

aboba

Содержание

	Введение	3
1	Построение математической модели	4
	1.1 Постановка задачи	4
	1.2 Формализация	4
	1.3 Построение модели	5
2	Анализ математической модели	9
	2.1 Аналитическое решение	9
	2.2 Численное решение	10
3	Вычислительные эксперименты	12
	3.1 Программа для ЭВМ	12
	3.2 Явная схема (explicit)	12
	3.3 Неявная схема (implicit)	16
	3.4 Схема «вверх по потоку» (upwind)	20
	Заключение	24
	Список использованных источников	25

Введение

Одним из ключевых процессов в природе являются течения в жидких средах. Эти течения играют важную роль в переносе веществ и энергии из одной точки в другую. Примером могут служить течения в реках, морях и океанах, которые способствуют не только транспортировке питательных веществ, но и формированию экосистем.

Кроме того, аналогичные процессы происходят и в газообразной среде. В атмосфере воздух также движется, создавая ветры, которые переносят влагу, пыль и другие частицы. Эти воздушные течения влияют на климатические условия, распределение тепла и осадков, а также на миграцию животных и распространение семян растений.

Рассмотрим подобный перенос в двумерном пространстве-время.

1 Построение математической модели

1.1 Постановка задачи

Цель работы:

- Сформулировать модель одномерного переноса.
- Выбрать схемы решения.
- Провести численные эксперименты с различными методами аппроксимации, для понимания их влияния на решение.
- Провести анализ решений.

Дано:

- x - координата одномерного пространства,
- t - время,
- $u(x, t)$ - функция, задающая концентрацию вещества в любой момент времени (удельная масса или энергия (отнесенная к единице объема)).
- v - скорость переноса ($const$),
- $f(x, t)$ - описывает источники и стоки,

1.2 Формализация

Будем рассматривать задачу для линейного уравнения переноса. Для аппроксимации будем использовать три метода: явная, неявная схемы и схему вверх по потоку.

1.3 Построение модели

Рассмотрим газовую или жидкую сплошную среду. Примем: все точки среды находятся в неравновесном состоянии. Это приводит к возникновению полей концентраций, температур, давлений, а наличие градиентов этих параметров вызывает перенос массы и энергии.

Выделим элемент объема движущейся жидкости в неоднородном поле некоторого потенциала переноса. Под потенциалом переноса u понимают удельную массу или энергию (отнесенную к единице объема). $u(x, y, z, t)$ - скалярная величина.

Известно, что скалярная функция u называется потенциалом векторной функции \vec{q} , если между ними существует связь вида [1]:

$$\vec{q} = -\nabla u.$$

Далее будем рассматривать связь, как пропорциональность.

Таким образом, поток переносимой субстанции (массы или энергии) является векторной величиной \vec{q} . В случае переноса массы под потенциалом переноса u обычно понимают концентрацию компонента в смеси.

В рассматриваемой среде могут существовать, так называемые, объемные (непрерывно распределенные по объему) источники или стоки массы и энергии. В химической технологии под ними подразумеваются химические превращения.

Известно, что процессы тепло- и массообмена осуществляются двумя основными механизмами: молекулярным и конвективным. Молекулярный перенос (диффузия, теплопроводность) возникает в результате стремления системы к термодинамическому равновесию, а конвективный вызывается наличием поля скоростей в жидком или газовом объеме V .

Следует отметить, что в случае переноса энергии в форме теплоты существует ещё и радиантный перенос (тепловое излучение), вклад которого учитывают при достаточно высоких температурах.

Процессы молекулярного переноса массы и энергии описываются соответствующими феноменологическими уравнениями, являющимися, как правило, линейными градиентными законами.

Опуская доказательство, изложенное в [1], можно сделать вывод: в случае молекулярного и конвективного переноса общая плотность потока массы или энергии складывается из двух векторных величин:

$$\vec{q} = \vec{q}_M + \vec{q}_K,$$

где \vec{q}_M - векторная величина молекулярного переноса, \vec{q}_K - векторная величина конвективного переноса.

В газовой или жидкой среде, находящейся в движении, выделим произвольный объем V , ограниченный поверхностью A . На поверхности

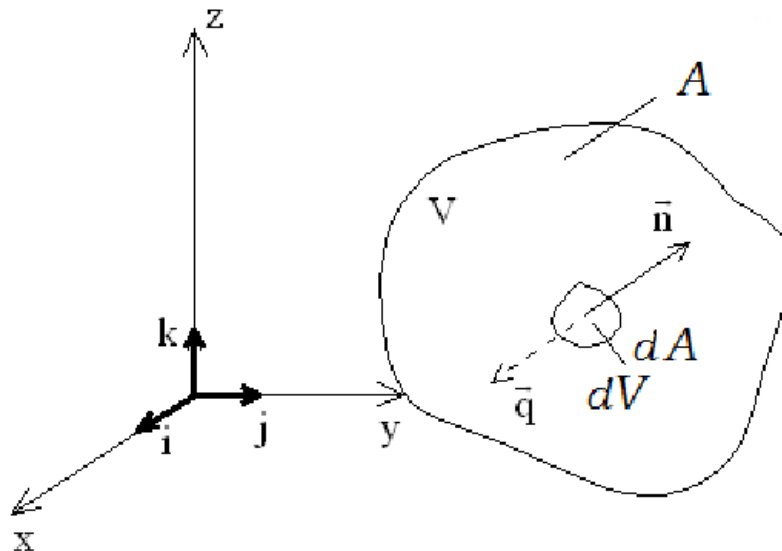


Рисунок 1.1 — Объём V , ограниченный поверхностью A

Выведем элемент поверхности d и представим его в векторной форме, умножив на единичный вектор \vec{n} , нормальный к этому элементу и направленный из объема, $\vec{n}dA = d\vec{A}$.

