Mathe III Skript WS 15/16

Steffen Lindner

January 13, 2016

Inhaltsverzeichnis

Algebraische Strukturen

1.1 Definition Verknüpfung

Sei X $\neq \emptyset$ Menge. Eine Verknüpfung auf X ist Abb. $\begin{cases} X \times X \to x \\ (a,b) \mapsto a * b \end{cases}$

$*$ ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

1.2 Beispiel

(a) Addition + und Multiplikation $\cdot$ sind Verknüpfungen auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Multiplikation ist keine Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

(b) Division ist keine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

Division ist Verknüpfung auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) $\mathbb{Z}_n$:= { 0,1,...,n-1 } (n $\in \mathbb{N}$)

a $\oplus$ b := (a+b) mod n $\in \mathbb{Z}_n$

a $\odot$ b := (a $\cdot$ b) mod n $\in \mathbb{Z}_n$

Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}_n$

(d) M Menge, X = Menge aller Abb. $M \to M$

Verknüpfung auf X: Hintereinanderausführung von Abb. $\circ$

f, g : $M \to M$, so f $\circ$ g : $M \to M$

(f $\circ$ g) (m) = f(g(m)) $\in$ M

Im Allgemeinen ist $g \circ f \neq f \circ g$

(e) X = $\{0,1\}$

2-stellige aussagenlogische Junktoren wie $\vee, \wedge, XOR, \Rightarrow, ...$ liefern Verknüpfungen auf X.

0 $\vee$ 0 = 0, 1 $\vee$ 0 = 1

0 $\wedge$ 0 = 0, 1 $\wedge$ 0 = 0, 1 $\wedge$ 1 = 1 (= Multiplikation)

0 XOR 0 = 0, 1 XOR 0 = 1, 1 XOR 1 = 0 (= Addition mod 2)

(f) X = M_n ($\mathbb{R}$) = Menge der n × n - Matrizen über $\mathbb{R}$

Matrizenaddition ist Verknüpfung auf X. Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf X.

(g) M Menge, X = Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus M (”Wörter” über M).

Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen, Konkatenation.

M = $\{0, 1\}$

$w_1 = 1101$, $w_2 = 001$, $w_1 w_2 = 1101001$, $w_2 w_1 = 0011101$

1.3 Definition Halbgruppe, Gruppe, Monoid

Sei X $\neq \emptyset$ eine Menge mit Verknüpfung $*$.

(a) X, genauer (X, $*$) ist Halbgruppe, falls (a $*$ b) $*$ c = a $*$ (b $*$ c) für alle a,b,c $\in X$ (Assoziativgesetz)

(b) (X, $*$) heißt Monoid, falls (X, $*$) Halbgruppe ist und ein e $\in X$ existiert mit e $*$ a, a $*$ e = a f.a a $\in X$.

e heißt neutrales Element. (Später: es ist eindeutig bestimmt)

(c) Sei (X, $*$) ein Monoid.

Ein Element a $\in X$ heißt invertierbar, falls b $\in X$ existiert (abhängig von a) mit a $*$ b = b $*$ a = e.

b heißt inverses Element (das Inverse) zu a. (Später: Wenn b existiert, so ist es eindeutig).

(d) Monoid (X, $*$) heißt Gruppe, falls jedes Element in x bezüglich $*$ invertierbar ist.

(e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe (X, $*$) heißt kommutativ (oder abelsch), falls a $*$ b = b $*$ a, für alle a,b $\in X$ (Kommutativgesetz)

1.4 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinvolle Klammerung eines ‘Produktes’ mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element.

n = 4
(a $*$ (b $*$ c)) $*$ d = ((a $*$ b) $*$ c) $*$ d = (a $*$ b) $*$ (c $*$ d) = a $*$ (b $*$ (c $*$ d)) = a $*$ ((b $*$ c) $*d$) (Assoziativgesetz)

Klammern werden meist weggelassen:
a^n = a $*$ ... $*$ a “Potenzen” eindeutig definiert. ($n \in \mathbb{N}$)

1.5 Proposition

(a) In einem Monoid (X, $*$) ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.

(b) Ist (X, $*$) Monoid und ist $a \in X$ invertierbar, so ist das Inverse zu a eindeutig bestimmt.

Beziehung.: a^{-1}

(c) Ist (X, $*$) Monoid und wenn $a, b \in X$ invertierbar sind, so auch a $*$ b und (a $*$ b)$^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

(d) Die Menge der invertierbaren Elemente in einem Monoid (X, $*$) bilden bezüglich $*$ eine Gruppe.

1.5.1 Beweis

(a) Angenommen e_1, e_2 sind neutrale Elemente. Dann:

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2 = e_1 * e_2 \tag{1.1}$$

(b) Angenommen a hat 2 inverse Elemente b_1, b_2; also

$$\begin{aligned} a * b_1 = e, b_2 * a = e \\ b_1 = e * b_1 = (b_2 * a) * b_1 \\ = b_2 * (a * b_1) = b_2 * e = b_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

(c) (a $*$ b) $*$ $(b^{-1} * a^{-1})$

$= a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$

Analog: $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$

Also: $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

(d) I = Menge der invertierten Elemente in (X, $*$)

$e \in I$, dann $e * e = e$, d.h. $e^{-1} = e$.

$*$ ist Verknüpfung auf I. Z.z. $a, b \in I \Rightarrow a * b \in J$

Folgt aus c).

Assoziativgesetz gilt in I

$a \in I \Rightarrow a^{-1} \in I$, denn $(a^{-1})^{-1} = a$

1.5.2 Bemerkung

Multiplikation mit a^{-1} macht Multiplikation mit a (Verkn.) rückgängig:

$$\begin{aligned} (b * a) * a^{-1} = b * (a * a^{1}) = b * e = b \\ a^{-1} * (a * b) = b \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.6 Beispiel

(a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Halbgruppen bezüglich +

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind bezüglich + Monoide, neutrales Element 0.

$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ ist kein Monoid bezügich +, aber $\mathbb{N}_0$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Gruppen bezüglich +, inverses Element zu a : -a

$\mathbb{N}_0$ ist keine Gruppe bezüglich. +

Invertierte Elemente in $\mathbb{N}_0 : \{0\}$.

(b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Monoide bezüglich $\cdot$ (Multiplikation) (neutrales Element: 1)

Keine Gruppen (da 0 nicht invertierbar ist).

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Gruppen.

Intervierbare Elemente in $\mathbb{Z} : \{1, -1\}$ (Gruppe bezüglich Multiplikation)

(c) M Menge.

X = Menge aller Abbildungen M $\rightarrow$ M mit Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung.

Monoid, neutrales Element id_M

$$f \circ id_M = f = id_M \circ f \tag{1.4}$$

Invertierbar sind genau die bijektiven Abbildungen M $\rightarrow$ M

Inverse = Umkehrabbildung

$f : M \rightarrow M$ bijektiv:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M \tag{1.5}$$

1.5.d): Die bijektiven Abbildungen M $\rightarrow$ M bilden bezüglich $\circ$ eine Gruppe.

(d) M Menge, z.B. $\{0, 1\}$

X = Menge aller endlichen Folgen über M.

Verknüpfung: Konkatenation (Hintereinanderausführung).

$\rightarrow$ Halbgruppe

Nimmt man die leere Folge hinzu, so ist sie das neutrale Element (einziges invertierbares Element).

Dann: Monoid.

(e) $M_n(\mathbb{R})$ = Menge der $n \times n$ - Matrizen über $\mathbb{R}$

Addition: neutrales Element Nullmatrix

Inverses zu A ist -A.

$\rightarrow$ Gruppe

Multiplikation: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$\rightarrow$ Halbgruppe

Neutrales Element: Einheitsmatrix

(f) $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$, Verknüpfung $\oplus$
a $\oplus$ b := a + b mod n
($\mathbb{Z}_n$, $\oplus$) ist gruppe, Assoziativgesetz: a,b,c $\in \mathbb{Z}_n$.

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= ((a + bmodn) + c)\ mod\ n \\ &= ((a + b) + c)\ mod\ n \\ &= (a + (b + c))\ mod\ n \\ &= (a + (b + c)\ mod\ n)\ mod\ n \\ &= (a + (b \oplus c))\ mod\ n \\ &= a \oplus (b \oplus c)\end{aligned} \tag{1.6}$$

0 ist neutrales Element bezüglich $\oplus$.
0 ist sein eigenes Inverses.
$1 \leq i \leq n-1 : n-i \in \mathbb{Z}_n$ Inverses zu i.

$$\begin{aligned}& i \oplus (n-i) \\ &= (i + (n-i))\ mod\ n \\ &= n\ mod\ n \\ &= 0\end{aligned} \tag{1.7}$$

(g) $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_n$
Verknüpfung $\odot$ = a $\cdot$ b mod n, $n > 1$
($\mathbb{Z}_n$, $\odot$) ist Monoid, Assozisativgesetz wie bei $\oplus$.
1 ist neutrales Element bezüglich $\odot$.
Keine Gruppe bezüglich $\odot$, denn z.B. hat 0 kein Inverses.

1.7 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$

(a) Die Elemente in ($\mathbb{Z}_n$, $\odot$), die invertierbar bezüglich $\odot$ sind, sind genau diejenigen $a \in \mathbb{Z}_n$ mit ggT(a, n) = 1.
Für solche a bestimmt man das Inverse folgendermaßen:
Bestimme $s, t \in \mathbb{Z}$ mit:

$$s \cdot a + t \cdot n = 1 \tag{1.8}$$

(Erweiterter Euklidischer Algorithmus, Mathe I)
Dann ist $a^{-1} = s\ mod\ n$

(b) $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n : ggT(a, n) = 1\}$ ist Gruppe bezüglich $\odot$.
$|\mathbb{Z}_n^*| =: \varphi(n)$ Eulersche φ-Funktion (L. Euler, 1707-1783).

(c) Ist p eine primzahl, so ist $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \odot)$ eine Gruppe. Beweis folgt aus b).

1.7.1 Beweis

(a) Angenommen $a \in \mathbb{Z}_{\ltimes}$ invertierbar bezüglich $\odot$.

Das heißt es existiert $b \in \mathbb{Z}_n$ mit $a \odot$ b = 1.

a · b mod n = 1, das heißt es existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit:

$$a \cdot b = 1 + k \cdot n, 1 = a \cdot b - k \cdot n \tag{1.9}$$

Sei d = ggT(a, n).

$$\begin{aligned} d|a &\rightarrow d|a \cdot b \\ d|n &\rightarrow d|k \cdot n \\ \Rightarrow d|a \cdot b - k\dot{n} &= 1 \\ \Rightarrow d = 1.ggT(a, n) &= 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Umgekehrt sei $a \in \mathbb{Z}_n$ mit ggT(a,n) = 1.

EEA (Erweiterter Euklidischer Algorithmus) liefert $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot a + t \cdot n = 1$.

$$\begin{aligned} &(s \ mod \ n) \odot a \\ &= ((s \ mod \ n) \cdot a) \ mod \ n \\ &= (s \cdot a) \ mod \ n \\ &= (1 - t \cdot n) \ mod \ n \\ &= (1 - (t \cdot n) \ mod \ n) \ mod \ n \\ &= 1 \ mod \ n \\ &= 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

(b) 1.5.d) und Teil a)

1.8 Beispiel

n = 24, a = 7 ist invertierbar in $(\mathbb{Z}_{24}, \odot)$.
EEA:
1 = (-2) · 24 + 7 · 7.
a^{-1} = 7 mod 24 = 7 = a.

1.9 Beispiel symmetrische Gruppe

Sei M = $\{1, ..., n\}$.
Die Menge der bijektiven Abbildungen auf M (Permutation) bilden nach 1.6.c) eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$.

Bezeichnung: S_n, symmetrische Gruppe vom Grad n.
Es ist $|S_n| = n!$.

Zum Beispiel $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi$
$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$, $\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \rho \circ \rho^{-1} = id$
$\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \rho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
S_n ist für $n \geq 3$ nicht abelsch (nicht kommutativ).

1.10 Satz (Gleichungslösen in Gruppen)

Sei (G, $\cdot$) eine Gruppe, $a, b \in G$. (In allgemeinen Gruppen schreibt man Verknüpfung oft als $\cdot$ statt $*$, oft auch ab statt $a \cdot b$).

(a) Es gibt genau ein $x \in G$ mit $ax = b$ (nämlich $x = a^{-1} \cdot b$).
["Teilen" durch a von links = Multiplikation von links mit a^{-1}]

(b) Es gibt genau ein $y \in G$ mit $ya = b$ (nämlich $y = ba^{-1}$).

(c) Ist $ax = bx$ für ein $x \in G$ so ist $a = b$.
Ist $ya = yb$ für ein $y \in G$ so ist $a = b$.

1.10.1 Beweis

(a) Setze $x = a^{-1} \cdot b \in G$.

$$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = e \cdot b = b. \tag{1.12}$$

Eindeutigkeit: Sei $x \in G$ mit $ax = b$.
Multipliziere beide Seiten mit a^{-1}.

$$x = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = a^{-1}b \tag{1.13}$$

(b) analog

(c) $ax = bx$, multiplikation mit x^{-1} von rechts.
Dann $a = b$.

1.11 Beispiel

(a) Suche Permutation $\xi \in S_3$ mit $\rho \circ \xi = \pi$ (vgl. 1.9)
1.10.a):
$\xi = \rho^{-1} \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) 1.10.c) gilt in Monoiden, die keine Gruppen sind, im Allgemienen nicht:
Beispiel: $(\mathbb{Z}_6, \odot)$
$2 \odot 3 = 0 = 4 \odot 3$, aber $2 \neq 4$.

1.12 Definition Ring

(a) R $\neq \emptyset$ Menge mit 2 Verknüpfungen + und $\cdot$ heißt Ring, falls gilt:

  (a) (R, +) ist kommutative Gruppe (neutrales Element: 0, Nullelement, Inverses zu a: -a, b+(-a) =: b-a)

  (b) (R, $\cdot$) ist Halbgruppe

  (c) (a+b) $\cdot$ c = a $\cdot$ c + b $\cdot$ c und a $\cdot$ (b+c) = a $\cdot$ b + a $\cdot$ c ($\cdot$ vor +), für alle $a, b, c \in R$.
  Distributivgesetz

(b) Ring heißt kommutativer Ring falls (R, $\cdot$) kommutative Halbgruppe ist.

(c) Ring R heißt Ring mit Eins, falls (R, $\cdot$) Monoid mit neutralem Element $1 \neq 0$ (Einselement, Eins)

1.13 Beispiele zu Ringen

(a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1, invertierbare Elemente bezüglich $\cdot$ sind 1 und -1.

(b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind kommutative Ringe mit Eins. Alle Elemente $\neq 0$ sind invetierbar bezüglich $\cdot$.

(c) $n \in \mathbb{N}, n > 1$. $\mathbb{Z}_n = \{0, ..., n-1\}$

$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ist kommutativer Ring mit Eins:

Beweis: Wegen 1.6.f),g) sind nur die Distributivgesetze zu zeigen:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \odot c &= ((a \oplus b) \cdot c) \mod n \\ &= (((a+b) \mod n) \cdot c) \mod n \\ &\underbrace{=}_{Mathe\ I} ((a+b) \cdot c) \mod n \\ &= (a \cdot c + b \cdot c) \mod n \\ &\underbrace{=}_{Mathe\ I} ((a \cdot c) \mod n + (b \cdot c) \mod n) \mod n \\ &= a \odot c \oplus b \odot c\end{aligned} \tag{1.14}$$

(d) $M_n(\mathbb{R})$, $n \times n$ - Matrizen über $\mathbb{R}$, mit Matrizenaddition + und Multiplikaiton $\cdot$, ist Ring mit Eins. (Folgt aus Rechenregeln für Matrizen, Mathe II)

Eins: E_n, $n \times n$ - Einheitsmatrix

Für $n \geq 2$ ist $M_n(\mathbb{R})$ kein kommutativer Ring.

