

## Оглавление

Введение . . . . .	2
1 Построение математической модели . . . . .	3
2 Анализ математической модели . . . . .	5
3 Вычислительные эксперименты . . . . .	6
3.1 Алгоритм решения . . . . .	6
3.2 Программа для ЭВМ . . . . .	6
3.3 Результаты экспериментов . . . . .	8
4 Заключение . . . . .	16
Список использованных источников . . . . .	17

## **Введение**

В нашем мире множество процессов представляют собой колебания: звук представляет собой колебания воздуха, свет - колебания электромагнитных волн. Одной из фундаментальных моделей колебаний является математический маятник - идеализированная механическая система, состоящая из груза, представленного материальной точкой, который подвешен на невесомой нерастяжимой нити.

В этой работе рассматриваются уравнения движения математического маятника, его основные характеристики и влияние различных факторов на его динамику.

# 1 Построение математической модели

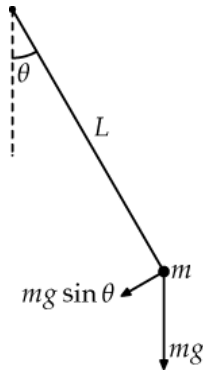


Рисунок 1 — Изображение математического маятника.

Введём полярную систему координат. В качестве переменной, описывающей движение маятника, выберем угол отклонения  $\theta$  от вертикали в радианах. Запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m \vec{a}, \quad (1)$$

где,  $\vec{F}$  - сила, приложенна к телу,  $m$  - масса тела,  $\vec{a}$  - ускорение тела.

Тангенциальная сила направлена по касательной к траектории движения. Сила натяжения нити не учитывается, т.к. она направлена по нормали и не влияет на угловое движение.

Выделяя тангенциальную составляющую проекции силы тяжести ( $ma_t = F_t$ ), получим:

$$F_t = -mg \sin(\theta), \quad (2)$$

где  $g$  - ускорение свободного падения.

Запишем ускорение в дифференциальной форме:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( L \frac{d\theta}{dt} \right) = L \ddot{\theta} \quad (3)$$

Тогда (2), с учётом (1, 3), можно переписать так:

$$mL \ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0 \quad (4)$$

В области малых углов  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Тогда (4) можно записать в виде линейной модели:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (5)$$

Таким образом мы получили, что колебания маятника описываются обыкновенным дифференциальным уравнением.

Обозначим  $\omega^2 = \frac{g}{L}$  и добавим начальные условия для получения единственного решения. Тогда, получим системы для (4) и (5):

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1 \end{cases} . \quad (6)$$

### Модели с внешними силами

Будем рассматривать линейную модель. Для нелинейной модели преобразования будут аналогичными.

Добавим в систему силу трения  $F_{\text{тр}}$ . Для простоты, пусть она будет пропорциональна скорости изменения угла  $\dot{\theta}$  с некоторым коэффициентом  $\mu > 0$ . Тогда модель преобразуется так:  $\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ .

На маятник может воздействовать внешняя сила, создавая вынужденные колебания:

$$F_e \sin(\omega_f t),$$

где  $F_e$  - амплитуда внешней силы (Н),  $\omega_f$  - циклическая частота (Гц = рад/с) . Добавим эту компоненту в модель:  $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = F_e \sin(\omega_f t)$ .

В случае, если на маятник действуют обе силы, описанные выше, то уравнение преобразуется так:  $\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega^2\theta = F_e \sin(\omega_f t)$ .

## 2 Анализ математической модели

Для анализа будем использовать линейную модель (5). Из курса дифференциальных уравнений известен вид решения:

$$\theta(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

. Тогда частное решение будет иметь равняться:

$$\theta(t) = \frac{\theta_1}{\omega} \sin(\omega t) + \theta_0 \cos(\omega t).$$

Заметим, что при начальных значениях  $\theta(0) = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$  маятник будет покоиться.

Используя тригонометрическую идентичность, мы можем выразить комбинацию синуса и косинуса в виде одного синуса. Для этого применим формулу синуса суммы:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Таким образом, мы можем записать:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t) + a_1 \omega \sin(\omega t).$$

Теперь мы можем выразить это в виде одной синусоидальной функции:

$$\alpha(t) = \rho \sin(\omega t + \phi) \tag{7}$$

где:

-  $\rho$  — амплитуда, которая определяется как:

$$\rho = \sqrt{\alpha_0^2 + (a_1 \omega)^2}$$

-  $\phi$  — фаза, которая определяется через соотношения:

$$\rho \sin \phi = \alpha_0,$$

$$\rho \cos \phi = a_1 \omega.$$

Как можно видеть из (7), результатом будет являться синусоида с некоторым смещением, зависящим от начальных параметров.

