

Щищ

## Оглавление

Введение . . . . .	3
1 Постановка задачи . . . . .	4
1.1 Формализация . . . . .	4
2 Построение математической модели . . . . .	5
3 Анализ математической модели . . . . .	7
4 Вычислительные эксперименты . . . . .	9
4.1 Алгоритм решения . . . . .	9
4.2 Программа для ЭВМ . . . . .	9
4.3 Результаты экспериментов . . . . .	11
5 Заключение . . . . .	16
Список использованных источников . . . . .	17

## Введение

Взаимодействие хищников и жертв — один из ключевых процессов, определяющих структуру и динамику экосистем. Исследование этих взаимоотношений важно не только для фундаментальной экологии, но и для решения прикладных задач, таких как управление популяциями, сохранения биоразнообразия, прогнозирования последствий антропогенного воздействия и разработки устойчивых стратегий рыболовства и сельского хозяйства.

Классическая модель Лотки-Вольтерра, предложенная в начале XX века, стала основой для изучения динамики популяций. Однако в реальных экосистемах взаимодействия между видами гораздо сложнее, чем это описывает базовая модель. Изменения среды обитания, конкуренция за ресурсы, сезонные колебания и эволюционные адаптации могут существенно влиять на устойчивость и цикличность популяций.

В данной работе изучается классическая модель Лотки-Вольтерра без учёта дополнительных факторов.

# 1 Постановка задачи

Целью данной работы является построение математической модели Лотки-Вольтерра, характеризующую взаимодействие двух видов типа "хищник-жертва".

Для построения модели необходимо учитывать следующие параметры:

- Численность жертв  $x(t)$  — популяция жертв в момент времени  $t$ .
- Численность хищников  $y(t)$  — популяция хищников в момент времени  $t$ .
- Скорость размножения жертв  $\alpha$  — коэффициент, определяющий, как быстро популяция жертв увеличивается в отсутствие хищников.
- Смертность хищников  $\gamma$  — коэффициент, определяющий, как быстро популяция хищников уменьшается в отсутствие жертв.
- Коэффициент смертности жертв от хищников  $\beta$  — показывает, как взаимодействие с хищниками влияет на численность жертв.
- Коэффициент конверсии пойманной жертвы в новых хищников  $\delta$  — определяет, как количество пойманных жертв увеличивает популяцию хищников.

## 1.1 Формализация

Для анализа взаимодействия популяций необходимо вывести систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику численности жертв и хищников во времени. Система будет основываться на предположении, что обе популяции изолированы и взаимодействуют только друг с другом.

При отсутствии хищников жертвы размножаются неограниченно. Хищники при отсутствии жертв вымирают.

Решение модели позволит проанализировать динамику изменения популяций в изолированной системе, выявить закономерности взаимодействия между видами и предсказать возможные сценарии развития экосистемы.

## 2 Построение математической модели

Основная идея модели заключается в том, что численность хищников зависит от доступности жертв, а популяция жертв ограничивается воздействием хищников [1].

Будем рассматривать взаимодействие популяций во времени. Из формализации задачи имеем:  $x(t)$  - популяция жертв, а  $y(t)$  — популяция хищников. Единицы измерения в данной системе предлагается опустить, измеряя популяции некоторым числом особей. Модель обладает физическим смыслом при  $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0$ .

Предположим, что популяции изолированы. В таком случае популяция жертв будет увеличиваться, и скорость её роста также будет расти пропорционально числу особей в популяции.

Популяция хищников, напротив, со временем будет уменьшаться: в отсутствие пропитания особи могут гибнуть из-за нехватки ресурсов. Заметим, что абсолютное число погибающих хищников будет пропорционально их численности.

На основании этих рассуждений можно построить следующую модель:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x$  — численность жертв,  $y$  — численность хищников,  $\alpha > 0$  — скорость размножения жертв,  $\gamma > 0$  — смертность хищников.

Теперь рассмотрим, как взаимодействие популяций будет влиять на их численность.

Изменение численности популяций зависит от количества особей обоих видов. Чем больше численность хищников в замкнутой системе, тем быстрее будет уменьшаться популяция жертв. В то же время увеличение численности популяции жертв повлечёт за собой рост численности хищников, так как появляется избыток питания, что позволяет существовать большему количеству хищников.

