

ИДЗ №1

Вершинин Данил Алексеевич

4 апреля 2024 г.

1 Найти все значения корня: $\sqrt[3]{8i}$

Решение:

$$w = 8i$$

Найду модуль и аргумент:

$$\rho = |8i| = \sqrt{64} = 8$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{0}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$2 = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2 \cdot 3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -2i$$

Ответ:

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = -2i$$

2 Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}(2 - \pi i)$

Решение:

$$\operatorname{sh}(2 - \pi) = \operatorname{sh}(2) \operatorname{ch}(\pi i) - \operatorname{ch}(2) \operatorname{sh}(\pi i) = -\operatorname{sh}(2)$$

$$\operatorname{ch}(\pi i) = \cos(\pi) = -1$$

$$\operatorname{sh}(i\pi) = i\sin(\pi) = 0$$

Ответ:

$$-\operatorname{sh}(2)$$

3 Представить в алгебраической форме: $\operatorname{arth}(1 + \sqrt{3}i)$

Решение:

$$\begin{aligned}\operatorname{arth}(1 + \sqrt{3}i) \\ \operatorname{arth}(z) = w \Rightarrow \operatorname{cth}(w) = z \\ \frac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}} = z \\ \frac{e^w + 1/e^w}{e^w - 1/e^w} = \frac{e^{2w} + 1}{e^{2w} - 1} = z \Rightarrow e^{2w} + 1 = z(e^{2w} - 1) \\ e^{2w}(1 - z) + z + 1 = 0 \\ e^{2w}(1 - z) + (z + 1) = 0 \Rightarrow e^{2w} = \frac{z + 1}{z - 1} \\ 2w = \operatorname{Ln} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) = \ln \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| + i \operatorname{Arg} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) \\ w = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| + i \left(\arg \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) + 2\pi n \right) \right), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{z + 1}{z - 1} = \frac{2 + \sqrt{3}i}{-1} \cdot \frac{-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} = \frac{3 - 2\sqrt{3}i}{3} = 1 - \frac{2\sqrt{3}i}{3} \\ \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| = \left| 1 - \frac{2\sqrt{3}i}{3} \right| = \sqrt{1 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \\ \arg \left(1 - \frac{2\sqrt{3}i}{3} \right) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \\ w = \frac{1}{2} \left(\ln \sqrt{\frac{7}{3}} + i \left(-\operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi n \right) \right), \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ответ:

$$\frac{1}{2} \left(\ln \sqrt{\frac{7}{3}} + i \left(-\operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi n \right) \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

4 Представить в алгебраической форме: $(-3i)^i$

Решение:

$$\begin{aligned}(-3i)^i &= e^{i \operatorname{Ln}(-3i)} \\ \operatorname{Ln}(-3i) &= \ln |-3i| + i \operatorname{Arg}(-3i) = \ln(3) + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ e^{i \operatorname{Ln}(-3i)} &= e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) + i \ln(3)} = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)} (\cos(\ln(3)) + i \sin(\ln(3))), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ответ:

$$e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)} (\cos(\ln(3)) + i \sin(\ln(3))), \quad k \in \mathbb{Z}$$

5 Представить в алгебраической форме: $\operatorname{Ln}(2 + 2\sqrt{3}i)$

Решение:

$$\operatorname{Ln}(2 + 2\sqrt{3}i) = \ln |2 + 2\sqrt{3}i| + i \operatorname{Arg}(2 + 2\sqrt{3}i) = \ln 4 + i \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\ln 4 + i \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$$

6 Вычертить область, заданную неравенствами:

$$D = \{z : |z - 1 + i| \geq 1, \operatorname{Re}(z) < 1, \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$$

Ответ:

