课程名称：线性代数　班级：　学号□□□□□□□□□□　姓名：

装　订　线

东北林业大学
2016－2017 学年第一学期阶段考试试题

考试科目：线性代数　　　　**试卷总分：**100 分

考试时间：90 分钟　　　　**占总评比例：**30 %

题号	一	二	三	卷面分
得分				
评卷教师				

$|A-2B| = 2^3|A||B|$

$|A|\cdot|2B|$

$|A|\cdot 2^3|B|$

得分	

一、填空题（本大题共 7 小题，每空 2 分，总计 20 分）

1、行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$，则 x 的取值范围是 $\underline{x\neq 0 \text{ 且 } x\neq 2}$；

2、行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} 5a_{11} & 4a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ 5a_{21} & 4a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ 5a_{31} & 4a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{-5}$；

3、令 a,b,c,d 为任意实数，则 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \underline{-abcd}$；

$|A^*| = |A|^{n-1}$　　$|A||A-E| = 6$

4、A 为 5 阶方阵，$|A| = 2$，$|A-E_5| = 3$，则 $|A^*| = \underline{16}$，$|A^2-A| = \underline{6}$；

5、矩阵 A 和 B 都是 3 阶可逆阵，且 $|A| = 5$，$|B| = -1$，则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}}$；

$B^{-1} = -A$

$A^{-1} =$

行列式 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ A & 2B \end{vmatrix} = \underline{-40}$；

$A_{m\times m} C_{m\times n} = C_{m\times n} B_{n\times n}$

6、已知矩阵 A,B,C 满足 $AC = CB$，其中 C 为 m 行 n 列的矩阵，则矩阵 A 的行数为 $\underline{m}$，矩阵 B 的列数为 $\underline{n}$。

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

7、设多项式 $f(x) = x^3 - 3x + 2$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则矩阵多项式 $f(A) = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$。

开课学院：理学院　　　　教研室主任（专业负责人）：王文龙

得分	

二、证明题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，总计 20 分）

1、设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$，E 为 n 阶单位阵，$H=E-2XX^T$，

（1）证明：H 是对称矩阵；　　　（2）证明：$H^T=H^{-1}$。

$H^T=(E-2XX^T)^T$

$=E^T-2(X^T)^TX^T$

$=E-2XX^T=H$

证明：（1）$H^T=\left(E-2XX^T\right)^T=E^T-\left(2XX^T\right)^T=E-2\left(X^T\right)^TX^T$

$$=E-2XX^T=H$$

所以：H 是对称矩阵；

（2）$HH^T=HH=\left(E-2XX^T\right)\left(E-2XX^T\right)$

$$=E^2-2XX^T-2XX^T+4XX^TXX^T$$

$$=E-4XX^T+4X\left(X^TX\right)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E。$$

$HH^T=HH=(E-2XX^T)(E-2XX^T)$

$=E^2-2XX^T-2XX^T+4XX^TXX^T$

$=E-4XX^T+4XX^T$

$=E$

所以：$H^T=H^{-1}$

2、设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明：若 $|A|=0$，则 $|A^*|=0$。

假设 $|A^*|\neq 0$ 则 A^*可逆

证明：反证法。假设 $|A^*|\neq 0$，则 A^* 是可逆矩阵。

$AA^*=|A|\cdot E\Rightarrow 0$

由公式 $AA^*=|A|E\Rightarrow AA^*=0$

$AA^*(A^*)^{-1}=AE=0$

$\Rightarrow A=0$

两边同时右乘 $\left(A^*\right)^{-1}$，可得：$A=0$

从而推得 $A^*=0$，这与假设 $|A^*|\neq 0$ 矛盾，所以假设不成立，即 $|A^*|=0$。 $A^*=0$

2016 年 11 月 16 日

课程名称：线性代数　班级：

学号 □□□□□□□□□□ 姓名：

装　订　线

东北林业大学
2016－2017 学年第一学期阶段考试试题

得分	

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 15 分，总计 60 分）

1、已知行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$，（1）计算 D 的值；　（2）$A_{11},A_{12},A_{13},A_{14}$ 分别为 D 的第 1 行元素对应的代数余子式，计算 $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$ 的值。

解：（1）$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=48$

（2）$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$

替换

$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&-2&-3\\0&-1&0&-3\\0&-1&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&-2&-3\\0&0&-2&-6\\0&0&-4&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-6\\-4&-4\end{vmatrix}=-16$

$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}$

2、λ,μ 取何值时，齐次线性方程组：$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解。

$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\0&\mu&0\end{vmatrix}$

解：系数行列式 $D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\0&\mu&0\end{vmatrix}=-\mu\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&1\end{vmatrix}=-\mu(\lambda-1)$

$(-1)^{3+2}\mu\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&1\end{vmatrix}$

如果 $D=0$，则方程组有非零解，

即 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时，方程组有非零解

开课学院：理学院　　　　教研室主任（专业负责人）：王文龙

$(A-B)A=2E_n$

$BA=A^2-2E_n$

$B=(A^2-2E_n)A^{-1}$

$=A-2A^{-1}$

3、已知 A,B 都是 n 阶方阵，且满足 $A^2-BA-2E_n=0$；

$(A-B)A=2E_n$

（1）证明：$A-B$ 是可逆矩阵；（2）如果 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求 B。

解：（1）$A^2-BA-2E_n=0\Rightarrow(A-B)A=2E_n\Rightarrow(A-B)\dfrac{A}{2}=E_n$，故 $A-B$ 是可逆矩阵。

（2）$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$，所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$A^2-BA-2E_n=0\Rightarrow BA=A^2-2E_n\Rightarrow B=\left(A^2-2E_n\right)A^{-1}=A-2A^{-1}$$

推出 $B=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-2&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$

4、已知分块对角矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$，

（1）计算 $|A|$；（2）计算 $(A_1)^{100}$；（3）计算 A^n。

$A^n\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}$

解：（1）$|A|=|A_1||A_2|=1\times0=0$；（2）$(A_1)^{100}=\begin{pmatrix}1&0\\100\lambda&1\end{pmatrix}$；

（3）$A_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{3\times1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}}_{1\times3}$，所以 $(A_2)^n=6^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$

$$A^n=\begin{pmatrix}(A_1)^n&0\\0&(A_2)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\n\lambda&1&0&0&0\\0&0&6^{n-1}&6^{n-1}&6^{n-1}\\0&0&2\cdot6^{n-1}&2\cdot6^{n-1}&2\cdot6^{n-1}\\0&0&3\cdot6^{n-1}&3\cdot6^{n-1}&3\cdot6^{n-1}\end{pmatrix}$$