Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação

2019/2020

1. Noções elementares de lógica

A prova da veracidade de uma determinada afirmação implica a construção de uma prova rigorosa. A lógica fornece as ferramentas adequadas para a construção destas provas, estudando os princípios e as técnicas do raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos que sejam válidos. A lógica desempenha um papel fundamental em qualquer área de aprendizagem, especialmente em Matemática e em Ciências da Computação. Em Ciências da Computação a lógica é utilizada, por exemplo, no desenvolvimento de linguagens de programação e na verificação da correção de programas.

Em lógica é essencial o rigor e a precisão, dai a necessidade de uma linguagem formal que permita representar de forma clara e sem ambiguidade a linguagem natural. Procurando definir uma linguagem formal com estes requisitos e um sistema que permita a construção de argumentos rigorosos, ao longo dos anos foram definidos diversos sistemas lógicos.

Um sistema lógico fica definido pelas seguintes componentes:

- **sintaxe** - conjunto de símbolos e regras de formação que definem as palavras, designadas por *fórmulas*, que podem ser utilizadas para representar de forma precisa, concisa e sem ambiguidade a linguagem natural (ou uma parte desta linguagem);
- **semântica** - conjunto de regras que associam um significado às fórmulas;
- **sistema dedutivo** - conjunto de fórmulas, designadas por *axiomas*, e de regras, designadas por *regras de inferência*, utilizados na construção de argumentos.

Nesta unidade curricular estudamos algumas noções básicas associadas a dois sistemas lógicos: o **Cálculo Proposicional** e o **Cálculo de Predicados**.

1.1 Cálculo Proposicional

A prova de um teorema consiste na demonstração da veracidade de certas afirmações, pelo que começamos o estudo da lógica por uma análise do tipo de frases relevantes neste estudo. Em linguagem natural podemos encontrar diversos tipos de frases - declarativas, exclamativas, interrogativas, imperativas. Porém, na construção de um argumento recorremos somente a frases declarativas.

As frases podem ser classificadas em simples ou compostas. Uma **frase declarativa simples** tem, gramaticalmente falando, um sujeito e um predicado.

Exemplo 1.1. *São exemplos de frases simples as seguintes:*

(1) Lisboa é a capital de Portugal.

(2) O João gosta de Lógica.

(3) Todo o número inteiro é par.

A partir de frases simples e recorrendo a palavras tais como "não", "e", "ou", "se ... então", "... se e só se ..."obtêm-se frases mais complexas designadas por **frases compostas**.

Exemplo 1.2. *As frases seguintes são exemplos de frases compostas:*

(1) Lisboa é a capital de Portugal e é a cidade do país com o maior número de habitantes.

(2) Se o João gosta de Lógica então é bom aluno a Tópicos de Matemática e a Lógica Computacional.

(3) Se todo o número inteiro é par, então 7 é divisível por 2.

1.2 Sintaxe

Nesta secção descreve-se a linguagem simbólica que permite representar de forma concisa e sem ambiguidade uma parte da linguagem natural.

No Cálculo Proposicional, cada frase simples é encarada como um elemento indivisível, não se diferenciando partes da afirmação como o nome ou o verbo. Cada frase simples será representada por uma letra minúscula $p, q, r, s, ...$ (possivelmente com índices) - a estes símbolos damos a designação de **variáveis proposicionais**. Por sua vez, as frases compostas são representadas usando:

- as variáveis proposicionais;

- os símbolos $\neg, \wedge, \vee$ $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados **conetivos proposicionais** e designados, respectivamente, por **negação**, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**;

- os símbolos auxiliares "(" e ")".

Representando por p e q duas frases declarativas:

- a frase "não p" designa-se por **negação de** p e é representada por $(\neg p)$. A $(\neg p)$ também é possivel associar uma das seguintes leituras: "é falso p", "não é verdade p".
- a frase "p e q" é designada por **conjunção de** p **e** q e é representada por $(p \wedge q)$.
- a frase "p ou q" designa-se por **disjunção de** p **e** q e é representada por $(p \vee q)$.
- a frase "Se p, então q" designa-se por **implicação de** p, q e é representada por $(p \rightarrow q)$. A $(p \rightarrow q)$ também se associa uma das seguintes leituras: "p implica q", "p é suficiente para q", "q é necessário para p", "q se p", "q sempre que p", "p somente se q".
  A p dá-se a designação de **antecedente** ou **hipótese** da implicação e a q dá-se a designação de **consequente** ou **conclusão**.
- a conjunção das implicações "Se p então q" e "Se q então p" pode ser expressa por "p se e só se q". Esta última frase designa-se por **equivalência de** p e q e é representada por $(p \leftrightarrow q)$. A $(p \leftrightarrow q)$ também se associa uma das leituras:"p é equivalente a q", "p é necessário e suficiente para q".

Na representação de frases compostas podemos recorrer aos símbolos auxiliares "(" e ")", no sentido de evitar ambiguidade.

Exemplo 1.3. *Considerando que as variáveis p_0 a p_6 representam as frases*

p_0: *Lisboa é a capital de Portugal.*

p_1: *Lisboa é a cidade do país com o maior número habitantes.*

p_2: *O João gosta de Lógica.*

p_3: *O João é bom aluno a Tópicos de Matemática.*

p_4: *O João é bom aluno a Lógica Computacional.*

p_5: *Todo o número inteiro é par.*

p_6: *7 é divisível por 2.*

as frases compostas do exemplo anterior podem ser representadas, respetivamente, por:

(1) $(p_0 \wedge p_1)$

(2) $(p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_4))$

(3) $(p_5 \rightarrow p_6)$

Uma vez estabelecidos os símbolos que definem o alfabeto da linguagem do Cálculo Proposicional, podemos definir as palavras desta linguagem.

Definição 1.1. *O conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ de* **fórmulas do Cálculo Proposicional**, *também designado por* **linguagem do Cálculo Proposicional**, *é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:*

(F_1) $\perp$ *é uma fórmula;*

(F_2) *toda a variável proposicional é uma fórmula;*

(F_3) *se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula;*

(F_4) *se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula;*

(F_5) *se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula;*

(F_6) *se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \to \psi)$ é uma fórmula;*

(F_7) *se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula.*

Exemplo 1.4.

(1) A palavra $((\neg p_0) \to (p_1 \vee p_2))$ é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que:

   i. p_0, p_1 e p_2 são fórmulas, pela regra (F_2) da definição anterior ;

   ii. $(\neg p_0)$ é fórmula, por i. e pela regra (F_3);

   iii. $(p_1 \vee p_2)$ é fórmula, por i. e pela regra (F_5);

   iv. $((\neg p_0) \to (p_1 \vee p_2))$ é fórmula, por ii., iii. e pela regra (F_6).

