Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

Cap 2. Sistemas de Equações Lineares

Alice: *I'm very glad*
I happened to be in the way.

2. Sistemas de Equações Lineares

- Sistemas de Equações Lineares
- Operações elementares
- Método de eliminação de Gauss
- Matriz escada de linhas
- Característica de uma matriz
- Classificação de Sistemas
- Sistemas Homogéneos
- Inversa de uma matriz quadrada

Equações Lineares

Uma equação linear nas incógnitas $x_1, \dots x_n$ é uma equação do tipo

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

onde $a_1, \dots, a_n$ e b são números reais.

- $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$: primeiro membro ou termo dependente da equação,
- b: o segundo membro ou termo independente da equação.

Exemplo

- $x/3 = 25$, conjunto solução: $S = \{75\}$;
- $x + 3y = -5$, conjunto solução:
  $S = \{(x, y) : x = -5 - 3y, x, y \in \mathbb{R}\}$.

Sistema de m equações nas n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $x = (x_j)$: incógnita,
- a_{ij}: coeficientes da incógnita $x = (x_j)$,
- $b = (b_i)$ termo independente.

- Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, o sistema diz-se homógeneo.
- Uma solução do sistema é um n-uplo ordenado de números que é solução das m equações do sistema.
- Um sistema diz-se
  1. impossível se não tem solução.
  2. possível e determinado se tem uma única solução.
  3. possível e indeterminado se tem mais do que uma solução.

Observação: Um sistema homogéneo é sempre possível. (Porquê?)

Exemplo:

- $(1,1)$ é a única solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 2 \\ 2x_1 - x_2 & = & 1 \end{cases}$$

- O sistema homógeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{cases}$$

tem uma infinidade de soluções.

- O sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 1 \end{cases}$$

é impossível.

Consideremos os dois seguintes sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -3 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Verificamos que ambos os sistemas têm solução única igual a $(2/3, 1/3, -4/3)$.

O que podemos dizer da $2^{\underline{a}}$ equação do $2^{\underline{0}}$ sistema?

Note-se que: $-1\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{linha 1}} + 1 \times \underbrace{(2x_1 + x_3)}_{\text{linha 2}} + 2 \times \underbrace{(x_2 + x_3)}_{\text{linha 3}} = x_1 + x_2 + 3x_3$

Os sistemas dizem-se equivalentes

Definição

Dois sistemas dizem-se equivalentes se admitem o mesmo conjunto solução.

Que operações se podem fazer sobre as equações de um sistema de modo a obter um sistema equivalente?

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases}$$

$$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases}$$

substituindo da 3ª equação para a 1ª, obtemos $z=2$, $y=1$ e $x=1$.

As operações se podem efectuar num sistema de modo a obter-se um sistema equivalente são:

- OE1 troca da ordem das equações,
- OE2 multiplicar uma equação por um número, não nulo,
- OE3 somar uma equação com outra multiplicada por um número.

Estas operações designam-se por **operações elementares**.

Teorema: Se, sobre as equações de um sistema, efetuarmos um número finito de operações elementares, obtemos um sistema equivalente ao inicial.

Sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Notação abreviada

$$Ax = b$$

$A = (a_{ij})$ matriz simples do sistema, $m \times n$,
$x = (x_j)$ matriz das incógnitas,
$b = (b_i)$ matriz dos termos independentes.

Matriz ampliada do sistema

$$\underset{(Ab)}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}} \quad \text{ou} \quad \underset{(A|b)}{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)}$$

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 & = & -1 \end{cases}$$

$$\underset{\text{matriz simples}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{matriz ampliada}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)}$$

Teorema: O n-uplo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução do sistema $Ax = b$ *sse* a matriz coluna $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ satisfaz $A\alpha = b$.

Demonstração: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução do sistema $Ax = b$ *sse*

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

o que equivale a dizer

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ou seja } A\alpha = b$$

Neste contexto, faz sentido considerar a solução do sistema, não como o n-uplo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, mas sim como a matriz coluna $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ tal que $A\alpha = b$.

As solucões de sistemas serão referidas quer na forma de n-uplos ordenados, quer na forma de matrizes coluna, conforme seja mais conveniente.

Exemplo Considerando a matriz ampliada de um sistema $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$ tem-se que $(-1, 0, 0, 3)$ é solução do sistema uma vez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Consideremos, em paralelo, dois modos de escrita da resolução de um sistema, usando chavetas e com notação matricial.

