Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LFIS e MIENGFIS

Cálculo Vetorial

Teoremas Integrais do Cálculo Vetorial — maio de 2019

Sejam $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$, $n=2$ ou $n=3$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$, $c:[a,b]\to\mathcal{U}$ uma parametrização de uma curva c.

Integral da função escalar f ao longo da curva c

$$\int_c f\,ds = \int_a^b f(c(t))\|c'(t)\|\,dt$$

Comprimento da curva c

$$\int_c ds = \int_a^b \|c'(t)\|dt$$

Integral do campo vetorial $\boldsymbol{F}$ ao longo da curva c

$$\int_c \boldsymbol{F}\cdot ds = \int_a^b \boldsymbol{F}(c(t))\cdot c'(t)\,dt$$

Outra notação: Se $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,F_3)$ então também escrevemos $\displaystyle\int_c \boldsymbol{F}\cdot ds = \int_c F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
Se $c(t)=(c_1(t),c_2(t),c_3(t))$ então $dx=c_1'(t)dt$, $dy=c_2'(t)dt$ e $dz=c_3'(t)dt$

Integral de um campo de gradientes $\boldsymbol{F}=\nabla f$ ao longo de qualquer caminho c com ponto inicial A e ponto final B:

$$\int_c \boldsymbol{F}\cdot ds = \int_a^b \boldsymbol{F}(c(t))\cdot c'(t)\,dt = f(B)-f(A)$$

Parametrização duma superfície regular S:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\Phi} \quad : D & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & \boldsymbol{\Phi}(u,v) \end{array}$$, em que $D\subseteq\mathbb{R}^2$, tal que $\boldsymbol{\Phi}(D)=S$ e $\boldsymbol{\Phi}_u\times\boldsymbol{\Phi}_v\neq(0,0,0)$, para todo $(u,v)\in D$, sendo

$$\boldsymbol{\Phi}_u = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Phi}_u = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial v}$$

Parametrização do gráfico duma função escalar: $f:D\to\mathbb{R}$, em que $D\subseteq\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\Phi} \quad : D & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,f(x,y)) \end{array}$$ é uma parametrização de $Grf=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in\mathbb{R}^2,\, z=f(x,y)\right\}$

Área duma superfície regular parametrizada S: se $\Phi:D\to\mathbb{R}^3$ parametrização de S então

$$\text{Área de } S = \int\int_D \|\boldsymbol{\Phi}_u\times\boldsymbol{\Phi}_v\|\,d(u,v)$$

Área duma superfície $S = Gr\, f$:

$$\text{Área de } S = \int\int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\; d(x,y)$$

Integral da função escalar f sobre uma superfície S: se $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ parametrização de S então

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(\mathbf{\Phi}(u,v)) \|\mathbf{\Phi}_u \times \mathbf{\Phi}_v\|\, d(u,v)$$

Integral do campo de vetores $\boldsymbol{F}$ sobre uma superfície S: se $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ parametrização de S então

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot S = \iint_D \boldsymbol{F}(\mathbf{\Phi}(u,v)) \cdot (\mathbf{\Phi}_u \times \mathbf{\Phi}_v) d(u,v)$$

Facilmente se verifica que, se $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal exterior a S e se $f = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ então

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot S = \iint_S f\, ds$$

Teorema de Green: Se D é uma região simples e $P, Q : D \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 (com as derivadas parciais contínuas), então

$$\iint_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right) d(x,y) = \int_{c^+} P\, dx + Q\, dy,$$

onde c^+ representa uma parametrização positiva da fronteira de D (isto é, se caminharmos ao longo da fronteira de D, veremos sempre D à nossa esquerda)

Escolhendo $Q(x,y) = x$ e $P(x,y) = -y$, obtemos

$$2(\text{Área de } S) = \int_{c^+} -y\, dx + x\, dy$$

Teorema da Divergência no plano: Se D é uma região simples e $\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^1, então

$$\iint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F} \cdot\, d(x,y) = \int_{c^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds,$$

sendo $\boldsymbol{n}$ o vetor normal exterior a c^+ (fronteira de D) percorrida no sentido directo

Nota: se $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é uma parametrização de ∂D no sentido directo, então $\boldsymbol{n}(c(t)) = \frac{(c_2'(t), -c_1'(t))}{\|c'(t)\|}$

Teorema da Divergência (ou de Gauss): Seja V uma região simples de $\mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{F} : V \to \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^1. Seja ∂V a superfície orientada que limita V. Então

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} \cdot\, d(x,y,z) = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

sendo $\boldsymbol{n}$ o vetor normal exterior

Teorema de Stokes: Se D é uma região simples, $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ é uma parametrização duma superfície S orientada (isto é, o vetor normal exterior está definido em todos os pontos), ∂S denota a curva (orientada) que é o bordo de S, $\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot\, dS = \int_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot\, ds$$

Notas: (i) se o bordo de S for vazio, então os integrais acima são zero; (ii) não confundir bordo de uma superfície com a fronteira (ou bordo) de um domínio de $\mathbb{R}^2$.