## 3 Вычислительные эксперименты

### 3.1 Алгоритм решения

Для построения математической модели введём замену переменных  $\beta(t) = \dot{\alpha}(t)$ , что позволяет записать исходное уравнение во втором порядке в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -\omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\alpha} = \beta, \\ \beta(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Аналогичным образом уравнения, включающие внешние воздействия, можно привести к этому же виду.

Для численного решения данной системы будем использовать метод Рунге-Кутты, что позволит получить решение с заданными параметрами. После вычисления построим фазовый портрет и график изменения угла во времени.

### 3.2 Программа для ЭВМ

В качестве языка программирования для расчётов и визуализации был выбран Python с использованием библиотек `numpy` (вычисления) и `matplotlib` (визуализация).

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 g = 9.81
5 l = 1.0
6 mu = 0.0
7 m = 1.0
8 F = 0
9 omega_f = np.sqrt(g/l)
10 theta0 = np.pi / 10
11 omega0 = 0
12
13 def pendulum_eq(t, y):
14     theta, omega = y
15     dtheta_dt = omega
```

```

16     domega_dt = - (g / l) * theta - (mu / m) * omega + F * np.sin(omega_f
17         * t)
18
19     return np.array([dtheta_dt, domega_dt])
20
21 def pendulum_eq_lin(t, y):
22     theta, omega = y
23     dtheta_dt = omega
24     domega_dt = - (g / l) * np.sin(theta) - (mu / m) * omega + F *
25         np.sin(omega_f * t)
26     return np.array([dtheta_dt, domega_dt])
27
28 def runge_kutta4(f, y0, t_span, dt):
29     t_values = np.arange(t_span[0], t_span[1] + dt, dt)
30     y_values = np.zeros((len(t_values), len(y0)))
31     y_values[0] = y0
32
33     for i in range(1, len(t_values)):
34         t = t_values[i - 1]
35         y = y_values[i - 1]
36
37         k1 = dt * f(t, y)
38         k2 = dt * f(t + dt / 2, y + k1 / 2)
39         k3 = dt * f(t + dt / 2, y + k2 / 2)
40         k4 = dt * f(t + dt, y + k3)
41
42         y_values[i] = y + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
43
44     return t_values, y_values.T
45
46 t_span = (0, 25)
47 dt = 0.025
48
