

aboba

# Содержание

Введение . . . . .	3
1 Построение математической модели . . . . .	4
1.1 Постановка задачи . . . . .	4
1.2 Формализация . . . . .	4
1.3 Построение модели . . . . .	5
2 Анализ модели и аналитическое решение двумерного уравнения переноса . . . . .	9
2.1 Математическая постановка задачи . . . . .	9
2.2 Классификация уравнения и анализ характеристик . . . . .	9
2.3 Аналитическое решение при постоянной скорости . . . . .	10
2.4 Выводы по аналитическому анализу . . . . .	10
3 Вычислительные эксперименты . . . . .	12
3.1 Аналитическое решение . . . . .	12
3.2 Программа для ЭВМ . . . . .	13
3.3 Ввех по потоку (upwind) . . . . .	13
3.3.1 Численная схема конечных разностей . . . . .	13
3.3.2 Описание экспериментов . . . . .	13
3.3.3 Реализация алгоритма на Python . . . . .	14
3.3.4 Визуализация результатов . . . . .	14
3.3.5 Вихревое течение . . . . .	14
3.3.6 Сдвиговое течение . . . . .	17
3.3.7 Дивергентное течение . . . . .	20
3.4 Метод Лагранжевых точек . . . . .	22
3.4.1 Описание численного метода . . . . .	22
3.4.2 Реализация на Python . . . . .	22
3.4.3 Описание экспериментов . . . . .	23
3.4.4 Визуализация результатов . . . . .	23
3.4.5 Вихревое течение (Lagrangian) . . . . .	24
3.4.6 Сдвиговое течение (Lagrangian) . . . . .	26
3.4.7 Дивергентное течение (Lagrangian) . . . . .	28
3.5 Выводы . . . . .	30
Заключение . . . . .	31

Список использованных источников . . . . .	32
А Изменение скалярного поля для вихревого поля скоростей (upwind) . . . . .	33
Б Изменение скалярного поля для сдвигового поля скоростей . .	36
В Изменение скалярного поля для дивергентного поля скоростей	39
Г Изменение точек для вихревого поля скоростей (lagrangian) . .	42
Д Изменение точек для сдвигового поля скоростей (lagrangian) . .	45
Е Изменение точек для дивергентного поля скоростей(lagrangian)	48

## **Введение**

Одним из ключевых процессов в природе являются течения в жидких средах. Эти течения играют важную роль в переносе веществ и энергии из одной точки в другую. Примером могут служить течения в реках, морях и океанах, которые способствуют не только транспортировке питательных веществ, но и формированию экосистем.

Кроме того, аналогичные процессы происходят и в газообразной среде. В атмосфере воздух также движется, создавая ветры, которые переносят влагу, пыль и другие частицы. Эти воздушные течения влияют на климатические условия, распределение тепла и осадков, а также на миграцию животных и распространение семян растений.

Рассмотрим подобный перенос с помощью двумерного уравнения переноса.

# 1 Построение математической модели

## 1.1 Постановка задачи

Цель работы:

- Сформулировать модель двумерного переноса.
- Выбрать схемы решения.
- Провести численные эксперименты с различными методами аппроксимации, для понимания их влияния на решение.
- Провести анализ решений.

Дано:

- $(x,y)$  - координаты пространства,
- $t$  - время,
- $u(x,y,t)$  - функция, задающая концентрацию вещества в любой момент времени (удельная масса или энергия (отнесенная к единице объема)).
- $u(x,y,0)$  - поле переноса
- $\vec{v} = (v_x, v_y)$  - скорость переноса ( $const$ ),
- $f(x,y,t)$  - описывает источники и стоки,

## 1.2 Формализация

Будем рассматривать задачу для линейного уравнения переноса.

Для аппроксимации будем использовать два метода: явная схема вверх по потоку и метод Лагранжевых частиц.

### 1.3 Построение модели

Рассмотрим газовую или жидкую сплошную среду. Примем: все точки среды находятся в неравновесном состоянии. Это приводит к возникновению полей концентраций, температур, давлений, а наличие градиентов этих параметров вызывает перенос массы и энергии.

Выделим элемент объема движущейся жидкости в неоднородном поле некоторого потенциала переноса. Под потенциалом переноса  $u$  понимают удельную массу или энергию (отнесенную к единице объема).  $u(x, y, z, t)$  - скалярная величина.

Известно, что скалярная функция  $u$  называется потенциалом векторной функции  $\vec{q}$ , если между ними существует связь вида [1]:

$$\vec{q} = -\nabla u.$$

Далее будем рассматривать связь, как пропорциональность.

Таким образом, поток переносимой субстанции (массы или энергии) является векторной величиной  $\vec{q}$ . В случае переноса массы под потенциалом переноса  $u$  обычно понимают концентрацию компонента в смеси.

В рассматриваемой среде могут существовать, так называемые, объемные (непрерывно распределенные по объему) источники или стоки массы и энергии. В химической технологии под ними подразумеваются химические превращения.

Известно, что процессы тепло- и массообмена осуществляются двумя основными механизмами: молекулярным и конвективным. Молекулярный перенос (диффузия, теплопроводность) возникает в результате стремления системы к термодинамическому равновесию, а конвективный вызывается наличием поля скоростей в жидком или газовом объеме  $V$ .

Следует отметить, что в случае переноса энергии в форме теплоты существует еще и радиантный перенос (тепловое излучение), вклад которого учитывают при достаточно высоких температурах.

Процессы молекулярного переноса массы и энергии описываются соответствующими феноменологическими уравнениями, являющимися, как правило, линейными градиентными законами.

Опуская доказательство, изложенное в [1], можно сделать вывод: в случае молекулярного и конвективного переноса общая плотность потока массы или энергии складывается из двух векторных величин:

$$\vec{q} = \vec{q}_M + \vec{q}_K,$$

где  $\vec{q}_M$  - векторная величина молекулярного переноса,  $\vec{q}_K$  - векторная величина конвективного переноса.

В газовой или жидкой среде, находящейся в движении, выделим произвольный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $A$ . На поверхности

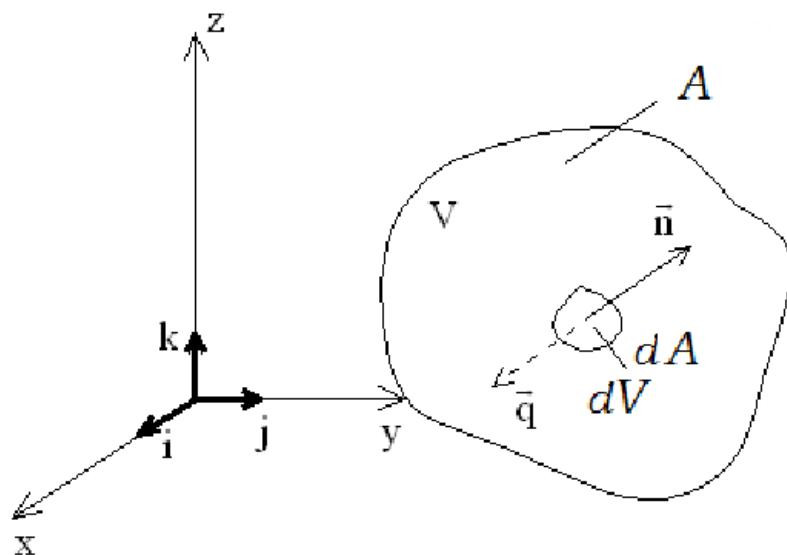


Рисунок 1.1 – Объём серды, ограниченный поверхностью  $A$

$A$  выделим элемент поверхности  $d$  и представим его в векторной форме, умножив на единичный вектор  $\vec{n}$ , нормальный к этому элементу и направленный из объема,  $\vec{n}dA = d\vec{A}$ .

Составим балансовое уравнение:

**Накопление внутри объёма = вход - выход + образование.**

Примем, что в произвольном объеме нет источников субстанции или стоков, т.е. образование равно нулю.

Плотность потока субстанции через площадку  $d\vec{A}$  будет  $-\vec{q}d\vec{A}$ . Знак минут инвертирует потоки (входные становятся положительными, а выходящие - отрицательными).

Результирующий поток будет равен:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A}. \quad (1.1)$$

Физически этот интеграл представляет разницу между входящими и выходящими потоками субстанции через всю поверхность  $A$ .

Если в объёме  $V$  происходит накопление субстанции, то это вызовет изменение потенциала переноса во времени  $\frac{du}{dt}$ , которое для элементарного объёма  $dV$  можно представить как  $\frac{du}{dt}dV$ , а для всего объема  $V$  как интеграл:

$$M = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.2)$$

Приравняв выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$-\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \frac{du}{dt}dV. \quad (1.3)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса [2], дающей преобразование интеграла, взятого по объёму  $V$ , ограниченному поверхностью  $A$ , в интеграл, взятый по этой поверхности, будем иметь:

$$\iint_A \vec{q}d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{q}dV. \quad (1.4)$$

С учётом (1.3), соотношение (1.4) примет вид:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} \right) dV.$$

Интеграл, взятый по произвольному объёму, может быть равен нулю только в случае равенства нулю подынтегральной функции:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0.$$

Полученное выражение есть основное дифференциальное уравнение переноса субстанции – массы или энергии.

Перепишем его для двумерной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,t). \quad (1.5)$$

Также установим начальные и граничные условия:

$$u(0,0,t) = \psi(t), \quad u(x,y,0) = \phi(x), \quad u(0,y,t) = \psi(y,t) \quad u(x,0,t) = \xi(x,t) \quad (1.6)$$

Таким образом, из (1.5) и (1.6) получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,t) \\ u(x,y,0) = \phi(x,y) \\ u(0,y,t) = \psi(y,t) \\ u(x,0,t) = \xi(x,t) \end{cases} \quad (1.7)$$

## 2 Анализ модели и аналитическое решение двумерного уравнения переноса

### 2.1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу переноса скалярной величины  $u(x, y, t)$  в двумерной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  при отсутствии источников и стоков. Модель описывается линейным уравнением переноса в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_x(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + v_y(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

где  $v_x(x, y), v_y(x, y)$  — компоненты заданного векторного поля скорости переноса  $\vec{v}(x, y)$ .

**Начальное условие:**

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.2)$$

**Границные условия** задаются на входящих границах области, то есть там, где вектор скорости направлен внутрь области:

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega^-, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

где  $\partial\Omega^- = \{(x, y) \in \partial\Omega \mid \vec{v}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) < 0\}$  и  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к границе.

### 2.2 Классификация уравнения и анализ характеристик

Уравнение переноса 2.1 относится к классу гиперболических уравнений первого порядка. Оно описывает чистое перемещение вещества без учета диффузии или реакций.

Анализ уравнения удобно производить с использованием метода характеристик. Вдоль характеристик, т.е. кривых в пространстве  $(x, y, t)$ , решение  $u$  сохраняется неизменным.

Пусть  $(x(t), y(t))$  — характеристика, тогда:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y), \quad \frac{du}{dt} = 0. \quad (2.4)$$

Таким образом,  $u$  вдоль траектории движения частиц остается постоянным, и решение можно выразить через начальное распределение  $u_0$ .

### 2.3 Аналитическое решение при постоянной скорости

Рассмотрим частный случай, когда поле скорости постоянно:

$$\vec{v} = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

В этом случае уравнение 2.1 принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.5)$$

Характеристики представляют собой прямые линии:

$$x(t) = x_0 + at, \quad y(t) = y_0 + bt.$$

Поскольку  $u$  сохраняется вдоль этих линий, решение имеет вид:

$$u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt). \quad (2.6)$$

**Пример.** Пусть

$$u_0(x, y) = \exp(-\alpha[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]),$$

где  $\alpha > 0$  — параметр ширины,  $(x_0, y_0)$  — центр гауссианы. Тогда

$$u(x, y, t) = \exp(-\alpha[(x - at - x_0)^2 + (y - bt - y_0)^2]), \quad (2.7)$$

что соответствует движению начального профиля с постоянной скоростью  $(a, b)$ .

### 2.4 Выводы по аналитическому анализу

- Уравнение переноса описывает перемещение профиля функции без изменения формы (в отсутствии источников).
- Решение можно выразить в аналитическом виде в случае постоянной скорости.

- В общем случае решение строится вдоль характеристик, что важно для построения численных схем.
- Важным элементом анализа является определение направлений входа потока — это определяет постановку граничных условий.

