

Оглавление

Введение	2
1 Построение математической модели	3
2 Анализ математической модели	5
3 Вычислительные эксперименты	7
3.1 Алгоритм решения	7
3.2 Программа для ЭВМ	7
3.3 Результаты экспериментов	9
3.3.1 Эксперимент 1	9
3.3.2 Эксперимент 2	11
4 Заключение	14
Список использованных источников	15

Введение

Взаимодействие хищников и жертв — один из ключевых процессов, определяющих структуру и динамику экосистем. Исследование этих взаимоотношений важно не только для фундаментальной экологии, но и для решения прикладных задач: управления популяциями, сохранения биоразнообразия, прогнозирования последствий антропогенного воздействия и разработки устойчивых стратегий рыболовства и сельского хозяйства.

Классическая модель Лотки-Вольтера, предложенная в начале XX века, стала основой для изучения динамики популяций. Однако в реальных экосистемах взаимодействия между видами гораздо сложнее, чем описано в базовой модели. Изменения среды обитания, конкуренция за ресурсы, сезонные колебания и эволюционные адаптации могут существенно влиять на устойчивость и цикличность популяций. В связи с этим актуальной задачей остается развитие и уточнение математических моделей, способных более точно описывать реальные процессы в природе.

Современные исследования направлены на расширение классической модели за счет учета пространственной структуры популяций, временных задержек, стохастических факторов и нелинейных эффектов. Такие подходы позволяют не только глубже понять механизмы экосистемных взаимодействий, но и разрабатывать научно обоснованные методы управления природными ресурсами и защиты исчезающих видов.

1 Построение математической модели

Основная идея модели заключается в том, что численность хищников зависит от доступности жертв, а популяция жертв ограничивается воздействием хищников.

Будем рассматривать взаимодействие популяций во времени. Скажем, что $x(t)$ - отражает популяцию жертв, $y(t)$ - популяцию хищников. Единицы измерения в данной системе предлагается опустить, измеряя популяции некоторым числом особей. Модель обладает физическим смыслом при $x(t) > 0, y(t) > 0$.

Предположим, что популяции изолированы. В таком случае, популяция жертв будет увеличиваться, и скорость роста также будет расти пропорционально числу особей в популяции. Популяция хищников, напротив, со временем будет уменьшаться - в отсутствии пропитания, особи могут гибнуть от конкуренции внутри популяции. Заметим, что скорость смертности будет уменьшаться со временем пропорционально количеству особей в популяции.

На основании этих рассуждений можно построить следующую модель:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y \end{cases}, \quad (1)$$

где x - численность жертв, y - численность хищников, $\alpha > 0$ - скорость размножения жертв, $\gamma > 0$ - смертность хищников.

Теперь рассмотрим как взаимодействие популяций будет влиять на их "объём".

Скорость изменения будет зависеть от объёма обеих популяций. Чем больше численность хищников в замкнутой системе, тем скорее будет уменьшаться популяция жертв. В тоже время, увеличение численности популяции жертв повлечёт за собой увеличение числа хищников, т.к. появляется избыток питания, что позволяет существовать большему количеству хищников.

Таким образом, можно сделать вывод, что скорость изменения обеих популяций будет изменяться пропорционально объёму обеих

популяций: увеличение количества хищников влечёт уменьшение количества жертв, уменьшение количества жертв влечёт уменьшение количества хищников и наоборот.

Учитывая эти рассуждения дополним систему (1) новыми составляющими:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}, \quad (2)$$

где $\beta > 0$ - коэффициент смертности от встречи с хищником, $\delta > 0$ - коэффициент конверсии пойманной жертвы в новых хищников (прирост за счёт избытка пищи).

Таким образом, потроенная модель конкуренции является системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения единственного решения необходимо построить задачу Коши (добавить начальные условия):

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

Эта система демонстрирует периодические колебания численности обеих популяций, которые могут напоминать реальные циклы в природе, например, взаимодействие рыси и зайца. Однако модель является упрощённой и не учитывает многие факторы, такие как насыщение хищников, изменения среды и конкуренцию внутри видов.

