УРМ: ИДЗ 1. Вариант 3

Вершинин данил Алексеевия

10 марта 2025 г.

1 Решения дифференциального уравнения

Условие:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, x \in (-\infty, +\infty), t > 0, a = 3$$
$$\begin{cases} u(x,0) = \ln(1-x^2) + 1 = \phi(x) \\ u_t(x,0) = 0.1\cos^2(x) = \psi(x) \end{cases}$$

Решение методом Даламбера

Формула Даламбера:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x')dx'}$$

Подставив наши значения в эту формулу, получим:

$$u(x,t) = \frac{\ln(1-(x+at)^2) + \ln(1-(x-at)^2) + 2}{2} + \frac{0.1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \cos^2(x')dx'$$

Отдельно высчитаем интеграл

$$\int_{x-3t}^{x+3t} \cos^2(x')dx' = \int_{x-3t}^{x+3t} \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x')}{2} dx' = \left(\frac{x'}{2} + \frac{\sin(2x')}{4}\right)\Bigg|_{x-3t}^{x+3t} = 3t + \frac{1}{4}(\sin(2x+6t) - \sin(2x-6t)) =$$

Зная формулу разности синусов:

$$\boxed{\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

Значение интеграла можно переписать следующим образом:

$$= 3t + \frac{\sin(6t)\cos(2x)}{2}$$

Тогда искомая функция $u(x,t)$ будет равна:

$$u(x,t) = \frac{\ln(1-(x+3t)^2) + \ln(1-(x-3t)^2) + 2}{2} + \frac{0.1}{6}\cdot\left(3t + \frac{\sin(6t)\cos(2x)}{2}\right)$$

2 Проверка полученного решения

Для првоерки решения, необходимо найти вторые производные и подставить их в исходное выражение

$$u_t = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{-\cancel{2}(x+3t)\cdot 3}{1-(x+3t)^2} + \frac{\cancel{2}(x-3t)\cdot 3}{1-(x-3t)^2}\right) + \frac{0.1}{6}\left(3 + \frac{6\cos(6t)\cos(2x)}{2}\right) =$$

$$= \frac{-3(x+3t)}{1-(x+3t)^2} + \frac{3(x-3t)}{1-(x-3t)^2} + 0.2 + 0.1\frac{\cos(6t)\cos(2x)}{2}$$

$$u_{tt} = \frac{-9(1-(x+3t)^2) - 18(x+3t^2))}{(1-(x+3t)^2)^2} + \frac{-9(1-(x-3t)^2) - 18(x-3t)^2)}{(1-(x-3t)^2)^2} + \frac{0.1}{2}(-6\sin(6t)\cos(2x))$$

$$u_x = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{-\cancel{2}(x+3t)}{1-(x+3t)^2} + \frac{-\cancel{2}(x-3t)}{1-(x-3t)^2}\right) - \frac{0.1}{6}\sin(6x)\sin(2x) =$$

$$= -\left(\frac{(x+3t)}{1-(x+3t)^2} + \frac{(x-3t)}{1-(x-3t)^2}\right) - \frac{0.1}{6}\sin(6x)\sin(2x)$$

$$u_{xx} = -\left(\frac{1-(x+3t)+2(x+3t)^2}{(1-(x+3t)^2)^2} + \frac{1-(x-3t)+2(x-3t)^2}{(1-(x+3t)^2)^2}\right) - \frac{0.1}{3}\sin(6t)\cos(2x)$$

Теперь подставим найденные вторые производные в выражение:

$$u_{tt} - 9u_x =$$

$$\frac{-9(1-(x+3t)^2) - 18(x+3t^2))}{(1-(x+3t)^2)^2} + \frac{-9(1-(x-3t)^2) - 18(x-3t)^2)}{(1-(x-3t)^2)^2} + \frac{0.1}{2}(-6\sin(6t)\cos(2x)) -$$

$$-9\left(-\left(\frac{1-(x+3t)+2(x+3t)^2}{(1-(x+3t)^2)^2} + \frac{1-(x-3t)+2(x-3t)^2}{(1-(x+3t)^2)^2}\right) - \frac{0.1}{3}\sin(6t)\cos(2x)\right) =$$

$$\frac{-9(1-(x+3t)^2) - 18(x+3t^2))}{(1-(x+3t)^2)^2} + \frac{-9(1-(x-3t)^2) - 18(x-3t)^2)}{(1-(x-3t)^2)^2} - 0.1\cdot 3\sin(6t)\cos(2x) +$$

$$\frac{9(1-(x+3t)+2(x+3t)^2)}{(1-(x+3t)^2)^2} + \frac{9(1-(x-3t)+2(x-3t)^2)}{(1-(x+3t)^2)^2} + 0.1\cdot 3\sin(6t)\cos(2x) = 0$$

Полученное выражение удовлетворяет условию. Следовательно, функция найдена верно.

