



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №6
«Модель двумерного переноса»
по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9122-01.03.02мкт

Вершинин Д.А.
(Ф.И.О.) _____ (подпись)
Проверил профессор д.ф.-м. н.

Пермяков М. С.
(Ф.И.О.) _____ (подпись)

« 9 » мая 2025 г.

г. Владивосток

2025

Содержание

Введение	3
1 Построение математической модели	4
1.1 Постановка задачи	4
1.2 Формализация	4
1.3 Построение модели	5
2 Анализ модели и аналитическое решение двумерного уравнения переноса	9
2.1 Математическая постановка задачи	9
2.2 Классификация уравнения и анализ характеристик	9
2.3 Аналитическое решение при постоянной скорости	10
2.4 Выводы по аналитическому анализу	10
3 Вычислительные эксперименты	12
3.1 Аналитическое решение	12
3.2 Программа для ЭВМ	13
3.3 Вверх по потоку (upwind)	13
3.3.1 Численная схема конечных разностей	13
3.3.2 Описание экспериментов	13
3.3.3 Реализация алгоритма на Python	14
3.3.4 Визуализация результатов	14
3.3.5 Вихревое течение	15
3.3.6 Течение по модифицированной спирали	18
3.3.7 Дивергентное течение	21
3.4 Метод Лагранжевых точек	24
3.4.1 Описание численного метода	24
3.4.2 Реализация на Python	24
3.4.3 Описание экспериментов	25
3.4.4 Визуализация результатов	25
3.4.5 Вихревое течение (Lagrangian)	26
3.4.6 Течение модифицированной спирали (Lagrangian)	29
3.4.7 Дивергентное течение (Lagrangian)	32
3.5 Выводы	35
Заключение	36

Список использованных источников	37
--	----

Введение

Одними из ключевых процессов в природе являются течения в жидких средах. Эти течения играют важную роль в переносе веществ и энергии из одной точки в другую. Примером могут служить течения в реках, морях и океанах, которые способствуют не только транспортировке питательных веществ, но и формированию экосистем.

Кроме того, аналогичные процессы происходят и в газообразной среде. В атмосфере воздух также движется, создавая ветры, которые переносят влагу, пыль и другие частицы. Эти воздушные течения влияют на климатические условия, распределение тепла и осадков, а также на миграцию животных и распространение семян растений.

Рассмотрим подобный перенос с помощью двумерного уравнения переноса.

1 Построение математической модели

1.1 Постановка задачи

Цель работы:

- Сформулировать модель двумерного переноса.
- Выбрать схемы решения.
- Провести численные эксперименты с различными методами аппроксимации, для понимания их влияния на решение.
- Провести анализ решений.

Дано:

- (x,y) - координаты пространства,
- t - время,
- $u(x,y,t)$ - функция, задающая концентрацию вещества в любой момент времени (удельная масса или энергия (отнесенная к единице объема)).
- $u(x,y,0)$ - поле переноса
- $\vec{v} = (v_x, v_y)$ - скорость переноса ,
- $f(x,y,t)$ - описывает источники и стоки,

1.2 Формализация

Будем рассматривать задачу для линейного уравнения переноса.

Для аппроксимации будем использовать два метода: явная схема вверх по потоку и метод Лагранжевых частиц.

1.3 Построение модели

Рассмотрим газовую или жидкую сплошную среду. Примем: все точки среды находятся в неравновесном состоянии. Это приводит к возникновению полей концентраций, температур, давлений, а наличие градиентов этих параметров вызывает перенос массы и энергии.

Выделим элемент объема движущейся жидкости в неоднородном поле некоторого потенциала переноса. Под потенциалом переноса u понимают удельную массу или энергию (отнесенную к единице объема). $u(x, y, z, t)$ - скалярная величина.

Известно, что скалярная функция u называется потенциалом векторной функции \vec{q} , если между ними существует связь вида [1]:

$$\vec{q} = -\nabla u.$$

Далее будем рассматривать связь, как пропорциональность.

Таким образом, поток переносимой субстанции (массы или энергии) является векторной величиной \vec{q} . В случае переноса массы под потенциалом переноса u обычно понимают концентрацию компонента в смеси.

В рассматриваемой среде могут существовать, так называемые, объемные (непрерывно распределенные по объему) источники или стоки массы и энергии. В химической технологии под ними подразумеваются химические превращения.

Известно, что процессы тепло- и массообмена осуществляются двумя основными механизмами: молекулярным и конвективным. Молекулярный перенос (диффузия, теплопроводность) возникает в результате стремления системы к термодинамическому равновесию, а конвективный вызывается наличием поля скоростей в жидком или газовом объеме V .

Следует отметить, что в случае переноса энергии в форме теплоты существует ещё и радиантный перенос (тепловое излучение), вклад которого учитывают при достаточно высоких температурах.

Процессы молекулярного переноса массы и энергии описываются соответствующими феноменологическими уравнениями, являющимися, как правило, линейными градиентными законами.

Опуская доказательство, изложенное в [1], можно сделать вывод: в случае молекулярного и конвективного переноса общая плотность потока массы или энергии складывается из двух векторных величин:

$$\vec{q} = \vec{q}_M + \vec{q}_K,$$

где \vec{q}_M - векторная величина молекулярного переноса, \vec{q}_K - векторная величина конвективного переноса.

В газовой или жидкой среде, находящейся в движении, выделим произвольный объем V , ограниченный поверхностью A . На поверхности

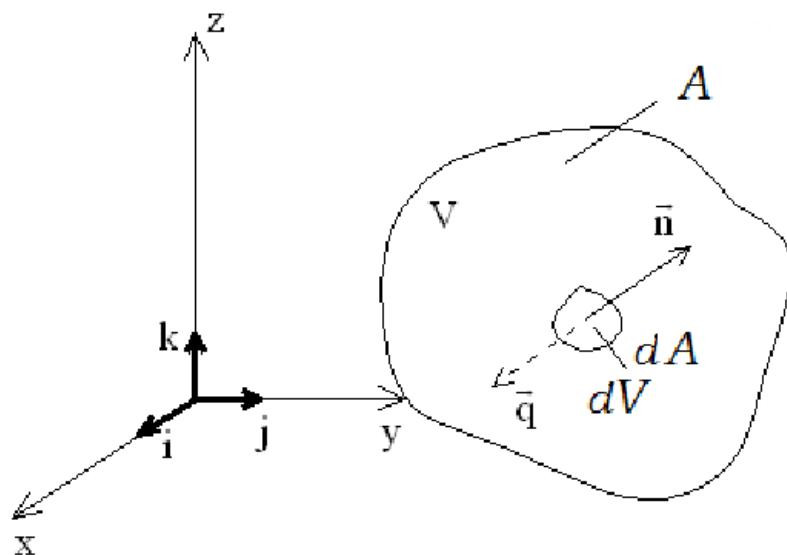


Рисунок 1.1 – Объём серды, ограниченный поверхностью A

A выделим элемент поверхности d и представим его в векторной форме, умножив на единичный вектор \vec{n} , нормальный к этому элементу и направленный из объема, $\vec{n}dA = d\vec{A}$.

Составим балансовое уравнение:

Накопление внутри объёма = вход - выход + образование.

Примем, что в произвольном объеме нет источников субстанции или стоков, т.е. образование равно нулю.

Плотность потока субстанции через площадку $d\vec{A}$ будет $-\vec{q}d\vec{A}$. Знак минут инвертирует потоки (входные становятся положительными, а выходящие - отрицательными).

Результирующий поток будет равен:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A}. \quad (1.1)$$

Физически этот интеграл представляет разницу между входящими и выходящими потоками субстанции через всю поверхность A .

Если в объёме V происходит накопление субстанции, то это вызовет изменение потенциала переноса во времени $\frac{du}{dt}$, которое для элементарного объёма dV можно представить как $\frac{du}{dt}dV$, а для всего объема V как интеграл:

$$M = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.2)$$

Приравняв выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.3)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса [2], дающей преобразование интеграла, взятого по объёму V , ограниченному поверхностью A , в интеграл, взятый по этой поверхности, будем иметь:

$$\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{q}dV. \quad (1.4)$$

С учётом (1.3), соотношение (1.4) примет вид:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} \right) dV.$$

Интеграл, взятый по произвольному объёму, может быть равен нулю только в случае равенства нулю подынтегральной функции:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0.$$

Полученное выражение есть основное дифференциальное уравнение переноса субстанции – массы или энергии.

Перепишем его для двумерной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,t). \quad (1.5)$$

Также установим начальные и граничные условия:

$$u(0,0,t) = \psi(t), \quad u(x,y,0) = \phi(x), \quad u(0,y,t) = \psi(y,t) \quad u(x,0,t) = \xi(x,t) \quad (1.6)$$

Таким образом, из (1.5) и (1.6) получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,t) \\ u(x,y,0) = \phi(x,y) \\ u(0,y,t) = \psi(y,t) \\ u(x,0,t) = \xi(x,t) \end{cases} \quad (1.7)$$

2 Анализ модели и аналитическое решение двумерного уравнения переноса

2.1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу переноса скалярной величины $u(x, y, t)$ в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ при отсутствии источников и стоков. Модель описывается линейным уравнением переноса в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_x(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + v_y(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

где $v_x(x, y), v_y(x, y)$ — компоненты заданного векторного поля скорости переноса $\vec{v}(x, y)$.

Начальное условие:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.2)$$

Границные условия задаются на входящих границах области, то есть там, где вектор скорости направлен внутрь области:

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega^-, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

где $\partial\Omega^- = \{(x, y) \in \partial\Omega \mid \vec{v}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) < 0\}$ и \vec{n} — внешняя нормаль к границе.

