Elasticidade linear

- O comportamento elástico dos materiais é caracterizado pela capacidade de recuperar de forma completa a situação inicial. O comportamento elástico pode ser linear ou não linear.
- Aqui iremos considerar o caso em que existe uma relação linear entre as tensões e deformações. Iremos considerar também que as deformações e o tensões das distorções são pequenos. Nessas condições, a lei de Hooke generalizada escreve-se:

$$\boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkm}\varepsilon_{km}}$$

- O tensor C_{ijkl} é de quarta ordem e é denominado de tensor dos coeficientes elásticos. Ele obedece a um conjunto de relações de simetria. Este tensor tem 3^4 = 81 elementos.
- Uma vez σ_{ij} e ε_{kl} são simétricos, que é simétrico, então C_{ijkl} é também simétrico na troca de *i* e *j* e na troca de *k* e *l*, ou seja:

$$C_{ijkm} = C_{jikm} = C_{ijmk}$$

- Assim, de acordo com as condições de simetria anteriores, dos 81 elementos, apenas 6×6 = 36 deles são independentes.
- Com generalidade, as componentes do tensor C_{ijkl} dependem da temperatura. No entanto, na discussão aqui efetuada vamos considerar as condições em que a temperatura se mantém constante (isotérmica) e sem transferência de calor nos processos (adiabática).
- Utilizando a lei de Hooke, a densidade de energia de deformação pode-se então, escrever:

$$w = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \longrightarrow \boxed{w = \frac{1}{2}C_{ijkm}\varepsilon_{km}\varepsilon_{ij}}$$

Elasticidade linear

- Atendendo às considerações efetuadas no âmbito do trabalho e energia descritos na secção anterior, vamos considerar que a energia de deformação W é uma função da deformação ε_{ij}. Ou seja a densidade volúmica de energia w = w(ε_{ij}).
- Por sua vez, de acordo com a lei de Hooke, o estado de tensão é uma função única do estado de deformação e pode-se escrever $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{lm})$. Nessas condições, o tensor das tensões pode ser escrito como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

- Expandindo a energia de deformação em função das deformações:

$$w = w(0) + \left.\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}\right|_0 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} + \cdots$$

- Obtendo-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \cong \left.\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_0 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}\right|_0 \left(\varepsilon_{km} + \varepsilon_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{km}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)$$

Elasticidade linear

- Considerando que quando não há tensões residuais quando o corpo não está deformado, então $\sigma_{ij} = 0$ quando $\varepsilon_{ij} = 0$. Nessas condições:

$$0 = \left.\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_0 + 0 \longrightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_0 = 0$$

- Assim:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}\right|_0 \left(\varepsilon_{km} + \varepsilon_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{km}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}\right|_0 \underbrace{\left(\varepsilon_{km} + \varepsilon_{ij}\delta_{ik}\delta_{jm}\right)}_{2\varepsilon_{km}}$$

$$\sigma_{ij} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}\right|_0 \varepsilon_{km}$$

- Junto com a lei de Hooke $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, a equação anterior indica, que: $C_{ijkm} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}\right|_0$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}\right|_0 = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{km}\partial \varepsilon_{ij}}\right|_0 \Rightarrow C_{ijkm} = C_{kmij} \longrightarrow$$

- Uma vez que as segundas derivada trocadas são iguais, os 36 termos independentes de C_{ijkm} reduzem-se a 21.

Elasticidade linear

- **Meios isotrópicos**.
- Se os elementos do tensor C_{ijkm} forem sempre os mesmos independentemente das direções do espaço, então o material diz-se isotrópico.
- Em consequência, os valores dos elementos do tensor têm que ser os mesmos em qualquer sistema de coordenadas (os tensores de ordem zero (escalares) são isotrópicos, pois tomam o mesmo valor em qualquer sistema de coordenadas; nos tensores de 2ª ordem, apenas o tensor (matriz) identidade é isotrópico)
- A forma mais geral de um tensor isotrópico de ordem 4 é:

$$C_{ijkm} = \lambda \delta_{ij}\delta_{km} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}\right) + \beta\left(\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}\right)$$

- Para que este tensor possa representar o tensor das constantes elásticas, tem que obedecer às regras de simetria referidas antes, nomeadamente $C_{ijkm} = C_{jikm} = C_{ijmk}$.
- Dos 3 termos os dois primeiros são simétricos e obedecem a essas regras de simetria.
- O terceiro termo é antissimétrico na troca de *i* por *j*. Isso implica que $\beta = 0$.
- Sendo assim, $C_{ijkm} = \lambda \delta_{ij}\delta_{km} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}\right)$. Substituindo na lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda \delta_{ij}\delta_{km} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}\right)\right)\varepsilon_{km}$$

- Utilizando as propriedades do delta de Kronecker e juntado termos, tem-se a lei de Hooke para meios elásticos isotrópicos:

$$\boxed{\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}}$$

Note-se que, em meios isotrópicos, dos 21 elementos independentes de C_{ijkm}, ficamos reduzidos a 2.

