Coordenadas cilíndricas:
(x, y, z) →(r, ɵ, z)
r=$\sqrt{x^2+y^2}$

$$ɵ = \begin{cases} tg^{-1}\frac{y}{x}, & x \geq 0 \\ tg^{-1}\frac{y}{x}+\pi, & x < 0 \end{cases}$$

Notas:
Para descrever a superfície com r, ɵ e z constante:
- Cilindro circular direito com o raio r;
- Plano vertical fazendo um angulo ɵ com o plano xz;
- Plano horizontal contendo o ponto (0,0, z).

Descrever o significado geométrico da substituição indicada. Se alterarmos o:
- r, alteramos a distancia do ponto dado ao eixo z;
- ɵ, alteramos a rotação sobre o eixo z;
- z, reflete no plano xy.

Coordenadas esféricas:
(x, y, z) →((ρ, ɵ, φ)

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Phi = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Notas:

ρ = distancia do ponto (x, y, z) à origem;
ɵ = ângulo do eixo positivo x ao ponto (x,y,z);
φ = ângulo do eixo z positivo para a linha de origem para (x,y,z); ou seja o angulo formado entre o eixo positivo do z e ρ

Curvas no Espaço:
Uma curva parametrizada cuja imagem está contida numa curva de nível C é chamada parametrização de C.
Uma reta, em R^3 que passa no ponto $(x0, y0, z0)$ e direção de $\vec{v}$ pode ser parametrizada por:

$$\alpha(t) = (x0, y0, z0) + t\vec{v}$$

A eq da reta tangente em t0 é dada por:

$$r(t) = \alpha(t0) + t\alpha'(t0)$$

Comprimento do arco:

$$s(t) = \int_{t0}^{t} \|\alpha'(u)\|du$$

$$= \int_{t0}^{t} \sqrt{\alpha'(u)^2}\, du$$

Parametrização por comprimento de arco (pca):
- Um ponto α (t) de uma curva parametrizada é chamado ponto regular se $\gamma'(t) \neq 0$, caso contrario diz-se ponto singular. Uma curva é regular se todos os seus pontos forem regulares.
- Uma curva α tal que $\|\alpha'(t)\| = 1$ diz-se parametrizada por comprimento de arco (pca).
- Uma curva parametrizada admite pca se e só se for regular.

Curvatura:
Se α é uma pca, a sua curvatura k(s) é dada por:

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Se α é uma curva regular no espaço, (não necessariamente) pca, então:

$$k(t) = \frac{\|\alpha'' \times \alpha'\|}{\|\alpha'\|^3}$$

Vetores tangente,normal e binormal:
Seja α uma pca em R^3. Define-se:
$\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ o vetor (unitário) tangente a α.
$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|}$ o vetor normal principal a α.
$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ o vetor binormal de α.

Torção:

$$\vec{B}' = -\tau\vec{N}$$

- Só é definida apenas se a curvatura não for nula.
-Para curvas não pca, a torção é dada por:
Seja α uma curva regular em R^3 com curvatura não nula, então:

$$\tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'')\cdot\alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

Limites e continuidade:
$X_0 = (x0, y0, z0)$ X= (x, y, z)
$X_0 \in R^n$ é um **ponto de acumulação** de D se toda a bola aberta centrada em X_0 contem algum ponto de D diferente de X_0. Isto é,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, X \in D: 0 < \|X - X0\| < \varepsilon$$

Considere a função f: D C $R^n \rightarrow R$ e X_0 ponto de acumulação de D. O limite de f quando X tene para X_0 é igual a L ∈ R sse
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \theta > 0\ \forall\, X \in D: 0 < \|X - X0\| < \theta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$ e escreve-se: $f(X0) = L$
Seja f : D C $R^n \rightarrow R$ e X_0 ponto de acumulação. A função é continua em X_0 sse: $f(X) = f(X0)$

Derivadas Parciais:
Seja f : D C $R^n \rightarrow R$ dizemos que f é diferenciável em $X_0 = (x0, y0, z0)$ se as derivadas parciais existem e

$$\frac{f(X)-f(X0)-\frac{\partial f}{\partial x}(X0)(X-X0)-\frac{\partial f}{\partial y}(X0)(y-y0)-\frac{\partial f}{\partial z}(X0)(z-z0)}{\|(x,y,z)-(x0,y0,z0)\|} = 0$$

