Resolução do 1.º Teste

Problema-1 (3 valores)

As equações de Maxwell "pré-Maxwell" escrever-se-iam como:

$$(**) \qquad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad\qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad (*)$$

A última equação $(*)$, referente à lei de Ampère, é a fonte de problemas de coerência visto que:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \partial_x(\partial_y B_z - \partial_z B_y) + \partial_y(\partial_z B_x - \partial_x B_z) + \partial_z(\partial_x B_y - \partial_y B_x)$$

$$= 0$$

Mas.

$\mu_0\,\nabla\cdot\vec{J}$ é em geral diferente de zero. De facto,

A equação de continuidade mostra que

$$\mu_0\,\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$\nabla\cdot\vec{J} \neq 0$ sempre que há variação da densidade volúmica de carga no tempo.

O problema pode ser resolvido através da lei de Gauss.

Com efeito $(**) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0\,\nabla\cdot\dot{\vec{E}} \Rightarrow \mu_0\,\nabla\cdot\left[\vec{J} + \varepsilon_0\dot{\vec{E}}\right] \equiv 0$$

A lei de Ampère deve portanto ser corrigida com a inclusão de uma "corrente de deslocamento"

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

de tal forma que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

(lei de Ampère modificada por Maxwell)

<u>Problema-2 (6 valores)</u>

(a) Comecemos por estimar o campo magnético. Considerando a simetria do problema, podemos usar a lei de Ampère.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

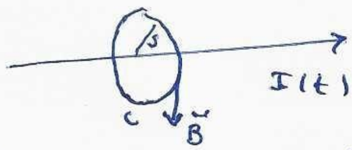
Evidentemente, a dificuldade é que esta lei inclui a corrente de deslocamento: o cálculo de $\vec{B}$ supõe conhecer $\vec{E}$ e o cálculo de $\vec{E}$ (que pode ser realizado invocando a lei de Faraday $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$) supõe conhecer $\vec{B}$. O problema pode ser tentativamente ultrapassado admitindo que $\left|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right| << |\vec{J}|$, isto é, ignorando a corrente de deslocamento, verificando depois a coerência desta suposição. (É isto que significa a expressão "em 1ª aproximação" no enunciado do problema).

Nesta primeira aproximação temos então:

$$\nabla \times \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{J} \quad (*)$$

Dada a simetria do problema, $\vec{B}$ é, nestas condições um campo circunferencial cuja magnitude só depende da distância s ao fio condutor (no interior do tubo). Temos então de $(*)$:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{J}\cdot\hat{n}\, d\Sigma \Rightarrow$$



(onde Σ é qualquer superfície assente no contorno C).

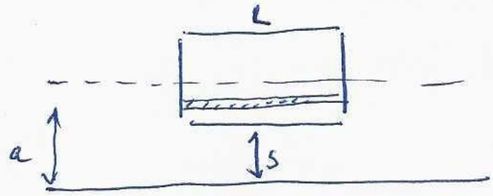
$$\Rightarrow 2\pi s\, B(s) = \mu_0 I(t) \Rightarrow \vec{B}(s) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi s}\hat{\phi}$$

Evidentemente, para $s > a$, $I_{TOT} = 0 \Rightarrow \vec{B}(s) = 0$

Temos então

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{se } s > a \\ \dfrac{\mu_0 I(t)}{2\pi s}\hat{\phi} & \text{se } s < a \end{cases}$$

Podemos agora calcular o campo eléctrico (nesta aproximação).



Consideremos o circuito rectangular representado na figura e a lei de Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma \vec{B}\cdot\hat{n}\, d\Sigma$$

(onde Σ é outra vez qualquer superfície assente no contorno). Como, dada a simetria do problema, $\vec{E} \parallel \hat{z}$ e $|\vec{E}| = 0$ se $s > a$, temos;

$$E(s)\cdot L = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s^a L\,ds\cdot\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi s}$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\cdot L\int_s^a\frac{ds}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln\left(\frac{a}{s}\right)\hat{z} = \frac{\mu_0 I_0 \omega \sin(\omega t)}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{s}\right)\hat{z}$$

(dado que $I(t) = I_0\cos(\omega t)$).

b)

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0\mu_0 I_0\omega^2\cos(\omega t)}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{s}\right)\hat{z}$$

A corrente de deslocamento total corresponde ao fluxo desta densidade de corrente através da secção transversal do tubo:

$$I_d = \frac{\varepsilon_0\mu_0 I_0\cos(\omega t)\omega^2}{\cancel{2\pi}}\int_0^a\ln\left(\frac{a}{s}\right)\cancel{2\pi}s\,ds$$

$$= \varepsilon_0\mu_0\omega^2 I(t)\int_0^a\left[s\ln a - s\ln s\right]ds$$

$$= \varepsilon_0\mu_0\omega^2 I(t)\left[\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{a^2}{4}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 a^2 I(t)}{4} = I(t)\frac{\omega^2 a^2}{4c^2}$$

Nota: a aproximação usada na alínea a) supõe que $\frac{\omega^2 a^2}{4c^2} \lll 1$

c) $$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{\mu_0^2}{2\pi\mu_0} I_0 \omega \sin(\omega t)\ln\left(\frac{a}{s}\right)\cdot \frac{I_0\cos(\omega t)}{2\pi s}(\hat{z}\times\hat{\phi})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi^2 s} I_0^2 \omega \ln\left(\frac{a}{s}\right)\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)\,(-\hat{s})$$

$$\vec{p}_{em} = \varepsilon_0\mu_0\vec{S} = -\frac{\mu_0}{c^2 4\pi^2} I_0 \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t)\,\frac{1}{s}\ln\left(\frac{a}{s}\right)\hat{s}$$

Problema 3 (6 valores)

a) Um campo vectorial fica completamente definido pela especificação da sua divergência e do seu rotacional. Em situações estáticas, $\nabla\times\vec{E}\equiv 0$. Neste caso, $\vec{E}$ é completamente especificado pela sua divergência. A lei de Gauss permite pois determiná-lo: $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$. Se conhecermos a correspondente densidade volúmica de carga ρ.

