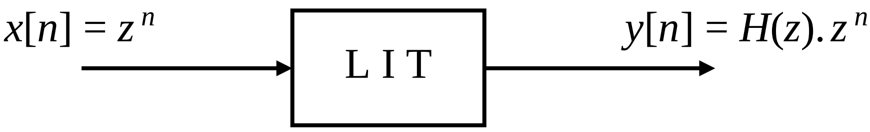
5. TRANSFORMADA DE Z

5.1. Definições

Como vimos no início do cap. 4:



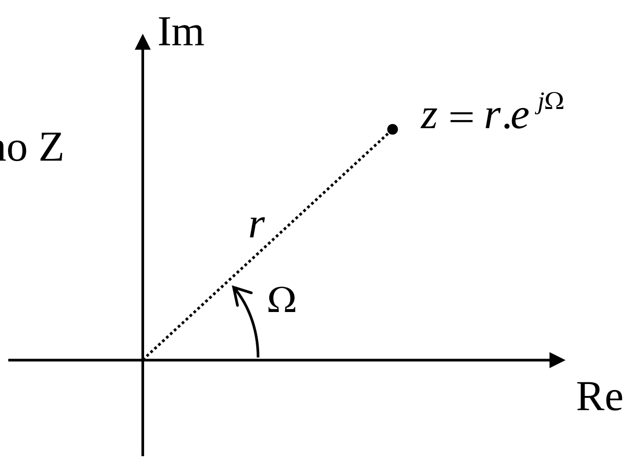
$$\text{onde} \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n].z^{-n}$$

Para $z = e^{j\Omega}$ $(|z| = 1)$ temos $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n].e^{-j\Omega n} = H(\Omega)$

A transformada de Z de uma sequência $x[n]$ é por definição:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n].z^{-n}} \qquad \text{(T. bilateral)}$$

plano Z



r = módulo

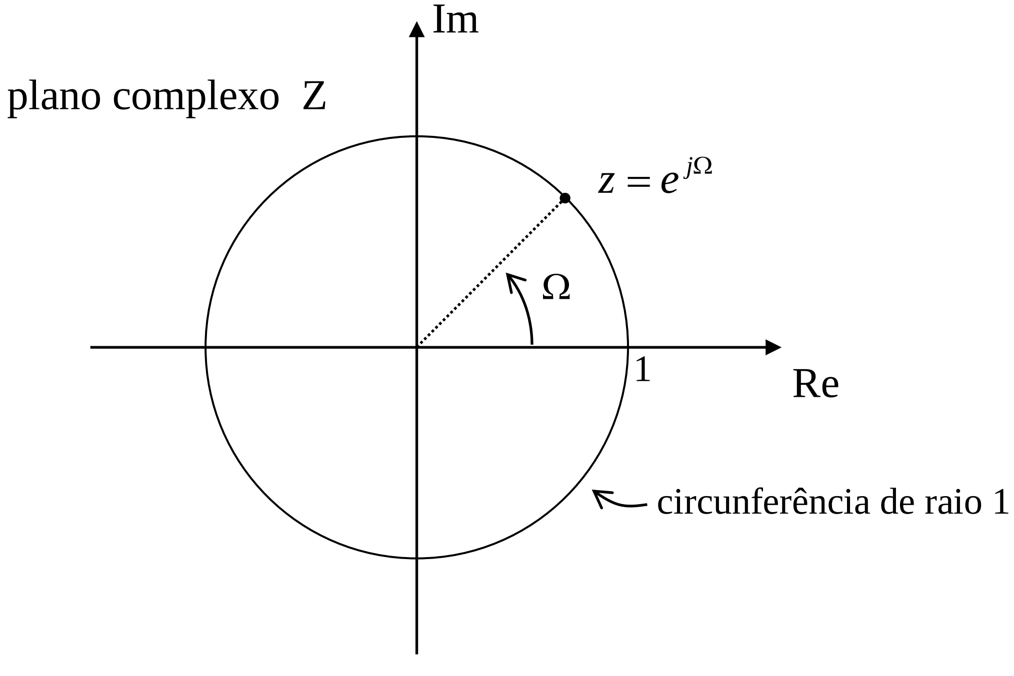
Ω = argumento

Faça – se $z = r.e^{j\Omega}$ em $X(z)$ obtendo – se assim :

$$X(r.e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n].\left(r.e^{j\Omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n]\cdot r^{-n}\right)\cdot e^{-j\Omega n} = T.\,Fourier\,\left\{x[n]\cdot r^{-n}\right\}$$

