Ondas

O que é uma onda?

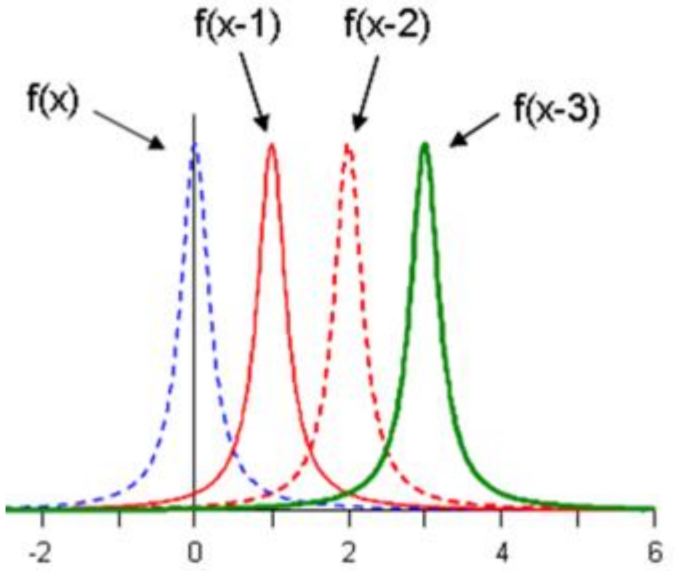
Ondas que se propagam para frente e para atras

Equação da onda unidimensional

ondas harmónicas (sinusoidais)

Velocidade de fase

Fasores e notação complexa



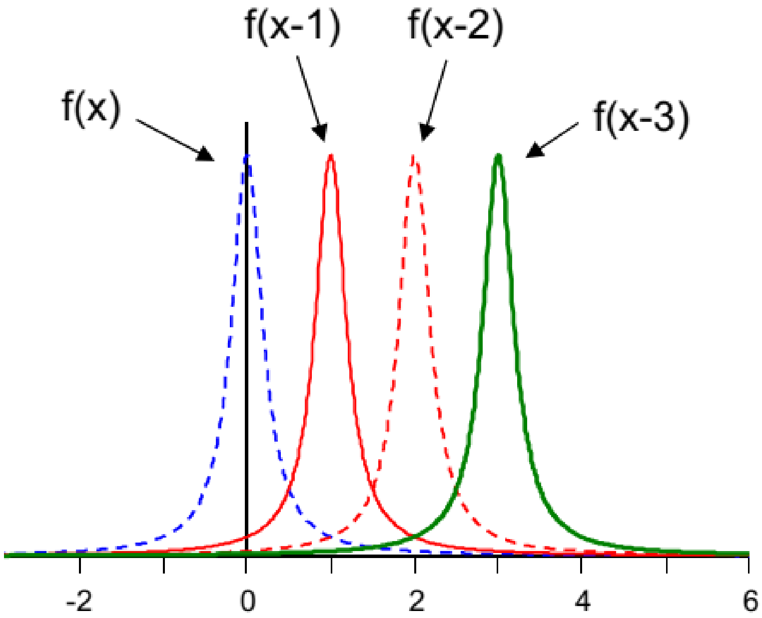
Referência: Hecht capitulo 2

O que é uma onda?

No sentido mais geral uma onda é uma perturbação que se desloca

Desloca uma função uma distância x_0

$f(x) \longrightarrow f(x-x_0)$



Se $\mathbf{x_0 = vt}$ com v >0

f(x - vt)

a função anda a direita (no sentido +x)

A onda se propaga pela frente

Se $\mathbf{x_0 = - vt}$ com v >0

f(x + vt)

a função anda a esquerda (no sentido -x)

A onda se propaga para atrás

Em ambos os casos o v é a velocidade (de fase) de onda

Versão em 3d $f\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = f\left(\vec{\mathbf{r}} \pm \vec{\mathbf{v}}t\right)$

Ondas mais complexas

Uma onda "viajante" é uma onda que se propaga numa determinada direção com uma determinada velocidade

$$f\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=f\left(\vec{\mathbf{r}}\pm\vec{\mathbf{v}}t\right)$$

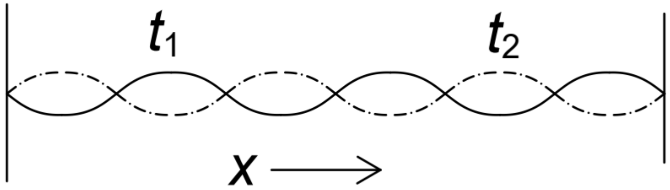
ondas em 2d

Fácil de especificar, mas algo simplástico

Ondas de som dispersam em 3d

Veremos que estas ondas mais complexas podem ser descritas com sobreposições de ondas "viajantes" (teorema Fourier)

Exemplo uma onda estacionária numa corda



de facto é a sobreposição de ondas "viajantes"

$$f(x,t)=\frac{1}{2}[\cos(kx-\omega t)-\cos(kx+\omega t)]$$

$$f(x,t)=\sin(kx)\sin(\omega t)$$

Parece ser uma onda mais não tem a forma

$$f\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=f\left(\vec{\mathbf{r}}\pm\vec{\mathbf{v}}t\right)$$

Equação da onda

Como podemos determinar se uma função é uma soma das ondas viajantes?