49 t_vals, sol = runge_kutta4(pendulum_eq, [theta0, omega0], t_span, dt)
50 t_vals_lin, sol_lin = runge_kutta4(pendulum_eq, [theta0, omega0], t_span,
51     dt)

```

Зададим  $L = 1\text{м}$ , тогда собственная частота будет равна :  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \approx 3.13$ .

### 3.3 Результаты экспериментов

#### Модель без дополнительных сил

Сравним линейную и нелинейную модель при разных углах наклона и нулевой начальной скорости. Промежуток времени  $[0, 25]$ , шаг - 0.025:

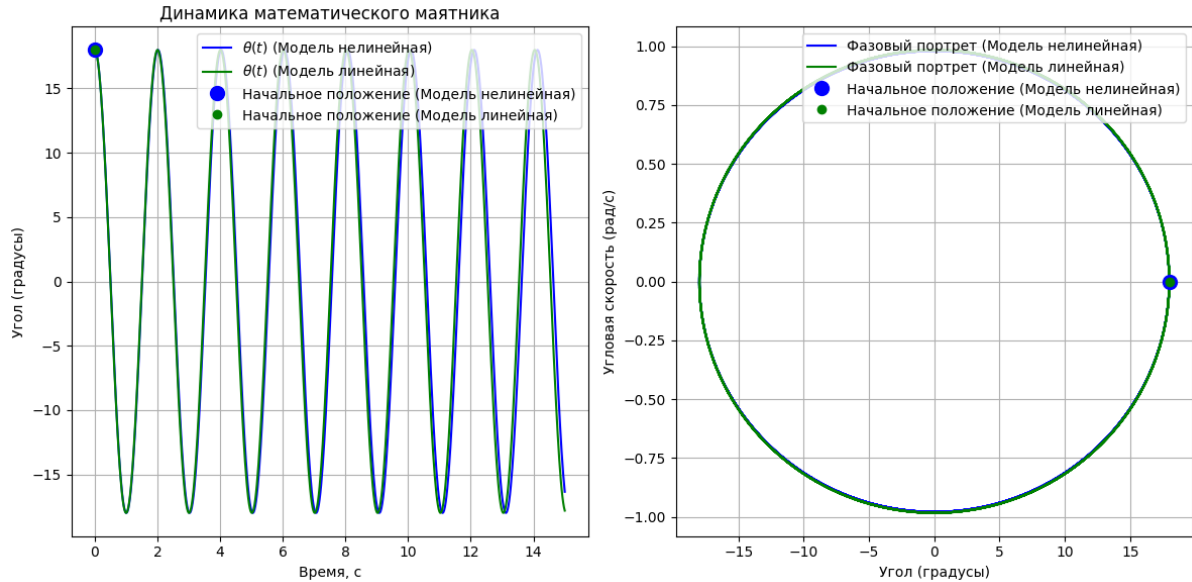


Рисунок 2 —  $\theta(0) = \pi/10$ .

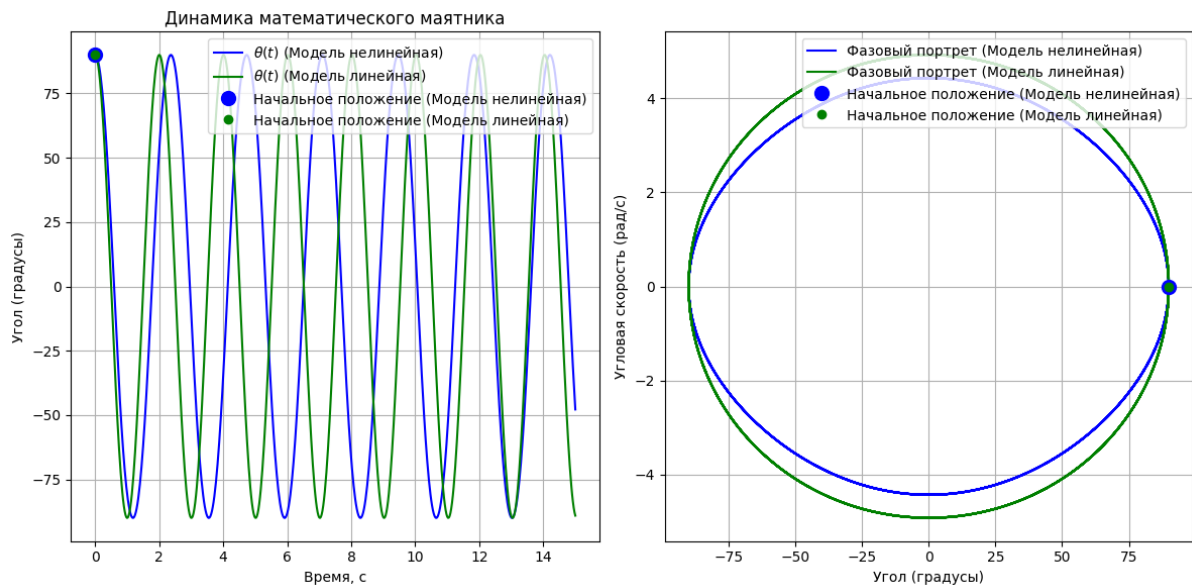


Рисунок 3 —  $\theta(0) = \pi/2$ .

Как видно на графиках (рис. 2, 3), при небольшом угле наклона разница между моделями не большая. При увеличении угла разница



возрастает, что влечёт погрешность линейной модели. На фазовом портрете нелинейная модель имеет более узкий эллипс, что означает меньшую скорость.

Для дальнейших экспериментов будем использовать линейную модель при малых отклонениях.