Portanto, concluímos que a transformada de Fourier é igual à transformada de Z na circunferência de raio unitário (r =1):

$$\boxed{X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(\Omega)}$$



A transformada de Z é mais geral que a transformada de Fourier, isto é, pode não existir transformada de Fourier, mas existir transformada de Z !!

Contudo, a transf. Z também tem a sua região de convergência ROC (*"region of convergence"*). Se a ROC incluir a circunferência de raio 1, então existe transf. Fourier.

<u>Recordemos:</u>

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,.e^{-j\Omega n} \qquad\qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[n]\,r^{-n}}\,.e^{-j\Omega n}$$

Exponencial decrescente se:

$r > 1,\ n > 0$ ou $r < 1,\ n < 0$

- a transf. Fourier de uma sequência converge, ou não, independentemente de qualquer parâmetro;
- a transf. Z converge, ou não, dependendo de r. Logo, associada a esta existe o conceito de ROC.

Vejamos alguns exemplos de transformadas de sequências comuns:

<u>Exemplo 1:</u>

$x[n] = \delta[n]$ sequência impulso unitário

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n].z^{-n} = \sum_{n=0}^{0} \delta[n].z^{-n} = \delta[0].z^{0} = 1\cdot 1 = 1$$

$X(z)$ é convergente para qualquer z, pelo que a ROC é todo o plano Z.

Exemplo 2:

$x[n]=u[n]$ sequência degrau unitário

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n].z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty} 1.z^{-n} \qquad \text{pois} \quad u[n]=0 \quad \text{p/} \quad n<0$$

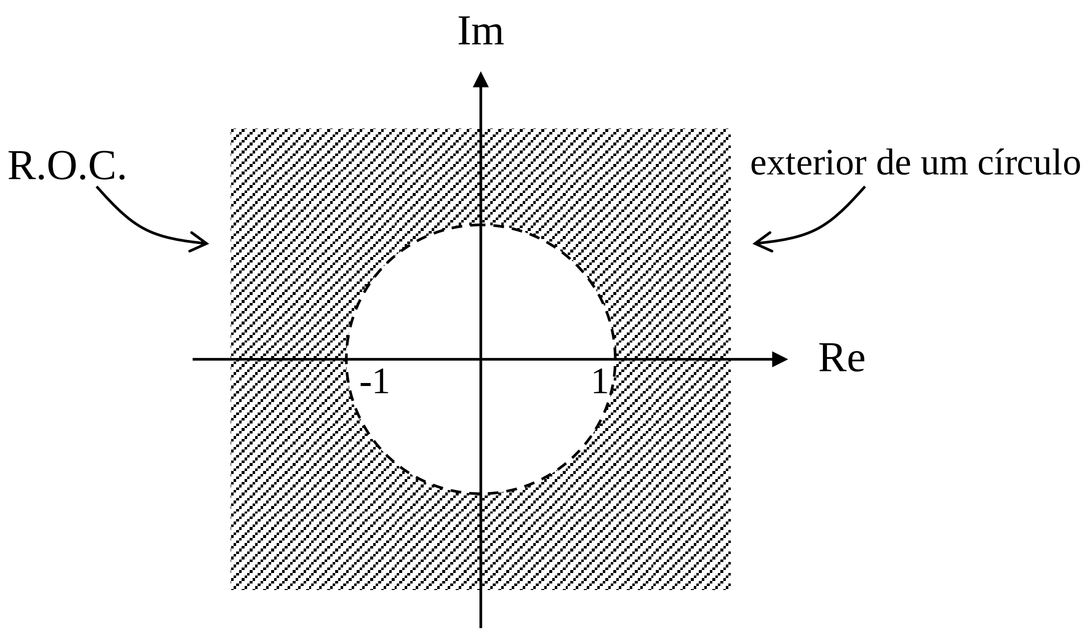
$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}$$

