ИДЗ №1

Вершинин Данил Алексеевич

4 апреля 2024 г.

1 Найти все значения корня: $\sqrt[3]{8i}$

Решение:

$$w = 8i$$

Найду модуль и аргумент:

$$\rho = |8i| = \sqrt{64} = 8$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{0}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$2 = 8(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right))$$

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2\cdot 3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -2i$$

Ответ:

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_3 = -2i$$

2 Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}(2 - \pi i)$

Решение:

$$\operatorname{sh}(2-\pi) = \operatorname{sh}(2)\operatorname{ch}(\pi i) - \operatorname{ch}(2)\operatorname{sh}(\pi i) = -\operatorname{sh}(2)$$
$$\operatorname{ch}(\pi i) = \cos(\pi) = -1$$
$$\operatorname{sh}(i\pi) = i\sin(\pi) = 0$$

Ответ:

$$-\operatorname{sh}(2)$$

3 Представить в алгебраической форме: arcth$(1+\sqrt{3}i)$

Решение:

$$\operatorname{arcth}(1+\sqrt{3}i)$$

$$\operatorname{arcth}(z)=w \Rightarrow \operatorname{cth}(w)=z$$

$$\frac{e^w+e^{-w}}{e^w-e^{-w}}=z$$

$$\frac{e^w+1/e^w}{e^w-1/e^w}=\frac{e^{2w}+1}{e^{2w}-1}=z \Rightarrow e^{2w}+1=z\left(e^{2w}-1\right)$$

$$e^{2w}(1-z)+z+1=0$$

$$e^{2w}(1-z)+(z+1)=0 \Rightarrow e^{2w}=\frac{z+1}{z-1}$$

$$2w=\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|+i\operatorname{Arg}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$w=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|+i\left(\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)+2\pi n\right)\right),\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{2+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}\cdot\frac{-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i}=\frac{3-2\sqrt{3}i}{3}=1-\frac{2\sqrt{3}i}{3}$$

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=\left|1-\frac{2\sqrt{3}i}{3}\right|=\sqrt{1+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\arg\left(1-\frac{2\sqrt{3}i}{3}\right)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w=\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{\frac{7}{3}}+i\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+2\pi n\right)\right),\ n\in\mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{\frac{7}{3}}+i\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+2\pi n\right)\right),\ n\in\mathbb{Z}$$

4 Представить в алгебраической форме: $(-3i)^i$

Решение:

$$(-3i)^i=e^{i\operatorname{Ln}(-3i)}$$

$$\operatorname{Ln}(-3i)=\ln|-3i|+i\operatorname{Arg}(-3i)=\ln(3)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),k\in\mathbb{Z}$$

$$e^{i\operatorname{Ln}(-3i)}=e^{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+i\ln(3)}=e^{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}\left(\cos\left(\ln(3)\right)+i\sin\left(\ln(3)\right)\right),k\in\mathbb{Z}$$

Ответ:

$$e^{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}\left(\cos\left(\ln(3)\right)+i\sin\left(\ln(3)\right)\right),k\in\mathbb{Z}$$

5 Представить в алгебраической форме: Ln$(2+2\sqrt{3}i)$

Решение:

$$\operatorname{Ln}(2+2\sqrt{3}i)=\ln|2+2\sqrt{3}i|+i\operatorname{Arg}(2+2\sqrt{3}i)=\ln 4+i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),k\in\mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\ln 4 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

6 Вычертить область, заданную неравествами: $D = \{z : |z - 1 + i| \geq 1, Re(z) < 1, Im(z) \leq 1\}$

Ответ:

Пунктир

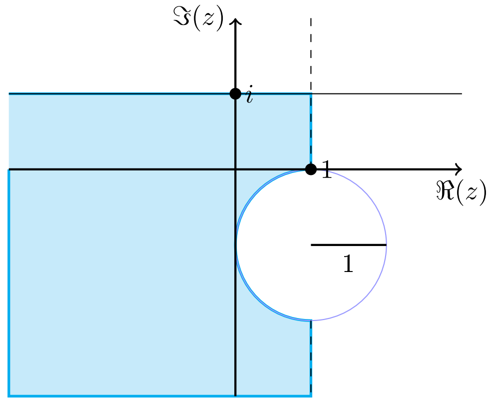

Рис. 1: Нужная нам область выделена голубым

7 Определить вид пути и в случае, когда он проходит через точку ∞, исследовать его поведение в этой точке: $z = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} + i2\operatorname{th}(4t)$

