

aboba

# Содержание

Введение . . . . .	3
1 Построение математической модели . . . . .	4
1.1 Постановка задачи . . . . .	4
1.2 Формализация . . . . .	4
1.3 Построение модели . . . . .	5
2 Анализ математической модели . . . . .	9
2.1 Аналитическое решение . . . . .	9
2.2 Численное решение . . . . .	9
3 Вычислительные эксперименты . . . . .	10
3.1 Программа для ЭВМ . . . . .	10
3.2 Явная схема (explicit) . . . . .	10
3.3 Схема «вверх по потоку» (upwind) . . . . .	14
3.4 Неявная схема (implicit) . . . . .	18
Заключение . . . . .	22
Список использованных источников . . . . .	23

## **Введение**

Одним из ключевых процессов в природе являются течения в жидких средах. Эти течения играют важную роль в переносе веществ и энергии из одной точки в другую. Примером могут служить течения в реках, морях и океанах, которые способствуют не только транспортировке питательных веществ, но и формированию экосистем.

Кроме того, аналогичные процессы происходят и в газообразной среде. В атмосфере воздух также движется, создавая ветры, которые переносят влагу, пыль и другие частицы. Эти воздушные течения влияют на климатические условия, распределение тепла и осадков, а также на миграцию животных и распространение семян растений.

Рассмотрим одномерное уравнение переноса.

# 1 Построение математической модели

## 1.1 Постановка задачи

Цель работы:

- Сформулировать модель одномерного переноса.
- Выбрать схемы решения.
- Провести численные эксперименты с различными методами аппроксимации, для понимания их влияния на решение.
- Провести анализ решений.

Дано:

- $x$  - координата одномерного пространства,
- $t$  - время,
- $u(x,t)$  - функция, задающая концентрацию вещества в любой момент времени (удельная масса или энергия (отнесенная к единице объема)).
- $c$  - скорость переноса ( $const$ ),
- $f(x,t)$  - описывает источники и стоки,

## 1.2 Формализация

Будем рассматривать задачу для линейного уравнения переноса.

Для аппроксимации будем использовать три метода: явная, неявная схемы и схему вверх по потоку.

### 1.3 Построение модели

Рассмотрим газовую или жидкую сплошную среду. Примем: все точки среды находятся в неравновесном состоянии. Это приводит к возникновению полей концентраций, температур, давлений, а наличие градиентов этих параметров вызывает перенос массы и энергии.

Выделим элемент объема движущейся жидкости в неоднородном поле некоторого потенциала переноса. Под потенциалом переноса  $u$  понимают удельную массу или энергию (отнесенную к единице объема).  $u(x, y, z, t)$  - скалярная величина.

Известно, что скалярная функция  $u$  называется потенциалом векторной функции  $\vec{q}$ , если между ними существует связь вида [1]:

$$\vec{q} = -\nabla u.$$

Далее будем рассматривать связь, как пропорциональность.

Таким образом, поток переносимой субстанции (массы или энергии) является векторной величиной  $\vec{q}$ . В случае переноса массы под потенциалом переноса  $u$  обычно понимают концентрацию компонента в смеси.

В рассматриваемой среде могут существовать, так называемые, объемные (непрерывно распределенные по объему) источники или стоки массы и энергии. В химической технологии под ними подразумеваются химические превращения.

Известно, что процессы тепло- и массообмена осуществляются двумя основными механизмами: молекулярным и конвективным. Молекулярный перенос (диффузия, теплопроводность) возникает в результате стремления системы к термодинамическому равновесию, а конвективный вызывается наличием поля скоростей в жидком или газовом объеме  $V$ .

Следует отметить, что в случае переноса энергии в форме теплоты существует еще и радиантный перенос (тепловое излучение), вклад которого учитывают при достаточно высоких температурах.

Процессы молекулярного переноса массы и энергии описываются соответствующими феноменологическими уравнениями, являющимися, как правило, линейными градиентными законами.

Опуская доказательство, изложенное в [1], можно сделать вывод: в случае молекулярного и конвективного переноса общая плотность потока массы или энергии складывается из двух векторных величин:

$$\vec{q} = \vec{q}_M + \vec{q}_K,$$

где  $\vec{q}_M$  - векторная величина молекулярного переноса,  $\vec{q}_K$  - векторная величина конвективного переноса.

