ИДЗ №6

Вершинин Данил Алексеевич

19 января 2024 г.

1 Исследовать на равномерную сходимость параметризованное семейство функций $f(x, y)$ на множестве X при $y \to y_0$.

$$f(x,y) = \frac{y\mathrm{arctg}(xy)}{y+1},\ X = (0, +\infty),\ y \to +\infty$$

По определению: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$, есть $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Найдём предельную функцию:

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y\mathrm{arctg}(xy)}{y+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x,y) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x) \Leftrightarrow \sup_{x\in X}|f(x,y) - f(x)| \underset{y\to\infty}{\to} 0$$

$$\sup_{x>0}\left|\frac{y\mathrm{arctg}(xy)}{y+1} - \frac{\pi}{2}\right| = (*)$$

Найдём производную, для дальнейшего выбора x:

$$\left(\frac{y\mathrm{arctg}(xy)}{y+1}\right)'_x = \frac{y^2}{(y+1)(1+x^2y^2)} \underset{y\to+\infty}{>} 0$$

$$(*) = \left|\lim_{x\to+\infty} \frac{y\mathrm{arctg}(xy)}{y+1} - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\frac{y}{y+1}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}\left|\frac{-1}{y+1}\right| \underset{y\to\infty}{\to} 0$$ – Следовательно, сходится равномерно.

2 Исследовать на равномерную сходимость параметризованное семейство функций $f(x, y)$ на множестве X при $y \to y_0$.

$$f(x,y) = \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)},\ X = (1, 2),\ y \to +\infty$$

По определению: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$, есть $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Найдём предельную функцию:

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y) + \ln\left(\frac{x}{y}+1\right)}{2\ln(y) + \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\sup_{1<x<2}\left|\frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} - \frac{1}{2}\right| = \sup_{1<x<2}\left|\frac{2\ln(x+y) - \ln(x^2+y^2)}{2\ln(x^2+y^2)}\right| = \sup_{1<x<2}\frac{\ln\left(\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}\right)}{2\ln(x^2+y^2)} = \sup_{1<x<2}\frac{\ln\left(1+\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)}{2\ln(x^2+y^2)}$$

Независимо от выбора $x \in X$ получим, что:

$$\sup_{1<x<2}\frac{\ln\left(1+\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)}{2\ln(x^2+y^2)} \underset{y\to\infty}{\to} 0$$ – Следовательно, сходится равномерно.

3 Вычислить с помощью дифференцирования по параметру собственный интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)}dx$$

Введём функцию, которая зависит от параметра:

$$I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)}dx$$

Найдём производуню по параметру:

$$I'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(x)}{1+a^2\operatorname{tg}^2(x)}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2(x)}dx$$

Проинтегрируем по x:

$$I'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2(x)}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2(x)(\operatorname{tg}^2(x)+1)(1+a^2x^2)}dx = \left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}(x) \\ dt=\frac{dx}{\cos^2(x)} \end{matrix}\right| = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(1+a^2t^2)} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{(a^2-1)}{(a^2-1)(t^2+1)(1+a^2t^2)}dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{a^2}{(a^2-1)(1+a^2t^2)} - \frac{1}{(a^2-1)(t^2+1)}\right)dt =$$

$$= \frac{a^2}{a^2-1}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2t^2}dt - \frac{1}{a^2-1}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{a^2}{a^2-1}\frac{\operatorname{arctg}(at)}{a}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{a^2-1}\operatorname{arctg}(t)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{a}{a^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a-1}{a^2-1}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+1}$$

Проинтегрируем по a:

$$\int \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+1}da = \frac{\pi}{2}\ln(|a+1|) + C$$

Найдём константу.
Подставим 0 в изначальную формулу:

$$\frac{\operatorname{arctg}(0 \cdot x)}{\operatorname{tg}(x)} = 0$$

Подставим в полученную формулу 0:

$$\frac{\pi}{2}\ln(|0+1|) = 0$$

Следовательно, константа равна нулю. Таким образом получили функцию:

$$\frac{\pi}{2}\ln(|a+1|)$$

4 Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить:

$$\int\limits_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x}) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

$$\int\limits_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x}) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x}) \left(\int\limits_a^b x^y dy\right) dx = (*)$$

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y dy = \frac{x^y}{\ln(x)}\Big|_a^b = \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}$$

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_c^d f(x,y)dx=\int\limits_c^d dx\int\limits_a^b f(x,y)dy$$

$$(*)=\int\limits_0^1 dx\int\limits_a^b \sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^y dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^y dx=\left|\begin{matrix}t=\ln\left(\frac{1}{x}\right)\\ dt=-e^{-t}\end{matrix}\right|=\int\limits_a^b dy\int\limits_0^{+\infty} e^{-ty}\sin(t)e^{-t}dt=$$

$$=\int\limits_a^b dy\int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\sin(t)dt\overset{(1)}{=}\int\limits_a^b dy\left(e^{-t(y+1)}\frac{-(y+1)\sin(t)-\cos(t)}{(y+1)^2+1}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\int\limits_a^b\frac{1}{(y+1)^2+1}dy=(**)$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx=e^{ax}\frac{a\cdot\sin(bx)-b\cdot\cos(bx)}{a^2+b^2}\tag{1}$$

$$(**)=\operatorname{arctg}(y+1)\Big|_a^b=\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}(a+1)\overset{(2)}{=}\operatorname{arctg}\left(\frac{b-a}{1+(b+1)(a+1)}\right)$$

$$\operatorname{arctg}(a)-\operatorname{arctg}(b)=I\Rightarrow\operatorname{tg}(I)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(a)-\operatorname{arctg}(b))=\frac{a-b}{1+ab}\Rightarrow I=\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)\tag{2}$$