Para qualquer função da forma $f\left(x-\mathrm{v}t\right)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{1}{\mathrm{v}}\dfrac{\partial f}{\partial t}$

Para qualquer função da forma $f\left(x+\mathrm{v}t\right)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}=+\dfrac{1}{\mathrm{v}}\dfrac{\partial f}{\partial t}$

Logo se $\psi\left(x,t\right)$ é uma sobreposição de onda viajantes temos que

Equação da onda numa dimensão

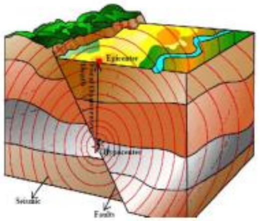
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi\left(x,t\right)=0 \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi\left(x,t\right)=0$$

Em 3d $\quad \nabla^2\psi\left(x,t\right)=\dfrac{1}{\mathrm{v}^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\psi\left(x,t\right)$

Descreve as propriedades principais de qualquer onda, não apenas luz


water wave


air wave


earth wave

Em geral a velocidade pode depende do amplitude $\mathrm{v}\left(\psi\right)$ o que complica bastante a resolução. Felizmente para luz isso não acontece.

A equação da onda é linear

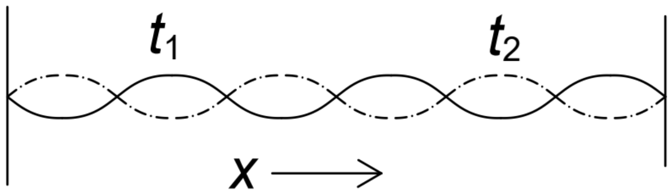
O principio da sobreposição é válida, i.e. se $\psi\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)$ e $\varphi\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)$ são soluções,

$f\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\psi\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)+\varphi\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)$ também é uma solução

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\psi\left(x,t\right)-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi\left(x,t\right)=0\\ \nabla^2\varphi\left(x,t\right)-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi\left(x,t\right)=0\end{aligned}\right\}\nabla^2\left[\psi\left(x,t\right)+\varphi\left(x,t\right)\right]-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\psi\left(x,t\right)+\varphi\left(x,t\right)\right]=0$$

Significa que:

- ondas possam passar uma pela outra sem produzir alterações
- Pode haver interferência construtiva e destrutiva.



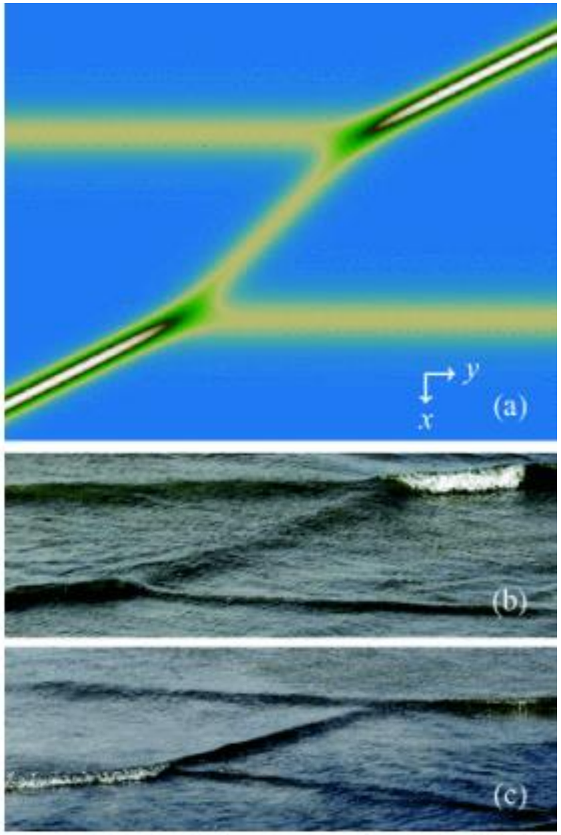
$$f(x,t)=\tfrac{1}{2}[\cos(kx-\omega t)-\cos(kx+\omega t)]$$

$$f(x,t)=\sin(kx)\sin(\omega t)$$

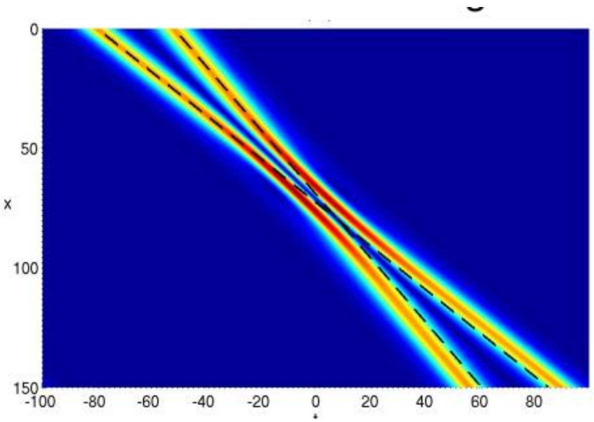
Quando o principio da sobreposição não é valida

Interações mais complicadas são possíveis:

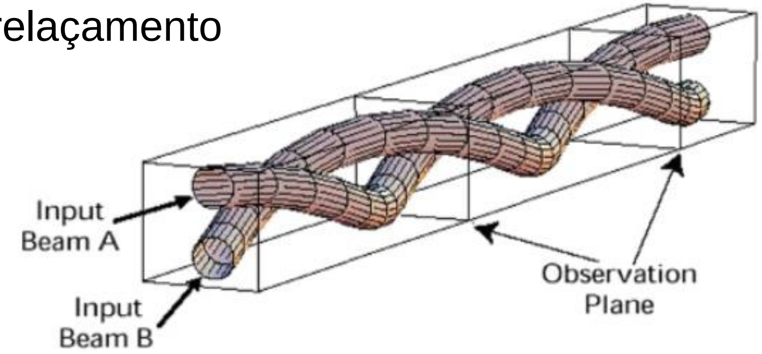
“colisões estranhas”



