东北林业大学课程考试答案评分标准

课程名称：线性代数　　学分：___　　教学大纲编号：___

试卷编号：________　　考试方式：笔试　　考试时间：120　分钟

一、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，总计 20 分）

1、4　　2、-1/3　　3、-1 或 2　　4、$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$　　5、0

6、n-r　　7、95　　8、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　9、-4<a<4　　10、-6

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，总计 10 分）

1. D　　2. C　　3. A　　4. B　　5. D

三、解答题（本大题 10 分）

$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)K$，$K=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，$|K|=0$，$R(B)\le R(K)<3$，

故向量组 b_1,b_2,b_3 线性相关。　　..............10 分

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，总计 20 分）

1、证：$A^2=E$，即：$(A+E)(A-E)=O$，从而 $R(A+E)+R(A-E)\le n.$

又 $R(A+E)+R(A-E)=R(A+E)+R(E-A)\ge R(2E)=n.$

则 $R(A+E)+R(A-E)=n.$　　..............10 分

2、证：（1）A 为 n 阶正定矩阵，设 A 的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，则 $\lambda_i>0,(\mathrm{i}=1,2,\cdots \mathrm{n})$。从而 A^{-1} 的特征值分别为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots\frac{1}{\lambda_n}$，$\frac{1}{\lambda_i}>0,(\mathrm{i}=1,2,\cdots \mathrm{n})$，所以 A^{-1} 为正定矩阵；同理 A^* 的特征值分别为 $\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots\frac{|A|}{\lambda_n}$，$\frac{|A|}{\lambda_i}>0,(\mathrm{i}=1,2,\cdots \mathrm{n})$，所以 A^* 为正定矩阵。. .....5 分

（2）$A+2E$ 的特征值分别为 $\lambda_1+2,\lambda_2+2,\cdots\lambda_n+2,$

其中：$\lambda_i+2>2,(\mathrm{i}=1,2,\cdots \mathrm{n})$，

所以 $|A+2E|=(\lambda_1+2)(\lambda_2+2)\times\cdots\times(\lambda_n+2)>2^n$　.　.............10 分

五、计算题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，总计 40 分）

1、$\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $R(A)=3$，　　.........5 分

a_1,a_2,a_4 为一个最大无关组且 $a_3=3a_2,a_5=-a_1-2a_2-2a_4$.　.....10 分

2、$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(6-\lambda)$，该矩阵可相似对角化，则 $(A-E)x=0$ 的系数矩阵的秩为 1， ....5 分

$A-E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $x=3$。 ....10 分

3、令 $A=(a_1,a_2,a_3), Ax=b$，则 $\begin{vmatrix} \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-(\alpha+4)$ ....2 分

（1)当 $\alpha=-4$，$\beta\neq 0$ 时，增广矩阵

$(A,b)=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta \end{pmatrix}$， ....3 分

$R(A)=2<R(A,b)=3$，方程组无解，b 不能由 A 线性表示。 .....4 分

（2)当 $\alpha\neq -4$ 时方程组有惟一解，b 能由向量组 A 唯一线性表示。......6 分

（3）当 $\alpha=-4,\beta=0$ 时，$R(A)=R(A,b)=2<3$，方程组有无穷解

得 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

即 $\beta=(-c-\frac{1}{2})\alpha_1+2c\alpha_2+\alpha_3$ .....10 分

4、f 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ....1 分

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)$，$A$ 的特征值

$\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-2.$ ....3 分

$\lambda_1=2$，$A-2E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $(A-2E)x=0$

的基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化得 $p_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$。 ....5 分

$\lambda_2=1$，$A-E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$(A-E)x=0$ 的基础解系

$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ 。 ....7 分

$\lambda_1=-2$，$A-E=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$，$(A+2E)x=0$ 的基础解

系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ ， ....9 分

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则有正交变换 $x=Py$ 把

二次型化为标准型 $f=2y_1^2+y_2^2-2y_3^2$，

其规范型为 $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$ 。 ....10 分