Составим балансовое уравнение:

Накопление внутри объёма = вход - выход + образование.

Примем, что в произвольном объеме нет источников субстанции или стоков, т.е. образование равно нулю.

Плотность потока субстанции через площадку $d\vec{A}$ будет $-\vec{q}d\vec{A}$. Знак минут инвертирует потоки (входные становятся положительными, а выходящие - отрицательными).

Результирующий поток будет равен:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A}. \quad (1.1)$$

Физически этот интеграл представляет разницу между входящими и выходящими потоками субстанции через всю поверхность A .

Если в объёме V происходит накопление субстанции, то это вызовет изменение потенциала переноса во времени $\frac{du}{dt}$, которое для элементарного объёма dV можно представить как $\frac{du}{dt}dV$, а для всего объёма V как интеграл:

$$M = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.2)$$

Приравняв выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.3)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса [2], дающей преобразование интеграла, взятого по объёму V , ограниченному поверхностью A , в интеграл, взятый по этой поверхности, будем иметь:

$$\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{q}dV. \quad (1.4)$$

С учётом (1.3), соотношение (1.4) примет вид:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} \right) dV.$$

Интеграл, взятый по произвольному объёму, может быть равен нулю только в случае равенства нулю подынтегральной функции:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0.$$

Полученное выражение есть основное дифференциальное уравнение переноса субстанции – массы или энергии.

Перепишем его для одномерной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t). \quad (1.5)$$

Также установим начальные и граничные условия:

$$u(0, t) = \psi(t), \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (1.6)$$

Таким образом, из (1.5) и (1.6) получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u(0, t) = \psi(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

2 Анализ математической модели

2.1 Аналитическое решение

Рассмотрим общее линейное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t).$$

Рассмотрим характеристические кривые $x(t)$, вдоль которых уравнение превращается в обыкновенное дифференциальное:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \Rightarrow \quad x = vt + \xi,$$

где ξ — параметр, определяющий начальную точку характеристики при $t = 0$: $x(0) = \xi$.

На этой характеристике уравнение сводится к:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = f(x(t), t).$$

Интегрируя по t от 0 до t :

$$u(x(t), t) = u(\xi, 0) + \int_0^t f(x(s), s) ds.$$

Поскольку $x(s) = vs + \xi = x - v(t - s)$ (так как $x = vt + \xi$), получаем:

$$u(x, t) = \varphi(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds.$$

Это решение корректно, если характеристика проходит через начальную линию $t = 0$, то есть если $x - vt \geq 0$.

Учет граничного условия при $x < vt$

Если $x - vt < 0$, то характеристика не пересекает ось $t = 0$, а входит в область из граничной точки $x = 0$. Тогда необходимо использовать граничное условие.

Для этого найдем момент времени, когда характеристика, проходящая через (x, t) , пересекает ось $x = 0$:

$$x = vt_0 \Rightarrow t_0 = t - \frac{x}{v}.$$

Соответствующее значение u на $x = 0$ и $t_0 = t - \frac{x}{v}$: $u(0, t_0) = \psi(t - \frac{x}{v})$.

Тогда вдоль характеристики:

$$u(x, t) = \psi\left(t - \frac{x}{v}\right) + \int_{t - \frac{x}{v}}^t f(x - v(t - s), s) ds.$$

Полное аналитическое решение

Таким образом, общее решение задачи 1.7 имеет вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds, & \text{если } x \geq vt, \\ \psi\left(t - \frac{x}{v}\right) + \int_{t - \frac{x}{v}}^t f(x - v(t - s), s) ds, & \text{если } x < vt. \end{cases}$$

2.2 Численное решение

Система (1.7) является системой обыкновенного дифференциального уравнения в частных производных. Для численного решения применяется методы конечных разностей[3]. Введём равномерную сетку:

$$x_i = i\Delta x, \quad t^j = j\Delta t, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_t,$$

где $\Delta x = \frac{L}{N_x}$, $\Delta t = \frac{T}{N_t}$. Обозначим $u_i^j = u(x_i, t^j)$ и $f_i^j = f(x_i, t^j)$.

Будем рассматривать три схемы решения: явную[3], неявную[3] и "вверх по потоку"[4]. В качестве профиля волны выберем следующую функцию:

$$\phi(x) = 4 \exp(-100x^4).$$

Для простоты используем нулевые граничные условия и равномерную среду ($f_i^j = 0$). Скорость v примем 1. Расстояние L равняется 5. Соответственно, максимальное значение времени тоже равно 5. Шаг по пространству возьмём 0.05, а по времени - 0.001. Такой выбор

удовлетворяет условиям устойчивости всех трёх методов (3.1 - 3.2) и не требует больших вычислительных ресурсов.