1.14 Proposition

Sei (R, +, $\cdot$) ein Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$:

(a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

(b) $(-a) \cdot b) = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

1.14.1 Beweis

(a) $0 \cdot a = (0+0) \cdot a \underbrace{=}_{Distr.} 0 \cdot a + 0 \cdot a$

Addiere auf beiden Seiten $-(0 \cdot a)$

$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$

$a \cdot 0 = 0$ analog.

(b) $(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b \underbrace{=}_{(a)} 0$

$\Rightarrow (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Analog $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

(c) $(-a) \cdot (-b) \underbrace{=}_{(b)} -(a \cdot (-b)) \underbrace{=}_{(b)} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$

1.15 Bemerkung Ringe

(a) In einem Ring mit Eins sind 1 und -1 bezüglich $\cdot$ invertierbar:

$1 \cdot 1 = 1$ $(1^{-1} = 1)$

$(-1) \cdot (-1) = 1$ (1.14.c)), d.h. $(-1)^{-1} = -1$.

0 ist **nie** bezüglich Multiplikation invertierbar, denn $0 \cdot a \underbrace{=}_{1.14.a)} 0 \neq 1$.

(b) Es kann sein, dass 1 = -1 gilt.

Beispiel: $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$.

$1 \oplus 1 = 0 \rightarrow 1 = -1$

1.16 Definition Körper

Ein kommutativer Ring (R, +, $\cdot$) mit Eins heißt Körper, wenn jedes Element $\neq 0$ bezüglich der Multiplikation invertierbar ist.

1.17 Beispiel Körper

(a) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper, $\mathbb{Z}$ nicht.

(b) $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.
Begründung:
$\mathbb{Z}_n$ ist kommutativer Ring mit 1.
1.13.c):
Die invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}_n$ sind alle $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $ggT(a, n) = 1$.

1.18 Proposition (Nullteilerfreiheit) in Körpern

Ist K ein Körper, $a, b \in K$ mit $a \cdot b = 0$, so ist a = 0 oder b = 0.

1.18.1 Beweis

Sei $a \cdot b = 0$. Angenommen $a \neq 0$.
Dann existiert $a^{-1} \in K$.

$$\begin{aligned} 0 \underbrace{=}_{1.14.a)} a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(a \cdot b) \\ = (a^{-1} \cdot a) \cdot b) = 1 \cdot b = b \end{aligned} \tag{1.15}$$

Beispiel: R = $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$
$2 \odot 3 = 0$, aber $2 \neq 0, 3 \neq 0$

1.19 Definition Polynom

Sei K ein Körper.

(a) Ein (formales) Polynom über K ist ein Ausdruck.

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K \tag{1.16}$$

(Manchmal f(x) statt f, +-Zeichen hat zunächst nichts mit Addition zu tun).

a_i : Koeffizienten von f

Ist $a_i = 0$, so kann man in der Schreibweise von f 0 $\cdot x^i$ auch weglassen.

Statt $a_0 x^0$ schreibt man a_0, statt $a_1 x^1$ schreibt man $a_1 x$.

Sind alle $a_i = 0$, so $f = 0$, Nullpolynom.

Ist $a_i = 1$, so schreibt man x^i statt $1 \cdot x^i$.

(b) Zwei Polynome f und g sind gleich, wenn entweder f = 0 und g = 0 oder f = $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0$, g = $\sum_{i=0}^{m} b_i x^i, b, m \neq 0$, und n = m und $a_i = b_i$ für i=0,...,n

(c) Menge aller Polynome über K: $K[x]$
Wir wollen $K[X]$ zu einem Ring machen. Wie?
Beispiel: $f = 3x^2 + 2x + 1, g = 5x^3 + x^2 + x \in \mathbb{Q}[x]$
$f + g = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$
$f \cdot g = (3x^2 + 2x + 1) \cdot (5x^3 + x^2 + x) = 15x^5 + 13x^4 + 10x^3 + 3x^2 + x$

1.20 Satz und Definition

K Körper. $K[x]$ wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgende Verknüpfungen:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i, g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \tag{1.17}$$

so:

$$f + g := \sum_{i=0}^{max(n,m)} (a_i + b_i)x^i \tag{1.18}$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i, \tag{1.19}$$

wobei:

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + ... + a_i b_0 \text{ (Faltungsprodukt)} \tag{1.20}$$

In beiden Fällen sind Koeffizienten a_i mit $i > n$ beziehungsweise b_i mit $i > m$ gleich 0 zu setzen.
Das Einselement ist 1 ($= 1x^0$).
Das Nullelement ist das Nullpolynom.

- f = $\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$

($K[x]$, $+$, $\cdot$) heißt Polynomring in einer Variablen.

Beweis: Nachrechnen

1.21 Bemerkung

(a) $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x], a \in K \subseteq K[x]$
$a \cdot f = \sum_{i=0}^{n}(a \cdot a_i)x^i$
$x \cdot f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+1} = a_n x^{n+1} + ... + a_0 x$

(b) Das +-Zeichen in der Definition der Polynome entspricht genau der Addition der "Monome" $a_i x^i$.
$((a_0 x^0) + (a^1 x^1)) = a_0 x^0 + a_1 x^1$

1.22 Definition

Sei $0 \neq f \in K[x]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0$.
Dann heißt n der Grad von f, Grad(f) = n

Grad(0) := -∞
Grad(f) = 0: Konstante Polynome $\neq 0$.

1.23 Satz

Sei K ein Körper, $f, g \in K[x]$. Dann ist Grad$(f \cdot g)$ = Grad(f) + Grad(g)
(Konvention : -$\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$)

Beweis: Richtig, falls f = 0 oder g = 0. Sei $f \neq 0, g \neq 0$.

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0, \text{ n = Grad(f)} \tag{1.21}$$

$$g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, b_m \neq 0, \text{ m = Grad(g)} \tag{1.22}$$

Koeffizient von x^{n+m} in $f \cdot g : a_n \cdot b_m \underbrace{\neq}_{1.18} 0$
Höhere Potenzen mit Koeffizient $\neq 0$ treten in $f \cdot g$ nicht auf. Also: Grad$(f \cdot g)$ = n+m = Grad(f) + Grad(g)

1.24 Korollar

Sei K ein Körper.

(a) Genau die konstanten Polynome $\neq 0$ sind in $K[x]$ bezüglich $\cdot$ invertierbar. Insbesondere ist $K[x]$ kein Körper.

(b) Sind $f, g \in K[x]$ mit $f \cdot g = 0$, so ist f = 0 oder g = 0 (Nullteilerfreihit in $K[x]$).

(c) Sind $f, g_1, g_2 \in K[x]$ mit $f \cdot g_1 = f \cdot g_2$ und ist $f \neq 0$, so ist $g_1 = g_2$.

1.24.1 Beweis

(a) Sei $f \in K[x]$ invertierbar bezüglich $\cdot$.

Dann ist $f \neq 0$ und es existiert $g \in K[x]$ mit $f \cdot g = 1$.

Mit 1.23:

0 = Grad(1) = Grad$(f \cdot g)$ = Grad(f) + Grad(g).

Also: Grad(f) = 0 (= Grad(g))

D.h. f ist konstantes Polynom.

Ist umgekehrt $f = a \in K, a \neq 0$, so $f^{-1} = a^{-1} \in K$.

(b) Folgt aus 1.23:
- ∞ = Grad(0) = Grad($f \cdot g$) = Grad(f) + Grad(g)
$\Rightarrow$ Grad(f) = - ∞ oder Grad(g) = - ∞, d.h. f = 0 oder g = 0.

(c) $fg_1 = fg_2$
$\Rightarrow 0 = fg_1 - fg_2 = f(g_1 - g_2)$
Da $f \neq 0$, folgt mit b) $g_1 - g_2 = 0$, d.h. $g_1 = g_2$.

1.25 Bemerkung

(a) Jedem Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ kann man eine Funktion $K \to K$ zuordnen: $a \in K \mapsto f(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i \in K$ (Polynomfunktion aus Analysis für $K = \mathbb{R}$)

Auf Grund der Definition von Addition / Multiplikation von Polynomen gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{(f+g)}_{K[x]}(a) &= f(a) \underbrace{+}_{K} g(a) \\ \underbrace{(f \cdot g)}_{K[x]}(a) &= f(a) \underbrace{\cdot}_{K} g(a) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Es kann passieren, dass zwei verschiedene Polynome die gleiche Funktion beschreiben:

Zum Beispiel: K = $\mathbb{Z}_2$ = {0,1}

$f = x^2, g = x, f \neq g$

f(1) = 1 = g(1)

f(0) = 0 = g(0)

Über unendlichen Körpern passiert das nicht (später).

(b) Schnelel Berechnung von f(a):

$f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$

f(a) = $a_0 + a(a_1 + a(a_2 + ... + a(a_{n-1} + aa - - - .n)...))$

n Multiplikation

n Addition

<u>Horner-Schema</u>

1.26 Definition

K Körper, $f, g \in K[x]$.
f <u>teilt</u> g ($f|g$), falls $q \in K[x]$ existiert mit

$$g = q \cdot f \tag{1.24}$$

(Falls $g \neq 0$ und $f|g$, so ist der Grad(f) $\leq$ Grad(g) nach 1.23)

1.27 Satz

K Körper, $0 \neq f \in K[x], g \in K[x]$. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[x]$ mit

1. $g = q \cdot f + r$
2. Grad(r) < Grad(f)

<u>Division mit Rest</u>
$q =: g \operatorname{div} f$
$r =: g \mod f$
(Beweis: WHK, Satz 4.69)

1.28 Beispiel

(a) $g = x^4 + 2x^3 - x + 2,\ f = 3x^2 - 1$, f,g $\in \mathbb{Q}[x]$

$\underline{x^4} + 2x^3 - x + 2 : \underline{3x^2} - 1 = \underbrace{\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}}_{q}$

-$(x^4 - \frac{1}{3}x^2)$

$\underline{2x^3} + \frac{1}{3}x^2 - x + 2$
$-(2x^3 - \frac{2}{3}x)$

$\underline{\frac{1}{3}x^2} - \frac{1}{3}x + 2$
$-(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9})$

$\underbrace{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}_{r}$

(b) $g = x^4 - x^2 + 1, f = x^2 + x, f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$ (-1 = 2 in $\mathbb{Z}_3$)

$x^4 + 2x^2 + 1 : x^2 + x = x^2 + 2x$
-$(x^4 + x^3)$

$2x^3 + 2x^2 + 1$
$-(2x^3 + 2x^2)$

1

g div f = $x^2 + 2x$

g mod f = 1

$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 2x)(x^2 + x) + 1$

1.29 Korollar

K Körper, $a \in K$.

$f \in K[x]$ ist genau dann durch (x-a) tielbar, wenn $f(a) = 0$ (d.h. a ist Nullstelle von f).

[f = q · (x-a), q $\in K[x]$]

1.29.1 Beweis

Falls $(x-a)|f$, so existiert q $\in K[x]$ mit f = q $\cdot(x-a)$. Dann:

$$f(a) = q(a) \cdot (a-a) = 0 \tag{1.25}$$

umgekerht: Angenommen f(a) = 0. Division mit Rest von f durch x-a:

$$f = q \cdot (x-a) + r, \quad q, r \in K[x] \tag{1.26}$$

Grad(r) < Grad(x-a) = 1, $r \in K$

Zeige: r = 0.

r = f - q · (x-a)

Setze $a \in K$ ein.

r $\underbrace{=}_{1.25a)} = f(a) - q(a) \cdot \underbrace{(a-a)}_{=0} = 0 - 0 = 0$

f = q(x-a)

1.30 Definition

K Körper. $a \in K$ heißt m-fache Nullstelle von $f \in K[x]$, falls:

$$(x-a)^m|f \text{ und } (x-a)^{m+1} \not| f \tag{1.27}$$

D.h. $f = q \cdot (x-a)^m$ und $q(a) \neq 0$

1.31 Beispiel

$f = x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
In $\mathbb{Z}_3$ hat f Nullstelle 1.
1.29: x-1 (= x+2) teilt ft.
Dividiere f durch x-1:

$$f = (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2) : (x-1) \tag{1.28}$$

1 Nullstelle von $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$.

$$(x-1)|x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \tag{1.29}$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 : x - 1 = x^3 + 2x + 1 \tag{1.30}$$

$f = \underbrace{(x^3 + 2x + 1)}_{q} \cdot (x-1)^2$
q(1) $= 1 \neq 0$
1 ist 2-fache Nullstelle von f

1.32 Satz

K Körper, $f \in K[x]$, Grad(f) $= n \geq 0$ (d.h. f $\neq$ 0). Dann hat f höchstns n Nullstellen in K (einschließlich Ivelfachheit).
Genauer: Sind $a_1, .., a_k$ die verschiedenen Nullstellen von f, so ist $f = g \cdot (x - a_1)^{m_1} ...(x-a_k)^{m_k}$, m_i Vielfachheiten der Nullstellen a_i, g hat keine Nullstellen in K.
g hat keine Nullstellen in K.

1.32.1 Beweis

Durch Induktion nach n.

n = 0: f = $a_0 \neq 0$, ohne Nullstellen.

Sei n > 0. Behauptung sei richtig für alle Polynome von Grad < n.
Hat f keine Nullstellen, g = f
Hat f Nullstellen $a_1, ..., a_k$, $k \geq 1$, so $f = q \cdot (x - a_1)^{m_1}$ (nach Definition).
q(a_1) $\neq$ 0.
Grad(q) = n - m_1 $\underbrace{<}_{m_1 > 0}$ n
Wir zeigen:

q hat genau die Nullstellen $a_2, ..., a_k$ mit Vielfachheiten $m_2, ..., m_k$. Klar: Jede Nullstelel von q ist auch Nullstelle von f.
D.h. q hat höchstens Nullstelle $a_2, ..., a_k$. Diese Nullstellen hat q mit vielfachheit $0 \leq n_i \leq m_i$, denn $(x - a_i)^{n_i} | q \rightarrow (x - a_i)^{n_i} | f$
Sei $i \in \{2, ..., k\}$. Es ist:

$$f = s \cdot (x - a_i)^{m_i}, s \in K[x], s(a_i) \neq 0 \tag{1.31}$$

$$q = q_1 \cdot (x - a_i)^{n_i}, q_1 \in K[x], q_1(a_i) \neq 0, ((x - a_i)^0 = 1) \tag{1.32}$$

$$f = q \cdot (x - a_i)^{m_i} \tag{1.33}$$

$s \cdot (x - a_i)^{m_i - n_i} \cdot (x - a_i)^{n_i} = s \cdot (x - a_i)^{m_i} = f = q_1 (x - a_i)^{n_i} \cdot (x - a_1)^{m_1}$

1.24.c):
$s(x - a_i)^{m_i - n_i} = q_1 \cdot (x - a_1)^{m_1}$.
Ist $m_i > n_i$, so ist $m_i - n_i > 0$.
$0 = s(a_i)(a_i - a_i)^{m_i - n_i} = q_1(a_i)(a_i - a_1)^{m_1} \neq 0$
D.h. $n_i = m_i$, $i = 2, ..., k$.
$q = g \cdot (x - a_2)^{m_2} ...(x - a_k)^{m_k}$, g ohne Nullstelle in K (nach Induktionsvoraussetzung).
$f = g \cdot (x - a_1)^{m_1} ...(x - a_k)^{m_k}$.

1.33 Korollar

K Körper, $f, g \in K[x]$, m = max(Grad(f), Grad(g))
Gibt es m+1 Elemente $a_1, ..., a_{m+1} in K$, paarweise verschieden, mit $f(a_i) = g(a_i), i = 1, ..., m+1$, so f=g

Insbesondere: Ist K unendlich, $f, g, \in K[x]$ mit f(a) = g(a) für alle $a \in K$, so ist f = g.

