Tópicos de Matemática

folha 9

63. Prove, por indução, as seguintes propriedades dos números naturais:

    (a) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$, para todo $n \geq 1$.

    (b) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \geq 1$.

    (c) $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.

    (d) $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, para todo $n \geq 1$.

    (e) $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.

    (f) $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo $n \geq 1$.

    (g) $2^{3n} - 3^n$ é múltiplo de 5, para todo $n \geq 1$.

    (h) $n^2 > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$.

    (i) $7n < 2^n$, para todo $n \geq 6$.

    (j) $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$.

64. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: $n^2 + 5n + 1$ é par.

    (a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n + 1)$ é verdadeira.

    (b) Diga, justificando, para que naturais n a propriedade $P(n)$ é verdadeira.

65. Para $n \in \mathbb{N}$, define-se $n!$ por $1! = 1$ e $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$.

    (a) Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $2^n < n!$.

    (b) Prove que, para todo o natural n tal que $n \geq 4$, $n! \geq n^2$.

66. Seja X um conjunto tal que $X \subseteq \mathbb{N}$, $3 \in X$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

    $$n \in X \Rightarrow n + 3 \in X.$$

    Prove que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

67. O seguinte exemplo é bem conhecido como uma alegada "prova" por indução que claramente não pode ser válida. Indique onde se encontra o erro.

    Vamos provar que todos os gatos são da mesma cor. Mais precisamente, vamos provar que a afirmação "para qualquer colecção de n gatos, todos os gatos têm a mesma cor" é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que só há um número finito de gatos no mundo inteiro, segue que todos os gatos do mundo têm a mesma cor. Suponhamos que $n = 1$. É certamente verdade que para qualquer colecção com um gato, todos os gatos têm a mesma cor. Supondo o resultado válido para n, vamos agora mostrar o resultado para $n+1$. Consideremos a colecção $\{G_1, \ldots, G_{n+1}\}$ de $n + 1$ gatos. As colecções $\{G_1, \ldots, G_n\}$ e $\{G_2, \ldots, G_{n+1}\}$ têm ambas n gatos. Então, todos os gatos das duas colecções têm a mesma cor e, portanto, os gatos de $\{G_1, \ldots, G_{n+1}\}$ têm a mesma cor. Fica assim provado por indução que todos os gatos do mundo têm a mesma cor.

68. Recorrendo ao Princípio de Indução Completa, mostre que:

    (a) Todo o número natural n pode ser repesentado como a soma de potências distintas de 2, i.e., na forma $n = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_r}$ onde $i_1, i_2, \ldots, i_r$ são inteiros tais que $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r$.

    (b) A sequência de Fibonacci (definida por F_1, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$) satisfaz, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq (3/2)^{n-2}$.