3 Вычислительные эксперименты

3.1 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для расчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек `numpy` (вычисления) и `matplotlib` (визуализация).

3.2 Явная схема (explicit)

Явная схема использует аппроксимацию по пространству и времени на текущем слое. Дифференциальное уравнение заменяется на:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + v \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} = f_i^j.$$

Рекуррентная формула для вычисления значений:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j),$$

Для устойчивости явной схемы необходимо выполнение условия Куранта[3]:

$$\boxed{\frac{v\Delta t}{2\Delta x} \leq \frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Точность метода $O(\tau + h)$, где τ - шаг по времени, h - шаг по пространству.

```
1 def explicit(uu, v, dx, dt):
2     m = uu.shape[0] - 1
3     n = uu.shape[1] - 1
4     u_ = uu.copy()
5     k = v * dt / (2 * dx)
6
7     for ti in range(m):
8         for j in range(1, n):
9             u_[ti + 1, j] = u_[ti, j] - k * (u_[ti, j + 1] - u_[ti, j - 1])
10
11         u_[ti + 1, 0] = u_[ti, 0]
12         u_[ti + 1, n] = u_[ti, n]
13
14     return u_
```

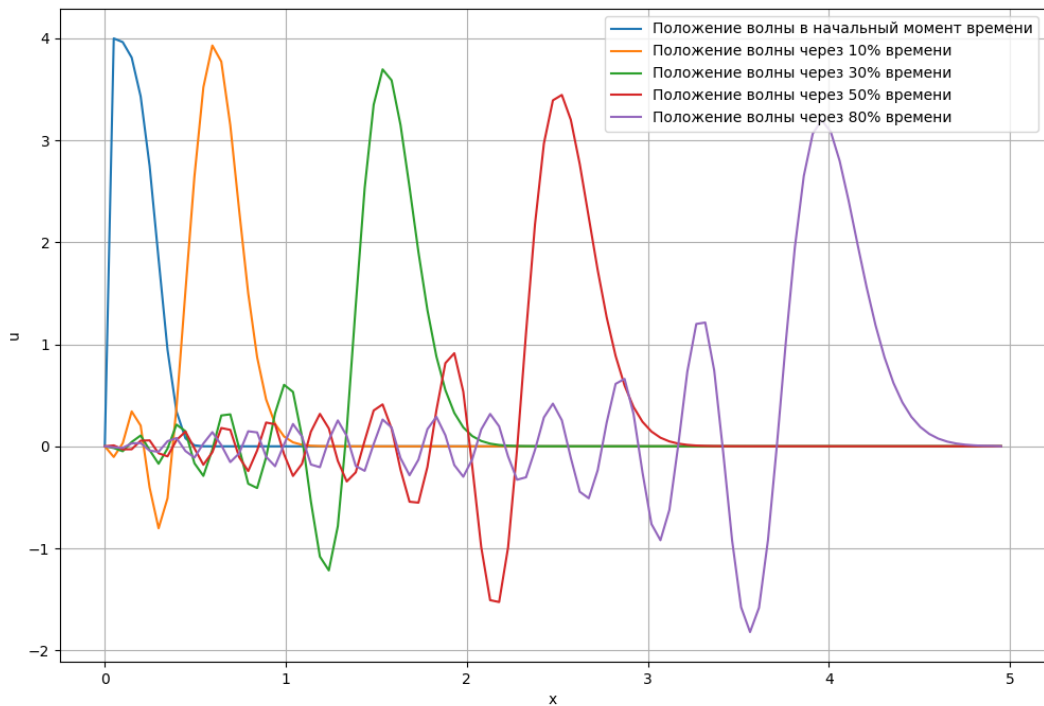


Рисунок 3.1 — Результат решения явной схемы. $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.001$.

Из представленного графика решений (рис. 3.1) видно, присутствующий нисходящий тренд максимальных значений. При этом, с увеличением расстояния, пройденного волной, возникают осцилляции, с левой стороны, которые создают отрицательные значения, не имеющие физического смысла и являющиеся одним из недостатков данной схемы решения.

Осцилляции возникают из-за дисперсионных ошибок, вызванных тем, что схема не подавляет высокочастотные компоненты и не учитывает направление переноса. Это фундаментальное ограничение центральных схем подобного рода.

Уменьшим шаг по пространству в 1.5 раза. При таком значении шага условие Куранта выполняется: $\frac{0.001 \cdot 1.5}{0.1} = 0.015 < 0.5$.

