Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação

2019/2020

2. Teoria Elementar de Conjuntos

A noção de conjunto é uma noção fundamental da matemática. O estudo de conjuntos, designado por Teoria de Conjuntos, foi introduzido por Georg Cantor nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, foi posteriormente tratada de forma axiomática.

A Teoria de Conjuntos revela-se essencial não só em muitos campos da matemática, mas também em muitas outras áreas como as ciências da computação.

2.1 Noções Básicas

Nesta unidade curricular vamos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, i.e., como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

Intuitivamente, um **conjunto** é uma coleção de objetos, designados os **elementos** ou **membros** do conjunto.

Exemplo 2.1. *São exemplos de conjuntos as coleções de:*

(1) disciplinas do primeiro ano curricular do plano de estudos de LCC;

(2) pessoas presentes numa festa;

(3) meses com 30 dias;

(4) todos os números naturais.

Como exemplo, também podemos considerar cinco conjuntos que usamos regularmente: o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais; o conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os números inteiros; o conjunto $\mathbb{Q}$ de todos os números racionais; o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais; o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os números complexos.

Ao longo deste capítulo, estamos interessados no estudo de conjuntos de forma mais abstracta. Sendo assim, representaremos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z (possivelmente com índices e os elementos de um conjunto serão representados por letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z (também possivelmente com índices).

Dados um conjunto A um conjunto e um objeto x, diz-se que x **pertence a** A, e escrevemos $x \in A$, se x é um dos objetos de A. Caso x não seja um dos objetos de A, diz-se que x **não pertence a** A e escrevemos $x \notin A$.

Exemplo 2.2. *Tem-se, por exemplo,* $3 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Um conjunto fica determinado quando são conhecidos os seus elementos. Assim, se A e B são dois conjuntos com os mesmos elementos, A e B dizem-se conjuntos **iguais** e escreve-se $A = B$. Este facto, intuitivamente claro, é expresso sob a forma de um princípio.

Princípio da Extensionalidade
Sejam A, B conjuntos. Tem-se $A = B$ se e só se A e B têm os mesmos elementos.

Simbolicamente, dois conjuntos A e B são iguais se a proposição

$$\forall_x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

é uma proposição verdadeira. Dados dois conjuntos A e B, se existir um elemento num dos conjuntos que não pertença ao outro, então A e B dizem-se **diferentes**, e escreve-se $A \neq B$.

Um conjunto pode ser descrito de várias formas. Uma dessas formas consiste em enumerar explicitamente os seus elementos, os quais são colocados entre chavetas e separados por vírgulas - neste caso diz-se que o conjunto é descrito por **extensão**.

Exemplo 2.3. *O conjunto* A *dos números naturais menores do que* 5 *e o conjunto* B *dos números reais que são solução da equação* $x^2 - 2x + 1 = 0$ *podem ser descritos por extensão do seguinte modo:* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 1\}$.

Quando numa descrição por extensão não é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos do conjunto, utiliza-se uma notação sugestiva e não ambígua que permita intuir os elementos não expressos.

Exemplo 2.4. *O conjunto dos números naturais é usualmente representado usando a notação* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. *O conjunto dos números inteiros pode ser descrito utilizando a notação* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Um conjunto também pode ser descrito por **compreensão**, indicando um predicado $p(x)$ que seja satisfeito exatamente pelos elementos do conjunto. Neste caso, estamos a usar o

Princípio da Abstração
Dado um predicado $p(x)$, existe o conjunto dos objetos que satisfazem $p(x)$. Tal conjunto representa-se por $\{x \,|\, p(x)\}$ ou por $\{x \,:\, p(x)\}$.

O Princípio da Abstração é usualmente aplicado no dia a dia, porém, a utilização deste princípio tal como está enunciado origina paradoxos como o conhecido *paradoxo de Russel*. Admitamos, por exemplo, que, usando este princípio, se define o conjunto R dos conjuntos que não pertencem a si próprios, i.e., $R = \{x \,|\, x \notin x\}$. Relativamente a este conjunto podemos colocar a questão se R é um elemento de si mesmo, porém, qualquer uma das respostas possíveis, $R \in R$ e $R \notin R$, conduz a uma contradição. De facto,

- se $R \in R$, então, por definição de R, $R \notin R$;
- se $R \notin R$, novamente por definição de R, $R \in R$.

A teoria formal de conjuntos utiliza uma versão mais restrita do Princípio da Abstração que elimina este tipo de problema e que permite formar novos conjuntos a partir de um conjunto dado; trata-se do

Axioma da Separação
Dados um conjunto U e um predicado $p(x)$, existe o conjunto dos elementos de U que satisfazem $p(x)$. Tal conjunto representa-se por $\{x \in U \,|\, p(x)\}$ ou por $\{x \in U \,:\, p(x)\}$.

