

Introdução às técnicas de Fourier.

A análise de Fourier permite representar e compreender os fenómenos físicos em termos de frequências espaciais (do maior interesse no contexto deste trabalho). Uma imagem no espaço cartesiano pode ser representada no espaço das frequências, ou frequências espaciais neste contexto, por uma função a que chamaremos transformada de Fourier.

Uma função $f(x)$ pode ser representada pela combinação linear de um conjunto infinito de contribuições harmónicas.

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} A(k) \cos kx \, dk + \int_0^{\infty} B(k) \sin kx \, dk \right]$$

em que k representa a frequência espacial.

Os coeficientes $A(k)$ e $B(k)$, que representam o “peso” da contribuição de cada harmónica (caracterizada pela sua frequência espacial k_i), são dados por:

$$(2) \quad A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos kx' \, dx'$$

$$(3) \quad B(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \sin kx' \, dx'$$

em que x é a variável de integração.

Substituindo em (10) vem,

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos kx' \, dx' \right) \cos kx \, dk + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \sin kx' \, dx' \right) \sin kx \, dk$$

e, como $\cos(\alpha.\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$, vem

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos(k(x' - x)) \, dx' \right] dk$$

Como o coseno é uma função par podemos escrever,

$$(6) \quad f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos(k(x' - x)) dx' \right] dk$$

Como a função seno é ímpar, podemos escrever,

$$(7) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \sin k(x' - x) dx' \right] dk = 0$$

Representando a função (2) na forma exponencial, vem,

$$(8) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{ikx'} dx' \right] e^{-ikx} dk$$

e

$$(9) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx} dk$$

em que $F(k)$ é a transformada de Fourier da função unidimensional $f(x)$,

$$(10) \quad F(k) = \mathfrak{T}(f(x)) :$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

As transformadas coseno e seno **A(k)** e **B(k)**, que vimos acima são respectivamente a parte real e a parte imaginária da função **F(k)**, transformada de Fourier da função **f(x)**.

$$(11) \quad \mathfrak{T}(f(x)) = F(k) = A(k) + iB(k)$$

Na notação exponencial o módulo da transformada (amplitude espectral) e a sua fase vem,

$$(12) \quad |F(k)| = \sqrt{A(k)^2 + B(k)^2}, \quad e, \quad i \cdot \arctg \frac{B(k)}{A(k)} = \Phi(k) \rightarrow \text{fase espectral}$$

Se $F(k)$ é a transformada de Fourier de $f(x)$, será $f(x)$ a transformada de Fourier inversa de $F(k)$:

$$(13) \quad f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(F(k)) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f(x)))$$

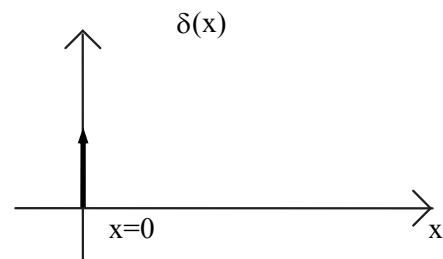
mas,

$$\text{se } \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(k)) = f(x), \text{ vem } \mathfrak{F}(f(k)) = 2\pi f(-x)$$

De grande importância na representação de qualquer processo de amostragem como o que o nosso sistema vai efectuar, é a função delta de Dirac, $\delta(x)$, definida como delimitando uma área unitária e sendo nula em todo o espaço excepto na origem (um ponto luminoso, uma fonte luminosa pontual):

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$



Se $f(x)$ é uma função contínua,

$$(15) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0), \text{ e}$$

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

sendo que,

$$(17) \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}$$

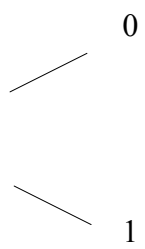
As equações (15) e (16) (mais geral) podem ser consideradas como definindo um operador que permite obter o valor de uma função num determinado ponto. E podem ser generalizadas para duas ou mais dimensões, por exemplo:

$$(18) \quad f(x,t): \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0,t_0) \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) dx_0 dt_0 = f(x,t)$$

Podemos definir também as sequências Delta: sequências de impulsos de largura decrescente e portanto de intensidade, tendendo para infinito, mas sempre de área unitária.

$$(19) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_s(x) f(x) dx = f(0)$$

A transformada de Fourier da função delta de Dirac será:

$$(20) \quad F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx \rightarrow \delta(k)$$


podendo assim dizer-se que a função delta é a transformada Fourier inversa da unidade. Generalizando para o caso de a origem da função delta se deslocar para $x=x_0$, vem,

$$(21) \quad \mathfrak{T}(\delta(x-x_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) e^{ikx} dx = e^{ikx_0}$$

Em geral a transformada de Fourier de uma função que sofre uma translação no espaço (tempo...) é igual à transformada da função inicial, multiplicada por uma exponencial complexa em que a fase varia linearmente.

