Primitivação por partes
Primitivação de potências de funções trigonométricas

Relembre que a fórmula da primitivação por partes é utilizada quando primitivamos uma função f que pode ser escrita como o produto de duas funções. Mais precisamente, considera-se a decomposição $f(x) = u'(x)v(x)$. Assim, a fórmula da primitivação por partes é dada por

$$P\Big(u' \times v\Big) = u \times v - P\Big(u \times v'\Big)$$

sendo necessário escolher em f, u' e v. A escolha pode ser efectuada com a ajuda dos seguintes passos (por esta ordem):

1. Escolher para u' a função da qual se conhece (ou se obtém facilmente) a primitiva.
2. Escolher para v a função cuja derivada mais permite simplificar $P\Big(u \times v'\Big)$

1. Utilize o método de primitivação por partes para obter as primitivas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-5x}$
   Fazendo

   $$u'(x) = e^{-5x} \quad \text{e} \quad v(x) = x,$$

   deduz-se que

   $$u(x) = P\Big(e^{-5x}\Big) = -\frac{e^{-5x}}{5} \quad \text{e} \quad v'(x) = 1.$$

   Aplicando a fórmula de primitivação por partes

   $$P\Big(u' \times v\Big) = u \times v - P\Big(u \times v'\Big)$$

   resulta

   $$\begin{aligned} P\Big(x\,\mathrm{e}^{-5x}\Big) &= x\left(-\frac{\mathrm{e}^{-5x}}{5}\right) - P\left(1.\left[-\frac{\mathrm{e}^{-5x}}{5}\right]\right) \\ &= -\frac{x\,\mathrm{e}^{-5x}}{5} + \frac{1}{5}P\Big(\mathrm{e}^{-5x}\Big) \\ &= -\frac{x\,\mathrm{e}^{-5x}}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-5x}}{5}\right) + C \\ &= -\frac{x\,\mathrm{e}^{-5x}}{5} - \frac{\mathrm{e}^{-5x}}{25} + C \end{aligned}$$

   (b) $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{3x^2}$

   $$P\Big(x^3\,\mathrm{e}^{3x^2}\Big) = P\Big(x^2 x\,\mathrm{e}^{3x^2}\Big) = x^2\frac{\mathrm{e}^{3x^2}}{6} - P\left(2x\frac{\mathrm{e}^{3x^2}}{6}\right) \qquad v(x) = x^2 \to v'(x) = 2x$$

   $$= \frac{x^2\,\mathrm{e}^{3x^2}}{6} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}P\Big(6x\,\mathrm{e}^{3x^2}\Big) \qquad u'(x) = x\,\mathrm{e}^{3x^2} \to u(x) = \tfrac{1}{6}P\Big(6x\,\mathrm{e}^{3x^2}\Big) = \tfrac{\mathrm{e}^{3x^2}}{6}$$

   $$= \frac{x^2\,\mathrm{e}^{3x^2}}{6} - \frac{1}{18}\,\mathrm{e}^{3x^2} + C$$

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$P\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = P\left(1.\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\ln\left(\frac{1}{x}\right) - P\Big(x.\left(-\frac{1}{x}\right)\Big) \qquad v(x) = \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) \to v'(x) = -\tfrac{1}{x}$$

$$= x\ln\left(\frac{1}{x}\right) - P\Big(-1\Big) \qquad u'(x) = 1 \to u(x) = x$$

$$= x\ln\left(\frac{1}{x}\right) + x + C$$

(d) $f(x) = \ln(5+x)$

$$P\Big(\ln(5+x)\Big) = P\Big(1.\ln(5+x)\Big) = x\ln(5+x) - P\left(x.\frac{1}{5+x}\right)$$

