Exercícios de Física Computacional

Escola de Ciências da Universidade do Minho

Física e Engenharia Física

ano letivo 2020/21, 1º semestre

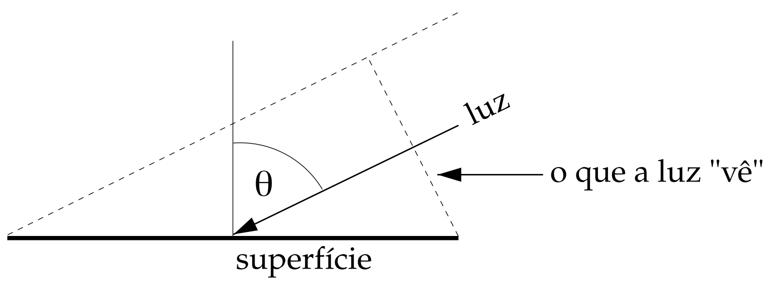
Folha 4

1. Calcule a primeira derivada de $\sin(x)$ numericamente usando os métodos dos 2 e 3 pontos, comparando, em cada caso o resultado obtido com função derivada obtida analiticamente.

2. O ficheiro `folha4-data1.txt` tem dados experimentais de tempo (em segundos, na 1ª coluna) e posições (em metros, na 2ª coluna). Calcule a velocidade em função do tempo e represente as posições e as velocidades em função do tempo.

3. Faça o gráfico da função $f(x) = \frac{3e^x}{x^2+x+1}$, bem como do polinómio de Taylor de ordem 3 centrado em $x = 0$ no intervalo $x \in [-3, 3]$.

4. Quando a luz incide numa superfície, o seu efeito depende não apenas da sua intensidade mas também do ângulo de incidência. Se o feixe luminoso fizer um ângulo θ com a normal à superfície onde incide, apenas "verá" $\cos\theta$ da área da superfície:



Ou seja, a intensidade da iluminação é $a\cos\theta$ se a for a intensidade do feixe de luz. Esta propriedade desempenha um papel fundamental na representação de gráficos 3D, permitindo calcular a iluminação de objetos tridimensionais quando são iluminados por determinados ângulos, aumentando o realismo das animações.

Suponha, por exemplo, que observamos a Terra de cima, vendo as suas montanhas e depressões. Aproximando a supefície da Terra por um plano e sabendo a altitude $w(x, y)$ em cada ponto do plano, podemos descrever a superfície da Terra simplesmente como $z = w(x, y)$ ou, equivalentemente, como $w(x, y) - z = 0$. O vetor v, normal à superfície, é dado pelo gradiente de $w(x, y) - z$:

$$\mathbf{v} = \nabla[w(x, y) - z] = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} [w(x, y) - z] = \begin{pmatrix} \partial w/\partial x \\ \partial w/\partial y \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora que temos um feixe de luz representado por a, cuja magnitude é a intensidade da luz. Desta forma, o produto escalar dos vetores a e v é:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores. Assim, a intensidade da iluminação da superfície das montanhas é:

$$I = |\mathbf{a}| \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{a_x(\partial w/\partial x) + a_y(\partial w/\partial y) - a_z}{\sqrt{(\partial w/\partial x)^2 + (\partial w/\partial y)^2 + 1}}.$$

Consideremos o caso simples em que a luz incide com intensidade unitária ao longo de uma direção que faz um ângulo ϕ definido na sentido oposto ao dos ponteiros do relógio a partir do eixo este-oeste, de forma a que $\mathbf{a} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$. Nestas condições,

$$I = \frac{\cos\phi\,(\partial w/\partial x) + \sin\phi\,(\partial w/\partial y)}{\sqrt{(\partial w/\partial x)^2 + (\partial w/\partial y)^2 + 1}}.$$

(a) O ficheiro `folha4-data2.txt` contém a altitude $w(x, y)$ de cada ponto da superfície da Terra, em metros (podendo ser positiva ou negativa). Escreva um programa que calcule as derivadas $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ em cada ponto, sabendo que o espaçamento entre os pontos é $30\,000\,\mathrm{m}$. Com esta informação calcule a intensidade em cada pondo, assumindo $\phi = 45°$ e represente o resultado num gráfico de densidade.

(b) O ficheiro `folha4-data3.txt` contém uma grelha de valores obtido num microscópio de varrimento por efeito de túnel (STM, do inglês *scanning tunneling microscope*) na medição da superfície de uma amostra de silicone. Modifique o programa anterior para obter uma imagem 3D da superfície da amostra, sabendo que $h = 2.5$ (em unidades arbitrárias).

5. Calcule $\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_0^{2,5} e^x\,\mathrm{d}x$ usando:

   (a) o método dos retângulos.

   (b) o método do trapésio.

   (c) o método de Simpson.

6. A resolução dos telescópios é limitada pela difração da luz. A luz das estrelas, que pode ser considerada como tendo origem numa fonte pontual a distância infinita, de comprimento de onda λ passa pela abertura circular do telescópio, que assumimos ter raio unitário, e é focada no plano focal $(x\,O\,y)$ produzindo não um ponto, mas um padrão de difração. A intensidade da luz neste padrão é dada por:

$$I(r) = \left(\frac{J_1(kr)}{kr}\right)^2,$$

em que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância ao centro do padrão de difração no plano focal, $k = 2\pi/\lambda$ e $J_1(kr)$ é uma função de Bessel de ordem 1.

   (a) As funções de Bessel $J_m(\alpha)$ são dadas por

   $$J_m(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(m\theta - \alpha\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

   onde m é a ordem da função (inteiro não negativo) e $\alpha \geq 0$. Escreva um programa *python* que calcule o valor de $J_m(\alpha)$ usando a regra de Simpson com $N = 1000$ pontos. Represente num único gráfico as funções de Bessel J_0, J_1 e J_2 em função de α, entre $\alpha = 0$ e $\alpha = 20$.

   (b) Modifique o seu programa, ou faça um novo, para representar também um gráfico de densidade do padrão circular de difração no plano focal para luz com $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$. Deve representar um quadrado do plano focal cobrindo valores de r de zero até $1\,\mu\mathrm{m}$.

Nota 1: $\lim_{\alpha\to 0} J_1(\alpha)/\alpha = \frac{1}{2}$.

Nota 2: Como o ponto central no padrão de difração é muito mais brilhante que tudo o resto, o uso de um esquema de cores adequado (por exemplo “`hot`”) ou o uso de “`imshow(x,vmax=0.005)`” pode ajudar a uma melhor visualização dos anéis de difração.