### 3 Вычислительные эксперименты

Рассмотрим задачу численного решения уравнения переноса скалярной величины  $u(x, y, t)$  в двумерной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . При отсутствии источников и стоков правая часть уравнения равна нулю ( $f = 0$ ), и задача записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}(x, y, t) \cdot \nabla u = 0, \quad (3.1)$$

где  $\vec{v}(x, y, t) = (v_x, v_y)$  — заданное векторное поле скоростей,  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  — градиент функции  $u$ .

Границные условия принимаются периодическими. Начальное распределение  $u(x, y, 0)$  задается одной из аналитических функций: гауссовой функцией, индикатором круга и т.д.

Для экспериментов зададим следующие условия:

- а) Векторное поле  $\Omega$  задано Декартовым произведением  $[0, 10] \times [0, 10]$
- б) Временной интервал  $t \in [0, 10]$ ;
- в) Шаг по времени  $\Delta t = 0.01$ ;
- г) Все поля стационарные (не зависят от времени);
- д) В случае, если точка в методе лагранжевых частиц выходит за пределы поля, более мы её не перемещаем.

#### 3.1 Аналитическое решение

В случае отсутствия источников ( $f = 0$ ) и известного поля скоростей  $\vec{v}(x, y, t)$ , уравнение 3.1 допускает аналитическое решение вдоль траекторий частиц, заданных уравнением:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (3.2)$$

где  $\vec{x}_0$  — начальная координата частицы. Тогда значение скалярной величины  $u$  вдоль характеристики сохраняется:

$$u(\vec{x}(t), t) = u_0(\vec{x}_0). \quad (3.3)$$

Это решение реализуется в методе лагранжевых частиц.

## 3.2 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для рассчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек numpy (вычисления) и matplotlib (визуализация).

## 3.3 Ввех по потоку (upwind)

### 3.3.1 Численная схема конечных разностей

Пространственная область  $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$  дискретизуется равномерной сеткой с  $n \times n$  узлами. Шаги по пространству:

$$dx = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n - 1}, \quad dy = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{n - 1}.$$

Для аппроксимации производных используются односторонние разности в зависимости от направления скорости (схема upwind):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{dx}, & v_x \geq 0 \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{dx}, & v_x < 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \begin{cases} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{dy}, & v_y \geq 0 \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{dy}, & v_y < 0 \end{cases}$$

Временное интегрирование производится явным способом (метод Эйлера):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left( v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Стабильность обеспечивается условием Куранта–Фридрихса–Леви (CFL):

$$\max \left( \frac{|v_x| \Delta t}{dx}, \frac{|v_y| \Delta t}{dy} \right) \leq 1. \quad (3.4)$$

### 3.3.2 Описание экспериментов

В ходе экспериментов используются различные поля скоростей:

- **Вихревое течение (vortex):**

$$v_x = -\alpha(y - y_c), \quad v_y = \alpha(x - x_c), \quad (3.5)$$

где  $\alpha = 0.1$ ,  $x_c = y_c = 5$ .

- Сдвиговое течение (shear):

$$v_x = 0.7(1 + \sin(y + 0.5)), \quad v_y = 0.15 \cos(x + 0.3). \quad (3.6)$$

- Дивергентное поле (divergance):

$$v_x = -\pi \sin\left(\frac{2\pi x}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{10}\right), \quad v_y = 2\pi \sin\left(\frac{\pi y}{10}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{10}\right). \quad (3.7)$$

Начальные условия представлены в виде кругов или гауссовых распределений.

### 3.3.3 Реализация алгоритма на Python

Программа реализована на языке Python с использованием библиотек `numpy` и `matplotlib`. Структура кода включает:

- `FluidSimulation` — класс с основной логикой метода конечных разностей;
- `VelocityField` — статические методы для задания различных полей скоростей;
- `InitialCondition` — начальные условия;
- `Experiment`, `ExperimentManager` — система организации и запуска экспериментов;
- визуализация полей скоростей и решений.

Все течения зададим стационарными (не зависящими от  $t$ )

### 3.3.4 Визуализация результатов

Результаты каждого эксперимента сохраняются в виде изображений, иллюстрирующих:

- исходное распределение скалярной величины  $u(x,y,0)$ ;
- поле скоростей (стримплот);
- распределение  $u(x,y,t)$  на каждом шаге.

### 3.3.5 Вихревое течение

Поле на рис. 3.1 задаётся уравнением вихря (3.5):

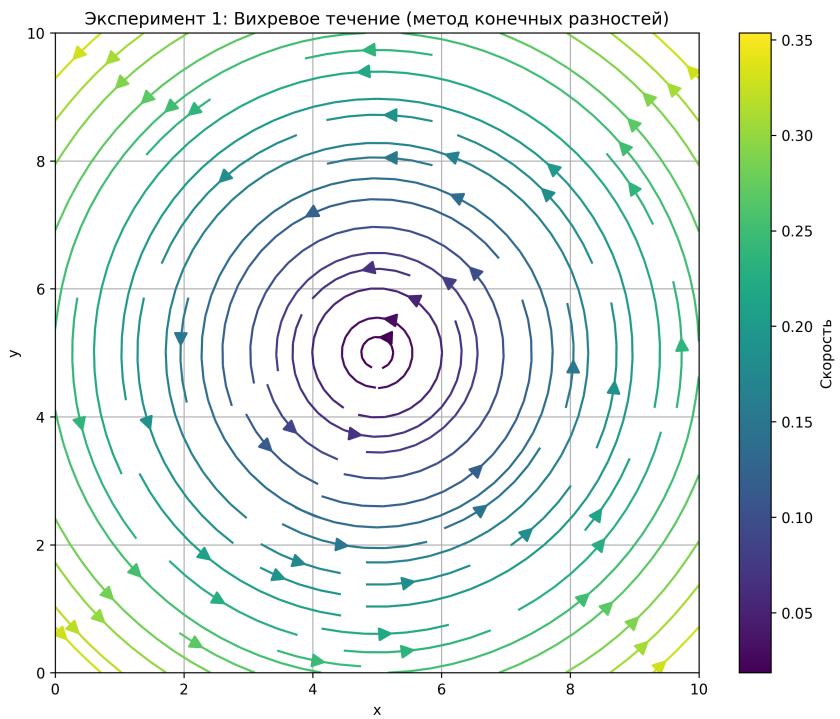


Рисунок 3.1 — Поле скоростей для вихревого течения

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (2.5 , 5) и радиусом 3 (3.2).

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении (A).

Финальное распределение представлено на рис. 3.3.

Как можно видеть, начальное распределение переместилось по направлению поля. Но его границы размылись. Этот эффект вызван особенностью вычислительной схемы.

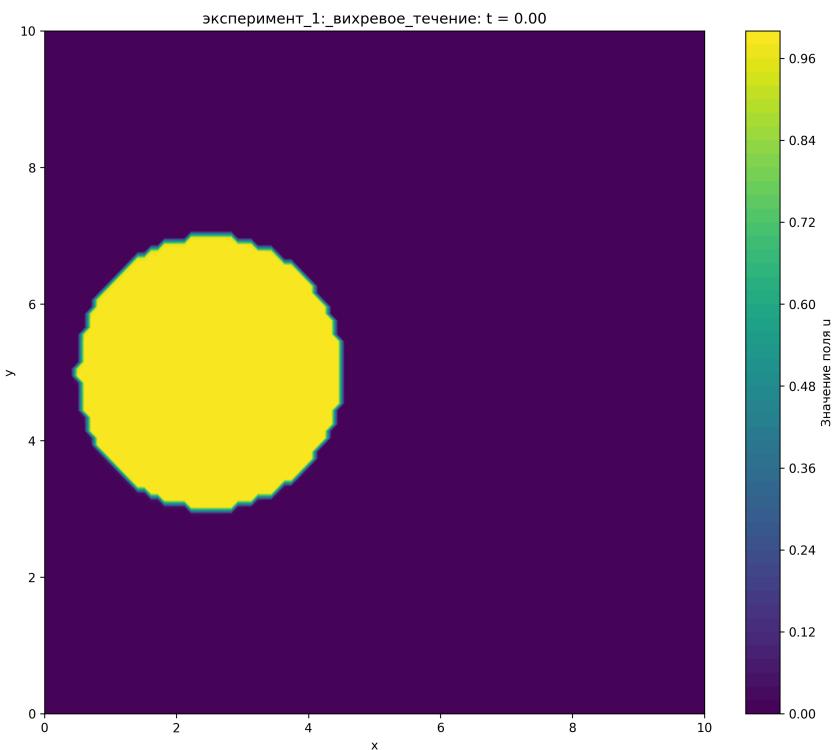


Рисунок 3.2 — Скалярное поле  $u(x,y,t)$  в начальный момент времени ( $t = 0$ ) (вихревое течение)

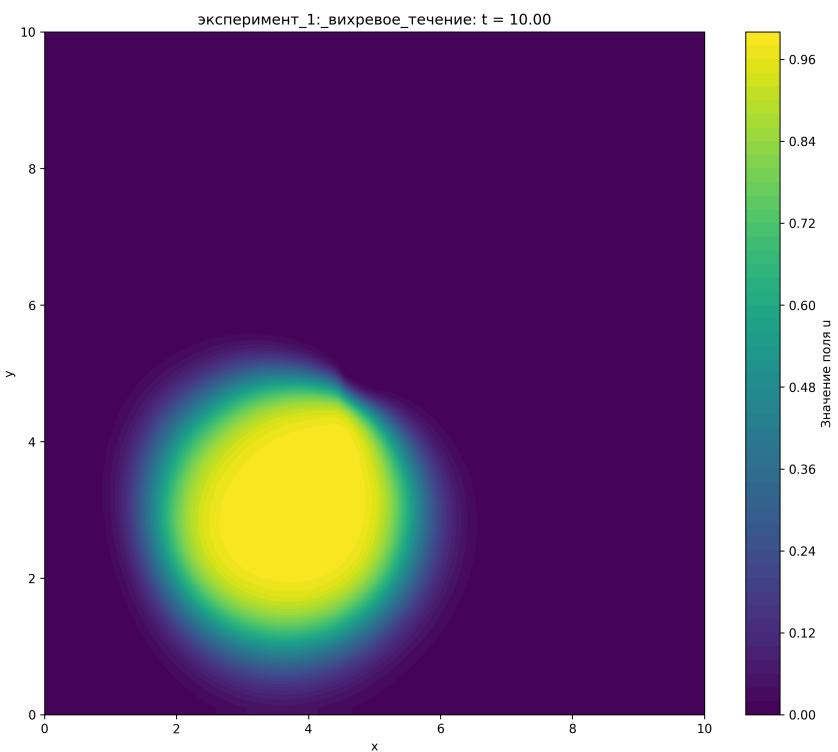


Рисунок 3.3 — Скалярное поле  $u(x,y,t)$  в финальный момент времени ( $t = 10$ ) (вихревое течение)

### 3.3.6 Сдвиговое течение

Поле на рис. 3.4 задаётся уравнением поля (3.6)

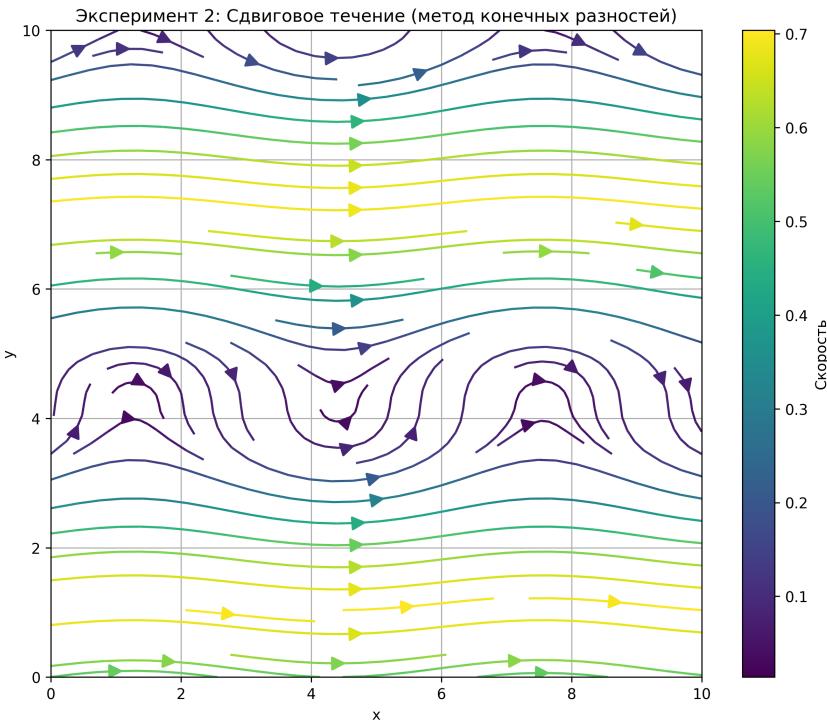


Рисунок 3.4 — Поле скоростей для сдвигового течения

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (5 , 5) и радиусом 2 ( рис. 3.5).