Exemplo 2.5. *O conjunto dos números naturais divisores de* 16 *pode ser descrito, por extensão, por* $\{1, 2, 4, 8, 16\}$. *Em alternativa, o conjunto pode ser definido por compreensão da seguinte forma:* $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n$ *divide* $16\}$.

O Axioma da Separação não origina paradoxos como o Paradoxo de Russel, uma vez que os elementos são escolhidos de entre os elementos de um conjunto previamente conhecido. De facto, dado um conjunto U, podemos definir o conjunto $R_U = \{x \in U \,|\, x \notin x\}$, mas a existência deste conjunto não conduz a uma contradição:

- se $R_U \in R_U$, então, por definição de R_U, vem $R_U \notin R_U$, pelo que temos uma contradição;
- se $R_u \notin R_U$, então, $R_U \notin U$ ou $R_U \in R_U$, donde se conclui que $R_U \notin U$.

Note-se que desta prova resulta que, para qualquer conjunto U, existe um conjunto que não é um elemento de U. Consequentemente, não existe um conjunto V tal que todo o conjunto é elemento de V, i.e. não existe o "o conjunto de todos os conjuntos".

Tal como já referimos antes, na teoria formal de conjuntos, o Princípio da Abstração é rejeitado, por conduzir a paradoxos tal como o Paradoxo de Russel, e em alternativa é utilizado o Axioma da Separação. No entanto, a aplicação do Axioma da Separação necessita, em alguns casos, de princípio adicionais que garantam a existência do conjunto U. No sentido de evitarmos, por agora, o estudo de tais princípios, continuaremos a usar o Princípio da Abstração, mas é conveniente referir que todos os argumentos aqui apresentados são igualmente válidos se substituirmos o Princípio da Abstração pelo Axioma da Separação juntamente com princípios de existência.

Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio** e será representado por $\emptyset$ ou por $\{\}$. O conjunto vazio pode ser representado por compreensão, recorrendo a um predicado que não possa ser satisfeito. Por exemplo, $\emptyset = \{x \,|\, x \neq x\}$.

Definição 2.1. *Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A* **está contido em** *B ou que A* **é subconjunto de** *B, e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também elemento de B, i.e., $A \subseteq B$ se a proposição*

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in B)$$

é uma proposição verdadeira. Diz-se que A **está propriamente contido em** *B ou que A* **é subconjunto próprio de** *B, e escreve-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.*
Caso exista um elemento de A que não seja elemento de B diz-se que A **não está contido em** *B ou que A* **não é subconjunto de** *B, e escreve-se $A \nsubseteq B$. Simbolicamente, $A \nsubseteq B$ se*

$$\exists_{x \in A} \ x \notin B.$$

Exemplo 2.6.
(1) $\{-1, 1\} \subseteq \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 1 = 0\}$.
(2) $\{0, -1, 1\} \nsubseteq \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 1 = 0\}$.
(3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Apresentam-se seguidamente algumas propriedades básicas a respeito da relação de inclusão entre conjuntos.

Proposição 2.2. *Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(1) $\emptyset \subseteq A$.

(2) $A \subseteq A$.

(3) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, *então* $A \subseteq C$.

(4) ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$) *se e só se* $A = B$.

Demonstração. (1) Mostremos, por redução ao absurdo, que $\emptyset \subseteq A$. Nesse sentido, admitamos que $\emptyset \nsubseteq A$. Então existe um elemento de $\emptyset$ que não pertence a A. Mas $\emptyset$ não tem elementos. Esta contradição resultou de admitirmos que $\emptyset \nsubseteq A$. Logo $\emptyset \subseteq A$.

(2) Todo o elemento de A é elemento de A. Logo a proposição

$$\forall_x \, (x \in A \to x \in A)$$

é verdadeira, ou seja, $A \subseteq A$.

(3) Admitamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Então as proposições

$$\text{(i)} \ \forall_x \, (x \in A \to x \in B) \quad \text{e} \quad \text{(ii)} \ \forall_x \, (x \in B \to x \in C)$$

são verdadeiras. Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$, ou seja, queremos mostrar que a proposição

$$\forall_x \, (x \in A \to x \in C)$$

é verdadeira. Seja $x \in A$. Então por (i) segue que $x \in B$ e por (ii) tem-se que $x \in C$. Assim, todo o elemento de A é elemento de C, ou seja, $A \subseteq C$.

(4) Pretendemos mostrar que

$$(A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A) \text{ se e só se } A = B.$$

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Então todo o elemento de A é elemento de B e todo o elemento de B é elemento de A. Logo A e B têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, $A = B$.