A função finita $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta(x-x_j)$ (função periódica - série de um número

infinito de funções delta) terá a transformada:

$$(22) \quad \mathfrak{T}(f(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{T}(\delta(x-x_j)) = \sum_j e^{ikx_j}$$

É fácil verificar que as transformadas de Fourier das funções coseno $A(k)$ e seno $B(k)$ (periódicas e infinitas) são respectivamente a função duplo delta simétrica e assimétrica.

Uma vez que qualquer função periódica pode ser considerada como uma série de harmónicos, a sua transformada será “um conjunto de função delta” ou se quisermos “o espectro de frequências é discreto”.

Em óptica para além de funções unidimensionais e bidimensionais (imagens 2D) poderá lidar-se-á também com funções tridimensionais (holografia). Eventualmente poderá mesmo ser possível ou mesmo necessário registar de que maneira uma determinada imagem ou forma 3D evolui ao longo do tempo. Mais uma vez será grande a utilidade da aplicação das técnicas de Fourier.

Generalizando, de

$$(23) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx} dk; \quad F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

para duas dimensões, teremos,

$$(24) \quad f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

A generalização para três ou mais dimensões é imediata.

Por exemplo,

para $f(x,y,z,t)$ em que $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$(25) \quad F(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y, k_z, w) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + wt)} dk_x dk_y dk_z dw$$

$$(26) \quad F(\mathbf{k}, w) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z,t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + wt)} dx dy dz dt$$

Para além da definição de *limiares* de frequência ou da identificação de frequências numa determinada função imagem poderá também ter interesse identificar gamas de frequência que, por exemplo, se queira remover da função imagem (linhas de uma grelha de referência numa fotografia de satélite, por exemplo).

De forma simples podemos definir a função cilindro, função de valor unitário apenas numa área circular:

$$(27) \quad f_c(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0 \\ 0 & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \end{cases}$$

Reescrevendo em coordenadas polares,

$$(28) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \theta, y = r \sin \theta \\ dx dy &= r dr d\theta \end{aligned}$$

e no espaço das frequências,

$$(29) \quad k_x = k_\Omega \cos \alpha, k_y = k_\Omega \sin \alpha$$

vem,

a transformada de Fourier em coordenadas polares,

$$(30) \quad F(k_\Omega, \alpha) = \int_{\Omega=0}^a \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} \exp(ik_\Omega r \cos(\theta - \alpha)) d\theta \right] r dr$$

A função cilindro tem simetria de revolução e portanto a sua transformada também não deve depender de α .

Fazendo $\alpha=0$ vem,

$$(31) \quad F(k_\Omega) = \int_{\Omega=0}^a \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} \exp(ik_\Omega r \cos(\theta - \alpha)) d\theta \right] r dr,$$

Pela definição da função de Bessel de 1º grau e ordem zero (Figura 1.) vem,

$$(32) \quad F(k_\Omega) = 2\pi \int_0^\infty J_0(k_\Omega r) r dr$$

ou,

$$(33) \quad F(k_\Omega) = \frac{2\pi}{k_\Omega} \int_0^a J_0(k_\Omega r) r dr = 2\pi a^2 \left[\frac{J_1(k_\Omega a)}{k_\Omega a} \right]$$

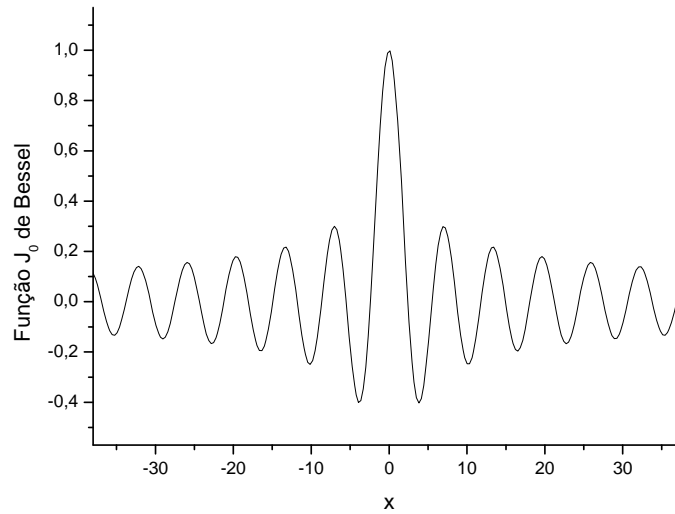


Figura 1. Representação gráfica da função de Bessel J_0

Uma outra função de particular importância e relevância em óptica é a função de Gauss (Figura 2.), de expressão genérica (a uma dimensão):