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении (приложение Б).

Финальное распределение представлено на рис. 3.6.

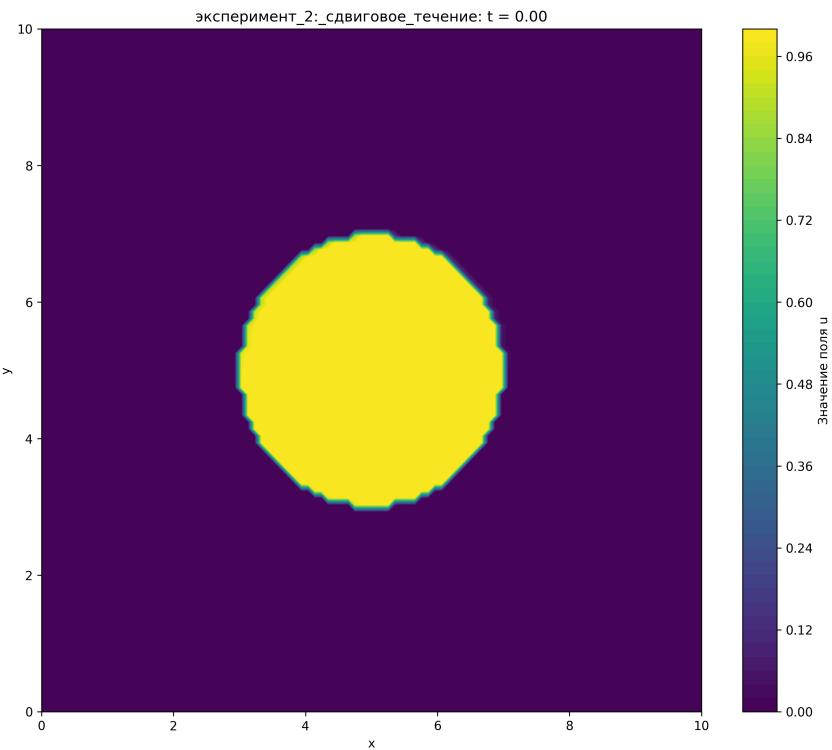


Рисунок 3.5 — Скалярное поле  $u(x,y,t)$  в начальный момент времени ( $t = 0$ ) (вихревое течение)

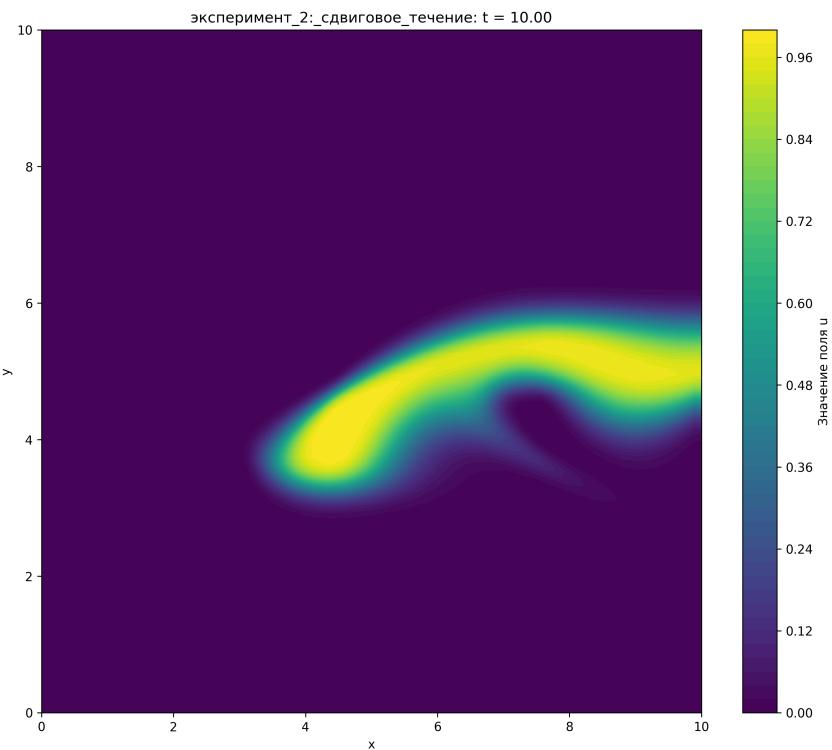


Рисунок 3.6 — Скалярное поле  $u(x,y,t)$  в финальный момент времени ( $t = 10$ ) (вихревое течение)

В этом эксперименте также наблюдается перенос по направлению поля. Границы всё также размыты.

### 3.3.7 Дивергентное течение

Поле на рис. 3.7 задаётся уравнением поля (3.7).

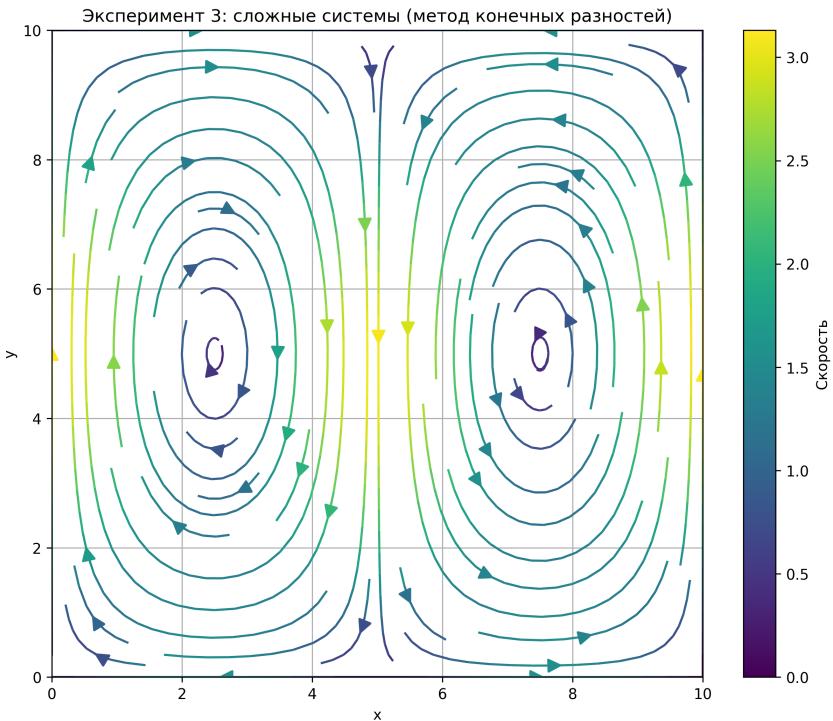


Рисунок 3.7 — Поле скоростей для Дивергентного течения

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (5 , 5) и радиусом 2 ( рис. 3.8).

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении B.

Финального распределение представлено на рис. 3.9.

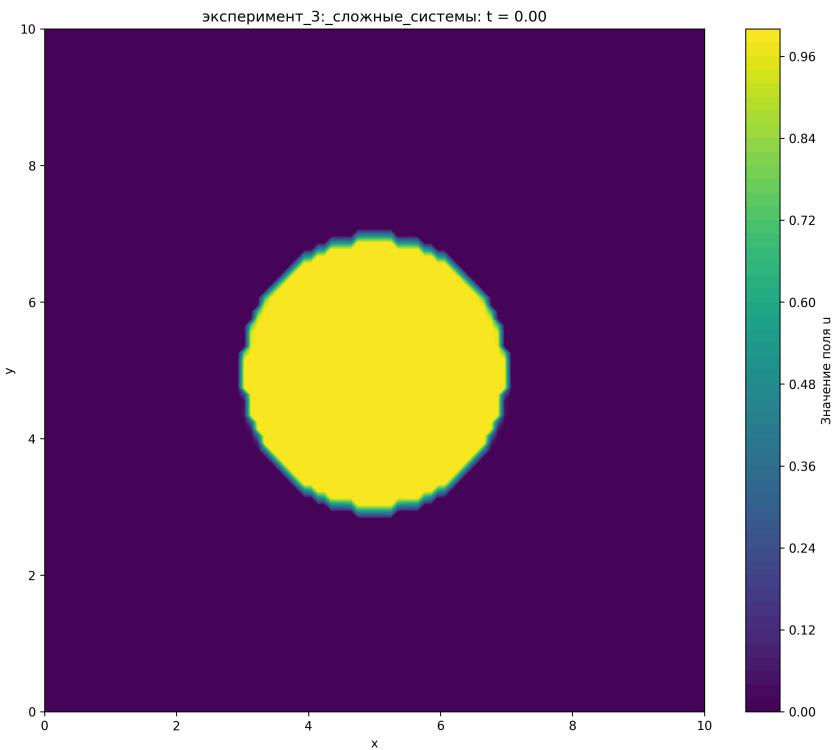


Рисунок 3.8 — Скалярное поле  $u(x,y,t)$  в начальный момент времени ( $t = 0$ ) (дивиргентное поле)

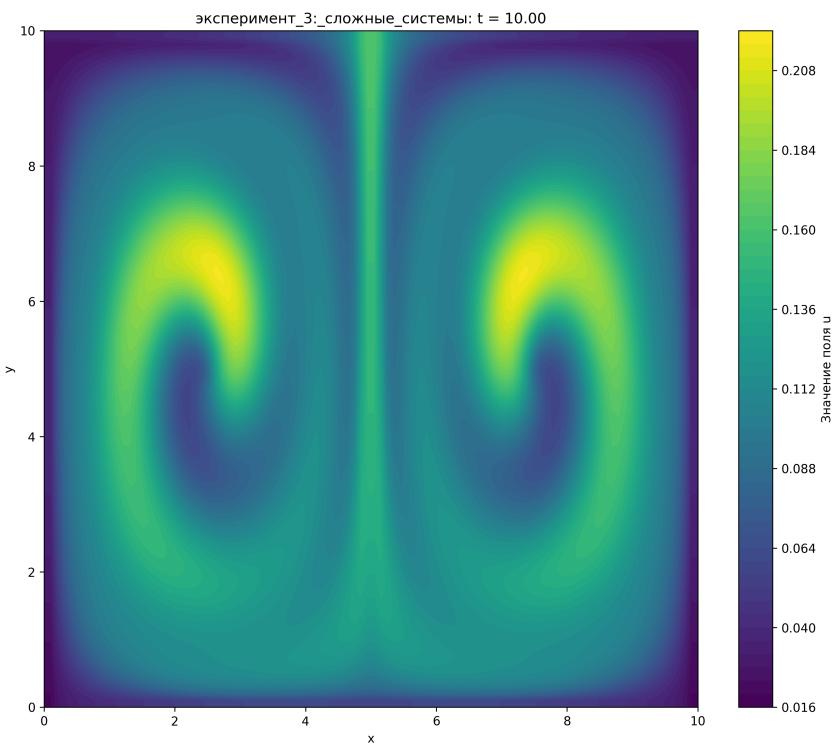


Рисунок 3.9 — Скалярное поле  $u(x,y,t)$  в финальный момент времени ( $t = 10$ ) (дивергентное поле)

## 3.4 Метод Лагранжевых точек

### 3.4.1 Описание численного метода

В отличие от метода конечных разностей, лагранжев подход отслеживает движение частиц, несущих скалярную величину  $u$ , по траекториям, определяемым полем скоростей. Основная идея заключается в решении задачи Коши для системы ОДУ:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

где  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  — положение частицы во времени, а  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  — заданное поле скоростей.

Частицы не взаимодействуют и перемещаются независимо друг от друга. Величина  $u$  сохраняется вдоль траектории:

$$\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u(\mathbf{x}(t), t) = u(\mathbf{x}_0, 0).$$

Для численного интегрирования используется метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{v}\left(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{v}\left(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для отрисовки скалярных полей используется кубическая интерполяция.