Repulsão entre ondas



entrelaçamento



Ondas EM

Veremos que as equações de Maxwell podem ser manipulada para dar:

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t)=0$$

$$\nabla^2\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t)=0$$

ε permitividade elétrica do meio

μ permeabilidade magnética do meio

num meio isotrópico

Logo $\mathrm{v}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ é a velocidade (de fase) da onda

São equações diferenciais lineares de segunda ordem
→ a solução mais geral tem 2 parâmetros independentes

Uma classe importante das soluções consiste de funções harmónicas

$$\begin{aligned}E(z,t)&=\mathrm{B}\cos\left[k\left(z\pm ct\right)\right]+\mathrm{C}\sin\left[k\left(z\pm ct\right)\right]\\&=\mathrm{B}\cos\left[kz\pm\omega t\right]+\mathrm{C}\sin\left[kz\pm\omega t\right]\end{aligned}$$

$$kc=\omega;\quad c=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Formas alternativas

$$E(z,t) = \underline{B}\cos(kz-\omega t) + \underline{C}\sin(kz-\omega t)$$

Para simplicidade considere apenas a onda que se propaga no sentido +z, i.e deixa cair os ±

Escrever: $\underline{A\cos(\delta)} = B$ e $\underline{A\sin(\delta)} = C$

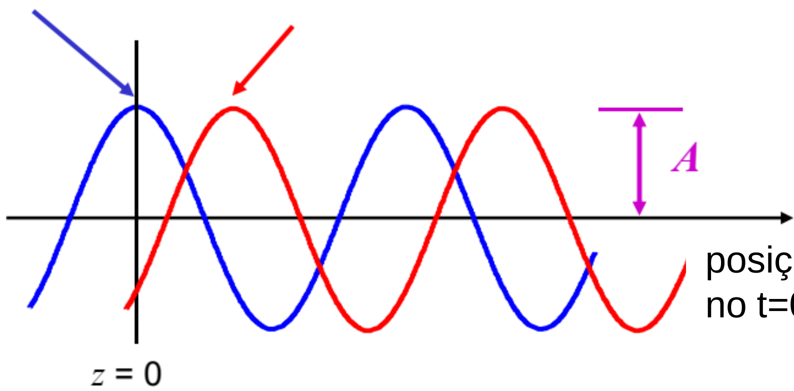
$$E(z,t) = \underline{A\cos\delta}\cos(kz-\omega t) + \underline{A\sin\delta}\sin(kz-\omega t)$$

$$E(z,t) = A\cos[(kz-\omega t) - \delta]$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

desvio de fase $\delta = 0$

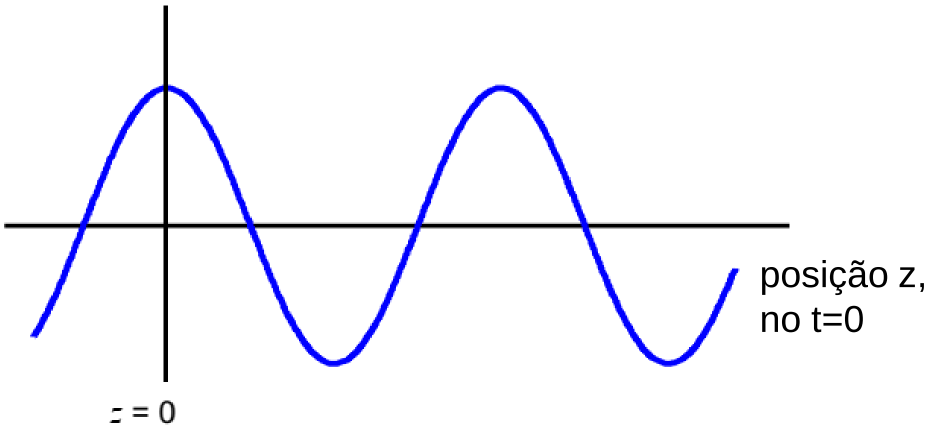
desvio de fase $\delta = 2\pi/3$



posição z, no t=0

A = amplitude (energia ~A^2)
δ = desvio da fase ou fase inicial

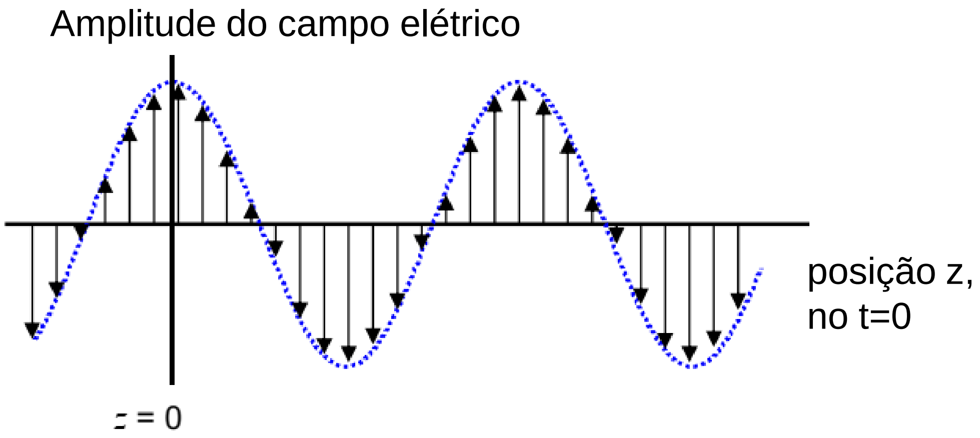
Aviso



$$E(z,t) = A\cos[(kz - \omega t) - \delta]$$

O que está ser indicado neste gráfico é a amplitude do campo elétrico em qualquer posição ao longo o eixo dos zzs.

