ИДЗ №1

Вершинин Данил Алексеевич

20 мая 2024 г.

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz$

Решение:

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz \text{ -- Отношение голоморфных функций}$$

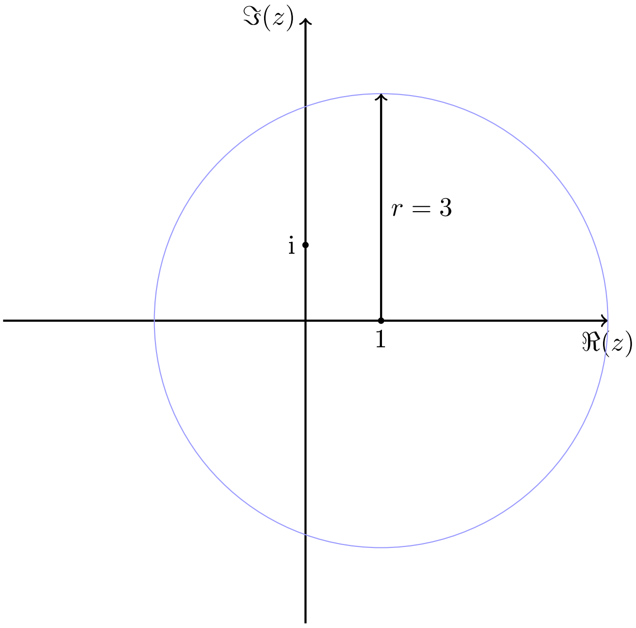

Рис. 1: Контур интегрирования

Найдём особые точки:

$$\sin z = 0 \Rightarrow z = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

В круге $|z-1| = 3$ - две особые точки: $z = 0, z = \pi$

$$(ze^z)' = e^z + ze^z \Big|_{z=0} = 1 \neq 0$$

$$(\sin z)' = \cos z \Big|_{z=0} = 1 \neq 0$$

Следовательно, 0 - нуль первого порядка, следовательно УОТ, следователь вычет в ней равен 0 Точка π - нуль первого порядка знаменателя, числитель в ней не обращается в 0.

$$ze^z \Big|_{z=\pi} = \pi e^\pi \neq 0; \; (\sin z)' = \cos z \Big|_{z=\pi} = -1 \neq 0$$

Следовательно, $z = \pi$ - полюс первого порядка, вычет вычисляется по формуле:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{ze^z}{\sin z} = \frac{ze^z}{\cos z} \Big|_{z=\pi} = -\pi e^\pi$$

Поэтому интеграл равен:

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz = 2\pi i \cdot (-\pi e^\pi) = -2\pi^2 e^\pi i$$

Ответ:

$-2\pi^2 e^{\pi} i$

2 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz$

Решение:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz$$

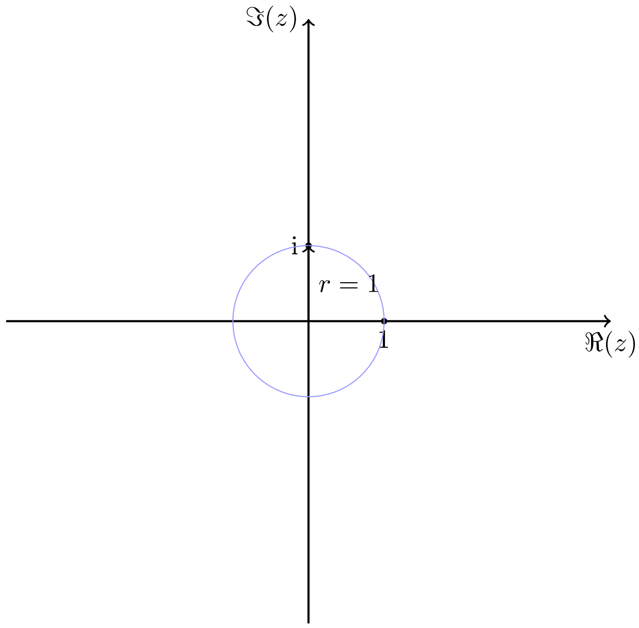

Рис. 2: Контур интегрирования

Заметим, что

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz = \oint\limits_{|z|=1} \left(\frac{e^{2z}}{z^2} - \frac{1}{z}\right) dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^2} dz - \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z} = 1$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2 e^{2z}}{z^2} = 1 \text{ - видим, что 0 - полюс второго порядка}$$

