# Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação

2019/2020

# 5. Relações binárias

No dia a dia é usual definirmos relações entre objetos, tais como a relação de *igualdade* entre objetos, a relação *menor do que* entre inteiros, a relação de *inclusão* entre conjuntos. Neste capítulo formaliza-se a noção de relação binária entre objetos e estudam-se algumas propriedades a respeito deste tipo de relações.

## 5.1 Noções básicas

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses objetos estão associados de alguma forma. Assim sendo, define-se relação binária como um conjunto de pares ordenados e os seus elementos são os pares ordenados $(a, b)$ tais que $a$ está associado a $b$.

**Definição 5.1.** *Dados conjuntos $A$ e $B$, chamamos* ***relação binária de** $A$ **em** $B$* *a qualquer subconjunto $R$ de $A \times B$. Quando $A = B$, diz-se que $R$ é uma relação binária em $A$.*
*Se $(a, b) \in R$, diz-se que $a$* ***está relacionado com** $b$ **por** $R$* *e escreve-se $a\,R\,b$. Se $(a, b) \notin R$, diz-se que $a$* ***não está relacionado com** $b$ **por** $R$* *e escreve-se $a \not R\, b$.*

**Exemplo 5.1.**

*(1) Sendo $A$ o conjunto de alunos da Licenciatura em Ciências da Computação e $D$ o conjunto de disciplinas do plano de estudos deste curso, podemos definir uma relação $R$ de $A$ em $D$ da seguinte forma: dados $a \in A$ e $d \in D$, $(a, d) \in R$ se $d$ é uma disciplina do $1^o$ ano do curso e o aluno $a$ está inscrito na disciplina $d$.*

*(2) Sejam $A = \{2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$.*

*($\alpha$) São exemplos de relações binárias de $A$ em $B$ as que a seguir se listam:*

*(i)* $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$;

*(ii)* $S = \{(2, 5)\}$;

*(iii)* $\emptyset$;

*(iv)* $A \times B$.

*A respeito da relação $R$ verifica-se que esta pode ser definida por*

$$a\,R\,b \text{ se e só se } a \text{ divide } b, \text{ para quaisquer } a \in A \text{ e } b \in B.$$

*No caso da relação $S$, o par $(5,2)$ não é elemento de $S$, pelo que $5 \not S 2$.*

*($\beta$) $T = \{(2,3),(3,2),(3,4)\}$ não é uma relação binária de $A$ em $B$, visto que $(3,2) \notin A \times B$.*

*(3) Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e $R$ a relação binária de $A$ em $B$ definida por*

$$a\,R\,b \text{ se e só se } b = 2a.$$

*Então*

$$R = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}.$$

*Note-se que $1 \not R\, 3$, pois $3 \neq 2 \times 1$.*

*(4) Dados conjuntos $A$ e $B$, uma função $f : A \to B$ é uma relação binária de $A$ em $B$.*

Dados conjuntos $A$ e $B$, o conjunto de todas as relações binárias de $A$ em $B$ é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$. Se os conjuntos $A$ e $B$ forem finitos, com $n$ e $m$ elementos, respetivamente, então $A \times B$ tem $nm$ elementos, pelo que $\mathcal{P}(A \times B)$ tem $2^{nm}$ elementos. Assim, existem $2^{nm}$ relações binárias de $A$ em $B$. Em particular, os conjuntos $\emptyset$ e $A \times B$ são relações binárias de $A$ em $B$, designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

Dado um conjunto não vazio $A$,

$$id_A = \{(a,a) \,|\, a \in A\} \quad \text{e} \quad \omega_A = A^2 = \{(x,y) \,|\, x,y \in A\}$$

são relações binárias em $A$ designadas, respetivamente, por **relação identidade em** $A$ e **relação universal em** $A$.

**Definição 5.2.** *Dados conjuntos $A$ e $B$ e uma relação binária $R$ de $A$ em $B$, chamamos:*

- **domínio de** $R$ *ao conjunto*

$$\text{Dom}(R) = \{a \mid \exists_{b \in B}\ (a,b) \in R\};$$

- **imagem** *ou* **contradomínio de** $R$ *ao conjunto*

$$\text{Im}(R) = \{b \mid \exists_{a \in A}\ (a,b) \in R\}.$$

**Exemplo 5.2.** *Consideremos os conjuntos $A = \{2,4,5\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ e a relação $R$ de $A$ em $B$ definida por $(a,b) \in R$ se e só se $a < b$. Então temos:*

- $R = \{(2,3),(2,4),(2,5),(4,5)\}$;
- $\text{Dom}(R) = \{2,4\}$ *e* $\text{Im}(R) = \{3,4,5\}$.

Duas relações binárias $R$ e $S$ de um conjunto $A$ num conjunto $B$ são iguais se os conjuntos $R$ e $S$ são iguais. Assim, se $R = S$, tem-se $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$. Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que $R = S$ sempre que $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$.

Seguidamende apresentam-se alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Uma vez que uma relação binária é um conjunto, podemos construir novas relações recorrendo aos processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se $R$ e $S$ são relações binárias de $A$ em $B$, o mesmo acontece com $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$.

**Exemplo 5.3.** *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$ *e consideremos as relações* $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$ *e* $S = \{(2, 4), (2, 6), (3, 5)\}$*. Então são relações binárias de* $A$ *em* $B$*:*

- $R \cap S = \{(2, 4), (3, 5)\}$;
- $R \cup S = \{(1, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 5)\}$;
- $R \setminus S = \{(1, 2), (3, 2)\}$.

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações binárias.

**Definição 5.3.** *Sejam* $A$*,* $B$ *conjuntos e* $R$ *uma relação binária de* $A$ *em* $B$*. Chama-se* **relação inversa de** $R$*, e representa-se por* $R^{-1}$*, a relação de* $B$ *em* $A$ *definida por*

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

**Exemplo 5.4.** *Consideremos os conjuntos* $A = \{2, 4, 5\}$*,* $B = \{2, 3, 4, 5\}$ *e a relação* $R$ *de* $A$ *em* $B$ *definida por* $(a, b) \in R$ *se e só se* $a < b$*. Uma vez que* $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ *tem-se*

$$R^{-1} = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}.$$

**Proposição 5.4.** *Sejam* $A$*,* $B$ *conjuntos e* $R$ *e* $S$ *relações binárias de* $A$ *em* $B$*. Então*

*(1)* $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ *e* $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.