В газовой или жидкой среде, находящейся в движении, выделим произвольный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $A$ . На поверхности

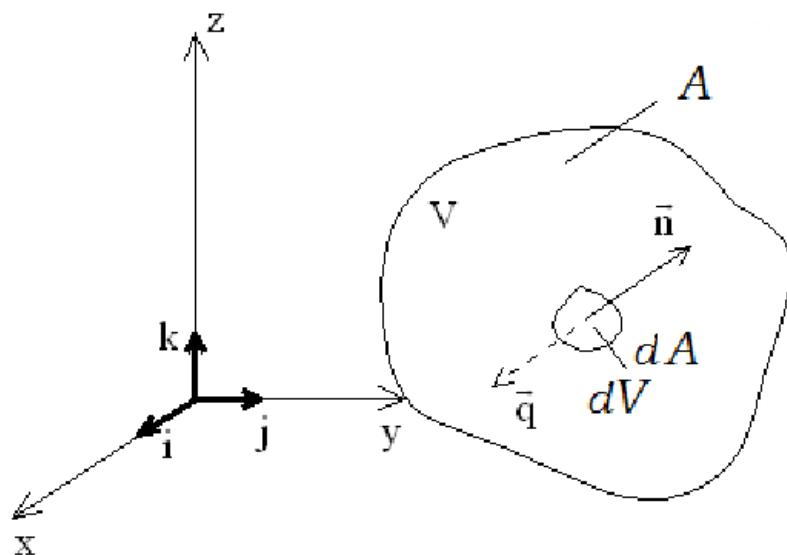


Рисунок 1.1 – Объём серды, ограниченный поверхностью  $A$

$A$  выделим элемент поверхности  $d$  и представим его в векторной форме, умножив на единичный вектор  $\vec{n}$ , нормальный к этому элементу и направленный из объема,  $\vec{n}dA = d\vec{A}$ .

Составим балансовое уравнение:

**Накопление внутри объёма = вход - выход + образование.**

Примем, что в произвольном объеме нет источников субстанции или стоков, т.е. образование равно нулю.

Плотность потока субстанции через площадку  $d\vec{A}$  будет  $-\vec{q}d\vec{A}$ . Знак минут инвертирует потоки (входные становятся положительными, а выходящие - отрицательными).

Результирующий поток будет равен:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A}. \quad (1.1)$$

Физически этот интеграл представляет разницу между входящими и выходящими потоками субстанции через всю поверхность  $A$ .

Если в объёме  $V$  происходит накопление субстанции, то это вызовет изменение потенциала переноса во времени  $\frac{du}{dt}$ , которое для элементарного объёма  $dV$  можно представить как  $\frac{du}{dt}dV$ , а для всего объема  $V$  как интеграл:

$$M = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.2)$$

Приравняв выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.3)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса [2], дающей преобразование интеграла, взятого по объёму  $V$ , ограниченному поверхностью  $A$ , в интеграл, взятый по этой поверхности, будем иметь:

$$\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{q}dV. \quad (1.4)$$

С учётом (1.3), соотношение (1.4) примет вид:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} \right) dV.$$

Интеграл, взятый по произвольному объёму, может быть равен нулю только в случае равенства нулю подынтегральной функции:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0.$$

Полученное выражение есть основное дифференциальное уравнение переноса субстанции – массы или энергии.

Перепишем его для одномерной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t). \quad (1.5)$$

Также установим начальные и граничные условия:

$$u(0,t) = \psi(t), \quad u(x,0) = \phi(x) \quad (1.6)$$

Условимся, что среда является однородной:  $f(x,t) = 0$

Таким образом, из (1.5) и (1.6) получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u(0,t) = \psi(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

## 2 Анализ математической модели

### 2.1 Аналитическое решение

Очевидным точным решением является смещенный профиль волны.

$$u(x,t) = \phi(x_0 - vt)$$

### 2.2 Численное решение

Система (1.7) является системой обыкновенного дифференциального уравнения в частных производных. Для численного решения применяется методы конечных разностей[3]. Введём равномерную сетку:

$$x_i = i\Delta x, \quad t^j = j\Delta t, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_t,$$

где  $\Delta x = \frac{L}{N_x}$ ,  $\Delta t = \frac{T}{N_t}$ . Обозначим  $u_i^j = u(x_i, t^j)$ .

Будем рассматривать три схемы решения: явную[3], неявную[3] и "вверх по потоку"[4]. В качестве профиля волны выберем следующую функцию:

$$\phi(x) = 4 \exp(-100x^4).$$

Для простоты используем нулевые граничные условия. Скорость  $c$  примем 1. Расстояние  $L$  равняется 5. Соответственно, максимальное значение времени тоже равно 5. Шаг по пространству возьмём 0.05, а по времени - 0.001. Такой выбор удовлетворяет условиям устойчивости всех трёх методов (3.1 - 3.2) и не требует больших вычислительных ресурсов.

### 3 Вычислительные эксперименты

#### 3.1 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для рассчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек numpy (вычисления) и matplotlib (визуализация).

