Tópicos de Matemática

folha 13

87. Para cada uma das relações seguintes indique o respetivo domínio e imagem.

    (a) S é a relação de $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ em $B = \{1,2,3\}$ dada por
    $$S = \{(0,1),(1,1),(2,2),(3,2),(4,3)\}\,.$$

    (b) R é a relação em $\mathbb{R}$ dada por $R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\big\}$.

    (c) $|$ é a relação "divide" em $\{2,3,4,6,9,10,12,20\}$ definida por
    $$a \mid b \;\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{N} \quad b = na.$$

    (d) Dado um conjunto A, T é a relação de A em $\mathcal{P}(A)$ dada por $\{(x,X) \,|\, x \in X\}$.

    (e) $<$ é a relação "menor" usual em $\mathbb{N}$.

88. Seja $A = \{2,4,6,8,10\}$. Considere as seguintes relações em A: $R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(10,8)\}$, $S = \{(10,2),(10,8)\}$ e $T = \{(6,2),(6,4),(8,10)\}$. Determine

    (a) R^{-1} (b) $R^{-1} \cup S^{-1}$
    (c) $T \setminus S^{-1}$ (d) $T^{-1} \cap S$
    (e) $S \circ T$ (f) $R \circ T$
    (g) $S^{-1} \circ T^{-1}$ (h) $S^{-1} \circ S$

89. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{x,y,w,z\}$. Considere as relações binárias de A em B e de B em A, respetivamente:
    $$\begin{aligned} R &= \{(1,x),(1,z),(2,y),(2,z)\} \\ S &= \{(x,1),(x,3),(y,2),(w,2),(z,3)\}. \end{aligned}$$
    Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.

    (a) Determine:
    i) R^{-1} ii) S^{-1} iii) T iv) $T \circ T$ v) U vi) $U \circ U$.

    (b) Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

    (c) Indique o domínio e a imagem de R.

    (d) Dê um exemplo de relações binárias não vazias R' de A em B e S' de B em A, tais que $S' \circ R' \neq \emptyset$ e $R' \circ S' = \emptyset$.

90. Investigue se as igualdades que se seguem são verdadeiras, para quaisquer relações R_1, R_2 e R_3 definidas em conjuntos apropriados.

    (a) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \circ R_2^{-1})$
    (b) $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$
    (c) $(R_1 \cap R_2) \cup R_3 = R_1 \cap (R_2 \cup R_3)$
    (d) $(R_1 \cup R_2) \cup R_3 = R_1 \cup (R_2 \cup R_3)$

Tópicos de Matemática

folha 14

91. Sejam A um conjunto e R, S e T relações binárias definidas em A. Mostre que:

   (a) $(R^{-1})^{-1} = R$;
   (b) Se $R \subseteq S$ então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$;
   (c) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
   (d) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
   (e) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$;
   (f) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$;
   (g) $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$;
   (h) $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$.

92. Seja A um conjunto. Diga, justificando, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas.

   (a) Para qualquer relação binária R definida em A, $R \circ R^{-1} = id_A$.
   (b) Para qualquer relação binária R definida em A, $R \circ id_A = id_A \circ R = R$.
   (c) Para qualquer relação binária R definida em A, $R \subseteq R \circ \omega_A$.

93. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações em A:

   $R_1 = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$,
   $R_2 = \{(2, 3)\}$,
   $R_3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$,
   $R_4 = \{(a, a) \mid a \in A\} = \mathrm{id}_A$.

   Diga, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação

   (a) reflexiva;
   (b) simétrica;
   (c) anti-simétrica;
   (d) transitiva.

94. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (3, 1)\}$ uma relação binária em A. Determine a menor relação binária em A que inclua R e que seja reflexiva (respetivamente, simétrica, transitiva e de equivalência).

95. Seja R uma relação binária em A. Mostre que:

   (a) R é reflexiva em A se e só se $id_A \subseteq R$.
   (b) R é simétrica em A se e só se $R^{-1} = R$.
   (c) R é transitiva em A se e só se $R \circ R \subseteq R$.
   (d) R é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$.

96. Sejam A um conjunto e R uma relação simétrica e transitiva em A. Mostre que

   (a) R não é necessariamente reflexiva.
   (b) Se o domínio de R é A, então R é reflexiva.

97. Seja $A = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação de equivalência R em A definida por $x\ R\ y$ se e só se $x^2 = y^2$. Indique todos os elementos da classe $[-3]_R$ e determine o conjunto quociente A/R.

98. Seja $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$ e considere a relação de equivalência $\sim$ em A definida por $x \sim y$ se e só se $x + y = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Indique todos os elementos da classe $[2]_\sim$ e determine o conjunto quociente $A/\sim$.