Nota: soma de N termos de uma progressão geométrica

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^{n}=\begin{cases} N & (\alpha=1) \\ \dfrac{1-\alpha^{N}}{1-\alpha} & (\alpha\neq 1)\end{cases}$$

Facilmente constatamos que neste caso $X(z)$ só será convergente se se verificar

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|>1 \quad \text{pelo que a ROC será :}$$



Exemplo 3:

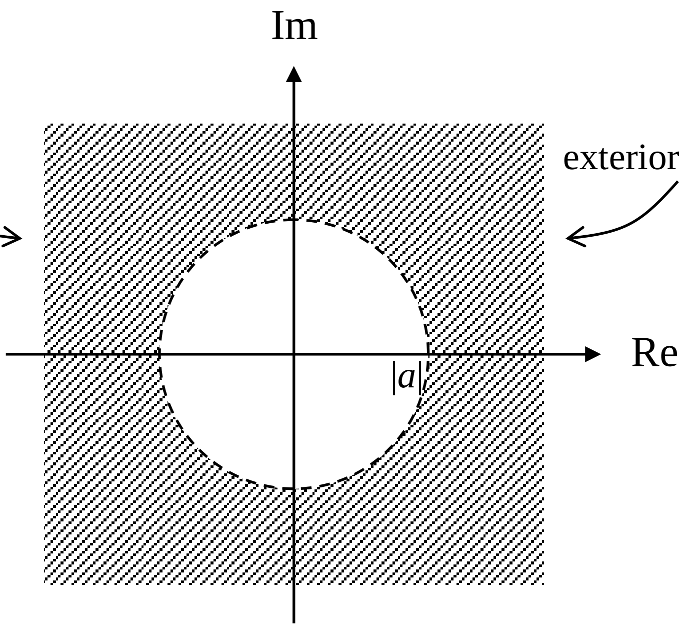
$x[n] = a^n u[n]$ sequência exponencial

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n].z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a.z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Pela mesma razão, $X(z)$ será convergente se $\left|a.z^{-1}\right| < 1 \iff |z| > |a|$

$|z| > |a|$ é a R.O.C.

R.O.C.



exterior de um círculo

Exemplo 4:

$x[n] = -a^n u[-n-1]$

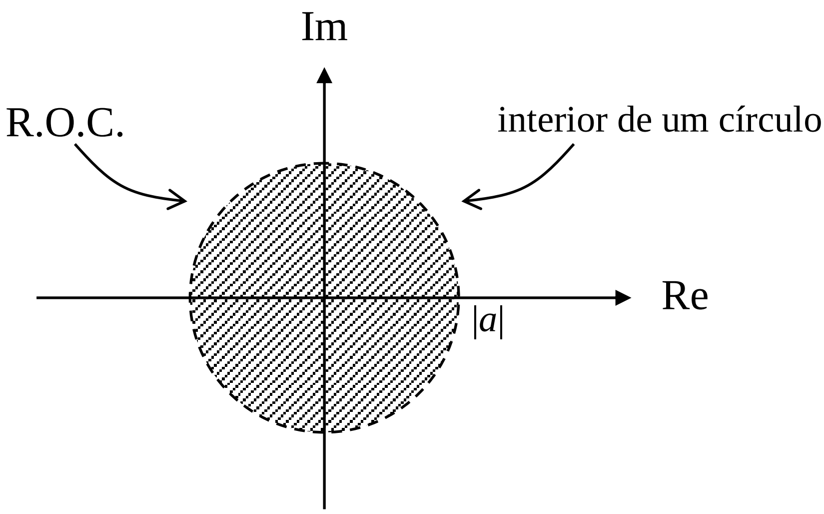
$$u[-n-1] = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \geq 0 \\ 1 & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n .z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a^{-1}z\right)^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a^{-1}z\right)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z}$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1-a^{-1}z-1}{1-a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Neste caso $X(z)$ será convergente se:

$$\left|a^{-1}z\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < |a| \qquad \text{(R.O.C.)}$$