#### 3.2 Явная схема (explicit)

Явная схема использует аппроксимацию по пространству и времени на текущем слое. Дифференциальное уравнение заменяется на:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} = f_i^j.$$

Рекуррентная формула для вычисления значений:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j),$$

Для устойчивости явной схемы необходимо выполнение условия Куранта[3]:

$$\boxed{\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \leq \frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Точность метода  $O(\tau + h^2)$ , где  $\tau$  - шаг по времени,  $h$  - шаг по пространству.

```
1 def explicit(uu, v, dx, dt):
2     m = uu.shape[0] - 1
3     n = uu.shape[1] - 1
4     u_ = uu.copy()
5     k = v * dt / (2 * dx)
6
7     for ti in range(m):
8         for j in range(1, n):
9             u_[ti + 1, j] = u_[ti, j] - k * (u_[ti, j + 1] - u_[ti, j - 1])
10
11    u_[ti + 1, 0] = u_[ti, 0]
12    u_[ti + 1, n] = u_[ti, n]
13
14 return u_
```

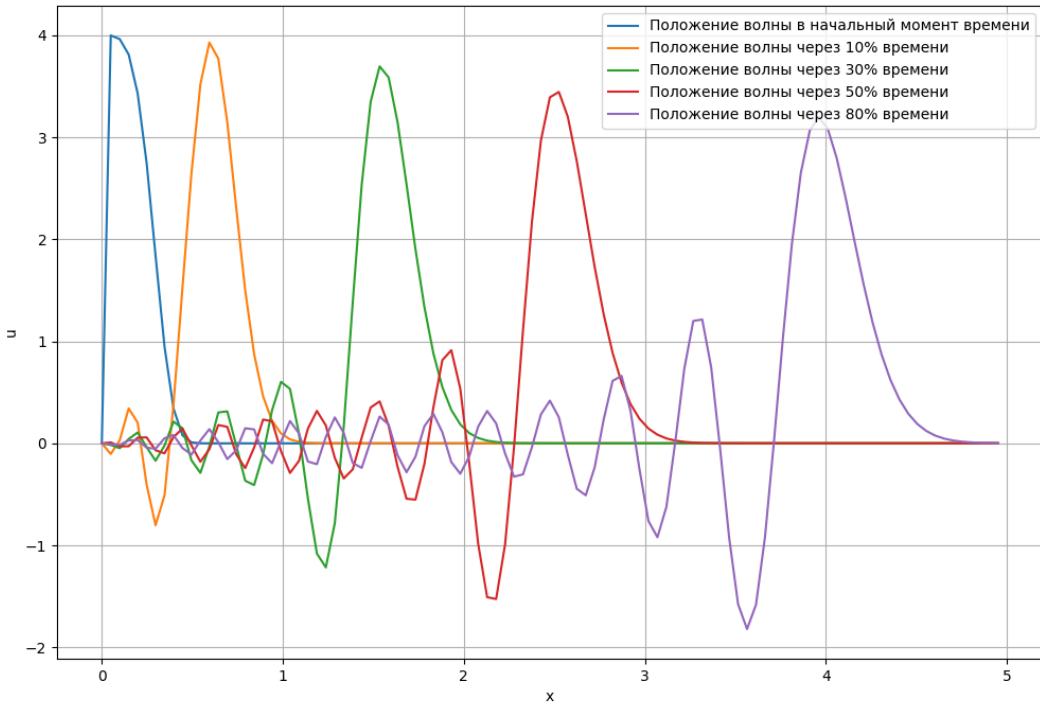


Рисунок 3.1 — Результат решения явной схемы.  $\Delta x = 0.05$ ,  $\Delta t = 0.001$ .

Из представленного графика решений (рис. 3.1) видно, присутствующий нисходящий тренд максимальных значений. При этом, с увеличением расстояния, пройденного волной, возникают осцилляции, с левой стороны, которые создают отрицательные значения, не имеющие физического смысла и являющиеся одним из недостатков данной схемы решения.

Осцилляции возникают из-за дисперсионных ошибок, вызванных тем, что схема не подавляет высокочастотные компоненты и не учитывает направление переноса. Это фундаментальное ограничение центральных схем подобного рода.

Уменьшим шаг по пространству в 1.5 раза. При таком значении шага условие Куранта выполняется:  $\frac{0.001 \cdot 1.5}{0.1} = 0.015 < 0.5$ .

