ИДЗ №1

Вершинин Данил Алексеевич

27 апреля 2024 г.

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz$

Решение:

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz - \text{Отношение голоморфных функций}$$

Найдём особые точки:

$$\sin z = 0 \Rightarrow z = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

В круге $|z-1| = 3$ - две особые точки: $z = 0, z = \pi$

$$(ze^z)' = e^z + ze^z \Big|_{z=0} = 1 \neq 0$$

$$(\sin z)' \ = \cos z \Big|_{z=0} = 1 \neq 0$$

Следовательно, 0 - нуль первого порядка, следовательно УОТ, следователь вычет в ней равен 0 Точка π - нуль первого порядка знаменателя, числитель в ней не обращается в 0.

$$ze^z \Big|_{z=\pi} = \pi e^p i \neq 0; \ (\sin z)' = \cos z \Big|_{z=\pi} = -1 \neq 0$$

Следовательно, $z = \pi$ - полюс первого порядка, вычет вычисляется по формуле:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{ze^z}{\sin z} = \frac{zez^z}{\cos z}\Big|_{z=\pi} = -\pi e^\pi$$

Поэтому интеграл равен:

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz = 2\pi i \cdot (-\pi e^\pi) = -2\pi^2 e^\pi i$$

Ответ:

$-2\pi^2 e^\pi i$

2 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz$

Решение:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz$$

Заметим, что

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz = \oint\limits_{|z|=1} \left(\frac{e^{2z}}{z^2} - \frac{1}{z}\right) dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^2} dz - \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z} = 1$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2 e^{2z}}{z^2} = 1 \text{ - видим, что 0 - полюс второго порядка}$$

Разложим $\frac{e^{2z}}{z^2}$ в ряд Лорана в окрестности точки 0:

$$\frac{1}{z^2}\left(1+2z+\frac{4z^2}{2!}+\dots\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+\frac{4}{2!}+\dots$$

Отсюда видим, что вычет равен 2. Следовательно интеграл равен:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{2z}-z}{z^2}dz=2\pi i(2-1)=2\pi i$$

Ответ: $2\pi i$

3 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=0,05}\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\operatorname{sh}16\pi z}dz$

Решение:

$$\oint\limits_{|z|=0,05}\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\operatorname{sh}16\pi z}dz$$

Числитель и знаменатель голоморфные функции всюду в$\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ особые точки - это нули знаменателя, при условии $|z|<0,05$

$$z^3\operatorname{sh}16\pi z\iff z^3=0\ \vee\ \operatorname{sh}16\pi z=0$$

Последнее перепишем:

$$\operatorname{sh}16\pi z=0\Rightarrow e^{16\pi z}-e^{-16\pi z}=0\Rightarrow e^{16\pi z}=e^{-16\pi z}\Rightarrow e^{32\pi z}=1\Rightarrow 32\pi z=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

Следующая оценка покажет, что в $|z|<0,05$ попадает тольо одна точка ($z=0$)

$$n\neq 0\Rightarrow\left|\frac{\pi}{16}n\right|\geq\left|\frac{\pi}{16}\right|>\frac{3}{16}>\frac{1}{20}$$

Итак, вычисления показывают, что:

$$\oint\limits_{|z|=0,05}\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\operatorname{sh}16\pi z}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\operatorname{sh}16\pi z}$$

Заметим, что $z=0$ - является нулём первого порядка для числителя:

$$e^{iz}-1\sin 4z\big|_{z=0}=0;\ (e^{iz}-1-\sin 4z)'\big|_{z=0}=(ize^{iz}-4\cos 4z)\big|_{z=0}=i-4\neq 0$$

и нуль четвертого порядка для знаменателя, т.к. он является z^3 (3-го порядка) и $\operatorname{sh}16\pi z$ (первый порядок); $(\operatorname{sh}16\pi z)'\big|_{z=0}\neq 0$
Поэтому, для дроби $z=0$ - полюс 3-го порядка.
Вычет равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\operatorname{sh}16\pi z}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\operatorname{sh}16\pi z}\right)^{(2)}$$