Таким образом, можно сделать вывод, что скорость изменения обеих популяций будет зависеть от численности обоих видов: увеличение

количества хищников влечёт уменьшение числа жертв, уменьшение числа жертв — уменьшение числа хищников и наоборот.

Учитывая эти рассуждения, дополним систему (1) новыми составляющими:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\beta > 0$  — коэффициент смертности жертв от встречи с хищником,  $\delta > 0$  — коэффициент конверсии пойманной жертвы в новых хищников (прирост за счёт избытка пищи).

Таким образом, построенная модель конкуренции является системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения единственного решения необходимо построить задачу Коши (добавить начальные условия):

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

Эта система демонстрирует колебания численности обеих популяций, которые могут напоминать реальные циклы в природе, например взаимодействие рыси и зайца. Регуляторами взаимодействий являются коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ .

Однако модель является упрощённой и не учитывает многие факторы, такие как насыщение хищников, изменения среды и взаимодействие других видов.

### 3 Анализ математической модели

Очевидным является тривиальное решение  $(0,0)$ .

Найдём точки равновесия уравнения (2):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0 \\ \delta xy - \gamma y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{bal} = \frac{\gamma}{\delta} \\ y_{bal} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}. \quad (4)$$

Теперь проанализируем устойчивость решений, применив метод первого приближения. Для этого построим матрицу Якоби ( $J$ ), найдём её собственные значения, подставив точки равновесия, и по ним укажем тип устойчивости.

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Подставляем тривиальное решение:

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\gamma. \quad (6)$$

Заметим, что собственные значения вещественны, но различны по знаку. Это означает, что точка  $(0,0)$  является седловой точкой.

Теперь подставим нетривиальную точку равновесия:

$$J|_{(x_{bal}, y_{bal})} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \frac{\alpha}{\beta} & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & -\gamma + \delta \frac{\gamma}{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Найдём её собственные значения, решая характеристическое уравнение:

$$\det(J - \lambda I) = 0. \quad (8)$$

Вычтем  $\lambda I$  из  $J$ :

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & -\lambda \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Найдём определитель:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda) - \left( -\frac{\beta\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta\alpha}{\beta} \right), \quad (10)$$

$$\lambda^2 - \left( -\frac{\beta\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta\alpha}{\beta} \right) = 0, \quad (11)$$

$$\lambda^2 - \frac{\beta\gamma\delta\alpha}{\delta\beta} = 0, \quad (12)$$

$$\lambda^2 - \alpha\gamma = 0. \quad (13)$$

Решая квадратное уравнение:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}. \quad (14)$$

Собственные значения в точке равновесия  $(x_{bal}, y_{bal})$  чисто мнимые. Следовательно, точка является неасимптотически устойчивой. Точка равновесия не является устойчивым фокусом, но малые отклонения приведут к замкнутым траекториям, соответствующим периодическим колебаниям численности популяций.

Теперь найдём первый интеграл системы. Для этого поделим первое уравнение на второе и разделим переменные:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha x - \beta xy}{\delta xy - \gamma y} \Rightarrow \left( \frac{\alpha}{y} - \beta \right) dy + \left( \frac{\gamma}{x} - \delta \right) dx = 0. \quad (15)$$

Интегрируя, получим:

$$\alpha \ln |y| - \beta y + \gamma \ln |x| - \delta x = \text{const}. \quad (16)$$

Выражение (16) показывает, что соотношение численности популяций остаётся постоянным во времени. Следовательно, хотя популяции изменяются, в какой-то момент их соотношение вернётся к первоначальному значению, что приводит к циклическому поведению системы.



## 4 Вычислительные эксперименты

### 4.1 Алгоритм решения

Для численного решения системы дифференциальных уравнений будем использовать алгоритм Рунге-Кутты [2] четвертого порядка.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка (RK4) обладает порядком точности  $O(h^4)$ , что означает, что ошибка метода уменьшается пропорционально четвертой степени размера шага  $h$ . Локальная ошибка на каждом шаге составляет  $O(h^5)$ , а глобальная ошибка, накапливаясь после  $N$  шагов, составляет  $O(h^3)$ . Это делает метод RK4 более точным по сравнению с методами более низкого порядка, такими как метод Эйлера и метод Рунге-Кутты второго порядка. Благодаря высокой точности и простоте реализации, RK4 широко используется для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в различных областях науки и техники.