$$= x\ln(5+x) - P\left(\frac{x+5-5}{5+x}\right)$$

$$= x\ln(5+x) - P\left(1 - \frac{5}{5+x}\right)$$

$$= x\ln(5+x) - x + 5P\left(\frac{1}{5+x}\right)$$

$$= x\ln(5+x) - x + 5\ln|5+x| + C$$

(e) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$

$$P\Big(\operatorname{arcsen}(x)\Big) = P\Big(1.\operatorname{arcsen}(x)\Big) = x.\operatorname{arcsen}(x) - P\left(x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad v(x) = \operatorname{arcsen}(x) \to v'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x.\operatorname{arcsen}(x) - P\left(x.\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right) \qquad u'(x) = 1 \to u(x) = x$$

$$= x.\operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{2}P\left(\underbrace{-2x}_{h'}.\underbrace{\left(1-x^2\right)^{-1/2}}_{h^\alpha}\right)$$

$$= x.\operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= x.\operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

(f) $f(x) = x\sec^2(x)$

$$P\Big(x\sec^2 x\Big) = x\tan(x) - P\Big(1.\tan(x)\Big) \qquad v(x) = x \to v'(x) = 1$$

$$= x\tan(x) - P\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \qquad u'(x) = \sec^2(x) \to u(x) = \tan(x)$$

$$= x\tan(x) + P\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= x\tan(x) + \ln|\cos x| + C$$

(g) $f(x) = \arctan(x)$

$$P\Big(\arctan(x)\Big) = P\Big(1.\arctan(x)\Big) = x\arctan(x) - P\left(x.\frac{1}{1+x^2}\right) \qquad v(x) = \arctan(x) \to v'(x) = \tfrac{1}{1+x^2}$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}P\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \qquad u'(x) = 1 \to u(x) = x$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

(h) $f(t) = \cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)$

Aplicando as regras sugeridas em cima, verificamos que qualquer das funções $\cosh(t)$ ou $\mathrm{sen}(3t)$ pode ser escolhida para u' ou v. Optando por fazer

$$u'(t) = \cosh(t) \quad \text{e} \quad v(t) = \mathrm{sen}(3t),$$

temos

$$u(t) = \mathrm{senh}(t) \quad \text{e} \quad v'(t) = 3\cos(3t),$$

donde

$$\begin{aligned} P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) &= \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t) - P\Big(3\cos(3t)\,\mathrm{senh}(t)\Big) \\ &= \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t) - 3P\Big(\cos(3t)\,\mathrm{senh}(t)\Big) \end{aligned}$$

Note-se que a primitiva que resta resolver, continua a não ser imediata e, aliás, é do mesmo tipo que a primitiva inicial. Aplicamos então mais um passo de primitivação por partes, tendo o cuidado de escolher as "mesmas" funções para u' e v. Assim,

$$\begin{aligned} u'(t) = \mathrm{senh}(t) &\to u(t) = \cosh(t) \\ v(t) = \cos(3t) &\to v'(t) = -3\,\mathrm{sen}(3t) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) &= \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t) - 3P\Big(\cos(3t)\,\mathrm{senh}(t)\Big) \\ &= \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t) - 3\Big[\cosh(t)\cos(3t) - P\Big(\cosh(t)(-3\,\mathrm{sen}(3t))\Big)\Big] \\ &= \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t) - 3\cosh(t)\cos(3t) - 9P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) \end{aligned}$$

Neste momento, a primitiva voltou ao "ponto de partida", entrando a partir de agora em ciclo. No entanto, note-se que das igualdades anteriores resulta

$$\begin{aligned} & P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) = \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t) - 3\cosh(t)\cos(3t) - 9P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) \\ \Leftrightarrow & P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) + 9P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) = \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t) - 3\cosh(t)\cos(3t) \\ \Leftrightarrow & 10P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) = \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t) - 3\cosh(t)\cos(3t) \\ \Leftrightarrow & P\Big(\cosh(t)\,\mathrm{sen}(3t)\Big) = \frac{\mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{senh}(t)}{10} - \frac{3\cosh(t)\cos(3t)}{10} + C \end{aligned}$$

