课程名称：线性代数　班级　学号□□□□□□□□□□　姓名：

装　订　线

东北林业大学
2015－2016 学年第 2 学期 期末考试试题

考试科目： 线性代数　　　　**试卷总分：** 100 分

考试时间： 120 分钟　　　　**占总评比例：** 50 %

题号	一	二	三	四	卷面分
得分					
评卷教师					

得分	

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，合计 10 分）

1、A 为 3 阶方阵，它的 3 个特征值为$1,2,2$，则行列式$\left|A^2+2A+3E\right|=\underline{726}$；

2、3 维列向量 $x=(1,2,3)^T$，则$\|x\|=\underline{\sqrt{14}}$；

3、$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$是 R^2 的一个基，$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$也是 R^2 的一个基，2 维向量 γ 在基α_1,α_2下的坐标为$(4,5)$，则γ在基β_1,β_2下的坐标为$\underline{\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$；

4、$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2015}=\underline{\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\\-3&-2&-1\end{pmatrix}}$；

5、A 为 4 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $R(A)=3$，则 $R(A^*)=\underline{1}$。

得分	

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，合计 10 分）

1、与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$ 等价的矩阵是（　）

A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；　B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；　C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$；　D)以上都不正确。

开课学院：理学院　　　　教研室主任（专业负责人）：

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 都是 n 维列向量，令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta)$，则下列结论 **错误** 的是（　　）

A) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$；

B) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax=\beta$ 有解；

C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)=t$；

D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax=0$ 只有零解。

3、 A 是 n 阶方阵，λ 和 μ 是矩阵 A 的两个不同的特征值，x_1 和 x_2 是对应于特征值 λ 的两个特征向量； y 是对应于特征值 μ 的特征向量；则下列结论正确的是（　　）

A) x_1+y 一定是矩阵 A 的特征向量；

B) 对于任意 $k_1,k_2\in R$，$k_1x_1+k_2x_2$ 一定是矩阵 A 的对应于特征值 λ 的特征向量；

C) x_1 和 y 一定是线性无关的；

D) 如果 B 也是 n 阶方阵，ρ 是 B 的特征值，则 $\lambda+\rho$ 一定是矩阵 $(A+B)$ 的特征值。

4、已知 $R(A_{m\times n})=r$，其中 $r>0$，则下列四个结论中正确的个数是：（　）

① A 有一个 r 阶子式不为 0;　　②若 A 存在 $r+1$ 阶子式，则所有 $r+1$ 阶子式全为 0；

③若 $P_{m\times m}$ 为可逆矩阵，则一定有 $R(PA)=R(A)$；　　④ $r\le\min\{m,n\}$ 。

A)　1；　　B)　2；　　C)　3；　　D)　4。

5、设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则矩阵 A 中（　）

A) 必有一行向量是其余行向量的线性组合；

B) 任意行向量必是其余行向量的线性组合；

C) 必有一行元素全为零；

D) 必有两行元素对应成比例。

东北林业大学
2015－2016 学年第 2 学期 期末考试试题

得分	

三、证明题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，合计 40 分）

1、设 A 和 B 都是 n 阶正交矩阵，证明：AB 也是正交矩阵。

证明：已知 $A^T=A^{-1}$，$B^T=B^{-1}$，则 $\left(AB\right)^T=B^TA^T=B^{-1}A^{-1}=\left(AB\right)^{-1}$，所以 AB 也是正交矩阵。

2、（1）证明 $\alpha_1=\left(-1,-1,1\right)^T,\alpha_2=\left(-1,1,0\right)^T,\alpha_3=\left(1,0,1\right)^T$ 为 R^3 的一个基；（2）利用施密特正交化过程，把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 这个基规范正交化。

解：（1）$\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|=-3\neq0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而它们构成 R^3 的一个基；

