



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**  
**(ШКОЛА)**

**Департамент математического и компьютерного моделирования**

**ОТЧЁТ**

к лабораторной работе №3 «Модель математического маятника»

по дисциплине

«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9122-01.03.02мкт

Вершинин Д.А.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Проверил профессор д.ф.-м. н.

Пермяков М. С.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 31 » марта 2025 г.

**г. Владивосток**

**2025**

## Оглавление

Введение . . . . .	3
1 Построение математической модели . . . . .	4
1.1 Постановка задачи . . . . .	4
1.2 Формализация . . . . .	4
1.3 Построение модели . . . . .	4
2 Анализ математической модели . . . . .	7
3 Вычислительные эксперименты . . . . .	8
3.1 Алгоритм решения . . . . .	8
3.2 Программа для ЭВМ . . . . .	9
3.3 Результаты экспериментов . . . . .	10
4 Заключение . . . . .	18
Список использованных источников . . . . .	19

## **Введение**

В нашем мире множество процессов представляют собой колебания: звук представляет собой колебания воздуха или воды, свет - колебания электромагнитных волн. Одной из фундаментальных моделей колебаний является математический маятник - идеализированная механическая система, состоящая из груза, представленного материальной точкой, который подвешен на невесомой нерастяжимой нити.

В этой работе рассматриваются уравнения движения математического маятника, его основные характеристики и влияние различных факторов на его динамику.

# 1 Построение математической модели

## 1.1 Постановка задачи

Цель работы:

- Сформулировать модель математического маятника с учётом силы трения и внешних сил.
- Проанализировать полученную модель
- Провести численные эксперименты с различными параметрами, для понимания влияния на колебания маятника.

Дано:

- $L$  - длина маятника (м)
- $g$  - ускорение свободного падения ( $9.81 \frac{м}{с^2}$ )
- $\theta(0) = \theta_0$  - начальный угол отклонения (рад)
- $\dot{\theta}(0) = \theta_1$  - начальная угловая скорость (рад/с)

## 1.2 Формализация

Для вывода математической модели будем использовать полярную систему координат и второй закон Ньютона в дифференциальной форме.

Пусть сила трения пропорциональна угловой скорости маятника, а внешняя сила действует с периодической частотой.

## 1.3 Построение модели

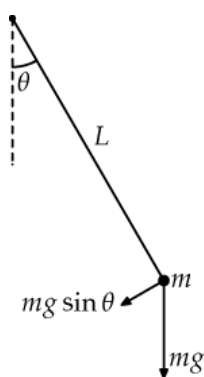


Рисунок 1 — Математический маятник.

Введём полярную систему координат. В качестве переменной, описывающей движение маятника, выберем угол отклонения  $\theta$  от вертикали в радианах. Запишем второй закон Ньютона [1]:

$$\vec{F} = m \vec{a}, \quad (1)$$

где,  $\vec{F}$  - сила, приложенна к телу,  $m$  - масса тела,  $\vec{a}$  - ускорение тела.

Тангенциальная сила направлена по касательной к траектории движения. Сила натяжения нити не учитывается, т.к. она направлена по нормали и не влияет на угловое движение.

Выделяя тангенциальную составляющую [1] проекции силы тяжести ( $ma_t = F_t$ ), получим:

$$F_t = -mg \sin(\theta), \quad (2)$$

где  $g$  - ускорение свободного падения.

Запишем ускорение в дифференциальной форме:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( L \frac{d\theta}{dt} \right) = L\ddot{\theta} \quad (3)$$

Тогда (2), с учётом (1, 3), можно переписать так:

$$mL\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0 \quad (4)$$

В области малых углов  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Тогда (4) можно записать в виде линейной модели:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (5)$$

Таким образом мы получили, что колебания маятника описываются обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

Обозначим  $\omega^2 = \frac{g}{L}$  и добавим начальные условия для получения единственного решения. Тогда, получим системы для (4) и (5):

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1 \end{cases}. \quad (6)$$

## Модели с внешними силами

Будем рассматривать линейную модель. Для нелинейной модели преобразования будут аналогичными.

Добавим в систему силу трения  $F_{\text{тр}}$ . Для простоты, пусть она будет пропорциональна скорости изменения угла  $\dot{\theta}$  с некоторым коэффициентом  $\mu > 0$ . Тогда модель преобразуется так:  $\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ .

На маятник может воздействовать внешняя сила, создавая вынужденные колебания:

$$F_e \sin(\omega_f t),$$

где  $F_e$  - амплитуда внешней силы (Н),  $\omega_f$  - циклическая частота (Гц = рад/с) . Добавим эту компоненту в модель:  $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = F_e \sin(\omega_f t)$ .

В случае, если на маятник действуют обе силы, описанные выше, то уравнение преобразуется так:  $\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega^2\theta = F_e \sin(\omega_f t)$ .

