Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Soluções

Exercício 23: *Problema de Rabi para um sistema de dois níveis*

a) Definindo um novo operador de evolução através da equação, $\hat{U}_t = e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\hat{V}_t$, e substituindo este resultado em

$$i\hbar\frac{d\hat{U}_t}{dt} = \hat{H}_t\,\hat{U}_t\,. \tag{98}$$

obtemos a equação

$$\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z\,e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\hat{V}_t + i\hbar\,e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\frac{d\hat{V}_t}{dt} \;=\; \hat{H}_t\,e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\hat{V}_t\,, \tag{99}$$

que, após multiplicação à esquerda pelo operador $e^{\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}$, se pode escrever como

$$i\hbar\frac{d\hat{V}_t}{dt} = -\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z\,\hat{V}_t + e^{\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\hat{H}_t\,e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\hat{V}_t = \hat{H}_\omega\,\hat{V}_t\,. \tag{100}$$

em que $\hat{H}_\omega$ é o pseudo-Hamiltoniano[4].

$$\hat{H}_\omega = -\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z + e^{\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\,\hat{H}_t\,e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\,. \tag{101}$$

Representando $\hat{H}_t$ na forma matricial e utilizando a fórmula

$$e^{\pm\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z} = \mathbb{1}\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \pm i\hat{\sigma}_z\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\,, \tag{102}$$

podemos escrever este operador como

$$\begin{aligned}\hat{H}_\omega &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\hbar(\omega_0-\omega)}{2} & \frac{\hbar\Gamma}{2}e^{-i\omega t} \\ \frac{\hbar\Gamma}{2}e^{i\omega t} & -\frac{\hbar(\omega_0-\omega)}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar(\omega_0-\omega)}{2} & \frac{\hbar\Gamma}{2} \\ \frac{\hbar\Gamma}{2} & -\frac{\hbar(\omega_0-\omega)}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\,(\omega_0-\omega)\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Gamma}{2}\,\hat{\sigma}_x\,,\end{aligned} \tag{103}$$

que é efetivamente independente do tempo.

b) Dado que $\hat{H}_\omega$ é independente do tempo, é fácil ver que $\hat{V}_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_\omega t}$ é uma solução da equação (100), com a condição inicial correta (este operador reduz-se à matriz unidade a $t = 0$). Também é fácil ver que se pode escrever $\hat{H}_\omega = \frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, em que $\Omega =$

[4]Na verdade, é desadequado chamar a $\hat{H}_\omega$ pseudo-Hamiltoniano. Éo Hamiltoniano do sistema, mas no sistema de coordenadas que gira em torno do eixo dos z com velocidade angular ω e no qual o campo da onda circularmente polarizada aparece como estático, ver Landau e Lifshitz, Mecânica, §40, exercício 2.

$\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}$, e $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\omega_0-\omega}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_z$ é um versor no plano xz. Assim, $\hat{V}_t = e^{-\frac{i\Omega t}{2}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})}$. Dado que

$$e^{-\frac{i\Omega t}{2}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})} = \hat{\mathbb{1}}\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \tag{104}$$

substituindo esta expressão na expressão para $\hat{U}_t$, obtemos

$$\hat{U}_t = e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\left[\hat{\mathbb{1}}\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right], \tag{105}$$

que é o resultado desejado.

c) Podemos escrever um estado inicial arbitrário, a $t=0$, como $|\psi_0\rangle = a_+^0\,|+\rangle + a_-^0\,|-\rangle$ em que $a_\pm^0$ são coeficientes complexos arbitrários, aparte a normalização do estado. Aplicando $\hat{U}_t$ a este estado, tal como escrito em (105) e utilizando $\hat{\sigma}_z\,|\pm\rangle = \pm\,|\pm\rangle$, $\hat{\sigma}_x\,|\pm\rangle = |\mp\rangle$ $e^{\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\,|\pm\rangle = e^{\pm\frac{i\omega t}{2}}\,|\pm\rangle$ e $e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\,|\pm\rangle = e^{\mp\frac{i\omega t}{2}}\,|\pm\rangle$, podemos demonstrar que os coeficientes $a_\pm(t)$ que multiplicam os estados $|\pm\rangle$ em $|\psi_t\rangle = a_+(t)\,|+\rangle + a_-(t)\,|-\rangle$ são dados por

