

# ИДЗ №1

Вершинин Данил Алексеевич

24 марта 2024 г.

## 1 Найти все значения корня: $\sqrt[3]{8i}$

**Решение:**

$$w = 8i$$

Найду модуль и аргумент:

$$\rho = |8i| = \sqrt{64} = 8$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{0}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$2 = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2 \cdot 3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2i$$

**Ответ:**

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2i$$

## 2 Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}(2 - \pi i)$

**Решение:**

$$\operatorname{sh}(2 - \pi) = \operatorname{sh}(2) \operatorname{ch}(\pi i) - \operatorname{ch}(2) \operatorname{sh}(\pi i) = -\operatorname{sh}(2)$$

$$\operatorname{ch}(\pi i) = \cos(\pi) = -1$$

$$\operatorname{sh}(i\pi) = i\sin(\pi) = 0$$

**Ответ:**

$$-\operatorname{sh}(2)$$

### 3 Представить в алгебраической форме: $\operatorname{arth}(1 + \sqrt{3}i)$

Решение:

$$\begin{aligned}\operatorname{arth}(1 + \sqrt{3}i) \\ \operatorname{arth}(z) = w \Rightarrow \operatorname{cth}(w) = z \\ \frac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}} = z \\ \frac{e^w + 1/e^w}{e^w - 1/e^w} = \frac{e^{2w} + 1}{e^{2w} - 1} = z \Rightarrow e^{2w} + 1 = z(e^{2w} - 1) \\ e^{2w}(1 - z) + z + 1 = 0 \\ e^{2w}(1 - z) + (z + 1) = 0 \Rightarrow e^{2w} = \frac{z + 1}{z - 1} \\ 2w = \operatorname{Ln} \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right) = \ln \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| + i \operatorname{Arg} \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right) \\ w = \frac{1}{2} \left( \ln \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| + i \left( \arg \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right) + 2\pi n \right) \right), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{z + 1}{z - 1} = \frac{2 + \sqrt{3}i}{-1} \cdot \frac{-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} = \frac{3 - 2\sqrt{3}i}{3} = 1 - \frac{2\sqrt{3}i}{3} \\ \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| = \left| 1 - \frac{2\sqrt{3}i}{3} \right| = \sqrt{1 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \\ \arg \left( 1 - \frac{2\sqrt{3}i}{3} \right) = \operatorname{arctg} \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \\ w = \frac{1}{2} \left( \ln \sqrt{\frac{7}{3}} + i \left( -\operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi n \right) \right), \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ответ:

$$\frac{1}{2} \left( \ln \sqrt{\frac{7}{3}} + i \left( -\operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi n \right) \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

### 4 Представить в алгебраической форме: $(-3i)^i$

Решение:

$$\begin{aligned}(-3i)^i &= e^{i \operatorname{Ln}(-3i)} \\ \operatorname{Ln}(-3i) &= \ln |-3i| + i \operatorname{Arg}(-3i) = \ln(3) + i \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ e^{i \operatorname{Ln}(-3i)} &= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i \ln(3)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} (\cos(\ln(3)) + i \sin(\ln(3))), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ответ:

$$e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} (\cos(\ln(3)) + i \sin(\ln(3))), \quad k \in \mathbb{Z}$$

### 5 Представить в алгебраической форме: $\operatorname{Ln}(2 + 2\sqrt{3}i)$

Решение:

$$\operatorname{Ln}(2 + 2\sqrt{3}i) = \ln |2 + 2\sqrt{3}i| + i \operatorname{Arg}(2 + 2\sqrt{3}i) = \ln 4 + i \left( \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\ln 4 + i \left( \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$$

6 Вычертить область, заданную неравенствами:

$$D = \{z : |z - 1 + i| \geq 1, \operatorname{Re}(z) < 1, \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$$

Ответ:

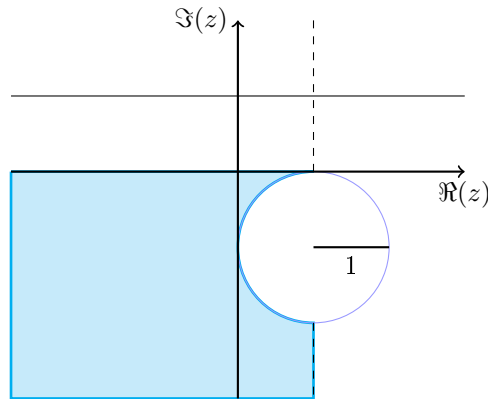


Рис. 1: Нужная нам область

7 Определить вид пути и в случае, когда он проходит через точку  $\infty$ , исследовать его поведение в этой точке:  $z = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} + i2 \operatorname{th}(4t)$