## 2 Анализ математической модели

Для анализа будем использовать линейную модель (5). Из курса дифференциальных уравнений известен вид решения:

$$\theta(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

. Тогда частное решение будет иметь вид:

$$\theta(t) = \frac{\theta_1}{\omega} \sin(\omega t) + \theta_0 \cos(\omega t).$$

Заметим, что при начальных значениях  $\theta(0) = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$  маятник будет покоиться.

Используя тригонометрическую идентичность, мы можем выразить комбинацию синуса и косинуса в виде одного синуса. Для этого применим формулу синуса суммы:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Таким образом, мы можем записать:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t) + a_1 \omega \sin(\omega t).$$

Теперь мы можем выразить это в виде одной синусоидальной функции:

$$\alpha(t) = \rho \sin(\omega t + \phi) \tag{7}$$

где:

-  $\rho$  — амплитуда, которая определяется как:

$$\rho = \sqrt{\alpha_0^2 + (a_1 \omega)^2}$$

-  $\phi$  — фаза, которая определяется через соотношения:

$$\rho \sin \phi = \alpha_0,$$

$$\rho \cos \phi = a_1 \omega.$$

Как можно видеть из (7), результатом будет являться синусоида с некоторым смещением, зависящим от начальных параметров.

## 3 Вычислительные эксперименты

### 3.1 Алгоритм решения

Для построения математической модели введём замену переменных  $\beta(t) = \dot{\alpha}(t)$ , что позволяет записать исходное уравнение во втором порядке в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -\omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\theta} = \beta, \\ \beta(0) = \theta_1, \quad \theta(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Или для линейной модели :

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -\omega^2 \alpha, \\ \dot{\theta} = \beta, \\ \beta(0) = \theta_1, \quad \theta(0) = \theta_0. \end{cases}$$

Аналогичным образом уравнения, включающие внешние воздействия, можно привести к этому же виду.

Для численного решения данной системы будем использовать метод Рунге-Кутты[2], что позволит получить решение с заданными параметрами.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка (RK4) обладает порядком точности  $O(h^4)$ , что означает, что ошибка метода уменьшается пропорционально четвертой степени размера шага  $h$ . Локальная ошибка на каждом шаге составляет  $O(h^5)$ , а глобальная ошибка, накапливаясь после  $N$  шагов, составляет  $O(h^3)$ . Это делает метод RK4 более точным по сравнению с методами более низкого порядка, такими как метод Эйлера и метод Рунге-Кутты второго порядка. Благодаря высокой точности и простоте реализации, RK4 широко используется для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в различных областях науки и техники.

После вычисления построим фазовый портрет и график изменения угла во времени.



## 3.2 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для расчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек `numpy` (вычисления) и `matplotlib` (визуализация).

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 g = 9.81
5 l = 1.0
6 mu = 0.0
7 m = 1.0
8 F = 0
9 omega_f = np.sqrt(g/l)
10 theta0 = np.pi / 10
11 omega0 = 0
12
13 def pendulum_eq(t, y):
14     theta, omega = y
15     dtheta_dt = omega
16     domega_dt = - (g / l) * theta - (mu / m) * omega + F * np.sin(omega_f
17         * t)
18     return np.array([dtheta_dt, domega_dt])
19
20 def pendulum_eq_lin(t, y):
21     theta, omega = y
22     dtheta_dt = omega
23     domega_dt = - (g / l) * np.sin(theta) - (mu / m) * omega + F *
24         np.sin(omega_f * t)
25     return np.array([dtheta_dt, domega_dt])
26
27 def runge_kutta4(f, y0, t_span, dt):
28     t_values = np.arange(t_span[0], t_span[1] + dt, dt)
29     y_values = np.zeros((len(t_values), len(y0)))
30     y_values[0] = y0
31
32     for i in range(1, len(t_values)):
33         t = t_values[i - 1]
34         y = y_values[i - 1]
35
36         k1 = dt * f(t, y)
37         k2 = dt * f(t + dt / 2, y + k1 / 2)
38         k3 = dt * f(t + dt / 2, y + k2 / 2)
39         k4 = dt * f(t + dt, y + k3)
```