2 Анализ математической модели

Очевидным является тривиальное решение $(0,0)$.

Найдём точки равновесия уравнения (2).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0 \\ \delta xy - \gamma y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{bal} = \frac{\gamma}{\delta} \\ y_{bal} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}. \quad (4)$$

Теперь проанализируем устойчивость решений, применив метод первого приближения. Для этого построим матрицу Якоби (J), найдём её собственные значения, подставив точки равновесия, и по ним укажем тип устойчивости.

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix} \quad (5)$$

Подставляем тривиальное решение:

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -\gamma, \lambda_2 = \alpha \quad (6)$$

Заметим, что собственные значения вещественны, но различны по знаку. Это означает, что точка $(0,0)$ - является седловой точкой.

Подставим нетривиальную точку равновесия:

$$J|_{(x_{bal}, y_{bal})} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma} \quad (7)$$

Собственные значения в точке равновесия (x_{bal}, Y_{bal}) полностью мнимые. Следовательно точка является неасимптотически устойчивой. Изменение величин в ней не будет происходить, хотя на удалении от неё будут появляться циклы

Теперь найдём первый интеграл. Для этого поделим первое уравнение на второе и разделим переменные:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha x - \beta yx}{\delta xy - \gamma y} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{y} - \beta \right) dy + \left(\frac{\gamma}{x} - \delta \right) dy = 0. \quad (8)$$

Интегрируя, получим следующий результат:

$$\alpha \ln(|y|) - \beta y + \gamma \ln(|x|) - \delta x = \text{const}. \quad (9)$$

Выражение (9) показывает, что соотношение величин будет постоянным с течением времени. Следовательно, зная, что объёмы популяций меняются, в какой-то момент соотношения вернутся к начальным значениям.

3 Вычислительные эксперименты

3.1 Алгоритм решения

Для численного решения системы дифференциальных уравнений будем использовать алгоритм Рунге-Кутты [1] четвертого порядка. Результатом будет являться три массив значений: массив значений времени и два массива численных значений решения (хищники и жертвы). После построим графики решений на координатной и фазовой плоскостях.

3.2 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для расчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек numpy (вычисления) и matplotlib + seaborn (визуализация).

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import seaborn as sns
4
5
6 alpha = 2
7 beta = 2
8 delta = 1
9 gamma = 4
10
11
12 def lotka_volterra(x, y):
13     dxdt = alpha * x - beta * x * y
14     dydt = delta * x * y - gamma * y
15     return np.array([dxdt, dydt])
16
17
18 def runge_kutta_4(f, x0, y0, T, dt):
19     t_values = np.arange(0, T, dt)
20     x_values = np.zeros(len(t_values))
21     y_values = np.zeros(len(t_values))
22
23     x_values[0] = x0
24     y_values[0] = y0
25
26     for i in range(1, len(t_values)):
27         x, y = x_values[i - 1], y_values[i - 1]
```

