

## Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação  
2019/2020



### 3. Indução nos Naturais

No capítulo 1. foram apresentados métodos de prova que podem ser aplicados para estabelecer a veracidade de afirmações a respeito de qualquer tópico matemático. Neste capítulo estudamos uma outra técnica de prova, designada por *indução matemática*, e que é indicada para provar propriedades a respeito dos números naturais.

#### 3.1 Princípio de Indução Matemática

Muitas proposições e conjeturas em matemática referem propriedades sobre os números naturais. Considere, por exemplo, o problema de encontrar uma fórmula para a soma dos primeiros  $n$  números naturais ímpares. Se calcularmos esta soma para alguns valores de  $n$

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1 + 3 & = & 4 \\ 1 + 3 + 5 & = & 9 \\ 1 + 3 + 5 + 7 & = & 16 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 & = & 25 \end{array}$$

somos levados a conjeturar que a soma dos  $n$  primeiros números naturais ímpares poderá ser dada pela fórmula  $n^2$ . Mas será esta fórmula válida para qualquer natural  $n$ ? Em caso afirmativo, como provar que a conjetura é válida? Obviamente, não podemos confirmar esta conjetura fazendo a sua verificação para cada um dos números naturais, mas, como vamos ver seguidamente, existe um método de prova que permitirá mostrar que a conjetura anterior é, de facto, válida. Tal método de prova, que tem por base o **Princípio de Indução (Simples)** para  $\mathbb{N}$ , é justificado pela definição indutiva de  $\mathbb{N}$  através das regras seguintes

- (i)  $1 \in \mathbb{N}$ ;
- (ii) se  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .

Como se verificará de seguida, a validade do Princípio de Indução (Simples) para  $\mathbb{N}$  pode ser estabelecida com base numa importante propriedade dos números naturais, o *Princípio da Boa Ordenação* de  $\mathbb{N}$ . De acordo com este princípio (que será estudado com mais detalhe no capítulo 6.), todo o subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  tem elemento mínimo (isto é, para todo o subconjunto não vazio  $S$  de  $\mathbb{N}$ , existe  $m \in S$  tal que  $m \leq s$ , para todo  $s \in S$ ).

## indução nos naturais

**Teorema 3.1** (Princípio de Indução (Simples) para  $\mathbb{N}$ ). *Seja  $p(n)$  um predicado sobre  $\mathbb{N}$ . Se*

(1)  $p(1)$  é verdadeira, e

(2) para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p(k+1)$  é verdadeira sempre que  $p(k)$  é verdadeira,

então  $p(n)$  é verdadeira, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Admitamos que as condições (1) e (2) são satisfeitas e mostremos que, para qualquer natural  $n$ ,  $p(n)$  é verdadeira. Para tal, consideremos o conjunto  $X$  dos números naturais que não satisfazem  $p(n)$ , i.e.  $X = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}$ , e, no sentido de fazer uma prova por redução ao absurdo, admitamos que  $X \neq \emptyset$ . Então  $X$  tem um elemento mínimo, digamos  $m$ . Pela condição (1), tem-se  $m \neq 1$  e, portanto,  $m = k+1$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Sendo  $m$  o menor elemento de  $X$ , então  $k = m-1 \notin X$ . Logo  $p(k)$  é verdadeira e por (2) segue que  $p(k+1)$  é verdadeira, o que contradiz a hipótese de  $m$  ser um elemento de  $X$ . Logo  $X$  tem de ser vazio e, portanto, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p(n)$  é verdadeira.  $\square$

A condição (1) do teorema anterior é chamada de **Base de indução** e a condição (2) de **Passo de indução**. Na aplicação da condição (2) chamamos **Hipótese de indução** a “ $p(k)$  é verdadeira”.

**Exemplo 3.1.** *Consideremos novamente o problema de determinar uma fórmula para a soma dos  $n$  primeiros números naturais ímpares e mostremos que esta soma é igual  $n^2$ , i.e., mostremos que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

*A prova é feita recorrendo ao método de indução nos naturais. Representemos por  $p(n)$  o predicado: “ $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ ”.*

(1) *Base de indução ( $n = 1$ ): Uma vez que  $1 = 1^2$ , é imediato que  $p(1)$  é verdadeira.*

(2) *Passo de indução: Dado  $k \in \mathbb{N}$ , admitamos, por hipótese de indução, que  $p(k)$  é verdadeira, ou seja que*

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2.$$

*Mostremos, com base nesta hipótese, que  $p(k+1)$  também é verdadeira, ou seja, que*

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2.$$

*De facto, atendendo à hipótese de indução, tem-se:*

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) &= k^2 + (2(k+1)-1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

*De (1) e (2) e pelo Princípio de Indução para  $\mathbb{N}$ , concluímos que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

é uma proposição verdadeira.

