同济六版高等数学课后答案全集

第一章

习题 1−1

1. 设 $A=(-\infty, -5)\cup(5, +\infty)$, $B=[-10, 3)$, 写出 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty, 3)\cup(5, +\infty)$,

$A\cap B=[-10, -5)$,

$A\backslash B=(-\infty, -10)\cup(5, +\infty)$,

$A\backslash(A\backslash B)=[-10, -5)$.

2. 设 A、B 是任意两个集合, 证明对偶律: $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明 因为

$$x\in(A\cap B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A \text{ 或 } x\notin B\Leftrightarrow x\in A^C \text{ 或 } x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C,$$

所以 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f: X\rightarrow Y$, $A\subset X$, $B\subset X$. 证明

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明 因为

$$y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow\exists x\in A\cup B, \text{ 使 } f(x)=y$$
$$\Leftrightarrow(\text{因为 } x\in A \text{ 或 } x\in B)\ y\in f(A) \text{ 或 } y\in f(B)$$
$$\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B),$$

所以 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2)因为

$y\in f(A\cap B)\Rightarrow\exists x\in A\cap B$, 使 $f(x)=y\Leftrightarrow$(因为 $x\in A$ 且 $x\in B$) $y\in f(A)$且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$,

所以 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 设映射 $f: X\rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y\rightarrow X$, 使 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$, 其中 I_X、I_Y分别是 X、Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x\in X$, 有 $I_X x=x$; 对于每一个 $y\in Y$, 有 $I_Y y=y$. 证明: f是双射, 且 g 是 f的逆映射: $g=f^{-1}$.

证明 因为对于任意的$y\in Y$, 有 $x=g(y)\in X$, 且 $f(x)=f[g(y)]=I_y y=y$, 即 Y中任意元素都是 X中某元素的像, 所以 f为 X到 Y的满射.

又因为对于任意的 $x_1\neq x_2$, 必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 否则若 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g[f(x_1)]=g[f(x_2)]\Rightarrow x_1=x_2$.

因此 f既是单射, 又是满射, 即 f是双射.

对于映射 $g: Y\to X$, 因为对每个 $y\in Y$, 有 $g(y)=x\in X$, 且满足 $f(x)=f[g(y)]=I_y y=y$, 按逆映射的定义, g 是 f 的逆映射.

5. 设映射 $f: X\to Y, A\subset X$. 证明:

(1) $f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2)当 f 是单射时, 有 $f^{-1}(f(A))=A$.

证明 (1)因为 $x\in A \Rightarrow f(x)=y\in f(A) \Rightarrow f^{-1}(y)=x\in f^{-1}(f(A))$,

所以 $f^{-1}(f(A))\supset A$.

(2)由(1)知 $f^{-1}(f(A))\supset A$.

另一方面, 对于任意的 $x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow$存在 $y\in f(A)$, 使 $f^{-1}(y)=x\Rightarrow f(x)=y$. 因为 $y\in f(A)$且 f 是单射, 所以 $x\in A$. 这就证明了 $f^{-1}(f(A))\subset A$. 因此 $f^{-1}(f(A))=A$.

6. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;

解 由 $3x+2\geq 0$ 得 $x>-\frac{2}{3}$. 函数的定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(2) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

解 由 $1-x^2\neq 0$ 得 $x\neq\pm 1$. 函数的定义域为 $(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$.

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

解 由 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geq 0$ 得函数的定义域 $D=[-1, 0)\cup(0, 1]$.

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 由 $4-x^2>0$ 得 $|x|<2$. 函数的定义域为 $(-2, 2)$.

(5) $y=\sin\sqrt{x}$;

解 由 $x\geq 0$ 得函数的定义 $D=[0, +\infty)$.

(6) $y=\tan(x+1)$;

解 由 $x+1\neq\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$得函数的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(7) $y=\arcsin(x-3)$;

解 由 $|x-3|\leq 1$ 得函数的定义域 $D=[2, 4]$.

(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;

解 由 $3-x\geq 0$ 且 $x\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, 3)$.

(9) $y=\ln(x+1)$;

解 由 $x+1>0$ 得函数的定义域 $D=(-1, +\infty)$.

(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 由 $x\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

7. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1)不同. 因为定义域不同.

(2)不同. 因为对应法则不同, $x<0$ 时, $g(x)=-x$.

(3)相同. 因为定义域、对应法则均相相同.

(4)不同. 因为定义域不同.

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geq\frac{\pi}{3}\end{cases}$, 求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$, $\varphi(\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-2)$, 并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解 $\varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$, $\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-2)=0$.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\frac{x}{1-x}$, $(-\infty, 1)$;

(2) $y=x+\ln x$, $(0, +\infty)$.

证明 (1)对于任意的 $x_1, x_2\in(-\infty, 1)$, 有 $1-x_1>0$, $1-x_2>0$. 因为当 $x_1<x_2$ 时,

$$y_1-y_2=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

所以函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 内是单调增加的.

(2)对于任意的 $x_1, x_2\in(0, +\infty)$, 当 $x_1<x_2$ 时, 有

$$y_1-y_2=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

所以函数 $y=x+\ln x$ 在区间$(0, +\infty)$内是单调增加的.

10. 设 $f(x)$为定义在$(-l, l)$内的奇函数, 若$f(x)$在$(0, l)$内单调增加, 证明$f(x)$在$(-l, 0)$内也单调增加.

证明 对于$\forall x_1, x_2\in(-l, 0)$且 $x_1<x_2$, 有$-x_1, -x_2\in(0, l)$且$-x_1>-x_2$.

因为$f(x)$在$(0, l)$内单调增加且为奇函数, 所以

$$f(-x_2)<f(-x_1),\ -f(x_2)<-f(x_1),\ f(x_2)>f(x_1),$$

这就证明了对于$\forall x_1, x_2\in(-l, 0)$, 有$f(x_1)< f(x_2)$, 所以$f(x)$在$(-l, 0)$内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l, l)$上的, 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1)设 $F(x)=f(x)+g(x)$. 如果$f(x)$和 $g(x)$都是偶函数, 则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个偶函数的和是偶函数.

如果$f(x)$和 $g(x)$都是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$为奇函数, 即两个奇函数的和是奇函数.

(2)设 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$. 如果$f(x)$和 $g(x)$都是偶函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个偶函数的积是偶函数.

如果$f(x)$和 $g(x)$都是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个奇函数的积是偶函数.

如果$f(x)$是偶函数, 而 $g(x)$是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$为奇函数, 即偶函数与奇函数的积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1)$y=x^2(1-x^2)$;

(2)$y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;

(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1)因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$, 所以 $f(x)$是偶函数.

(2)由 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$ 可见 $f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(3)因为 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$, 所以 $f(x)$是偶函数.

(4)因为 $f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$, 所以 $f(x)$是奇函数.

(5)由 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$ 可见 $f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(6)因为 $f(-x)=\frac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$是偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$;

解 是周期函数, 周期为 $l=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$;

解 是周期函数, 周期为 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin \pi x$;

解 是周期函数, 周期为 $l=2$.

(4) $y=x\cos x$;

解 不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x$.

解 是周期函数, 周期为 $l=\pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;

解 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$, 所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

解　由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 得 $x=\frac{1-y}{1+y}$，所以 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;

解　由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$，所以 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) $y=2\sin 3x$;

解　由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$，所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(5) $y=1+\ln(x+2)$;

解　由 $y=1+\ln(x+2)$ 得 $x=e^{y-1}-2$，所以 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解　由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$，所以 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明　先证必要性. 设函数 $f(x)$ 在 X 上有界，则存在正数 M，使 $|f(x)|\leq M$，即 $-M\leq f(x)\leq M$. 这就证明了 $f(x)$ 在 X 上有下界 $-M$ 和上界 M.

再证充分性. 设函数 $f(x)$ 在 X 上有下界 K_1 和上界 K_2，即 $K_1\leq f(x)\leq K_2$. 取 $M=\max\{|K_1|, |K_2|\}$，则

$$-M\leq K_1\leq f(x)\leq K_2\leq M,$$

即

$$|f(x)|\leq M.$$

这就证明了 $f(x)$ 在 X 上有界.

16. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$, $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$;

解　$y=\sin^2 x$, $y_1=\sin^2\frac{\pi}{6}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, $y_2=\sin^2\frac{\pi}{3}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}$.

(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{\pi}{4}$;

解　$y=\sin 2x$, $y_1=\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$;

解 $y=\sqrt{1+x^2}$, $y_1=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$, $y_2=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^u$, $u=x^2$, $x_1=0$, $x_2=1$;

解 $y=e^{x^2}$, $y_1=e^{0^2}=1$, $y_2=e^{1^2}=e$.

(5) $y=u^2$, $u=e^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.
解 $y=e^{2x}$, $y_1=e^{2\cdot 1}=e^2$, $y_2=e^{2\cdot(-1)}=e^{-2}$.

17. 设$f(x)$的定义域$D=[0, 1]$, 求下列各函数的定义域:
(1) $f(x^2)$;
解 由$0\le x^2\le 1$得$|x|\le 1$, 所以函数$f(x^2)$的定义域为$[-1, 1]$.
(2) $f(\sin x)$;
解 由$0\le \sin x\le 1$得$2n\pi\le x\le (2n+1)\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2\cdots)$, 所以函数$f(\sin x)$的定义域为
$[2n\pi, (2n+1)\pi]$ $(n=0, \pm 1, \pm 2\cdots)$.
(3) $f(x+a)(a>0)$;
解 由$0\le x+a\le 1$得$-a\le x\le 1-a$, 所以函数$f(x+a)$的定义域为$[-a, 1-a]$.
(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 由$0\le x+a\le 1$且$0\le x-a\le 1$得: 当$0<a\le\frac{1}{2}$时, $a\le x\le 1-a$; 当$a>\frac{1}{2}$时, 无解. 因此当$0<a\le\frac{1}{2}$时函数的定义域为$[a, 1-a]$, 当$a>\frac{1}{2}$时函数无意义.

18. 设$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=e^x$, 求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & |e^x|<1\\ 0 & |e^x|=1\\ -1 & |e^x|>1\end{cases}$, 即$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$.

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1 & |x|<1\\ e^0 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}, \text{即 } g[f(x)]=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}.$$

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角$\varphi=40°$(图1−37). 当过水断面$ABCD$的面积为定值S_0时, 求湿周$L(L=AB+BC+CD)$与水深h之间的函数关系式, 并指明其定义域.

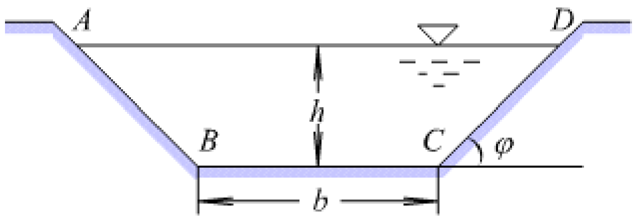


图 1–37

解 $AB=DC=\dfrac{h}{\sin 40^\circ}$，又从 $\dfrac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ \cdot h)]=S_0$ 得 $BC=\dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ \cdot h$，所以

$$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h.$$

自变量 h 的取值范围应由不等式组

$$h>0,\ \frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ \cdot h>0$$

确定，定义域为 $0<h<\sqrt{S_0 \cot 40^\circ}$.

20. 收敛音机每台售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1)将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2)将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3)某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少？

解 (1)当 $0\le x\le 100$ 时, $p=90$.

令 $0.01(x_0-100)=90-75$，得 $x_0=1600$. 因此当 $x\ge 1600$ 时, $p=75$.

当 $100<x<1600$ 时,

$p=90-(x-100)\times 0.01=91-0.01x$.

综合上述结果得到

$$p=\begin{cases} 90 & 0\le x\le 100 \\ 91-0.01x & 100<x<1600 \\ 75 & x\ge 1600 \end{cases}.$$

(2) $P=(p-60)x=\begin{cases} 30x & 0\le x\le 100 \\ 31x-0.01x^2 & 100<x<1600 \\ 15x & x\ge 1600 \end{cases}.$

(3) $P=31\times 1000-0.01\times 1000^2=21000$(元).

习题 1−2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 写出它们的极限:

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$;

解 当 $n\to\infty$ 时, $x_n=\frac{1}{2^n}\to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$;

解 当 $n\to\infty$ 时, $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}\to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$.

(3) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$;

解 当 $n\to\infty$ 时, $x_n=2+\frac{1}{n^2}\to 2$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n^2})=2$.

(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$;

解 当 $n\to\infty$ 时, $x_n=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}\to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$.

(5) $x_n=n(-1)^n$.

解 当 $n\to\infty$ 时, $x_n=n(-1)^n$ 没有极限.

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$? 求出 N, 使当 $n>N$ 时, x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε, 当 $\varepsilon=0.001$ 时, 求出数 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$|x_n-0|=\frac{|\cos\frac{n\pi}{2}|}{n}\le\frac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|x_n-0|<\varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 也就是 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取

$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,

则 $\forall n>N$, 有 $|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时, $N=[\frac{1}{\varepsilon}]=1000$.

3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;

分析 要使$|\frac{1}{n^2}-0|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$，只须$n^2>\frac{1}{\varepsilon}$，即$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$，当 $n>N$时，有$|\frac{1}{n^2}-0|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

分析 要使$|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{4n}<\varepsilon$，只须$\frac{1}{4n}<\varepsilon$，即$n>\frac{1}{4\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\frac{1}{4\varepsilon}]$，当 $n>N$时，有$|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;

分析 要使$|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon$，只须$n>\frac{a^2}{\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\frac{a^2}{\varepsilon}]$，当$\forall n>N$时，有$|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1|<\varepsilon$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

分析 要使$|0.99\cdots9-1|=\frac{1}{10^{n-1}}<\varepsilon$，只须$\frac{1}{10^{n-1}}<\varepsilon$，即$n>1+\lg\frac{1}{\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[1+\lg\frac{1}{\varepsilon}]$，当$\forall n>N$时，有$|0.99\cdots9-1|<\varepsilon$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列$\{|x_n|\}$有极限，但数列$\{x_n\}$未必有极限.

证明 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$时，有$|u_n-a|<\varepsilon$，从而

$$||u_n|-|a||\le|u_n-a|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

数列$\{|x_n|\}$有极限, 但数列$\{x_n\}$未必有极限. 例如 $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

5. 设数列$\{x_n\}$有界, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明 因为数列$\{x_n\}$有界, 所以存在 M, 使$\forall n\in\mathbf{Z}$, 有$|x_n|\leq M$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 所以$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\boldsymbol{N}$, 当 $n>N$时, 有$|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$. 从而当 $n>N$时, 有

$$|x_ny_n-0|=|x_ny_n|\leq M|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6. 对于数列$\{x_n\}$, 若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$, $x_{2k}\to a(k\to\infty)$,
证明: $x_n\to a(n\to\infty)$.

证明 因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$, $x_{2k}\to a(k\to\infty)$, 所以$\forall\varepsilon>0$,

$\exists K_1$, 当 $2k-1>2K_1-1$ 时, 有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$;

$\exists K_2$, 当 $2k>2K_2$时, 有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{2K_1-1, 2K_2\}$, 只要 $n>N$, 就有$|x_n-a|<\varepsilon$.

因此 $x_n\to a\ (n\to\infty)$.

习题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$;

分析 因为

$$|(3x-1)-8|=|3x-9|=3|x-3|,$$

所以要使$|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 只须$|x-3|<\dfrac{1}{3}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\dfrac{1}{3}\varepsilon$, 当 $0<|x-3|<\delta$时, 有

$$|(3x-1)-8|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$.

(2) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$;

分析 因为

$$|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|,$$

所以要使$|(5x+2)-12|<\varepsilon$，只须$|x-2|<\frac{1}{5}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\frac{1}{5}\varepsilon$，当$0<|x-2|<\delta$时，有

$$|(5x+2)-12|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$;

分析 因为

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=\left|\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right|=|x+2|=|x-(-2)|,$$

所以要使$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$，只须$|x-(-2)|<\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon$，当$0<|x-(-2)|<\delta$时，有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{1-4x^3}{2x+1}=2$.

分析 因为

$$\left|\frac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2|x-(-\frac{1}{2})|,$$

所以要使$\left|\frac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，只须$|x-(-\frac{1}{2})|<\frac{1}{2}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$，当$0<|x-(-\frac{1}{2})|<\delta$时，有

$$\left|\frac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{1-4x^3}{2x+1}=2$.

2. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$;

分析 因为

$$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1+x^3-x^3}{2x^3}\right|=\frac{1}{2|x|^3},$$

所以要使$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只须$\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，即$|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists X=\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，当$|x|>X$时，有

$$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

分析 因为

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

所以要使$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只须$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即$x>\frac{1}{\varepsilon^2}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，当$x>X$时，有

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3. 当$x\to2$时，$y=x^2\to4$. 问δ等于多少，使当$|x-2|<\delta$时，$|y-4|<0.001$？

解 由于当$x\to2$时，$|x-2|\to0$，故可设$|x-2|<1$，即$1<x<3$.

要使

$$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<0.001,$$

只要$|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.0002$.

取$\delta=0.0002$，则当$0<|x-2|<\delta$时，就有$|x^2-4|<0.001$.

4. 当$x\to\infty$时，$y=\frac{x^2-1}{x^2+3}\to1$，问$X$等于多少，使当$|x|>X$时，$|y-1|<0.01$?

解 要使$\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\frac{4}{x^2+3}<0.01$，只要$|x|>\sqrt{\frac{4}{0.01}-3}=\sqrt{397}$，故$X=\sqrt{397}$.

5. 证明函数$f(x)=|x|$当$x\to0$时极限为零.

证明 因为

$$|f(x)-0|=||x|-0|=|x|=|x-0|,$$

所以要使$|f(x)-0|<\varepsilon$, 只须$|x|<\varepsilon$.

因为对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$, 使当$0<|x-0|<\delta$, 时有

$$|f(x)-0|=||x|-0|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

6. 求$f(x)=\frac{x}{x}$, $\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$当$x\to0$时的左、右极限, 并说明它们在$x\to0$时的极限是否存在.

证明 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^-}1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

所以极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在.

因为

$$\lim_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\varphi(x)\neq\lim_{x\to0^+}\varphi(x),$$

所以极限$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$不存在.

7. 证明: 若$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时, 函数$f(x)$的极限都存在且都等于A, 则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证明 因为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 所以$\forall\varepsilon>0$,

$\exists X_1>0$, 使当$x<-X_1$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$;

$\exists X_2>0$, 使当$x>X_2$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1, X_2\}$，则当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

8. 根据极限的定义证明：函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 先证明必要性. 设$f(x)\to A(x\to x_0)$，则$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

因此当 $x_0-\delta<x<x_0$ 和 $x_0<x<x_0+\delta$ 时都有

$|f(x)-A|<\varepsilon$.

这说明$f(x)$当 $x\to x_0$时左右极限都存在并且都等于 A.

再证明充分性. 设$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$，则$\forall\varepsilon>0$,

$\exists\delta_1>0$，使当 $x_0-\delta_1<x<x_0$ 时，有$|f(x)-A<\varepsilon$；

$\exists\delta_2>0$，使当 $x_0<x<x_0+\delta_2$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $x_0-\delta_1<x<x_0$ 及 $x_0<x<x_0+\delta_2$，从而有

$|f(x)-A|<\varepsilon$,

即$f(x)\to A(x\to x_0)$.

9. 试给出 $x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

解 $x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理：如果$f(x)$当 $x\to\infty$时的极限存在，则存在 $X>0$ 及 $M>0$，使当$|x|>X$时，$|f(x)|<M$.

证明 设$f(x)\to A(x\to\infty)$，则对于$\varepsilon=1, \exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon=1$. 所以

$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leq|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

这就是说存在 $X>0$ 及 $M>0$，使当$|x|>X$时，$|f(x)|<M$，其中 $M=1+|A|$.

习题 1−4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

解 不一定.

例如，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=2x, \beta(x)=3x$ 都是无穷小，但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$不是无穷小.

2. 根据定义证明：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$当 $x\to 3$ 时为无穷小；

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$当 $x\to 0$ 时为无穷小.

证明 (1)当 $x\neq 3$ 时$|y|=\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|$. 因为$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-3|<\delta$时，有

$$|y|=\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<\delta=\varepsilon,$$

所以当 $x\to 3$ 时 $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$为无穷小.