*(2)* $(R^{-1})^{-1} = R$.

*(3) Se* $R \subseteq S$*, então* $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

*Demonstração.* Apresenta-se a prova das propriedades (1) e (2), ficando a prova de (3) como exercício.

(1) Facilmente prova-se que $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$. De facto, para qualquer objeto $y$,

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Dom}(R^{-1}) &\Leftrightarrow \exists_{x\in A}\,(y,x) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists_{x\in A}\,(x,y) \in R \\ &\Leftrightarrow y \in \mathrm{Im}(R). \end{aligned}$$

A prova de $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$ é análoga.

(2) Uma vez que $R \subseteq A \times B$ e $(R^{-1})^{-1} \subseteq A \times B$ e, para qualquer $(x,y) \in A \times B$,

$$\begin{aligned} (x,y) \in R &\Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (R^{-1})^{-1} \end{aligned},$$

concluímos que $R = (R^{-1})^{-1}$. □

**Definição 5.5.** *Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ conjuntos, $R$ uma relação binária de $A$ em $B$ e $S$ uma relação binária de $C$ em $D$. Chama-se* **relação composta de $S$ com $R$**, *e representa-se por $S \circ R$, a relação binária de $A$ em $D$ definida por*

$$S \circ R = \{(x,y) \mid \exists\, z \in B \cap C : (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\}.$$

Note-se que, nas condições da definição anterior, se $B \cap C = \emptyset$, tem-se $S \circ R = \emptyset$.

**Exemplo 5.5.** *Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{0,2,3,4\}$ e $D = \{0,1,3,5\}$ e consideremos as relações binárias*

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,4)\} \subseteq A \times B,$$

$$S = \{(0,1),(3,0),(3,3),(3,5),(4,0)\} \subseteq C \times D.$$

*Então*

*(1)* $S \circ R = \{(1,0),(1,3),(1,5),(2,0)\}$;

*(2)* $R \circ S = \{(0,2),(0,3)\}$.

Do exemplo anterior podemos concluir que a composição de relações binárias não é, em geral, comutativa.

**Proposição 5.6.** *Sejam $R$, $S$ e $T$ relações binárias. Então*

*(1)* $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ *e* $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

*(2)* $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

*(3)* $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

*Demonstração.* (1) Resulta facilmente da definição de relação composta. Com efeito, se $x \in \mathrm{Dom}(S \circ R)$, então existe $y$ tal que $(x, y) \in S \circ R$. Logo existe $z$ tal que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in S$. Portanto, $x \in \mathrm{Dom}R$. Desta forma, provámos que $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}R$.
De forma semelhante prova-se que $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}S$.

(2) Seja $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$. Então existe $z$ tal que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in T \circ S$. De $(z, y) \in T \circ S$ segue que existe $w$ tal que $(z, w) \in S$ e $(w, y) \in T$. Dado que $(x, z) \in R$ e $(z, w) \in S$, então $(x, w) \in S \circ R$. Agora, de $(x, w) \in S \circ R$ e de $(w, y) \in T$, tem-se $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$. Logo $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$. De modo análogo, prova-se que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

(3) Para todo o objeto $(x, y)$,

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in S \circ R \\
&\Leftrightarrow \exists_z \ (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S \\
&\Leftrightarrow \exists_z \ (z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Seguidamente referem-se algumas propriedades que permitem definir classes especiais de relações binárias.

**Definição 5.7.** *Sejam $A$ um conjunto e $R$ uma relação binária em $A$. Diz-se que:*

- *$R$ é* **reflexiva** *se*

$$\forall_{a \in A} \ (a, a) \in R;$$

- *$R$ é* **simétrica** *se*

$$\forall_{a,b \in A} \ (a, b) \in R \to (b, a) \in R;$$

- *$R$ é* **antissimétrica** *se*

$$\forall_{a,b \in A} \ ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \to a = b;$$

- *$R$ é* **transitiva** *se*

$$\forall_{a,b,c \in A} \ ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \to (a, c) \in R.$$

Note-se que uma relação binária $R$ de $A$ em $B$ é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a,b \in A} \ ((a, b) \in R \wedge a \neq b) \to (b, a) \notin R.$$

**Exemplo 5.6.** *(1) Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e*

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4)\}, \\ R_2 &= \{(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}, \\ R_3 &= \{(2,3)\}. \end{aligned}$$

*Uma vez que* $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R_1$*, a relação* $R_1$ *é reflexiva. O par* $(1,2)$ *é elemento de* $R_1$*, mas* $(2,1) \notin R_1$*, logo* $R_1$ *não é simétrica. Atendendo a que não existem elementos distintos* $a, b \in A$ *tais que* $(a,b) \in R_1$ *e* $(b,a) \in R_1$*, podemos afirmar que a relação* $R_1$ *é antissimétrica. Além disso,*

$$\begin{aligned} &((1,1) \in R_1 \wedge (1,1) \in R_1) \wedge (1,1) \in R_1 \\ &((1,1) \in R_1 \wedge (1,2) \in R_1) \wedge (1,2) \in R_1 \\ &((1,1) \in R_1 \wedge (1,3) \in R_1) \wedge (1,3) \in R_1 \\ &((1,2) \in R_1 \wedge (2,2) \in R_1) \wedge (1,2) \in R_1 \\ &((1,2) \in R_1 \wedge (2,3) \in R_1) \wedge (1,3) \in R_1 \\ &((1,3) \in R_1 \wedge (3,3) \in R_1) \wedge (1,3) \in R_1 \\ &((2,2) \in R_1 \wedge (2,2) \in R_1) \wedge (2,2) \in R_1 \\ &((2,2) \in R_1 \wedge (2,3) \in R_1) \wedge (2,3) \in R_1 \\ &((3,3) \in R_1 \wedge (3,3) \in R_1) \wedge (3,3) \in R_1 \\ &((4,4) \in R_1 \wedge (4,4) \in R_1) \wedge (4,4) \in R_1 \end{aligned}$$

