Cálculo Vetorial **Exercícios - Folha 10**

1. Calcule o integral de linha $\int_\gamma x^2\,dx + xy\,dy$ ao longo da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t \in [-1, 1]$.

2. Calcule o integral de linha $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + z\,dz$ ao longo da hélice $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.

   a) Mostre que
$$\text{área}(B) = \frac{1}{2}\int_\gamma -y dx + x dy$$
   onde $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ é dada por $\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$ e calcule essa área.

   b) Calcule a área de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\}$.

4. Calcule os integrais de linha seguintes recorrendo eventualmente ao teorema de Green.

   a) $\int_\gamma x\,dx + xy\,dy$ onde $\gamma(t) = (t, |t|)$, $-1 \leq t \leq 1$.

   b) $\int_\gamma -y\,dx + x\,dy$ onde γ é uma curva C^1 por partes, fechada, simples, positivamente orientada e cuja imagem é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

   c) $\int_\gamma (x^4 - y^3)\,dx + (x^3 + y^5)\,dy$ onde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   d) $\int_\gamma 4x^3y^3\,dx + (3x^4y^2 + 5x)\,dy$ onde γ é uma curva C^1 por partes, fechada, simples, positivamente orientada e cuja imagem é a fronteira do quadrado de vértices $(-1, 0)$,$(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

5. Recorrendo a integrais de linha, determine a área dos seguintes subconjuntos B de $\mathbb{R}^2$:

   a) B é limitado pela curva dada por $\gamma(\theta) = (a\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$ com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $a > 0, b > 0$.

   b) B é a região limitada pela elipse de equação $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.