Elasticidade linear

- **Meios isotrópicos**.
- Lei de Hooke para meios isotrópicos:

$$\boxed{\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}}$$

- Às constantes μ e λ, dá-se o nome de **constantes de Lamé**.
- As constantes μ e λ, têm as unidades de Pascal (Pa).
- ε_{kk} é o traço do tensor ε_{ij} ($\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$).
- A lei de Hooke pode ser invertida para obter ε_{ij} em função do tensor das tensões:

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 3\lambda\varepsilon_{kk}$$

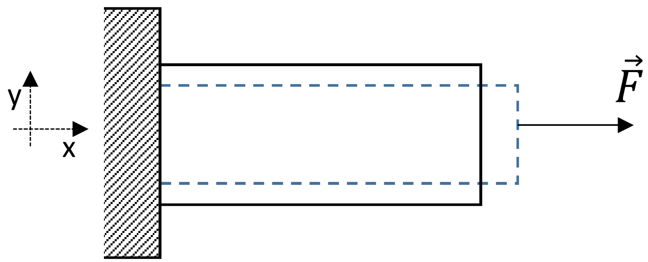
$$\sigma_{kk} = 2\mu\varepsilon_{kk} + 3\lambda\varepsilon_{kk} = (2\mu + 3\lambda)\varepsilon_{kk} \longrightarrow \varepsilon_{kk} = \frac{1}{(2\mu + 3\lambda)}\sigma_{kk}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\delta_{ij}\sigma_{kk}}$$

Elasticidade linear

- **Relação entre as constantes de Lamé e o módulo de Young, coeficiente de poisson, módulo de cisalhamento e módulo volumétrico**.
- Voltemos ao caso de uma barra sujeita a uma força, como se mostra na figura.
- Em consequência, o corpo erá alterar as suas dimensões



- A tensão aplicada é segundo *x*:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$$ *E* é o módulo de Young

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$ Lei de Hooke

- Nas direções perpendiculares a *x*:

$$\varepsilon_{22} = -\alpha\frac{\sigma_{11}}{E} \qquad \varepsilon_{33} = -\alpha\frac{\sigma_{11}}{E} \qquad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{11} = 2\mu\frac{\sigma_{11}}{E} + \lambda\left(\frac{\sigma_{11}}{E} - \alpha\frac{\sigma_{11}}{E} - \alpha\frac{\sigma_{11}}{E}\right) \Rightarrow \cancel{\sigma_{11}} = \left(\frac{2\mu}{E} + \frac{(1-2\alpha)\lambda}{E}\right)\cancel{\sigma_{11}} \rightarrow \underline{E = 2\mu + (1-2\alpha)\lambda}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 = -2\mu\alpha\frac{\sigma_{11}}{E} + \lambda\left(\frac{\sigma_{11}}{E} - \alpha\frac{\sigma_{11}}{E} - \alpha\frac{\sigma_{11}}{E}\right) \Rightarrow \frac{\lambda}{E} - \frac{2(\mu+\lambda)\alpha}{E} = 0 \rightarrow \underline{\alpha = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}}$$

Elasticidade linear

- **Relação entre as constantes de Lamé e o módulo de Young, coeficiente de poisson, módulo de cisalhamento e módulo volumétrico**.
- Resolvendo as equações a sublinhado no slide anterior:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \\ E = 2\mu + (1-2\alpha)\lambda \end{cases} \Rightarrow \left\{ E = 2\mu + \left(1 - \dfrac{\lambda}{(\mu+\lambda)}\right)\lambda \right. \Rightarrow \left\{ E = \dfrac{2\mu(\mu+\lambda)+\mu\lambda}{\mu+\lambda} \right.$$

- Obtém-se o módulo de Young e o coeficiente de Poisson em função das constantes de Lamé:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \qquad\qquad E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda}$$

- Por outro lado, invertendo as equações, obtém-se as constantes de Lamé em função do módulo Young e do coeficiente de Poisson :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\alpha)} \qquad\qquad \lambda = \frac{E\alpha}{(1-2\alpha)(1+\alpha)}$$

- Para o módulo volumétrico, k, tínhamos visto que: $k = \dfrac{E}{3(1-2\alpha)}$

- Substituindo as equações que relacionam μ e λ com E e α, obtém: $k = \lambda + \dfrac{\mu}{3}$

Elasticidade linear

- **Condições limites dos coeficientes elásticos**.
- Lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

- Da lei de Hooke, os termos não diagonais ($i \neq j$) são:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$$

- Como os termos não diagonais do tensor das deformações correspondem a rotações (ângulos), então o coeficiente μ é o módulo de cisalhamento que já tínhamos visto.
- Dado que uma tensão tangencial positiva (negativa) faz rodar no sentido positivo (negativo), então necessariamente $\boldsymbol{\mu \geq 0}$.
- Por outro lado, temos a equação:

$$P = -k\frac{\Delta V}{V}$$

- Assim, k tem que ser positivo ($\boldsymbol{k \geq 0}$), pois um aumento da pressão hidrostática faz diminuir o volume e vice versa.

Elasticidade linear

- **Condições limites dos coeficientes elásticos**.
- Considere-se agora as equações:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\alpha)} \qquad k = \frac{E}{3(1-2\alpha)}$$

- Da primeira equação $1+\alpha \geq 0$, uma vez que μ e E são positivos. Ou seja $\alpha \leq -1$.
- Da segunda equação $1-2\alpha \geq 0$, uma vez que *k* e E são positivos. Ou seja $\alpha \leq \frac{1}{2}$.
- Pelas condições anteriores, então os valores de α situam-se no intervalo $\boldsymbol{-1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}}$.
- Considere-se finalmente a equação:

$$k = \lambda + \frac{\mu}{3}$$

- Os valores do módulo volumétrico e do módulo de cisalhamento são positivos.
- No entanto, a sua magnitude relativa não exclui que λ possa ser negativo.
- Até ao momento, não foram encontrados materiais com valor negativo de λ.

Elasticidade linear

- **Lei de Hooke generalizada escrita em termos do módulo de Young e do coeficiente de Poisson**.
- Pela lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

- Considere-se também as equações:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\alpha)} \qquad \lambda = \frac{E\alpha}{(1-2\alpha)(1+\alpha)}$$

- Nessas circunstâncias, a lei de Hooke generalizada vem:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\alpha}\varepsilon_{ij} + \frac{E\alpha}{(1-2\alpha)(1+\alpha)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\alpha}{E}\sigma_{ij} - \frac{\alpha}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$