

Расчет сопротивления между вершинами в графе

Вершинин Данил Алексеевич

4 мая 2024 г.

1 Введение

В данной работе представлен расчет сопротивления между двумя вершинами произвольного графа с использованием законов Кирхгофа и метода решения системы линейных уравнений. Граф задан его матрицей смежности, и каждое ребро графа имеет единичное сопротивление.

2 Методика расчета

2.1 Исходные данные

Матрица смежности графа:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Определение матрицы степеней

Матрица степеней D определяется исходя из количества рёбер, инцидентных каждой вершине:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3 Матрица Лапласа

Матрица Лапласа L вычисляется как разность D и A :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4 Расчет сопротивления между вершинами 1 и 4

Для расчета сопротивления между вершиной 1 (источник) и вершиной 4 (сток) модифицируем матрицу Лапласа, удалив строки и столбцы, соответствующие вершине 4.

$$L' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.5 Решение системы линейных уравнений

Система уравнений для определения потенциалов при токе 1 Ампер:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решив данную систему, мы находим, что:

$$V_1 = \frac{5}{3}$$

Следовательно, сопротивление между вершинами 1 и 4 равно $\frac{5}{3}$ Ом.

3 Заключение

Методика, представленная в данной работе, демонстрирует использование матрицы Лапласа для расчета электрического сопротивления в модели, представленной графом. Результаты расчетов позволяют точно определить сопротивление между выбранными вершинами.