Se f: D C $R^n \rightarrow R$ é diferenciável em $X_0 \in$ D, então f é continua em X_0.
Se as derivadas parciais de f existem e são continuas em X_0, então f é diferenciavel em X_0.
Se as derivadas parciais existem e são continuas, então f diz-se de classe C^1

Gradiente:
Se f: D C $R^n \rightarrow R$ diferenciável. Chama-se gradiente de f ao vetor:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x1}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x2}\vec{e}_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial xn}\vec{e}_n \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x1}, \frac{\partial f}{\partial x2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial xn}\right)$$

Plano tangente:
Se f: D C $R^2 \rightarrow R$ diferenciável em $(x0, y0) \in$ D.Chama-se plano tangente ao grafico de f no ponto $(x0, y0)$ ao plano dado por:
$z = f(x0, y0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x0, y0)(x - x0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x0, y0)(y - y0)$ que tambem se pode escrever
$z = f(x0, y0) + \nabla f(x0, y0)\cdot(x - x0; y - y0)$

Vetor normal ao plano tangente ($\vec{n}$):

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x0, y0); \frac{\partial f}{\partial y}(x0, y0); -1\right)$$

$$n = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x0,y0)\, i - \frac{\partial f}{\partial y}(x0,y0)\, j + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x0,y0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x0,y0)\right)^2 + 1}}$$

Derivadas de funções compostas:
Considere I C R e D C R^3. Seja α: I → R^3 tal que
α= $(x(t), y(t), z(t))$ e α(I) C D.
Considere uma função diferenciável g: D → R e a função composta h=goα tal que $h(t) = g(\alpha(t)) = g(x(t), y(t), z(t))$. Então h é diferenciável e

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x}\bullet\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\bullet\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z}\bullet\frac{\partial z}{\partial t}$$

Regra da cadeia para funções e curvas parametricas:

$$h'(t) = \nabla f(\sigma)\cdot\sigma'(t)$$

Derivação implicita:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y}$$

Maximos e minimos para funções quadraticas:

$AC-B^2>0$ e $A>0$ minimo local

$AC-B^2>0$ e $A<0$ maximo local

$AC-B^2<0$ ponto de sela

$AC-B^2=0$ inconclusivo

Matriz Hessiana:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ e det>o minimo local   det<0 não é extremo

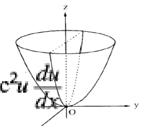
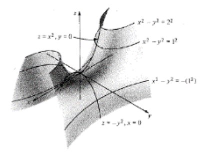
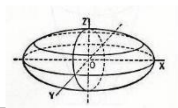
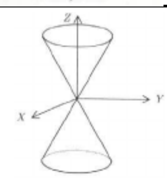
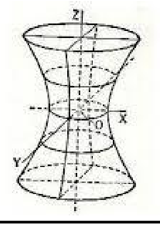
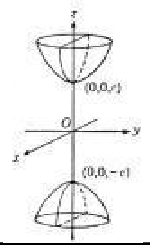
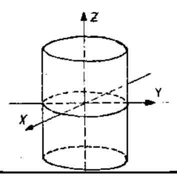
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ e det>0 maximo local

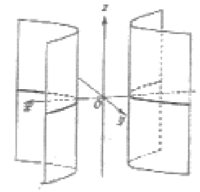
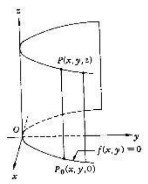
Regras de derivação:

$$\frac{d\tan u}{dx}=\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\cot u}{dx}=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\sec u}{dx}=\tan u\sec u\frac{du}{dx}$$

Paraboloide Elíptico $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	
Paraboloide Hiperbólico $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	
Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Cone $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
Hiperboloide de 1 folha $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Hiperboloide de 2 folhas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Cilindro Elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	

Cilindro Hiperbólico	
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Cilindro Parabólico	
$\frac{x^2}{a^2} = y$	

Extremos condicionados:

1) dizer que f é continua e a restrição é fechada e limitada, logo f tem um máximo e mínimo na restrição.

2) $\nabla f = \lambda \nabla g$ se duas ou mais restrições é a soma delas $\nabla f = \lambda \nabla g + \lambda \nabla h + \ldots$

g(x,y,z)=k

3) substituir os pontos no f.

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$
$$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$$
$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$
$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$$
$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$
$$(e^u)' = u'\,e^u$$
$$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$
$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$\frac{d \sin^{-1} u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d \cos^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d \tan^{-1} u}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d \cot^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d \sec^{-1} u}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$