### 3.4.2 Реализация на Python

Программа реализована на языке Python с использованием библиотек `numpy`, `matplotlib`, `scipy`. Структура кода включает:

- `ParticleSet` — класс, отвечающий за координаты и значения частиц;

- `VelocityField` — статические методы для различных полей скоростей;
- `Integrator` — численные методы интегрирования траекторий (Euler, RK4);
- визуализацию движения частиц и их распределений;
- построение плотности  $u(x, y, t)$  через биннинг в сетку.

### 3.4.3 Описание экспериментов

В экспериментах используются те же три стационарных поля скоростей (3.5), (3.6), (3.7). Начальные положения частиц задаются равномерно либо случайно в пределах области  $\Omega = [0, 10]^2$ . Начальные значения  $u$  задаются по формуле:

$$u(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c\| \leq r, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $\mathbf{x}_c$  — центр круга,  $r$  — радиус.

### 3.4.4 Визуализация результатов

Для каждого эксперимента строятся:

- карта начального положения и значений частиц;
- стримплот поля скоростей;
- финальное распределение частиц с учётом перемещения;
- по желанию: реконструированная плотность скалярной величины на сетке.

### 3.4.5 Вихревое течение (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.1, задаётся уравнением вихря (3.5)).

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (2.5, 5) и радиусом 3 (3.10).

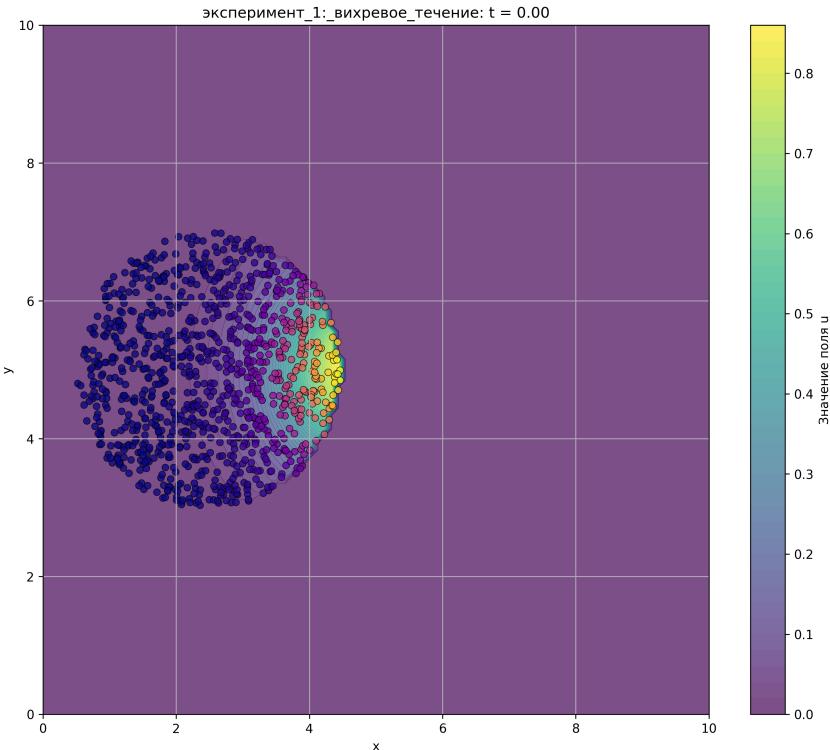


Рисунок 3.10 — Начальное распределение частиц (вихревое поле)

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении Г.

Финального распределение представлено на рис. 3.11. Траектории 1000 точек представлены на рис. 3.12

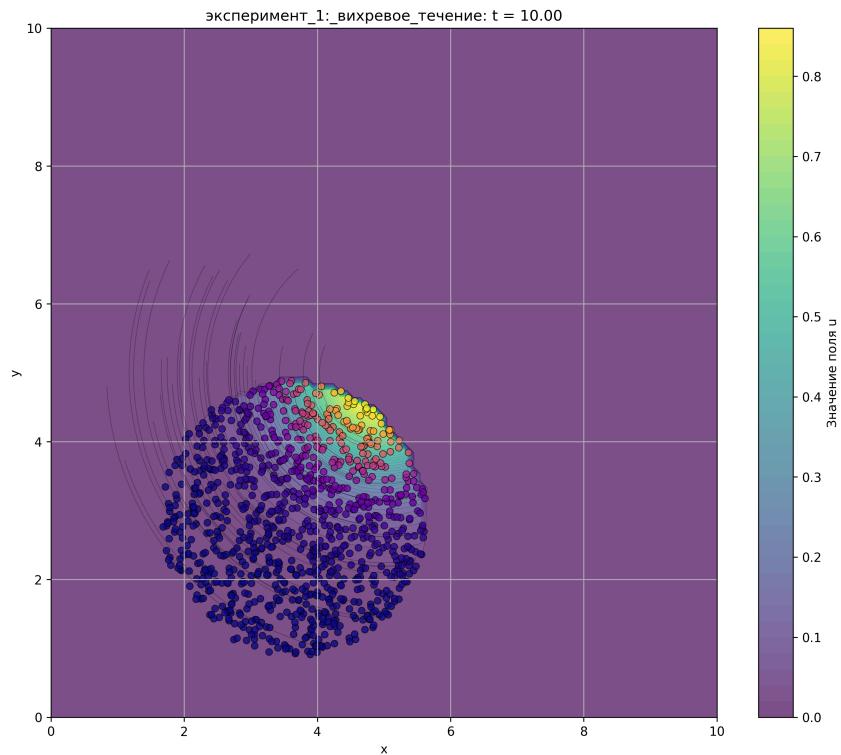


Рисунок 3.11 — Финальное распределение частиц (вихревое поле)

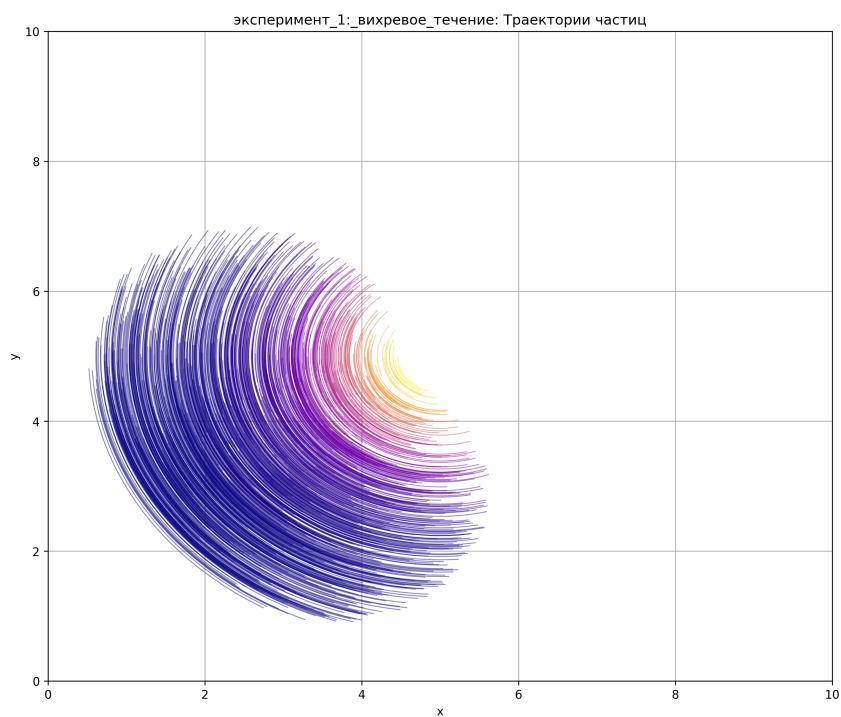


Рисунок 3.12 — Траектория частиц (вихревое поле)

### 3.4.6 Сдвиговое течение (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.4, задаётся уравнением вихря (3.6).

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (5, 5) и радиусом 2 (3.13). Дополнительно добавлена область вокруг распределения в виде квадрата для отрисовки поведения среды.

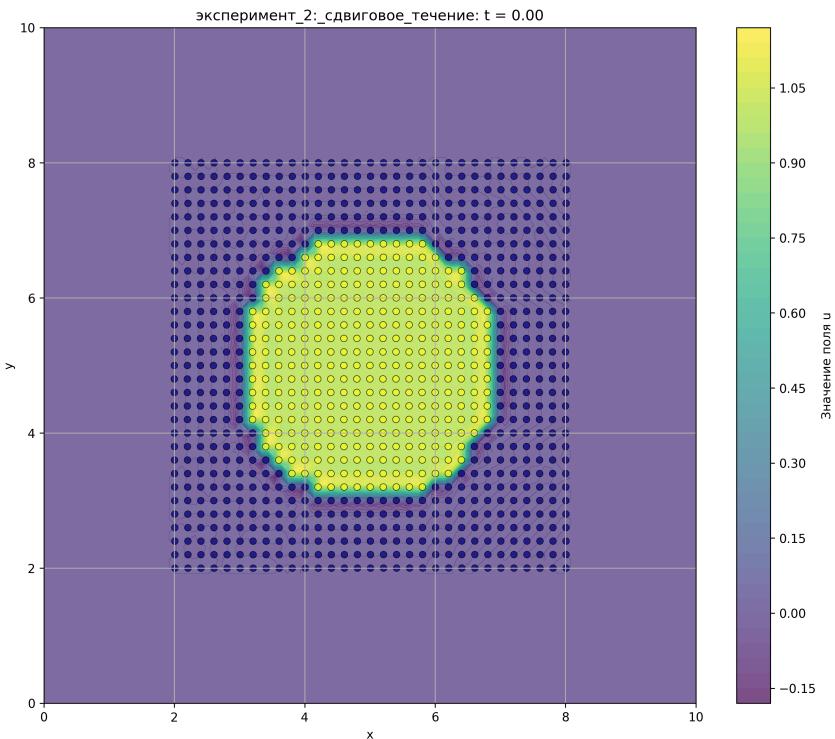


Рисунок 3.13 — Начальное распределение частиц (сдвиговое поле)

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении Д.

Финального распределение представлено на рис. 3.14. Траектории 1000 точек представлены на рис. 3.15

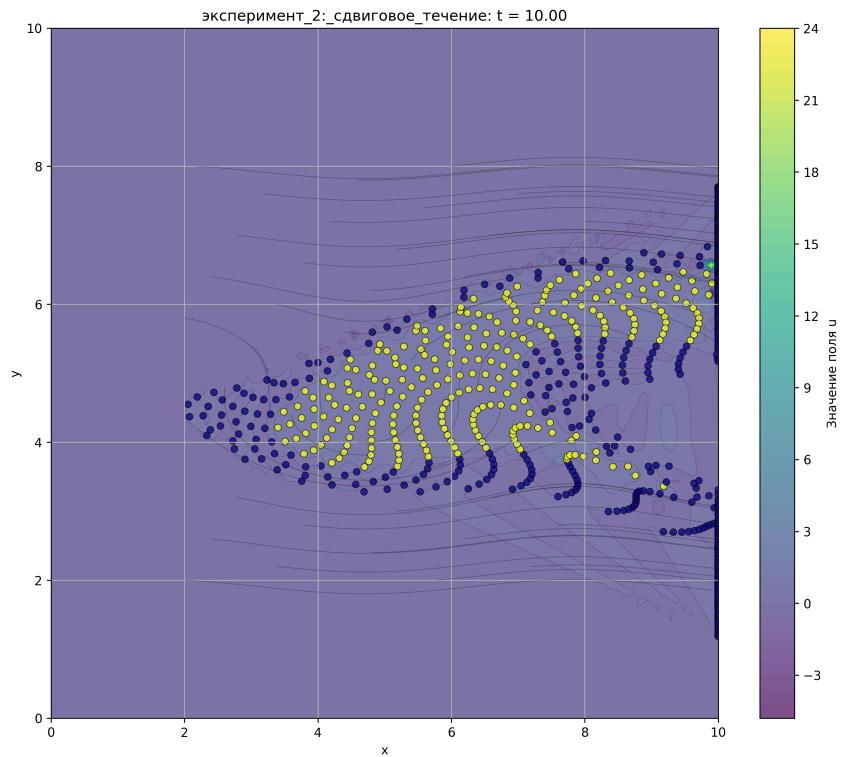


Рисунок 3.14 — Финальное распределение частиц (сдвиговое поле)