## Модель с трением

Рассмотрим влияние трения на линейную модель про начальных условиях:  $\theta(0) = \pi/10$ ,  $\dot{\theta} = 0$ . Промежуток времени  $[0,40]$ , шаг - 0.04:

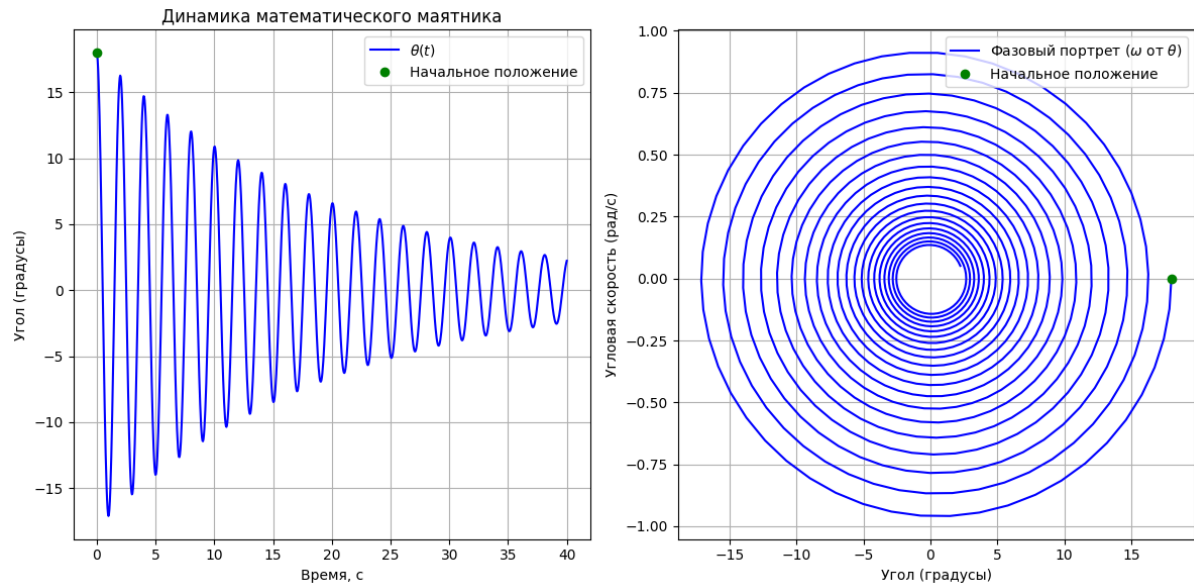


Рисунок 4 —  $\mu = 0.1$ .

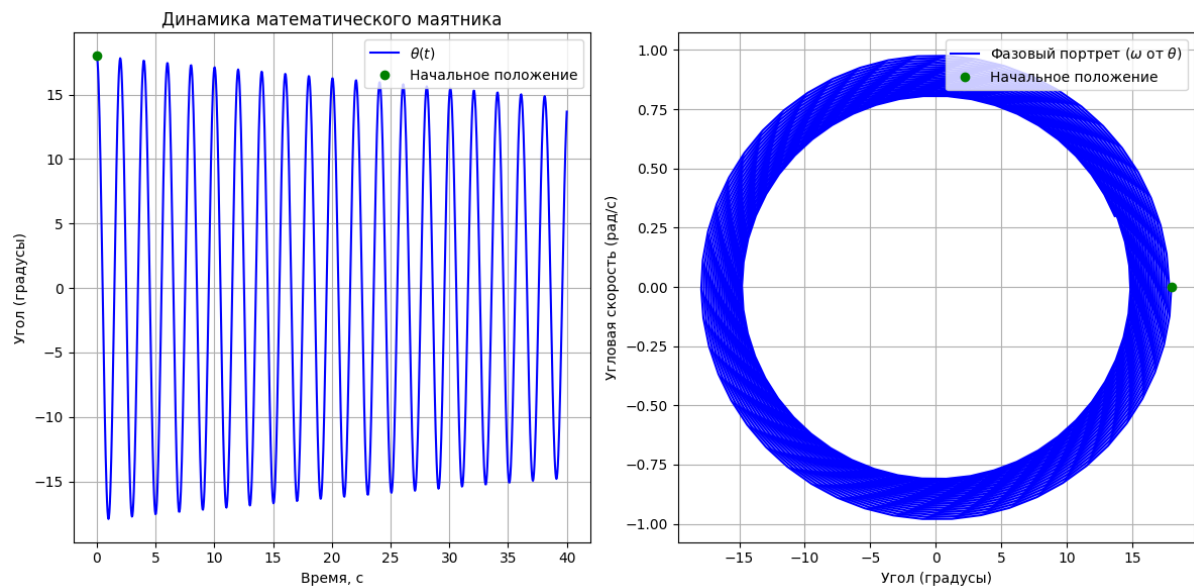


Рисунок 5 —  $\mu = 0.01$ .

Результаты показывают (Рис. 4, 5). что под действием силы трения колебания становятся затухающими. Кривая на фазовой плоскости стремится к нулю. Чем больше коэффициент трения ( $\mu$ ), тем быстрее затухают колебания.

## Модель с вынужденными колебаниями

Рассмотрим влияние внешней силы на линейную модель при начальных условиях:  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\theta} = 0$ . Промежуток времени  $[0, 25]$ , шаг - 0.025:

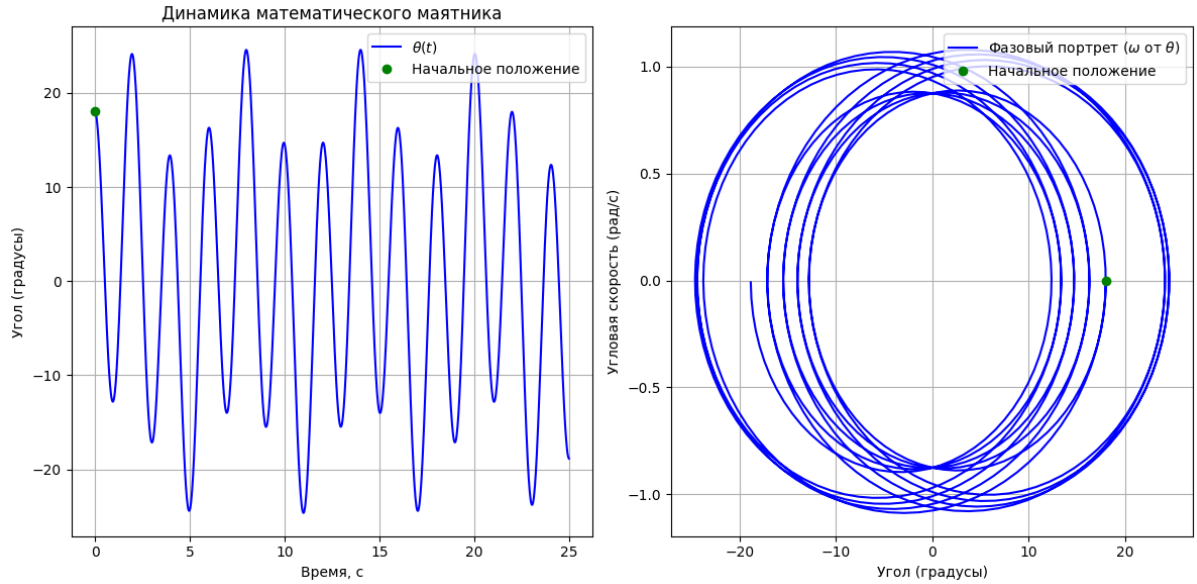


Рисунок 6 —  $F_e = 1, \omega_f = 1$ .

При воздействии внешних сил, происходит смещение значений угла наклона маятника, что отражается на фазовой плоскости (Рис. 6).

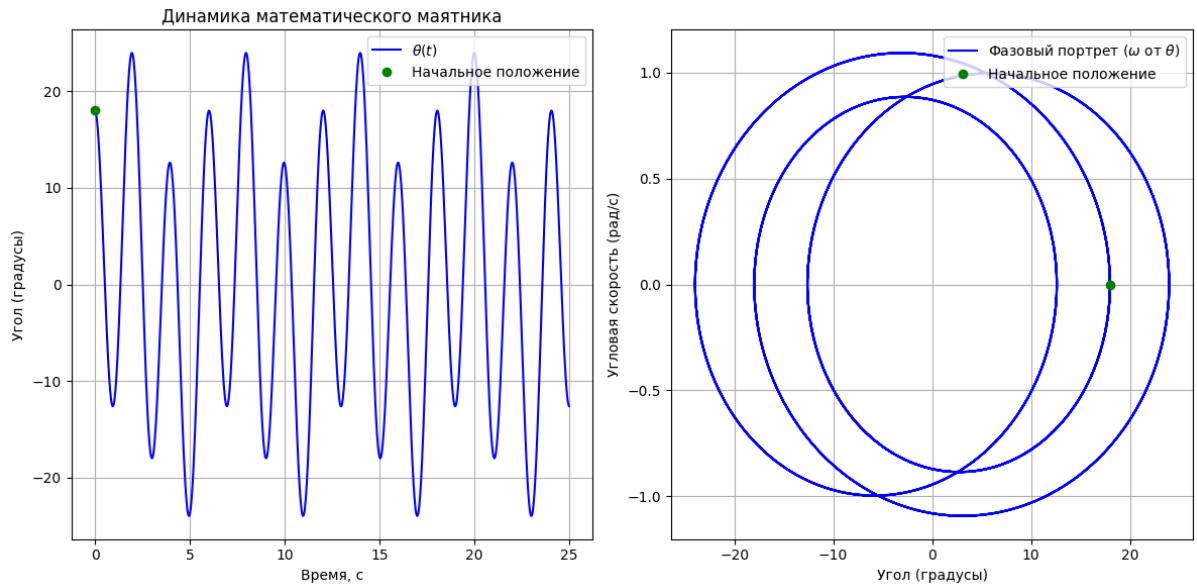


Рисунок 7 —  $F_e = 1, \omega_f = \omega/3$ .