($\Leftarrow$) Admitamos que $A = B$. Então a proposição

$$\forall_x (x \in A \to x \in B) \ \wedge \ \forall_x (x \in B \to x \in A)$$

é verdadeira, i.e., $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. □

2.2 Operações com Conjuntos

Seguidamente estudamos alguns processos de construção que permitem, a partir de conjuntos dados, obter novos conjuntos.

Definição 2.3. *Sejam A e B conjuntos. Chama-se* **união** *ou* **reunião de A com B**, *e representa-se por $A \cup B$, o conjunto cujos elementos são os elementos de A e os elementos de B, ou seja,*

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}.$$

Exemplo 2.7. *Dados os subconjuntos $A = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$ e $C =]-\infty, 3]$ de $\mathbb{R}$, tem-se: $A \cup B = \{-1, -2, 0, 2, \pi, 7\}$, $A \cup C =]-\infty, 3] \cup \{\pi, 7\}$.*

Apresentam-se de seguida algumas propriedades relativas à união de conjuntos.

Proposição 2.4. *Sejam A, B e C conjuntos. Então,*

(1) $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$.

(2) $A \cup \emptyset = A$.

(3) $A \cup A = A$.

(4) $A \cup B = B \cup A$.

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(6) se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$.

Demonstração. Demonstramos as propriedades (1), (2), (5) e (6), ficando a prova das restantes como exercício.

(1) Vamos mostrar que $A \subseteq A \cup B$. Seja $x \in A$. Então,

$$x \in A \vee x \in B$$

é uma proposição verdadeira, pelo que $x \in A \cup B$. Logo a proposição

$$\forall_x \, (x \in A \to x \in A \cup B)$$

também é verdadeira e, portanto, $A \subseteq A \cup B$. A prova de $B \subseteq A \cup B$ é semelhante.

(2) Mostremos que $A \cup \emptyset = A$. Da propriedade (1), sabe-se que $A \subseteq A \cup \emptyset$. Para termos a prova de $A \cup \emptyset = A$, resta mostrar que $A \cup \emptyset \subseteq A$. Consideremos $x \in A \cup \emptyset$. Então

$$x \in A \vee x \in \emptyset.$$

Dado que $\emptyset$ não tem elementos, podemos concluir que $x \in A$. Logo a proposição

$$\forall_x \, (x \in A \cup \emptyset \to x \in A)$$

é verdadeira e, portanto, $A \cup \emptyset \subseteq A$. De $A \subseteq A \cup \emptyset$ e $A \cup \emptyset \subseteq A$, tem-se $A \cup \emptyset = A$

(5) Facilmente se prova que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. De facto, para todo o objeto x, tem-se

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cup B) \cup C & \Leftrightarrow & x \in A \cup B \ \vee \ x \in C & \text{(definição de união)} \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C & \text{(definição de união)} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) & \text{(associatividade de } \vee\text{)} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in B \cup C) & \text{(definição de união)} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \cup (B \cup C). & \text{(definição de união)} \end{array}$$

Logo, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(6) Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. Pela propriedade (1), temos $B \subseteq A \cup B$. Logo, resta mostrar que $A \cup B \subseteq B$. Dado que $A \subseteq B$, todo o elemento de A é também elemento de B, donde segue que, para todo o objeto x,

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup B & \Rightarrow & x \in A \vee x \in B & \text{(definição de } A \cup B\text{)} \\ & \Rightarrow & x \in B \vee x \in B & (A \subseteq B) \\ & \Rightarrow & x \in B. & \text{(idempotência de } \vee\text{)} \end{array}$$

Portanto, $A \cup B \subseteq B$. De $B \subseteq A \cup B$ e $A \cup B \subseteq B$ tem-se $A \cup B = B$. □

Definição 2.5. *Sejam A e B conjuntos. Chama-se* **interseção de A com B**, *e representa-se por $A \cap B$, o conjunto cujos elementos pertencem simultaneamente a A e a B, isto é,*

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}.$$

Exemplo 2.8. *Dados os subconjuntos* $A = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$, $B = \{-1, 0, 2, 6\}$ *e* $C =]2, \pi[$ *de* $\mathbb{R}$, *tem-se:* $A \cap B = \{0, 2\}$, $A \cap C = \emptyset$.

A definição seguinte formaliza a noção de dois conjuntos que não têm elementos em comum.

Definição 2.6. *Sejam* A *e* B *conjuntos. Os conjuntos* A *e* B *dizem-se* **disjuntos** *se* $A \cap B = \emptyset$.

No resultado seguinte listam-se algumas propriedades relativas à operação de intersecão de conjuntos.