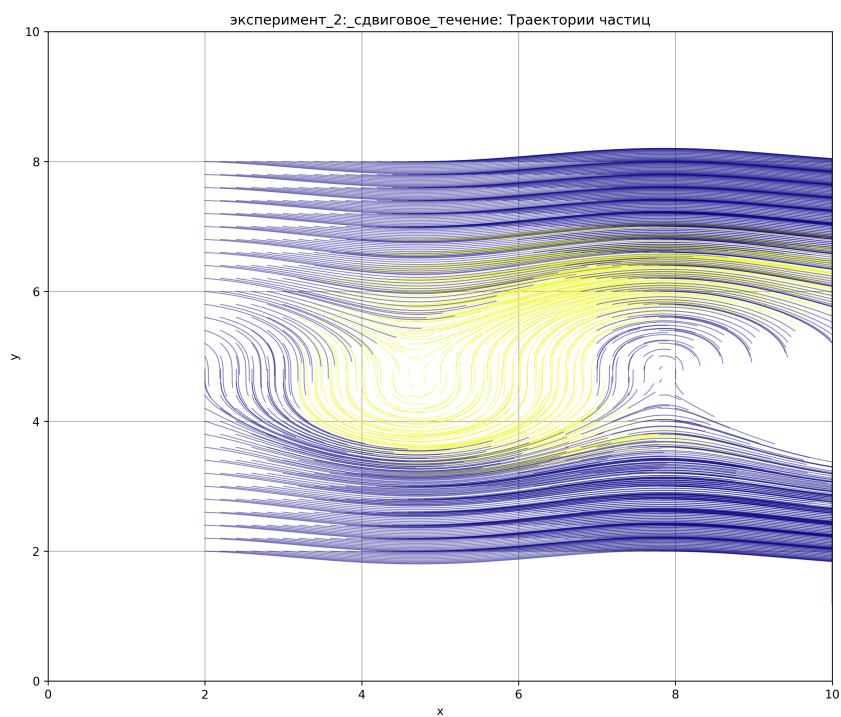


Рисунок 3.15 — Траектории частиц (сдвиговое поле)

### 3.4.7 Дивергентное течение (Lagrangian)

Поле используем то же, что и в эксперименте с разделёнными разностями (рис. 3.7, задаётся уравнением вихря (3.7).

В качестве начального распределения, используется круг с центром в точке (5, 5) и радиусом 2 (3.16). Дополнительно добавлена область вокруг распределения в виде квадрата для отрисовки поведения среды.

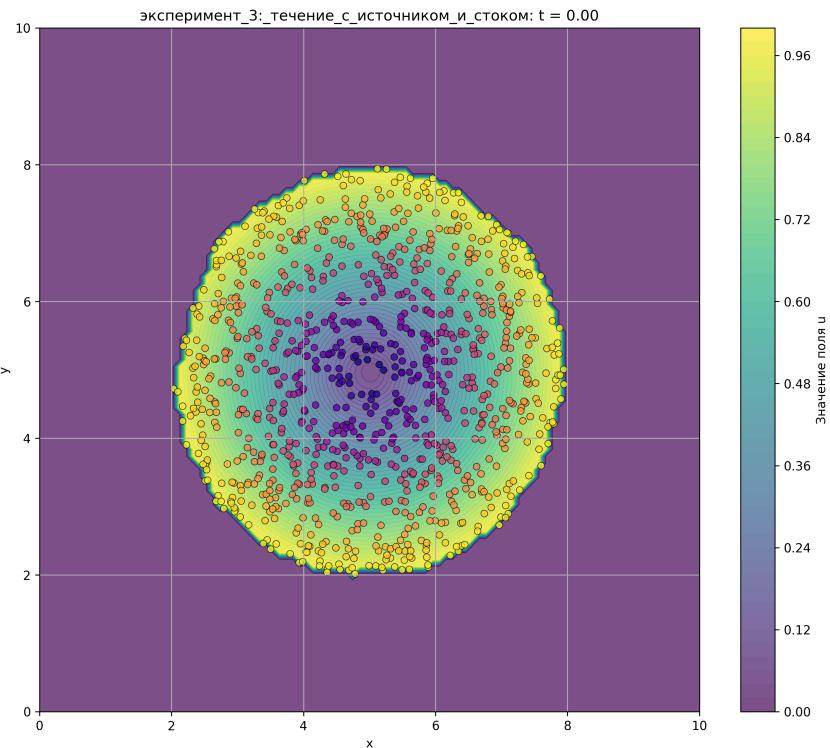


Рисунок 3.16 — Начальное распределение частиц (дивергентное поле)

Изображения промежуточных ходов представлены в приложении E.

Финального распределение представлено на рис. 3.17. Траектории 1000 точек представлены на рис. 3.18

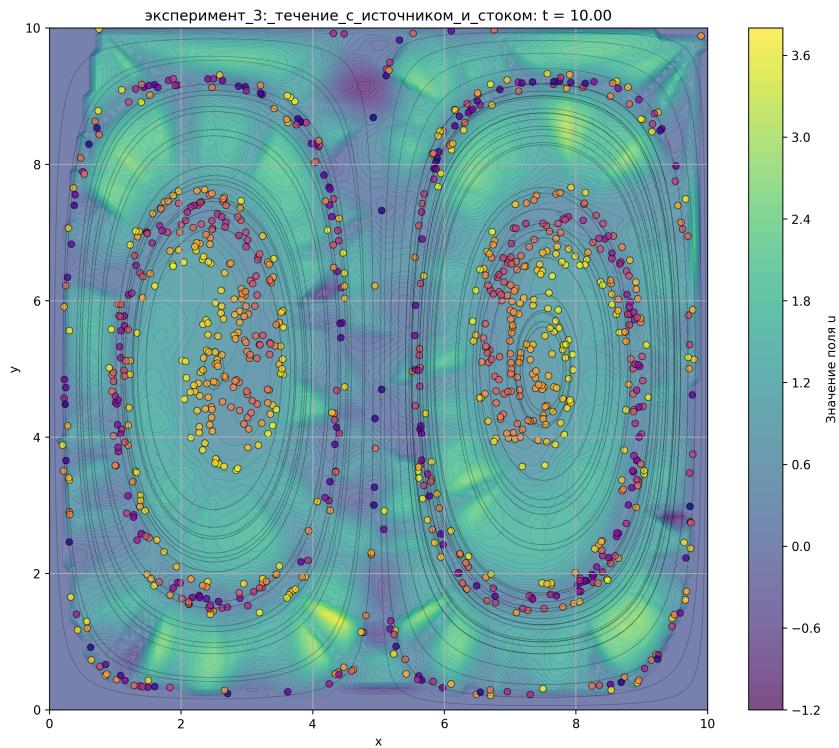


Рисунок 3.17 – Финальное распределение частиц (дивергентное поле)

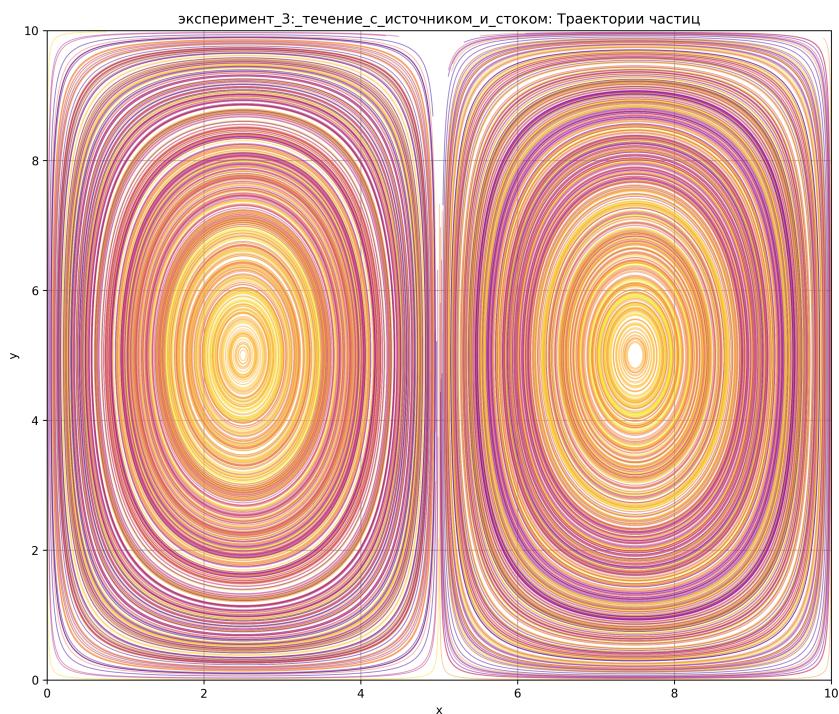


Рисунок 3.18 – Траектории частиц (дивергентное поле)

### 3.5 Выводы

Метод конечных разностей позволяет качественно решать задачу переноса при условии соблюдения критерия CFL. Использование upwind-схем позволяет избежать осцилляций, но при этом может вызывать численное диффузионное размытие. Метод легко масштабируется и хорошо подходит для моделирования задач с заданным полем скоростей.

Метод лагранжевых частиц обеспечивает высокую точность отслеживания переноса вещества или других скалярных величин в заданном поле скоростей. Вместо аппроксимации функции на фиксированной сетке, как в методе конечных разностей, метод отслеживает движение частиц по траекториям, определяемым полем скоростей. Это позволяет избежать численного диффузионного размытия и сохранять чёткие границы. Метод особенно эффективен при моделировании переноса в сильно неоднородных или турбулентных потоках.

Также отметим, что скорость вычислений этих методов кратно разные: если метод вверх по потоку занимает в среднем 54 сек. на эксперимент, то метод лагранжевых частиц - уже 23.5 сек.

## **Заключение**

Была сформулирована и проанализирована модель двумерного переноса.

Представлена программа для ЭВМ, которая вычисляет решения задачи. В неё вошли метод лагранжевых частиц и конечно-разностный метод вверх по потоку.

Были проведены и проанализированы численные эксперименты с использованием разных схем решения системы с разными начальными условиями и полями.

## **Список использованных источников**

1. *Alonso, M. Physics* / M. Alonso, E.J. Finn. — Addison-Wesley, 1992.
2. *Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа: Учебник. Часть 1* / Г. М. Фихтенгольц. Учебники для вузов. Специальная литература. — 10 изд. — Лань, 2015. — С. 448.

