

Mathe III Skript WS 15/16

Steffen Lindner

January 27, 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Algebraische Strukturen	8
1.1	Definition Verknüpfung	8
1.2	Beispiel	8
1.3	Definition Halbgruppe, Gruppe, Monoid	9
1.4	Bemerkung	9
1.5	Proposition	10
1.5.1	Beweis	10
1.5.2	Bemerkung	10
1.6	Beispiel	11
1.7	Satz	12
1.7.1	Beweis	13
1.8	Beispiel	13
1.9	Beispiel symmetrische Gruppe	13
1.10	Satz (Gleichungslösen in Gruppen)	14
1.10.1	Beweis	14
1.11	Beispiel	14
1.12	Definition Ring	15
1.13	Beispiele zu Ringen	15
1.14	Proposition	16
1.14.1	Beweis	16
1.15	Bemerkung Ringe	16
1.16	Definition Körper	16
1.17	Beispiel Körper	17
1.18	Proposition (Nullteilerfreiheit) in Körpern	17
1.18.1	Beweis	17
1.19	Definition Polynom	17
1.20	Satz und Definition	18
1.21	Bemerkung	18
1.22	Definition	19
1.23	Satz	19
1.24	Korollar	19
1.24.1	Beweis	19
1.25	Bemerkung	20
1.26	Definition	20
1.27	Satz	21
1.28	Beispiel	21
1.29	Korollar	22
1.29.1	Beweis	22

1.30	Definition	22
1.31	Beispiel	22
1.32	Satz	23
1.32.1	Beweis	23
1.33	Korollar	24
1.33.1	Beweis	24
1.34	Bemerkung	24
1.35	Fundamentalsatz der Algebra (C.F. Gauß)	24
2	Vektorräume	25
2.1	Definition	25
2.2	Beispiel Vektorraum	25
2.3	Prop	26
2.3.1	Beweis	27
2.4	Definition Unterraum	27
2.5	Prop	27
2.5.1	Beweis	27
2.6	Beispiel	27
2.7	Prop	28
2.8	Definition	28
2.9	Satz	28
2.10	Definition	29
2.11	Beispiel	29
2.12	Definition	29
2.13	Beispiel	30
2.14	Bemerkung	31
2.15	Satz	31
2.15.1	Beweis	31
2.16	Definition	32
2.17	Beispiel	32
2.18	Satz (Existenz von Basen)	33
2.18.1	Beweis	33
2.19	Lemma	33
2.19.1	Beweis	33
2.20	Satz (Austauschsatz von Steinitz)	34
2.20.1	Beweis	34
2.21	Korollar	35
2.21.1	Beweis	35
2.22	Satz	35
2.22.1	Beweis	35
2.23	Definition	36
2.24	Korollar	36
2.24.1	Beweis	36
2.25	Beispiel	36
2.25.1	2. Möglichkeit	37
2.26	Satz	37
2.26.1	Beweis	38
2.27	Definition	38
2.28	Beispiel	38
2.29	Definition	39

2.30	Satz	39
2.30.1	Beweis	39
2.31	Bemerkung	40
2.32	Bemerkung	40
2.33	Satz	41
2.33.1	Beweis	41
2.34	Beispiel	42
3	Lineare Abbildungen	43
3.1	Definition	43
3.2	Bemerkung	43
3.2.1	Beweis	43
3.3	Beispiel	43
3.4	Satz	44
3.4.1	Beweis	44
3.5	Satz	45
3.5.1	Beweis	45
3.6	Satz	45
3.6.1	Beweis	45
3.7	Definition	45
3.8	Satz	46
3.8.1	Beweis	46
3.9	Beispiel	46
3.10	Satz	47
3.10.1	Beweis	47
3.11	Beispiel	48
3.12	Satz	48
3.13	Korollar	49
3.13.1	Beweis	49
3.14	Korollar	49
3.14.1	Beweis	49
3.15	Satz (Dimensionsformel)	49
3.15.1	Beweis	50
3.16	Korollar	50
3.16.1	Beweis	50
4	Der Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme	51
4.1	Definition	51
4.2	Satz	51
4.2.1	Beweis	51
4.3	Bemerkung	51
4.4	Korollar	51
4.5	Satz	52
4.5.1	Beweis	52
4.6	Satz und Definition	52
4.6.1	Beweis	52
4.7	Korollar	53
4.8	Satz	53
4.8.1	Beweis	53
4.9	Beispiel	53

5	Matrizen und lineare Abbildungen	54
5.1	Definition	54
5.2	Bemerkung	54
5.3	Beispiel	55
5.4	Satz	56
5.4.1	Beweis	56
5.5	Beispiel	56
5.6	Korollar	57
5.6.1	Beweis	57
5.7	Satz	57
5.7.1	Beweis	57
5.8	Beispiel	58
5.9	Definition	58
5.9.1	Bemerkung	59
5.10	Korollar	59
5.10.1	Beweis	59
5.11	Satz	59
5.11.1	Beweis	59
5.12	Lemma	59
5.13	Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix (Gauß-Jordan-Verfahren)	60
5.14	Beispiel	60
5.15	Bemerkung	61
5.16	Definition	61
5.17	Satz	61
5.17.1	Beweis	61
5.18	Satz	61
5.18.1	Beweis	62
5.19	Beispiel	62
5.20	Satz	62
5.20.1	Beweis:	62
5.21	Korollar	63
5.21.1	Beweis	63
5.22	Beispiel	63
6	Determinanten	64
6.1	Definition	64
6.1.1	Beispiel	64
6.2	Laplacescher Entwicklungssatz	64
6.2.1	Bemerkung	64
6.3	Beispiel	65
6.4	Korollar	65
6.5	Rechenregeln für Determinanten	66
6.6	Bemerkung	66
6.7	Beispiel	66
6.8	Satz	67
6.9	Definition	67
6.10	Satz	67
6.11	Beispiel	68
6.12	Bemerkung	68

7	Eigenwerte	69
7.1	Beispiel:	69
7.2	Definition	69
7.3	Bemerkung	69
7.3.1	Beweis	70
7.4	Beispiel	70
7.5	Definition	70
7.6	Satz	70
7.6.1	Beweis	70
7.7	Satz	71
7.7.1	Beweis	71
7.8	Satz	71
7.8.1	Beweis	72
7.9	Definition	72
7.10	Korollar und Definition	72
7.11	Beispiel	72
7.12	Korollar	74
7.12.1	Beweis	74
7.13	Bemerkung	74
7.14	Satz	74
7.14.1	Beweis	74
7.15	Definition	75
7.16	Satz	75
7.17	Beispiel	75
7.18	Bemerkung	75
7.19	Definition	75
7.20	Satz	76
7.20.1	Beweis	76
8	Vektorräume mit Skalarprodukt	77
8.1	Definition Skalarprodukt	77
8.2	Definition	78
8.3	Beispiel	79
8.4	Satz (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)	79
8.4.1	Beweis	79
8.5	Definition	80
8.6	Beispiel	80
8.7	Satz (Eigenschaften der Norm)	80
8.7.1	Beweis	81
8.8	Bemerkung	81
8.9	Definition	81
8.10	Bemerkung	82
8.11	Beispiel	82
8.12	Definition	83
8.13	Bemerkung	83
8.14	Satz	83
8.14.1	Beweis	84
8.15	Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)	84
8.15.1	Beweis	84
8.16	Beispiel	85

8.17 Satz	85
8.17.1 Beweis	85
8.18 Definition	86
8.19 Satz	86
8.19.1 Beweis	86
8.20 Bemerkung	86
8.21 Beispiel	86
9 Orthogonale Abb., symmetrische Abb., Kongruenzabbildungen	88
9.1 Definition Orthogonale Abbildungen	88
9.2 Folgerungen	88
9.3 Beispiel	89
9.4 Satz (Charakterisierung orth. Abb.)	89
9.4.1 Beweis	89
9.5 Definition	90
9.6 Korollar	90
9.6.1 Beweis	91
9.7 Satz	91
9.7.1 Beweis	92
9.8 Definition	92
9.9 Bemerkung	92
9.10 Lemma	94
9.10.1 Beweis	94
9.11 Definition	94
9.12 Bemerkung und Definition	94
9.12.1 Beweis	94
9.13 Satz über die Hauptachsentransformation	94
9.13.1 Beweis	95
9.14 Bemerkung	95
10 Mehrdimensionale Analysis	97
10.1 Beispiele	97
10.2 Beispiel (ebene Kurven / Raumkurven)	99
10.3 Satz	99
10.4 Beispiel	100
10.5 Definition	100
10.6 Bemerkung	100
10.7 Beispiel	100
10.8 Definition	101
10.9 Definition	101
10.10 Beispiel	102

Algebraische Strukturen

1.1 Definition Verknüpfung

Sei $X \neq \emptyset$ Menge. Eine Verknüpfung auf X ist Abb. $\begin{cases} X \times X \rightarrow x \\ (a, b) \mapsto a * b \end{cases}$

$*$ ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

1.2 Beispiel

- (a) Addition $+$ und Multiplikation \cdot sind Verknüpfungen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Multiplikation ist keine Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

- (b) Division ist keine Verknüpfung auf \mathbb{N}, \mathbb{Z} .

Division ist Verknüpfung auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- (c) $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$a \oplus b := (a+b) \bmod n \in \mathbb{Z}_n$$

$$a \odot b := (a \cdot b) \bmod n \in \mathbb{Z}_n$$

Verknüpfungen auf \mathbb{Z}_n

- (d) M Menge, $X =$ Menge aller Abb. $M \rightarrow M$

Verknüpfung auf X : Hintereinanderausführung von Abb. \circ

$$f, g : M \rightarrow M, \text{ so } f \circ g : M \rightarrow M$$

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \in M$$

Im Allgemeinen ist $g \circ f \neq f \circ g$

- (e) $X = \{0, 1\}$

2-stellige aussagenlogische Junktoren wie $\vee, \wedge, XOR, \Rightarrow, \dots$ liefern Verknüpfungen auf X .

$$0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1$$

$$0 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1 \text{ (= Multiplikation)}$$

$$0 \text{ XOR } 0 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 1 \text{ XOR } 1 = 0 \text{ (= Addition mod 2)}$$

- (f) $X = M_n(\mathbb{R})$ = Menge der $n \times n$ - Matrizen über \mathbb{R}

Matrizenaddition ist Verknüpfung auf X . Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf X .

- (g) M Menge, X = Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus M ("Wörter" über M).

Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen, Konkatenation.

$$M = \{0, 1\}$$

$$w_1 = 1101, w_2 = 001, w_1 w_2 = 1101001, w_2 w_1 = 0011101$$

1.3 Definition Halbgruppe, Gruppe, Monoid

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge mit Verknüpfung $*$.

- (a) X , genauer $(X, *)$ ist Halbgruppe, falls $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in X$ (Assoziativgesetz)
- (b) $(X, *)$ heißt Monoid, falls $(X, *)$ Halbgruppe ist und ein $e \in X$ existiert mit $e * a, a * e = a$ f.a. $a \in X$.
 e heißt neutrales Element. (Später: es ist eindeutig bestimmt)
- (c) Sei $(X, *)$ ein Monoid.
 Ein Element $a \in X$ heißt invertierbar, falls $b \in X$ existiert (abhängig von a) mit $a * b = b * a = e$.
 b heißt inverses Element (das Inverse) zu a . (Später: Wenn b existiert, so ist es eindeutig).
- (d) Monoid $(X, *)$ heißt Gruppe, falls jedes Element in x bezüglich $*$ invertierbar ist.
- (e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe $(X, *)$ heißt kommutativ (oder abelsch), falls $a * b = b * a$, für alle $a, b \in X$ (Kommutativgesetz)

1.4 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines 'Produktes' mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element.

$$n = 4$$

$$(a * (b * c)) * d = ((a * b) * c) * d = (a * b) * (c * d) = a * (b * (c * d)) = a * ((b * c) * d) \text{ (Assoziativgesetz)}$$

Klammern werden meist weggelassen:

$$a^n = a * \dots * a \text{ "Potenzen" eindeutig definiert. } (n \in \mathbb{N})$$

1.5 Proposition

- (a) In einem Monoid $(X, *)$ ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.
- (b) Ist $(X, *)$ Monoid und ist $a \in X$ invertierbar, so ist das Inverse zu a eindeutig bestimmt.
Beziehung.: a^{-1}
- (c) Ist $(X, *)$ Monoid und wenn $a, b \in X$ invertierbar sind, so auch $a * b$ und $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$
- (d) Die Menge der invertierbaren Elemente in einem Monoid $(X, *)$ bilden bezüglich $*$ eine Gruppe.

1.5.1 Beweis

- (a) Angenommen e_1, e_2 sind neutrale Elemente. Dann:

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2 = e_1 * e_2 \quad (1.1)$$

- (b) Angenommen a hat 2 inverse Elemente b_1, b_2 ; also

$$\begin{aligned} a * b_1 &= e, b_2 * a = e \\ b_1 &= e * b_1 = (b_2 * a) * b_1 \\ &= b_2 * (a * b_1) = b_2 * e = b_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

- (c) $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1})$
 $= a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$
 Analog: $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$
 Also: $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

- (d) I = Menge der invertierten Elemente in $(X, *)$
 $e \in I$, dann $e * e = e$, d.h. $e^{-1} = e$.
 $*$ ist Verknüpfung auf I . Z.z. $a, b \in I \Rightarrow a * b \in I$
 Folgt aus c).
 Assoziativgesetz gilt in I
 $a \in I \Rightarrow a^{-1} \in I$, denn $(a^{-1})^{-1} = a$

1.5.2 Bemerkung

Multiplikation mit a^{-1} macht Multiplikation mit a (Verkn.) rückgängig:

$$\begin{aligned} (b * a) * a^{-1} &= b * (a * a^{-1}) = b * e = b \\ a^{-1} * (a * b) &= b \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.6 Beispiel

- (a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Halbgruppen bezüglich $+$
 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind bezüglich $+$ Monoide, neutrales Element 0.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ist kein Monoid bezüglich $+$, aber \mathbb{N}_0
 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Gruppen bezüglich $+$, inverses Element zu a : $-a$
 \mathbb{N}_0 ist keine Gruppe bezüglich $+$
 Invertierte Elemente in \mathbb{N}_0 : $\{0\}$.
- (b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Monoide bezüglich \cdot (Multiplikation) (neutrales Element: 1)
 Keine Gruppen (da 0 nicht invertierbar ist).
 $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Gruppen.
 Invertierbare Elemente in \mathbb{Z} : $\{1, -1\}$ (Gruppe bezüglich Multiplikation)
- (c) M Menge.
 $X =$ Menge aller Abbildungen $M \rightarrow M$ mit Hintereinanderausführung \circ als Verknüpfung.
 Monoid, neutrales Element id_M

$$f \circ id_M = f = id_M \circ f \quad (1.4)$$

Invertierbar sind genau die bijektiven Abbildungen $M \rightarrow M$

Inverse = Umkehrabbildung

$f : M \rightarrow M$ bijektiv:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M \quad (1.5)$$

1.5.d): Die bijektiven Abbildungen $M \rightarrow M$ bilden bezüglich \circ eine Gruppe.

- (d) M Menge, z.B. $\{0, 1\}$
 $X =$ Menge aller endlichen Folgen über M .
 Verknüpfung: Konkatenation (Hintereinanderausführung).
 \rightarrow Halbgruppe
 Nimmt man die leere Folge hinzu, so ist sie das neutrale Element (einzigstes invertierbares Element).
 Dann: Monoid.
- (e) $M_n(\mathbb{R}) =$ Menge der $n \times n$ - Matrizen über \mathbb{R}
 Addition: neutrales Element Nullmatrix
 Inverses zu A ist $-A$.
 \rightarrow Gruppe
 Multiplikation: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
 \rightarrow Halbgruppe
 Neutrales Element: Einheitsmatrix

(f) $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, Verknüpfung \oplus

$a \oplus b := a + b \bmod n$

(\mathbb{Z}_n, \oplus) ist Gruppe, Assoziativgesetz: $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$.

$$\begin{aligned}
 (a \oplus b) \oplus c &= ((a + b \bmod n) + c) \bmod n \\
 &= ((a + b) + c) \bmod n \\
 &= (a + (b + c)) \bmod n \\
 &= (a + (b + c) \bmod n) \bmod n \\
 &= (a + (b \oplus c)) \bmod n \\
 &= a \oplus (b \oplus c)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

0 ist neutrales Element bezüglich \oplus .

0 ist sein eigenes Inverses.

$1 \leq i \leq n-1 : n-i \in \mathbb{Z}_n$ Inverses zu i .

$$\begin{aligned}
 i \oplus (n-i) &= (i + (n-i)) \bmod n \\
 &= n \bmod n \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(g) $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_n$

Verknüpfung $\odot = a \cdot b \bmod n, n > 1$

(\mathbb{Z}_n, \odot) ist Monoid, Assoziativgesetz wie bei \oplus .

1 ist neutrales Element bezüglich \odot .

Keine Gruppe bezüglich \odot , denn z.B. hat 0 kein Inverses.

1.7 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$

(a) Die Elemente in (\mathbb{Z}_n, \odot) , die invertierbar bezüglich \odot sind, sind genau diejenigen $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$.

Für solche a bestimmt man das Inverse folgendermaßen:

Bestimme $s, t \in \mathbb{Z}$ mit:

$$s \cdot a + t \cdot n = 1 \tag{1.8}$$

(Erweiterter Euklidischer Algorithmus, Mathe I)

Dann ist $a^{-1} = s \bmod n$

(b) $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n : \text{ggT}(a, n) = 1\}$ ist Gruppe bezüglich \odot .

$|\mathbb{Z}_n^*| =: \varphi(n)$ Eulersche φ -Funktion (L. Euler, 1707-1783).

(c) Ist p eine Primzahl, so ist $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \odot)$ eine Gruppe. Beweis folgt aus b).

1.7.1 Beweis

(a) Angenommen $a \in \mathbb{Z}_n$ invertierbar bezüglich \odot .

Das heißt es existiert $b \in \mathbb{Z}_n$ mit $a \odot b = 1$.

$a \cdot b \bmod n = 1$, das heißt es existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit:

$$a \cdot b = 1 + k \cdot n, 1 = a \cdot b - k \cdot n \quad (1.9)$$

Sei $d = \text{ggT}(a, n)$.

$$\begin{aligned} d|a &\rightarrow d|a \cdot b \\ d|n &\rightarrow d|k \cdot n \\ \Rightarrow d|a \cdot b - k \cdot n &= 1 \\ \Rightarrow d = \text{ggT}(a, n) &= 1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Umgekehrt sei $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$.

EEA (Erweiterter Euklidischer Algorithmus) liefert $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot a + t \cdot n = 1$.

$$\begin{aligned} &(s \bmod n) \odot a \\ &= ((s \bmod n) \cdot a) \bmod n \\ &= (s \cdot a) \bmod n \\ &= (1 - t \cdot n) \bmod n \\ &= (1 - (t \cdot n) \bmod n) \bmod n \\ &= 1 \bmod n \\ &= 1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

(b) 1.5.d) und Teil a)

1.8 Beispiel

$n = 24$, $a = 7$ ist invertierbar in (\mathbb{Z}_{24}, \odot) .