1.33.1 Beweis

$f - g \in K[x]$, Grad$(f - g) \leq$ m.
$f - g$ hat m+1 Nullstellen $a_1, ..., a_{m+1}$
1.32. $f - g = 0$, $f = g$

1.34 Bemerkung

Über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) gibt es Polynome beliebig hohen Grades ohne Nullstellen.
Über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$: $(x^2 + 1)^m$ hat Grad 2m, keine Nullstelle in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$
In $\mathbb{C}$ $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$
Über $\mathbb{Z}_p$ z.B. $(x^p - x + 1)^m$ hat Grad pm, ohne Nullstellen. (ohne Beweis)

1.35 Fundamentalsatz der Algebra (C.F. Gauß)

Ist $f \in \mathbb{C}[x]$, $f \neq 0$, so ist:

$$f = a_n(x - c_1)^{m_1} ... (x - c_k)^{m_k}, a_n \in \mathbb{C}, c_i, ..., c_k \in \mathbb{C} \text{ (Nullstellen mit Vielfachheit } m_1, ..., m_k) \quad m_1 + ... + m_k = \text{Grad(f)} \tag{1.34}$$

Grad(f) = n: f hat n Nullstellen (einschließlich Vielfachheit)

Vektorräume

Verallgemeinerung von Mathe II, Kap. 10

2.1 Definition

Sei K ein Körper.
Ein <u>K-Vektorraum</u> V besitzt Verknüpfung +, bezüglich derer er eine kommutative Gruppe ist. (Neutrales Element σ, <u>Nullvektor</u>; Inverses zu $v \in V$: $-v$)
Außerdem existiert Abbildung :

$$K \times V \to V$$
$$(a, v) \mapsto av, a \in K, v \in V$$

("Multiplikation" von Elementen aus V ("Vektoren") mit Körperelementen ("Skalare")), so dass gilt:

$(a \underbrace{+}_{in\ K} b)v = av \underbrace{+}_{in\ V} bv$ für alle $a, b \in K, v \in V$

$a(v \underbrace{+}_{in\ V} w) = av \underbrace{+}_{in\ V} aw$ für alle $a \in K, v, w \in V$

$(a \underbrace{\cdot}_{in\ K} b)v = a \cdot (\underbrace{bv}_{\in V})$

$1v = v$ für alle $v \in V$ (mit 1 neutrales Element in K bezüglich $\cdot$)

2.2 Beispiel Vektorraum

(a) K Körper, $n \in \mathbb{N}$

$K^n = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K\}$ ist K-Vektorraum begzüglich:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ ... \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot a_1 \\ ... \\ a \cdot a_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

für alle $a \in K, \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$

Raum der Spaltenvektoren der Länge n über K.

Entsprechend Raum der Zeilenvektoren.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \left(a_1, ..., a_n\right)^t \tag{2.3}$$

Für $K = \mathbb{R} : \mathbb{R}^n$

n = 2,3 Elemente aus $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ identifizierbar mit Ortsvektor der Ebene oder des 3-dimensionalen Raums.

(b) Sei K ein Körper.

Polynomring $K[x]$ ist ein K-Vektorraum bezüglich:

- Addition von Polynomen
- Multiplikation von Körperelementen mit Polynomen

$$a \cdot (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) := \sum_{i=0}^{n} (aa_i) x^i \in K[x],\ a \in K, a_i \in K$$

(Multiplikation von Polynomen mit Polynom vom Grad ≤ 0 (konstant))

2.1 folgt aus den Ringeigenschaften von $K[x]$.

(c) K Körper. V = Abb(K,K) = $\{\alpha : K \to K : \alpha$ Abb.$\}$

Addition auf V:

$\alpha, \beta \in V$

$(\alpha + \beta)(x) := \alpha(x) + \beta(x)$, für alle $x \in K$.

Skalare Mutliplikation:

$a \in K, \alpha \in V$.

$(a \cdot \alpha)(x) = a \cdot \alpha(x)$, für alle $x \in K$

Nachrechnen: Damit wird V ein K-Vektorraum.

2.3 Prop

K Körper, V K-VR.

(a) $a \cdot \sigma = \sigma$, für alle $a \in K$

(b) $0 \cdot v = \sigma$, für alle $v \in V$.

(c) (-1) $\cdot v = -v$

2.3.1 Beweis

(a) $a \cdot \sigma = a \cdot (\sigma + \sigma) \underbrace{=}_{2.1} a \cdot \sigma + a \cdot \sigma$

$\Rightarrow a \cdot \sigma = \sigma$

(b) $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$

$\Rightarrow 0 \cdot v = \sigma$

(c) $(-1) \cdot v + v \underbrace{=}_{2.1} (-1) \cdot v + 1 \cdot v \underbrace{=}_{2.1} ((-1)+1) \cdot v \underbrace{=}_{b)} 0 \cdot v = \sigma$

$\Rightarrow (-1) \cdot v = -v$

2.4 Definition Unterraum

K Körper, V K-VR.
$\emptyset \neq U \subseteq V$ heißt Unterraum (Untervektorraum oder Teilraum) von V, falls U begzülich Addition auf V und der skalaren Multiplikation mit Elementen aus K selbst K-Vektorraum ist.

2.5 Prop

U ist Unterraum von V $\Leftrightarrow$

(1) $u_1 + u_2 \in U$ für alle $u_1, u_2 \in U$

(2) $au \in U$ für allle $u \in U, a \in K$.

(Nullvektor in U = Nullvektor in V)

2.5.1 Beweis

$\Rightarrow$ klar
$\Leftarrow$: Da $U \neq \emptyset$, existiert $u \in U$:

$$\sigma \underbrace{=}_{2.3.b)} 0 \cdot u \in U$$

$u \in U \Rightarrow -u = (-1) \cdot u \in U$
Mit (1): $(U, +)$ ist kommutative Gruppe.
Restliche Axiome gelten auch für U, K.

2.6 Beispiel

(a) V K-VR, so ist V Unterraum von V und $\{\sigma\}$ ist Unterraum von V (Nullraum).

(b) Betrachte $K[x]$ als K-VR (2.2.b)).
Sei $n \in \mathbb{N}_0$.
U $= \{f \in K[x] :$ Grad(f) $\leq$ n$\}$
Unterraum von $K[x]$.

2.7 Prop

Seien U_1, U_2 Unterräume von K-VR V.

(a) $U_1 \cap U_2$ ist Unterraum

(b) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist Unterraum von V (Summe von Unterräumen)

(c) $U_1 + U_2$ ist der kleinste Unterraum von V, der $U_1 \cup U_2$ enthält

(d) $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum

Beweis: Wie 10.4, Mathe II

2.8 Definition

V K-VR

(a) $v_1, ..., v_m \in V, a_1, ..., a_m \in K$
Dann heißt $a_1v_1 + ...a_mv_m = \sum_{i=1}^m a_iv_i \in V$ Linearkombination von $v_1, ..., v_m$ (mit Koeffizienten $a_1, ..., a_m$).

[Beachte: Zwei formal verschiedene Linearkombinationen derselben Vektoren können den gleichen Vektor darstellen]

(b) Ist $M \subseteq V$, so ist der von M erzeugte oder aufgespannte Unterraum $< M >_k$ (oder kurz $< M >$) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann:

$< M >_k = \{\sum_{i=0}^n a_iv_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M\}$

$< \emptyset >_k := \{\sigma\}$

$M = \{v_1, ...v_m\} : < M > =: < v_1, ..., v_m >$

(c) Ist $< M >_k = V$, so heißt M Erzeugendensystem in V.

2.9 Satz

V K-VR, $M \subseteq V$.

(a) $< M >_k$ ist Unterraum von V

(b) $< M >_k$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält.

Insbesondere: Sind U_1, U_2 Unterräume von V, so ist $< U_1 \cup U_2 >_k = U_1 + U_2$

Beweis: Wie 10.7, Mathe II

Wiederholung

V K-VR
$M \subseteq V$, $< M >_k = \{\sum_{i=1}^n a_iv_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M\}$
Falls $V = < M >_k$, so heißt M Erzeugendensystem von V.

2.10 Definition

V K-VR. V heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls es eine <u>endliche</u> Teilmenge $M \subseteq V$ gibt mit V = $< M >_K$

2.11 Beispiel

(a) $K^n = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K\}$

K^n ist endlich erzeugt:

$e_1, ..., e_n$ <u>Einheitsvektoren</u>

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 an i-ter Stelle)

$K^n =< e_1, ..., e_n >_k$, denn $\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + ... a_n e_n$

(b) $K[x]$ als K-VR ist nicht endlich erzeugt:

Angenommen es existieren $f_1, ..., f_n \in K[x]$ mit $K[x] =< f_1, ..., f_n >_k$.

Sei t = max Grad$(f_i) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$

Dann haben alle Polynome in $< f_1, .., f_n >_k$ höchstens Grad t. Also $x^{t+1} \in K[x] \setminus < f_1, ..., f_n >_k$. Widerspruch !

M = $\{1, x, x^2, x^3, ...\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$

$K[x] =< M >_k$

$f = \sum_{i=0}^t a_i x_i$

(c) $n \in \mathbb{N}$. U = $\{f \in K[x] :$ Grad(f) $\leq$ n$\}$

Unterraum von $K[x]$ endlich erzeugt:

$U =< x^0, x^1, ..., x^n >_K$

2.12 Definition

Sei V K-VR. $v_1, ..., v_m \in V$ heißen <u>linear abhängig</u>, wenn es $a_1, ..., a_n \in K$, <u>nicht alle = 0</u>, gibt mit
$a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \sigma$
(Beachte: Immer ist $0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_m = \sigma$, aber bei lin. Abhängigkeit solles noch eine andere Möglichkeit geben)
Andernfalls nennt man $v_1, ..., v_m$ <u>linear unabhängig</u>
(D.h. aus $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \sigma$, folgt $a_1 = ... = a_m = 0$)

Entspr.: $\{v_1, ..., v_m\}$ linear abhängig / linear unabhängig
$\emptyset$ per Definition linear unabhängig.
Klar. Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren ist wieder linear unabhängig.

2.13 Beispiel

(a) σ ist linear abhängig.

$1 \cdot \sigma = \sigma$

(b) $v, w \in V, v \neq \sigma \neq w$.

Wann sind v und w linear abhängig?

v,w linear abhängig $\Rightarrow \exists a, b \in K$, nicht beide $= 0$ mit $a \cdot +b \cdot w = \sigma$

Angenommen: $a \neq 0$: $a \cdot v = -b \cdot w \; |a^{-1}$ (K körper)

$v = 1v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}(-bw) = (-a^{-1}b)w \in < w >_K = \{cw : c \in K\}$

$d \in K$

$dv = (-d \cdot a^{-1} \cdot b)w \in < w >_k$.

$< v >_k \subseteq < w >_k$

Dann auch $b \neq 0$.

Angenommen b $= 0$: $a \cdot v = -0 \cdot w = \sigma$.

$v = a^{-1} \cdot \sigma = \sigma$ Widerspruch.

Vertausche Rollen von v, w: $< w >_k \subseteq < v >_k$

v,w linear abhängig $\Leftrightarrow < v >_k = < w >_k$

$\Rightarrow$ klar

$\Leftarrow v \in < v >_k = < w >_k \rightarrow v = c \cdot w$ für ein $c \in K$.

$\rightarrow \sigma = -v + c \cdot w = (-1)v + c \cdot w$

$\rightarrow v, w$ linear abhängig.

(c) $e_1, ..., e_n \in K^n$ sind linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + ... + a_n e_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow a_1 = ... = a_n = 0$$

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lin. abhängig / lin. unabhängig?

Für welche a,b,c, $\in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ?$$

Führt auf LGS für die Unbekannten: a,b,c:

$1 \cdot a + 3 \cdot b + 2 \cdot c = 0$

$2 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 0$

$3 \cdot a + 1 \cdot b + 4 \cdot c = 0$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 0 \\ 3 & 1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & -4 & -1 & | & 0 \\ 0 & -8 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

c frei wählbar, $b = -\frac{1}{4}c, a = -3b - 2c = \frac{3}{4}c - 2c = -\frac{5}{4}c$

Z.b. c = 4, b = -1, a = -5

$$(-5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren sind linear abhängig.

2.14 Bemerkung

Mann kann auch für unendliche Mengen $M \subseteq V$ lineare Unabhängiekt definieren: Jede endliche Teilmenge von M ist linear unabhängig.
Z.B. $\{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig in $K[x]$

2.15 Satz

V K-VR, $v_1, ..., v_m \in V$.

(a) $v_1, ..., v_m$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow \exists i : v_i = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ für geeigente $b_j \in K, j \neq i$

$\Leftrightarrow \exists i :< v_1, ..., v_m >_k =< v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m >_k$

(b) $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ jedes $v \in< v_1, ..., v_m >_k$ lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombination von $v_1, ..., v_m$ schreiben.

(c) Sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig und ist

$$v \notin< v_1, ..., v_m >_k$$

so sind $v_1, ..., v_m, v$ linear unabhängig.

2.15.1 Beweis

Wie 10.11, Mathe II

z.B b) $\Rightarrow$:

Angenommen $V \in< v_1, ..., v_m >_k$

$V = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i = \sum_{i=1}^{m} b_i v_i, a_i, b_i \in K$

$\sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i) v_i = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i - \sum_{i=1}^{m} b_i v_i = \sigma$

$v_1, ..., v_m$ linear unabhängig $\Rightarrow a_i - b_i = 0$ für $i = 1, ..., n \to a_i = b_i$

2.16 Definition

Sei V endlich erzeugter K-VR. Eine endliche Teilmenge $B \subseteq V$ heißt <u>Basis</u> von V, falls

(1) V $= < B >_k$

(2) B linear unabhängig

(V $= \{\sigma\}$: $\emptyset$ ist Basis von V)

2.17 Beispiel

(a) $e_1, ..., e_n$ Basis von K^n (<u>kanonische</u> Basis)
$\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = a_1e_1 + ... + a_ne_n$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_5$

In $\mathbb{Z}_5^2$ sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Basis, denn sie sind nicht linear unabhängig über $\mathbb{Z}_5$.
$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$K = \mathbb{Z}_7$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden Basis von $\mathbb{Z}_7^2$:
Lineare Unabhängigkeit:
$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}_7$.
Führt auf LGS für a,b:
$1 \cdot a + 3 \cdot b = 0$
$2 \cdot a + 1 \cdot b = 0$
Gauß-Algorithmus (funktioniert über jedem Körper K):
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\rightarrow}_{\text{multp. mit Inversem}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$b = 0, a + 3b = 0 \rightarrow a = 0$
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_7} = \mathbb{Z}_7^2$
Sei $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^2$. Gesucht sind $a, b \in \mathbb{Z}_7^2$

$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$1 \cdot a + 3 \cdot b = c$

$2 \cdot a + 1 \cdot b = d$

Gauß:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 1 & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & d-2c \end{pmatrix} \underbrace{\to}_{\text{2. Zeile mit } 2^{-1}=4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 1 & 4d-c \end{pmatrix}$

$b = 4d - c = 4d + 6c$

$a = c - 3b = c - 5d - 4c = 4c + 2d$

$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (4c+2d) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (4d+6c) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.18 Satz (Existenz von Basen)

Sei V endlich erzeugter K-VR. Dann enhält jedes endliche Erzeugendensystem von V eine Basis v von V.

2.18.1 Beweis

Sei $M \subseteq V$ endlich mit $V =< M >_K$. Ist M linear unabhängig so ist M basis.
Ist M lin. abhängig, so existiert nach 2.15.a) $v \in M$ mit $V =< M >_k =< M \setminus \{v\} >_k$.
Da M endlich ist endet dieses Verfahren mit Basis.

2.19 Lemma

V endlich erzeugter K-VR V.
$B = \{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V.
Sei $\sigma \neq w \in V$. Dann:

$$w = \sum_{j=1}^{n} a_k v_j, a_j \in K \tag{2.4}$$

Ist $a_i \neq 0$, so ist

$$(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$$

wieder eine Basis von V.