Решение:

$$z = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} + i2\operatorname{th}(4t)$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} \\ y = 2\operatorname{th}(4t) \end{cases}$$

$$x = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(4t)}$$

$$y = 2\operatorname{th}(4t) \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{\operatorname{sh}(4t)}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{y^2}{4} = \frac{\operatorname{sh}^2(4t)}{\operatorname{ch}^2(4t)} + 1 - 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} = -\frac{1}{\operatorname{ch}(4t)} + 1$$

$$-\frac{y^2}{4} + 1 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(4t)}$$

$$\frac{x^2}{16} = -\frac{y^2}{4} + 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$t = 0 : x \to 4, y \to 0$$

$$t \to +\infty : x \to 0, y \to 2$$

$$t \to -\infty : x \to 0, y \to -2$$

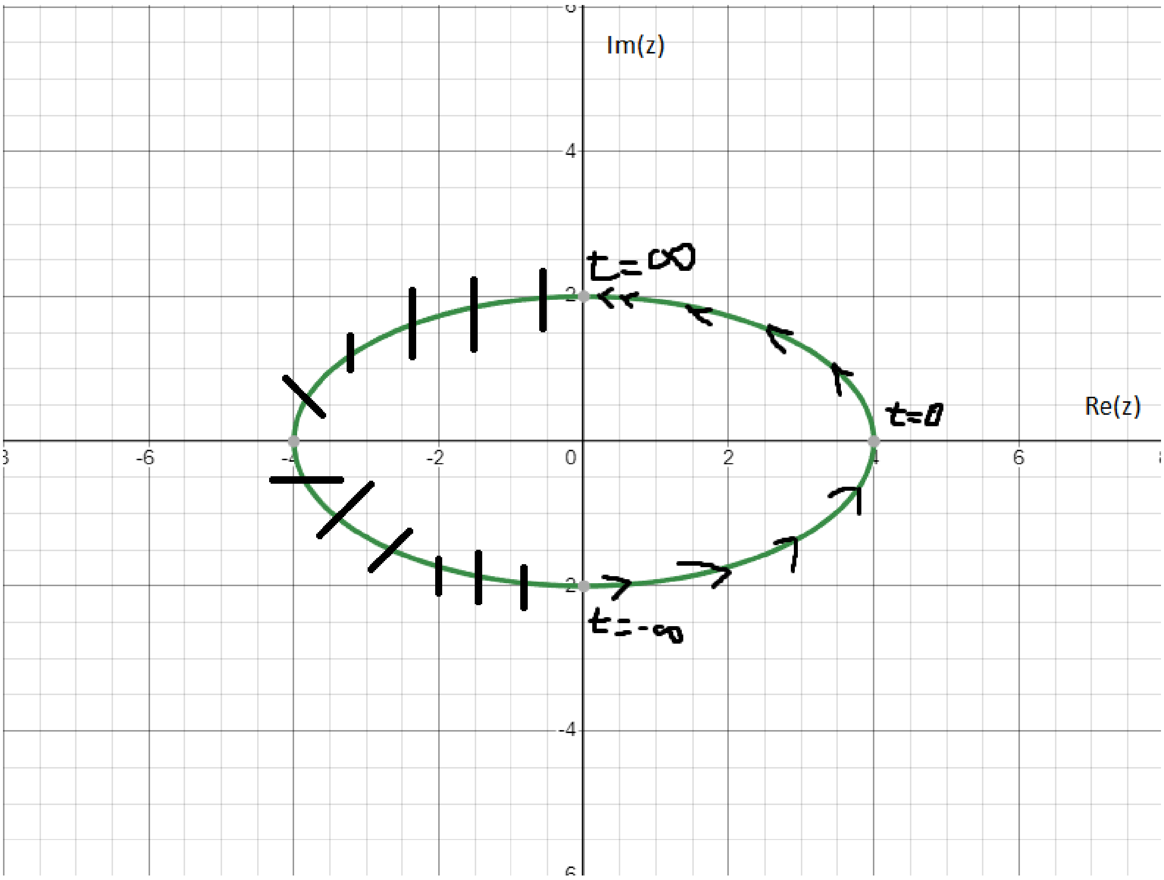

Рис. 2: z - эллипс. Левая часть не нужна, т.к. x не может принимать отрицательные значения

8 Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и начальному значению $f(z_0)$: $u = x^2 - y^2 + x, \;\; f(0) = 0$

Решение:

$$u = x^2 - y^2 + x$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x + 1$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = -2y$$

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 2 \\ \frac{\delta^2}{\delta y^2} = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow 2 - 2 = 0\text{- следовательно, условие Лапласа выполнено}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta v}{\delta y} = 2x + 1 \\ \frac{\delta v}{\delta x} = 2y \end{cases}$$

$$v = 2yx + \phi(y) \;\; \Rightarrow \frac{\delta v}{\delta y} = 2x + \phi'(y) \Rightarrow \phi'(y) = 1 \Rightarrow \phi(y) = y + C$$

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + C) = x + iy + x^2 - y^2 + 2ixy + iC = (*)$$

$$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$(*) = z + z^2 + iC$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$f(z) = z^2 + z$$

Ответ:

$$f(z) = z^2 + z$$