Разложим $\frac{e^{2z}}{z^2}$ в ряд Лорана в окрестности точки 0:

$$\frac{1}{z^2}\left(1 + 2z + \frac{4z^2}{2!} + \dots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{4}{2!} + \dots$$

Отсюда видим, что вычет равен 2. Следовательно интеграл равен:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz = 2\pi i(2-1) = 2\pi i$$

Ответ: $2\pi i$

3 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z}dz$

Решение:

$$\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z}dz$$

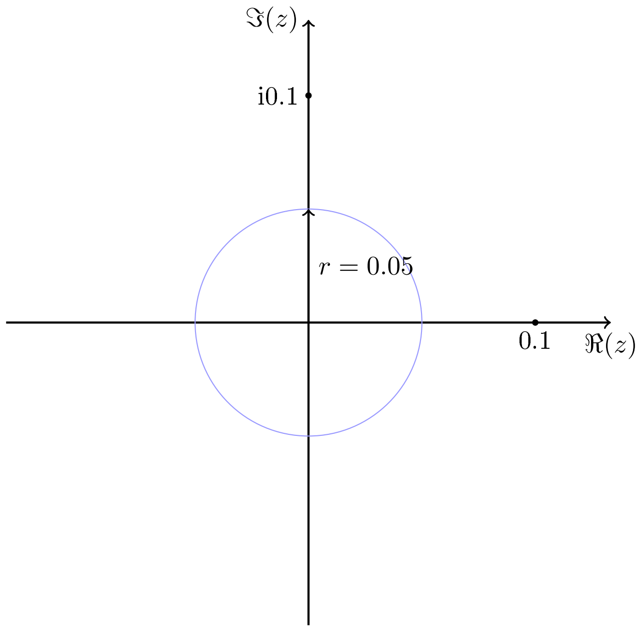

Рис. 3: Контур интегрирования

Числитель и знаменатель голоморфные функции всюду в $\mathbb{C} \Rightarrow$ особые точки - это нули знаменателя, при условии $|z| < 0,05$

$$z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z \iff z^3 = 0 \ \vee \ \mathrm{sh}\,16\pi z = 0$$

Последнее перепишем:

$$\mathrm{sh}\,16\pi z = 0 \Rightarrow e^{16\pi z} - e^{-16\pi z} = 0 \Rightarrow e^{16\pi z} = e^{-16\pi z} \Rightarrow e^{32\pi z} = 1 \Rightarrow 32\pi z = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Следующая оценка покажет, что в $|z| < 0,05$ попадает тольо одна точка $(z = 0)$

$$n \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\pi}{16}n\right| \geq \left|\frac{\pi}{16}\right| > \frac{3}{16} > \frac{1}{20}$$

Итак, вычисления показывают, что:

$$\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z}$$

Заметим, что $z = 0$ - является нулём первого порядка для числителя:

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z\big|_{z=0} = 0; \ \left(e^{iz} - 1 - \sin 4z\right)'\big|_{z=0} = \left(ize^{iz} - 4\cos 4z\right)\big|_{z=0} = i - 4 \neq 0$$

и нуль четвертого порядка для знаменателя, т.к. он является z^3 (3-го порядка) и $\mathrm{sh}\,16\pi z$ (первый порядок); $(\mathrm{sh}\,16\pi z)'\big|_{z=0} \neq 0$
Поэтому, для дроби $z = 0$ - полюс 3-го порядка.
Вычет равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z}\right)^{(2)}$$