2.19.1 Beweis

$w = \sum_{j=1}^n a_j v_j \Rightarrow a_i v_i = w - \sum_{j=1, j\neq i}^n a_j v_j$
$\Rightarrow v_i = a_i^{-1}(a_i v_i) = a_i^{-1} w + \sum_{j=1,j\neq i}^n (a_i^{-1} a_j) v_j$
$v_i \in \langle (B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\} \rangle$
V $= \langle B \rangle_K = \langle B \cup \{w\} \rangle_K = \langle (B \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle_K$
Zeige: $(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$ ist linear unabhängig:

Angenommen:

$$\sigma = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_j v_j + cw \text{ mit } c_j, c \in K$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_j v_j + \sum_{j=1}^{n} ca_j v_j \\ &= \sum_{j=1, j\neq i}^{n} (c_j + ca_j) v_j + ca_i v_i \end{aligned}$$

$v_1, ..., v_n$ linear unabhängig:
$\rightarrow ca_i = 0$ und $c_j + c_a j = 0$ für alle $j \neq i$.

(1) $ca_i = 0,\ a_i \neq 0 \rightarrow c = 0$

(2) $c_j = 0$ für alle $j \neq i$

2.20 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

V endlich erzeugter K- VR, B Basis von V, M endliche linear unabhängige Teilmenge von V. Dann existiert $C \subseteq B$ mit $|C| = |M|$, so dass

$$(B \setminus C) \cup M$$

Basis von V ist.
Insbesondere $|M| \leq |B|$.

2.20.1 Beweis

Sei $|M| = k$. Induktion nach k.
$k = 0$: klar
$k > 0$: Sei $M = \tilde{M} \cup \{w\}$, $|\tilde{M}| = k - 1$.
Induktionsvorraussetzung: Existiert $\tilde{C} \subseteq B$ mit

$$|\tilde{C}| = |\tilde{M}|$$

und

$$(B \setminus \tilde{C}) \cup \tilde{M}$$

ist Basis von V.
w = $\sum_{u \in B \setminus \tilde{C}} a_u u + \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$
Mindestens eines der a_k ist $\neq 0$, denn sonst:

$$w = \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v, \text{ also}$$

$M = \tilde{M} \cup \{w\}$ linear abhängig (Widerspruch!)
Also sei $a_n \neq 0$ für ein $u \in B \setminus \tilde{C}$
Nach 2.19 ist

$$(B \setminus C) \cup M$$

Basis von V, wobei $C = \tilde{C} \cup \{u\}$. Fertig.

2.21 Korollar

V endlich erzeugter K-VR.

(a) Je zwei Basen von V enthalten gleich viele Vektoren

(b) Jede linear unabhängige Teilmenge von V ist endlich

(c) (Basisergänzungssatz)
Jede linear unabhängige Menge von Vektoren lässt sich zu einer Basis ergänzen.

2.21.1 Beweis

(a) $B, \tilde{B}$ Basen von V.
2.20 : $|B| \leq |\tilde{B}|$, $|\tilde{B}| \leq |B|$, also $|B| = |\tilde{B}|$.

(b) Angenommen V enthält unendlich linear unabhängige Teilmengen.
Sei B Basis von V. Wähle $M_0 \subset M$ mit M_0 endlich, $|M_0| > |B|$.
Nach Voraussetzung ist M_0 linear unabhängig. Widerspruch zu 2.20.

(c) Sei M linear unabhängige Teilmenge von V. Nach b) ist M endlich.
Sei B eine Basis von V.
2.20: $\exists C \subseteq B, |C| = |M|$, so dass $(B \setminus C) \cup M$ Basis.

2.22 Satz

V endlich erzeugter K-VR, $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) B ist Basis von V

(2) B ist maximal linear unabhängige Teilmenge von V (d.h. $B \cup \{v\}$ ist linear abhängig f.a $v \in V \setminus B$)

(3) B ist minimales Erzeugendensystem von V (d.h. $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K \neq V$ für alle $w \in B$)

2.22.1 Beweis

(2) $\Rightarrow$ (1)

Angenommen $\langle B \rangle_K \neq V$. Sei $v \in V \setminus \langle B \rangle_K$.
2.15.c): $B \cup \{v\}$ linear unabhängig. Widerspruch !
$\langle B \rangle_K = V$. B ist Basis

(1) $\Rightarrow$ (2)

Angenommen: $B \subseteq C$, C linear unabhängig.
2.21: C endlich
2.20: $|C| \leq |B|$. Daher: B = C

(3) $\Rightarrow$ (1)

Angenommen B ist linear abhängig.
2.15.a): $\exists w \in B$:
V = $\langle B\rangle_K = \langle B \setminus \{w\}\rangle$ Widerspruch!
B ist linear unabhängig, also Basis.

(1) $\Rightarrow$ (3)

Angenommen: $\exists w \in B$ mit $\langle B \setminus \{w\}\rangle_K = V = \langle B\rangle_K$
2.15.a): B ist linear abhängig. Widerspruch!

2.23 Definition

V K-VR.

(a) Ist V endlich erzeugt, B ist Basis von V, $|B| = n$, so hat V Dimension n, $dim_K(V) = n$ (oder einfach $dim(V) = n$)

(V heißt endlich-dimensional)

(b) Ist V nicht endlich erzeugt, so heißt V unendlich-dimensional.

(Also: endlich erzeugt = endlich-dimensional)

2.24 Korollar

V K-VR, $dim_K(V) = n$, $B \subseteq V$, $|B| = n$.

(a) Ist B linear unabhängig, dann ist B Basis.

(b) Ist $\langle B\rangle_K = V$, dann ist B Basis.

2.24.1 Beweis

Folgt aus 2.22

2.25 Beispiel

(a) $dim_K(K^n) = n$, da $e_1, ..., e_n$ Basis.

(b) $V = \mathbb{R}^4$

$$\text{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

u_1, u_2 sind linear unabhängig.

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{u_1, u_2\}$ Basis von U, $dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$

Ergänze u_1, u_2 zu Basis von $V = \mathbb{R}^4$:

1. Möglichkeit

e_1, e_2, e_3, e_4 kanonische Basis des $\mathbb{R}^4$

$u_1 = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4$

2.19: u_1, e_2, e_3, e_4 Basis von $\mathbb{R}^4$.

$u_2 = au_1 + be_2 + ce_3 + de_4$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \rightarrow c = 1$$

2.19: u_1, u_2, e_3, e_4 Basis von $\mathbb{R}^4$

2.25.1 2. Möglichkeit

2.15.c):
$v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.
$v \notin \langle v_1, ..., v_m \rangle \rightarrow v_1, ..., v_m, v$ linear unabhängig.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a + 2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_1 \notin U$ (1. Koord $\neq$ 4. Koordinate)
2.15.c) u_1, u_2, e_1 linear unabhängig.
$\langle u_1, u_2, e_1 \rangle =?$

$$u_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a + c \\ 2a + 2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_2 \notin U$
2.15.c) u_1, u_2, e_1, e_2 linear unabhängig.
2.24: $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$

2.26 Satz

V K-VR, $dim_K(V) = n$.

(a) Ist U Unterraum von V, so ist $dim_K(U) \leq n$.

Ist $dim_K(U) = n$, so ist U = V.

(b) (Dimensionsformel)
U, W Unterräume von V, so gilt:
$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$
A, B endl. Mengen:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

2.26.1 Beweis

(a) ergänze Basis von U zu Basis von V. (2.21.c))

(b) Basis von $U \cap W \to$ (ergänze zu) Basis von U
(WHK 9.23)

2.27 Definition

V K-VR, $dim_K(V) = n$.
B $= (v_1, ..., v_n)$ geordnete Basis von V.

Jedes $v \in V$ hat eindeutige darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$
$a_i \in K$. (2.15.b))
$(a_1, ..., a_n)$ (in dieser Anordnung) heißen Koordinaten von V bezüglich B.

Insbesondere v_i hat Koordinaten $(0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 an i-ter Stelle)

2.28 Beispiel

(a) V $= K^n$, $(e_1, ..., e_n) =$ B kanonische Basisv

Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$ bezüglich B: $(a_1, ..., a_n)$ Kartesische Koordinaten

(b) $V = \mathbb{Q}^3$, B $= (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

B ist geordnete Basis von V (nachprüfen).

Koordinaten von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich B:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$a_3 = -\frac{2}{5}$

$a_2 = 1 + \frac{1}{2}a_3 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$a_1 = 1 - a_2 = \frac{1}{5}$

Koordinaten von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ bezüglich B: $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$

$\mathbb{R}^2$: 1-dim. Unterräume (Geraden durch σ), 0-dim: $\{\sigma\}$
0-dim. affiner Unterräume $\{v\}, v \in V$

2.29 Definition

V K-VR, U Unterraum von V, $w \in V$
Dann heißst $w + U := \{w + u : u \in U\}$ affiner Unterraum von V.
(w + U ist im Allgemienen kein Untervektorraum)

$dim(w + U) := dim(U)$

2.30 Satz

V K-VR, U,W Unterräume von V, $w \in V, v_1, v_2 \in V$

(a) w+U ist Unterraum (1) $\Leftrightarrow$ $w \in U(2)$ $\Leftrightarrow$ w + U = U (3)

(b) Ist $v \in w + U$, so ist $v + U = w + U$

(c) Sind $v_1 + U, v_2 + W$ affine Unterräume, so ist entweder $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = \emptyset$ oder es existiert $v \in V$ mit $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = v + (U \cap W)$ (affiner Unterraum)

2.30.1 Beweis

(a) **(1) $\rightarrow$ (2)**

w+U Unterraum $\Rightarrow \sigma \in w + U$

$\Rightarrow \exists u \in U$ mit $w + u = \sigma$

$\Rightarrow w = -u \in U$

(2) $\rightarrow$ (3)

$w \in U, w + U \subseteq U$ (da U Unterraum)

Sei $u \in U$. Dann $u - w \in U$, $u = w + (u - w) \in w + U$

w + u = U

(3) $\rightarrow$ (1)

✓

(b) $v \in w + U, v = w + u$ für ein $u \in U$.

v + U = w + $\underbrace{u + U}_{=U}$ = w+U

(c) Angenommen: $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) \neq \emptyset$

Sei $v \in (v_1 + U) \cap (v_2 + U)$

Nach b):

- $v + U = v_1 + U$
- $v + W = v_2 + W$

$(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = (v + U) \cap (v + W) = v + (U \cap W)$

2.31 Bemerkung

affine Unterräume:
Spezielle Rolle von σ ist aufgehoben.

Zur Beschreibung eines $x \in K^n$ kann man jeden Punkt p als "Nullpunkt" wählen und dann die Koordinaten von x bezüglich einer nach p "verschobenen" Basis berechnen.

p hat Koordinaten $(p_1, ..., p_n)$ bezüglich Basis $v_1, ..., v_n$.
(1) Ursprüngliches Koordinatensystem: σ, $v_1, ..., v_n$.
(2) Neues Koordinatensystem: p, $v_1 + p, ..., v_n + p$.

x hat Koordinaten $(a_1, ..., a_n)$ bezüglich (1) $\rightarrow$ Koordinaten von x bezüglich (2) $= (a_1 + p, ..., a_n + p)$

x hat Koordinaten $(a'_1, ..., a'_n)$ bezüglich (2) $\rightarrow$ x hat Koordinaten $(a'_1+p, ..., a'_n+p)$ bezüglich (1)
(Robotik)

2.32 Bemerkung

(a) In Mathe II:

$n \times m$-Matrizen über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Das geht auch über beliebigen Körpern K.

Addition, Multiplikation mit Skalaren, Matrizenmultiplikation werden analog definiert. Es gelten die gleichen Rechenregeln wie in Mathe II, 9.5

(b) In Mathe II wurden Matrizen verwendet zur Beschreibung von LGS.

Analog: LGS über beliebigen Körpern K. Gauß-Algorithmus funktioniert analog.

$(a_1, ..., a_m), a_1 \neq 0$

$\rightarrow (1, a_2 \cdot a_1^{-1}, ...)$ (Mutliplikation der Zeile mit a_1^{-1}) (K Körper!)

2.33 Satz

(a) Die Menge der Lösungen eines homogenen LGS

$$A \cdot x = 0$$

($A \in M_{n,m}(K)$, $x \in K^m$, 0 ist Nullvektor in K^n)

bildet Untervektorraum von K^m.

(b) Ist das inhomogene LGS

$$A \cdot x = b$$

(A, x wie oben, $b \in K^n$)

lösbar und ist $x_0 \in K^m$ eine spezielle Lösung(d.h. $A \cdot x_0 = b$), so erhält man alle Lösungen von $A \cdot x = b$ durch

$$\{x_0 + y : Ay = 0\}$$

Ist U der Lösungsraum von $A \cdot x = 0$, so ist die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ gerade der affine Unterraum $x_0 + U$ von K^m

2.33.1 Beweis

(a) Folgt aus Rechenregeln für Matrizen

$x_1, x_2 \in K^m$ Lösungen von

$$A \cdot x = 0$$

$A \cdot (x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$

$\rightarrow x_1 + x_2$ auch Lösung.

$a \in K$.

$A \cdot (a \cdot x_1) = a \cdot (Ax_1) = a \cdot 0 = 0$

$\rightarrow a \cdot x_1$ Lösung.

Null-Lösung existiert immer.

(b) $A \cdot x_0 = b$. Sei $y \in K^m$ mit $Ay = 0$.

$A \cdot (x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$

$\rightarrow x_0 + y$ ist Lösung von $Ax = b$.

Zeige: Jede Lösung von Ax = b ist von der Form $x_0 + y$ für ein y mit $Ay = 0$.

Sei x Lösung von $Ax = b$.

$x = x_0 + (x - x_0)$

$A \cdot (x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$ ✓

2.34 Beispiel

Gegeben LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 0x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Q}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gauß:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

x_3, x_4 frei wählbar.

$x_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4$, $x_1 = ...$

Zugehöriges homogenes System:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

Lösungsmenge = Unterraum.

Basis des Lösungsraums:

Setze die frei wählbaren x_4, x_3 :

- $x_4 = 1, x_3 = 0 \to$ Lösung $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $x_4 = 0, x_3 = 1 \to$ Lösung $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jede Lösung $d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Lösungsraum von zugehörigen homogenen LGS:

$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

affiner Lösungsraum des inhomogenen LGS:

Spezielle Lösung $x_4 = x_4 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{1}{3}$.

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Lineare Abbildungen

3.1 Definition

V, W K-VR

(a) $\alpha : V \to W$ heißt (K-)lineare Abbildung (oder Vektorraum-Homomorphismus), falls:

   (1) α(u+v) $= \alpha(u) + \alpha(v)$, für alle $u, v \in V$. (Additivität)

   (2) $\alpha(kv) = k \cdot \alpha(v)$, für alle $k \in K, v \in V$. (Homogenität)

3.2 Bemerkung

$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.

(a) $\alpha(\sigma) = \sigma$

(b) $\alpha(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha(v_i)$

3.2.1 Beweis

(a) $\alpha(\sigma) = \alpha(\sigma + \sigma) = \alpha(\sigma) + \alpha(\sigma) \to \alpha(\sigma) = 0$

(b) Definition + Induktion nach n.

3.3 Beispiel

(a) Nullabbildung $\alpha : V \to W$
$\alpha(v) = \sigma$ für alle $v \in V$

(b) $c \in K$.
$\alpha : V \to V, \alpha(v) = c \cdot v$
lineare Abbildung.
$c = 1 : \alpha = id_v$

(c) $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$ linear.

Spiegelung an der $\{x_1, x_2\}$-Ebene in $\mathbb{R}^3$

(d) $\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 \end{cases}$ nicht linear.

$\alpha(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (y_1 + y_2)) = \alpha(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}) = (x_1 + y_1)^2 = {x_1}^2 + 2x_1y_1 + {y_1}^2 \neq {x_1}^2 + y_1^2$

3.4 Satz

Sei $A \in M_{m,n}(k)$
Definiere $\alpha : K^n \to K^m$ (Spaltenvektoren) durch $\alpha(x) = \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{x}_{n \times 1} \in K^m$.
Dann ist α lineare Abbildung.

