一、填空题（本大题共 **8** 小题，每空 **2** 分，总计 **20** 分）

1、 $\underline{6}$；　　2、 $\underline{-24}$， $\underline{6^{99}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}$；　　3、 $\underline{40}$， $\underline{\dfrac{2}{3}}$；

4、 $\underline{\dfrac{A-E}{2}}$；　　5、 $\underline{\begin{pmatrix}a_1^{-1}&&&\\&a_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^{-1}\end{pmatrix}}$；　　6、 $\underline{\begin{pmatrix}0&B^T\\A^T&0\end{pmatrix}}$；

7、 $\underline{\lambda=-1}$；　　8、 $\underline{16}$

二、证明题（本大题共 **2** 小题，每小题 **10** 分，总计 **20** 分）

1、（1）由 $A^T=A$，故 $P^T=\left(B^TAB\right)^T=B^TA^T\left(B^T\right)^T=B^TAB=P$

（2） $\left(P^2\right)^T=\left(PP\right)^T=P^TP^T=PP=P^2$

（3） $f(P)=P^2+P-2E$，

$$f(P)^T=\left(P^2\right)^T+P^T-\left(2E\right)^T=\left(P^2+P-2E\right)=f(P)$$

2、（1） $AA^*=|A|E_n$， 所以 $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}\neq 0$，故 A^* 可逆；

（2） $A=|A|\left(A^*\right)^{-1}$，由 $\left|A^*\right|=-2$，得 $|A|=-2$，

从而 $A=-2\left(A^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

三、计算题（本大题共 **4** 小题，每小题 **15** 分，总计 **60** 分）

（1） $D_n \xlongequal{\text{所有列加到第1列}} \begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x+(n-1)a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix}1&0&\cdots&\\1&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&&\cdots&x-a\end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$

（2） 当 $n=1$ 时， $D_n=x=0\Rightarrow$ $x=0$

当 $n>1$ 时， $D_n=\left[x+2(n-1)\right](x-2)^{n-1}=0$

$\Rightarrow x=-2(n-1)$ 或 $x=2$

2、（1）此行列式为范德蒙行列式，所以

$$D=(4-2)(4+1)(4-1)(1-2)(1+1)(-1-2)=180$$

（2）$2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}=-A_{44}$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\4&1&1\end{vmatrix}=-(1-2)(1+1)(-1-2)=\ -6$$

3、（1）$|A|=\begin{vmatrix}3&4\\4&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\5&1\end{vmatrix}=-25$

（2）$A^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^{-1}&\\&\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{25}&\frac{4}{25}&0&0\\\frac{4}{25}&\frac{-3}{25}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-5&1\end{pmatrix}$

（3）$A^{2}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^{2}&\\&\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0&0&0\\0&25&0&0\\0&0&1&0\\0&0&10&1\end{pmatrix}$

解：（1）$|P|=2$，$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

（2）$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}$$

（3）$A=P\Lambda^{n}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-2^{n+1}&2^{n+1}-2\\4-2^{n+2}&2^{n+2}-2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2-2^{n}&2^{n}-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}$$