Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação

2019/2020

6. Cardinalidade de conjuntos

O “tamanho” de um conjunto finito pode ser facilmente “medido”. Intuitivamente, dizemos que o “tamanho” do conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ é 50, uma vez que A tem 50 elementos, e que os conjuntos $B = \{a, b, c, d\}$ e $C = \{3, 6, 9, 12\}$ têm “tamanho” 4. Comparamos estes conjuntos, dizendo que os conjuntos B e C têm o mesmo “tamanho” e que o conjunto A é “maior” do que os conjuntos B e C. Mas o que dizer a respeito de conjuntos infinitos? Será que faz sentido falar no “tamanho” de conjuntos infinitos? Se sim, será que os conjuntos infinitos têm todos o mesmo “tamanho”? Georg Cantor foi o primeiro matemático a desenvolver um estudo mais aprofundado sobre esta questão e estabeleceu uma forma de “medir” os conjuntos, começando por observar que dois conjuntos têm o mesmo “tamanho” caso exista uma bijeção entre os mesmos. Depois de encontrar um processo para determinar se dois conjuntos infinitos têm o mesmo “tamanho”, Georg Cantor mostrou que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais tem o mesmo “tamanho” que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Na sequência desta descoberta, Georg Cantor conjeturou que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais também teria o mesmo “tamanho” que o conjunto dos números naturais. Porém, esta conjetura não se confirmou, tendo Georg Cantor provado que o conjunto dos números reais é “maior” que o conjunto dos números naturais.

Neste capítulo apresentam-se alguns dos conceitos e dos resultados estabelecidos por Georg Cantor e que permitem comparar o “tamanho” dos conjuntos.

6.1 Conjuntos equipotentes

Definição 6.1. *Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A* **é equipotente a** *B, e escreve-se $A \backsim B$, se existe uma aplicação bijetiva $f : A \to B$. Caso A não seja equiptotente a B, escreve-se $A \nsim B$.*

Exemplo 6.1.

(1) Os conjuntos $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$, são equipotentes, uma vez que a aplicação $f : A \to B$ tal que $f(i) = a_i$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é uma bijeção.

(2) Seja $2\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais pares. A aplicação $h : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ tal que $h(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é uma bijeção. Logo $\mathbb{N} \backsim 2\mathbb{N}$.

(3) *Os conjuntos* $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}$ *são equipotentes, pois a aplicação* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *definida por*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-n+1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

é uma bijeção.

(4) *As funções* $f : [0,1] \to]0,1[$, $g : [0,1[\to]0,1[$ *e* $h :]0,1] \to]0,1[$ *definidas por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+1}, & \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{se } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

são bijetivas, pelo que $[0,1] \backsim]0,1[$, $[0,1[\backsim]0,1[$ *e* $]0,1] \backsim]0,1[$.

(5) *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b$ *e* $c < d$. *A aplicação* $g : [a,b] \to [c,d]$ *definida, para todo* $x \in [a,b]$, *por*

$$g(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c,$$

é uma bijeção. Assim, $[a,b] \backsim [c,d]$. *De forma similar prova-se que* $]a,b[\backsim]c,d[$, $]a,b] \backsim]c,d]$ *e* $[a,b[\backsim [c,d[$.

(6) *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b$, *tem-se* $\mathbb{R} \backsim]a,b[$. *De facto, da alínea (5) sabe-se que* $]a,b[\backsim] -1,1[$ *e, além disso,* $\mathbb{R} \backsim] -1,1[$, *pois a aplicação* $f : \mathbb{R} \to] -1,1[$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{-x^2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

é bijetiva.

(7) *O único conjunto equipotente ao conjunto vazio é o conjunto vazio.*

(8) *Para cada conjunto* A, *o conjunto* $\mathcal{P}(A)$ *das partes de* A *é equipotente ao conjunto* $\{0,1\}^A$ *das aplicações de* A *em* $\{0,1\}$. *De facto, a aplicação* $\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ *definida por* $\chi(B) = \chi_B$, *onde* $\chi_B : A \to \{0,1\}$ *é a aplicação definida por*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \in A \setminus B \end{cases},$$

é bijetiva.