```

40         y_values[i] = y + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
41
42     return t_values, y_values.T
43
44 t_span = (0, 25)
45 dt = 0.025
46
47 t_vals, sol = runge_kutta4(pendulum_eq, [theta0, omega0], t_span, dt)
48 t_vals_lin, sol_lin = runge_kutta4(pendulum_eq, [theta0, omega0], t_span,
    dt)

```

Зададим  $L = 1\text{м}$ , тогда собственная частота будет равна :  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \approx 3.13$ .

### 3.3 Результаты экспериментов

#### Модель без дополнительных сил

Сравним линейную и нелинейную модель при разных углах наклона и нулевой начальной скорости. Промежуток времени  $[0,25]$ , шаг - 0.025:

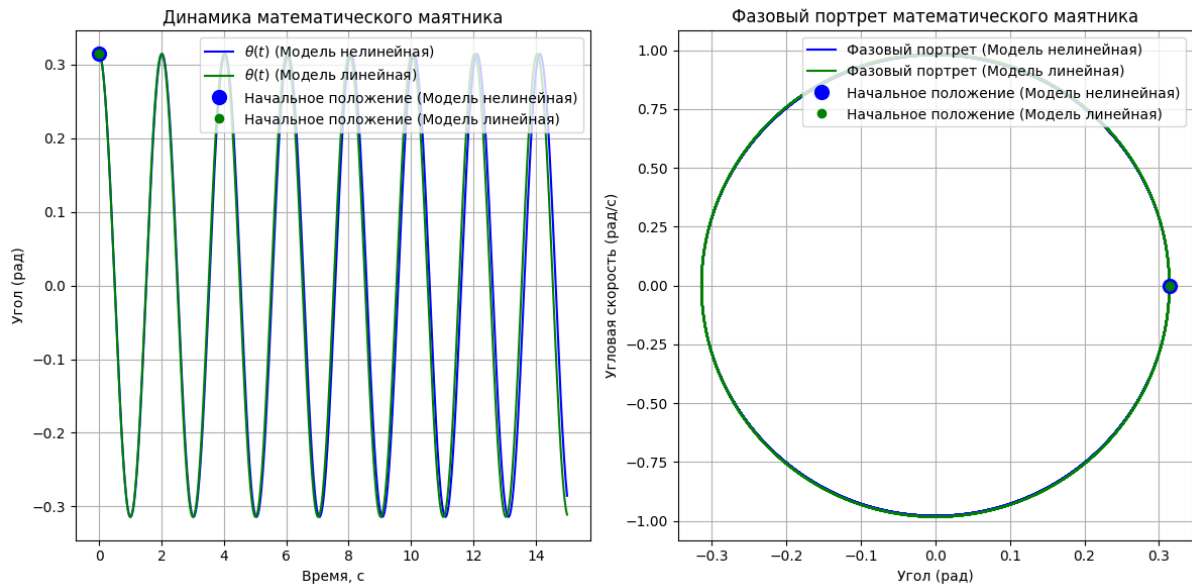


Рисунок 2 —  $\theta(0) = \pi/10$ .

Как видно на графиках (рис. 2 ,3), при небольшом угле наклона разница между моделями не большая. При увеличении угла разница возрастает, что влечёт погрешность линейной модели. На фазовом