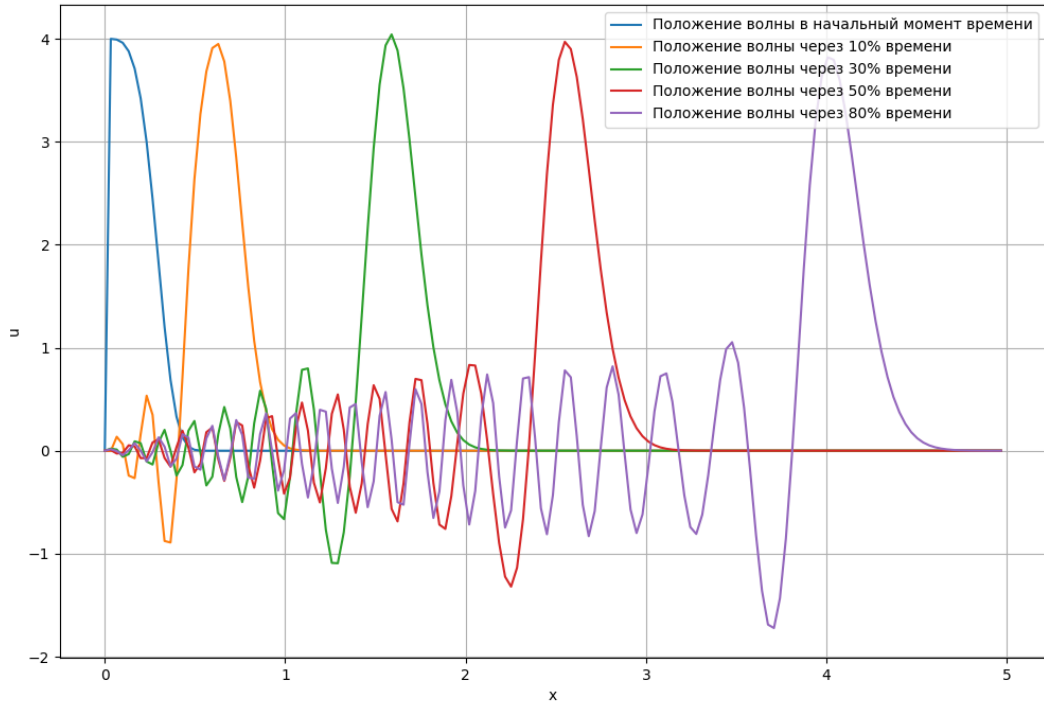


Рисунок 3.2 — Результат решения явной схемы.

$$\Delta x = 0.05/1.5, \Delta t = 0.001.$$

Видно (рис 3.2), что осцилляции уменьшились и пик волны уменьшается медленнее.

Уменьшим шаг по времени в два раза. Условие Куранта сохраняется: $\frac{0.0005}{0.01} = 0.005 < 0.5$

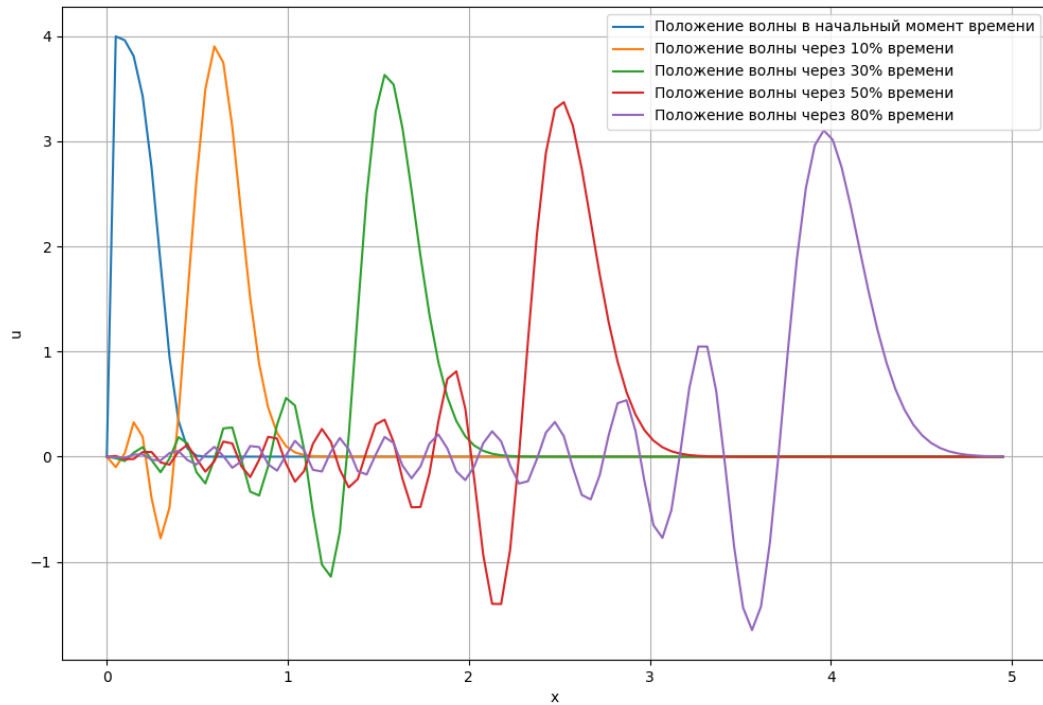


Рисунок 3.3 — Результат решения явной схемы. $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.0005$.