Nos resultados seguintes estabelecem-se algumas propriedades básicas a respeito da equipotência de conjuntos.

Lema 6.2. *Sejam A, B, C conjuntos. Então*

(1) $A \backsim A$.

(2) Se $A \backsim B$, *então* $B \backsim A$.

(3) Se $A \backsim B$ *e* $B \backsim C$, *então* $A \backsim C$.

Demonstração. Exercício. □

Observe-se que, para quaisquer conjuntos A e B, se $A \backsim B$, também se tem $B \backsim A$, pelo que se pode dizer apenas que os conjuntos A e B são equipotentes.

No resultado anterior podemos também observar que são estabelecidas para a equipotência propriedades análogas às de uma relação de equivalência. Porém, não podemos afirmar que $\backsim$ é uma relação de equivalência, pois uma relação de equivalência está definida num conjunto e a coleção de todos os conjuntos não é um conjunto.

Lema 6.3. *Sejam A, B, C, D conjuntos tais que $A \backsim B$ e $C \backsim D$. Então*

(1) $A \times C \backsim B \times D$.

(2) Se A e C são disjuntos e B e D são disjuntos, então $A \cup C \backsim B \cup D$.

Demonstração. Uma vez que $A \backsim B$ e $C \backsim D$ podemos escolher funções bijetivas $f : A \to B$ e $g : C \to D$.

(1) No sentido de provar que $A \times C \backsim B \times D$, consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} h : A \times C & \to & B \times D \\ (a, c) & \mapsto & (f(a), g(c)) \end{array}.$$

Facilmente se verifica que h é bijetiva. De facto, para quaisquer (a_1, c_1),$(a_2, c_2) \in A \times C$, se $h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2)$, tem-se $(f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2))$, donde $f(a_1) = f(a_2)$ e $g(c_1) = g(c_2)$. Então, uma vez que f e g são injetivas, segue que $a_1 = a_2$ e $c_1 = c_2$ e, portanto, $(a_1, c_1) = (a_2, c_2)$. Logo h é injetiva. No sentido de provar que h é sobrejetiva, consideremos $(b, d) \in B \times D$. Então, uma vez que f e g são sobrejetivas, existem $a \in A$ e $c \in C$ tais que $f(a) = b$ e $g(c) = d$. Por conseguinte, existe $(a, c) \in A \times C$ tal que $h(a, c) = (f(a), g(c)) = (b, d)$. Logo h é sobrejetiva.

(2) Fica ao cuidado do leitor a verificação de que a aplicação $h : A \cup C \to B \cup D$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in C \end{cases},$$

é bijetiva. □

Teorema 6.4. *(Cantor) Para qualquer conjunto A, $A \not\sim \mathcal{P}(A)$.*

Demonstração. Pretendemos mostrar que qualquer que seja a função $f : A \to \mathcal{P}(A)$, f não é uma bijeção. Nesse sentido, vamos mostrar que, para qualquer função $f : A \to \mathcal{P}(A)$, f não é sobrejetiva, isto é, mostramos que, para toda a função $f : A \to \mathcal{P}(A)$, existe um conjunto $D \in \mathcal{P}(A)$ tal que $D \notin \mathrm{Im} f$. Com efeito, dada uma função $f : A \to \mathcal{P}(A)$, podemos considerar o conjunto

$$D = \{x \in A \,|\, x \notin f(x)\}.$$

É óbvio que $D \in \mathcal{P}(A)$ e que, por definição de D,

$$\forall x \in A,\ (x \in D \leftrightarrow x \notin f(x)),$$

donde

$$\forall x \in A,\ D \neq f(x),$$

o que mostra que $D \notin \mathrm{Im} f$. □

6.2 Conjuntos finitos e infinitos

Definição 6.5. *Um conjunto A diz-se* **infinito** *se é equipotente a uma sua parte própria, i.e., se existe $A' \subsetneqq A$ tal que $A \backsim A'$. Um conjunto A diz-se* **finito** *se A não é infinito.*

Exemplo 6.2.

