

Контрольная работа №6, задание 2

Вершинин Данил Алексеевич

4 июня 2024 г.

Условие

Для нахождения положительного корня нелинейного уравнения $x^6 - 5x - 2 = 0$ предложен метод простой итерации. Исследовать этот метод и сделать выводы о целесообразности его использования.

$$x_{n+1} = \sqrt[6]{5x_n + 2}$$

Решение

Пусть $\phi(x) = \sqrt[6]{5x + 2}$, что является предложенным методом простой итерации. $\phi(x) \in C^1(\mathbb{R}_+)$

Проверим выполнение теоремы 1 (см "нелин уравн+итерац. процесс конспекты лекций). Её условие следующее:

Если функция $\phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $q < 1$:

$$|\phi(x) - \phi(y)| < q|x - y|$$

То метод простой итерации сходится и справедлива оценка

$$|x_{n+1} - x^*| < q|x_n - x^*|$$

$$|x_{n+1} - x^*| < q^n|x_0 - x^*|$$

$$|\phi(x)'| \leq q < 1$$

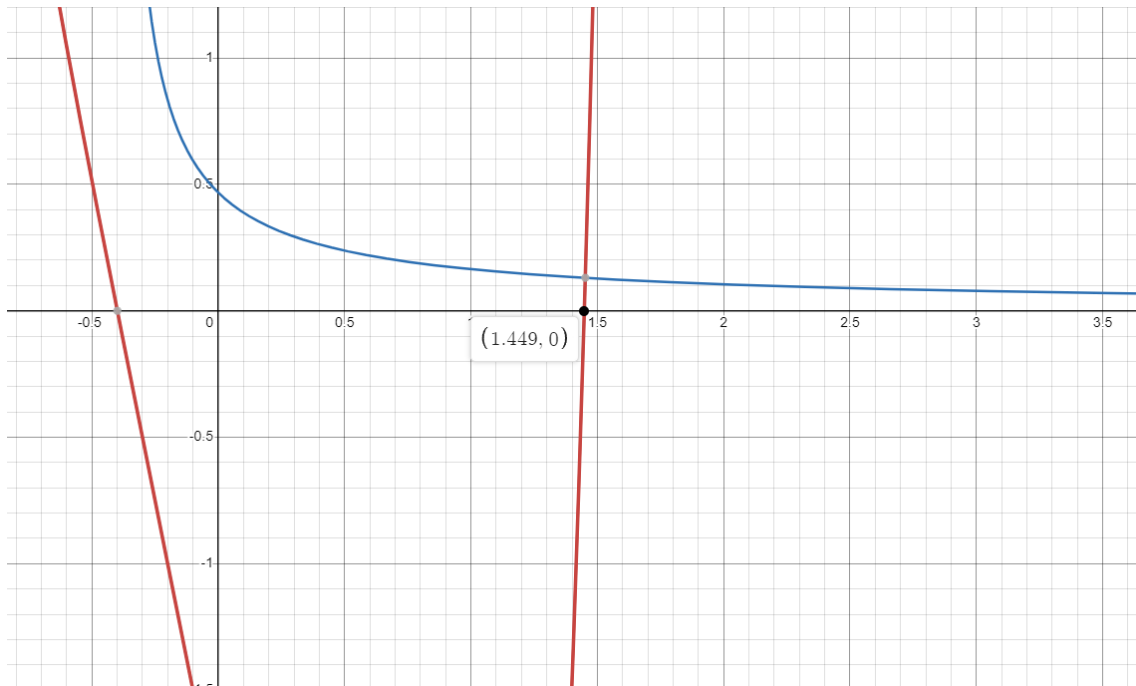


Рис. 1: функция из уравнения (красный). Производная предложенного метода (синий)

Проверим нашу функцию $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \sqrt[6]{5x + 2}$$

$$|\phi'(x)| = \left| \frac{5}{6(5x+2)^{5/6}} \right| < 1$$

Заметим (*), что модуль можно опустить, т. к. для положительных чисел $\phi'(x)$ всегда положительна, кроме того, асимптотически стремится к 0, при $x \rightarrow \infty$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{(5x+2)^{5/6}} < 1 \Rightarrow \frac{5}{6} < (5x+2)^{5/6} \Rightarrow x > \frac{(5/6)^{(6/5)} - 2}{5} \approx -0.239 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+ : |\phi'(x)| < 1 \quad (*)$$