EEA:

$$1 = (-2) \cdot 24 + 7 \cdot 7.$$

$$a^{-1} = 7 \bmod 24 = 7 = a.$$

1.9 Beispiel symmetrische Gruppe

Sei $M = \{1, \dots, n\}$.

Die Menge der bijektiven Abbildungen auf M (Permutation) bilden nach 1.6.c) eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung \circ .

Bezeichnung: S_n , symmetrische Gruppe vom Grad n .

Es ist $|S_n| = n!$.

Zum Beispiel $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi$
 $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$, $\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \rho \circ \rho^{-1} = id$
 $\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \rho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
 S_n ist für $n \geq 3$ nicht abelsch (nicht kommutativ).

1.10 Satz (Gleichungslösen in Gruppen)

Sei (G, \cdot) eine Gruppe, $a, b \in G$. (In allgemeinen Gruppen schreibt man Verknüpfung oft als \cdot statt $*$, oft auch ab statt $a \cdot b$).

- (a) Es gibt genau ein $x \in G$ mit $ax = b$ (nämlich $x = a^{-1} \cdot b$).
 [”Teilen” durch a von links = Multiplikation von links mit a^{-1}]
- (b) Es gibt genau ein $y \in G$ mit $ya = b$ (nämlich $y = ba^{-1}$).
- (c) Ist $ax = bx$ für ein $x \in G$ so ist $a = b$.
 Ist $ya = yb$ für ein $y \in G$ so ist $a = b$.

1.10.1 Beweis

- (a) Setze $x = a^{-1} \cdot b \in G$.

$$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = e \cdot b = b. \quad (1.12)$$

Eindeutigkeit: Sei $x \in G$ mit $ax = b$.

Multipliziere beide Seiten mit a^{-1} .

$$x = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = a^{-1}b \quad (1.13)$$

- (b) analog
- (c) $ax = bx$, multiplikation mit x^{-1} von rechts.
 Dann $a = b$.

1.11 Beispiel

- (a) Suche Permutation $\xi \in S_3$ mit $\rho \circ \xi = \pi$ (vgl. 1.9)
 1.10.a):

$$\xi = \rho^{-1} \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) 1.10.c) gilt in Monoiden, die keine Gruppen sind, im Allgemeinen nicht:

Beispiel: (\mathbb{Z}_6, \odot)

$$2 \odot 3 = 0 = 4 \odot 3, \text{ aber } 2 \neq 4.$$

1.12 Definition Ring

- (a) $R \neq \emptyset$ Menge mit 2 Verknüpfungen $+$ und \cdot heißt Ring, falls gilt:
- (a) $(R, +)$ ist kommutative Gruppe (neutrales Element: 0, Nullelement, Inverses zu a : $-a$, $b+(-a) =: b-a$)
 - (b) (R, \cdot) ist Halbgruppe
 - (c) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ und $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (\cdot vor $+$), für alle $a, b, c \in R$.
Distributivgesetz
- (b) Ring heißt kommutativer Ring falls (R, \cdot) kommutative Halbgruppe ist.
- (c) Ring R heißt Ring mit Eins, falls (R, \cdot) Monoid mit neutralem Element $1 \neq 0$ (Einselement, Eins)

1.13 Beispiele zu Ringen

- (a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1, invertierbare Elemente bezüglich \cdot sind 1 und -1.
- (b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind kommutative Ringe mit Eins. Alle Elemente $\neq 0$ sind invertierbar bezüglich \cdot .
- (c) $n \in \mathbb{N}, n > 1$. $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$
 $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ist kommutativer Ring mit Eins:

Beweis: Wegen 1.6.f),g) sind nur die Distributivgesetze zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 (a \oplus b) \odot c &= ((a \oplus b) \cdot c) \mod n \\
 &= (((a+b) \mod n) \cdot c) \mod n \\
 &\quad \underbrace{=}_{\text{Mathe I}} ((a+b) \cdot c) \mod n \\
 &\quad = (a \cdot c + b \cdot c) \mod n \\
 &\quad \underbrace{=}_{\text{Mathe I}} ((a \cdot c) \mod n + (b \cdot c) \mod n) \mod n \\
 &= a \odot c \oplus b \odot c
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

- (d) $M_n(\mathbb{R})$, $n \times n$ - Matrizen über \mathbb{R} , mit Matrizenaddition $+$ und Multiplikation \cdot , ist Ring mit Eins. (Folgt aus Rechenregeln für Matrizen, Mathe II)

Eins: E_n , $n \times n$ - Einheitsmatrix

Für $n \geq 2$ ist $M_n(\mathbb{R})$ kein kommutativer Ring.

1.14 Proposition

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$:

$$(a) \quad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

$$(b) \quad (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

$$(c) \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

1.14.1 Beweis

$$(a) \quad 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a \underset{\text{Distr.}}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

Addiere auf beiden Seiten $-(0 \cdot a)$

$$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$$

$$a \cdot 0 = 0 \text{ analog.}$$

$$(b) \quad (-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b \underset{(a)}{=} 0$$

$$\Rightarrow (-a) \cdot b = -(a \cdot b). \text{ Analog } a \cdot (-b) = -(a \cdot b).$$

$$(c) \quad (-a) \cdot (-b) \underset{(b)}{=} -(a \cdot (-b)) \underset{(b)}{=} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$$

1.15 Bemerkung Ringe

(a) In einem Ring mit Eins sind 1 und -1 bezüglich \cdot invertierbar:

$$1 \cdot 1 = 1 \quad (1^{-1} = 1)$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad (1.14.c), \text{ d.h. } (-1)^{-1} = -1.$$

0 ist **nie** bezüglich Multiplikation invertierbar, denn $0 \cdot a \underset{1.14.a)}{=} 0 \neq 1.$

(b) Es kann sein, dass $1 = -1$ gilt.

Beispiel: $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot).$

$$1 \oplus 1 = 0 \rightarrow 1 = -1$$

1.16 Definition Körper

Ein kommutativer Ring $(R, +, \cdot)$ mit Eins heißt Körper, wenn jedes Element $\neq 0$ bezüglich der Multiplikation invertierbar ist.

1.17 Beispiel Körper

- (a) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper, \mathbb{Z} nicht.
 (b) $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Begründung:

\mathbb{Z}_n ist kommutativer Ring mit 1.

1.13.c):

Die invertierbaren Elemente in \mathbb{Z}_n sind alle $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$.

1.18 Proposition (Nullteilerfreiheit) in Körpern

Ist K ein Körper, $a, b \in K$ mit $a \cdot b = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.

1.18.1 Beweis

Sei $a \cdot b = 0$. Angenommen $a \neq 0$.

Dann existiert $a^{-1} \in K$.

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\substack{= \\ 1.14.a)}}{=} a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(a \cdot b) \\ &= (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b \end{aligned} \quad (1.15)$$

Beispiel: $R = (\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$

$2 \odot 3 = 0$, aber $2 \neq 0, 3 \neq 0$

1.19 Definition Polynom

Sei K ein Körper.

- (a) Ein (formales) Polynom über K ist ein Ausdruck.

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K \quad (1.16)$$

(Manchmal $f(x)$ statt f , $+$ -Zeichen hat zunächst nichts mit Addition zu tun).

a_i : Koeffizienten von f

Ist $a_i = 0$, so kann man in der Schreibweise von f $0 \cdot x^i$ auch weglassen.

Statt a_0x^0 schreibt man a_0 , statt a_1x^1 schreibt man a_1x .

Sind alle $a_i = 0$, so $f = 0$, Nullpolynom.

Ist $a_i = 1$, so schreibt man x^i statt $1 \cdot x^i$.

- (b) Zwei Polynome f und g sind gleich, wenn entweder $f = 0$ und $g = 0$ oder $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0, g = \sum_{i=0}^m b_i x^i, b_m \neq 0$, und $n = m$ und $a_i = b_i$ für $i=0, \dots, n$

(c) Menge aller Polynome über K : $K[x]$

Wir wollen $K[X]$ zu einem Ring machen. Wie?

Beispiel: $f = 3x^2 + 2x + 1, g = 5x^3 + x^2 + x \in \mathbb{Q}[x]$

$$f + g = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$$

$$f \cdot g = (3x^2 + 2x + 1) \cdot (5x^3 + x^2 + x) = 15x^5 + 13x^4 + 10x^3 + 3x^2 + x$$

1.20 Satz und Definition

K Körper. $K[x]$ wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgende Verknüpfungen:

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad (1.17)$$

so:

$$f + g := \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i \quad (1.18)$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i, \quad (1.19)$$

wobei:

$$c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0 \text{ (Faltungsprodukt)} \quad (1.20)$$

In beiden Fällen sind Koeffizienten a_i mit $i > n$ beziehungsweise b_i mit $i > m$ gleich 0 zu setzen.

Das Einselement ist 1 ($= 1x^0$).

Das Nullelement ist das Nullpolynom.

$$\bullet f = \sum_{i=0}^n (-a_i) x^i$$

$(K[x], +, \cdot)$ heißt Polynomring in einer Variablen.

Beweis: Nachrechnen

1.21 Bemerkung

$$(a) f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x], a \in K \subseteq K[x]$$

$$a \cdot f = \sum_{i=0}^n (a \cdot a_i) x^i$$

$$x \cdot f = \sum_{i=0}^n a_i x^{i+1} = a_n x^{n+1} + \dots + a_0 x$$

(b) Das $+$ -Zeichen in der Definition der Polynome entspricht genau der Addition der "Monome" $a_i x^i$.

$$((a_0 x^0) + (a_1 x^1)) = a_0 x^0 + a_1 x^1$$

1.22 Definition

Sei $0 \neq f \in K[x]$, $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_n \neq 0$.

Dann heißt n der Grad von f , $\text{Grad}(f) = n$

$\text{Grad}(0) := -\infty$

$\text{Grad}(f) = 0$: Konstante Polynome $\neq 0$.

1.23 Satz

Sei K ein Körper, $f, g \in K[x]$. Dann ist $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$

(Konvention : $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$)

Beweis: Richtig, falls $f = 0$ oder $g = 0$. Sei $f \neq 0, g \neq 0$.

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0, n = \text{Grad}(f) \quad (1.21)$$

$$g = \sum_{i=0}^m b_i x^i, b_m \neq 0, m = \text{Grad}(g) \quad (1.22)$$

Koeffizient von x^{n+m} in $f \cdot g$: $a_n \cdot b_m \underbrace{\neq 0}_{1.18}$

Höhere Potenzen mit Koeffizient $\neq 0$ treten in $f \cdot g$ nicht auf. Also: $\text{Grad}(f \cdot g) = n+m = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$

1.24 Korollar

Sei K ein Körper.

- (a) Genau die konstanten Polynome $\neq 0$ sind in $K[x]$ bezüglich \cdot invertierbar. Insbesondere ist $K[x]$ kein Körper.
- (b) Sind $f, g \in K[x]$ mit $f \cdot g = 0$, so ist $f = 0$ oder $g = 0$ (Nullteilerfreiheit in $K[x]$).
- (c) Sind $f, g_1, g_2 \in K[x]$ mit $f \cdot g_1 = f \cdot g_2$ und ist $f \neq 0$, so ist $g_1 = g_2$.

1.24.1 Beweis

- (a) Sei $f \in K[x]$ invertierbar bezüglich \cdot .

Dann ist $f \neq 0$ und es existiert $g \in K[x]$ mit $f \cdot g = 1$.

Mit 1.23:

$$0 = \text{Grad}(1) = \text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g).$$

Also: $\text{Grad}(f) = 0$ ($= \text{Grad}(g)$)

D.h. f ist konstantes Polynom.

Ist umgekehrt $f = a \in K, a \neq 0$, so $f^{-1} = a^{-1} \in K$.

(b) Folgt aus 1.23:

$$\begin{aligned} -\infty &= \text{Grad}(0) = \text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \\ \Rightarrow \text{Grad}(f) &= -\infty \text{ oder } \text{Grad}(g) = -\infty, \text{ d.h. } f = 0 \text{ oder } g = 0. \end{aligned}$$

(c) $fg_1 = fg_2$

$$\Rightarrow 0 = fg_1 - fg_2 = f(g_1 - g_2)$$

Da $f \neq 0$, folgt mit b) $g_1 - g_2 = 0$, d.h. $g_1 = g_2$.

1.25 Bemerkung

(a) Jedem Polynom $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x]$ kann man eine Funktion $K \rightarrow K$ zuordnen: $a \in K \mapsto f(a) = \sum_{i=0}^n a_i a^i \in K$ (Polynomfunktion aus Analysis für $K = \mathbb{R}$)

Auf Grund der Definition von Addition / Multiplikation von Polynomen gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{(f+g)}_{K[x]}(a) &= f(a) \underbrace{+}_{K} g(a) \\ \underbrace{(f \cdot g)}_{K[x]}(a) &= f(a) \underbrace{\cdot}_{K} g(a) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Es kann passieren, dass zwei verschiedene Polynome die gleiche Funktion beschreiben:

Zum Beispiel: $K = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$

$$f = x^2, g = x, f \neq g$$

$$f(1) = 1 = g(1)$$

$$f(0) = 0 = g(0)$$

Über unendlichen Körpern passiert das nicht (später).

(b) Schnelle Berechnung von $f(a)$:

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$f(a) = a_0 + a(a_1 + a(a_2 + \dots + a(a_{n-1} + a(a_{n-2} + \dots + a(a_1 + a_0) \dots)))$$

n Multiplikation

n Addition

Horner-Schema

1.26 Definition

K Körper, $f, g \in K[x]$.

f teilt g ($f|g$), falls $q \in K[x]$ existiert mit

$$g = q \cdot f \tag{1.24}$$

(Falls $g \neq 0$ und $f|g$, so ist $\text{Grad}(f) \leq \text{Grad}(g)$ nach 1.23)

1.27 Satz

K Körper, $0 \neq f \in K[x], g \in K[x]$. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[x]$ mit

1. $g = q \cdot f + r$
2. $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(f)$

Division mit Rest

$q =: g \text{ div } f$

$r =: g \text{ mod } f$

(Beweis: WHK, Satz 4.69)

1.28 Beispiel

(a) $g = x^4 + 2x^3 - x + 2, f = 3x^2 - 1, f, g \in \mathbb{Q}[x]$

$$\underline{x^4 + 2x^3 - x + 2} : \underline{3x^2} - 1 = \underbrace{\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}}_q$$

$$-(x^4 - \frac{1}{3}x^2)$$

$$\underline{2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + 2}$$

$$-(2x^3 - \frac{2}{3}x)$$

$$\underline{\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2}$$

$$-(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9})$$

$$\underbrace{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}_r$$

(b) $g = x^4 - x^2 + 1, f = x^2 + x, f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$ ($-1 = 2$ in \mathbb{Z}_3)

$$\underline{x^4 + 2x^2 + 1} : \underline{x^2 + x} = \underline{x^2 + 2x}$$

$$-(x^4 + x^3)$$

$$\underline{2x^3 + 2x^2 + 1}$$

$$-(2x^3 + 2x^2)$$

$$1$$

$$g \text{ div } f = x^2 + 2x$$

$$g \text{ mod } f = 1$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 2x)(x^2 + x) + 1$$

1.29 Korollar

K Körper, $a \in K$.

$f \in K[x]$ ist genau dann durch $(x-a)$ teilbar, wenn $f(a) = 0$ (d.h. a ist Nullstelle von f).

$$[f = q \cdot (x-a), q \in K[x]]$$

1.29.1 Beweis

Falls $(x-a) \mid f$, so existiert $q \in K[x]$ mit $f = q \cdot (x-a)$. Dann:

$$f(a) = q(a) \cdot (a-a) = 0 \quad (1.25)$$

umgekehrt: Angenommen $f(a) = 0$. Division mit Rest von f durch $x-a$:

$$f = q \cdot (x-a) + r, \quad q, r \in K[x] \quad (1.26)$$

$$\text{Grad}(r) < \text{Grad}(x-a) = 1, \quad r \in K$$

Zeige: $r = 0$.

$$r = f - q \cdot (x-a)$$

Setze $a \in K$ ein.

$$r \underset{1.25a)}{=} = f(a) - q(a) \cdot \underbrace{(a-a)}_{=0} = 0 - 0 = 0$$

$$f = q(x-a)$$

1.30 Definition

K Körper. $a \in K$ heißt m-fache Nullstelle von $f \in K[x]$, falls:

$$(x-a)^m \mid f \text{ und } (x-a)^{m+1} \nmid f \quad (1.27)$$

D.h. $f = q \cdot (x-a)^m$ und $q(a) \neq 0$

1.31 Beispiel

$$f = x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

In \mathbb{Z}_3 hat f Nullstelle 1.

1.29: $x-1$ ($= x+2$) teilt f .

Dividiere f durch $x-1$:

$$f = (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2) : (x-1) \quad (1.28)$$

1 Nullstelle von $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$.

$$(x-1) \mid x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \quad (1.29)$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 : x - 1 = x^3 + 2x + 1 \quad (1.30)$$

$$f = \underbrace{(x^3 + 2x + 1)}_q \cdot (x - 1)^2$$

$q(1) = 1 \neq 0$
 1 ist 2-fache Nullstelle von f

1.32 Satz

K Körper, $f \in K[x]$, $\text{Grad}(f) = n \geq 0$ (d.h. $f \neq 0$). Dann hat f höchstens n Nullstellen in K (einschließlich Vielfachheit).

Genauer: Sind a_1, \dots, a_k die verschiedenen Nullstellen von f, so ist $f = g \cdot (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_k)^{m_k}$, m_i Vielfachheiten der Nullstellen a_i , g hat keine Nullstellen in K.

g hat keine Nullstellen in K.

1.32.1 Beweis

Durch Induktion nach n.

$n = 0$: $f = a_0 \neq 0$, ohne Nullstellen.

Sei $n > 0$. Behauptung sei richtig für alle Polynome von $\text{Grad} < n$.

Hat f keine Nullstellen, $g = f$

Hat f Nullstellen a_1, \dots, a_k , $k \geq 1$, so $f = q \cdot (x - a_1)^{m_1}$ (nach Definition).

$q(a_1) \neq 0$.

$\text{Grad}(q) = n - m_1 \underbrace{\leq}_{m_1 > 0} n$

Wir zeigen:

q hat genau die Nullstellen a_2, \dots, a_k mit Vielfachheiten m_2, \dots, m_k . Klar: Jede Nullstelle von q ist auch Nullstelle von f.

D.h. q hat höchstens Nullstelle a_2, \dots, a_k . Diese Nullstellen hat q mit Vielfachheit $0 \leq n_i \leq m_i$, denn $(x - a_i)^{n_i} | q \rightarrow (x - a_i)^{n_i} | f$

Sei $i \in \{2, \dots, k\}$. Es ist:

$$f = s \cdot (x - a_i)^{m_i}, s \in K[x], s(a_i) \neq 0 \quad (1.31)$$

$$q = q_1 \cdot (x - a_i)^{n_i}, q_1 \in K[x], q_1(a_i) \neq 0, ((x - a_i)^0 = 1) \quad (1.32)$$

$$f = q \cdot (x - a_i)^{m_i} \quad (1.33)$$

$$s \cdot (x - a_i)^{m_i - n_i} \cdot (x - a_i)^{n_i} = s \cdot (x - a_i)^{m_i} = f = q_1 (x - a_i)^{n_i} \cdot (x - a_1)^{m_1}$$

1.24.c):

$$s(x - a_i)^{m_i - n_i} = q_1 \cdot (x - a_1)^{m_1}.$$

Ist $m_i > n_i$, so ist $m_i - n_i > 0$.

$$0 = s(a_i)(a_i - a_1)^{m_i - n_i} = q_1(a_i)(a_i - a_1)^{m_1} \neq 0$$

D.h. $n_i = m_i$, $i = 2, \dots, k$.