Осцилляции также уменьшились (рис. 3.3), но поведение пика волны не изменилось, относительно изначальных условий

3.3 Неявная схема (implicit)

В неявной схеме производные аппроксимируются на следующем временном слое, что обеспечивает безусловную устойчивость:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + v \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{\Delta x^2} = f_i^j.$$

Результирующее уравнение можно переписать в виде линейной системы для каждого временного слоя:

$$-ku_{i-1}^{j+1} + u_i^{j+1} + ku_{i+1}^{j+1} = u_i^j + \Delta t \cdot f_i^j,$$

где $k = \frac{v\Delta t}{\Delta x}$.

Система уравнений имеет трёхдиагональную структуру и может быть решена методом прогонки (TDMA). Точность метода $O(\tau + h^2)$, где τ - шаг по времени, h - шаг по пространству.

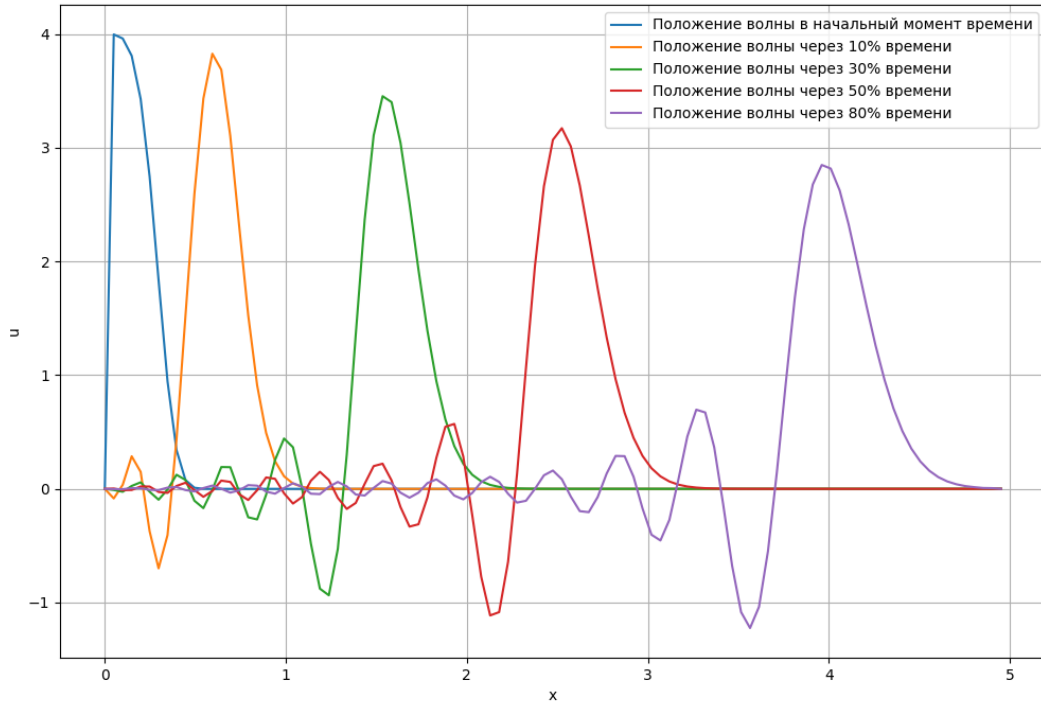


Рисунок 3.4 — Результат решения неявной схемы. $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.001$

```
1 def TDMA(a, b, c, f):
```



```

2      a, b, c, f = tuple(map(lambda k_list: list(map(float, k_list)), (a, c,
3                             b, f)))
4      alpha = [-b[0] / c[0]]
5      beta = [f[0] / c[0]]
6      n = len(f)
7      x = [0] * n
8      for i in range(1, n):
9          denom = a[i] * alpha[i - 1] + c[i]
10         alpha.append(-b[i] / denom)
11         beta.append((f[i] - a[i] * beta[i - 1]) / denom)
12     x[n - 1] = beta[n - 1]
13     for i in range(n - 1, 0, -1):
14         x[i - 1] = alpha[i - 1] * x[i] + beta[i - 1]
15     return x
16
17 def implicit(uu, v, dx, dt):
18     m = uu.shape[0] - 1
19     n = uu.shape[1] - 1
20     u_ = uu.copy()
21     k = v * dt / (2 * dx)
22     for ti in range(m):
23         al = np.zeros(n + 1)
24         bl = np.ones(n + 1)
25         cl = np.zeros(n + 1)
26         al[1:-1] = -k
27         cl[1:-1] = k
28         bl[0] = bl[-1] = 1
29         u_[ti + 1] = TDMA(al, bl, cl, u_[ti])
30     return u_

```

Рассмотрим графики решений системы (рис. 3.4). В данной схеме также виден нисходящий тренд максимумов волн. И также присутствующую осцилляцию, хотя и меньшую по амплитуде.

Уменьшим шаг по пространству в 1.5 раза.