Пунктир

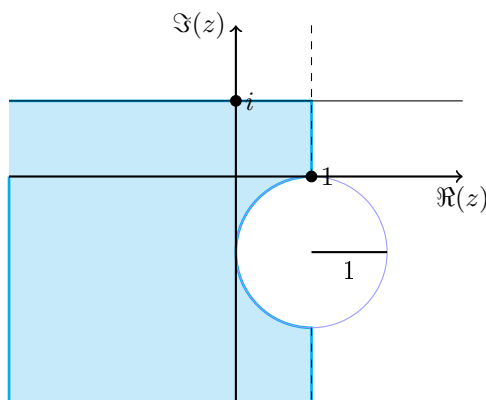


Рис. 1: Нужная нам область выделена голубым

7 Определить вид пути и в случае, когда он проходит через точку ∞ , исследовать его поведение в этой точке: $z = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} + i2 \operatorname{th}(4t)$

Решение:

$$z = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} + i2 \operatorname{th}(4t)$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} \\ y = 2 \operatorname{th}(4t) \end{cases}$$

$$x = \frac{4}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(4t)}$$

$$y = 2 \operatorname{th}(4t) \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{\operatorname{sh}(4t)}{\operatorname{ch}(4t)} \Rightarrow \frac{y^2}{4} = \frac{\operatorname{sh}^2(4t)}{\operatorname{ch}^2(4t)} + 1 - 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} = -\frac{1}{\operatorname{ch}(4t)} + 1$$

$$-\frac{y^2}{4} + 1 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(4t)}$$

$$\frac{x^2}{16} = -\frac{y^2}{4} + 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$t = 0 : x \rightarrow 4, y \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow +\infty : x \rightarrow 0, y \rightarrow 2$$