Решение:

$$z = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} + i2 \operatorname{th}(4t)$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} \\ y = 2 \operatorname{th}(4t) \end{cases}$$

$$x = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(4t)}$$

$$y = 2 \operatorname{th}(4t) \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{\operatorname{sh}(4t)}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{y^2}{4} = \frac{\operatorname{sh}^2(4t)}{\operatorname{ch}^2(4t)} + 1 - 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} = -\frac{1}{\operatorname{ch}(4t)} + 1$$

$$-\frac{y}{4} + 1 = \frac{1}{\operatorname{ch}(4t)}$$

$$\frac{x^2}{16} = -\frac{y^2}{4} + 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$t = 0 : x \rightarrow 4, y \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow +\infty : x \rightarrow 0, y \rightarrow 2$$

$$t \rightarrow -\infty : x \rightarrow 0, y \rightarrow -2$$

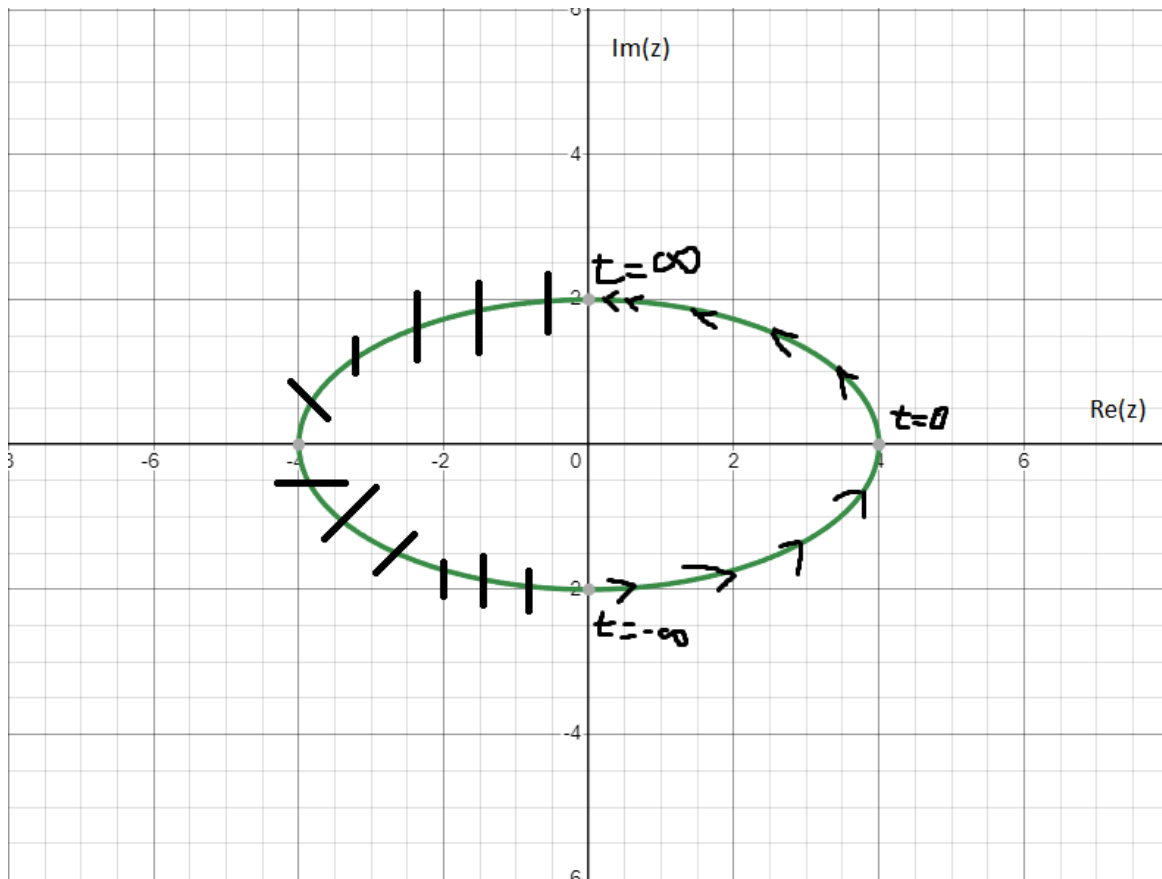


Рис. 2:  $z$  - эллипс. Левая часть не нужна, т.к.  $x$  не может принимать отрицательные значения