(2)当 $x\neq 0$ 时 $|y|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x-0|$. 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-0|<\delta$时, 有

$$|y|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x-0|<\delta=\varepsilon,$$

所以当 $x\to 0$ 时 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 为无穷小.

3. 根据定义证明: 函数 $y=\frac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件, 能使$|y|>10^4$?

证明 分析 $|y|=\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|2+\frac{1}{x}\right|\geq\frac{1}{|x|}-2$, 要使$|y|>M$, 只须$\frac{1}{|x|}-2>M$, 即 $|x|<\frac{1}{M+2}$.

证明 因为$\forall M>0$, $\exists\delta=\frac{1}{M+2}$, 使当 $0<|x-0|<\delta$时, 有$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$,

所以当 $x\to 0$ 时, 函数 $y=\frac{1+2x}{x}$ 是无穷大.

取 $M=10^4$, 则 $\delta=\frac{1}{10^4+2}$. 当 $0<|x-0|<\frac{1}{10^4+2}$ 时, $|y|>10^4$.

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1)因为$\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$, 而当 $x\to\infty$ 时 $\frac{1}{x}$是无穷小, 所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2$.

(2)因为$\frac{1-x^2}{1-x}=1+x\ (x\neq 1)$, 而当 $x\to 0$ 时 x 为无穷小, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}=1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$时, 有恒$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.			
$x\to x_0^+$				
$x\to x_0^-$				
$x\to\infty$		$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 使当$\|x\|>X$时, 有恒$\|f(x)\|>M$.		

$x\to+\infty$				
$x\to-\infty$				

解

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$时，有恒$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$时，有恒$\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$时，有恒 $f(x)>M$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$时，有恒 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$时，有恒$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$时，有恒$\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$时，有恒 $f(x)>M$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$时，有恒 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使当 $0<x_0-x<\delta$时，有恒$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<x_0-x<\delta$时，有恒$\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<x_0-x<\delta$时，有恒 $f(x)>M$.	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使当 $0<x_0-x<\delta$时，有恒 $f(x)<-M$.
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当$\|x\|>X$时，有恒$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当$\|x\|>X$时，有恒$\|f(x)\|>M$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当$\|x\|>X$时，有恒$f(x)>M$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当$\|x\|>X$时，有恒$f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当 $x>X$时，有恒$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当 $x>X$时，有恒$\|f(x)\|>M$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当 $x>X$时，有恒$f(x)>M$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当 $x>X$时，有恒$f(x)<-M$.
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当 $x<-X$时，有恒$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当 $x<-X$时，有恒$\|f(x)\|>M$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当 $x<-X$时，有恒$f(x)>M$.	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，使当 $x<-X$时，有恒$f(x)<-M$.

6. 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是否有界？这个函数是否为当 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

解 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内无界.

这是因为$\forall M>0$，在$(-\infty, +\infty)$内总能找到这样的 x，使得$|y(x)|>M$. 例如

$$y(2k\pi)=2k\pi\cos 2k\pi=2k\pi\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

当 k 充分大时，就有$|y(2k\pi)|>M$.

当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=x\cos x$ 不是无穷大.

这是因为$\forall M>0$，找不到这样一个时刻 N，使对一切大于 N 的 x，都有$|y(x)|>M$. 例如

$$y(2k\pi+\frac{\pi}{2})=(2k\pi+\frac{\pi}{2})\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=0\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

对任何大的 N，当 k 充分大时，总有 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}>N$，但$|y(x)|=0<M$.

7. 证明：函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间$(0, 1]$上无界，但这函数不是当 $x\to0^+$时的无穷

大.

证明 函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间(0, 1]上无界. 这是因为

$\forall M>0$, 在(0, 1]中总可以找到点 x_k, 使 $y(x_k)>M$. 例如当

$$x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\ (k=0, 1, 2, \cdots)$$

时, 有

$$y(x_k)=2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

当 k 充分大时, $y(x_k)>M$.

当 $x\to 0^+$ 时, 函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大. 这是因为

$\forall M>0$, 对所有的 $\delta>0$, 总可以找到这样的点 x_k, 使 $0<x_k<\delta$, 但 $y(x_k)<M$. 例如可取

$$x_k=\frac{1}{2k\pi}\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

当 k 充分大时, $x_k<\delta$, 但 $y(x_k)=2k\pi\sin 2k\pi=0<M$.

习题 1−5

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$;

解 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{2^2+5}{2-3}=-9$.

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}=\frac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\frac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

解 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(6) $\lim\limits_{x\to \infty}(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})$;

解 $\lim\limits_{x\to \infty}(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=2-\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x^2}=2$.

(7) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=0$ (分子次数低于分母次数，极限为零).

或 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}=0$.

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

解 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{4-2}{4-1}=\frac{2}{3}$.

(10) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})$;

解 $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})\cdot\lim\limits_{x\to \infty}(2-\frac{1}{x^2})=1\times 2=2$.

(11) $\lim\limits_{n\to \infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2$.

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}$.

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\frac{1}{5}$ (分子与分母的次数相同, 极限为最高次项系数之比).

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})=\frac{1}{5}$.

(14) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1$.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$;

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\frac{0}{16}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}=\infty$ (因为分子次数高于分母次数).

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$ (因为分子次数高于分母次数).

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}=0$ (当 $x\to 0$ 时, x^2 是无穷小, 而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量).

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arctan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\cdot\arctan x=0$ (当 $x\to\infty$时, $\dfrac{1}{x}$ 是无穷小, 而 $\arctan x$ 是有界变量).

4. 证明本节定理 3 中的(2).

习题 1−5

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x-3}$;

解 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{2^2+5}{2-3}=-9$.

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

解 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=2$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=0$ (分子次数低于分母次数, 极限为零).

或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}=0$.

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

解 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{4-2}{4-1}=\frac{2}{3}$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x^2})=1\times 2=2$.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2$.

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{2}$.

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\dfrac{1}{5}$ (分子与分母的次数相同, 极限为最高次项系数之比).

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})(1+\dfrac{3}{n})=\dfrac{1}{5}$.

(14) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$;

解 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1$.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$;

解 因为 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\dfrac{0}{16}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$ (因为分子次数高于分母次数).

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$ (因为分子次数高于分母次数).

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

解 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$ (当 $x\to0$ 时, x^2 是无穷小, 而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量).

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\arctan x=0$ (当 $x\to\infty$时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小, 而 $\arctan x$ 是有界变量).

4. 证明本节定理 3 中的(2).

习题 1−7

1. 当 $x\to0$ 时, $2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比, 哪一个是高阶无穷小?

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^2}{2-x}=0$,

所以当 $x\to0$ 时, x^2-x^3 是高阶无穷小, 即 $x^2-x^3=o(2x-x^2)$.

2. 当 $x\to1$ 时, 无穷小 $1-x$ 和(1)$1-x^3$, (2)$\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?

解 (1)因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)=3$,

所以当 $x\to1$ 时, $1-x$ 和 $1-x^3$ 是同阶的无穷小, 但不是等价无穷小.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}(1+x)=1$,

所以当 $x\to1$ 时, $1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是同阶的无穷小, 而且是等价无穷小.

3. 证明: 当 $x\to0$ 时, 有:

(1) $\arctan x\sim x$;

(2) $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

证明 (1)因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\tan y}=1$(提示: 令 $y=\arctan x$, 则当 $x\to0$ 时, $y\to0$),

所以当 $x\to0$ 时, $\arctan x\sim x$.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec x-1}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1$,

所以当 $x\to0$ 时, $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

4. 利用等价无穷小的性质，求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n, m 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n>m\\ \infty & n<m\end{cases}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}$.

(4)因为

$$\sin x-\tan x=\tan x(\cos x-1)=-2\tan x\sin^2\frac{x}{2}\sim -2x\cdot(\frac{x}{2})^2=-\frac{1}{2}x^3\ (x\to 0),$$

$$\sqrt[3]{1+x^2}-1=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}\sim\frac{1}{3}x^2\ (x\to 0),$$

$$\sqrt{1+\sin x}-1=\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}+1}\sim\sin x\sim x\ (x\to 0),$$

所以 $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^2\cdot x}=-3.$$

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) $\alpha\sim\alpha$ (自反性);

(2) 若$\alpha\sim\beta$, 则$\beta\sim\alpha$(对称性);

(3)若$\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$, 则$\alpha\sim\gamma$(传递性).

证明 (1) $\lim\frac{\alpha}{\alpha}=1$, 所以$\alpha\sim\alpha$;

(2) 若$\alpha\sim\beta$, 则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，从而$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$. 因此$\beta\sim\alpha$;

(3) 若$\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$, $\lim\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\frac{\beta}{\gamma}\cdot\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$. 因此$\alpha\sim\gamma$.

习题 1−8

1. 研究下列函数的连续性, 并画出函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x\le 2\end{cases}$;

解 已知多项式函数是连续函数, 所以函数$f(x)$在$[0, 1)$和$(1, 2]$内是连续的.

在$x=1$处, 因为$f(1)=1$, 并且

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2-x)=1.$$

所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$，从而函数$f(x)$在$x=1$处是连续的.

综上所述，函数$f(x)$在$[0, 2]$上是连续函数.

(2) $f(x)=\begin{cases}x & -1\le x\le 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$.

解 只需考察函数在$x=-1$和$x=1$处的连续性.

在$x=-1$处, 因为$f(-1)=-1$, 并且

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}1=1\ne f(-1),$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}x=-1=f(-1),$$

所以函数在$x=-1$处间断, 但右连续.

在$x=1$处, 因为$f(1)=1$, 并且

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1=f(1),\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}1=1=f(1),$$

所以函数在$x=1$处连续.

综合上述讨论, 函数在$(-\infty, -1)$和$(-1, +\infty)$内连续, 在$x=-1$处间断, 但右连续.

2. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使它连续:

(1) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x=1$, $x=2$;

解 $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. 因为函数在 x=2 和 x=1 处无定义, 所以 x=2 和 x=1 是函数的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$, 所以 x=2 是函数的第二类间断点;

因为 $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x-2)}=-2$, 所以 x=1 是函数的第一类间断点, 并且是可去间断点. 在 x=1 处, 令 y=−2, 则函数在 x=1 处成为连续的.

(2) $y=\frac{x}{\tan x}$, $x=k$, $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k=0, ±1, ±2, · · ·);

解 函数在点 $x=k\pi(k\in Z)$和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$处无定义, 因而这些点都是函数的间断点.

因 $\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty\,(k\neq 0)$, 故 $x=k\pi(k\neq 0)$是第二类间断点;

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$, $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0\,(k\in Z)$, 所以 x=0 和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 是第一类间断点且是可去间断点.

令 $y|_{x=0}=1$, 则函数在 x=0 处成为连续的;

令 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时, y=0, 则函数在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处成为连续的.

(3) $y=\cos^2\frac{1}{x}$, x=0;

解 因为函数 $y=\cos^2\frac{1}{x}$ 在 x=0 处无定义, 所以 x=0 是函数 $y=\cos^2\frac{1}{x}$ 的间断点. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2\frac{1}{x}$ 不存在, 所以 x=0 是函数的第二类间断点.

(4) $y=\begin{cases}x-1 & x\leq 1\\ 3-x & x>1\end{cases}$, $x=1$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$, 所以 x=1 是函数的第一类不可去间断点.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|<1\end{cases}$.

在分段点 $x=-1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-x)=1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，所以 $x=-1$ 为函数的第一类不可去间断点.

在分段点 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$，所以 $x=1$ 为函数的第一类不可去间断点.

4. 证明：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq0$，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq0$.

证明 不妨设 $f(x_0)>0$. 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>0$，由极限的局部保号性定理，存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时 $f(x)>0$，从而当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)>0$. 这就是说，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq0$.

5. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子：

(1) $x=0, \pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \cdots, \pm n, \pm\frac{1}{n}, \cdots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点，且它们都是无穷间断点；

解 函数 $f(x)=\csc(\pi x)+\csc\frac{\pi}{x}$ 在点 $x=0, \pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \cdots, \pm n, \pm\frac{1}{n}, \cdots$ 处是间断的，

且这些点是函数的无穷间断点.

(2) $f(x)$ 在 **R** 上处处不连续，但 $|f(x)|$ 在 **R** 上处处连续；

解 函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbf{Q}\\ 1 & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 在 **R** 上处处不连续，但 $|f(x)|=1$ 在 **R** 上处处连续.

(3) $f(x)$ 在 **R** 上处处有定义，但仅在一点连续.

解 函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbf{Q}\\ -x & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 在 **R** 上处处有定义，它只在 $x=0$ 处连续.

习题 1–9

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

解 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$，函数在$(-\infty, +\infty)$内除点 $x=2$ 和 $x=-3$ 外是连续的，所以函数 $f(x)$的连续区间为$(-\infty, -3)$、$(-3, 2)$、$(2, +\infty)$.

在函数的连续点 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$.

在函数的间断点 $x=2$ 和 $x=-3$ 处，

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\infty, \quad \lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+1)}{x-2}=-\frac{8}{5}.$$

2. 设函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 连续，证明函数

$\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\}$, $\psi(x)=\min\{f(x), g(x)\}$

在点 x_0 也连续.

证明 已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$.

可以验证

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

因此

$$\varphi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|],$$

$$\psi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)-|f(x_0)-g(x_0)|].$$

因为

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)+|\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)|]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|]=\varphi(x_0),$$

所以 $\varphi(x)$在点 x_0 也连续.

同理可证明 $\psi(x)$在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^3$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解 (1)因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数, $f(x)$在点 $x=0$ 有定义, 所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{0^2-2\cdot 0+5}=\sqrt{5}.$$

(2)因为函数 $f(x)=(\sin 2x)^3$ 是初等函数, $f(x)$在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 有定义, 所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^3=f(\frac{\pi}{4})=(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4})^3=1.$$

(3)因为函数 $f(x)=\ln(2\cos 2x)$是初等函数, $f(x)$在点 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 有定义, 所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=f(\frac{\pi}{6})=\ln(2\cos 2\cdot\frac{\pi}{6})=0.$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

(5) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x-4}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{5\cdot 1-4}+\sqrt{1}}=2.$$

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos\dfrac{a+a}{2}\cdot 1=\cos a$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}})}=1$.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x})=\ln 1=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{x})^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3\tan^2 x}}\right]^3=e^3$.

(5) $(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=(1+\frac{-3}{6+x})^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}$. 因为

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-3}{6+x})^{\frac{6+x}{-3}}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}=-\frac{3}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\sin^2 x}+1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)(\sqrt{1+\sin^2 x}+1)}{x\sin^2 x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ a+x & x\geq 0 \end{cases}$, 应当如何选择数 a, 使得 $f(x)$成为在$(-\infty, +\infty)$内的连续函数?

解 要使函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续, 只须 $f(x)$在 $x=0$ 处连续, 即只须

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to +0}f(x)=f(0)=a.$$

因为 $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}e^x=1$, $\lim\limits_{x\to +0}f(x)=\lim\limits_{x\to +0}(a+x)=a$, 所以只须取 $a=1$.

习题 1−10

1. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 设 $f(x)=x^5-3x-1$, 则 $f(x)$是闭区间$[1, 2]$上的连续函数.

因为 $f(1)=-3$, $f(2)=25$, $f(1)f(2)<0$, 所以由零点定理, 在$(1, 2)$内至少有一点 ξ $(1<\xi<2)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $x=\xi$ 是方程 $x^5-3x=1$ 的介于 1 和 2 之间的根.

因此方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

2. 证明方程 $x=a\sin x+b$, 其中 $a>0$, $b>0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

证明 设$f(x)=a\sin x+b-x$, 则$f(x)$是$[0, a+b]$上的连续函数.

$f(0)=b, f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]\le 0$.

若$f(a+b)=0$, 则说明$x=a+b$就是方程$x=a\sin x+b$的一个不超过$a+b$的根;

若$f(a+b)<0$, 则$f(0)f(a+b)<0$, 由零点定理, 至少存在一点$\xi\in(0, a+b)$, 使$f(\xi)=0$, 这说明$x=\xi$ 也是方程$x=a\sin x+b$的一个不超过$a+b$的根.

总之, 方程$x=a\sin x+b$至少有一个正根, 并且它不超过$a+b$.

3. 设函数$f(x)$对于闭区间$[a, b]$上的任意两点x、y, 恒有$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$, 其中L为正常数, 且$f(a)\cdot f(b)<0$. 证明: 至少有一点$\xi\in(a, b)$, 使得$f(\xi)=0$.

证明 设x_0为(a, b)内任意一点. 因为

$$0\le \lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|\le \lim_{x\to x_0}L|x-x_0|=0,$$

所以 $$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0,$$

即 $$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

因此$f(x)$在(a, b)内连续.

同理可证$f(x)$在点a处左连续, 在点b处右连续, 所以$f(x)$在$[a, b]$上连续.

因为$f(x)$在$[a, b]$上连续, 且$f(a)\cdot f(b)<0$, 由零点定理, 至少有一点$\xi\in(a, b)$, 使得$f(\xi)=0$.

4. 若$f(x)$在$[a, b]$上连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在$[x_1, x_n]$上至少有一点ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明 显然$f(x)$在$[x_1, x_n]$上也连续. 设M和m分别是$f(x)$在$[x_1, x_n]$上的最大值和最小值.

因为$x_i\in[x_1, x_n](1\le i\le n)$, 所以有$m\le f(x_i)\le M$, 从而有

$$n\cdot m\le f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\le n\cdot M,$$

$$m\le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M.$$

由介值定理推论, 在$[x_1, x_n]$上至少有一点ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

5. 证明: 若$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续, 且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在, 则$f(x)$必在$(-\infty, +\infty)$内有

界.

证明 令 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则对于给定的$\varepsilon>0$, 存在 $X>0$, 只要$|x|>X$, 就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon\text{, 即 }A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon\text{ .}$$

又由于$f(x)$在闭区间$[-X, X]$上连续, 根据有界性定理, 存在 $M>0$, 使$|f(x)|\leq M$, $x\in[-X, X]$.

取 $N=\max\{M, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$, 则$|f(x)|\leq N$, $x\in(-\infty, +\infty)$, 即$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内有界.

6. 在什么条件下, (a, b)内的连续函数$f(x)$为一致连续?

总习题一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的________条件. 数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的________的条件.

(2)$f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的________条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是$f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有界的________条件.

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 的________条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是$f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内无界的________条件.

(4)$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限$f(x_0^+)$及左极限$f(x_0^-)$都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的________条件.

解 (1) 必要, 充分.

(2) 必要, 充分.

(3) 必要, 充分.

(4) 充分必要.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设$f(x)=2^x+3^x-2$, 则当 $x\to 0$ 时, 有( ).

$(A)f(x)$与 x 是等价无穷小; $(B)f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小;

$(C)f(x)$是比 x 高阶的无穷小; $(D)f(x)$是比 x 低阶的无穷小.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}$

$$=\ln 2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}+\ln 3\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\ln 2+\ln 3\,(\text{令 } 2^x-1=t,\ 3^x-1=u)\text{ .}$$

所以$f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小, 故应选 B.

3. 设$f(x)$的定义域是$[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$;

(2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$;

(4) $f(\cos x)$.

解　(1)由 $0\le e^x\le 1$ 得 $x\le 0$, 即函数 $f(e^x)$的定义域为$(-\infty, 0]$.

(2) 由 $0\le \ln x\le 1$ 得 $1\le x\le e$, 即函数 $f(\ln x)$的定义域为$[1, e]$.

(3) 由 $0\le \arctan x \le 1$ 得 $0\le x\le \tan 1$, 即函数 $f(\arctan x)$的定义域为$[0, \tan 1]$.

(4) 由 $0\le \cos x\le 1$ 得 $2n\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le 2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdot\cdot\cdot)$,

即函数 $f(\cos x)$的定义域为$[2n\pi-\frac{\pi}{2},\ n\pi+\frac{\pi}{2}]$, $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdot\cdot\cdot)$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases},$$

求 $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 因为 $f(x)\ge 0$, 所以 $f[f(x)]=f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$;

因为 $g(x)\le 0$, 所以 $g[g(x)]=0$;

因为 $g(x)\le 0$, 所以 $f[g(x)]=0$;

因为 $f(x)\ge 0$, 所以 $g[f(x)]=-f^2(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$.

5. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1)$y=|\sin x|$;

(2)$y=\sin|x|$;

(3) $y=2\sin\frac{x}{2}$.

