

Резистивное расстояние

Вершинин Данил Алексеевич

26 мая 2024 г.

1 Введение

Для решения задачи нахождения резистивного расстояния[2] строится матрица Киргхофа (лапласиан) по первому закону Киргхофа. Так, элементы главной диагонали указывают количество входящего тока, а ненулевые элементы - направления исходящего тока.

У нас есть матрица, построенная по первому закону Киргхофа для неориентированного графа. Она имеет квадратную форму. Кроме того, она вырожденная. Следовательно мы не сможем найти точного решения, т.к. нам мешаются лишние элементы.

Я нашёл два метода решения:

1. Можно вычеркнуть конечную строку (заземлить её). В таком случае минор матрицы будет невырожденным и можно решить эту систему, получив ответ в интересующем элементе вектора-ответа.

2. Для задач подобного рода существует метод приближённого решения - через псевдообратную матрицу. Этот метод позволяет минимизировать отклонение от ответа (по итогу получается, что ответ в точности совпадёт с экспериментальными результатами; Этого можно добиться дополнительными преобразованиями)

Здесь будет описан только второй метод, т.к. первый является следствием из него.

2 Описание Алгоритма[1]

Изначально имеется матричное уравнение следующего вида:

$$Av = b,$$

где A - матрица системы уравнений Киргхофа, v - напряжение в узлах графа, b - результирующее напряжение (с начальной вершиной $=1$, в конечную $=-1$)

Обычный метод решения тут не применим. Решается данное матричное уравнение через матрицу Мура-Пенроуза (псевдообратную матрицу). Достаточно провести следующие действия:

$$\begin{aligned} Av &= b \\ A^T Av &= A^T b \\ v &= (A^T A)^{-1} A^T b = A^+ b \end{aligned}$$

Интересное замечание: Такой метод решения достаточно популярен. Например, подобным образом считаются коэффициенты многомерного случая линейной регрессии.

Теперь остаётся только вычислить эту матрицу, умножить на вектор и найти разность потенциалов узлов. Таким образом, мы получим сопротивление между двумя вершинами графа.

3 Пример 1

Нам дана следующая матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу степеней вершин:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

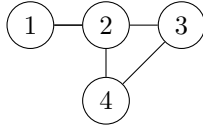


Рис. 1: Пример графа с четырьмя вершинами, построенный по матрице смежности М

Вычтем из матрицы степеней матрицу смежности:

$$G - M = L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Полученную матрицу можно интерпретировать, как коэффициенты системы уравнений Киргхофа для неориентированного графа:

$$Lv = b$$

Теперь, по описанному выше алгоритму получаем псевдообратную матрицу:

$$L^+ = (L^T L)^{-1} L^T$$

Опуская вычисления, получим:

$$L^+ = \begin{pmatrix} 0.6875 & -0.0625 & -0.3125 & -0.3125 \\ -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.3125 & -0.0625 & 0.35416667 & 0.02083333 \\ -0.3125 & -0.0625 & 0.02083333 & 0.35416667 \end{pmatrix}$$

Найдём вектор напряжений v :

$$v = L^+ b = \begin{pmatrix} 0.6875 & -0.0625 & -0.3125 & -0.3125 \\ -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.3125 & -0.0625 & 0.35416667 & 0.02083333 \\ -0.3125 & -0.0625 & 0.02083333 & 0.35416667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$v = (1 \ 0 \ -1/3 \ -2/3)^T$ Найдём разность потенциалов первого и четвёртого узла:

$$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Проверка прямым расчётом:

От узла 1 к узлу 2: 1

От узла 2 к 4: $\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+1}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$

Итого, от 1 к 4: $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

4 Пример 2

Нам дана следующая матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу степеней вершин:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

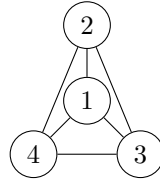


Рис. 2: Пример графа с четырьмя вершинами, построенный по матрице смежности M

Вычтем из матрицы степеней матрицу смежности:

$$G - M = L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Полученную матрицу можно интерпретировать, как коэффициенты системы уравнений Киргхофа для неориентированного графа:

$$Lv = b$$

Теперь, по описанному выше алгоритму получаем псевдообратную матрицу:

$$L^+ = (L^T L)^{-1} L^T$$

Опуская вычисления, получим:

$$L^+ = \begin{pmatrix} 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 \\ -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 \end{pmatrix}$$

Найдём вектор напряжений v :

$$v = L^+ b = \begin{pmatrix} 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 \\ -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v = (0.25 \ 0 \ 0 \ -0.25)^T$$

Найдём разность потенциалов в первом узле и в четвёртом:

$$0.25 - (-0.25) = 0.5$$

Ответ: 0.5

5 Код на python (Позже перенесу на Octave)

```
import numpy as np
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
a, b = 1, 4 # номера вершин, между которыми будем искать сопротивление.

#Матрица смежности заданного графа
P0= [[0, 1, 1, 1],
     [1, 0, 1, 1],
     [1, 1, 0, 1],
     [1, 1, 1, 0],]
#Рисуем граф
G = nx.DiGraph(np.matrix(P0))
nx.draw(G, with_labels=True, node_size=300, arrows=False)
plt.show()
#Добавляем степени вершин
```

```

P1 = np.array(P0)
if P1[0][0] == 0:
P1 = np.array(P0) * -1
for i, row in enumerate(P0):
d = sum(row)
P1[i][i] =d

L = P1
print(L)
#Получили матрицу Киргофа (Матричный лапласиан)
# Находим элементы псевдообратной матрицы
L_plus = np.linalg.pinv(L)
print(L_plus)
h = np.array([0]*L_plus[0].size)
h[a-1] = 1
h[b-1] = -1

# Находим резистивное расстояние между узлами 1 и 4
answer_v = np.dot(L_plus, h)
answer = answer_v[a-1] - answer_v[b-1]

print(f"Резистивное расстояние между узлами {a} и {b}:", answer)

```

Список литературы

- [1] Douglas J. Klein. *Resistance-Distance Sum Rules*. Croatica Chemica Acta, 2002.
- [2] Randic M. J. Klein D. J. *Resistance Distance*. J. Math. Chem, 1993.