**Exemplo 3.2.** Mostremos que  $n^3 - n$  é divisível por 3, para todo o natural  $n \in \mathbb{N}$ , pelo método de indução nos naturais.

Representemos por  $p(n)$  o predicado " $n^3 - n$  é divisível por 3".

(1) Base de indução: Para  $n = 1$ , temos  $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$ . Como 0 é divisível por 3,  $p(1)$  é verdadeira.

(2) Passo de indução: Seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p(k)$  é verdadeira, ou seja,  $k^3 - k$  é divisível por 3. Então, existe  $q \in \mathbb{N}_0$  tal que  $k^3 - k = 3q$ . Assim,

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k - k \\ &= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\ &= 3q + (3k^2 + 3k) \\ &= 3(q + k^2 + k).\end{aligned}$$

Logo,  $(k+1)^3 - (k+1) = 3(q + k^2 + k)$ , pelo que  $p(k+1)$  é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para  $\mathbb{N}$  e por (1) e (2), podemos concluir que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^3 - n \text{ é divisível por 3.}$$

**Exemplo 3.3.** Mostremos, pelo método de indução nos naturais, que, para todo o natural  $n$ ,

$$2^{n+4} > 2n + 9.$$

Representemos por  $p(n)$  o predicado " $2^{n+4} > 2n + 9$ ".

(1) Base de indução: Para  $n = 1$ , tem-se

$$2^{1+4} = 32 > 11 = 2 \times 1 + 9$$

e, portanto,  $p(1)$  verdadeira.

(2) Passo de indução: Seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p(k)$  é verdadeira, ou seja, tal que

$$2^{k+4} > 2k + 9.$$

Então

$$\begin{aligned}2^{(k+1)+4} &= 2 \times 2^{k+4} \\ &> 2 \times (2k + 9) \\ &= (2k + 9 + 2) + (2k + 7) \\ &> 2k + 2 + 9 \\ &= 2(k + 1) + 9,\end{aligned}$$

## indução nos naturais

donde  $2^{(k+1)+4} > 2(k+1) + 9$  e, portanto,  $p(k+1)$  é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para  $\mathbb{N}$  e por (1) e (2), podemos concluir que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{n+4} > 2n + 9.$$

Note que é necessário que se verifiquem simultaneamente as condições (1) e (2) do teorema anterior para que se possa invocar o Princípio de Indução.

**Exemplo 3.4.** Considerando o predicado  $p(n)$  dado por “ $n^2 + 5n + 1$  é par”, facilmente se verifica que o passo de indução do Princípio de Indução é válido neste caso. De facto, dado  $k \in \mathbb{N}$ , se admitirmos que  $p(k)$  é verdadeira, a proposição  $p(k+1)$  também é verdadeira, pois

$$(k+1)^2 + 5(k+1) + 1 = (k^2 + 5k + 1) + (2k + 6)$$

e, uma vez que  $(k^2 + 5k + 1)$  e  $(2k + 6)$  são pares, tem-se que  $(k+1)^2 + 5(k+1) + 1$  é par. Note-se, porém, que, embora o passo de indução seja válido, a proposição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 5n + 1 \text{ é par}$$

não é verdadeira, uma vez que  $p(1)$  é falsa.

A proposição “ $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^n > 2^{n+1}$ ” também não é verdadeira. De facto, representando por  $p(n)$  o predicado “ $3^n > 2^{n+1}$ ”, é simples verificar que este não é válido para o natural 1. No entanto, prova-se ser válido para todos os naturais maiores ou iguais a 2. A prova deste resultado pode ser feita recorrendo a uma variante do Princípio de Indução, considerando para base de indução o elemento de  $\mathbb{N}$  a partir do qual se pode provar a validade da propriedade.

**Teorema 3.2** (Princípio de Indução (Simples) para  $\mathbb{N}$  de base  $n_0$ ). *Sejam  $p(n)$  um predicado sobre  $\mathbb{N}$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$ .*

Se

(1)  $p(n_0)$  é verdadeira, e

(2) para todo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq n_0$ ,  $p(k+1)$  é verdadeira sempre que  $p(k)$  é verdadeira, então  $p(n)$  é verdadeira, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$ .

**Exemplo 3.5.** Mostremos que, para todo o natural  $n \geq 2$ ,  $3^n > 2^{n+1}$ .

Representemos por  $p(n)$  o predicado “ $3^n > 2^{n+1}$ ”.

(1) Base de indução: Para  $n = 2$ , tem-se  $3^2 = 9 > 8 = 2^3$ , pelo que  $p(2)$  é verdadeira.

(2) Passo de indução: Seja  $k \geq 2$  tal que  $p(k)$  é verdadeira, ou seja, tal que

$$3^k > 2^{k+1}.$$

Então

$$3^{k+1} = 3 \times 3^k > 3 \times 2^{k+1} > 2 \times 2^{k+1} = 2^{k+2}$$

Então, pelo Princípio de Indução para  $\mathbb{N}$  de base 2 e por (1) e por (2), concluímos que, para todo  $n \geq 2$ ,  $3^n > 2^{n+1}$ .