9 Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути: $\int_{AB} z\Im(z^2)dz;\ AB-$отрезок прямой $z_A = 0,\ z_B = 1+i$

Решение:

$$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \Im(z^2) = 2xy$$

$$z\Im(z^2) = (x + iy)(2xy) = 2x^2y + 2ixy^2$$

$$Z_AZ_B : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} ;0 \le t \le 1;\ z(t) = t + it \Rightarrow z'(t) = 1 + i$$

$$\int_{AB} z\Im(z^2)dz = \int\limits_0^1 (2x^2(t)y(t) + 2ix(t)y^2(t))(1 + i)dt = \int\limits_0^1 (2t^3 + 2it^3)(1 + i)dt = \int\limits_0^1 2t^3(i + 1)^2dt =$$

$$= 2(1 + i)^2 \int\limits_0^1 t^3dt = \cancel{2}(1 + i)^2 \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} = \frac{1}{2}(\cancel{1} + 2i - \cancel{1}) = \frac{2i}{2} = i$$

Ответ:

i

10 Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos^2(n)) \cdot z^n$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos^2(n)) \cdot z^n$$

$$\text{Радиус сходимости: } R = \frac{1}{\rho},\ \text{где } \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{C_n}$$

$$C_n = \cos^2 n,\ \text{очевидно, что } \cos^2 n \le 1 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{C_n} \le 1$$

$$|C_n| \not\to 0 \Rightarrow \cos^2 n \not\to 0 \qquad (*)$$

$$\exists n_k \cos^2 n_k \underset{n_k\to\infty}{\to} \alpha \ne 0 \Rightarrow \overline{\lim_{n_k\to\infty}} \sqrt[n_k]{\cos^2 n_k} \ge \overline{\lim_{n_k\to\infty}} \sqrt[n_k]{\alpha}$$

$$\overline{\lim_{n_k\to\infty}} \sqrt[n_k]{\alpha} \le \overline{\lim_{n_k\to\infty}} \sqrt[n_k]{\cos^2 n_k} \le 1 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\cos^2 n} = 1$$

$$(*):\ \text{предположим противное: } \cos^2 n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \cos^2(2n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$(\cos^2 n - \sin^2 n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \\ \sin^2 n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{cases},\ \text{но при этом } \cos^2 + \sin^2 = 1 \text{ - не выполнсяется.}$$

$$\text{Следовательно, получилм противоречие. } \Rightarrow \cos^2 n \not\to 0,\ \text{что и требовалось доказать.}$$