2.2 Классификация уравнения и анализ характеристик

Уравнение переноса 2.1 относится к классу гиперболических уравнений первого порядка. Оно описывает чистое перемещение вещества без учета диффузии или реакций.

Анализ уравнения удобно производить с использованием метода характеристик. Вдоль характеристик, т.е. кривых в пространстве (x, y, t) , решение u сохраняется неизменным.

Пусть $(x(t), y(t))$ — характеристика, тогда:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y), \quad \frac{du}{dt} = 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, u вдоль траектории движения частиц остается постоянным, и решение можно выразить через начальное распределение u_0 .

2.3 Аналитическое решение при постоянной скорости

Рассмотрим частный случай, когда поле скорости постоянно:

$$\vec{v} = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

В этом случае уравнение 2.1 принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.5)$$

Характеристики представляют собой прямые линии:

$$x(t) = x_0 + at, \quad y(t) = y_0 + bt.$$

Поскольку u сохраняется вдоль этих линий, решение имеет вид:

$$u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt). \quad (2.6)$$

Пример. Пусть

$$u_0(x, y) = \exp(-\alpha[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]),$$

где $\alpha > 0$ — параметр ширины, (x_0, y_0) — центр гауссианы. Тогда

$$u(x, y, t) = \exp(-\alpha[(x - at - x_0)^2 + (y - bt - y_0)^2]), \quad (2.7)$$

что соответствует движению начального профиля с постоянной скоростью (a, b) .

2.4 Выводы по аналитическому анализу

- Уравнение переноса описывает перемещение профиля функции без изменения формы (в отсутствии источников).
- Решение можно выразить в аналитическом виде в случае постоянной скорости.

- В общем случае решение строится вдоль характеристик, что важно для построения численных схем.
- Важным элементом анализа является определение направлений входа потока — это определяет постановку граничных условий.

3 Вычислительные эксперименты

Рассмотрим задачу численного решения уравнения переноса скалярной величины $u(x, y, t)$ в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. При отсутствии источников и стоков правая часть уравнения равна нулю ($f = 0$), и задача записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}(x, y, t) \cdot \nabla u = 0, \quad (3.1)$$

где $\vec{v}(x, y, t) = (v_x, v_y)$ — заданное векторное поле скоростей, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ — градиент функции u .

Границные условия принимаются периодическими. Начальное распределение $u(x, y, 0)$ задается одной из аналитических функций: гауссовой функцией, индикатором круга и т.д.

Для экспериментов зададим следующие условия:

- а) Векторное поле Ω задано Декартовым произведением $[0, 10] \times [0, 10]$;
- б) Временной интервал $t \in [0, 10]$;
- в) Шаг по времени $\Delta t = 0.01$;
- г) Все поля стационарные (не зависят от времени);
- д) В случае, если точка в методе лагранжевых частиц выходит за пределы поля, более мы её не рассматриваем.

3.1 Аналитическое решение

В случае отсутствия источников ($f = 0$) и известного поля скоростей $\vec{v}(x, y, t)$, уравнение 3.1 допускает аналитическое решение вдоль траекторий частиц, заданных уравнением:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (3.2)$$

где \vec{x}_0 — начальная координата частицы. Тогда значение скалярной величины u вдоль характеристики сохраняется:

$$u(\vec{x}(t), t) = u_0(\vec{x}_0). \quad (3.3)$$

Это решение реализуется в методе лагранжевых частиц.

3.2 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для рассчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек numpy (вычисления) и matplotlib (визуализация).

3.3 Вверх по потоку (upwind)

3.3.1 Численная схема конечных разностей

Пространственная область $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ дискретизуется равномерной сеткой с $n \times n$ узлами. Шаги по пространству:

$$dx = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n - 1}, \quad dy = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{n - 1}.$$

Для аппроксимации производных используются односторонние разности в зависимости от направления скорости (схема upwind):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{dx}, & v_x \geq 0 \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{dx}, & v_x < 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \begin{cases} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{dy}, & v_y \geq 0 \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{dy}, & v_y < 0 \end{cases}$$

Временное интегрирование производится явным способом (метод Эйлера):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left(v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Стабильность обеспечивается условием Куранта–Фридрихса–Леви (CFL) [3]:

$$\max \left(\frac{|v_x| \Delta t}{dx}, \frac{|v_y| \Delta t}{dy} \right) \leq 1. \quad (3.4)$$

3.3.2 Описание экспериментов

В ходе экспериментов используются различные поля скоростей:

- Вихревое течение (vortex):

$$v_x = (y - 5)/5, v_y = (-x + y) \sin(x)/5. \quad (3.5)$$

- Модифицированное спиральное течение (shear):

$$v_x = (y - 5)/5, \quad v_y = (-x + y)/5. \quad (3.6)$$

- Дивергентное поле (divergance):

$$v_x = -\pi \sin\left(\frac{2\pi x}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{10}\right), \quad v_y = 2\pi \sin\left(\frac{\pi y}{10}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{10}\right). \quad (3.7)$$

Начальные условия представлены в виде кругов или полос с шириной 1.

3.3.3 Реализация алгоритма на Python

Программа реализована на языке Python с использованием библиотек `numpy` и `matplotlib`. Структура кода включает:

- `FluidSimulation` — класс с основной логикой метода конечных разностей;
- `VelocityField` — статические методы для задания различных полей скоростей;
- `InitialCondition` — начальные условия;
- `Experiment`, `ExperimentManager` — система организации и запуска экспериментов;
- визуализацию полей скоростей и решений.

Все течения зададим стационарными (не зависящими от t)

3.3.4 Визуализация результатов

Результаты каждого эксперимента сохраняются в виде изображений, иллюстрирующих:

- исходное распределение скалярной величины $u(x,y,0)$;
- поле скоростей (стримплот);
- распределение $u(x,y,t)$ на каждом шаге.

3.3.5 Вихревое течение

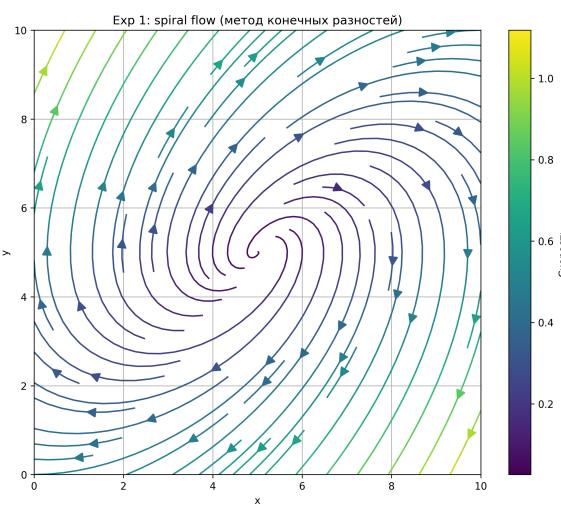


Рисунок 3.1 — Поле скоростей для вихревого течения.

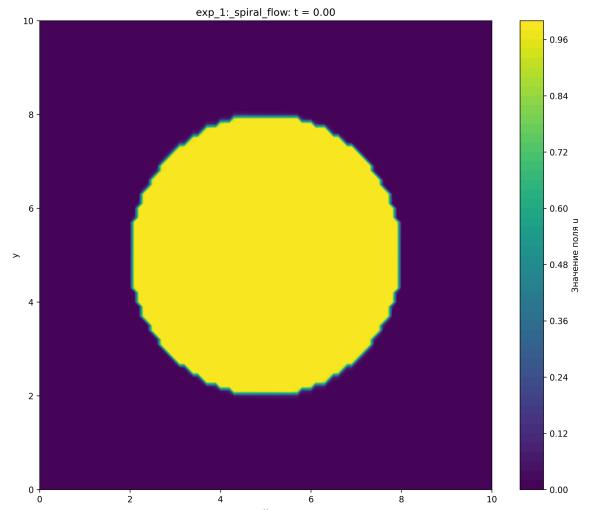


Рисунок 3.2 — Скалярное поле u в начальный момент времени.

Поле на рис. 3.1 задаётся уравнением вихря (3.5).

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке $(5, 5)$ и радиусом 3 (3.2).

Изображения промежуточных ходов представлены на рис. 3.3 - 3.6

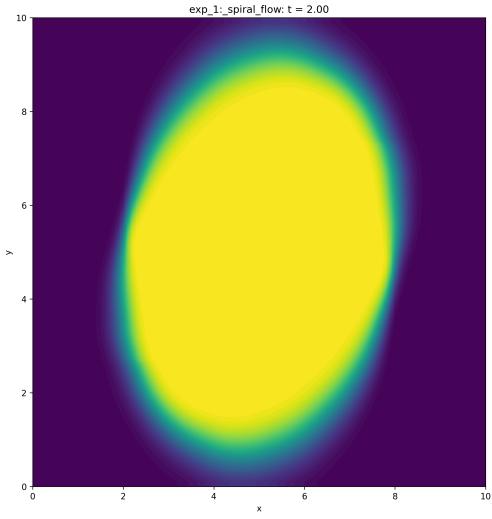


Рисунок 3.3 — Скалярное поле в момент времени $t = 2$.

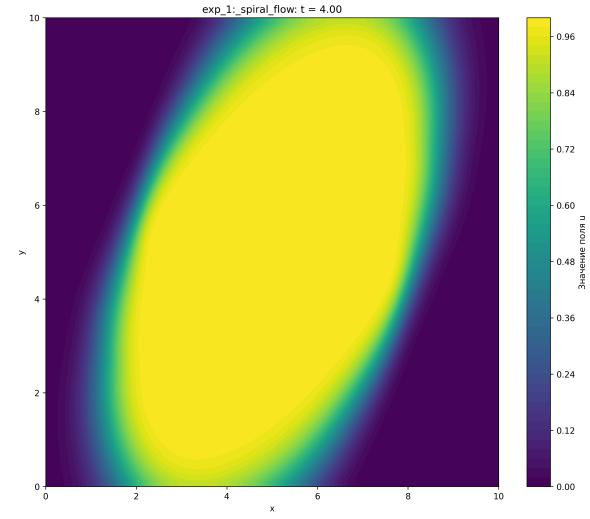


Рисунок 3.4 — Скалярное поле в момент времени $t = 4$.