(2) As palavras $\neg p_0$, $\neg(p_1)$, $p_1 \vee p_3$ não são fórmulas do Cálculo Proposicional.

Para que uma palavra sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional seja considerada uma fórmula, os parêntesis têm de ocorrer na palavra de acordo com as regras que definem o conjunto de fórmulas. Porém, para simplificação de escrita, é usual omitir os parêntesis extremos e os parêntesis à volta da negação. Além disso, usaremos a convenção de que os conetivos $\wedge$ e $\vee$ têm prioridade sobre os conetivos $\to$ e $\leftrightarrow$ e que o conetivo $\neg$ tem prioridade sobre qualquer um dos outros conetivos, o que permite simplificar um pouco mais a representação das fórmulas.

Exemplo 1.5.

(1) A palavra $\neg p_0 \wedge p_1 \to \neg p_2$ será usada como representação da fórmula $(((\neg p_0) \wedge p_1) \to (\neg p_2))$.

(2) A palavra $\neg(p_0 \vee \neg p_1)$ é uma representação da fórmula $(\neg(p_0 \vee (\neg p_1)))$, mas $\neg p_0 \vee \neg p_1$ não representa esta fórmula.

(3) A fórmula $((p_0 \wedge p_1) \vee p_2)$ pode ser representada por $(p_0 \wedge p_1) \vee p_2$, mas não pode ser representada por $p_0 \wedge p_1 \vee p_2$.

1.3 Semântica

A sintaxe do Cálculo Proposicional não nos permite atribuir qualquer significado às fórmulas. Uma fórmula, por si só, não tem qualquer significado - este depende da interpretação associada aos símbolos.

Exemplo 1.6. *A fórmula $p_0 \to p_1$ pode representar qualquer uma das afirmações seguintes*

> *"Se* $2 \times 7 = 14$*, então* $1 + 2 \times 7 = 15$*."*
>
> *"Se* $2 \times 7 = 14$*, então* $1 + 2 \times 7 = 16$*."*

sendo a primeira sentença uma afirmação verdadeira e a segunda uma afirmação falsa.

A semântica do Cálculo Proposicional consiste na atribuição de valores de verdade às fórmulas. Em lógica clássica são considerados dois valores de verdade.

Definição 1.2. *Os* **valores de verdade** *(ou* **valores lógicos***) do Cálculo Proposicional são* **verdadeiro** *($\mathbf{V}$ ou $\mathbf{1}$) e* **falso** *($\mathbf{F}$ ou $\mathbf{0}$).*

Em lógica interessa considerar frases declarativas sobre as quais se possa decidir sobre o seu valor lógico.

Definição 1.3. *Designa-se por* **proposição** *uma frase declarativa sobre a qual é possível dizer objetivamente se é verdadeira ou falsa (ainda que possamos não ser capazes de, no momento atual, determinar o seu valor lógico).*

No Cálculo Proposicional são adotados os dois princípios seguintes:

Princípio da não contradição
Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Princípio do terceiro excluído
Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.

Dos dois princípios anteriores resulta que toda a proposição tem um, e um só, dos valores lógicos "verdadeiro" ou "falso". Por este motivo, o Cálculo Proposicional diz-se uma **lógica bivalente**.

Exemplo 1.7. *Consideremos as frases seguintes:*

(1) Lisboa é a capital de Portugal.

(2) Que horas são?

(3) $2 + 3 = 6$.

(4) Toma uma chávena de café.

(5) 2+x=7.

(6) Esta frase é falsa.

(7) Todo o número maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.

(8) 2 é um número par e todo o número primo é ímpar.

As frases (1), (3), (7) e (8) são proposições. A afirmação (1) é verdadeira e as afirmações (3) e (8) são falsas. A afirmação (7), conhecida por Conjetura de Goldbach, é uma proposição, pois, embora até ao momento não exista uma prova da sua veracidade ou da sua falsidade, será possível associar-lhe um e um só dos dois valores lógicos.

As frases (2), (4), (5) e (6) não são proposições. As frases (2) e (4) não são frases declarativas e, portanto, não é possível associar-lhes um dos valores lógicos. A frase (5) não é nem verdadeira nem falsa, uma vez que o valor de x é desconhecido. No caso da frase (6) não se consegue decidir se esta é verdadeira ou falsa (a atribuição do valor verdadeiro ou do valor falso a esta afirmação conduz a uma contradição - a uma afirmação deste tipo damos a designação de ***paradoxo****).*

Uma proposição diz-se uma **proposição simples** se se trata de uma frase declarativa simples e diz-se uma **proposição composta** caso seja uma frase declarativa composta.

A decisão sobre o valor lógico de uma frase simples pode depender do contexto em que esta é considerada. Por exemplo, a afirmação "Este livro tem capa vermelha." pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do livro em causa. A veracidade de uma frase composta pode também depender do contexto em que se insere, mas para avaliar se esta é verdadeira basta saber o que acontece com as frases simples que a compõem. A afirmação "Este livro está escrito numa língua estrangeira e tem uma capa vermelha." é verdadeira para alguns livros e falsa para outros, mas será verdadeira sempre que as afirmações simples que a compõem sejam verdadeiras. No Cálculo Proposicional não se pretende estudar o processo de determinar se uma proposição simples é ou não verdadeira, mas sim estabelecer regras que permitam determinar a veracidade das proposições compostas a partir da veracidade ou falsidade das proposições que a compõem e do significado dos conetivos que ligam estas mesmas proposições.

Estudamos de seguida o significado associado a cada um dos conetivos proposicionais referidos anteriormente. Esse mesmo significado pode ser expresso de forma clara através de tabelas designadas por **tabelas de verdade**.

Dada uma proposição arbitrária φ, a sua negação tem um valor lógico contrário ao de φ. A relação entre o valor lógico de φ e o valor lógico de $\neg\varphi$ pode ser representado através da seguinte tabela de verdade:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Exemplo 1.8.

(1) *A proposição "Todo o número primo é ímpar." é falsa. A sua negação, "Nem todo o número primo é ímpar.", é verdadeira (basta considerar o número primo 2).*

(2) *A proposição "24 é divisível por 8." é verdadeira. A sua negação, "24 não é divisível por 8." é falsa, uma vez que* $24 = 8 \times 3$.

Dadas duas proposições φ e ψ, a conjunção de φ e ψ é verdadeira somente se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. A tabela de verdade associada ao conetivo $\wedge$ é a seguinte:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo 1.9.