Não está indicado a direção em que o campo aponta !

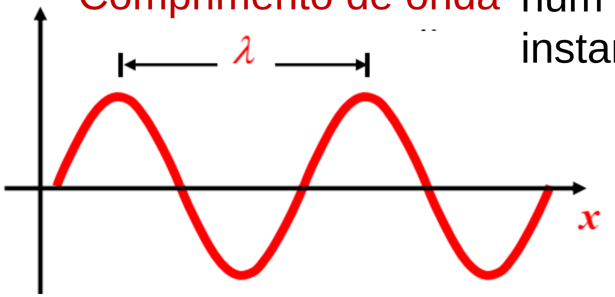


Definições

Variação espacial

Ao tirar um “foto” da onda em qualquer instante a onda se oscila em função da posição,

Comprimento de onda num dado instante, t_0

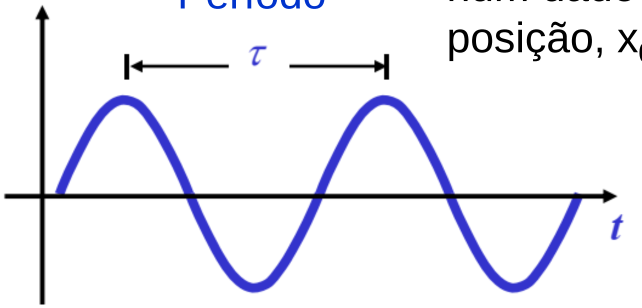


vetor de onda $k = 2\pi/\lambda$

número de onda $\kappa = 1/\lambda = k/2\pi$

$$E(x,t) = \mathrm{A}\cos\left[kx - \omega t + \theta\right]$$

Período num dado posição, x_0



Variação temporal

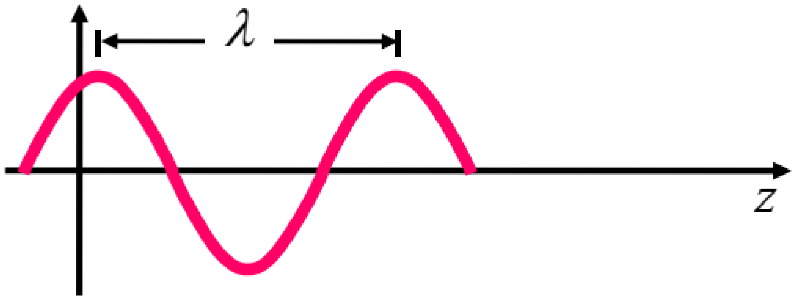
Se observa a onda em qualquer posição a onda se oscila em função do tempo,

frequência angular : $\omega = 2\pi/\tau$

frequência $f = 1/\tau = \omega/2\pi$ as vezes ν

Velocidade (de fase)

A onda se desloca um comprimento de onda durante um período



Logo $c = \dfrac{\lambda}{\tau} = f\lambda$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299792458 m/s \approx 3x10^8 m/s$$

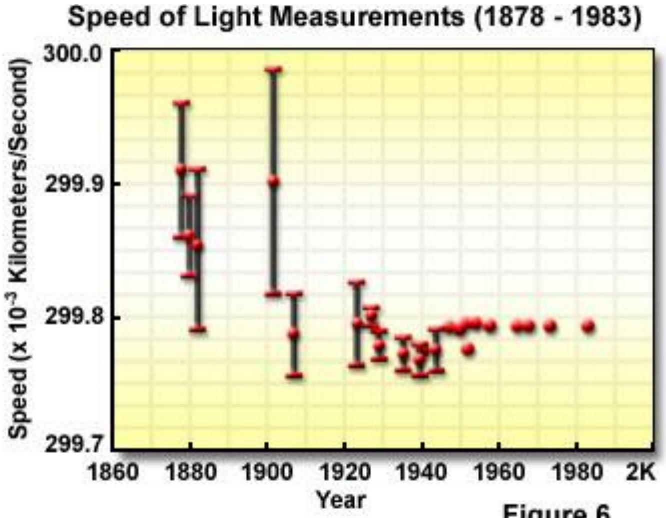
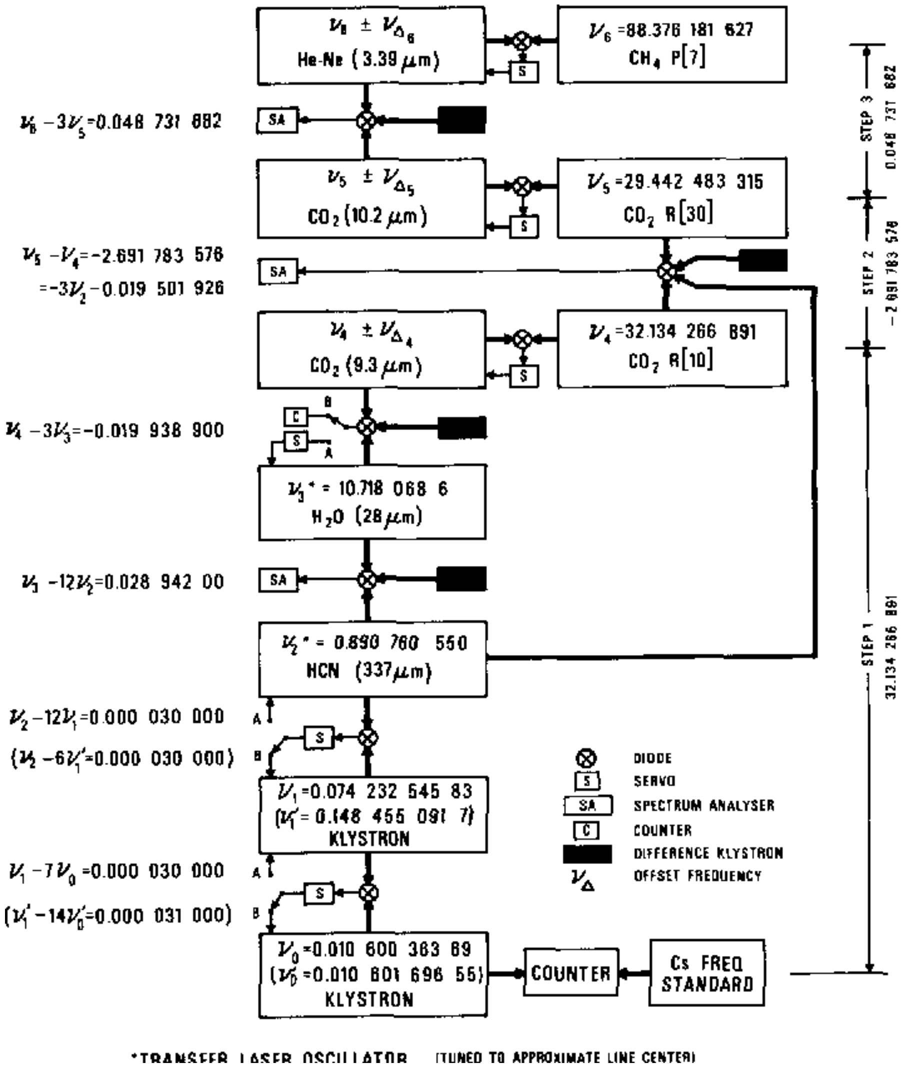