Брать вторую производную достаточно затратное занятие. Найдём вычет через ряд Лорана $z = 0$ - полюс 3-го порядка, следовательно разложение будет иметь вид:

$$f(z) = \frac{C_{-3}}{z^3} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-1}}{z} + C_0 + \ldots \Big| \cdot z^3 \operatorname{sh} 16\pi z$$

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z = \operatorname{sh} 16\pi z (C_{-3} + C_{-2}z + C_{-1}z^2 + C_0 z^3 + \ldots)$$

Разложим левую часть:

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z = iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots - (4z - \frac{(4z)^3}{3!} + \ldots) = (i-4)z + \frac{(iz)^2}{2} + \frac{4^3 - i}{6} z^3 + \ldots$$

Справа получили разложение:

$$\operatorname{sh} 16\pi z (C_{-3} + \ldots) = (16\pi z + \frac{(16\pi z)^3}{6} + \ldots)(C_{-3} + C_{-2}z + C_{-1}z^2 + C_0 z^3 + o(z^4)) =$$

$$= 16\pi z C_{-3} + 16\pi C_{-2} z^2 + \left[\frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3} + 16\pi C_{-1}\right] z^3 + \ldots$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\left\{\begin{array}{ccc} i - 4 = 16\pi C_{-3} & \Rightarrow & C_{-3} = \frac{i-4}{16\pi} \\ -\frac{1}{2} = 16\pi C_{-2} & \Rightarrow & C_{-2} = -\frac{1}{32\pi} \\ \frac{4^3-i}{6} = \frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3} + 16\pi C_{-1} & \Rightarrow & C_{-1} = \left(\frac{4^3-i}{6} - \frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3}\right) \frac{1}{16\pi} \end{array}\right\}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{16\pi} \left(\frac{4^3 - i}{6} - \frac{(16\pi)^3}{6} \cdot \frac{(i-4)}{16\pi}\right) = \frac{i}{8} \left(\frac{4^3 - i - (16\pi)^2 (i-4)}{6}\right)$$

Ответ: $\frac{i}{8} \left(\frac{4^3 - i - (16\pi)^2 (i-4)}{6}\right)$

4 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+3|=2} \left(z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}\right) dz$

Решение:

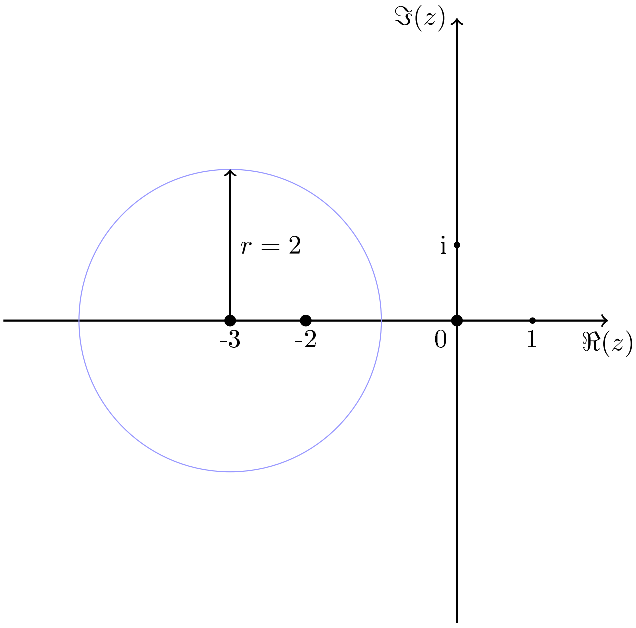

Рис. 4: Контур интегрирования

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \left(z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}\right) dz = \oint\limits_{|z+3|=2} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} dz - \oint\limits_{|z+3|=2} \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} dz$$

Рассмотрим первый интеграл. Очевидно, что подынтегральное выражение имеет в $\mathbb{C}$ только одну изолированную особую точку: $z = -3$ - центр окружности, по которой интегрируем:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} dz$$