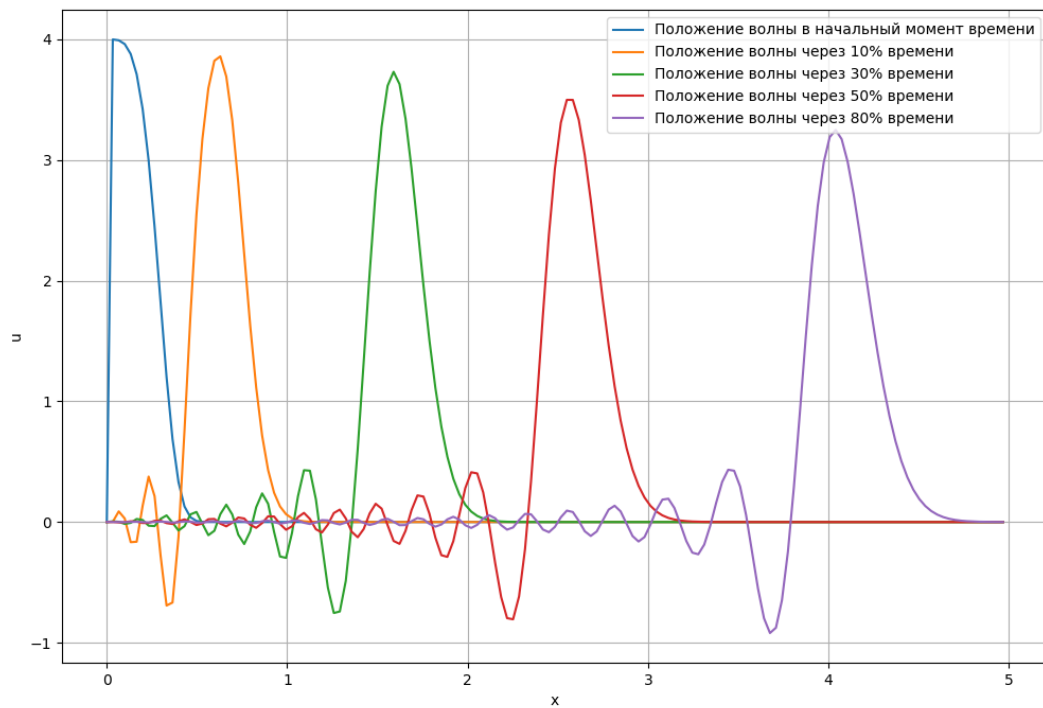


Рисунок 3.5 — Результат решения неявной схемы.

$$\Delta x = 0.05/1.5, \Delta t = 0.001.$$

Видно (рис 3.5), что осцилляции уменьшились и пик волны уменьшается медленнее.

Уменьшим шаг по времени в два раза.

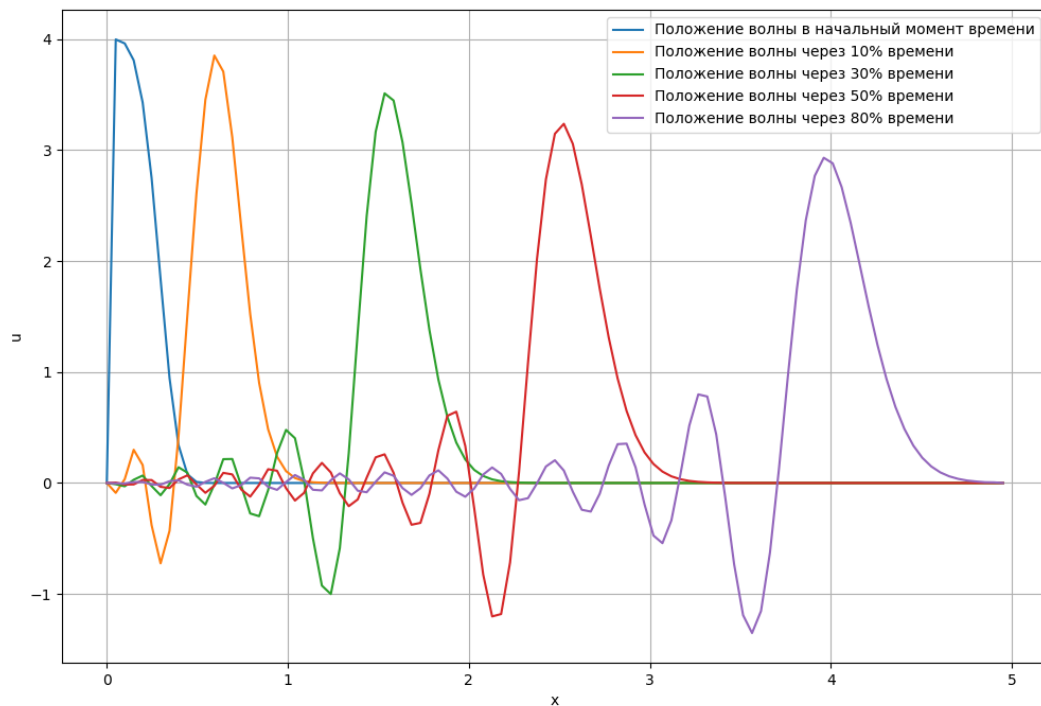


Рисунок 3.6 — Результат решения неявной схемы.

$$\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.0005.$$

Осцилляции также уменьшились (рис. 3.6), но поведение пика волны не изменилось, относительно изначальных условий

3.4 Схема «вверх по потоку» (upwind)

Схема «вверх по потоку» использует одностороннюю аппроксимацию производной по пространству:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + v \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} = f_i^j.$$

Выражая u_i^{j+1} :