(1) *A proposição "100 é divisível por 4 e 5 é um número primo." é verdadeira, pois ambas as proposições que compõem esta conjunção são verdadeiras.*

(2) *A afirmação "100 é divisível por 4 e 5 é um número par." é falsa, pois a proposição "5 é um número par." é falsa.*

Dadas duas proposições φ e ψ, a disjunção de φ e ψ é verdadeira se pelo menos uma das proposições que a compõem é verdadeira. O significado do conetivo $\vee$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemplo 1.10.

(1) *A proposição "100 não é divisível por 4 ou 5 não é um número primo." é falsa, pois ambas as proposições que a compõem são falsas.*

(2) *A proposição "100 é divisível por 4 ou 5 é um número par." é verdadeira, pois uma das proposições desta disjunção é verdadeira.*

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \rightarrow \psi$ é verdadeira se ψ é verdadeira sempre que φ é verdadeira. O significado do conetivo $\rightarrow$ é dado pela tabela:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemplo 1.11. *Considere a seguinte afirmação "Se o João for ao cinema, o Manuel também vai." Com base nesta informação, é de esperar que se o João for ao cinema, o Manuel também vá. Assim, se o João e o Manuel forem ambos ao cinema, poderemos dizer que a informação dada é verdadeira. Se o João for ao cinema e o Manuel não, consideramos que a informação dada é falsa. Porém, da afirmação inicial não é possível concluir se o Manuel vai ao cinema caso o João não vá. Assim, caso o João não vá ao cinema, considera-se a afirmação verdadeira quer o Manuel vá ao cinema quer não vá.*

Dadas duas proposições φ e ψ, a proposição $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se ambas as proposições tiverem o mesmo valor lógico. O significado do conetivo $\leftrightarrow$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo 1.12. *Das proposições a seguir consideradas*

(1) "$1 + 1 = 2$ *se e só se* $2 + 4 = 6$."

(2) "$1 + 1 = 3$ *se e só se* $2 + 4 = 7$."

(3) "$1 > 3$ *é equivalente a* $3 > 1$."

as duas primeiras são verdadeiras e a terceira é falsa.

Conhecidos os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula, esta tem associado um e um só valor lógico. Na análise de qual será o valor lógico de uma fórmula, relacionando-o com os valores lógicos das variáveis que nela ocorrem, é útil o recurso a tabelas de verdade.

Exemplo 1.13. *Pretendemos determinar o valor lógico de* $\neg p \vee (q \wedge p)$ *em função dos valores lógicos das variáveis proposicionais* p *e* q*. A fórmula* $\neg p \vee (q \wedge p)$ *tem 2 variáveis proposicionais (*p *e* q*), pelo que na construção da tabela de verdade desta fórmula temos de considerar todas as combinações possíveis dos seus valores lógicos. Cada variável pode assumir um dos dois valores lógicos, pelo que existem* 2^2 *combinações possíveis. Por conseguinte, a tabela de verdade de* $\neg p \vee (q \wedge p)$ *tem* 2^4 *linhas. Para cada uma das combinações dos valores lógicos de* p *e* q *determina-se o valor lógico de* $\neg p$ *e de* $q \wedge p$*, para depois determinar o valor lógico de* $\neg p \vee (q \wedge p)$*.*

p	q	$\neg p$	$q \wedge p$	$\neg p \vee (q \wedge p)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Exemplo 1.14. *Estudemos, agora, o valor lógico de $(\neg p \vee q) \to r$ em função dos valores lógicos das variáveis proposicionais p, q e r. A fórmula $(\neg p \vee q) \to r$ tem 3 variáveis proposicionais (p, q e r), pelo que a tabela de verdade desta fórmula tem 2^3 linhas. Para cada uma das combinações dos valores lógicos de p, q e r determina-se o valor lógico de $(\neg p)$ e de $(\neg p \vee q)$ e, por último, o valor lógico de $((\neg p \vee q) \to r)$.*

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \to r$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

Se φ é uma fórmula com n variáveis proposicionais, existem 2^n combinações possíveis para os valores lógicos das variáveis que ocorrem em φ. Logo, a tabela de φ tem 2^n linhas.

Existem fórmulas que assumem sempre o valor lógico verdadeiro qualquer que seja a combinação dos valores lógicos das variáveis que nelas ocorrem. Quando tal acontece diz-se que a fórmula é uma *tautologia*.

Definição 1.4. *Designa-se por* **tautologia** *uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.*

Exemplo 1.15. *As fórmulas $p \vee (\neg p)$ e $p \to p$ são tautologias.*

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
1	0	1
0	1	1

p	$p \to p$
1	1
0	1

A negação de uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso.

Definição 1.5. *Designa-se por* **contradição** *uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.*

Exemplo 1.16. *As fórmulas $p \wedge \neg p$ e $p \leftrightarrow (\neg p)$ são contradições.*

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow (\neg p)$
1	0	0
0	1	0

No estudo da sintaxe do Cálculo Proposicional vimos como construir fórmulas a partir de fórmulas dadas; seguidamente iremos estudar algumas relacões entre elas, mas do ponto de vista semântico.

Dadas fórmulas φ e ψ do Cálculo Proposicional, diz-se que ψ é uma *consequência lógica* de φ ou que φ *implica logicamente* ψ se a fórmula ψ é verdadeira sempre que φ é verdadeira.

Definição 1.6. *Sejam φ e ψ fórmulas proposicionais. Diz-se que ψ é uma* **consequência lógica** *de φ ou que φ* **implica logicamente** *ψ, e escreve-se $\varphi \Rightarrow \psi$, se a fórmula proposicional $\varphi \rightarrow \psi$ é uma tautologia.*

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos de implicações lógicas frequentemente utilizadas em provas matemáticas.

Proposição 1.7. *Sejam φ, ψ, σ fórmulas proposicionais. Então:*

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi \Rightarrow \psi$ *(Modus Ponens).*
2. $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ *(Modus Tolens).*
3. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ *(Simplificação).*
4. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$ *(Simplificação).*
5. $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *(Adição).*
6. $\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *(Adição).*
7. $(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\psi \Rightarrow \varphi$ *(Modus Tollendo Ponens).*
8. $(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\varphi \Rightarrow \psi$ *(Modus Tollendo Ponens).*
9. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ *(Bicondicional-Condicional).*
10. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ *(Bicondicional-Condicional).*
11. $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$ *(Condicional-Bicondicional).*

Demonstração. Apresentamos a prova da implicação lógica indicada em 1., ficando a prova das restantes implicações ao cuidado do leitor.

