课程名称：线性代数 班级：

学号□□□□□□□□□□ 姓名：

装 订 线

东北林业大学

2016－2017 学年第一学期阶段考试试题

考试科目：线性代数 **试卷总分：**100 分

考试时间： 90 分钟 **占总评比例：**30 %

题号	一	二	三	卷面分
得分				
评卷教师				

得分	

一、填空题（本大题共 7 小题，每空 2 分，总计 20 分）

1、行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$，则 x 的取值范围是 $\underline{x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 2}$；

2、行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} 5a_{11} & 4a_{11} - a_{12} & a_{13} \\ 5a_{21} & 4a_{21} - a_{22} & a_{23} \\ 5a_{31} & 4a_{31} - a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{-5}$；

3、令 a,b,c,d 为任意实数，则 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \underline{-abcd}$；

4、A 为 5 阶方阵，$|A| = 2$，$|A - E_5| = 3$，则 $|A^*| = \underline{16}$，$|A^2 - A| = \underline{6}$；

5、矩阵 A 和 B 都是 3 阶可逆阵，且 $|A| = 5$，$|B| = -1$，则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}}$；

行列式 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ A & 2B \end{vmatrix} = \underline{-40}$；

6、已知矩阵 A,B,C 满足 $AC = CB$，其中 C 为 m 行 n 列的矩阵，则矩阵 A 的行数为 $\underline{m}$，矩阵 B 的列数为 $\underline{n}$。

7、设多项式 $f(x) = x^3 - 3x + 2$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则矩阵多项式 $f(A) = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$。

开课学院：理学院 教研室主任（专业负责人）：王文龙

东北林业大学理学院数学系

得分	

二、证明题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，总计 20 分）

1、设列矩阵 $X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$ 满足 $X^TX=1$，E 为 n 阶单位阵，$H=E-2XX^T$，

（1）证明：H 是对称矩阵；（2）证明：$H^T=H^{-1}$。

证明：（1）$H^T=\left(E-2XX^T\right)^T=E^T-\left(2XX^T\right)^T=E-2\left(X^T\right)^TX^T$

$$=E-2XX^T=H$$

所以：H 是对称矩阵；

（2）$HH^T=HH=\left(E-2XX^T\right)\left(E-2XX^T\right)$

$$=E^2-2XX^T-2XX^T+4XX^TXX^T$$

$$=E-4XX^T+4X\left(X^TX\right)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E。$$

所以：$H^T=H^{-1}$

2、设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明：若 $|A|=0$，则 $\left|A^*\right|=0$。

证明：反证法。假设 $\left|A^*\right|\neq 0$，则 A^* 是可逆矩阵。

由公式 $AA^*=|A|E\Rightarrow AA^*=0$

两边同时右乘 $\left(A^*\right)^{-1}$，可得：$A=0$

从而推得 $A^*=0$，这与假设 $\left|A^*\right|\neq 0$ 矛盾，所以假设不成立，即 $\left|A^*\right|=0$。

东北林业大学理学院数学系

课程名称：线性代数　班级：

装　订　线

学号□□□□□□□□□□　姓名：

东北林业大学

2016－2017 学年第一学期阶段考试试题

得分	

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 15 分，总计 60 分）

1、已知行列式$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$，（1）计算$D$的值；（2）$A_{11},A_{12},A_{13},A_{14}$分别为$D$的第 1 行元素对应的代数余子式，计算$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$的值。

解：（1）$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=48$

（2）$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&-2&-3\\0&-1&0&-3\\0&-1&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&-2&-3\\0&0&-2&-6\\0&0&-4&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-6\\-4&-4\end{vmatrix}=-16$$

2、λ,μ取何值时，齐次线性方程组：$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解。

解：系数行列式$D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\0&\mu&0\end{vmatrix}=-\mu\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&1\end{vmatrix}=-\mu(\lambda-1)$

如果$D=0$，则方程组有非零解，

即$\mu=0$或$\lambda=1$时，方程组有非零解

东北林业大学理学院数学系

3、已知 A, B 都是 n 阶方阵，且满足 $A^2 - BA - 2E_n = 0$；

（1）证明：$A-B$ 是可逆矩阵；（2）如果 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 B。

解：（1）$A^2 - BA - 2E_n = 0 \Rightarrow (A-B)A = 2E_n \Rightarrow (A-B)\dfrac{A}{2} = E_n$，故 $A-B$ 是可逆矩阵。

（2）$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$，所以 A 可逆，且 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A^2 - BA - 2E_n = 0 \Rightarrow BA = A^2 - 2E_n \Rightarrow B = (A^2 - 2E_n)A^{-1} = A - 2A^{-1}$$

推出 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4、已知分块对角矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，其中 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，

（1）计算 $|A|$；（2）计算 $(A_1)^{100}$；（3）计算 A^n。

解：（1）$|A| = |A_1||A_2| = 1 \times 0 = 0$；（2）$(A_1)^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 100\lambda & 1 \end{pmatrix}$；

（3）$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，所以 $(A_2)^n = 6^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} (A_1)^n & 0 \\ 0 & (A_2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ n\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^{n-1} & 6^{n-1} & 6^{n-1} \\ 0 & 0 & 2\cdot 6^{n-1} & 2\cdot 6^{n-1} & 2\cdot 6^{n-1} \\ 0 & 0 & 3\cdot 6^{n-1} & 3\cdot 6^{n-1} & 3\cdot 6^{n-1} \end{pmatrix}$$

东北林业大学理学院数学系