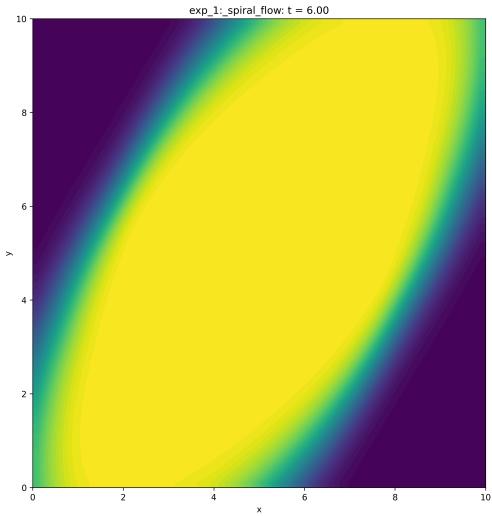


Рисунок 3.5 — Скалярное поле в момент времени $t = 6$.

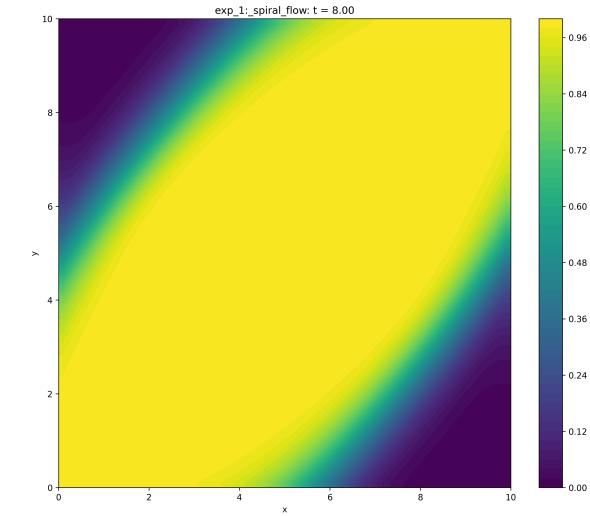


Рисунок 3.6 — Скалярное поле в момент времени $t = 8$.

Финальное распределения представлено на рис. 3.7.

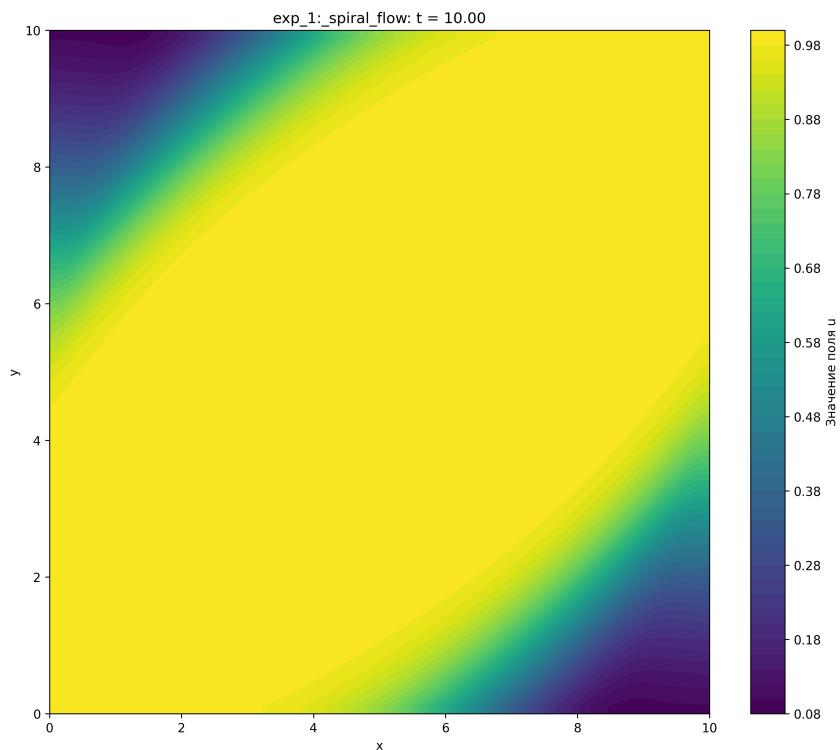


Рисунок 3.7 — Скалярное поле u в финальный момент времени ($t = 10$).

Как можно видеть, начальное распределение расширилось по направлению поля. Края размылись из-за особенностей вычислительной схемы.

3.3.6 Течение по модифицированной спирали

Поле на рис. 3.8 задаётся уравнением поля (3.6)

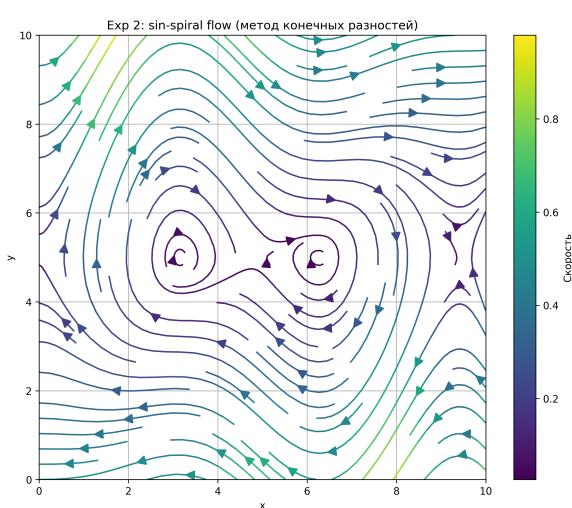


Рисунок 3.8 — Поле скоростей для течения модиф-ой спирали.

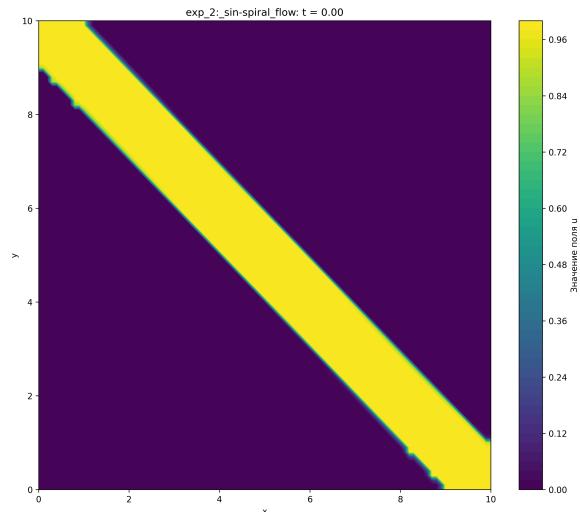


Рисунок 3.9 — Скалярное поле u в начальный момент времени.

В качестве начального распределения, используется диагональная полоса с левого верхнего угла к правому нижнему и шириной 1 (рис. 3.9).

Изображения промежуточных ходов представлены на рис. 3.10 - 3.13.

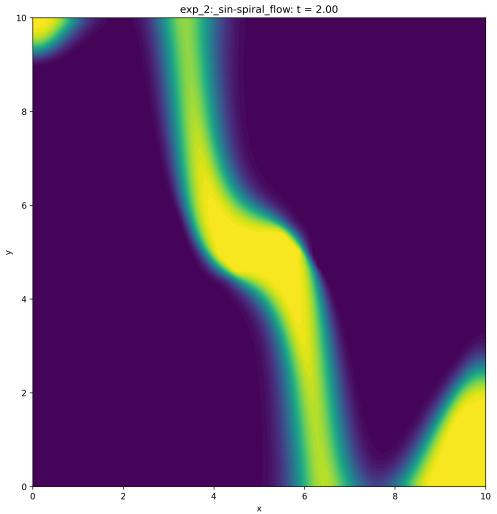


Рисунок 3.10 — Скалярное поле в момент времени $t = 2$.

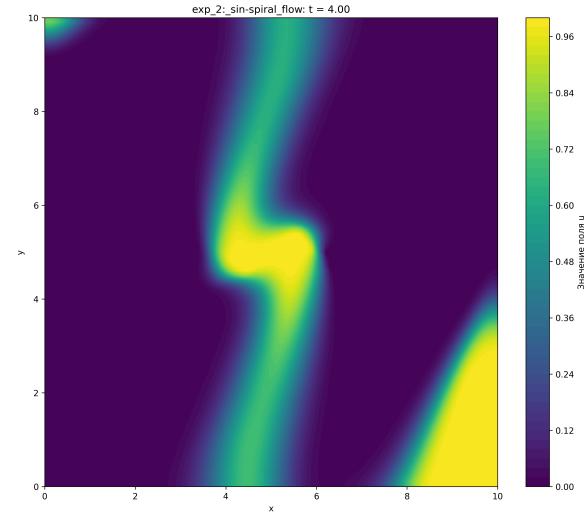


Рисунок 3.11 — Скалярное поле в момент времени $t = 4$.

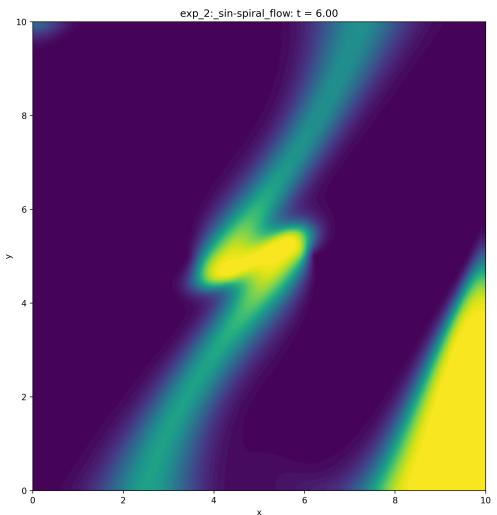


Рисунок 3.12 — Скалярное поле в момент времени $t = 6$.