6. 把半径为 R 的一圆形铁片, 自中心处剪去中心角为α的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为α的函数.

解 设围成的圆锥的底半径为 r, 高为 h, 依题意有

$$R(2\pi-\alpha)=2\pi r,\quad r=\frac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}}=R\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}.$$

圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}\cdot R\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\cdot\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\quad(0<\alpha<2\pi).$$

7. 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 要使 $|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5|<\varepsilon$, 只需 $|x-3|<\varepsilon$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时, 就有 $|x-3|<\varepsilon$, 即 $|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

8. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$;

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解 (1)因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$.

(2) $$\lim_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $$\lim_{x\to \infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}=\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{x+1}=\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{1}{2}}=e.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

(提示: 用等价无穷小换).

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3})^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}$, 因为

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3})^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}=e$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x-1}{x}+\dfrac{b^x-1}{x}+\dfrac{c^x-1}{x})$

$=\dfrac{1}{3}[\ln a\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+t)}+\ln b\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+u)}+\ln c\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+v)}]$

$=\dfrac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc}$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$.

提示: 求极限过程中作了变换 $a^x-1=t$, $b^x-1=u$, $c^x-1=v$.

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\tan x}$, 因为

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=e$,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x(\sin x-1)}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x(\sin^2 x-1)}{\cos x(\sin x+1)}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+1}=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=e^0=1$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ a+x^2 & x\leq 0\end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 应怎样选择数 a?

解 要使函数连续, 必须使函数在 $x=0$ 处连续.

因为

$$f(0)=a,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)=a,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0,$$

所以当 $a=0$ 时, $f(x)$在 $x=0$ 处连续. 因此选取 $a=0$ 时, $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续.

10. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -1<x\le 0 \end{cases}$, 求$f(x)$的间断点, 并说明间断点所属类形.

解 因为函数$f(x)$在 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=1$ 是函数的一个间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$(提示 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$),

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\infty\text{(提示 }\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty\text{)},$$

所以 $x=1$ 是函数的第二类间断点.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(x+1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{e}$,

所以 $x=0$ 也是函数的间断点, 且为第一类间断点.

11. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

证明 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

12. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

证明 设 $f(x)=\sin x+x+1$, 则函数$f(x)$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上连续.

因为 $f(-\frac{\pi}{2})=-1-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2})=1+\frac{\pi}{2}+1=2+\frac{\pi}{2}$, $f(-\frac{\pi}{2})\cdot f(\frac{\pi}{2})<0$,

所以由零点定理, 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少存在一点ξ, 使$f(\xi)=0$.

这说明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

13. 如果存在直线 L: $y=kx+b$, 使得当 $x\to\infty$(或 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$)时, 曲线 $y=f(x)$上的动点 $M(x, y)$到直线 L 的距离 $d(M, L)\to 0$, 则称 L 为曲线 $y=f(x)$的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k\neq 0$ 时, 称 L 为斜渐近线.

(1)证明: 直线 L: $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty,x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty,x\to-\infty)}}[f(x)-kx].$$

(2)求曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

证明 (1) 仅就 $x\to\infty$的情况进行证明.

按渐近线的定义, $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线的充要条件是

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

必要性: 设 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$,

于是有 $$\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0\Rightarrow k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

同时有 $$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx].$$

充分性: 如果 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$, 则

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]-b=b-b=0,$$

因此 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线.

(2)因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}=2$,

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-2x]=\lim_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]=2\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1=2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}-1=1,$$

所以曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y=2x+1$.

习题 2−1

1. 设物体绕定轴旋转, 在时间间隔[0, t]内转过的角度为θ, 从而转角θ是 t 的函数: $\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的, 那么称 $\omega=\frac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度, 如果旋转是非匀速的, 应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度?

解 在时间间隔[t_0, $t_0+\Delta t$]内的平均角速度 $\overline{\omega}$ 为

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t},$$

故 t_0 时刻的角速度为

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}=\theta'(t_0).$$

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却，若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度？

解 物体在时间间隔$[t_0, t_0+\Delta t]$内，温度的改变量为

$$\Delta T=T(t+\Delta t)-T(t),$$

平均冷却速度为

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t},$$

故物体在时刻 t 的冷却速度为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t).$$

3. 设某工厂生产 x 单位产品所花费的成本是$f(x)$元，此函数$f(x)$称为成本函数，成本函数$f(x)$的导数$f'(x)$在经济学中称为边际成本. 试说明边际成本$f'(x)$的实际意义.

解 $f(x+\Delta x)-f(x)$表示当产量由 x 改变到 $x+\Delta x$ 时成本的改变量.

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$表示当产量由 x 改变到 $x+\Delta x$ 时单位产量的成本.

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$表示当产量为 x 时单位产量的成本.

4. 设$f(x)=10x^2$，试按定义，求$f'(-1)$.

解 $$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10(-1+\Delta x)^2-10(-1)^2}{\Delta x}$$

$$=10\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=10\lim_{\Delta x\to 0}(-2+\Delta x)=-20.$$

5. 证明$(\cos x)'=-\sin x$.

解 $$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[-\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}]=-\sin x.$$

6. 下列各题中均假定$f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出A表示什么:

(1) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

解 $A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0).$$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，其中$f(0)=0$，且$f'(0)$存在;

解 $A=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=f'(0)$.

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

解 $A=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

$$=f'(x_0)-[-f'(x_0)]=2f'(x_0).$$

7. 求下列函数的导数:

(1)$y=x^4$;

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$;

(3)$y=x^{1.6}$;

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=\frac{1}{x^2}$;

(6) $y=x^3\sqrt[5]{x}$;

(7) $y=\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$;

解 (1)$y'=(x^4)'=4x^{4-1}=4x^3$.

(2) $y'=(\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

(3)$y'=(x^{1.6})'=1.6x^{1.6-1}=1.6x^{0.6}$.

(4) $y'=(\frac{1}{\sqrt{x}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y'=(\frac{1}{x^2})'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$.

(6) $y'=(x^3\sqrt[5]{x})'=(x^{\frac{16}{5}})'=\frac{16}{5}x^{\frac{16}{5}-1}=\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y'=(\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}})'=(x^{\frac{1}{6}})'=\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1}=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

8. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$(m). 求这物体在 $t=2$ 秒(s)时的速度.

解 $v=(s)'=3t^2$, $v|_{t=2}=12$(米/秒).

9. 如果$f(x)$为偶函数, 且$f(0)$存在, 证明$f(0)=0$.

证明 当$f(x)$为偶函数时,$f(-x)=f(x)$, 所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{-x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-f'(0),$$

从而有 $2f'(0)=0$, 即 $f'(0)=0$.

10. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率: $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\pi$.

解 因为 $y'=\cos x$, 所以斜率分别为

$$k_1=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ k_2=\cos\pi=-1.$$

11. 求曲线 $y=\cos x$ 上点$(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$处的切线方程和法线方程式.

解 $y'=-\sin x$, $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故在点$(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$处，切线方程为$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})$，

法线方程为$y-\frac{1}{2}=\frac{-2}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})$.

12. 求曲线$y=e^x$在点(0,1)处的切线方程.

解 $y'=e^x$, $y'|_{x=0}=1$，故在(0, 1)处的切线方程为

$y-1=1\cdot(x-0)$，即$y=x+1$.

13. 在抛物线$y=x^2$上取横坐标为$x_1=1$及$x_2=3$的两点，作过这两点的割线，问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

解 $y'=2x$，割线斜率为$k=\frac{y(3)-y(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4$.

令$2x=4$，得$x=2$.

因此抛物线$y=x^2$上点(2, 4)处的切线平行于这条割线.

14. 讨论下列函数在$x=0$处的连续性与可导性:

(1)$y=|\sin x|$;

(2) $y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

解 (1)因为

$$y(0)=0,\quad \lim_{x\to 0^-}y=\lim_{x\to 0^-}|\sin x|=\lim_{x\to 0^-}(-\sin x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}|\sin x|=\lim_{x\to 0^+}\sin x=0,$$

所以函数在$x=0$处连续.

又因为

$$y'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

而$y'_-(0)\neq y'_+(0)$， 所以函数在$x=0$处不可导.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$，又$y(0)=0$，所以函数在$x=0$处连续.

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

所以函数在点 $x=0$ 处可导，且 $y'(0)=0$.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a, b 应取什么值?

解 因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b,\ f(1)=a+b,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处连续，必须 $a+b=1$.

又因为当 $a+b=1$ 时

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处可导，必须 $a=2$，此时 $b=-1$.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在?

解 因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

而 $f'_-(0)\ne f'_+(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在.

17. 已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x & x\ge 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$ 时, $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$;

当 $x>0$ 时, $f(x)=x$, $f'(x)=1$;

因为 $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x}=1,$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x}=1\text{，所以 }f'(0)=1\text{，从而}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}.$$

18. 证明: 双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

解 由 $xy=a^2$ 得 $y=\frac{a^2}{x}$， $k=y'=-\frac{a^2}{x^2}$.

设(x_0, y_0)为曲线上任一点, 则过该点的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0).$$

令 $y=0$, 并注意 $x_0y_0=a^2$, 解得 $x=\frac{y_0x_0^2}{a^2}+x_0=2x_0$，为切线在 x 轴上的距.

令 $x=0$, 并注意 $x_0y_0=a^2$, 解得 $y=\frac{a^2}{x_0}+y_0=2y_0$，为切线在 y 轴上的距.

此切线与二坐标轴构成的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2|x_0y_0|=2a^2.$$

习题 2−2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

$$(\cot x)'=-\csc^2 x\text{；}\quad(\csc x)'=-\csc x\cot x\text{ .}$$

解 $(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})'=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

$$=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

$$(\csc x)'=(\frac{1}{\sin x})'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cdot\cot x.$$

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=\frac{4}{x^5}+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12$；

(2) $y=5x^3-2^x+3e^x$；

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$;

(4) $y=\sin x\cdot\cos x$;

(5) $y=x^2\ln x$;

(6) $y=3e^x\cos x$;

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

(8) $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$;

(9) $y=x^2\ln x\cos x$;

(10) $s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$;

解 (1) $y'=(\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{2}{x}+12)'=(4x^{-5}+7x^{-4}-2x^{-1}+12)'$

$=-20x^{-6}-28x^{-5}+2x^{-2}=-\dfrac{20}{x^6}-\dfrac{28}{x^5}+\dfrac{2}{x^2}$.

(2) $y'=(5x^3-2^x+3e^x)'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$.

(3) $y'=(2\tan x+\sec x-1)'=2\sec^2 x+\sec x\cdot\tan x=\sec x(2\sec x+\tan x)$.

(4) $y'=(\sin x\cdot\cos x)'=(\sin x)'\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)'$

$=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)=\cos 2x$.

(5) $y'=(x^2\ln x)'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$.

(6) $y'=(3e^x\cos x)'=3e^x\cdot\cos x+3e^x\cdot(-\sin x)=3e^x(\cos x-\sin x)$.

(7) $y'=(\dfrac{\ln x}{x})'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(8) $y'=(\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3)'=\dfrac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$.

(9) $y'=(x^2\ln x\cos x)'=2x\cdot\ln x\cos x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\cos x+x^2\ln x\cdot(-\sin x)$

$2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$.

(10) $s'=(\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t})'=\dfrac{\cos t(1+\cos t)-(1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y=\sin x-\cos x$，求 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$,求 $\frac{d\rho}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

(3) $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$和 $f'(2)$.

解 (1)$y'=\cos x+\sin x$,

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\ .$$

(2) $\frac{d\rho}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta$,

$$\frac{d\rho}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\frac{\pi}{2})\ .$$

(3) $f'(x)=\frac{3}{(5-x)^2}+\frac{2}{5}x$， $f'(0)=\frac{3}{25}$， $f'(2)=\frac{17}{15}$.

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. 求:

(1)该物体的速度 $v(t)$;

(2)该物体达到最高点的时刻.

解 (1)$v(t)=s'(t)=v_0-gt$.

(2)令 $v(t)=0$, 即 $v_0-gt=0$, 得 $t=\frac{v_0}{g}$, 这就是物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y'=2\cos x+2x$, $y'|_{x=0}=2$, 又当 $x=0$ 时, $y=0$, 所以所求的切线方程为

$$y=2x,$$

所求的法线方程为

$$y=-\frac{1}{2}x\text{，即 } x+2y=0.$$

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=(2x+5)^4$

(2) $y=\cos(4-3x)$;

(3) $y=e^{-3x^2}$;

(4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$;

(6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(7) $y=\tan(x^2)$;

(8) $y=\arctan(e^x)$;

(9) $y=(\arcsin x)^2$;

(10) $y=\ln\cos x$.

解 (1) $y'=4(2x+5)^{4-1}\cdot(2x+5)'=4(2x+5)^3\cdot 2=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=-\sin(4-3x)\cdot(4-3x)'=-\sin(4-3x)\cdot(-3)=3\sin(4-3x)$.

(3) $y'=e^{-3x^2}\cdot(-3x^2)'=e^{-3x^2}\cdot(-6x)=-6xe^{-3x^2}$.

(4) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=[(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]'=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(a^2-x^2)'$

$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(7) $y'=\sec^2(x^2)\cdot(x^2)'=2x\sec^2(x^2)$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot(e^x)'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

(9) $y'=2\arcsin x\cdot(\arcsin x)'=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x$.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(1-2x)$;

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;

(4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

(5) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

(6) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$;

(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;

(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(1-2x)'=\dfrac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y'=[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]'=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(1-x^2)'$

$=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $y'=(e^{-\frac{x}{2}})'\cos 3x+e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x)'=e^{-\frac{x}{2}}(-\dfrac{x}{2})'\cos 3x+e^{-\frac{x}{2}}(-\sin 3x)(3x)'$

$=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x-3e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$.

(4) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}(-\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(5) $y'=\dfrac{-\frac{1}{x}(1+\ln x)-(1-\ln x)\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

(6) $y'=\dfrac{\cos 2x\cdot 2\cdot x-\sin 2x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$.

(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot(x+\sqrt{a^2+x^2})'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot[1+\dfrac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(a^2+x^2)']$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot[1+\dfrac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(2x)]=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(9) $y'=\dfrac{1}{\sec x+\tan x}\cdot(\sec x+\tan x)'=\dfrac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=\sec x$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\csc x-\cot x}\cdot(\csc x-\cot x)'=\dfrac{-\csc x\cot x+\csc^2 x}{\csc x-\cot x}=\csc x$.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=(\arcsin\dfrac{x}{2})^2$;

(2) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$;

(3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

(4) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$;

(5) $y=\sin^n x\cos nx$;

(6) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$;

(7) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

(8) $y=\ln[\ln(\ln x)]$;

(9) $y\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

(10) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) $y'=2(\arcsin\dfrac{x}{2})\cdot(\arcsin\dfrac{x}{2})'$

$$=2(\arcsin\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot(\frac{x}{2})'$$

$$=2(\arcsin\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot\frac{1}{2}.$$

$$=\frac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$$

(2) $y'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot(\tan\dfrac{x}{2})'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot(\dfrac{x}{2})'$

$$=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\csc x.$$

(3) $y'=\sqrt{1+\ln^2 x}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot(1+\ln^2 x)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot(\ln x)'=\frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

(4) $y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot(\arctan\sqrt{x})'\quad=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'$

$$=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

(5) $y'=n\sin^{n-1}x\cdot(\sin x)'\cdot\cos nx+\sin^n x\cdot(-\sin nx)\cdot(nx)'$

$=n\sin^{n-1}x\cdot\cos x\cdot\cos nx+\sin^n x\cdot(-\sin nx)\cdot n$

$=n\sin^{n-1}x\cdot(\cos x\cdot\cos nx-\sin x\cdot\sin nx)=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

(6) $y'=\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}\cdot(\frac{x+1}{x-1})'=\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{1+x^2}$.

(7) $y'=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{(\arccos x)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\arccos x+\arcsin x}{(\arccos x)^2}$

$=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$.

(8) $y'=\frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot[\ln(\ln x)]'=\frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'$

$=\frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

(9) $y'=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$.

(10) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot(\frac{1-x}{1+x})'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

9. 设函数$f(x)$和$g(x)$可导，且$f^2(x)+g^2(x)\neq0$，试求函数$y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$的导数

.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[f^2(x)+g^2(x)]'$

$=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)]$

$$=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

10. 设 $f(x)$可导，求下列函数 y 的导数$\frac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解 (1) $y'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=f'(x^2)\cdot 2x=2x\cdot f'(x^2)$.

(2) $y'=f'(\sin^2 x)\cdot(\sin^2 x)'+f'(\cos^2 x)\cdot(\cos^2 x)'$

$=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x+f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)$

$=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

11. 求下列函数的导数:

(1) $y=\mathrm{ch}(\mathrm{sh}\, x)$;

(2) $y=\mathrm{sh}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}$;

(3) $y=\mathrm{th}(\ln x)$;

(4) $y=\mathrm{sh}^3 x+\mathrm{ch}^2 x$;

(5) $y=\mathrm{th}(1-x^2)$;

(6) $y=\mathrm{arch}(x^2+1)$;

(7) $y=\mathrm{arch}(e^{2x})$;

(8) $y=\arctan(\mathrm{th}\, x)$;

(9) $y=\ln \mathrm{ch} x+\frac{1}{2\mathrm{ch}^2 x}$;

(10) $y=\mathrm{ch}^2(\frac{x-1}{x+1})$

解 (1) $y'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\, x)\cdot(\mathrm{sh}\, x)'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\, x)\cdot\mathrm{ch}\, x$.

(2) $y'=\mathrm{ch}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}+\mathrm{sh}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}\cdot\mathrm{sh}\, x=e^{\mathrm{ch}\, x}(\mathrm{ch}\, x+\mathrm{sh}^2 x)$.

(3) $y'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x\cdot\mathrm{ch}^2(\ln x)}$.

(4) $y'=3\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}\, x+2\mathrm{ch}\, x\cdot\mathrm{sh}\, x=\mathrm{sh}\, x\cdot\mathrm{ch}\, x\cdot(3\mathrm{sh}\, x+2)$.

(5) $y'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(1-x^2)=\frac{-2x}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}$.

(6) $y'=\frac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)}}\cdot(x^2+1)'=\frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}\cdot(e^{2x})'=\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(\text{th}x)^2}\cdot(\text{th } x)'=\dfrac{1}{1+\text{th}^2x}\cdot\dfrac{1}{\text{ch}^2x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\text{sh}^2x}{\text{ch}^2x}}\cdot\dfrac{1}{\text{ch}^2x}$

$=\dfrac{1}{\text{ch}^2x+\text{sh}^2x}=\dfrac{1}{1+2\text{sh}^2x}$.

(9) $y'=\dfrac{1}{\text{ch } x}\cdot(\text{ch } x)'-\dfrac{1}{2\text{ch}^4x}\cdot(\text{ch}^2x)'$

$=\dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x}-\dfrac{1}{2\text{ch}^4x}\cdot 2\text{ch } x\cdot\text{sh}x$

$=\dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x}-\dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}^3x}=\dfrac{\text{sh } x\cdot\text{ch}^2x-\text{sh}x}{\text{ch}^3x}$

$=\dfrac{\text{sh } x\cdot(\text{ch}^2x-1)}{\text{ch}^3x}=\dfrac{\text{sh}^3x}{\text{ch}^3x}=\text{th}^3x$.

(10) $y'=2\text{ch}(\dfrac{x-1}{x+1})\cdot[\text{ch}(\dfrac{x-1}{x+1})]'=2\text{ch}(\dfrac{x-1}{x+1})\cdot\text{sh}(\dfrac{x-1}{x+1})\cdot(\dfrac{x-1}{x+1})'$

$=\text{sh}(2\cdot\dfrac{x-1}{x+1})\cdot\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}\text{sh}(2\cdot\dfrac{x-1}{x+1})$.

12. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$;

(2) $y=\sin^2x\cdot\sin(x^2)$;

(3) $y=(\arctan\dfrac{x}{2})^2$;

(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$;

(5) $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$;

(6) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$;

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;

(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(9) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;

(10) $y=\arcsin\frac{2t}{1+t^2}$.

解 (1) $y'=-e^{-x}(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2)$

$=e^{-x}(-x^2+4x-5)$.

(2) $y'=2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin(x^2)+\sin^2 x\cdot\cos(x^2)\cdot 2x$

$=\sin 2x\cdot\sin(x^2)+2x\cdot\sin^2 x\cdot\cos(x^2)$.