3.4.1 Beweis

Folgt aus Rechenregeln für Matrizenmultiplikation:

- $\alpha(x + y) = A \cdot (x + y) = Ax + Ay = \alpha(x) + \alpha(y)$ ✓
- $\alpha(k \cdot x) = A(k \cdot x) = k \cdot (Ax) = k\alpha(x)$ ✓

Beispiel aus 3.3 a) - c)

- $V = K^n$, Nullabbildung $K^n \to K^m$

  Von der Form in 3.4 mit $A = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ Nullmatrix

- $\alpha : \begin{cases} K^n \to K^n \\ x \mapsto c \cdot x \end{cases}$ $,(c \in K)$

  3.4 mit $A = \begin{pmatrix} c & .. & 0 \\ ... & ... & .. \\ 0 & ... & c \end{pmatrix}$

- Spiegelung aus 3.3.c)

  3.4 mit $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Später: Alle linearen Abbildungen $K^n \to K^m$ sind von der Form 3.4

3.5 Satz

U, V, W K-VR:

(a) $\alpha, \beta : V \to W$ linear, so auch $\alpha + \beta$ (definiert durch $(\alpha+\beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v)$ f.a. $v \in V$), und $k \cdot \alpha$ (definiert durch $(k \cdot \alpha)(v) := k \cdot \alpha(v)$ f.a. $v \in V$) linear von V nach W.

(b) $\alpha : V \to W, \gamma : W \to U$ linear, so auch $\gamma \circ \alpha : V \to U$ lineare Abbildung.

3.5.1 Beweis

Blatt 5.

3.6 Satz

$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.

(a) Ist U Unterraum von V, so ist $\alpha(U) := \{\alpha(u) : u \in U\}$ Unterraum von W.

Insbesondere ist $\alpha(V)$, Bild von α, Unterraum von W.

(b) Ist U endlich-dimensional, so auch $\alpha(U)$ und es gilt $dim(\alpha(U)) \leq dim(U)$

3.6.1 Beweis

(a) $\alpha(u_1), \alpha(u_2) \in \alpha(U)$, d.h. $u_1, u_2 \in U$, so $\alpha(u_1) + \alpha(u_2) = \alpha(\underbrace{u_1 + u_2}_{\in U}) \in \alpha(U)$

$k \in K$

$k \cdot \alpha(u_1) = \alpha(k \cdot u_1) \in \alpha(U)$

(b) Sei $u_1, ..., u_k$ Basis von U.

$u \in U, u = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i, c_i \in K$

$\alpha(u) = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha(u_i)$

Also $\alpha(u) = \langle \alpha(u_1), ..., \alpha(u_k) \rangle_K$

Nach 2.13:

$\{\alpha(u_1), ..., \alpha(u_k)\}$ enthält Basis von $\alpha(U)$.

$dim(\alpha(U)) \leq k = dim(U)$

3.7 Definition

V,W K-VR, V endlich dimensional, $\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.

Dann $dim(\alpha(V)) =: rg(\alpha)$ (Rang von α)

3.8 Satz

V, W K-VR, $\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.

(a) $ker(\alpha) := \{v \in V : \alpha(v) = \sigma\}$, Kern von α, ist Unterraum von V.

(b) α injektiv $\Leftrightarrow ker(\alpha) = \{\sigma\}$

(c) Ist α bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $\alpha^{-1} : W \to V$ bijektiv und linear.

3.8.1 Beweis

(a) $v_1, v_2 \in ker(\alpha)$

$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2) = \sigma + \sigma = \sigma$

Also: $v_1 + v_2 \in ker(\alpha)$

$\alpha(k \cdot v_1) = k \cdot \alpha(v_1) = k \cdot \sigma = \sigma$

Also: $k \cdot v_1 \in ker(\alpha)$

(b) $\Rightarrow$: ✓, denn falls $\sigma \neq v \in ker(\alpha)$, so $\alpha(v) = \sigma = \alpha(\sigma) \to \alpha$ nicht injektiv. Widerspruch !

$\Leftarrow$: Angenommen $v_1, v_2 \in V$ mit $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$.

Zu zeigen $v_1 = v_2$.

$\sigma = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_1 - v_2))$

$\to v_1 - v_2 = \sigma, v_1 = v_2$

(c) Zu zeigen: α^{-1} ist linear

Seien $w_1, w_2 \in W$.

Zeige: $\alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(w_1) + \alpha^{-1}(w_2)$

α bijektiv $\to$ ex. $v_1.v_2 \in V$ mit $\alpha(v_1) = w_1, \alpha(v_2) = w_2$.

$v_1 = \alpha^{-1}(w_1), v_2 = \alpha^{-1}(w_2)$

$\alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(\alpha(v_1) + \alpha(v_2)) = \alpha^{-1}(\alpha(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \alpha^{-1}(w_1) + \alpha^{-1}(w_2)$✓

Homogenität analog.

3.9 Beispiel

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist lineare Abbildung, da:

$\alpha(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (3.4)

$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bild von α wird erzeugt $\alpha(e_1), \alpha(e_2), \alpha(e_3)$ lineare abhängig.

$\alpha(\mathbb{R}^3) = \left\langle \underbrace{\alpha(e_1), \alpha(e_2)}_{\text{lin. unabhäng}} \right\rangle$

$rg(\alpha) = 2$

U = $\langle e_2, e_3 \rangle$ 2-dim. Unterraum von $\mathbb{R}^3$ 2-dim. Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

$\alpha(U) = \langle \alpha(e_2) \rangle = \langle e_3 \rangle$ 1-dim.

$ker(\alpha) = ?$

Suche alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

LGS: $x_1 = 0, 2x_1 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$ker(\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2c \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ 1-dim.

3.10 Satz

V, W, K-VR, $dim(V) = n$.

$\{v_1, ..., v_n\}$ sei Basis von V, $w_1, ..., w_n \in W$ beliebig (nicht notwendigerweise verschieden).

Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\alpha : V \to W$ mit $\alpha(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$, nämlich:

$$\alpha(\textstyle\sum_{i=1}^n c_i v_i) := \sum_{i=1}^n c_i w_i \quad (*)$$

Also: Kennt man die Bilder einer Basis, so kennt man die lineare Abbildung vollständig.

3.10.1 Beweis

Die in $(*)$ definierte Abbildung α ist linear und es gilt $\alpha(v_i) = w_i$ für $i = 1, ..., n$ (Nachrechnen)

α eindeutig.

Angenommen : $\beta : V \to W$ linear mit $\beta(v_i) = w_i$, so gilt:

$$\beta(\textstyle\sum_{i=1}^n c_i v_i) = \sum_{i=1}^n c_i \beta(v_i) = \sum_{i=1}^n c_i w_i = \alpha(\sum_{i=1}^n c_i v_i)$$
$$\to \alpha = \beta$$

Beispiel

V = W = $\mathbb{R}^3$

$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}) =?$

$\alpha(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -51 \\ 9 \end{pmatrix} \checkmark$

3.11 Beispiel

V = $\mathbb{R}^2$, $\alpha : V \to V$. Drehung um Winkel φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$, um Nullpunkt (entgegen Uhrzeigersinn). α ist lineare Abbildung.

$\alpha(e_1) = \alpha(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix}$

$\alpha(e_2) = \alpha(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(\varphi) \\ cos(\varphi) \end{pmatrix}$

3.10

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\alpha(x) = x_1 \cdot \alpha(e_1) + x_2 \cdot \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot cos(\varphi) - x_2 \cdot sin(\varphi) \\ x_1 \cdot sin(\varphi) - x_2 \cdot cos(\varphi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

3.12 Satz

$\alpha : V \to W$ lin. Abbildung
$dim(V) = n, \{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V.

(a) α injektiv $\Leftrightarrow \{\alpha(v_1), ..., \alpha(v_n)\}$ ist linear unabhängig.

(b) α surjektiv $\Leftrightarrow$ α bijektiv $\Leftrightarrow \{\alpha(v_1), ..., \alpha(v_n)\}$ Basis von W.

Beweis

(a) $\Rightarrow$:

Zeige: $\sum_{i=1}^n c_i\alpha(v_i) = \sigma \to c_1 = ... = c_n = 0$.

$\sigma = \sum_{i=1}^n c_i\alpha(v_i) = \alpha(\sum_{i=1}^n c_iv_i)$

$\sum_{i=1}^n c_iv_i \in ker(\alpha) \underbrace{=}_{\alpha \text{ injektiv}} \{\sigma\}$

$\to \sum_{i=1}^n c_iv_i = \sigma \Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$ ($v_1, ..., v_n$ linear unabhängig)

$\Leftrightarrow$:

Zeige: $ker(\alpha) = \{\sigma\}$

Angenommen : $\sigma_{i=1}^n c_iv_i \in ker(\alpha)$

$\sigma = \alpha(\sum_{i=1}^n c_i v_i) \underbrace{=}_{\alpha \text{ lin.}} = \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) \Rightarrow (\alpha(v_1), ..., \alpha(v_n)$ linear unabhängig.)

$\Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i v_i = \sigma$ ✓

(b) $\alpha(V) = \langle \alpha(v_1), ..., \alpha(v_n) \rangle$

Behauptung folgt.

(c) Folgt aus (a) und (b)

3.13 Korollar

Seien V,W K-VR, $dim(V) = dim(W)$. Dann sind V und W isomorph.

3.13.1 Beweis

Sei $v_1, ..., v_n$ Basis von V, $w_1, ..., w_n$ Basis von W.
Nach 3.10 existiert genau eine lin. Abbildung $\alpha : V \to W$ mit $\alpha(v_i) = w_i$.
Nach 3.12c) ist α bijektiv,

$$V \cong W$$

3.14 Korollar

V n-dim. VR über K, $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ geordnete basis von V. Dann ist die Abb.

$$K_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V \to K^n \text{ (Zeilenvektoren)} \\ \sum_{i=1}^n c_i v_i \mapsto (c_1, ..., c_n) \end{cases} \tag{3.1}$$

(Koordinatenabbildung bezüglich $\mathcal{B}$) ein Isomorphismus. Das heißt $V \cong K^n$.

3.14.1 Beweis

$K_{\mathcal{B}}(v_i) = (0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$
v_i werden auf die kanonische Basis des K^n abgebildet.
$K_{\mathcal{B}}$ ist Isomorph.

3.15 Satz (Dimensionsformel)

V endlich dim. K-VR, $\alpha : V \to W$ lin. Abbildung.
Dann:
$dim(V) = rg(\alpha) + dim(ker(\alpha)) = dim(\alpha(v)) + dim(ker(\alpha))$

3.15.1 Beweis

Sei $u_1, ..., u_k$ Basis von $ker(\alpha)$.
Basisergänzungssatz (2.21.c). Ergänze zu Basis $u_1, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_n$ von V.
Sei U = $\langle u_{k+1}, ..., u_n \rangle_K$ Unterraum von V, $ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}$:
Angenommen: $v \in ker(\alpha) \cap U$
v = $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = \sum_{i=k+1}^{n} c_i u_i$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-c_i) u_i = \sigma$
$\Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$, $v = \sigma$
$ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}$, also $\alpha|_U$ ist injektiv, d.h. $dim(U) = dim(\alpha(U))$
$\alpha(V) = \alpha(U)$
$v \in V, v = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} c_i u_i$

$$\alpha(v) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} c_i \alpha(u_i)}_{0} + \sum_{i=k+1}^{n} c_i \alpha(u_i) \in \alpha(U)$$

$V = ker(\alpha) + U$
$dim(V) = dim(ker(\alpha)) + dim(U) - \underbrace{dim(ker(\alpha) \cap U)}_{=0}$
$= dim(ker(\alpha)) + dim(\alpha(U))$
$= dim(ker(\alpha)) + dim(\alpha(v))$
$= dim(ker(\alpha)) + rg(\alpha)$

3.16 Korollar

V, W endlich-dimensional K-VR mit $\underline{dim(V) = dim(W)}$, $\alpha : V \to W$ linear.
Dann gilt:
α ist injektiv $\Leftrightarrow$ α ist surjektiv $\Leftrightarrow$ α ist bijektiv

3.16.1 Beweis

α ist surjektiv $\Leftrightarrow \alpha(v) = w \Leftrightarrow$ dim($\alpha(V)) = dim(W) = dim(V) \Leftrightarrow$ dim(ker(α)) = 0 $\Leftrightarrow$ ker(α) = $\{\sigma\}$ $\Leftrightarrow$ α ist injektiv.

Der Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme

4.1 Definition

Der Zeilenrang einer Matrix A über Körper K ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen in A. Das heißt sind $z_1, ..., z_m$ die Zeilen von A, so ist Zeilenrang von A = dim($\langle z_1, ..., z_m \rangle$)

Analog: Spaltenrang

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ Spaltenrang von A = 2, Zeilenrang $z_1 + 2z_3 - 2z_2 = 0$, Zeilenrang von A = 2.

4.2 Satz

Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der Zeilenrang einer Matrix nicht. (Analog: Spaltenumf. / Spaltenrang)

4.2.1 Beweis

$\langle z_1, ..., z_m \rangle$
$= \langle z_1, ..., az_2, ..., z_m \rangle$, $a \neq 0$

$\langle z_1, ..., z_m \rangle = \langle z_1, ..., z_i + az_j, ..., z_m \rangle$, $i \neq j$

4.3 Bemerkung

Zeilenrangbest. von A:
Bringe A mit Gauß auf Zeilenstufenform (ändert Zeilenrang nicht)
Zeilenrang = Anzahl der von Nullzeile verschiedenen Zeilen.

4.4 Korollar

Sei $A \cdot x = b$ ein LGS über K, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k), x \in K^n, b \in K^m$ (m Gleichungen, n Unbekannte)

(a) $A \cdot x = b$ ist genau dann lösbar, wenn Zeilenrang von A = Zeilenrang von $(A|b)$

(b) $A \cdot x = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn:

Zeilenrang A = Zeilenrang von $(A|b)$ = n (= Anzahl der Unbekannten)

(c) Dimension des Lösungsraums von $A \cdot x = \sigma$ = n - Zeilenrang von A

4.5 Satz

Sei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\alpha : \begin{cases} K^n \to K^m \\ x \mapsto Ax \end{cases}$
α ist lineare Abbildung und es gibt:

$$rg(\alpha) = \text{Spaltenrang von A}$$

4.5.1 Beweis

$\alpha(K^n) = \langle \alpha(e_1), ..., \alpha(e_n) \rangle$, $e_1, ..., e_n$ kan. Basis von K^n

$$\alpha(e_i) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ ... \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \text{i-te Spalte von A} =: s_i.$$

$rg(\alpha) = dim(\alpha(K^n)) = dim(\langle \alpha(e_1), ..., \alpha(e_n) \rangle) = dim(\langle s_1, ..., s_n \rangle)$ = Spaltenrang von A.

4.6 Satz und Definition

Sei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Dann ist Zeilenrang von A = Spaltenrang von A. Diese gemeinsame Zahl heißt Rang von A, $rg(A)$.
(Also: $\alpha : \begin{cases} K^n \to K^m \\ x \mapsto Ax \end{cases}$, so $rg(\alpha) = rg(A)$)

4.6.1 Beweis

Betrachte homogenes LGS

$$Ax = 0, (*)$$

Dimension des Lösungsraums von $(*)$ = Dimension von $ker(\alpha)$, α in 4.5.
3.15: $dim(ker(\alpha)) = n - rg(\alpha) \underset{4.5}{=} n$ - Spaltenrang von A.
4.4: dim Lösungsraum von $Ax = 0 = n$ - Zeilenrenrang von A

Damit folgt die Behauptung.