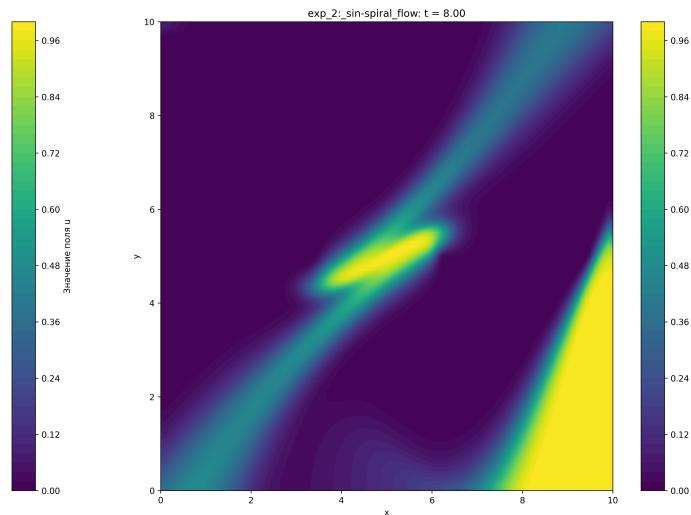


Рисунок 3.13 — Скалярное поле в момент времени $t = 8$.

Финальное распределения представлено на рис. 3.14.

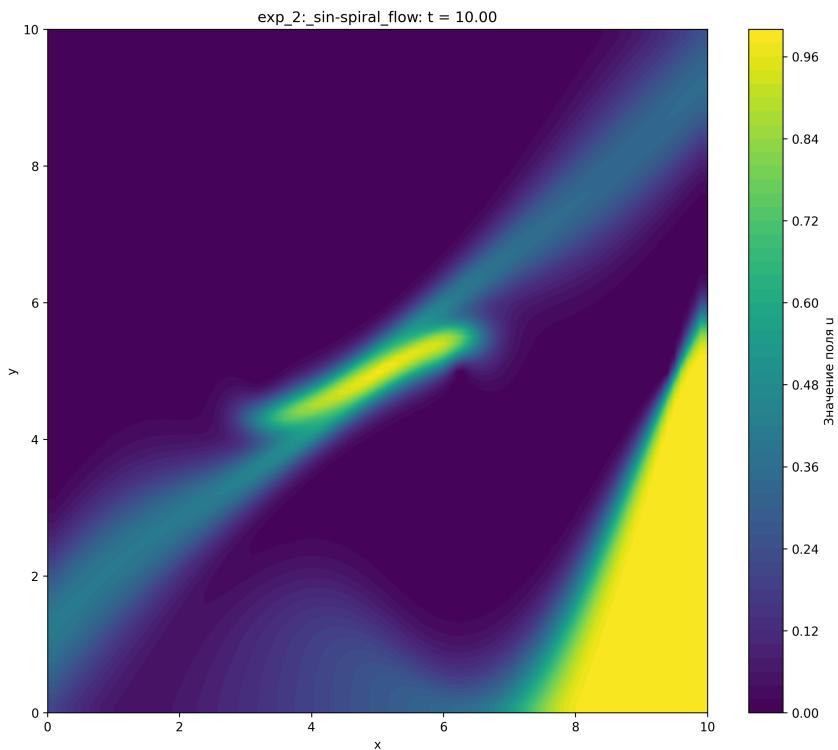


Рисунок 3.14 — Скалярное поле u в финальный момент времени
($t = 10$).

В этом эксперименте также наблюдается перенос по направлению поля. Границы всё также размыты. Справа снизу появилась аномальная область. Это можно объяснить особенностью вычислительной схемы.

3.3.7 Дивергентное течение

Поле на рис. 3.15 задаётся уравнением поля (3.7).

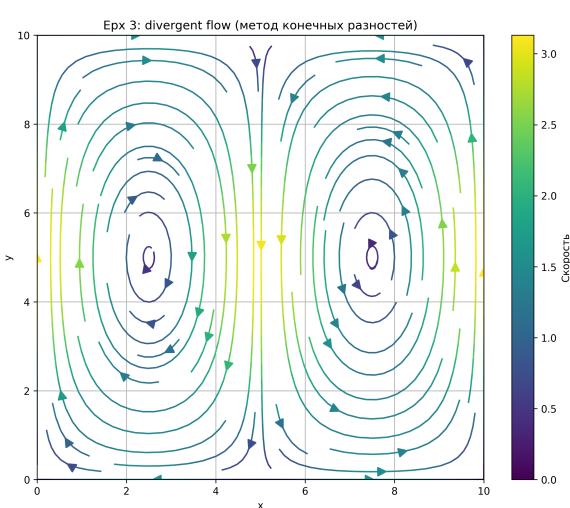


Рисунок 3.15 — Поле скоростей для дивергентного течения.

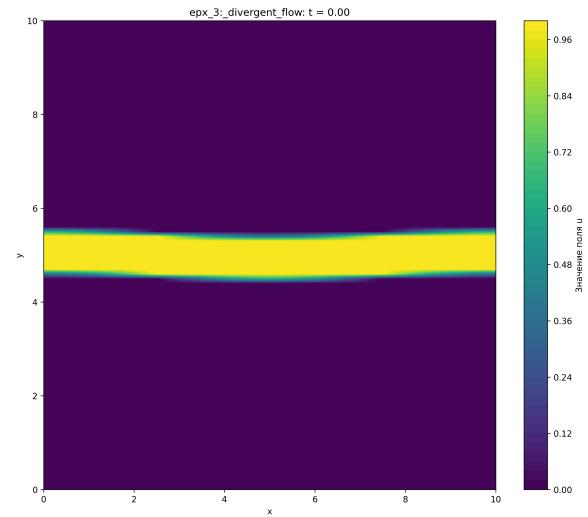


Рисунок 3.16 — Скалярное поле u в начальный момент времени.

В качестве начального распределения, используется горизонтальная полоса с координатой y центральной линии равной 5 и шириной 1 (рис. 3.16).

Изображения промежуточных ходов представлены на рис. 3.17 - 3.20.

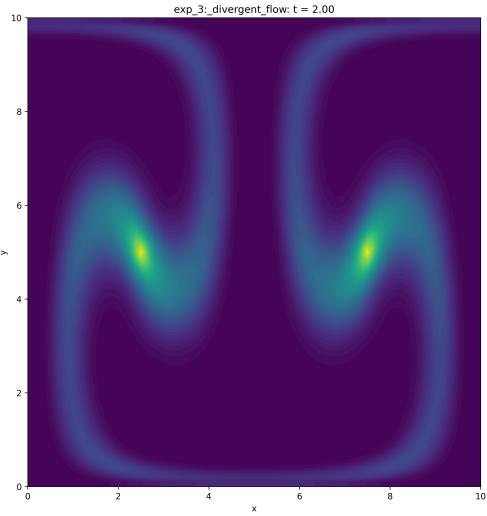


Рисунок 3.17 — Скалярное поле в момент времени $t = 2$.

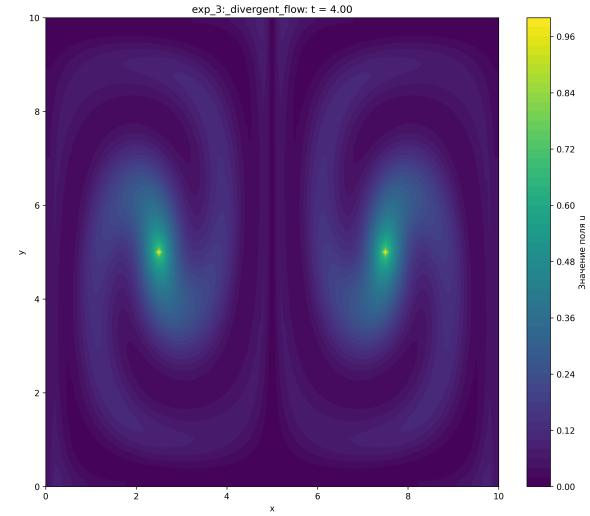


Рисунок 3.18 — Скалярное поле в момент времени $t = 4$.

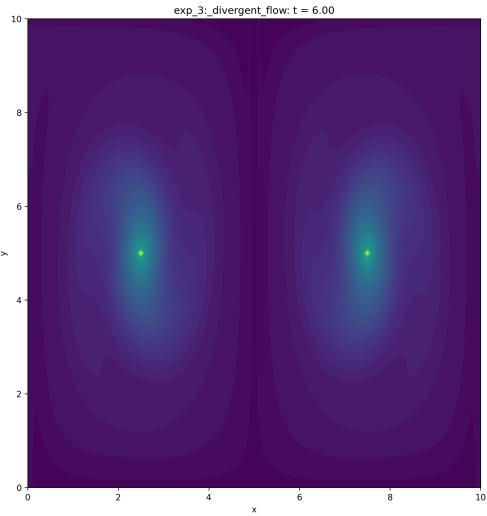


Рисунок 3.19 — Скалярное поле в момент времени $t = 6$.

