

# ИДЗ №1

Вершинин Данил Алексеевич

29 апреля 2024 г.

**1 Вычислить интеграл**  $\oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz$

**Решение:**

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz - \text{Отношение голоморфных функций}$$

Найдём особые точки:

$$\sin z = 0 \Rightarrow z = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

В круге  $|z - 1| = 3$  - две особые точки:  $z = 0, z = \pi$

$$(ze^z)' = e^z + ze^z \Big|_{z=0} = 1 \neq 0$$

$$(\sin z)' = \cos z \Big|_{z=0} = 1 \neq 0$$

Следовательно, 0 - нуль первого порядка, следовательно УОТ, следовательно вычет в ней равен 0 Точка  $\pi$  - нуль первого порядка знаменателя, числитель в ней не обращается в 0.

$$ze^z \Big|_{z=\pi} = \pi e^{\pi i} \neq 0; (\sin z)' = \cos z \Big|_{z=\pi} = -1 \neq 0$$

Следовательно,  $z = \pi$  - полюс первого порядка, вычет вычисляется по формуле:

$$\operatorname{Res}_{z=\pi} \frac{ze^z}{\sin z} = \frac{ze^z}{\cos z} \Big|_{z=\pi} = -\pi e^{\pi}$$

Поэтому интеграл равен:

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz = 2\pi i \cdot (-\pi e^{\pi}) = -2\pi^2 e^{\pi} i$$

**Ответ:**

$$-2\pi^2 e^{\pi} i$$

**2 Вычислить интеграл**  $\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz$

**Решение:**

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz$$

Заметим, что

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz = \oint_{|z|=1} \left( \frac{e^{2z}}{z^2} - \frac{1}{z} \right) dz = \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^2} dz - \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 e^{2z}}{z^2} = 1 - \text{видим, что } 0 - \text{полюс второго порядка}$$

Разложим  $\frac{e^{2z}}{z^2}$  в ряд Лорана в окрестности точки 0:

$$\frac{1}{z^2} \left( 1 + 2z + \frac{4z^2}{2!} + \dots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{4}{2!} + \dots$$

Отсюда видим, что вычет равен 2. Следовательно интеграл равен:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz = 2\pi i(2 - 1) = 2\pi i$$

**Ответ:**  $2\pi i$

### 3 Вычислить интеграл $\oint_{|z|=0,05} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz$

**Решение:**

$$\oint_{|z|=0,05} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz$$

Числитель и знаменатель голоморфные функции всюду в  $\mathbb{C} \Rightarrow$  особые точки - это нули знаменателя, при условии  $|z| < 0,05$

$$z^3 \operatorname{sh} 16\pi z \iff z^3 = 0 \vee \operatorname{sh} 16\pi z = 0$$

Последнее перепишем:

$$\operatorname{sh} 16\pi z = 0 \Rightarrow e^{16\pi z} - e^{-16\pi z} = 0 \Rightarrow e^{16\pi z} = e^{-16\pi z} \Rightarrow e^{32\pi z} = 1 \Rightarrow 32\pi z = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Следующая оценка покажет, что в  $|z| < 0,05$  попадает только одна точка ( $z = 0$ )

$$n \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{\pi}{16} n \right| \geq \left| \frac{\pi}{16} \right| > \frac{3}{16} > \frac{1}{20}$$

Итак, вычисления показывают, что:

$$\oint_{|z|=0,05} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z}$$

Заметим, что  $z = 0$  - является нулём первого порядка для числителя:

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z \Big|_{z=0} = 0; (e^{iz} - 1 - \sin 4z)' \Big|_{z=0} = (i e^{iz} - 4 \cos 4z) \Big|_{z=0} = i - 4 \neq 0$$

и нуль четвертого порядка для знаменателя, т.к. он является  $z^3$  (3-го порядка) и  $\operatorname{sh} 16\pi z$  (первый порядок);  $(\operatorname{sh} 16\pi z)' \Big|_{z=0} \neq 0$

Поэтому, для дроби  $z = 0$  - полюс 3-го порядка.