(1) O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito, pois é equipotente à sua parte própria $2\mathbb{N}$.

(2) O conjunto $\mathbb{R}$ é infinito, pois é equipotente ao intervalo $]-1,1[$ e $]-1,1[\subsetneqq \mathbb{R}$.

(3) O conjunto $\{a, b\}$, com $a \neq b$, é finito, pois os seus subconjuntos próprios são $\emptyset$, $\{a\}$ e $\{b\}$ e nenhum deles é equipotente a $\{a, b\}$.

(4) $\emptyset$ é finito, pois $\emptyset$ não tem subconjuntos próprios.

Teorema 6.6. *Sejam A e B conjuntos.*

(1) Se A é infinito e $B \backsim A$, então B é infinito.

(2) Se A é finito e $B \backsim A$, então B é finito.

Demonstração. (1) Uma vez que A é infinito, existe um subconjunto próprio A' de A tal que $A \backsim A'$. Sejam $f : A \to A'$ e $g : B \to A$ bijeções. Seja $B' = g^{-1}(A')$. Como $g^{-1} : A \to B$ é uma bijeção, então B' é um subconjunto próprio de B. Além disso, a aplicação $h : B \to B'$, definida por $h(b) = g^{-1}(f(g(b)))$, para todo $b \in B$, é uma bijeção. Logo B é infinito.
(2) Consequência imediata de (1). □

Teorema 6.7. *Sejam A e B conjuntos.*

(1) Se A é infinito e $A \subseteq B$, então B é infinito.

(2) Se B é finito e $A \subseteq B$, então A é finito.

Demonstração. (1) Admitamos que A é infinito. Então existe $A' \subsetneq A$ tal que $A' \backsim A$. Seja $f : A \to A'$ uma bijeção. Assim, a aplicação $g : B \to A' \cup (B \setminus A)$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ x, & \text{se } x \in (B \setminus A) \end{cases},$$

é bijetiva. Então, como $A' \cup (B \setminus A)$ é uma parte própria de B, B é infinito.

(2) Imediato a partir de (1). □

Um conjunto é finito se não é equipotente a nenhuma das suas partes próprias. Vejamos, agora, uma descrição efetiva dos conjuntos finitos.

Dado $n \in \mathbb{N}$, representamos por I_n o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Lema 6.8. *Sejam A um conjunto e $n \in \mathbb{N}$.*
Se A é equipotente a I_{n+1}, então, para qualquer $x \in X$, $A \setminus \{x\}$ é equipotente a I_n.

Demonstração. Admitamos que $A \backsim I_{n+1}$ e seja $f : A \to I_{n+1}$ uma bijeção. Sejam $x \in A$ e $A' = A \setminus \{x\}$. Relativamente ao elemento x temos dois casos a considerar:

$$\text{(i) } f(x) = n + 1, \qquad \text{(ii) } f(x) \in I_n.$$

(i) Se $f(x) = n + 1$, a correspondência g de A' em I_n, definida por $g(a) = f(a)$, para todo $a \in A'$, é uma aplicação e é bijetiva.
(ii) Se $f(x) \in I_n$, existe um elemento $y \in A'$ tal que $f(y) = n + 1$. Por conseguinte, a correspondência de A' em I_n, definida por $h(y) = f(x)$ e $h(a) = f(a)$ se $a \neq y$, é uma aplicação; esta aplicação é uma bijeção.
Em ambos os casos tem-se $A' \backsim I_n$. □

Teorema 6.9. *(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto I_n é finito.*
(2) Um conjunto A é finito se e só se A é vazio ou, para algum $n \in \mathbb{N}$, A é equipotente a I_n.

Demonstração. (1) A prova é feita por indução sobre n.