Применяя основную теорему о вычетах, получим:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-3} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3}$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд лорана в окрестности точки $z = -3$:

$$z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} = (-3 + (z+3)) \left(\frac{i}{z+3} + \frac{i^3}{3!(z+3)^3} + \frac{i^5}{5!(z+3)^5} + \ldots\right) = i - \frac{3i}{z+3} - \frac{i}{3!(z+3)^2} + \frac{3i}{3!(z+3)^3} + \ldots$$

Отсюда видим, что разложение содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов при отрицательных степенях $(z+3)$, значит $z = -3$ - СОТ.
Кроме того, вычет в этой точке

$$\operatorname*{Res}_{z=-3} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} = -3i$$

Значит,

$$\oint\limits_{|z+3|=2} z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} dz = 6\pi$$

Теперь займёмся вторым интегралом:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} dz$$

Особыми точками подынтегральной функции являются нули знаменателя $z=0$ и $z=-2$. Но точка $z=0$ лежит вне окружности $|z+3|=2$, поэтому по основной теореме Коши о вычетах имеем:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}$$

Но $z=-2$ полюс второго порядка, так как является, очевидно, нулем второго порядка для знаменателя, а числитель в ней $\neq 0$. По формуле для вычисления вычета в полюсе порядка 2

$$\operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} = \lim_{z\to-2}\left(\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{z}\right)' = 4\lim_{z\to-2}\frac{\frac{\pi i}{4}\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}z - \operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{z^2} = \frac{\pi i}{4}\operatorname{ch}\left(-\frac{\pi i}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(-\frac{\pi i}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = i$$

Поэтому

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} = -2\pi$$

Ответ:

$$\oint\limits_{|z+3|=2}\left(z\operatorname{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}\right)dz = 8\pi$$

5 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5}$

Решение:

Проведём замену $e^{it} = z \Rightarrow dt = dz/iz$. Будут справедливы формулы:

$$\sin t = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\cos t = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

После замены получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(\cancel{2}\sqrt{6}\frac{1}{\cancel{2}i}\left(z-\frac{1}{z}\right)-5\right)iz} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{6}z\left(z-\frac{1}{z}\right)-5iz} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{6}z^2-\sqrt{6}-5iz}$$

очевидно, что нули наменателя являются полюсами первого порядка для подынтегрального выражения. Найдём их:

$$\sqrt{6}z^2-\sqrt{6}-5iz = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{5i\pm\sqrt{-25+24}}{2\sqrt{6}} = \begin{cases}\frac{i\sqrt{6}}{2}\\ \frac{i\sqrt{6}}{3}\end{cases}$$

В круге $|z|=1$ лежит только корень $\frac{i\sqrt{6}}{3}$. Поэтому, искомый интеграл вычисялется так:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{6}z^2-\sqrt{6}-5iz} = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}}\frac{1}{\sqrt{6}z^2-\sqrt{6}-5iz} = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}}\frac{1}{\sqrt{6}\left(z-\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)\left(z-\frac{i\sqrt{6}}{3}\right)} = \frac{2\pi i}{\sqrt{6}\left(z-\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)}\Bigg|_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{\sqrt{6}\left(\frac{i\sqrt{6}}{3}-\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)} = -2\pi$$

Ответ:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5} = -2\pi$$

6 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t\right)^2} dt$

Решение:

Произведём замену $e^{it} = z \Rightarrow dt = dz/iz$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t\right)^2} dt = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2 iz} = \frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{\left(\sqrt{5}z^2 + 2\sqrt{7}z + \sqrt{5}\right)^2}$$

Последний интеграл вычисляем по основной теореме Коши о вычетах. Для этого найдём нули знаменателя:

$$\sqrt{5}z^2 + 2\sqrt{7}z + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{28-20}}{2\sqrt{5}} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{-\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Первый из корней лежит вне круга $|z| < 1$, поэтому:

$$\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{\left(\sqrt{5}z^2 + 2\sqrt{7}z + \sqrt{5}\right)^2} = \frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{5\left(z + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2\left(z + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{8\pi}{5}\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{z}{\left(z + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2\left(z + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

Очевидно, для выражение под знаком вычета точка $z = -\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ является полюсом второго порядка, поэтому вычет вычисляется по формуле для полюса порядка n (n = 2)