**Exemplo 3.6.** Mostremos que, para todo o natural  $n \geq 10$ ,

$$2^n > n^3.$$

Representemos por  $p(n)$  o predicado " $2^n > n^3$ ".

(1) Base de indução: Para  $n = 10$ , tem-se

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3,$$

pelo que  $p(10)$  é verdadeira.

(2) Passo de indução: Dado  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq 10$ , suponhamos que  $p(k)$  é verdadeira, ou seja, que  $2^k > k^3$ .

Pretendemos mostrar que  $p(k+1)$  é verdadeiro, isto é que  $2^{k+1} > (k+1)^3$ . De facto, admitindo que  $p(k)$  é verdadeiro, tem-se

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &> 2 \cdot k^3 \\ &= k^3 + k^3 \\ &> k^3 + 9k^2 \\ &= k^3 + 3k^2 + 6k^2 \\ &> k^3 + 3k^2 + 54k \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 51k \\ &> k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3. \end{aligned}$$

Então, pelo Princípio de Indução para  $\mathbb{N}$  de base 10 e por (1) e por (2), concluímos que, para todo  $n \geq 10$ ,  $2^n > n^3$ .

### 3.2 Indução Completa

Na prova de certas propriedades sobre os naturais a aplicação do Princípio de Indução Simples não é fácil. Nestes casos torna-se conveniente optar por um método de prova que, embora sendo equivalente ao Princípio de Indução Simples, torna mais fácil a prova de certas propriedades - trata-se do **Princípio de Indução Completa** (também designado por **Princípio de Indução Forte**).

**Teorema 3.3** (Princípio de Indução Completa para  $\mathbb{N}$ ). *Seja  $p(n)$  um predicado sobre  $\mathbb{N}$ . Se*

(1)  $p(1)$  é verdadeira, e

(2) para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p(k+1)$  é verdadeira sempre que  $p(j)$  é verdadeira para todo  $j \leq k$ ,

então  $p(n)$  é verdadeira, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## indução nos naturais

Embora o Princípio de Indução Completa pareça ser mais geral do que o Princípio de Indução Simples, verifica-se que se tratam de métodos de prova equivalentes: toda a prova que possa ser feita pelo Princípio de Indução Simples pode ser feita pelo Princípio de Indução Completa e vice-versa.

À semelhança do que acontece com o Princípio de Indução Simples, também podemos considerar o **Princípio de Indução Completa com base  $n_0$** .

**Teorema 3.4** (Princípio de Indução Completa para  $\mathbb{N}$  de base  $n_0$ ). *Sejam  $p(n)$  um predicado sobre  $\mathbb{N}$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Se*

- (1)  $p(n_0)$  é verdadeira, e
- (2) para todo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq n_0$ ,  $p(k+1)$  é verdadeira sempre que  $p(j)$  é verdadeira para todo  $j \leq k$ ,

*então  $p(n)$  é verdadeira, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$ .*

**Exemplo 3.7.** *Recorrendo ao Princípio de Indução Completa de base 2 torna-se simples mostrar que*

$$\forall_{n \geq 2} \quad n \text{ é primo ou é um produto de números primos.}$$

*Representemos por  $p(n)$  o predicado “ $n$  é primo ou  $n$  é produto de primos” e mostremos que se verificam as condições (1) e (2) do Princípio de Indução Completa de base 2.*

(1) *2 é primo, logo  $p(2)$  é verdadeira.*

(2) *Dado  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq 2$ , admitamos que, para todo  $j \leq k$ ,  $p(j)$  é verdadeira. Com base nesta hipótese, prova-se que  $p(k+1)$  é verdadeira. De facto:*

- (i) *Se  $k+1$  é primo, então  $p(k+1)$  é verdadeira.*
- (ii) *Caso  $k+1$  não seja primo, então existem  $p, q \in \mathbb{N}$  tais que  $p, q < k+1$  e  $k+1 = pq$ . Mas,  $p, q \leq k$ , logo, por hipótese,  $p$  é primo ou é produto de primos e  $q$  é primo ou é produto de primos.*

*Em qualquer dos casos conclui-se que  $k+1$  é produto de primos e, portanto,  $p(k+1)$  é verdadeira.*

*Assim, ficou provado que, para todo  $k \geq 2$ , se  $p(j)$  é verdadeira para todo  $j \leq k$ , então  $p(k+1)$  também é verdadeira.*

*De (1) e (2) e pelo Princípio de Indução Completa de base 2 segue que a proposição*

$$\forall_{n \geq 2} \quad n \text{ é primo ou é um produto de números primos}$$

*é verdadeira.*