（2）$\beta_1=\alpha_1=\left(-1,-1,1\right)^T$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{\left[\beta_1,\alpha_2\right]}{\left[\beta_1,\beta_1\right]}\beta_1=\alpha_2=\left(-1,1,0\right)^T$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\left[\beta_1,\alpha_3\right]}{\left[\beta_1,\beta_1\right]}\beta_1-\frac{\left[\beta_2,\alpha_3\right]}{\left[\beta_2,\beta_2\right]}\beta_2=\alpha_3-\frac{\left[\beta_2,\alpha_3\right]}{\left[\beta_2,\beta_2\right]}\beta_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T$$

单位化得：$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\left\|\beta_1\right\|}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$，$\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{\left\|\beta_2\right\|}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\left\|\beta_3\right\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$$

3、设 η 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：$\eta,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关。

证明：设 $k\eta+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，假设 $k\neq0$，则可得 η 可由齐次的基础解系 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示，这与 η 是非齐次方程组的解矛盾，所以 $k=0$；再由 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 的线性无关性，可得 $k_1=\cdots=k_{n-r}=0$，从而 $\eta,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关。

4、已知 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，且 $R(A)=n$，证明：齐次线性方程组 $(AB)x=0$ 与 $Bx=0$ 同解。

证明：（1）任取 x_1 满足：$Bx_1=0\xrightarrow{\text{两边左乘}A}ABx_1=0$，所以齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解都是 $(AB)x=0$ 的解。

（2）任取 x_2 满足：$(AB)x_2=0\Rightarrow A(Bx_2)=0\xrightarrow[Ay=0\Rightarrow y=0]{A\text{为列满秩}}Bx_2=0$，所以齐次线性方程组 $(AB)x=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，

综上，齐次线性方程组 $(AB)x=0$ 与 $Bx=0$ 同解。

得分	

四、计算题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，合计 40 分）

1、设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，$AX=A+X$，求 X。

解：$AX=A+X\Rightarrow(A-E_3)X=A$，易见 $A-E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，所以：

$X=(A-E_3)^{-1}A$

构造 $(A-E_3,A)=\begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\1&1&0&1&2&0\\1&1&1&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&0&0\\0&1&0&-1&2&0\\0&0&1&0&-1&2\end{array}\right)$

所以 $X=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间是 2 维向量空间，

（1）求 a 的值；（2）当 a 取定为第（1）问中所求得的值时，计算方程组 $Ax=0$ 的通解。

解：（1）由已知可得 $R(A)=2$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&a-2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&0&-(a-1)^2&-(a-1)^2\end{pmatrix}$$

所以 $a=1$；

（2）$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以通解为 $x=k_1\left(1,-1,1,0\right)^T+k_2\left(0,-1,0,1\right)^T$，$\forall k_1,k_2\in R$。

3、向量组 $S1:\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，向量组 $S2:\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$；

（1）计算向量组 $S1$ 的秩及一个最大无关组；（2）向量组 $S1$ 与 $S2$ 是否等价，说明理由。

解：（1）令 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以向量组 $S1$ 的秩为 2，

α_1,α_2（或者 α_1,α_3 或者 α_2,α_3）为一个最大无关组；

（2）$\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&-1&1&3\\1&1&0&2&2\\1&0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&1&1&-1\\0&1&-1&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

易见 $R(S1)=R(S2)=R(S1,S2)=2$，所以向量组 $S1$ 与 $S2$ 等价。

4、求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解：（1） $f(\lambda)=|\lambda E-A|\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)^2=0$，

所以特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$

（2）对于 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1E-A)x=0$ 的非零解，$(\lambda_1E-A)=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}$

$\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为：$X=k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$k\neq 0$

（3）对于 $\lambda_2=\lambda_3=-2$，求解 $(-2E-A)x=0$ 的非零解，$(-2E-A)=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}$

$\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，属于 -2 的特征向量为：$X=k_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 不全为 0。

2016 年 7 月 29 日