课程名称：

班级：

学号

姓名：

装 订 线

东北林业大学

2014—2015 学年第 1 学期 期末考试试题

考试科目： 线性代数 **试卷总分：** 100 分

考试时间： 120 分钟 $AX=B$ **占总评比例：** 50%

题号	一	二	三	四	五	六	卷面分
得分							
评卷教师							

得分	

一、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，总计 20 分）

1、设向量空间 $V=\{(0,0,x_3,\cdots,x_n)\mid x_i\in R, i=3,\cdots,n\}$，则 V 的维数等于 $n-2$；

2、正交矩阵的定义：n阶矩阵A满足：$A^{-1}=A^T$，则称A为正交矩阵；

3、设 A 为3阶方阵，如果 $R(A)=2$，则 $R(A^*)=1$；

4、向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ 的线性相关性为：线性相关； $R=3<4$

$A=B\cdot(P^{10})^{-1}$

5、设 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，且 $P^{10}A=B$，则 $A=\begin{pmatrix}-69&-78&-87\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$；

$f(A)=A^3-A^2+A$

6、设3阶方阵 A 的特征值为 $1,-2,3$，则 $|A^3-A^2+A|=-294$；

7、$f=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值范围为：$t>2$；

8、设二次型 $f=2x_1^2+4x_2^2-6x_3^2$，则其规范形为：$y_1^2+y_2^2-y_3^2$；

9、已知 $B_{m\times n}=A_{m\times t}P_{t\times n}$，记矩阵 A 的列向量组为 S_1，矩阵 B 的列向量组为 S_2，则向量组 S_1 的秩 R_{S_1} 与向量组 S_2 的秩 R_{S_2} 的大小关系是：$R_{S_1}\geq R_{S_2}$；

10、设 $R(A_{m\times n})=r$，且非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x_{n\times 1}=b_{m\times 1}$ 有无穷多解，其所有解构成的向量组记为 S，则向量组 S 的秩 $R_S=n-r+1$。

开课学院：理学院 教研室主任（专业负责人）：

得分	

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，总计 10 分）

1、设 A,B,C 都是 n 阶方阵，如果 $ABC=E_n$，则下列结论一定成立的是（C）

A) $BAC=E_n$；　　B) $ACB=E_n$；　　C) $CAB=E_n$；　　D) $CBA=E_n$。

2、设齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解的情况是（D）

A) 有无穷多解；　　B) 有唯一解；　　C) 无解；　　D) 无法判断。

3、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为四个 4 维向量，α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一，则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为（B）

A) 4；　　B) 3；　　C) 2；　　D) 1。

4、设方阵 A 与 B 相似，则下列结论正确的是（D）

A) $A-\lambda E=B-\lambda E$；　　B) A 与 B 都相似于同一个对角矩阵；

C) A 与 B 有相同的特征值和特征向量；　　D) 对任意 $k\in R$，$A-kE$ 与 $B-kE$ 相似。

5、设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，p_1 和 p_2 分别为 λ_1 和 λ_2 所对应的特征向量，则下列结论正确的是（A）

A) p_1 和 p_2 线性无关；　　B) p_1 和 p_2 线性相关；

C) p_1 和 p_2 正交；　　D) p_1+p_2 仍为 A 的特征向量。

得分	

三、（本大题 10 分）

$n=3$

$x_1-x_3=a_1+a_2$

$x_2-x_3=a_2$

$x_2=k+a_2$

当 a_1,a_2,a_3 满足什么条件时，方程组 $\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ -x_1+x_3=a_3 \end{cases}$ 有解？并写出通解.