Para provar que $((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \Rightarrow \psi$ basta mostrar que a fórmula $((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi$ é uma tautologia, o que pode ser feito através da construção da tabela de verdade desta fórmula

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$(\varphi \to \psi) \wedge \varphi$	$(\varphi \to \psi) \wedge \varphi \to \psi$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

□

Uma implicação lógica nem sempre é reversível. Por exemplo, dadas variáveis proposicionais p e q, sabe-se que $(p \wedge q) \Rightarrow p$, mas é simples verificar que p não implica logicamente $p \wedge q$. De facto, o valor lógico de $p \to (p \wedge q)$ nem sempre é verdadeiro: se representarmos por p a proposição "2 é um número natural par"e por q a proposição "2 é maior do 4", a proposição "Se 2 é um número natural par, então 2 é um número natural par e é maior do que 4" é representada por $p \to (p \wedge q)$ e o seu valor lógico é falso.

Existem, no entanto, implicações lógicas que são reversíveis. Por exemplo, as fórmulas $p \to \neg\neg p$ e $\neg\neg p \to p$ têm sempre o mesmo valor lógico, independentemente do valor lógico de p, pelo que $p \to \neg\neg p$ e $\neg\neg p \to p$ são tautologias e, portanto, $p \Rightarrow \neg\neg p$ e $\neg\neg p \Rightarrow p$.

A existência de implicações lógicas reversíveis conduz à noção de *equivalência lógica*. Note-se que, para quaisquer fórmulas proposicionais φ e ψ, tem-se $\varphi \Rightarrow \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi$ se e só se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Além disso, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia se e só se as variáveis proposicionais φ e ψ têm o mesmo valor lógico, indepentendemente do valor lógico das variáveis proposicionais que nelas ocorrem. Duas fórmulas que tenham o mesmo valor lógico, independentemente do valor lógico das variáveis proposicionais que nelas ocorrem, dizem-se *logicamente equivalentes*.

Definição 1.8. *Sejam φ e ψ duas fórmulas proposicionais. Diz-se que φ e ψ são* **logicamente equivalentes** *quando a fórmula proposicional $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso, escrevemos $\varphi \Leftrightarrow \psi$.*

Listam-se de seguida algumas das equivalências lógicas mais conhecidas e frequentemente utilizadas em provas matemáticas

Proposição 1.9. *Dadas fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, são válidas as seguintes equivalências lógicas:*

1. *(associatividade)*
   $((\varphi \vee \psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee (\psi \vee \sigma))$; $\quad ((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma))$;

2. *(comutatividade)*
   $(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$; $\quad (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$;

3. *(idempotência)*
   $(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$; $\quad (\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$;

4. *(elemento neutro)*
   $(\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$; $\quad (\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$;

5. *(elemento absorvente)*
   $(\varphi \vee (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \vee \neg\psi)$; $\quad (\varphi \wedge (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$;

6. *(leis de De Morgan)*
   $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$; $\quad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$;

7. *(distributividade)*
   $((\varphi \wedge \psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma))$; $\quad ((\varphi \vee \psi) \wedge \sigma) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \sigma) \vee (\psi \wedge \sigma))$;

8. *(dupla negação)*
   $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$;

9. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$;

10. $(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$.

Demonstração. Mostremos que as fórmulas $\varphi \to \psi$ e $\neg\varphi \vee \psi$ são logicamente equivalentes. Construindo a tabela de verdade de $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

concluímos que esta fórmula é uma tautologia e, portanto, as fórmulas $\varphi \to \psi$ e $\neg\varphi \vee \psi$ são logicamente equivalentes. □

Exemplo 1.17. *Usando uma sequência de equivalências lógicas, prova-se que a fórmula* $\neg(p \to q) \vee \neg p$ *é logicamente equivalente a* $\neg(q \wedge p)$*. De facto,*

$$\begin{array}{rcll}
\neg(p \to q) \vee \neg p & \Leftrightarrow & \neg(\neg p \vee q) \vee \neg p & \\
& \Leftrightarrow & (\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee \neg p & \textit{(lei de De Morgan)} \\
& \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee \neg p & \textit{(dupla negação)} \\
& \Leftrightarrow & (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) & \textit{(distributividade)} \\
& \Leftrightarrow & \neg q \vee \neg p & \textit{(elemento neutro)} \\
& \Leftrightarrow & \neg(q \wedge p) & \textit{(lei de De Morgan).}
\end{array}$$

Alternativamente, pode-se provar que as fórmulas $\neg(p \to q) \vee \neg p$ e $\neg(q \vee p)$ são logicamente equivalentes, mostrando que a fórmula $(\neg(p \to q) \vee \neg p) \leftrightarrow (\neg(q \wedge p))$ é uma tautologia.

1.4 Cálculo de Predicados

Na secção anterior referimos que frases tais como "x é um inteiro ímpar" e "x+2=y" não são proposições, uma vez que o seu valor lógico pode ser o de verdade ou o de falsidade, dependendo dos valores de x e y. No entanto, é frequente encontrarmos, no estudo de qualquer teoria matemática, frases que fazem referência a objectos genéricos representados por letras. Frases como estas são objeto de estudo de um ramo da lógica designado por Cálculo de Predicados. Nesta unidade curricular, não temos por objetivo aprofundar o estudo de Cálculo de Predicados, mas apenas estudar algumas noções elementares que permitam a familiarização com o simbolismo, o significado, o uso e a negação de frases quantificadas.

Nas frases que envolvem letras, designadas por **variáveis**, que fazem referência a objetos genéricos, está implícito um domínio de discurso designado por **universo** ou **domínio de variação** das variáveis.

Exemplo 1.18. *Na frase "x é um inteiro ímpar" a variável x refere-se a um inteiro, pelo que o universo de x é o conjunto $\mathbb{Z}$.*

A frase "x é um inteiro ímpar' não é uma proposição. No entanto, se substituirmos x por valores do seu universo, obtemos frases às quais já é possível associar um valor de verdade. Por exemplo, "2 é um inteiro ímpar" e "3 é um inteiro ímpar" são proposições com o valor lógico falso e verdadeiro, respetivamente.

Definição 1.10. *Um* **predicado nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, é uma frase declarativa que faz referência às variáveis $x_1, \ldots, x_n$, cujo valor lógico depende da substituição destas variáveis por valores do seu domínio de variação e que se torna numa proposição sempre que estas são substituídas por valores do universo.*

Um predicado nas variáveis $x_1, ..., x_n$ será representado por uma letra minúscula $p, q, r, ...$ (possivelmente com índices) seguida das variáveis que ocorrem no predicado (as quais são colocadas entre parêntesis e separadas por vírgulas).

Exemplo 1.19. *Os predicados "x é um inteiro ímpar" e "x é maior do que y" podem ser representados, respetivamente, por $p(x)$ e por $q(x, y)$.*

Os predicados podem ser combinados, por meio de conetivos lógicos, de forma a obter novos predicados.

Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$ são predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então

$$(\neg p(x_1, \ldots, x_n)), \quad (p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$(p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(x_1, \ldots, x_n)), \quad (p(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow q(x_1, \ldots, x_n))$$

$$\text{e} \quad (p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \ldots, x_n))$$

são também predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo 1.20. *O predicado "x é um inteiro ímpar e x é maior do que y" pode ser representado por $p(x) \wedge q(x, y)$.*

Dado um predicado $p(x_1, \ldots, x_n)$ e elementos $a_1, \ldots, a_n$ tais que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_i é um valor do domínio de variação de x_i, representamos por $p(a_1, \ldots, a_n)$ a proposição resultante da substituição das variáveis de p por esses valores concretos.

Exemplo 1.21. *Considerando os predicados do exemplo anterior, $p(5)$ representa a proposição "5 é um inteiro ímpar" e $q(5, 3)$ representa a proposição "5 é maior do que 3".*

A substituição das variáveis de um predicado por valores concretos do seu universo não é a única forma de o converter numa proposição. Tal também pode ser conseguido através do uso de *quantificadores*.

Exemplo 1.22. *A partir do predicado 2+x=3 podemos construir frases tais como*

(i) Para todo o inteiro x, 2+x=3.

(ii) Existe um inteiro x tal que $2 + x = 3$.

Estas frases são proposições, uma vez que é possível associar-lhes um valor lógico.

Definição 1.11. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, frases tais como*

"Para todo x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.",

"Qualquer que seja x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.",

"Para cada x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.",

são designadas de **quantificação universal** *e são representadas por $\forall_{x_i}\, p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.*

Ao símbolo $\forall$ chamamos **quantificador universal** e é usual associar-lhe uma das seguintes leituras "todo", "para todo", "qualquer que seja" ou "para cada". No caso em que $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\forall_x \, p(x)$ é uma proposição. A proposição $\forall_x \, p(x)$ é verdadeira se a proposição $p(a)$ for verdadeira para todo o elemento a do domínio de variação de x, também designado por **universo de quantificação de** x. Caso exista um elemento a do universo de variação de x para o qual a proposição $p(a)$ seja falsa, a proposição $\forall_x \, p(x)$ é falsa.

Exemplo 1.23. *Se $q(x)$ representar o predicado $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x \, q(x)$ é verdadeira, uma vez que a proposição $q(a)$ é verdadeira para qualquer real a.*
Se p(x) representar o predicado "Se x é um número primo, então x é um número ímpar." e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números naturais, a proposição $\forall_x \, p(x)$ é falsa, uma vez que $2 \in \mathbb{N}$ e $p(2)$ é falsa.

Definição 1.12. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, frases tais como*

"Existe x_i tal que $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$",

"Para algum x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$"

são designadas de **quantificação existencial** *e são representadas por $\exists_{x_i} \; p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.*

Ao símbolo $\exists$ dá-se a designação de **quantificador existencial** e é usual associar-lhe uma das seguintes leituras: "existe" ou "para algum". No caso em que $p(x)$ representa um predicado na variável x, a frase representada por $\exists_x \, p(x)$ é uma proposição. A proposição $\exists_x \, p(x)$ é verdadeira se a proposição $p(a)$ for verdadeira para algum elemento a do universo de quantificação. Caso não exista qualquer elemento a do universo de quantificação de x para o qual a proposição $p(a)$ seja verdadeira, a proposição $\exists_x \, p(x)$ é falsa.

Exemplo 1.24. *Se p(x) representar o predicado $2 + x = 3$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números naturais, então a proposição $\exists_x \, p(x)$ é verdadeira, pois 1 é um natural e $p(1)$ é verdade.*
Se $q(x)$ representar o predicado $x^2 + 1 = 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números reais, a proposição $\exists_x \, q(x)$ é falsa, uma vez que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem soluções em $\mathbb{R}$.

Se o universo de uma determinada quantificação for um certo conjunto U, podemos escrever $\exists_{x \in U} \, p(x)$ e $\forall_{x \in U} \, p(x)$ em vez de $\exists_x \, p(x)$ e $\forall_x \, p(x)$, respetivamente.

Exemplo 1.25. *A frase "Existe um natural x tal que $2 + x = 3$" pode ser representada por $\exists_{x \in \mathbb{N}} \; 2 + x = 3$.*

Se representarmos por $p(x)$ o predicado $2 + x = 3$, então o número natural 1 é o único natural u tal $p(u)$ é verdade.

A existência e unicidade de um único objeto que satisfaça um predicado $p(x)$ pode ser representada pela expressão $\exists^1_x p(x)$, à qual é usual associar uma das seguintes leituras "Existe um e um só x tal que $p(x)$" ou "Existe um único x tal que $p(x)$".

Exemplo 1.26. *A proposição $\exists^1_{x\in\mathbb{Z}}\ x+3=2$ é verdadeira, mas a proposição $\exists^1_{x\in\mathbb{Z}}\ x>1$ é falsa (tanto 2 como 3 satisfazem o predicado $x>1$).*

Os quantificadores universal e existencial podem ser combinados para quantificar uma mesma condição.

Exemplo 1.27. *Considerando que $p(x,y)$ representa o predicado $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ e $q(x,y)$ representa o predicado $x>y$, então as frases*

> *"Para quaisquer dois números reais x e y, $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$."*
>
> *"Para todo o inteiro y existe um inteiro x maior do que y."*

podem ser representadas, respetivamente, por $\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\ p(x,y)$ e $\forall_{y\in\mathbb{Z}}\exists_{x\in\mathbb{Z}}\ q(x,y)$.

Quando temos um predicado em duas ou mais variáveis, o valor lógico da proposição obtida pela quantificação de todas as variáveis pode depender da ordem dessas quantificações.

Exemplo 1.28. *Consideremos o predicado $x\geq y$.*

(i) A proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\exists_{y\in\mathbb{Z}}\ y\geq x$ é verdadeira.

(ii) A proposição $\exists_{y\in\mathbb{Z}}\forall_{x\in\mathbb{Z}}\ y\geq x$ é falsa.

Quando as quantificações de todas as variáveis são feitas com o mesmo quantificador, a ordem das quantificações não afeta o valor lógico da proposição e, por isso, é possível simplificar a escrita, usando apenas um quantificador.

Exemplo 1.29. *A proposição $\exists_{x\in\mathbb{Z}}\exists_{y\in\mathbb{Z}}\ x\geq y$ pode ser escrita como $\exists_{x,y\in\mathbb{Z}}\ x\geq y$.*
A proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\forall_{y\in\mathbb{Z}}\ x\geq y$ pode ser escrita como $\forall_{x,y\in\mathbb{Z}}\ x\geq y$.