(3) $y'=2\arctan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{x^2+4}\arctan\frac{x}{2}$.

(4) $y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^n-\ln x\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

(5) $y'=\frac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$.

(6) $y'=\sec\frac{1}{x}\cdot(\cos\frac{1}{x})'=\sec\frac{1}{x}\cdot(-\sin\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$.

(7) $y'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot(-\sin^2\frac{1}{x})'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot(-2\sin\frac{1}{x})\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$

$=\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{2}{x}\cdot e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(8) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(x+\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$

$=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(9) $y'=\arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\arcsin\frac{x}{2}$.

(10) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}}\cdot(\frac{2t}{1+t^2})'=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+t^2)-2t\cdot(2t)}{(1+t^2)^2}$

$$=\frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}\cdot\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}.$$

习题 2−3

1. 求函数的二阶导数:

(1) $y=2x^2+\ln x$;

(2) $y=e^{2x-1}$;

(3) $y=x\cos x$;

(4) $y=e^{-t}\sin t$;

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(6) $y=\ln(1-x^2)$

(7) $y=\tan x$;

(8) $y=\frac{1}{x^3+1}$;

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(10) $y=\frac{e^x}{x}$;

(11) $y=xe^{x^2}$;

(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=4x+\frac{1}{x}$, $y''=4-\frac{1}{x^2}$.

(2) $y'=e^{2x-1}\cdot 2=2e^{2x-1}$, $y''=2e^{2x-1}\cdot 2=4e^{2x-1}$.

(3) $y=x\cos x$; $y'=\cos x-x\sin x$,

$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$.

(4) $y'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

$y''=-e^{-t}(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)=-2e^{-t}\cos t$.

(5) $y'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(6) $y'=\frac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2)'=-\frac{2x}{1-x^2}$,

$$y''=-\frac{2(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

(7) $y'=\sec^2 x$,

$$y''=2\sec x\cdot(\sec x)'=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x.$$

(8) $y'=\frac{-(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=-\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$,

$$y''=-\frac{6x\cdot(x^3+1)^2-3x^2\cdot 2(x^3+1)\cdot 3x}{(x^3+1)^4}=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

(9) $y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$,

$$y''=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

(10) $y'=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

$$y''=\frac{[e^x(x-1)+e^x]\cdot x^2-e^x(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y'=e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot(2x)=e^{x^2}(1+2x^2)$,

$$y''=e^{x^2}\cdot 2x\cdot(1+2x^2)+e^{x^2}\cdot 4x=2xe^{x^2}(3+2x^2).$$

(12) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y''=-\frac{1}{1+x^2}\cdot(\sqrt{1+x^2})'=-\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2})}=-\frac{x}{(1+x)^2\sqrt{1+x}}.$$

2. 设$f(x)=(x+10)^6$, $f'''(2)=?$

解 $f'(x)=6(x+10)^5$, $f''(x)=30(x+10)^4$, $f'''(x)=120(x+10)^3$,

$f'''(2)=120(2+10)^3=207360$.

3. 若$f''(x)$存在，求下列函数y的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=\ln[f(x)]$.

解 (1)$y'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$,

$y''=2f'(x^2)+2x\cdot 2xf''(x^2)=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$.

(2) $y'=\frac{1}{f(x)}f'(x)$,

$$y''=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2}=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

4. 试从$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$导出:

(1) $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$;

(2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$.

(2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$

$$=-\frac{y'''(y')^3-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为$s=A\sin\omega t$(A、ω是常数)，求物体运动的加速度，并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0.$$

解 $\frac{ds}{dt}=A\omega\cos\omega t$,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t.$$

$\frac{d^2s}{dt^2}$就是物体运动的加速度.

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=-A\omega^2\sin\omega t+\omega^2 A\sin\omega t=0.$$

6. 验证函数$y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$($\lambda, C_1, C_2$是常数)满足关系式:

$$y''-\lambda^2 y=0.$$

解 $y'=C_1\lambda e^{\lambda x}-C_2\lambda e^{-\lambda x}$,

$y''=C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x}$.

$$y''-\lambda^2 y=(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})-\lambda^2(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x})$$

$$=(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})-(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})=0.$$

7. 验证函数$y=e^x\sin x$满足关系式:

$$y''-2y'+2y=0.$$

解 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$,

$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$.

$$y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2e^x(\sin x+\cos x)+2e^x\sin x$$

$$=2e^x\cos x-2e^x\sin x-2e^x\cos x+2e^x\sin x=0.$$

8. 求下列函数的n阶导数的一般表达式:

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ($a_1, a_2, \cdots, a_n$都是常数);

(2) $y=\sin^2 x$;

(3) $y=x\ln x$;

(4) $y=xe^x$.

解 (1) $y'=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$,

$y''=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\cdots+a_{n-2}$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1x^0=n!$.

(2) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$,

$$y''=2\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{2}),$$

$$y'''=2^2\cos(2x+\frac{\pi}{2})=2^2\sin(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)}=2^3\cos(2x+2\cdot\frac{\pi}{2})=2^3\sin(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$\cdots,$

$$y^{(n)}=2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}].$$

(3) $y'=\ln x+1$,

$$y''=\frac{1}{x}=x^{-1},$$

$y'''=(-1)x^{-2}$,

$y^{(4)}=(-1)(-2)x^{-3}$,

$\cdots,$

$$y^{(n)}=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+2)x^{-n+1}=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

(4) $y'=e^x+xe^x$,

$y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$,

$y'''=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x$,

$\cdots,$

$y^{(n)}=ne^x+xe^x=e^x(n+x)$.

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(4)}$;

(2) $y=x\,\mathrm{sh}\,x$, 求 $y^{(100)}$;

(3) $y=x^2\sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 (1)令 $u=e^x$, $v=\cos x$, 有

$u'=u''=u'''=u^{(4)}=e^x$;

$v'=-\sin x$, $v''=-\cos x$, $v'''=\sin x$, $v^{(4)}=\cos x$,

所以 $y^{(4)}=u^{(4)}\cdot v+4u'''\cdot v'+6u''\cdot v''+4u'\cdot v'''+u\cdot v^{(4)}$

$=e^x[\cos x+4(-\sin x)+6(-\cos x)+4\sin x+\cos x]=-4e^x\cos x$.

(2)令 $u=x$, $v=\mathrm{sh}\,x$, 则有

$u'=1$, $u''=0$;

$v'=\mathrm{ch}\,x$, $v''=\mathrm{sh}\,x$, $\cdots$, $v^{(99)}=\mathrm{ch}\,x$, $v^{(100)}=\mathrm{sh}\,x$,

所以

$$y^{(100)}=u^{(100)}\cdot v+C_{100}^{1}u^{(99)}\cdot v'+C_{100}^{2}u^{(98)}\cdot v''+\cdots C_{100}^{98}u''\cdot v^{(98)}+C_{100}^{99}u'\cdot v^{(99)}+u\cdot v^{(100)}$$

$$=100\text{ch } x+x\text{sh } x.$$

(3)令 $u=x^2$, $v=\sin 2x$, 则有

$u'=2x$, $u''=2$, $u'''=0$;

$$v^{(48)}=2^{48}\sin(2x+48\cdot\frac{\pi}{2})=2^{48}\sin 2x,$$

$v^{(49)}=2^{49}\cos 2x$, $v^{(50)}=-2^{50}\sin 2x$,

所以 $$y^{(50)}=u^{(50)}\cdot v+C_{150}^{1}u^{(49)}\cdot v'+C_{50}^{2}u^{(48)}\cdot v''+\cdots C_{50}^{48}u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49}u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$$

$$=C_{50}^{48}u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49}u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$$

$$=\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{28}\sin 2x+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cos 2x+x^2\cdot(-2^{50}\sin 2x)$$

$$=2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x).$$

习题 2−3

1. 求函数的二阶导数:

(1) $y=2x^2+\ln x$;

(2) $y=e^{2x-1}$;

(3) $y=x\cos x$;

(4) $y=e^{-t}\sin t$;

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(6) $y=\ln(1-x^2)$

(7) $y=\tan x$;

(8) $y=\frac{1}{x^3+1}$;

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(10) $y=\frac{e^x}{x}$;

(11) $y=xe^{x^2}$;

(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=4x+\dfrac{1}{x}$, $y''=4-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=e^{2x-1}\cdot 2=2e^{2x-1}$, $y''=2e^{2x-1}\cdot 2=4e^{2x-1}$.

(3) $y=x\cos x$; $y'=\cos x-x\sin x$,

$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$.

(4) $y'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

$y''=-e^{-t}(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)=-2e^{-t}\cos t$.

(5) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(6) $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2)'=-\dfrac{2x}{1-x^2}$,

$$y''=-\frac{2(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

(7) $y'=\sec^2 x$,

$y''=2\sec x\cdot(\sec x)'=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x$.

(8) $y'=\dfrac{-(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$,

$$y''=-\frac{6x\cdot(x^3+1)^2-3x^2\cdot 2(x^3+1)\cdot 3x}{(x^3+1)^4}=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

(9) $y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$,

$y''=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(10) $y'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$,

$$y''=\frac{[e^x(x-1)+e^x]\cdot x^2-e^x(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y'=e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot(2x)=e^{x^2}(1+2x^2)$,

$$y''=e^{x^2}\cdot 2x\cdot(1+2x^2)+e^{x^2}\cdot 4x=2xe^{x^2}(3+2x^2).$$

(12) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y''=-\frac{1}{1+x^2}\cdot(\sqrt{1+x^2}\cdot)'=-\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2)}}=-\frac{x}{(1+x)^2\sqrt{1+x}}.$$

2. 设$f(x)=(x+10)^6$, $f'''(2)=?$

解 $f'(x)=6(x+10)^5$, $f''(x)=30(x+10)^4$, $f'''(x)=120(x+10)^3$,

$f'''(2)=120(2+10)^3=207360$.

3. 若$f''(x)$存在, 求下列函数y的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=\ln[f(x)]$.

解 (1)$y'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$,

$y''=2f'(x^2)+2x\cdot 2xf''(x^2)=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$.

(2) $y'=\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$,

$$y''=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2}=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

4. 试从$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$导出:

(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$;

(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y'}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\cdot\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

(2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$

$$=-\frac{y'''(y')^3-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$(A、ω是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0.$$

解 $\frac{ds}{dt}=A\omega\cos\omega t$,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t.$$

$\frac{d^2s}{dt^2}$就是物体运动的加速度.

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=-A\omega^2\sin\omega t+\omega^2 A\sin\omega t=0.$$

6. 验证函数 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$($\lambda, C_1, C_2$ 是常数)满足关系式:

$$y''-\lambda^2 y=0.$$

解 $y'=C_1\lambda e^{\lambda x}-C_2\lambda e^{-\lambda x}$,

$y''=C_1\lambda^2e^{\lambda x}+C_2\lambda^2e^{-\lambda x}$.

$y''-\lambda^2 y=(C_1\lambda^2e^{\lambda x}+C_2\lambda^2e^{-\lambda x})-\lambda^2(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x})$

$=(C_1\lambda^2e^{\lambda x}+C_2\lambda^2e^{-\lambda x})-(C_1\lambda^2e^{\lambda x}+C_2\lambda^2e^{-\lambda x})=0$.

7. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式:

$$y''-2y'+2y=0.$$

解 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$,

$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$.

$y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2e^x(\sin x+\cos x)+2e^x\sin x$

$=2e^x\cos x-2e^x\sin x-2e^x\cos x+2e^x\sin x=0$.

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ($a_1, a_2, \cdots, a_n$都是常数);

(2) $y=\sin^2 x$;

(3) $y=x\ln x$;

(4) $y=xe^x$.

解 (1) $y'=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$,

$y''=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\cdots+a_{n-2}$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1x^0=n!$.

(2) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$,

$$y''=2\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{2}),$$

$$y'''=2^2\cos(2x+\frac{\pi}{2})=2^2\sin(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)}=2^3\cos(2x+2\cdot\frac{\pi}{2})=2^3\sin(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$\cdots$,

$$y^{(n)}=2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}].$$

(3) $y'=\ln x+1$,

$$y''=\frac{1}{x}=x^{-1},$$

$y'''=(-1)x^{-2}$,

$y^{(4)}=(-1)(-2)x^{-3}$,

$\cdots$,

$$y^{(n)}=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+2)x^{-n+1}=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

(4) $y'=e^x+xe^x$,

$y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$,

$y'''=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=ne^x+xe^x=e^x(n+x)$.

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(4)}$;

(2) $y=x\operatorname{sh} x$, 求 $y^{(100)}$;

(3) $y=x^2\sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 (1)令 $u=e^x$, $v=\cos x$，有

$u'=u''=u'''=u^{(4)}=e^x$;

$v'=-\sin x$, $v''=-\cos x$, $v'''=\sin x$, $v^{(4)}=\cos x$,

所以 $y^{(4)}=u^{(4)}\cdot v+4u'''\cdot v'+6u''\cdot v''+4u'\cdot v'''+u\cdot v^{(4)}$

$=e^x[\cos x+4(-\sin x)+6(-\cos x)+4\sin x+\cos x]=-4e^x\cos x$.

(2)令 $u=x$, $v=\text{sh } x$, 则有

$u'=1$, $u''=0$;

$v'=\text{ch } x$, $v''=\text{sh } x$, $\cdots$, $v^{(99)}=\text{ch } x$, $v^{(100)}=\text{sh } x$,

所以

$$y^{(100)}=u^{(100)}\cdot v+C_{100}^{1}u^{(99)}\cdot v'+C_{100}^{2}u^{(98)}\cdot v''+\cdots C_{100}^{98}u''\cdot v^{(98)}+C_{100}^{99}u'\cdot v^{(99)}+u\cdot v^{(100)}$$

$$=100\text{ch } x+x\text{sh } x.$$

(3)令 $u=x^2$, $v=\sin 2x$, 则有

$u'=2x$, $u''=2$, $u'''=0$;

$$v^{(48)}=2^{48}\sin(2x+48\cdot\frac{\pi}{2})=2^{48}\sin 2x,$$

$v^{(49)}=2^{49}\cos 2x$, $v^{(50)}=-2^{50}\sin 2x$,

所以 $$y^{(50)}=u^{(50)}\cdot v+C_{150}^{1}u^{(49)}\cdot v'+C_{50}^{2}u^{(48)}\cdot v''+\cdots C_{50}^{48}u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49}u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$$

$$=C_{50}^{48}u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49}u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$$

$$=\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{28}\sin 2x+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cos 2x+x^2\cdot(-2^{50}\sin 2x)$$

$$=2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x).$$

习题 2−4

1. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2-2xy+9=0$;
(2) $x^3+y^3-3axy=0$;
(3) $xy=e^{x+y}$;
(4) $y=1-xe^y$.

解 (1)方程两边求导数得

$$2yy'-2y-2xy'=0,$$

于是 $$(y-x)y'=y,$$

$$y'=\frac{y}{y-x}.$$

(2)方程两边求导数得

$$3x^2+3y^2y'-2ay-3axy'=0,$$

于是 $$(y^2-ax)y'=ay-x^2,$$

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

(3)方程两边求导数得

$$y+xy'=e^{x+y}(1+y'),$$

于是 $$(x-e^{x+y})y'=e^{x+y}-y,$$

$$y'=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}.$$

(4)方程两边求导数得

$$y'=-e^y-xe^yy',$$

于是 $$(1+xe^y)y'=-e^y,$$

$$y'=-\frac{e^y}{1+xe^y}.$$

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程.

解 方程两边求导数得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,$$

于是 $$y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}},$$

在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处 $y'=-1$.

所求切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a), \text{ 即 } x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

所求法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a), \text{ 即 } x-y=0.$$

3. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2-y^2=1$;

(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

(3) $y=\tan(x+y)$;

(4) $y=1+xe^y$.

解 (1)方程两边求导数得

$$2x-2yy'=0,$$

$$y'=\frac{x}{y},$$

$$y''=(\frac{x}{y})'=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{y-x\frac{x}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

(2)方程两边求导数得

$$2b^2x+2a^2yy'=0,$$

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y})}{y^2}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(3)方程两边求导数得

$$y'=\sec^2(x+y)\cdot(1+y'),$$

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=\frac{1}{\cos^2(x+y)-1}$$

$$=\frac{\sin^2(x+y)+\cos^2(x+y)}{-\sin^2(x+y)}=-1-\frac{1}{y^2},$$

$$y''=\frac{2}{y^3}y'=\frac{2}{y^3}(-1-\frac{1}{y^2})=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

(4)方程两边求导数得

$$y'=e^y+xe^yy',$$

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{1-(y-1)}=\frac{e^y}{2-y},$$

$$y''=\frac{e^y y'(2-y)-e^y(-y')}{(2-y)^2}=\frac{e^y(3-y)y'}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=(\frac{x}{1+x})^x$;

(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$;

(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解 (1)两边取对数得

$$\ln y=x\ln|x|-x\ln|1+x|,$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-\ln(1+x)-x\cdot\frac{1}{1+x},$$

于是 $$y'=(\frac{x}{1+x})^x[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}].$$

(2)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{5}\ln|x-5|-\frac{1}{25}\ln(x^2+2),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{25}\cdot\frac{2x}{x^2+2},$$

于是 $$y'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}=[\frac{1}{x-5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{x^2+2}].$$

(3)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1},$$

于是 $$y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}[\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}]$$

(4)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x+\frac{1}{4}\ln(1-e^x),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{e^x}{4(1-e^x)},$$

于是 $$y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{e^x}{4(1-e^x)}]$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac{2}{x}+2\cot x+\frac{e^x}{e^x-1}].$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^2\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\ y=\theta\cos\theta\end{cases}$.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3bt^2}{2at}=\frac{3b}{2a}t$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

6. 已知 $\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t.\end{cases}$ 求当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$,

当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$, 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处;

(2) $\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^2}\\ y=\frac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$, 在 $t=2$ 处.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}$.

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{2}$, $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_0=0$,

所求切线方程为

$$y=-2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}),\text{ 即 }2\sqrt{2}x+y-2=0;$$

所求法线方程为

$$y=-\frac{1}{-2\sqrt{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}),\text{ 即 }\sqrt{2}x-4y-1=0.$$

(2) $y'_t=\frac{6at(1+t^2)-3at^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{6at}{(1+t^2)^2}$,

$$x'_t=\frac{3a(1+t^2)-3at\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{3a-3at^2}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{6at}{3a-3at^2}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

当 $t=2$ 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$, $x_0=\frac{6}{5}a$, $y_0=\frac{12}{5}a$,

所求切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}(x-\frac{6}{5}a),\text{ 即 }4x+3y-12a=0;$$

所求法线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}(x-\frac{6}{5}a),\text{ 即 }3x-4y+6a=0.$$

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\ y=1-t.\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}x=3e^{-t}\\ y=2e^{t}\end{cases}$;

(4) $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$, 设 $f''(t)$存在且不为零.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-1}{t}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{t^2}}{t}=\frac{1}{t^3}$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\frac{2}{3}e^{2t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{2}{3}\cdot 2e^{2t}}{-3e^{-t}}=\frac{4}{9}e^{3t}.$$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{1}{f''(t)}.$$

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\frac{d^3y}{dx^3}$:

(1) $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$.

解(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{(t-t^3)'}{(1-t^2)'}=\frac{1-3t^2}{-2t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{1-3t^2}{-2t})'}{-2t}=-\frac{1}{4}(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{1}{4}(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t})'}{-2t}=-\frac{3}{8t^5}(1+t^2).$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2}t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{1}{2}t)'}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(\frac{1+t^2}{4t})'}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头, 产生同心波纹, 若最外一圈波半径的增大率总是 6m/s, 问在 2 秒末扰动水面面积的增大率为多少?

解 设波的半径为 r, 对应圆面积为 S, 则 $S=\pi r^2$, 两边同时对 t 求导得

$$S'_t=2\pi rr'.$$

当 $t=2$ 时, $r=6\cdot 2=12$, $r'_t=6$,

故 $S'_t|_{t=2}=2\cdot 12\cdot 6\pi=144\pi$ (米^2/秒).

11. 注水入深 8m 上顶直径 8m 的正圆锥形容器中, 其速率为 4m^2/min . 当水深为 5m 时, 其表面上升的速度为多少?