Proposição 2.7. *Sejam* A, B *e* C *conjuntos. Então,*

(1) $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$.

(2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(3) $A \cap A = A$.

(4) $A \cap B = B \cap A$.

(5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(6) se $A \subseteq B$, *então* $A \cap B = A$.

Demonstração. Apresentamos a prova das propriedades (1), (2) e (5). A prova das restantes propriedades fica ao cuidado do leitor.

(1) Mostremos que $A \cap B \subseteq A$. Dado $x \in A \cap B$, tem-se

$$x \in A \wedge x \in B,$$

pelo que, $x \in A$ é uma proposição verdadeira. Logo, a proposição

$$\forall_x \, (x \in A \cap B \to x \in A)$$

também é verdadeira e, portanto, $A \cap B \subseteq B$. A prova de $B \subseteq A \cap B$ é análoga.

(2) Pretendemos mostrar que $A \cap \emptyset = \emptyset$. No sentido de fazer esta prova por redução ao absurdo, admitamos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$. Então, existe um objeto x tal que

$$x \in A \wedge x \in \emptyset;$$

em particular, $x \in \emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos. Esta contradição resultou de admitirmos que $A \cap \emptyset$ tinha elementos. Assim, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(5) Mostremos que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. De facto, para todo o objeto x, tem-se

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cap B) \cap C & \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \in (B \cap C) & \text{(definição de interseção)} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) & \text{(definição de interseção)} \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C & \text{(associatividade de } \wedge) \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \wedge x \in C & \text{(definição de interseção)} \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \cap C & \text{(definição de interseção)} \end{array}$$

e, portanto, a proposição

$$\forall_x \left((x \in A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)\right)$$

é verdadeira. Logo $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. □

Sejam A, B e C conjuntos. Tendo em conta que as operações de união e de interseção de conjuntos gozam da propriedade associativa, podemos escrever, sem ambiguidade, $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$.

Definição 2.8. *Sejam A e B conjuntos. Chama-se* **complementar** *de B* **em** *A, e representa-se por $A \setminus B$ ou $C_A(B)$, o conjunto cujos elementos pertencem a A mas não a B, ou seja,*

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Por vezes, o complementar de B em A é também designado por **diferença de** *A* **com** *B e representado por $A - B$. Quando não existe ambiguidade relativamente ao conjunto A, é usual escrever $\overline{B}$ ou B' para representar $A - B$.*

Exemplo 2.9. *Dados os subconjuntos $A = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$ e $B =]-\infty, 3]$ de $\mathbb{R}$, tem-se: $A \setminus B = \{\pi, 7\}$, $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) =]3, \pi[\cup]\pi, 7[\cup]7, +\infty[$, $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) \cap (A \cup B) = \emptyset$.*

A respeito da operação de complementação, provam-se facilmente as propriedades seguintes.

Proposição 2.9. *Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as propriedades seguintes:*

(1) $A \setminus \emptyset = A$.

(2) se $A \subseteq B$, *então* $A \setminus B = \emptyset$.

(3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(4) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Demonstração. Apresentamos a prova das propriedades (1) e (3).

(1) Por definição, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a $\emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos, pelo que não se retira qualquer elemento a A e, portanto, $A \setminus \emptyset = A$.

(3) Pretendemos mostrar que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, isto é, pretende-se provar que a proposição

$$\forall_x \ (x \in A \setminus (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C))$$

é verdadeira. Ora, para todo o objeto x, tem-se

$$\begin{array}{rcll}
x \in A \setminus (B \cup C) & \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \notin (B \cup C) & \text{(definição de complementar)} \\
& \Leftrightarrow & x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) & \text{(definição de união)} \\
& \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) & \text{(lei de De Morgan)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in A) \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) & \text{(idempotência de } \wedge\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) & \text{(associatividade e comutatividade de } \wedge\text{)} \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \setminus B) \wedge x \in (A \setminus C) & \text{(definição de complementar)} \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & \text{(definição de interseção)}
\end{array}$$

e, portanto, a proposição

$$\forall_x \ (x \in A \setminus (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C))$$

é verdadeira. Logo $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

□

Apresentam-se seguidamente outros processos para construir conjuntos a partir de conjuntos dados; em particular, estudamos o *conjunto potência* de um dado conjunto e o *produto cartesiano* de conjuntos.

Em certas situações pode ser útil considerar o conjunto de todos os subconjuntos de um determinado conjunto, o que motiva a definição seguinte.

Definição 2.10. *Seja A um conjunto. Chamamos* **conjunto das partes de** A *ou* **conjunto potência de** A*, e representamos por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A, ou seja, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.*

Exemplo 2.10. *Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, \{2\}\}$ e $C = \emptyset$. Então*

(1) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

(2) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$.

