Análise Complexa
LFis / MiEFis

Exame de Recurso
2016/2017

Proposta de Resolução

1

$$2^{1+i} = 2\,2^{i} = 2\, e^{i\ln(2)} = 2\, e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)} \quad , k \in \mathbb{Z}$$
$$= 2\, e^{-2k\pi} e^{i\ln 2} = 2\, e^{-2k\pi}(\cos(\ln 2) + i \operatorname{sen}(\ln 2))$$
$$= 2\, e^{-2k\pi}\cos(\ln 2) + i\, 2\, e^{-2k\pi} \operatorname{sen}(\ln 2) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

2 $f(z) = z\bar{z}^2$, $f(x+iy) = (x+iy)(x-iy)^2 = (x+iy)(x^2 - 2xyi - y^2) =$
$$= x^3 - 2x^2yi - xy^2 + x^2yi + 2xy^2 - iy^3 =$$
$$= (x^3 + xy^2) + i\,(-y^3 - x^2y)$$

$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$
onde $u(x,y) = x^3 + xy^2$ e $v(x,y) = -y^3 - x^2y$

As funções u e v são $\mathbb{R}$-diferenciáveis pois são polinomiais

$$Jf = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy \\ -2xy & -3y^2 - x^2 \end{bmatrix}$$

A função f é $\mathbb{C}$-diferenciável nos pontos que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 = -3y^2 - x^2 \\ 2xy = 2xy \end{cases}$$ ← condição universal

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

Portanto a função f é $\mathbb{C}$-diferenciável apenas em $z=0$.

A função f não é analítica em nenhum ponto pois não existe nenhum aberto de $\mathbb{C}$ onde f seja $\mathbb{C}$-diferenciável.

3 $f(z) = e^z$, $f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, onde $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$

$$Jf = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

u e v são $\mathbb{R}$-diferenciáveis - produto da exponencial com coseno ou seno.

Verificamos que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann para todo o $(x,y) \in \mathbb{C}$. Portanto, pelo teorema de Cauchy-Riemann a função f é $\mathbb{C}$-diferenciável em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é aberto então f é analítica em $\mathbb{C}$.
Além disso, o teorema de Cauchy-Riemann implica que:

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = e^{x+iy} = e^z.$$

4 $f(z) = \ln(4+3z-z^2)$; $z=2$

Mudança de variável: $w = z-2$ $\quad (\Leftrightarrow z = w+2)$

$$f(w) = \ln(4+3(w+2)-(w+2)^2) = \ln(4+3w+6-(w^2+4w+4)) =$$
$$= \ln(6-w-w^2)$$

CA: $6-w-w^2 = 0 \Leftrightarrow w = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4\times 6}}{-2} \Leftrightarrow w = \dfrac{1\pm 5}{-2}$

$$\Leftrightarrow w = -3 \lor w = 2$$

$$f(w) = \ln(6-w-w^2) = \ln(-(w+3)(w-2)) = \ln((2-w)(3+w))$$
$$= \ln(2-w) + \ln(3+w) = \ln(2(1-w/2)) + \ln(3(1+w/3))$$
$$= \ln(2) + \ln\left(1-\frac{w}{2}\right) + \ln(3) + \ln\left(1+\frac{w}{3}\right) =$$
$$= \ln(6) - \sum_{\substack{n\geq 1\\ |w/2|<1}} \frac{(w/2)^n}{n} - \sum_{\substack{n\geq 1\\ |-w/3|<1}} \frac{(-w/3)^n}{n} =$$
$$= \ln(6) + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right] w^n$$

Esta série converge quando $|w/2|<1$ e $|-w/3|<1$, ou seja, $|w|<2$.
Portanto:

$$f(z) = \ln(6) + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right](z-2)^n \qquad |z-2|<2$$

O disco de convergência é $D(2,2)$

5 Sabemos que $e^w = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}$, $w \in \mathbb{C}$.

Logo $e^{1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$, $z\neq 0 \Rightarrow f(z) = z^4 e^{1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n+4}}{n!}$, $z \neq 0$

$$f(z) = \underbrace{z^4 + z^3 + \frac{z^2}{2} + \frac{z}{6} + \frac{1}{24}}_{\text{parte regular}} + \underbrace{\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{z^{-n+4}}{n!}}_{\text{parte principal}}, \quad z\neq 0$$

Como a série de Laurent em questão tem uma infinidade de termos na parte principal, podemos concluir que $z=0$ é uma singularidade essencial.
Sabemos que $\text{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1}$, o coeficiente associado a z^{-1} na série de Laurent. Assim, $\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

6 $f(z) = \dfrac{\cos(iz)}{z^3-4z^2+3z}$

C.A. $z^3-4z^2+3z=0 \Leftrightarrow z(z^2-4z+3)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z=3 \vee z=1$

A função $f(z)$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0,1,3\}$

$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z|=2\}$, logo as singularidades em Interior(γ) são 0 e 1.