Figure 6

Medidas de frequência com ultra precisão



Molecule	Line	λ [μm]	Frequency [THz]
$^{12}C^{16}O_2$	$R(30)$	10.18	29.442483315(25)
$^{12}C^{16}O_2$	$R(10)$	9.3	32.134266891(24)
$^{12}CH_4$	$P(7)$	3.39	88.376181627(50)

10-11 alargaríamos da precisão!

A fase

$$E(x,t) = \mathrm{A}\cos\left[kx - \omega t + \theta\right]$$

A fase é o argumento do cosseno: $\phi = \left[kx - \omega t + \theta\right]$

Não confundam fase com a fase inicial

A frequência angular e o vetor e onda podem ser expressos como derivados da fase:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\omega$$

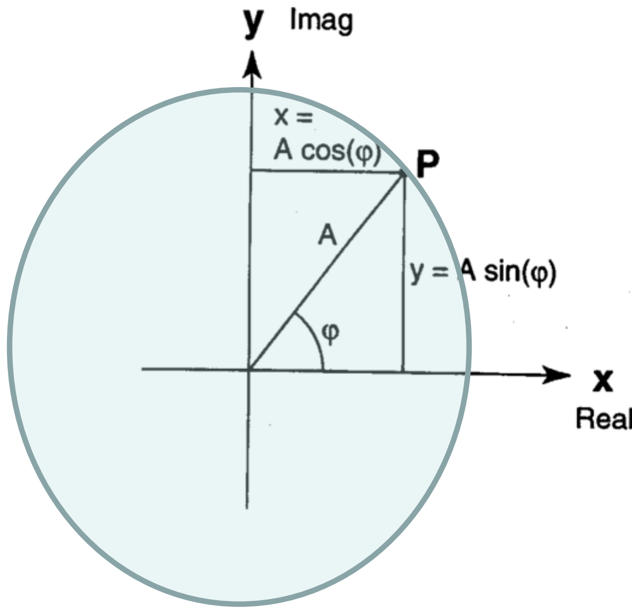
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = k$$

Notação complexa

Augustin-Louis Cauchy

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

uma das equações mais importantes na matemática



Efetivamente a relação entre coordenados Cartesianos e polar no plano complexo

$$P = Ae^{i\varphi}$$

A é a amplitude

φ é a fase

$\left|e^{i\varphi}\right| = 1$ para qualquer $\varphi \in \mathbb{R}$

Notação Complexa

$$E(x,t) = \mathrm{A}\cos[kx - \omega t + \theta]$$

$$\mathrm{A}e^{i\varphi} = \mathrm{A}\cos\varphi + i\mathrm{A}\sin\varphi$$

Pode ser escrito como:

$$E(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{A}e^{i(kx-\omega t+\theta)}\right\}$$

$$E(x,t) = \tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{A}e^{i(kx-\omega t+\theta)} + \mathrm{A}e^{-i(kx-\omega t+\theta)}\right\}$$

$$E(x,t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}e^{i(kx-\omega t+\theta)} + c.c$$

Frequentemente irei escrever estas expressões sem o Re ou os fatores de ½ ou c.c..