- 8 Восстановить голоморфную в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части  $u(x, y)$  или мнимой  $v(x, y)$  и начальному значению  $f(z_0)$ :  $u = x^2 - y^2 + x$ ,  $f(0) = 0$

Решение:

$$u = x^2 - y^2 + x$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x + 1$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = -2y$$

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 2 \\ \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow 2 - 2 = 0 \text{ - следовательно, условие Лапласа выполнено}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta v}{\delta y} = 2x + 1 \\ \frac{\delta v}{\delta x} = 2y \end{cases}$$

$$v = 2yx + \phi(y) \Rightarrow \frac{\delta v}{\delta y} = 2x + \phi'(y) \Rightarrow \phi'(y) = 1 \Rightarrow \phi(y) = y + C$$

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + C) = x + iy + x^2 - y^2 + 2ixy + iC = (*)$$

$$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$(*) = z + z^2 + iC$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$f(z) = z^2 + z$$

Ответ:

$$f(z) = z^2 + z$$

9 Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути:  $\int_{AB} z \Im(z^2) dz$ ;  $AB$  — отрезок прямой  $z_A = 0$ ,  $z_B = 1+i$

Решение:

$$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \Im(z^2) = 2ixy$$

$$z \Im(z^2) = (x + iy)(2ixy) = 2ix^2y - 2xy^2$$

$$Z_A Z_B : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 1; z(t) = t + it \Rightarrow z'(t) = 1 + i$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} z \Im(z^2) dz &= \int_0^1 (2ix^2(t)y(t) - 2x(t)y^2(t))(1+i) dt = \int_0^1 (2it^3 - 2t^3)(1+i) dt = \int_0^1 2t^3(i-1)(i+1) dt = \\ &= \int_0^1 2t^3(i^2 - 1^2) dt = \int_0^1 -4t^3 dt = -1 \end{aligned}$$

Ответ:

-1

10 Найти радиус сходимости степенного ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2(n)) \cdot z^n$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2(n)) \cdot z^n$$

$$\text{Радиус сходимости: } R = \frac{1}{\rho}, \text{ где } \rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n}$$

$$C_n = \cos^2 n, \text{ очевидно, что } \cos^2 n \leq 1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} \leq 1$$

$$|C_n| \not\rightarrow 0 \Rightarrow \cos^2 n \not\rightarrow 0 \quad (*)$$

$$\exists n_k \cos^2 n_k \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \alpha \neq 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\cos^2 n_k} \geq \overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\alpha}$$

$$\overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\alpha} \leq \overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\cos^2 n_k} \leq 1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 n} = 1$$

$$(*) : \text{предположим противное: } \cos^2 n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \cos^2(2n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(\cos^2 n - \sin^2 n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \sin^2 n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases}, \text{ но при этом } \cos^2 + \sin^2 = 1 - \text{ не выполняется.}$$

Следовательно, получили противоречие.  $\Rightarrow \cos^2 n \not\rightarrow 0$ , что и требовалось доказать.

Тогда получается, что  $R = 1/\rho = 1/\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 n} = 1/1 = 1$

Ответ:

$R = 1$

**11 Найти все лорановское разложение данной функции в 0 и в  $\infty$ :  
 $f(z) = \frac{5z+100}{50z-5z^2-z^3}$  (пример поправил, т.к. в ином случае корни не рациональные)**