Отсюда получаем, что теорема 1 выполняется для $x > -0.239$. По условию задачи, требуется исследовать сходимость для положительного корня ($\approx 1,449$, см. рис. 1). По (*) условия теоремы выполнены (в окрестности корня модуль производной итерационной функции < 1). Что позволяет нам утверждать о том, что метод применим и сходится. В тоже время отметим, что функция всегда положительна на \mathbb{R}_+ , что по условию $\phi'(x) > 0$ означает, что приближение будет происходить с одной стороны от корня. Кроме того, по определению, скорость сходимости метода линейна, что отражена на Рис. 2.

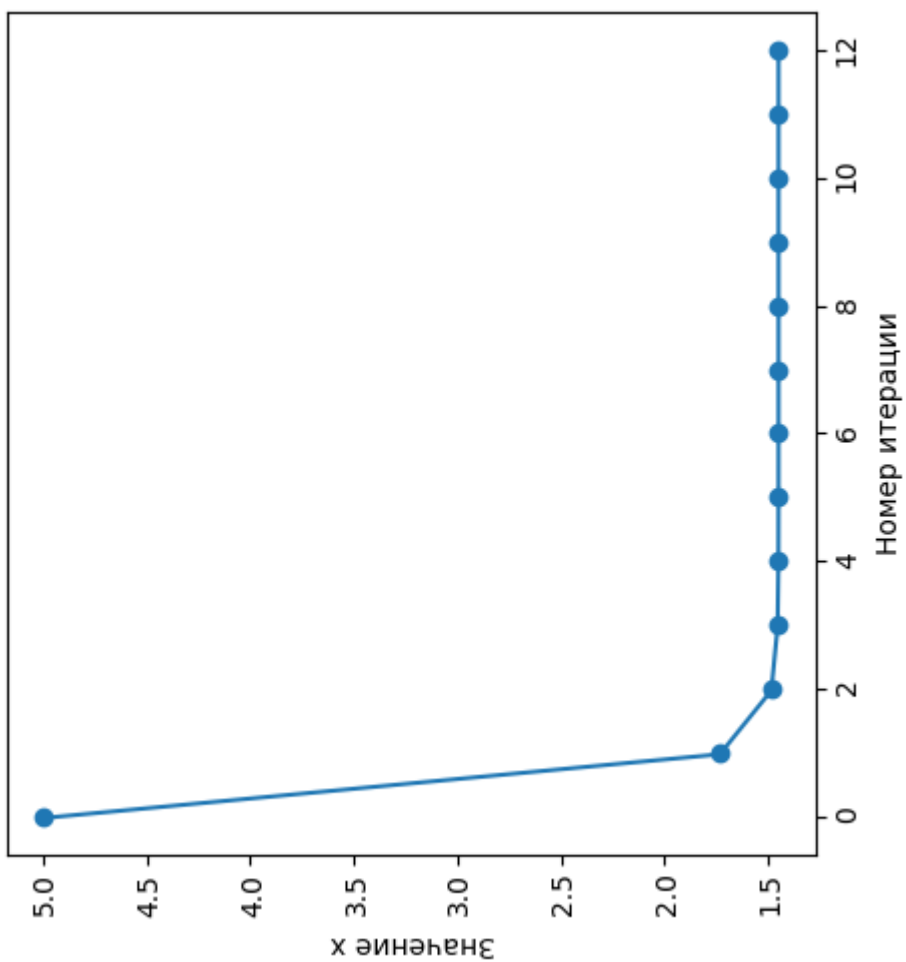
Вывод

Анализ метода показал его целесообразность для уточнения положительного корня уравнения