Тогда получается, что $R = 1/\rho = 1/\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\cos^2 n} = 1/1 = 1$

Ответ:

$R = 1$

11 Найти все лорановское разложение данной функции в 0 и в ∞: $f(z) = \frac{5z+100}{50z-5z^2-z^3}$ (пример поправил, т.к. в ином случае корни не рациональные)

Решение:

$$50z - 5z^2 - z^3 = 0 \Rightarrow z(50 - 5z - z^2) = 0$$

$$z_1 = 0,\ 50 - 5z - z^2 = 0$$

$$z_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25+200}}{-2} = \begin{cases} -10, \\ 5 \end{cases}$$

$$\frac{5z+100}{50z-5z^2-z^3} = -\left(\frac{a}{z} + \frac{b}{z-5} + \frac{c}{z+10}\right) = (*)$$

$$50a - 5az - az^2 - bz^2 - 10bz - cz^2 + 5cz = 5z + 100$$

$z^2:\ a+b+c = 0 \Rightarrow b + c = -2 \Rightarrow c = -1/3$
$z:\ -5a - 10b + 5c = 5 \Rightarrow -2b + c = 3 \Rightarrow 3b = -5 \Rightarrow b = -5/3$
$1: 50a = 100 \Rightarrow a = 2$

$$(*) = \frac{2}{z} - \frac{5}{3(z-5)} - \frac{1}{3(z+10)}$$

Первое слагаемое уже является разложением в ряд Лорана. Осталось найти разложение второго и третьего.
Для начала найдём разложение в окрестности нуля.
Заметим, что функция $\frac{5}{3(z-5)}$ - голоморфна при $|z| < 5$, следовательно, её ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора (с кругом сходимости $|z| < 5$):

$$\frac{5}{3(z-5)} = \frac{5}{15} \cdot \frac{-1}{(1-\frac{z}{5})} = \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{5^n}z^n\right) \tag{1}$$

Аналогично рассkладывается и третье слагаемое. Также отметим, что функция $\frac{1}{3(z+10)}$- голоморфна при $|z| < 10$. Отсюда получаем, что её ряд Лорена совпадает с рядом Тейлора (с кругом сходимости $|z| < 10$):

$$\frac{1}{3(z+10)} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{10})} = \frac{1}{30}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{10^{n+1}}z^n \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) справедливы при $|z| < 5$

$$\frac{5z+100}{50z-5z^2-z^3} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^n}z^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{10^{n+1}}z^n = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+1}}\right)z^n$$

Это выполняется в кольце $0 < z < 5$, где $C_n = \begin{cases} 0, & n \le -2 \\ 2, & n = -1 \\ \frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+1}}, & n \ge 0 \end{cases}$

Разложим теперь $\frac{5}{3(z-5)}$ в окрестности ∞. Очевидно, что эта функция голоморфна на $|z| > 5$. Поэтому преобразуем её так:

$$\frac{5}{3(z-5)} = \frac{5}{3z} \cdot \frac{1}{(1-\frac{5}{z})}$$

Заметим, что при $|z| > 5$ имеем $\left|\frac{5}{z}\right| < 1$ и поэтому получим:

$$\frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{z}\right)^n$$

Окончательно получим:

$$\frac{5}{3z}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \frac{5}{3z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{3z^{n+1}} = \text{(замена индекса (штрих стерли): } n+1 = -n') = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{3\cdot 5^n} \tag{3}$$

Аналогично и при $|z| > 10$ разложение для $\frac{1}{3(z+10)}$(четвертое равенство - замена индекса $n+1 = -n'$, штрих стерли):

$$\frac{1}{3(z+10)} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{z}} = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{10}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{3z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{3(-1)^{n-1}10^{n-1}} \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) справедливы для $|z| > 10$ поэтому :

$$\frac{5z+100}{50z-5z^2-z^3} = \frac{2}{z} - \frac{5}{3(z-5)} - \frac{1}{3(z+10)} = \frac{2}{z} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3\cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1}10^{n-1}}\right) z^n =$$

$$= (\text{Вычислим сумму для } n=-1) = \frac{-33}{z} - \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{1}{3\cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1}10^{n-1}}\right) z^n$$

