n. 10 – ORTOGONALIDADE DE VETORES

Dois vetores são ortogonais, se e somente se, o produto escalar entre eles é nulo.

O produto escalar é uma operação entre dois vetores cujo resultado é um escalar.

Para descobrirmos se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais calculamos o produto interno entre os vetores:

- se o produto interno for igual à zero, os vetores são ortogonais.

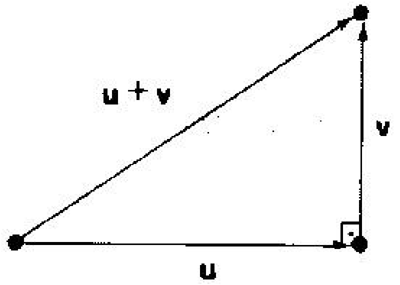
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$

O produto interno entre dois vetores é um número real ligado ao tamanho de cada um desses vetores e ao ângulo formado por eles.

Usamos o termo:

- ortogonal quando as retas não estão no mesmo plano
- perpendicular quando as retas estão no mesmo plano

Condição de ortogonalidade



Dois vetores não nulos $\vec{\mathbf{u}}$ **e** $\vec{\mathbf{v}}$ são ortogonais quando podem ser representados por segmentos orientados perpendiculares.

Vetores ortogonais tem produto interno igual à zero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 . x_2 + y_1 . y_2$$

Logo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Um conjunto de vetores em um espaço com produto interno é **ortonormal** quando:

- todos vetores do conjunto tem norma igual a 1 (ou seja, são vetores unitários).

  Para serem unitários: $|\vec{u}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} = 1$

  Caso não sejam unitários, devemos achar os versores, exemplo: $versor\ de\ u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

- o produto interno de dois vetores distintos é zero (ou seja, são ortogonais).

  Para serem ortogonais: produto interno igual à zero:

  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 . x_2 + y_1 . y_2 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exercício:

1. Verifique se os vetores são ortonormais e caso não o seja ortonormalize-os.
   a. $\vec{u} = (-2, 3, -2)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 4)$
   b. $\vec{l} = (1, -2, 1)$ e $\vec{m} = (2, -1, 4)$

Resolução:

1. Verifique se os vetores são ortonormais (ortogonais e unitários) e caso não o sejam ortonormalize-os.

a. $\overrightarrow{u} = (-2, 3, -2)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 4)$

- $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$

  $(-2, 3, -2).(-1, 2, 4) = (-2\,.-1) + 3\,.\,2 + (-2.\,4) =$

  $(2 + 6 - 8) = 0$

  Logo, os vetores são ortogonais.

- Verificando se são unitários:

  $$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + \ (3)^2 + \ (-2)^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

  $$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + \ (2)^2 + \ (4)^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

  Como não são unitários, temos que achar os versores:

- Achando os versores para transformá-los em vetores unitários:

  - $versor\ de\ \vec{u} = \ \overrightarrow{m} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

    $$\overrightarrow{m} = \left(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$$

  - $versor\ de\ \vec{v} = \vec{n} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

    $$\vec{n} = \left(\frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

Portanto, os vetores $\overrightarrow{m} = \left(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$ e $\overrightarrow{n} = \left(\frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$ são ortonormais.

- Conferindo: $\left(\frac{-2}{\sqrt{17}},\frac{3}{\sqrt{17}},\frac{-2}{\sqrt{17}}\right).\left(\frac{-1}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)=0$

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{17}}\right).\left(\frac{-1}{\sqrt{21}}\right)+\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right).\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)+\left(\frac{-2}{\sqrt{17}}\right).\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)=$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}\right)+\left(\frac{6}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}\right)+\left(\frac{-8}{\sqrt{17}\,.\sqrt{21}}\right)=$$

$$\frac{2}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}+\frac{6}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}-\frac{8}{\sqrt{17}\,.\sqrt{21}}=$$

$$\frac{2+6}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}-\frac{8}{\sqrt{17}\,.\sqrt{21}}=$$

$$\frac{8}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}-\frac{8}{\sqrt{17}\,.\sqrt{21}}=0$$

b. $\vec{l}=(1,-2,1)$ e $\vec{m}=(2,-1,4)$

- $\vec{u}\ .\ \vec{v}=0$

  $(1,-2,1).(2,-1,4)=(1\,.2)+(-2.-1)+(1\,.4)=$

  $(2+2+4)=8$

Logo, os vetores **não são ortogonais** e, portanto **não são ortonormais**.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