```

28     k1 = dt * f(x, y)
29     k2 = dt * f(x + 0.5 * k1[0], y + 0.5 * k1[1])
30     k3 = dt * f(x + 0.5 * k2[0], y + 0.5 * k2[1])
31     k4 = dt * f(x + k3[0], y + k3[1])
32
33     x_values[i] = x + (k1[0] + 2 * k2[0] + 2 * k3[0] + k4[0]) / 6
34     y_values[i] = y + (k1[1] + 2 * k2[1] + 2 * k3[1] + k4[1]) / 6
35
36     return t_values, x_values, y_values
37
38
39
40 initial_conditions = [(1, 3), (6, 1), (4,1)]
41 T = 10
42 n = 1000
43 dt = T / n
44
45 sns.set_theme(style="darkgrid")
46 plt.figure(figsize=(12, 6))
47
48 for x0, y0 in initial_conditions:
49     t_values, x_values, y_values = runge_kutta_4(lotka_volterra, x0, y0,
50         T, dt)
51     plt.plot(t_values, x_values, label='x', (x0, y0), linewidth=2)
52     plt.plot(t_values, y_values, label='y', (x0, y0), linewidth=2)
53
54 plt.xlabel("Time")
55 plt.ylabel("Population")
56 plt.title("Lotka–Volter model")
57 plt.legend()
58 plt.show()
59
60 plt.figure(figsize=(8, 6))
61
62 for x0, y0 in initial_conditions:
63     t_values, x_values, y_values = runge_kutta_4(lotka_volterra, x0, y0,
64         T, dt)
65     plt.plot(x_values, y_values, linewidth=2, label=f'({x0}, {y0})')
66     plt.plot(x_values[0], y_values[0], marker='o', markersize=5)
67
68 plt.xlabel("x")
69 plt.ylabel("y")
70 plt.title("Phase portrait of Lotka–Volter model")
71 plt.legend()
72 plt.show()

```


3.3 Результаты экспериментов

Попробуем построить несколько решений системы с одинаковыми параметрами, но разными начальными условиями, включая точку равновесия.

3.3.1 Эксперимент 1

Для первого эксперимента были взяты следующие параметры

$$\alpha = 2, \beta = 2, \delta = 1, \gamma = 4$$

