Miscelânea de Exercícios de Física Quântica II

N. M. R. Peres

9 de Dezembro de 2019

1. Numa transição dipolar com o campo eléctrico orientado de segundo o eixo dos z's é necessário calcular o seguinte elemento de matriz:

$$\langle l, m|z|l'm'\rangle. \tag{1}$$

Usando a seguinte relação entre harmónico esféricos:

$$\cos\theta Y_{l,m} = a_{l,m}Y_{l+1,m} + a_{l-1,m}Y_{l-1,m}, \tag{2}$$

onde

$$a_{l,m} = \sqrt{\frac{(l+1+n)(l+a-m)}{(2l+1)(2l+3)}}, \tag{3}$$

encontre as regras de selecção para a transição dipolar referida atrás.

2. Considere o tensor momento de uma distribuição eléctrica quadropular:

$$Q_{ij} = 2x_ix_j - r^2\delta_{i,j}. \tag{4}$$

Para um hamiltoniano genérico com simetria radial, calcule os elementos de matriz do operador anterior, levando em conta a relação 2.

3. Encontre os níveis de energia de uma partícula confinada numa caixa esférica de raio a e de paredes impenetráveis (este é o modelo mais simples para um núcleo e para um ponto quântico). Considere agora o acoplamento spin-órbita, o qual toma a toma a forma

$$V_{s.o.} = \lambda\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}. \tag{5}$$

Calcule os novos níveis de energia da partícula na caixa.

4. Considere uma partícula de massa m e carga q num campo magnético constante $\mathbf{B} = B_0\mathbf{u}_z$, cujo vector potencial é da forma $\mathbf{A} = (-B_0y, 0, 0)$. A equação de Schrodinger toma a forma

$$H = \frac{1}{2m}[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2. \tag{6}$$

Admita que o movimento electrónico está confinado ao plano xy. Mostre que os níveis de energia deste sistema são da forma do oscilador harmónico unidimensional:

$$E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2), \tag{7}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$ e ω_c é a frequência ciclotrónica que é uma função do campo magnético.

5. Considere um sistema de dois spins que se encontram no estado $|\uparrow, \downarrow\rangle$. Calcule o valor médio do quadrado do spin total $\mathbf{S}^2$ neste estado. Deverá obter $\langle \mathbf{S^2} \rangle = \hbar^2$.

6. Considere uma partícula numa caixa de largura a e paredes infinitas.

   (a) Calcule as funções de onda normalizadas $\psi_n(x)$ da partícula numa caixa.

   (b) Admita que a partícula é sujeita a uma perturbação da forma $H_1(x) = -V_0\theta(a-x)$. Calcule a energia dos estados $\psi_n(x)$, em primeira ordem de teoria de perturbações, devido à perturbação H_1.

7. Considere uma partícula numa caixa quadrada de paredes infinitas e lado a.

   (a) Obtenha as soluções da partícula na caixa

   (b) Admita agora que a partícula é sujeita a uma perturbação da forma $H_1 = \lambda xy$. Calcule a correcção à energia do estado fundamental e dos primeiros estados excitados devido a esta perturbação.

8. Considere uma partícula em movimento harmónico simples. Se as velocidades forem elevadas, há uma correcção adicional à energia cinética da forma

   $$H_1 = -\frac{p^4}{8m^3c^2}, \tag{8}$$

   de origem relativista. Calcule, em primeira ordem de teoria de perturbações, o efeito de H_1 nos níveis de energia do oscilador harmónico. Deverá obter um resultado da forma

   $$\langle n|H_1|n\rangle \propto -(2n^2 + 2n + 1). \tag{9}$$

   Quando é que esta correcção deixa de fazer sentido físico? Para responder a esta questão calcule o valor médio da energia cinética não-relativista num estado arbitrário do oscilador harmónico.

9. Considere uma partícula confinada numa caixa de unidimensional de tamanho a.

   (a) Determine os estados próprios da partícula na caixa

(b) Admita agora que, centrado em $a/2$, começa a actuar em $t = 0$ um potencial da forma $V(x) = -V_0\theta(t)\theta(\Delta T - t)$ de largura $b \ll a$, ou seja o potencial está espacialmente localizado entre $-b/2 + a/2 < x < a/2 + b/2$. Calcule a probabilidade de transição entre o estado fundamental e o estado $n = 3$. O seu resultado deverá ser (levando em conta que $b \ll a$)

$$P_{1\to 3} \propto \frac{\sin^2(\omega_{1,3}\Delta T/2)}{\hbar^2\omega_{1,3}^2}, \tag{10}$$

onde $\hbar\omega_{1,3} = E_3 - E_1$. Certifique-se, no final, que a probabilidade que calculou não tem unidades.

10. Considere um oscilador harmónico sujeito a uma perturbação dependente do tempo da forma

$$H_1 = Ax^2 e^{-bt}, \tag{11}$$

onde A e b são constantes positivas.

(a) Diga quais são as unidades das constantes A e b.

(b) Calcule a probabilidade de transição do estado fundamental para um estado arbitrário $|n\rangle$, se a perturbação actuar durante um tempo arbitrariamente grande. Para a transição entre o estado fundamental e o estado $|2\rangle$ o seu resultado deverá ser

$$P_{0\to 2} \propto \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{4\omega^2 + b^2}, \tag{12}$$

onde ω é a frequência do oscilador. Confirme que a sua expressão para a probabilidade não tem unidades.