*e, portanto,* $R_1$ *é transitiva.*

*Uma vez que* $1 \in A$ *e o par* $(1,1)$ *não é elemento de* $R_2$*, então* $R_2$ *não é reflexiva. Esta mesma relação é simétrica, pois, para quaisquer* $a, b \in A$*,*

$$(a,b) \in R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_2;$$

*de facto,*

$$\begin{aligned} &(1,4) \in R_2 \wedge (4,1) \in R_2 \\ &(2,2) \in R_2 \wedge (2,2) \in R_2 \\ &(2,3) \in R_2 \wedge (3,2) \in R_2 \\ &(3,2) \in R_2 \wedge (2,3) \in R_2 \\ &(4,1) \in R_2 \wedge (1,4) \in R_2. \end{aligned}$$

*Facilmente verificamos que* $R_2$ *não é antissimétrica, pois* $1 \neq 4$*,* $(1,4) \in R_2$ *e* $(4,1) \in R_2$*. Esta mesma relação também não é transitiva:* $(1,4) \in R_2 \wedge (4,1) \in R_2$*, mas* $(1,1) \notin R_2$*.*

*No que diz respeito à relação* $R_3$*, é simples verificar que esta é uma relação transitiva, antissimétrica, não reflexiva e não simétrica.*

*(2) Seja* $A$ *um conjunto não vazio. A relação* $id_A$ *e a relação universal* $\omega_A$ *são relações simultaneamente reflexivas, simétricas e transitivas.*

**Proposição 5.8.** *Sejam $A$ um conjunto e $R$ uma relação binária em $A$. Então*

*(1) $R$ é reflexiva se e só se $id_A \subseteq R$;*

*(2) $R$ é simétrica se e só se $R^{-1} = R$;*

*(3) $R$ é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$;*

*(4) $R$ é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$.*

*Demonstração.* Exercício. □

## 5.2 Relações de equivalência

Na secção anterior vimos que a relação identidade $id_A$ e a relação universal $\omega_A$ definidas num conjunto $A$ são relações reflexivas, simétricas e transitivas. Relações que verifiquem simultaneamente estas propriedades são designadas por *relações de equivalência*.

**Definição 5.9.** *Seja $A$ um conjunto. Uma relação binária $R$ em $A$ diz-se uma* **relação de equivalência** *se $R$ é reflexiva, simétrica e transitiva.*

**Exemplo 5.7.** *Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e consideremos a relação*

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\}.$$

*A relação $R$ é reflexiva, pois*

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq R.$$

*A relação é simétrica, uma vez que*

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 4)\} = R.$$

*A relação $R$ também é transitiva, pois*

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\} \subseteq R.$$

*Logo $R$ é uma relação de equivalência.*

**Exemplo 5.8.** *A relação $R$ definida no conjunto $A = \{x \,|\, x \text{ é aluno da L.C.C.}\}$ por*

$$x \, R \, y \text{ se e só se } x \text{ e } y \text{ nasceram no mesmo ano}$$

*é uma relação de equivalência em $A$.*

**Exemplo 5.9.** *Sejam $A$ e $B$ conjuntos e $f : A \to B$ uma função. A relação binária definida em $A$ por*

$$x\,R_f\,y \text{ se e só se } f(x) = f(y)$$

*é uma relação de equivalência em $A$. De facto,*

*- $R_f$ é reflexiva, pois, para todo $x \in A$, $f(x) = f(x)$ e, portanto, $x\,R_f\,x$;*

*- $R_f$ é simétrica, uma vez que para quaisquer $x, y \in A$,*

$$x\,R_f\,y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\,R_f\,x;$$

*- $R_f$ é transitiva, pois para quaisquer $x, y, z \in A$,*

$$(x\,R_f\,y \wedge y\,R_f\,z) \Rightarrow (f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\,R_f\,z.$$

**Exemplo 5.10.** *Seja $R$ a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por*

$$a\,R\,b \text{ se e só se } a - b \text{ é divisível por } 3.$$

*É simples verificar que $R$ é uma relação de equivalência. Com efeito, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ é divisível por $3$, logo $a\,R\,a$. Portanto, $R$ é reflexiva. Por outro lado, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $b - a = 3(-k)$, com $-k \in \mathbb{Z}$ e, por conseguinte, $b\,R\,a$. Assim, $R$ é simétrica. Além disso, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e $b - c = 3k'$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$, com $k + k' \in \mathbb{Z}$, pelo que $a\,R\,c$. Logo $R$ é transitiva.*
*Note-se que, dado $a \in \mathbb{Z}$, tem-se*

$$\begin{aligned} 1\,R\,a \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - a = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad a = 3k + 1, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad a \text{ tem resto 1 na divisão inteira por 3.} \end{aligned}$$

*De modo análogo, prova-se que $2\,R\,a$ se e só se $a$ tem resto $2$ na divisão inteira por $3$ e que $0\,R\,a$ se e só se $a$ tem resto $0$ na divisão inteira por $3$. Assim, uma vez que os únicos restos possíveis na divisão inteira por $3$ são $0, 1, 2$ e atendendo a que $R$ é uma relação de equivalência, os elementos de $\mathbb{Z}$ podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de $\mathbb{Z}$:*

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge 0Ra\} = \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge 1Ra\} = \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge 2Ra\} = \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

**Definição 5.10.** *Sejam $R$ uma relação de equivalência num conjunto $A$ e $x \in A$. Chama--se* **classe de equivalência de** $x$ **módulo** $R$ *ou, caso não haja ambiguidade, classe de equivalência de $x$, ao conjunto*

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge x\,R\,y\}.$$

*Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de $A$ chamamos* **conjunto quociente de** $A$ **módulo** $R$ *e representamo-lo por $A/R$, i.e.,*

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

**Exemplo 5.11.** *Considerando a relação de equivalência $R$ definida no exemplo anterior, tem-se*

$$\begin{aligned}[0]_R &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ a = 3k\},\\ [1]_R &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ a = 3k+1\}\\ [2]_R &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ a = 3k+2\},\end{aligned}$$

*e* $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$.

