课程名称：线性代数　班级　学号□□□□□□□□□□　姓名：

装　订　线

东北林业大学

2016－2017 学年第 1 学期 期末考试答案

考试科目： 线性代数　　　　**试卷总分：** 100 分

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，合计 10 分）

1、18；2、3；3、-1；4、± 1；5、n。

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，合计 10 分）

1、D)　2、B)　3、C)　4、A)　5、C)

三、证明题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，合计 40 分）

1、证明：β 可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，

即存在 x_1,x_2,x_3 使得 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$。设 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，

则此表示法唯一 $\Leftrightarrow$ $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$ 有唯一解　$\Leftrightarrow$ $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$

$\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

2、证明：设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 与构成的矩阵为 A 与 B，

于是 $B=AK$，其中 $K=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$。

因为 $|K|=(n-1)(-1)^{n-1}\neq 0$，所以 K 可逆。即得 $A=BK^{-1}$。

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 能由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 线性表示，　从而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 等价。

3、证明：（1） $R(A)=R(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le R(\alpha\alpha^T)+R(\beta\beta^T)\le R(\alpha)+R(\beta)\le 1+1=2$；

（2）当 α 与 β 线性相关时，若 α 与 β 均为零向量，则 A 为零矩阵，结论成立。

若 α 与 β 不全为零向量，不妨令 α 不为零向量，因此时 α 与 β 成比例，即存在数 k（可能为零），使得

$\beta=k\alpha$。则 $R(A)=R((1+k^2)\alpha\alpha^T)=R(\alpha\alpha^T)\le R(\alpha)\le 1$。

4、设 A 与 B 都是 n 阶方阵, 证明 AB 与 BA 有相同的特征值。

证明：若 0 为 AB 特征值，由 $|AB|=|BA|$，得 0 为 BA 的特征值。

若 $\lambda\neq 0$ 为 AB 特征值，设 λ 对应的特征向量为 x，则 $ABx=\lambda x$。

显然 $Bx\neq\vec{0}$。两边左乘以 B 得 $BA(Bx)=\lambda(Bx)$，得 λ 也为 BA 的特征值，对应的特征向量为 Bx。

四、计算题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，合计 40 分）

1、解：（1）$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = 2 \neq 0$，所以$\alpha_1$, α_2,α_3线性无关，从而它们构成R^3的一个基；

（2）$\beta_1 = \alpha_1 = (1,1,1)^T$，$\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1 = (-1,0,1)^T$，

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2 = \left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T$$

单位化得：$\gamma_1 = \dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$，$\gamma_2 = \dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$,

$$\gamma_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$$

2、解：方程组的增广矩阵为$B \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 9 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & -7 & 1 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

则解集的秩$R_S = 4-2 = 2$。

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_4 = -17 \\ -7x_2 + x_3 - \dfrac{7}{2}x_4 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -9x_2 - 4x_4 - 17 \\ x_3 = 7x_2 + \dfrac{7}{2}x_4 + 14 \end{cases}$$

令$x_2 = x_4 = 0$ 得特解$\eta = (-17,0,14,0)^T$，分别令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， 得对应齐次方程组的基础解系为

$$\xi_1 = (-9,1,7,0)^T \ ,\ \xi_2 = (-4,0,\frac{7}{2},1)^T$$

因此该非齐次方程租的通解为$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \eta$ $(c_1,c_2 \in R)$.

3、解：(1) 因为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为 3， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为一个最大无关组（不唯一）;

（2）$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$，$\alpha_5 = \dfrac{1}{2}\alpha_1 - \dfrac{1}{2}\alpha_2 + \dfrac{1}{2}\alpha_3$。

4、解：因为$f(\lambda) = |A - \lambda E_3| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$,

所以特征值为$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$。

对于 $\lambda_1 = 2$，求解 $(A-2E_3)x = 0$ 的非零解，

$$A-2E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为：$x_1 = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k_1 \neq 0$，

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，求解 $(A-E_3)x = 0$ 的非零解，

$$A-E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为：$x_2 = k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k_2 \neq 0$。