(i) Base de indução ($n = 1$): Para $n = 1$, temos $I_1 = \{1\}$. O único subconjunto próprio de I_1 é o conjunto vazio e $I_1 \nsim \emptyset$. Logo, para $n = 1$, I_n é finito.

(ii) Passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$. Admitamos que $I_k = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ é finito. Pretendemos mostrar que $I_{k+1} = \{0, 1, 2, \ldots, k, k + 1\}$ é finito. No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que I_{k+1} é infinito. Então existe $X \subsetneq I_{k+1}$ tal que $I_{k+1} \sim X$. Relativamente ao conjunto X temos dois casos a considerar:

α) $k + 1 \in X$;

β) $k + 1 \notin X$.

Caso α): Se $k+1 \in X$, então $X \setminus \{k+1\} \subsetneqq I_k$. Mas, uma vez que $X \sim I_{k+1}$, pelo lema anterior tem-se $X \setminus \{k+1\} \sim I_k$, o que contradiz a hipótese de que I_k é finito.
Caso β): Se $k+1 \notin X$, então $X \subseteq I_k$. Logo, para todo $x \in X$, $X \setminus \{x\} \subsetneqq I_k$. Uma vez que $X \sim I_{k+1}$, pelo lema anterior segue que $X \setminus \{x\} \sim I_k$, contradizendo a hipótese de que I_k é finito.

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, se I_k é finito, I_{k+1} também é finito.

Por (i), (ii) e pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$, concluímos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, I_n é finito.

(2) $\Rightarrow$) No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que A é finito, $A \neq \emptyset$ e que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \nsim I_n$. Uma vez que $A \neq \emptyset$, existe a_1 tal que $a_1 \in A$. Então $\{a_1\} \subseteq A$, mas $\{a_1\} \neq A$, pois $A \nsim I_1$. Seja $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Então $\{a_1, a_2\} \subseteq A$, mas $\{a_1, a_2\} \neq A$, pois $A \nsim I_2$. De um modo geral, sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elementos distintos de A. Então $\{a_1, a_2, \ldots a_k\} \subsetneqq A$, pois $A \nsim I_k$. Assim, $A' = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. Então, como $A' \sim \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ é infinito, o conjunto A' é infinito e, consequentemente, A também é infinito.

$\Leftarrow$) Admitamos que $A = \emptyset$ ou $A \sim I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $A = \emptyset$, A é finito. Se $A \sim I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então da alínea anterior segue que A é finito. $\square$

6.3 Conjuntos contáveis

Definição 6.10. *Um conjunto A diz-se* **numerável** *se A é equipotente a $\mathbb{N}$. Um conjunto A diz-se* **contável** *se é finito ou numerável.*

Exemplo 6.3.

(1) Os conjuntos $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ são numeráveis.

(2) O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ também é numerável. Dispondo os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ conforme sugerido no quadro seguinte

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (1,2) & & (1,3) & \rightarrow & (1,4) & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

as setas indicadas sugerem uma maneira de estabelecer uma bijeção entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$;

$$f(1,1) = 1, f(1,2) = 2, f(2,1) = 3, \ldots.$$

A aplicação $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por

$$f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + m,$$

é bijetiva. Logo $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backsim \mathbb{N}$.

(3) Os conjuntos $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ são numeráveis.

(4) O conjunto $\mathbb{Q}$ é numerável. De facto,

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \textit{m.d.c.}(p,q) = 1\right\}$$

e é simples verificar que a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, definida por

$$f(p,q) = \frac{p}{q}, \text{ para todo } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},$$

é bijetiva. Logo, como $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ é numerável, segue que $\mathbb{Q}$ é numerável.