Результатом применения метода Рунге-Кутты будут являться три массива значений: массив значений времени и два массива численных значений решения (хищники и жертвы). После этого построим графики решений на координатной и фазовой плоскостях.

### 4.2 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для расчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек `numpy` (вычисления) и `matplotlib + seaborn` (визуализация).

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import seaborn as sns
4
5
6 alpha = 2
7 beta = 2
8 delta = 1
9 gamma = 4
10
11
12 def lotka_volterra(x, y):
13     dxdt = alpha * x - beta * x * y
```

```

14     dydt = delta * x * y - gamma * y
15     return np.array([dxdt, dydt])
16
17
18 def runge_kutta_4(f, x0, y0, T, dt):
19     t_values = np.arange(0, T, dt)
20     x_values = np.zeros(len(t_values))
21     y_values = np.zeros(len(t_values))
22
23     x_values[0] = x0
24     y_values[0] = y0
25
26     for i in range(1, len(t_values)):
27         x, y = x_values[i - 1], y_values[i - 1]
28         k1 = dt * f(x, y)
29         k2 = dt * f(x + 0.5 * k1[0], y + 0.5 * k1[1])
30         k3 = dt * f(x + 0.5 * k2[0], y + 0.5 * k2[1])
31         k4 = dt * f(x + k3[0], y + k3[1])
32
33         x_values[i] = x + (k1[0] + 2 * k2[0] + 2 * k3[0] + k4[0]) / 6
34         y_values[i] = y + (k1[1] + 2 * k2[1] + 2 * k3[1] + k4[1]) / 6
35
36     return t_values, x_values, y_values
37
38
39
40 initial_conditions = [(1, 3), (6, 1), (4, 1)]
41 T = 10
42 n = 1000
43 dt = T / n
44
45 sns.set_theme(style="darkgrid")
46 plt.figure(figsize=(12, 6))
47
48 for x0, y0 in initial_conditions:
49     t_values, x_values, y_values = runge_kutta_4(lotka_volterra, x0, y0,
50         T, dt)
51     plt.plot(t_values, x_values, label='x', (x0, y0), linewidth=2)
52     plt.plot(t_values, y_values, label='y', (x0, y0), linewidth=2)
53
54 plt.xlabel("Time")
55 plt.ylabel("Population")
56 plt.title("Lotka-Volter model")
57 plt.legend()
58 plt.show()

```