$$t \rightarrow -\infty : x \rightarrow 0, y \rightarrow -2$$

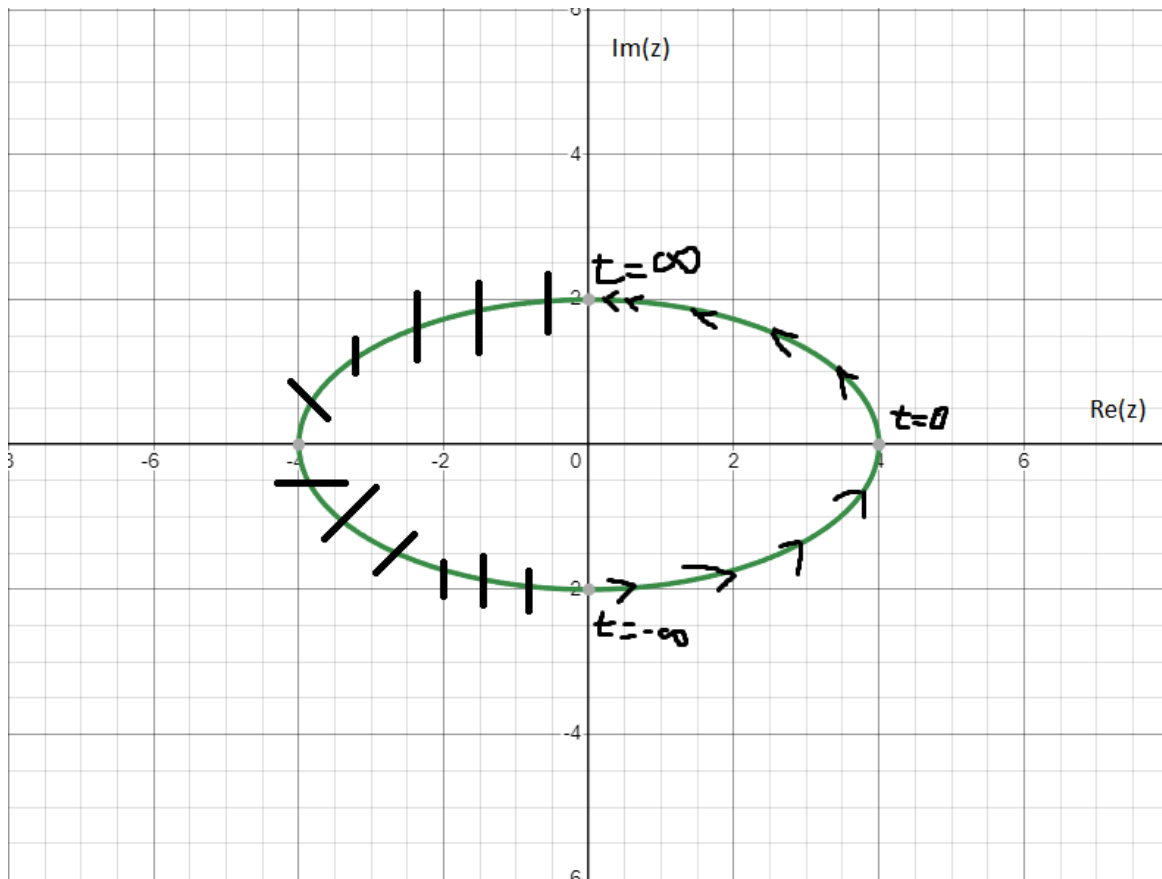


Рис. 2: z - эллипс. Левая часть не нужна, т.к. x не может принимать отрицательные значения

- 8 Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и начальному значению $f(z_0)$: $u = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = 0$

Решение:

$$u = x^2 - y^2 + x$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x + 1$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = -2y$$

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 2 \\ \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow 2 - 2 = 0 \text{ - следовательно, условие Лапласа выполнено}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta v}{\delta y} = 2x + 1 \\ \frac{\delta v}{\delta x} = 2y \end{cases}$$

$$v = 2yx + \phi(y) \Rightarrow \frac{\delta v}{\delta y} = 2x + \phi'(y) \Rightarrow \phi'(y) = 1 \Rightarrow \phi(y) = y + C$$

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + C) = x + iy + x^2 - y^2 + 2ixy + iC = (*)$$

$$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$(*) = z + z^2 + iC$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$f(z) = z^2 + z$$

Ответ:

$$f(z) = z^2 + z$$

9 Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути: $\int_{AB} z \Im(z^2) dz$; AB — отрезок прямой $z_A = 0$, $z_B = 1+i$

Решение:

$$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \Im(z^2) = 2xy$$

$$z \Im(z^2) = (x + iy)(2xy) = 2x^2y + 2ixy^2$$

$$Z_A Z_B : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 1; z(t) = t + it \Rightarrow z'(t) = 1 + i$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} z \Im(z^2) dz &= \int_0^1 (2x^2(t)y(t) + 2ix(t)y^2(t))(1+i) dt = \int_0^1 (2t^3 + 2it^3)(1+i) dt = \int_0^1 2t^3(i+1)^2 dt = \\ &= 2(1+i)^2 \int_0^1 t^3 dt = 2(1+i)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\cancel{1} + 2i - \cancel{1}) = \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

Ответ:

i

10 Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2(n)) \cdot z^n$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2(n)) \cdot z^n$$

$$\text{Радиус сходимости: } R = \frac{1}{\rho}, \text{ где } \rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n}$$

$$C_n = \cos^2 n, \text{ очевидно, что } \cos^2 n \leq 1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} \leq 1$$

$$|C_n| \not\rightarrow 0 \Rightarrow \cos^2 n \not\rightarrow 0 \quad (*)$$

$$\exists n_k \cos^2 n_k \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \alpha \neq 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\cos^2 n_k} \geq \overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\alpha}$$

$$\overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\alpha} \leq \overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\cos^2 n_k} \leq 1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 n} = 1$$

$$(*) : \text{предположим противное: } \cos^2 n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \cos^2(2n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(\cos^2 n - \sin^2 n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \sin^2 n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases}, \text{ но при этом } \cos^2 + \sin^2 = 1 - \text{ не выполняется.}$$

Следовательно, получили противоречие. $\Rightarrow \cos^2 n \not\rightarrow 0$, что и требовалось доказать.