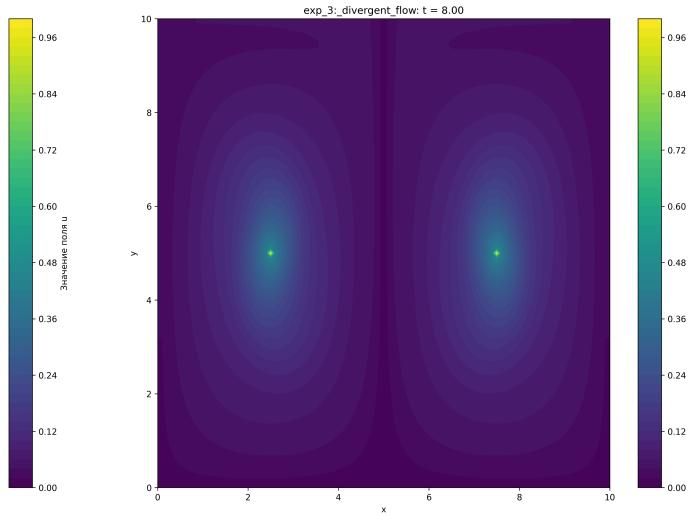


Рисунок 3.20 — Скалярное поле в момент времени $t = 8$.

Финальное распределение представлено на рис. 3.21.

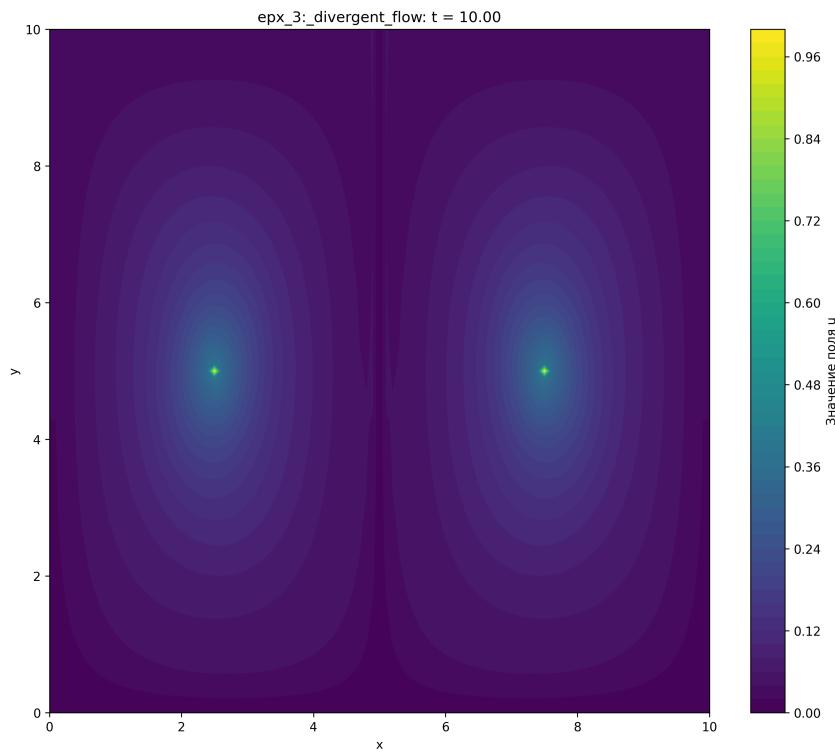


Рисунок 3.21 — Скалярное поле u в финальный момент времени
 $(t = 10)$.

В этом эксперименте виден недостаток вычислительной схемы - при высокой турбулентности начальное распределение расплывается.

3.4 Метод Лагранжевых частиц

3.4.1 Описание численного метода

В отличие от метода конечных разностей, лагранжев подход отслеживает движение частиц, несущих скалярную величину u , по траекториям, определяемым полем скоростей. Основная идея заключается в решении задачи Коши для системы ОДУ:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ — положение частицы во времени, а $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ — заданное поле скоростей.

Частицы не взаимодействуют и перемещаются независимо друг от друга. Величина u сохраняется вдоль траектории:

$$\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u(\mathbf{x}(t), t) = u(\mathbf{x}_0, 0).$$

Для численного интегрирования используется метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{v}\left(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{v}\left(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для отрисовки скалярных полей используется кубическая интерполяция.

3.4.2 Реализация на Python

Программа реализована на языке Python с использованием библиотек `numpy`, `matplotlib`, `scipy`. Структура кода включает:

- `ParticleSet` — класс, отвечающий за координаты и значения частиц;

- `VelocityField` — статические методы для различных полей скоростей;
- `Integrator` — численные методы интегрирования траекторий (RK4);
- визуализацию движения частиц и их распределений;
- построение плотности $u(x, y, t)$ через биннинг в сетку.

3.4.3 Описание экспериментов

В экспериментах используются те же три стационарных поля скоростей (3.5), (3.6), (3.7). Количество точек для моделирования - 1000. Начальные положения частиц и параметры моделирования задаются аналогично. Все точки инициализируются с $u = 1$.

3.4.4 Визуализация результатов

Для каждого эксперимента строятся:

- Карта начального положения и значений частиц;
- График поля скоростей;
- Промежуточные распределение частиц с учётом перемещения;
- Реконструированная плотность скалярной величины на сетке.

3.4.5 Вихревое течение (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.1, задаётся уравнением вихря (3.5)).

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке $(5, 5)$ и радиусом 3 (3.22).

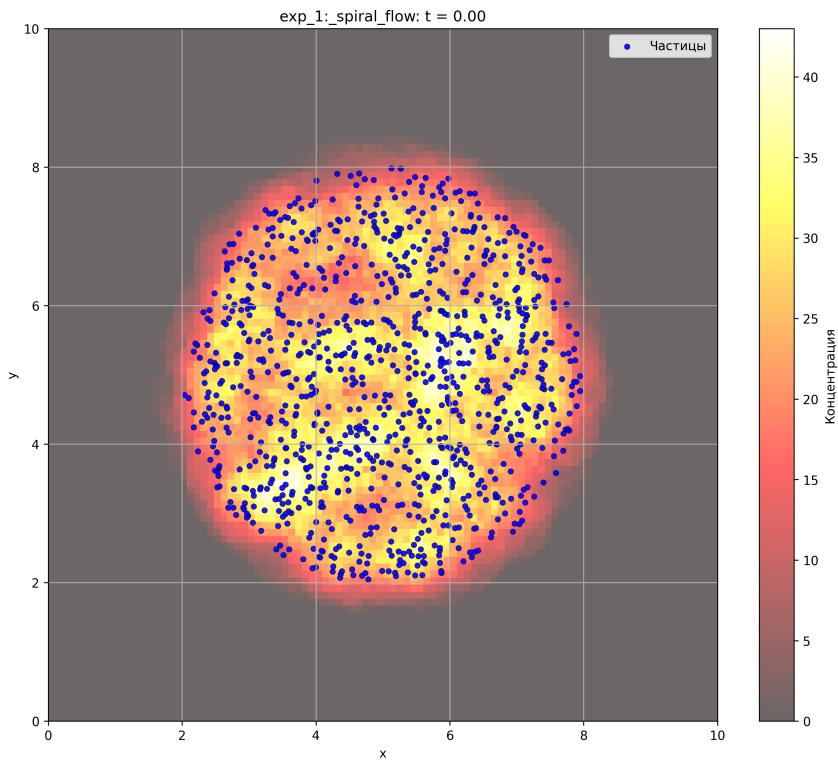


Рисунок 3.22 — Начальное распределение частиц (вихревое поле).

Изображения промежуточных ходов представлены на рис. 3.23 - 3.26. Также добавлены траектории 50 случайных точек.

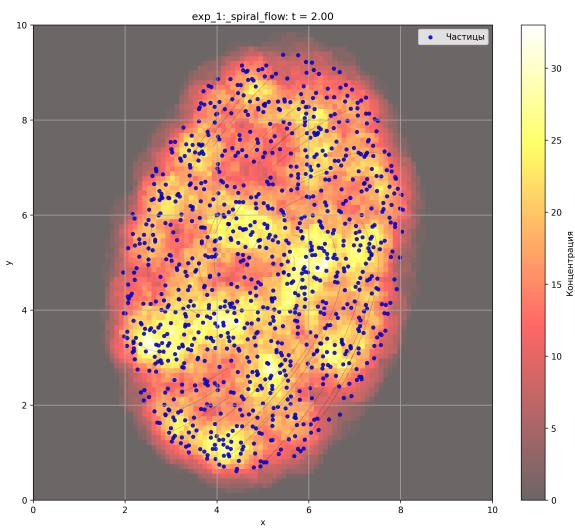


Рисунок 3.23 – Скалярное поле в
момент времени $t = 2$.

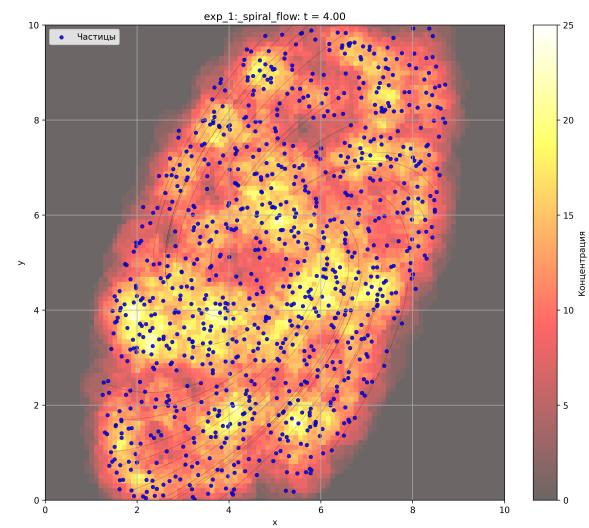


Рисунок 3.24 – Скалярное поле в
момент времени $t = 4$.