**Exemplo 5.12.** *Seja* $A = \{1,2,3,4\}$ *e consideremos a relação de equivalência em* $A$ *definida por*

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(2,4),(4,2)\}.$$

*Então*

$$[1]_R = \{1\} \text{ e } [2]_R = [3]_R = [4]_R = \{2,3,4\}$$

*e*

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R\}.$$

**Exemplo 5.13.** *Seja* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *a função definida por* $f(n) = |n|$, *para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, *e seja* $R_f$ *a relação de equivalência associada a* $f$, *isto é, seja* $R_f$ *a relação binária em* $\mathbb{Z}$ *definida por*

$$x\, R_f\, y \text{ se e só se } f(x) = f(y).$$

*Então, para cada* $x \in \mathbb{Z}$,

$$[x]_{R_f} = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \wedge\ x\, R_f\, y\} = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \wedge f(x) = f(y)\} = \{x, -x\}$$

*e*

$$\mathbb{Z}/R_f = \{\{x,-x\} \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

A respeito do conjunto quociente indicado em cada um dos exemplos anteriores verifica--se o seguinte: os seus elementos são conjuntos não vazios, são disjuntos dois a dois e a união dos seus elementos é o conjunto no qual está definida a relação binária. Estes conjuntos quociente satisfazem as condições do conceito a seguir definido.

**Definição 5.11.** *Sejam* $A$ *um conjunto e* $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$. *Diz-se que* $\Pi$ *é uma* **partição do conjunto** $A$ *se satisfaz simultaneamente as seguintes condições:*

*(1) para todo* $X \in \Pi$, $X \neq \emptyset$;

*(2) para todo* $X, Y \in \Pi$, $(X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset)$;

*(3) para todo* $a \in A$, *existe* $X \in \Pi$ *tal que* $a \in X$.

**Exemplo 5.14.** *Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e*

$$\Pi_1 = \{\{1, 2\}, \{\}, \{3, 4, 5\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\},$$
$$\Pi_3 = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}\}, \qquad \Pi_4 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}.$$

*Nenhum dos conjuntos* $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ *é uma partição de* $A$*. Com efeito:*

- $\emptyset \in \Pi_1$ *e, portanto, o conjunto* $\Pi_1$ *não verifica a condição (1) da definição anterior;*
- *o conjunto* $\Pi_2$ *não satisfaz a condição (2), pois* $X = \{1, 2\} \in \Pi_2$*,* $Y = \{2, 3\} \in \Pi_2$*,* $X \neq Y$ *e* $X \cap Y \neq \emptyset$*;*
- *no caso do conjunto* $\Pi_3$ *falha a condição (3), uma vez que* $3 \in A$ *e não existe* $X \in \Pi_3$ *tal que* $3 \in X$*.*

*No que diz respeito ao conjunto* $\Pi_4$*, é simples verificar que qualquer uma das condições (1) a (3) da definição anterior é satisfeita e, portanto,* $\Pi_4$ *é uma partição de* $A$*.*

A cada relação de equivalência definida num conjunto $A$ está sempre associada uma partição de $A$, como se pode verificar pelo resultado que a seguir se prova.

**Proposição 5.12.** *Seja* $R$ *uma relação de equivalência num conjunto* $A$*. Então* $A/R$ *é uma partição de* $A$*.*

*Demonstração.* Sendo $R$ uma relação de equivalência em A, prova-se facilmente que $A/R$ é uma partição de A. De facto:

(1) Uma vez que $R$ é reflexiva, tem-se $xRx$, para todo $x \in A$, e, portanto, $x \in [x]_R$. Logo, para todo $[x]_R \in A/R$, $[x]_R \neq \emptyset$.

(2) Dadas duas classes de equivalência $[x]_R, [y]_R \in A/R$, se $[x]_R \neq [y]_R$, então $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Com efeito, se admitirmos que $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, existe $z \in A$ tal que $z \in [x]_R$ e $z \in [y]_R$. Assim $x\,R\,z$ e $y\,R\,z$ e, uma vez que $R$ é simétrica, temos também $z\,R\,y$. Daqui segue que, para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned} a \in [x]_R \quad &\Rightarrow \quad x\,R\,a \\ &\Rightarrow \quad a\,R\,x \qquad (R \text{ é simétrica}) \\ &\Rightarrow \quad a\,R\,z \qquad (x\,R\,z \text{ e } R \text{ é transitiva}) \\ &\Rightarrow \quad a\,R\,y \qquad (z\,R\,y \text{ e } R \text{ é transitiva}) \\ &\Rightarrow \quad y\,R\,a \qquad (R \text{ é simétrica}) \\ &\Rightarrow \quad a \in [y]_R. \end{aligned}$$

e, portanto, $[x]_R \subseteq [y]_R$. De forma análoga prova-se que $[y]_R \subseteq [x]_R$. Logo $[x]_R = [y]_R$.

(3) Para todo $x \in A$, tem-se $x\,R\,x$ e, portanto, existe $[x]_R \in A/R$ tal que $x \in [x]_R$.