Se a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa, então não existe qualquer valor a do domínio de quantificação de x para o qual $p(a)$ seja verdadeira. Ou seja, $p(a)$ é falsa para todo o elemento a do domínio de quantificação de x. Assim, podemos afirmar que $\neg p(a)$ é verdadeira para todo o elemento a do domínio de quantificação de x, isto é, a proposição $\forall_x\ (\neg p(x))$ é verdadeira. Logo $\neg(\exists_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\forall_x\ (\neg p(x))$.

Se $\forall_x p(x)$ é uma proposição falsa, tal significa que existe um valor a do domínio de quantificação de x tal que $p(a)$ é falsa, o que equivale a afirmar que a proposição $\exists_x\ (\neg p(x))$ é verdadeira. Assim, $\neg(\forall_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\exists_x\ (\neg p(x))$.

Exemplo 1.30. *Consideremos a proposição "Existe um inteiro x tal que para qualquer outro inteiro y, $x + y = x$". Usando linguagem simbólica, podemos reescrever a afirmação anterior como*

$$\exists_{x\in\mathbb{Z}}\forall_{y\in\mathbb{Z}}\ x + y = x.$$

A negação da proposição é "Para todo o inteiro x, existe um inteiro y tal que $x + y \neq x$". Podemos, assim, reescrever a negação da proposição inicial como

$$\forall_{x\in\mathbb{Z}}\exists_{y\in\mathbb{Z}}\ x + y \neq x.$$

1.5 Alguns métodos de prova

A prova (demonstração) de uma proposição matemática é um argumento logicamente válido (construído com base em princípios - regras e axiomas) que estabelece a veracidade da proposição.

Definição 1.13. *Um* **argumento** *consiste numa lista de afirmações $(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$, sendo as afirmações $\psi_1, \ldots, \psi_n$ designadas de* **premissas** *e a afirmação φ designada por* **conclusão**. *Um argumento $(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$ pode ser representado por*

$$\begin{array}{c} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \\ \hline \therefore \varphi \end{array}$$

Um argumento pode ser válido ou inválido. Um argumento diz-se **válido** se a conclusão é verdadeira sempre que as premissas são verdadeiras. Se um argumento é válido e se as premissas são verdadeiras, pode-se concluir que a conclusão também é uma afirmação verdadeira. Por outras palavras, um argumento é válido se é impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa.

Exemplo 1.31. *Se φ e ψ são proposições, o argumento representado por*

$$\begin{array}{c} \psi \to \varphi \\ \psi \\ \hline \therefore \varphi \end{array}$$

é válido. De facto, pela tabela de verdade seguinte

		Premissa 1	*Premissa 2*	*Conclusão*
ψ	φ	$\psi \to \varphi$	ψ	φ
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

verifica-se que sempre que as premissas $\psi \to \varphi$ e ψ são simultaneamente verdadeiras, a conclusão φ também é verdadeira.

Um argumento é **inválido** se é possível que as premissas sejam todas verdadeiras e a conclusão seja falsa.

Exemplo 1.32. *Se φ e ψ são proposições, o argumento representado por*

$$\begin{array}{c} \psi \vee \varphi \\ \psi \\ \hline \therefore \varphi \end{array}$$

é um argumento inválido. Considerando a tabela de verdade seguinte

		Premissa 1	*Premissa 2*	*Conclusão*
ψ	φ	$\psi \vee \varphi$	ψ	φ
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

observa-se que é possível ter simultaneamente o valor lógico verdadeiro para as premissas $\psi \to \varphi$ e ψ e o valor lógico falso para a conclusão φ (linha 2 da tabela).

Exemplo 1.33. *O argumento*

O Carlos vai ao cinema, mas o Manuel não.

Se o Carlos vai ao cinema, o João também vai.

O Manuel não vai ao cinema, mas o João ou o Carlos vão.

Então o Carlos não vai ao cinema.

é inválido. De facto, se considerarmos que as variáveis proposicionais p, q e r representam as frases

p: *O Carlos vai ao cinema.*

q: *O João vai ao cinema.*

r: *O Manuel vai ao cinema.*

o argumento anterior pode ser representado por

$$\begin{array}{c} p \wedge (\neg r) \\ p \rightarrow q \\ (\neg r) \wedge (p \vee q) \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

e da tabela de verdade seguinte

p	q	r	$p \wedge (\neg r)$	$p \rightarrow q$	$(\neg r) \wedge (p \vee q)$	$\neg p$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

concluímos que o argumento é inválido, uma vez que, para a mesma atribuição de valores lógicos às variáveis p, q e r, as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão pode ser falsa (tal como se pode verificar pela linha 2 da tabela de verdade).

A prova de uma proposição pode ser **direta** ou **indireta**. Numa prova direta de uma proposição procura-se estabelecer a veracidade da mesma a partir de axiomas ou factos conhecidos e sem assumir pressupostos adicionais. Porém, em certos casos a prova direta não é simples e pode mesmo não ser possível. Nestas situações pode-se optar por um método de prova indireta. Por exemplo, pode-se provar a veracidade de uma proposição mostrando que esta não pode ser falsa.

Prova direta de uma conjunção
Na prova direta de $p \wedge q$, procura-se uma prova de p e uma prova de q.

O exemplo seguinte ilustra este tipo de prova. Neste exemplo são referidos os conceitos de número *inteiro par* e *inteiro ímpar*, pelo que começamos por recordar estas noções. Dado um inteiro a, diz-se que a é *par* se existe um inteiro k tal que $a = 2k$; o inteiro a é *ímpar* se existe um inteiro k tal que $a = 2k + 1$.

Exemplo 1.34. *Proposição: O quadrado de um número natural ímpar é um número ímpar e tem resto 1 na divisão inteira por* 4.

Demonstração: Seja n um número natural ímpar. Então $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}_0$. Logo $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ e, portanto, n^2 é um natural ímpar. Claramente, n^2 tem resto 1 na divisão inteira por 4*, pois $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$.* $\square$

Prova direta de uma disjunção
Na prova direta de $p \vee q$ basta fazer prova de uma das proposições p ou q.

Exemplo 1.35. *Proposição: A soma de dois números naturais ímpares é um número par ou é um número ímpar.*

Demonstração: Sejam n e m dois números naturais ímpares. Então, $n = 2j+1$ e $m = 2k+1$, para alguns $j, k \in \mathbb{N}_0$. Assim, $n + m = (2j + 1) + (2k + 1) = 2(j + k + 1)$ é um número par. Logo, a soma de quaisquer dois números naturais ímpares é um número par e, portanto, a proposição é verdadeira. $\square$

Prova direta de uma implicação
Para demonstrar diretamente uma afirmação do tipo $p \to q$, encontra-se uma prova de q, assumindo a veracidade de p.