Ответ:

В точке 0:
$\frac{2}{z} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+1}}\right) z^n$

В точке ∞:
$\frac{-33}{z} - \sum\limits_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{1}{3\cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1}10^{n-1}}\right) z^n$

12 Найти все лорановское разложение данной функции по степеням $z - z_0$: $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = -2-2i$

Решение:

$$f(z) = \frac{z+3}{z^2-1} = \frac{z+3}{(z-1)(z+1)} = -\left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{1-z}\right)$$

$$|-2-2i+1| = |-1-2i| = \sqrt{5}$$

$$|-2-2i-1| = |-3-2i| = \sqrt{13}$$

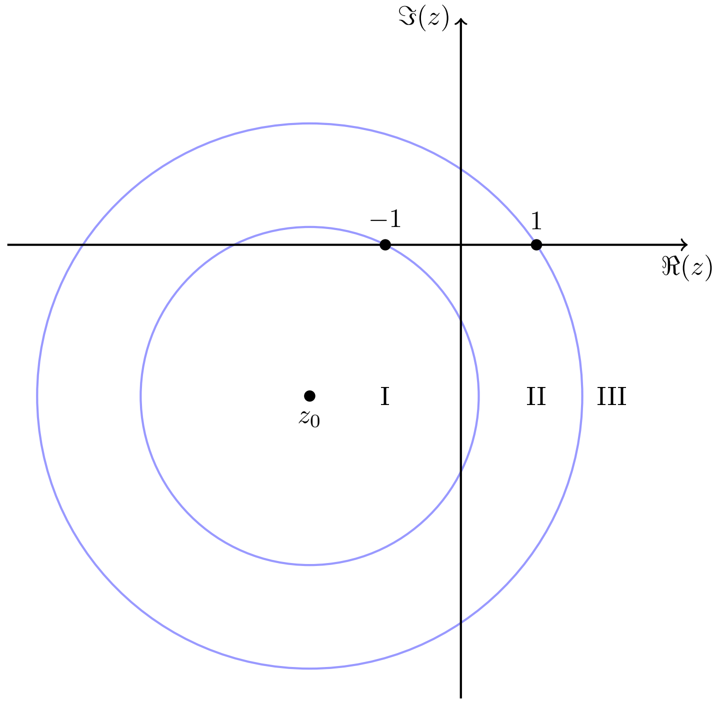

Рис. 3: Кольца для разложения Лорана

$$I : \frac{2}{1-z} \in O(II)$$

$$\frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-z_0+z_0-z} = \frac{2}{1-z_0}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)} = \frac{2}{1-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-z_0+z_0+1} = \frac{1}{z_0+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-z_0}{z_0+1}\right)} = \frac{1}{1+z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

Складывая оба разложения, окончательно в кольце I получим

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(1+z_0)^{n+1}} - \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

где $z_0 = -2-2i$.

$$II : \frac{1}{z+1} \in O(III)$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-z_0+z_0+1} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1+z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+z_0}{z-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$= (\text{Замена индекса (стерли штрих)} : n+1 = -n') = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

Тут $\frac{2}{1-z}$ остается голоморфной и поэтому её разложение будет таким же, как и в кольце I. Складывая оба разложения, окончательно в кольце II получим

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

где $z_0 = -2-2i$.

$$III:$$

Тут $\frac{1}{z+1}$ остается голоморфной и поэтому её разложение будет таким же, как и в кольце II. Сперва следует домножить на -1, чтобы далее выполнялось условие $\left|\frac{1-z_0}{z-z_0}\right| < 1$

$$\frac{2}{1-z} = -\frac{2}{z-z_0+z_0-1} = -\frac{2}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z_0-1}{z-z_0}} = -\frac{2}{z-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z_0-1}{z-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}(z_0-1)^n}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$= (\text{Замена индекса (стерли штрих)} : n+1 = -n') = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2(-1)^n}{(z_0-1)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

И так в кольце III получаем

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{(-1)^n}{(1-z_0)^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n+1}}{(z_0-1)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

где $z_0 = -2-2i$.