Assim, por (1), (2) e (3), temos que $A/R$ é uma partição de $A$. □

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

**Proposição 5.13.** *Sejam $A$ um conjunto, $\Pi$ uma partição de $A$ e $R_\Pi$ a relação binária em $A$ definida por*

$$x\, R_\Pi\, y \text{ se e só se existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

*Então $R_\Pi$ é uma relação de equivalência em $A$.*

*Demonstração.* (1) Uma vez que $\Pi$ é uma partição de $A$, então, para todo $x \in A$, existe $X \in \Pi$ tal que $x \in X$. Logo $x\, R_\Pi\, x$ e, portanto, $R_\Pi$ é reflexiva.
(2) Dados $x, y \in A$, se $x\, R_\Pi\, y$, é óbvio que também temos $y\, R_\Pi\, x$; logo $R_\Pi$ é simétrica.
(3) Dados $x, y, z \in A$, se $x\, R_\Pi\, y$ e $y\, R_\Pi\, z$, existem $X, Y \in \Pi$ tais que $x, y \in X$ e $y, z \in Y$. Dado que $y \in X \cap Y$, tem-se $X \cap Y \neq \emptyset$ e, como $\Pi$ é uma partição de $A$, segue que $X = Y$. Assim, existe $X \in \Pi$ tal que $x, z \in X$ e, portanto, $x\, R_\Pi\, z$. Logo $R_\Pi$ é transitiva.
De (1), (2) e (3) concluímos que $R_\Pi$ é uma relação de equivalência em $A$. □

**Exemplo 5.15.**

*(1) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\Pi_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$, $\Pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$ partições de $A$. Então*

$$\begin{aligned} R_{\Pi_1} &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1) \\ &\quad (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4)\}, \\ R_{\Pi_2} &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1)\}. \end{aligned}$$

*(2) Seja $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$ a partição de $\mathbb{Z}$ onde*

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \;\; X_1 = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \;\; X_2 = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

*Então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$,*

$$a\, R_\Pi\, b \text{ se e só se } a - b \text{ é divisível } 3.$$

## 5.3 Relações de ordem

A noção de ordem pode ser encontrada nas mais diversas situações do dia a dia, e sob variadas formas, quando fazemos referência a expressões tais como: primeiro, segundo, terceiro; maior versus menor; melhor versus pior; precedência, preferência, ... Nesta secção formalizamos o que se entende por relação de ordem e apresentamos algumas noções relacionadas com este conceito.

### 5.3.1 Noções básicas

**Definição 5.14.** *Sejam $A$ um conjunto e $R$ uma relação binária em $A$. Diz-se que $R$ é uma relação de* **ordem parcial em** *$A$ se $R$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Se $R$ é uma ordem parcial em $A$, ao par $(A, R)$ dá-se a designação de* **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

**Exemplo 5.16.** *São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:*

*(1)* $(A, id_A)$, *onde $A$ é um conjunto e* $id_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

*(2)* $(\mathbb{N}, \leq)$, *onde $\leq$ é a relação "menor ou igual" usual em $\mathbb{N}$ (para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$, logo $\leq$ é reflexiva; para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ e, portanto, $\leq$ é antissimétrica; para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, tem-se $x \leq z$, assim $\leq$ é transitiva. Então $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$).*

*(3)* $(\mathbb{N}, |)$, *onde $|$ é a relação "divide" em $\mathbb{N}$.*

*(4)* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, *onde $A$ é um conjunto qualquer e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.*

Em geral, sempre que tal não cause confusão, representamos uma ordem parcial num conjunto $A$ por $\leq$ e o respectivo c.p.o. por $(A, \leq)$. Formalmente, um conjunto parcialmente ordenado é um par $(A; \leq)$, onde $A$ é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma relação de ordem parcial. Porém, caso seja claro a partir do contexto qual é a relação $\leq$, é usual dizer apenas "seja A um conjunto parcialmente ordenado".

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, escrevemos:

- $a \leq b$ e lemos "$a$ é menor ou igual a $b$" ou "$a$ precede $b$" para representar $(a, b) \in \leq$;
- $a \not\leq b$ e lemos "$a$ não é menor ou igual a $b$" se $(a, b) \notin \leq$;
- $a < b$ e lemos "$a$ é menor do que $b$" (ou $a$ "precede propriamente $b$") se $a \leq b$ e $a \neq b$;
- $a << b$ e lemos "$b$ é sucessor de $a$" (ou "$b$ cobre $a$" ou "$a$ é coberto por $b$") se $a < b$ e $\neg(\exists_{c \in A}\ a < c < b)$.

Diz-se que $a, b$ são elementos **comparáveis** se $a \leq b$ ou $b \leq a$; caso contrário, ou seja, se $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, $a$ e $b$ dizem-se **incomparáveis** e escrevemos $a||b$.

Um c.p.o. $(A, \leq)$, em que $A$ é um conjunto finito, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse** da seguinte forma:

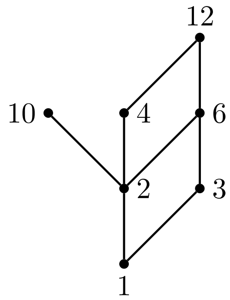
- cada elemento é representado por um ponto;
- se $a, b$ são dois elementos de $A$ tais que $a \leq b$, representa-se $b$ acima de $a$; além disso se $a << b$ unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

**Exemplo 5.17.**

*(1)* *Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}$ *e* $|$ *a ordem parcial definida por*

$$x \mid y \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}}\ y = kx.$$

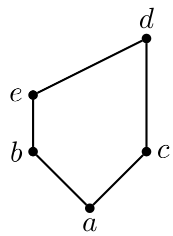
*O c.p.o.* $(A, |)$ *pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse*



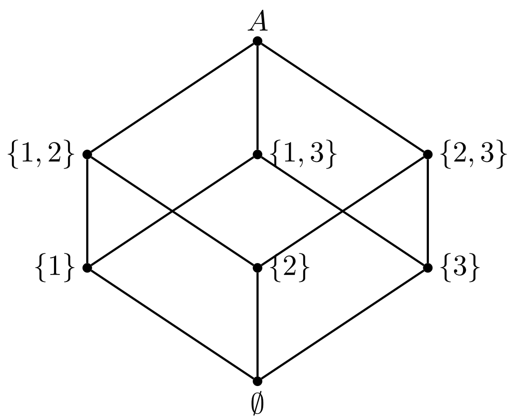

*(2)* *Consideremos o conjunto* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *e a relação binária* $R$ *definida em* $A$ *por*

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (b, e), (c, d), (e, d)\}.$$

*É simples verificar que* $R$ *é uma relação de ordem e que* $a << b$*,* $a << c$*,* $b << e$*,* $c << d$ *e* $e << d$*. Assim, a relação* $R$ *pode ser representada pelo diagrama de Hasse seguinte*




*(3)* *Seja* $A = \{1, 2, 3\}$*. O c.p.o.* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue*



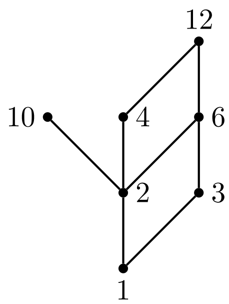
Dados um c.p.o. $(A, \leq)$ e $X$ um suconjunto de $A$ podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a $X$.

