东北林业大学课程期末考试答案评分标准

课程名称：线性代数　学分：2.5　教学大纲编号：

试卷编号：　考试方式：笔试　考试时间：120 分钟

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，总计 10 分）

1、$6^{2016}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$；2、$\underline{-3}$；3、$\underline{2}$；4、$\underline{-16}$；5、$\underline{1}$。

二、证明题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，合计 30 分）

1、证明：证明：由于 A 可逆，则 A^{-1} 存在. 由 $A^*A=|A|E$，

有 $(A^*)=|A|A^{-1}$

则 $A^*(A^{-1})^*=|A|A^{-1}\,|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=|AA^{-1}|A^{-1}A=|E|E=\mathrm{E}$

则 A^* 可逆且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

2、证明：一方面，

$R(A+E_n)+R(A-E_n)\ge R(A+E_n+E_n-A)=R(2E_n)=n$

另一方面，因为 $(A+E_n)(A-E_n)=A^2-E_n=0_{n\times n}$，

所以 $R(A+E_n)+R(A-E_n)\le n$。

因此 $R(A+E_n)+R(A-E_n)=n$。

3、证明：（1）因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以 α_2,α_3 线性无关。已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，因此 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示并且表示法唯一。

（2）反证法，假设 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。则由（1）可得 α_4 能由 α_2,α_3 线性表示。因此 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。这与题设矛盾，故假设不成立。

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 15 分，总计 60 分）

1、解：（1）$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=74$。

（2）$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=8$。

2、解：方程组的增广矩阵为 $B\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$,

课程名称：线性代数　学分：2.5　教学大纲编号：
试卷编号：　考试方式：笔试　考试时间：120　分钟

则对应齐次线性方程组解集的秩 $R_S = 4-3 = 1$。..

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -8 \\ x_2 - x_3 = 13 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 8 \\ x_2 = x_3 + 13 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

令 $x_3 = 0$　得特解 $\eta = (-8, 13, 0, 2)^T$

令 $x_3 = 1$，　得对应齐次方程组的基础解系为 $\xi = (-1, 1, 1, 0)^T$

因此该方程租的通解为 $x = c\xi + \eta$　($c \in R$).

3、解：由 $|A| = |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = -2 \neq 0, |B| = |(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| = 4 \neq 0$，

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关。

因为 $\dim R^3 = 3$．所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是 R^3 的基.　..

（2）$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_3$，$\alpha_2 = -\frac{3}{2}\beta_1 - \beta_2 + \frac{3}{2}\beta_3$。　..

（3）由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过度矩阵 $P = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$　..

4、解：(1) $f(\lambda) = |A - \lambda E_3| = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0$，

特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$。

对于 $\lambda_1 = -1$，有 $A + E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$\lambda_1 = -1$ 的特征向量为：$x_1 = k_1(1, 0, 1)^T$，$k_1 \neq 0$，

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$，有 $A - E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的特征向量为：$x_2 = k_2(0, 1, -1)^T + k_3(1, 0, 4)^T$，

$k_2, k_3 \neq 0$。　...

（2）因为 $f(x) = x^2 - 3x + 4$，所以 $f(A) = A^2 - 3A + 4E_3$

由于 A 的特征值为 $-1, 2, 2$，则 $f(A)$ 的特征值为

$f(-1) = 8, f(2) = 2, f(2) = 2$，因此 $|f(A)| = 8 \times 2 \times 2 = 32$。....