课程名称：

班级：

学号□□□□□□□□□□ 姓名：

装 订 线

东北林业大学

2015－2016 学年第 1 学期 阶段考试试题

考试科目： 线性代数　　　　**试卷总分：** 100 分

考试时间： 90 分钟　　　　**占总评比例：** 30%

题号	一	二	三	卷面分
得分				
评卷教师				

得分	

一、填空题（本大题共 8 小题，每空 2 分，总计 20 分）

1、排列 $1,3,5,7,2,4,6,8$ 的逆序数是多少：6；

2、行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{-24}$；$A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，则 $A^{100}=6^{99}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3、设 $|A_{3\times3}|=5$，则 $|2A|=\underline{40}$；设 $|B_{n\times n}|=2$，$|C_{n\times n}|=3$，则 $|BC^{-1}|=\dfrac{2}{3}$

4、设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，则 $A^{-1}=\dfrac{A-E}{2}$；

5、设 $a_1a_2\cdots a_n\neq0$，则 $\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1}\end{pmatrix}$；

6、设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶矩阵，令 $P=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$，则 $P^T=\begin{pmatrix}0 & B^T\\ A^T & 0\end{pmatrix}$；

7、齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1-x_2=0\\(2\lambda+1)x_1+\lambda x_2=0\end{cases}$ 有非零解，参数 λ 满足：$\lambda=-1$；

8、行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\underline{16}$。

开课学院：理学院　　　　教研室主任（专业负责人）：

得分	

二、证明题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，总计 20 分）

1、设 A, B 都是 n 阶矩阵，且 A 是对称阵，$P = B^T AB$，（1）证明 P 是对称阵；（2）证明 P^2 是对称阵；（3）令 $f(x) = x^2 + x - 2$，证明 $f(P)$ 是对称阵。

证明：（1）由已知 A 是对称阵，所以 $P^T = \left(B^T AB\right)^T = B^T A^T \left(B^T\right)^T = B^T AB = P$；

（2）$\left(P^2\right)^T = \left(PP\right)^T = P^T P^T = PP = P^2$

（3） $f(P) = P^2 + P - 2E$，

所以 $f(P)^T = \left(P^2 + P - 2E\right)^T = \left(P^2\right)^T + P^T - \left(2E\right)^T = \left(P^2 + P - 2E\right) = f(P)$

2、设 $n\left(n \geq 2\right)$ 阶方阵 A 可逆，

（1）证明其伴随矩阵 $A*$ 也可逆；（2）如果 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求 A。

（1）证明：$AA^* = |A|E_n$，所以 $\left|A^*\right| = |A|^{n-1} \neq 0$，故 $A*$ 也可逆；

（2）$A = |A|\left(A^*\right)^{-1}$，由 $\left|A^*\right| = -2$，可知 $|A| = -2$，从而 $A = -2\left(A^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

或：A 为二阶矩阵，故 $A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，所以 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2015 年 11 月 18 日

课程名称：

班级：

学号□□□□□□□□ 姓名：

装 订 线

东北林业大学

2015－2016 学年第 1 学期 阶段考试试题

得分	

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 15 分，总计 60 分）

1、设 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$，（1）求 D_n 的值；（2）令 $a=2$，求 $D_n=0$ 的根。

解：$D_n \underline{\underline{\text{所有列加到第1列}}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 1 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & \cdots & x-a \end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$

（2） 当 $n=1$ 时，$D_n=x=0 \Rightarrow x=0$

当 $n>1$ 时，$D_n=\left[x+2(n-1)\right](x-2)^{n-1}=0 \Rightarrow x=-2(n-1)$ 或 $x=2$

2、设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 16 \\ 8 & -1 & 1 & 64 \end{vmatrix}$，（1）求 D 的值；（2）求 $2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}$ 的值。

解：（1） $D=(4-2)(4+1)(4-1)(1-2)(1+1)(-1-2)=180$

（2）$2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}=-A_{44}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-(1-2)(1+1)(-1-2)=-6$

3、设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&5&1\end{pmatrix}$，（1）求 $|A|$；（2）求 A^{-1}；（3）求 A^2 及 A^{2n}

解：（1）$|A|=\begin{vmatrix}3&4\\4&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\5&1\end{vmatrix}=-25$

（2）$A^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^{-1}&\\&\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{25}&\frac{4}{25}&0&0\\\frac{4}{25}&\frac{-3}{25}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-5&1\end{pmatrix}$

（3）$A^2=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^{2}&\\&\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0&0&0\\0&25&0&0\\0&0&1&0\\0&0&10&1\end{pmatrix}$

$A^{2n}=\begin{pmatrix}25&0&0&0\\0&25&0&0\\0&0&1&0\\0&0&10&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}25^n&0&0&0\\0&25^n&0&0\\0&0&1&0\\0&0&5n&1\end{pmatrix}$

4、设 $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$， $AP=P\Lambda$，（1）求 P^{-1}；（2）求 A；（3）求 A^n 。

解：（1）$|P|=2$， $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

（2）$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}$

（3）$A=P\Lambda^nP^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-2^{n+1}&2^{n+1}-2\\4-2^{n+2}&2^{n+2}-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}$