## Приложение А Изменение скалярного поля для вихревого поля скоростей (upwind)

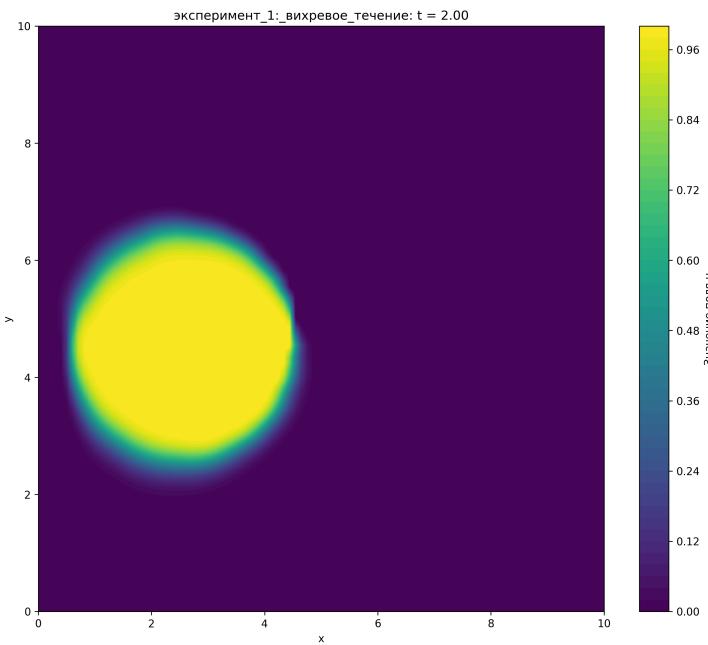


Рисунок А.1 — Скалярное поле в момент времени  $t = 2$

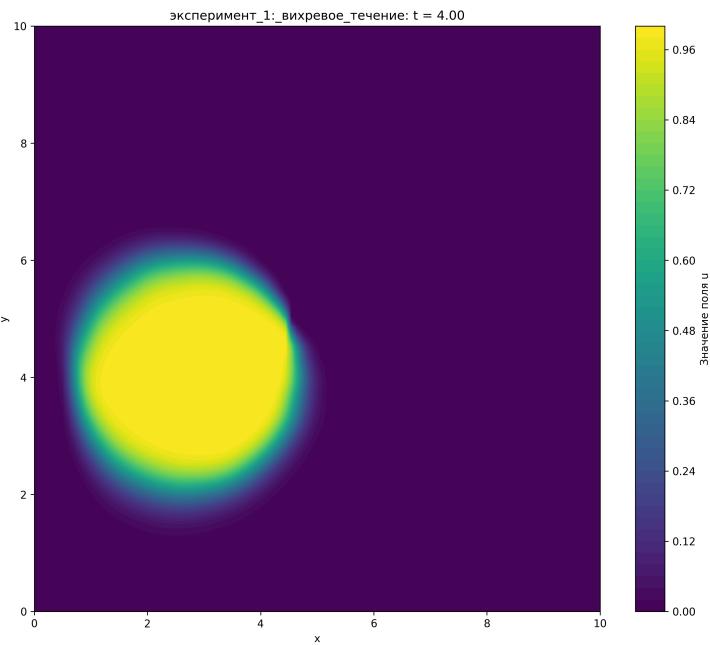


Рисунок А.2 — Скалярное поле в момент времени  $t = 4$

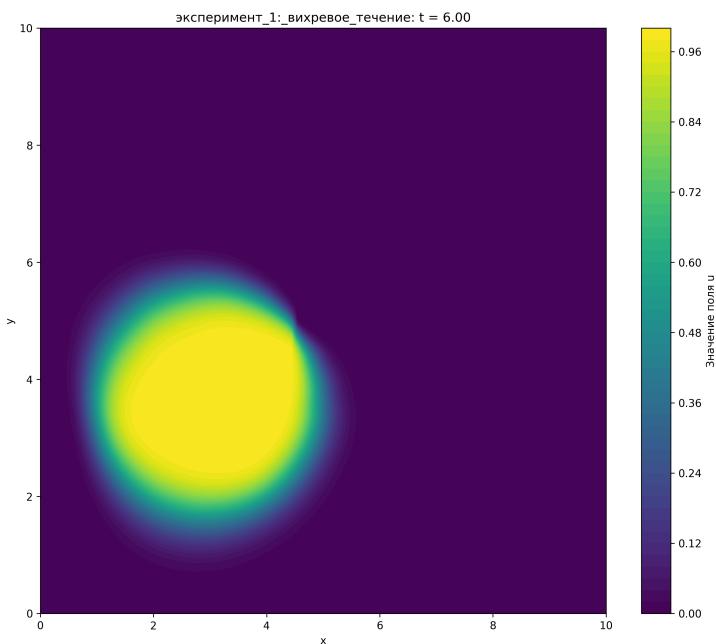


Рисунок А.3 — Скалярное поле в момент времени  $t = 6$

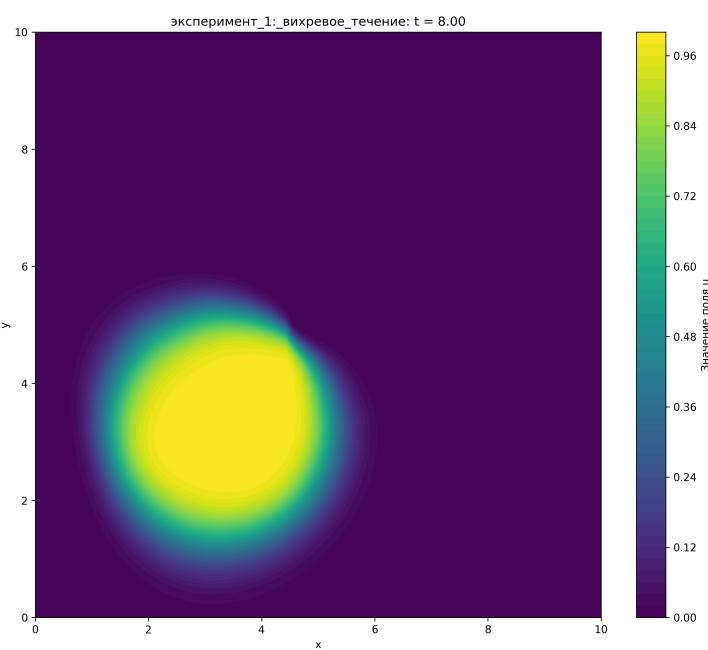


Рисунок А.4 — Скалярное поле в момент времени  $t = 8$

## Приложение Б Изменение скалярного поля для сдвигового поля скоростей

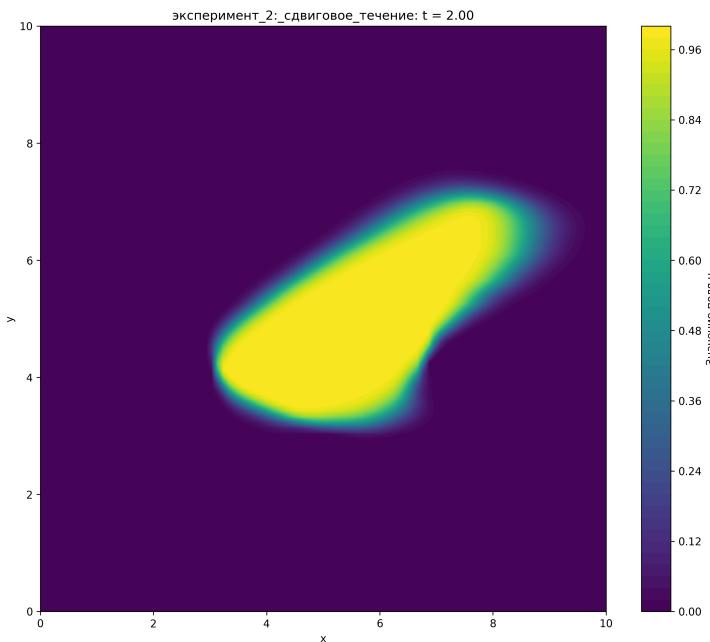


Рисунок Б.1 — Скалярное поле в момент времени  $t = 2$

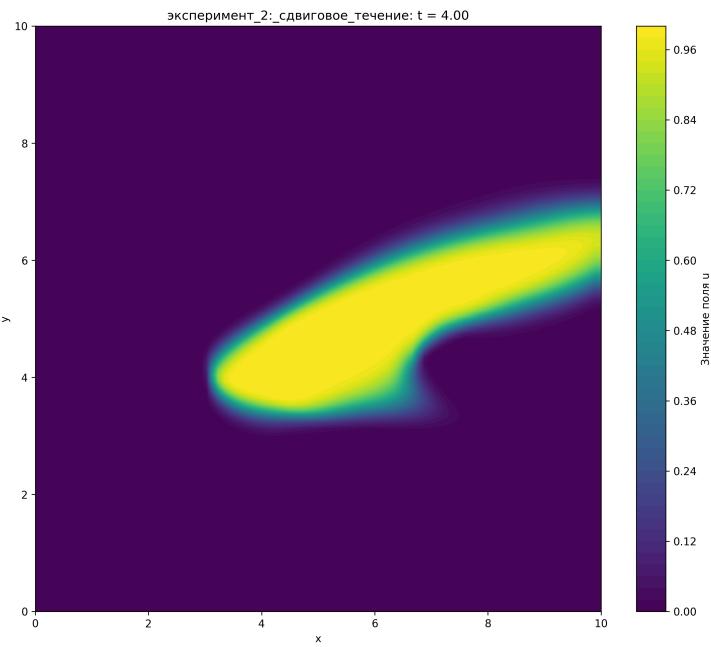


Рисунок Б.2 — Скалярное поле в момент времени  $t = 4$

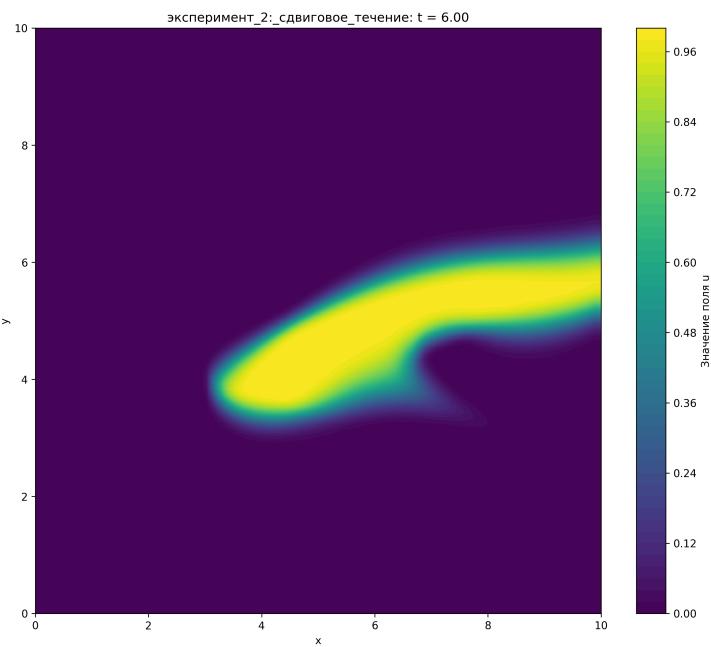


Рисунок Б.3 — Скалярное поле в момент времени  $t = 6$

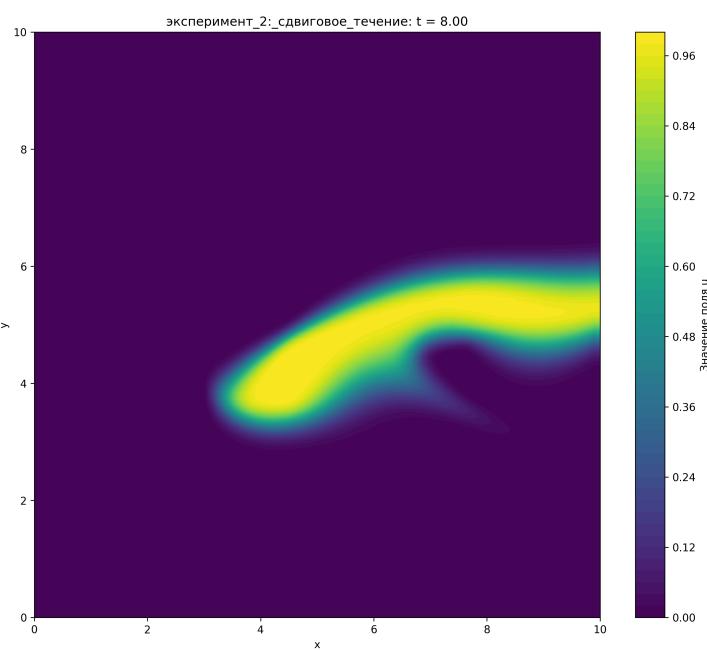


Рисунок Б.4 — Скалярное поле в момент времени  $t = 8$