. Покажем результаты графически:



Рисунок 1 — Моделирование для начальных условий: $(1,3), (6,1), (4,1)$.

Как можно видеть на (Рис. 1) объёмы популяций представляют собой периодические функции. Популяции взаимодействуют ровно так, как мы описали в (2). Отметим, что при начальном значении $(4,1)$ - популяции не изменяются.

Посмотрим на решение в фазовой плоскости (x,y) :

Точками на Рис 2 указаны начальные условия. Центральная синяя точка - положение равновесия. Как было выяснено при анализе модели, точка равновесия является неасимптотически устойчивой. Поэтому можно наблюдать циклы на фазовой плоскости. Это также было определено из первого интеграла (9) системы уравнений.



Рисунок 2 — Решения с начальными условиями: $(1,3)$, $(6,1)$, $(4,1)$ на временном интервале $[0,10]$.

Поробуем уменьшить временной интервал, чтобы циклы не замкнулись:

Как видно на Рис. 3 циклы остались незамкнутыми. Кроме того, можно видеть, что они изменяются по направлению против часовой стрелки в данной фазовой плоскости.

Попробуем увеличить количество начальных параметров, чтобы увидеть действие седловой точки. Также, изменим и параметры.

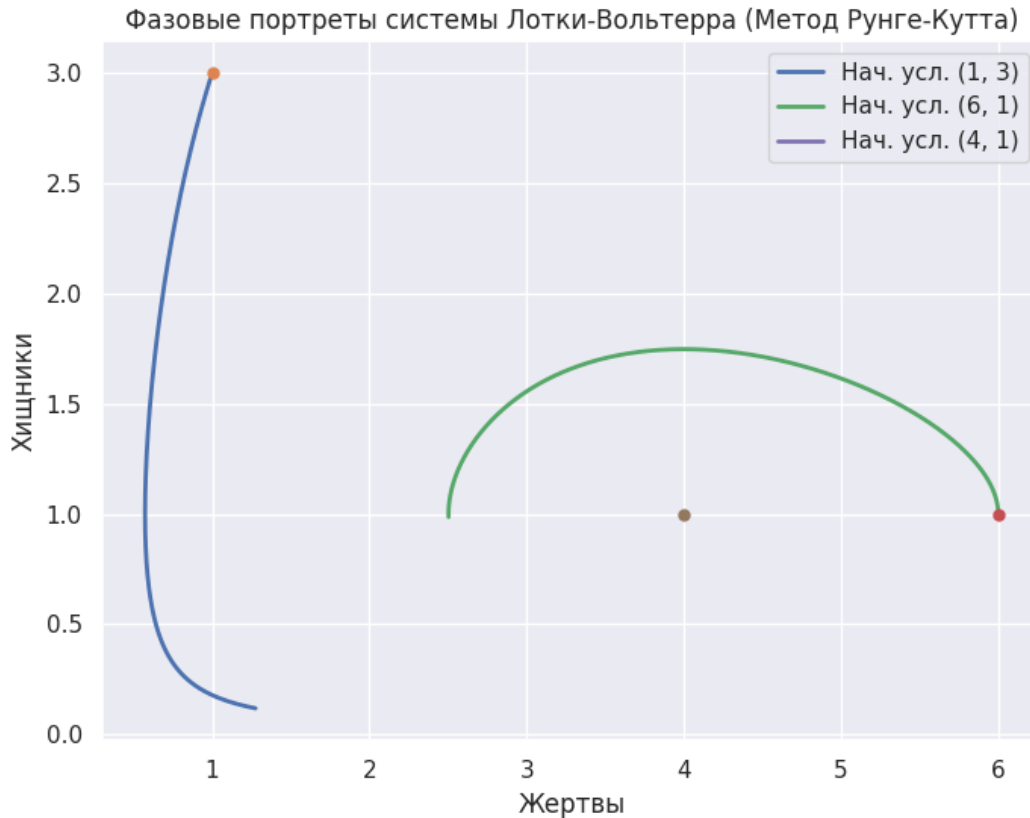


Рисунок 3 — Решения с начальными условиями: $(1,3)$, $(6,1)$, $(4,1)$ на временном интервале $[0,1]$.

3.3.2 Эксперимент 2

Для второго эксперимента были взяты следующие параметры

$$\alpha = 0.5, \beta = 1, \delta = 0.1, \gamma = 0.8$$

Заметим (рис. 4), что с уменьшением коэффициентов, модель стала более "плавной". Изменение числа популяций происходит медленнее, по сравнению с прошлыми результатами.