Amplitude complexa

parte constante

$$E(x,t) = \mathrm{A}e^{i(kx-\omega t+\theta)} = \boxed{\mathrm{A}e^{i\theta}}\,\boxed{\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}}$$

parte que oscila

$$E(x,t) = E_0\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$$

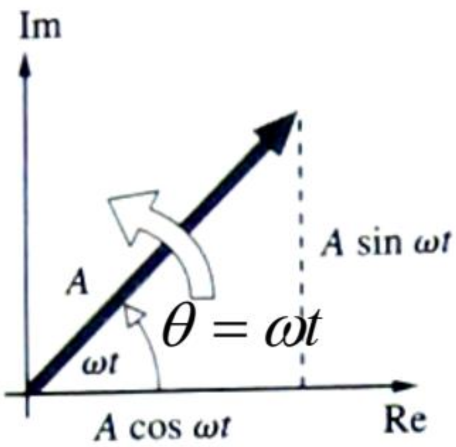
E_0 pode ser complexa (o mais segura assumir que é)

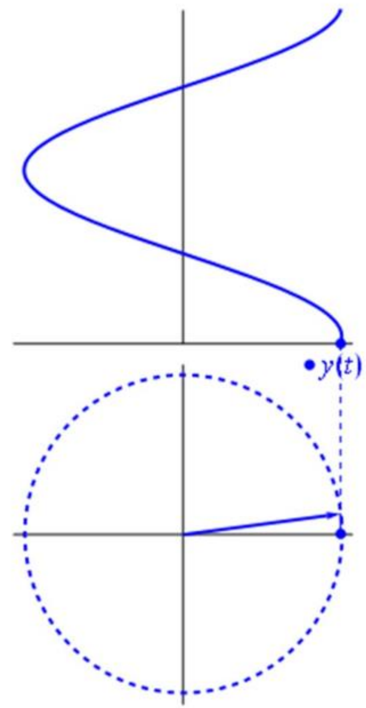
Medidas físicas sempre dão valores reais!

Podemos medir a amplitude $|E_0|$ (V/m)
e a fase $\measuredangle E_0$ (rad)

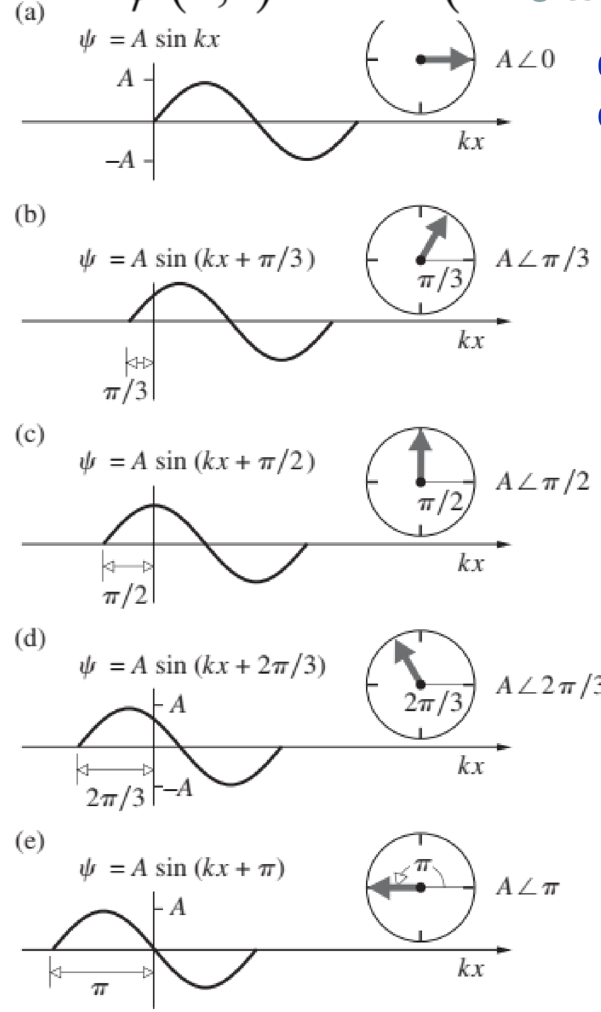
Fasores

Rodar a amplitude no plano complexo





$$\psi(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$



desloca a esquerda

Rotação no sentido
contrário dos relógios
A onda desloca a esquerda

Rotação no sentido dos
relógios
A onda desloca a direita

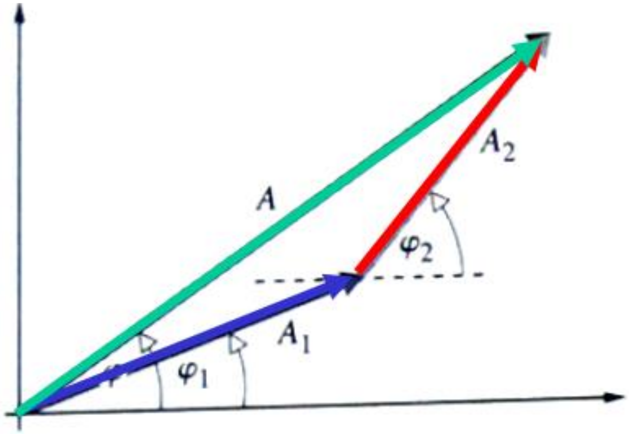
Hecht Fig 2.18

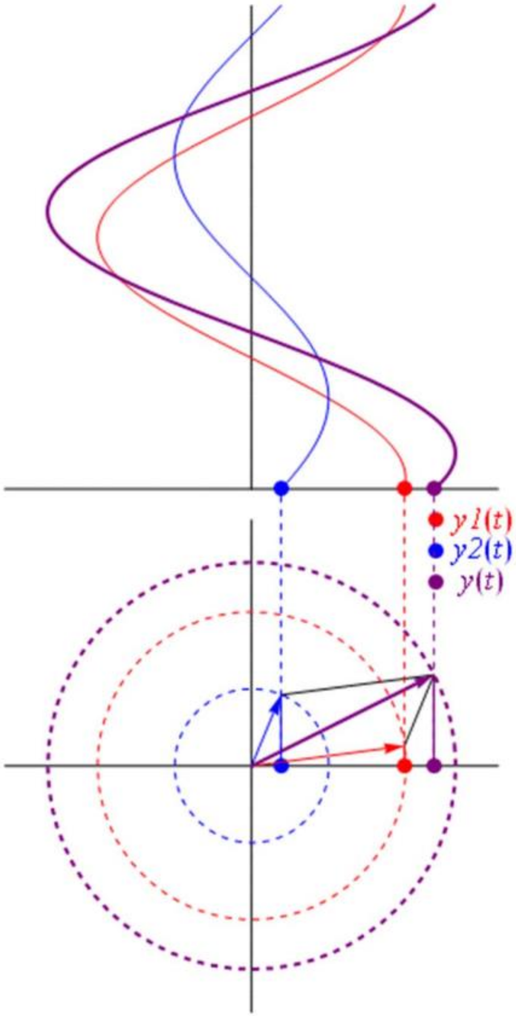
Somar fasores

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \boxed{A_1 e^{i\varphi_1}} + \boxed{A_2 e^{i\varphi_2}}$$

$$\psi = \boxed{A e^{i\varphi}}$$

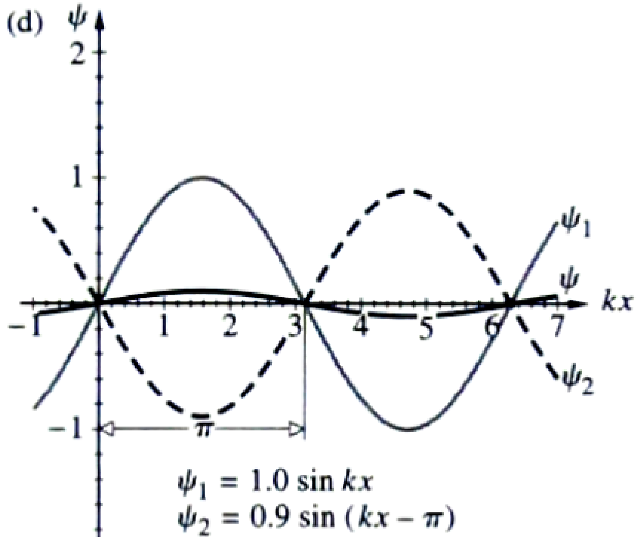
No plano complexo os fasores podem ser somados como fossem vetores (se rodam com a mesma frequência)



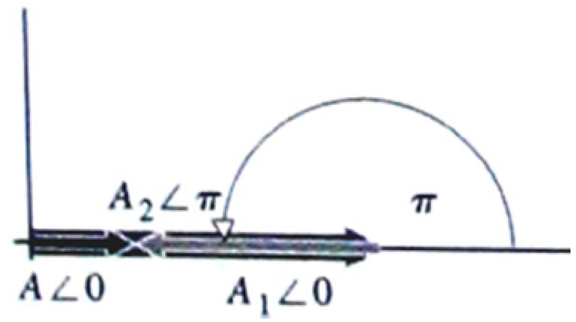


https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/phasor-addition.html

exemplo

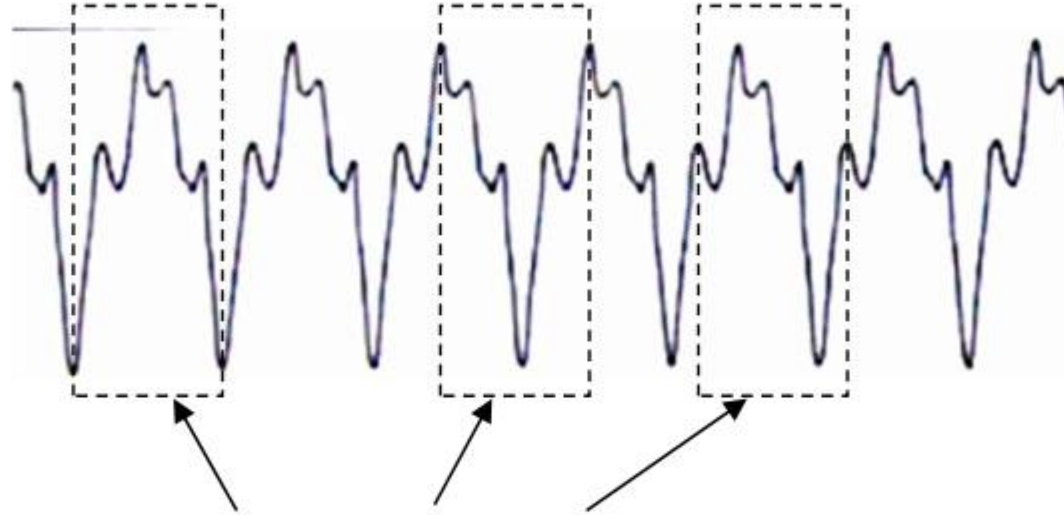


$$\psi_1 = (A_1 - A_2)\sin(kx - \omega t)$$



Amplitudes subtract
Phase does not change

Ondas mais complicadas



Elementos de base: quando repetidos reproduzem a onda

Os memos parâmetros podem ser usada para caracterizar a onda

λ – comprimento de onda : a distância de um elemento de base
τ - período : a duração de um elemento de base
k - vetor de onda: 2π * (numero de elementos/distãncia)
…