3 Приведение диф. уравнения к каноническому виду

а)

$$4u_{xx} - 12u_{xy} + 5u_{yy} - 5u_x + 2u_y = 0$$

Общий вид диффуравнения второго порядка следующий:

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0}$$

В нашем случае:

$$a_{11} = 4, a_{12} = -6, a_{22} = 5$$

$$F = -5u_x + 2u_y$$

Для определения типа диф уравнения следует высчитать Δ

$$\boxed{\Delta = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0 \Rightarrow \text{гиперболическое}$$

В нашем случае алгоритм решения такой:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \Rightarrow dy = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}dx$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi = y - \frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}x \\ \eta = y - \frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}x \end{cases}$$

И тогда функция $u(x, y)$ станет $u(\xi(x, y), \eta(x, y))$

Канонический вид для гиперболических дифференциальных уравнений:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} \text{ или } u_{\xi\eta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6 \pm 4}{4} \Rightarrow dy = \frac{-6 \pm 4}{4}dx$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi = y + \frac{10}{4}x \\ \eta = y + \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\xi_x = \frac{10}{4}, \xi_y = 1$$

$$\eta_x = \frac{1}{2}, \eta_y = 1$$

Теперь $u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$

Найдём вторые производные от сложной функции:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \frac{10}{4}u_\xi + \frac{1}{2}u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{10}{4}u_{\xi\xi}\xi_x + \frac{10}{4}u_{\xi\eta}\eta_x + \frac{1}{2}u_{\eta\eta}\eta_x + \frac{1}{2}u_{\eta\xi}\xi_x = \left(\frac{10}{4}\right)^2 u_{\xi\xi} + \frac{5}{4}u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_{\eta\eta} + \frac{5}{4}u_{\eta\xi} =$$

$$\left(\frac{10}{4}\right)^2 u_{\xi\xi} + \frac{10}{4}u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_{\eta\eta}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{yx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = \frac{10}{4}u_{\xi\xi} + \frac{1}{2}u_{\xi\eta} + \frac{10}{4}u_{\eta\xi} + \frac{1}{2}u_{\eta\eta} = \frac{10}{4}u_{\xi\xi} + 3u_{\eta\xi} + \frac{1}{2}u_{\eta\eta}$$

Подставим полученные производые

$$4\left(\left(\frac{10}{4}\right)^2 u_{\xi\xi} + \frac{10}{4}u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_{\eta\eta}\right) - 12\left(\frac{10}{4}u_{\xi\xi} + 3u_{\eta\xi} + \frac{1}{2}u_{\eta\eta}\right) + 5\left(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) + F = 0$$

Раскроим скобки и преведём подобные слагаемые:

$$u_{\xi\xi}\left(25 - 30 + 5\right) + u_{\xi\eta}\left(10 - 36 + 10\right) + u_{\eta\eta}\left(1 - 6 + 5\right) + F = 0$$

Тогда выражение можно переписать так:

$$16u_{\xi\eta} = F \Rightarrow u_{\xi\eta} = \frac{F}{16}$$

b)

$$-2u_{xx} + 2u_{xy} - 0.5u_{yy} + 4u_y = 0$$
$$a_{11} = -2, a_{12} = 1, a_{22} = -0.5$$
$$F = +4u_y$$

Для определения типа диф уравнения следует высчитать Δ

$$\Delta = 1^2 - 2 \cdot 0.5 = 0 \Rightarrow \text{параболическое}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow dy = \frac{a_{12}}{a_{11}}dx$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}}x \\ \eta = f(y, x) \end{cases},$$

η - линейно независимо с ξ

Тогда функция $u(x, y)$ становится $u(\xi(x, y))$.

Канонический вид для параболических дифференциальных уравнений:

$$u_{\xi\xi} \quad \text{или} \quad u_{\eta\eta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2} \Rightarrow dy = -\frac{1}{2}dx$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi = y + \frac{x}{2} \\ \eta = x \end{cases}$$

$$\xi_x = \frac{1}{2},\ \xi_y = 1$$

$$\eta_x = 1,\ \eta_y = 0$$

Теперь $u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$
Найдём вторые производные от сложной функции:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \frac{1}{2}u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2}u_{\xi\xi}\xi_x + \frac{1}{2}u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = \frac{1}{4}u_{\xi\xi} + \frac{1}{2}u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{1}{4}u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y = u_{\xi\xi}$$

$$u_{yx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x = \frac{1}{2}u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$$

Подставим полученные производые

$$-2\left(\frac{1}{4}u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}\right) + 2\left(\frac{1}{2}u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\right) - 0.5\,(u_{\xi\xi}) + F = 0$$

Раскроим скобки и преведём подобные слагаемые:

$$u_{\xi\xi}\left(-\frac{1}{2} + 1 - 0.5\right) + u_{\xi\eta}(-2 + 2) - 2u_{\eta\eta} + F = 0$$

Теперь выражение можно переписать так:

$$-2u_{\eta\eta} + F = 0 \Rightarrow u_{\eta\eta} = \frac{F}{2}$$