4.7 Korollar

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. $rg(A) = rg(A^t)$

Beweis: $rg(A)$ = Zeilenrang von A = Spaltenrang von A^t = $rg(A^t)$

4.8 Satz

Sei V endlich dimensionaler K-VR, $\mathcal{B}$ geordnete Basis von V, $u_1, ..., u_m \in V$ beliebig.
Seien $K_\mathcal{B}(u_i)$ die Koordinatenvektoren von u_i bezüglich $\mathcal{B}$ (Zeilenvektoren).

Dann gilt: $dim(\langle u_1, ..., u_m\rangle) = rg \begin{pmatrix} K_\mathcal{B}(u_1) \\ ... \\ K_\mathcal{B}(u_m) \end{pmatrix}$ ($m \times n$ - Matrix, $n = dim(V)$)

Lässt sich durch Gauß-Algorithmus bestimmen.

4.8.1 Beweis

Sei $U = \langle u_1, ..., u_m\rangle$. $K_\mathcal{B} : V \to K^n$ wie in 3.14. $K_\mathcal{B}$ Isomorphismus.

$dim(U) = dim(K_\mathcal{B}(U)) = dim(\langle K_\mathcal{B}(u_1), ..., K_\mathcal{B}(u_m)\rangle)$ = Zeilenrang von $\begin{pmatrix} K_\mathcal{B}(u_1) \\ ... \\ K_\mathcal{B}(u_m) \end{pmatrix}$

4.9 Beispiel

V R-VR aller Polynome vom Grad ≤ 3. $dim(V) = 4$, Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$

$$\text{U} = \left\langle 1 + 6x^2 + x^3, 2x - 2x^2 + 3x^3, 3x + x^2, 2x + 15x^2 - x^3 \right\rangle_\mathbb{R}$$

$dim(U) = ?$

Bilde gemäß 4.8 die Matrix der Koordinatenvektoren der u_i bezüglich $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 15 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang der Matrix = 3
$dim(U) = 3$

Matrizen und lineare Abbildungen

5.1 Definition

Seien V, W K-VR, $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, ..., w_m)$ geordnete Basen von V bezw. W. Sei $\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.

Nach 3.10 ist α eindeutig bestimmt durch $\alpha(v_1), ..., \alpha(v_n)$. ($v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \to \alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha(vi)$)

Stelle $\alpha(v_1), ..., \alpha(v_n)$ jeweils als Linearkombination von $w_1, ..., w_n$ dar:

$$\begin{gathered}\alpha(v_1) = a_{11}w_1 + ... + a_{m1}w_m \\ \alpha(v_2) = a_{21}w_1 + ... + a_{m2}w_m \\ ... \\ \alpha(v_n) = a_{1m}w_1 + ... + a_{mm}w_m\end{gathered}$$

(Ordnung der Indizes beachten!)

Dann heißt die $m \times n$ - Matrix:

$$A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

die Darstellungsmatrix von α bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. (In den Spalten stehen die Koordinaten von $\alpha(v_i)$ bezüglich $\mathcal{C}$)
(Abkürzende Schreibweise: A_α, falls $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ aus Kontext klar)

Falls V = W und $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, so

$$A_\alpha^{\mathcal{B}} := A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$$

5.2 Bemerkung

(a) Bei Kenntnis von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ist α durch $A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ eindeutig bestimmt:

Sei $v \in V$. $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$.

$$\begin{aligned}
\alpha(v) &= \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i (a_{1i} w_1 + ... + a_{mi} w_m) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i (\sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \cdot \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_i)}_{\text{Koord. von } \alpha(v) \text{ bezgl. } \mathcal{C}} \cdot w_j
\end{aligned}$$

Und jede $m \times n$ - Matrix A bestimmt lin. Abbildung $\alpha : V \to W$ mit $A = A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

(b) Beachte: Dieselbe lin. Abb. hat im Allgemeinen bezüglich anderer Wahl der Basen eine andere Darstellungsmatrix

5.3 Beispiel

(a) V = W = $\mathbb{R}^2$, α Drehung um 0 mit Winkel φ (entgegen Uhrzeigersinn).

Nach 3.11:

$\mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_1, e_2)$

$\alpha(e_1) = cos(\varphi)e_1 + sin(\varphi)e_2$

$\alpha(e_2) = -sin(\varphi)e_1 + cos(\varphi)e_2$

$$A_\alpha^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

(b) Nullabbildung

$\beta : \begin{cases} V \to W \\ v \mapsto \sigma \text{ (Nullvektor)} \end{cases}$

hat bezüglich allen Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Nullmatrix als Darstellungsmatrix

(c) V, $\mathcal{B}$, id_v

$A_{id_v}^{\mathcal{B}} = E_n = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

(d) $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2), \mathcal{C} = (e_2, e_1)$

$A_{id_v}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2)$, σ Spiegelung an $\langle e_1 \rangle$, d.h. $\sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

$A_\sigma^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ Basis.
$\sigma(e_1 + e_2) = e_1 - e_2$
$\sigma(e_1 - e_2) = e_1 + e_2$
$A_\sigma^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma(e_1) = e_1 = a(e_1 + e_2) + b(e_1 - e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$
$-e_2 = \sigma(e_2) = c(e_1 + e_2) + d(e_1 - e_2) = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$
$A_\sigma^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5.4 Satz

V, W, $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha : V \to W$ linear.

$$k_{\mathcal{C}}(\alpha(V))^t = A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot k_{\mathcal{B}}(V)^t \tag{5.3}$$

5.4.1 Beweis

Folgt aus 5.2.a)

$$\begin{array}{cc} \text{Basis } \mathcal{B} & \text{Basis } \mathcal{C} \\ V \xrightarrow{\alpha} & W \\ \downarrow & \downarrow \\ K^n \longrightarrow & K^m \end{array}$$

5.5 Beispiel

V, W $\mathbb{R}$ - VR, $dim(V) = 4$, $dim(W) = 3$, $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_4)$, $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3), \alpha : V \to W$.

$$A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$V = 5_1 - 6v_2 + 7v_3 - 2v_4$
$\alpha(V) = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.4: $\alpha(V) = 7w_1 + w_2 - w_3$

5.6 Korollar

Jede lineare Abbildung $K^n \to K^m$ ist von der Form $\alpha(x) = A \cdot x$ für ein $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
Es ist $A = A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ die kanonischen Basen von K^n bzw. K^m sind.

5.6.1 Beweis

$x \in K^m$, $k_\mathcal{B}(x)^t = x$, $k_\mathcal{C}(\alpha(x))^t = \alpha(x)$
Behauptung folgt aus 5.4

5.7 Satz

α, β lineare Abbildung $U \to V$, γ lin. Abbildung $V \to W$. $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ geordnete Basen von U, V, W.

(a) $A_{\alpha+\beta}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} + A_\beta^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

$A_{k\cdot\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = k \cdot A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ $(k \in K)$

(b) $A_{\gamma\circ\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{D}} = A_\gamma^{\mathcal{C},\mathcal{D}} \cdot A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ (Matrixmultiplikation) (Reihenfolge beachten!)

5.7.1 Beweis

(a) Nachrechnen

(b) $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_l)$

$\mathcal{C} = (v_1, ..., v_m)$

$\mathcal{D} = (w_1, ..., w_n)$

$$A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (a_{ij}) \ m \times l \text{ - Matrix}$$

$$A_\gamma^{\mathcal{C},\mathcal{D}} = (b_{ij}) \ n \times m \text{ - Matrix}$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma \circ \alpha)(u_i) &= \gamma(\alpha(u_i)) \\
&= \gamma(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \cdot v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \cdot \gamma(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} (\sum_{k=1}^{m} b_{k_j} w_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(\sum_{j=1}^{m} b_{k_j} \cdot a_{ji})}_{\text{Koeff. (k,i)}} w_k
\end{aligned}
$$

5.8 Beispiel

$U = V = W = \mathbb{R}^2$
$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = (e_1, e_2)$

α Drehung um φ, β Drehung um ψ (jeweils um 0)

$$A_\alpha^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

$$A_\beta^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} cos(\psi) & -sin(\psi) \\ sin(\psi) & cos(\psi) \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$\beta \circ \alpha$ Drehumg um $\varphi + \psi$

$$A_{\beta\circ\alpha}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} cos(\varphi+\psi) & -sin(\varphi+\psi) \\ sin(\varphi+\psi) & cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Nach 5.7

$A_{\beta\circ\alpha}^\mathcal{B} = A_\beta^\mathcal{B} \cdot A_\alpha^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} cos(\varphi)cos(\psi) - sin(\varphi)sin(\psi) & -sin(\varphi)cos(\psi) - cos(\varphi)sin(\psi) \\ cos(\varphi)sin(\psi) + sin(\varphi)cos(\psi) & -sin(\varphi)sin(\psi) + cos(\varphi)cos(\psi) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow cos(\varphi + \psi) = cos(\varphi)cos(\psi) - sin(\varphi)sin(\psi)$, usw.
(Additionstheoreme der Tirgonometrie)

5.9 Definition

Sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ($n \times n$ - Matrix).
A heißt invertierbar, falls $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ existiert (Inverse, inverse Matrix zu A) mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n = \text{Einheitsmatrix } (*)$$

$((\mathcal{M}_n(K), \cdot)$ ist Monoid, neutrales Element E_n)

5.9.1 Bemerkung

Gilt $A \cdot A^{-1} = E_n$ so auch $A^{-1} \cdot A = E_n$ (und umgekehrt). (Folgt aus 5.10 und 3.16)

5.10 Korollar

$dim_K(V) = n$, $\mathcal{B}$ geord. Basis von V, $\alpha : V \to V$ linear. Dann gilt:

$$\alpha \text{ invertierbar (d.h. bijektiv)} \Leftrightarrow A_\alpha^\mathcal{B} \text{ invertierbar}$$

Dann: $A_{\alpha^{-1}}^\mathcal{B} = (A_\alpha^\mathcal{B})^{-1}$

5.10.1 Beweis

$\Rightarrow$

$A_\alpha^\mathcal{B} \cdot A_{\alpha^{-1}}^\mathcal{B} \underbrace{=}_{5.7} A_{\alpha\circ\alpha^{-1}}^\mathcal{B} = A_{id_y}^\mathcal{B} = E_n$
Gegenrichtung analog.

$\Leftarrow$

Es existiert inverse Matrix B zu $A_\alpha^\mathcal{B}$, d.h. $A_\alpha^\mathcal{B} \cdot B = B \cdot A_\alpha^\mathcal{B} = E_n$
Dann B = $A_\beta^\mathcal{B}$ für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\beta : V \to V$ (5.2)

$A_\alpha^\mathcal{B} \cdot A_\beta^\mathcal{B} = A_\beta^\mathcal{B} \cdot A_\alpha^\mathcal{B} = E_n$
Damit folgt $\alpha \circ \beta = id_v$ Analog: $\beta \circ \alpha = id_v$ $\beta = \alpha^{-1}$

5.11 Satz

$A \in \mathcal{M}_n(K)$. A invertierbar $\Leftrightarrow$ rg(A) = n (D.h. Zeilen | Spalten von A sind lin. unabhängig)

5.11.1 Beweis

Def. $\alpha : K^n \to K^n$ durch $\alpha(x) = A \cdot x$.
$A = A_\alpha^\mathcal{B}$ bezüglich der kanonischen Basis B von K^n
A invertierbar $\underbrace{\Leftrightarrow}_{5.10}$ α invertierbar $\underbrace{\Leftrightarrow}_{3.16}$ α surjektiv / injektiv $\Leftrightarrow rg(\alpha) = n \Leftrightarrow$ $rg(A) = n$

5.12 Lemma

$A \in \mathcal{B}_{m,n}(K), X \in \mathcal{M}_{n,l}(K)$, $C = AX \in \mathcal{M}_{m,l}(K)$
Wendet man dieselben elementaren Zeilenumformungen auf A und C an (beachte: A und C haben beide m Zeilen) so gilt für die entstehenden Matrizen A', C'

$$C' = A' X$$

5.13 Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix (Gauß-Jordan-Verfahren)

A invertierbare $n \times n$ - Matrix. Gesucht A^{-1} mit:

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

Mann kann A durch elementare Zeilenumformungen auf die Form E_n bringen.
Analog zu Gauß-Algorithmus:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & ... \\ 0 & * & * & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & * & * & ... \end{pmatrix}$$

$rg(A) = n$: In der zweiten Spalte findet man Eintrag $\neq 0$ unterhalb (einschließlich) der Diagonalen.
Erzeuge wie bei Gauß 1 in der Diagonale, unterhalb der Diagnoale erzeuge Nullen <u>und</u> auch oberhalb.
So fortfahren (keine Vertauschung von Zeilen oberhalb der Diagonalen !).

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

Durch elementare Zeilenumformung entsteht aus A die Einheitsmatrix E_n.
Dieselben zeilenumformungen angwandt auf E_n liefert Matrix A'.

5.12: $E_n \cdot A^{-1} = A'$

$$(A|E_n) \longrightarrow (E_n|A^{-1})$$

(Verf. zeigt gleichzeitig, ob A invertierbar ist)

5.14 Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & | & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & | & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & | & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

5.15 Bemerkung

Sei $Ax = b$ LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten (d.h. A $n \times n$ - Matrix).
4.4.b: $Ax = b$ hat eindeutige Lösung, wenn $rg(A) = n$. Dann ex. A^{-1} und es gilt:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

5.16 Definition

V K-VR mit geordneten Basen $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, ..., v'_n)$

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} v_i, j = 1, ..., n \tag{5.7}$$

(Reihenfolge der Indizes beachten!)
$S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (s_{ij})_{i,j=1,...,n}$ heißt Basiswechselmatrix

Spalten: Koordinaten der Basisvektoren aus $\mathcal{B}'$ bzgl. $\mathcal{B}$.
Analaog. $v_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} v'_j$
$S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (t_{jk})_{j,k=1,...,n}$

5.17 Satz

Bezeichnung wie in 5.16
$S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ist invertierbar und $S^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, d.h. $S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = E_n$

5.17.1 Beweis

$$\begin{aligned} V_k &= \sum_{j=1}^{n} t_{jk} v'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} t_{jk} (\sum_{i=1}^{n} s_{ij} v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} s_{ij} t_{jk}) v_i \end{aligned}$$

$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot t_{jk} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases}$

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = E_n$$

5.18 Satz

$V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wie oben, $v \in V$.
$K_{\mathcal{B}'}(v)^t = S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot K_{\mathcal{B}}(v)^t$

5.18.1 Beweis

Analog zu 5.4 (5.2.a)

5.19 Beispiel

V = $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2) = ((1,1)^t, (1,-2)^t)$

$S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = S^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$
5.14:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -3 & | & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
V = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in K_{\mathcal{B}}(v)^t$
$K_{\mathcal{B}}(v) =?$
$K_{\mathcal{B}'}(v)^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

5.20 Satz

$\alpha : V \to W$ linear, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen von V $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ geordnete Basen W.
Dann:

$$A_\alpha^{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = S_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \cdot A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

5.20.1 Beweis:

Sei $v \in V$.

$$\begin{aligned} A_\alpha^{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} \cdot K_{\mathcal{B}'}(v) &= K_{\mathcal{C}}(\alpha(v))^t \\ &= S_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \cdot K_{\mathcal{C}}(\alpha(v))^t \\ &= S_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \cdot A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot K_{\mathcal{B}}(v)^t \\ &= S_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \cdot A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot K_{\mathcal{B}}(v)^t \end{aligned}$$

Wenn v alle Vektoren aus V durchläuft, durchläuft $K_{\mathcal{B}}(v)^t$ alle Vektoren aus K^n (n = dim(V)). Daraus folgt Behauptung.