$q = g \cdot (x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}$, g ohne Nullstelle in K (nach Induktionsvoraussetzung).

$$f = g \cdot (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_k)^{m_k}.$$

1.33 Korollar

K Körper, $f, g \in K[x]$, $m = \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$

Gibt es $m+1$ Elemente a_1, \dots, a_{m+1} in K , paarweise verschieden, mit $f(a_i) = g(a_i)$, $i = 1, \dots, m+1$, so $f=g$

Insbesondere: Ist K unendlich, $f, g \in K[x]$ mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in K$, so ist $f = g$.

1.33.1 Beweis

$f - g \in K[x]$, $\text{Grad}(f - g) \leq m$.

$f - g$ hat $m+1$ Nullstellen a_1, \dots, a_{m+1}

1.32. $f - g = 0$, $f = g$

1.34 Bemerkung

Über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) gibt es Polynome beliebig hohen Grades ohne Nullstellen.

Über \mathbb{Q}, \mathbb{R} : $(x^2 + 1)^m$ hat Grad $2m$, keine Nullstelle in \mathbb{Q}, \mathbb{R}

In \mathbb{C} $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

Über \mathbb{Z}_p z.B. $(x^p - x + 1)^m$ hat Grad pm , ohne Nullstellen. (ohne Beweis)

1.35 Fundamentalsatz der Algebra (C.F. Gauß)

Ist $f \in \mathbb{C}[x]$, $f \neq 0$, so ist:

$$f = a_n(x - c_1)^{m_1} \dots (x - c_k)^{m_k}, a_n \in \mathbb{C}, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C} \text{ (Nullstellen mit Vielfachheit } m_1, \dots, m_k)$$

$$m_1 + \dots + m_k = \text{Grad}(f)$$

(1.34)

$\text{Grad}(f) = n$: f hat n Nullstellen (einschließlich Vielfachheit)

Vektorräume

Verallgemeinerung von Mathe II, Kap. 10

2.1 Definition

Sei K ein Körper.

Ein K-Vektorraum V besitzt Verknüpfung $+$, bezüglich derer er eine kommutative Gruppe ist. (Neutrales Element σ , Nullvektor; Inverses zu $v \in V$: $-v$)
Außerdem existiert Abbildung :

$$\begin{aligned} K \times V &\rightarrow V \\ (a, v) &\mapsto av, a \in K, v \in V \end{aligned}$$

(“Multiplikation” von Elementen aus V (“Vektoren”) mit Körperelementen (“Skalare”)), so dass gilt:

$$(a \underbrace{+}_{in\ K} b)v = av \underbrace{+}_{in\ V} bv \text{ für alle } a, b \in K, v \in V$$

$$a(\underbrace{v +}_{in\ V} w) = av \underbrace{+}_{in\ V} aw \text{ für alle } a \in K, v, w \in V$$

$$(a \underbrace{\cdot}_{in\ K} b)v = a \cdot (\underbrace{bv}_{\in V})$$

$1v = v$ für alle $v \in V$ (mit 1 neutrales Element in K bezüglich \cdot)

2.2 Beispiel Vektorraum

(a) K Körper, $n \in \mathbb{N}$

$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$ ist K -Vektorraum bezüglich:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot a_1 \\ \dots \\ a \cdot a_n \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

für alle $a \in K$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$

Raum der Spaltenvektoren der Länge n über K .

Entsprechend Raum der Zeilenvektoren.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t \quad (2.3)$$

Für $K = \mathbb{R} : \mathbb{R}^n$

$n = 2, 3$ Elemente aus $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ identifizierbar mit Ortsvektor der Ebene oder des 3-dimensionalen Raums.

(b) Sei K ein Körper.

Polynomring $K[x]$ ist ein K -Vektorraum bezüglich:

- Addition von Polynomen
- Multiplikation von Körperelementen mit Polynomen

$$a \cdot (\sum_{i=0}^n a_i x^i) := \sum_{i=0}^n (aa_i) x^i \in K[x], \quad a \in K, a_i \in K$$

(Multiplikation von Polynomen mit Polynom vom Grad ≤ 0 (konstant))

2.1 folgt aus den Ringeigenschaften von $K[x]$.

(c) K Körper. $V = \text{Abb}(K, K) = \{\alpha : K \rightarrow K : \alpha \text{ Abb.}\}$

Addition auf V :

$$\alpha, \beta \in V$$

$$(\alpha + \beta)(x) := \alpha(x) + \beta(x), \text{ für alle } x \in K.$$

Skalare Multiplikation:

$$a \in K, \alpha \in V.$$

$$(a \cdot \alpha)(x) = a \cdot \alpha(x), \text{ für alle } x \in K$$

Nachrechnen: Damit wird V ein K -Vektorraum.

2.3 Prop

K Körper, V K -VR.

- (a) $a \cdot \sigma = \sigma$, für alle $a \in K$
- (b) $0 \cdot v = \sigma$, für alle $v \in V$.
- (c) $(-1) \cdot v = -v$

2.3.1 Beweis

$$(a) \quad a \cdot \sigma = a \cdot (\sigma + \sigma) \stackrel{2.1}{=} a \cdot \sigma + a \cdot \sigma$$

$$\Rightarrow a \cdot \sigma = \sigma$$

$$(b) \quad 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

$$\Rightarrow 0 \cdot v = \sigma$$

$$(c) \quad (-1) \cdot v + v \stackrel{2.1}{=} (-1) \cdot v + 1 \cdot v \stackrel{2.1}{=} ((-1) + 1) \cdot v \stackrel{b)}{=} 0 \cdot v = \sigma$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot v = -v$$

2.4 Definition Unterraum

K Körper, V K -VR.

$\emptyset \neq U \subseteq V$ heißt Unterraum (Untervektorraum oder Teilraum) von V , falls U bezüglich Addition auf V und der skalaren Multiplikation mit Elementen aus K selbst K -Vektorraum ist.

2.5 Prop

U ist Unterraum von $V \Leftrightarrow$

$$(1) \quad u_1 + u_2 \in U \text{ für alle } u_1, u_2 \in U$$

$$(2) \quad au \in U \text{ für alle } u \in U, a \in K.$$

(Nullvektor in U = Nullvektor in V)

2.5.1 Beweis

\Rightarrow klar

\Leftarrow : Da $U \neq \emptyset$, existiert $u \in U$:

$$\sigma \stackrel{2.3.b)}{=} 0 \cdot u \in U$$

$$u \in U \Rightarrow -u = (-1) \cdot u \in U$$

Mit (1): $(U, +)$ ist kommutative Gruppe.

Restliche Axiome gelten auch für U, K .

2.6 Beispiel

(a) V K -VR, so ist V Unterraum von V und $\{\sigma\}$ ist Unterraum von V (Nullraum).

(b) Betrachte $K[x]$ als K -VR (2.2.b)).

Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

$$U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) \leq n\}$$

Unterraum von $K[x]$.

2.7 Prop

Seien U_1, U_2 Unterräume von K-VR V .

- (a) $U_1 \cap U_2$ ist Unterraum
- (b) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist Unterraum von V (Summe von Unterräumen)
- (c) $U_1 + U_2$ ist der kleinste Unterraum von V , der $U_1 \cup U_2$ enthält
- (d) $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum

Beweis: Wie 10.4, Mathe II

2.8 Definition

V K-VR

- (a) $v_1, \dots, v_m \in V, a_1, \dots, a_m \in K$
 Dann heißt $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i \in V$ Linearkombination von v_1, \dots, v_m (mit Koeffizienten a_1, \dots, a_m).
 [Beachte: Zwei formal verschiedene Linearkombinationen derselben Vektoren können den gleichen Vektor darstellen]
- (b) Ist $M \subseteq V$, so ist der von M erzeugte oder aufgespannte Unterraum $\langle M \rangle_K$ (oder kurz $\langle M \rangle$) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann:
 $\langle M \rangle_K = \{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M \}$
 $\langle \emptyset \rangle_K := \{0\}$
 $M = \{v_1, \dots, v_m\} : \langle M \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$
- (c) Ist $\langle M \rangle_K = V$, so heißt M Erzeugendensystem in V .

2.9 Satz

V K-VR, $M \subseteq V$.

- (a) $\langle M \rangle_K$ ist Unterraum von V
- (b) $\langle M \rangle_K$ ist der kleinste Unterraum von V , der M enthält.
 Insbesondere: Sind U_1, U_2 Unterräume von V , so ist $\langle U_1 \cup U_2 \rangle_K = U_1 + U_2$

Beweis: Wie 10.7, Mathe II

Wiederholung

V K-VR

$M \subseteq V, \langle M \rangle_K = \{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M \}$

Falls $V = \langle M \rangle_K$, so heißt M Erzeugendensystem von V .

2.10 Definition

V K-VR. V heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $M \subseteq V$ gibt mit $V = \langle M \rangle_K$

2.11 Beispiel

$$(a) \quad K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$$

K^n ist endlich erzeugt:

e_1, \dots, e_n Einheitsvektoren

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ an } i\text{-ter Stelle})$$

$$K^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_K, \text{ denn } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

(b) $K[x]$ als K-VR ist nicht endlich erzeugt:

Angenommen es existieren $f_1, \dots, f_n \in K[x]$ mit $K[x] = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$.

Sei $t = \max \text{Grad}(f_i) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$

Dann haben alle Polynome in $\langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$ höchstens Grad t . Also $x^{t+1} \in K[x] \setminus \langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$. Widerspruch !

$$M = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$K[x] = \langle M \rangle_K$$

$$f = \sum_{i=0}^t a_i x^i$$

(c) $n \in \mathbb{N}$. $U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) \leq n\}$

Unterraum von $K[x]$ endlich erzeugt:

$$U = \langle x^0, x^1, \dots, x^n \rangle_K$$

2.12 Definition

Sei V K-VR. $v_1, \dots, v_m \in V$ heißen linear abhängig, wenn es $a_1, \dots, a_n \in K$, nicht alle = 0, gibt mit

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sigma$$

(Beachte: Immer ist $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m = \sigma$, aber bei lin. Abhängigkeit soll es noch eine andere Möglichkeit geben)

Andernfalls nennt man v_1, \dots, v_m linear unabhängig

(D.h. aus $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sigma$, folgt $a_1 = \dots = a_m = 0$)

Entspr.: $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear abhängig / linear unabhängig

\emptyset per Definition linear unabhängig.

Klar. Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren ist wieder linear unabhängig.

2.13 Beispiel

- (a) σ ist linear abhängig.

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

- (b) $v, w \in V, v \neq \sigma \neq w$.

Wann sind v und w linear abhängig?

v, w linear abhängig $\Rightarrow \exists a, b \in K$, nicht beide $= 0$ mit $a \cdot v + b \cdot w = \sigma$

Angenommen: $a \neq 0$: $a \cdot v = -b \cdot w \mid a^{-1}$ (K Körper)

$$v = 1v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}(-bw) = (-a^{-1}b)w \in \langle w \rangle_K = \{cw : c \in K\}$$

$$d \in K$$

$$dv = (-d \cdot a^{-1} \cdot b)w \in \langle w \rangle_K.$$

$$\langle v \rangle_K \subseteq \langle w \rangle_K$$

Dann auch $b \neq 0$.

Angenommen $b = 0$: $a \cdot v = -0 \cdot w = \sigma$.

$$v = a^{-1} \cdot \sigma = \sigma \text{ Widerspruch.}$$

Vertausche Rollen von v, w : $\langle w \rangle_K \subseteq \langle v \rangle_K$

$$v, w \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \langle v \rangle_K = \langle w \rangle_K$$

\Rightarrow klar

$$\Leftrightarrow v \in \langle v \rangle_K = \langle w \rangle_K \rightarrow v = c \cdot w \text{ für ein } c \in K.$$

$$\rightarrow \sigma = -v + c \cdot w = (-1)v + c \cdot w$$

$\rightarrow v, w$ linear abhängig.

- (c) $e_1, \dots, e_n \in K^n$ sind linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

- (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lin. abhängig / lin. unabhängig?

Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

Führt auf LGS für die Unbekannten: a, b, c :

$$1 \cdot a + 3 \cdot b + 2 \cdot c = 0$$

$$2 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 0$$

$$3 \cdot a + 1 \cdot b + 4 \cdot c = 0$$

Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

c frei wählbar, $b = -\frac{1}{4}c$, $a = -3b - 2c = \frac{3}{4}c - 2c = -\frac{5}{4}c$

Z.B. $c = 4$, $b = -1$, $a = -5$

$$(-5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren sind linear abhängig.

2.14 Bemerkung

Mann kann auch für unendliche Mengen $M \subseteq V$ lineare Unabhängigkeit definieren:

Jede endliche Teilmenge von M ist linear unabhängig.

Z.B. $\{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig in $K[x]$

2.15 Satz

V K-VR, $v_1, \dots, v_m \in V$.

- (a) v_1, \dots, v_m sind linear abhängig $\Leftrightarrow \exists i : v_i = \sum_{j=1}^n b_j v_j$ für geeignete $b_j \in K, j \neq i$
 $\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_K$
- (b) v_1, \dots, v_m linear unabhängig \Leftrightarrow jedes $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K$ lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombination von v_1, \dots, v_m schreiben.
- (c) Sind v_1, \dots, v_m linear unabhängig und ist

$$v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K$$

so sind v_1, \dots, v_m, v linear unabhängig.

2.15.1 Beweis

Wie 10.11, Mathe II

z.B b) \Rightarrow :

Angenommen $V \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K$

$$V = \sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m b_i v_i, a_i, b_i \in K$$

$$\sum_{i=1}^m (a_i - b_i) v_i = \sum_{i=1}^m a_i v_i - \sum_{i=1}^m b_i v_i = 0$$

$$v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig} \Rightarrow a_i - b_i = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m \rightarrow a_i = b_i$$

2.16 Definition

Sei V endlich erzeugter K -VR. Eine endliche Teilmenge $B \subseteq V$ heißt Basis von V , falls

- (1) $V = \langle B \rangle_K$
 - (2) B linear unabhängig
- ($V = \{\sigma\} : \emptyset$ ist Basis von V)

2.17 Beispiel

- (a) e_1, \dots, e_n Basis von K^n (kanonische Basis)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

- (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_5$

In \mathbb{Z}_5^2 sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Basis, denn sie sind nicht linear unabhängig über \mathbb{Z}_5 .

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \mathbb{Z}_7$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bilden Basis von } \mathbb{Z}_7^2:$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}_7.$$

Führt auf LGS für a, b :

$$1 \cdot a + 3 \cdot b = 0$$

$$2 \cdot a + 1 \cdot b = 0$$

Gauß-Algorithmus (funktioniert über jedem Körper K):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{multp. mit Inversem}]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = 0, a + 3b = 0 \rightarrow a = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_7} = \mathbb{Z}_7^2$$

Sei $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^2$. Gesucht sind $a, b \in \mathbb{Z}_7^2$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot a + 3 \cdot b = c$$

$$2 \cdot a + 1 \cdot b = d$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 1 & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & d-2c \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2. \text{ Zeile mit } 2^{-1} = 4}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 1 & 4d-c \end{pmatrix}$$

$$b = 4d - c = 4d + 6c$$

$$a = c - 3b = c - 5d - 4c = 4c + 2d$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (4c + 2d) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (4d + 6c) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.18 Satz (Existenz von Basen)

Sei V endlich erzeugter K -VR. Dann enthält jedes endliche Erzeugendensystem von V eine Basis v von V .

2.18.1 Beweis

Sei $M \subseteq V$ endlich mit $V = \langle M \rangle_K$. Ist M linear unabhängig so ist M basis.

Ist M lin. abhängig, so existiert nach 2.15.a) $v \in M$ mit $V = \langle M \rangle_K = \langle$

$M \setminus \{v\} \rangle_K$.

Da M endlich ist endet dieses Verfahren mit Basis.

2.19 Lemma

V endlich erzeugter K -VR V .

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V .

Sei $\sigma \neq w \in V$. Dann:

$$w = \sum_{j=1}^n a_j v_j, a_j \in K \quad (2.4)$$

Ist $a_i \neq 0$, so ist

$$(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$$

wieder eine Basis von V .

2.19.1 Beweis

$$w = \sum_{j=1}^n a_j v_j \Rightarrow a_i v_i = w - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_j v_j$$

$$\Rightarrow v_i = a_i^{-1}(a_i v_i) = a_i^{-1}w + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_i^{-1}a_j)v_j$$

$$v_i \in \langle (B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\} \rangle$$

$$V = \langle B \rangle_K = \langle B \cup \{w\} \rangle_K = \langle (B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\} \rangle_K$$

Zeige: $(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$ ist linear unabhängig:

Angenommen:

$$\sigma = \sum_{j=1, j \neq i}^n c_j v_j + cw \text{ mit } c_j, c \in K$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1, j \neq i}^n c_j v_j + \sum_{j=1}^n ca_j v_j \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^n (c_j + ca_j) v_j + ca_i v_i \end{aligned}$$

v_1, \dots, v_n linear unabhängig:

$\rightarrow ca_i = 0$ und $c_j + ca_j = 0$ für alle $j \neq i$.

$$(1) \quad ca_i = 0, \quad a_i \neq 0 \rightarrow c = 0$$

$$(2) \quad c_j = 0 \text{ für alle } j \neq i$$

2.20 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

V endlich erzeugter K -VR, B Basis von V , M endliche linear unabhängige Teilmenge von V . Dann existiert $C \subseteq B$ mit $|C| = |M|$, so dass

$$(B \setminus C) \cup M$$

Basis von V ist.

Insbesondere $|M| \leq |B|$.

2.20.1 Beweis

Sei $|M| = k$. Induktion nach k .

$k = 0$: klar

$k > 0$: Sei $M = \tilde{M} \cup \{w\}$, $|\tilde{M}| = k - 1$.

Induktionsvoraussetzung: Existiert $\tilde{C} \subseteq B$ mit

$$|\tilde{C}| = |\tilde{M}|$$

und

$$(B \setminus \tilde{C}) \cup \tilde{M}$$

ist Basis von V .

$$w = \sum_{u \in B \setminus \tilde{C}} a_u u + \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$$

Mindestens eines der a_k ist $\neq 0$, denn sonst:

$$w = \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v, \text{ also}$$

$M = \tilde{M} \cup \{w\}$ linear abhängig (Widerspruch!)

Also sei $a_u \neq 0$ für ein $u \in B \setminus \tilde{C}$

Nach 2.19 ist

$$(B \setminus C) \cup M$$

Basis von V , wobei $C = \tilde{C} \cup \{u\}$. Fertig.

2.21 Korollar

V endlich erzeugter K -VR.

- (a) Je zwei Basen von V enthalten gleich viele Vektoren
- (b) Jede linear unabhängige Teilmenge von V ist endlich
- (c) (Basisergänzungssatz)
Jede linear unabhängige Menge von Vektoren lässt sich zu einer Basis ergänzen.