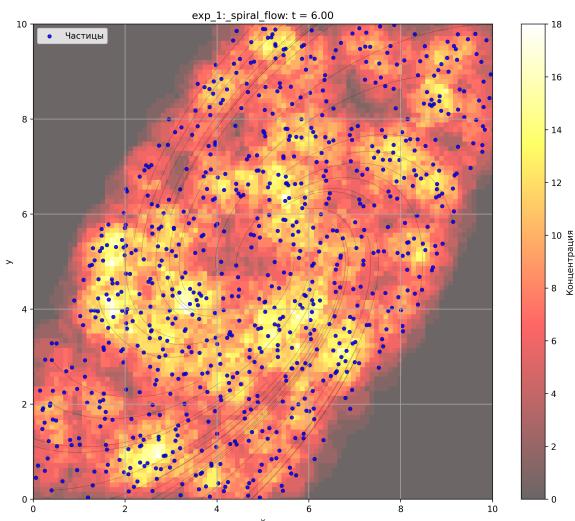


Рисунок 3.25 – Скалярное поле в
момент времени $t = 6$.

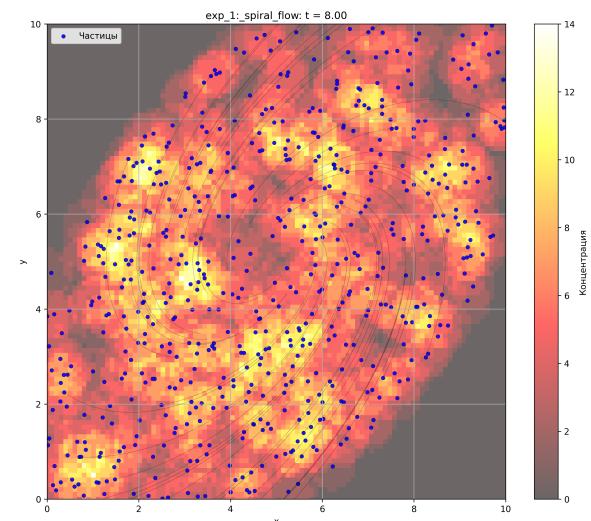


Рисунок 3.26 – Скалярное поле в
момент времени $t = 8$.

Финальное распределение представлено на рис. 3.27.

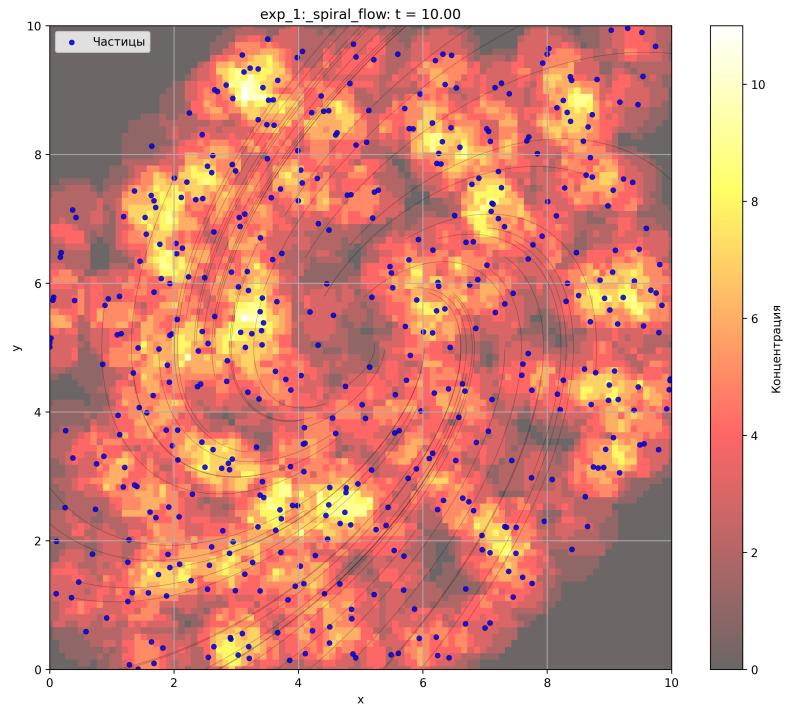


Рисунок 3.27 — Финальное распределение частиц.

Траектории всех точек представлены на рис. 3.28.

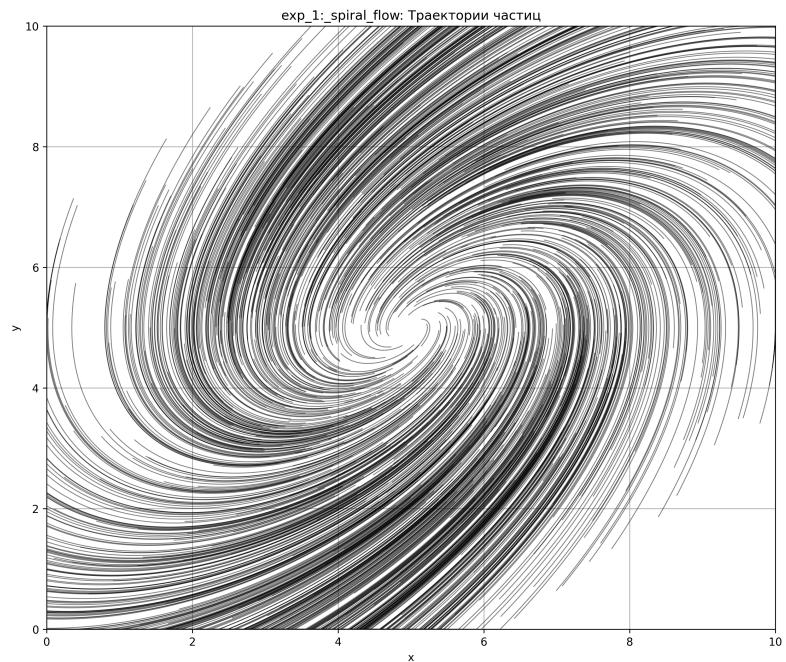


Рисунок 3.28 — Траектория частиц.

3.4.6 Течение модифицированной спирали (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.8, задаётся уравнением (3.6)).

В качестве начального распределения, используется диагональная полоса из левого верхнего угла в правый нижний с шириной 1 (рис. 3.29).

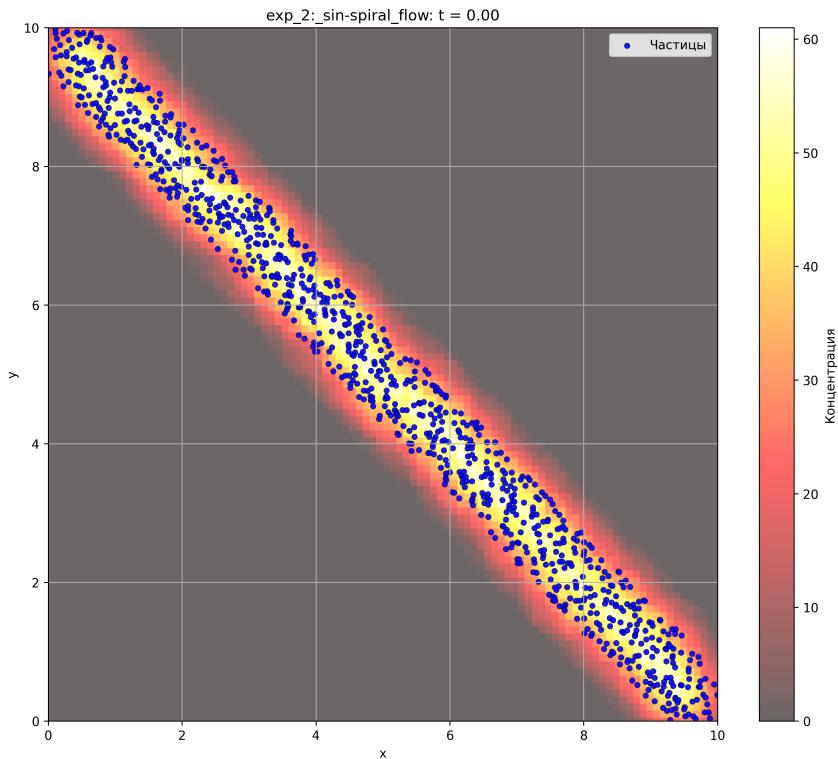


Рисунок 3.29 — Начальное распределение частиц.

Изображения промежуточных ходов представлены на рис. 3.30 - 3.33. Также добавлены траектории 50 случайных точек.

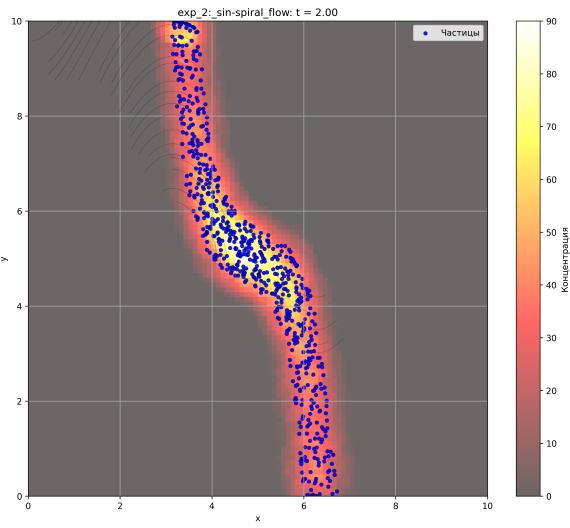


Рисунок 3.30 — Скалярное поле в
момент времени $t = 2$.