Como verificamos, $X(z)$ é idêntica para as sequências dos exemplos 3 e 4. Podemos então concluir que :

> Uma sequência $x[n]$ não fica unicamente representada por $X(z)$, sendo necessário especificar a sua R.O.C.

<u>Exemplo 5:</u>

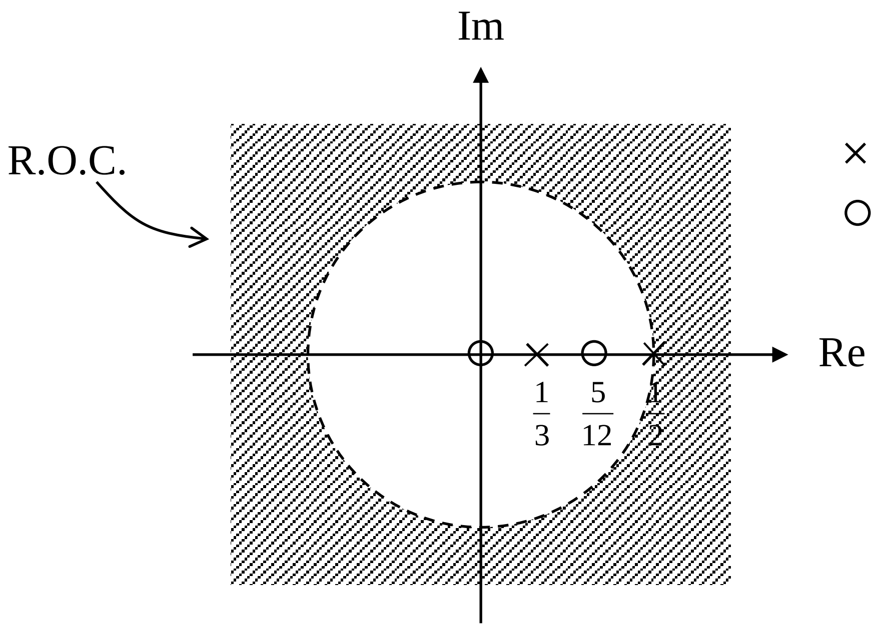
$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}=$$

$$=\ \cdots\ =\frac{2z\cdot\left(z-\frac{5}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

Para que ambos os somatórios sejam convergentes será necessário termos:

$$|z|>\frac{1}{2}\quad\wedge\quad|z|>\frac{1}{3}\qquad\qquad\text{(R.O.C.)}$$



<u>Questão:</u> a nossa sequência $x[n]$ terá transformada de Fourier $X(\Omega)$?

<u>Resposta:</u> afirmativo, pois a ROC inclui a circunferência de raio unitário.

5.2. A R.O.C. e as suas propriedades

1. A ROC de $X(z)$ é um "anel" centrado na origem do plano Z.

2. A ROC não contém pólos de $X(z)$.

3. Se $x[n]$ é uma sequência com duração finita, a ROC é todo o plano Z, excepto possivelmente $z = \infty$ ou $z = 0$. (recordar exemplo 1)

4. Se $x[n]$ é uma sequência do lado direito, a ROC é o exterior de um círculo, excepto possivelmente $z = \infty$. (recordar exemplos 3 e 5)

5. Se $x[n]$ é uma sequência do lado esquerdo, a ROC é o interior de um círculo, excepto possivelmente $z = 0$. (recordar exemplo 4)

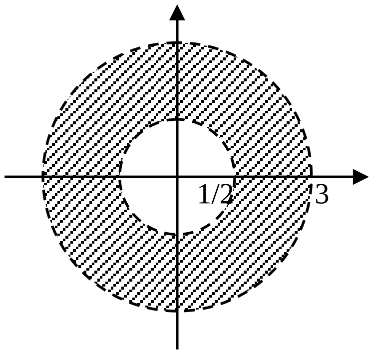
6. Se $x[n]$ é uma sequência dos dois lados, a ROC se existir é um anel.