Вычет равен:

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} \right)^{(2)}$$

Брать вторую производную достаточно затратное занятие. Найдём вычет через ряд Лорана  $z = 0$  - полюс 3-го порядка, следовательно разложение будет иметь вид:

$$f(z) = \frac{C_{-3}}{z^3} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-1}}{z} + C_0 + \dots \Big| \cdot \operatorname{sh} 16\pi z$$

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z = \operatorname{sh} 16\pi z (C_{-3} + C_{-2}z + C_{-1}z^2 + C_0z^3 + \dots)$$

Разложим левую часть:

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z = iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots - (4z - \frac{(4z)^3}{3!}) = (i - 4)z + \frac{(iz)^2}{2} + \frac{4^3 - i}{6} z^3 + \dots$$

Справа получили разложение:

$$\operatorname{sh} 16\pi z (C_{-3} + \dots) = (16\pi z + \frac{(16\pi z)^3}{6} + \dots) (C_{-3} + C_{-2}z + C_{-1}z^2) + C_0z^3 + o(z^4) =$$

$$= 16\pi z C_{-3} + 16\pi C_{-2} z^2 + \left[ \frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3} + 16\pi C_{-1} \right] z^3 + \dots$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{lll} i - 4 = 16\pi C_{-3} & \Rightarrow & C_{-3} = \frac{i-4}{16\pi} \\ \frac{1}{2} = 16\pi C_{-2} & \Rightarrow & C_{-2} = \frac{1}{32\pi} \\ \frac{4^3-i}{6} = \frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3} + 16\pi C_{-1} & \Rightarrow & C_{-1} = \left( \frac{4^3-i}{6} - \frac{(16\pi)^3}{6} C_{-3} \right) \frac{1}{16\pi} \end{array} \right\}$$

Таким образом:

$$\oint_{|z|=0,05} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{16\pi} \left( \frac{4^3-i}{6} - \frac{(16\pi)^3}{6} \cdot \frac{(i-4)}{16\pi} \right) = \frac{i}{8\pi} \left( \frac{4-i-(16\pi)^2(i-4)}{6} \right)$$

**Ответ:**  $\frac{i}{8\pi} \left( \frac{4-i-(16\pi)^2(i-4)}{6} \right)$

**4 Вычислить интеграл**  $\oint_{|z+3|=2} \left( z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} - \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z} \right) dz$

**Решение:**

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\oint_{|z+3|=2} \left( z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} - \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z} \right) dz = \oint_{|z+3|=2} z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} dz - \oint_{|z+3|=2} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z} dz$$

Рассмотрим первый интеграл. Очевидно, что подынтегральное выражение имеет в  $\mathbb{C}$  только одну изолированную особую точку:  $z = -3$  - центр окружности, по которой интегрируем:

$$\oint_{|z+3|=2} z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} dz$$

Применяя основную теорему о вычетах, получим:

$$\oint_{|z+3|=2} z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-3} z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3}$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд лорана в окрестности точки  $z = -3$ :

$$z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} = (-3 + (z+3)) \left( \frac{i}{z+3} + \frac{i^3}{3!(z+3)^3} + \frac{i^5}{5!(z+3)^5} + \dots \right) = i - \frac{3i}{z+3} - \frac{i}{3!(z+3)^2} + \frac{3i}{3!(z+3)^3} + \dots$$

Отсюда видим, что разложение содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов при отрицательных степенях  $(z+3)$ , значит  $z = -3$  - СОТ.

Кроме того, вычет в этой точке

$$\operatorname{Res}_{z=-3} z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} = -3i$$

Значит,

$$\oint_{|z+3|=2} z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} dz = 6\pi$$

Теперь займёмся вторым интегралом:

$$\oint_{|z+3|=2} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z} dz$$

Особыми точками подынтегральной функции являются нули знаменателя  $z = 0$  и  $z = -2$ . Но точка  $z = 0$  лежит вне окружности  $|z+3| = 2$ , поэтому по основной теореме Коши о вычетах имеем:

$$\oint_{|z+3|=2} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z}$$

Но  $z = -2$  полюс второго порядка, так как является, очевидно, нулем второго порядка для знаменателя, а числитель в ней  $\neq 0$ . По формуле для вычисления вычета в полюсе порядка 2