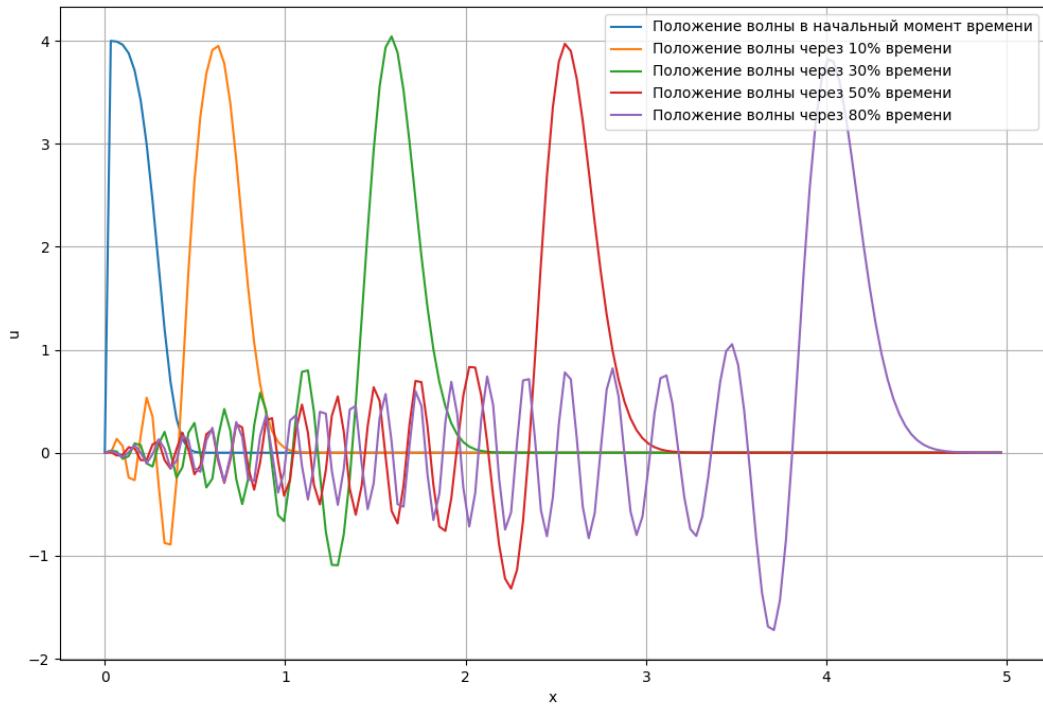


Рисунок 3.2 — Результат решения явной схемы.

$$\Delta x = 0.05 / 1.5, \Delta t = 0.001.$$

Видно (рис 3.2), что осцилляции уменьшились и пик волны уменьшается медленнее.

Уменьшим шаг по времени в два раза. Условие Куранта сохраняется:  $\frac{0.0005}{0.01} = 0.005 < 0.5$

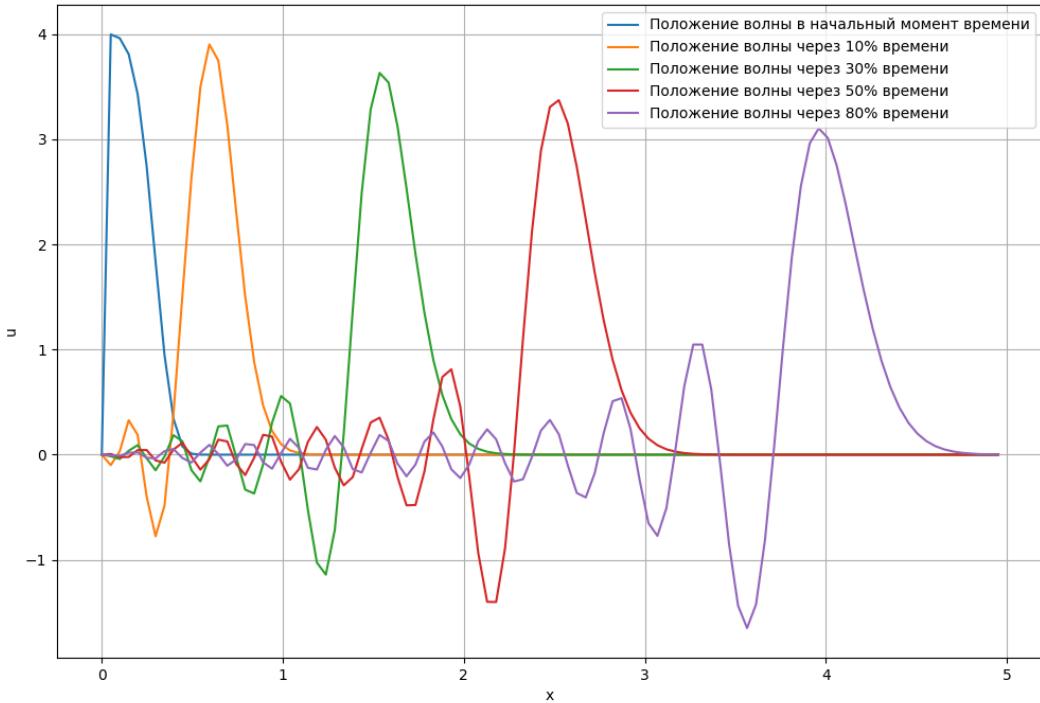


Рисунок 3.3 — Результат решения явной схемы.  $\Delta x = 0.05$ ,  $\Delta t = 0.0005$ .

Осцилляции также уменьшились (рис. 3.3), но поведение пика волны не изменилось, относительно изначальных условий

### 3.3 Схема «вверх по потоку» (upwind)

Схема «вверх по потоку» в явном виде использует одностороннюю аппроксимацию производной по пространству:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + c \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} = f_i^j.$$

Выражая  $u_i^{j+1}$ :

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left( u_{i-1}^j - u_i^j \right).$$

Схема стабильна при выполнении условия CFL (Курант-Фридриха-Леви) [4]:

$$\boxed{\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1}. \quad (3.2)$$

Точность метода  $O(\tau + h)$ , где  $\tau$  - шаг по времени,  $h$  - шаг по пространству.

```

1 def upwind(uu, c, dx, dt):
2     u_ = uu.copy()
3     k = c * dt / dx
4     for ti in range(u_.shape[0] - 1):
5         for xi in range(1, u_.shape[1] - 1):
6             u_[ti + 1, xi] = u_[ti, xi] + k * (u_[ti, xi - 1] - u_[ti, xi])
7     return u_