Exemplo: Determinar a ROC da sequência

$$x[n] = 3^n u[-n] + 2^{-n} u[n]$$

A solução deste problema será:

$$|z| > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad |z| < 3 \qquad \text{(R.O.C.)}$$



5.3. Transformação inversa

Vimos no início deste capítulo que :

$$X(z) = X(r.e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\left\{x[n]\cdot r^{-n}\right\} \qquad \text{com} \quad r = |z| \quad e \quad \Omega = \arg(z)$$

Aplicando transformada de Fourier inversa obtemos:

$$x[n]\cdot r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(r.e^{j\Omega})\right\}$$

$$x[n] = r^{n}\cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{X(r.e^{j\Omega})\right\}$$

Usando agora a fórmula de inversão obtida no capítulo 4:

$$x[n] = r^{n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(r.e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(r.e^{j\Omega})\cdot (r.e^{j\Omega})^{n}\, d\Omega$$

Mudando a variável de integração $\Omega \rightarrow$ z

$$z = r.e^{j\Omega} \quad \Rightarrow \quad dz = jr.e^{j\Omega} d\Omega \qquad \text{com } r \text{ fixo.}$$

$$dz = j z\, d\Omega \quad \Leftrightarrow \quad d\Omega = \frac{1}{jz} dz$$

Finalmente:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z).z^{n-1} dz}$$

<u>Obtenção de *x*[*n*] a partir de *X*(*z*):</u>

1. Utilização da fórmula anterior (pode ser algo complicado e moroso) !!!

2. Decomposição de *X*(*z*) em funções simples e inspecção recorrendo a tabelas de propriedades e pares de transformadas (método que iremos utilizar).

Exemplo:

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \qquad |z|>\frac{1}{3} \qquad x[n]=?$$

$X(z)$ tem 2 pólos distintos : $\quad z=\frac{1}{4}$ e $z=\frac{1}{3}$

Expandindo em fracções parciais:

$$X(z)=\frac{A}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$A=\left.\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right|_{z^{-1}=4}=\frac{3-\frac{20}{6}}{1-\frac{4}{3}}=1$$

$$B=\left.\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right|_{z^{-1}=3}=\frac{3-\frac{15}{6}}{1-\frac{3}{4}}=2$$

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}+\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \qquad \text{e} \qquad \text{ROC}: \ |z|>\frac{1}{3} \quad \text{(seq. lado direito)}$$

Das tabelas :
$$\begin{cases} x_1[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} & |z|>\frac{1}{4} \\[2ex] x_2[n]=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \dfrac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} & |z|>\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x[n]=x_1[n]+x_2[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

5.4. Propriedades da transformada de Z

"CONSULTAR TABELAS"