Брать вторую производную достаточно затратное занятие. Найдём вычет через ряд Лорана $z=0$ - полюс 3-го порядка, следовательно разложение будет иметь вид:

$$f(z)=\frac{C_{-3}}{z^3}+\frac{C_{-2}}{z^2}+\frac{C_{-1}}{z}+C_0+\dots\Big|\cdot\operatorname{sh}16\pi z$$

$$e^{iz}-1-\sin 4z=\operatorname{sh}16\pi z(C_{-3}+C_{-2}z+C_{-1}z^2+C_0z^3+\dots)$$

Разложим левую часть:

$$e^{iz}-1-\sin 4z=iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\dots-(4z-\frac{(4z)^3}{3!})=(i-4)z+\frac{(iz)^2}{2}+\frac{4^3-i}{6}z^3+\dots$$

Справа получили разложение:

$$\operatorname{sh}16\pi z(C_{-3}+\dots)=(16\pi z+\frac{(16\pi z)^3}{6}+\dots)(C_{-3}+C_{-2}z+C_{-1}z^2)+C_0z^3+o(z^4)=$$

$$= 16\pi z C_{-3} + 16\pi C_{-2} z^2 + \left[\frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3} + 16\pi C_{-1}\right] z^3 + \dots$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\begin{Bmatrix} i-4 = 16\pi C_{-3} & \Rightarrow & C_{-3} = \frac{i-4}{16\pi} \\ \frac{1}{2} = 16\pi C_{-2} & \Rightarrow & C_{-2} = \frac{1}{32\pi} \\ \frac{4^3-i}{6} = \frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3} + 16\pi C_{-1} & \Rightarrow & C_{-1} = \left(\frac{4^3-i}{6} - \frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3}\right)\frac{1}{16\pi} \end{Bmatrix}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z|=0{,}05} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{16\pi}\left(\frac{4^3 - i}{6} - \frac{(16\pi)^3}{6} \cdot \frac{(i-4)}{16\pi}\right) = \frac{i}{8\pi}\left(\frac{4 - i - (16\pi)^2(i-4)}{6}\right)$$

Ответ: $\frac{i}{8\pi}\left(\frac{4-i-(16\pi)^2(i-4)}{6}\right)$

4 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+3|=2} \left(z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}\right) dz$

Решение:

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \left(z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}\right) dz = \oint\limits_{|z+3|=2} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} dz - \oint\limits_{|z+3|=2} \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} dz$$

Рассмотрим первый интеграл. Очевидно, что подынтегральное выражение имеет в $\mathbb{C}$ только одну изолированную особую точку: $z = -3$ - центр окружности, по которой интегрируем:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} dz$$

Применяя основную теорему о вычетах, получим:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-3} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3}$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд лорана в окрестности точки $z = -3$:

$$z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} = (-3 + (z+3))\left(\frac{i}{z+3} + \frac{i^3}{3!(z+3)^3} + \frac{i^5}{5!(z+3)^5} + \dots\right) = i - \frac{3i}{z+3} - \frac{i}{3!(z+3)^2} + \frac{3i}{3!(z+3)^3} + \dots$$

Отсюда видим, что разложение содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов при отрицательных степенях $(z+3)$, значит $z = -3$ - СОТ.
Кроме того, вычет в этой точке

$$\operatorname*{Res}_{z=-3} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} = -3i$$

Значит,

$$\oint\limits_{|z+3|=2} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} dz = 6\pi$$

Теперь займёмся вторым интегралом:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} dz$$

Особыми точками подынтегральной функции являются нули знаменателя $z = 0$ и $z = -2$. Но точка $z = 0$ лежит вне окружности $|z+3| = 2$, поэтому по основной теореме Коши о вычетах имеем:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2} \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}$$

Но $z=-2$ полюс второго порядка, так как является, очевидно, нулем второго порядка для знаменателя, а числитель в ней $\neq 0$. По формуле для вычисления вычета в полюсе порядка 2

$$\operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2z}=\lim_{z\to-2}\left(\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4}}{z}\right)'=4\lim_{z\to-2}\frac{\frac{\pi i}{4}\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4}z-\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4}}{z^2}=\frac{\pi i}{4}\operatorname{ch}\left(-\frac{\pi i}{2}\right)-\operatorname{sh}\left(-\frac{\pi i}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi i}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=i$$