```

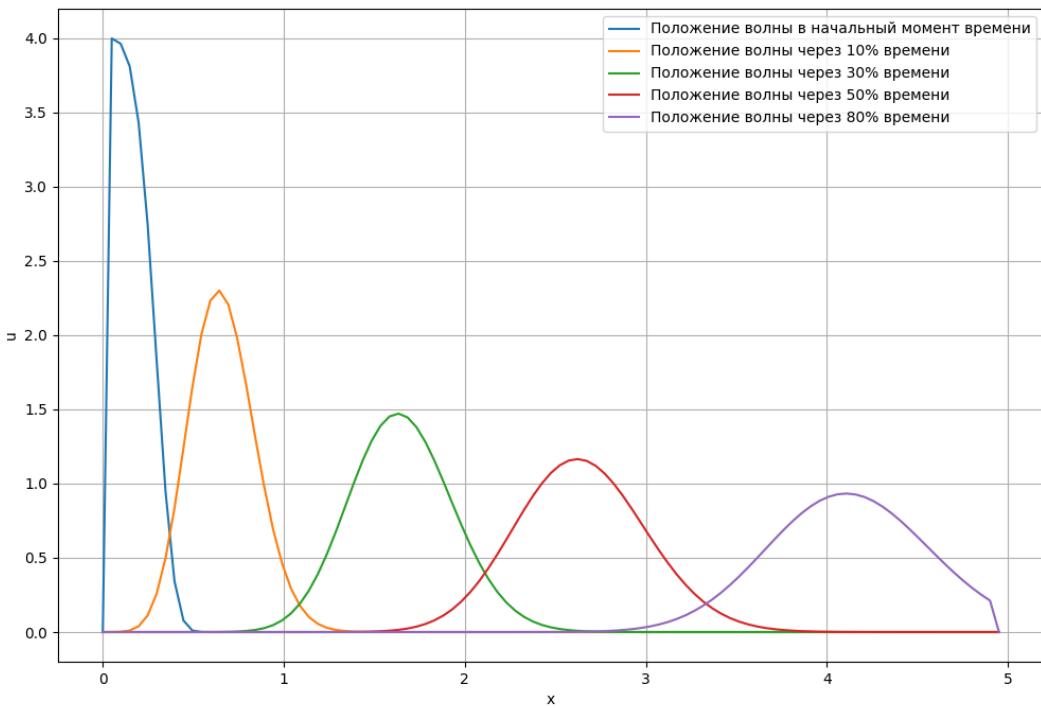


Рисунок 3.4 — Результат решения схемы "вверх по потоку".

$$\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.001$$

Из решения видно (рис. 3.4), что схема также позволяет получить исходящий тренд максимумов волн. Но в отличии от предыдущих схем, не имеет осцилляций. В тоже время, изначальная форма волны не сохраняется и при перемещении расплывается, становясь шире и ниже.

Кроме этого, взятые интегралы плотности методом трапеций, показывают, что их значения сохраняются во всех трёх схемах. Это является показателем корректности решения поставленной задачи.

Уменьшим шаг по пространству в 1.5 раза. Условие CFL выполняется:  $\frac{0.001 \cdot 1.5}{0.05} = 0.03 < 1$

