Контрольная работа по теме численное интегрирование

Вершинин Данил Алексеевич

1 мая 2024 г.

1 Формулировка задания

Для вычисления $\int\limits_0^1 f(x)dx$ применяется составная формула трапеций. Оценить минимальное число разбиений N, обеспечивающее точность 10^{-3} на классе функций:
$||f''(x)||_{L_1} = \int\limits_0^1 |f''(x)dx| \leq 1$

2 Решение

Погрешность вычисления интеграла на отрезке методом трапеций равна

$$R_{2i}(f) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \tag{1}$$

Заметим, что для оценки погрешности также справедлива следующая формула :

$$R_{2i}(f) = \frac{1}{2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})f''(x)dx$$

Её можно проверить, проинтегрировав два раза по частям

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})f''(x)dx \tag{2}$$

Покажем это:

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = \begin{vmatrix} u = (a-x)(b-x) & du = (x-a)+(x+b)dx \\ dv = f''(x) & v = f'(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(a-x)(b-x)f''(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int\limits_a^b (2x-(a+b))f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b (2x-(a+b))f'(x)dx =$$

$$= -\int\limits_a^b \left(x - \frac{(a+b)}{2}\right) f'(x)dx = \begin{vmatrix} u = x - \frac{a+b}{2} & du = dx \\ dv = f'(x)dx & v = f(x) \end{vmatrix} =$$

$$-(f(x)(x - \frac{a+b}{2}))\Big|_a^b + \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(b) - f(a)) = (1)$$

Оценим погрешность на отрезке

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})f''(x)dx \leq \frac{\max|((x - x_i)(x - x_{i+1}))|}{2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f''(x)dx \qquad (3)$$

Оценим $\max|((x - x_i)(x - x_{i+1}))|$:

Очевидно, максимальное значение будет при $x = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, т.е x – середина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$

Подставив это значение и получим:

$$\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{2x_i}{2}\right)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{2x_{i+1}}{2}\right) = -\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} = -\frac{h^2}{4}$$

По модулю получим $h^2/4$. Тогда правая часть (3) перепишется слудующим образом:

$$\frac{\max|((x - x_i)(x - x_{i+1}))|}{2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f''(x)dx = \frac{h^2}{8}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f''(x)dx$$

И так, мы получили оценку погрешности на отрезке. Теперь нехитрым образом найдём погрешность на всём интервале:

$$R_2(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h^2}{8} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f''(x)dx = \frac{h^2}{8}\sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f''(x)dx$$

Зная, что наш интервал равен [0,1] и применяя свойство аддитивности для интегралов, получим:

$$\frac{h^2}{8}\sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f''(x)dx = \frac{h^2}{8}\int\limits_0^1 f''(x)dx \qquad (4)$$

Но нам дано условие с модулем. Следовательно, применим свойства модуля интеграла:

$$1 \geq \int |f''(x)|dx \geq \left|\int f''(x)dx\right| \Rightarrow \left|\int f''(x)dx\right| \leq 1$$

Раскрыв модуль, получим неравенство:

$$-1 \leq \int f''(x)dx \leq 1$$

Теперь мы можем оценить (4):

$$\frac{h^2}{8}\int\limits_0^1 f''(x)dx \leq \frac{h^2}{8}$$

Представив h как отношение длины интервала (у нас 1) и количества разбиений n, получим оценку:

$$R_2 = \frac{1}{8n^2}$$

Теперь остаётся только решить неравенство

$$10^{-3} \geq \frac{1}{8n^2} \Rightarrow n^2 \geq \frac{1000}{8} \Rightarrow n \geq \frac{10\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}$$

$$n \geq 5\sqrt{5} \approx 11.18$$

Следовательно, если взять $n \geq 12$, то полученная точность будет удовлетворять условию.

3 Ответ: N=12