5.21 Korollar

$\alpha : V \to V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basis von v.
$S = S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Dann:

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = S^{-1} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot S$$

5.21.1 Beweis

Folgt aus 5.20 und 5.17

(Bemerkung: Zwei $n \times n$ - Matrizen A, B heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare MatrixS gibt mit B = $S^{-1}AS$)

5.22 Beispiel

V = $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$
$\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - 2_e 2)$

$S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,
$S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (5.19)
Sei $A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

α ist Spiegelung an e_1 - Achse

$A_{\alpha}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$\alpha(e_1 + e_2) = \frac{1}{3} \cdot (e_1 + e_2) + \frac{2}{3} \cdot (e_1 - 2e_2)$
$\alpha(e_1 - 2e_2) = \frac{4}{3} \cdot (e_1 + e_2) - \frac{1}{3} \cdot (e_1 - 2e_2)$

Determinanten

$\mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$

6.1 Definition

$A \in \mathcal{M}_n(K), i, j, \in \{1, ..., n\}$.
$A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ ist die Matrix, die aus A entsteht, wenn man in A die i-te Zeile und j-te Spalte streicht.

6.1.1 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Definiere Determinante einer <u>quadratischen</u> Matrix rekursiv.

6.2 Laplacescher Entwicklungssatz

det: $\mathcal{M}_n(K) \to K$ ist eine Abbildung, die <u>Determinante</u>, die folgendermaßen berechnet wird:

(1) $det((a)) := a$

(2) $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Wähle irgendein $i \in \{1, ..., n\}$.
$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij})$
(Entwicklung nach der i-ten Zeile)
(Schachbrettmuster der Vorzeichen)

(3) Alternativ:
Wähle $j \in \{1, ..., n\}$
$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij})$
(Entwicklung nach der j-ten Spalte)

6.2.1 Bemerkung

Wichtig: Egal nach welcher Zeile oder Spalte man entwickelt, es kommt immer dasselbe raus!

(Schwierigster Beweis in der elementaren Determinantentheorie (WHK 10.4))

6.3 Beispiel

(a) $det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ (Entwicklung nach 1. Zeile)

Entwicklung nach 2. Spalte: $-a_{12} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot a_{11}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\begin{aligned} det(A) &= 2 \cdot det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 0 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -24 - 0 - 9 \\ &= -33 \end{aligned}$$

Entwicklung nach der 2. Spalte:

$$\begin{aligned} det(A) &= -3 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= -33 \end{aligned}$$

Allgemeine Strategie: Verwende zur Determinantenberechnung eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen!

(c) $det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ ... & ... & 0 \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_n n$ (untere Dreiecksmatrix)

Induktion nach n:

n = 1 ✓

n-1 $\rightarrow$ n:

Entwicklung nach 1. Zeile

Insbesondere: $det(E_n) = 1$

6.4 Korollar

$det(A) = det(A^t)$

6.5 Rechenregeln für Determinanten

Sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

(a) Zeilen bzw. Spaltenvertauschung ändern das Vorzeichen der Determinante.

(b) Addiert man das Vielfache einer Zeile / Spalte zu einer anderen Zeile / Spalte, so ändert sich die Determinante überhaupt nicht.

(c) Multipliziert man eine Zeile / Spalte von A mit $a \in K$ so ändert sich det(A) um Faktor a.

Insbesondere:

$A \in \mathcal{M}_n(K)$

$det(a \cdot A) = a^n \cdot det(A)$

(d) $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$.

$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

(Determinantenmultiplikationssatz)

(Aber: Im Allgemeinen $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$)

6.6 Bemerkung

Strategie zur Det.berechnung:
Wende auf A elementare Zeilen / Spaltenumformungen an, um Dreiecksgestalt zu erhalten. Dann 6.3.c

(Buchführen über Vorzeichen!)

6.7 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Q}$$

$$det(A) = -det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$
$$= -det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{=}_{6.3.c)} -2$$

6.8 Satz

$A \in \mathcal{N}(K)$. Dann gilt:

$$\text{A invertierbar} \Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

In diesem Fall gilt:

$$det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$$

[$\Rightarrow$: $A \cdot A^{-1} = E_n, 1 = det(E_n) = det(A \cdot A^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1})$]
Andere Berechnungsmethode von A^{-1} mit Hilfe der Determinante.

6.9 Definition

$A \in \mathcal{M}_n(K)$. Die Adjunkte A^{ad} zu A ist $n \times n$ - Matrix über K:

$$A^{ad} := (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei $b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(A_{ji})$ (Indizes beachten).

6.10 Satz

$A \in \mathcal{M}_n(K)$

(a) $A^{ad} \cdot A = A \cdot A^{ad} = det(A) \cdot E_n$

(b) Ist $det(A) \neq 0$, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot A^{ad}$$

6.11 Beispiel

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Angenommen:
$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$.

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

6.12 Demerkung

$\alpha : V \to V$ lin. Abbildung. V endl. dimensional. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V.

$$A_\alpha^{mathcalB'} = S^{-1} \cdot A_\alpha^{\mathcal{B}} \cdot S$$

wobei $S = S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (5.21)

$$\begin{aligned} det(A_\alpha^{\mathcal{B}'}) &= det(S^{-1} \cdot A_\alpha^{\mathcal{B}} \cdot S) \\ &= det(S^{-1}) \cdot det(A_\alpha^{\mathcal{B}}) \cdot det(S) \\ &= det(A_\alpha^{\mathcal{B}}) \cdot \underbrace{det(S)^{-1} \cdot det(S)}_{1} \\ &= det(A_\alpha^{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

Daher definiert man:

$$det(\alpha) := det(A_\alpha^{\mathcal{B}})$$

(unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}$)

[Im Allgemienen ist $det(A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}}) \neq det(A_\alpha^{\mathcal{B}',\mathcal{C}'})$]

Eigenwerte

<u>**Problem:**</u> $\alpha : V \to V$ linear. Suche Basis $\mathcal{B}$ von V bezüglich der $A_\alpha^\mathcal{B}$ besonders einfache Gestalt hat.
Am besten wäre Dreiecksmatrix (Untere und Obere. Somit nur Diagonale $\neq 0$).
Dh. $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$, so $\alpha(v_i) = a_i v_i$, $i = 1, ..., n$
Das geht allerdings im Allgemeinen nicht.

7.1 Beispiel:

(a) $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an der e_1-Achse. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ - kanonische Basis.

$$A_\sigma^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Diagonalmatrix)

(b) Drehung ρ um 0 mit Winkel $k \cdot \pi$.

Kein Vektor $\neq \sigma$ wird auf ein Vielfaches von sich abgebildet.

Für <u>keine</u> Basis $\mathcal{B}$ ist $A_\rho^\mathcal{B}$ Diagonalmatrix.

7.2 Definition

$\alpha : V \to V$ lineare Abbildung. $c \in K$ heißt <u>Eigenwert</u> von α, falls $v \in V, v \neq \sigma$, existiert mit

$$\alpha(v) = c \cdot v$$

Jeder solcher Vektor $v \neq \sigma$ heißt <u>Eigenvektor</u> von α zu dem Eigenwert c.

Die Menge aller Eigenvektoren zu c, zusammen mit dem Nullvektor, heißt <u>Eigenraum</u> von α zum Eigenwert c.

7.3 Bemerkung

$\alpha : V \to V$ linear, c sei ein Eigenwert von α.

Eigenraum von α zu $c = ker(c \cdot id_v - \alpha)$, also Unterraum von V.

Insbesondere: 0 ist Eigenwert von $\alpha \Leftrightarrow ker(\alpha) \neq \{\sigma\}$

7.3.1 Beweis

$\alpha(v) = c \cdot v \Leftrightarrow c \cdot v - \alpha(v) = \sigma \Leftrightarrow (c \cdot id_v - \alpha)(v) = 0 \Leftrightarrow v \in ker(c \cdot id_v - \alpha)$

7.4 Beispiel

(a) id_v hat nur Eigenwert 1, Eigenraum zu 1 ist V.

(b) Spiegelung aus 7.1.a):
1 ist Eigenwert
-1 ist Eigenwert
Eigenraum zu 1: $\langle e_1 \rangle$
Eigenraum zu -1: $\langle e_2 \rangle$

(c) Drehung um $\rho \neq k \cdot \pi$ hat keine Eigenwerte.

7.5 Definition

A $n \times n$ - Matrix über K.
Eigenwerte von A := Eigenwerte von $\alpha_A : \begin{cases} K^n \to K^n \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases}$
(d.h. $c \in K$ ist Eigenwert von A $\Leftrightarrow \exists x \neq 0 \in K^n : A \cdot x = c \cdot x$)

7.6 Satz

$\alpha : V \to V$ lin. Abbildung. Dann haben α und $A_\alpha^\mathcal{B}$ die gleichen Eigenwerte für jede Basis $\mathcal{B}$ von V.

7.6.1 Beweis

Sei c Eigenwert von α, $v \neq \sigma$ mit $\alpha(v) = c \cdot v$.

$$\begin{aligned} A_\alpha^\mathcal{B} \cdot \mathcal{K}_\mathcal{B}(v)^t &= \mathcal{K}_\mathcal{B}(\alpha(v))^t \\ &= \mathcal{K}_\mathcal{B}(c \cdot v)^t \\ &= c \cdot \mathcal{K}_\mathcal{B}(v)^t \end{aligned}$$

Da $v \neq \sigma$ ist $\mathcal{K}_\mathcal{B}(v) \neq 0$.
Also ist c Eigenwert von $A_\alpha^\mathcal{B}$.
Umgekehrt: Sei $0 \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit $A \cdot x = c \cdot x$. (c ist Eigenwert von A).

Sei $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$.
$\mathcal{K}_\mathcal{B}(v)^t = x$.

Es folgt $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\alpha(v)) = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(c \cdot v)$.

Dann $\alpha(v) = c \cdot v$
c ist Eigenwert von α.

7.7 Satz

V n-dim. K-VR, $\mathcal{B}$ Basis von V, $\alpha : V \to V$ linear, $A := A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$, $c \in K$.
Dann sind äquivalent:

(1) c ist Eigenwert von α

(2) $ker(c \cdot id_v - \alpha) \neq \{\sigma\}$

(3) $det(c \cdot E_n - A) = 0$

7.7.1 Beweis

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

7.3

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

$A_{c \cdot id_v - \alpha}^{\mathcal{B}} = c \cdot E_n - A$
$\alpha(v) = c \cdot v$

Es gilt:

$$\begin{aligned} det(c \cdot E_n - A) = 0 \\ \Leftrightarrow c \cdot E_n - A \text{ nicht invertierbar.} \\ \Leftrightarrow c \cdot id_v - \alpha \text{ nicht invertierbar.} \\ \Leftrightarrow c \cdot id_v - \alpha \text{ ist nicht injektiv} \\ \Leftrightarrow ker(c \cdot id_v - \alpha) \neq \{\sigma\} \end{aligned}$$

Wie berechnet man Eigenwerte einer lin. Abbildung und wie viele gibt es ?

Nach 7.7 muss man alle $c \in K$ bestimmen mit $det(c \cdot E_n - A) = 0$. Betrachte Funktion:

$$f_A : \begin{cases} K \to K \\ t \mapsto det(t \cdot E_n - A) \end{cases}$$

7.8 Satz

Die Funktion f_A ist Polynomfunktion vom Grad n, d.h.

$$\begin{aligned} f_A(t) &= det(t \cdot E_n - A) \\ &= t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 \end{aligned}$$

wobei $a_i \in K$ (unabhängig von t)

7.8.1 Beweis

Mit Entwicklungsformel. Machen wir hier nicht.

7.9 Definition

(a) Das Polynom $f_A(t) = det(t{\cdot}E_n{-}A) \in K[t]$ heißt <u>charakteristisches Polynom</u> von $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

(b) $\alpha : V \to V$ linear, $\mathcal{B}$ Basis von V, so

$$\begin{aligned} det(t \cdot id_v - \alpha) &= det(A^{\mathcal{B}}_{t \cdot id_v - \alpha}) \\ &= det(t \cdot E_n - A^{\mathcal{B}}_{\alpha}) \end{aligned}$$

heißt charakteristisches Polynom von α (nach 6.12 unabhängig von $\mathcal{B}$).

7.10 Korollar und Definition

$\alpha : V \to V$ linear, $dim(V) = n$.

(a) c ist Eigenwert von $\alpha \Leftrightarrow c$ ist Nullstelle des char. Polynoms von α

<u>Vielfachheit</u> des Eigenwerts c := <u>Vielfachheit</u> von c als Nullstelle des char. Polynoms.

(b) α hat höchstens n Eigenwerte (einschließlich Vielfachheit).

7.11 Beispiel

(a) $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an $\langle e_1 \rangle$ - Achse
$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ kan. Basis.

$A := A^{\mathcal{B}}_{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

char. Polynom : $det(t{\cdot}E_2{-}A) = det(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) = det \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} = (t-1) \cdot (t+1)$

Nullstellen 1, -1 alle Eigenwerte von ρ

(b) $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$A = A^{\mathcal{B}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}$ kanonische Basis.

char. Polynom von α:

$$det(t \cdot E_n - A_\alpha^{\mathcal{B}}) = det\begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix} = (t+1)\cdot(t+3) - 8 = t^2 + 4t - 5$$

$t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5}$

Eigenwerte von α: 1, -5

Eigenvektor zu 1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 4x-3y \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ x = y

Eigenraum zu Eigenwert 1: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Eigenwert zu 5:

$-5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 4x-3y \end{pmatrix}$

$\rightarrow y = -2x$

Eigenraum zu EW-5:

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathcal{B}' = ((1,1)^t, (1,-2)^t)$

$A_\alpha^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

(Diagonalmatrix)

(c) $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um 0.

$\mathcal{B}$ kan. Basis.

$A = A_\rho^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{2}) & -sin(\frac{\pi}{2}) \\ sin(\frac{\pi}{2}) & cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

char. Polynom:

$f_A(t) = det(t \cdot E_2 - A) = det\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1$

Keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, also hat ρ keine EW in $\mathbb{R}$

Fasst man ρ als Abbildung $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ auf, so gibt es EW i, -i.

Die zugehörigen Eigenräume sind:

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$

7.12 Korollar

$\alpha : V \to V$ linear. Falls Basis $\mathcal{B}$ von V existiert mit $A_\alpha^\mathcal{B}$ in Dreiecksgestallt, so sind die Diagonalelemente $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ sämtliche Eigenwerte von α (mit Vielfachheit).

7.12.1 Beweis

$det(t \cdot E_n - A) = det \begin{pmatrix} t - a_{11} & ... \\ 0 & t - a_{nn} \end{pmatrix}$ (Dreiecksmatrix) $= (t - a_{11}) \cdot ... \cdot (t - a_{nn})$

7.13 Bemerkung

Über $\mathcal{C}$ lässt sich für jede lineare Abbildung $\alpha : V \to V$ Basis $\mathcal{B}$ finden, so dass $A_\alpha^\mathcal{B}$ Dreiecksmatrix ist.

7.14 Satz

Seien $c_1, ..., c_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte der lin Abb. $\alpha : V \to V$. Seien $v_1, ..., v_r$ zugehörige Eigenvektoren. Dann sind $v_1, ..., v_r$ linear unabhägnig.

7.14.1 Beweis

Induktion nach r.
$r = 1 :\ v_1 \neq 0$ lin unabhängig ✓
Behauptung sei richtig für $i - 1$.
Zu zeigen: Richtig für $i \leq r$.
$v_1, ..., v_{i-1}$ lin unabhängig.
Angenommen: $v_1, ..., v_{i-1}, v_i$ lin. abhängig.
Dann: $v_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j v_j, a_j \in K (*)$
Mult. mit c_i:
$c_i v_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_i a_j v_j$ (1)

Andererseits: Wende α auf $(*)$ an.

$c_i v_i = \alpha(v_i) = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \alpha(v_j) = \sum_{j=1}^{i-1} a_j c_j v_j$ (2)

Subtr. (1) von (2):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{i-1} (a_j c_j - c_i a_j) v_j \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} a_j (c_j - c_i) v_j \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_j (c_j - c_i) = 0$ für $j = 1, ..., i - 1$

Nach Voraus. ist $c_j - c_i \neq 0$ für alle $j = 1, ..., i - 1$

$\Rightarrow a_j = 0$ für $j = 1, ..., i-1$
$\Rightarrow v_i = \sigma$ Widerspruch!