(3) $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset\}$.

Proposição 2.11. *Sejam A e B conjuntos. Então*

(1) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$.

(2) Se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(3) Se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Demonstração. (1) Para qualquer conjunto A, tem-se $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$. Logo $\emptyset$ e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

(2) Admitamos que $A \subseteq B$. Vamos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Dado $X \in \mathcal{P}(A)$, tem-se $X \subseteq A$. Logo, como $A \subseteq B$, segue que $X \subseteq B$, o que significa que $X \in \mathcal{P}(B)$. Provámos, desta forma, que todo o elemento de $\mathcal{P}(A)$ é também elemento de $\mathcal{P}(B)$ e, portanto, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(3) Seja A um conjunto com n elementos, digamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cada subconjunto B de A pode caracterizar-se por uma sequência de 0's e 1's de comprimento n: caso o i-enésimo elemento da sequência seja 1 tal significa que $a_i \in B$; caso o i-enésimo da sequência seja 0 tal significa que $a_i \notin B$. Basta agora observar que existem 2^n sequências de 0's e 1's de comprimento n.□ □

Dados objetos a, b, os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, não interessando a ordem pela qual os elementos ocorrem. No entanto, em certas situações, interessa considerar os objetos por determinada ordem. Sendo assim, introduz-se, em termos de conjuntos, a noção de par ordenado.

Definição 2.12. *Sejam a, b objetos. O* **par ordenado de a e b**, *representado por (a, b), é o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.*

Observe-se que o par (a, a) é o conjunto $\{\{a\}\}$. Reciprocamente, se (a, b) é um conjunto singular, tem-se $\{a\} = \{a, b\}$, donde $b \in \{a\}$ e, portanto, $a = b$.

Proposição 2.13. *Para quaisquer objetos a, b, c, d, tem-se $(a, b) = (c, d)$ se e só se $a = c$ e $b = d$.*

Num par ordenado a ordem dos elementos é relevante: dados dois objetos a, b, se $a \neq b$, tem-se $(a, b) \neq (b, a)$. Num par ordenado (a, b) designa-se o objeto a como a **primeira componente (ou coordenada)** e o objeto b como a **segunda componente (ou coordenada)**.

Os pares ordenados permitem formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

Definição 2.14. *Sejam A, B conjuntos. O* **produto cartesiano de A por B**, *representado por $A \times B$, é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) em que $a \in A$ e $b \in B$, i.e., $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$.*

Exemplo 2.11.
(1) *Sejam* $A = \{1,2\}$ *e* $B = \{a,b,c\}$. *Então*

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}; \\ B \times A &= \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}. \end{aligned}$$

É claro que $A \times B \neq B \times A$.

(2) *Sejam* $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *e* $B = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{N}\}$. *Então*

$$A \times B = \{(2n, 2m+1) \mid m,n \in \mathbb{N}\}.$$

(3) *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$. *Os elementos de* $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *podem ser representados geometricamente como pontos dum plano munido de um eixo de coordenadas.*

Apresentam-se de seguida algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano.

Proposição 2.15. *Para quaisquer conjuntos* A, B, C *e* D, *tem-se:*

(1) $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$.

(2) Se $A, B \neq \emptyset$, *então* $A \subseteq C$ *e* $B \subseteq D$ *se e só se* $A \times B \subseteq C \times D$.

(3) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;

(4) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(5) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;

(6) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(7) $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;

(8) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Demonstração. Apresentamos a prova das propriedades (2) e (7).

(2) Sejam A e B conjuntos não vazios. Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ se e só se $A \times B \subseteq C \times D$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ e mostremos que $A \times B \subseteq C \times D$. Seja $(a,b) \in A \times B$. Então, por definição de produto cartesiano, $a \in A$ e $b \in B$. Mas, por hipótese, todo o elemento de A é elemento de C e todo o elemento B é elemento de D. Logo $a \in C$ e $b \in D$ e, portanto, $(a,b) \in C \times D$. Assim, a proposição

$$\forall_{(a,b)} \; ((a,b) \in A \times B \to (a,b) \in C \times D)$$

é verdadeira, pelo que $A \times B \subseteq C \times D$.

($\Leftarrow$) Admitamos que $A \times B \subseteq C \times D$. Queremos mostrar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$. Seja $a \in A$. Uma vez que $B \neq \emptyset$, existe $b \in B$. Então, por definição de produto cartesiano, $(a,b) \in A \times B$.