**Definição 5.15.** *Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., $X$ um subconjunto de $A$ e $m \in A$. Dizemos que $m$ é:*

- *um* **elemento maximal de** $X$ *se* $m \in X$ *e* $\neg(\exists_{x \in X}\ m < x)$*;*
- *um* **elemento minimal de** $X$ *se* $m \in X$ *e* $\neg(\exists_{x \in X}\ x < m)$*;*
- **majorante de** $X$ *se* $\forall_{x \in X}\ x \leq m$*;*
- **minorante de** $x$ *se* $\forall_{x \in X}\ m \leq x$*;*
- **supremo de** $X$ *se $m$ é majorante de $X$ e $m \leq m'$, para qualquer $m'$ majorante de $X$;*
- **ínfimo de** $X$ *se $m$ é minorante de $X$ e $m' \leq m$, para qualquer $m'$ minorante de $X$;*
- **máximo de** $X$ *se $m$ é majorante de $X$ e $m \in X$;*
- **mínimo de** $X$ *se $m$ é minorante de $X$ e $m \in X$.*

O conjunto dos majorantes de $X$ e o conjunto dos minorantes de $X$ são representados por $\mathrm{Maj}(X)$ e $\mathrm{Min}(X)$, respetivamente. Caso exista, o supremo (ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto $X$ de $A$ é único e representa-se por $\sup(X)$ ($\inf(X)$, $\max(X)$, $\min(X)$).

**Exemplo 5.18.** *Consideremos novamente o c.p.o. $(A, |)$ representado por*




*e sejam $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 10\}$. Então:*

- *2 e 3 são os elementos maximais de $X$; 1 é o único elemento minimal de $X$;*
- $\mathrm{Maj}(X) = \{6, 12\}$*;* $\sup(X) = 6$*; não existe máximo de $X$;*
- $\mathrm{Min}(X) = \{1\}$*;* $\inf(X) = 1$*;* $\min(X)$=*1;*
- *4, 6 e 10 são os elementos maximais de $Y$; 2 é o único elemento minimal de $Y$;*
- $\mathrm{Maj}(Y) = \emptyset$*; não existe supremo de $Y$; não existe máximo de $Y$;*
- $\mathrm{Min}(Y) = \{1, 2\}$*;* $\inf(Y) = 2$*;* $\min(Y) = 2$.

*Relativamente ao conjunto $A$ tem-se o seguinte:*

- $10$ *e* $12$ *são os elementos maximais de $A$;* $1$ *é o único elemento minimal de $A$;*

- $\mathrm{Maj}(A) = \emptyset$*; $A$ não tem supremo; $A$ não tem máximo;*

- $\mathrm{Min}(A) = \{1\}$*;* $\inf(A) = 1$*;* $\min(A)$*=1.*

**Proposição 5.16.** *Num conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ são equivalentes as seguintes proposições, para quaisquer $a, b \in A$:*

*(1)* $a \leq b$*;*

*(2)* $\sup(\{a, b\}) = b$*;*

*(3)* $\inf(\{a, b\}) = a$*.*

*Demonstração. (1) ⇒ (2)* Admitamos que $a \leq b$. Então, uma vez que também temos $b \leq b$ (pois $\leq$ é reflexiva), segue que $b$ é um majorante de $\{a, b\}$. Além disso, se $x$ é um majorante de $\{a, b\}$, temos $b \leq x$. Logo $b$ é o menor dos majorantes de $\{a, b\}$ e, portanto, $\sup(\{a, b\}) = b$.

*(2) ⇒ (3)* Admitamos que $\sup(\{a, b\}) = b$. Então $b$ é um majorante de $\{a, b\}$, pelo que $a \leq b$. Assim, como $a \leq a$ e $a \leq b$, $a$ é um minorante de $\{a, b\}$. Além disso, se $x$ é um minorante de $\{a, b\}$, tem-se, em particular, $x \leq a$ e, portanto, $a$ é o maior dos minorantes de $\{a, b\}$. Logo $\inf(\{a, b\}) = a$.

*(3) ⇒ (2)* Se $\inf(\{a, b\}) = a$, então $a$ é um minorante de $\{a, b\}$ e, por conseguinte, $a \leq b$. Logo as três proposições são equivalentes. □

Seguidamente estudam-se alguns processos de construção de novos c.p.o.'s a partir de c.p.o.'s dados.

Se $(P, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado e $A$ é um subconjunto não vazio de $P$, a relação $\leq_{|A}$ definida, para quaisquer $a, b \in A$, por

$$a \leq_{|A} b \text{ se e só se } a \leq b$$

é uma relação de ordem parcial em $A$. A relação $\leq_{|A}$ designa-se por ***ordem parcial induzida por*** $\leq$ em $A$.

Sendo $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, define-se a partir da relação $\leq$ uma outra relação de ordem parcial em $P$. A relação $\leq_d$ definida em $P$ por

$$a \leq_d b \text{ se e só se } b \leq a$$

é também uma relação de ordem parcial em $P$. A relação $\leq_d$ designa-se por ***relação de ordem dual de*** $\leq$ e o conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq_d)$ designa-se por ***conjunto parcialmente ordenado dual de*** $(P, \leq)$. É simples perceber que $(\leq_d)_d = \leq$ e que o c.p.o.

dual de $(P, \leq_d)$ é $(P, \leq)$. Os c.p.o.s $(P, \leq)$ e $(P, \leq_d)$ dizem-se ***conjuntos parcialmente ordenados duais***.