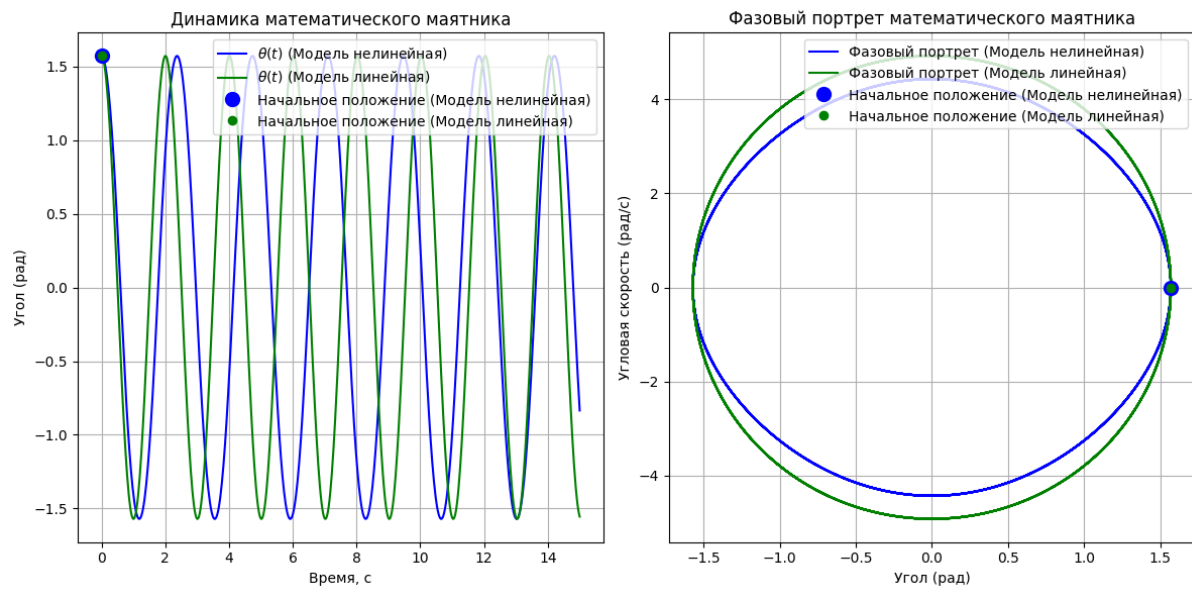


Рисунок 3 —  $\theta(0) = \pi/2$ .

портрете нелинейная модель имеет более узкий эллипс, что означает меньшую скорость.

Для дальнейших экспериментов будем использовать линейную модель при малых отклонениях.

## Модель с трением

Рассмотрим влияние трения на линейную модель про начальных условиях:  $\theta(0) = \pi/10$ ,  $\dot{\theta} = 0$ . Промежуток времени  $[0,40]$ , шаг - 0.04:

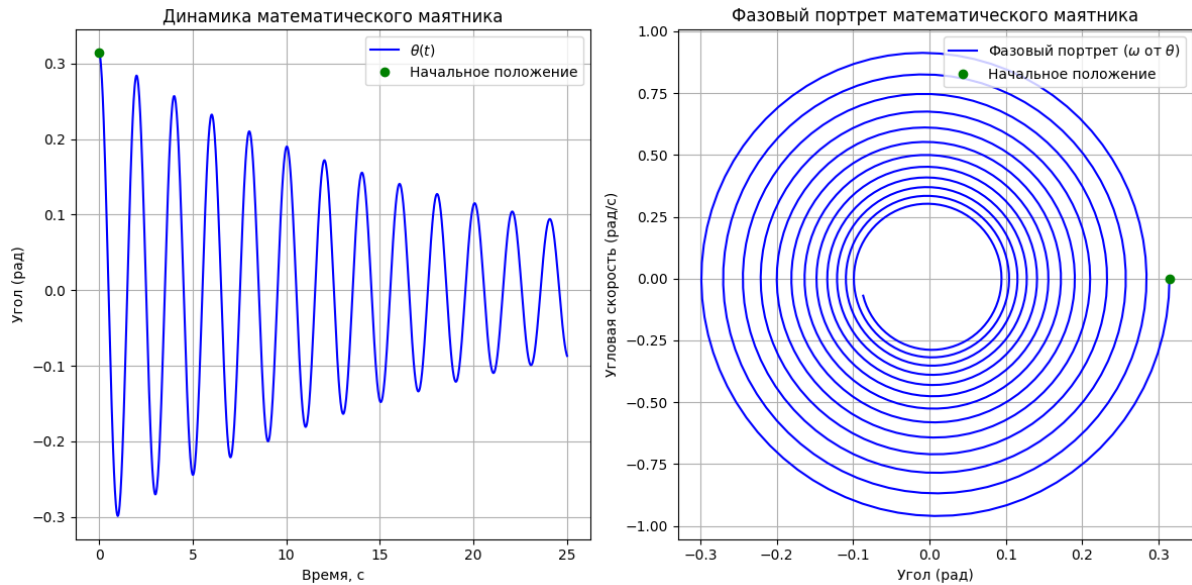


Рисунок 4 —  $\mu = 0.1$ .

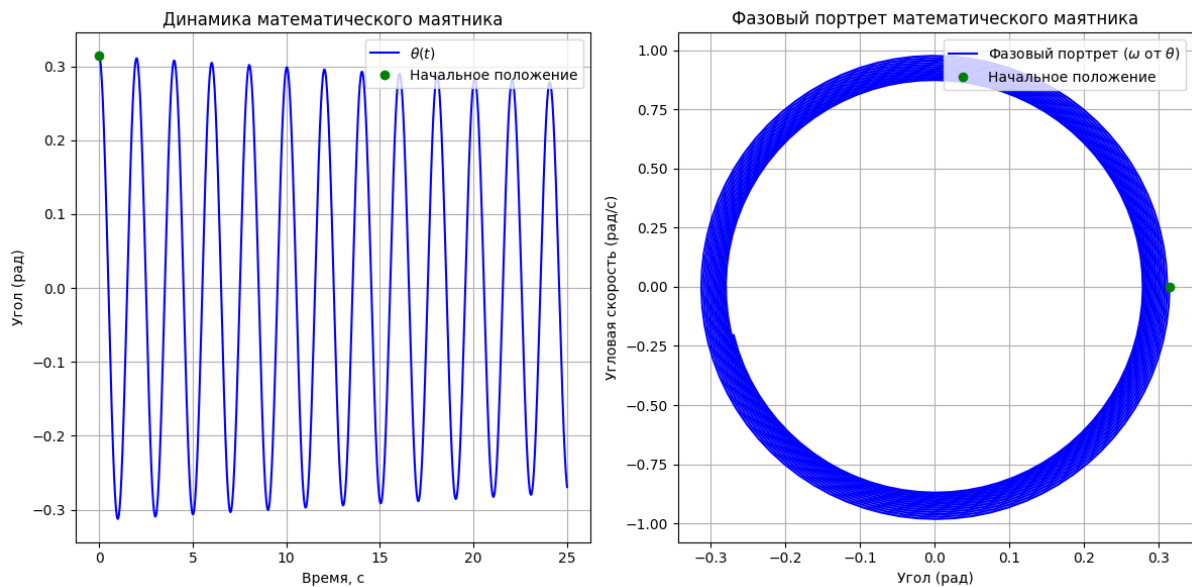


Рисунок 5 —  $\mu = 0.01$ .

Результаты показывают (Рис. 4, 5), что под действием силы трения колебания становятся затухающими. Кривая на фазовой плоскости стремится к нулю. Чем больше коэффициент трения ( $\mu$ ), тем быстрее затухают колебания.

## Модель с вынужденными колебаниями

Рассмотрим влияние внешней силы на линейную модель при начальных условиях:  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\theta} = 0$ . Промежуток времени  $[0, 25]$ , шаг - 0.025:

