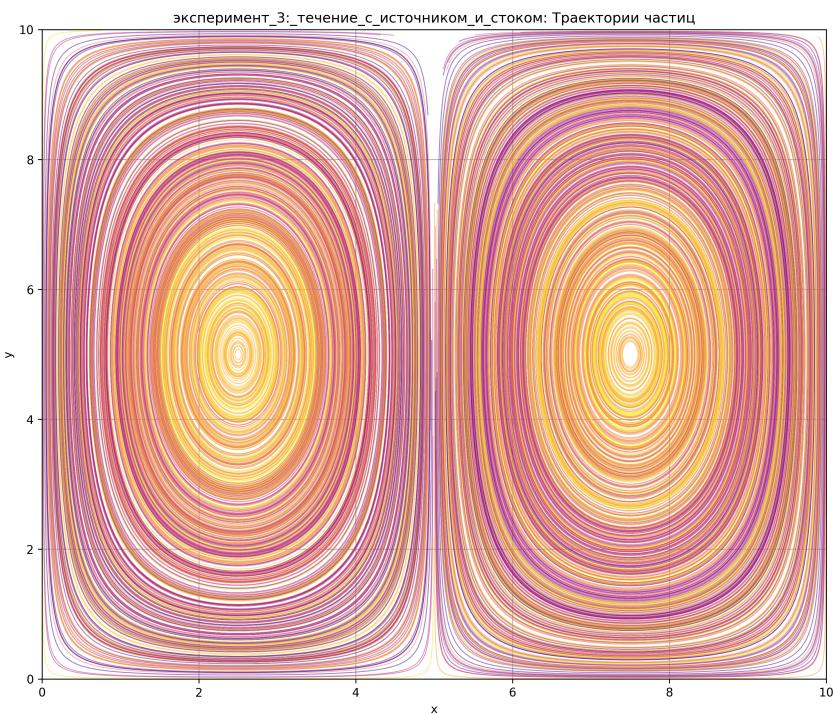


Рисунок 3.18 — Траектории частиц (дивергентное течение)

3.5 Выводы

Метод конечных разностей позволяет качественно решать задачу переноса при условии соблюдения критерия CFL. Использование upwind-схем позволяет избежать осцилляций, но при этом может вызывать численное диффузионное размытие. Метод легко масштабируется и хорошо подходит для моделирования задач с заданным полем скоростей.

Метод лагранжевых точек (или лагранжевых частиц) обеспечивает высокую точность отслеживания переноса вещества или других скалярных величин в заданном поле скоростей. Вместо аппроксимации функции на фиксированной сетке, как в методе конечных разностей, метод отслеживает движение частиц по траекториям, определяемым полем скоростей. Это позволяет избежать численного диффузионного размытия и сохранять чёткие границы. Метод особенно эффективен при моделировании переноса в сильно неоднородных или турбулентных потоках.

Заключение

Была сформулирована и проанализирована модель двумерного переноса.

Представлена программа для ЭВМ, которая вычисляет решения задачи. В неё вошли метод лагранжевых частиц и конечно-разностный метод вверх по потоку.

Были проведены и проанализированы численные эксперименты с использованием разных схем решения системы с разными начальными условиями и полями.