A distância ***d*** entre dois pontos A (x_1, y_1, z_1) e B (x_2, y_2, z_2) é o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é:

$$\mathbf{d} = |\overrightarrow{AB}| = |B - A|$$

portanto, $\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Exercícios:

1. Sabendo que a distância entre os pontos A (-1, 2, 3) e B (1, -1, m) é 7 u. c., calcule m. R: m = 9 e m = - 3

2. Mostre que o ponto P (2, 2, 3) é equidistante dos pontos L (1, 4, -2) e M (3, 7, 5).

3. Determine no eixo das ordenadas, um ponto equidistante de A (1, 1, 4) e B (-6, 6, 4).

Resolução:

1. Sabendo que a distância entre os pontos A (-1, 2, 3) e B (1, -1, m) é 7 u. c., calcule m. R: m = 9 e m = - 3

$$d = |\overrightarrow{AB}| = |B - A|$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$7 = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-1 - 2)^2 + (m - 3)^2}$$
$$7 = \sqrt{(1 + 1)^2 + (-3)^2 + (m - 3)^2}$$
$$7 = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (m - 3)^2}$$
$$7 = \sqrt{4 + 9 + m^2 - 6m + 9}$$
$$7 = \sqrt{m^2 - 6m + 22}$$
$$7^2 = (\sqrt{m^2 - 6m + 22})^2$$

$49 = m^2 - 6m + 22$
$m^2 - 6m + 22 - 49 = 0$
$m^2 - 6m - 27 = 0$
$m = 9$ e $m = -3$

Cálculo das raízes de uma equação do 2º grau Bháskara:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

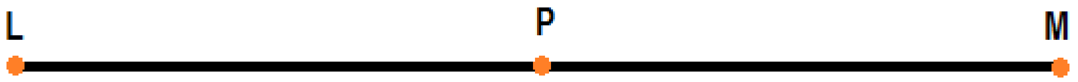
Ou, encontrando as raízes pela soma e produto:

$$a\,x^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Soma = x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \\ \\ Produto = x'.\ x'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$S = -\frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad P = \frac{c}{a}$$

2. Mostre que o ponto P (2, 2, 3) é equidistante dos pontos L (1, 4, -2) e M (3, 7, 5).



d $|\overrightarrow{PL}|$ = d $|\overrightarrow{PM}|$
$|L - P| = |M - P|$
$|(1, 4, -2\,) - (2, 2, 3)| = |(3, 7, 5) - (2, 2, 3)|$

$$|(-1,2,-5)| = |(1,5,2)|$$

$$\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (2)^2}$$
$$\sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{1 + 25 + 4}$$
$$\sqrt{30} = \sqrt{30}$$

3. Determine no eixo das ordenadas, um ponto equidistante de A (1, 1, 4) e B (-6, 6, 4).

   Seja M um ponto equidistante de A e B, e M pertencente ao eixo das ordenadas, logo, M = (0, y, 0)

$$\text{d}\left|\overrightarrow{MA}\right| = \text{d}\left|\overrightarrow{MB}\right|$$
$$|A - M| = |B - M|$$
$$|(1,1,4) - (0,y,0)| = |(-6,6,4) - (0,y,0)|$$
$$|(1,1-y,4)| = |(-6,6-y,4)|$$
$$\sqrt{(1)^2 + (1-y)^2 + (4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (6-y)^2 + (4)^2}$$
$$\sqrt{1 + 1 - 2y + y^2 + 16} = \sqrt{36 + 36 - 12y + y^2 + 16}$$

(elevando tudo ao quadrado)

$$1 + 1 - 2y + y^2 + 16 = 36 + 36 - 12y + y^2 + 16$$
$$1 + 1 - 2y + y^2 + 16 - 36 - 36 + 12y - y^2 - 16 = 0$$
$$10y + 18 - 88 = 0$$
$$10y - 70 = 0$$
$$y = 7$$

   Portanto o ponto equidistante de A e B no eixo das ordenadas é M (0, 7, 0).

Referências Bibliográficas

BOULOS, P. e CAMARGO, I. de. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

NUNES, Luiz Fernando. **Notas de aula**: Matemática 1. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR.

STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. **Geometria analítica**. São Paulo: Pearson-Makron Books, 2010.

VALLADARES, R. J. C. **Geometria analítica do plano e do espaço**. Rio de Janeiro: LTC, 1990.