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_1 \leftrightarrow E_2$ $\qquad$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

obtendo-se o sistema simplificado, e para o qual é fácil obter a solução (primeiro o valor de z, depois de y e depois de x)

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}\right.$$

$$S=\{(1,1,2)\}$$

Observação: Note-se que $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} . \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{solução}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{b}}$

As operações se podem efectuar sobre as linhas de uma matriz são:

OL1 troca da ordem das linhas,

OL2 multiplicação de uma linha por um escalar, não nulo,

OL3 substituir uma linha pela soma com outra linha multiplicada por um escalar.

Estas operações designam-se por **operações elementares**.

Definição: Diz-se que A é uma **matriz equivalente por linhas** a uma matriz B, se esta matriz se pode obter a partir de A, através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Escreve-se: $A \to B$.

Resolução de sistemas pelo **Método de Eliminação de Gauss**

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

Método de eliminação de Gauss

Teorema

Seja $\tilde{A}x = \tilde{b}$ um sistema que resulta da realização de uma sequência de operações elementares sobre as equações de $Ax = b$. Então, os sistemas são equivalentes.

Nota: as operações *equivalentes* ao serem realizadas sobre a matriz ampliada do sistema, simplificam a aplicação do método.

Teorema

Seja $\tilde{A}x = \tilde{b}$ um sistema determinado, de n de equações a n incógnitas. Então é possível, realizando uma sequência finita de operações elementares sobre as equações, transformá-lo num sistema equivalente cuja matriz dos coeficientes é triangular superior.

Método de eliminação de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considerando $a_{11} \neq 0$ os passos elementares são efectuados de maneira a eliminar a incógnita x_1 em todas as equações a partir da 2ª equação. A matriz A é transformada na matriz

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}, \text{com} \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{1j}, \ {\scriptstyle i,j=2,\dots,n.}$$

Se $a_{11} = 0$, por troca de linhas ou colunas coloca-se na posição (1,1) um elemento de A não nulo.

Se $a_{22}^{(1)} \neq 0$ a matriz $A^{(1)}$ é transformada na matriz

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \text{com} \qquad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)},$$

$i, j = 3, \dots, n.$

e assim sucessivamente ate se obter uma matriz triangular superior.

Os números não nulos $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots$ são designados os pivots da eliminação.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow (-1)L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow (-2)L_1 + L_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow 2L_2 + L_4}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

obtendo-se o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

que permite obter a solução pelo designado método de substituição inversa.

Obtendo-se primeiro o valor de x_4, depois x_3, seguido de x_2, e finalmente x_1 tem-se

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(1, 0, -1, 1)\}$$

Sistemas triangulares - método de substituição inversa e método de substituição directa

Considere-se o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots & & \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right.$$

ao qual corresponde uma matriz dos coeficientes triangular superior.

Da última equação obtém-se: $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

que, substituindo-se na penúltima equação: $x_{n-1} = \dfrac{(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)}{a_{n-1,n-1}}$

e, assim sucessivamente, obtêm-se: $x_1 = \dfrac{(b_1 - a_{1,2}x_2) - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{1,1}}$

este é chamado método de substituição inversa.

Um sistema cuja matriz dos coeficientes é triangular inferior, invertível, pode ser resolvido pelo método de substituição directa.

Exemplo Considerando o sistema seguinte

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \end{cases}$$

cuja matriz dos coeficientes é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

tem-se: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1/3 \\ z = -2/9 \end{cases}$

sendo o conjunto solução do sistema inicial: $S = \{(1, -1/3, -2/9)\}$

Para matrizes rectangulares, em que a matriz ampliada do sistema de tem m equações a n incógnitas, com $m \neq n$, o método de eliminação de Gauss consiste na aplicação das mesmas operações elementares sobre linhas, com o objectivo de se obterem matrizes **escada de linhas.**

Definição

Diz-se que uma matriz $m \times n$ é uma matriz **escada (de linhas)** se:

1. por debaixo do 1º elemento não nulo de cada linha da matriz, e por debaixo dos elementos anteriores da mesma linha, todas as componentes da matriz são nulos,
2. não há linhas totalmente nulas seguidas de linhas não nulas.

Esquematicamente:

$$\begin{pmatrix} \circledast & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & \circledast & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\circledast$: ele^{tos} não nulos,

$\bigstar$: ele^{tos} que podem ser nulos ou não,

a cor azul: ele^{tos} da diagonal principal.

Exemplos de matrizes escada de linhas:

$$
\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \quad ; \quad
\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad
\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \quad ;
\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Teorema Toda a matriz A, de ordem $m \times n$, é equivalente, por linhas, a uma matriz em escada.