Por hipótese, todo o elemento de $A \times B$ é elemento de $C \times D$. Logo $(a, b) \in C \times D$, pelo que $a \in C$ e $b \in D$. Assim, a proposição

$$\forall_a \, (a \in A \to a \in C)$$

é verdadeira e, portanto $A \subseteq C$. De modo análogo prova-se que $B \subseteq D$.

(7) Mostremos que $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$. Para todo o par (x, y),

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) \;&\Leftrightarrow\; (x,y) \in C \times A \wedge (x,y) \notin C \times B \\
&\Leftrightarrow\; (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \notin C \vee y \notin B) \\
&\Leftrightarrow\; ((x \in C \wedge y \in A) \wedge x \notin C) \\
&\qquad \vee((x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B) \\
&\Leftrightarrow\; (x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B \\
&\Leftrightarrow\; x \in C \wedge (y \in A \wedge y \notin B) \\
&\Leftrightarrow\; x \in C \wedge y \in (A/B) \\
&\Leftrightarrow\; (x,y) \in C \times (A/B).
\end{aligned}$$

Logo, a proposição

$$\forall_{(a,b)} \; (a,b) \in C \times (A \setminus B) \leftrightarrow (a,b) \in (C \times A) \setminus (C \times B)$$

é verdadeira e, portanto $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$. □

Observe-se que se A e B são conjuntos com p e q elementos ($p, q \in \mathbb{N}_0$), respectivamente, então $A \times B$ tem $p \times q$ elementos.

2.3 Famílias de Conjuntos

Em diversas situações existe a necessidade de considerarmos conjuntos cujos objetos são conjuntos. A uma coleção de conjuntos dá-se a designação de *família de conjuntos*.

Definição 2.16. *Um conjunto $\mathcal{F}$ diz-se uma* **família de conjuntos** *se todos os seus elementos são conjuntos.*

Definição 2.17. *Sejam $\mathcal{F}$ e I conjuntos. O conjunto $\mathcal{F}$ diz-se uma* **família de conjuntos indexada por** *I se, para cada $i \in I$, existe um conjunto A_i tal que $\mathcal{F} = \{A_i \,|\, i \in I\}$. Escreve-se $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$. Ao conjunto I dá-se o nome de* **conjunto de índices**.

Exemplo 2.12. *Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, seja $A_i = \{x \,|\, x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \leq i\}$. Assim, $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ é uma família de conjuntos indexada por $\mathbb{N}_0$.*

Embora, em geral, seja mais simples trabalhar com famílias indexadas, existem famílias de conjuntos para as quais não é natural encontrar um conjunto de índices, como é o caso da família seguinte

$$\mathcal{B} = \{B \mid B \subseteq A \text{ e } B \text{ é finito}\}.$$

No entanto, qualquer família de conjuntos pode ser indexada por algum conjunto; em particular, pode-se considerar qualquer família de conjuntos $\mathcal{F}$ indexada por $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F} = \{A_X\}_{X\in\mathcal{F}}$.

Vejamos, agora, de que forma se generalizam as noções de união e interseção a famílias de conjuntos.

Definição 2.18. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. A* **união de** *$\mathcal{F}$, representada por $\bigcup\mathcal{F}$, é o conjunto definido por*

$$\bigcup\mathcal{F} = \{x \mid \exists_{A\in\mathcal{F}}\ x \in A\}.$$

Se $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ é uma família de conjuntos indexada por um conjunto I, escreve-se $\bigcup_{i\in I} A_i$ para representar $\bigcup\mathcal{F}$; em particular, no caso em que $I = \{1, \ldots, n\}$, escreve-se $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ para representar $\bigcup\mathcal{F}$.

Observe-se que: para qualquer família de conjuntos $\mathcal{F}$ e para qualquer $A \in \mathcal{F}$, tem-se $A \subseteq \bigcup\mathcal{F}$; se $\mathcal{F} = \emptyset$, então $\bigcup\mathcal{F} = \emptyset$.

Definição 2.19. *Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de conjuntos. A* **interseção de** *$\mathcal{F}$, representada por $\bigcap\mathcal{F}$, é o conjunto definido por*

$$\bigcap\mathcal{F} = \{x \mid \forall_{A\in\mathcal{F}}\ x \in A\}.$$

Se $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ é uma família de conjuntos indexada por um conjunto I, escreve-se $\bigcap_{i\in I} A_i$ para representar $\bigcap\mathcal{F}$; no caso em que $I = \{1, \ldots, n\}$, escreve-se $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ para representar $\bigcap\mathcal{F}$.

Para qualquer família não vazia de conjuntos $\mathcal{F}$ e para qualquer $A \in \mathcal{F}$, tem-se $\bigcap\mathcal{F} \subseteq A$.