$$(34) \quad f(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}, \text{ em que } a \text{ é uma constante que define o valor máximo da função.}$$

A função de Gauss apresenta a particularidade de a sua transformada de Fourier (a função no espaço de frequências), ser ainda uma função gaussiana.

$$(35) \quad F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx = e^{-k^2/4a}$$

A melhor forma de definir uma gaussiana é determinar a sua largura ou desvio padrão (δ) definida como o intervalo da variável para o qual a função cai para $\frac{1}{\sqrt{e}}$ do seu valor máximo:

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

e, para a transformada de Fourier correspondente:

$$\sigma_k = \sqrt{2a}$$

ou seja $\sigma_x \sigma_k = 1$ (inversamente proporcionais)

Portanto quanto mais “estreita” for a gaussiana, mais “larga” vai ser a sua transformada. Ou seja, de uma forma simplista, maior é o número de frequências espaciais requeridas para “introduzir” a função $f(x)$. Ou, se quisermos, quanto menor for a duração (espacial ou não) do impulso, maior é a largura da banda espectral.

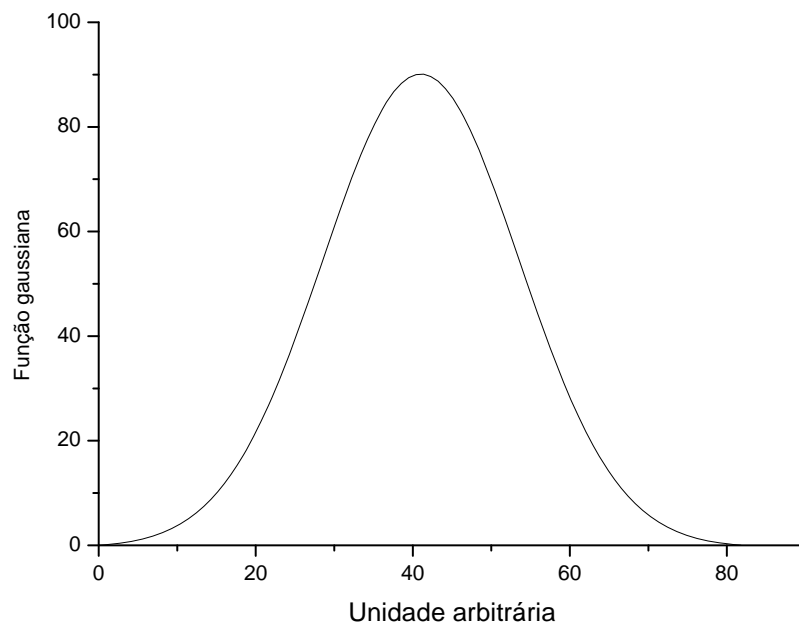


Figura 2. A função de Gauss.

Se a transformação efectuada por um sistema linear se representar por um operador L , a função e a sua transformada estarão relacionados por:

$$(36) \quad g(Y,Z) = L(f(y,z))$$

Pela propriedade de amostragem da função delta de Dirac, vem.

$$(37) \quad g(Y,Z) = L \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y',z') \delta(y' - y) \delta(z' - z) dy' dz' \right)$$

Recordando que um sistema \mathcal{O} será linear se:

$$(i) \quad a \cdot f(y,z) = a \cdot g(Y,Z)$$

$$(ii) \quad f(y,z) = a \cdot f_1(y,z) + b \cdot f_2(y,z) \quad g(Y,Z) = a \cdot g_1(Y,Z) + b \cdot g_2(Y,Z),$$

se uma função $f(y,z)$ dá origem a uma função $g(Y,Z)$ pela acção de um operador, representação do sistema \mathcal{O} .