```

59
60 plt.figure(figsize=(8, 6))
61
62 for x0, y0 in initial_conditions:
63     t_values, x_values, y_values = runge_kutta_4(lotka_volterra, x0, y0,
64         T, dt)
65     plt.plot(x_values, y_values, linewidth=2, label=f'({x0}, {y0})')
66     plt.plot(x_values[0], y_values[0], marker='o', markersize=5)
67
68 plt.xlabel("x")
69 plt.ylabel("y")
70 plt.title("Phase portrait of Lotka–Volter model")
71 plt.legend()
72 plt.show()

```

### 4.3 Результаты экспериментов

Построим несколько решений системы с одинаковыми параметрами, но разными начальными условиями, включая точку равновесия.

#### Эксперимент 1

Для первого эксперимента были взяты следующие параметры

$$\alpha = 2, \beta = 2, \delta = 1, \gamma = 4,$$

на временном интервале  $[0,10]$  с шагом 0.01.

Покажем результаты графически:

Как можно видеть на (Рис. 1) объёмы популяций представляют собой периодические функции. Популяции взаимодействуют ровно так, как мы описали в (2). При начальном значении (4,1) - популяции не изменяются. Заметим, что некоторые популяции достигают нулевых значений. С точки зрения реального мира в эта модель будет неточной, т.к. нулевые значения у жертв вызовут вымирание обеих популяций.

Посмотрим на решение в фазовой плоскости  $(x,y)$ .

Точками на рис. 2 указаны начальные условия. Центральная синяя точка - положение равновесия. Как было выяснено при анализе модели, точка равновесия является неасимптотически устойчивой.



Рисунок 1 — Моделирование для начальных условий:  $(1,3), (6,1), (4,1)$  - на временном интервале  $[0,10]$  с шагом 0.01.