Se $\Phi$ é uma afirmação sobre conjuntos parcialmente ordenados, a afirmação $\Phi_d$, obtida de $\Phi$ substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$, designa-se por ***afirmação dual de*** $\Phi$. Note-se que se $\Phi$ é uma afirmação verdadeira em $(P, \leq)$, então $\Phi_d$ é verdadeira em $(P, \leq_d)$, pelo que é válido o seguinte princípio.

**Princípio de dualidade para c.p.o.'s** Uma afirmação é verdadeira em qualquer conjunto parcialmente ordenado se e só se o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Observe-se que os conceitos de majorante, supremo, elemento máximo, elemento maximal são duais dos conceitos de minorante, ínfimo, elemento mínimo, elemento minimal, respetivamente. Assim, se $\Phi$ é uma afirmação sobre c.p.o.s envolvendo algum destes conceitos, a afirmação $\Phi_d$ é obtida substituindo cada um destes conceitos pelo conceito dual e substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$.

### 5.3.2 Homomorfismos

No estudo de aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados têm particular interesse aquelas que preservam a ordem.

**Definição 5.17.** *Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \to P_2$ uma aplicação. Diz-se que:*

- *a aplicação $\alpha$ é **isótona** ou que é um **homomorfismo** (alternativamente, também se diz que $\alpha$ **preserva a ordem**) se, para quaisquer $a, b \in P_1$,*

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- *a aplicação $\alpha$ é **antítona** se, para quaisquer $a, b \in P_1$,*

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(b) \leq_2 \alpha(a).$$

- *$\alpha$ é um **mergulho de ordem** se, para quaisquer $a, b \in P_1$,*

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- *$\alpha$ é um **isomorfismo de c.p.o.s** se $\alpha$ é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.*

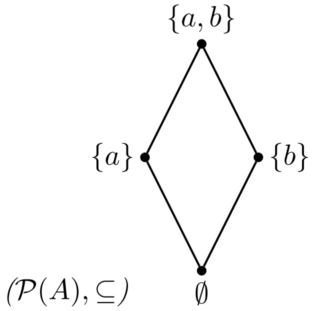
*Caso exista um isomorfismo de c.p.o.s de $(P_1, \leq_1)$ em $(P_2, \leq_2)$, diz-se que o c.p.o. $(P_1, \leq_1)$ é isomorfo ao c.p.o. $(P_2, \leq_2)$.*

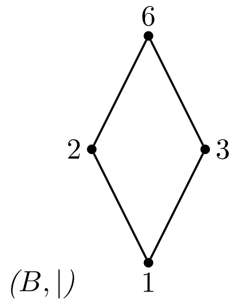
**Exemplo 5.19.** *(1) Seja $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ a família dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Então $(\mathcal{P}_F(\mathbb{N}), \subseteq)$ é um c.p.o.. Consideremos, também, o c.p.o. $(\mathbb{N}_0, \leq)$. Seja $s : \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0$ a aplicação definida por $s(X) = |X|$, para todo $X \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ (por $|X|$ representa-se o número de elementos de $X$). A aplicação $s$ é um homomorfismo de c.p.o.'s. Esta aplicação não é, no entanto, um isomorfismo de c.p.o.'s, pois não é bijetiva.*

*(2) Sejam $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ e $|$ a relação de ordem definida em $B$ por*

$$x \,|\, y \text{ se e só se } \exists_{k \in \mathbb{N}}\; y = kx.$$

*Claramente, os conjuntos parcialmente ordenados $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ e $(B, |)$, representados pelos diagramas de Hasse seguintes, são isomorfos.*




*Fica ao cuidado do leitor a verificação de que a aplicação $f : B \to \mathcal{P}(A)$, definida por $f(1) = \emptyset$, $f(2) = \{a\}$, $f(3) = \{b\}$ e $f(6) = \{a, b\}$, é um isomorfismo de c.p.o.'s.*

Um isomorfismo de c.p.o.s é uma aplicação bijetiva. Assim, se $\alpha$ é um isomorfismo de um c.p.o. $(P_1, \leq_1)$ num c.p.o. $(P_2, \leq_2)$, então $\alpha^{-1} : P_2 \to P_1$ também é um isomorfismo de $(P_2, \leq_2)$ em $(P_1, \leq_1)$. Caso exista um isomorfismo entre os c.p.o.s $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ diz-se que os c.p.o.s são ***isomorfos*** e escreve-se $(P_1, \leq_1) \cong (P_2, \leq_2)$.

Note-se que, embora um isomorfismo de c.p.o.s seja uma aplicação isótona e bijetiva, uma aplicação bijetiva e isótona não é necessariamente um isomorfismo de c.p.o.s. Por exemplo, sendo $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ os c.p.o.s com os diagramas de Hasse a seguir apresentados

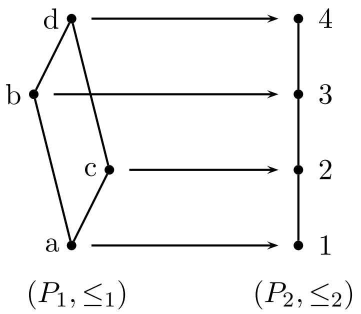



Figura 5.1

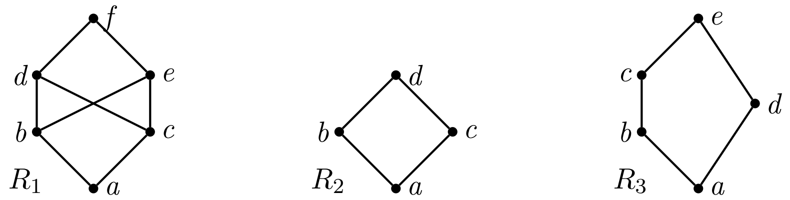
a aplicação $\alpha$ de $P_1$ em $P_2$ definida por $\alpha(a) = 1$, $\alpha(b) = 3$, $\alpha(c) = 2$ e $\alpha(d) = 4$ é isótona e bijetiva, mas não é um isomorfismo de c.p.o.s.

### 5.3.3 Reticulados, cadeias, conjuntos bem ordenados

Nesta secção referem-se algumas classes especiais de conjuntos parcialmente ordenados.