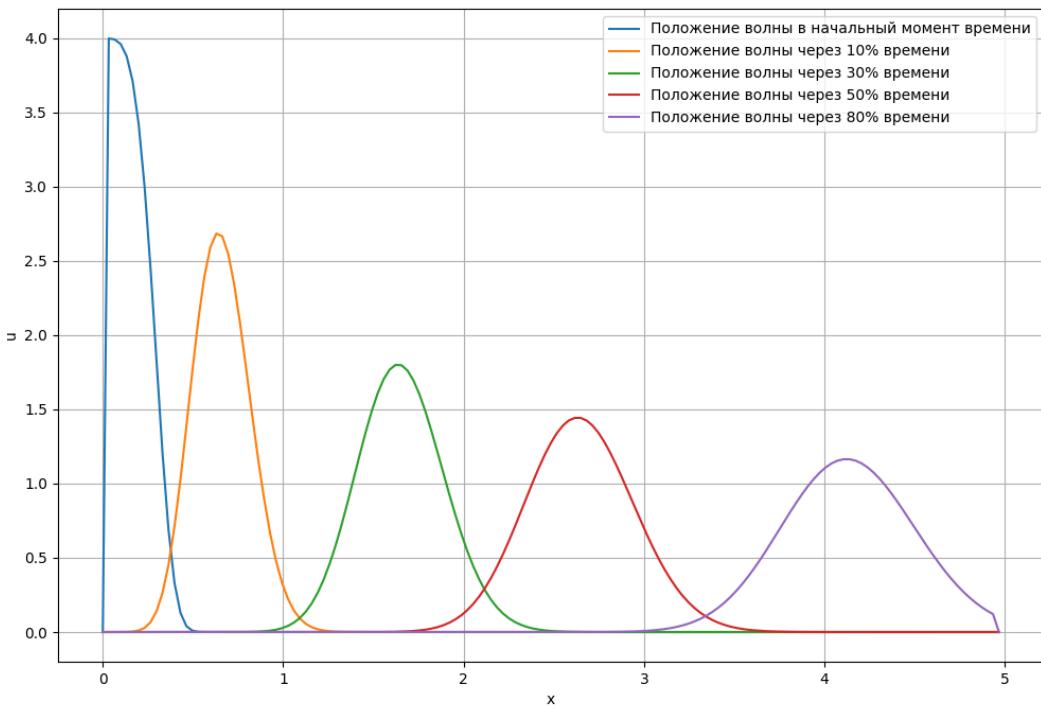


Рисунок 3.5 — Результат решения схемы "вверх по потоку".

$$\Delta x = 0.05/1.5, \Delta t = 0.001.$$

Видно (рис 3.5), что пик волны уменьшается медленнее. Форма графика лучше сохраняется.

Уменьшим шаг по времени в два раза. Условие CFL выполняется:  
 $\frac{0.001}{0.1} = 0.01 < 1$ .

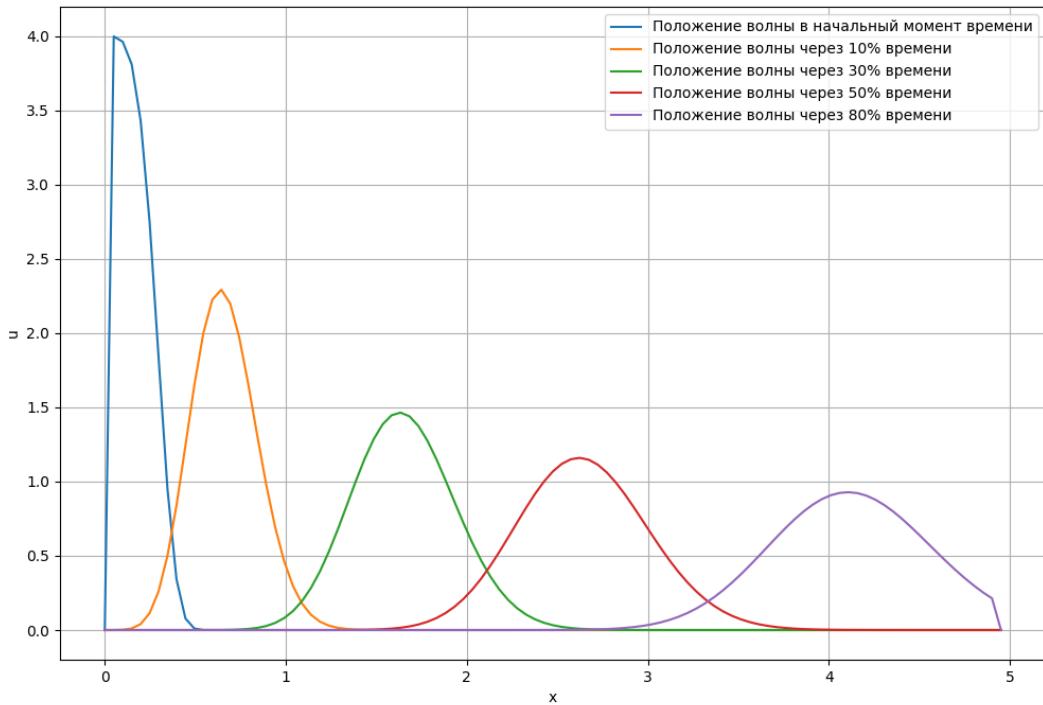


Рисунок 3.6 — Результат схемы "вверх по потоку".

$$\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.0005.$$

На рис. 3.6 видно, что поведение пика волны не изменилось, относительно изначальных условий. Форма графика тоже не изменилась.

### 3.4 Неявная схема (implicit)

В неявной схеме производные аппроксимируются на следующем временном слое, что обеспечивает безусловную устойчивость:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} = f_i^j.$$

Результирующее уравнение можно переписать в виде линейной системы для каждого временного слоя:

$$-ku_{i-1}^{j+1} + u_i^{j+1} + ku_{i+1}^{j+1} = u_i^j + \Delta t \cdot f_i^j,$$

где  $k = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ .

Система уравнений имеет трёхдиагональную структуру и может быть решена методом прогонки (TDMA). Точность метода  $O(\tau + h^2)$ , где  $\tau$  - шаг по времени,  $h$  - шаг по пространству.