解 水深为 h 时, 水面半径为 $r=\frac{1}{2}h$, 水面面积为 $S=\frac{1}{4}h^2\pi$,

水的体积为 $V=\frac{1}{3}hS=\frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{4}h^2\pi=\frac{\pi}{12}h^3$,

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt}, \quad \frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}.$$

已知 $h=5$(m), $\frac{dV}{dt}=4$ (m^3/min), 因此 $\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{4}{25\pi}\cdot 4=\frac{16}{25\pi}$ (m/min).

12. 溶液自深 18cm 直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中, 开始时漏斗中盛满了溶液, 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其表面下降的速率为 1cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 设在 t 时刻漏斗在的水深为 y, 圆柱形筒中水深为 h. 于是有

$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3}\pi r^2y=5^2h.$$

由 $\frac{r}{6}=\frac{y}{18}$, 得 $r=\frac{y}{3}$, 代入上式得

$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3}\pi(\frac{y}{3})^2y=5^2h,$$

即 $$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3^3}y^3=5^2h.$$

两边对 t 求导得

$$-\frac{1}{3^2}y^2y'_t=5^2h'.$$

当 $y=12$ 时, $y'_t=-1$ 代入上式得

$$h'_t=\frac{-\frac{1}{3^2}\cdot 12^2\cdot(-1)}{5^2}=\frac{16}{25}\approx 0.64\ (\text{cm/min})..$$

2−7

1. 已知 $y=x^3-x$, 计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的 Δy 及 dy.

解 $\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=1}=[(2+1)^3-(2+1)]-(2^3-2)=18$,

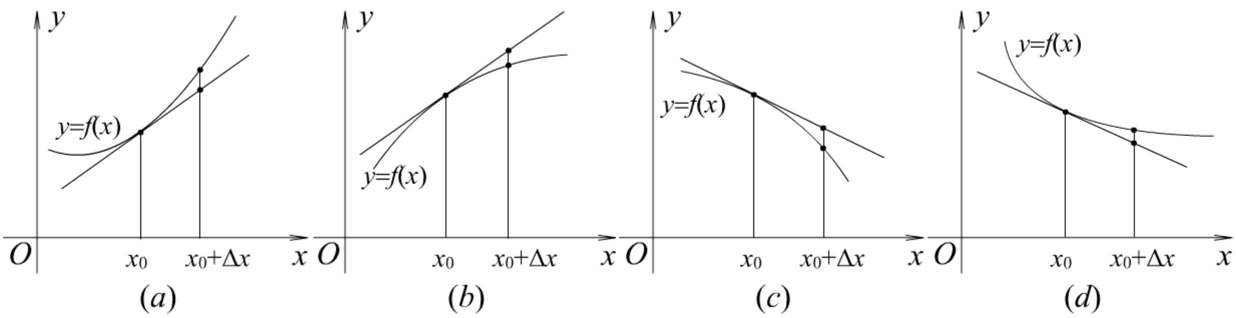
$dy|_{x=2,\ \Delta x=1}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=1}=11$;

$\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=[(2+0.1)^3-(2+0.1)]-(2^3-2)=1.161$,

$dy|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=1.1$;

$\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=[(2+0.01)^3-(2+0.01)]-(2^3-2)=0.110601$,

$dy|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=0.11$.



2. 设函数 $y=f(x)$的图形如图所示, 试在图(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 dy、Δy 及$\Delta y-\mathrm{d}y$ 并说明其正负.

解 $(a)\Delta y>0,\ dy>0,\ \Delta y-dy>0$.

$(b)\Delta y>0,\ dy>0,\ \Delta y-dy<0$.

$(c)\Delta y<0,\ dy<0,\ \Delta y-dy<0$.

$(d)\Delta y<0,\ dy<0,\ \Delta y-dy>0$.

3. 求下列函数的微分:

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$;

(2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(4) $y=\ln^2(1-x)$;

(5) $y=x^2e^{2x}$;

(6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A, ω, φ是常数).

解 (1)因为 $y'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $dy=(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}})dx$.

(2)因为 $y'=\sin2x+2x\cos2x$, 所以 $dy=(\sin2x+2x\cos2x)dx$.

(3)因为 $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, 所以 $dy=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

(4) $dy=y'dx=[\ln^2(1-x)]'dx=[2\ln(1-x)\cdot\dfrac{-1}{(1-x)}]dx=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)dx$.

(5) $dy=y'dx=(x^2e^{2x})'dx=(2xe^{2x}+2x^2e^{2x})dx=2x(1+x)e^{2x}$.

(6) $dy=y'dx=[e^{-x}\cos(3-x)]dx=[-e^{-x}\cos(3-x)+e^{-x}\sin(3-x)]dx$

$=e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$.

(7) $dy=y'dx=(\arcsin\sqrt{1-x^2})'dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot(-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx=-\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx$.

(8) $dy=d\tan^2(1+2x^2)=2\tan(1+2x^2)d\tan(1+2x^2)$

$=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)d(1+2x^2)$

$=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4xdx$

$=8x\cdot\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)dx$.

(9) $dy = d\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}d(\frac{1-x^2}{1+x^2})$

$$=\frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{4x}{1+x^4}dx.$$

(10) $dy = d[A\sin(\omega t+\varphi)] = A\cos(\omega t+\varphi)d(\omega t+\varphi) = A\omega\cos(\omega t+\varphi)dx$.

4. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立:

(1) $d(\quad\quad)=2dx$;

(2) $d(\quad\quad)=3xdx$;

(3) $d(\quad\quad)=\cos tdt$;

(4) $d(\quad\quad)=\sin\omega xdx$;

(5) $d(\quad\quad)=\frac{1}{x+1}dx$;

(6) $d(\quad\quad)=e^{-2x}dx$;

(7) $d(\quad\quad)=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

(8) $d(\quad\quad)=\sec^2 3xdx$.

解 (1) $d(2x+C)=2dx$.

(2) $d(\frac{3}{2}x^2+C)=3xdx$.

(3) $d(\sin t+C)=\cos tdt$.

(4) $d(-\frac{1}{\omega}\cos\omega x+C)=\sin\omega xdx$.

(5) $d(\ln(1+x)+C)=\frac{1}{x+1}dx$.

(6) $d(-\frac{1}{2}e^{-2x}+C)=e^{-2x}dx$.

(7) $d(2\sqrt{x}+C)=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

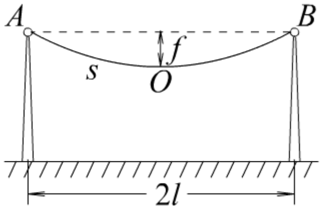
(8) $d(\frac{1}{3}\tan 3x+C)=\sec^2 3xdx$.

5. 如图所示的电缆 $\widehat{AOB}$ 的长为 s，跨度为 $2l$，电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB

的距离为f, 则电缆长可按下面公式计算:

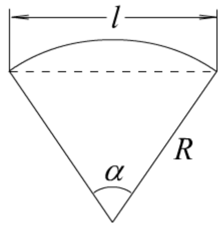
$$s=2l(1+\frac{2f^2}{3l^2}),$$

当f变化了Δf时, 电缆长的变化约为多少?



解 $\Delta S\approx dS=2l(1+\frac{2f^2}{3l^2})'df=\frac{8}{3l}f\Delta f$.

6. 设扇形的圆心角$\alpha=60°$, 半径$R=100$cm(如图), 如果R不变, α 减少$30'$, 问扇形面积大约改变了多少? 又如果α 不变, R增加1cm, 问扇形面积大约改变了多少?



解 (1)扇形面积$S=\frac{1}{2}\alpha R^2$,

$$\Delta S\approx dS=(\frac{1}{2}\alpha R^2)'_\alpha d\alpha=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha.$$

将$\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$, $R=100$, $\Delta\alpha=-30'=-\frac{\pi}{360}$ 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot(-\frac{\pi}{360})\approx -43.63\,(\text{cm}^2).$$

(2) $\Delta S\approx dS=(\frac{1}{2}\alpha R^2)'_R dR=\alpha R\Delta R$.

将α=60°=$\frac{\pi}{3}$, R=100, ΔR=1 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{\pi}{3}\cdot 100\cdot 1\approx 104.72\,(\text{cm}^2).$$

7. 计算下列三角函数值的近似值:

(1) cos29°;

(2) tan136°.

解 (1)已知$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当$f(x)=\cos x$时, 有$\cos(x+\Delta x)\approx\cos x-\sin x\cdot\Delta x$, 所以

$$\cos 29^\circ=\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180})\approx\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot(-\frac{\pi}{180})=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.87467\,.$$

(2)已知$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当$f(x)=\tan x$时, 有$\tan(x+\Delta x)\approx\tan x+\sec^2 x\cdot\Delta x$, 所以

$$\tan 136^\circ=\tan(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{180})\approx\tan\frac{3\pi}{4}+\sec^2\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=-1+2\cdot\frac{\pi}{180}\approx -0.96509\,.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值

(1) arcsin0.5002;

(2) arccos 0.4995.

解 (1)已知$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当$f(x)=\arcsin x$时, 有

$$\arcsin(x+\Delta x)\approx\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\Delta x,$$

所以

$$\arcsin 0.5002=\arcsin(0.5+0.0002)\approx\arcsin 0.5+\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot 0.0002$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0.0002\approx 30^\circ 47''.$$

(2)已知$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当$f(x)=\arccos x$时, 有

$$\arccos(x+\Delta x)\approx\arccos x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\Delta x,$$

所以

$$\arccos 0.4995=\arccos(0.5-0.0005)\approx\arccos 0.5-\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot(-0.0005)$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0.0005\approx 60°2'.$$

9. 当$|x|$较小时，证明下列近似公式:

(1) $\tan x\approx x$ (x是角的弧度值);

(2) $\ln(1+x)\approx x$;

(3) $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$,

并计算 tan45′ 和 ln1.002 的近似值.

(1)已知当$|\Delta x|$较小时,$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取$f(x)=\tan x$, $x_0=0$, $\Delta x=x$, 则有

$$\tan x=\tan(0+x)\approx\tan 0+\sec^2 0\cdot x=\sec^2 0\cdot x=x.$$

(2)已知当$|\Delta x|$较小时,$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取$f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $\Delta x=x$, 则有

$$\ln(1+x)\approx\ln 1+(\ln x)'|_{x=1}\cdot x=x.$$

(3)已知当$|\Delta x|$较小时,$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取$f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=x$, 则有

$$\frac{1}{1+x}\approx 1+(\frac{1}{x})'|_{x=1}\cdot x=1-x.$$

$\tan 45'\approx 45'\approx 0.01309$;

$\ln(1.002)=\ln(1+0.002)\approx 0.002$.

10. 计算下列各根式的的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$;

(2) $\sqrt[6]{65}$.

解 (1)设$f(x)=\sqrt[n]{x}$, 则当$|x|$较小时, 有$f(1+x)\approx f(1)+f'(1)x=1+\frac{1}{n}x$,

$$\sqrt[3]{996}=\sqrt[3]{1000-4}=10\cdot\sqrt[3]{1-\frac{4}{1000}}\approx 10(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1000})\approx 9.987.$$

(2)设$f(x)=\sqrt[n]{x}$, 则当$|x|$较小时, 有$f(1+x)\approx f(1)+f'(1)x=1+\frac{1}{n}x$, 于是

$$\sqrt[6]{65}=\sqrt[6]{64+1}=2\cdot\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}}\approx 2(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64})\approx 2.0052.$$

11. 计算球体体积时，要求精确度在2%以内，问这时测量直径D的相对误差不能超过多少？

解 球的体积为$V=\frac{1}{6}\pi D^3$，$dV=\frac{1}{2}\pi D^2\cdot\Delta D$，因为计算球体体积时，要求精度在2%以内，所以其相对误差不超过 2%，即要求

$$\left|\frac{dV}{V}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}\pi D^2\cdot\Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right|=3\cdot\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\le 2\%,$$

所以 $\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\le\frac{2}{3}\%$，

也就是测量直径的相对误差不能超过$\frac{2}{3}\%$.

12. 某厂生产如图所示的扇形板，半径 R=200mm，要求中心角α为 55°. 产品检验时，一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角α，如果测量弦长 l 时的误差δ_l=0.1mm，问此而引起的中心角测量误差δ_x是多少？

解 由$\frac{l}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$得$\alpha=2\arcsin\frac{l}{2R}=2\arcsin\frac{l}{400}$，

当α=55°时，$l=2R\sin\frac{\alpha}{2}=400\sin 27.5°\approx 184.7$，

$$\delta'\alpha=|\alpha'|\cdot\delta_l=\left|2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{l}{400})^2}}\cdot\frac{1}{400}\right|\cdot\delta_l.$$

当 l=184.7，δ_l=0.1 时，

$$\delta_\alpha=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{184.7}{400})^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot 0.1\approx 0.00056\,(\text{弧度}).$$

总 习 题 二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)$f(x)$在点 x_0 可导是$f(x)$在点 x_0 连续的____________条件. $f(x)$在点 x_0 连续是$f(x)$在点 x_0 可导的____________条件.

(2) $f(x)$在点 x_0 的左导数$f_-'(x_0)$及右导数$f_+'(x_0)$都存在且相等是$f(x)$在点 x_0 可导的_______条件.

(3) $f(x)$在点 x_0 可导是$f(x)$在点 x_0 可微的____________条件.

解 (1)充分，必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设$f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则$f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 (　　).

$(A)\ \lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$存在; $(B)\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在;

$(C)\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在; $(D)\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

解 正确结论是 D.

提示: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\Delta x=-h)$.

3. 设有一根细棒, 取棒的一端作为原点, 棒上任一点的做标x为, 于是分布在区间$[0, x]$上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$,应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说, 单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 $\Delta m=m(x_0+\Delta x)-m(x_0)$.

在区间$[x_0, x_0+\Delta x]$上的平均线密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}.$$

于是, 在点 x_0 处的线密度为

$$\rho=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=m'(x_0).$$

4. 根据导数的定义, 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}.$$

5. 求下列函数$f(x)$的$f_-'(0)$及$f_+'(0)$,又$f'(0)$是否存在?

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ \ln(1+x) & x\geq 0\end{cases}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

解 (1)因为 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x}=1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$

而且 $f'_-(0)=f'_+(0)$，所以 $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=1$.

(2)因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

而 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在.

6. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解　因为 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y=\sqrt[x]{x}\ (x>0)$.

解(1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2) $y'=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot(\frac{1+x}{1-x})'=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$.

(3) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot(\tan\frac{x}{2})'+\sin x\cdot\ln\tan x-\cos x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)'$

$\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sin x\cdot\ln\tan x-\cos x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4) $y'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot(e^x+\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}})=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5) $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$, $\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$, $y'=\sqrt[x]{x}(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2})=\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$.

8. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\cos^2 x\cdot\ln x$;

(2) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) $y'=-2\cos x\sin x\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x}=-\sin 2x\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x}$,

$$y''=-2\cos 2x\cdot\ln x-\sin 2x\cdot\frac{1}{x}-2\cos x\sin x\cdot\frac{1}{x}-\cos^2 x\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

(2) $y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$y''=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

9. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$;

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 (1) $y=\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}$,

$$y'=\frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1},\quad y''=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(1+x)^{\frac{1}{m}-2},\quad y'''=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)(1+x)^{\frac{1}{m}-3},\cdots,$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)\cdots(\frac{1}{m}-n+1)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}=-1+2(1+x)^{-1}$,

$$y'=2(-1)(1+x)^{-2}, y''=2(-1)(-2)(1+x)^{-3}, y'''=2(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4},\cdots,$$

$$y^{(n)}=2(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}=\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

10. 设函数 $y=y(x)$由方程 $e^y+xy=e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

解 方程两边求导得

$$e^y y'+y+xy'=0, \qquad \text{—— (1)}$$

于是 $$y'=-\frac{y}{x+e^y};$$

$$y''=(-\frac{y}{x+e^y})'=-\frac{y'(x+e^y)-y(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}. \quad \text{——(2)}$$

当 $x=0$ 时, 由原方程得 $y(0)=1$, 由(1)式得 $y'(0)=-\dfrac{1}{e}$, 由(2)式得 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{(a\sin^3\theta)'}{(a\cos^3\theta)'}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-\tan\theta)'}{(a\cos^3\theta)'}=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\cdot\csc\theta.$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{(\arctan t)'}{[\ln\sqrt{1+t^2}]'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{1}{t})'}{[\ln\sqrt{1+t^2}]'}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

12. 求曲线 $\begin{cases} x=2e^t \\ y=e^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相的点处的切线方程及法线方程.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{(e^{-t})'}{(2e^t)'}=\frac{-e^{-t}}{2e^t}=-\frac{1}{2e^{2t}}$.

当 $t=0$ 时, $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$, $x=2$, $y=1$.

所求切线的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-4=0$;

所求法线的方程为 $y-1=2(x-2)$.

13. 甲船以 6km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8km/h 的速率向南行驶, 在中午十二点正, 乙船位于甲船之北 16km 处. 问下午一点正两船相离的速率为多少?

解 设从中午十二点开始, 经过 t 小时, 两船之间的距离为 S, 则有

$S^2=(16-8t)^2+(6t)^2$,

$2S\frac{dS}{dt}=-16(16-8t)+72t$,

$$\frac{dS}{dt}=\frac{-16(16-8t)+72t}{2S}.$$

当 $t=1$ 时, $S=10$,

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=1}=\frac{-128+72}{20}=-2.8\ (\text{km/h}),$$

即下午一点正两船相离的速度为-2.8km/h .

14. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则有 $f(1+\Delta x)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{3}\Delta x$, 或 $f(1+\Delta x)\approx 1+\frac{1}{3}\Delta x$ 于是

$$\sqrt[3]{1.02}=\sqrt[3]{1+0.02}=1+\frac{1}{3}\cdot 0.02=1.007.$$

15. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 $g=980$ cm/s^2, l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20cm, 为使周期 T 增大 0.05s, 摆长约需加长多少?

解 因为 $\Delta T\approx dT=\frac{\pi}{\sqrt{gL}}\cdot\Delta L$,

所以 $\Delta L\approx\left.\frac{0.05\sqrt{gL}}{\pi}\right|_{L=20}=2.23\ (\text{cm})$,

即摆长约需加长 2.23cm.

习题 3−1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上的正确性.

解 因为 $y=\ln\sin x$ 在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上连续, 在$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$内可导, 且 $y(\frac{\pi}{6})=y(\frac{5\pi}{6})$, 所以由罗尔定理知, 至少存在一点$\xi\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$, 使得 $y'(\xi)=\cot\xi=0$.

由 $y'(x)=\cot x=0$ 得 $\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$.

因此确有 $\xi=\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$, 使 $y'(\xi)=\cot\xi=0$.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0, 1]$上的正确性.

解 因为 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0, 1]$上连续, 在$(0, 1)$内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点$\xi\in(0, 1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}=0$.

由 $y'(x)=12x^2-10x+1=0$ 得 $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$.

因此确有 $\xi=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}$.

3. 对函数$f(x)=\sin x$及$F(x)=x+\cos x$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上验证柯西中值定理的正确性.

解 因为$f(x)=\sin x$及$F(x)=x+\cos x$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，在$(0,\frac{\pi}{2})$可导，且$F'(x)=1-\sin x$在$(0,\frac{\pi}{2})$内不为0，所以由柯西中值定理知至少存在一点$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

令$\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}$，即$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{2}{\pi-2}$.

化简得$\sin x=\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1$. 易证$0<\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1<1$，所以$\sin x=\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1$在$(0,\frac{\pi}{2})$内有解，即确实存在$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

4. 试证明对函数$y=px^2+qx+r$应用拉格朗日中值定理时所求得的点ξ总是位于区间的正中间.

证明 因为函数$y=px^2+qx+r$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，由拉格朗日中值定理，至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得$y(b)-y(a)=y'(\xi)(b-a)$，即

$$(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)=(2p\xi+q)(b-a).$$

化间上式得

$$p(b-a)(b+a)=2p\xi(b-a),$$

故$\xi=\frac{a+b}{2}$.

5. 不用求出函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数，说明方程$f'(x)=0$有几个实根，并指出它们所在的区间.

解 由于$f(x)$在$[1, 2]$上连续，在$(1, 2)$内可导，且$f(1)=f(2)=0$，所以由罗尔定理可知，存在$\xi_1\in(1, 2)$，使$f'(\xi_1)=0$. 同理存在$\xi_2\in(2, 3)$，使$f'(\xi_2)=0$；存在$\xi_3\in(3, 4)$，使$f'(\xi_3)=0$. 显然ξ_1、ξ_2、ξ_3都是方程$f'(x)=0$的根. 注意到方程$f'(x)=0$是三次方程，它至多能有三个实根，现已发现它的三个实根，故它们也就是方程$f'(x)=0$的全部根.