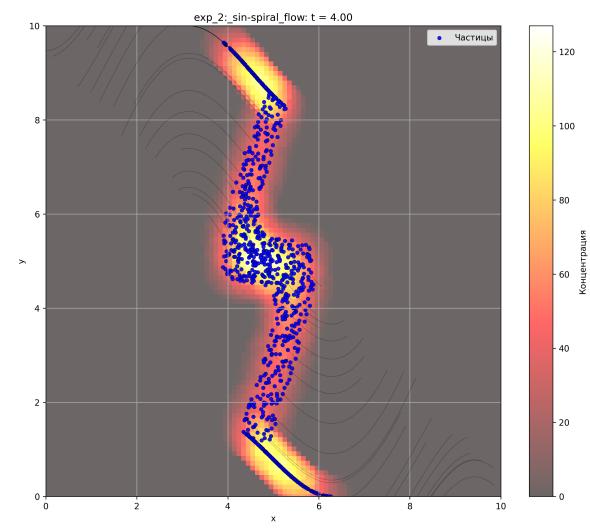


Рисунок 3.31 — Скалярное поле в
момент времени $t = 4$.

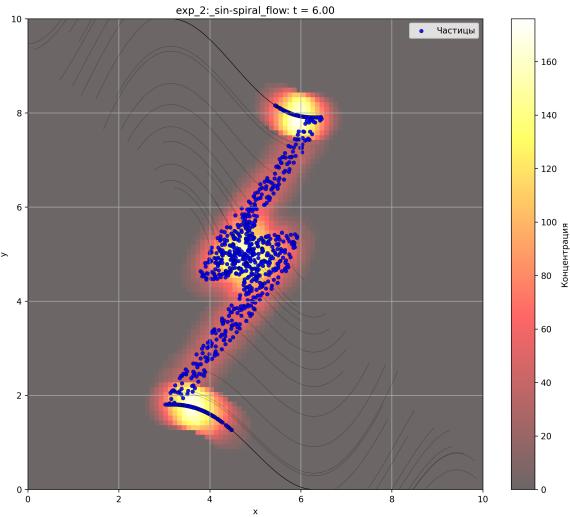


Рисунок 3.32 — Скалярное поле в
момент времени $t = 6$.

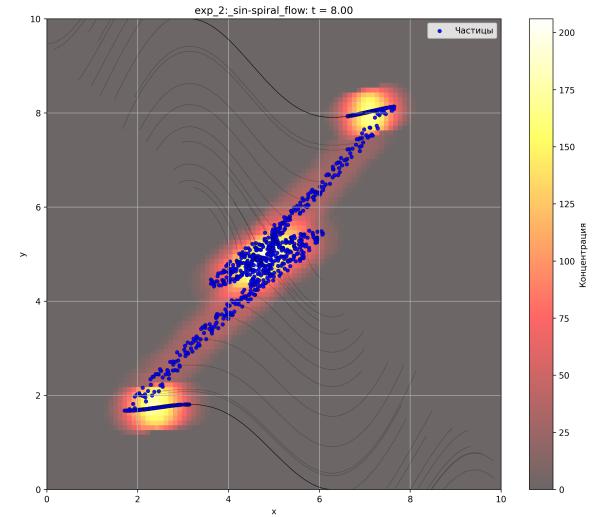


Рисунок 3.33 — Скалярное поле в
момент времени $t = 8$.

Финальное распределение представлено на рис. 3.34.

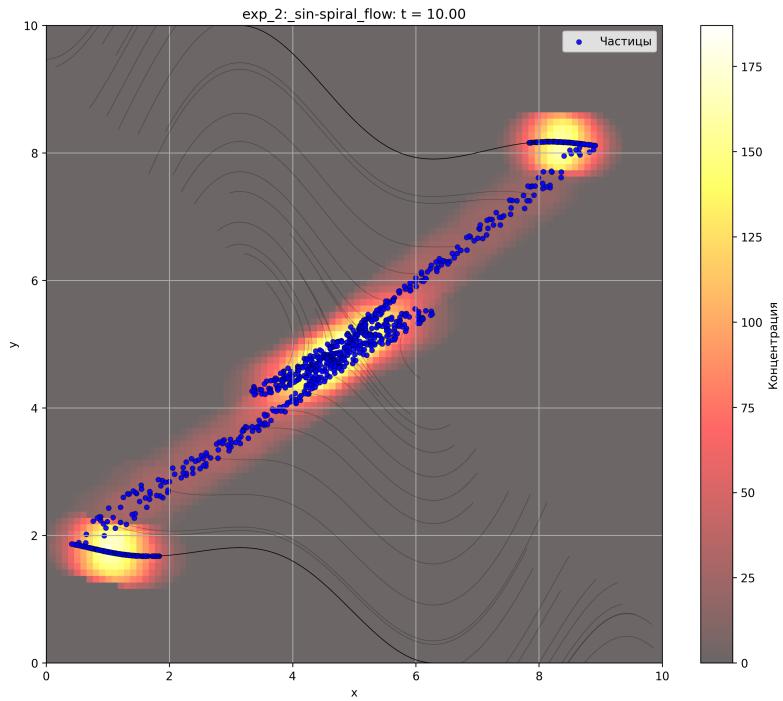


Рисунок 3.34 — Финальное распределение частиц.

Траектории всех точек представлены на рис. 3.35.

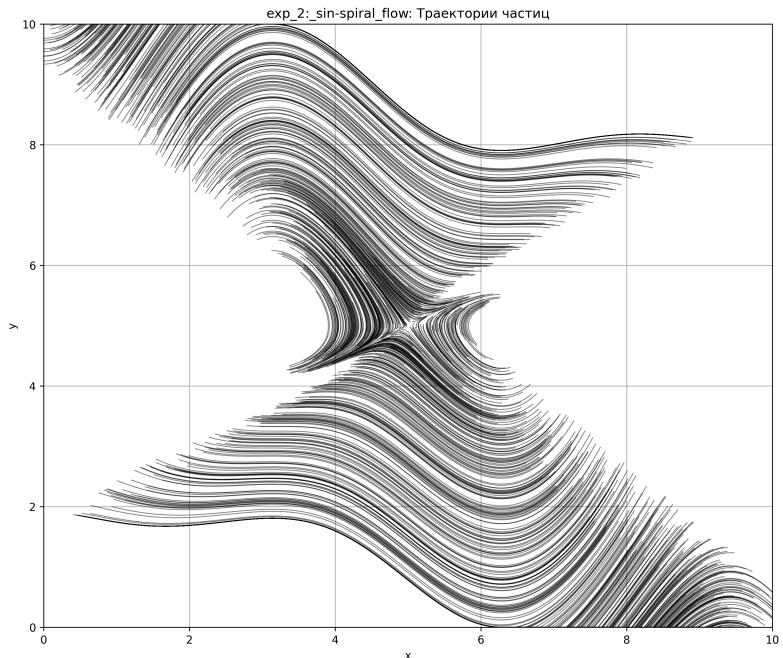


Рисунок 3.35 — Траектории частиц.

3.4.7 Дивергентное течение (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.15, задаётся уравнением (3.7)).

В качестве начального распределения, используется горизонтальная полоса с центральной линией на координате $y = 5$ и шириной 1 (рис. 3.36).

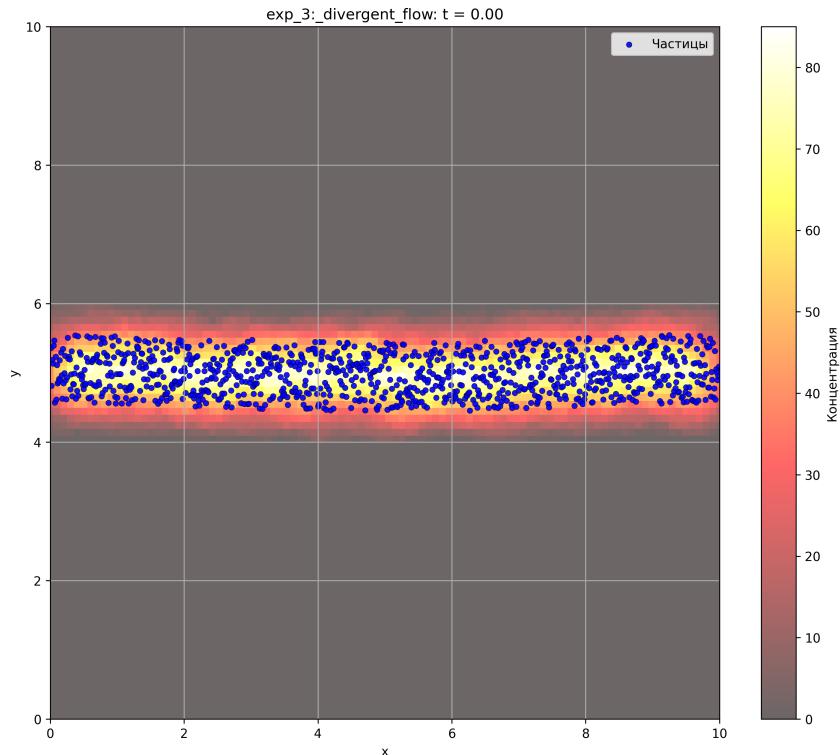


Рисунок 3.36 — Начальное распределение частиц.

Изображения промежуточных ходов представлены на рис. 3.37 - 3.40. Также добавлены траектории 50 случайных точек.

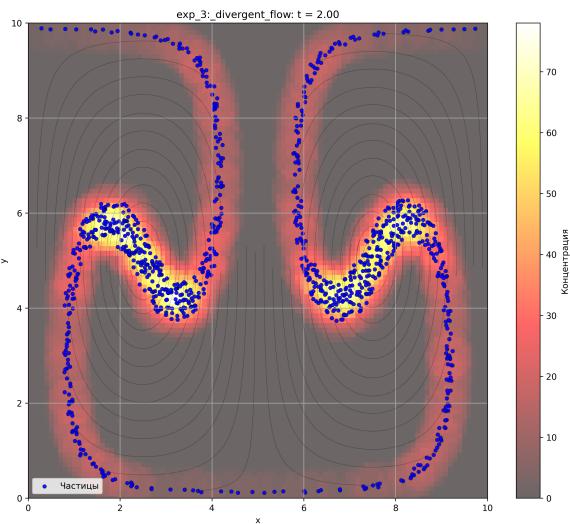


Рисунок 3.37 — Скалярное поле в
момент времени $t = 2$.