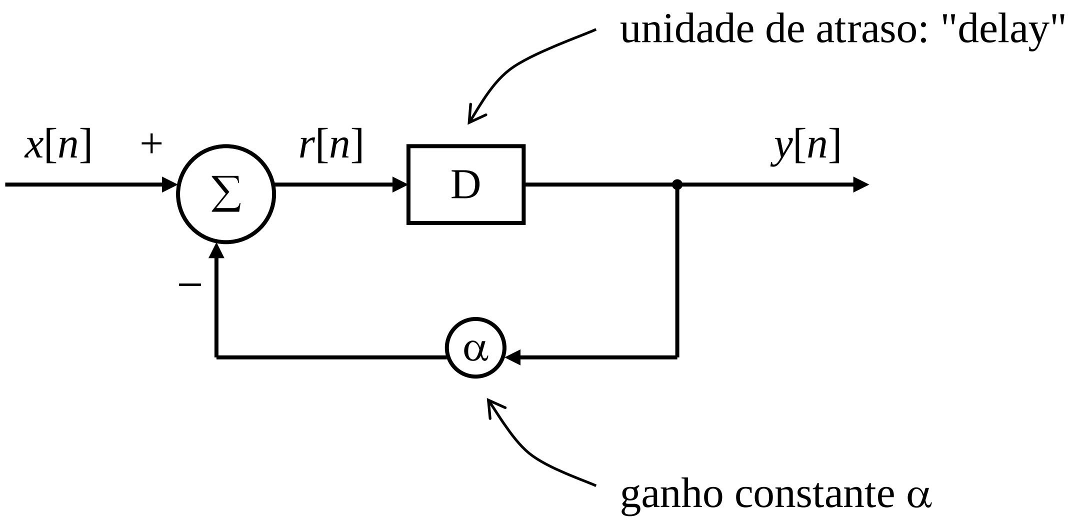
5.5. Transformada de sequências comuns

"CONSULTAR TABELAS"

5.6. Sistemas discretos e equações diferença

Vamos de agora em diante constatar a analogia existente entre equações diferença e transformada de Z como modelos de sistemas discretos e equações diferenciais e transformada de Laplace como modelos de representação de sistemas contínuos, estudados no capítulo 2.

Começaremos por um exemplo de um sistema discreto relativamente simples:



Equações:

$$y[n+1] = r[n]$$

$$r[n] = x[n] - \alpha.y[n]$$

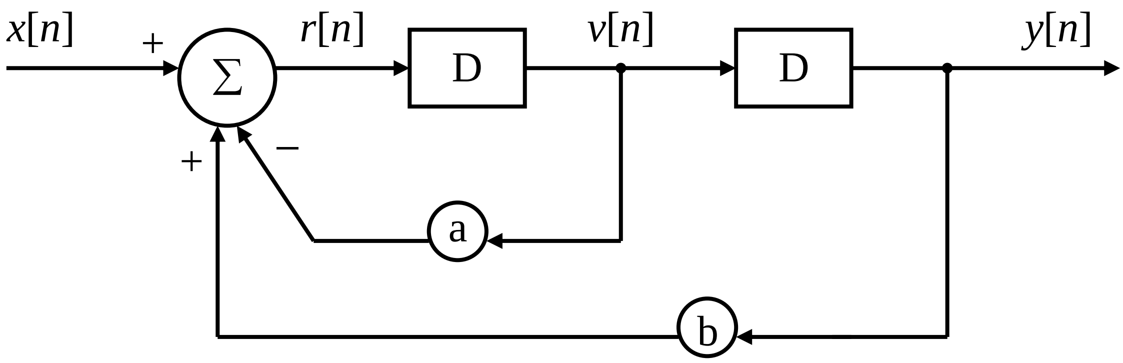
Combinando as equações anteriores:

$$y[n+1] = x[n] - \alpha.y[n]$$ e ainda

$$\boxed{y[n+1] + \alpha.y[n] = x[n]}$$

Esta é a equação diferença que descreve o comportamento do sistema.

Analisemos agora um outro exemplo:



Equações:

$$y[n+1]=v[n]; \qquad v[n+1]=r[n]; \qquad y[n+2]=v[n+1]=r[n];$$

$$r[n]=x[n]-a.v[n]+b.y[n]$$

Combinando as equações anteriores:

$$y[n+2]=x[n]-a.v[n]+b.y[n] \quad \Leftrightarrow \quad y[n+2]=x[n]-a.y[n+1]+b.y[n]$$

Re-arranjando:

$$\boxed{y[n+2]+a.y[n+1]-b.y[n]=x[n]}$$

(Equação diferença de 2ª ordem)

5.7. Solução de equações diferença

As equações diferença descrevem o comportamento de sistemas discretos, mas podem também aparecer como uma aproximação numérica a eqs. diferenciais modelizando o funcionamento de sistemas contínuos.