Tópicos de Matemática

folha 15

99. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e considere a relação $\sim$ em $\mathcal{P}(A)$ definida por

$$X \sim Y \text{ se e só se } X \cup \{1, 2\} = Y \cup \{1, 2\}.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

(b) Indique todos os elementos da classe $[\{1\}]_\sim$.

(c) Determine o conjunto quociente $\mathcal{P}(A) / \sim$.

100. Considere as relações R_1, R_2 e R_3 apresentadas a seguir:

- R_1 é a relação em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ definida por $x\ R_1\ y$ se e só se x e y têm o mesmo resto na divisão inteira por 3;
- R_2 é a relação em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $(x, y)\ R_2\ (z, w)$ se e só se $y = w$;
- R_3 é a relação em $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por $(a, b)\ R_3\ (c, d)$ se e só se $ad = bc$.

(a) Verifique que R_1, R_2 e R_3 são relações de equivalência.

(b) Para as relações R_1 e R_2 descreva cada classe de equivalência e indique o conjunto quociente.

(c) Mostre que a correspondência $[(a, b)] \mapsto \frac{a}{b}$ define uma bijecção $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/R_3 \to \mathbb{Q}$.

101. Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ e sejam

$$\Pi_1 = \{\{2, 4\}, \{3\}, \{4, 6\}, \{3, 6, 7\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{2, 4, 6\}, \{3, 7\}\},$$
$$\Pi_3 = \{\{2\}, \{3, 4, 7\}\}, \quad \Pi_4 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\},$$
$$\Pi_5 = \{\{2\}, \emptyset, \{3, 4\}, \{6, 7\}\}, \quad \Pi_6 = \{\{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4\}\}.$$

(a) Diga, justificando, quais dos conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ são partições de A.

(b) Para os conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ que são partições, determine a relação de equivalência em A associada a Π_j.

102. Sejam $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 26\}$ e $\sim$ a relação de equivalência em A definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores naturais}$$

Determine a partição de A associada a $\sim$, isto é, o conjunto quociente $A/\sim$.

103. Considere a relação $\sim$ em $\mathbb{Z}$ definida por

$$x \sim y \text{ se e só se } |x| = |y|.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

(b) Determine a partição de $\mathbb{Z}$ associada a $\sim$, isto é, o conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim$.

104. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 as seguintes relações em A:

$$\rho_1 = \{(1, 1), (4, 1), (2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$
$$\rho_2 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4)\}$$
$$\rho_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$
$$\rho_4 = \{(1, 1), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4), (3, 1)\}$$

Indique se cada uma destas relações é ou não uma ordem parcial e, para cada ordem parcial, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

Tópicos de Matemática

folha 16

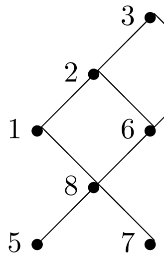
105. Mostre que os seguintes pares são c.p.o.'s:

(i) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto; (ii) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "*divide*".

106. Construa diagramas de Hasse para os seguintes c.p.o.'s:

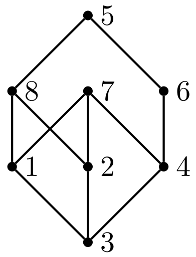
(i) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$; (ii) $(A, |_A)$, sendo $A = \{2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$.

107. Sejam $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 2, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 8\}$. Considere o c.p.o. $(P, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:



Para cada um dos conjuntos X e Y determine, caso existam, os majorantes e minorantes, o supremo e o ínfimo, os elementos maximais e minimais e o máximo e o mínimo.

108. Seja $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Considere o c.p.o. $(P, \leq)$ cuja relação de ordem parcial é dada pelo diagrama de Hasse



(a) Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine, caso existam, $\text{Maj}(X)$, $\text{Min}(X)$, $\max(X)$ e $\min(X)$.

(b) Justifique que $\sup(\emptyset) = 3$ e que não existe $\inf(\emptyset)$.

(c) Dê exemplo de um subconjunto de P com exatamente 3 elementos e que tenha 2 elementos minimais e 2 elementos maximais.

109. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:

(a) Se X tem um elemento maximal então X tem elemento máximo;

(b) Se X tem elemento máximo então X tem um elemento maximal;

(c) Se existe $\sup(X)$ então X tem um elemento maximal;

(d) Se X tem um elemento maximal então existe $\sup(X)$;

110. Seja $(A, \leq)$ um c.p.o.. Mostre que o supremo (ínfimo) de um subonjunto X de A, caso exista, é único.

111. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o.. e $X \subseteq A$. Mostre que se m é o elemento máximo de X, então m é o supremo de X.