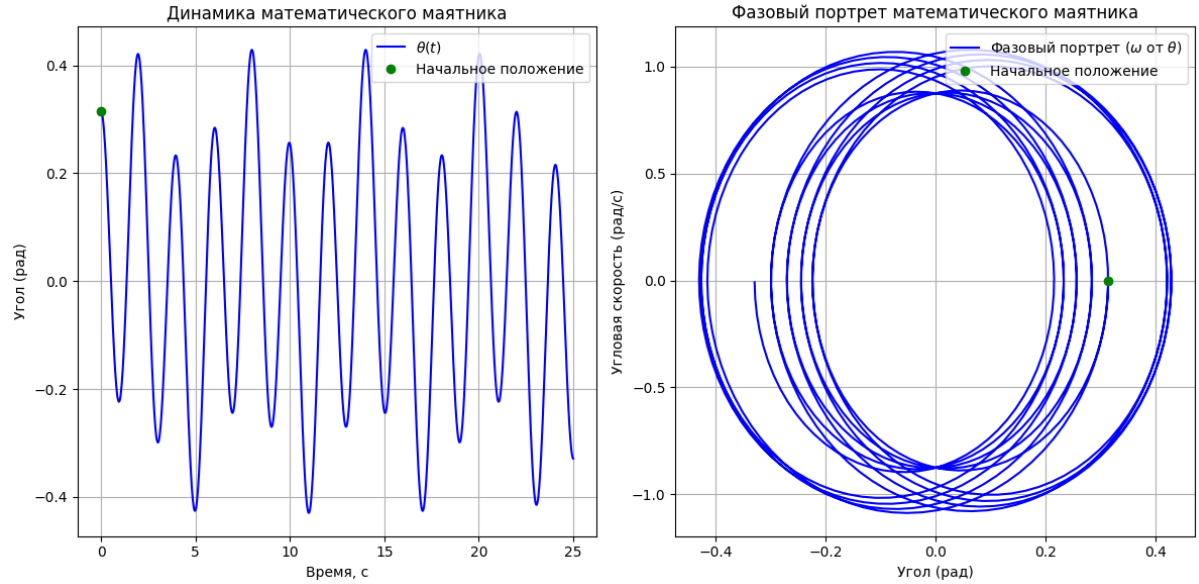


Рисунок 6 —  $F_e = 1, \omega_f = 1$ .

При воздействии внешних сил, происходит смещение значений угла наклона маятника, что отражается на фазовой плоскости (Рис. 6).

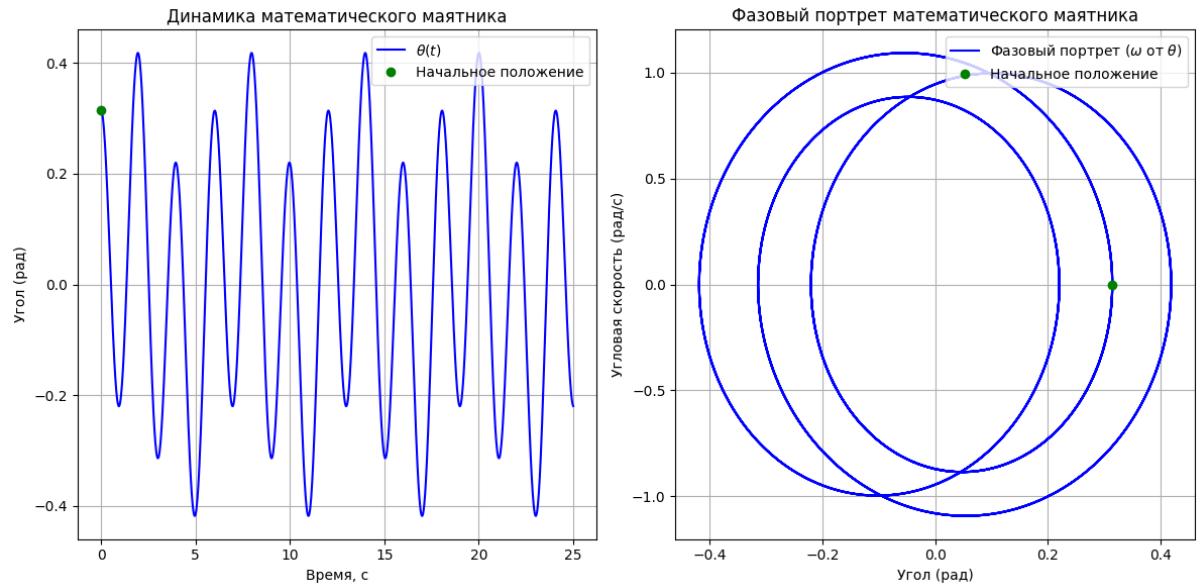


Рисунок 7 —  $F_e = 1, \omega_f = \omega/3$ .

При воздействии внешних сил с частотой, равной целой доли от собственной частоты маятника, на графике углов и фазовой плоскости видно (Рис. 7) периодичность колебаний.

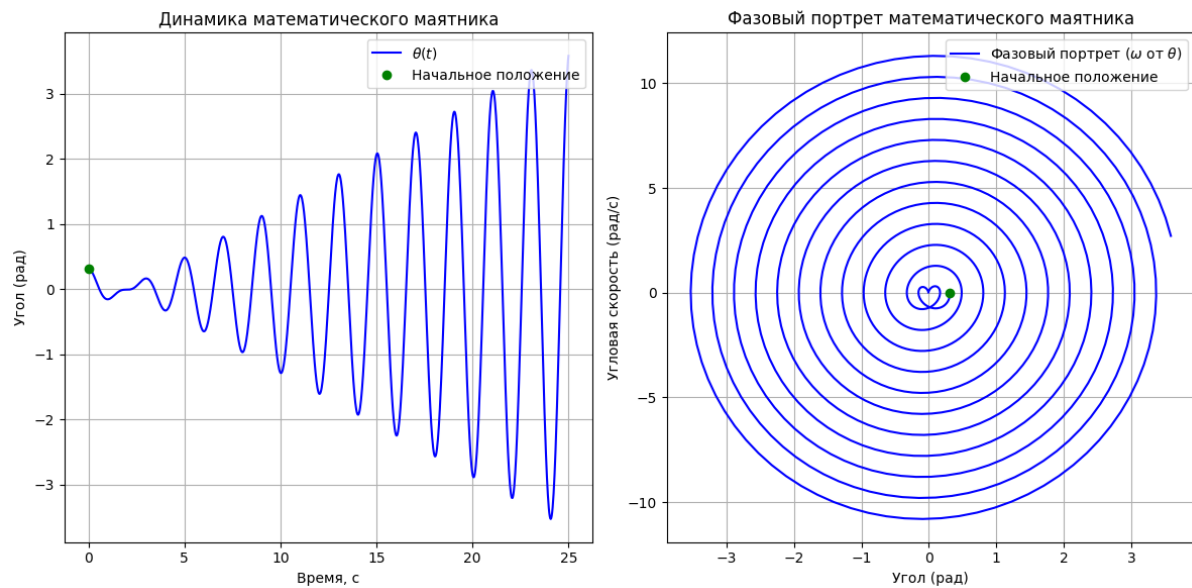


Рисунок 8 —  $F_e = 1, \omega_f = \omega$ .

В случае совпадения собственной частоты и частоты воздействия внешних сил, происходит эффект резонанса - амплитуда колебаний маятника неограниченной растёт (Рис. 8).

## Модель с трением и вынужденными колебаниями

Рассмотрим модель с обеими силами при начальных условиях:  