Поэтому можно наблюдать циклы на фазовой плоскости. Это также было определено из первого интеграла (16) системы уравнений.

Уменьшим временной интервал до  $[0,1]$  и шаг до 0,001, чтобы циклы не замкнулись.

Как видно на Рис. 3 циклы остались незамкнутыми. Кроме того, можно видеть, что они изменяются по направлению против часовой стрелки в данной фазовой плоскости.

Увеличить количество начальных параметров, чтобы увидеть действие седловой точки. Также, изменим параметры.

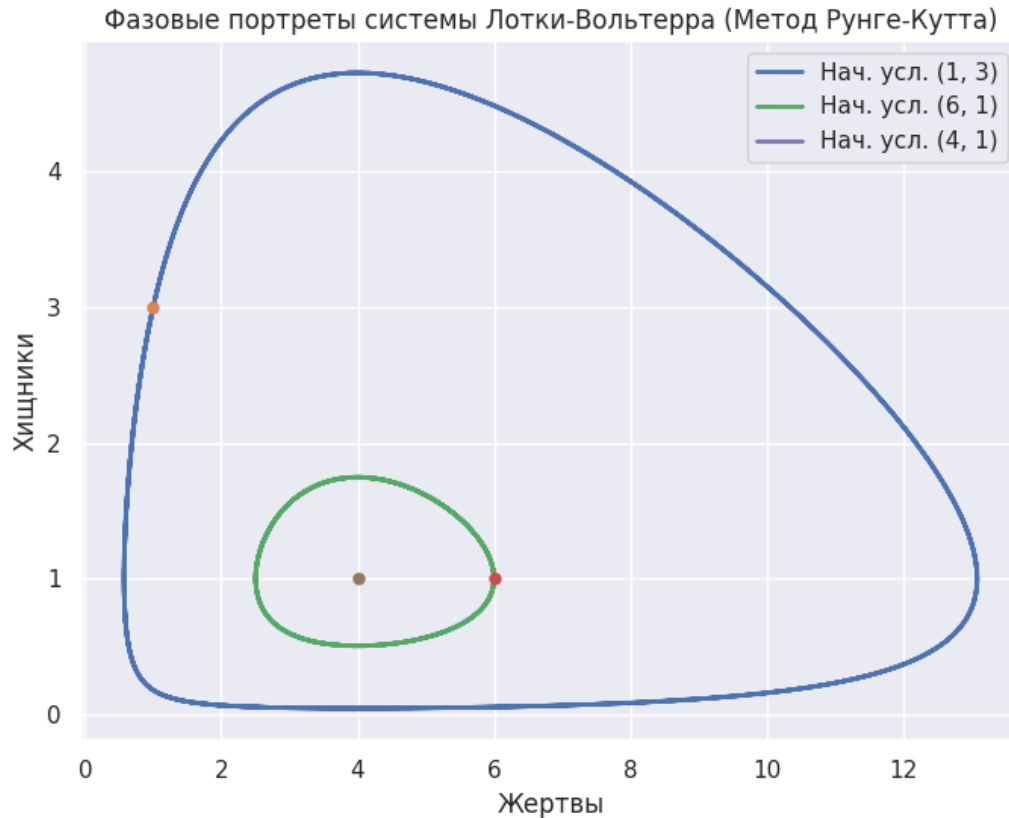


Рисунок 2 — Решения с начальными условиями:  
 $(1,3)$  - синий,  $(6,1)$  - зелёный,  $(4,1)$  - коричневый, - на временном интервале  $[0,10]$  с шагом 0.01.

## Эксперимент 2

Для второго эксперимента были взяты следующие параметры:

$$\alpha = 2, \beta = 1, \delta = 0.1, \gamma = 0.8.$$

Заметим, что (рис. 4) с уменьшением коэффициентов, модель стала более "плавной". Изменение числа популяций происходит медленнее, по сравнению с прошлыми результатами.

Кроме того, видно, что некоторые популяции приближаются к вымиранию. В реальном мире, подобный случай стал бы критическим для популяции жертв и хищников.

На фазовой плоскости Рис. 5 видно, что на рассматриваемом временном интервале замкнулись не все циклы. Это связано с тем,

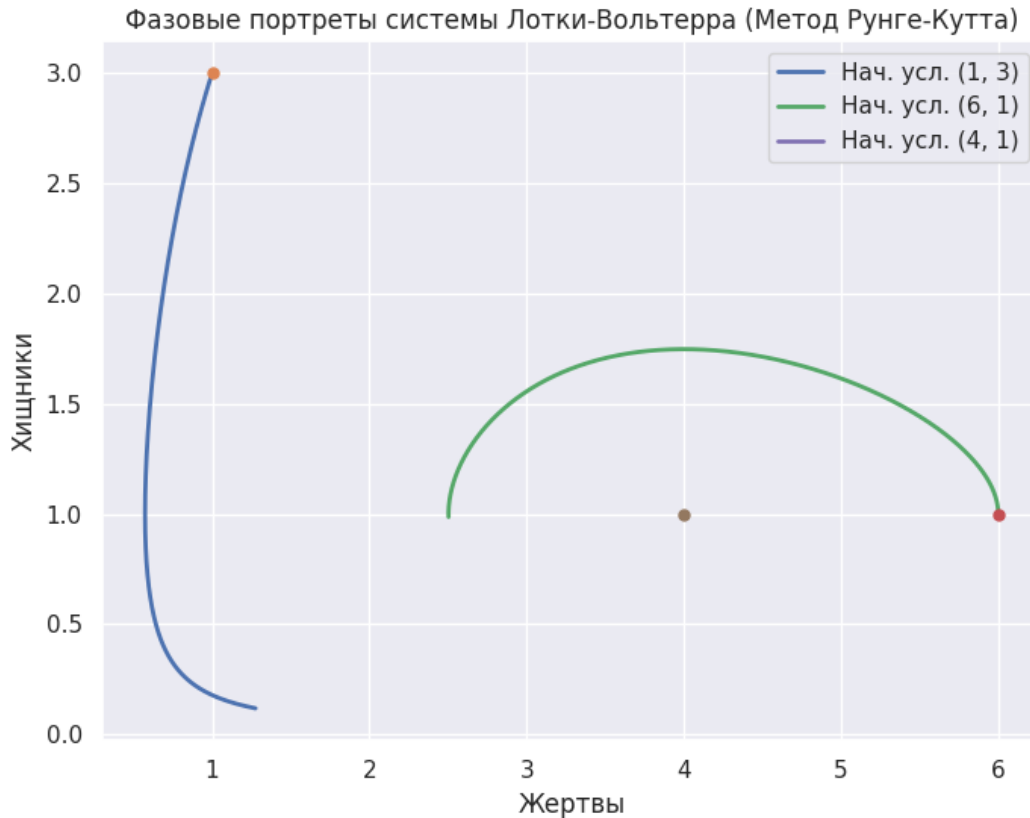


Рисунок 3 — Решения с начальными условиями:  
 (1,3) - синий, (6,1) - зелёный, (4,1) - коричневый, - на временном  
 интервале  $[0,1]$ .