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=-2} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} &= \lim_{z \rightarrow -2} \left( \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{4}}{z} \right)' = 4 \lim_{z \rightarrow -2} \frac{\frac{\pi i}{4} \operatorname{ch} \frac{\pi i z}{4} z - \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{4}}{z^2} = \frac{\pi i}{4} \operatorname{ch} \left( -\frac{\pi i}{2} \right) - \operatorname{sh} \left( -\frac{\pi i}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi i}{4} \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) - i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = i\end{aligned}$$

Поэтому

$$\oint_{|z+3|=2} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} = -2\pi$$

**Ответ:**

$$\oint_{|z+3|=2} \left( z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} - \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} \right) dz = 8\pi$$

## 5 Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6} \sin t - 5}$

**Решение:**

Проведём замену  $e^{it} = z \Rightarrow dt = dz/iz$ . Будут справедливы формулы:

$$\begin{aligned}\sin t &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \\ \cos t &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)\end{aligned}$$

После замены получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6} \sin t - 5} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left( 2\sqrt{6} \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) - 5 \right) iz} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{6} z \left( z - \frac{1}{z} \right) - 5iz} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{6} z^2 - \sqrt{6} - 5iz}$$

очевидно, что нули знаменателя являются полюсами первого порядка для подынтегрального выражения. Найдём их:

$$\sqrt{6} z^2 - \sqrt{6} - 5iz = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{5i \pm \sqrt{-25 + 24}}{2\sqrt{6}} = \begin{cases} \frac{i\sqrt{6}}{2} \\ \frac{i\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

В круге  $|z| = 1$  лежит только корень  $\frac{i\sqrt{6}}{3}$ . Поэтому, искомый интеграл вычисляется так:

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{6} z^2 - \sqrt{6} - 5iz} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}} \frac{1}{\sqrt{6} z^2 - \sqrt{6} - 5iz} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}} \frac{1}{\sqrt{6} \left( z - \frac{i\sqrt{6}}{2} \right) \left( z - \frac{i\sqrt{6}}{3} \right)} = \frac{2\pi i}{\sqrt{6} \left( z - \frac{i\sqrt{6}}{2} \right)} \Big|_{z=\frac{i\sqrt{6}}{3}} = \\ &= \frac{2\pi i}{\sqrt{6} \left( \frac{i\sqrt{6}}{3} - \frac{i\sqrt{6}}{2} \right)} = -2\pi\end{aligned}$$

**Ответ:**

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6} \sin t - 5} = -2\pi$$

## 6 Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos t)^2} dt$

**Решение:**

Произведём замену  $e^{it} = z \Rightarrow dt = dz/iz$

$$\cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left( \sqrt{7} + \frac{\sqrt{5}}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right)^2 iz} = \frac{4}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(\sqrt{5} z^2 + 2\sqrt{7} z + \sqrt{5})^2}$$

Последний интеграл вычисляем по основной теореме Коши о вычетах. Для этого найдём нули знаменателя:

$$\sqrt{5} z^2 + 2\sqrt{7} z + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{28 - 20}}{2\sqrt{5}} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{-\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Первый из корней лежит вне круга  $|z| < 1$ , поэтому:

$$\frac{4}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(\sqrt{5} z^2 + 2\sqrt{7} z + \sqrt{5})^2} = \frac{4}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{5 \left( z + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2 \left( z + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2} = \frac{8\pi}{5} \operatorname{Res}_{z=-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{z}{\left( z + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2 \left( z + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2}$$

Очевидно, для выражение под знаком вычета точка  $z = -\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$  является полюсом второго порядка, поэтому вычет вычисляется по формуле для полюса порядка  $n$  ( $n = 2$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{z}{\left( z + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2 \left( z + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2} &= \lim_{z \rightarrow -\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \left( \frac{z}{\left( z + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \frac{-5\sqrt{5}x + 5\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{(\sqrt{5}x + \sqrt{7} + \sqrt{2})^3} = \\ &= \frac{5\sqrt{14}}{16} \end{aligned}$$

Окончательно получаем

**Ответ:**

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos t)^2} dt = \frac{\sqrt{14}}{2} \pi$$

## 7 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

**Решение:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} dx$$

Преобразуем подынтегральную функцию  $f(x)$  в  $f(z)$ :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{z^2+1}{(z^2+z+1)^2} = f(z)$$

Найдём нули знаменателя:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Теперь можно преобразовать знаменатель:

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$f(z)$  голоморфна всюду в верхней полуплоскости, кроме точки  $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Очевидно, что она является полюсом второго порядка.

Кроме того

$$\sup_{\substack{|z|=R \\ \Im \geq 0}} \frac{|z^2 + 1||z|}{|(z^2 + z + 1)|^2} = \sup_{\substack{|z|=R \\ \Im \geq 0}} \frac{|z^2 + 1||z|}{|z^2 + z + 1|^2} \leq \sup_{\substack{|z|=R \\ \Im \geq 0}} \frac{(|z^2| + 1)|z|}{||z|^2 + |z| - 1|^2} = \frac{(R^2 + 1)R}{(R^2 + R - 1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы о вычислении интегралов вида  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ . А так как  $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  лежит в нижней полуплоскости, поэтому:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = 2\pi i \left( \operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{z^2 + 1}{\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right)$$

Вычет вычисляем по формуле для полюсов 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \left( \frac{z^2 + 1}{\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{8z + 8\sqrt{3}iz - 16}{(2z + 1 + \sqrt{3}i)^3} = \\ &= \frac{8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 8\sqrt{3}i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 16}{2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}i} = \frac{-4 + \cancel{8\frac{\sqrt{3}}{2}} - \cancel{8\frac{\sqrt{3}}{2}} - 12 - 16}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{4}{3\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{2\pi i \cdot 4}{3\sqrt{3}i} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$$

**Ответ:**  $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$

## 8 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - 2x + 10)} dx$

**Решение:**

$f(z) = \frac{\sin 2z}{z^2 - 2z + 10}$  голоморфна всюду в верхней полуплоскости, кроме точки  $z = 1 + 3i$  - полюс первого порядка, т.к.

$$z^2 - 2z + 10 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \begin{cases} 1 + 3i \\ 1 - 3i \end{cases}$$

Заметим, что  $\sin(2x) = \Im e^{i2x}$  и, применяя основную теорему о вычетах, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - 2x + 10)} dx = \Im \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2z}}{(z^2 - 2z + 10)} dz \right) = \Im \left( 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \Im z \geq 0}} \operatorname{Res} f(z) e^{2iz} \right)$$

Кроме того

$$\sup_{\substack{|z|=R \\ \Im \geq 0}} \frac{1}{|z^2 - 2z + 10|} \leq \sup_{\substack{|z|=R \\ \Im \geq 0}} \frac{1}{|z^2| - 2|z| - 10} \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 10} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

По теореме Жордано получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2z}}{z^2 - 2z + 10} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1+3i} \frac{e^{i2z}}{(z - (1 - 3i))(z - (1 + 3i))} = \frac{2\pi i e^{i2z}}{z - (1 - 3i)} \Big|_{z=1+3i} = \frac{\pi e^{i(2+6i)}}{3}$$

Отделяя мнимую часть, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - 2x + 10)} dx = \Im \frac{\pi}{3} e^{i(2+6i)} = \Im \frac{\pi}{3e^6} (\cos 2 + i \sin 2) = \frac{\pi \sin 2}{3e^6}$$

**Ответ:**

$$\frac{\pi \sin 2}{3e^6}$$

## 9 Найти оригинал по заданному изображению $\frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$

**Решение:**

$$\frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)} = \frac{a}{p+2} + \frac{bp+c}{p^2-2p+2} \quad (1)$$

$$ap^2 - 2pa + 2a + bp + cp + 2bp + 2c = 5p$$

$$\begin{cases} n^2 : & a + b = 0 \\ n : & -2a + c + 2b = 5 \\ 1 : & 2a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = c \\ 2c + c + 2c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя найденные коэффициенты из (2) в (1) получим разложение в сумму дробей

$$-\frac{1}{p+2} + \frac{p+1}{p^2-2p+2} = -\frac{1}{p+2} + \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{2}{(p-1)^2+1}$$

Тогда первое слагаемое является образом для

$$-e^{-2t}$$

Для оставшихся

$$F(p+1) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p^2+1} \doteq \cos t + 2 \sin t$$

По теореме смещения отсюда

$$F(p) = F(p+1-1) \doteq e^t(2 \sin t + \cos t)$$

Окончательно получаем:

$$f(t) = e^t(2 \sin t + \cos t) - e^{-2t}$$

**Ответ:**  $e^t(2 \sin t + \cos t) - e^{-2t}$

# 10 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $y'' + 2' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$

**Решение:**

$$y'' + 2' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$$

Вычисляем преобразование Лапласа для левой части уравнения, а правую приравняем к  $f(t)$

$$p^2 \hat{y} - pC_1 - C_2 + 2(p\hat{y} - C_1) = \hat{f}(p)$$

Выразим  $\hat{y}$

$$\hat{y} = \frac{\hat{f}(p) + pC_1 + C_2 + 2C_1}{p^2 + 2p} = \frac{\hat{f}(p)}{p^2 + 2p} + \frac{C_1}{p + 2} + \frac{C_2}{p(p + 2)} + \frac{2C_1}{p(p + 1)}$$

Очевидно, что это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\hat{f}(p)}{p^2 + 2p} + \frac{C_1}{p + 2} + \frac{C_2}{p(p + 2)} + \frac{2C_1}{p(p + 1)} = \frac{\hat{f}(p)}{p^2 + 2p} + \frac{C_1}{p + 2} + \frac{C_2}{2p} - \frac{C_2}{2(p + 2)} + \frac{C_1}{p} - \frac{C_1}{p + 2}$$

Найдём оригиналы для всех слагаемых, кроме первого:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{p + 2} &\doteq C_1 e^{-2t} \\ \frac{C_2}{2p} &\doteq \frac{C_2}{2} \\ \frac{C_2}{2(p + 2)} &\doteq \frac{C_2}{2} e^{-2t} \\ \frac{C_1}{p} &\doteq C_1 \\ \frac{C_1}{p + 2} &\doteq C_1 e^{-2t} \end{aligned}$$

Для первого слагаемого нужно поступить следующим образом.

Найдём оригинал для  $1/(p^2 + 2p)$

$$\frac{1}{p(p + 2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p + 2)}$$

Таким образом, оригинал равен

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}$$

Далее найдём интеграл по теореме \*\*\*\*

$$\int_0^t \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2(t-\tau)} \right) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tau} d\tau - \frac{1}{2e^{2t}} \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{\operatorname{ch}^2 \tau} d\tau$$

Первый интеграл равен

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tau} d\tau = \frac{1}{2} \operatorname{th} \tau \Big|_0^t = \frac{1}{2} \operatorname{th} t$$

Второй сложнее

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{\operatorname{ch}^2 \tau} d\tau &= \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{\left( \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} \right)^2} d\tau = \int_0^t 2e^{2\tau} \frac{2e^{2\tau}}{(e^{2\tau} + 1)^2} d\tau = 2 \int_0^t \frac{e^{2\tau} d(e^{2\tau})}{(e^{2\tau} + 1)^2} = 2 \int_0^t \frac{e^{2\tau} + 1 - 1}{(e^{2\tau} + 1)^2} d(e^{2\tau}) = \\ &= 2 \int_0^t \frac{d(e^{2\tau})}{e^{2\tau} + 1} - 2 \int_0^t \frac{d(e^{2\tau})}{(e^{2\tau} + 1)^2} = 2 \ln(e^{2\tau} + 1) \Big|_0^t + \frac{2}{e^{2\tau} + 1} \Big|_0^t = 2 \ln(e^{2t} + 1) + \frac{2}{e^{2t} + 1} - 2 \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

Таким образом получаем

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{th} t - \frac{\ln(e^{2t} + 1)}{e^{2t}} - \frac{1}{e^{4t} - e^{2t}} - \frac{\ln 2}{e^{2t}} + \frac{1}{2e^{2t}} + \frac{C_2}{2} e^{-2t} + \frac{C_2}{2} + C_1$$



**Ответ:**

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{th} t - \frac{\ln(e^{2t} + 1)}{e^{2t}} - \frac{1}{e^{4t} = e^{2t}} - \frac{\ln 2}{e^{2t}} + \frac{1}{2e^{2t}} + \frac{C_2}{2} e^{-2t} + \frac{C_2}{2} + C_1$$

**11 Операционным методом решить задачу Коши  $2y'' + 3y' + y = 3e^t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$**