Ответ:

I:

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(1+z_0)^{n+1}} - \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

II:

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

III:

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{(-1)^n}{(1-z_0)^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n+1}}{(z_0-1)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

где $z_0 = -2-2i$.

13 Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0: $f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}}, z_0 = 5$

Решение:

$$f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{z-5+5}{z-5} = 1 + \frac{5}{z-5}$$

$$((z-5)+5)e^{1+\frac{5}{z-5}} = e((z-5)+5)e^{\frac{5}{z-5}} = e((z-5)+5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!(z-5)^n}$$

Раскроем скобки

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e5^n}{n!}\cdot\frac{1}{(z-5)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e5^{n+1}}{n!}\cdot\frac{1}{(z-5)^n} = e(z-5)+5e+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e5^n}{n!}\cdot\frac{1}{(z-5)^n} + 5e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e5^{n+1}}{n!}\cdot\frac{1}{(z-5)^n} =$$

$$= 10e+e(z-5) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{e(z-5)^n}{(1-n)!5^{n-1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{e5^{n-1}(z-5)^n}{(-n)!} = 10e+e(z-5)+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{e}{5^{n-1}}\left(\frac{1}{(1-n)!}+\frac{1}{(-n)!}\right)(z-5)^n$$

z_0 - СОТ

Ответ:

$$f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}} = 10e + e(z-5) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e}{5^{n-1}} \left(\frac{1}{(1-n)!} + \frac{1}{(-n)!} \right) (z-5)^n$$

14 Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции: $f(z) = \frac{\operatorname{ch}(5z)-1}{e^z-1-z}$

Решение:

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch}(5z) - 1}{e^z - 1 - z}$$

$$ch5z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5z)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{(5z)^{2n}}{2} + \frac{(5z)^4 n}{4!} + \dots$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{(5z)^2}{2} + o(z^4)}{\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + o(z^4)} = \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{z^2}\left(\frac{25}{2} + o(z^2)\right)}{\cancel{z^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + o(z^2)\right)} = 25 \Rightarrow z_0 \text{ - УОТ}$$

Ответ:

z_0 - УОТ

15 Для данной функции найти все изолированные особые точки и определить их тип: $f(z) = \operatorname{ctg}(\pi z)$

Решение:

$$f(z) = \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

$$\sin \pi z = 0$$

$$\pi z = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$z_n = n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Получили точки $z_n = n$ - особые точки.
∞ - не является изолированной особой точкой.

$$\lim_{z\to n} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

$$\sin \pi z = (-1)^n \sin \pi (z - n), \ n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

$$\cos \pi z = (-1)^n \cos \pi (z - n), \ n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем слудующий предел:

$$\lim_{z\to n} \frac{\cos \pi (z-n)}{\sin \pi (z-n)}, \ n \in \mathbb{Z}, \text{ сделав замену } \zeta = z - n \text{ получим: } \lim_{\zeta\to 0} \frac{\cos \pi\zeta}{\sin \pi\zeta} = \lim_{\zeta\to 0} \frac{1}{\pi\zeta} = \infty \Rightarrow z_n \text{ - полюс } n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{z\to n} (z-n)^k \operatorname{ctg} \pi z = \lim_{z\to n} \frac{(z-n)^k \cos \pi (z-n)}{\sin \pi (z-n)} = \lim_{\zeta\to n} \frac{\zeta^k \cos \pi\zeta}{\sin \pi\zeta} = \lim_{\zeta\to n} \frac{\zeta^k}{\pi\zeta} = \begin{cases} 0, & k > 1 \\ \frac{1}{\pi}, & k = 1 \\ \infty, & k < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_n = n - \text{полюс первого порядка}, \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$z_n = n -$ полюс первого порядка, $n \in \mathbb{Z}$