При воздействии внешних сил с частотой, равной целой доли от собственной частоты маятника, на графике углов и фазовой плоскости видно (Рис. 7) периодичность колебаний.

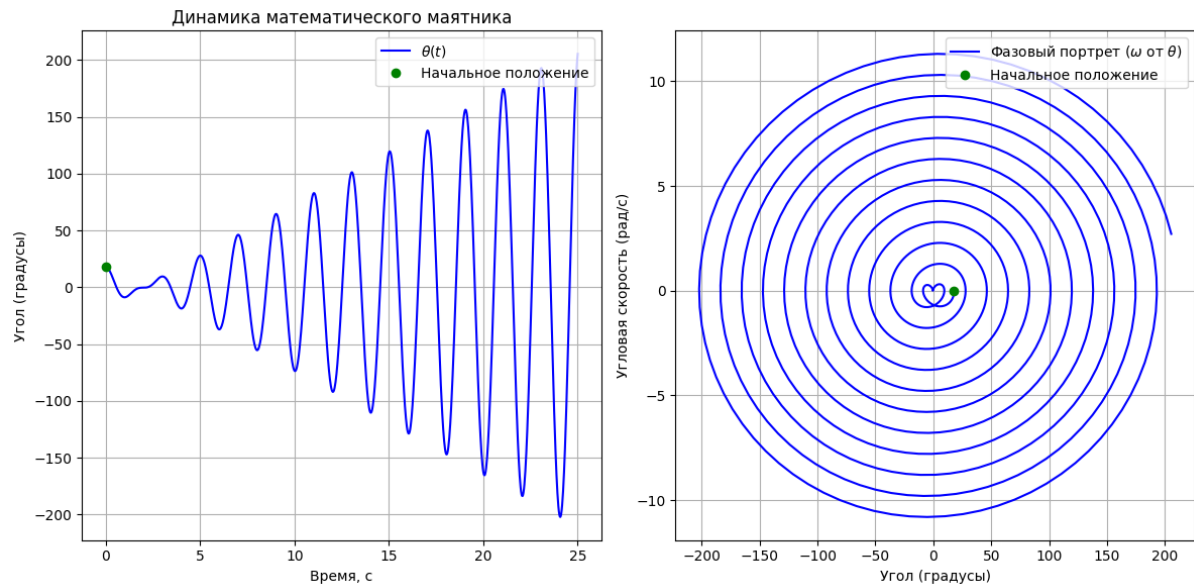


Рисунок 8 —  $F_e = 1, \omega_f = \omega$ .

В случае совпадения собственной частоты и частоты воздействия внешних сил, происходит эффект резонанса - амплитуда колебаний маятника неограниченной растёт (Рис. 8).

## Модель с трением и вынужденными колебаниями

Рассмотрим модель с обеими силами при начальных условиях:  
 $\theta(0) = \pi/10$ ,  $\dot{\theta} = 0$ . Промежуток времени  $[0,100]$ , шаг - 0.1:

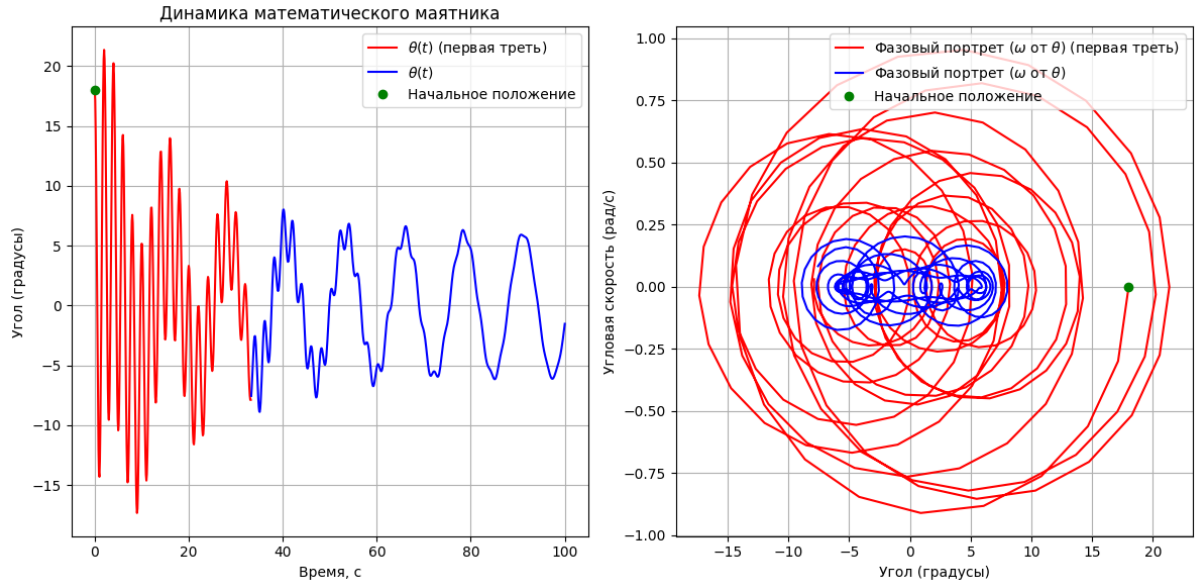


Рисунок 9 —  $F_e = 1, \omega_f = 0.5, \mu = 0.1$ .

Изначальные хаотические колебания сглаживаются (Рис. 9).  
 Постепенно происходит смена частоты и амплитуды.

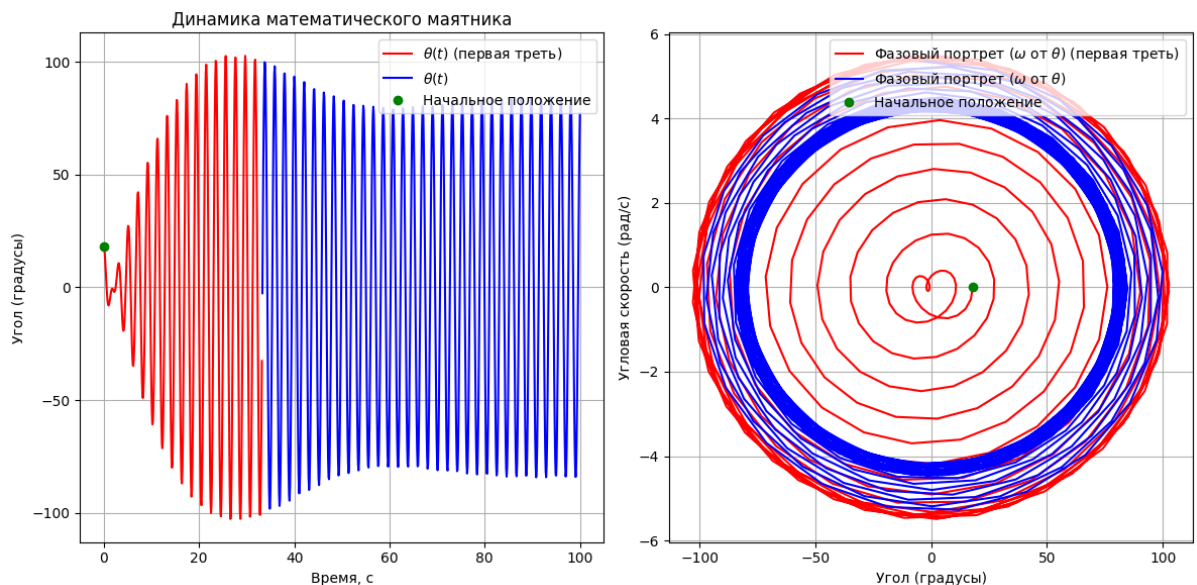


Рисунок 10 —  $F_e = 1, \omega_f = \omega - 0.1, \mu = 0.1$ .

При приближении к собственной частоте период и амплитуда устанавливаемых колебаний увеличиваются (Рис. 10).

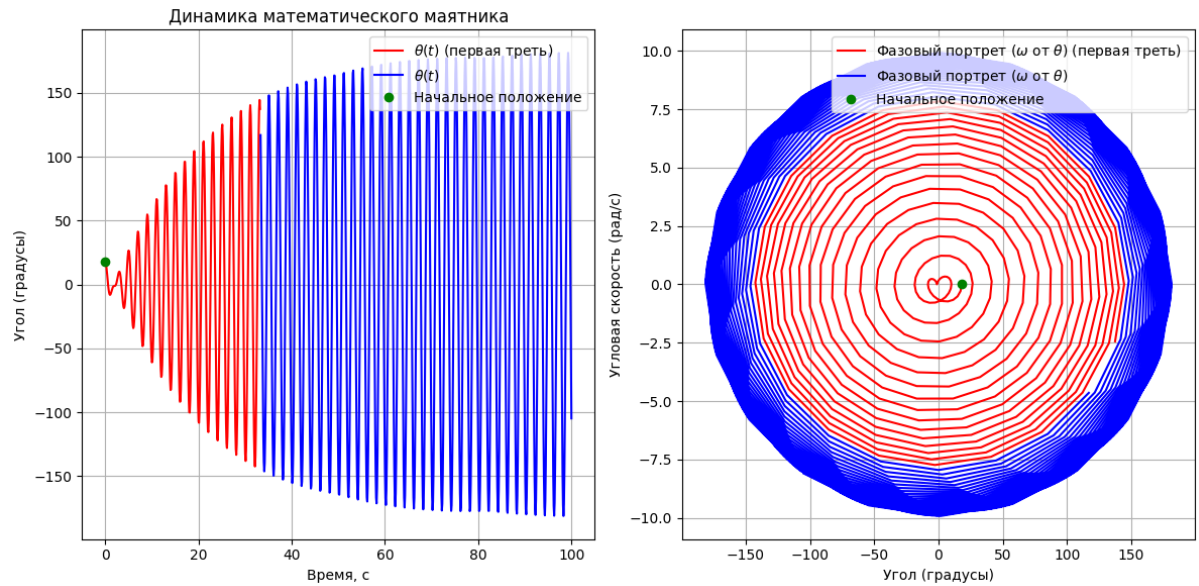


Рисунок 11 —  $F_e = 1, \omega_f = \omega, \mu = 0.1$ .