## Приложение В Изменение скалярного поля для дивергентного поля скоростей

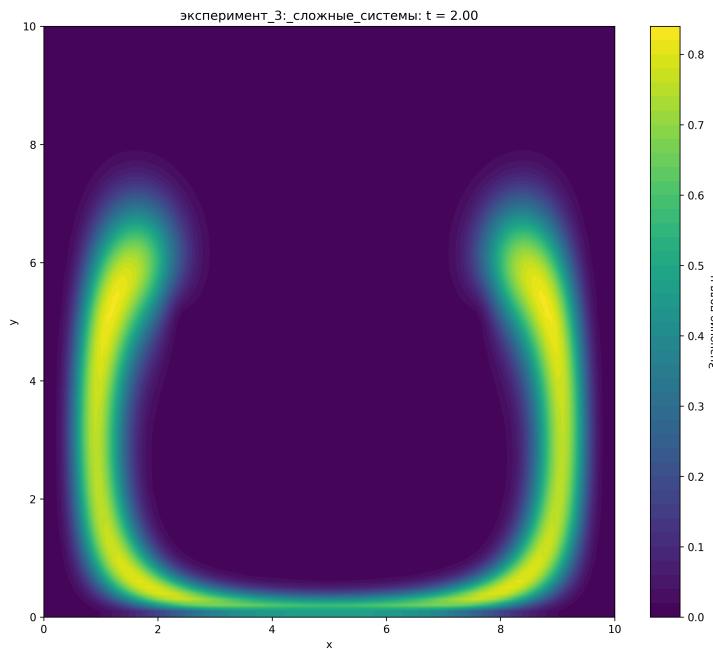


Рисунок В.1 — Скалярное поле в момент времени  $t = 2$

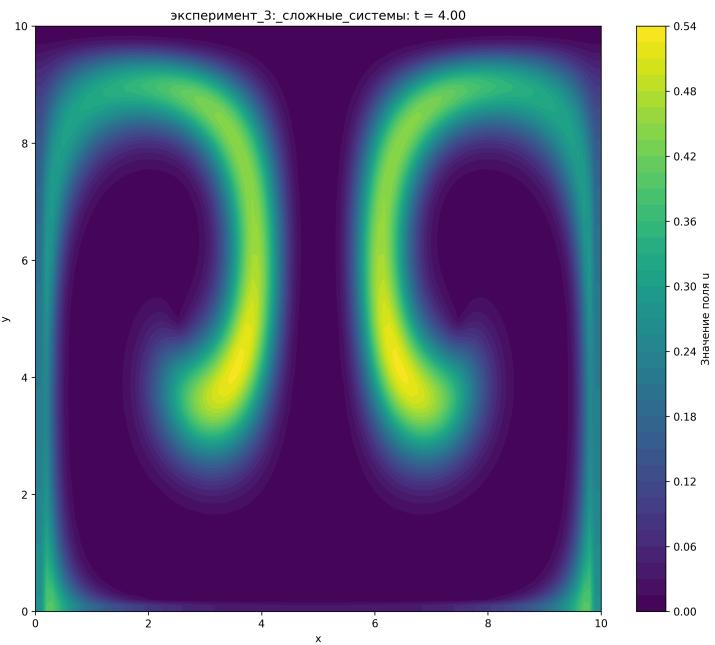


Рисунок B.2 — Скалярное поле в момент времени  $t = 4$

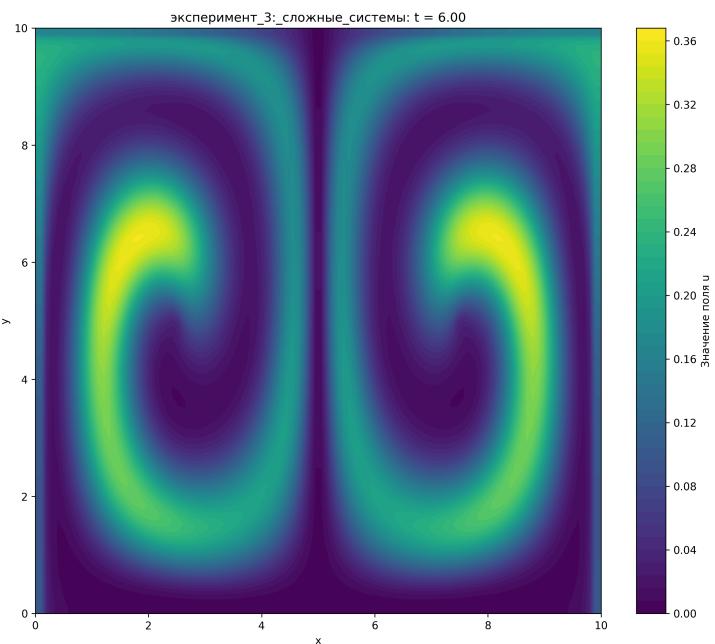


Рисунок B.3 — Скалярное поле в момент времени  $t = 6$

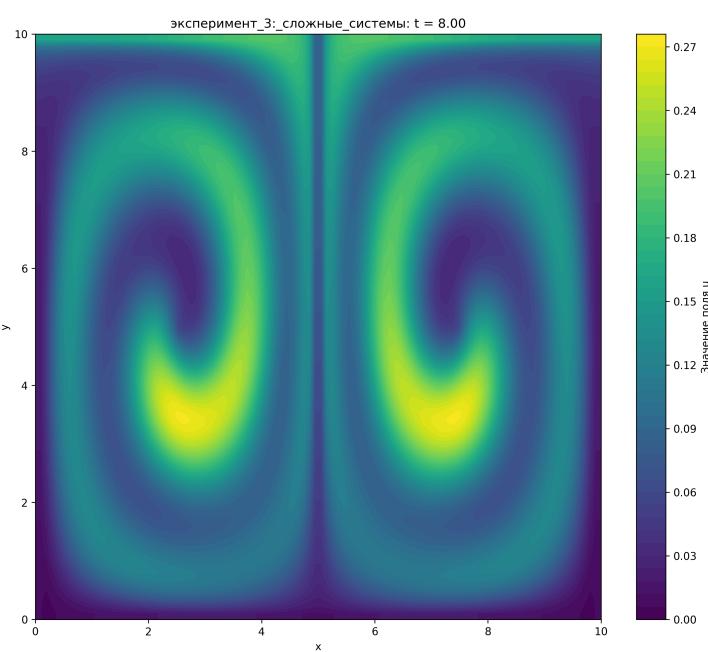


Рисунок B.4 — Скалярное поле в момент времени  $t = 8$

## Приложение Г Изменение точек для вихревого поля скоростей (lagrangian)

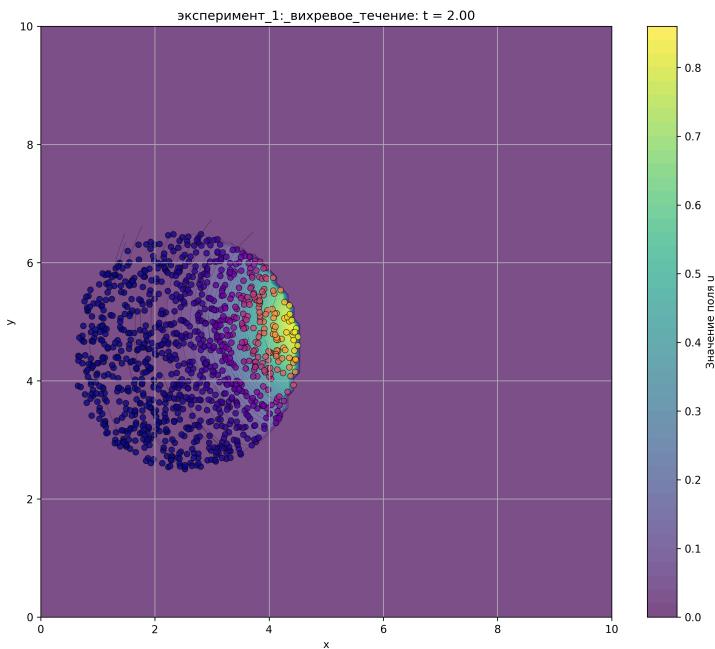


Рисунок Г.1 — Скалярное поле в момент времени  $t = 2$

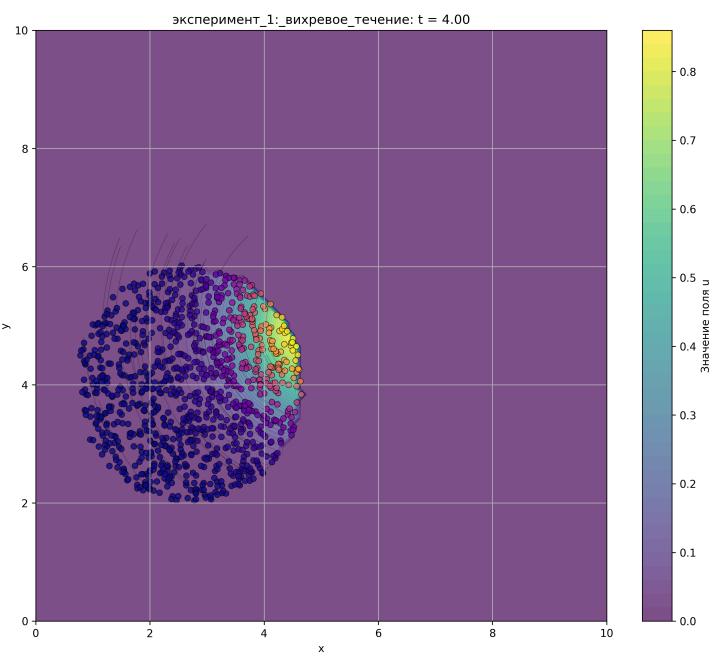


Рисунок Г.2 — Скалярное поле в момент времени  $t = 4$

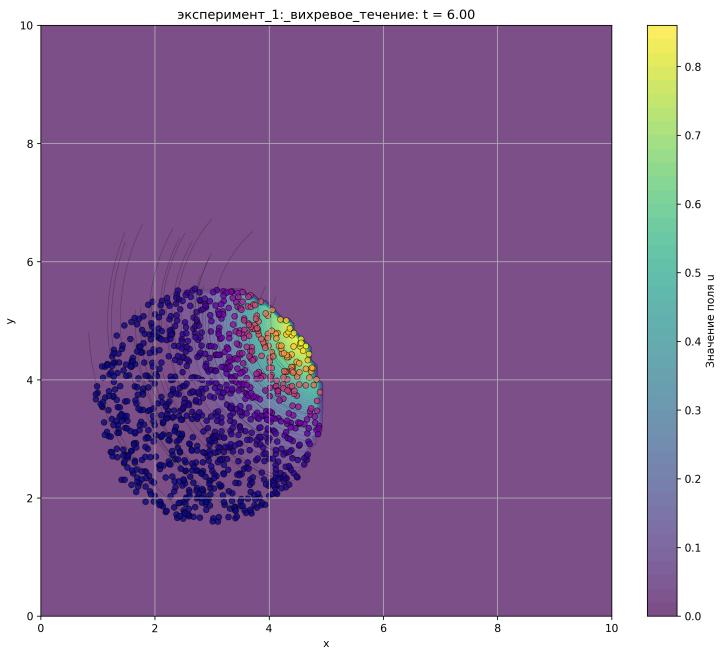


Рисунок Г.3 — Скалярное поле в момент времени  $t = 6$

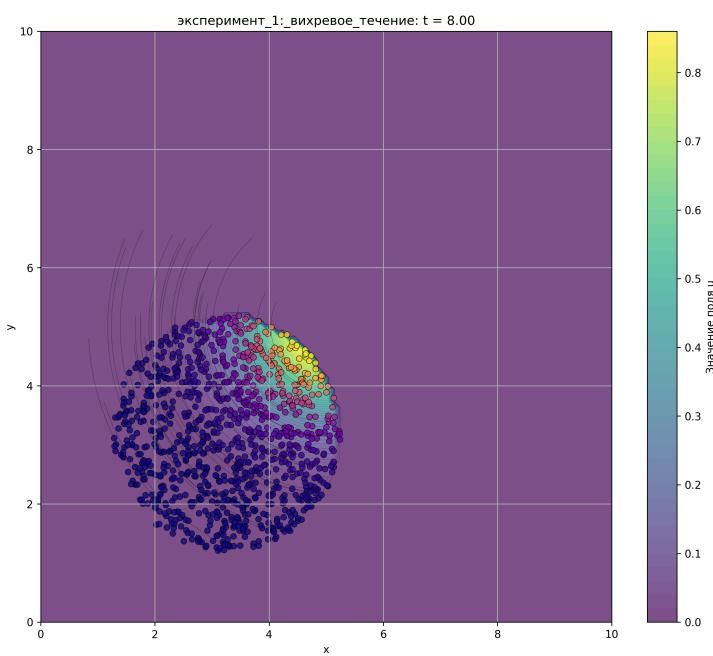


Рисунок Г.4 — Скалярное поле в момент времени  $t = 8$

Приложение Д Изменение точек для сдвигового поля скоростей (lagrangian)