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{z}{\left(z + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2\left(z + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2} = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \left(\frac{z}{\left(z + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2}\right)' = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{-5\sqrt{5}z + 5\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{(\sqrt{5}z + \sqrt{7} + \sqrt{2})^3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{14}}{16}$$

Окончательно получаем

Ответ:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t\right)^2} dt = \frac{\sqrt{14}}{2}\pi$$

7 Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx$

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx$$

Преобразуем подынтегральную функцию $f(x)$ в $f(z)$:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{z^2+1}{\left(z^2+z+1\right)^2} = f(z)$$

Найдём нули знаменатля:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

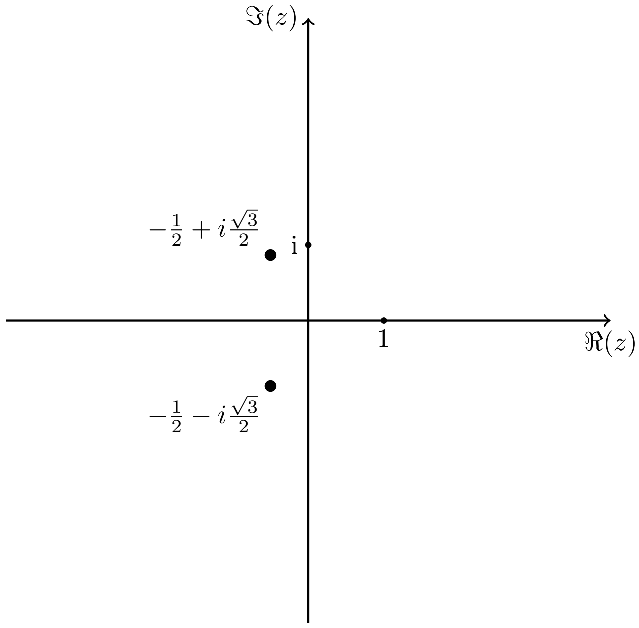

Рис. 5: Корни знаменателя. Только один лежит в верхней полуплоскости

Теперь можно преобразовать знаменатель:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$f(z)$ голоморфна всюду в верхней полуплоскости, кроме точки $z_1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Очевидно, что она является полюсом второго порядка.
Кроме того

$$\sup_{\substack{|z|=R\\ \Im\geq 0}} \frac{|z^2+1||z|}{|(z^2+z+1)^2|} = \sup_{\substack{|z|=R\\ \Im\geq 0}} \frac{|z^2+1||z|}{|z^2+z+1|^2} \leq \sup_{\substack{|z|=R\\ \Im\geq 0}} \frac{(|z^2|+1)|z|}{||z|^2+|z|-1|^2} = \frac{(R^2+1)R}{(R^2+R-1)} \underset{R\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы о вычислении интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. А так как $z_2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ лежит в нижней полуплоскости, следовательно:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$$

Вычет вычисляем по формуле для полюсов 2-го порядка:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} f(z) = \lim_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)' = \lim_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{8z+8\sqrt{3}iz-16}{(2z+1+\sqrt{3}i)^3} =$$

$$= \frac{8\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+8\sqrt{3}i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-16}{2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}i} = \frac{-4+\cancel{8\frac{\sqrt{3}}{2}}-\cancel{8\frac{\sqrt{3}}{2}}-12-16}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{4}{3\sqrt{3}i}$$

Окончательно получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{2\pi i\cdot 4}{3\sqrt{3}i} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$

8 Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-2x+10)}dx$

Решение:

$f(z) = \frac{\sin 2z}{z^2-2z+10}$ голоморфна всюду в верхней полуплоскости, кроме точки $z = 1+3i$ - полюс первого порядка, т.к.

$$z^2 - 2z + 10 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \begin{cases} 1+3i \\ 1-3i \end{cases}$$