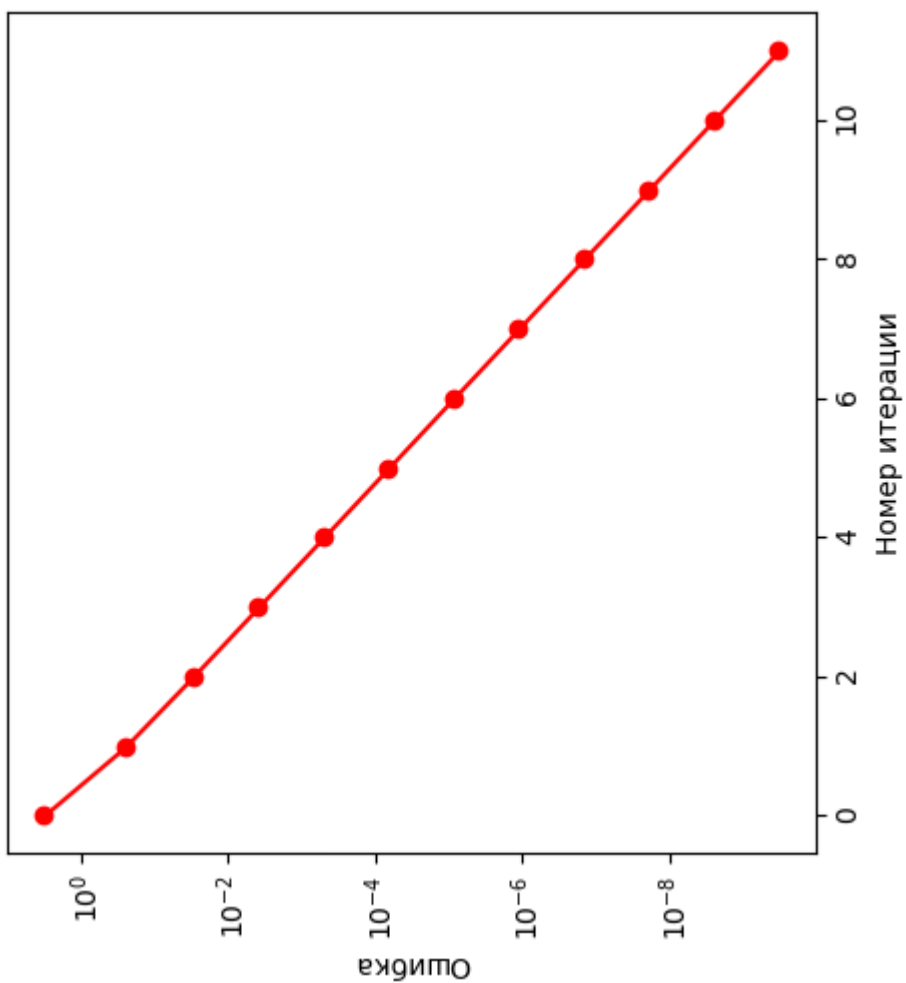
$$x^6 - 5x - 2 = 0$$

Положительный корень уравнения: 1.4486780564147381
Количество итераций: 12

Итерационные значения



Ошибки итерационного процесса



Приложение

[1] Код на python для расчетов

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Функция итерационного процесса
def phi(x):
    return (5 * x + 2) ** (1 / 6)

# Параметры итерационного процесса
x0 = 5.0 # Начальное приближение
tolerance = 1e-9 # Допуск
max_iterations = 100 # Максимальное количество итераций

# Массивы для хранения значений
x_values = [x0]
errors = []

# Итерационный процесс
for n in range(max_iterations):
    x_next = phi(x_values[-1])
    x_values.append(x_next)
    error = abs(x_next - x_values[-2])
    errors.append(error)
    if error < tolerance:
        break

# Печать результатов
print(f"Положительный корень уравнения: {x_values[-1]}")
print(f"Количество итераций: {len(x_values) - 1}")

# Визуализация сходимости
plt.figure(figsize=(10, 5))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(x_values, marker='o')
plt.title("Итерационные значения")
plt.xlabel("Номер итерации")
plt.ylabel("Значение x")

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(errors, marker='o', color='r')
plt.yscale('log')
plt.title("Ошибки итерационного процесса")
plt.xlabel("Номер итерации")
plt.ylabel("Ошибка")

plt.tight_layout()
plt.show()
```