Teorema 6.11. *(Cantor) O conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é contável.*

Demonstração. Imediato, atendendo ao Teorema 6.4 e tendo em conta que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é infinito. □

Teorema 6.12. *Seja A um conjunto contável. Se $A' \subseteq A$, então A' é um conjunto contável.*

Demonstração. Seja $A' \subseteq A$. Se A' é finito, então A' é contável. Consideremos, agora, o caso em que A' é infinito. Uma vez que $A' \subseteq A$, o conjunto A também é infinito, pelo que $A \backsim \mathbb{N}$. Pondo $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, seja k_1 o menor dos naturais k tais que $a_k \in A'$ (note-se que tal natural existe pelo Princípio da Boa Ordenação em $\mathbb{N}$). Assim, $\{a_{k_1}\} \subseteq A'$, mas $A' \neq \{a_{k_1}\}$, pois A' é infinito. Seja k_2 o menor dos naturais $k > k_1$ tais que $a_k \in A'$. Tem-se $\{a_{k_1}, a_{k_2}\} \subseteq A'$, mas $A' \neq \{a_{k_1}, a_{k_2}\}$. De modo geral, seja k_{r+1} o menor dos naturais $k > k_r$ tais que $a_k \in A'$.
Seja $A'' = \{a_{k_r} \mid r \in \mathbb{N}\}$. Então A'' é numerável e $A'' \subseteq A'$. Seja $a \in A'$. Então $a \in A$ e, portanto, $a = a_s$, para algum $s \in \mathbb{N}$. Se $k_r \leq s$, para todo $r \in \mathbb{N}$, ter-se-ia, $A'' \subseteq \{a_1, \ldots, a_s\}$ e A'' seria finito, absurdo. Portanto $\{k_r \mid k_r > s\} \neq \emptyset$. Seja k_m o elemento mínimo deste conjunto. Tem-se $k_{m-1} \leq s < k_m$. Se fosse $k_{m-1} < s$, obtinha-se uma contradição com o facto de k_m ser o menor dos naturais $k > k_{m-1}$ tais que $a_k \in A'$, pois $s < k_{m-1}$ e $a_s = a \in A'$. Logo $k_{m-1} = s$ e, portanto, $a = a_{k_{m-1}} \in A''$. Assim, $A' \subseteq A''$, e, por conseguinte, $A' = A''$ é numerável. □

Teorema 6.13. *Para qualquer conjunto A, as afirmações seguintes são equivalentes:*

(1) A é contável.

(2) $A = \emptyset$ ou existe uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to A$.

(3) Existe uma função injetiva $f : A \to \mathbb{N}$.

Demonstração. (1) ⇒ (2) Suponhamos que A é contável. Caso $A = \emptyset$, não há nada a provar. Se $A \neq \emptyset$, temos dois casos a considerar: A é finito ou A é infinito. Se A é infinito, então $A \backsim \mathbb{N}$ e, portanto, existe uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to A$. Se A é finito, então existe uma função bijetiva f de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em A, para algum $n \in \mathbb{N}$, e, por conseguinte, existe uma função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ em A, uma vez que $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$; de facto, fixando $a \in A$, podemos considerar a função $h : \mathbb{N} \to A$ definida por

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i \leq n \\ a & \text{se } i > n \end{cases} .$$

É simples verificar que h é sobrejetiva.

(2) $\Rightarrow$ (3) Se $A = \emptyset$, a função $\emptyset : \emptyset \to \mathbb{N}$ é injetiva. Consideremos, agora, o caso em que existe uma função sobrejetiva $g : \mathbb{N} \to A$. Então, para cada $a \in A$, o conjunto $g^{\leftarrow}(\{a\}) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, g(n) = a\}$ é não vazio. Logo, pelo Princípio da Boa Ordenação em $\mathbb{N}$, o conjunto $g^{\leftarrow}(\{a\})$ tem um elemento mínimo. Assim, podemos definir a função $f : A \to \mathbb{N}$ por

$$f(a) = \min(g^{\leftarrow}(\{a\})), \text{ para cada } a \in A.$$

Para cada $a \in A$, $g(f(a)) = a$, pelo que $g \circ f = id_A$. Logo, pela Proposição 4.12., f é injetiva.

(3) $\Rightarrow$ (1) Suponha-se que existe uma função injetiva $f : A \to \mathbb{N}$. Então $A \backsim f(A)$. Como $f(A) \subseteq \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ é contável, pelo teorema anterior segue que $f(A)$ é contável. Consequentemente, A também é contável.

