Tópicos de Matemática

folha 10

69. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de $A \times B$ são funções de A em B.

 (a) $\{(b, 1), (c, 2), (a, 3)\}$.
 (b) $\{(a, 3), (c, 2), (a, 1)\}$.
 (c) $\{(c, 1), (b, 1), (a, 2)\}$.
 (d) $\{(a, 1), (b, 3)\}$.
 (e) $\{(c, 1), (a, 2), (b, 3), (c, 2)\}$.
 (f) $\{(a, 3), (c, 3), (b, 3)\}$.

70. Diga qual das seguintes expressões define uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

 (a) $f(x) = \sin(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
 (b) $p(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 5}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
 (c) $q(x) = \ln(x^4 + 1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
 (d) $s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ x^3 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.
 (e) $t(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{se } x \geq 1 \\ |x| & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$.
 (f) $g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x > \pi \\ x & \text{se } x < \pi \end{cases}$.

71. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

 (a) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.
 (b) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A?

72. Considere as funções:

 $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(x) = m.d.c.(x, 6)$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

 Determine:

 (a) $g(\{-1, 0, 1\})$;
 (b) $g(]-\infty, 0])$;
 (c) $g(\mathbb{R})$;
 (d) $g^{\leftarrow}(\{0\})$;
 (e) $g^{\leftarrow}(]-\infty, 0])$;
 (f) $f(\{4, 6, 9\}$;
 (g) $f(\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y \in \mathbb{N}\,(x = 3y)\})$;
 (h) $f^{\leftarrow}(\{2\})$;
 (i) $f^{\leftarrow}(\{3, 4, 5\}$.

73. Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ definidas por:

$$f(n) = n + 1; \qquad g(n) = 2n; \qquad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

 Determine:

 (a) $f \circ f$;
 (b) $f \circ g$;
 (c) $g \circ f$;
 (d) $g \circ h$;
 (e) $f \circ g \circ h$;
 (f) $h \circ f$;
 (g)$h \circ g$;
 (h) $h \circ f \circ g$.

74. Dê um exemplo de:

 (a) Duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.
 (b) Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

Tópicos de Matemática

folha 11

75. Sejam A, B conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$ e $B_1, B_2 \subseteq B$. Mostre que
    (a) $f(\emptyset) = \emptyset$.
    (b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;
    (c) $f^{\leftarrow}(B) = A$.
    (d) Se $B_1 \subseteq B_2$, então $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$.
    (e) $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$.

76. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja:
    (a) não injetiva;
    (b) injetiva;
    (c) sobrejetiva;
    (d) não sobrejetiva.

77. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:
    (a) $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_1(x) = 2x - 1$;
    (b) $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_2(x) = x + 1$;
    (c) $f_3 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$;
    (d) $f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f_4(x) = x + 1$;
    (e) $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, $f_5(x) = x^2$;
    (f) $f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_6(x) = |x| + 2$.

78. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ n+2 & \text{se} \quad n \text{ é par} \end{cases}$$

    (a) Determine
        (i) $f(\{3, 4, 8\})$;
        (ii) $f^{\leftarrow}(\{3, 5, 6\})$.
    (b) Diga se f é injetiva e se é sobrejetiva.

79. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por

$$f(n) = \begin{cases} |n| & \text{se} \quad -4 \leq n < 3 \\ n+1 & \text{se} \quad n < -4 \text{ ou } n \geq 3 \end{cases}$$

    (a) Determine
        (i) $f(\{-6, -5, -4, 2, 3\})$;
        (ii) $f(\mathbb{N})$;
        (iii) $f^{\leftarrow}(\{-4, -3, 3\})$;
        (iv) $f^{\leftarrow}(\mathbb{N})$.
    (b) Diga se f é injetiva e se é sobrejetiva.

Tópicos de Matemática

folha 12

80. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| + 2$, para todo o real x, e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x+2 & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

   (a) Determine $f(\{-2, 2\})$ e $f\big(]-2, 4]\big)$.
   (b) Determine $f^{\leftarrow}(\{-2, 0, 1, 2\})$.
   (c) Diga se $g \circ f$ é injetiva e se é sobrejetiva.

81. Sejam A, B conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$. Mostre que se f é injetiva, então $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

82. Sejam A, B conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções tais que $f \circ g = id_B$. Mostre que:

   (a) f é sobrejetiva;
   (b) g é injetiva;
   (c) g é sobrejetiva se e só se f é injetiva.

83. Sejam A, B, C conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ funções. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras.

   (a) Se $g \circ f$ é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.
   (b) Se $g \circ f$ é injetiva, então g é injetiva.
   (c) Se f é injetiva e g é sobrejetiva, então $g \circ f$ é bijetiva.

84. Sejam A, B, C conjuntos, $f, g_1, g_2 : A \longrightarrow B$ e $h, k_1, k_2 : B \longrightarrow C$ funções. Mostre que:

   (a) Se h é injetiva e $h \circ g_1 = h \circ g_2$, então $g_1 = g_2$.
   (b) Se f é sobrejetiva e $k_1 \circ f = k_2 \circ f$, então $k_1 = k_2$.

85. Verifique que cada uma das funções seguintes é bijetiva e determine a respetiva inversa.

   (a) $$\begin{aligned} f :\ & [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ & x \longmapsto x^3 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} g :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto 2x - 3 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} h :\ & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

86. Sejam A, B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma função bijetiva. Mostre que:

   (a) A função $f^{-1} : B \longrightarrow A$ é bijetiva e tem-se $(f^{-1})^{-1} = f$;
   (b) $f^{\leftarrow}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\}$, para todo $b \in B$.