Para solucionar equações diferença iremos adoptar um método em tudo semelhante ao da transformada de Laplace na solução de equações diferenciais. É o método da <u>transformada de Z</u> e baseia-se nos <u>teoremas do avanço</u> e do <u>atraso</u>.

<u>Teorema do atraso</u>

Se $x[n] \longleftrightarrow X(z)$

Então $x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} \cdot X(z)$

<u>Teorema do avanço</u>

Se $x[n] \longleftrightarrow X(z)$

Então $x[n+n_0] \longleftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z) - z^{n_0} \cdot x[0] - \cdots - z \cdot x[n_0 - 1]$

<u>Exemplo:</u>

Vamos regressar ao sistema do exemplo anterior e considerar

$$a=1, \quad b=2 \quad \text{e} \quad x[n]=u[n] \quad \text{(degrau)};$$

Obtemos assim:

$$y[n+2]+y[n+1]-2.y[n]=1 \qquad (n \geq 0)$$

Aplicando transformada de Z:

$$\left(z^2 Y(z) - z^2 y[0] - z\, y[1]\right) + \left(z\, Y(z) - z\, y[0]\right) - 2Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

Para prosseguir necessitamos saber $y[0]$ e $y[1]$.

Vamos supor $y[0] = 0$ e $y[1] = 1$ (conds. iniciais).

Substituindo e ordenando:

$$\left(z^2 + z + 2\right)\cdot Y(z) = z + \frac{z}{z-1} \quad \Leftrightarrow \quad (z+2)\cdot(z-1)\cdot Y(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z+2)\cdot(z-1)^2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z+2)\cdot(z-1)^2} \qquad \text{expandindo em fracções parciais}$$

$$= \frac{1/3}{(z-1)^2} + \frac{2/9}{(z-1)} - \frac{2/9}{(z+2)} \qquad \text{multiplica ndo por z}$$

$$Y(z) = \frac{1}{3}\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{z}{(z-1)} - \frac{2}{9}\frac{z}{(z+2)}$$

Recorrendo a tabelas facilmente obtemos a transformada inversa:

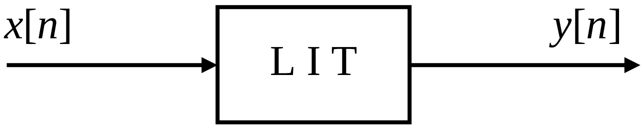
$$y[n] = \frac{1}{3} n u[n] + \frac{2}{9} u[n] - \frac{2}{9}(-2)^n u[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{3} n + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}(-2)^n \qquad (n \geq 0)$$

5.8. Função de Transferência Z

No cap. 2 introduzimos o conceito de função de transferência em *s* (Laplace) como uma ferramenta poderosa na descrição do comportamento de sistemas LIT contínuos. De igual modo, vamos introduzir o conceito de função de transferência em Z, para sistemas LIT discretos.

Vamos considerar o sistema



descrito pela eq. diferença linear geral de ordem N

$$\boxed{a_N y[n+N] + \cdots + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = b_M x[n+M] + \cdots + b_1 x[n+1] + b_0 x[n]}$$

Sistema de ordem N $(a_N \neq 0)$

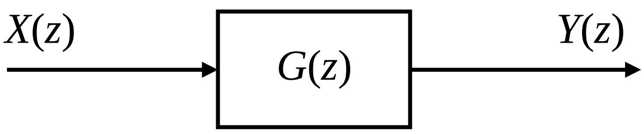
Fisicamente realizável se $N \geq M$

Aplicando transformada de Z à eq. diferença acima e considerando condições iniciais nulas, isto é, o sistema em repouso para $n \leq 0$, obtemos:

$$\left(a_N z^N + \cdots + a_1 z + a_0\right) \cdot Y(z) = \left(b_M z^M + \cdots + b_1 z + b_0\right) \cdot X(z)$$

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_M z^M + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + \cdots + a_1 z + a_0}}$$

Função de transferência



À semelhança do caso contínuo, sendo $G(z)$ um quociente entre polinómios

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$Q(z)$: polinómio característico