Como L representa um sistema linear vem, de (ii),

$$(38) \quad g(Y,Z) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y',z') L(y' - y) \delta(z' - z) dy' dz' \right)$$

A $L(\delta(y'-y), \delta(z'-z))$ chama-se resposta impulsional (“point spread function” - PSF) e permite obter a transformada de uma qualquer função dada pelo sistema.

Num sistema linear invariante estacionário uma variação da posição do objecto provoca uma alteração da posição da imagem, mas não da sua forma.

À luz desta análise abordemos brevemente o problema da formação de um “ponto” luminoso por incidência de um “raio” de luz numa superfície.

Vamos considerar uma área infinitesimal $dydz$ centrada em (y,z) de um objecto (no nosso caso a *mancha* iluminada) que apresenta uma distribuição da irradiância $I_0(y,z)$.

O fluxo correspondente será então:

$$(39) \quad I_0(y,z) dydz.$$

O sistema óptico de observação, linear, vai “projectar” este objecto elementar numa mancha finita (dispersão, aberração...) no plano imagem.

Esta função de dispersão do sistema, pode representar-se por,

$$(40) \quad S(y,z;Y,Z)$$

A densidade de fluxo num plano da imagem será (devido à “parte” infinitesimal dy,dz),

$$(41) \quad dI_i(Y,Z) = S(y,z;Y,Z) I_0(y,z) dydz$$

O fluxo total através do ponto (Y,Z) do plano imagem será a soma da contribuição de cada “área elementar” do objecto.

$$(42) \quad I_1(Y,Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(y,z) S(y,z;Y,Z) dy dz$$

Notemos que se o sistema óptico não apresentar aberrações e for apenas limitado por difracção, a função $S(y,z;Y,Z)$, descreve o padrão de difracção de uma fonte pontual em (y,z).

Vamos considerar que o objecto é um impulso delta centrado em (y_0, z_0) ; então,

$$(43) \quad I_0(Y,Z) = A \delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$$

vem de (42),

$$(44) \quad I_i(Y,Z) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) S(y,z;Y,Z) dy dz,$$

pela propriedade de amostragem,

$$(45) \quad I_i(Y,Z) = A S(y_0, z_0; Y, Z)$$

Comparando a equação anterior com (j) vemos que a resposta impulsional (PSF) do sistema é igual a $S(y,z;Y,Z)$.

A PSF é a função de distribuição de irradiâncias de Airy (a menos de uma constante multiplicativa).

Uma fonte pontual, que pode ser representada por uma função delta com uma determinada intensidade, é projectada no plano imagem numa mancha com a distribuição de intensidades da forma do PSF do sistema óptico.

Este processo dito de **convolução** de duas funções pode, de uma forma simples, podemos dizer que é a aplicação de uma função a todos os pontos de uma outra.

A convolução de duas funções $f(x)$ e $h(x)$ será (integral de convolução),

$$(46) \quad f(x) \otimes h(x) = g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(X-x) dx,$$

a duas ou mais dimensões a generalização é imediata,

$$(47) \quad g(X,Y,Z,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int f(x,y,z,t) h(X-x, Y-y, Z-z, T-t) dx dy dz dt$$

A distribuição de uma grandeza (função) de uma forma que é determinada por uma outra é um exemplo de convolução.

Imagine-se que temos uma superfície (uma pintura por exemplo) “sobre” a qual vamos considerar a distribuição de intensidade associada a uma certa iluminação, numa linha na direcção dos XX.

A imagem (superfície iluminada) é observada por um sistema óptico linear. O sistema é caracterizado por uma função, a PSF, que aplicada sobre a função objecto permite obter a função imagem.

Seja $h(x)$ a resposta impulsional do sistema.

Vamos começar por considerar que $h(x)$ tem a forma simples e que é invariante, ou seja tem a mesma forma para todo o espaço (x).

Consideremos o processo de obtenção da convolução entre as duas funções,

$$(48) \quad S(x) = f(x) \otimes h(x),$$

e um ponto x_1 .

A ordenada da função de entrada $f(x_1)$, vai ser condicionada pela resposta impulsional do sistema, originando a curva $f(x_1)h(x-x_1)$. A função $f(x_1)$ aparece como o “peso” da função $h(x-x_1)$ (apenas a origem é deslocada).