Tópicos de Matemática

folha 17

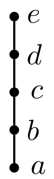
112. (a) Sejam $(P, \leq)$ um c.p.o. e $\leq_d$ a relação binária definida em P por

$$a \leq_d b \text{ se e só se } b \leq a.$$

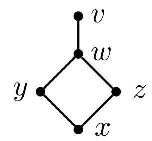
Mostre que $\leq_d$ é uma relação de ordem parcial.

(b) Considere o c.p.o. $(P, \leq)$ definido no exercício 107. e construa o diagrama de Hasse de $(P, \leq_d)$.

113. Considere os reticulados $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ a seguir representados



$(P_1, \leq_1)$



$(P_2, \leq_2)$

Para cada uma das aplicações h seguintes, diga se: i. h é isótona; ii. h é um isomorfismo de c.p.o.'s.

(a) $h : P_1 \to P_1$, definida por $h(a) = a$, $h(b) = c$, $h(c) = d$, $h(d) = e$, $h(e) = e$.

(b) $h : P_1 \to P_2$, definida por $h(a) = x$, $h(b) = y$, $h(c) = z$, $h(d) = w$, $h(e) = v$.

(c) $h : P_2 \to P_1$, definida por $h(x) = a$, $h(y) = b$, $h(z) = c$, $h(w) = d$, $h(v) = e$.

(d) $h : P_2 \to P_2$, definida por $h(x) = x$, $h(y) = z$, $h(z) = y$, $h(w) = w$, $h(v) = v$.

114. Sejam $(\mathbb{N}, \leq)$ e $(\mathbb{N}, \leq')$ os c.p.o.'s cujas relações de ordem são definidas em $\mathbb{N}$ por

$$a \leq b \text{ se e só se } a \,|\, b,$$

$$a \leq' b \text{ se e só se } b = a^k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

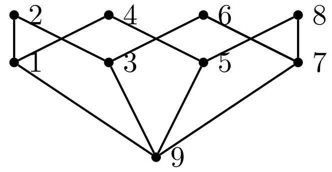
Mostre que a função identidade $id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é um homomorfismo de $(\mathbb{N}, \leq')$ em $(\mathbb{N}, \leq)$, mas não é um isomorfismo.

115. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $f : A \to \mathcal{P}(A)$ a aplicação definida por

$$f(x) = \{y \,|\, y \in A \wedge y \leq x\}.$$

Prove que f é um mergulho de ordem de $(A, \leq)$ em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Justifique que f é injetiva.

116. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e o c.p.o. $(A, \leq)$ representado pelo diagrama de Hasse



Indique, justificando:

(a) Elementos $x, y \in A$ não comparáveis e tais que $\{x, y\}$ tenha supremo.

(b) Um subconjunto X de A com exatamente 4 elementos e tais que $(X, \leq_X)$ seja um reticulado.

(c) Um subconjunto Y de A que tenha exatamente 2 elementos maximais e 3 elementos minimais.

Tópicos de Matemática

folha 18

117. Considere em $\mathbb{N}$ a relação $|$ definida por

$$x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = kx.$$

(a) Mostre que o c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$ não é uma cadeia.

(b) Diga, justificando, se $(\mathbb{N}, |)$ tem elemento máximo ou elemento mínimo.

(c) Mostre que $(\mathbb{N}, |)$ é um reticulado, indicando para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, o supremo e o ínfimo de $\{a, b\}$.

(d) Considere $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 36\}$ e $Y = \{1, 2, 5, 6, 12, 20, 30, 120\}$.

(i) Construa os diagramas de Hasse de $(X, |_X)$ e de $(Y, |_Y)$.

(ii) Indique, caso existam, os elementos minimais e os elementos maximais de X.

(iii) Indique, caso existam, elementos $a, b \in Y$ tais que:

(α) exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |_Y)$ e este supremo seja diferente do supremo de $\{a, b\}$ em $(\mathbb{N}, |)$;

(β) não exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |_Y)$.

(iv) Dê exemplo de um subconjunto Z de X tal que $(Z, |_Z)$ tenha elemento máximo e elemento mínimo e não seja um reticulado.

118. Sejam $(A, \leq)$ e $(B, \leq')$ c.p.o.'s e $\varphi : A \to B$ um isomorfismo. Mostre que se a relação $\leq$ é uma ordem total, então $\leq'$ também é uma ordem total.

119. Seja A um conjunto. Mostre que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado com elemento máximo e elemento mínimo.

120. Seja $(A, \leq)$ um c.p.o.. Mostre que se $(A, \leq)$ é um conjunto bem ordenado, então $(A, \leq)$ é uma cadeia.