2.21.1 Beweis

- (a) B, \tilde{B} Basen von V .
2.20 : $|B| \leq |\tilde{B}|$, $|\tilde{B}| \leq |B|$, also $|B| = |\tilde{B}|$.
- (b) Angenommen V enthält unendlich linear unabhängige Teilmengen.
Sei B Basis von V . Wähle $M_0 \subset M$ mit M_0 endlich, $|M_0| > |B|$.
Nach Voraussetzung ist M_0 linear unabhängig. Widerspruch zu 2.20.
- (c) Sei M linear unabhängige Teilmenge von V . Nach b) ist M endlich.
Sei B eine Basis von V .
2.20: $\exists C \subseteq B, |C| = |M|$, so dass $(B \setminus C) \cup M$ Basis.

2.22 Satz

V endlich erzeugtter K -VR, $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

- (1) B ist Basis von V
- (2) B ist maximal linear unabhängige Teilmenge von V (d.h. $B \cup \{v\}$ ist linear abhängig f.a $v \in V \setminus B$)
- (3) B ist minimales Erzeugendensystem von V (d.h. $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K \neq V$ für alle $w \in B$)

2.22.1 Beweis

(2) \Rightarrow (1)

Angenommen $\langle B \rangle_K \neq V$. Sei $v \in V \setminus \langle B \rangle_K$.
2.15.c): $B \cup \{v\}$ linear unabhängig. Widerspruch!
 $\langle B \rangle_K = V$. B ist Basis

(1) \Rightarrow (2)

Angenommen: $B \subseteq C$, C linear unabhängig.
2.21: C endlich
2.20: $|C| \leq |B|$. Daher: $B = C$

(3) \Rightarrow (1)

Angenommen B ist linear abhängig.

2.15.a): $\exists w \in B$:

$V = \langle B \rangle_K = \langle B \setminus \{w\} \rangle$ Widerspruch!

B ist linear unabhängig, also Basis.

(1) \Rightarrow (3)

Angenommen: $\exists w \in B$ mit $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K = V = \langle B \rangle_K$

2.15.a): B ist linear abhängig. Widerspruch!

2.23 Definition

V K-VR.

- (a) Ist V endlich erzeugt, B ist Basis von V, $|B| = n$, so hat V Dimension n,
 $\dim_K(V) = n$ (oder einfach $\dim(V) = n$)
 (V heißt endlich-dimensional)

- (b) Ist V nicht endlich erzeugt, so heißt V unendlich-dimensional.

(Also: endlich erzeugt = endlich-dimensional)

2.24 Korollar

V K-VR, $\dim_K(V) = n$, $B \subseteq V$, $|B| = n$.

- (a) Ist B linear unabhängig, dann ist B Basis.
 (b) Ist $\langle B \rangle_K = V$, dann ist B Basis.

2.24.1 Beweis

Folgt aus 2.22

2.25 Beispiel

- (a) $\dim_K(K^n) = n$, da e_1, \dots, e_n Basis.

- (b) $V = \mathbb{R}^4$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

u_1, u_2 sind linear unabhängig.

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{u_1, u_2\}$ Basis von U , $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$
 Ergänze u_1, u_2 zu Basis von $V = \mathbb{R}^4$:

1. Möglichkeit

e_1, e_2, e_3, e_4 kanonische Basis des \mathbb{R}^4

$$u_1 = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4$$

2.19: u_1, e_2, e_3, e_4 Basis von \mathbb{R}^4 .

$$u_2 = au_1 + be_2 + ce_3 + de_4$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \rightarrow c = 1$$

2.19: u_1, u_2, e_3, e_4 Basis von \mathbb{R}^4

2.25.1 2. Möglichkeit

2.15.c):

v_1, \dots, v_m linear unabhängig.

$v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle \rightarrow v_1, \dots, v_m, v$ linear unabhängig.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a + 2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_1 \notin U$ (1. Koord \neq 4. Koordinate)

2.15.c) u_1, u_2, e_1 linear unabhängig.

$\langle u_1, u_2, e_1 \rangle = ?$

$$u_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a + c \\ 2a + 2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_2 \notin U$

2.15.c) u_1, u_2, e_1, e_2 linear unabhängig.

2.24: $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$ Basis von \mathbb{R}^4

2.26 Satz

V K-VR, $\dim_K(V) = n$.

(a) Ist U Unterraum von V , so ist $\dim_K(U) \leq n$.

Ist $\dim_K(U) = n$, so ist $U = V$.

(b) (Dimensionsformel)

U, W Unterräume von V , so gilt:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

A, B endl. Mengen:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

2.26.1 Beweis

(a) ergänze Basis von U zu Basis von V . (2.21.c))

(b) Basis von $U \cap W \rightarrow$ (ergänze zu) Basis von U
(WHK 9.23)

2.27 Definition

V K -VR, $\dim_K(V) = n$.

$B = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V .

Jedes $v \in V$ hat eindeutige Darstellung $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$
 $a_i \in K$. (2.15.b))

(a_1, \dots, a_n) (in dieser Anordnung) heißen Koordinaten von v bezüglich B .

Insbesondere v_i hat Koordinaten $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 an i -ter Stelle)

2.28 Beispiel

(a) $V = K^n$, $(e_1, \dots, e_n) = B$ kanonische Basis

Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ bezüglich B : (a_1, \dots, a_n) Kartesische Koordinaten

(b) $V = \mathbb{Q}^3$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

B ist geordnete Basis von V (nachprüfen).

Koordinaten von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich B :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$a_3 = -\frac{2}{5}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}a_3 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$a_1 = 1 - a_2 = \frac{1}{5}$$

Koordinaten von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich B: $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$

\mathbb{R}^2 : 1-dim. Unterräume (Geraden durch σ), 0-dim: $\{\sigma\}$

0-dim. affiner Unterräume $\{v\}, v \in V$

2.29 Definition

V K-VR, U Unterraum von V , $w \in V$

Dann heißt $w + U := \{w + u : u \in U\}$ affiner Unterraum von V .

($w + U$ ist im Allgemeinen kein Untervektorraum)

$$\dim(w + U) := \dim(U)$$

2.30 Satz

V K-VR, U, W Unterräume von V , $w \in V, v_1, v_2 \in V$

- (a) $w + U$ ist Unterraum (1) $\Leftrightarrow w \in U$ (2) $\Leftrightarrow w + U = U$ (3)
- (b) Ist $v \in w + U$, so ist $v + U = w + U$
- (c) Sind $v_1 + U, v_2 + W$ affine Unterräume, so ist entweder $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = \emptyset$ oder es existiert $v \in V$ mit $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = v + (U \cap W)$ (affiner Unterraum)

2.30.1 Beweis

(a) (1) \rightarrow (2)

$$w + U \text{ Unterraum} \Rightarrow \sigma \in w + U$$

$$\Rightarrow \exists u \in U \text{ mit } w + u = \sigma$$

$$\Rightarrow w = -u \in U$$

(2) \rightarrow (3)

$$w \in U, w + U \subseteq U \text{ (da } U \text{ Unterraum)}$$

$$\text{Sei } u \in U. \text{ Dann } u - w \in U, u = w + (u - w) \in w + U$$

$$w + u = U$$

(3) \rightarrow (1)

✓

(b) $v \in w + U, v = w + u$ für ein $u \in U$.

$$v + U = w + \underbrace{u + U}_{=U} = w + U$$

(c) Angenommen: $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) \neq \emptyset$

Sei $v \in (v_1 + U) \cap (v_2 + W)$

Nach b):

- $v + U = v_1 + U$
- $v + W = v_2 + W$

$$(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = (v + U) \cap (v + W) = v + (U \cap W)$$

2.31 Bemerkung

affine Unterräume:

Spezielle Rolle von σ ist aufgehoben.

Zur Beschreibung eines $x \in K^n$ kann man jeden Punkt p als “Nullpunkt” wählen und dann die Koordinaten von x bezüglich einer nach p “verschobenen” Basis berechnen.

p hat Koordinaten (p_1, \dots, p_n) bezüglich Basis v_1, \dots, v_n .

(1) Ursprüngliches Koordinatensystem: σ, v_1, \dots, v_n .

(2) Neues Koordinatensystem: $p, v_1 + p, \dots, v_n + p$.

x hat Koordinaten (a_1, \dots, a_n) bezüglich (1) \rightarrow Koordinaten von x bezüglich

(2) $= (a_1 + p, \dots, a_n + p)$

x hat Koordinaten (a'_1, \dots, a'_n) bezüglich (2) $\rightarrow x$ hat Koordinaten $(a'_1 + p, \dots, a'_n + p)$ bezüglich (1)

(Robotik)

2.32 Bemerkung

(a) In Mathe II:

$n \times m$ -Matrizen über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Das geht auch über beliebigen Körpern K .

Addition, Multiplikation mit Skalaren, Matrizenmultiplikation werden analog definiert. Es gelten die gleichen Rechenregeln wie in Mathe II, 9.5

(b) In Mathe II wurden Matrizen verwendet zur Beschreibung von LGS.

Analog: LGS über beliebigen Körpern K . Gauß-Algorithmus funktioniert analog.

$(a_1, \dots, a_m), a_1 \neq 0$

$\rightarrow (1, a_2 \cdot a_1^{-1}, \dots)$ (Multiplikation der Zeile mit a_1^{-1}) (K Körper!)

2.33 Satz

- (a) Die Menge der Lösungen eines homogenen LGS

$$A \cdot x = 0$$

($A \in M_{n,m}(K)$, $x \in K^m$, 0 ist Nullvektor in K^n)
bildet Untervektorraum von K^m .

- (b) Ist das inhomogene LGS

$$A \cdot x = b$$

(A, x wie oben, $b \in K^n$)

lösbar und ist $x_0 \in K^m$ eine spezielle Lösung (d.h. $A \cdot x_0 = b$), so erhält man alle Lösungen von $A \cdot x = b$ durch

$$\{x_0 + y : Ay = 0\}$$

Ist U der Lösungsraum von $A \cdot x = 0$, so ist die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ gerade der affine Unterraum $x_0 + U$ von K^m

2.33.1 Beweis

- (a) Folgt aus Rechenregeln für Matrizen

$x_1, x_2 \in K^m$ Lösungen von

$$A \cdot x = 0$$

$$A \cdot (x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$$

$\rightarrow x_1 + x_2$ auch Lösung.

$a \in K$.

$$A \cdot (a \cdot x_1) = a \cdot (Ax_1) = a \cdot 0 = 0$$

$\rightarrow a \cdot x_1$ Lösung.

Null-Lösung existiert immer.

- (b) $A \cdot x_0 = b$. Sei $y \in K^m$ mit $Ay = 0$.

$$A \cdot (x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$$

$\rightarrow x_0 + y$ ist Lösung von $Ax = b$.

Zeige: Jede Lösung von $Ax = b$ ist von der Form $x_0 + y$ für ein y mit $Ay = 0$.

Sei x Lösung von $Ax = b$.

$$x = x_0 + (x - x_0)$$

$$A \cdot (x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0 \quad \checkmark$$

2.34 Beispiel

Gegeben LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 0x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

über \mathbb{Q} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

x_3, x_4 frei wählbar.

$$x_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4, \quad x_1 = \dots$$

Zugehöriges homogenes System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge = Unterraum.

Basis des Lösungsraums:

Setze die frei wählbaren x_4, x_3 :

$$\bullet \quad x_4 = 1, x_3 = 0 \rightarrow \text{Lösung} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad x_4 = 0, x_3 = 1 \rightarrow \text{Lösung} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jede Lösung } d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Lösungsraum von zugehörigen homogenen LGS:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

affiner Lösungsraum des inhomogenen LGS:

Spezielle Lösung $x_4 = x_4 = 0, x_2 = -\frac{1}{3}, x_1 = \frac{1}{3}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Lineare Abbildungen

3.1 Definition

V, W K -VR

- (a) $\alpha : V \rightarrow W$ heißt (K-)lineare Abbildung (oder Vektorraum-Homomorphismus), falls:

- (1) $\alpha(u+v) = \alpha(u) + \alpha(v)$, für alle $u, v \in V$. (Additivität)
- (2) $\alpha(kv) = k \cdot \alpha(v)$, für alle $k \in K, v \in V$. (Homogenität)

3.2 Bemerkung

$\alpha : V \rightarrow W$ lineare Abbildung.

- (a) $\alpha(\sigma) = \sigma$
- (b) $\alpha(\sum_{i=1}^n k_i v_i) = \sum_{i=1}^n k_i \alpha(v_i)$

3.2.1 Beweis

- (a) $\alpha(\sigma) = \alpha(\sigma + \sigma) = \alpha(\sigma) + \alpha(\sigma) \rightarrow \alpha(\sigma) = 0$
- (b) Definition + Induktion nach n .

3.3 Beispiel

- (a) Nullabbildung $\alpha : V \rightarrow W$
 $\alpha(v) = 0$ für alle $v \in V$

- (b) $c \in K$.
 $\alpha : V \rightarrow V, \alpha(v) = c \cdot v$
lineare Abbildung.
 $c = 1 : \alpha = id_v$

- (c) $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$ linear.

Spiegelung an der $\{x_1, x_2\}$ -Ebene in \mathbb{R}^3

$$(d) \quad \alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 \end{cases} \quad \text{nicht linear.}$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + y_1)^2 = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 \neq x_1^2 + y_1^2$$

3.4 Satz

Sei $A \in M_{m,n}(K)$

Definiere $\alpha : K^n \rightarrow K^m$ (Spaltenvektoren) durch $\alpha(x) = \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{x}_{n \times 1} \in K^m$.

Dann ist α lineare Abbildung.

3.4.1 Beweis

Folgt aus Rechenregeln für Matrizenmultiplikation:

- $\alpha(x + y) = A \cdot (x + y) = Ax + Ay = \alpha(x) + \alpha(y) \quad \checkmark$
- $\alpha(k \cdot x) = A(k \cdot x) = k \cdot (Ax) = k\alpha(x) \quad \checkmark$

Beispiel aus 3.3 a) - c)

- $V = K^n$, Nullabbildung $K^n \rightarrow K^m$

Von der Form in 3.4 mit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ Nullmatrix

- $\alpha : \begin{cases} K^n \rightarrow K^n \\ x \mapsto c \cdot x \end{cases}, (c \in K)$

3.4 mit $A = \begin{pmatrix} c & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c \end{pmatrix}$

- Spiegelung aus 3.3.c)

3.4 mit $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Später: Alle linearen Abbildungen $K^n \rightarrow K^m$ sind von der Form 3.4

3.5 Satz

U, V, W K -VR:

- (a) $\alpha, \beta : V \rightarrow W$ linear, so auch $\alpha + \beta$ (definiert durch $(\alpha + \beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v)$ f.a. $v \in V$), und $k \cdot \alpha$ (definiert durch $(k \cdot \alpha)(v) := k \cdot \alpha(v)$ f.a. $v \in V$) linear von V nach W .
- (b) $\alpha : V \rightarrow W, \gamma : W \rightarrow U$ linear, so auch $\gamma \circ \alpha : V \rightarrow U$ lineare Abbildung.

3.5.1 Beweis

Blatt 5.

3.6 Satz

$\alpha : V \rightarrow W$ lineare Abbildung.

- (a) Ist U Unterraum von V , so ist $\alpha(U) := \{\alpha(u) : u \in U\}$ Unterraum von W .
Insbesondere ist $\alpha(V)$, Bild von α , Unterraum von W .
- (b) Ist U endlich-dimensional, so auch $\alpha(U)$ und es gilt $\dim(\alpha(U)) \leq \dim(U)$

3.6.1 Beweis

- (a) $\alpha(u_1), \alpha(u_2) \in \alpha(U)$, d.h. $u_1, u_2 \in U$, so $\alpha(u_1) + \alpha(u_2) = \alpha(\underbrace{u_1 + u_2}_{\in U}) \in \alpha(U)$

$$\alpha(U)$$

$$k \in K$$

$$k \cdot \alpha(u_1) = \alpha(k \cdot u_1) \in \alpha(U)$$

- (b) Sei u_1, \dots, u_k Basis von U .

$$u \in U, u = \sum_{i=1}^k c_i u_i, c_i \in K$$

$$\alpha(u) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha(u_i)$$

$$\text{Also } \alpha(u) = \langle \alpha(u_1), \dots, \alpha(u_k) \rangle_K$$

Nach 2.13:

$$\{\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_k)\} \text{ enthält Basis von } \alpha(U).$$

$$\dim(\alpha(U)) \leq k = \dim(U)$$

3.7 Definition

V, W K -VR, V endlich dimensional, $\alpha : V \rightarrow W$ lineare Abbildung.

Dann $\dim(\alpha(V)) =: \text{rg}(\alpha)$ (Rang von α)

3.8 Satz

V, W K-VR, $\alpha : V \rightarrow W$ lineare Abbildung.

- (a) $\ker(\alpha) := \{v \in V : \alpha(v) = \sigma\}$, Kern von α , ist Unterraum von V .
- (b) α injektiv $\Leftrightarrow \ker(\alpha) = \{\sigma\}$
- (c) Ist α bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $\alpha^{-1} : W \rightarrow V$ bijektiv und linear.

3.8.1 Beweis

- (a) $v_1, v_2 \in \ker(\alpha)$
 $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2) = \sigma + \sigma = \sigma$
 Also: $v_1 + v_2 \in \ker(\alpha)$
 $\alpha(k \cdot v_1) = k \cdot \alpha(v_1) = k \cdot \sigma = \sigma$
 Also: $k \cdot v_1 \in \ker(\alpha)$
- (b) \Rightarrow : \checkmark , denn falls $\sigma \neq v \in \ker(\alpha)$, so $\alpha(v) = \sigma = \alpha(\sigma) \rightarrow \alpha$ nicht injektiv.
 Widerspruch!
 \Leftarrow : Angenommen $v_1, v_2 \in V$ mit $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$.
 Zu zeigen $v_1 = v_2$.
 $\sigma = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_1 - v_2)$
 $\rightarrow v_1 - v_2 = \sigma, v_1 = v_2$
- (c) Zu zeigen: α^{-1} ist linear
 Seien $w_1, w_2 \in W$.
 Zeige: $\alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(w_1) + \alpha^{-1}(w_2)$
 α bijektiv \rightarrow ex. $v_1, v_2 \in V$ mit $\alpha(v_1) = w_1, \alpha(v_2) = w_2$.
 $v_1 = \alpha^{-1}(w_1), v_2 = \alpha^{-1}(w_2)$
 $\alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(\alpha(v_1) + \alpha(v_2)) = \alpha^{-1}(\alpha(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 =$
 $\alpha^{-1}(w_1) + \alpha^{-1}(w_2) \checkmark$

Homogenität analog.

3.9 Beispiel

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

ist lineare Abbildung, da:

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bild von α wird erzeugt $\alpha(e_1), \alpha(e_2), \alpha(e_3)$ lineare abhängig.

$$\alpha(\mathbb{R}^3) = \left\langle \underbrace{\alpha(e_1), \alpha(e_2)}_{\text{lin. unabhängig}} \right\rangle$$

$$\text{rg}(\alpha) = 2$$

$U = \langle e_2, e_3 \rangle$ 2-dim. Unterraum von \mathbb{R}^3 2-dim. Unterraum von \mathbb{R}^3 .

$$\alpha(U) = \langle \alpha(e_2) \rangle = \langle e_3 \rangle \text{ 1-dim.}$$

$$\ker(\alpha) = ?$$

$$\text{Suche alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{LGS: } x_1 = 0, 2x_1 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\ker(\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2c \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ 1-dim.}$$

3.10 Satz

V, W, K -VR, $\dim(V) = n$.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ sei Basis von V , $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig (nicht notwendigerweise verschieden).

Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\alpha : V \rightarrow W$ mit $\alpha(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$, nämlich:

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) := \sum_{i=1}^n c_i w_i \quad (*)$$

Also: Kennt man die Bilder einer Basis, so kennt man die lineare Abbildung vollständig.

3.10.1 Beweis

Die in $(*)$ definierte Abbildung α ist linear und es gilt $\alpha(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$ (Nachrechnen)

α eindeutig.

Angenommen : $\beta : V \rightarrow W$ linear mit $\beta(v_i) = w_i$, so gilt:

$$\begin{aligned} \beta\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) &= \sum_{i=1}^n c_i \beta(v_i) = \sum_{i=1}^n c_i w_i = \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) \\ &\rightarrow \alpha = \beta \end{aligned}$$

Beispiel

$$V = W = \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = ?$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -51 \\ 9 \end{pmatrix} \checkmark$$

3.11 Beispiel

$V = \mathbb{R}^2$, $\alpha : V \rightarrow V$. Drehung um Winkel φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$, um Nullpunkt (entgegen Uhrzeigersinn). α ist lineare Abbildung.

$$\alpha(e_1) = \alpha\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\alpha(e_2) = \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

3.10

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(x) = x_1 \cdot \alpha(e_1) + x_2 \cdot \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos(\varphi) - x_2 \cdot \sin(\varphi) \\ x_1 \cdot \sin(\varphi) + x_2 \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3.12 Satz

$\alpha : V \rightarrow W$ lin. Abbildung

$\dim(V) = n$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V .

(a) α injektiv $\Leftrightarrow \{\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)\}$ ist linear unabhängig.

(b) α surjektiv $\Leftrightarrow \alpha$ bijektiv $\Leftrightarrow \{\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)\}$ Basis von W .

Beweis

(a) \Rightarrow :

Zeige: $\sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) = \sigma \rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$.

$$\sigma = \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i \in \ker(\alpha) \quad \underbrace{\quad}_{\alpha \text{ injektiv}} \quad \{\sigma\}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n c_i v_i = \sigma \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0 \quad (v_1, \dots, v_n \text{ linear unabhängig})$$

\Leftrightarrow :

$$\text{Zeige: } \ker(\alpha) = \{\sigma\}$$

$$\text{Angenommen: } \sum_{i=1}^n c_i v_i \in \ker(\alpha)$$

$$\sigma = \alpha(\underbrace{\sum_{i=1}^n c_i v_i}_{\alpha \text{ lin.}}) = \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) \Rightarrow (\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n) \text{ linear un-}$$

abhängig.)

$$\Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i v_i = \sigma \quad \checkmark$$

$$(b) \quad \alpha(V) = \langle \alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n) \rangle$$

Behauptung folgt.

$$(c) \text{ Folgt aus (a) und (b)}$$

3.13 Korollar

Seien V, W K -VR, $\dim(V) = \dim(W)$. Dann sind V und W isomorph.

3.13.1 Beweis

Sei v_1, \dots, v_n Basis von V , w_1, \dots, w_n Basis von W .

Nach 3.10 existiert genau eine lin. Abbildung $\alpha : V \rightarrow W$ mit $\alpha(v_i) = w_i$.

Nach 3.12c) ist α bijektiv,

$$V \cong W$$

3.14 Korollar

V n -dim. VR über K , $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete basis von V . Dann ist die Abb.

$$K_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V \rightarrow K^n \text{ (Zeilenvektoren)} \\ \sum_{i=1}^n c_i v_i \mapsto (c_1, \dots, c_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

(Koordinatenabbildung bezüglich \mathcal{B}) ein Isomorphismus. Das heißt $V \cong K^n$.

3.14.1 Beweis

$$K_{\mathcal{B}}(v_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

v_i werden auf die kanonische Basis des K^n abgebildet.

$K_{\mathcal{B}}$ ist Isomorph.

3.15 Satz (Dimensionsformel)

V endlich dim. K -VR, $\alpha : V \rightarrow W$ lin. Abbildung.

Dann:

$$\dim(V) = \operatorname{rg}(\alpha) + \dim(\ker(\alpha)) = \dim(\alpha(V)) + \dim(\ker(\alpha))$$

3.15.1 Beweis

Sei u_1, \dots, u_k Basis von $\ker(\alpha)$.

Basisergänzungssatz (2.21.c). Ergänze zu Basis $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ von V .

Sei $U = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle_K$ Unterraum von V , $\ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}$:

Angenommen: $v \in \ker(\alpha) \cap U$

$$v = \sum_{i=1}^k c_i u_i = \sum_{i=k+1}^n c_i u_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k c_i u_i + \sum_{i=k+1}^n (-c_i) u_i = \sigma$$

$$\Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0, v = \sigma$$

$\ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}$, also $\alpha|_U$ ist injektiv, d.h. $\dim(U) = \dim(\alpha(U))$

$$\alpha(V) = \alpha(U)$$

$$v \in V, v = \sum_{i=1}^k c_i u_i + \sum_{i=k+1}^n c_i u_i$$

$$\alpha(v) = \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i \alpha(u_i)}_0 + \sum_{i=k+1}^n c_i \alpha(u_i) \in \alpha(U)$$

$$V = \ker(\alpha) + U$$

$$\dim(V) = \dim(\ker(\alpha)) + \dim(U) - \underbrace{\dim(\ker(\alpha) \cap U)}_{=0}$$

$$= \dim(\ker(\alpha)) + \dim(\alpha(U))$$

$$= \dim(\ker(\alpha)) + \dim(\alpha(v))$$

$$= \dim(\ker(\alpha)) + \operatorname{rg}(\alpha)$$

3.16 Korollar

V, W endlich-dimensional K-VR mit $\dim(V) = \dim(W)$, $\alpha : V \rightarrow W$ linear.

Dann gilt:

α ist injektiv $\Leftrightarrow \alpha$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \alpha$ ist bijektiv

3.16.1 Beweis

α ist surjektiv $\Leftrightarrow \alpha(v) = w \Leftrightarrow \dim(\alpha(V)) = \dim(W) = \dim(V) \Leftrightarrow \dim(\ker(\alpha))$

$= 0 \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \{\sigma\} \Leftrightarrow \alpha$ ist injektiv.

Der Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme

4.1 Definition

Der Zeilenrang einer Matrix A über Körper K ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen in A . Das heißt sind z_1, \dots, z_m die Zeilen von A , so ist Zeilenrang von $A = \dim(\langle z_1, \dots, z_m \rangle)$

Analog: Spaltenrang

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ Spaltenrang von $A = 2$, Zeilenrang $z_1 + 2z_3 - 2z_2 = 0$,
Zeilenrang von $A = 2$.

4.2 Satz

Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der Zeilenrang einer Matrix nicht. (Analog: Spaltenumf. / Spaltenrang)

4.2.1 Beweis

$$\begin{aligned} & \langle z_1, \dots, z_m \rangle \\ &= \langle z_1, \dots, az_2, \dots, z_m \rangle, a \neq 0 \\ & \langle z_1, \dots, z_m \rangle = \langle z_1, \dots, z_i + az_j, \dots, z_m \rangle, i \neq j \end{aligned}$$

4.3 Bemerkung

Zeilenrangbest. von A :

Bringe A mit Gauß auf Zeilenstufenform (ändert Zeilenrang nicht)

Zeilenrang = Anzahl der von Nullzeile verschiedenen Zeilen.

4.4 Korollar

Sei $A \cdot x = b$ ein LGS über K , $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $x \in K^n$, $b \in K^m$ (m Gleichungen, n Unbekannte)

- (a) $A \cdot x = b$ ist genau dann lösbar, wenn Zeilenrang von A = Zeilenrang von $(A|b)$
- (b) $A \cdot x = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn:
Zeilenrang A = Zeilenrang von $(A|b) = n$ (= Anzahl der Unbekannten)
- (c) Dimension des Lösungsraums von $A \cdot x = \sigma = n - \text{Zeilenrang von } A$

4.5 Satz

Sei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\alpha : \begin{cases} K^n \rightarrow K^m \\ x \mapsto Ax \end{cases}$
 α ist lineare Abbildung und es gibt:

$$rg(\alpha) = \text{Spaltenrang von } A$$

4.5.1 Beweis

$\alpha(K^n) = \langle \alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n) \rangle$, e_1, \dots, e_n kan. Basis von K^n

$$\alpha(e_i) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte von } A =: s_i.$$

$rg(\alpha) = \dim(\alpha(K^n)) = \dim(\langle \alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n) \rangle) = \dim(\langle s_1, \dots, s_n \rangle) = \text{Spaltenrang von } A.$

4.6 Satz und Definition

Sei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Dann ist Zeilenrang von A = Spaltenrang von A . Diese gemeinsame Zahl heißt Rang von A, $rg(A)$.

(Also: $\alpha : \begin{cases} K^n \rightarrow K^m \\ x \mapsto Ax \end{cases}$, so $rg(\alpha) = rg(A)$)

4.6.1 Beweis

Betrachte homogenes LGS

$$Ax = 0, (*)$$

Dimension des Lösungsraums von $(*)$ = Dimension von $\ker(\alpha)$, α in 4.5.

3.15: $\dim(\ker(\alpha)) = n - rg(\alpha) \stackrel{4.5}{=} n - \text{Spaltenrang von } A.$

4.4: \dim Lösungsraum von $Ax = 0 = n - \text{Zeilenrang von } A$

Damit folgt die Behauptung.

4.7 Korollar

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. $rg(A) = rg(A^t)$

Beweis: $rg(A)$ = Zeilenrang von A = Spaltenrang von $A^t = rg(A^t)$

4.8 Satz

Sei V endlich dimensionaler K -VR, \mathcal{B} geordnete Basis von V , $u_1, \dots, u_m \in V$ beliebig.

Seien $K_{\mathcal{B}}(u_i)$ die Koordinatenvektoren von u_i bezüglich \mathcal{B} (Zeilenvektoren).

Dann gilt: $\dim(\langle u_1, \dots, u_m \rangle) = rg \begin{pmatrix} K_{\mathcal{B}}(u_1) \\ \dots \\ K_{\mathcal{B}}(u_m) \end{pmatrix}$ ($m \times n$ - Matrix, $n = \dim(V)$)

Lässt sich durch Gauß-Algorithmus bestimmen.

4.8.1 Beweis

Sei $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$. $K_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n$ wie in 3.14. $K_{\mathcal{B}}$ Isomorphismus.

$\dim(U) = \dim(K_{\mathcal{B}}(U)) = \dim(\langle K_{\mathcal{B}}(u_1), \dots, K_{\mathcal{B}}(u_m) \rangle) =$ Zeilenrang von

$$\begin{pmatrix} K_{\mathcal{B}}(u_1) \\ \dots \\ K_{\mathcal{B}}(u_m) \end{pmatrix}$$

4.9 Beispiel

V \mathbb{R} -VR aller Polynome vom Grad ≤ 3 . $\dim(V) = 4$, Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$

$$U = \langle 1 + 6x^2 + x^3, 2x - 2x^2 + 3x^3, 3x + x^2, 2x + 15x^2 - x^3 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$\dim(U) = ?$

Bilde gemäß 4.8 die Matrix der Koordinatenvektoren der u_i bezüglich \mathcal{B} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 15 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang der Matrix = 3

$\dim(U) = 3$

Matrizen und lineare Abbildungen

5.1 Definition

Seien V, W K-VR, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ geordnete Basen von V bzw. W . Sei $\alpha : V \rightarrow W$ lineare Abbildung.

Nach 3.10 ist α eindeutig bestimmt durch $\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)$. ($v = \sum_{i=1}^n b_i v_i \rightarrow \alpha(v) = \sum_{i=1}^n b_i \alpha(v_i)$)

Stelle $\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)$ jeweils als Linearkombination von w_1, \dots, w_m dar:

$$\begin{aligned}\alpha(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \\ \alpha(v_2) &= a_{21}w_1 + \dots + a_{m2}w_m \\ &\dots \\ \alpha(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m\end{aligned}$$

(Ordnung der Indizes beachten!)

Dann heißt die $m \times n$ - Matrix:

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

die Darstellungsmatrix von α bezüglich \mathcal{B} und \mathcal{C} . (In den Spalten stehen die Koordinaten von $\alpha(v_i)$ bezüglich \mathcal{C})

(Abkürzende Schreibweise: A_{α} , falls \mathcal{B} und \mathcal{C} aus Kontext klar)

Falls $V = W$ und $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, so

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} := A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$$

5.2 Bemerkung

(a) Bei Kenntnis von \mathcal{B} und \mathcal{C} ist α durch $A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ eindeutig bestimmt:

Sei $v \in V$. $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$.

$$\begin{aligned}
\alpha(v) &= \sum_{i=1}^n b_i \alpha(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^n b_i (a_{1i} w_1 + \dots + a_{mi} w_m) \\
&= \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} w_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} b_i \right)}_{\text{Koord. von } \alpha(v) \text{ bezgl. } \mathcal{C}} \cdot w_j
\end{aligned}$$

Und jede $m \times n$ - Matrix A bestimmt lin. Abbildung $\alpha : V \rightarrow W$ mit $A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$

- (b) Beachte: Dieselbe lin. Abb. hat im Allgemeinen bezüglich anderer Wahl der Basen eine andere Darstellungsmatrix

5.3 Beispiel

- (a) $V = W = \mathbb{R}^2$, α Drehung um 0 mit Winkel φ (entgegen Uhrzeigersinn).

Nach 3.11:

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_1, e_2)$$

$$\alpha(e_1) = \cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2$$

$$\alpha(e_2) = -\sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2$$

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

- (b) Nullabbildung

$$\beta : \begin{cases} V \rightarrow W \\ v \mapsto \sigma \text{ (Nullvektor)} \end{cases}$$

hat bezüglich allen Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} Nullmatrix als Darstellungsmatrix

- (c) V, \mathcal{B}, id_v

$$A_{id_v}^{\mathcal{B}} = E_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- (d) $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2), \mathcal{C} = (e_2, e_1)$

$$A_{id_v}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2), \sigma$ Spiegelung an $\langle e_1 \rangle$, d.h. $\sigma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

$$A_{\sigma}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ Basis.

$$\sigma(e_1 + e_2) = e_1 - e_2$$

$$\sigma(e_1 - e_2) = e_1 + e_2$$

$$A_{\sigma}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(e_1) = e_1 = a(e_1 + e_2) + b(e_1 - e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$$

$$-e_2 = \sigma(e_2) = c(e_1 + e_2) + d(e_1 - e_2) = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$$

$$A_{\sigma}^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5.4 Satz

$V, W, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha : V \rightarrow W$ linear.

$$k_{\mathcal{C}}(\alpha(V))^t = A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot k_{\mathcal{B}}(V)^t \quad (5.3)$$

5.4.1 Beweis

Folgt aus 5.2.a)

$$\begin{array}{ccc} \text{Basis } \mathcal{B} & & \text{Basis } \mathcal{C} \\ V & \xrightarrow{\alpha} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^n & \longrightarrow & K^m \end{array}$$

5.5 Beispiel

$V, W \mathbb{R}$ -VR, $\dim(V) = 4, \dim(W) = 3, \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_4), \mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3), \alpha : V \rightarrow W$.

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V = 5v_1 - 6v_2 + 7v_3 - 2v_4$$

$$\alpha(V) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$5.4: \alpha(V) = 7w_1 + w_2 - w_3$$

5.6 Korollar

Jede lineare Abbildung $K^n \rightarrow K^m$ ist von der Form $\alpha(x) = A \cdot x$ für ein $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Es ist $A = A_{\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, wobei \mathcal{B}, \mathcal{C} die kanonischen Basen von K^n bzw. K^m sind.

5.6.1 Beweis

$$x \in K^m, k_{\mathcal{B}}(x)^t = x, k_{\mathcal{C}}(\alpha(x))^t = \alpha(x)$$

Behauptung folgt aus 5.4

5.7 Satz

α, β lineare Abbildung $U \rightarrow V$, γ lin. Abbildung $V \rightarrow W$. $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ geordnete Basen von U, V, W .

$$(a) A_{\alpha+\beta}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A_{\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} + A_{\beta}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

$$A_{k \cdot \alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = k \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \quad (k \in K)$$

$$(b) A_{\gamma \circ \alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{D}} = A_{\gamma}^{\mathcal{C},\mathcal{D}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \quad (\text{Matrixmultiplikation}) \quad (\text{Reihenfolge beachten!})$$

5.7.1 Beweis

(a) Nachrechnen

$$(b) \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_l)$$

$$\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m)$$

$$\mathcal{D} = (w_1, \dots, w_n)$$

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (a_{ij}) \quad m \times l \text{ - Matrix}$$

$$A_{\gamma}^{\mathcal{C},\mathcal{D}} = (b_{ij}) \quad n \times m \text{ - Matrix}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ \alpha)(u_i) &= \gamma(\alpha(u_i)) \\
&= \gamma\left(\sum_{j=1}^m a_{ji} \cdot v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^m a_{ji} \cdot \gamma(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^m a_{ji} \left(\sum_{k=1}^m b_{kj} w_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m b_{kj} \cdot a_{ji}\right)}_{\text{Koeff. (k,i)}} w_k
\end{aligned}$$

5.8 Beispiel

$$U = V = W = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = (e_1, e_2)$$

α Drehung um φ , β Drehung um ψ (jeweils um 0)

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$A_{\beta}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$\beta \circ \alpha$ Drehung um $\varphi + \psi$

$$A_{\beta \circ \alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Nach 5.7

$$A_{\beta \circ \alpha}^{\mathcal{B}} = A_{\beta}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) & -\sin(\varphi)\cos(\psi) - \cos(\varphi)\sin(\psi) \\ \cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi) & -\sin(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\varphi)\cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi), \text{ usw.}$$

(Additionstheoreme der Trigonometrie)

5.9 Definition

Sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ($n \times n$ - Matrix).

A heißt invertierbar, falls $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ existiert (Inverse, inverse Matrix zu A) mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n = \text{Einheitsmatrix } (*)$$

$((\mathcal{M}_n(K), \cdot))$ ist Monoid, neutrales Element E_n)

5.9.1 Bemerkung

Gilt $A \cdot A^{-1} = E_n$ so auch $A^{-1} \cdot A = E_n$ (und umgekehrt). (Folgt aus 5.10 und 3.16)

5.10 Korollar

$\dim_K(V) = n$, \mathcal{B} geord. Basis von V , $\alpha : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt:

$$\alpha \text{ invertierbar (d.h. bijektiv)} \Leftrightarrow A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \text{ invertierbar}$$

$$\text{Dann: } A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} = (A_{\alpha}^{\mathcal{B}})^{-1}$$

5.10.1 Beweis

\Rightarrow

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} \underbrace{=}_{5.7} A_{\alpha \circ \alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} = A_{id_V}^{\mathcal{B}} = E_n$$

Gegenrichtung analog.