что некоторые популяции достигают крайне малых значений. И для возвращения на прежний уровень требуется больше времени.

Кроме того, рис. 5 демонстрирует свойство седловой точки. Т.к. движение по плоскости происходит против часовой стрелки, то по оси хищников движение будет происходить к началу координат (как и было получено при анализе:  $\lambda_2 < 0$ ), не пересекая ось хищников. Аналогично и для оси жертв - движение от начала координат ( $\lambda_1 > 0$ ).

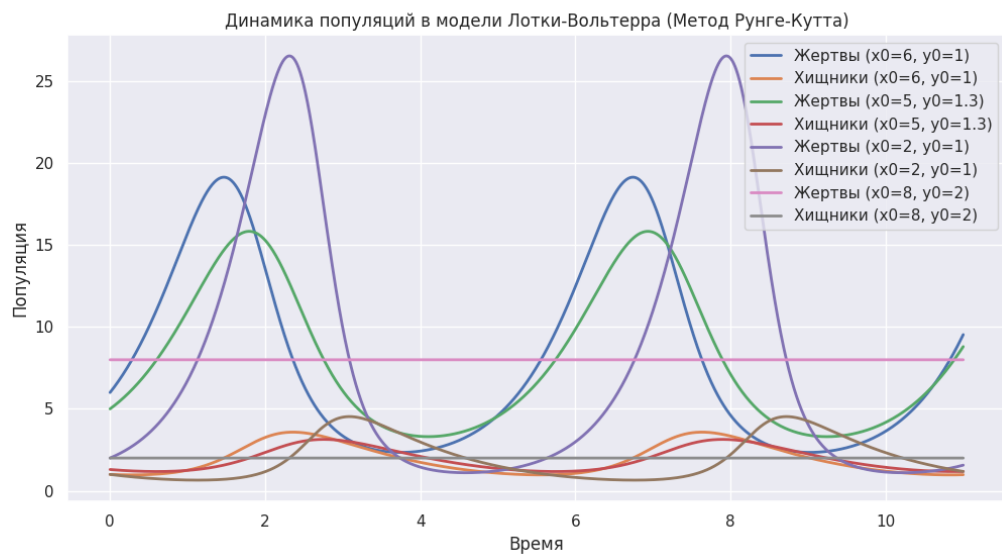


Рисунок 4 — Моделирование для начальных условий:  
 $(6, 1), (5, 1.3), (2, 1), (8, 2) = (x_{bal}, y_{bal})$ .

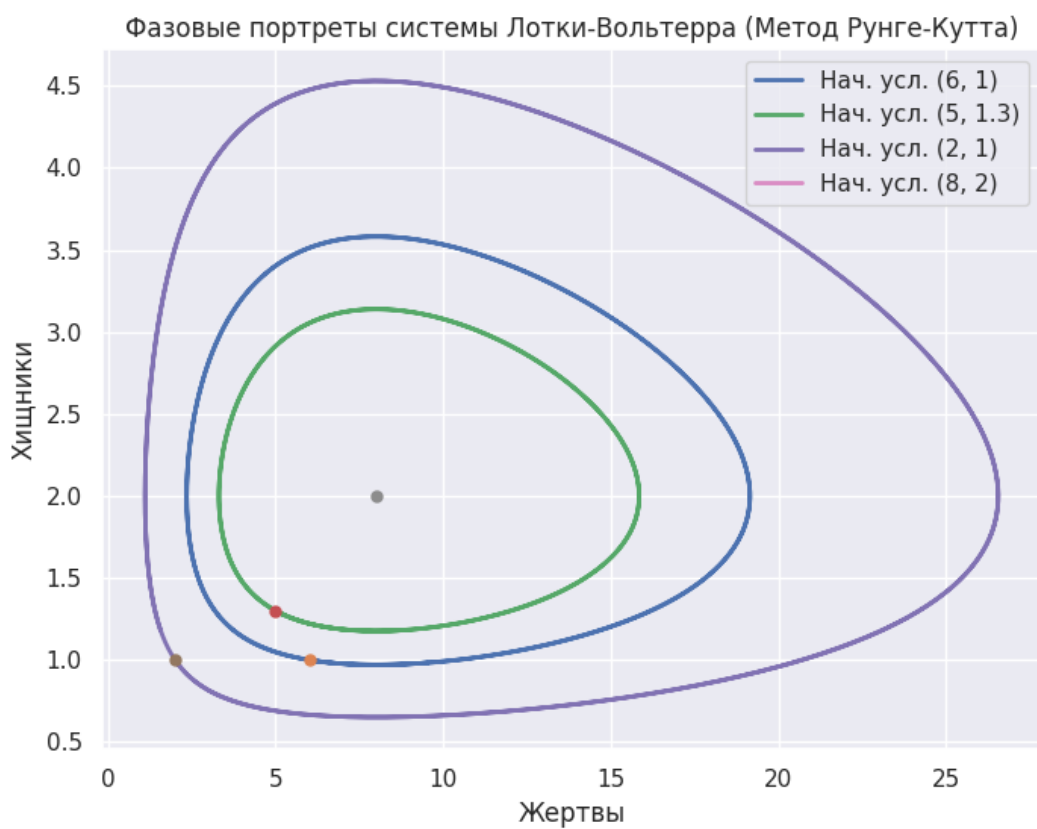


Рисунок 5 — Решения с указанными начальными условиями на временном интервале  $[0, 10]$ .

## 5 Заключение

Была рассмотрена математическая модель конкуренции в системе популяций хищник-жертва (модель Лотки-Вольтерра). Модель является системой из двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Произведен анализ стационарных решений, определены точки равновесия, удовлетворяющие уравнению.

Реализован численный метод решения задачи для различных параметров системы. Численные вычисления подтвердили результаты теоретического анализа, в частности, характер устойчивости найденных точек равновесия.

Также показаны нежизнеспособные примеры, когда популяции вымирают.



## Список использованных источников

1. *Братусь, А.С.* Динамические системы и модели биологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
2. *Н.С., Бахвалов.* Численные методы / Бахвалов Н.С. — Москва: Наука, 1975.