Para um ponto X' a curva correspondente “originará” uma contribuição para o sinal de saída (imagem) em x_1 , que será:

$$(49) \quad f(X') h(x_1 - X')$$

Considerando todas as contribuições virá:

$$(50) \quad g(x_1) = \int_{x'=-\infty}^{x'=+\infty} f(x') h(x_1 - x') dx'$$

em que x_1 , pode ser um qualquer x ,

vem

$$(51) \quad g(x) = f(x) \otimes h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') h(x - x') dx'$$

A convolução verifica as propriedades de comutatividade ($f \otimes h = h \otimes f$), associatividade ($f \otimes (h \otimes t) = (f \otimes h) \otimes t$), e, distributividade em relação à adição ($f \otimes (h+t) = f \otimes h + f \otimes t$).

O teorema da convolução é de grande utilidade e pode ser expresso por:
a transformada de Fourier da convolução de duas funções é igual ao produto das transformadas das funções.

$$\text{Se } g(x) = f(x) \otimes h(x)$$

então

$$G(k) = F(k) \cdot H(k)$$

e vem,

pela definição de transformada de Fourier,

$$(52) \quad G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{ikx} dx$$

mas,

$$(53) \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') h(x - x') dx'.$$

Substituindo e alterando a ordem de integração, vem,

$$(54) \quad G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} h(x - x') dx \right) dx'$$

Fazendo a mudança da variável na integração interior $x - x' = X$,

porque $dX = dx$,

$$(55) \quad G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x+x')} h(x) d(x) \right) dx'$$

$$(56) \quad G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{ik(x')} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x+x')} h(x) dx$$

$$(57) \quad G(k) = F(k) \cdot H(k)$$

Por outro lado o teorema da convolução em frequência virá:

$$(58) \quad \mathfrak{T}(f(x) \cdot h(x)) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{T}(f(x)) \otimes \mathfrak{T}(h(x))$$

A **função de correlação** é um operador que serve para avaliar as relações mútuas entre duas funções, as suas similaridades e coincidências sendo assim extremamente útil e importante incluindo na inspecção e caracterização dimensional de superfícies como se verá nas aplicações do sistema em diferentes tarefas metrológicas.

Para sistemas lineares e invariantes, a função de correlação (ou produto de correlação) entre duas funções f e g das mesmas variáveis x e y , será:

$$(59) \quad P_{f,g}(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) g(x+u, y+v) dx dy$$

No entanto a forma mais comum de representar a correlação das duas funções é (a uma dimensão):

$$(60) \quad C(x) = f(x) \odot g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') g(x' - x) dx' \quad \text{sendo } C(x) \text{ chamada}$$

correlação mútua e utilizando a variável muda de integração x' .

No caso geral de $f(x)$ e $g(x)$ serem funções complexas, a função de correlação mútua complexa, vem,

$$(61) \quad \gamma_{fg} = f(x) \odot g^*(x) = \int_{x':-\infty}^{x':+\infty} f(x') g(x' - x) dx$$

em que $g^*(x)$ é o complexo conjugado de $g(x)$.

Pelas propriedades do complexo conjugado, vem

$$(62) \quad f(x) \odot g^*(x) = f(x) \otimes g^*(-x)$$

Por vezes há interesse em usar funções normalizadas

$$(63) \quad \gamma_{fs}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') g^*(x' - x) dx'}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') g^*(x') dx'}$$

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções par vem:

$$(64) \quad f(x) \odot g(x) = f(x) \otimes g(x)$$

A correlação de uma função com ela própria - autocorrelação - é uma função invariante em translação da maior importância em óptica (coerência, imagiologia,...)

$$(65) \quad P_{ff}(u,v) = \iint f(x,y) f(x+u,y+v) dx dy$$

A autocorrelação P_{ff} não depende da posição no espaço (X,Y) , mas sim de variáveis "próprias" u e v .

Na notação mais frequente,

$$(66) \quad AC(x) = C_{ff}(x) = f(x) \odot f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') f(x' - x) dx'$$

A transformada de Fourier da autocorrelação de uma função é o quadrado do módulo da sua transformada (teorema de Wiener-Khinchin ou da autocorrelação):

$$(67) \quad \mathfrak{F}(C_{ff}(x)) = |F(k)|^2$$

que é o espectro de potência de $f(x)$ em termos de frequência espacial.

Uma das importantes aplicações da correlação de funções e em especial da autocorrelação acontece na análise de ruído em sinais.

Quanto maior for a largura da banda espectral do ruído, mais confinada será a autocorrelação. Quanto mais extensos, temporal ou espacialmente, forem os impulsos, durante mais tempo (espaço) se mantêm a correlação.