**Решение:**

$$50z - 5z^2 - z^3 = 0 \Rightarrow z(50 - 5z - z^2) = 0$$

$$z_1 = 0, \quad 50 - 5z - z^2 = 0$$

$$z_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 200}}{-2} = \begin{cases} -10, \\ 5 \end{cases}$$

$$\frac{5z + 100}{50z - 5z^2 - z^3} = - \left( \frac{a}{z} + \frac{b}{z - 5} + \frac{c}{z + 10} \right) = (*)$$

$$50a - 5az - az^2 - bz^2 - 10bz - cz^2 + 5cz = 5z + 100$$

$$z^2 : a + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -2 \Rightarrow c = -1/3$$

$$z : -5a - 10b + 5c = 5 \Rightarrow -2b + c = 3 \Rightarrow 3b = -5 \Rightarrow b = -5/3$$

$$1 : 50a = 100 \Rightarrow a = 2$$

$$(*) = \frac{2}{z} - \frac{5}{3(z-5)} - \frac{1}{3(z+10)}$$

Первое слагаемое уже является разложением в ряд Лорана. Осталось найти разложение второго и третьего.

Для начала найдём разложение в окрестности нуля.

Заметим, что функция  $\frac{5}{3(z-5)}$  - голоморфна при  $|z| < 5$ , следовательно, её ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора (с кругом сходимости  $|z| < 5$ ):

$$\frac{5}{3(z-5)} = \frac{5}{15} \cdot \frac{-1}{(1-\frac{z}{5})} = \frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{5^n} z^n\right) \quad (1)$$

Аналогично раскладывается и третье слагаемое. Также отметим, что функция  $\frac{1}{3(z+10)}$  - голоморфна при  $|z| < 10$ . Отсюда получаем, что её ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора (с кругом сходимости  $|z| < 10$ ):

$$\frac{1}{3(z+10)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{10})} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{10^n} z^n \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) справедливы при  $|z| < 5$

$$\frac{5z + 100}{50z - 5z^2 - z^3} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^n} z^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{10^n} z^n = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^n}\right) z^n$$

Это выполняется в кольце  $0 < z < 5$ , где  $\begin{cases} 0, & n \leq -2 \\ 2, & n = -1 \\ \frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^n}, & n \geq 0 \end{cases}$

Разложим теперь  $\frac{5}{3(z-5)}$  в окрестности  $\infty$ . Очевидно, что эта функция голоморфна на  $|z| > 5$ . Поэтому преобразуем её так:

$$\frac{5}{3(z-5)} = \frac{5}{3z} \cdot \frac{1}{(1-\frac{5}{z})}$$

Заметим, что при  $|z| > 5$  имеем  $|\frac{5}{z}| < 1$  и поэтому получим:

$$\frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{z}\right)^n$$

Окончательно получим:

$$\frac{5}{3z} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \frac{5}{3z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{3z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{3 \cdot 5^n} \quad (3)$$

Аналогично и при  $|z| > 10$  разложение для  $\frac{1}{3(z+10)}$ :

$$\frac{1}{3(z+10)} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{z}} = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{10}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{3z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{3(-1)^{n-1} 10^{n-1}} \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы для  $|z| > 10$

$$\begin{aligned} \frac{5z+100}{50z-5z^2-z^3} &= \frac{2}{z} - \frac{5}{3(z-5)} - \frac{1}{3(z+10)} = \frac{2}{z} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left( \frac{1}{3 \cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1} 10^{n-1}} \right) z^n = \\ &= (\text{Вычислим сумму для } n = -1) = \frac{-33}{z} - \sum_{n=-\infty}^{-2} \left( \frac{1}{3 \cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1} 10^{n-1}} \right) z^n \end{aligned}$$

**Ответ:**

В точке 0:

$$\frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^n} \right) z^n$$

В точке  $\infty$ :

$$\frac{-33}{z} - \sum_{n=-\infty}^{-2} \left( \frac{1}{3 \cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1} 10^{n-1}} \right) z^n$$

**12 Найти все лорановское разложение данной функции по степеням  $z - z_0$ :  $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}$ ,  $z_0 = -2 - 2i$**

**Решение:**

**Ответ:**

**13 Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0$ :  $f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}}$ ,  $z_0 = 5$**

**Решение:**

**Ответ:**

**14 Определить тип особой точки  $z = 0$  для данной функции:  $f(z) = \frac{\operatorname{ch}(5z)-1}{e^z-1-z}$**

**Решение:**

**Ответ:**

**15 Для данной функции найти все изолированные особые точки и определить их тип:  $f(z) = \operatorname{ctg}(\pi z)$**

**Решение:**

**Ответ:**