Cálculo Vetorial **Exercícios - Folha 1**

1. Identifique os seguintes conjuntos:

   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + 3y + 3 = 0\}$

   $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y + 3 = 0\}$

   $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + y = z + 2\}$

   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 2x + y^2 = 3\}$

   $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 4x + 2y = -4\}$

   $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$

2. Sejam a e b dois números reais positivos, (x_0, y_0) um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}$ a elipse de equação cartesiana
   $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$
   a) Mostre que $\mathcal{E} = \{(x_0 + a\cos t, y_0 + b\,\mathrm{sen}\,t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$.

   b) Escreva uma equação cartesiana e represente graficamente o conjunto $\mathcal{E}$ dado:
   $$(i) \quad \mathcal{E} = \{(2\cos t, \mathrm{sen}\,t) \mid t \in [0, 2\pi]\};$$
   $$(ii) \quad \mathcal{E} = \{(-1 + \cos t, 1 + 2\,\mathrm{sen}\,t) \mid t \in [0, 2\pi]\}.$$

   c) Escreva as equações paramétricas das elipses dadas pelas seguintes equações:
   $$(i) \quad 2x^2 + y^2 = 4; \qquad (ii) \quad x^2 + 3y^2 + 2x = 0.$$

3. Sejam a e b dois números reais positivos. Represente, num mesmo desenho, a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, as rectas de equações $y = \dfrac{b}{a}x$ e $y = -\dfrac{b}{a}x$, e as hipérboles de equações $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$.

4. Sejam, em $\mathbb{R}^3$, P o plano determinado pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-2, 0, 6)$ e $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}, 4)$, R a reta que passa por A e B e R' a reta que passa por A e C.

   a) Para o plano P e as retas R e R', determine um sistema de equações paramétricas.

   b) Determine uma equação cartesiana do plano P.

   c) Calcule a distância entre A e B e entre A e C.

   d) Determine o ângulo entre $u = B - A$ e $v = C - A$.

   e) Calcule a área do paralelogramo determinado por A, u, e v.