Exemplo 1.36. *Proposição: Se a e b são reais tais que $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.*

Demonstração: Sejam a, b números reais tais que $0 < a < b$. Então, como $0 < a$ e $0 < b$, vem que $a^2 < ab$ e $ab < b^2$. Por conseguinte, $a^2 < b^2$. $\square$

Atendendo à equivalência lógica $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$, a prova de uma afirmação do tipo $p \leftrightarrow q$ passa pela prova de duas implicações.

Prova direta de uma equivalência
Na prova direta de $p \leftrightarrow q$ procura-se uma prova de $p \to q$ e uma prova de $q \to p$.

Para o exemplo seguinte, no qual se apresenta a prova de uma equivalência, relembra-se a noção de *divisão inteira*. Dados inteiros a e b, diz-se que a *divide* b, e escreve-se $a \,|\, b$, se existe um inteiro k tal que $b = ak$.

Exemplo 1.37. *Sejam n um inteiro. Então $6 \,|\, n$ se e só se $2 \,|\, n$ e $3 \,|\, n$.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Admitamos que $6 \,|\, n$. Então existe um inteiro p tal que $n = 6p$. Por conseguinte, $n = 3(2p)$, donde $3 \,|\, n$. De modo análogo, tem-se $6 = 2(3k)$, pelo $2 \,|\, n$.

$\Leftarrow$) Admitamos que $2 \,|\, n$ e $3 \,|\, n$. Como $2 \,|\, n$, existe um inteiro p tal que $n = 2p$. Atendendo a que $3 \,|\, n$, existe um inteiro q tal que $n = 3q$. Então

$$n = 3n - 2n = 3(2p) - 2(3q) = 6p - 6q = 6(p - q),$$

e, portanto, $6 \,|\, n$. $\square$

Prova direta de uma negação
Na prova de $\neg p$, assume-se p e procura-se uma contradição.

Exemplo 1.38. *Proposição: Não existem números naturais n e m tais que $2n + 4m = 17$.*

Demonstração: Pretende-se provar uma afirmação do tipo $\neg p$, onde p representa a proposição "Existem números naturais n e m tais que $2n + 4m = 17$.". Para tal, admitamos p, isto é, suponhamos que existem números naturais n e m tais que $2n + 4m = 17$. Então,

$$17 = 2n + 4m = 2(n + 2m),$$

pelo que 17 é divisível por 2, o que contradiz o facto de 17 ser um número ímpar.
Assim, não existem números naturais n e m tais que $2n + 4m = 17$. $\square$

Prova por contradição ou redução ao absurdo
Para provar uma afirmação p assume-se $\neg p$ e procura-se uma contradição.

No exemplo que se segue apresenta-se uma demonstração do resultado enunciado recorrendo a uma prova por redução ao absurdo.

Exemplo 1.39. *Proposição: Existe um número infinito de números primos.*

Demonstração: No sentido de provarmos por contradição este resultado, admitamos que existe um número finito de números primos, digamos p_1, p_2, ..., p_n, com $n \in \mathbb{N}$. Considere-se, agora, o número

$$x = p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

É óbvio que o número x não é divisível por nenhum dos números primos $p_1, p_2, \dots, p_n$ (pois o resto da divisão é sempre 1). Logo x é um número primo, o que contradiz a hipótese inicial de que existem apenas n números primos. Então a hipótese inicial está errada e, portanto, existe um número infinito de números primos. $\square$

Muitas proposições matemáticas são enunciadas na forma de uma implicação $p \to q$. Para além destas, existem outras proposições cuja prova pode passar pela demonstração de uma afirmação do tipo $p \to q$. Por estes motivos, é conveniente conhecer e estudar diversos métodos de prova indireta para uma implicação.

A prova de $p \to q$ pode ser feita por contradição. Note-se que $p \to q$ é logicamente equivalente a $\neg p \vee q$, pelo que $\neg(p \to q)$ é logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$.

Prova de uma implicação por redução ao absurdo
Na prova de $p \to q$ por redução ao absurdo assume-se $p \wedge \neg q$ e procura-se uma contradição.

Exemplo 1.40. *Proposição: Se a e b são inteiros, então $a^2 - 4b \neq 2$.*

Demonstração: Pretendemos provar uma proposição do tipo $p \to q$, onde p representa a afirmação "a e b são números inteiros." e q representa a afirmação "$a^2 - 4b \neq 2$". A prova segue por redução ao absurdo. Nesse sentido, admitamos $p \wedge \neg q$, isto é, suponhamos que a e b são inteiros e que $a^2 - 4b = 2$. Então

$$a^2 = 2 + 4b = 2(1 + 2b)$$

e, portanto, a^2 é par. Como o quadrado de qualquer inteiro ímpar é um inteiro ímpar, então a é par. Logo $a = 2c$, para algum inteiro c. Substituindo a por $2c$ em $a^2 - 4b = 2$, obtemos $4c^2 - 4b = 2$, donde resulta a contradição $2(c^2 - b) = 1$, uma vez que 1 não é par. A contradição resultou de admitirmos que existem inteiros a e b tais que $a^2 - 4b = 2$. Logo, se a e b são inteiros, tem-se $a^2 - 4b \neq 2$. $\square$

Atendendo a que $p \to q$ é logicamente equivalente a $\neg q \to \neg p$, a demonstração de $p \to q$ pode ser feita, indiretamente, apresentando uma prova de $\neg q \to \neg p$.

Prova de uma implicação por contraposição ou por contrarrecíproco
Por forma a provar $p \to q$, assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de $\neg p$.

Para o exemplo seguinte, que ilustra o tipo de prova anterior, é conveniente recordar a noção de número racional. Um número real a diz-se um *número racional* se existem um número inteiro p e um número inteiro não nulo q tais que $a = \frac{p}{q}$. Um número real que não seja racional diz-se um *número irracional*.

Exemplo 1.41. *Proposição: Sejam a e b números reais. Se $a+b$ e ab são números irracionais, então a ou b é um número irracional.*

Sejam a e b números reais. Representando por p a afirmação "$a + b$ e ab são números irracionais." e por q a afirmação "a ou b é um número irracional.", pretende-se provar a afirmação representada por $p \to q$.

No sentido de fazer a prova de $p \to q$ por contraposição, admitamos $\neg q$, isto é, admitamos que a e b são números racionais. Então, existem inteiros m, n, s, t tais que $t \neq 0$, $n \neq 0$, $a = \frac{s}{t}$ e $b = \frac{m}{n}$. Assim,

$$a + b = \tfrac{sn+tm}{nt}, \text{ onde } sn + tm \text{ e } nt \text{ são inteiros e } nt \neq 0,$$
$$ab = \tfrac{sm}{nt}, \text{ onde } sm \text{ e } nt \text{ são inteiros e } nt \neq 0.$$

Logo $a + b$ e ab são números racionais e, portanto, tem-se $\neg p$.