Pelo teorema dos resíduos,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\text{Res}_{z=0} f(z) + \text{Res}_{z=1} f(z)\right)$$

Temos $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, onde $\varphi(z) = \cos(iz)$

$\psi(z) = z^3-4z^2+3z \Rightarrow \psi'(z) = 3z^2-8z+3$

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{\cos(0)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = \frac{\cos(i)}{3-8+3} = -\frac{\cosh(1)}{2}$$

Logo $$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3} - \frac{\cosh(1)}{2}\right) = \pi i\left(\frac{2}{3} - \cosh(1)\right)$$

7 A função $f(z) = \dfrac{z^2}{1-z^{20}}$ tem 20 singularidades z_i, $i=1,\dots,20$.

São elas as 20 raízes de índice 20 da unidade. Logo $|z_i|=1$.
Assim $z_i \in$ Interior(γ), para todo o $i \in \{1,\dots,20\}$
Por um teorema sabemos que

$$\sum_{i=1}^{20} \text{Res}_{z=z_i} f(z) + \text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

Vamos então calcular $\text{Res}_{z=\infty} f(z)$

$$g(z) = f(1/z) = \frac{(1/z)^2}{1-(1/z)^{20}} = \frac{\frac{1}{z^2}}{1-\frac{1}{z^{20}}} = \frac{z^{20}}{z^2(z^{20}-1)} = \frac{z^{18}}{z^{20}-1}$$

$z=0$ é singularidade removível de $g(z)$, logo, $z=\infty$ é singularidade removível de $f(z)$ e, portanto, $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{20} \text{Res}_{z=z_i} f(z) = -2\pi i \, \text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

8 Sabemos que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen}(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$,

onde $f(z) = \frac{1}{iz}\,\frac{1}{2+\frac{z-1/z}{2i}} = \frac{1}{iz}\,\frac{2i}{4i+z-\frac{1}{z}} =$

$= \frac{2}{4iz+z^2-1} = \frac{2}{z^2+4iz-1}$

Singularidades de $f(z)$: $z^2+4iz-1=0 \iff z = \frac{-4i \pm \sqrt{-16+4}}{2}$

$z = \frac{-4i \pm 2\sqrt{3}i}{2} \iff z = (-2+\sqrt{3})i \vee z = -(2+\sqrt{3})i$

Singularidades de $f(z)$ em $\{z : |z|<1\}$: $z_0 = (-2+\sqrt{3})i$

$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, onde $\varphi(z) = 2$

$\psi(z) = z^2+4iz-1 \Rightarrow \psi'(z) = 2z+4i$

$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{2}{2(-2+\sqrt{3})i+4i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$

Logo $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen}x}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

9 $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$, onde $b_n = 2\int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$

$\int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = (*)$

$u = x \qquad u' = 1$ (integração por partes)

$v' = \operatorname{sen}(n\pi x) \qquad v = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}$

$(*) = -x\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx =$

$= -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx = -\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big|_0^1 =$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \Rightarrow b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

$H(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\pi x)$

1º Começamos por procurar soluções da forma $u(t,x) = T(t)\,X(x)$

De $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vem $T'(t)\,X(x) = T(t)\,X''(x)$

Descartando a hipótese da solução nula vem $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$

Como o lado esquerdo da equação só depende de t e o lado direito da equação só depende de x, podemos concluir que

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}$

De $u(t,0)=0$ vem $X(0)=0$ e de $u(t,1)=0$ vem $X(1)=0$

Vamos então estudar o problema $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0)=0 \text{ e } X(1)=0 \end{cases}$

- Caso $\lambda = 0$

$X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = ax+b, \quad a,b\in\mathbb{R}$

$X(0)=0 \Rightarrow b=0 \qquad X(1)=0 \Rightarrow a=0$

Logo se $\lambda=0$, $X(x)=0$ é a única solução

- Caso $\lambda<0$

$X(x) = a\,e^{\sqrt{|\lambda|}\,x} + b\,e^{-\sqrt{|\lambda|}\,x}$, $a,b\in\mathbb{R}$, é a solução geral

$X(0)=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a$

$X(1)=0 \Rightarrow a\,e^{\sqrt{|\lambda|}} - a\,e^{-\sqrt{|\lambda|}} = 0 \Rightarrow 2a\,\operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|})=0 \Rightarrow a=0$

Logo se $\lambda<0$, $X(x)=0$ é a única solução.

- Caso $\lambda>0$

$X(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + b\,\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,x)$, $a,b\in\mathbb{R}$, é a solução geral.

$X(0)=0 \Rightarrow a=0 \qquad X(1)=0 \Rightarrow b\,\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda})=0$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi \Rightarrow \lambda = n^2\pi^2,\ n\in\mathbb{N}$

Logo se $\lambda>0$, $X(x) = b\,\operatorname{sen}(n\pi x)$, $b\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$, é solução

Analisando agora a equação $\frac{T'(t)}{T(t)} = -n^2\pi^2$ temos que

$T(t) = k\,e^{-n^2\pi^2 t}$, $k\in\mathbb{R}$, é a solução geral da equação.

Assim $u(t,x) = c\,e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen}(n\pi x)$, $c\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$, é solução

de $\begin{cases} \partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases} \quad (*)$

Resta analisar a condição $u(0,x) = x$, $0<x<1$.

Qualquer combinação linear de soluções de $(*)$ é ainda uma solução do problema $(*)$ (mas não do problema proposto).

Vamos então admitir soluções formais (combinações lineares infinitas) do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)$.

De $u(0,x) = x$ resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x) = x$. $(0<x<1)$

Logo os coeficientes b_n, $n \in \mathbb{N}$, são os coeficientes da série de senos da função $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.

Estes coeficientes já foram calculados no exercício 9.

Portanto $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)$

é solução do problema proposto.

11. $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ analítica em $\mathbb{C}$.

Das equações de Cauchy-Riemann sabemos que $\begin{cases} \partial u/\partial x = \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x \end{cases}$

$$\text{Logo} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Como f é analítica então v é de classe C^∞. Logo, pelo teorema das derivadas cruzadas, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

Logo $\Delta u = 0$.