□

Teorema 6.14. *Sejam A e B conjuntos tais que B é contável. Se existe uma função injetiva de A em B, então A é contável.*

Demonstração. Sejam B um conjunto contável e $f : A \to B$ uma função injetiva. Uma vez que B é contável, existe uma função injetiva $g : B \to \mathbb{N}$. Atendendo a que f e g são funções injetivas, a função $g \circ f : A \to \mathbb{N}$ também é injetiva e, pelo teorema anterior, A é contável. □

Teorema 6.15. *Sejam A e B conjuntos.*

(1) Se A ou B são contáveis, então $A \cap B$ é contável.

(2) Se A e B são contáveis, então $A \cup B$ é contável.

(3) Se A e B são contáveis, então $A \times B$ é contável.

Demonstração. (1) Admitamos que A é um conjunto contável ou que B é um conjunto contável. Caso A seja contável, então, pelo Teorema 6.12, $A \cap B$ é contável, pois $A \cap B \subseteq A$. Se B é contável conclui-se de forma análoga que $A \cap B$ contável.

(2) Admitamos que A e B são conjuntos contáveis.
Se $A = \emptyset$, tem-se $A \cup B = B$ e, portanto $A \cup B$ é contável. Se $B = \emptyset$, tem-se $A \cup B = A$, pelo que $A \cup B$ é contável.
Consideremos, agora, que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ e definam-se os conjuntos $C_1 = \{1\} \times A$ e $C_2 = \{2\} \times B$. Atendendo a que A e B são conjuntos contáveis, existem funções injetivas $f_1 : A \to \mathbb{N}$ e $f_2 : B \to \mathbb{N}$. Assim, pode-se definir a função $h : C_1 \cup C_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por

$$h(i, x) = (i, f_i(x)).$$

A função h está bem definida e é simples verifcar que esta função é injetiva.
A função $k : A \cup B \to C_1 \cup C_2$ definida por

$$k(x) = \begin{cases} (1, x) & \text{se} \quad x \in A \\ (2, x) & \text{se} \quad x \in B \setminus A \end{cases}$$

também é injetiva.
Uma vez que h e k são funções injetivas, a função $h \circ k : A \cup B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ também é injetiva. Então, atendendo a que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável e considerando o Teorema 6.14, $A \cup B$ é contável.

(3) Admitamos que A e B são conjuntos contáveis. Então existem funções injetivas $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$. A partir destas funções define-se a função $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

É um exercício simples verificar que a função h é injetiva.
Atendendo a que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é numerável, pelo teorema anterior conclui-se que $A\times B$ é contável. □

O resultado anterior pode ser generalizado a famílias de conjuntos com mais de dois conjuntos.

Teorema 6.16. *Seja I um conjunto contável e $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos contáveis.*

(1) Se $I \neq \emptyset$, então $\bigcap_{i\in I} A_i$ é contável.

(2) O conjunto $\bigcup_{i\in I} A_i$ é contável.

Demonstração. Sejam I um conjunto contável e $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos contáveis.

(1) Admitamos que $I \neq \emptyset$ e seja $A_k \in \{A_i\}_{i\in I}$. Como $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$ e A_k é contável, então, pelo Teorema 6.12, $\bigcap_{i\in I} A_i$ é contável.

(2) Seja $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Pretende-se mostrar que A é contável.
Se $I = \emptyset$, tem-se $A = \emptyset$ e $\emptyset$ é contável.
Admitamos, agora, que $I \neq \emptyset$. Uma vez que I é contável, existe uma função injetiva de I em $\mathbb{N}$; seja $f : I \to \mathbb{N}$ uma dessas funções. Atendendo a que, para cada $i \in I$, o conjunto A_i é contável, também existe uma função injetiva $f_i : A_i \to \mathbb{N}$. Para cada $i \in I$, defina-se $B_i = \{i\} \times A_i$ e seja $B = \bigcup_{i\in I} B_i$. Se $i, j \in I$ e $i \neq j$, tem-se $B_i \cap B_j = \emptyset$. Logo, dado $b \in B$, existe um e um só $i \in I$ tal que $b \in B_i$, e tem-se $b = (i, x)$, para alguns $i \in I$ e $x \in A_i$. Assim, pode-se definir a função $g : B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$g(i, x) = (f(i), f_i(x)),$$