Тогда получается, что $R = 1/\rho = 1/\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 n} = 1/1 = 1$

Ответ:

$$R = 1$$

**11 Найти все лорановское разложение данной функции в 0 и в ∞ :
 $f(z) = \frac{5z+100}{50z-5z^2-z^3}$ (пример поправил, т.к. в ином случае корни не рациональные)**

Решение:

$$50z - 5z^2 - z^3 = 0 \Rightarrow z(50 - 5z - z^2) = 0$$

$$z_1 = 0, \quad 50 - 5z - z^2 = 0$$

$$z_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 200}}{-2} = \begin{cases} -10, \\ 5 \end{cases}$$

$$\frac{5z + 100}{50z - 5z^2 - z^3} = - \left(\frac{a}{z} + \frac{b}{z - 5} + \frac{c}{z + 10} \right) = (*)$$

$$50a - 5az - az^2 - bz^2 - 10bz - cz^2 + 5cz = 5z + 100$$

$$z^2 : a + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -2 \Rightarrow c = -1/3$$

$$z : -5a - 10b + 5c = 5 \Rightarrow -2b + c = 3 \Rightarrow 3b = -5 \Rightarrow b = -5/3$$

$$1 : 50a = 100 \Rightarrow a = 2$$

$$(*) = \frac{2}{z} - \frac{5}{3(z-5)} - \frac{1}{3(z+10)}$$

Первое слагаемое уже является разложением в ряд Лорана. Осталось найти разложение второго и третьего.

Для начала найдём разложение в окрестности нуля.

Заметим, что функция $\frac{5}{3(z-5)}$ - голоморфна при $|z| < 5$, следовательно, её ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора (с кругом сходимости $|z| < 5$):

$$\frac{5}{3(z-5)} = \frac{5}{15} \cdot \frac{-1}{(1-\frac{z}{5})} = \frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{5^n} z^n\right) \quad (1)$$

Аналогично раскладывается и третье слагаемое. Также отметим, что функция $\frac{1}{3(z+10)}$ - голоморфна при $|z| < 10$. Отсюда получаем, что её ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора (с кругом сходимости $|z| < 10$):

$$\frac{1}{3(z+10)} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{10})} = \frac{1}{30} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{10^{n+1}} z^n \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) справедливы при $|z| < 5$

$$\frac{5z + 100}{50z - 5z^2 - z^3} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^n} z^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{10^{n+1}} z^n = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+1}}\right) z^n$$

$$\text{Это выполняется в кольце } 0 < z < 5, \text{ где } C_n = \begin{cases} 0, & n \leq -2 \\ 2, & n = -1 \\ \frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+1}}, & n \geq 0 \end{cases}$$

Разложим теперь $\frac{5}{3(z-5)}$ в окрестности ∞ . Очевидно, что эта функция голоморфна на $|z| > 5$. Поэтому преобразуем её так:

$$\frac{5}{3(z-5)} = \frac{5}{3z} \cdot \frac{1}{(1-\frac{5}{z})}$$

Заметим, что при $|z| > 5$ имеем $|\frac{5}{z}| < 1$ и поэтому получим:

$$\frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{z}\right)^n$$

Окончательно получим:

$$\frac{5}{3z} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \frac{5}{3z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{3z^{n+1}} = (\text{замена индекса (штрих стерли): } n+1 = -n') = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{3 \cdot 5^n} \quad (3)$$

Аналогично и при $|z| > 10$ разложение для $\frac{1}{3(z+10)}$ (четвертое равенство - замена индекса $n+1 = -n'$, штрих стерли):

$$\frac{1}{3(z+10)} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{z}} = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{10}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{3z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{3(-1)^{n-1} 10^{n-1}} \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы для $|z| > 10$ поэтому :

$$\begin{aligned} \frac{5z+100}{50z-5z^2-z^3} &= \frac{2}{z} - \frac{5}{3(z-5)} - \frac{1}{3(z+10)} = \frac{2}{z} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3 \cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1} 10^{n-1}} \right) z^n = \\ &= (\text{Вычислим сумму для } n = -1) = \frac{-33}{z} - \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{1}{3 \cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1} 10^{n-1}} \right) z^n \end{aligned}$$