No caso do campo auxiliar $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, $\nabla\times\vec{D} = 0$ se e só se $\nabla\times\vec{P} = 0$ (em situações estáticas). Só neste caso a "pseudo lei de Gauss" $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_L$ (ρ_L = densidade volúmica de cargas livres) é capaz de determinar $\vec{D}$.

No caso em análise, a simetria impõe que a polarização induzida na coroa dieléctrica é radial ($\vec{P} = P(r)\,\hat{r}$), pelo que $\nabla \times \vec{P} = 0$. Podemos portanto usar, neste caso, a pseudo-lei de Gauss para calcular $\vec{D}$, campo que depende apenas da distribuição de cargas livres (a única que conhecemos).

Nestas condições:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \begin{cases} \vec{D} = 0 & \text{se } r < a \quad (*) \\ \vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{r} & \text{se } r > a \end{cases}$$

(*) A carga Q da esfera metálica distribui-se à superfície.

Como o dieléctrico é linear, isotrópico e neutro temos:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\hat{r} & \text{se } a < r < b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} & \text{se } r > b \end{cases}$$

O campo eléctrico apresenta descontinuidades nas superfícies $r = a$ e $r = b$.

b) $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

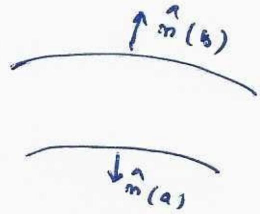
$$\vec{P} = \cancel{\varepsilon_0}\,\chi \, \frac{Q}{4\pi r^2} \, \frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}(1+\chi)} \, \hat{r}$$

A polarização do dieléctrico é radial (por simetria)

$$\vec{P} = \frac{\chi}{1+\chi} \, \frac{Q}{4\pi r^2} \, \hat{r}$$

$-\nabla\cdot\vec{P} = \rho_b = 0$ visto que $\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0 \quad \forall\, r \neq 0$.

Temos então apenas distribuições superficiais de cargas ligadas: ($\sigma = \vec{P}\cdot\hat{n}$) :



$$\sigma_a = -\frac{\chi}{1+\chi} \, \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_b = +\frac{\chi}{1+\chi} \, \frac{Q}{4\pi b^2}$$

Note que a carga ligada total, $4\pi\left(a^2\sigma_a + b^2\sigma_b\right) = 0$

c) $u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ (densidade volúmica de energia electrostática)

A energia total corresponde ao integral desta densidade sobre todo o espaço

$$E = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, dV =$$

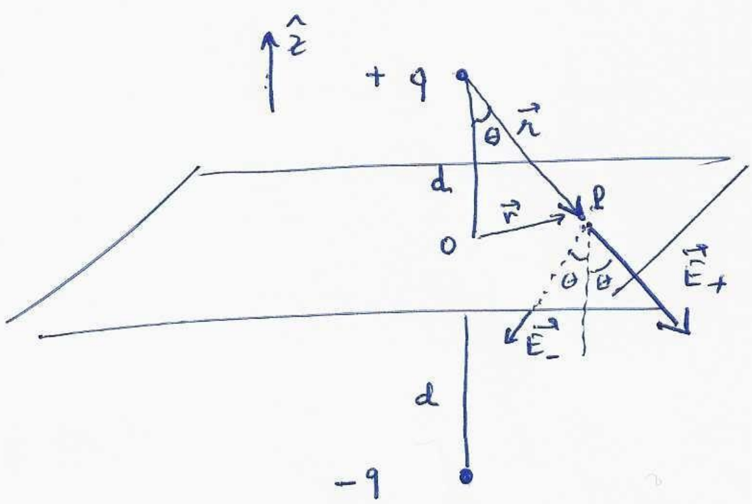
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \frac{1}{r^4}\, 4\pi r^2\, dr + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_0}\int_b^\infty \frac{1}{r^4}\, 4\pi r^2\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left[-\left(\frac{1}{r}\right)_a^b - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)_b^\infty\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{1}{b}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\right]$$

Problema - 4 (5 valores)



No plano xy equidistante das duas cargas o campo eléctrico $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ tem apenas uma componente não nula (segundo zz')

No ponto P (ver figura) $\vec{E}(P) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathcal{r}^2}\, 2\cdot\cos\theta\,\hat{z}$

$\vec{E}(P) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\,d}{(r^2+d^2)^{3/2}}$, visto que $\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}$

e $\mathcal{r}^2 = r^2 + d^2$,

A magnitude do campo eléctrico depende ∴ apenas de r a distância do ponto à origem O (ver figura).

Podemos calcular a única componente relevante do tensor de Maxwell no plano considerado. É óbvio que $T_{ij} = 0$ se $i \neq j$ $(\vec{E} \parallel \hat{z})$. Como a normal à superfície que abarca a carga $(+q)$ (fechada por uma superfície semi-esférica de raio infinito no qual $|\vec{E}| = 0$) é, no plano $\hat{n} = -\hat{z}$ temos

$$d\vec{f} = df_z \hat{z} = -T_{zz}\,\hat{z}$$

$$T_{zz} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{q^2 d^2}{(r^2+d^2)^3}$$

$$F_z = -\frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{d^2}{(r^2+d^2)^3}\cdot 2\pi r\,dr$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2d)^2} \qquad \square$$