\Leftarrow

Es existiert inverse Matrix B zu $A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$, d.h. $A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot B = B \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = E_n$

Dann $B = A_{\beta}^{\mathcal{B}}$ für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\beta : V \rightarrow V$ (5.2)

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\beta}^{\mathcal{B}} = A_{\beta}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = E_n$$

Damit folgt $\alpha \circ \beta = id_V$ Analog: $\beta \circ \alpha = id_V$ $\beta = \alpha^{-1}$

5.11 Satz

$A \in \mathcal{M}_n(K)$. A invertierbar $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$ (D.h. Zeilen | Spalten von A sind lin. unabhängig)

5.11.1 Beweis

Def. $\alpha : K^n \rightarrow K^n$ durch $\alpha(x) = A \cdot x$.

$A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$ bezüglich der kanonischen Basis \mathcal{B} von K^n

A invertierbar $\underbrace{\Leftrightarrow}_{5.10} \alpha$ invertierbar $\underbrace{\Leftrightarrow}_{3.16} \alpha$ surjektiv / injektiv $\Leftrightarrow \text{rg}(\alpha) = n \Leftrightarrow$

$$\text{rg}(A) = n$$

5.12 Lemma

$A \in \mathcal{B}_{m,n}(K)$, $X \in \mathcal{M}_{n,l}(K)$, $C = AX \in \mathcal{M}_{m,l}(K)$

Wendet man dieselben elementaren Zeilenumformungen auf A und C an (beachte: A und C haben beide m Zeilen) so gilt für die entstehenden Matrizen A' , C'

$$C' = A' \cdot X$$

5.13 Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix (Gauß-Jordan-Verfahren)

A invertierbare $n \times n$ - Matrix. Gesucht A^{-1} mit:

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

Mann kann A durch elementare Zeilenumformungen auf die Form E_n bringen.
Analog zu Gauß-Algorithmus:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots \\ 0 & * & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & * & \dots \end{pmatrix}$$

$rg(A) = n$: In der zweiten Spalte findet man Eintrag $\neq 0$ unterhalb (einschließlich) der Diagonalen.

Erzeuge wie bei Gauß 1 in der Diagonale, unterhalb der Diagonale erzeuge Nullen und auch oberhalb.

So fortfahren (keine Vertauschung von Zeilen oberhalb der Diagonalen!).

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

Durch elementare Zeilenumformung entsteht aus A die Einheitsmatrix E_n .
Dieselben zeilenumformungen angewandt auf E_n liefert Matrix A' .

$$5.12: E_n \cdot A^{-1} = A'$$

$$(A|E_n) \longrightarrow (E_n|A^{-1})$$

(Verf. zeigt gleichzeitig, ob A invertierbar ist)

5.14 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

5.15 Bemerkung

Sei $Ax = b$ LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten (d.h. A $n \times n$ - Matrix).

4.4.b: $Ax = b$ hat eindeutige Lösung, wenn $rg(A) = n$. Dann ex. A^{-1} und es gilt:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

5.16 Definition

V K-VR mit geordneten Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$

$$v'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i, j = 1, \dots, n \quad (5.7)$$

(Reihenfolge der Indizes beachten!)

$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = (s_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ heißt Basiswechselmatrix

Spalten: Koordinaten der Basisvektoren aus \mathcal{B}' bzgl. \mathcal{B} .

Analog. $v_k = \sum_{j=1}^n t_{jk} v'_j$

$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = (t_{jk})_{j,k=1, \dots, n}$

5.17 Satz

Bezeichnung wie in 5.16

$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ist invertierbar und $S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$, d.h. $S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \cdot S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = E_n$

5.17.1 Beweis

$$\begin{aligned} V_k &= \sum_{j=1}^n t_{jk} v'_j \\ &= \sum_{j=1}^n t_{jk} \left(\sum_{i=1}^n s_{ij} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} t_{jk} \right) v_i \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot t_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = E_n$$

5.18 Satz

$V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wie oben, $v \in V$.

$$K_{\mathcal{B}'}(v)^t = S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \cdot K_{\mathcal{B}}(v)^t$$

5.18.1 Beweis

Analog zu 5.4 (5.2.a)

5.19 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2), \mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2) = ((1, 1)^t, (1, -2)^t)$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$$

5.14:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -3 & | & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in K_{\mathcal{B}}(v)^t$$

$$K_{\mathcal{B}}(v) = ?$$

$$K_{\mathcal{B}'}(v)^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

5.20 Satz

$\alpha : V \rightarrow W$ linear, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen von V , $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ geordnete Basen W .
Dann:

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

5.20.1 Beweis:

Sei $v \in V$.

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} \cdot K_{\mathcal{B}'}(v) &= K_{\mathcal{C}'}(\alpha(v))^t \\ &= S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \cdot K_{\mathcal{C}}(\alpha(v))^t \\ &= S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot K_{\mathcal{B}}(v)^t \\ &= S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot K_{\mathcal{B}}(v)^t \end{aligned}$$

Wenn v alle Vektoren aus V durchläuft, durchläuft $K_{\mathcal{B}}(v)^t$ alle Vektoren aus K^n ($n = \dim(V)$). Daraus folgt Behauptung.

5.21 Korollar

$\alpha : V \rightarrow V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basis von V .

$S = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. Dann:

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = S^{-1} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}'} \cdot S$$

5.21.1 Beweis

Folgt aus 5.20 und 5.17

(Bemerkung: Zwei $n \times n$ - Matrizen A, B heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix S gibt mit $B = S^{-1}AS$)

5.22 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2)$$

$$\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2)$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$\text{Sei } A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

α ist Spiegelung an e_1 - Achse

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\alpha(e_1 + e_2) = \frac{1}{3} \cdot (e_1 + e_2) + \frac{2}{3} \cdot (e_1 - 2e_2)$$

$$\alpha(e_1 - 2e_2) = \frac{4}{3} \cdot (e_1 + e_2) - \frac{1}{3} \cdot (e_1 - 2e_2)$$

Determinanten

$$\mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$$

6.1 Definition

$A \in \mathcal{M}_n(K), i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ ist die Matrix, die aus A entsteht, wenn man in A die i -te Zeile und j -te Spalte streicht.

6.1.1 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Definiere Determinante einer quadratischen Matrix rekursiv.

6.2 Laplacescher Entwicklungssatz

$\det: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K$ ist eine Abbildung, die Determinante, die folgendermaßen berechnet wird:

- (1) $\det((a)) := a$
- (2) $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Wähle irgendein $i \in \{1, \dots, n\}$.
 $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$
(Entwicklung nach der i -ten Zeile)
(Schachbrettmuster der Vorzeichen)
- (3) Alternativ:
Wähle $j \in \{1, \dots, n\}$
 $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$
(Entwicklung nach der j -ten Spalte)

6.2.1 Bemerkung

Wichtig: Egal nach welcher Zeile oder Spalte man entwickelt, es kommt immer dasselbe raus!

(Schwierigster Beweis in der elementaren Determinantentheorie (WHK 10.4))

6.3 Beispiel

$$(a) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \text{ (Entwicklung nach 1. Zeile)}$$

Entwicklung nach 2. Spalte: $-a_{12} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot a_{11}$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$$

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -24 - 0 - 9 \\ &= -33 \end{aligned}$$

Entwicklung nach der 2. Spalte:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= -33 \end{aligned}$$

Allgemeine Strategie: Verwende zur Determinantenberechnung eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen!

$$(c) \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \text{ (untere Dreiecksmatrix)}$$

Induktion nach n:

$n = 1$ ✓

$n-1 \rightarrow n$:

Entwicklung nach 1. Zeile

Insbesondere: $\det(E_n) = 1$

6.4 Korollar

$$\det(A) = \det(A^t)$$

6.5 Rechenregeln für Determinanten

Sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

- (a) Zeilen bzw. Spaltenvertauschung ändern das Vorzeichen der Determinante.
- (b) Addiert man das Vielfache einer Zeile / Spalte zu einer anderen Zeile / Spalte, so ändert sich die Determinante überhaupt nicht.
- (c) Multipliziert man eine Zeile / Spalte von A mit $a \in K$ so ändert sich $\det(A)$ um Faktor a .

Insbesondere:

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$\det(a \cdot A) = a^n \cdot \det(A)$$

- (d) $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(Determinantenmultiplikationssatz)

(Aber: Im Allgemeinen $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$)

6.6 Bemerkung

Strategie zur Det.berechnung:

Wende auf A elementare Zeilen / Spaltenumformungen an, um Dreiecksgestalt zu erhalten. Dann 6.3.c

(Buchführen über Vorzeichen!)

6.7 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underbrace{=}_{6.3.c)} -2
\end{aligned}$$

6.8 Satz

$A \in \mathcal{N}(K)$. Dann gilt:

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

In diesem Fall gilt:

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

$$[\Rightarrow: A \cdot A^{-1} = E_n, 1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})]$$

Andere Berechnungsmethode von A^{-1} mit Hilfe der Determinante.

6.9 Definition

$A \in \mathcal{M}_n(K)$. Die Adjunkte A^{ad} zu A ist $n \times n$ - Matrix über K:

$$A^{ad} := (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei $b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$ (Indizes beachten).

6.10 Satz

$A \in \mathcal{M}_n(K)$

$$(a) \quad A^{ad} \cdot A = A \cdot A^{ad} = \det(A) \cdot E_n$$

(b) Ist $\det(A) \neq 0$, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{ad}$$

6.11 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Angenommen:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

6.12 Demerkung

$\alpha : V \rightarrow V$ lin. Abbildung, V endl. dimensional. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V .

$$A_{\alpha}^{\text{mathcal{B}'}} = S^{-1} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot S$$

wobei $S = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ (5.21)

$$\begin{aligned} \det(A_{\alpha}^{\mathcal{B}'}) &= \det(S^{-1} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot S) \\ &= \det(S^{-1}) \cdot \det(A_{\alpha}^{\mathcal{B}}) \cdot \det(S) \\ &= \det(A_{\alpha}^{\mathcal{B}}) \cdot \underbrace{\det(S)^{-1} \cdot \det(S)}_1 \\ &= \det(A_{\alpha}^{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

Daher definiert man:

$$\det(\alpha) := \det(A_{\alpha}^{\mathcal{B}})$$

(unabhängig von der Wahl von \mathcal{B})

[Im Allgemeinen ist $\det(A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}) \neq \det(A_{\alpha}^{\mathcal{B}', \mathcal{C}'})$]

Eigenwerte

Problem: $\alpha : V \rightarrow V$ linear. Suche Basis \mathcal{B} von V bezüglich der $A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$ besonders einfache Gestalt hat.

Am besten wäre Dreiecksmatrix (Untere und Obere. Somit nur Diagonale $\neq 0$).

Dh. $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, so $\alpha(v_i) = a_i v_i$, $i = 1, \dots, n$

Das geht allerdings im Allgemeinen nicht.

7.1 Beispiel:

- (a) $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Spiegelung an der e_1 -Achse. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ - kanonische Basis.

$$A_{\sigma}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Diagonalmatrix)

- (b) Drehung ρ um 0 mit Winkel $k \cdot \pi$.

Kein Vektor $\neq \sigma$ wird auf ein Vielfaches von sich abgebildet.

Für keine Basis \mathcal{B} ist $A_{\rho}^{\mathcal{B}}$ Diagonalmatrix.

7.2 Definition

$\alpha : V \rightarrow V$ lineare Abbildung. $c \in K$ heißt Eigenwert von α , falls $v \in V, v \neq \sigma$, existiert mit

$$\alpha(v) = c \cdot v$$

Jeder solcher Vektor $v \neq \sigma$ heißt Eigenvektor von α zu dem Eigenwert c .

Die Menge aller Eigenvektoren zu c , zusammen mit dem Nullvektor, heißt Eigenraum von α zum Eigenwert c .

7.3 Bemerkung

$\alpha : V \rightarrow V$ linear, c sei ein Eigenwert von α .

Eigenraum von α zu $c = \ker(c \cdot id_v - \alpha)$, also Unterraum von V .

Insbesondere: 0 ist Eigenwert von $\alpha \Leftrightarrow \ker(\alpha) \neq \{\sigma\}$

7.3.1 Beweis

$$\alpha(v) = c \cdot v \Leftrightarrow c \cdot v - \alpha(v) = 0 \Leftrightarrow (c \cdot id_v - \alpha)(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(c \cdot id_v - \alpha)$$

7.4 Beispiel

(a) id_v hat nur Eigenwert 1, Eigenraum zu 1 ist V .

(b) Spiegelung aus 7.1.a):

1 ist Eigenwert

-1 ist Eigenwert

Eigenraum zu 1: $\langle e_1 \rangle$

Eigenraum zu -1: $\langle e_2 \rangle$

(c) Drehung um $\rho \neq k \cdot \pi$ hat keine Eigenwerte.

7.5 Definition

A $n \times n$ - Matrix über K .

Eigenwerte von A := Eigenwerte von $\alpha_A : \begin{cases} K^n \rightarrow K^n \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases}$

(d.h. $c \in K$ ist Eigenwert von A $\Leftrightarrow \exists x \neq 0 \in K^n : A \cdot x = c \cdot x$)

7.6 Satz

$\alpha : V \rightarrow V$ lin. Abbildung. Dann haben α und $A_\alpha^\mathcal{B}$ die gleichen Eigenwerte für jede Basis \mathcal{B} von V .

7.6.1 Beweis

Sei c Eigenwert von α , $v \neq 0$ mit $\alpha(v) = c \cdot v$.

$$\begin{aligned} A_\alpha^\mathcal{B} \cdot \mathcal{K}_\mathcal{B}(v)^t &= \mathcal{K}_\mathcal{B}(\alpha(v))^t \\ &= \mathcal{K}_\mathcal{B}(c \cdot v)^t \\ &= c \cdot \mathcal{K}_\mathcal{B}(v)^t \end{aligned}$$

Da $v \neq 0$ ist $\mathcal{K}_\mathcal{B}(v) \neq 0$.

Also ist c Eigenwert von $A_\alpha^\mathcal{B}$.

Umgekehrt: Sei $0 \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit $A \cdot x = c \cdot x$. (c ist Eigenwert von A).

Sei $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.
 $\mathcal{K}_\mathcal{B}(v)^t = x$.

Es folgt $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\alpha(v)) = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(c \cdot v)$.

Dann $\alpha(v) = c \cdot v$

c ist Eigenwert von α .

7.7 Satz

V n -dim. K -VR, \mathcal{B} Basis von V , $\alpha : V \rightarrow V$ linear, $A := A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$, $c \in K$.

Dann sind äquivalent:

- (1) c ist Eigenwert von α
- (2) $\ker(c \cdot id_v - \alpha) \neq \{\sigma\}$
- (3) $\det(c \cdot E_n - A) = 0$

7.7.1 Beweis

(1) \Leftrightarrow (2)

7.3

(2) \Leftrightarrow (3)

$$A_{c \cdot id_v - \alpha}^{\mathcal{B}} = c \cdot E_n - A$$

$$\alpha(v) = c \cdot v$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(c \cdot E_n - A) &= 0 \\ \Leftrightarrow c \cdot E_n - A &\text{ nicht invertierbar.} \\ \Leftrightarrow c \cdot id_v - \alpha &\text{ nicht invertierbar.} \\ \Leftrightarrow c \cdot id_v - \alpha &\text{ ist nicht injektiv} \\ \Leftrightarrow \ker(c \cdot id_v - \alpha) &\neq \{\sigma\} \end{aligned}$$

Wie berechnet man Eigenwerte einer lin. Abbildung und wie viele gibt es ?

Nach 7.7 muss man alle $c \in K$ bestimmen mit $\det(c \cdot E_n - A) = 0$. Betrachte Funktion:

$$f_A : \begin{cases} K \rightarrow K \\ t \mapsto \det(t \cdot E_n - A) \end{cases}$$

7.8 Satz

Die Funktion f_A ist Polynomfunktion vom Grad n , d.h.

$$\begin{aligned} f_A(t) &= \det(t \cdot E_n - A) \\ &= t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0 \end{aligned}$$

wobei $a_i \in K$ (unabhängig von t)

7.8.1 Beweis

Mit Entwicklungsformel. Machen wir hier nicht.

7.9 Definition

- (a) Das Polynom $f_A(t) = \det(t \cdot E_n - A) \in K[t]$ heißt charakteristisches Polynom von $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
- (b) $\alpha : V \rightarrow V$ linear, \mathcal{B} Basis von V , so

$$\begin{aligned} \det(t \cdot \text{id}_V - \alpha) &= \det(A_{t \cdot \text{id}_V - \alpha}^{\mathcal{B}}) \\ &= \det(t \cdot E_n - A_{\alpha}^{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

heißt charakteristisches Polynom von α (nach 6.12 unabhängig von \mathcal{B}).

7.10 Korollar und Definition

$\alpha : V \rightarrow V$ linear, $\dim(V) = n$.

- (a) c ist Eigenwert von $\alpha \Leftrightarrow c$ ist Nullstelle des char. Polynoms von α

Vielfachheit des Eigenwerts $c := \underline{\text{Vielfachheit}}$ von c als Nullstelle des char. Polynoms.

- (b) α hat höchstens n Eigenwerte (einschließlich Vielfachheit).

7.11 Beispiel

- (a) $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Spiegelung an $\langle e_1 \rangle$ - Achse
 $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ kan. Basis.

$$A := A_{\rho}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{char. Polynom : } \det(t \cdot E_2 - A) &= \det\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} = \\ &= (t-1) \cdot (t+1) \end{aligned}$$

Nullstellen 1, -1 alle Eigenwerte von ρ

- (b) $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

\mathcal{B} kanonische Basis.

char. Polynom von α :

$$\det(t \cdot E_n - A_\alpha^{\mathcal{B}}) = \det \begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix} = (t+1) \cdot (t+3) - 8 = t^2 + 4t - 5$$

$$t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5}$$

Eigenwerte von α : 1, -5

Eigenvektor zu 1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x = y$$

Eigenraum zu Eigenwert 1: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Eigenwert zu 5:

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y = -2x$$

Eigenraum zu EW-5:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B}' = ((1, 1)^t, (1, -2)^t)$$

$$A_\alpha^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(Diagonalmatrix)

(c) $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um 0.

\mathcal{B} kan. Basis.

$$A = A_\rho^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

char. Polynom:

$$f_A(t) = \det(t \cdot E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

Keine Nullstellen in \mathbb{R} , also hat ρ keine EW in \mathbb{R}

Fasst man ρ als Abbildung $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ auf, so gibt es EW i , $-i$.

Die zugehörigen Eigenräume sind:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

7.12 Korollar

$\alpha : V \rightarrow V$ linear. Falls Basis \mathcal{B} von V existiert mit $A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$ in Dreiecksgestalt, so sind die Diagonalelemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sämtliche Eigenwerte von α (mit Vielfachheit).

7.12.1 Beweis

$$\det(t \cdot E_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & \dots & 0 \\ 0 & t - a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (Dreiecksmatrix)} = (t - a_{11}) \cdot \dots \cdot (t - a_{nn})$$

7.13 Bemerkung

Über \mathcal{C} lässt sich für jede lineare Abbildung $\alpha : V \rightarrow V$ Basis \mathcal{B} finden, so dass $A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$ Dreiecksmatrix ist.

7.14 Satz

Seien c_1, \dots, c_r die paarweise verschiedenen Eigenwerte der lin. Abb. $\alpha : V \rightarrow V$. Seien v_1, \dots, v_r zugehörige Eigenvektoren. Dann sind v_1, \dots, v_r linear unabhängig.