**Definição 5.18.** *Um conjunto parcialmente ordenado* $(A, \leq)$ *diz-se um* **reticulado** *se, para quaisquer* $x, y \in A$*, existem o supremo e o ínfimo do conjunto* $\{x, y\}$*.*

**Exemplo 5.20.** *(1) Dos c.p.o.'s a seguir representados são reticulados os c.p.o.'s* $R_2$ *e* $R_3$*;* $R_1$ *não é reticulado, pois, por exemplo, não existe supremo de* $\{b, c\}$*.*




*(2) Dado um conjunto A, o c.p.o.* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *é um reticulado.*

*(3) O c.p.o.* $(\mathbb{N}, |)$ *é um reticulado.*

**Definição 5.19.** *Seja* $(A, \leq)$ *um conjunto parcialmente ordenado. A ordem parcial* $\leq$ *diz--se uma* **ordem total** *ou* **ordem linear** *se quaisquer elementos* $a$ *e* $b$ *de* $A$ *são comparáveis. Neste caso,* $(A, \leq)$ *diz-se uma* **cadeia** *ou um* **conjunto totalmente ordenado***. Um subconjunto* $X$ *de* $A$ *diz-se uma* **cadeia em** $(A, \leq)$ *ou um* **subconjunto totalmente ordenado de** $(A, \leq)$ *se, para quaisquer* $x, y \in X$*,* $x$ *e* $y$ *são comparáveis.*

**Exemplo 5.21.**

*(1)* $\{3, 6, 12\}$ *e* $\{2, 4\}$ *são cadeias em* $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$*, mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois* $4$ *e* $10$ *não são comparáveis.*

*(2)* $(\mathbb{N}, \leq)$*,* $(\mathbb{R}, \leq)$*,* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *são cadeias.*

**Proposição 5.20.** *Se* $(A, \leq)$ *é uma cadeia, então* $(A, \leq)$ *é um reticulado.*

*Demonstração.* Se $(A, \leq)$ é uma cadeia, então, para quaiquer $a, b \in A$, tem-se $a \leq b$ ou $b \leq a$. Caso $a \leq b$ segue que $\sup(\{a, b\}) = b$ e $\inf(\{a, b\}) = a$; caso $b \leq a$, então $\sup(\{a, b\}) = a$ e $\inf(\{a, b\}) = b$. Assim, para quaisquer $a, b \in A$, existem $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$ e, portanto, $(A, \leq)$ é um reticulado. $\square$

Conjuntos parcialmente ordenados nos quais toda a cadeia admita um majorante têm garantidamente um elemento maximal. Este resultado, conhecido por Lema de Zorn, é fundamental no estudo de conjuntos parcialmente ordenados e tem aplicações nas mais diversas áreas, tais como Álgebra Linear, Álgebra Universal e Análise.

**Teorema 5.21** (Lema de Zorn)**.** *Seja $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado no qual qualquer cadeia admite um majorante. Então, $A$ tem um elemento maximal.*

O Lema de Zorn, equivalente ao Axioma da Escolha, é geralmente utilizado para estabelecer a existência de um objeto que não pode ser construído diretamente (como, por exemplo, uma base num espaço vetorial não trivial ou um ideal maximal num anel).

**Definição 5.22.** *Seja $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Diz-se que $\leq$ é uma* **boa ordem em** *$A$ se cada subconjunto não vazio de $A$ tem elemento mínimo. Neste caso, diz-se que $(A, \leq)$ é um* **conjunto bem ordenado** *(c.b.o.).*

**Exemplo 5.22.** *Todo o conjunto totalmente ordenado finito é um conjunto bem ordenado.*

**Proposição 5.23.** *Se $(A, \leq)$ é um conjunto bem ordenado, então $(A, \leq)$ é uma cadeia.*

*Demonstração.* Sejam $(A, \leq)$ um conjunto bem ordenado e $a, b \in A$. Uma vez que $(A, \leq)$ é um conjunto bem ordenado, o subconjunto $\{a, b\}$ tem elemento mínimo; então $\min\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} = a$ e tem-se $a \leq b$, ou $\min\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} = b$ e tem-se $b \leq a$. Assim, quaisquer dois elementos de $A$ são comparáveis e, portanto, $(A, \leq)$ é uma cadeia.□ □

Embora todo o conjunto bem ordenado seja uma cadeia, existem cadeias que não são conjuntos bem ordenados.

**Exemplo 5.23.** $(\mathbb{R}, \leq)$ *é uma cadeia, mas não é um conjunto bem ordenado; de facto, $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e não tem elemento mínimo.*

**Proposição 5.24.** *Um conjunto totalmente ordenado é bem ordenado se e só se não contém qualquer cadeia descendente infinita*

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots.$$

*Demonstração.* A prova que se apresenta seguidamente é uma prova informal; uma prova formal deste resultado requer a aplicação do Axioma da Escolha e poderá ser consultada em bibliografia adequada.

Se $(P, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado que contém uma cadeia descendente infinita

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots,$$

então $(P, \leq)$ não é bem ordenado.

Reciprocamente, suponhamos que $(P, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado que não contém qualquer cadeia descendente infinita. Pretendemos mostrar que se $A$ é um subconjunto não vazio de $P$, então $A$ tem elemento mínimo. Uma vez que $A \neq \emptyset$, existe $a_1 \in A$. Se $a_1$ é o elemento mínimo de $A$, a prova está completa. Caso $a_1$ não seja um elemento mínimo, então existe $a_2 \in A$ tal que $a_1 \nleq a_2$. Uma vez que a ordem é total, segue que $a_2 < a_1$. Se $a_2$ é o elemento mínimo de $A$, a prova termina. Caso contrário, existe $a_3 \in A$ tal que $a_2 \nleq a_3$, donde $a_3 < a_2$. Ora, uma vez que $(P, \leq)$ não tem cadeias descentes infinitas, este processo termina num número finito de passos, digamos $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n$. Logo $a_n$ é o elemento mínimo de $A$. □

**Corolário 5.25.** *(**Princípio da Boa Ordenação de** $\mathbb{N}$) O conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$ é bem ordenado.*