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{v\Delta t}{\Delta x} (u_{i-1}^j - u_i^j).$$

Схема стабильна при выполнении условия CFL (Курант-Фридриха-Леви)[4]:

$$\boxed{\frac{v\Delta t}{\Delta x} \leq 1}. \quad (3.2)$$

Точность метода $O(\tau + h)$, где τ - шаг по времени, h - шаг по пространству.

```
1 def upwind(uu, c, dx, dt):
2     u_ = uu.copy()
3     k = c * dt / dx
4     for ti in range(u_.shape[0] - 1):
5         for xi in range(1, u_.shape[1] - 1):
6             u_[ti + 1, xi] = u_[ti, xi] + k * (u_[ti, xi - 1] - u_[ti, xi])
7     return u_
```

Из решения видно (рис. 3.7), что схема также позволяет получить нисходящий тренд максимумов волн. Но в отличие от предыдущих схем, не имеет осцилляций. В тоже время, изначальная форма волны не сохраняется и при перемещении расплывается, становясь шире и ниже.

Кроме этого, взятые интегралы плотности методом трапеций, показывают, что их значения сохраняются во всех трёх схемах. Это является показателем корректности решения поставленной задачи.

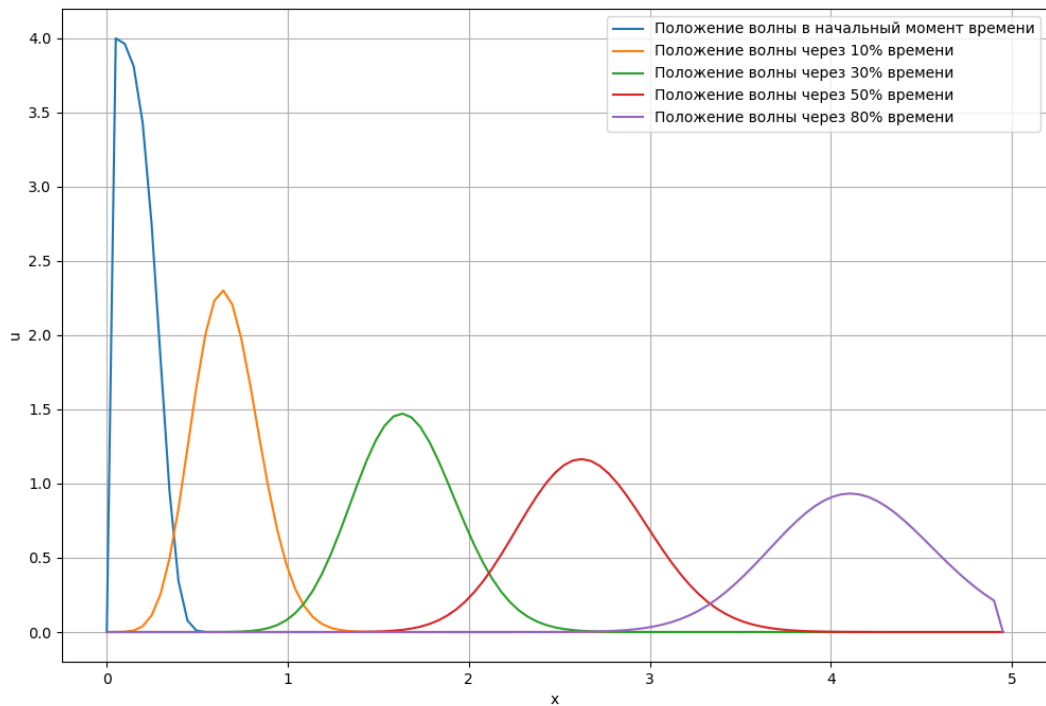


Рисунок 3.7 — Результат решения схемы "вверх по потоку".

$$\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.001$$

Уменьшим шаг по пространству в 1.5 раза. Условие CFL выполняется: $\frac{0.001 \cdot 1.5}{0.05} = 0.03 < 1$

Видно (рис 3.8), что пик волны уменьшается медленнее. Форма графика лучше сохраняется

