RESUMO DERIVADA NO PONTO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

sendo $f_1(x,y)$ o produto, quociente, composição, etc. de funções polinomiais, trigonométricas exponenciais ou de suas inversas

① f descontínua em $(0,0) \Rightarrow f$ não derivável em $(0,0)$

Exemplo: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$

② f não tem derivada parcial em ordem a x (ou em ordem a y) em $(0,0)$
$\Downarrow$
f não é derivável em $(0,0)$

Exemplo: $f(x,y) = |x|$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ não existe

③ f não tem derivada direccional segundo alguma direcção em $(0,0)$
$\Rightarrow f$ não é derivável em $(0,0)$

Exemplo: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f'((0,0);(a,b)) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^2 b^2}{h^2(a^2+b^2)}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{b^2}{(a^2+b^2)h}$ não existe desde que $b \neq 0$

④ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \exists f'((0,0);(a,b))$ mas a função $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (a,b) \mapsto f'((0,0);(a,b)) \end{array}$ não é linear

$\Rightarrow f$ não é derivável em (a,b)

(porque, se f fosse derivável em $(0,0)$, teríamos $f'(0,0)(a,b) = f'((0,0);(a,b))$, o que é absurdo, uma vez que $f'(0,0)$ é uma aplicação linear)

Exemplo: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f'((0,0),(a,b)) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^3ab^2}{h^2(a^2+b^2)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$ não é linear

⑤ f tem derivadas parciais contínuas numa vizinhança de $(0,0) \Rightarrow f$ é derivável em $(0,0)$