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$ *ou* $car(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \; c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(C) = 1 \; ; \; D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \; c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(E) = 3 \, ; \quad c(I_n) = n \, ; \quad c(O_n) = 0$$

Observações:

- Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, então $car(A) \leq m$ e $car(A) \leq n$.

- Se uma dada matriz A de ordem $m \times n$ é convertida, por operações elementares sobre linhas, numa matriz em escada E, a característica de A , $car(A)$, é definida como:

$$\begin{aligned} car(A) &= \text{número de pivôs de } E \\ &= \text{número de linhas não nulas de } E \\ &= \text{número de colunas básicas de } A; \end{aligned}$$

  onde as *colunas básicas* (também referidas como colunas principais) de A são as colunas de A correspondentes às colunas de E que contêm os pivôs.

- Se duas matrizes em escada E_1 e E_2 são equivalente por linhas a uma dada matriz A, então E_1 e E_2 têm necessariamente o mesmo número de linhas não nulas.

Classificação de Sistemas

Exemplo 1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{L_2' \leftarrow (-2)L_1 + L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$S = \{(1, -1)\}$ (solução única)

Sistema possível e determinado. $c(A) = c(A|b) = n$

Exemplo 2.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2' \leftarrow (-1)L_1 + L_2$
$L_3' \leftarrow (-2)L_1 + L_3$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$L_3' \leftarrow (-1)L_2 + L_3$

$0x_1 + 0x_2 = 2$

$S = \{\}$ (não existe solução)

Sistema impossível $\quad c(A) \neq c(A|b)$

Exemplo 3.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2' \leftarrow (-1)L_1 + L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

O sistema tem uma infinidade de soluções
$S = \{(1, \alpha, \alpha) : \alpha \in R\}$

Sistema possível e indeterminado $\quad c(A) = c(A|b) < n$

Grau de indeterminação: 1 (número de variáveis livres).

Classificação de Sistemas

Consideremos o sistema, $AX = b$, de m equações nas n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Podem definir-se, à custa da característica da matriz dos coeficientes, $c(A)$, e da característica da matriz ampliada, $c(A|b)$, condições de existência e unicidade para a solução.

$$\begin{cases} \text{sistema possível} \begin{cases} \text{determinado} \\ c(A) = n \\ \text{indeterminado} \\ c(A) < n \\ \text{grau de indeterminação: } n - c(A) \end{cases} \\ c(A) = c(A|b) \\ \\ \text{sistema impossível} \\ c(A) \neq c(A|b) \end{cases}$$

Discussão de Sistemas

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$$

- se $k = -4$ $\quad c(A) = 2;\ c(A|b) = 3$ logo $c(A) \neq c(A|b)$ sistema impossível

$$S = \{\}$$

- se $k \neq -4$ $\quad \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{array}\right)$
    - se $k = 0$
    - se $k \neq 0$

- se $k = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 = 3 - 3x_3 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$$

$c(A) = 2 = c(A|b)$ sistema possível
$c(A) < 3 = n$ sistema possível indeterminado, $\quad S = \{(3 - 3\alpha, 1, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

- se $k \neq 0$ $\quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{array}\right)$

$c(A) = 3 = c(A|b) = n$ sistema possível determinado

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ (k+4)x_2 = 4 \\ kx_3 = \frac{k}{k+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{11+k}{k+4} \\ x_2 = \frac{4}{k+4} \\ x_3 = \frac{1}{k+4} \end{array}\right. ,$$

$S = \{(\frac{11+k}{k+4}, \frac{4}{k+4}, \frac{1}{k+4}), k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0 \wedge k \neq -4\}$

Sistemas Homogéneos

Seja $Ax = b$ a equação matricial de um sistema de m equações a n incógnitas. Se $b = 0$, o sistema diz-se um sistema homogéneo.

Um sistema homogéneo tem sempre solução, dita solução trivial $x = 0$.

Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

não há necessidade de *trabalhar* com a matriz ampliada do sistema!

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$ matriz escada de linhas

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = (-1/2)x_3 \\ x_1 = x_4 - (1/2)x_3 \end{array} \right.$$

$$S = \{(\beta - (1/2)\alpha, \ -(1/2)\alpha, \ \alpha, \ \beta) : \alpha, \beta, \in \mathbb{R}\}$$

O método de Gauss-Jordan para resolver sistemas, $Ax = b$, consiste na aplicação de (apenas) operações elementares sobre linhas, de modo a converter a matriz ampliada do sistema, $(A|b)$, numa forma ainda mais simplificada, a chamada forma em escada reduzida.