a qual é injetiva.
Para cada $x \in A$, escolhamos $i \in I$ tal que $x \in A_i$ e considere-se a função $h : A \to B$ definida por $h(x) = (i, x)$. A função h é, claramente, injetiva.
Uma vez que g e h são funções injetivas, a função $g \circ h : A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ também é injetiva. Assim, atendendo a que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável, o conjunto A também é contável. □

Teorema 6.17. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $C_1, \ldots, C_n$ conjuntos contáveis. Então $C_1 \times \ldots \times C_n$ é contável.*

Demonstração. A prova pode ser feita por indução matemática. □

Teorema 6.18. *O intervalo real* $]0,1[$ *não é contável.*

Demonstração. No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que $]0,1[$ é contável. Então, existe uma função injetiva $g:]0,1[\rightarrow \mathbb{N}$. Além disso, é simples verificar que também existem funções injetivas de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ em $]0,1[$, como, por exemplo, a função $f:\mathcal{P}(\mathbb{N})\rightarrow]0,1[$ definida por

$$f(A) = 0.d_1 d_2 \ldots d_i \ldots$$

onde, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n \in A \\ 7 & \text{se } n \notin A \end{cases},$$

i.e., $f(A)$ é um número real entre 0 e 1 dado pela sua representação decimal e tal que o seu n-ésimo digíto d_n é dado pela regra anterior. Para provar que f é injetiva, consideremos $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tais que $A \neq B$. Então, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in A$ e $n \notin B$ ou $n \notin A$ e $n \in B$. Consequentemente, $f(A)$ e $f(B)$ não são iguais, uma vez que a sua expansão decimal difere no n-ésimo dígito. Logo, f é injetiva.
Atendendo a que f e g são funções injetivas, a função $g \circ f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ também é injetiva e, portanto, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ seria contável, o que contradiz o Teorema 6.11. □

Teorema 6.19. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *não é contável.*

Demonstração. Consequência imediata dos teoremas 6.12 e 6.18. □

6.4 Cardinal de um conjunto

Na primeira secção deste capítulo foi definido o formalismo que permite comparar o "tamanho" de dois conjuntos, pelo que já é possível definir o que se entende por conjuntos com o mesmo "tamanho".

Definição 6.20. *Sejam* A, B *conjuntos. Se os conjuntos* A *e* B *são equipotentes diz-se que* A **e** B **têm o mesmo cardinal**, *e escreve-se* $\#A = \#B$ *ou* $|A| = |B|$.

Não definimos de forma precisa o cardinal de um conjunto. Convencionamos que o cardinal de um conjunto designa a propriedade que A tem em comum com todos os conjuntos equipotentes a A. O cardinal de um conjunto é, em geral, designado por uma letra grega: α, β, γ, ... Para indicar que α designa o cardinal de um conjunto A, escreve-se $\alpha = |A|$.

Como já observámos anteriormente, o único conjunto equipotente ao conjunto vazio é o conjunto vazio, e escreve-se $|\emptyset| = 0$. No caso de um conjunto finito, identifica-se o cardinal de A com o número de elementos de A. No caso dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, escreve-se $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ($\aleph$, "alef", é a primeira letra do alfabeto hebraico) e $|\mathbb{R}| = c$ (c designa a *potência do contínuo*).

Da alínea (3) do exemplo 6.1 e da alínea (4) do exemplo 6.3 é imediato o resultado seguinte.