Frentes das ondas planas

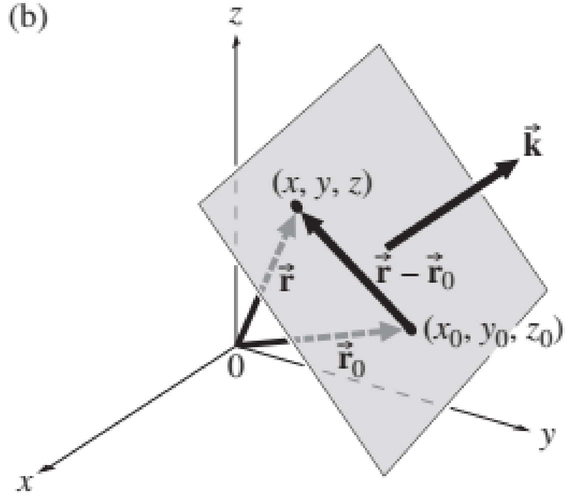
Uma **frente de onda** é a superfície que reúna todos os pontos espaciais com a mesma fase.

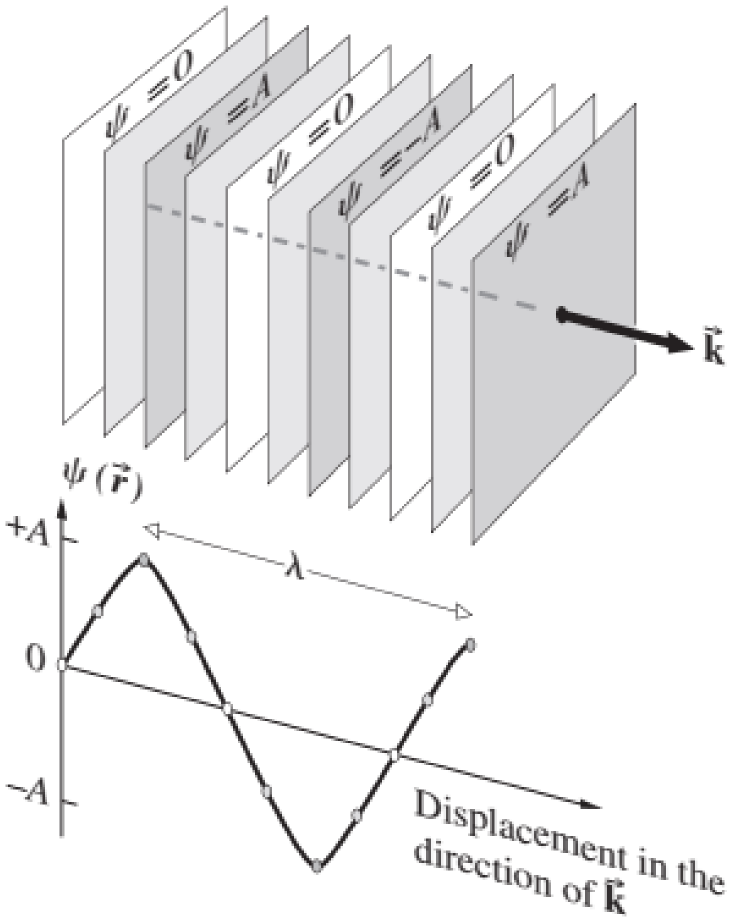
$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Superfície da fase constante

$$\vec{k} \bullet \vec{r} = \text{constant}$$

Conjunto dos pontos cuja vetor de posição tem a mesma projeção na direção k





Hecht Fig 2.22

Frentes das ondas esféricas

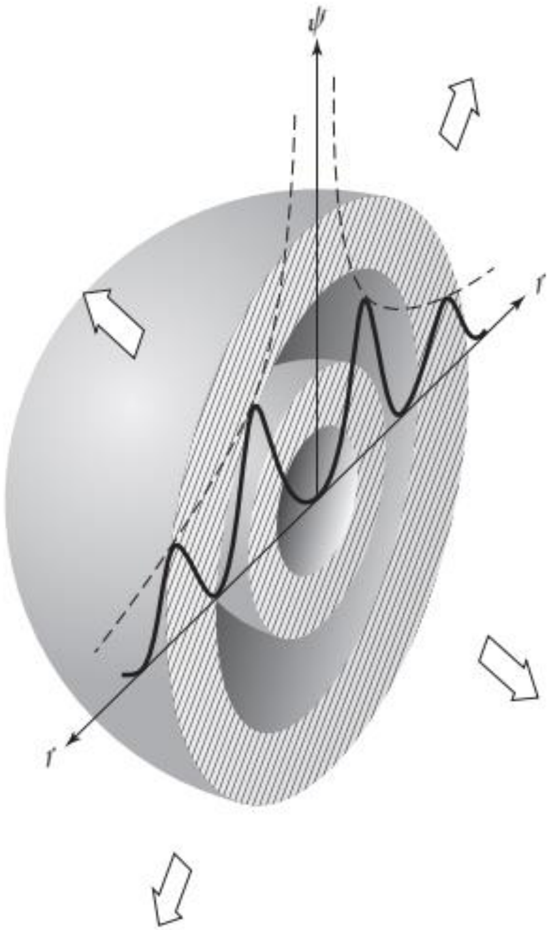


Figure 2.28 Spherical wavefronts.

$$\frac{A}{r} e^{i\left(\vec{k}\bullet\vec{r}\mp\omega t\right)}$$