Ответ:

В точке 0:

$$\frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+1}} \right) z^n$$

В точке ∞ :

$$\frac{-33}{z} - \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{1}{3 \cdot 5^n} + \frac{1}{3(-1)^{n-1} 10^{n-1}} \right) z^n$$

12 Найти все лорановское разложение данной функции по степеням $z - z_0$: $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = -2 - 2i$

Решение:

$$f(z) = \frac{z+3}{z^2-1} = \frac{z+3}{(z-1)(z+1)} = -\left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{1-z}\right)$$

$$|-2-2i+1| = |-1-2i| = \sqrt{5}$$

$$|-2-2i-1| = |-3-2i| = \sqrt{13}$$

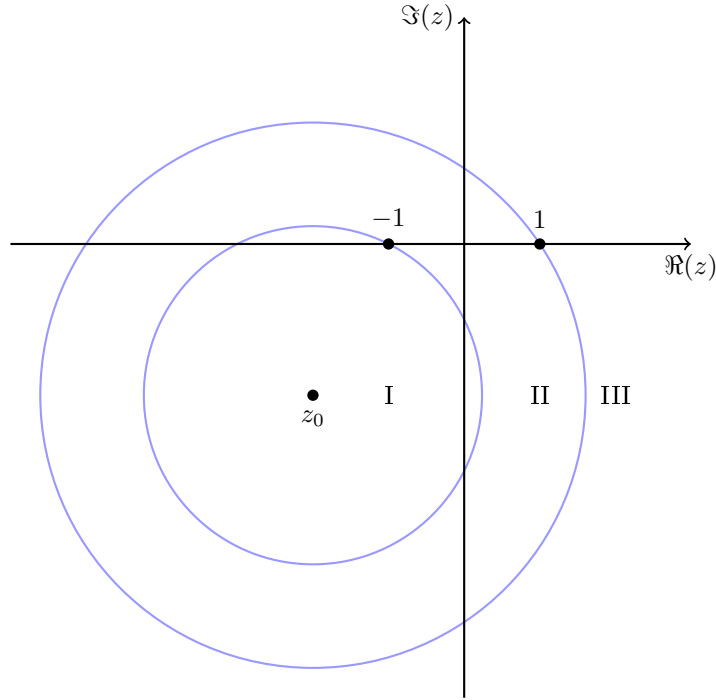


Рис. 3: Кольца для разложения Лорана

$$I : \frac{2}{1-z} \in O(II)$$

$$\frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-z_0+z_0-z} = \frac{2}{1-z_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z-z_0}{1-z_0}\right)} = \frac{2}{1-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-z_0+z_0+1} = \frac{1}{z_0+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z-z_0}{z_0+1}\right)} = \frac{1}{1+z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

Складывая оба разложения, окончательно в кольце I получим

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(1+z_0)^{n+1}} - \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$$

где $z_0 = -2 - 2i$.

$$II : \frac{1}{z+1} \in O(III)$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-z_0+z_0+1} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1+z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+z_0}{z-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$= (\text{Замена индекса (стерли штрих) : } n+1 = -n') = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(1-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

Тут $\frac{2}{1-z}$ остается голоморфной и поэтому её разложение будет таким же, как и в кольце I. Складывая оба разложения, окончательно в кольце II получим

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{(1-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

где $z_0 = -2 - 2i$.

III :

Тут $\frac{1}{z+1}$ остается голоморфной и поэтому её разложение будет таким же, как и в кольце II.

