ИДЗ №5

Вершинин Данил Алексеевич

18 января 2024 г.

1 Доказать, исходя из определения, равномерную сходимость функционального ряда на отрезке [0, 1]. При каких n абсолютная величина остатка ряда не превосходит 0,001 для любого $x \in [0, 1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-19}},\ x \in [0,1],\ \epsilon = 0.001$$

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{\sqrt[3]{8k^3-19}}\right| \leq \sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt[3]{8(n+1)^3-19}}\right| = \frac{1}{|\sqrt[3]{8(n+1)^3-19}|} < \epsilon = 0.001$$

$$\sqrt[3]{8(n+1)^3-19} > 1000$$

$$8(n+1)^3 - 19 > 1000^3$$

$$n+1 > \sqrt[3]{\frac{1000^3+19}{8}}$$

$$n > \sqrt[3]{\frac{1000^3+19}{8}} - 1 = \frac{\sqrt[3]{1000^3+19}}{2} - 1 > \frac{1000}{2} - 1$$

$$n > 499$$

2 Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1},\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Рассмотрим числитель, при $n \geq 1$ и $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $x^{2n} \leq \frac{1}{4^n}$. Отсюда получаем, что $(n+1)^4 x^{2n} \leq \frac{(n+1)^4}{4^n}$.
Рассмотрим знаменатель, при $n \geq 1$, $2n+1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{2n+1} < 1$. Из этих рассуждений получаем:

$$\sup_{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}}\left|\frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1}\right| \leq \frac{(n+1)^4}{4^n}$$

Докажем сходимость:

$$\frac{(n+1)^4}{4^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^4}{4^n}$$

Воспользуемся методом д'Аламбера:

$$D = \frac{(n+1)^4}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{n^4} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{4} < 1$$

Этот ряд сходится. Следовательно, изначальный ряд сходится равномерно.
Также, мажорирующим рядом для него является: $\sum \frac{(n+1)^4}{4^n}$.

3 Найти мажорирующий ряд (исправлена опечатка)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} x^n}{1+x^{2n}},\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$\sup_{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}} \left| \frac{2^{\frac{n}{2}} x^n}{1+x^{2n}} \right| = \sup_{0<x<\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{n}{2}} x^n}{1+x^{2n}} = \sup_{0<y<\frac{1}{2^n}} \frac{2^{\frac{n}{2}} y}{1+y^2} = \frac{2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{2^{-\frac{n}{2}} 2^{2n}}{4^n+1} \leq \frac{2^{\frac{3}{2}n}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}}$$

$$\left(\frac{y}{1+y^2}\right)' = \frac{1+y^2-2y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} = 0,\ \Rightarrow y = 1$$

Воспользуемся методом д'Аламбера:

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}} \times \frac{\sqrt{2}^n}{1} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Ряд $\sum \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ сходится.
Мажорирующий ряд равен $\sum \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$

4 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4},\ 0 < x < +\infty$$

$$\sup_{x>0} \left| \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4} \right| \leq \sup_{x>0} \frac{x^2}{1+n^3x^4} = \frac{1}{2\sqrt{n^3}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\left(\frac{x^2}{1+n^3x^4}\right)' = \frac{2x(1+n^3x^4)-4n^3x^5}{(1+n^3x^4)^2} = 0$$

$$1 = n^3x^4 \ \Rightarrow \ x = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$$

$$\frac{x^2}{1+n^3x^4} = \left| \begin{array}{c} x=\infty \\ x=0 \\ x=\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \end{array} \right| = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{n^3}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^3}(1+n^3\frac{1}{n^3})} = \frac{1}{2\sqrt{n^3}}$$

$\frac{1}{n^{3/2}}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $3/2$. Следовательно, первоначальный ряд сходится раномерно.

5 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{x}{n})\sin(2nx)}{x^2+4n},\ -\infty < x < +\infty$$

$$\sup_{x>0} \left| \frac{\sin(\frac{x}{n})\sin(2nx)}{x^2+4n} \right| \leq \sup_{x>0} \frac{x}{n(x^2+4n)} = \frac{1}{4n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\left(\frac{x}{x^2+4n}\right)' = \frac{x^2+4n-2x^2}{(x^2+4n)^2} = 0$$

$$4n = x^2 \ \Rightarrow \ x = 2\sqrt{n}$$

$$\frac{x}{n(x^2+4n)} = \left| \begin{array}{c} x=\infty \\ x=0 \\ x=2\sqrt{n} \end{array} \right| = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4n^{3/2}} \end{cases}$$

$$\frac{2\sqrt{n}}{n(4n+4n)} = \frac{1}{4n^{3/2}}$$

$\frac{1}{n^{3/2}}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $3/2$. Следовательно, первоначальный ряд сходится раномерно.

6 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n}{x})\sin(\frac{x}{n})}{1+nx^2},\ 0<x<+\infty$$

$$\sup_{x>0}\left|\frac{\sin(\frac{n}{x})\sin(\frac{x}{n})}{1+nx^2}\right|\leq\sup_{n>0}\frac{x}{n(1+nx^2)}=\frac{1}{2n^{3/2}}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)'=\frac{1+nx^2-2x^2n}{(1+nx^2)^2}=\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}=0$$

$$x^2=\frac{1}{n},\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{x}{n(1+nx^2)}=\left|\begin{array}{c}x=\infty\\x=0\\x=\frac{1}{\sqrt{n}}\end{array}\right|=\begin{cases}0\\0\\\frac{1}{2n^{3/2}}\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}n(1+n\frac{1}{n})}=\frac{1}{2n^{3/2}}$$

$\frac{1}{n^{3/2}}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $3/2$. Следовательно, первоначальный ряд сходится раномерно.