$$a_+(t) = e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left\{\left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\hat{n}_z\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]a_+^0 - i\hat{n}_x\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)a_-^0\right\}, \tag{106}$$

$$a_-(t) = e^{\frac{i\omega t}{2}}\left\{-i\hat{n}_x\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)a_+^0 + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\hat{n}_z\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]a_-^0\right\}, \tag{107}$$

em que $\hat{n}_x = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}$ e $\hat{n}_z = \frac{\omega_0-\omega}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}$ são as componentes do versor $\hat{\mathbf{n}}$. As equações (106) e (107) constituem a solução completa do problema de Rabi, para condições iniciais arbitrárias.

d) Se a $t=0$, o sistema estava no seu estado fundamental, isto é, no estado $|-\rangle$, então $a_-^0 = 1$, $a_+^0 = 0$. Como a probabilidade de transição para o estado excitado é dada por $p(t) = |\langle +|\psi_t\rangle|^2$, pela regra de Born, temos que $p(t) = |a_+(t)|^2$, com $a_+(t) = -i\hat{n}_x\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)e^{-\frac{i\omega t}{2}}$, pelo que

$$p(t) = \frac{\Gamma^2}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}\,\sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \tag{108}$$

que é a famosa fórmula de Rabi. Esta expressão é sempre inferior a 1, exceto para $\omega=\omega_0$ (condição de ressonância), em cujo caso se torna igual a 1 quando $t = \frac{(2n+1)\pi}{\Omega}$, em que n é um número natural positivo ou zero.

e) A amplitude de transição de um estado inicial para um estado em teoria de perturbações dependente do tempo de 1ª ordem é dada por

$$\gamma_{1f}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t du\,\langle f|\,\hat{H}_1(u)\,|i\rangle\,e^{-i\omega_{if}u}, \tag{109}$$

com $t_0 = 0$ neste caso. Aqui, $|i\rangle = |-\rangle$ (estado fundamental) e $|f\rangle = |+\rangle$ (estado excitado), logo $\omega_{if} = -\frac{\hbar\omega_0}{2\hbar} - \frac{\hbar\omega_0}{2\hbar} = -\omega_0$, pelo que obtemos

$$\gamma_+(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t du\,\langle +|\,\hat{H}_1(u)\,|-\rangle\,e^{i\omega_0 u}. \tag{110}$$

Como $\hat{H}_1(u) = \frac{\hbar\Gamma}{2} \cdot (\, \hat{\sigma}_+ e^{-i\omega u} + \hat{\sigma}_- e^{i\omega u}\,)$, temos $\langle + |\, \hat{H}_1(u)\, | - \rangle = \frac{\hbar\Gamma}{2} e^{-i\omega u}$, pelo que a amplitude de transição é dada por

$$\gamma_+(t) = -\frac{i\Gamma}{2} \int_0^t du\ e^{-i(\omega-\omega_0)u} = -i\Gamma e^{-i(\omega-\omega_0)t/2} \frac{\sin\left[(\omega-\omega_0)t/2\right]}{\omega-\omega_0}, \tag{111}$$

pelo que a probabilidade de transição, $p(t) = |\gamma_+(t)|^2$, é dada por

$$p(t) = \frac{\Gamma^2}{(\omega-\omega_0)^2} \sin^2\left[\frac{(\omega-\omega_0)t}{2}\right] \tag{112}$$

que é claramente o limite de (108) em primeira ordem em Γ^2. Note-se que se $\omega \to \omega_0$, então o limite de (112) é dado por $p(t) \approx \frac{\Gamma^2 t^2}{4}$, que só é válido para $t < 2/\Gamma$, de outro modo a probabilidade torna-se maior do que 1. Mas, na ressonância, a absorção de energia pelo sistema torna-se particularmente eficiente, pelo que não faz sentido aplicar a teoria de perturbações a este problema, ou seja, $\hat{H}_1(t)$ não pode ser considerada uma pequena perturbação a $\hat{H}_0$ (de facto, o parâmetro de perturbação adimensional para este problema é simplesmente a razão $\frac{|\Gamma|}{|\omega-\omega_0|}$).