Uma vez que ambas as fórmulas $\neg p \to q$ e $\neg q \to p$ são logicamente equivalentes a $p \vee q$, a prova da disjunção de p e q pode passar pela prova de $\neg p \to q$ ou de $\neg q \to p$.

Prova indireta de uma disjunção
Assume-se $\neg p$ e procura-se uma prova de q ou, analogamente, assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de p.

Exemplo 1.42. *Proposição: Dados dois números reais x e y tais que $xy = 0$, temos $x = 0$ ou $y = 0$.*

Demonstração: Pretendemos mostrar que $x = 0$ ou $y = 0$, assumindo que x e y são números reais tais que $xy = 0$. Iremos demonstrar esta disjunção recorrendo a uma prova indireta. Nesse sentido, começamos por supor que $x \neq 0$ e procuramos concluir que $y = 0$. Sendo x um número real não nulo, então $\frac{1}{x}$ é um número real. Logo,

$$xy = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x} \cdot 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) y = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot y = 0 \Leftrightarrow y = 0. \square$$

Prova por casos
A prova de uma afirmação do tipo $(q_1 \vee \ldots \vee q_n) \rightarrow p$ consiste em procurar uma prova para cada uma das implicações $q_1 \rightarrow p$, ..., $q_n \rightarrow p$. A uma prova deste tipo dá-se o nome de **prova por casos**.

No exemplo que se segue é apresentada uma prova por casos.

Exemplo 1.43. *Proposição: Se a e b são reais tais que $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$.*

Demonstração: Sejam a e b são reais tais que $0 \leq a < b$. Uma vez que $0 \leq a$, a prova é feita considerando dois casos: $0 < a$ e $a = 0$.

(i) Se $0 < a$, então $0 < a < b$, donde $a^2 < ab$ e $ab < b^2$ e, portanto, $a^2 < b^2$.

(ii) Se $a = 0$, então $0 < b$. Logo, como $a < b$, tem-se $ab < b^2$. Assim, e uma vez que $ab = 0 = a^2$, segue que $a^2 < b^2$.

De (i) e (ii) resulta que se a, b são reais tais que $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$. $\square$

Prova de uma proposição com quantificador universal
Na prova direta de uma proposição do tipo $\forall_x\, p(x)$, admitimos que a variável a representa um elemento arbitrário do universo de quantificação da variável x e mostramos que $p(a)$ é verdadeira.

Exemplo 1.44. *Proposição: Para todo o número natural n, se $n \geq 2$ então $n^2+5n+2 \geq 16$.*

Demonstração: Pretendemos mostrar que $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,(n \geq 2 \rightarrow n^2+5n+2 \geq 16)$. Admitamos que a representa um valor arbitrário em $\mathbb{N}$ e procuremos mostrar que se $a \geq 2$, então $a^2+5a+2 \geq 16$. Ora, assumindo que $a \geq 2$, tem-se $a^2 \geq 4$ e $5a \geq 10$ e, portanto, $a^2+5a+2 \geq 16$. $\square$

Na prova direta de uma proposição do tipo $\forall_x\, p(x)$ e no caso em que o universo de quantificação de x é um conjunto finito U, pode-se optar por uma **prova por exaustão**, testando individualmente, para cada $a \in U$, se $p(a)$ é verdadeira.

Prova de uma proposição com quantificador existencial
Numa prova direta de uma proposição do tipo $\exists_x\, p(x)$ é necessário exibir um elemento a do universo de quantificação da variável x tal que $p(a)$ seja verdade.

O tipo de prova referido anteriormente diz-se uma **prova construtiva**.

Exemplo 1.45. *Proposição: Existe um número natural n tal que $2n^2 - 5n + 2$ é um número primo.*

Demonstração: Pretendemos mostrar que $\exists_{n\in\mathbb{N}}$ ($2n^2 - 5n + 2$ é um número primo). Considerando $a = 3$ tem-se $2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 2 = 5$ e 5 é primo. Logo a proposição

$$\exists_{n\in\mathbb{N}}\,(2n^2 - 5n + 2 \text{ é um número primo})$$

é verdadeira. $\square$

Em certos casos a prova construtiva não é simples ou não é possível e nestes casos pode-se optar por uma prova indireta por contradição - neste caso a prova diz-se **não construtiva**.

Prova de existência e unicidade
A prova de afirmações do tipo $\exists^1_x\, p(x)$ pode ser dividida em duas partes:

> *prova de existência* - prova-se que existe, pelo menos, um elemento a do universo de quantificação de x tal que $p(a)$ é verdade;
>
> *prova de unicidade* - supõe-se que a e b são dois elementos do universo de quantificação tais que $p(a)$ e $p(b)$ são verdadeiras e mostra-se que $a = b$.

Exemplo 1.46. *Proposição: Existe um elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{R}$ e esse elemento é único.*

Demonstração: Pretendemos mostrar que $\exists^1_{u\in\mathbb{R}}\, \forall_{x\in\mathbb{R}}\, xu = ux = x$.
Prova de existência: Consideremos $u = 1 \in \mathbb{R}$. Pretendemos mostrar que $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, xu = ux = x$. Ora, dado $x \in \mathbb{R}$,

$$xu = x \times 1 = x = 1 \times x = ux.$$

Prova de unicidade: Suponhamos que $u' \in \mathbb{R}$ é elemento neutro para a multiplicação. Então,

$$1 = 1 \times u'.$$

Por outro lado, 1 é elemento neutro para a multiplicação e, portanto,

$$u' = 1 \times u'.$$

Logo, $u' = 1$. $\square$

Prova de falsidade por contra-exemplo
A prova de falsidade de uma proposição do tipo $\forall_x\, p(x)$ passa por mostrar que existe um elemento a do universo de quantificação tal que $p(a)$ é falsa. Neste caso, diz-se que o elemento a é um **contraexemplo** para a proposição $\forall_x\, p(x)$.

Exemplo 1.47. *Mostremos a falsidade da proposição*

"Para todo o número natural primo n, $2^n - 1$ é primo."

Demonstração: Esta proposição é da forma $\forall_{x\in\mathbb{N}}\, p(x)$, onde $p(x)$ é o predicado "x é um número primo". Assim, para mostrar que esta proposição é falsa, basta mostrar que a proposição $\exists_{x\in\mathbb{N}}\, \neg p(x)$ é verdadeira. Ora, considerando o número natural 11, 11 é um número primo e $2^{11} - 1$ não é primo, pois $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Logo, o número natural 11 é um contraexemplo para a proposição indicada. $\square$