Поэтому

$$\oint\limits_{|z+3|=2}\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2z}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2z}=-2\pi$$

Ответ:

$$\oint\limits_{|z+3|=2}\left(z\operatorname{sh}\frac{i}{z+3}-\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2z}\right)dz=8\pi$$

5 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t-5}$

Решение:

Проведём замену $e^{it}=z\Rightarrow dt=dz/iz$. Будут справедливы формулы:

$$\sin t=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$\cos t=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

После замены получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t-5}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(\cancel{2}\sqrt{6}\frac{1}{\cancel{2}\cancel{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)-5\right)\cancel{i}z}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{6}z\left(z-\frac{1}{z}\right)-5iz}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{6}z^2-\sqrt{6}-5iz}$$

очевидно, что нули наменателя являются полюсами первого порядка для подынтегрального выражения. Найдём их:

$$\sqrt{6}z^2-\sqrt{6}-5iz=0\Rightarrow z_{1,2}=\frac{5i\pm\sqrt{-25+24}}{2\sqrt{6}}=\begin{cases}\frac{i\sqrt{6}}{2}\\ \frac{i\sqrt{6}}{3}\end{cases}$$

В круге $|z|=1$ лежит только корень $\frac{i\sqrt{6}}{3}$. Поэтому, искомый интеграл вычисялется так:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{6}z^2-\sqrt{6}-5iz}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}}\frac{1}{\sqrt{6}z^2-\sqrt{6}-5iz}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}}\frac{1}{\sqrt{6}\left(z-\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)\left(z-\frac{i\sqrt{6}}{3}\right)}=\left.\frac{2\pi i}{\sqrt{6}\left(z-\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)}\right|_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}}=$$

$$=\frac{2\pi i}{\sqrt{6}\left(\frac{i\sqrt{6}}{3}-\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)}=-2\pi$$

Ответ:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t-5}=-2\pi$$

6 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t\right)^2} dt$

Решение:

Произведём замену $e^{it} = z \Rightarrow dt = dz/iz$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t\right)^2} dt = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\sqrt{7}+\frac{\sqrt{5}}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2 iz} = \frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{\left(\sqrt{5}z^2+2\sqrt{7}z+\sqrt{5}\right)^2}$$

Последний интеграл вычисляем по основной теореме Коши о вычетах. Для этого найдём нули знаменателя:

$$\sqrt{5}z^2+2\sqrt{7}z+\sqrt{5} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2\sqrt{7}\pm\sqrt{28-20}}{2\sqrt{5}} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{-\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Первый из корней лежит вне круга $|z| < 1$, поэтому:

$$\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{\left(\sqrt{5}z^2+2\sqrt{7}z+\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{5\left(z+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2\left(z+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{8\pi}{5}\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{z}{\left(z+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2\left(z+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

Очевидно, для выражение под знаком вычета точка $z = -\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ является полюсом второго порядка, поэтому вычет вычисляется по формуле для полюса порядка n (n = 2)

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{z}{\left(z+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2\left(z+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2} = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \left(\frac{z}{\left(z+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2}\right)' = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{-5\sqrt{5}x+5\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{(\sqrt{5}x+\sqrt{7}+\sqrt{2})^3} =$$
$$= \frac{5\sqrt{14}}{16}$$

Окончательно получаем

Ответ:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t\right)^2} dt = \frac{\sqrt{14}}{2}\pi$$

7 Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx$

Решение:

Ответ:

8 Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-2x+10)} dx$

Решение:

Ответ:

9 Найти оригинал по заданному изображению $\frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$

Решение:

Ответ:

10 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $y'' + 2' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$

Решение:

Ответ:

11 Операционным методом решить задачу Коши $2y'' + 3y' + y = 3e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Решение:

Ответ:

12 Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию $\begin{cases} x' = y + 3, & x(0) = 1 \\ y' = x + 2, & y(0) = 0 \end{cases}$

Решение:

Ответ: