NÉV: NÉMETH DOMINIK KRISTÓF NEPTUN: EU25W7 GYAKORLATVEZETŐ: ~~GA~~ GONDA JÁNOS

ELTE IK Diszkrét matematika I.

---

## 1. zárthelyi dolgozat – 2023-04-19 – B

27 pont

Felhasználható idő: 100 perc, használható segédeszközök: üres papír és toll vagy digitális változatuk. Gyorssegély, ne ezen múljon: $\cos 30° = \sin 60° = \sqrt{3}/2$, $\cos 45° = \sin 45° = \sqrt{2}/2$, $\cos 60° = \sin 30° = 1/2$, $180° = \pi$, $i^2 = -1$

**1. feladat 6 pont** 4

(a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: fél pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **2 pont** 1

0 (1) Ha $a, b$ valósak, és $a + bi = a - bi$, akkor $a + bi$ is valós. **I H**

1/2 (2) Ha egy reláció nem szimmetrikus, akkor antiszimmetrikus. **I H**

1/2 (3) Egy ekvivalenciarelációnál az ekvivalenciaosztályok uniója a reláció értékkészlete. **I H**

0 (4) Ha $f$ injektív, és $g$ szürjektív függvények, akkor $f \circ g$ bijektív. **I H**

1 (b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + 2y = 7\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció értelmezési tartományát és az $R^{-1}(\{-10\})$ inverz képet. **2 pont**

2 (c) Adjunk meg az $\{1, 2, 3\}$ halmazon olyan relációt, mely nem szimmetrikus, nem reflexív, de tranzitív. **2 pont**

**2. feladat 10 pont** 7

2 (a) Igazolja, hogy az $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x \text{ vagy } y - x > 5\}$ reláció részbenrendezés. Adjunk meg 3 olyan egészet, melyek közül bármelyik kettő relációban áll. **5 pont**

2 (b) Adjon meg olyan páronként különböző nemüres $A, B$ és $C$ halmazokat, amelyekre teljesül a következő összefüggés: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$. **2 pont**

3 (c) Igazolja, hogy tetszőleges $A, B$ és $C$ halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup ((A \cap B) \setminus C)$. **3 pont**

**3. feladat 5 pont** 4

Legyen $H = \mathbb{Q}$, $R, S \subset H \times H$, $R = \{(x, y) \in H \times H \mid 3y - 14 = -2x\}$ és $S = \{(x, y) \in H \times H \mid 2x = |-y| + 10\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

**4. feladat 5 pont** 2

2 (a) Döntse el, hogy az $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2\sqrt{x^2 + 3}$ függvény injektív-, illetve szürjektív-e. **2 pont**

0 (b) Tekintsük a következő relációt: $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, |x + 2| = |y - 5|\}$. Ez a reláció nem függvény. Távolítsunk el $R$-ből a lehető legkevesebb rendezett párt úgy, hogy a kapott reláció már függvény legyen. **3 pont**

**5. feladat 7 pont** 6 (1, 1, 1, 0,5, 2,5)

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki $z$ értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan $w$ komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol $z = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^{12}}{(1 + i)^{30}}$.

A 6. feladat választható az alábbiak közül:

**6G. feladat 7 pont** 4

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazokat:

0 (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z \geq 2 \wedge \operatorname{Im} z > 5\}$ **3 pont**

4 (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \geq 6 \wedge \operatorname{Re} z < 8\}$ **4 pont**

**6E. feladat 7 pont**

Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán:

$$\frac{z + 6 - i - 2\overline{z}}{z + i} = 5$$

NEMETH DOMINIK KRISTÓF

EUZ5W7

1\) a) 1 H

2 H

3 ~~N~~I

4 I

b) $x+2y=7$

$x = 7-2y$ ÉT

?

$R^{-1}(\{-10\})$ $x = 7-2\cdot(-10)$

$x = 7+20$

$x = 27$

c) $\{1;2;3\}$ nem szimmetrikus, nem reflexív, de tranzitív

$R=\{(1,2);(2,3);(1,3)\}$

2\) a) részbenrendezés reflexív, tranzitív, de asszimetrikus

$y=x \lor y-x>5$

$x=x$ ~~rf~~ igaz tehát reflexív

~~$y=x$~~ $\land$ $y-x>5$ $\to$ $y-z>5$

$y>x$

$x>z$

$y>z$

$x-z>5$

$y-x>5$

$y>5+x$

$x>5+z$ $\to$

$y-x>5$ teljesül

$x-z>5$ ~~$y-5+z>5$~~

~~$y-5+z>5$~~

$y-z>5$ teljesül ?

tehát reflexív !

asszimetrikus $y=x \land x=y$ ~~csak~~ csak egyenlőség esetén tud teljesülni

$(a_1;a_2)\to(a_2;a_1)$ $!(a_1=a_2)!$ és $y>x+5 \land x>y+5$ ?

3 olyan elem, melyek közül bármelyik kettő relációban áll:

b) $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\setminus C)$

$\{d\} = \{d\}$

$A=\{a,b,c,d\}$

$B=\{a,b,c,e\}$

$C=\{f,g\}$

c) $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup((A\cap B)\setminus C)$

tetsz. A B C halmazok esetén igaz

| A | B | C | A | B | C | $B\cap C$ | $A\setminus(B\cap C)$ | $A\setminus B$ | $A\cap B$ | $(A\cap B)\setminus C$ | $(A\setminus B)\cup(A\cap B)\setminus C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~h~~ | ~~h~~ | ~~h~~ | i | i | i | i | h | h | i | h | h |
| ~~i~~ | ~~i~~ | ~~i~~ | i | i | h | h | i | h | i | i | i |
| ~~i~~ | ~~i~~ | ~~h~~ | i | h | i | h | i | i | h | h | i |
| ~~i~~ | ~~h~~ | ~~i~~ | h | i | i | i | h | h | | | h |
| ~~h~~ | ~~i~~ | ~~i~~ | i | h | h | h | i | i | | h | i |
| ~~i~~ | ~~h~~ | ~~h~~ | h | i | h | h | h | h | h. | | h |
| ~~h~~ | ~~i~~ | ~~h~~ | h | h | i | h | h | h | | h | h |
| ~~h~~ | ~~h~~ | ~~i~~ | h | h | h | h | h | h | h | h | h |

3.) $R \Rightarrow 3y - 14 = -2x$

$S \Rightarrow 2x = |-y| + 10$

**S∘R** $(x;u)\,;\,(u;y)$

$3u - 14 = -2x \rightarrow \cancel{\frac{-2x+14}{3}} = u$

$2u = |-y| + 10 \rightarrow u = \frac{|-y|+10}{2}$

$\frac{3(|-y|+10)}{2} - 14 = -2x$

$-3(|-y|+10) = x$

$S \circ R = \{(x;y) \in H \times H \mid -3(|-y|+10) = x\}$

**R∘S** $2x = |-u| + 10$

$3y - 14 = \cancel{x} - 2u \rightarrow \frac{14-3y}{2} = u$

$2x = \left|\frac{3y-14}{2}\right| + 10$

$x = \frac{\left|\frac{3y-14}{2}\right| + 10}{2}$

$R \circ S = \left\{(x;y) \in H \times H \;\middle|\; \frac{\left|\frac{3y-14}{2}\right| + 10}{2} = x\right\}$

4.) a) $f(x) = 2\sqrt{x^2+3}$ nem szürjektív, mivel a $2\sqrt{x^2+3}$ csak pozitív értékeket vesz fel

$R_0^+ \rightarrow R$

$2\sqrt{x^2+3} \geq 2\sqrt{3}$

injektív(?):

$\cancel{2}\sqrt{x^2+3} = \cancel{2}\sqrt{t^2+3}$

$|x^2+3| = |t^2+3|$ $R_0^+$ miatt elhagyható

$x^2+3 = t^2+3$

$x^2 = t^2$

$x = t$ ~~szürjektív~~ injektív

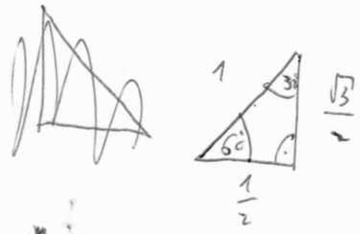
b) $|x+2| = |y-5|$ $x, y \in N$

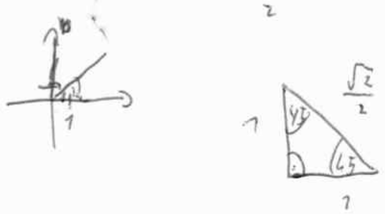
$x+2 = y-5$

$x = y - 7$

NÉMETH DOMINIK KRISTÓF

EUZ5W7





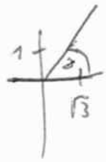
5.) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1+i)^{30}}$

$1+i$ → $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \to 45° \to \frac{\pi}{4}$

$(r,\varphi) = \left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)^{30} = \left(2^{15}; \frac{30\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3}+i$



$r = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \to 30° \to \frac{\pi}{6}$

$(r;\varphi) = \left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)^{12} = \left(2^{12}; \frac{12\pi}{6}\right)$

↳ $2\pi = 0°$

$\cancel{\left(2^{15}; \frac{30\pi}{4}\right)}$

$w = (\varrho; \psi)$

$\dfrac{(2^{12}; 0°)}{\left(2^{15}; \frac{30\pi}{4}\right)} = (2^{-3}; 0)$

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{2^{-3}}$

$\frac{\varphi}{n} + \cancel{2\pi k}\ \frac{2k\cdot\pi}{n}$ $k_{1,2} \ldots n-1$

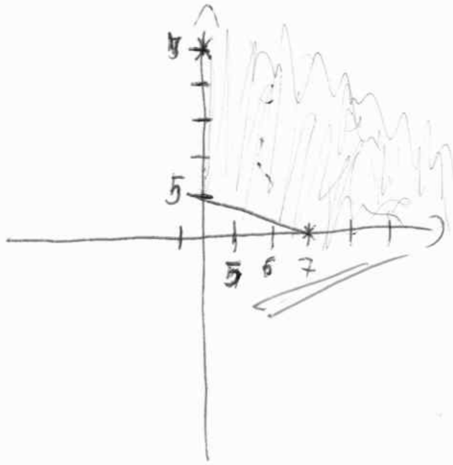
$0, 1, 2$

$0 + 2k\pi$

$(2^{-3}; 0) = w^3 = (\varrho^3; 3\psi) \iff \varrho = \sqrt[3]{2^{-3}} = 2^{-1}$ $\wedge$ $\psi$ $0 + k$ $(k \in 1, 2, 3)$

⑥

a) $\text{Re } z - \text{Im } z \geq 2 \wedge \text{Im } z > 5$




b) $|z-1| \geq 6 \wedge \text{Re } z < 8$

$|z-1| \geq 6$ kör egyenlete

$z \to$ ~~a+bi~~ ~~x+y~~ $a + bi$
$\downarrow \quad \downarrow$
$x \quad y$

~~x+y~~
~~$|x-1+y| \geq 6$~~

$r = 6$

$|x-1+yi| \geq 6$

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq 6$

$\text{Re } z < 8$

$(x-1)^2 + y^2 \geq 36$