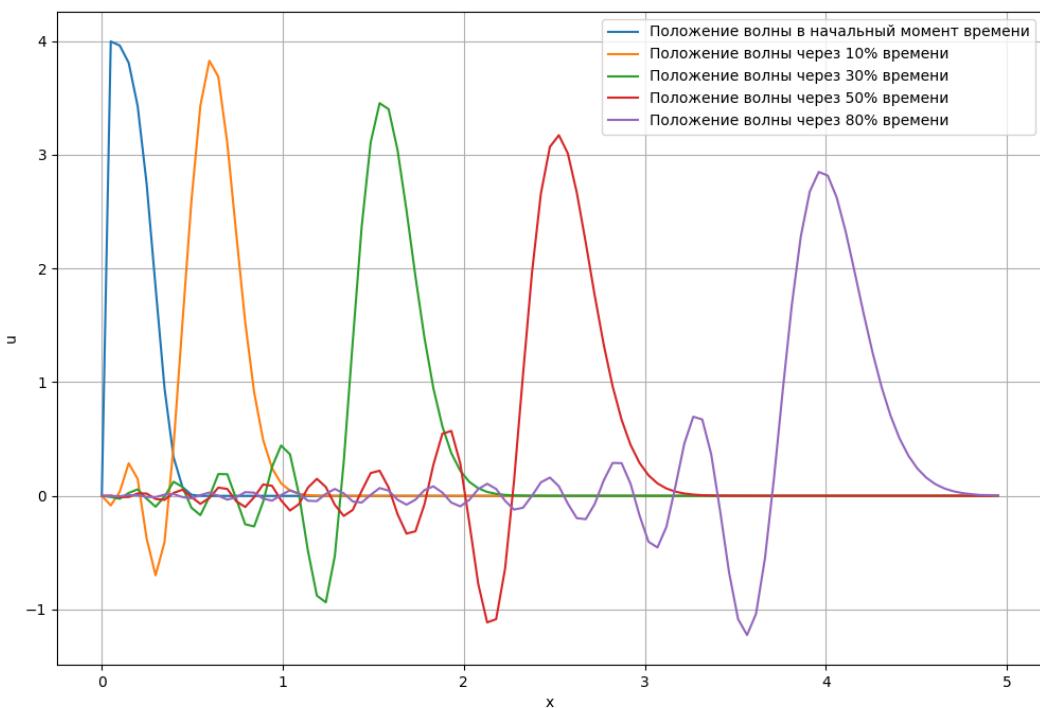


Рисунок 3.7 — Результат решения неявной схемы.  $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.001$

```
1 def TDMA(a, b, c, f):
```

```

2     a, b, c, f = tuple(map(lambda k_list: list(map(float, k_list)), (a, c,
3         b, f)))
4     alpha = [-b[0] / c[0]]
5     beta = [f[0] / c[0]]
6     n = len(f)
7     x = [0] * n
8     for i in range(1, n):
9         denom = a[i] * alpha[i - 1] + c[i]
10        alpha.append(-b[i] / denom)
11        beta.append((f[i] - a[i] * beta[i - 1]) / denom)
12    x[n - 1] = beta[n - 1]
13    for i in range(n - 1, 0, -1):
14        x[i - 1] = alpha[i - 1] * x[i] + beta[i - 1]
15    return x
16
17 def implicit(uu, v, dx, dt):
18     m = uu.shape[0] - 1
19     n = uu.shape[1] - 1
20     u_ = uu.copy()
21     k = v * dt / (2 * dx)
22     for ti in range(m):
23         al = np.zeros(n + 1)
24         bl = np.ones(n + 1)
25         cl = np.zeros(n + 1)
26         al[1:-1] = -k
27         cl[1:-1] = k
28         bl[0] = bl[-1] = 1
29         u_[ti + 1] = TDMA(al, bl, cl, u_[ti])
30     return u_

```

Рассмотрим графики решений системы (рис. 3.7). В данной схеме также виден нисходящий тренд максимумов волн. И также присутствуют осцилляции, хотя и меньшие по амплитуде.

Уменьшим шаг по пространству в 1.5 раза.