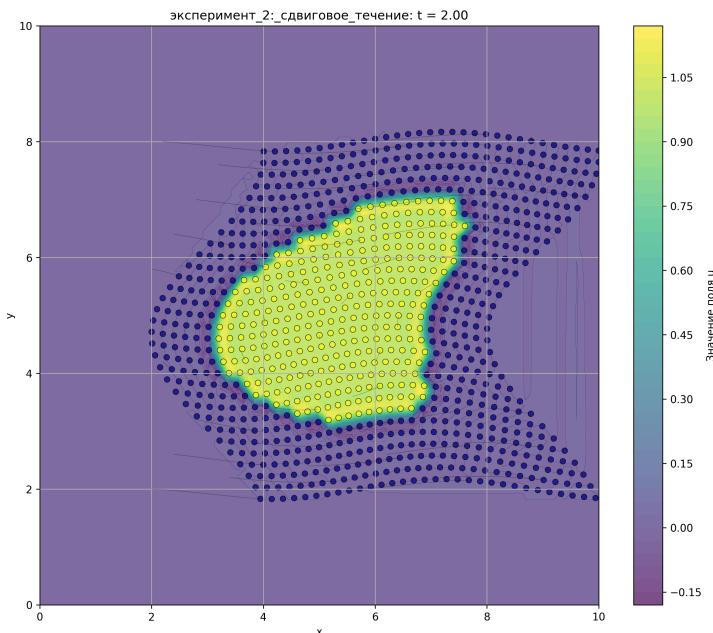


Рисунок Д.1 — Скалярное поле в момент времени  $t = 2$

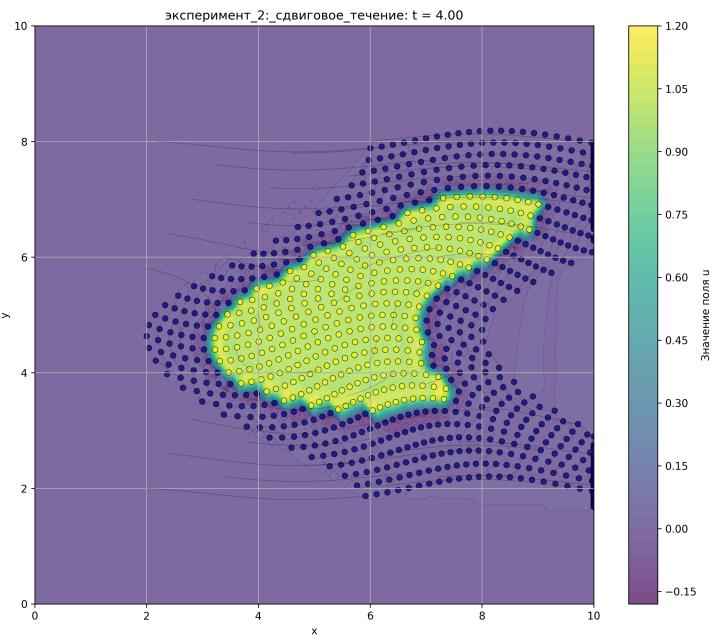


Рисунок Д.2 — Скалярное поле в момент времени  $t = 4$

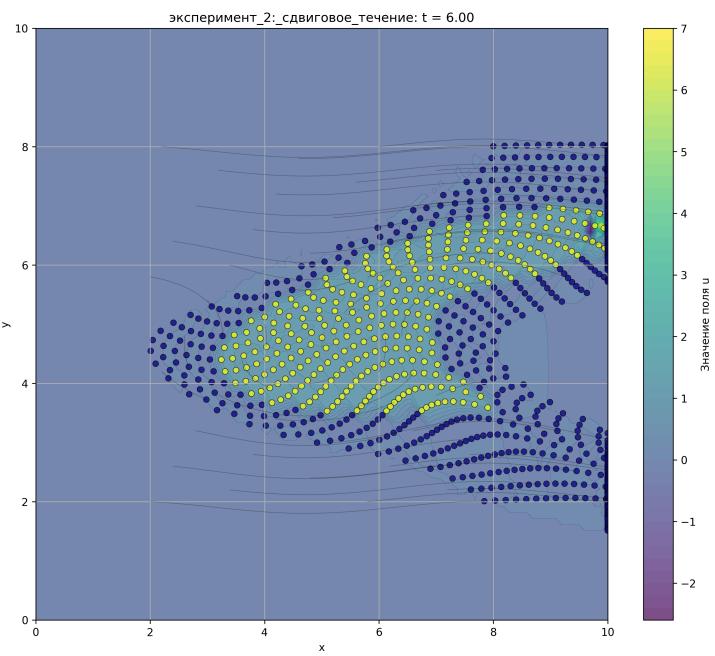


Рисунок Д.3 — Скалярное поле в момент времени  $t = 6$

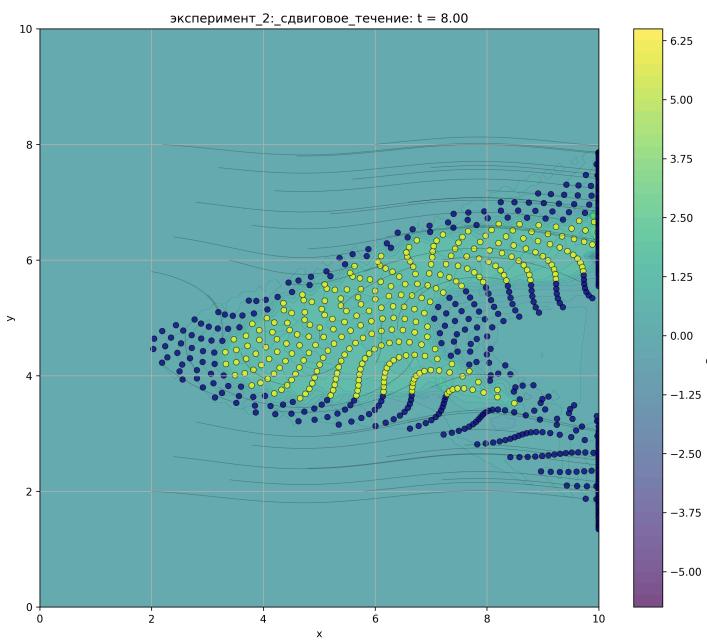


Рисунок Д.4 — Скалярное поле в момент времени  $t = 8$

Приложение E Изменение точек для дивергентного поля скоростей(lagrangian)

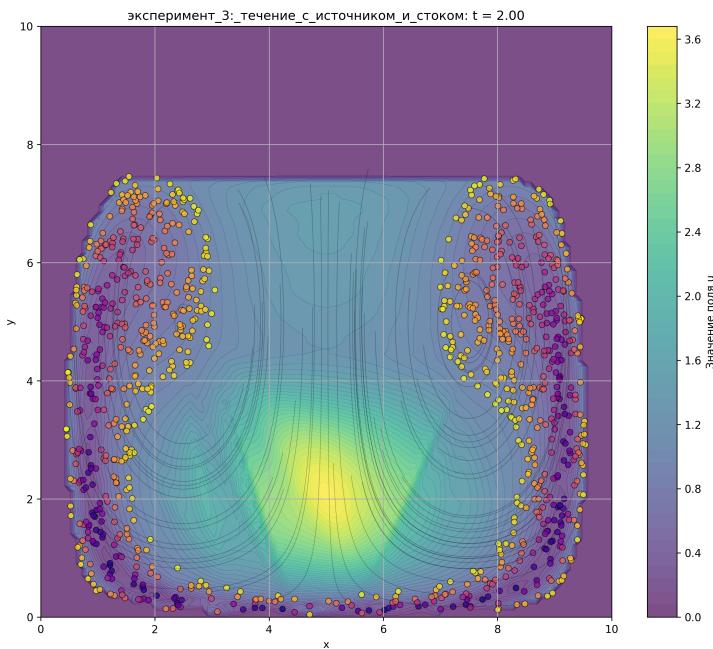


Рисунок E.1 — Скалярное поле в момент времени  $t = 2$

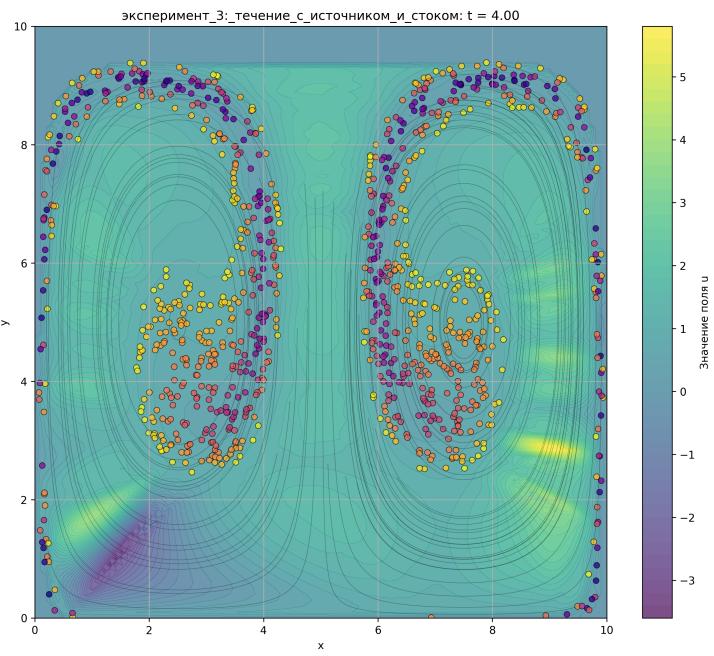


Рисунок E.2 — Скалярное поле в момент времени  $t = 4$

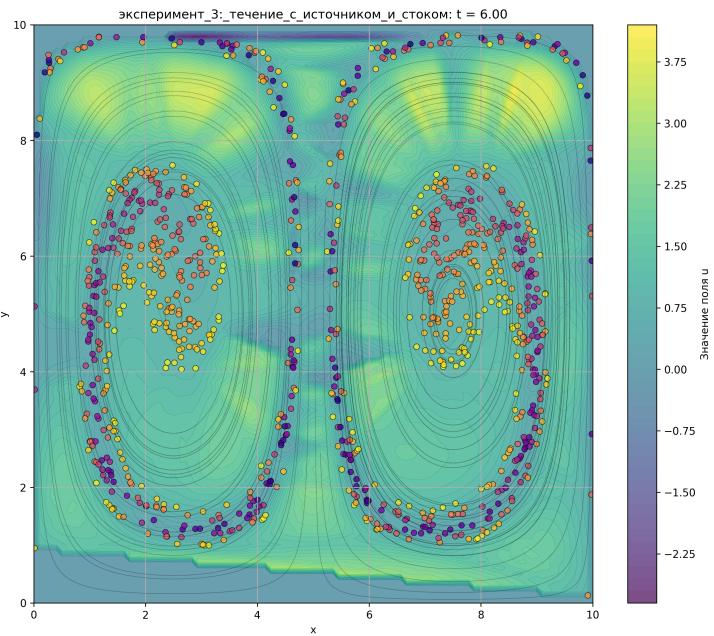


Рисунок E.3 — Скалярное поле в момент времени  $t = 6$

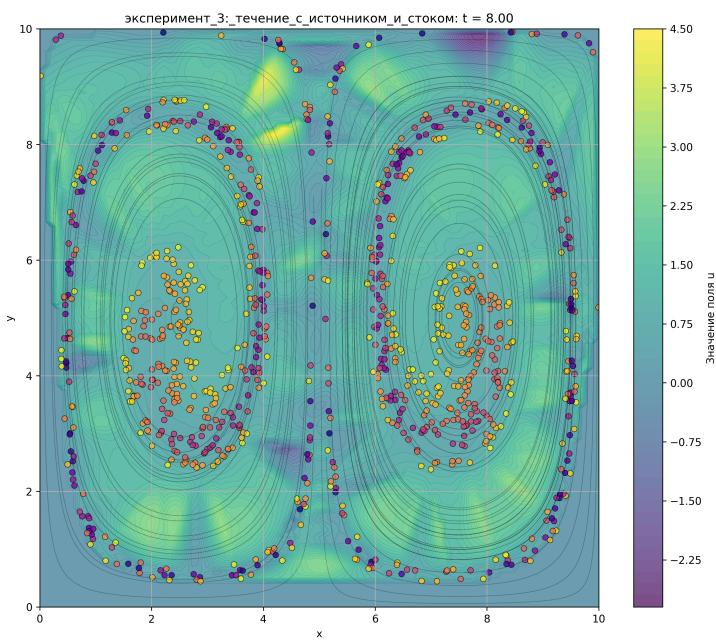


Рисунок E.4 — Скалярное поле в момент времени  $t = 8$