Caso $\mathcal{F}$ seja uma família de subconjuntos de um conjunto U e $\mathcal{F} = \emptyset$, alguns autores convencionam que $\bigcap\mathcal{F} = U$.

Exemplo 2.13.

(1) Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, seja $A_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \leq i\}$. Então:

(i) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \mathbb{N}_0$; *(ii)* $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \{0\}$.

(2) Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $B_i = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \frac{1}{i} < x < 8 + \frac{3}{i}\}$. Então:

(i) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} B_i = (0, 11)$; *(ii)* $\displaystyle\bigcap_{i\in I} B_i = (1, 8]$.

Muitas das propriedades válidas para a união e para a interseção são extensíveis a famílias de conjuntos.

Proposição 2.20. *Sejam $\mathcal{F}$ uma família não vazia de conjuntos e B um conjunto. Então*

(1) $A \subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X$, *para todo* $A \in \mathcal{F}$.

(2) $\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X \subseteq A$, *para todo* $A \in \mathcal{F}$.

(3) $B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$.

(4) $B \cup \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcap_{X\in\mathcal{F}}(B \cup X)$.

(5) $B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$.

(6) $B \setminus \left(\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X\right) = \bigcap_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$.

(7) $B \times \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcap_{X\in\mathcal{F}} (B \times X)$.

(8) $B \times \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \times X)$.

Demonstração. Apresenta-se a prova das propriedades (3) e (5) , ficando a prova das restantes ao cuidado do leitor.

(3) Seja $x \in B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. Então $x \in B$ e $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X$. Daqui segue que $x \in Y$, para algum $Y \in \mathcal{F}$. Logo $x \in B \cap Y$, para algum $Y \in \mathcal{F}$, pelo que $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$. Portanto, $B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right) \subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$.
Reciprocamente, admitamos que $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$. Então existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $x \in B \cap Y$, isto é, existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $x \in B$ e $x \in Y$. Logo $x \in B$ e $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X$ e, portanto, $x \in B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. Assim, $\bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X) \subseteq B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right)$.

(5) Seja $x \in B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. Então $x \in B$ e $x \notin \bigcap_{X\in\mathcal{F}} X$. Logo $x \in B$ e $x \notin Y$, para algum $Y \in \mathcal{F}$, pelo que $x \in B \setminus Y$. Assim, $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \setminus X)$. Por conseguinte, $B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) \subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$.
Reciprocamente, admitamos que $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$. Então, para algum $Y \in \mathcal{F}$, $x \in B \setminus Y$, isto é, $x \in B$ e $x \notin Y$. Assim, $x \in B$ e $x \notin \bigcap_{X\in\mathcal{F}} X$, ou seja, $x \in B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. Portanto, $\bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X) \subseteq B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. □

Facilmente, pode-se verificar que as propriedades (1), (3) e (9) da proposição anterior são também válidas quando $I = \emptyset$.

A noção de produto cartesiano de conjuntos também pode ser generalizada. Nesta secção generalizamos a noção de produto cartesiano a famílias finitas de conjuntos, mas esta noção pode ser generalizada a famílias infinitas de conjuntos (de momento consideramos apenas a noção intuitiva de conjunto *finito* e conjunto *infinito*, estes conceitos serão definidos rigorosamente no capítulo 6).

Se A, B e C são conjuntos, podemos considerar os conjuntos $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$. Rigorosamente, estes conjuntos são diferentes, uma vez que no primeiro caso temos elementos da forma $((a, b), c)$ e no segundo caso os elementos são da forma $(a, (b, c))$. Porém, uma vez que não existe diferença prática entre estes dois conjuntos, é usual representar qualquer um dos conjuntos por $A \times B \times C$ e os seus elementos por (a, b, c).

Mais geralmente, tem-se

Definição 2.21. *Seja $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos indexada por $I = \{1, \ldots, n\}$. Designa-se por produto cartesiano de A_1, ..., A_n, e representa-se por $A_1 \times \cdots \times A_n$ ou por $\prod_{i\in I} A_i$, o conjunto formado pelos n-uplos ordenados $(a_1, \ldots, a_n)$ em que $a_1 \in A_1$, ..., $a_n \in A_n$, i.e.,*

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

No caso em que $A_1 = \cdots = A_n = A$, escrevemos A^n em alternativa a $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Se $I = \{1, \ldots, n\}$ e se cada conjunto A_i tem p_i elementos, então $\prod_{i \in I} A_i$ tem $p_1 \times \cdots \times p_n$ elementos.