6. 证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\leq x\leq 1)$.

证明 设$f(x)=\arcsin x+\arccos x$. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,$$

所以$f(x)\equiv C$，其中C是一常数.

因此$f(x)=f(0)=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，即$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

7. 若方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$有一个正根$x_0$，证明方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于x_0的正根.

证明 设$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$，由于$F(x)$在$[0, x_0]$上连续，在$(0, x_0)$内可导，且$F(0)=F(x_0)=0$，根据罗尔定理，至少存在一点$\xi\in(0, x_0)$，使$F'(\xi)=0$，即方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于x_0的正根.

8. 若函数$f(x)$在(a, b)内具有二阶导数，且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中$a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：
在(x_1, x_3)内至少有一点ξ，使得$f''(\xi)=0$.

证明 由于$f(x)$在$[x_1, x_2]$上连续，在(x_1, x_2)内可导，且$f(x_1)=f(x_2)$，根据罗尔定理，至少存在一点$\xi_1\in(x_1, x_2)$，使$f'(\xi_1)=0$. 同理存在一点$\xi_2\in(x_2, x_3)$，使$f'(\xi_2)=0$.

又由于$f'(x)$在$[\xi_1, \xi_2]$上连续，在(ξ_1, ξ_2)内可导，且$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，根据罗尔定理，至少存在一点$\xi\in(\xi_1, \xi_2)\subset(x_1, x_3)$，使$f''(\xi)=0$.

9. 设$a>b>0$, $n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

证明 设$f(x)=x^n$，则$f(x)$在$[b, a]$上连续，在(b, a)内可导，由拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(b, a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)，即\ a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b).$$

因为　　$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b)$,

所以　　$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a>b>0$, 证明:

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

证明　设$f(x)=\ln x$, 则$f(x)$在区间$[b, a]$上连续, 在区间(b, a)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(b, a)$, 使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b), \text{ 即 } \ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b).$$

因为$b<\xi<a$, 所以

$$\frac{1}{a}(a-b)<\ln a-\ln b<\frac{1}{b}(a-b), \text{ 即 } \frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

11. 证明下列不等式:

(1)$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$;

(2)当 $x>1$ 时, $e^x>e\cdot x$.

证明　(1)设$f(x)=\arctan x$, 则$f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(a, b)$, 　使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \text{ 即 } \arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a),$$

所以$|\arctan b-\arctan a|=\frac{1}{1+\xi^2}|b-a|\le|b-a|$, 即$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$.

(2)设$f(x)=e^x$, 则$f(x)$在区间$[1, x]$上连续, 在区间$(1, x)$内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(1, x)$, 使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1), \text{ 即 } e^x-e=e^{\xi}(x-1).$$

因为$\xi>1$, 所以

$$e^x-e=e^{\xi}(x-1)>e(x-1), \text{ 即 } e^x>e\cdot x.$$

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证明　设 $f(x)=x^5+x-1$, 则 $f(x)$是$[0, +\infty)$内的连续函数.

因为 $f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(0)f(1)<0$, 所以函数在$(0, 1)$内至少有一个零点, 即 $x^5+x-1=0$ 至少有一个正根.

假如方程至少有两个正根, 则由罗尔定理, $f'(x)$存在零点, 但 $f'(x)=5x^4+1\ne0$, 矛盾. 这说明方程只能有一个正根.

13. 设$f(x)$、$g(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 证明在(a, b)内有一点ξ, 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

解 设$\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$, 则$\varphi(x)$在$[a, b]$上连续, 在$(a, b)$内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(a, b)$, 使

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a),$$

即
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix}=(b-a)\left[\begin{vmatrix} [f(a)]' & f(\xi) \\ [g(a)]' & g(\xi) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}\right].$$

因此
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

14. 证明: 若函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内满足关系式$f'(x)=f(x)$, 且$f(0)=1$ 则$f(x)=e^x$.

证明 令$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$, 则在$(-\infty, +\infty)$内有

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^2}{e^{2x}}=\frac{f(x)e^x-f(x)e^2}{e^{2x}}\equiv 0,$$

所以在$(-\infty, +\infty)$内$\varphi(x)$为常数.

因此$\varphi(x)=\varphi(0)=1$, 从而$f(x)=e^x$.

15. 设函数 $y=f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数, 且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$, 试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad (0<\theta<1).$$

证明 根据柯西中值定理

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}\ (\xi_1 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{n-1}-n\cdot 0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}\ (\xi_2 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}),$$

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}=\frac{f''(\xi_2)-f''(0)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}-n(n-1)\cdot 0^{n-2}}=\frac{f'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)\xi_3^{n-3}}\ (\xi_3 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } \xi_2 \text{ 之间}),$$

依次下去可得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}-n(n-1)\cdots 2\cdot 0}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$$ (ξ_n 介于 0 与 ξ_{n-1} 之间),

所以 $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$.

由于 ξ_n 可以表示为 $\xi_n=\theta x$ $(0<\theta<1)$, 所以 $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ $(0<\theta<1)$.

习题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

(7) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})$;

(14) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{a}{x})^x$;

(15) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to +0}(\frac{1}{x})^{\tan x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x}{1}=\cos a$.

(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to \pi}\frac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\frac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{-\csc^2 x}{-2}=-\frac{1}{8}$.

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{mx^{m-1}}{na^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}$.

(7) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\frac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^2 2x\cdot 2}$

$=\frac{7}{2}\lim\limits_{x\to +0}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}=\frac{7}{2}\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sec^2 2x\cdot 2}{\sec^2 7x\cdot 7}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}{2\cos x(-\sin x)}=-\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3.$$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2}=1.$$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x\ln(1+x^2)}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{-2\cos x(-\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

(注: $\cos x\cdot\ln(1+x^2)\sim x^2$)

(11) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sec^2 2x\cdot 2}=\frac{1}{2}.$

(12) $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{1}=+\infty$

(注: 当 $x\to0$ 时, $t=\frac{1}{x^2}\to+\infty$.

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$

(14)因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{a}{x})}$,

而 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(1+\frac{a}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot(-\frac{a}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+a}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1}=a,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{a}{x})}=e^a.$

.

(15)因为 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\sin x\ln x}$,

而 $$\lim_{x\to+0}\sin x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\csc x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\ln x}=e^0=1.$$

(16)因为 $\lim\limits_{x\to+0}(\frac{1}{x})^{\tan x}=e^{-\tan x\ln x}$,

而 $$\lim_{x\to+0}\tan x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+0}(\frac{1}{x})^{\tan x}=\lim_{x\to+0}e^{-\tan x\ln x}=e^0=1.$$

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1$，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 是存在的.

但 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在，不能用洛必达法则.

3. 验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0$，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 是存在的.

但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在，不能用洛必达法则.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}} & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}} & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0)=e^{-\frac{1}{2}}$, $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$,

因为 $$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]},$$

而 $$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to+0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

所以 $$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}=f(0).$$

因此$f(x)$在点 x=0 处连续.

习题 3−3

1. 按$(x-4)$的幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 设$f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$. 因为

$f(4)=-56$,

$f'(4)=(4x^3-15x^2+2x-3)|_{x=4}=21$,

$f''(4)=(12x^2-30x+2)|_{x=4}=74$,

$f'''(4)=(24x-30)|_{x=4}=66$,

$f^{(4)}(4)=24$,

所以

$$f(x)=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4$$

$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4.$

2. 应用麦克劳林公式, 按 x 幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解 因为

$f'(x)=3(x^2-3x+1)^2(2x-3)$,

$f''(x)=6(x^2-3x+1)(2x-3)^2+6(x^2-3x+1)^2=30(x^2-3x+1)(x^2-3x+2)$,

$f'''(x)=30(2x-3)(x^2-3x+2)+30(x^2-3x+1)(2x-3)=30(2x-3)(2x^2-6x+3)$,

$f^{(4)}(x)=60(2x^2-6x+3)+30(2x-3)(4x-6)=360(x^2-3x+2)$,

$f^{(5)}(x)=360(2x-3)$,

$f^{(6)}(x)=720$;

$f(0)=1, f'(0)=-9, f''(0)=60, f'''(0)=-270$,

$f^{(4)}(0)=720, f^{(5)}(0)=-1080, f^{(6)}(0)=720$,

所以

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

$$=1-9x+30x^3-45x^3+30x^4-9x^5+x^6.$$

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.

解 因为

$$f(4)=\sqrt{4}=2，\ f'(4)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{1}{4}，\ f''(4)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=4}=-\frac{1}{32},$$

$$f'''(4)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{3}{8\cdot 32}，\ f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},$$

所以 $$\sqrt{x}=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{1}{4!}\cdot\frac{15}{16\sqrt{[4+\theta(x-4)]^7}}(x-4)^4\ (0<\theta<1).$$

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$f'(x)=x^{-1}, f''(x)=(-1)x^{-2}, f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3}, \cdots,$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$f^{(k)}(2)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k}\,(k=1, 2, \cdots, n+1),$$

所以

$$\ln x=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].$$

5. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按$(x+1)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f(x)=x^{-1}, f'(x)=(-1)x^{-2}, f''(x)=(-1)(-2)x^{-3}, \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};$$

$$f^{(k)}(-1)=\frac{(-1)^k k!}{(-1)^{k+1}}=-k!\,(k=1, 2, \cdots, n),$$

所以 $$\frac{1}{x}=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$$=-[1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^n]+\frac{(-1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}(x+1)^{n+1}$$

$(0<\theta<1)$.

6. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=\sec^2 x,$$

$$f''(x)=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x,$$

$$f'''(x)=4\sec x\cdot\sec x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x=4\sec^2 x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x,$$

$$f^{(4)}(x)=8\sec^2 x\cdot\tan^3 x+8\sec^4 x\cdot\tan x+8\sec^4 x\cdot\tan x=\frac{8\sin x(\sin^2 x+2)}{\cos^5 x};$$

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=2,$$

所以 $$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{\sin(\theta x)[\sin^2(\theta x)+2]}{3\cos^5(\theta x)}x^4\,(0<\theta<1).$$

7. 求函数$f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的n阶麦克劳林公式.

解 因为

$f'(x)=e^x+xe^x$,

$f''(x)=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$,

$f'''(x)=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x, \cdots$,

$f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x$;

$f^{(k)}(0)=k\ (k=1, 2, \cdots, n)$,

所以 $$xe^x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots\frac{1}{(n-1)!}x^n+o(x^n).$$

8. 验证当$0\leq x\leq\frac{1}{2}$时, 按公式$e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$计算$e^x$的近似值时, 所产生的误差小于 0.01, 并求$\sqrt{e}$的近似值, 使误差小于 0.01.

解 因为公式$e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$右端为$e^x$的三阶麦克劳林公式, 其余项为

$$R_3(x)=\frac{e^\xi}{4!}x^4,$$

所以当$0\leq x\leq\frac{1}{2}$时，按公式$e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$计算$e^x$的误差

$$|R_3(x)|=|\frac{e^\xi}{4!}x^4|\leq\frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}(\frac{1}{2})^4\approx0.0045<0.01.$$

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2})^3\approx1.645.$$

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

(1)$\sqrt[3]{30}$;

(2)$\sin18°$.

解 (1)设$f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则$f(x)$在$x_0=27$点展开成三阶泰勒公式为

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3}\cdot27^{-\frac{2}{3}}(x-27)+\frac{1}{2!}\cdot(-\frac{2}{9}\cdot27^{-\frac{5}{3}})(x-27)^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot(\frac{10}{27}\cdot 27^{-\frac{8}{3}})(x-27)^3+\frac{1}{4!}\cdot(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}})(x-27)^4\ (\xi\text{介于 27 与 }x\text{ 之间}).$$

于是 $$\sqrt[3]{30}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}\cdot 3+\frac{1}{2!}\cdot(-\frac{2}{9}\cdot 27^{-\frac{5}{3}})\cdot 3^2+\frac{1}{3!}\cdot(\frac{10}{27}\cdot 27^{-\frac{8}{3}})\cdot 3^3$$

$$\approx 3(1+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^6}+\frac{5}{3^{10}})\approx 3.10724,$$

其误差为

$$|R_3(30)|=|\frac{1}{4!}\cdot(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}})\cdot 3^4|<\frac{1}{4!}\cdot\frac{80}{81}\cdot 27^{-\frac{11}{3}}\cdot 3^4=\frac{80}{4!\cdot 3^{11}}=1.88\times 10^{-5}.$$

(2) 已知

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{\sin\xi}{4!}x^4\ (\xi\text{介于 0 与 }x\text{ 之间}),$$

所以 $$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3\approx 0.3090,$$

其误差为

$$|R_3(\frac{\pi}{10})|=|\frac{\sin\xi}{4!}(\frac{\pi}{10})^4|<\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{4!}(\frac{\pi}{10})^4=2.03\times 10^{-4}.$$

10. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解 (1) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t}.$$

因为 $\sqrt[3]{1+3t}=1+t+o(t)$, $\sqrt[4]{1-2t}=1-\frac{1}{2}t+o(t)$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim_{t\to+0}\frac{[1+t+o(t)]-[1-\frac{1}{2}t+o(t)]}{t}=\lim_{t\to+0}[\frac{3}{2}+\frac{o(t)}{t}]=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to0}\frac{[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)]-[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^4+o(x^4)]}{x^3[1+\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{o(x^4)}{x^3}}{1+\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1+e^{-1}}=0.$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-[1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{3}{4!}x^4+o(x^4)]}{[(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4))-(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4))]x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{4!}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4-\frac{11}{24}x^6+x^2\cdot o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{4!}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}-\frac{11}{24}x^2+\frac{o(x^4)}{x^2}}=\frac{\frac{3}{4!}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}.$$

习题 3–4

1. 判定函数$f(x)=\arctan x-x$ 单调性.

解 因为$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{1}{1+x^2}\le0$，且仅当$x=0$时等号成立，所以$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内单调减少.

2. 判定函数$f(x)=x+\cos x$ $(0\le x\le 2\pi)$的单调性.

解 因为$f'(x)=1-\sin x\ge0$, 所以$f(x)=x+\cos x$在$[0, 2\pi]$上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$;

(2) $y=2x+\frac{8}{x}$ $(x>0)$;

(3) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;

(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$;

(6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\,(a>0)$;

(7) $y=x^n e^{-x}$ $(n>0, x\geq 0)$;

(8) $y=x+|\sin 2x|$.

解 (1) $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)=0$, 令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$.

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

可见函数在$(-\infty, -1]$和$[3, +\infty)$内单调增加, 在$[-1, 3]$内单调减少.

(2) $y'=2-\dfrac{8}{x^2}=\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x^2}=0$,令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=2, x_2=-2$(舍去).

因为当$x>2$时, $y>0$; 当$0<x<2$时, $y'<0$, 所以函数在$(0, 2]$内单调减少, 在$[2, +\infty)$内单调增加.

(3) $y'=\dfrac{-60(2x-1)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}$, 令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=1$, 不可导点为 $x=0$.

列表得

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	不存在	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘		↘	0	↗		↘

可见函数在$(-\infty, 0)$, $(0, \dfrac{1}{2}]$, $[1, +\infty)$内单调减少, 在$[\dfrac{1}{2}, 1]$上单调增加.

(4)因为 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$, 所以函数在$(-\infty, +\infty)$内单调增加.

(5) $y'=(x+1)^3+3(x-1)(x+1)^2=4(x-\dfrac{1}{2})(x+1)^2$. 因为当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时, $y'<0$; 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时, $y'>0$, 所以函数在 $(-\infty, \dfrac{1}{2}]$ 内单调减少, 在 $[\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 内单调增加.

(6) $y'=\dfrac{-(x-\frac{2a}{3})}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}$，驻点为 $x_1=\dfrac{2a}{3}$，不可导点为 $x_2=\dfrac{a}{2}$，$x_3=a$.

列表得

x	$(-\infty,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},\frac{2a}{3})$	$\frac{2a}{3}$	$(\frac{2a}{3},a)$	a	$(a,+\infty)$
y'	+	不存在	+	0	−	不存在	+
y	↗		↗		↘		↗

可见函数在 $(-\infty,\frac{a}{2})$，$(\frac{a}{2},\frac{2a}{3}]$, $(a,+\infty)$内单调增加，在$[\frac{2a}{3},a)$ 内单调减少.

(7)$y'=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$，驻点为 $x=n$. 因为当 $0<x<n$ 时，$y'>0$；当 $x>n$ 时，$y'<0$，所以函数在$[0,n]$上单调增加，在$[n,+\infty)$内单调减少.

(8) $$y=\begin{cases} x+\sin 2x & k\pi\le x\le k\pi+\frac{\pi}{2} \\ x-\sin 2x & k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi \end{cases}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$y'=\begin{cases} 1+2\cos 2x & k\pi\le x\le k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 1-2\cos 2x & k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi \end{cases}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

y'是以π为周期的函数，在$[0,\pi]$内令 $y'=0$，得驻点 $x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\frac{5\pi}{6}$，不可导点为 $x_3=\frac{\pi}{2}$.

列表得

x	$(0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{5\pi}{6},\pi)$
y'	+	0	−	不存在	+	0	−
y	↗		↘		↗		↘

根据函数在$[0,\pi]$上的单调性及y'在$(-\infty,+\infty)$的周期性可知函数在$[\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}]$上单

调增加，在$[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$上单调减少($k$=0, ±1, ±2, ···).

4. 证明下列不等式:

(1)当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2)当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3)当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x+\tan x>2x$;

(4)当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

(5)当 $x>4$ 时, $2^x>x^2$;

证明 (1)设 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，则 $f(x)$在$[0, +\infty)$内是连续的. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0,$$

所以 $f(x)$在$(0, +\infty)$内是单调增加的，从而当 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)=0$，即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0,$$

也就是 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

(2)设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则 $f(x)$在$[0, +\infty)$内是连续的. 因为

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0,$$

所以 $f(x)$在$(0, +\infty)$内是单调增加的，从而当 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)=0$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0,$$

也就是 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

(3)设 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，则 $f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$内连续，

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2=\frac{(\cos x-1)[(\cos^2 x-1)-\cos x]}{\cos^2 x}.$$

因为在$(0, \frac{\pi}{2})$内 $\cos x-1<0$, $\cos^2 x-1<0$, $-\cos x<0$，所以 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$在

$(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 因此当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>f(0)=0$, 即

$$\sin x+\tan x-2x>0,$$

也就是 $\quad \sin x+\tan x>2x$.

(4)设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$, 则 $f(x)$在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 内连续,

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x>x$, $\tan x+x>0$, 所以 $f'(x)$在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 因此当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>f(0)=0$, 即

$$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0,$$

也就是 $\quad \tan x>x+\frac{1}{3}x^2$.

(5)设 $f(x)=x\ln 2-2\ln x$, 则 $f(x)$在$[4, +\infty)$内连续, 因为

$$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{2}{x}>\frac{\ln e}{2}-\frac{2}{4}=0,$$

所以当 $x>4$ 时, $f'(x)>0$, 即 $f(x)$内单调增加.

因此当 $x>4$ 时, $f(x)>f(4)=0$, 即 $x\ln 2-2\ln x>0$, 也就是 $2^x>x^2$.

5. 讨论方程 $\ln x=ax$ (其中 $a>0$)有几个实根?

解 设 $f(x)=\ln x-ax$. 则 $f(x)$在$(0, +\infty)$内连续, $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$, 驻点为 $x=\frac{1}{a}$.

因为当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$在 $(0,\frac{1}{a})$ 内单调增加; 当 $x>\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 内单调减少. 又因为当 $x\to 0$ 及 $x\to+\infty$时, $f(x)\to-\infty$, 所以如果 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1>0$, 即 $a<\frac{1}{e}$, 则方程有且仅有两个实根; 如果 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1<0$, 即 $a>\frac{1}{e}$, 则方程没有实根. 如果 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1=0$, 即 $a=\frac{1}{e}$, 则方程仅有一个实根.

6. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面这个例子:

$$f(x)=x+\sin x.$$

解 单调函数的导函数不一定为单调函数.