解： $$(A\,|\,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & a_2 \\ -1 & 0 & 1 & a_3 \end{array}\right) \xrightarrow{行} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a_1+a_2 \\ 0 & 1 & -1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3 \end{array}\right)$$

所以当 $a_1+a_2+a_3=0$ 时，$R(A)=R(A\,|\,\beta)=2$，原方程组有解，此时，令 $x_3=k$，则通解为

<3　　$3-2=1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k+a_1+a_2 \\ k+a_2 \\ k \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$，k 为任意常数。

$(k\in R)$

东北林业大学

2014－2015 学年第 1 学期 期末考试试题

课程名称：　班级：　学号□□□□□□□□ 姓名：

装　订　线

得分	

四、计算题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，总计 30 分）

1、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维列向量，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 且 $|A|=5$，计算 $|B|$。

解：$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，

所以 $|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=5\times 2=10$

2、设 A 为 4 阶方阵，$R(A)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解向量，其中 $\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\9\\9\\4\end{pmatrix},\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\8\\8\\5\end{pmatrix}$，（1）求 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；（2）求 $Ax=b$ 的通解.

解：（1）由已知 $R(\boldsymbol{A})=3$，所以 $\boldsymbol{A}x=0$ 的基础解系含有 $n-R(\boldsymbol{A})=4-3=1$ 个非零向量，

令 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\neq 0$，

且 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)]=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（2）令 $\boldsymbol{\eta}^*=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\9\\9\\4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A\eta}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $Ax=b$ 的一个特解，$Ax=b$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}^*+k\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\9\\9\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},k$ 为任意常数。

开课学院：理学院　　　　教研室主任（专业负责人）：

3、设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$，

（1）讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性；

（2）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，求其一个最大无关组；如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，利用施密特正交化的方法求与其等价的正交向量组 β_1,β_2,β_3。

解：（1）$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $R(A)=3$，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

（2） $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix};$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

β_1,β_2,β_3 即为所求正交向量组。

课程名称：

班级：

学号□□□□□□□□

姓名：

装 订 线

得分	

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，总计 20 分）

1、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=3\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，证明 β_1,β_2,β_3 线性无关。

证 明：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&3&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$，其中 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&3&-2\\0&2&1\end{vmatrix}=9\neq 0$，矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&3&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$ 可逆，所以可得：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&3&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，故：

$3\geq R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\geq R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，即 β_1,β_2,β_3 线性无关。

2、设 A 为 n 阶正定矩阵，$k>0$ 为实数，证明：$|A+kE_n|>k^n$。

证明：由已知 A 的特征值都大于 0 且 A 可以相似对角矩阵，即存在可逆矩阵 P，使得：

$$A=P\Lambda P^{-1},$$

其中 $\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i>0$ 为 A 的特征值，$i=1,2,\cdots,n$。

从而 $|A+kE_n|=|P\Lambda P^{-1}+PkE_nP^{-1}|=|P|\cdot|\Lambda+kE_n|\cdot|P^{-1}|$。

$$=|\Lambda+kE_n|=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+k)>k^n$$

得分	

六、（本大题 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$，矩阵 B 与 A 相似，（1）计算 A 的特征值与特征向量；（2）计算 $|B|$；

（3）证明：B^* 与 A^* 相似。

解（1）$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&1\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$

所以特征值为：$\lambda_1=1$（二重根），$\lambda_2=-1$（单根）

对于 $\lambda_1=1$，$(\lambda_1E-A)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_1-x_3=0$

所以属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 不全为 0.

对于 $\lambda_2=-1$，$(\lambda_2E-A)=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&-2&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$ $x_1=-1$ $x_2=1$ $x_3=1$

所以属于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为：$k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k\neq0$

（2）因为 B 与 A 相似，所以 $|B|=|A|=-1$

（3）因为 $|A|=|B|=-1$，所以 A,B 都是可逆矩阵，且 $A^*=-A^{-1}$，$B^*=-B^{-1}$。由 B 与 A 相似，知存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，

即 $\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=B^{-1}\Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}\Rightarrow P^{-1}\left(-A^{-1}\right)P=\left(-B^{-1}\right)\Rightarrow P^{-1}A^*P=B^*$

即 B^* 与 A^* 相似。