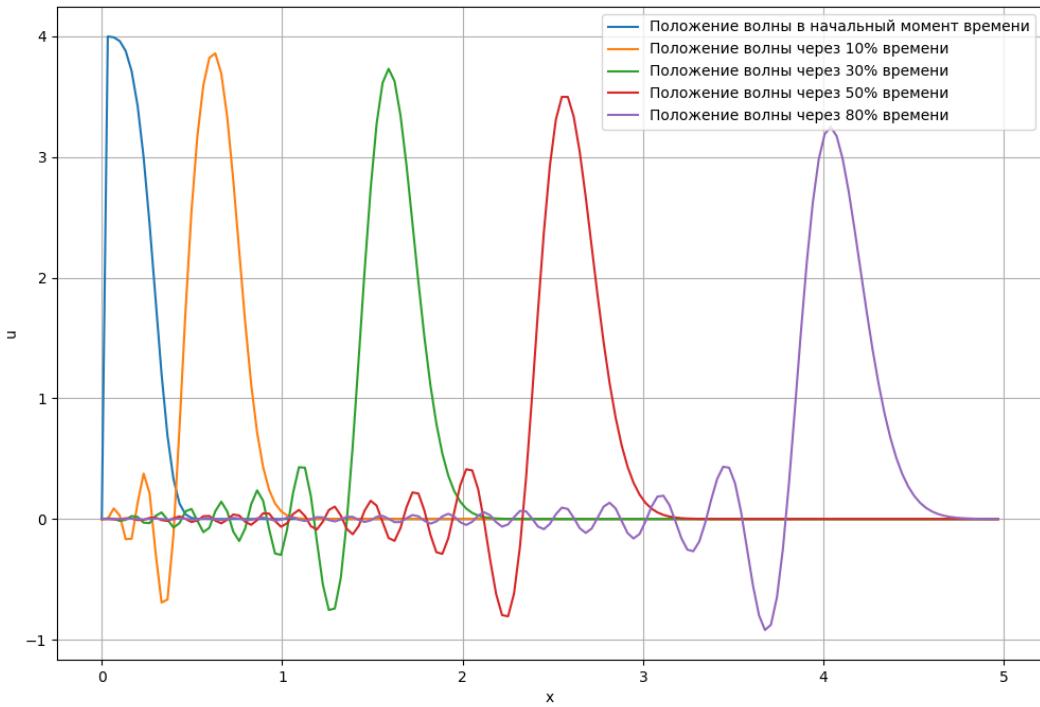


Рисунок 3.8 — Результат решения неявной схемы.

$$\Delta x = 0.05/1.5, \Delta t = 0.001.$$

Видно (рис 3.8), что осцилляции уменьшились и пик волны уменьшается медленнее.

Уменьшим шаг по времени в два раза.

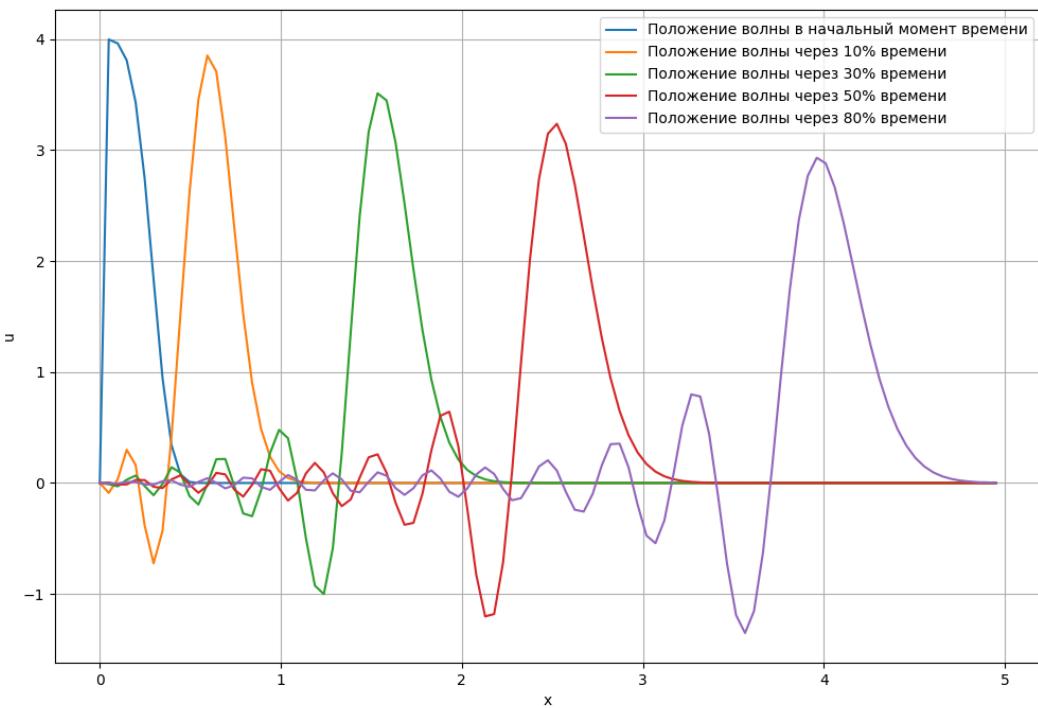


Рисунок 3.9 — Результат решения неявной схемы.

$$\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.0005.$$

Осцилляции также уменьшились (рис. 3.9), но поведение пика волны не изменилось, относительно изначальных условий

## **Заключение**

Была сформулирована и проанализирована модель одномерного переноса.

Представлена программа для ЭВМ, которая вычисляет решения задачи одномерного переноса с помощью трех схем аппроксимации: явной, неявной и вверх по потоку.

Были проведены численные эксперименты с использованием разных схем решения данной системы.

## **Список использованных источников**

1. *Alonso, M.* Physics / M. Alonso, E.J. Finn. — Addison-Wesley, 1992.
2. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: Учебник. Часть 1 / Г. М. Фихтенгольц. Учебники для вузов. Специальная литература. — 10 изд. — Лань, 2015. — С. 448.
3. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов: Учебное пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — 2 изд. — ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 304.
4. *Патанкар, С. В.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. В. Патанкар. — Энергоатомиздат, 1984. — С. 152.