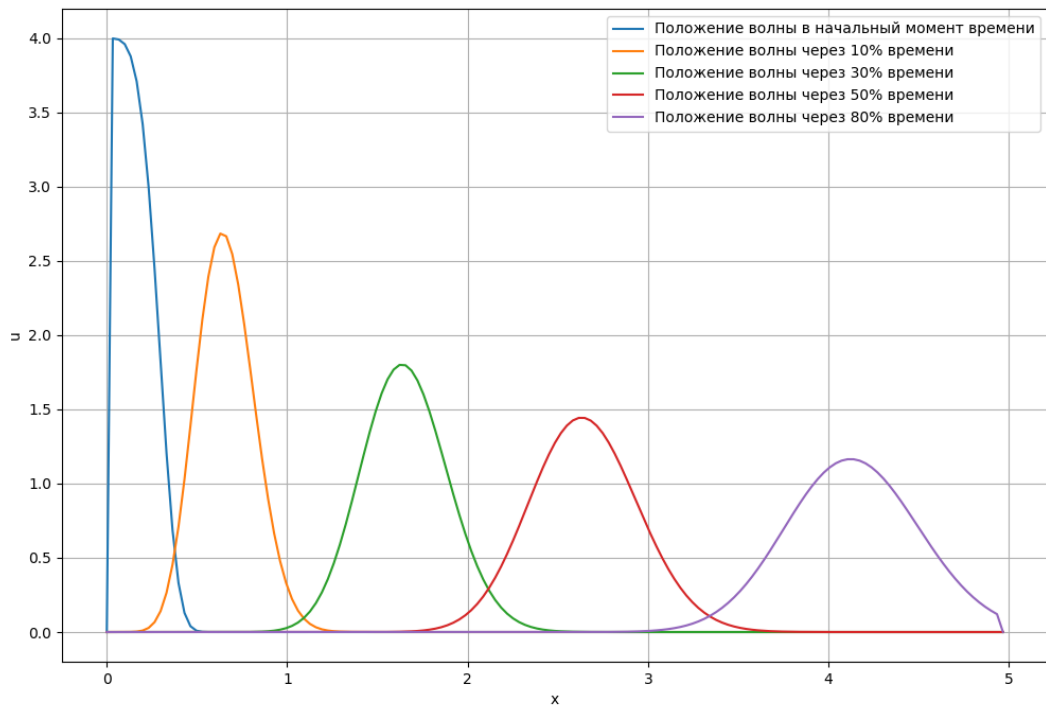


Рисунок 3.8 — Результат решения схемы "вверх по потоку".

$$\Delta x = 0.05/1.5, \Delta t = 0.001.$$

Уменьшим шаг по времени в два раза. Условие CFL выполняется:

$$\frac{0.001}{0.1} = 0.01 < 1$$

На рис. 3.9 видно, что поведение пика волны не изменилось, относительно изначальных условий. Форма графика тоже не изменилась

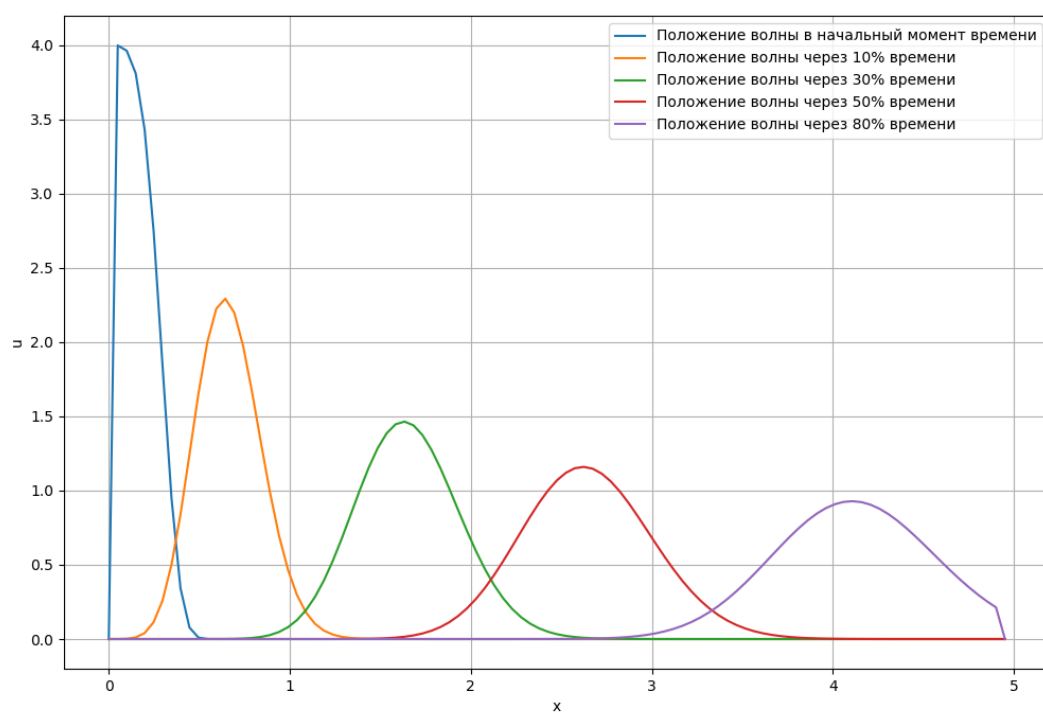


Рисунок 3.9 — Результат схемы "вверх по потоку".

$$\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.0005.$$

Заключение

Была сформулирована и проанализирована модель одномерного переноса.

Представлена программа для ЭВМ, которая вычисляет решения задачи одномерного переноса с помощью трех схем аппроксимации: явной, неявной и вверх по потоку.

Были проведены численные эксперименты с использованием разных схем решения данной системы.

Список использованных источников

1. *Alonso, M.* Physics / M. Alonso, E.J. Finn. — Addison-Wesley, 1992.
2. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: Учебник. Часть 1 / Г. М. Фихтенгольц. Учебники для вузов. Специальная литература. — 10 изд. — Лань, 2015. — С. 448.
3. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов: Учебное пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — 2 изд. — ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 304.
4. *Патанкар, С. В.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. В. Патанкар. — Энергоатомиздат, 1984. — С. 152.