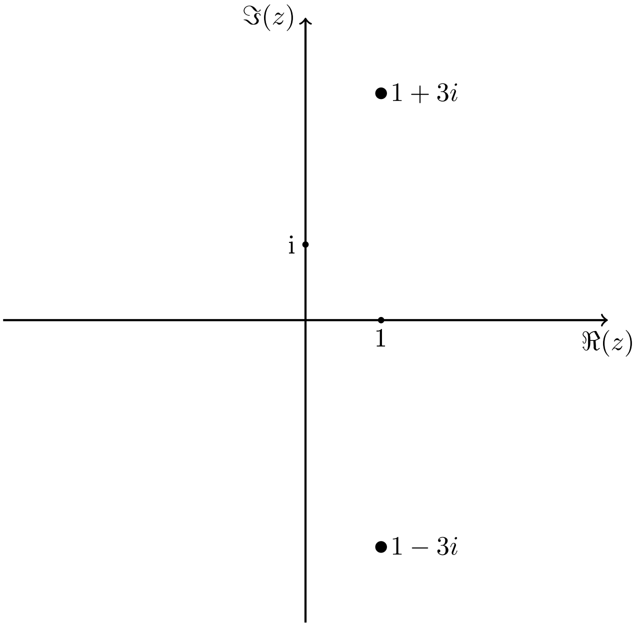

Рис. 6: Корни знаменателя. Только один лежит в верхней полуплоскости

Заметим, что $\sin(2x) = \Im e^{i2x}$ и, применяя основную теорему о вычетах, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-2x+10)}dx = \Im\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2z}}{(z^2-2z+10)}dz\right) = \Im\left(2\pi i \sum_{\Im z \geq 0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)e^{2iz}\right)$$

Кроме того

$$\sup_{\substack{|z|=R \\ \Im \geq 0}} \frac{1}{|z^2-2z+10|} \leq \sup_{\substack{|z|=R \\ \Im \geq 0}} \frac{1}{|z^2|-2|z|-10} \leq \frac{1}{R^2-2R-10} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

По теореме Жордано получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2z}}{z^2-2z+10}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+3i} \frac{e^{i2z}}{(z-(1-3i))(z-(1-3i))} = \frac{2\pi i e^{i2z}}{z-(1-3i)}\Big|_{z=1+3i} = \frac{\pi e^{i(2+6i)}}{3}$$

Отделяя мнимую часть, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-2x+10)}dx = \Im\frac{\pi}{3}e^{i(2+6i)} = \Im\frac{\pi}{3e^6}(\cos 2 + i\sin 2) = \frac{\pi \sin 2}{3e^6}$$

Ответ:

$$\frac{\pi \sin 2}{3e^6}$$

9 Найти оригинал по заданному изображению $\frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$

Решение:

$$\frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)} = \frac{a}{p+2} + \frac{bp+c}{p^2-2p+2} \tag{1}$$

$$ap^2 - 2pa + 2a + bp + cp + 2bp + 2c = 5p$$

$$\begin{cases} n^2: & a+b=0 \\ n: & -2a+c+2b=5 \\ 1: & 2a+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=c \\ 2c+c+2c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \tag{2}$$

Подставляя найденные коэфициенты из (2) в (1) получим разложение в сумму дробей

$$-\frac{1}{p+2} + \frac{p+1}{p^2-2p+2} = -\frac{1}{p+2} + \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{2}{(p-1)^2+1}$$

Тогда первое слагаемое является образом для

$$-e^{-2t}$$

Для оставшихся

$$F(p+1) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p^2=1} \risingdotseq \cos t + 2\sin t$$

По теореме смещениия отсюда

$$F(p) = F(p+1-1) \risingdotseq e^t(2\sin t + \cos t)$$

Окончательно получаем:

$$f(t) = e^t(2\sin t + \cos t) - e^{-2t}$$

Ответ: $e^t(2\sin t + \cos t) - e^{-2t}$

10 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $y'' + 2y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$