Кроме того, видно, что некоторые популяции приближаются к вымиранию. В реальном мире, подобный случай стал бы критическим для популяции жертв и хищников.

На фазовой плоскости Рис. 5 видно, что на рассматриваемом временном интервале замкнулись не все циклы. Это связано с тем,

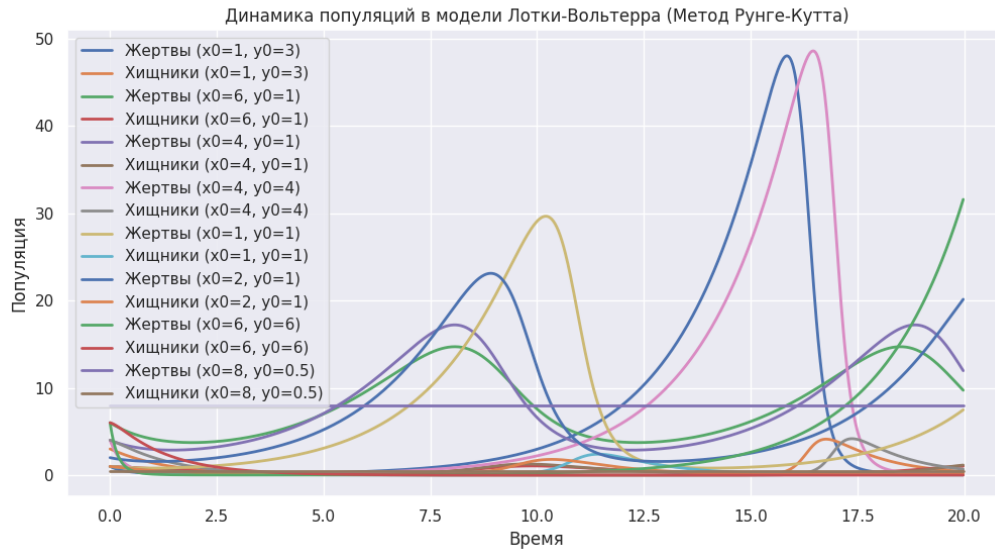


Рисунок 4 — Моделирование для начальных условий:
 $(1, 3), (6, 1), (4, 1), (4, 4), (1, 1), (2, 1), (6, 6), (8, 0.5) = (x_{bal}, y_{bal})$.

что некоторые популяции достигают крайне малых значений. И для возвращения на прежний уровень требуется больше времени.

Кроме того, Рис. 5 демонстрирует свойство седловой точки. Т.к. движение по плоскости происходит против часовой стрелки, то по оси хищников движение будет происходить к началу координат (как и было получено при анализе: $\lambda_2 < 0$), не пересекая ось хищников. Аналогично и для оси жертв - движение от начала координат ($\lambda_1 > 0$)/

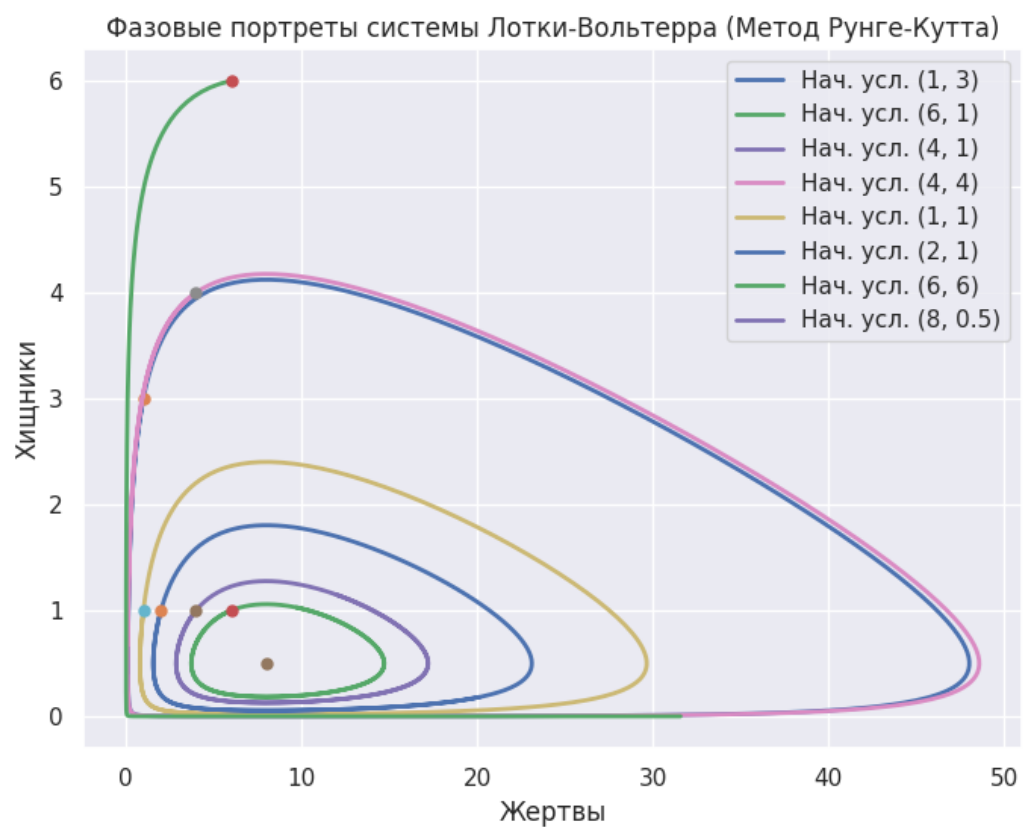


Рисунок 5 — Решения с указанными начальными условиями на временном интервале $[0,10]$.

4 Заключение

Была сформулирована математическая модель конкуренции в системе популяций хищник-жертва. Модель является системой из двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проведен анализ стационарных решений, определены точки равновесия, удовлетворяющие уравнению.

Реализован численный метод решения задачи для различных параметров системы. Численные вычисления подтвердили результаты теоретического анализа, в частности, характер устойчивости найденных точек равновесия.

Список использованных источников

1. *Н.С., Бахвалов.* Численные методы / Бахвалов Н.С. — Издательство "Наука" 1975.