7.15 Definition

$\alpha : V \to V$ linear.
α heißt diagonalisierbar, falls V eine Basis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren von α besitzt, d.h.:

$$A_\alpha^\mathcal{B} \text{ ist Diagonalmatrix}$$

7.16 Satz

$dim_K(V) = n, \alpha : V \to V$ linear.
Hat α n verschiedene Eigenwerte, so ist α diagonalisierbar (Hinreichend, nicht notwendig, z.B. $\alpha = id_v$ EW 1 mit Vielfachheit n, diagonalisierbar).

7.17 Beispiel

$A_\alpha^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
α hat EW 1 mit Vielfachheit 2

α ist nicht diagonalisierbar, denn sonst ex. Basis $\mathcal{B}'$ mit $A_\alpha^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \alpha = id_v$ Widerspruch !

Also:
Zur Diagonalisierbarkeit reicht es nicht, dass α n Eigenwete (mit Vielfachheit) besitzt.

7.18 Bemerkung

Sei $\alpha : V \to V$ linear, $dim_K(V) = n$.
Besitze α n Eigenwerte (mit Vielfachheit), d.h. $det(t \cdot E_n - A) = (t - c_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (t - c_r)^{m_r}$

Ist V_i Eigenraum von α zu c_i, so kann man zeigen:

$$dim(V_i) \leq m_i$$

Es gilt: α ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow dim(V_i) = m_i, i = 1, ..., r$

7.19 Definition

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ heißt diagonalisierbar, falls

$$\alpha_A : \begin{cases} K^n \to K^n \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases}$$

diagonalisierbar ist.

7.20 Satz

(a) $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ es ex. invertierbare Matrix $S \in \mathcal{M}_n(K)$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S$ Diagonalmatrix.

(b) Hat A n verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.

7.20.1 Beweis

(a) $\mathcal{B}$ kanonische Basis von K^n.

$A = A^{\mathcal{B}}_{\alpha_A} \cdot A$ diagonalisierbar, so existiert Basis $\mathcal{B}'$ von K^n mit $A^{\mathcal{B}'}_{\alpha_A}$ Diagonalgestalt hat.

Setze S = $S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, dann nach 5.21:

$$A^{\mathcal{B}'}_{\alpha_A} = S^{-1} \cdot A^{\mathcal{B}}_{\alpha_A} \cdot S$$

Umgekehrt analog, da jede inverse Matrix S Wechsel von B zu anderer Basis beschreibt.

(b) Folgt aus 7.16

Vektorräume mit Skalarprodukt

Jetzt: $\underline{K = \mathbb{R}}$.

$\mathbb{R}^2$: Länge von $v \in \mathbb{R}^2$, $v \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$||v|| = +\sqrt{x^2 + y^2}$ (länge)

<u>Abstand</u> zwischen

$$v \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$w \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

entspricht: $d(v, w) := ||v - w|| = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

<u>Winkel:</u>
Pythagoras:

$$\begin{aligned} ||v - w||^2 &= ||v||^2 \cdot sin^2(\varphi) + (||w|| - ||v|| \cdot cos(\varphi))1^2 \\ &= ||v||^2 + ||w||^2 - 2||v|| \cdot ||w|| \cdot cos(\varphi) \text{ (Kosinussatz)} \\ ||v - w||^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 \\ &= ||v||^2 + ||w||^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\underbrace{x_1x_2 + y_1y_2}_{Skalarprodukt} = ||v|| \cdot ||w|| \cdot cos(\varphi) \tag{8.1}$$

8.1 Definition Skalarprodukt

Seien $v = \begin{pmatrix} u_1 \\ ... \\ u_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Das <u>(Standard-)Skalarprodukt</u> von v und w:

$$(v|w) := u_1z_1 + u_2z_2 + ... + u_nz_n \in \mathbb{R}$$

(Skalarprodukt zweier Vektoren ist reelle Zahl!)

Es gilt:

(1) $(v|v) \geq 0$

$(v|v) = 0 \Leftrightarrow v = \sigma$

(positiv definiert)

(2) $(v|w) = (w|v)$

(Symmetrie)

(3) $(v|w_1 + w_2) = (v|w_1) + (v|w_2)$

$(v|a \cdot w) = a \cdot (v|w)$

(Linearität im 2. Argument)

Analog: Linearität im 1. Argument.

$e_1, ..., e_n$ kanonische Basis.

$$(e_i|e_j) = \begin{cases} 0, \text{ für } i \neq j \\ 1, \text{ für i = j} \end{cases} \tag{8.2}$$

8.2 Definition

V $\mathbb{R}$-Vektorraum
Abbildung

$$(.|.) : \begin{cases} V \times V \to \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto (v|w) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

heißt <u>Skalarprodukt</u> auf V, falls sie die Eigenschaften (1)-(3) aus 8.1 erfüllt (mit V statt $\mathbb{R}^n$).

V heißt dann <u>Euklidischer Vektorraum</u> (oder <u>Skalarproduktraum</u>).
Dann gilt auch:

(4) $(v_1 + v_2|w) = (v_1|w) + (v_2|w)$

$(av|w) = a(v|w)$

(Linearität im 1. Argument)

(Folgt aus (2) und (3))

Es folgt auch:

$$(\sigma|w) = 0 = (v|\sigma)$$

Weil $(\sigma|w) = (0 \cdot \sigma|w) \underbrace{=}_{(4)} 0 \cdot (\sigma|w) = 0$

8.3 Beispiel

(a) Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist Skalarprodukt im Sinne von 8.2

(b) V n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum.
$v_1, ..., v_n$ Basis von V.
$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, w $= \sum_{i=1}^n b_i v_i$
Def. $(v|w) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$ ist Skalarprodukt.
Das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ entsteht auf diese Weise, wenn man für $v_1, ..., v_n$ die kan. Basis nimmt.

(c) V $\mathbb{R}$-Vektorraum.
$C[a, b]$ der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ (mit Werten in $\mathbb{R}$).

$f, g \in V$
Def. $(f|g) := \int_a^b f(g) \cdot g(x)\ dx \in \mathbb{R}$
Skalarprodukt.

8.4 Satz (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

V Euklidischer Vektorraum. Dann:

$$(v|w)^2 \le (v|v) \cdot (w|w) \text{ für alle } v, w \in V$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

8.4.1 Beweis

Ist $w = \sigma$, so auf beiden Seiten 0 (und $v, w = \sigma$ sind lin. abhängig).
Sei $w \neq \sigma$.
Setze $a := \frac{(v|w)}{\underbrace{(w|w)}_{>0}} \in \mathbb{R}$
Bilde:

$$\begin{aligned} 0 \le (v - a \cdot w | v - a \cdot w) &= (v - a \cdot w|v) - a \cdot (v - a \cdot w)|w) \\ &= (v|v) - a \cdot (w|v) - a(v|w) + a^2 \cdot (w|w) \\ &= (v|v) - 2 \cdot \frac{(v|w)^2}{(w|w)} + \frac{(v|w)^2}{(w|w)} \\ &= (v|v) - \frac{(v|w)^2}{(w|w)} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{(v|w)^2}{(w|w)} \le (v|v)$$
$$(v|w)^2 \le (v|v) \cdot (w|w)$$

Gleichheit $\Leftrightarrow (v - a \cdot w)|v - a \cdot w) = 0 \Leftrightarrow v = a \cdot w$

8.5 Definition

V Euklidischer Vektorraum.

(a) Für $v \in V$ ist $||v|| := +\underbrace{\sqrt{(v|v)}}_{\geq 0}$ <u>(Euklidische) Norm</u> von v. ('Länge' von v)

(b) $v, w \in V$
$d(v, w) := ||v - w||$, <u>(Euklidischer) Abstand</u> von v und w.
(8.4 bedeutet dann: $|(v|w)| \leq ||v|| \cdot ||w||$)

8.6 Beispiel

(a) Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$||v|| = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$d(v, w) = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

(b) $V = C[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$
$(f|g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx$
$||f|| \ = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ dx}$

8.7 Satz (Eigenschaften der Norm)

V Euklidischer VR, Norm $||.||$. Dann:

(a) $||v|| \geq 0$, $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \sigma$ (Definiertheit)

(b) $||a \cdot v|| = |a| \cdot ||v||$ (absolute Homogenität)

(c) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (Dreiecksungleichung)

(d) $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2(v|w)$

(e) $||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2(||v||^2 + ||w||^2)$ (Parallelogrammgleichung)

8.7.1 Beweis

(a) - (b) ✓

(c)-(d):

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= (v+w|v+w) = (v|v) + (w|w) + 2(v|w) \text{ (also (d))} \\ &\leq (v|v) + (w|w) + 2 \cdot \sqrt{(v|v) \cdot (w|w)} = (\sqrt{(v|v)} + \sqrt{(w|w)})^2 = (||v|| + ||w||)^2 \to (c) \end{aligned}$$

✓

(e) folgt aus (d)

8.8 Bemerkung

Jede Abb. $\mathbb{R}$-VR in $\mathbb{R}$

$$||.|| : \begin{cases} V \to \mathbb{R}, \text{ die (a)-(c) erfüllt} \\ v \mapsto ||v|| \end{cases}$$

heißt Norm auf V.

Es gibt Normen, die nicht von Skalarprodukt herkommen, zb. in $\mathbb{R}^n$:

$$|| \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} ||_{max} := max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$$

8.9 Definition

V Euklidischer VR.

(a) $v, w \in V$, $v \neq \sigma, w \neq \sigma$
Nach 8.4 gilt:

$$-1 \leq \frac{|(v|w)|}{||v|| \ \cdot ||w||} \leq 1 \tag{8.3}$$

Dann ex. genau ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit:

$$\frac{(v|w)}{||v|| \cdot ||w||} = cos(\varphi) \tag{8.4}$$

Das heißt:

$$(v|w) = ||v|| \ \cdot ||w|| \cdot cos(\varphi) \tag{8.5}$$

φ heißt Winkel zwischen v,w. ($v \neq \sigma, w \neq \sigma$)
(kein orientierter Winkel, kleinerer der beiden möglich)

(b) v,w heißen <u>orthogonal</u> (senkrecht), falls $(v|w) = 0$.
Falls $v \neq \sigma$ und $w \neq \sigma$, so heißt das:

$$cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{8.6}$$

(σ ist orthogonal zu allen Vektoren)

(c) $M \subseteq V$
$M^{\perp} := \{w \in V : (v|w) = 0 \text{ für alle } v \in M\}$
<u>Orthogonalraum</u> zu M. Unterraum von V (selbst wenn M kein Unterraum ist)

$\{e_1, e_2\}^{\perp} = \langle e_3 \rangle$
$\{\sigma\}^{\perp} = V$
$V^{\perp} = \{\sigma\}$
$(v \in V^{\perp} \Rightarrow (v|v) = 0 \Rightarrow v = \sigma)$

8.10 Bemerkung

Sind v, w orthogonal, so ist

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 \tag{8.7}$$

(8.7.d)

8.11 Beispiel

(a) $\mathbb{R}^n$, Standard-Skalarprodukt.
$(e_i|e_j) = 0$ für $i \neq j$
$||e_i|| = 1$

(b) $\mathbb{R}^3$, Standard-Skalarprodukt.
$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$||v|| = \sqrt{6}, \quad ||w|| = \sqrt{24}$
Für den Winkel folgt:

$$cos(\varphi) = \frac{(v|w)}{||v|| \cdot ||w||} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

(c) $\mathbb{R}^2$, Standard-Skalarprod.
$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \sigma$

$\{v\}^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle$

8.12 Definition

V Euklidischer VR. $M \subseteq V$.

(a) M heißt Orthonormalsystem, falls

$$||v|| = 1$$

für alle $v \in M$ und

$$(v|w) = 0$$

für alle $v, w \in M, v \neq w$

(b) Ist V endl. dim., so heißt M Orthonomalbasis (ONB) von V, falls M Orthonomalsystem und Basis von V.

Beachte: $v \neq \sigma$

$$v' = \frac{1}{||v||} v \in V$$

Damit ergibt sich:

$$||v`|| = || \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1$$

Normierung

8.13 Bemerkung

Ist $(v_1, ..., v_n)$ ONB, $v \in V, v = \sum_{i=1}^n c_i v_i, c_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(v|v) &= (\sum_{i=1}^n c_i c_j | \sum_{j=1}^n c_j v_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \cdot (v_i|v_j) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot (v_i|v_i) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i^2 \\
||v|| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}
\end{aligned}$$

8.14 Satz

(a) Ein Orthonormalsystem ist linear unabhängig.

(b) Ist M $= \{v_1, ..., v_n\}$ ein Orthonormalsystem, $v \in V$, so ist:

$$v - \sum_{i=1}^{n} (v|v_i) \cdot v_i \in M^{\perp}$$

8.14.1 Beweis

(a) Sei $\{v_1, ..., v_m\}$ endliche Teilmenge von M.
Zu zeigen: $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig.
Ist $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = \sigma$, so:

$$0 = (\sum_{i=1}^{m} c_i v_i | v_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i (v_i|v_j) = c_j (v_j|v_j) = c_j$$

$c_j = 0$ für j = 1, ..., m

(b) $(v_j | v - \sum_{i=1}^{n} (v|v_i) \cdot v_i) = (v|v_j) - \sum_{i=1}^{m} (v|v_i) \cdot \underbrace{(v_j|v_i)}_{=0 \text{ für i} \neq j}$

$= (v|v_j) - (v|\ v_j) \cdot \underbrace{(v_j|v_j)}_{\leq 1} = 0$

8.15 Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei $M = \{w_1, ..., w_n\}$ lin. unabhängige Menge im Eukl. VR V. Dann gibt es Orthonormalsystem $\{v_1, ..., v_m\}$ mit $\langle w_1, ..., w_i \rangle = \langle v_1, ..., v_i \rangle$ für alle $i = 1, ..., m$.
Insbesonderes enthält V eine ONB.

8.15.1 Beweis

$w_1 \neq \sigma$. Setze

$$v_1 = \frac{1}{||w_1||} \cdot w_1$$

.
$||v_1|| \ = 1, \langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$

Sei schon Orthonormalsystem $\{v_1, ..., v_i\ \}$ konstruiert mit $\langle w_1, ..., w_j \rangle = \langle v_1, ..., v_j \rangle$ für alle $j = 1, ..., i$ (i < m)

Setze $v'_{i+1} = w_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (v_j|w_{i+1}) \cdot v_j \rightarrow$ 8.14.b): $(v'_{i+1}|v_j) = 0$ für $j = 1, ..., i$.

Da $w_{i+1} \neq \langle w_1, ..., w_i \rangle = \langle v_1, ..., v_i \rangle$, ist $v'_{i+1} \neq \sigma$.

Setze $v_{i+1} = \frac{1}{||v'_{i+1}||} \cdot v'_{i+1}$, $||v_{i+1}|| = 1, (v_j|v_{i+1}) = 0,\ j = 1, ...i$

Es gilt:

$$\langle v_1, ..., v_i, v_{i+1} \rangle = \langle v_1, ..., v_i, v_{i+1} \rangle = \langle v_1, ..., v_i, w_{i+1} \rangle = \langle w_1, ..., w_i, w_{i+1} \rangle$$

8.16 Beispiel

(a) $e_1, ..., e_n$ ist ONB des $\mathbb{R}^n$ bezgl. Standard-Skalarprodukt.

(b) V $= \mathbb{R}^3$ mit Standard-Skalarprodukt.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig.

Gram-Schmidt: ONB $\{v_1, v_2, v_3\}$

$\langle v_1 \rangle = \langle w_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot w_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = w_2 - (v_1|w_2) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$||v_2'|| = \tfrac{\sqrt{6}}{3}, \; v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_3' = w_3 - (v_1|w_3) \cdot v_1 - (v_2|w_3) \cdot v_2 = ... = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, ||v_3' = \tfrac{\sqrt{2}}{2},$$

$$v_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$