7 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x\sin(\frac{x}{\sqrt{n}})}{x^3+n}\right)^2,\ 0<x<+\infty$$

$$\sup_{x>0}\left|\frac{x\sin(\frac{x}{\sqrt{n}})}{x^3+n}\right|^2\leq\sup_{x>0}\left|\frac{x^2}{\sqrt{n}(x^3+n)}\right|^2=\sup_{x>0}\frac{x^4}{n(x^3+n)^2}=\frac{2^{4/3}}{9n^{5/3}}\sim\frac{1}{n^{5/3}}$$

$$\left(\frac{x^4}{n(x^3+n)^2}\right)'=\frac{4x^3n(x^3+n)^2-x^4n2(x^3+n)3x^2}{n^2(x^3+n)^4}=\frac{4nx^3-2x^6}{n(x^3+n)^3}$$

$$4nx^3=2x^6\ \Rightarrow\ 2n=x^3\ \Rightarrow\ x=\sqrt[3]{2n}$$

$$\frac{x^4}{n(x^3+n)^2}=\left|\begin{array}{c}x=\infty\\x=0\\x=\sqrt[3]{2n}\end{array}\right|=\begin{cases}0\\0\\\frac{2^{4/3}}{9n^{5/3}}\end{cases}$$

$$\frac{(2n)^{4/3}}{n(3n)^2}=\frac{2^{4/3}}{9n^{5/3}}$$

$\frac{1}{n^{5/3}}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $5/3$. Следовательно, первоначальный ряд сходится раномерно.

8 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{1}{1+nx}\right),\ 0<x<+\infty$$

$$\sup_{x>0}\left|\sin^2\left(\frac{1}{1+nx}\right)\right|\leq\sup_{x>0}\left(\frac{1}{1+nx}\right)^2\leq\sup_{x>0}\left(\frac{1}{nx}\right)^2\leq\sup_{x>0}\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}$$

$\frac{1}{n^2}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем 2. Следовательно, первоначальный ряд сходится раномерно.

9 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(1+nx)\sqrt{nx}},\ 0<x<\pi$$

$$\sup_{0<x<\pi} \left| \frac{\sin(nx)}{(1+nx)\sqrt{nx}} \right| \le \sup_{0<x<\pi} \left| \frac{1}{(1+nx)\sqrt{nx}} \right| \le \sup_{0<x<\pi} \left| \frac{1}{(nx)^{3/2}} \right| \le \sup_{0<x<\pi} \left| \frac{1}{n^{3/2}} \right| = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\frac{1}{n^{3/2}}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $3/2$. Следовательно, первоначальный ряд сходится раномерно.

10 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^2} e^{-n^2/x},\ 0<x<+\infty$$

$$\sup_{x>0} \frac{ne^{-\frac{n^2}{x}}}{x^2} = \frac{4e^{-2}}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$$

$$\left(\frac{e^{-\frac{n^2}{x}}}{x^2} \right)' = \frac{e^{-\frac{n^2}{x}} \times \frac{n^2}{x^2} x^2 - 2xe^{-\frac{n^2}{x}}}{x^4} = \frac{e^{-\frac{n^2}{x}}(n^2-2x)}{x^4} = 0$$

$$x = \frac{n^2}{2}$$

$$\frac{ne^{-\frac{n^2}{x}}}{x^2} = \left| \begin{array}{c} x=\infty \\ x=0 \\ x=\frac{n^2}{2} \end{array} \right| = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{4e^{-2}}{n^3} \end{cases}$$

$$\frac{4ne^{-2}}{n^4} = \frac{4e^{-2}}{n^3}$$

$\frac{1}{n^3}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем 3. Следовательно, первоначальный ряд сходится раномерно.

11 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2n+n^2x^2},\ x \in [0,1]$$

Признак Абеля-Дирихле. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на [a, b], и $b_n(x)$ - монотонная ограниченная последовательность, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на [a, b].

В нашем случае, $a_n(x) = \frac{1}{2n+n^2x^2}$ и $b_n(x) = \sin(nx)$.

Последовательность $b_n(x)$ является ограниченной, так как $-1 \le \sin(nx) \le 1$ для всех x и n.

Последовательность $a_n(x)$ монотонно убывает по n для каждого фиксированного x, так как при увеличении n знаменатель увеличивается, делая всю дробь меньше.

Таким образом, по признаку Абеля-Дирихле, ряд $\frac{\sin(nx)}{2n+n^2x^2}$ сходится равномерно на [0, 1].

12 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(nx)}{\sqrt{n}(2nx^2+1)},\ 0<x<+\infty$$

$$\sup_{x>0} \left| \frac{\sqrt{x}\sin(nx)}{\sqrt{n}(2nx^2+1)} \right| \le \sup_{x>0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}(2nx^2+1)} \le \sup_{x>0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{x}{(2nx^2+1)^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sup_{x>0} \frac{x}{(2nx^2+1)^2}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sup_{x>0} \frac{x}{(2nx^2)^2}} \le \frac{1}{2n^{3/2}} \sqrt{\sup_{x>0} \frac{x}{x^4}} \le \frac{1}{2n^{3/2}} \sqrt{\sup_{x>0} \frac{x^4}{x^4}} = \frac{1}{2n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\frac{1}{n^{3/2}}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $3/2$. Следовательно, первоначальный ряд сходится раномерно.