$P(z) = 0 \rightarrow$ zeros de $G(z)$

$Q(z) = 0 \rightarrow$ pólos de $G(z)$

Comparando as relações entrada/saída nos dois domínios:

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad \text{e} \qquad Y(z) = X(z) \cdot G(z)$$

facilmente constatamos que

$$\boxed{G(z) = \mathrm{Z}\{h[n]\}}$$

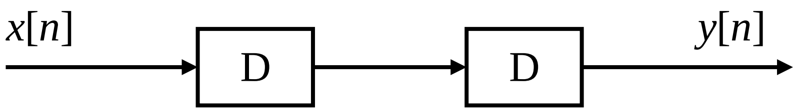
isto é, a função de transferência é a transformada da resposta ao impulso.

<u>Importante</u>

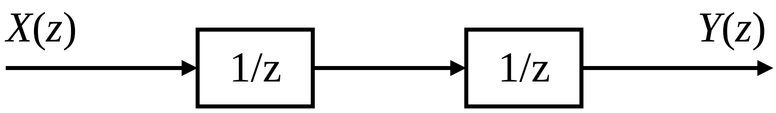
Todas as considerações feitas acerca de diagramas de blocos e a álgebra de blocos para sistemas contínuos, são válidas para sistemas discretos.

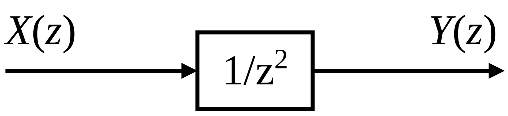
Vejamos agora alguns exemplos concretos:

<u>Exemplo 1:</u>

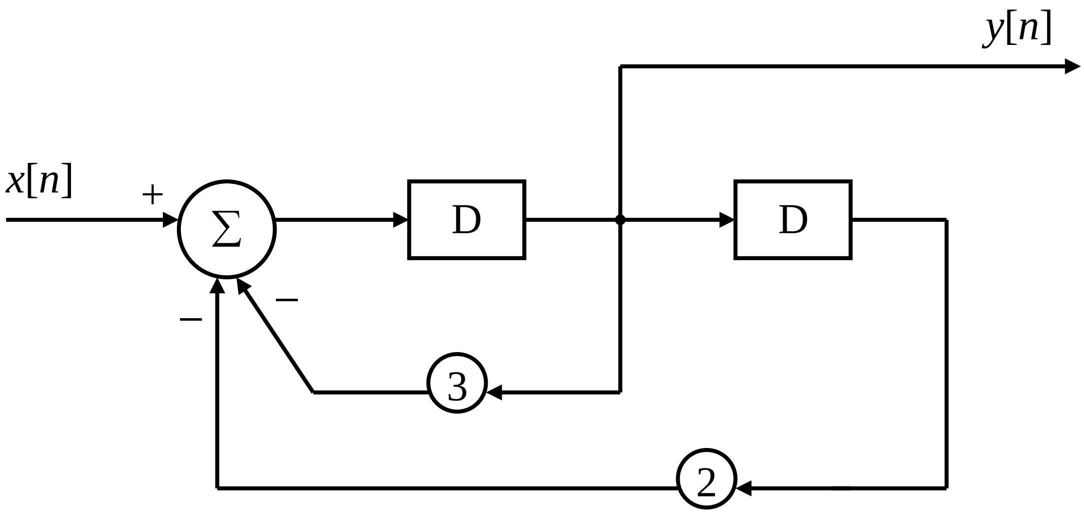


$$y[n+2] = x[n] \quad \longrightarrow \quad z^2 Y(z) = X(z) \quad \Leftrightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2}$$





Exemplo 2:



Analisando o sistema facilmente chegaríamos à eq. diferença que o descreve:

$$y[n+2]+3y[n+1]+2y[n]=x[n+1]$$

Aplicando transformada de Z e considerando condições iniciais nulas obtemos:

$$\left(z^2+3z+2\right)\cdot Y(z)=z\cdot X(z)$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z}{z^2+3z+2}$$