7.14.1 Beweis

Induktion nach r .

$r = 1$: $v_1 \neq 0$ lin. unabhängig ✓

Behauptung sei richtig für $i - 1$.

Zu zeigen: Richtig für $i \leq r$.

v_1, \dots, v_{i-1} lin. unabhängig.

Angenommen: v_1, \dots, v_{i-1}, v_i lin. abhängig.

Dann: $v_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j v_j, a_j \in K (*)$

Mult. mit c_i :

$$c_i v_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_i a_j v_j \quad (1)$$

Andererseits: Wende α auf $(*)$ an.

$$c_i v_i = \alpha(v_i) = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \alpha(v_j) = \sum_{j=1}^{i-1} a_j c_j v_j \quad (2)$$

Subtr. (1) von (2):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{i-1} (a_j c_j - c_i a_j) v_j \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} a_j (c_j - c_i) v_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_j (c_j - c_i) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, i-1$$

Nach Voraus. ist $c_j - c_i \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, i-1$

$\Rightarrow a_j = 0$ für $j = 1, \dots, i-1$
 $\Rightarrow v_i = \sigma$ Widerspruch!

7.15 Definition

$\alpha : V \rightarrow V$ linear.

α heißt diagonalisierbar, falls V eine Basis \mathcal{B} aus Eigenvektoren von α besitzt, d.h.:

$A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$ ist Diagonalmatrix

7.16 Satz

$\dim_K(V) = n, \alpha : V \rightarrow V$ linear.

Hat α n verschiedene Eigenwerte, so ist α diagonalisierbar (Hinreichend, nicht notwendig, z.B. $\alpha = id_v$ EW 1 mit Vielfachheit n , diagonalisierbar).

7.17 Beispiel

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

α hat EW 1 mit Vielfachheit 2

α ist nicht diagonalisierbar, denn sonst ex. Basis \mathcal{B}' mit $A_{\alpha}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = id_v$ Widerspruch !

Also:

Zur Diagonalisierbarkeit reicht es nicht, dass α n Eigenwerte (mit Vielfachheit) besitzt.

7.18 Bemerkung

Sei $\alpha : V \rightarrow V$ linear, $\dim_K(V) = n$.

Besitze α n Eigenwerte (mit Vielfachheit), d.h. $\det(t \cdot E_n - A) = (t - c_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (t - c_r)^{m_r}$

Ist V_i Eigenraum von α zu c_i , so kann man zeigen:

$$\dim(V_i) \leq m_i$$

Es gilt: α ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \dim(V_i) = m_i, i = 1, \dots, r$

7.19 Definition

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ heißt diagonalisierbar, falls

$$\alpha_A : \begin{cases} K^n \rightarrow K^n \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases}$$

diagonalisierbar ist.

7.20 Satz

- (a) $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ist diagonalisierbar \Leftrightarrow es ex. invertierbare Matrix $S \in \mathcal{M}_n(K)$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S$ Diagonalmatrix.
- (b) Hat A n verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.

7.20.1 Beweis

- (a) \mathcal{B} kanonische Basis von K^n .

$A = A_{\alpha_A}^{\mathcal{B}} \cdot A$ diagonalisierbar, so existiert Basis \mathcal{B}' von K^n mit $A_{\alpha_A}^{\mathcal{B}'}$ Diagonalgestalt hat.

Setze $S = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, dann nach 5.21:

$$A_{\alpha_A}^{\mathcal{B}'} = S^{-1} \cdot A_{\alpha_A}^{\mathcal{B}} \cdot S$$

Umgekehrt analog, da jede inverse Matrix S Wechsel von \mathcal{B} zu anderer Basis beschreibt.

- (b) Folgt aus 7.16

Vektorräume mit Skalarprodukt

Jetzt: $K = \mathbb{R}$.

\mathbb{R}^2 : Länge von $v \in \mathbb{R}^2$, $v \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\|v\| = +\sqrt{x^2 + y^2} \text{ (länge)}$$

Abstand zwischen

$$v \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$w \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

entspricht: $d(v, w) := \|v - w\| = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Winkel:

Pythagoras:

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|v\|^2 \cdot \sin^2(\varphi) + (\|w\| - \|v\| \cdot \cos(\varphi))^2 \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\varphi) \text{ (Kosinussatz)} \\ \|v - w\|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\underbrace{x_1x_2 + y_1y_2}_{\text{Skalarprodukt}} = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\varphi) \quad (8.1)$$

8.1 Definition Skalarprodukt

Seien $v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Das (Standard-)Skalarprodukt von v und w :

$$(v|w) := u_1z_1 + u_2z_2 + \dots + u_nz_n \in \mathbb{R}$$

(Skalarprodukt zweier Vektoren ist reelle Zahl!)

Es gilt:

- (1) $(v|v) \geq 0$
 $(v|v) = 0 \Leftrightarrow v = \sigma$
 (positiv definiert)
- (2) $(v|w) = (w|v)$
 (Symmetrie)
- (3) $(v|w_1 + w_2) = (v|w_1) + (v|w_2)$
 $(v|a \cdot w) = a \cdot (v|w)$
 (Linearität im 2. Argument)
 Analog: Linearität im 1. Argument.

e_1, \dots, e_n kanonische Basis.

$$(e_i|e_j) = \begin{cases} 0, & \text{für } i \neq j \\ 1, & \text{für } i = j \end{cases} \quad (8.2)$$

8.2 Definition

V \mathbb{R} -Vektorraum

Abbildung

$$(\cdot|\cdot) : \begin{cases} V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto (v|w) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

heißt Skalarprodukt auf V , falls sie die Eigenschaften (1)-(3) aus 8.1 erfüllt (mit V statt \mathbb{R}^n).

V heißt dann Euklidischer Vektorraum (oder Skalarproduktraum).

Dann gilt auch:

- (4) $(v_1 + v_2|w) = (v_1|w) + (v_2|w)$
 $(av|w) = a(v|w)$
 (Linearität im 1. Argument)
 (Folgt aus (2) und (3))

Es folgt auch:

$$(\sigma|w) = 0 = (v|\sigma)$$

$$\text{Weil } (\sigma|w) = (0 \cdot \sigma|w) \underbrace{=}_{(4)} 0 \cdot (\sigma|w) = 0$$

8.3 Beispiel

(a) Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist Skalarprodukt im Sinne von 8.2

(b) V n -dim. \mathbb{R} -Vektorraum.

v_1, \dots, v_n Basis von V .

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$$

Def. $(v|w) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$ ist Skalarprodukt.

Das Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n entsteht auf diese Weise, wenn man für v_1, \dots, v_n die kan. Basis nimmt.

(c) V \mathbb{R} -Vektorraum.

$C[a, b]$ der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ (mit Werten in \mathbb{R}).

$f, g \in V$

Def. $(f|g) := \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt.

8.4 Satz (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

V Euklidischer Vektorraum. Dann:

$$(v|w)^2 \leq (v|v) \cdot (w|w) \text{ für alle } v, w \in V$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

8.4.1 Beweis

Ist $w = \sigma$, so auf beiden Seiten 0 (und $v, w = \sigma$ sind lin. abhängig).

Sei $w \neq \sigma$.

Setze $a := \underbrace{\frac{(v|w)}{(w|w)}}_{>0} \in \mathbb{R}$

Bilde:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (v - a \cdot w | v - a \cdot w) = (v - a \cdot w | v) - a \cdot (v - a \cdot w | w) \\ &= (v|v) - a \cdot (w|v) - a(v|w) + a^2 \cdot (w|w) \\ &= (v|v) - 2 \cdot \frac{(v|w)^2}{(w|w)} + \frac{(v|w)^2}{(w|w)} \\ &= (v|v) - \frac{(v|w)^2}{(w|w)} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{(v|w)^2}{(w|w)} &\leq (v|v) \\ (v|w)^2 &\leq (v|v) \cdot (w|w) \end{aligned}$$

Gleichheit $\Leftrightarrow (v - a \cdot w | v - a \cdot w) = 0 \Leftrightarrow v = a \cdot w$

8.5 Definition

V Euklidischer Vektorraum.

- (a) Für $v \in V$ ist $\|v\| := \underbrace{+\sqrt{(v|v)}}_{\geq 0}$ (Euklidische) Norm von v . ('Länge' von v)
- (b) $v, w \in V$
 $d(v, w) := \|v - w\|$, (Euklidischer) Abstand von v und w .
 (8.4 bedeutet dann: $|(v|w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$)

8.6 Beispiel

- (a) Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n :

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\|v\| = +\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$d(v, w) = +\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

- (b) $V = C[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$
- $$(f|g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx$$
- $$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx}$$

8.7 Satz (Eigenschaften der Norm)

V Euklidischer VR, Norm $\|\cdot\|$. Dann:

- (a) $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \sigma$ (Definiertheit)
- (b) $\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$ (absolute Homogenität)
- (c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)
- (d) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v|w)$
- (e) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ (Parallelogrammgleichung)

8.7.1 Beweis

(a) - (b) ✓

(c)-(d):

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= (v+w|v+w) = (v|v) + (w|w) + 2(v|w) \quad (\text{also (d)}) \\ &\leq (v|v) + (w|w) + 2 \cdot \sqrt{(v|v) \cdot (w|w)} = (\sqrt{(v|v)} + \sqrt{(w|w)})^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \rightarrow (c) \end{aligned}$$

✓

(e) folgt aus (d)

8.8 BemerkungJede Abb. \mathbb{R} -VR in \mathbb{R}

$$\|\cdot\| : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ die (a)-(c) erfüllt} \\ v \mapsto \|v\| \end{cases}$$

heißt Norm auf V.Es gibt Normen, die nicht von Skalarprodukt herkommen, zb. in \mathbb{R}^n :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_{\max} := \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$$

8.9 Definition

V Euklidischer VR.

(a) $v, w \in V, v \neq \sigma, w \neq \sigma$

Nach 8.4 gilt:

$$-1 \leq \frac{|(v|w)|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1 \quad (8.3)$$

Dann ex. genau ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit:

$$\frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos(\varphi) \quad (8.4)$$

Das heißt:

$$(v|w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\varphi) \quad (8.5)$$

 φ heißt Winkel zwischen v,w. ($v \neq \sigma, w \neq \sigma$)

(kein orientierter Winkel, kleinerer der beiden möglich)

- (b) v, w heißen orthogonal (senkrecht), falls $(v|w) = 0$.

Falls $v \neq \sigma$ und $w \neq \sigma$, so heißt das:

$$\cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (8.6)$$

(σ ist orthogonal zu allen Vektoren)

- (c) $M \subseteq V$

$$M^\perp := \{w \in V : (v|w) = 0 \text{ für alle } v \in M\}$$

Orthogonalraum zu M . Unterraum von V (selbst wenn M kein Unterraum ist)

$$\{e_1, e_2\}^\perp = \langle e_3 \rangle$$

$$\{\sigma\}^\perp = V$$

$$V^\perp = \{\sigma\}$$

$$(v \in V^\perp \Rightarrow (v|v) = 0 \Rightarrow v = \sigma)$$

8.10 Bemerkung

Sind v, w orthogonal, so ist

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad (8.7)$$

(8.7.d)

8.11 Beispiel

- (a) \mathbb{R}^n , Standard-Skalarprodukt.

$$(e_i|e_j) = 0 \text{ für } i \neq j$$

$$\|e_i\| = 1$$

- (b) \mathbb{R}^3 , Standard-Skalarprodukt.

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|v\| = \sqrt{6}, \quad \|w\| = \sqrt{24}$$

Für den Winkel folgt:

$$\cos(\varphi) = \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

- (c) \mathbb{R}^2 , Standard-Skalarprod.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \sigma$$

$$\{v\}^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

8.12 Definition

V Euklidischer VR. $M \subseteq V$.

(a) M heißt Orthonormalsystem, falls

$$\|v\| = 1$$

für alle $v \in M$ und

$$(v|w) = 0$$

für alle $v, w \in M, v \neq w$

(b) Ist V endl. dim., so heißt M Orthonormalbasis (ONB) von V , falls M Orthonormalsystem und Basis von V .

Beachte: $v \neq \sigma$

$$v' = \frac{1}{\|v\|} v \in V$$

Damit ergibt sich:

$$\|v'\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$$

Normierung

8.13 Bemerkung

Ist (v_1, \dots, v_n) ONB, $v \in V, v = \sum_{i=1}^n c_i v_i, c_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (v|v) &= \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \middle| \sum_{j=1}^n c_j v_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \cdot (v_i|v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot (v_i|v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^2 \\ \|v\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \end{aligned}$$

8.14 Satz

(a) Ein Orthonormalsystem ist linear unabhängig.

(b) Ist $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein Orthonormalsystem, $v \in V$, so ist:

$$v - \sum_{i=1}^n (v|v_i) \cdot v_i \in M^\perp$$

8.14.1 Beweis

(a) Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ endliche Teilmenge von M .

Zu zeigen: $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear unabhängig.

Ist $\sum_{i=1}^m c_i v_i = \sigma$, so:

$$0 = \left(\sum_{i=1}^m c_i v_i | v_j \right) = \sum_{i=1}^m c_i (v_i | v_j) = c_j (v_j | v_j) = c_j$$

$$c_j = 0 \text{ für } j = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (v_j | v - \sum_{i=1}^n (v|v_i) \cdot v_i) &= (v|v_j) - \sum_{i=1}^n (v|v_i) \cdot \underbrace{(v_j|v_i)}_{=0 \text{ für } i \neq j} \\ &= (v|v_j) - (v|v_j) \cdot \underbrace{(v_j|v_j)}_{\leq 1} = 0 \end{aligned}$$

8.15 Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei $M = \{w_1, \dots, w_n\}$ lin. unabhängige Menge im Eukl. VR V . Dann gibt es Orthonormalsystem $\{v_1, \dots, v_m\}$ mit $\langle w_1, \dots, w_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Insbesondere enthält V eine ONB.

8.15.1 Beweis

$w_1 \neq \sigma$. Setze

$$v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1$$

$$\|v_1\| = 1, \langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$$

Sei schon Orthonormalsystem $\{v_1, \dots, v_i\}$ konstruiert mit $\langle w_1, \dots, w_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$ für alle $j = 1, \dots, i$ ($i < m$)

Setze $v'_{i+1} = w_{i+1} - \sum_{j=1}^i (v_j | w_{i+1}) \cdot v_j \rightarrow 8.14.b$: $(v'_{i+1} | v_j) = 0$ für $j = 1, \dots, i$.

Da $w_{i+1} \notin \langle w_1, \dots, w_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$, ist $v'_{i+1} \neq \sigma$.

Setze $v_{i+1} = \frac{1}{\|v'_{i+1}\|} \cdot v'_{i+1}$, $\|v_{i+1}\| = 1$, $(v_j | v_{i+1}) = 0$, $j = 1, \dots, i$

Es gilt:

$$\langle v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_i, w_{i+1} \rangle = \langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1} \rangle$$

8.16 Beispiel

- (a) e_1, \dots, e_n ist ONB des \mathbb{R}^n bezgl. Standard-Skalarprodukt.
 (b) $V = \mathbb{R}^3$ mit Standard-Skalarprodukt.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig.

Gram-Schmidt: ONB $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\langle v_1 \rangle = \langle w_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v'_2 = w_2 - (v_1 | w_2) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\|v'_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v'_3 = w_3 - (v_1 | w_3) \cdot v_1 - (v_2 | w_3) \cdot v_2 = \dots = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \|v'_3\| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.17 Satz

V endl. dim. Eukld. VR, U Unterraum von V .

$$(a) V = U \oplus U^\perp \text{ (d.h. } U \cap U^\perp = \{\emptyset\}, U + U^\perp = V)$$

$$\text{Insb: } \dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$

$$(b) (U^\perp)^\perp = U$$

8.17.1 Beweis

- (a) Basis Ergänzung + Gram-Schmidt
 (b) folgte aus a)

8.18 Definition

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von v und w :

$$V \times W := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

8.19 Satz

(a) $(v \times w|v) = (v \times w|w) = 0$, d.h. $v \times w$ ist orthogonal zu v und w .

(b) $v \times w = -w \times v$

(c) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$

$$u \times (a \cdot v) = a \cdot (u \times v), \quad u, v, w \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}$$

Ebenso in der ersten Komponente.

(d) v, w linear unabhängig $\Leftrightarrow v \times w = \sigma$.

(e) $v, w \neq \sigma$. $\varphi \in [0, \pi]$ Winkel zwischen v und w .

$$\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\varphi)$$

= Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms

8.19.1 Beweis

Nachrechnen.

8.20 Bemerkung

$v, w, v \times w$ bilden sogenanntes Rechtssystem.

Faust der rechten Hand. Fingerspitzen von v nach w (kleinerer Winkel).

Daumen zeigt in Richtung $v \times w$.

8.21 Beispiel

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Best. $\langle v, w \rangle^\perp$.

v, w lin. unabhängig, d.h. $\langle v, w \rangle = 2$

$$\Rightarrow \dim \langle v, w \rangle^\perp = 3 - 2 = 1.$$

$$\langle v \times w \rangle = \langle v, w \rangle^\perp$$

Damit folgt:

$$v \times w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|v \times w\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

Orthogonale Abb., symmetrische Abb., Kongruenzabbildungen

9.1 Definition Orthogonale Abbildungen

V Eukl. VR mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$.

$\alpha : V \rightarrow V$ lineare Abb.

α heißt orthogonale Abbildung $\Leftrightarrow (\alpha(v)|\alpha(w)) = (v|w)$ für alle $v, w \in V$

9.2 Folgerungen

(a) Orthogonale Abb. sind längentreu, d.h.

$$\|\alpha(v)\| = \|v\|$$

für alle $v \in V$.

(da $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$)

(b) Ort. Abb. sind winkeltreu, da

$$\cos(\varphi) = \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|}, v, w \neq 0$$

(c) Orth. Abb. auf endlich dim. Eukl. Räumen sind bijektiv, da nach a) $\ker(\alpha) = \{0\}$, also α injektiv, also bijektiv, da $\dim(V) < \infty$.

(d) V endl. dim

α orth. $\Rightarrow \alpha^{-1}$ orthogonal.

$(u, v \in V$. Es ex. $x, y \in V$ mit $\alpha(x) = u, \alpha(y) = v$, d.h. $\alpha^{-1}(u) = x, \alpha^{-1}(v) = y$.

$$(u|v) = (\alpha(x)|\alpha(y)) = (x|y) = (\alpha^{-1}(u)|\alpha^{-1}(v))$$

(e) α, β orthogonal, so auch $\alpha \circ \beta$.

(f) (d) + (e) besagen, dass die Menge der orth. Abb. auf V bzgl. \circ eine Gruppe ist. (V endl. dim.)

9.3 Beispiel

- (a) Drehungen um σ im \mathbb{R}^2 sind orth. Abb. (bzgl. des Standard-Skalarprodukts)
- (b) Spiegelungen ϱ in \mathbb{R}^2 an Achse durch σ sind orth.
 v_1 Richtungsvektor der Achse, $\|v_1\| = 1$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ ONB (Gram-Schmidt)

$$A_{\varrho}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.4 Satz (Charakterisierung orth. Abb.)