Сперва следует домножить на -1, чтобы далее выполнялось условие $\left| \frac{1-z_0}{z-z_0} \right| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-z} &= -\frac{2}{z-z_0+z_0-1} = -\frac{2}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1+\frac{z_0-1}{z-z_0}} = -\frac{2}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z_0-1}{z-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}(z_0-1)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \\ &= (\text{Замена индекса (стерли штрих)} : n+1 = -n') = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2(-1)^n}{(z_0-1)^{n+1}} (z-z_0)^n \end{aligned}$$

И так в кольце III получаем

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{(-1)^n}{(1-z_0)^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n+1}}{(z_0-1)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$$

где $z_0 = -2 - 2i$.

Ответ:

I:

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(1+z_0)^{n+1}} - \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$$

II:

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{(1-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

III:

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{(-1)^n}{(1-z_0)^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n+1}}{(z_0-1)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$$

где $z_0 = -2 - 2i$.

13 Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0 : $f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}}$, $z_0 = 5$

Решение:

$$\begin{aligned} f(z) &= ze^{\frac{z}{z-5}} \\ e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ \frac{z-5+5}{z-5} &= 1 + \frac{5}{z-5} \end{aligned}$$

$$((z-5)+5)e^{1+\frac{5}{z-5}} = e((z-5)+5)e^{\frac{5}{z-5}} = e((z-5)+5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!(z-5)^n}$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e5^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-5)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e5^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{(z-5)^n} &= e(z-5) + 5e + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e5^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-5)^n} + 5e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e5^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{(z-5)^n} = \\ &= 10e + e(z-5) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e(z-5)^n}{(1-n)!5^{n-1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e5^{n-1}(z-5)^n}{(-n)!} = 10e + e(z-5) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e}{5^{n-1}} \left(\frac{1}{(1-n)!} + \frac{1}{(-n)!} \right) (z-5)^n \end{aligned}$$

z_0 - COT

Ответ:

$$f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}} = 10e + e(z-5) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e}{5^{n-1}} \left(\frac{1}{(1-n)!} + \frac{1}{(-n)!} \right) (z-5)^n$$

14 Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции: $f(z) = \frac{\operatorname{ch}(5z)-1}{e^z-1-z}$

Решение:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\operatorname{ch}(5z)-1}{e^z-1-z} \\ \operatorname{ch} 5z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5z)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{(5z)^2}{2} + \frac{(5z)^4}{4!} + \dots \\ e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots \\ \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{(5z)^2}{2} + o(z^4)}{\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + o(z^4)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cancel{z^2} \left(\frac{25}{2} + o(z^2) \right)}{\cancel{z^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + o(z^2) \right)} = 25 \Rightarrow z_0 - \text{УОТ} \end{aligned}$$

Ответ:

z_0 - УОТ

15 Для данной функции найти все изолированные особые точки и определить их тип: $f(z) = \operatorname{ctg}(\pi z)$

Решение:

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\ \sin \pi z &= 0 \\ \pi z &= \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ z_n &= n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Получили точки $z_n = n$ - особые точки.
 ∞ - не является изолированной особой точкой.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow n} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\ \sin \pi z &= (-1)^n \sin \pi(z-n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \cos \pi z &= (-1)^n \cos \pi(z-n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{aligned}$$

Из (1) и (2) получаем следующий предел:

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{\cos \pi(z-n)}{\sin \pi(z-n)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ сделав замену } \zeta = z - n \text{ получим: } \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\cos \pi \zeta}{\sin \pi \zeta} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \zeta} = \infty \Rightarrow z_n - \text{полюс } n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{z \rightarrow n} (z-n)^k \operatorname{ctg} \pi z = \lim_{z \rightarrow n} \frac{(z-n)^k \cos \pi(z-n)}{\sin \pi(z-n)} = \lim_{\zeta \rightarrow n} \frac{\zeta^k \cos \pi \zeta}{\sin \pi \zeta} = \lim_{\zeta \rightarrow n} \frac{\zeta^k}{\pi \zeta} = \begin{cases} 0, & k > 1 \\ \frac{1}{\pi}, & k = 1 \Rightarrow \\ \infty, & k < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_n = n - \text{полюс первого порядка, } n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$z_n = n$ - полюс первого порядка, $n \in \mathbb{Z}$