5 Найти область сходимости несобственного интеграла:

$$\int\limits_0^\infty x^p e^{-x}dx$$

$$\exists\lim_{a\to\infty}\int_0^A x^p e^{-x}dx=\alpha$$

Найдём следующий предел (основываясь на свойствах сравнения несобственных интегралах, и беря в качестве функции для сравнения $\frac{1}{x^a}$):

$$\lim_{x\to\infty}x^a x^p e^{-x}dx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{a+p}}{e^x}=0,\text{ при }\forall p$$

Следовательно, область сходимости $\forall p$

6 Найти область сходимости несобственного интеграла:

$$\int\limits_0^1\frac{(1-x)^{-5/3}}{\operatorname{arctg}^a(x-x^2)}dx$$

В силу аддитивности получим:

$$\int\limits_0^1\frac{(1-x)^{-5/3}}{\operatorname{arctg}^a(x-x^2)}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-x)^{-5/3}}{\operatorname{arctg}^a(x-x^2)}dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-x)^{-5/3}}{\operatorname{arctg}^a(x-x^2)}dx$$

Рассмотрим критические точки.

0:

$$\frac{(1-x)^{-5/3}}{\operatorname{arctg}^a((1-x)x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x^a}\ \Rightarrow\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^a}dx\text{ - сходится, при }a<1$$

1:

$$\frac{(1-x)^{-5/3}}{\operatorname{arctg}^a((1-x)x)}\underset{x\to1}{\sim}\frac{(1-x)^{-5/3}}{(1-x)^a}=\frac{1}{(1-x)^{a+5/3}}\ \Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{(1-x)^{a+5/3}}\text{ - сходится, при }a+\frac{5}{3}<1\Rightarrow a<-\frac{2}{3}$$

Объединив промежутку, получим, что $a<-\frac{2}{3}$

7 Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right))^a} dx$$

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right))^a} dx \overset{(2)}{=} \int_{2}^{\infty} \frac{\sin(x)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{(x-1)x}{x^3+1}\right)^a} dx$$

$$\left|\frac{\sin(x)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{(x-1)x}{x^3+1}\right)^a}\right| \leq \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{(x-1)x}{x^3+1}\right)^a} \sim x^a \text{ и } \int_{2}^{\infty} x^a dx \text{ - сходится, при} a < 1 \Rightarrow \text{Сходится абсолютно при } a < -1$$

Применим признак Дирихле:

1) $\left|\int_2^A \sin(x)dx\right| \leq 2 \Rightarrow$ равномерно ограничена

2) $\operatorname{arctg}\frac{x^2-x}{x^3+1} < \frac{1}{x} \downarrow_{x\to\infty}$

3) $\frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{(x-1)x}{x^3+1}\right)^a} \underset{a<0}{\to} 0$

Следовательно, сходится условно, при $a < 0$.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx - \text{ Расходится}$$

$$\frac{|\sin(x)|}{x} \geq \frac{\sin(x)^2}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(2x)}{x}\right) \text{ - расходится}$$

$$\frac{|\sin(x)|}{\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{(x-1)x}{x^3+1}\right)\right)^{-1}} \geq \frac{\sin(x)^2}{x} \text{ - расходится}$$

Получили, что при $a \in (-\infty; -1)$ сходится абсолютно, $a \in [-1, 0)$ сходится условно и при $a \in (0, +\infty)$ - расходится

8 Исследовать на равномерную сходимость интеграл на множестве E

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{xdx}{1+(x-a)^4},\ E = (-\infty, b),\ b > 0$$

$$\sup_{a\in E}\left|\frac{x}{1+(x-a)^4}\right| \leq \phi(x) \text{ и } \int_{2}^{\infty} \phi(x)dx \text{ - сходится, то первоначальный интеграл сходится равномерно}$$

$$\sup_{a\in E}\left|\frac{x}{1+(x-a)^4}\right| = \max\left(\sup_{a<0}\left|\frac{x}{1+(x-a)^4}\right|, \sup_{0\leq a\leq b}\left|\frac{x}{1+(x-a)^4}\right|\right) = (*)$$

$$\sup_{a<0}\left|\frac{x}{1+(x-a)^4}\right| \leq \frac{1}{x^3} \text{ - интеграл от этой функции сходится}$$

$$\sup_{0\leq a\leq b}\left|\frac{x}{1+(x-a)^4}\right| \leq \frac{x}{1+(x-b)^4} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \text{ - интеграл от этой функции тоже сходится}$$

$(*) = \dfrac{1}{x^3}$ - интеграл от этой функции сходится, следовательно, изначальный интеграл.сходится равномерно

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_{2}^{\infty} = \frac{1}{8}$$

9 Исследовать на равномерную сходимость интеграл на множестве E

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin(a^2x)}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}(ax)dx,\ E = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Применим признак Дирихле:
1) $\left|\int\limits_0^A \sin(a^2x)\right| = \left|\frac{-\cos(a^2x)}{a^2}\right| \leq 8$
2) $\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{\sqrt{x}} \downarrow_{x\to\infty}$
3) $\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{\sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\rightarrow} 0$
Следоваетльно,

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin(a^2x)}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}(ax)dx \overset{E}{\rightrightarrows}$$

10 Доказать равенство

$$\lim_{a\to+0}\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Применим предельный переход под знаком интеграла. Получим, что:

$$\lim_{a\to+0}\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx = \int\limits_0^\infty \lim_{a\to+0}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx = \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Что и требовалось доказать