2. Calcule a primitiva de f nas seguintes situações:

(a) $f(x) = \mathrm{sen}^2(x)$

As primitivas de funções trigonométricas podem ser obtidas de várias formas por via do uso das várias fórmulas trigonométricas existentes. Vejamos,

Método 1

$$\begin{aligned} P\Big(\mathrm{sen}^2(x)\Big) &= P\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} P\Big(2\cos(2x)\Big) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{\mathrm{sen}(2x)}{4} + C \end{aligned}$$

Nota: $\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ (ver formulário)

Método 2
Poderíamos também ter utilizado o método de primitivação por partes:

$$\begin{aligned}
P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) &= P\Big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)\Big)\\
&= -\cos(x)\operatorname{sen}(x) - P\Big(-\cos(x)\cos(x)\Big)\\
&= -\cos(x)\operatorname{sen}(x) + P\Big(\cos^2 x\Big) = -\cos(x)\operatorname{sen}(x) + P\Big(1-\operatorname{sen}^2(x)\Big)\\
&= -\cos(x)\operatorname{sen}(x) + x - P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big)
\end{aligned}$$

Como a primitiva entrou em ciclo, escrevemos

$$\begin{aligned}
P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) &= -\cos(x)\operatorname{sen}(x) + x - P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big)\\
\Leftrightarrow 2P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) &= -\cos(x)\operatorname{sen}(x) + x\\
\Leftrightarrow P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) &= -\frac{1}{2}\cos(x)\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}x + C\\
\Leftrightarrow P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) &= -\frac{2\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{4} + \frac{1}{2}x + C\\
\Leftrightarrow P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) &= -\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{1}{2}x + C
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \cos^3(x)$
Método 1

$$\begin{aligned}
P\Big(\cos^3(x)\Big) &= P\Big(\cos(x)\cos^2(x)\Big)\\
&= P\Big(\cos(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\Big) = P\Big(\cos(x)\Big) - P\Big(\underbrace{\cos(x)}_{h'}\underbrace{\operatorname{sen}^2(x)}_{h^\alpha}\Big)\\
&= \operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} + C
\end{aligned}$$

Método 2
Poderíamos também ter utilizado o método de primitivação por partes:

$$\begin{aligned}
P\Big(\cos^3(x)\Big) &= P\Big(\cos(x)\cos^2(x)\Big)\\
&= \operatorname{sen}(x)\cos^2(x) - P\Big(\operatorname{sen}(x)\left[-2\cos(x)\operatorname{sen}(x)\right]\Big)\\
&= \operatorname{sen}(x)\cos^2(x) + 2P\Big(\cos(x)\operatorname{sen}^2(x)\Big)\\
&= \operatorname{sen}(x)\cos^2(x) + 2P\Big(\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\Big)\\
&= \operatorname{sen}(x)\cos^2(x) + 2P\Big(\cos(x)\Big) - 2P\left(\cos^3(x)\right)\\
&= \operatorname{sen}(x)\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}(x) - 2P\Big(\cos^3(x)\Big)
\end{aligned}$$

Como a primitiva entrou em ciclo, escrevemos

$$\begin{aligned}
&P\Big(\cos^3(x)\Big) = \operatorname{sen}(x)\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}(x) - 2P\Big(\cos^3(x)\Big)\\
\Leftrightarrow &3P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) = \operatorname{sen}(x)\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}(x)\\
\Leftrightarrow &P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(x) + C\\
\Leftrightarrow &P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) = \frac{\operatorname{sen}(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(x) + C\\
\Leftrightarrow &P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{3} - \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(x) + C\\
\Leftrightarrow &P\Big(\operatorname{sen}^2(x)\Big) = \operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} + C
\end{aligned}$$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}^4(x)$

$$\begin{aligned}
P\Big(\operatorname{sen}^4(x)\Big) &= P\Big((\operatorname{sen}^2(x))^2\Big)\\
&= P\left(\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2\right) = P\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)\right)\\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}P\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}P\left(\cos(4x)\right)\\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C
\end{aligned}$$