 $\theta(0) = \pi/10$ ,  $\dot{\theta} = 0$ . Промежуток времени  $[0,100]$ , шаг - 0.1:

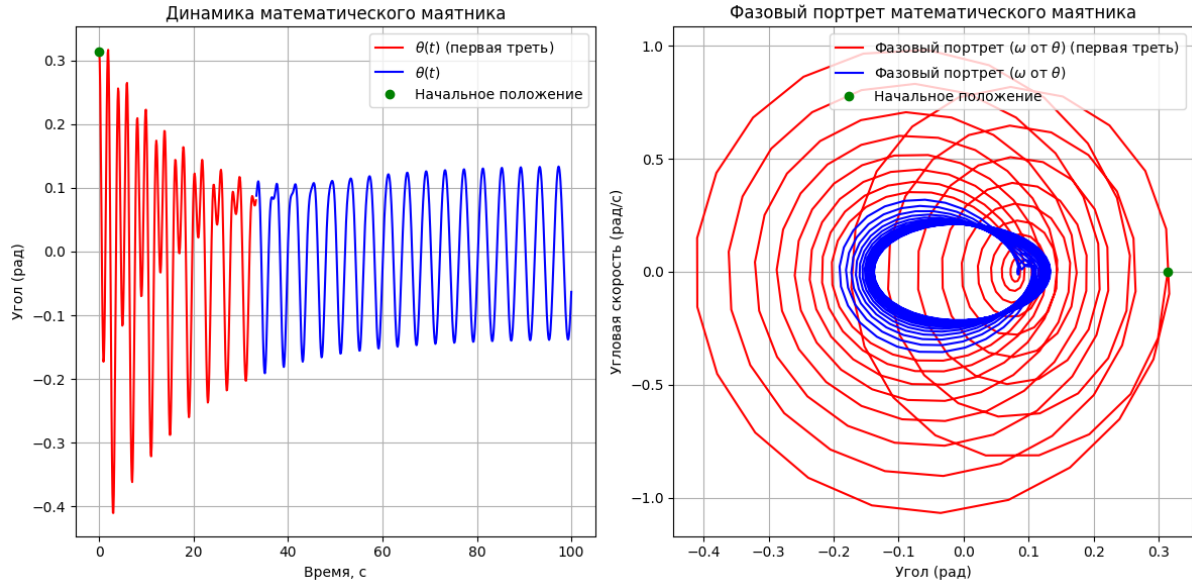


Рисунок 9 —  $F_e = 1, \omega_f = 0.5, \mu = 0.1$ .

Изначальные хаотические колебания сглаживаются (Рис. 9).  
 Постепенно происходит смена частоты и амплитуды.

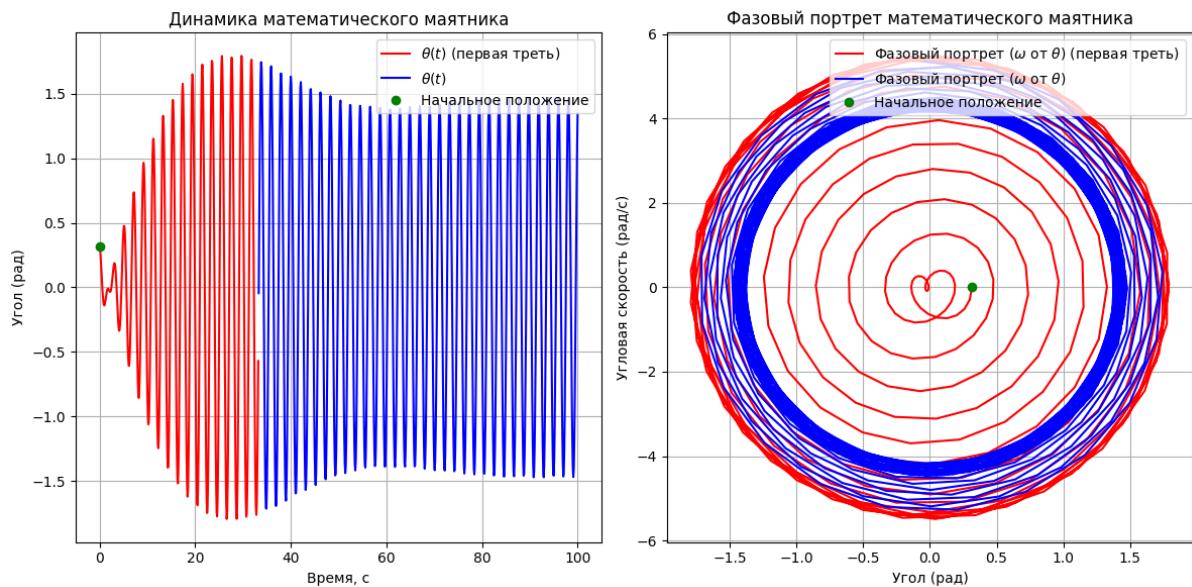


Рисунок 10 —  $F_e = 1, \omega_f = \omega - 0.1, \mu = 0.1$ .

При приближении к собственной частоте период и амплитуда устанавливаемых колебаний увеличиваются (Рис. 10).

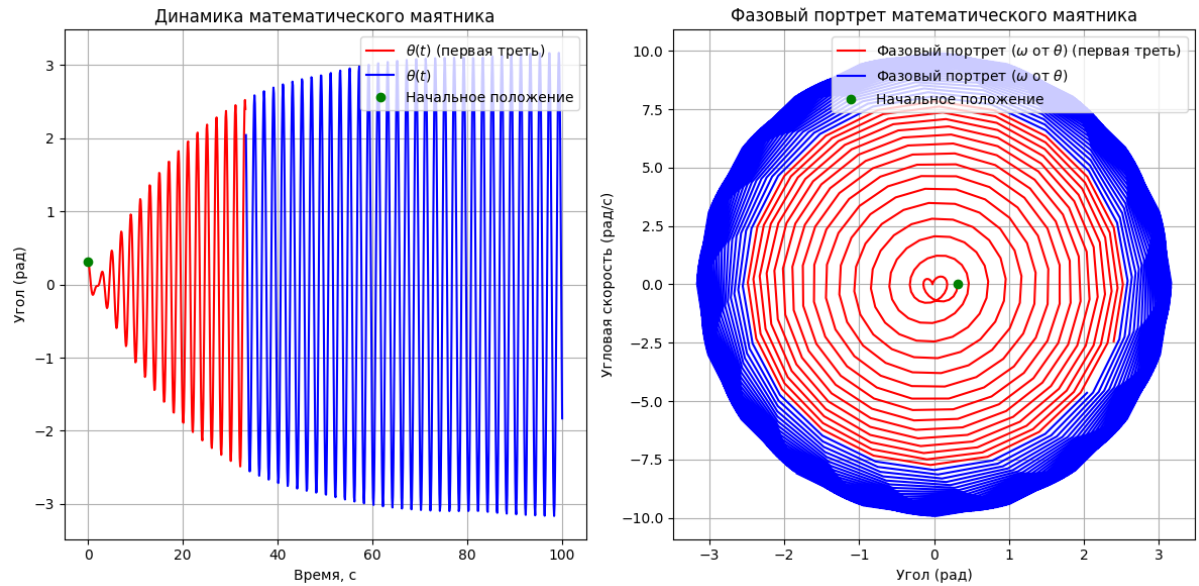


Рисунок 11 —  $F_e = 1, \omega_f = \omega, \mu = 0.1$ .

В условиях резонанса достигается наибольшая амплитуда колебаний. В отличие от модели без учета трения, в данном случае амплитуда не будет расти бесконечно. Однако наличие силы трения не означает, что резонансная частота совпадает с собственной частотой системы.