**Решение:**

Применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям данного дифференциального уравнения, получаем операторное уравнение:

$$2p^2 \hat{y} - p \cdot 0 - 2 + 3p \hat{y} - 0 + \hat{y} = \frac{3}{p-1}$$

$$2p^2 \hat{y} - 2 + 3p \hat{y} + \hat{y} = \frac{3}{p-1}$$

Откуда находим

$$\hat{y}(2p^2 + 3p + 1) = 2 + \frac{3}{p-1}$$

Или

$$\hat{y} = \frac{2}{2p^2 + 3p + 1} + \frac{3}{(p-1)(2p^2 + 3p + 1)}$$

Найдём нули знаменателя первой дроби:

$$2p^2 + 3p + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ -1/2 \end{cases}$$

Тогда выражение перепишется следующим образом:

$$\hat{y} = \frac{2}{2(p+1)(p+\frac{1}{2})} + \frac{3}{2(p-1)(p+1)(p+\frac{1}{2})}$$

Или

$$\hat{y} = \frac{4}{(p+1)(2p+1)} + \frac{6}{(p-1)(p+1)(2p+1)}$$

Разложим первое слагаемое методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{2}{(p+1)(2p+1)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{2p+1}$$

$$2pa + a + bp + b = 2$$

$$\begin{cases} p: & 2a + b = 0 \\ 1: & a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ 4 - 2b + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -2 \end{cases}$$

Таким образом первая дробь запишется так

$$\frac{2}{(p+1)(2p+1)} = -\frac{2}{p+1} + \frac{4}{2p+1}$$

Теперь вторая:

$$\frac{3}{(p-1)(p+1)(2p+1)} = \frac{a}{p-1} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{2p+1}$$

$$2p^2a + 3pa + a + p^2b - pb - b + p^2c - c = 3$$

$$\begin{cases} p^2: & 2a + 2b + c = 0 \\ p: & 3a - b = 0 \\ 1: & a - b - c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b/3 \\ b/3 - b - c = 3 \\ 2b/3 + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b/6 \\ -2b - 3c = 9 \\ 8b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3/2 \\ c = -4 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{(p-1)(p+1)(2p+1)} = \frac{1}{2(p-1)2} + \frac{3}{2(p+1)} - \frac{4}{2p+1}$$

Исходное выражение равно:

$$\hat{y} = -\frac{2}{p+1} + \frac{4}{2p+1} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{3}{2(p+1)} - \frac{4}{2p+1} = -\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1}$$

Произведём обратное преобразование Лапласа:

$$-\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1} \doteq \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2e^t} = y$$

**Ответ:**  $y = \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2e^t}$

**12 Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию**  $\begin{cases} x' = y + 3, & x(0) = 1 \\ y' = x + 2, & y(0) = 0 \end{cases}$

**Решение:**

Применем преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} p\hat{x} + \hat{y} + \frac{3}{p} + 1 \\ p\hat{y} = \hat{x} + \frac{2}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\hat{x} - \hat{y} = \frac{3}{p} + 1 \\ p\hat{y} - \hat{x} = \frac{2}{p} \end{cases}$$

Решаем эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{3}{p} + 1 & -1 \\ \frac{2}{p} & p \end{vmatrix} = 3 + p + \frac{2}{p} = \frac{3p + p^2 + 2}{p}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p & \frac{3}{p} + 1 \\ -1 & \frac{2}{p} \end{vmatrix} = \frac{3p + 3}{p}$$

Отсюда

$$\hat{x} = \frac{p^2 + 3p + 2}{p(p-1)(p+1)} = \frac{p+2}{p(p-1)}$$

$$\hat{y} = \frac{3p+3}{p(p-1)(p+1)} = \frac{3}{p(p-1)}$$

Разложение на простые множители очевидное:

$$\hat{x} = \frac{p+2}{p(p-1)} = -\frac{2}{p} + \frac{3}{p-1}$$

$$\hat{y} = \frac{3}{p(p-1)} = -\frac{3}{p} + \frac{3}{p-1}$$

Найдём оригиналы

$$\begin{cases} x = -2 + 3e^t \\ y = -3 + 3e^t \end{cases}$$

**Ответ:**  $\begin{cases} x = -2 + 3e^t \\ y = -3 + 3e^t \end{cases}$