Teorema 6.21. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ *e* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Dado um conjunto A, representa-se por $2^{|A|}$ o cardinal do conjunto $\{0,1\}^A$ das aplicações de um conjunto A em $\{0,1\}$. Assim, pela alínea (8) do exemplo 6.1 tem-se

Teorema 6.22. *Para qualquer conjunto* A, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Seguidamente define-se o que se entende por um cardinal ser menor do que outro.

Definição 6.23. *Sejam* A *e* B *conjuntos. Diz-se que o* **cardinal de A é menor ou igual do que o cardinal de B**, *e escreve-se* $|A| \leq |B|$, *se* A *é equipotente a um subconjunto de* B. *Se* $|A| \leq |B|$ *e* $|A| \neq |B|$, *escreve-se* $|A| < |B|$ *e diz-se que* **cardinal de A é menor do que o cardinal de B**.

A partir da definição anterior é simples a prova do resultado seguinte.

Teorema 6.24. *Sejam* A *e* B *conjuntos. Então*

1. $|A| \leq |A|$.
2. *Se* $|A| \leq |B|$ *e* $|B| \leq |C|$, *então* $|A| \leq |C|$.

Demonstração. Exercício. ☐

Teorema 6.25. *(Teorema de Cantor) Para qualquer conjunto* A, *tem-se* $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Demonstração. Se $A = \emptyset$, tem-se $|A| = 0$ e $|\mathcal{P}(A)| = 1$.
Se $A \neq \emptyset$, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \mathcal{P}(A) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$$

é injetiva e, portanto, $|A| \leq |\mathcal{P}(A)$. Pelo Teorema 6.4 conclui-se, então, que $|A| < |\mathcal{P}(A)$. ☐

Se A e B são conjuntos tais que $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então A e B não têm que ser necessariamente iguais, mas será que têm de ter o mesmo cardinal? Georg Cantor começou por dar uma resposta menos geral a esta questão, mas trabalhos desenvolvidos posteriormente, de forma independente, por Ernst Schröder (1841-1902) e Felix Bernstein (1878-1956) permitiram dar uma resposta afirmativa a esta questão.

Teorema 6.26. *(Teorema de Schröder-Bernstein) Sejam* A *e* B *conjuntos. Se* $|A| \leq |B|$ *e* $|B| \leq |A|$, *então* $|A| = |B|$.

Com base neste resultado é possível estabelecer a igualdade entre o cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e o cardinal de $\mathbb{R}$.

Teorema 6.27. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, *i.e.*, $2^{\aleph_0} = c$.

Demonstração. Uma vez que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, também se tem $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
A aplicação

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\ a & \mapsto & \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\} \end{array}$$

é injetiva. Logo $c = |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.
A aplicação

$$\begin{array}{rcl} g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & [0,1] \\ h & \mapsto & 0.h(1)h(2)h(3)\ldots \end{array}$$

também é injetiva. Logo $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |[0,1]| = |\mathbb{R}| = c$.
Então, pelo Teorema de Schröder-Bernstein, $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = c$. □

A respeito de cardinais, vale ainda o resultado seguinte

Teorema 6.28. *Sejam A e B conjuntos. Tem-se um e um só dos casos seguintes: $|A| < |B|$, $|A| = |B|$, $|B| < |A|$.*

É consequência do Teorema 6.12 que não existe qualquer conjunto infinito com cardinal inferior a $\aleph_0$. A partir de resultados estabelecidos anteriormente também se prova a existência de cardinais superiores a $\aleph_0$: de facto, $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$ e, além disso, a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é injetiva, pelo que $\mathbb{N} \backsim f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$; assim, $\aleph_0 \neq c$ e $\aleph_0 \leq c$ e, portanto, $\aleph_0 < c$. A existência de cardinais superiores a c é consequência do Teorema 6.25. Quanto a cardinais entre $\aleph_0$ e c, Georg Cantor não conseguiu apresentar uma prova da existência ou da inexistência de tais cardinais, pelo que avançou com a hipótese conhecida por *Hipótese do Contínuo.*

Hipótese do Contínuo Não existe nenhum cardinal β tal que $\aleph_0 < \beta < c$.