例如 $f(x)=x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的, 但其导数不是单调函数. 事实上

,

$f'(x)=1+\cos x\geq 0$,

这就明$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的. $f''(x)=-\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内不保持确定的符号, 故$f'(x)$在$(-\infty, +\infty)$内不是单调的.

7. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=4x-x^2$;

(2) $y=\operatorname{sh} x$;

(3) $y=1+\frac{1}{x}\ (x>0)$;

(4) $y=x\arctan x$;

解 (1)$y'=4-2x$, $y''=-2$,

因为$y''<0$, 所以曲线在$(-\infty, +\infty)$内是凸的.

(2)$y'=\operatorname{ch} x$, $y''=\operatorname{sh} x$. 令$y''=0$, 得$x=0$.

因为当$x<0$时, $y''=\operatorname{sh} x<0$; 当$x>0$时, $y''=\operatorname{sh} x>0$, 所以曲线在$(-\infty, 0]$内是凸的, 在$[0, +\infty)$内是凹的.

(3) $y'=-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$.

因为当$x>0$时, $y''>0$, 所以曲线在$(0, +\infty)$内是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$, $y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}$.

因为在$(-\infty, +\infty)$内, $y''>0$, 所以曲线$y=x\operatorname{arctg} x$在$(-\infty, +\infty)$内是凹的.

8. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1). $y=x^3-5x^2+3x+5$;

(2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$;

(4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$;

(6) $y=x^4(12\ln x-7)$,

解 (1)$y'=3x^2-10x+3$, $y''=6x-10$. 令$y''=0$, 得$x=\frac{5}{3}$.

因为当 $x<\frac{5}{3}$ 时, $y''<0$; 当 $x>\frac{5}{3}$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(-\infty,\frac{5}{3}]$ 内是凸的, 在 $[\frac{5}{3},+\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(\frac{5}{3},\frac{20}{27})$.

(2) $y'=e^{-x}-xe^{-x}$, $y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)$. 令 $y''=0$, 得 $x=2$.

因为当 $x<2$ 时, $y''<0$; 当 $x>2$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(-\infty, 2]$ 内是凸的, 在 $[2, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(2, 2e^{-2})$.

(3) $y'=4(x+1)^3+e^x$, $y''=12(x+1)^2+e^x$.

因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $y''>0$, 所以曲线 $y=(x+1)^4+e^x$ 的在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的, 无拐点.

(4) $y'=\frac{2x}{x^2+1}$, $y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$. 令 $y''=0$, 得 $x_1=-1$, $x_2=1$.

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	ln2 拐点	$\cup$	ln2 拐点	$\cap$

可见曲线在 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$ 内是凸的, 在 $[-1, 1]$ 内是凹的, 拐点为 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$.

(5) $y'=e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$, $y''=\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}(1-2x)$. 令 $y''=0$ 得, $x=\frac{1}{2}$.

因为当 $x<\frac{1}{2}$ 时, $y''>0$; 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $y''<0$, 所以曲线 $y=e^{\operatorname{arctg} x}$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 内是凹的, 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 内是凸的, 拐点是 $(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$.

(6) $y'=4x^3(12\ln x-7)+12x^3$, $y''=144x^2\cdot\ln x$. 令 $y''=0$, 得 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时, $y''<0$; 当 $x>1$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(0, 1]$ 内是凸的, 在 $[1, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(1, -7)$.

9. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n (x>0, y>0, x\neq y, n>1)$;

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}} (x\neq y)$;

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ $(x>0, y>0, x\neq y)$.

证明 (1)设$f(t)=t^n$, 则$f'(t)=nt^{n-1}, f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$. 因为当$t>0$时, $f''(t)>0$, 所以曲线$f(t)=t^n$在区间$(0, +\infty)$内是凹的. 由定义, 对任意的$x>0, y>0, x\neq y$有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即
$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n.$$

(2)设$f(t)=e^t$, 则$f'(t)=e^t, f''(t)=e^t$. 因为$f''(t)>0$, 所以曲线$f(t)=e^t$在$(-\infty, +\infty)$内是凹的. 由定义, 对任意的$x, y\in(-\infty, +\infty), x\neq y$有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即
$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}} (x\neq y).$$

(3)设$f(t)=t\ln t$, 则 $f'(t)=\ln t+1$, $f''(t)=\frac{1}{t}$.

因为当$t>0$时, $f''(t)>0$, 所以函数$f(t)=t\ln t$ 的图形在$(0, +\infty)$内是凹的. 由定义, 对任意的$x>0, y>0, x\neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即
$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

10. 试证明曲线$y=\frac{x-1}{x^2+1}$有三个拐点位于同一直线上.

证明 $y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$, $y''=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}$.

令$y''=0$, 得$x_1=-1$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$.

例表得

x	$(-\infty.\ -1)$	-1	$(-1, 2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3}, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cap$	-1	$\cup$	$\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}$	$\cap$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}$	$\cup$

可见拐点为$(-1, -1)$，$(2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})})$，$(2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})})$．因为

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4}，\quad \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4}，$$

所以这三个拐点在一条直线上.

11．问 a、b 为何值时，点$(1, 3)$为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解 $y'=3ax^2+2bx, y''=6ax+2b$. 要使$(1, 3)$成为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点，必须$y(1)=3$且 $y''(1)=0$，即 $a+b=3$ 且 $6a+2b=0$，解此方程组得 $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$.

12．试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a、b、c、d，使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$(1, -10)$为拐点，且点$(-2, 44)$在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c, y''=6ax+2b$．依条件有

$$\begin{cases} y(-2)=44 \\ y(1)=-10 \\ y'(-2)=0 \\ y''(1)=0 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} -8a+4b-2c+d=44 \\ a+b+c+d=-10 \\ 12a-4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases}.$$

解之得 $a=1, b=-3, c=-24, d=16$.

13．试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值，使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y'=4kx^3-12kx, y''=12k(x-1)(x+1)$. 令 $y''=0$，得 $x_1=-1, x_2=1$.

因为在 $x_1=-1$ 的两侧 y''是异号的，又当 $x=-1$ 时 $y=4k$，所以点$(-1, 4k)$是拐点.

因为 $y'(-1)=8k$，所以过拐点$(-1, 4k)$的法线方程为 $y-4k=-\frac{1}{8k}(x+1)$．要使法线过原点，则$(0, 0)$应满足法线方程，即 $-4k=-\frac{1}{8k}$，$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

同理, 因为在 $x_1=1$ 的两侧 y''是异号的, 又当 $x=1$ 时 $y=4k$, 所以点$(1, 4k)$也是拐点.

因为 $y'(1)=-8k$, 所以过拐点$(-1, 4k)$的法线方程为 $y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$. 要使法线过原点, 则$(0, 0)$应满足法线方程, 即 $-4k=-\frac{1}{8k}$, $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

因此当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时, 该曲线的拐点处的法线通过原点.

14. 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$是否为拐点? 为什么?

解 不妨设 $f'''(x_0)>0$. 由 $f'''(x)$的连续性, 存在 x_0 的某一邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 在此邻域内有 $f'''(x)>0$. 由拉格朗日中值定理, 有

$$f''(x)-f''(x_0)=f'''(\xi)(x-x_0) \text{ (}\xi\text{介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间)},$$

即 $$f''(x)=f'''(\xi)(x-x_0).$$

因为当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f''(x)<0$; 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f''(x)>0$, 所以$(x_0, f(x_0))$是拐点.

习题 3−5

1. 求函数的极值:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

(2) $y=x-\ln(1+x)$;

(3) $y=-x^4+2x^2$;

(4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(6) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y=e^x\cos x$;

(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;

(10) $y=x+\tan x$.

解 (1)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x-3)(x+1)$, 驻点为 $x_1=-1$, $x_2=3$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	17 极大值	↘	−47 极小值	↗

可见函数在 $x=-1$ 处取得极大值 17, 在 $x=3$ 处取得极小值−47.

(2)函数的定义为$(-1, +\infty)$, $y'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$, 驻点为 $x=0$. 因为当$-1<x<0$ 时, $y'<0$; 当 $x>0$ 时, $y'>0$, 所以函数在 $x=0$ 处取得极小值, 极小值为 $y(0)=0$.

(3)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$,

$y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1)$, $y''=-12x^2+4$,

令 $y'=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

因为 $y''(0)=4>0$, $y''(-1)=-8<0$, $y''(1)=-8<0$, 所以 $y(0)=0$ 是函数的极小值, $y(-1)=1$ 和 $y(1)=1$ 是函数的极大值.

(4)函数的定义域为$(-\infty, 1]$,

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}(2\sqrt{1-x}+1)},$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$.

因为当 $x<\dfrac{3}{4}$ 时, $y'>0$; 当 $\dfrac{3}{4}<x<1$ 时, $y'<0$, 所以 $y(1)=\dfrac{5}{4}$ 为函数的极大值.

(5)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=\dfrac{-5(x-\frac{12}{5})}{\sqrt{(4+5x^2)^3}}$, 驻点为 $x=\dfrac{12}{5}$.

因为当 $x<\dfrac{12}{5}$ 时, $y'>0$; 当 $x>\dfrac{12}{5}$ 时, $y'<0$, 所以函数在 $x=\dfrac{12}{5}$ 处取得极大值, 极大值为 $y(\dfrac{12}{5})=\dfrac{\sqrt{205}}{10}$.

(6)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=\dfrac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$, 驻点为 $x_1=0$, $x_2=-2$.

列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$

y'	$-$	0	+	0	$-$
y	↘	$\frac{8}{3}$极小值	↗	4极大值	↘

可见函数在 $x=-2$ 处取得极小值 $\frac{8}{3}$, 在 $x=0$ 处取得极大值 4.

(7)函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

$y'=e^x(\cos x-\sin x)$, $y''=-e^x\sin x$.

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi$, $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

因为 $y''(\frac{\pi}{4}+2k\pi)<0$, 所以 $y(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极大值.

因为 $y''[\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi]>0$, 所以 $y[\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi]=-e^{\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极小值.

(8)函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为$(0, +\infty)$,

$$y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x).$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=e$.

因为当 $x<e$ 时, $y'>0$; 当 $x>e$ 时, $y'<0$, 所以 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$ 为函数 $f(x)$的极大值.

(9)函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$, $y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{2/3}}$, 因为 $y'<0$, 所以函数在$(-\infty, +\infty)$是单调减少的, 无极值.

(10)函数 $y=x+\text{tg}\, x$ 的定义域为 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

因为 $y'=1+\sec^2 x>0$, 所以函数 $f(x)$无极值.

2. 试证明: 如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$, 那么这函数没有极值 .

证明 $y'=3ax^2+2bx+c$. 由 $b^2-3ac<0$, 知 $a\neq0$. 于是配方得到

$$y'=3ax^2+2bx+c=3a(x^2+\frac{2b}{3a}x+\frac{c}{3a})=3a(x^2+\frac{b}{3a})^2+\frac{3ac-b^2}{3a},$$

因 $3ac-b^2>0$, 所以当 $a>0$ 时, $y'>0$; 当 $a<0$ 时, $y'<0$. 因此 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 是单调函数, 没有极值.

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小

值？并求此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x, f''(x)=-a\sin x-3\sin x$.

要使函数$f(x)$在$x=\dfrac{\pi}{3}$处取得极值，必有$f'(\dfrac{\pi}{3})=0$，即$a\cdot\dfrac{1}{2}-1=0$，$a=2$.

当$a=2$时，$f''(\dfrac{\pi}{3})=-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$. 因此，当$a=2$时，函数$f(x)$在$x=\dfrac{\pi}{3}$处取得极值，而且取得极大值，极大值为$f(\dfrac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$.

4. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2$, $-1\le x\le 4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2$, $-1\le x\le 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$, $-5\le x\le 1$.

解 (1)$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$，令$y'=0$，得$x_1=0, x_2=1$. 计算函数值得

$$y(-1)=-5, y(0)=0, y(1)=-1, y(4)=80,$$

经比较得出函数的最小值为$y(-1)=-5$，最大值为$y(4)=80$.

(2)$y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)$，令$y'=0$，得$x_1=0, x_2=-2$(舍去)$, x_3=2$. 计算函数值得

$$y(-1)=-5, y(0)=2, y(2)=-14, y(3)=11,$$

经比较得出函数的最小值为$y(2)=-14$，最大值为$y(3)=11$.

(3) $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$，令$y'=0$，得$x=\dfrac{3}{4}$. 计算函数值得

$$y(-5)=-5+\sqrt{6},\quad y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}, y(1)=1,$$

经比较得出函数的最小值为$y(-5)=-5+\sqrt{6}$，最大值为$y(\dfrac{3}{4})=\dfrac{5}{4}$.

5. 问函数$y=2x^3-6x^2-18x-7(1\le x\le 4)$在何处取得最大值？并求出它的最大值.

解 $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$，函数$f(x)$在$1\le x\le 4$内的驻点为$x=3$.
比较函数值:

$$f(1)=-29,\quad f(3)=-61,\quad f(4)=-47,$$

函数$f(x)$在$x=1$处取得最大值，最大值为$f(1)=-29$.

6. 问函数$y=x^2-\dfrac{54}{x}$ $(x<0)$在何处取得最小值？

解 $y'=2x+\dfrac{54}{x^2}$，在$(-\infty, 0)$的驻点为$x=-3$. 因为

$$y''=2-\frac{108}{x^3},\quad y''(-3)=2+\frac{108}{27}>0,$$

所以函数在$x=-3$处取得极小值. 又因为驻点只有一个，所以这个极小值也就是最小值，即函数在$x=-3$处取得最小值，最小值为$y(-3)=27$.

7. 问函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ $(x\geq 0)$在何处取得最大值？

解 $y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. 函数在$(0, +\infty)$内的驻点为 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时, $y'>0$; 当 $x>1$ 时 $y'<0$, 所以函数在 $x=1$ 处取得极大值. 又因为函数在$(0, +\infty)$内只有一个驻点, 所以此极大值也是函数的最大值, 即函数在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌20cm长的墙壁, 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

解 设宽为 x 长为 y, 则 $2x+y=20$, $y=20-2x$, 于是面积为

$S= xy=x(20-2x)=20x-2x^2$.

$S'=20-4x=4(10-x)$, $S''=-4$.

令 $S'=0$, 得唯一驻点 $x=10$.

因为 $S''(10)-4<0$, 所以 $x=10$ 为极大值点, 从而也是最大值点.

当宽为 5 米, 长为 10 米时这间小屋面积最大.

9. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V, 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

解 由 $V=\pi r^2h$, 得 $h=V\pi^{-1}r^{-2}$. 于是油罐表面积为

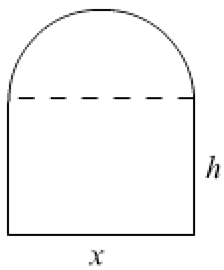
$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$ $(0<x<+\infty)$,

$S'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$.

令 $S'=0$, 得驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

因为 $S''=4\pi+\frac{4V}{r^3}>0$, 所以 S 在驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 处取得极小值, 也就是最小值. 这时相应的高为 $h=\frac{V}{\pi r_0^2}=2r$. 底直径与高的比为 $2r : h=1 : 1$.

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图), 截面的面积为 5m^2, 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省？



解 设矩形高为 h, 截面的周长 S, 则 $xh+\frac{1}{2}\cdot(\frac{x}{2})^2\pi=5$, $h=\frac{5}{x}-\frac{\pi}{8}x$.

于是

$$S=x+2h+\frac{x\pi}{2}=x+\frac{\pi}{4}x+\frac{10}{x}\ (0<x<\sqrt{\frac{40}{\pi}}),$$

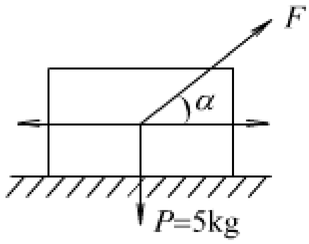
$$S'=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2}.$$

令 $S'=0$, 得唯一驻点 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$.

因为 $S''=\frac{20}{x^3}>0$, 所以 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点, 同时也是最小值点.

因此底宽为 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 时所用的材料最省.

11. 设有重量为 5kg 的物体, 置于水平面上, 受力 F 的作用而开始移动(如图). 设摩擦系数 $\mu=0.25$, 问力 F 与水平线的交角 α 为多少时, 才可使力 F 的大小为最小?



解 由 $F\cos\alpha=(m-F\sin\alpha)\mu$ 得

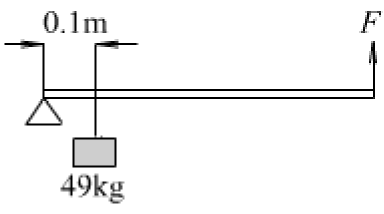
$$F=\frac{\mu m}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\ (0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}),$$

$$F'=\frac{\mu m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)^2},$$

驻点为 $\alpha=\arctan\mu$.

因为 F 的最小值一定在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内取得, 而 F 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内只有一个驻点 $\alpha=\arctan\mu$, 所以 $\alpha=\arctan\mu$ 一定也是 F 的最小值点. 从而当 $\alpha=\arctan0.25=14°$ 时, 力 F 最小.

12. 有一杠杆, 支点在它的一端. 在距支点 0.1m 处挂一重量为 49kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(如图). 如果杠杆的线密度为 5kg/m, 求最省力的杆长?



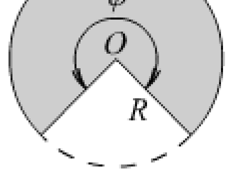
解 设杆长为 x(m), 加于杠杆一端的力为 F, 则有

$$xF=\frac{1}{2}x\cdot5x+49\cdot0.1,\ 即\ F=\frac{5}{2}x+\frac{4.9}{x}(x>0).$$

$$F'=\frac{5}{2}-\frac{4.9}{x^2},$$

驻点为 $x=1.4$. 由问题的实际意义知, F 的最小值一定在 $(0,+\infty)$ 内取得, 而 F 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个驻点 $x=1.4$, 所以 F 一定在 $x=1.4m$ 处取得最小值, 即最省力的杆长为 $1.4m$.

13. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一漏斗(如图), 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时, 做成的漏斗的容积最大?



解 漏斗的底周长 l、底半径 r、高 h 分别为

$$l=R\cdot\varphi,\ r=\frac{R\varphi}{2\pi},\ h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}.$$

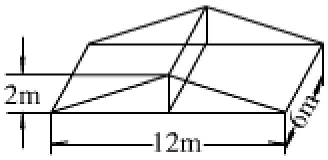
漏斗的容积为

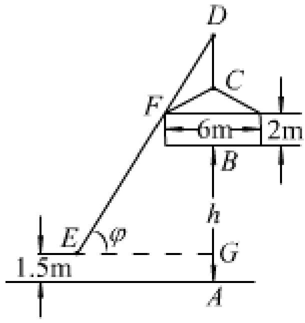
$$V=\frac{1}{3}hr^2\pi=\frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}\quad(0<\varphi<2\pi).$$

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{\varphi(8\pi^2-3\varphi^2)}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}，\text{驻点为}\ \varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$$

由问题的实际意义, V 一定在$(0, 2\pi)$内取得最大值, 而 V 在$(0, 2\pi)$内只有一个驻点, 所以该驻点一定也是最大值点. 因此当$\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时, 漏斗的容积最大.

14. 某吊车的车身高为 1.5m, 吊臂长 15m, 现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架, 水平地吊到 6m 高的柱子上去(如图), 问能否吊得上去?





解 设吊臂对地面的倾角为φ时, 屋架能够吊到的最大高度为 h. 在直角三角形ΔEDG 中

$$15\sin\varphi=(h-1.5)+2+3\tan\varphi,$$

故

$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2},$$

$$h'=15\cos\varphi-\frac{3}{\cos^2\varphi}.$$

令 $h'=0$ 得唯一驻点 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\approx54°$.

因为 $h''=-15\sin\varphi-\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}<0$, 所以$\varphi=54°$为极大值点, 同时这也是最大值点.

当$\varphi=54°$时, $h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2}\approx7.5$ m.

所以把此屋最高能水平地吊至 7. 5m 高, 现只要求水平地吊到 6m 处, 当然能吊上去.

15. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 试问房租定为多少可获最大收入?

解 房租定为 x 元, 纯收入为 R 元.

当 $x\le 1000$ 时, $R=50x-50\times 100=50x-5000$, 且当 $x=1000$ 时, 得最大纯收入 45000 元.