## Резонанс

Для исследования резонанса рассмотрим резонансные кривые. Т.к. этот эффект связан с частотой, то будем выбирать несколько значений частоты, вынуждающих колебания около неё. Для каждой из таких частот получим решение численным методом и найдём из последней четверти максимальное по модулю. Таким образом, мы получим зависимость  $A = \theta(\omega_f)$ . Для оценки точности сравним полученное значение с известной аналитической формулой[1] (примем массу за 1 кг):

$$\theta(\omega_f) = \frac{F_e}{m\sqrt{(2\omega_f\omega\zeta)^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}}, \quad \zeta = \frac{\mu}{2m\omega}. \quad (8)$$

По горизонтальной оси будет откладываться  $\omega_f/\omega$ . В этом случае, резонансная частота будет при значении 1. Построим кривые для различных значений  $\mu$  на отрезках  $[0.5\omega, 2\omega]$  и  $[0.9\omega, 1.1\omega]$ , создав равномерную сетку из 60 точек.

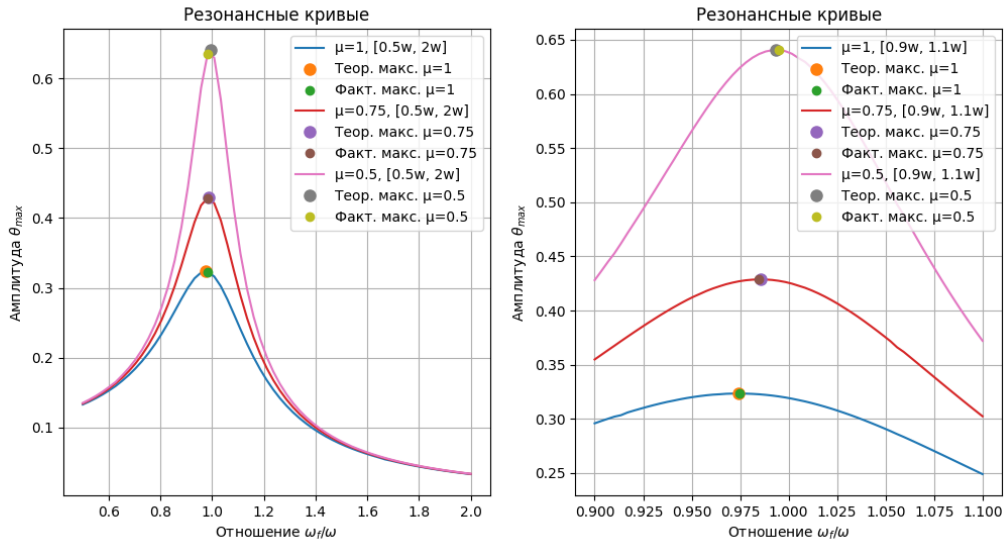


Рисунок 12 — Кривая амплитуд.

Как можно видеть (Рис. 12). Для разных коэффициентов трения резонансная частота достигается в разных местах. Отметим, что при уменьшении трения, амплитуда становится больше, и резонансная частота приближается к собственной.

## 4 Заключение

Была разработана математическая модель маятника, включающая линейное и нелинейное приближения, учет трения, воздействие вынуждающей силы, а также их комбинации.

Эта модель представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Анализ модели позволил получить аналитическое решение, разработан алгоритм его численного нахождения и реализована соответствующая программа.

Построены графики решения уравнения во временной области и на фазовой плоскости, а также исследован эффект резонанса вынуждающей силы с маятником.

## Список использованных источников

1. *Р. Фейнман Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике / М. Сэндс Р. Фейнман, Р. Лейтон. — Москва: АСТ, 2021.
2. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. — Наука, 1975.