东北林业大学课程考试答案及评分标准

课程名称：概率论与数理统计　　学　　分：3.5　　教学大纲编号：

试卷编号：　　考试方式：考试　　考 试 时 间 ：120 分钟

一、选择题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1、B　　2、C　　3、D　　4、D　　5、A

二、填空题(本大题共 5 个空，每空 3 分，共 15 分)

1、0.12　2、$\frac{1}{24}$　3、1　4、$\frac{1}{2}$　5、$(14.665, 15.235)$

三、计算题（每问 7 分，总计 63 分）

1、解：σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

$n=15$，$s^2=300^2$，　$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(14)=26.119$,，$\chi^2_{0.975}(14)=5.629$,

代入得到 σ^2 的置信区间为：$(48240.744, 223840.82)$

2、解：$n_1=36$，$\overline{x}=465.13$，$s_1^2=54.80^2$

$n_2=26$，$\overline{y}=422.16$，$s_2^2=49.30^2$

(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

统计量 $F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=1.23557<2.18=F_{0.025}(35,25)$

即接受 H_0, 即认为男女红细胞数目的不均匀性是一致的。

(2) $H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$

统计量 $t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}=3.175$

拒绝域为 $|t|=3.175>1.96=t_{0.025}(60)$

即拒绝 H_0，即认为性别对红细胞数有显著影响。

3、(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, & x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\leq x<2\\ 0, & x\geq 2\end{cases}$

(2) $F_Y(x)=1-\left[1-F(x)\right]^n$

$$f_Y(x)=F_Y{}'(x)=n\left[1-F(x)\right]^{n-1}f(x)=\begin{cases} n2^{-n}\left(2-e^x\right)^{n-1}e^x, & x<0 \\ n4^{-n}\left(2-x\right)^{n-1}, & 0\le x<2 \\ 0, & x\ge 2 \end{cases}$$

4、(1) $\begin{cases} a+b+0.7=1 \\ a+0.1+0.1=0.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0.2 \\ b=0.1 \end{cases}$

(2)

XY	-1	0	1
P	0.1	0.8	0.1

$$EX=0.3,\ EX^2=0.3,\ EY=0.1,\ EY^2=0.7,\ E(XY)=0$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=-0.03,\ DX=0.21,\ DY=0.69$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{\sqrt{161}}{161}\approx-0.07881$$

5、(1)因为 $EX=2\theta=\overline{X}$

所以 $\theta_{矩}=\dfrac{\overline{X}}{2}$

(2)因为 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2\theta^2}{x_i^3},\left(x_i>\theta,i=1,2,\cdots,n\right)$， 是单调增函数

所以 $\theta_L=\min\left\{x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n\right\}$

6、解：

(1)因为

$$\begin{aligned} E\left[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2\right]&=\alpha E\overline{X}+(1-\alpha)ES^2 \\ &=\alpha EX+(1-\alpha)DX \\ &=\alpha\mu+(1-\alpha)\mu=\mu \end{aligned}$$

所以 $\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$ 是 μ 的无偏估计量

(2)由 $D\overline{X}=\dfrac{DX}{n}=\dfrac{\mu}{n}$, $DS^2=\dfrac{2\left(DX\right)^2}{n-1}=\dfrac{2\mu^2}{n-1}$，得到：

$$D\left[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2\right]=\alpha^2D\overline{X}+(1-\alpha)^2DS^2=\frac{\alpha^2\mu}{n}+\frac{2(1-\alpha)^2\mu^2}{n-1}$$

因此 $1\ge P\left\{\left|\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2-\mu\right|\le\varepsilon\right\}$

$$\ge 1-\frac{D\left[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2\right]}{\varepsilon^2}=1-\left[\frac{\alpha^2\mu}{n\varepsilon^2}+\frac{2(1-\alpha)^2\mu^2}{\left(n-1\right)\varepsilon^2}\right]\to 1,\ n\to\infty$$

所以 $\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$ 是 μ 的一致估计量