当 $x>1000$ 时,

$$R=[50-\frac{1}{5}(x-1000)]\cdot x-[50-\frac{1}{5}(x-1000)]\cdot 100=-\frac{1}{50}x^2+72x-7000,$$

$$R'=-\frac{1}{25}x+72.$$

令 $R'=0$ 得$(1000, +\infty)$内唯一驻点 $x=1800$. 因为 $R''=-\frac{1}{25}<0$, 所以 1800 为极大值点, 同时也是最大值点. 最大值为 $R=57800$.

因此, 房租定为 1800 元可获最大收入.

习题 3-6

描绘下列函数的图形:

1. $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$;

解 (1)**定义域为**$(-\infty, +\infty)$;

(2) $y'=\frac{1}{5}(4x^3-12x+8)=\frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2$,

$$y''=\frac{4}{5}(3x^2-3)=\frac{12}{5}(x+1)(x-1),$$

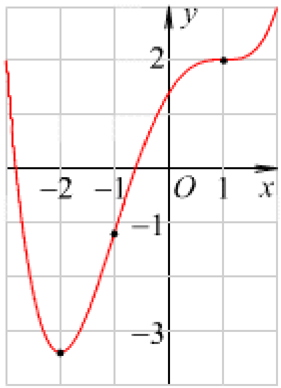
令 $y'=0$, 得 $x=-2, x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1, x=1$.

(3)列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

$y=f(x)$	$\searrow\cup$	$-\dfrac{17}{5}$ 极小值	$\nearrow\cup$	$-\dfrac{6}{5}$ 拐点	$\nearrow\cap$	2 拐点	$\nearrow\cup$

(4)作图:



2. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2)奇函数，图形关于原点对称，故可选讨论 $x\geq 0$ 时函数的图形.

(3) $y'=\dfrac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$, $y''=\dfrac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$,

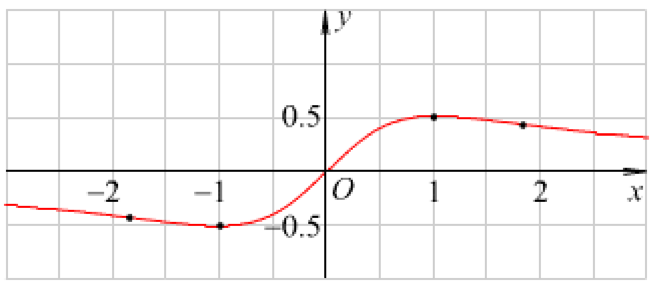
当 $x\geq 0$ 时，令 $y'=0$，得 $x=1$；令 $y''=0$，得 $x=0$，$x=\sqrt{3}$.

(4)列表

x	0	(0, 1)	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	+	0	−	−	−
y''	0	−	−	−	0	+
$y=f(x)$	0 拐点	$\nearrow\cap$	$\dfrac{1}{2}$ 极大值	$\searrow\cap$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 拐点	$\searrow\cup$

(5)有水平渐近线 $y=0$;

(6)作图:



3. $y=e^{-(x-1)^2}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2) $y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2}$ $y''=4e^{-(x-1)^2}[x-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})][x-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})]$,

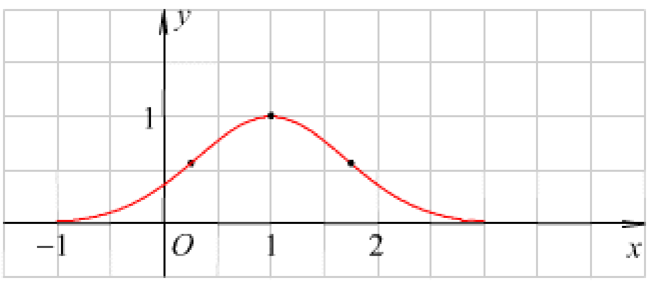
令$y'=0$, 得$x=1$; 令$y''=0$, 得$x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)列表

x	$(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	1	$(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
$y=f(x)$	$\nearrow\cup$	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	$\nearrow\cap$	1 极大值	$\searrow\cap$	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	$\searrow\cup$

(4)有水平渐近线$y=0$;

(5)作图:



4. $y=x^2+\frac{1}{x}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$;

(2) $y'=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$, $y''=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^3+1)}{x^3}$,

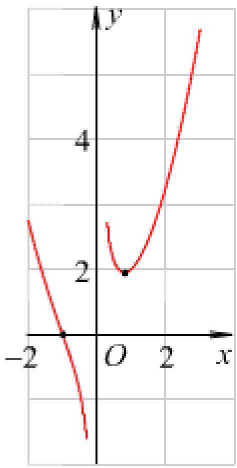
令 $y'=0$，得 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$；令 $y''=0$，得 $x=-1$.

(3)列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty)$
y'	−	−	−	无	−	0	+
y''	+	0	−	无	+	+	+
$y=f(x)$	↘∪	0 拐点	↘∩	无	↘∪	$\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ 极小值	↗∪

(4)有铅直渐近线 $x=0$;

(5)作图:



5. $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 (1)定义域为 $x\neq\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(2)是偶函数，周期为 $2p$．可先作$[0,p]$上的图形，再根据对称性作出$[-p,0)$内的图形，最后根据周期性作出$[-p,p]$以外的图形;

(3) $y'=\dfrac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}$， $y''=\dfrac{\cos x\cdot(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3 2x}$，

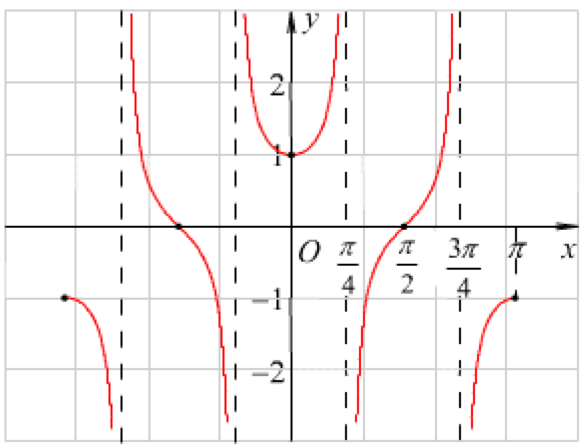
在$[0, p\ ]$上，令 $y'=0$，得 $x=0, x=p$ ；令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

(4)列表

x	0	$(0,\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4},\pi)$	p
y'	0	+	无	+	+	+	无	+	0
y''	+	+	无	−	0	+	无	−	−
$y=f(x)$	1 极小值	↗∪	无	↗∩	0 拐点	↗∪	无	↗∩	−1 极大值

(5)有铅直渐近线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3\pi}{4}$；

(6)作图:



习题 3−7

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点$(0, 2)$处的曲率.

解 两边对 x 求导数得

$$8x+2yy'=0,\quad y'=-\frac{4x}{y},\quad y''=-\frac{4y-4xy'}{y^2}.$$

$$y'|_{(0, 2)}=0,\ y''|_{(0, 2)}=-2.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2.$$

2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点(x, y)处的曲率及曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{\sec x}\cdot\sec x\cdot\tan x=\tan x$, $y''=\sec^2 x$.

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|\sec^2 x|}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=|\cos x|,$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{|\cos x|}=|\sec x|.$$

3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 $y'=2x-4$, $y''=2$.

令 $y'=0$, 得顶点的横坐标为 $x=2$.

$$y'|_{x=2}=0,\ y''|_{x=2}=2.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2,$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}.$$

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

解 $y'=\frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 x)'}=-\tan t$, $y''=\frac{(-\tan x)'}{(a\cos^3 x)'}=\frac{1}{3a\sin t\cdot\cos^4 t}$.

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|\frac{1}{3a\sin t\cdot\cos^4 t}|}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}=|\frac{1}{3a\sin t\cos^3 t}|=\frac{2}{3|a\sin 2t|},$$

$$K\Big|_{t=t_0}=\frac{2}{3|a\sin 2t_0|}.$$

5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$.

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-\frac{1}{x^2}|}{(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot x-(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}\,(2x^2-1)}{x^2}.$$

令 $\rho'=0$, 得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho<0$; 当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho>0$, 所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是ρ的极小值点, 同时也最小值点. 当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此在曲线上点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ln\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处曲率半径最小, 最小曲率半径为 $\rho=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 在点 (x, y) 处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

解 $y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $y''=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

在点 (x, y) 处的曲率半径为

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a})^{3/2}}{|\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}|}=\frac{(\operatorname{ch}^2\frac{x}{a})^{3/2}}{|\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}|}=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a}.$$

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m) 作俯冲飞行, 在坐标原点 O 处飞机的速度为 v=200m/s 飞行员体重 G=70Kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y'=\frac{2x}{10000}=\frac{x}{5000}$, $y''=\frac{1}{5000}$; $y'|_{x=0}=0$, $y''|_{x=0}=\frac{1}{5000}$.

$$\rho|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+0^2)^{3/2}}{\frac{1}{5000}}=5000.$$

向心力 $F=\frac{mV^2}{\rho}=\frac{70\times 200^2}{5000}=560$ (牛顿).

飞行员离心力及它本身的重量对座椅的压力为

$79\times9.8+560=1246$(牛顿).

8. 汽车连同载重共 5t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6km/h, 桥的跨度为 10m, 拱的矢高为 0.25m . 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

解 如图取直角坐标系, 设抛物线拱桥方程为 $y=ax^2$, 由于抛物线过点(5, 0.25), 代入方程得

$$a=\frac{0.25}{25}=0.01,$$

于是抛物线方程为 $y=0.01x^2$.

$y'=0.02x$, $y''=0.02$.

$$\rho|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+0^2)^{3/2}}{0.02}=50.$$

向心力为 $F=\frac{mV^2}{\rho}=\frac{5\times10^3(\frac{21.6\times10^3}{3600})^2}{50}=3600$ (牛顿).

因为汽车重为 5 吨, 所以汽车越过桥顶时对桥的压力为

$5\times10^3\times9.8-3600=45400$(牛顿).

*9. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $(\frac{\pi}{4},1)$ 处的曲率圆方程.

*11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

总习题三

1. 填空:

设常数 $k>0$, 函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在$(0,+\infty)$内零点的个数为________.

解 应填写 2.

提示: $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$.

在$(0,+\infty)$内, 令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$.

因为$f''(x)<0$, 所以曲线$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$在$(0, +\infty)$内是凸的, 且驻点$x=e$一定是最大值点, 最大值为$f(e)=k>0$.

又因为$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, 所以曲线经过$x$轴两次, 即零点的个数为2.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在$[0, 1]$上$f''(x)>0$, 则$f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$几个数的大小顺序为(　　　).

$(A) f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$;　　　$(B) f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

$(C) f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$;　　　$(D) f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

解 选择B.

提示: 因为$f''(x)>0$, 所以$f'(x)$在$[0, 1]$上单调增加, 从而$f'(1)>f'(x)>f'(0)$.

又由拉格朗日中值定理, 有$f(1)-f(0)=f'(\xi)$, $\xi\in[0, 1]$, 所以

$$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0).$$

3. 列举一个函数$f(x)$满足: $f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a,b)内除某一点外处处可导, 但在(a, b)内不存在点ξ, 使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 取$f(x)=|x|$, $x\in[-1, 1]$.

易知$f(x)$在$[-1, 1]$上连续, 且当$x>0$时$f'(x)=1$; 当$x>0$时, $f'(x)=-1$; $f'(0)$不存在, 即$f(x)$在$[-1, 1]$上除$x=0$外处处可导.

注意$f(1)-f(-1)=0$, 所以要使$f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$成立, 即$f'(\xi)=0$, 是不可能的.

因此在$(-1, 1)$内不存在点ξ, 使$f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$.

4. 设$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$, 求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

解 根据拉格朗日中值公式, $f(x+a)-f(x)=f'(\xi)\cdot a$, ξ 介于 $x+a$ 与 x 之间.

当$x\to\infty$ 时, $\xi\to\infty$, 于是

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim_{x\to\infty} f'(\xi)\cdot a=a\lim_{\xi\to\infty} f'(\xi)=ak.$$

5. 证明多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0, 1]$上不可能有两个零点.

证明　$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$, 因为当$x\in(0, 1)$时, $f'(x)<0$, 所以$f(x)$在$[0, 1]$上单调减少. 因此, $f(x)$ 在$[0, 1]$上至多有一个零点.

6. 设$a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$, 证明多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$在$(0,1)$内至少有一个零点.

证明 设$F(x)=a_0x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, 则$F(x)$在$[0, 1]$上连续, 在$(0, 1)$内可导, 且$F(0)=F(1)=0$. 由罗尔定理, 在$(0, 1)$内至少有一个点$\xi$, 使$F(\xi)=0$. 而$F'(x)=f(x)$, 所以$f(x)$在$(0, 1)$内至少有一个零点.

7. 设$f(x)$在$[0, a]$上连续, 在$(0, a)$内可导, 且$f(a)=0$, 证明存在一点$\xi\in(0, a)$, 使

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

证明 设$F(x)=xf(x)$, 则$F(x)$在$[0, a]$上连续, 在$(0, a)$内可导, 且$F(0)=F(a)=0$. 由罗尔定理, 在$(0, a)$内至少有一个点ξ, 使$F(\xi)=0$. 而$F(x)=f(x)+xf'(x)$, 所以$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

8. 设 $0<a<b$, 函数$f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 试利用柯西中值定理, 证明存在一点$\xi\in(a, b)$使 $f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

证明 对于$f(x)$和 $\ln x$ 在$[a, b]$上用柯西中值定理, 有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},\ \xi\in(a, b),$$

即 $$f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a},\ \xi\in(a, b).$$

9. 设 $f(x)$、$g(x)$都是可导函数, 且$|f'(x)|<g'(x)$, 证明: 当 $x>a$ 时, $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

证明 由条件$|f'(x)|<g'(x)$得知, $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$, 且有 $g'(x)>0$, $g(x)$是单调增加的, 当 $x>a$ 时, $g(x)>g(a)$.

因为$f(x)$、$g(x)$都是可导函数, 所以$f(x)$、$g(x)$ 在$[a, x]$上连续, 在(a, x)内可导, 根据柯西中值定理, 至少存在一点$\xi\in(a, x)$, 使 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

因此, $\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$, $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$ (其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n>0$).

解 (1) $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-x^x)'}{(1-x+\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-x^{x+1}(\ln x+1)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^{x+1}(\ln x+1+\frac{1}{x})(\ln x+1)-x^x}{-1}=2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x-\ln(1+x)]'}{[x\ln(1+x)]'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})}$,

因为

$$\lim_{x\to +\infty}x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to +\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim_{x\to +\infty}e^{x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(4)令 $y=[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$．则 $\ln y=nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$，因为

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{n[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\cdot(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n)\cdot(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}$$

$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)$.

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}=\lim\limits_{x\to\infty}y=a_1\cdot a_2\cdots a_n$.

11．证明下列不等式:

(1)当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$；

(2):当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$.

证明 (1)令 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$, $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

因为 $f'(x)=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}>\dfrac{x-\tan x}{x^2}>0$,

所以在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内 $f(x)$为单调增加的. 因此当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时有]

$$\frac{\tan x_1}{x_1}<\frac{\tan x_2}{x_2}, \text{ 即 } \frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}.$$

(2)要证$(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$, 即证$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

设$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$, 则$f(x)$在$[0, +\infty)$上连续, $f'(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x^2}$.

因为当 $x>0$ 时, $\ln(1+x)>0$, $1-\dfrac{1}{1+x^2}>0$, 所以$f'(x)>0$, $f(x)$在$[0, +\infty)$上单调增加.

因此, 当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)$, 而$f(0)=0$, 从而$f(x)>0$, 即$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x} & x>0 \\ x+2 & x\le 0 \end{cases}$, 求$f(x)$的极值.

解 $x=0$ 是函数的间断点.

当 $x<0$ 时, $f'(x)=1$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$.

令 $f'(x)=0$, 得函数的驻点 $x=\dfrac{1}{e}$.

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,\dfrac{1}{e})$	$\dfrac{1}{e}$	$(\dfrac{1}{e},+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	2 极大值	↘	$e^{-\frac{2}{e}}$ 极小值	↗

函数的极大值为 $f(0)=2$, 极小值为 $f(\dfrac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

13. 求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

解 $2x-y-xy'+2yy'=0$, $y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$. 当 $x=\dfrac{1}{2}y$ 时, $y'=0$.

将 $x=\dfrac{1}{2}y$ 代入椭圆方程, 得 $\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}y^2+y^2=3$, $y=\pm 2$.

于是得驻点 $x=-1$, $x=1$. 因为椭圆上纵坐标最大和最小的点一定存在, 且在驻点处取得, 又当 $x=-1$ 时, $y=-2$, 当 $x=1$ 时, $y=2$, 所以纵坐标最大和最小的点分别为$(1, 2)$和$(-1, -2)$.

14. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解 令$f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}\,(x>0)$, 则

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x,$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x=\frac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令$f'(x)=0$, 得唯一驻点$x=e$.

因为当$0<x<e$时, $f'(x)>0$; 当$x>e$时, $f'(x)<0$, 所以唯一驻点$x=e$为最大值点.

因此所求最大项为$\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}=\sqrt[3]{3}$.

15. 曲线弧$y=\sin x\,(0<x<\pi)$上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$,

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}\ (0<x<\pi),$$

$$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}(-2\cos x\sin x)\cdot\sin x-(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}\cos x(3\sin^2 x+\cos^2 x+1)}{\sin^2 x}.$$

在$(0,\pi)$内, 令$\rho'=0$, 得驻点$x=\frac{\pi}{2}$.

因为当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, $\rho'<0$; 当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$时, $\rho'>0$, 所以$x=\frac{\pi}{2}$是ρ的极小值点, 同时也是ρ的最小值点, 最小值为$\rho\dfrac{(1+\cos^2\frac{\pi}{2})^{3/2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=1$.

16. 证明方程$x^3-5x-2=0$只有一个正根. 并求此正根的近似值, 使精确到本世纪末10^{-3}.

解 设$f(x)=x^3-5x-2$, 则

$$f'(x)=3x^2-5,\ f''(x)=6x.$$

当$x>0$时, $f''(x)>0$, 所以在$(0,+\infty)$内曲线是凹的, 又$f(0)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x-2)=+\infty$, 所以在$(0,+\infty)$内方程$x^3-5x-2=0$只能有一个根.

(求根的近似值略)

17. 设$f''(x_0)$存在，证明$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$.

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{[f'(x_0+h)-f'(x_0)]+[f(x_0)-f'(x_0-h)]}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f'(x_0-h)}{h}]=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0).$$

18. 设$f^{(n)}(x_0)$存在，且$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$，证明$f(x)=o[(x-x_0)^n]$ $(x\to x_0)$.

证明 因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0,$$

所以$f(x)=o[(x-x_0)^n]$ $(x\to x_0)$.

19. 设$f(x)$在(a, b)内二阶可导，且$f''(x)\geq 0$. 证明对于(a, b)内任意两点x_1, x_2及$0\leq t\leq 1$，有$f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

证明 设$(1-t)x_1+tx_2=x_0$. 在$x=x_0$点的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \text{ (其中}\xi\text{介于 }x\text{ 与 }x_0\text{之间)}.$$

因为$f''(x)\geq 0$，所以

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

因此

$$f(x_1)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),\quad f(x_2)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0).$$

于是有

$$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geq(1-t)[f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)]+t[f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)]$$

$$=(1-t)f(x_0)+tf(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+tx_2]-f'(x_0)[(1-t)x_0+tx_0]$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)x_0-f'(x_0)x_0$$

$$=f(x_0),$$

即 $f(x_0)\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$,

所以　$f[(1-t)x_1+tx_2]\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ $(0\le t\le 1)$.

20. 试确定常数 a 和 b, 使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

解 $f(x)$是有任意阶导数的, 它的 5 阶麦克劳公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+o(x^5)$$

$$=(1-a-b)x+\frac{a+4b}{3!}x^3+\frac{-a-16b}{5!}x^5+o(x^5).$$

要使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小, 就是要使极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}[\frac{1-a-b}{x^4}+\frac{a+4b}{3!x^2}+\frac{-a-16b}{5!}+\frac{o(x^5)}{x^5}]$$

存在且不为 0. 为此令

$$\begin{cases}1-a-b=0\\ a+4b=0\end{cases},$$

解之得 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.

因为当 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\frac{-a-16b}{5!}=\frac{1}{30}\ne 0,$$

所以当 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ 时, $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.