东北林业大学课程考试答案及评分标准

课程名称：概率论与数理统计　　学　　分：3.5　　教学大纲编号：

试卷编号：　　考试方式：考试　　考 试 时 间 ：120 分钟

一、选择题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1、D　　2、A　　3、C　　4、C　　5、B

二、填空题(本大题共 5 个空，每空 3 分，共 15 分)

1、0.6　　2、$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$　　3、$\dfrac{\sigma^4}{4}$　　4、$F(3,n-3)$　　5、$(0.2805, 3.7195)$

三、计算题（每问 7 分，总计 63 分）

1、解：σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

$n=15$，$s^2=300^2$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(14)=26.119$, $\chi^2_{0.975}(14)=5.629$,

代入得到σ^2 的置信区间为：$(48240.744, 223840.82)$

2、解：$n_1=36$，$\bar{x}=465.13$，$s_1^2=54.80^2$

$n_2=26$，$\bar{y}=422.16$，$s_2^2=49.30^2$

(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ ，$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

统计量$F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=1.23557<2.18=F_{0.025}(35,25)$

即接受H_0,即认为男女红细胞数目的不均匀性是一致的

(2) $H_0:\mu_1=\mu_2$ ，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$

统计量$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}=3.175$

拒绝域为$|t|=3.175>1.96=t_{0.025}(60)$

即拒绝H_0，即认为性别对红细胞数有显著影响

3、(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $F_Y(x) = 1-\left[1-F(x)\right]^n$

$f_Y(x) = F_Y'(x)=n\left[1-F(x)\right]^{n-1} f(x)$

$$=\begin{cases} n\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\arcsin x\right)^{n-1}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

4、(1) $\begin{cases} a+b+0.6=1 \\ 0.3+b=0.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0.3 \\ b=0.1 \end{cases}$

(2)

XY	-1	0	1
P	0.2	0.7	0.1

$EX=0.4$， $EY=0.1$， $E(XY)=-0.1$

$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=-0.14$

5、(1)矩法估计 $EX=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{\theta^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\theta x}dx \underline{\underline{t=\theta x}} \frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{\theta}\;\Gamma(k+1)=\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{\theta}\;k!=\frac{k}{\theta}$$

令 $EX=\overline{X}$，则 $\hat{\theta}=\frac{k}{\overline{X}}$

(2)最大似然估计

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^k}{(k-1)!}x_i^{k-1}e^{-\theta x_i}=\left[\frac{1}{(k-1)!}\right]^n\cdot\theta^{nk}\cdot(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{k-1}\cdot e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln\frac{1}{(k-1)!}+nk\ln\theta+(k-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{nk}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{k}{\overline{X}}$$

6、解：

(1)因为

$$E\left[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2\right]=\alpha E\overline{X}+(1-\alpha)ES^2$$
$$=\alpha EX+(1-\alpha)DX$$
$$=\alpha\mu+(1-\alpha)\mu=\mu$$

所以 $\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$ 是 μ 的无偏估计量

(2)由 $D\overline{X}=\frac{DX}{n}=\frac{\mu}{n}$, $DS^2=\frac{2\left(DX\right)^2}{n-1}=\frac{2\mu^2}{n-1}$，得到：

$$D\left[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2\right]=\alpha^2D\overline{X}+(1-\alpha)^2DS^2=\frac{\alpha^2\mu}{n}+\frac{2(1-\alpha)^2\mu^2}{n-1}$$

因此 $1\geq P\left\{\left|\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2-\mu\right|\leq\varepsilon\right\}$

$$\geq 1-\frac{D\left[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2\right]}{\varepsilon^2}=1-\left[\frac{\alpha^2\mu}{n\varepsilon^2}+\frac{2(1-\alpha)^2\mu^2}{\left(n-1\right)\varepsilon^2}\right]\to 1,\ n\to\infty$$

所以 $\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$ 是 μ 的一致估计量