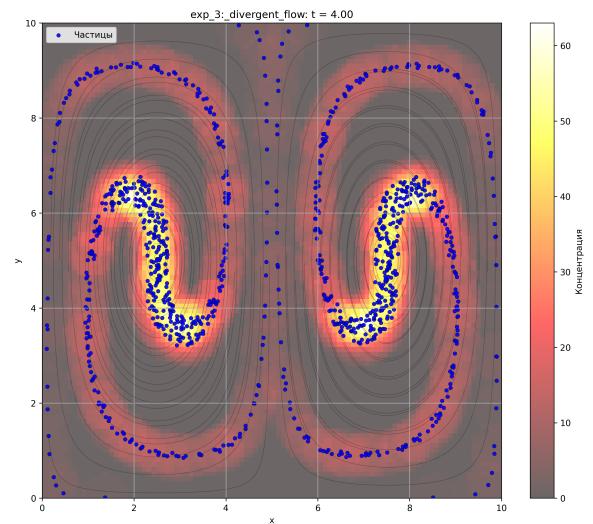


Рисунок 3.38 — Скалярное поле в
момент времени $t = 4$.

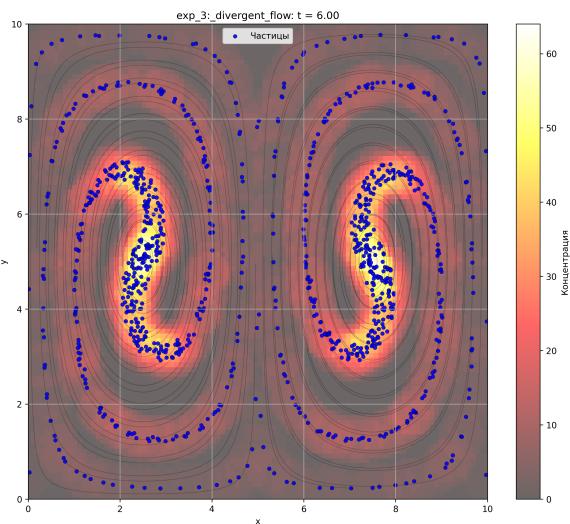


Рисунок 3.39 — Скалярное поле в
момент времени $t = 6$.

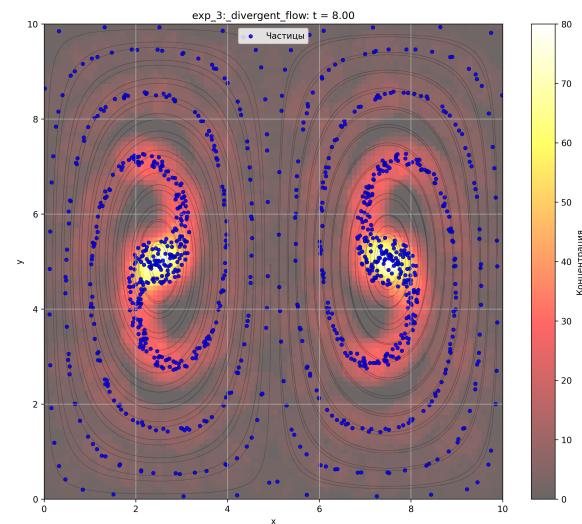


Рисунок 3.40 — Скалярное поле в
момент времени $t = 8$.

Финальное распределение представлено на рис. 3.41.

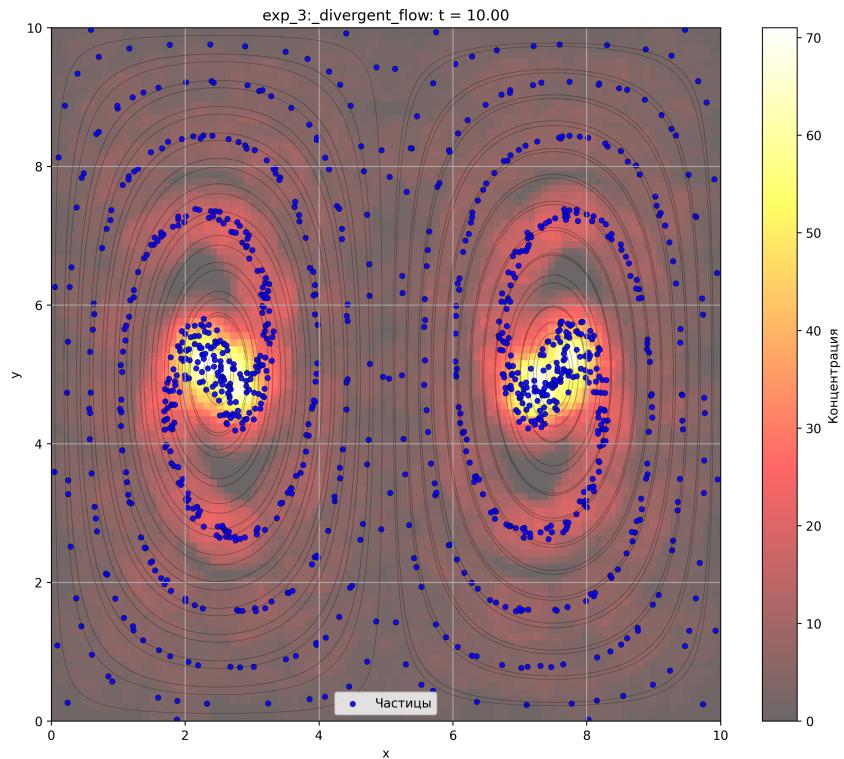


Рисунок 3.41 — Финальное распределение частиц.

Траектории всех точек представлены на рис. 3.42.

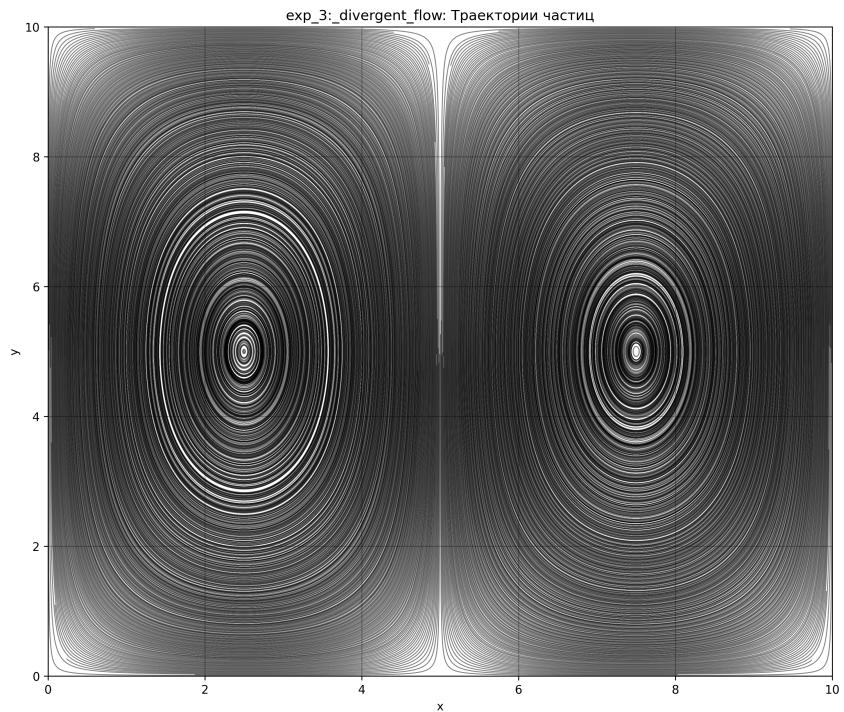


Рисунок 3.42 — Траектории частиц.

3.5 Выводы

Метод конечных разностей позволяет качественно решать задачу переноса при условии соблюдения критерия CFL. Использование upwind-схем позволяет избежать осцилляций, но при этом может вызывать численное диффузионное размытие. Метод легко масштабируется и хорошо подходит для моделирования задач с заданным полем скоростей.

Метод лагранжевых частиц обеспечивает высокую точность отслеживания переноса вещества или других скалярных величин в заданном поле скоростей. Вместо аппроксимации функции на фиксированной сетке, как в методе конечных разностей, метод отслеживает движение частиц по траекториям, определяемым полем скоростей. Это позволяет избежать численного диффузионного размытия и сохранять чёткие границы. Метод особенно эффективен при моделировании переноса в сильно неоднородных или турбулентных потоках.

Также отметим, что скорость вычислений этих методов кратно разные: если метод вверх по потоку занимает в среднем 54 сек. на эксперимент, то метод лагранжевых частиц - уже 23.5 сек.

Заключение

Была сформулирована и проанализирована модель двумерного переноса.

Представлена программа для ЭВМ, которая вычисляет решения задачи. В неё вошли метод лагранжевых частиц и конечно-разностный метод вверх по потоку.

Были проведены и проанализированы численные эксперименты с использованием разных схем решения системы с разными начальными условиями и полями.

Список использованных источников

1. *Alonso, M.* Physics / M. Alonso, E.J. Finn. — Addison-Wesley, 1992.
2. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: Учебник. Часть 1 / Г. М. Фихтенгольц. Учебники для вузов. Специальная литература. — 10 изд. — Лань, 2015. — С. 448.
3. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. — Наука, 1975.