V endl. dim. Eukl. VR., $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ONB, $\alpha : V \rightarrow V$ linear, $A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$.
 Dann sind äquivalent:

1. α ist orthogonale Abb.
2. $A \cdot A^t = A^t \cdot A = E_n$
 (d.h. $A^t = A^{-1}$)
3. $(\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n))$ ist ONB
4. $\|\alpha(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$.

9.4.1 Beweis

1. \Rightarrow 2.

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$
 Es gilt:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= (v_i | v_j) \\ &= (\alpha(v_i) | \alpha(v_j)) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot v_k \mid \sum_{l=1}^n a_{lj} \cdot v_l \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^n a_{ki} \cdot a_{lj} \cdot (v_k | v_l) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot a_{kj} \leftarrow \text{Eintrag } (i, j) \text{ von } A \cdot A^t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \cdot A^t = E_n. (*)$$

α orth. $\Rightarrow \alpha$ bijektiv $\rightarrow A$ invertierbar, d.h. A^{-1} ex.

Multipliziere $(*)$ von links mit A^{-1} von rechts mit A :

$$A^{-1} \cdot A \cdot A^t \cdot A = A^{-1} \cdot A = E_n$$

2. \Rightarrow 3.

$$A \cdot A^t = E_n.$$

Dann wie in 1. \Rightarrow 2.:

$$(\alpha(v_i) | \alpha(v_j)) = \delta_{ij}$$

 $(\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n))$ ONB.**3. \Rightarrow 4.**

$$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \alpha(v_i)$$

$$\|v\|^2 = (v|v) = \sum_{i=1}^n c_i^2 = \|\alpha(v)\|^2$$

4. \Rightarrow 1.

$$8.7.d) (v|w) = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

Behauptung folgt.

9.5 Definition

Eine $n \times n$ - Matrix A über \mathbb{R} heißt orthogonal, falls $A \cdot A^t = A^t \cdot A = E_n$.D.h. z_1, \dots, z_n von A:

$$\begin{aligned} (z_i^t | z_j^t) &= z_i \cdot z_j^t \\ &= z_i \cdot \underbrace{s_j}_{\text{j-te Spalte von } A^t} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Die Spalten von A bilden Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .
Analog für die Zeilen.

9.6 Korollar

 α orth. Abb. auf endl. dim. Eukld. VR. V, \mathcal{B} ONB von V, $A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$

$$(a) \det(\alpha) = \det(A) = \pm 1$$

(b) α hat höchstens die Eigenwerte 1 oder -1 (in \mathbb{R})

9.6.1 Beweis

- (a) $1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = (\det A)^2$
- (b) c Eigenwert von α , v zugehöriger Eigenvektor. $\|v\| = \|\alpha(v)\| = \|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\| \Rightarrow |c| = 1$

9.7 Satz

Sei α orthogonale Abb. auf \mathbb{R}^n , $n \leq 3$.

- (a) $n = 1$: $\alpha = id$ oder $\alpha = -id$
- (b) $n = 2$: Sei \mathcal{B} ONB von \mathbb{R}^2 .

- (i) Ist $\det(\alpha) = 1$, so ist

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$.

α ist Drehung um Winkel φ .

- (ii) Ist $\det(\alpha) = -1$, so ist

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Es gibt ONB $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ von V mit $A_{\alpha}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Spiegelung an der Achse $\langle w_1 \rangle$.

($\mathcal{B} = (v_1, v_2)$, so ist der Winkel zwischen v_1 und w_1 $\frac{\varphi}{2}$)

- (c) $n = 3$:

- (i) Ist $\det(\alpha) = 1$, so existiert ONB $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$A_{\alpha}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

α ist Drehung um $\varphi \in [0, 2\pi[$ parallel zur $\langle v_1, v_2 \rangle$ -Ebene mit Drehachse $\langle v_3 \rangle$

- (ii) Ist $\det(\alpha) = -1$, so existiert ONB $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$A_{\alpha}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

α ist Drehspiegelung.

Drehung um Achse $\langle v_3 \rangle$, dann Spiegelung an Ebene $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Bemerkung: $n = 2$:

Ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ positiv orientiert (d.h. bewegt man sich von v_1 nach v_2 entgegen Uhrzeigersinn, so ist Winkel $\frac{\pi}{2}$), so ist α Drehung gegen Uhrzeigersinn um φ .

Ist \mathcal{B} negativ orientiert, so ist α Drehung im Uhrzeigersinn.

(Spezialfälle in (c):

$$(i) \varphi = \pi: A_\alpha^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Achsenspiegelung an } \langle v_3 \rangle$$

$$(ii) \varphi = 0: A_\alpha^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (Ebenen-)Spiegelung an } \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\varphi = \pi: A_\alpha^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Punktspiegelung in } 0.)$$

9.7.1 Beweis

- (a) trivial ✓
- (b) Untersuchen der 2×2 - Matrizen A . $A \cdot A^t = A^t \cdot A = E_2$ (WHK 10.67)
- (c) Für bel. n : Fischer, Lineare Algebra

9.8 Definition

- (a) V K-VR, $b \in V$.

Die Abb. $t_b \begin{cases} V \rightarrow V \\ v \mapsto v + b \end{cases}$ heißt Translation um Vektor b

(Nicht linear, falls $b \neq 0$)

- (b) Komposition von lin. Abb. mit Translationen heißen affine Abbildungen

$$\beta(v) = \alpha(v) + b, \alpha \text{ lin. Abb. } V \rightarrow V, b \in V = (t_b \circ \alpha)(v)$$

- (c) Ist V Eukl. VR, so ist Kongruenzabbildung auf V eine affine Abb. der Form $t_b \circ \alpha$, wobei α orthogonale Abb. ist. (lassen den Abstand zwischen Vektoren (und Winkel) fest).

9.9 Bemerkung

- (a) Affine Abb. bilden affine Unterräume wieder auf affine Unterräume ab:

$$\beta = t_b \circ \alpha, u + \underset{\text{Unterraum von } V}{W}$$

$$\begin{aligned}
 \beta(u+W) &= t_b(\alpha(u+W)) \\
 &= t_b(\alpha(u) + \alpha(W)) \\
 &= b + \alpha(u) + \alpha(W)
 \end{aligned}$$

- (b) Hintereinanderausführung von affinen (Kongruenz-)Abb. ist wieder affine (Kongruenz-) Abb.:

$$\begin{aligned}
 ((t'_b \circ \alpha') \circ (t_b \circ \alpha))(v) &= (t'_b \circ \alpha')(\alpha(v) + b) \\
 &= \underbrace{(\alpha' \circ \alpha)(v)}_{\text{lin. Abb.}} + \underbrace{\alpha'(b) + b'}_{\text{Translationsvektor}}
 \end{aligned}$$

Beispiel: β Drehung um $c \in \mathbb{R}^2$ mit Winkel φ (in \mathbb{R}^2)

$$\begin{aligned}
 \beta(v) &= t_c \circ \underset{\text{Dehnung um } 0 \text{ mit } \varphi}{\alpha} \circ t_{-c} \\
 &= \alpha(v) + \alpha(-c) + c \\
 &= \underbrace{\alpha(v)}_{\text{lin.}} + \underbrace{-\alpha(c) + c}_{\text{Translationsv.}} \\
 &= (t_{-\alpha(c)+c} \circ \alpha)(v) \\
 &= \alpha(v - c) + c
 \end{aligned}$$

- (c) Affine Abb. auf $n\text{-dim.}$ Räumen lassen sich nicht durch $n \times n$ - Matrizen beschreiben.

Es gibt Beschreibung mit $(n+1) \times (n+1)$ - Matrizen:

\mathcal{B} Basis von V . $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$$\beta = t_b \circ \alpha.$$

$$b = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n, A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$$

$$\beta \rightarrow \begin{pmatrix} A & b_1 \\ \dots & \dots \\ \dots & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v \in V, v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

[BILDER VON JOHANNES.]

Nachrechnen: Hintereinanderausführung von aff. Abb. entspricht Multiplikation der entsprechenden $(n+1) \times (n+1)$ - Matrizen.

9.10 Lemma

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ so gilt für das Standard-Skalarprodukt:

$$(Ax|y) = (x|A^t y)$$

9.10.1 Beweis

$$\begin{aligned}(Ax|y) &= (Ax)^t \cdot y \\ &= (x^t \cdot A^t) \cdot y \\ &= x^t \cdot (A^t \cdot y) \\ &= (x|A^t y)\end{aligned}$$

9.11 Definition

V endl. dim. Eukl. VR. Lineare Abb. $\alpha : V \rightarrow V$ heißt symmetrisch (selbstadjungiert), falls

$$(\alpha(v)|w) = (v|\alpha(w))$$

für alle $v, w \in V$.

(z.B. alle $\alpha \cdot id_v$ sind symm.)

9.12 Bemerkung und Definition

V endl. dim. Eukl. VR., \mathcal{B} ONB von V . $\alpha : V \rightarrow V$ linear, $A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$. Dann:

$$\alpha \text{ symmetrisch} \Leftrightarrow A = A^t$$

$n \times n$ - Matrizen A mit $A = A^t$ heißen symmetrisch.

Matrix ändert sich nicht bei Spiegelung (wenn sie symmetrisch ist) bei Spiegelung an Diagonalen.

9.12.1 Beweis

Folgt aus 9.10.

9.13 Satz über die Hauptachsentransformation

- (a) Ist $\alpha : V \rightarrow V$ symm. Abb., so existiert ONB \mathcal{B} von V aus Eigenvektoren zu α , insbesondere ist α diagonalisierbar.
- (b) Ist A $n \times n$ - Matrix, A symmetrisch, so existiert orthogonale Matrix B mit $B^{-1}AB = B^t AB$ Diagonalmatrix.

9.13.1 Beweis

(a) WHK 10.75

(b) $\alpha(x) = A \cdot x$ $A = A_\alpha^{\mathcal{C}}$ bzgl. kan. Basis \mathcal{C} . α symmetrisch nach 9.12.(a): \exists ONB \mathcal{B} mit $A_\alpha^{\mathcal{B}}$ Diagonalmatrix.Wähle B als Basiswechselmatrix: $B^{-1}AB$ Diagonalmatrix. \mathcal{B}, \mathcal{C} ONB $\Rightarrow B$ orthogonale Matrix (9.4), d.h. $B^{-1} = B^t$.

9.14 Bemerkung

Grund für die Bezeichnung von 9.13.

(a) Eine Quadrik im \mathbb{R}^n besteht aus allen $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, die die Gleichung

$$\sum_{i,j=1;i \leq j}^n b_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0(*)$$

(quadr. Gleichung mit n Variablen x_1, \dots, x_n mit Koeff. $b_{ij}, b_j, c \in \mathbb{R}$)Setze $a_{ij} = a_{ji} = \frac{b_{ij}}{2}$ für $i < j$.

Dann lässt sich (*) schreiben:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0(**)$$

 $A = (a_{ij})$ ist symmetrisch. $\alpha(x) = A \cdot x$ symm. Abbildung ($A = A_\alpha^{\mathcal{C}}$ bzgl. kan. Basis) $(**) \Leftrightarrow (\alpha(v)|v) + (b|v) + c = 0, b = (b_1, \dots, b_n)^t, v = (x_1, \dots, x_n)^t (***)$ 9.13. besagt: \exists ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, so dass $A_\alpha^{\mathcal{B}}$ Diagonalmatrix.Sei $v = \sum_{i=1}^n x'_i v_i$, so liest sich (***)

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i'^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i' + c = 0$$

 v_i sind die Hauptachsen der Quadrik.(b) $n = 2$: Quadriken sind Kegelschnitte. $(***),$ Striche weglassen.Fall: $b_1 = b_2 = 0, c \neq 0$.

O.B.d.A:

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = 1$$

 $c_1 > 0$.

- $c_1, c_2 > 0$: $c_1 = \frac{1}{a^2}$, $c_2 = \frac{1}{b^2}$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, a, b > 0$$

Ellipse.

- $c_1 > 0, c_2 < 0$
 $c_1 = \frac{1}{a^2}, c_2 = -\frac{1}{b^2}, a, b > 0$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Hyperbel

- Parabeln Typ Gleichung $c_1 x_2^2 - x_2 = 0$

Mehrdimensionale Analysis

Funktionen

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Vektoren im \mathbb{R}^n sind Zeilenvektoren.

Länge von Vektoren: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Abstand von x und y : $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

10.1 Beispiele

(a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skalare Funktionen

Z.B: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $D = \mathbb{R}^3$

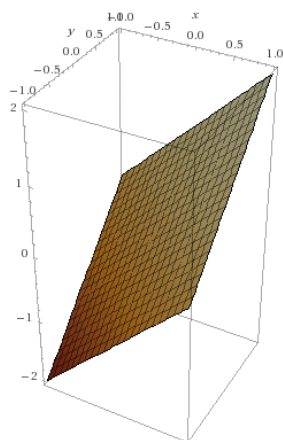
$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

x, y, z statt x_1, x_2, x_3 .

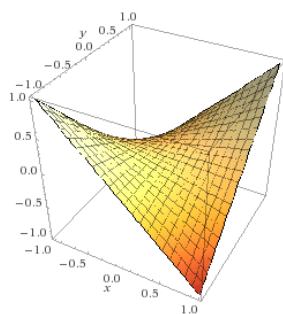
$n = 2$: $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich graphisch darstellen.

Beispiel:

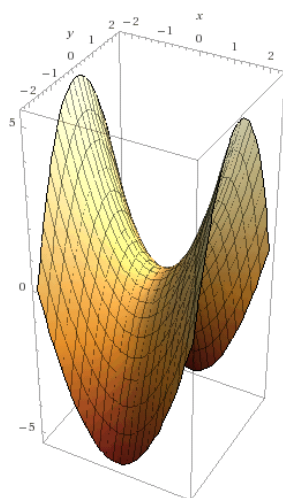
- $f(x, y) = x + y$



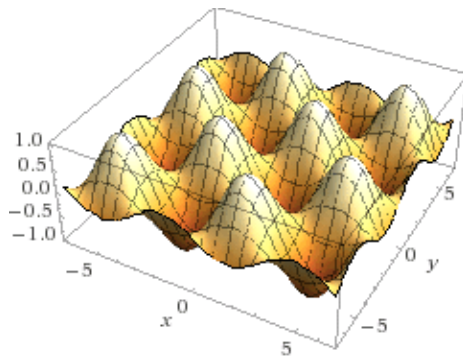
- $f(x, y) = x \cdot y$



- $f(x, y) = x^2 - y^2$



- $f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$



(b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m > 1$ Vektorwertige Funktion.

$$x \in D : f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

skalar

Spezialfall in 10.1.b): $n = 1, m = 2/3$.

10.2 Beispiel (ebene Kurven / Raumkurven)

$$\text{z.B. } f : \begin{cases} [0, 2\pi] \Rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$$

$n = 2$: Ebene Kurve

$n = 3$: Raumkurve

n = 2

Physikalische Interpret.:

t Zeit $f(t)$ Ort

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t))$$

Geschwindigkeitsvektor.

Betrag der Geschwindigkeit:

$$\|f'(t)\| = \sqrt{f'_1(t)^2 + f'_2(t)^2}$$

Länge der Kurve zwischen $t = a, t = b$?

Konst. Geschwindigkeit v : $L = v \cdot (b - a)$.

Bei variabler Geschwindigkeit:

$$v(t) = \|f'(t)\|$$

Approx.

$$L \approx \sum_{i=0}^k v(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Grenzwert:

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

10.3 Satz

Ist $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, f_i stetig diffbar, $[a, b] \subseteq D$, so gilt für die Bogenlänge L der Kurve zwischen $t = a$ und $t = b$:

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

(1-dim. Analysis)

(Exakter Beweis: Forster, Analysis 2)

10.4 Beispiel

Abrollen eines Kreises auf der x-Achse. Bahn eines Punktes auf der Peripherie des Kreises.

$$f(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

Zykloide

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt$$

(Übungsaufgabe)

Grenzwertbegriff für Funkt. $D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

10.5 Definition

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a Adhärenzpunkte (d.h. es ex. $d_i \in D$ mit $\|d_i - a\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$)

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - c\| < \epsilon$$

(b) Ist $a \in D$, so heißt f stetig in a , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

10.6 Bemerkung

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in D$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (c_1, \dots, c_m) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = c_i, i = 1, \dots, m$$

Insb. f stetig in $a \Leftrightarrow$ alle f_i stetig in a .

$f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ skalare Funktion.

10.7 Beispiel

Monom: $f(x_1, \dots, x_n) = ax_1^{m_1} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n}$, $a \in \mathbb{R}$, $m_i \in \mathbb{N}_0$ fest.

Polynom: Summe von endl. vielen Monomen.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^7 + 4x_1x_2x_3^5 - 12x_1^2x_2^4$$

Polynome sind stetig.

Allgemein gilt (Beweis wie in Analysis einer Var):

Summe, Produkt, Quotient von stetigen (Skalaren) Fkt. sind stetig.

Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ist stetig.

10.8 Definition

(a)) $a \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, r > 0$.

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

offene Kugeln um a von Radius r .

$n = 1$: offenes Intervall $]a - r, a + r[$

$n = 2$: $K(a, r)$ ist das Innere des Kreises ohne die Kreislinie

(b)) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls es zu jedem $a \in D$ ein $r(a) > 0$ gibt mit $K(a, r(a)) \subseteq D$.

$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - 0\| \leq 1\}$ ist nicht offen.

$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - 0\| < 1\}$ ist offen.

10.9 Definition

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen.

$a = (a_1, \dots, a_n) \in D$.

(a) f heißt partiell differenzierbar nach x_j an der Stelle a , falls

$$\lim_{x_j \rightarrow a_j} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_j - a_j}$$

existiert.

Partielle Ableitung von f nach x_j an der Stelle a :

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}$$

(n=1: $f'(a)$)

(b) Ist f nach allen x_j an der Stelle a partiell differenzierbar, so heißt

$$\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right)$$

Gradient von f an der Stelle a .

(c) Ist f an allen $a \in D$ nach allen x_j partiell diffbar, so sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen, die partielle Ableitungen von f auf D zusammengefasst zu

$$\text{Grad}(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Gradient von f .

[$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ skalar. Fkt. $D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix]

10.10 Beispiel

$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2)$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Partielle Abl. an Stelle $a = (\pi, 1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\pi, 1)}{\partial x_1} &= \lim_{x_1 \rightarrow \pi} \frac{f(x_1, 1) - f(\pi, 1)}{x_1 - \pi} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow \pi} \frac{\sin(x_1) - \sin(\pi)}{x_1 - \pi} \\ &= \sin'(\pi) \\ &= \cos(\pi) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\pi, 1)}{\partial x_2} &= \lim_{x_2 \rightarrow 1} \frac{f(\pi, x_2) - f(\pi, 1)}{x_2 - 1} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x_2) - \sin(\pi)}{x_2 - \pi} \\ &= \pi \cdot \cos(\pi \cdot 1) \\ &= -\pi \end{aligned}$$

Allgemein: part. Ableitungen an beliebiger Stelle (x_1, x_2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &\underset{\substack{= \\ \text{halte } x_2 \text{ konstant}}}{=} \cos(x_1 \cdot x_2) \cdot x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &\underset{\substack{= \\ \text{halte } x_1 \text{ konstant}}}{=} \cos(x_1 \cdot x_2) \cdot x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Grad}(f) = (\cos(x_1 x_2) \cdot x_2, \cos(x_1 x_2) \cdot x_1)$$