Diz-se que uma matriz é uma matriz em escada reduzida ou que tem a forma em escada reduzida, se:

1. a matriz tem a forma em escada;
2. os pivôs são todos iguais a 1;
3. os pivôs são os únicos elementos não nulos das suas colunas.

Exemplo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema: Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente, por linhas, a uma única matriz em escada reduzida.

Método de Gauss-Jordan: exemplo

Retomando o exemplo anterior $\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

Matriz ampliada em forma de escada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$

Redução à forma de escada reduzida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3/3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow (-1)L_3 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_3 + L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow (-2)L_2 + L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Solução do sistema: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Inversa de uma matriz

Se A é uma matriz de ordem n, invertível, a sua inversa verifica

$$AX = XA = I_n$$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as colunas da matriz X e designemos por $e_1, e_2, \ldots, e_n$ as colunas da matriz identidade I_n.
Considerando $AX = I_n$, e as matrizes X e I_n fraccionadas por colunas, tem-se

$$A(x_1 x_2 \ldots x_n) = (e_1 e_2 \ldots e_n) \qquad \text{com } e_i = (0 \ldots 0 \underbrace{\;1\;}_{\text{posição } i} 0 \ldots 0)^T$$

$$\Leftrightarrow (Ax_1 \;\; Ax_2 \;\; \ldots \;\; Ax_n) = (e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_n) \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_1 = e_1 \\ Ax_2 = e_2 \\ \quad\vdots \\ Ax_n = e_n \end{cases}$$

consequentemente, a coluna i da matriz inversa de A é a solução do sistema $Ax_i = e_1$, que tem solução única, porque A é invertível.

Para calcular a matriz inversa de A resolvem-se n sistemas $Ax_i = e_1$, todos com a mesma matriz dos coeficientes.

Para tal pode-se usar o método de Gauss-Jordan, resolvendo os n sistemas simultaneamente, aplicando operações elementares à matriz

$$(A \mid In)$$

de forma a transformá-la numa matriz da forma

$$(In \mid X).$$

Então $X = A^{-1}$.

Para não repetir operações elementares sobre a matriz dada, faz-se

$$(A \mid I_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (I_n \mid X)$$

tendo-se $X = A^{-1}$.

Exemplo

Determinar a inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3\end{array}\right)\to$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3\\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3\\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3\\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3\\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3\end{array}\right)$$

donde a matriz inversa de A é: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3\\ -1/3 & 2/3 & -1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n. Então a matriz A é invertível se e só se $Ax = 0$ não tem soluções além da solução nula (trivial).

Demonstração:

"$\Longrightarrow$"

Se A é invertível, existe A^{-1}, e podemos multiplicar ambos os membros de $Ax = 0$, à esquerda, por A^{-1}, obtendo-se:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 \Rightarrow A^{-1}(Ax) = 0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$$

"$\Longleftarrow$"

Teorema

Seja A uma matriz invertível. Então, para qualquer inteiro m, a matriz A^m é invertível tendo-se

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

<u>Demonstração:</u>

Por indução em m.

Para $m = 1$ trivial!

Consideremos que a *afirmação* é válida até m e verifiquemos que é válida para $m + 1$.

Então, e uma vez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, tem-se que:

$$(A^{-1})^{m+1} = (A^{-1})^1(A^{-1})^m = A^{-1}(A^{-1})^m \underset{(*)}{=} A^{-1}(A^m)^{-1} =$$

$$= (A^m A)^{-1} = (A^{m+1})^{-1}$$

(*) por hipótese *afirmação* é válida até m.

Teorema Seja A uma matriz de ordem n. A matriz A é invertível se e só se $c(A) = n$.

Demonstração:
Consideremos que A é invertível. Então qualquer sistema da forma $Ax = b$ é possível e determinado pois tem solução única igual a $A^{-1}b$. Portanto, $c(A) = n$.

Reciprocamente, suponhamos que $c(A) = n$. Então, conclui-se que cada sistema da forma $Ax_i = e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ é possível e determinado. Logo $A(x_1 x_2 \ldots x_n) = I_n$. Daqui resulta que A é invertível, tendo-se $A^{-1} = (x_1 x_2 \ldots x_n)$.

Teorema Seja A uma matriz de ordem n.
As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A matriz A é invertível.

(b) Tem-se $|A| \neq 0$.

(c) $c(A) = n$.

(d) $Ax = 0$ não tem soluções além da solução nula.

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$$