课程名称：

班级：

学号：□□□□□□□□□□

姓名：

装 订 线

东北林业大学
2015－2016 学年第 1 学期 阶段考试试题

考试科目： 线性代数 **试卷总分：** 100 分

考试时间： 90 分钟 **占总评比例：** 30%

题号	一	二	三	卷面分
得分				
评卷教师				

得分	

一、填空题（本大题共 8 小题，每空 2 分，总计 20 分）

1、排列1,3,5,7,2,4,6,8的逆序数是多少：6；

2、行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{-24}$；$A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，则 $A^{100}=6^{99}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 2\ 3)\cdots$ 1×3 3×1 99 6

3、设 $|A_{3\times3}|=5$，则 $|2A|=\underline{40}$；设 $|B_{n\times n}|=2$，$|C_{n\times n}|=3$，则 $|BC^{-1}|=\dfrac{2}{3}$

$|\lambda A_n| = \lambda^n |A_n|$

$=|B|\cdot|C^{-1}|=|B|\cdot|C|^{-1}$

$=2\times\frac{1}{3}$

4、设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，则 $A^{-1}=\dfrac{A-E}{2}$；

$A(A-E)=2E$

$A^{-1}(A-E)^{-1}=(2E)^{-1}$

$A^{-1}E=(2E)^{-1}(A-E)$

$A^{-1}=2^{-1}(A-E)$

5、设 $a_1a_2\cdots a_n\neq0$，则 $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$；

6、设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶矩阵，令 $P=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$，则 $P^T=\begin{pmatrix}0 & B^T\\ A^T & 0\end{pmatrix}$；

7、齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 = 0\\ (2\lambda+1)x_1+\lambda x_2=0\end{cases}$ 有非零解，参数 λ 满足：$\lambda=-1$；

$\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 2\lambda+1 & \lambda\end{vmatrix}=0$

r_1 r_2 r_3 r_4

8、行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{16}$。

开课学院：理学院 教研室主任（专业负责人）：

得分	

二、证明题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，总计 20 分）

$P^T=(B^TAB)^T = B^T(B^TA)^T = B^TA^TB$

1、设 A,B 都是 n 阶矩阵，且 A 是对称阵，$P=B^TAB$，（1）证明 P 是对称阵；（2）证明 P^2 是对称阵；（3）令 $f(x)=x^2+x-2$，证明 $f(P)$ 是对称阵。 $P^T=P$

证明：（1）由已知 A 是对称阵，所以 $P^T=\left(B^TAB\right)^T=B^TA^T\left(B^T\right)^T=B^TAB=P$；

（2）$\left(P^2\right)^T=\left(PP\right)^T=P^TP^T=PP=P^2$ $\quad (P^2)^T=(P^T)^2=P^T\cdot P^T=P\cdot P=P^2$

（3）$f(P)=P^2+P-2E$，

所以 $f(P)^T=\left(P^2+P-2E\right)^T=\left(P^2\right)^T+P^T-\left(2E\right)^T=\left(P^2+P-2E\right)=f(P)$

$f(P)^T=(P^2+P-2)^T=(P^2)^T+P^T-(2E)^T$

$=(P^T)^2+P^T-2E$

$=P^2+P-2E=f(P)$

2、设 $n\left(n\geq 2\right)$ 阶方阵 A 可逆，

$A\cdot A^{-1}=E$

（1）证明其伴随矩阵 A^* 也可逆；（2）如果 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，求 A。

A^*

（1）证明：$AA^*=|A|E_n$，所以 $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}\neq 0$，故 A^* 也可逆；

（2）$A=|A|\left(A^*\right)^{-1}$，由 $\left|A^*\right|=-2$，可知 $|A|=-2$，从而 $A=-2\left(A^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$|A|^*=-2$

或：A 为二阶矩阵，故 $A^*=\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，所以 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

课程名称：

班级：

学号□□□□□□□□ 姓名：

装 订 线

东北林业大学
2015－2016 学年第 1 学期 阶段考试试题

得分	

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 15 分，总计 60 分）

1、设 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$，（1）求 D_n 的值；（2）令 $a=2$，求 $D_n=0$ 的根。

解：$D_n \underline{\underline{所有列加到第1列}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 1 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & \cdots & x-a \end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$

（2） 当 $n=1$ 时，$D_n=x=0\Rightarrow x=0$

当 $n>1$ 时，$D_n=\left[x+2(n-1)\right](x-2)^{n-1}=0 \Rightarrow x=-2(n-1)$ 或 $x=2$

2、设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 16 \\ 8 & -1 & 1 & 64 \end{vmatrix}$，（1）求 D 的值；（2）求 $2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}$ 的值。

解：（1）$D=(4-2)(4+1)(4-1)(1-2)(1+1)(-1-2)=180$

（2）$2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}=-A_{44}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-(1-2)(1+1)(-1-2)=-6$

开课学院：理学院　　　　　　　　　　教研室主任（专业负责人）：

3、设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&5&1\end{pmatrix}$，（1）求 $|A|$；（2）求 A^{-1}；（3）求 A^2 及 A^{2n}

解：（1）$|A|=\begin{vmatrix}3&4\\4&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\5&1\end{vmatrix}=-25$

（2）$A^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^{-1}&\\&\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{25}&\frac{4}{25}&0&0\\\frac{4}{25}&\frac{-3}{25}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-5&1\end{pmatrix}$

（3）$A^2=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^{2}&\\&\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0&0&0\\0&25&0&0\\0&0&1&0\\0&0&10&1\end{pmatrix}$

$A^{2n}=\begin{pmatrix}25&0&0&0\\0&25&0&0\\0&0&1&0\\0&0&10&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}25^n&0&0&0\\0&25^n&0&0\\0&0&1&0\\0&0&5n&1\end{pmatrix}$

4、设 $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$AP=P\Lambda$，（1）求 P^{-1}；（2）求 A；（3）求 A^n。

解：（1）$|P|=2$，$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

（2）$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}$

（3）$A^n=P\Lambda^n P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-2^{n+1}&2^{n+1}-2\\4-2^{n+2}&2^{n+2}-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}$