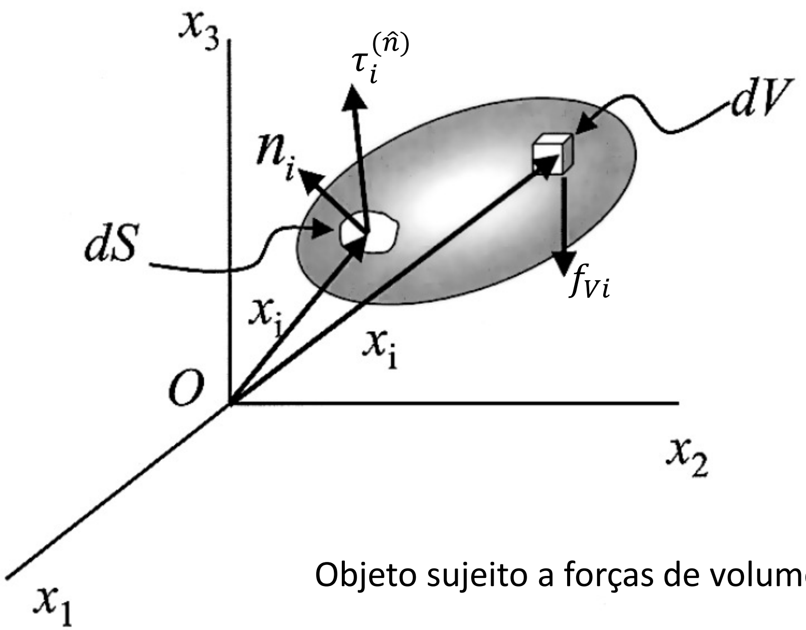
Energia elástica de um meio deformado

- Para deformar um corpo é necessário executar trabalho sobre ele. Nesse processo, para além de deformar o objeto pode também ser dissipada energia por outros modos (calor, ondas sonoras, etc)
- Princípio do trabalho *virtual*
- Num determinado momento o corpo está sujeito a uma força resultante $\vec{f}^R$ com contribuição das forças de volume e superfície: $f_i^R = f_{Vi} + \sigma_{ij,j}$
- Para manter o corpo em equilíbrio seria então necessário aplicar uma força $-\vec{f}^R$, para contrariar a resultante $\vec{f}^R$.



Objeto sujeito a forças de volume e de superfície

Energia elástica de um meio deformado

- Para deformar um corpo é necessário executar trabalho sobre ele. Nesse processo, para além de deformar o objeto pode também ser dissipada energia por outros modos (calor, ondas sonoras, etc)
- Princípio do trabalho *virtual*
- Num determinado momento o corpo está sujeito a uma força resultante $\vec{f}^R$ com contribuição das forças de volume e superfície: $f_i^R = f_{Vi} + \sigma_{ij,j}$
- Para manter o corpo em equilíbrio seria então necessário aplicar uma força $-\vec{f}^R$, para contrariar a resultante $\vec{f}^R$.
- Um modo de determinar o trabalho realizado é considerar que o corpo é então sujeito a uma pequena deformação devido às forças de superfície exteriores aplicadas nele. Nesse processo ele sofre um deslocamento $d\vec{u} = (du_1, du_2, du_3)$.
- O trabalho realizado para provocar essa deformação é $\mathrm{d}W$:

$$\mathrm{d}W = \int_V -f_i^R \, du_i \, dV + \oint_S \sigma_{ij} \, du_i \, n_j \, dS$$

- Pelo teorema de Gauss

$$\mathrm{d}W = \int_V -f_i^R \, du_i \, dV + \int_V \frac{\partial(\sigma_{ij} du_i)}{\partial x_j} \, dV = \int_V -f_i^R \, du_i \, dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} du_i dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j} \, dV$$

$$\mathrm{d}W = \int_V -f_i^R \, du_i \, dV + \int_V \sigma_{ij,j} \, du_i dV + \int_V \sigma_{ij} \, du_{i,j} dV$$

Energia elástica de um meio deformado

- Considerando que a transformação é suficientemente lenta de tal modo que entre o início e o fim passa sempre por pontos intermédio de equilíbrio, então $-f_i^R$ aplicada do exterior compensa sempre f_i^R do corpo, para cada pequena deformação.
- Como se viu, $f_i^R = f_{Vi} + \sigma_{ij,j}$.
- Nessa situação:

$$\mathrm{d}W = \int_V -(f_{Vi}+\sigma_{ij,j})\, du_i\, dV + \int_V \sigma_{ij,j}\, du_i dV + \int_V \sigma_{ij}\, du_{i,j} dV$$

$$\mathrm{d}W = \int_V -f_{Vi}\, du_i\, dV + \cancel{\int_V -\sigma_{ij,j}\, du_i\, dV} + \cancel{\int_V \sigma_{ij,j}\, du_i dV} + \int_V \sigma_{ij}\, du_{i,j} dV$$

$$\mathrm{d}W = \int_V -f_{Vi}\, du_i\, dV + \int_V \sigma_{ij}\, du_{i,j} dV$$

De notar, que o σ_{ij} que aparece nestas equações é dependente de $\mathrm{d}u_i$ e como tal é uma função dependente de $\mathrm{d}u_i$, ou seja $\boldsymbol{\sigma_{ij}(du_i)}$.

- Uma vez que se considerou que o sistema estava em equilíbrio, então estes termos contribuem apenas para a sua energia interna.

$$\mathrm{d}W = \underbrace{\int_V -f_{Vi}\, du_i\, dV}_{relacionado\ com\ energia\ potencial} + \underbrace{\int_V \sigma_{ij}\, du_{i,j} dV}_{trabalho\ para\ deformar\ o\ corpo}$$

Energia elástica de um meio deformado

- Uma vez que se considerou que o processo de transformação entre a situação inicial e a situação final de deformação, é suficientemente lento, então podemos definir um parâmetro λ que irá variar entre 0 e 1 e que irá descrever a percentagem de variação em relação ao deslocamento final, $\vec{u}$, e em relação ao estado de tensão final σ_{ij}.
- $0 \leq \lambda \leq 1.$
- $\mathrm{d}u_i = u_i d\lambda$
- $\sigma_{ij}(\mathrm{d}u_i) = \lambda \cdot \sigma_{ij}$
- Nessa situação:

finais

$$\mathrm{d}W = \int_V \sigma_{ij}(\mathrm{d}u_i)\, du_{i,j} dV = \int_V \lambda\, \sigma_{ij}\, u_{i,j} d\lambda\, dV = \lambda\, d\lambda \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV$$

- Conjugando todas os processos de deformação sucessivos entre a situação inicial e a final:

$$W = \left(\int_0^1 \lambda\, d\lambda\right)\left(\int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV\right) = \left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^1 \left(\int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV\right) = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV$$

- O tensor $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ é o tensor das distorções $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, já referido, que contém contribuições do tensor das deformações ε_{ij} e o das rotações de corpo rígido ω_{ij}: $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$
- Ignorando as rotações de corpo rígido, então $u_{i,j} = \varepsilon_{ij}$ e podemos escrever:

Energia de deformação → $\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV}$

Por unidade de volume: $\boxed{w = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}$