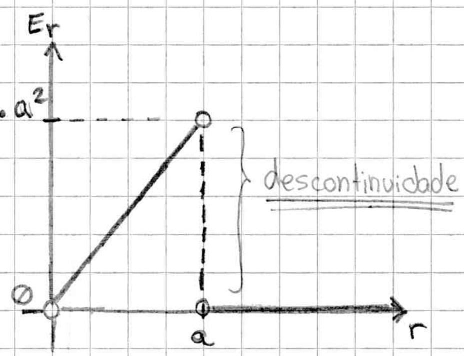
Exame de Eletromagnetismo:

Nome: Carlos Miguel Passos Ferreira
Nº : A92846
Ano : 2
Curso: Mestrado Integrado em Engenharia Física

1.

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \cdot \dfrac{r^3}{a} \cdot \vec{e}_r, & \text{para } 0 < r < a \\ 0, & \text{no resto do espaço} \end{cases}$$



(a) Det. a distrib. de cargas
- superficial (σ)
- volúmica (ρ)

1º Determinar distribuição de cargas volúmica (ρ)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Vamos, primeiramente, calcular o divergente de $\vec{E}$, para $0 < r < a$:

Pela fórmula para coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot E_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot E_z$$

pois $\vec{E}$ só tem componente $\vec{E}_r$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot E_0 \cdot \frac{r^3}{a}\right) + \frac{1}{r} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial z} \cdot 0 =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \left[E_0 \cdot \frac{r^4}{a}\right] = \frac{1}{r} \cdot E_0 \cdot 4 \cdot r^3 = \frac{4 \cdot E_0 \cdot r^2}{a}$$

logo $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \dfrac{4 \cdot E_0 \cdot r^2}{a} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\rho = \dfrac{4 \cdot E_0 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0}{a}, \ \boxed{0 < r < a}}$

Para $r > a$: $\rho = 0$, porém sabemos que no ponto $\boxed{r = a}$ existe uma descontinuidade (distribuição de cargas superficial)

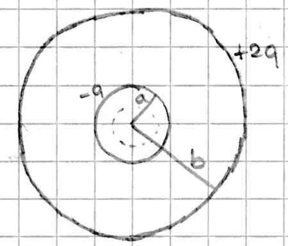
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow 0 - E_0 \cdot a^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\sigma = -E_0 \cdot a^2 \cdot \varepsilon_0, \ \boxed{r = a}}$$

$\vec{E}_2$: para o resto do espaço
$\vec{E}_1$: para $0 < r < a$

(b) Como existe uma descontinuidade na situação em que $\boxed{r = a}$, ou seja o campo elétrico nesse ponto é descontínuo (logo a componente normal à distribuição de cargas varia), é nos necessário calcular também a distribuição superficial de cargas para uma completa análise do exercício.

$\boxed{2.}$ 2 esferas concêntricas, de cargas diferentes

teorema de Gauss: $\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\, dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a}$



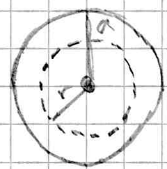
- $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho \, dv$

$\boxed{a < b}$

↳ Dentro da esfera de raio a:

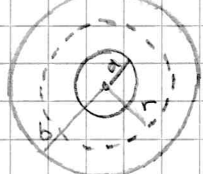
Como se trata de uma superfície esférica, o campo elétrico dentro desta é $\emptyset$!

Para uma superfície gaussiana de raio $r < a$:



$$\int_V \rho \, dv = \emptyset \Rightarrow \vec{E}_{(r<a)} = \emptyset \quad (V/m)$$

↳ Para uma superfície gaussiana de raio r, $a < r < b$, logo entre as superfícies esféricas



- $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{n}}_{\text{são ambos radiais, logo são colineares}} \cdot da = E \cdot 4\pi \cdot r^2$

- $\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho \, dv = \frac{-q}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_{(a<r<b)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-q)}{r^2} \hat{r} \quad (V/m)$$

↳ Para fora das sup. esféricas, considerando uma superfície gaussiana de raio $r > b > a$

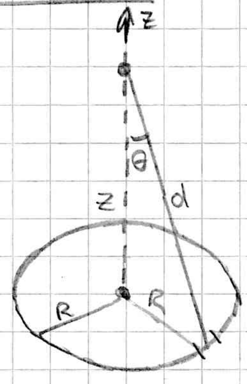
- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \oint_S da = E \cdot 4\pi \cdot r^2$

- $\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho \, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (-q + 2q) = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_{(r>b>a)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (V/m)$$

3. linha de carga circular de raio R e densidade linear λ

· Determinar o campo elétrico na linha que passa no centro do círculo



Tendo em conta a simetria do sistema, as componentes horizontais do campo elétrico são paralelas à linha de carga circular, logo o campo elétrico anula-se dessas componentes.