2.4 Axiomas da Teoria de Conjuntos

A noção de conjunto utilizada nas secções anteriores é uma noção intuitiva. Esta noção, adotada por Georg Cantor no desenvolvimento da teoria de conjuntos, é também adotada pela maioria dos matemáticos contemporâneos. Este conceito, embora seja adequado para a maioria dos resultados estudados ao longo do curso, nem sempre é suficiente; recorde-se que pelo Princípio da Abstração seria possível construir o conjunto $\{x \,|\, x \notin x\}$, porém tal construção conduz a problemas como o do Paradoxo de Russel. Assim, no sentido de resolver problemas deste tipo e de se conseguir um estudo mais rigoroso da teoria de conjuntos, vários sistemas axiomáticos foram desenvolvidos ao longo do tempo. O sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF), desnvolvido por Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel, é um desses sistemas.

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

1. Axioma da Extensionalidade Dois conjuntos são iguais se e só se têm os mesmos elementos.

$$\forall_x \forall_y \, (x = y \leftrightarrow \forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

2. Axioma do Conjunto Vazio Existe um conjunto sem elementos.

$$\exists_x \forall_y \, (y \notin x).$$

3. Axioma do Par Para quaisquer dois conjuntos x e y, existe um conjunto cujos elementos são precisamente os conjuntos x e y.

$$\forall_x \forall_y \exists_z \forall_w \, (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y)).$$

4. Axioma da Separação Seja $p(z)$ um predicado. Para qualquer conjunto x existe um conjunto cujos elementos são exatamente todos os conjuntos $z \in x$ para os quais $p(z)$ se verifica.

$$\forall_x \exists_y \forall_z \, (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge p(z))).$$

5. Axioma do Conjunto Potência Para todo o conjunto x existe um conjunto z constituído exatamente por todos os subconjuntos de x.

$$\forall_x \exists_y \forall_z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

6. Axioma da União Para qualquer conjunto x existe um conjunto y que é a união de todos os elementos de x.

$$\forall_x \exists_y \forall_z (z \in y \leftrightarrow \exists_w \, (z \in w \wedge w \in x)).$$

7. Axioma do infinito Existe um conjunto indutivo.

$$\exists_x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

8. Axioma da substituição Seja $p(x, y)$ um predicado nas variáveis x e y. Para qualquer conjunto z, se para qualquer $x \in z$ existe um único y tal que $p(x, y)$, então existe um conjunto w constituído por todos os elementos y tais que $p(x, y)$ para algum $x \in z$.

$$\forall_x ((\forall_{x \in z} \exists^1{}_y \, p(x, y)) \rightarrow \exists_w \forall_y (y \in w \leftrightarrow \exists_{x \in z} p(x, y))).$$

9. Axioma da regularidade Todo o conjunto não vazio x tem um elemento disjunto de x.

$$\forall_x \exists_y (y \in x \ \wedge \ y \cap x = \emptyset).$$

Para além dos axiomas incluídos no sistema ZF, Zermelo estabeleceu um outro axioma, o Axioma da Escolha, o qual desempenha um papel fundamental no estudo de conjuntos infinitos. O sistema de axiomas resultante de acrescentar o Axioma da Escolha ao sistema ZF é denotado por ZFC.

Axioma da Escolha Para qualquer família não vazia $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos não vazios, é possível escolher uma família $(x_i)_{i \in I}$ de elementos tais que, para cada $i \in I$, se tem $x_i \in A_i$.

Intuitivamente, este axioma estabelece que, dada uma coleção não vazia de conjuntos não vazios, é possível escolher simultaneamente um elemento de cada um dos conjuntos. O Axioma da Escolha admite várias formulações, como, por exemplo, a seguinte:

> Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios. Então existe uma família de conjuntos $(C_i)_{i \in I}$ tal que $C_i \subseteq A_i$ e C_i tem exatamente um elemento, para todo $i \in I$.

Embora o Axioma da Escolha seja aceite pela maioria dos matemáticos e existam resultados importantes que são estabelecidos com base neste axioma, a aceitação do Axioma da Escolha não é consensual. Uma das razões pelas quais este axioma foi inicialmente controverso prendia--se com a hipótese de ser possível prová-lo a partir dos restantes axiomas de Zermelo-Fraenkel e, por isso, seria redundante. Porém, em 1963, Paul Cohen e Kurt Gödel vieram a provar que o Axioma da Escolha é independente dos restantes axiomas do sistema ZF. Outra das razões que levam alguns matemáticos a questionar este axioma prende-se com o facto de este não ser construtivo. Embora seja lícito escolher um elemento em cada um dos conjuntos de uma coleção finita de conjuntos não vazios, será que é possível garantir esta escolha quando se considera uma família infinita de conjuntos não vazios? Atendendo a que a aceitação do Axioma da Escolha não é consensual, é usual referir expressamente a utilização deste axioma sempre que é aplicado na prova de algum resultado.