Решение:

$$y'' + 2y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$$

Вычисляем преобразование Лапласа для левой части уравнения, а правую приравняем к $f(t)$

$$p^2\bar{y} - pC_1 - C_2 + 2(p\bar{y} - C_1) = \bar{f}(p)$$

Выразим $\bar{y}$

$$\bar{y} = \frac{\bar{f}(p) + pC_1 + C_2 + 2C_1}{p^2 + 2p} = \frac{\bar{f}(p)}{p^2 + 2p} + \frac{C_1}{p+2} + \frac{C_2}{p(p+2)} + \frac{2C_1}{p(p+1)}$$

Очевидно, что это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\bar{f}(p)}{p^2 + 2p} + \frac{C_1}{p+2} + \frac{C_2}{p(p+2)} + \frac{2C_1}{p(p+1)} = \frac{\bar{f}(p)}{p^2 + 2p} + \frac{C_1}{p+2} + \frac{C_2}{2p} - \frac{C_2}{2(p+2)} + \frac{C_1}{p} - \frac{C_1}{p+2}$$

Найдём оригиналы для всех слагаемых, кроме первого:

$$\frac{C_1}{p+2} \risingdotseq C_1 e^{-2t}$$

$$\frac{C_2}{2p} \risingdotseq \frac{C_2}{2}$$

$$\frac{C_2}{2(p+2)} \risingdotseq \frac{C_2}{2}e^{-2t}$$

$$\frac{C_1}{p} \risingdotseq C_1$$

$$\frac{C_1}{p+2} \risingdotseq C_1 e^{-2t}$$

Для первого слагаемого нужно поступить следующим образом.
Найдём оригинал для $1/(p^2 + 2p)$

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p+2)}$$

Таким образом, оригинал равен

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Далее найдём интеграл по теореме ****

$$\int\limits_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)}\right)\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tau}d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tau}d\tau - \frac{1}{2e^{2t}}\int\limits_0^t \frac{e^{2\tau}}{\operatorname{ch}^2 \tau}$$

Первый интеграл равен

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tau}d\tau = \frac{1}{2}th\tau\Big|_0^t = \frac{1}{2}\operatorname{th} t$$

Второй сложнее

$$\int\limits_0^t \frac{e^{2\tau}}{\operatorname{ch}^2 \tau} = \int\limits_0^t \frac{e^{2\tau}}{\left(\frac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{2}\right)^2} = \int\limits_0^t 2e^{2\tau}\frac{2e^{2\tau}}{(e^{2\tau}+1)^2}d\tau = 2\int\limits_0^t \frac{e^{2\tau}d(e^{2\tau})}{(e^{2\tau}+1)^2} = 2\int\limits_0^t \frac{e^{2\tau}+1-1}{(e^{2\tau}+1)^2}d(e^{2\tau}) =$$

$$= 2\int\limits_0^t \frac{d(e^{2\tau})}{e^{2\tau}+1} - 2\int\limits_0^t \frac{d(e^{2\tau})}{(e^{2\tau}+1)^2} = 2\ln\left(e^{2\tau}+1\right)\Big|_0^t + \frac{2}{e^{2\tau}+1}\Big|_0^t = 2\ln(e^{2t}+1) + \frac{2}{e^{2t}+1} - 2\ln 2 + 1$$

Таким образом получаем

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{th} t - \frac{\ln(e^{2t}+1)}{e^{2t}} - \frac{1}{e^{4t} = e^{2t}} - \frac{\ln 2}{e^{2t}} + \frac{1}{2e^{2t}} + \frac{C_2}{2}e^{-2t} + \frac{C_2}{2} + C_1$$

Ответ:

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{th} t - \frac{\ln(e^{2t}+1)}{e^{2t}} - \frac{1}{e^{4t}=e^{2t}} - \frac{\ln 2}{e^{2t}} + \frac{1}{2e^{2t}} + \frac{C_2}{2}e^{-2t} + \frac{C_2}{2} + C_1$$

11 Операционным методом решить задачу Коши $2y'' + 3y' + y = 3e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Решение:

Применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям данного дифференциального уравнения, получаем операторное уравнение:

$$2p^2\bar{y} - p\cdot 0 - 2 + 3p\bar{y} - 0 + \bar{y} = \frac{3}{p-1}$$

$$2p^2\bar{y} - 2 + 3p\bar{y} + \bar{y} = \frac{3}{p-1}$$

Откуда находим

$$\bar{y}(2p^2 + 3p + 1) = 2 + \frac{3}{p-1}$$

Или

$$\bar{y} = \frac{2}{2p^2+3p+1} + \frac{3}{(p-1)(2p^2+3p+1)}$$

Найдём нули знаменателя первой дроби:

$$2p^2 + 3p + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ -1/2 \end{cases}$$

Тогда выражение перепишется слудующим образом:

$$\bar{y} = \frac{2}{2(p+1)(p+\frac{1}{2})} + \frac{3}{2(p-1)(p+1)(p+\frac{1}{2})}$$

Или

$$\bar{y} = \frac{4}{(p+1)(2p+1)} + \frac{6}{(p-1)(p+1)(2p+1)}$$

Разложим первое слагаемое методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2}{(p+1)(2p+1)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{2p+1}$$

$$2pa + a + bp + b = 2$$

$$\left.\begin{cases} p: \quad 2a + b = 0 \\ 1: \quad a + b = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ 4 - 2b + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -2 \end{cases}$$

Таким образом первая дробь запишется так

$$\frac{2}{(p+1)(2p+1)} = -\frac{2}{p+1} + \frac{4}{2p+1}$$

Теперь вторая:

$$\frac{3}{(p-1)(p+1)(2p+1)} = \frac{a}{p-1} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{2p+1}$$

$$2p^2a + 3pa + a + p^2b - pb - b + p^2c - c = 3$$

$$\left.\begin{cases} p^2: \quad 2a + 2b + c = 0 \\ p: \quad 3a - b = 0 \\ 1: \quad a - b - c = 3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = b/3 \\ b/3 - b - c = 3 \\ 2b/3 + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b/6 \\ -2b - 3c = 9 \\ 8b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3/2 \\ c = -4 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{6}{(p-1)(p+1)(2p+1)} = \frac{1}{2(p-1)2} + \frac{3}{2(p+1)} - \frac{4}{2p+1}$$

Исходное выражение равно:

$$\bar{y} = -\frac{2}{p+1} + \frac{4}{2p+1} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{3}{2(p+1)} - \frac{4}{2p+1} = -\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1}$$

Произведём обратное преобразование Лапласа:

$$-\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1} \risingdotseq \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2e^t} = y$$

Ответ: $y = \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2e^t}$

12 Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию $\begin{cases} x' = y + 3, & x(0) = 1 \\ y' = x + 2, & y(0) = 0 \end{cases}$

Решение:

Применем преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} p\bar{x} + \bar{y} + \frac{3}{p} + 1 \\ p\bar{y} = \bar{x} + \frac{2}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\bar{x} - \bar{y} = \frac{3}{p} + 1 \\ p\bar{y} - \bar{x} = \frac{2}{p} \end{cases}$$

Решаем эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{3}{p} + 1 & -1 \\ \frac{2}{p} & p \end{vmatrix} = 3 + p + \frac{2}{p} = \frac{3p + p^2 + 2}{p}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p & \frac{3}{p} + 1 \\ -1 & \frac{2}{p} \end{vmatrix} = \frac{3p+3}{p}$$

Отсюда

$$\bar{x} = \frac{p^2 + 3p + 2}{p(p-1)(p+1)} = \frac{p+2}{p(p-1)}$$

$$\bar{y} = \frac{3p+3}{p(p-1)(p+1)} = \frac{3}{p(p-1)}$$

Разложение на простые множетели очевидное:

$$\bar{x} = \frac{p+2}{p(p-1)} = -\frac{2}{p} + \frac{3}{p-1}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{p(p-1)} = -\frac{3}{p} + \frac{3}{p-1}$$

Найдём оригиналы

$$\begin{cases} x = -2 + 3e^t \\ y = -3 + 3e^t \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -2 + 3e^t \\ y = -3 + 3e^t \end{cases}$