В условиях резонанса достигается наибольшая амплитуда колебаний. В отличие от модели без учета трения, в данном случае амплитуда не будет расти бесконечно. Однако наличие силы трения не означает, что резонансная частота совпадает с собственной частотой системы.

## Резонанс

Для исследования резонанса рассмотрим резонансные кривые. Т.к. этот эффект связан с частотой, то будем выбирать несколько значений частоты, вынуждающих колебания около неё. Для каждой из таких частот получим решение численным методом и найдём из последней четверти максимальное по модулю. Таким образом, мы получим зависимость  $A = \theta(\omega_f)$ . Для оценки точности сравним полученное значение с известной аналитической формулой (примем массу за 1 кг):

$$\theta(\omega_f) = \frac{F_e}{m\sqrt{(2\omega_f\omega\zeta)^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}}, \quad \zeta = \frac{\mu}{2m\omega}. \quad (8)$$

По горизонтальной оси будет откладываться  $\omega_f/\omega$ . В этом случае, резонансная частота будет при значении 1. Построим кривые для различных значений  $\mu$  на отрезках  $[0.5\omega, 2\omega]$  и  $[0.9\omega, 1.1\omega]$ , создав равномерную сетку из 60 точек.

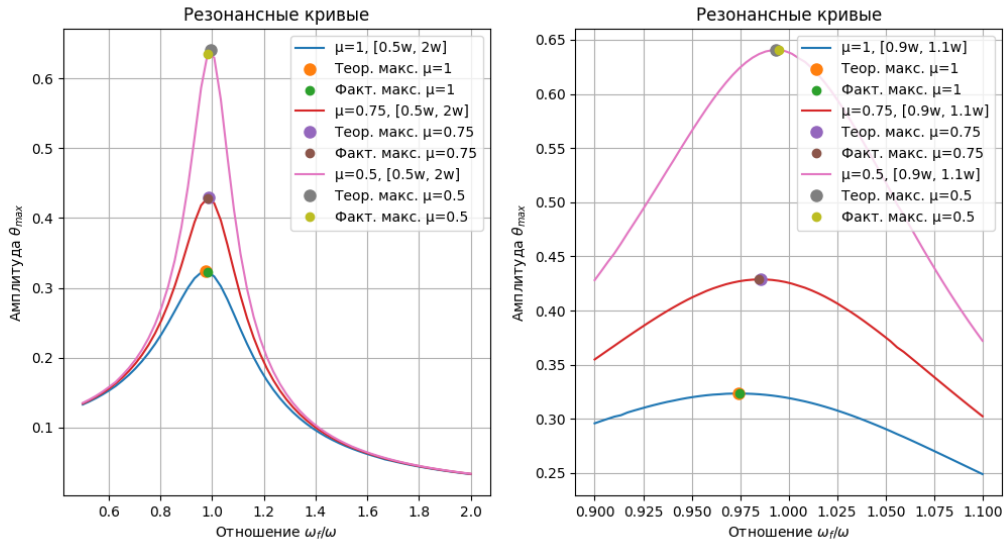


Рисунок 12 — Кривая амплитуд.

Как можно видеть (Рис. 12). Для разных коэффициентов трения резонансная частота достигается в разных местах. Отметим, что при уменьшении трения, амплитуда становится больше, и резонансная частота приближается к собственной.

## 4 Заключение

Была разработана математическая модель маятника, включающая линейное и нелинейное приближения, учет трения, воздействие вынуждающей силы, а также их комбинации.

Эта модель представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Анализ модели позволил получить аналитическое решение, разработан алгоритм его численного нахождения и реализована соответствующая программа.

Построены графики решения уравнения во временной области и на фазовой плоскости, а также исследован эффект резонанса вынуждающей силы с маятником.



## **Список использованных источников**

1. *Н.С., Бахвалов.* Численные методы / Бахвалов Н.С. — Издательство "Наука" 1975.