- $\vec{E} = \vec{E_z} \cdot \hat{z}$

- $dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{d^2} \cdot \frac{z}{d}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ dq = \lambda \cdot dl \\ \bullet\ \cos\theta = \frac{z}{d} \\ \bullet\ d^2 = z^2 + R^2 \end{array}}$$

perímetro da linha circular

- $E_z = \frac{\lambda \cdot z}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi \cdot R} dl =$

$$= \frac{\overbrace{2\pi \cdot R \cdot \lambda}^{Q} \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = \vec{E_z} \cdot \hat{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \hat{z} \ \ (V/m)$$

4. Calcular a energia eletrostática (U)

Usando coordenadas esféricas!

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \cdot r^2 \cdot \vec{e_r}, & \text{dentro da esfera de raio R} \\ \emptyset, & \text{fora da esfera} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{E} \cdot \vec{E} = E^2}$$

- $U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 \, dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E_0{}^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^R r^4 \cdot r^2 \, dr =$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E_0{}^2 \cdot 4\pi \cdot \int_0^R r^6 \, dr =$$

$$\boxed{\bullet \int_0^R r^6 dr = \left[\frac{r^7}{7}\right]_\emptyset^R = \frac{R^7}{7}}$$

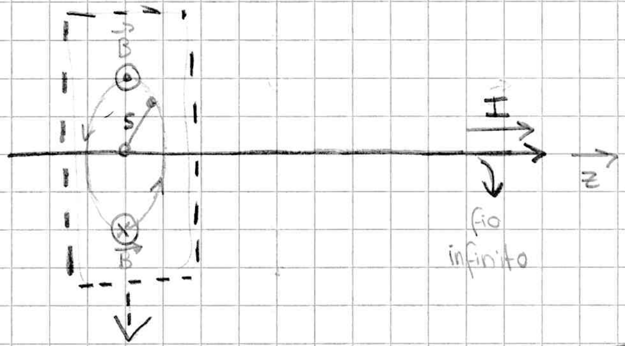
$$= \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0{}^2 \cdot R^7}{7} \ \ (J)$$

Fora da esfera, como o campo elétrico é nulo, não vale a pena analisar sequer a energia eletrostática fora da esfera, pois $U = \emptyset$ (J).

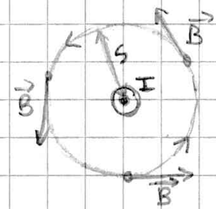
5. Determinar o campo magnético gerado por uma corrente I que percorre um fio infinito, em função da distância ao fio.

Assumindo s como a distância ao fio:

$\odot \rightarrow$ para fora da página
$\otimes \rightarrow$ para dentro da página



Amperiana (vista pelo eixo dos z):



O módulo do $\vec{B}$ é constante neste laço!

Pela lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \cdot I_{inc.} \Leftrightarrow$$

(Como $\vec{B}$ e $\vec{dl}$ são colineares)

$$\Leftrightarrow B \cdot \oint_C dl = \mu_0 \cdot I \Leftrightarrow$$

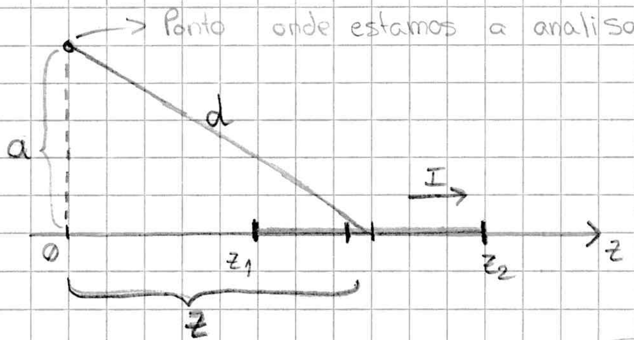
uma vez que a corrente I percorre o fio, e este encontra-se incluído na amperiana que considerei

$$\Leftrightarrow B \cdot 2\pi \cdot s = \mu_0 \cdot I$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot s} \cdot \hat{e}_\phi \ (T)$$

6. Determinar o potencial vetor criado por um segmento de reta finito, transportando uma corrente I, em função da distância ao fio. (segmento de reta entre z_1 e z_2)



$$d^2 = z^2 + a^2$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{I \cdot \vec{e}_z}{d} \, dz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \vec{e}_z}{4\pi} \cdot \int_{z_1}^{z_2} (z^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot \left[\ln\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right) \Big|_{z_1}^{z_2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + a^2}}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + a^2}} \right) \vec{e}_z$$

Prova Escrita de Eletromagnetismo:

Eu, Carlos Miguel Passos Ferreira aluno 92846, do curso Mestrado Integrado em Engenharia Física, ~~declaro~~ declaro ter cumprido todas as regras acima indicadas.

Braga, 11 de fevereiro de 2021

Assinatura: Carlos Miguel Passos Ferreira