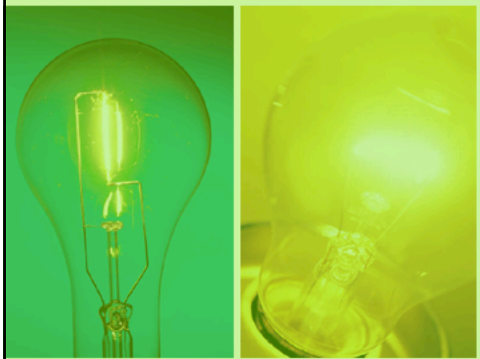
Processamento de Sinal

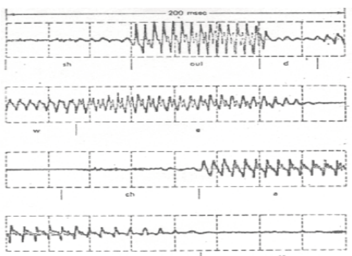


2º Ana
Sinais e Sistemas

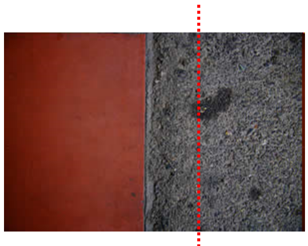
Sinal acústico

- O que é um sinal ?

  Uma grandeza física que varia no tempo



- Tensão produzida no microfone quando se pronuncia a frase “*Should we chase*”.



Sinais em Tempo Contínuo

- Como interpretar sinais ?
  - Definição
    - Se s for um sinal acústico:
      - s: Tempo $\rightarrow$ Pressão
    - Podemos representá-lo na forma de uma função:

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = \ldots$$

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Definição:
  - Um sinal *x(t)* em tempo contínuo é uma função de uma variável contínua.
  - A estes sinais chamaremos abreviadamente de ***sinais contínuos*** (embora abusivamente).

Sinais em Tempo Discreto

- Definição:
  - Um sinal *x[n]* em tempo discreto é uma função de uma variável discreta.

$$x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

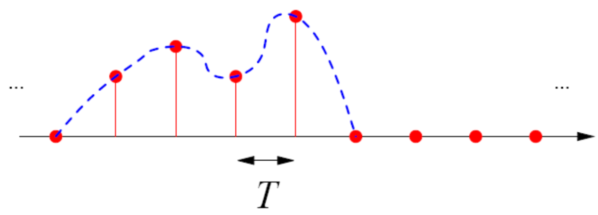
  - A estes sinais chamaremos abreviadamente de ***sinais discretos*** (embora abusivamente).
  - Notar no uso de parêntesis recto, *x[n]* e não *x(n)*.

Amostragem de Sinais Contínuos

- Os sinais discretos podem ser o resultado da amostragem de um sinal contínuo (***$x_c(t)$***).

$$x[n] = x_c(nT),\ \forall_n \in \mathbb{Z}$$

onde ***$x_c(t)$*** é uma função de variável tempo contínuo e ***T*** é o período de amostragem.

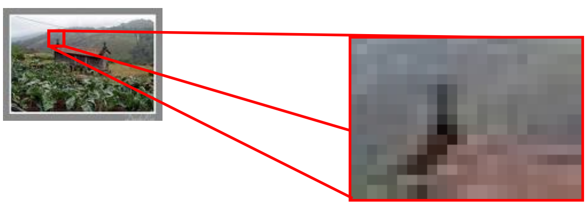


Sinal Digital

- Mas a própria amplitude do sinal pode ser discretizada de modo a reduzir o número de *bits* necessários na sua representação – sinal digital.

- No caso de uma codificação linear de 8 *bits* em complemento para 2 teríamos a seguinte função

$$s : \mathbb{Z} \longrightarrow \{-128, -127, ..., 127\}$$



Energia

- Define-se a energia de um sinal num intervalo de tempo como:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

- No caso discreto será:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

Energia

- Por vezes queremos conhecer a energia do sinal num intervalo infinito (todo o seu domínio):

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

- No caso discreto será:

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

Potência

- De forma análoga definimos a potência de um sinal como sendo:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

- No caso discreto será:

$$\frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

Potência

- Por vezes queremos conhecer a potência do sinal num intervalo infinito (todo o seu domínio):

$$P_\infty \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

- No caso discreto será:

$$P_\infty \triangleq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

Energia e Potência

- Para o caso de um intervalo infinito, distinguimos três casos:
  - Sinais com energia finita, $E_\infty < \infty$, são denominados sinais de energia.
    - Estes sinais têm a particularidade em ter $P_\infty = 0$ (Porque ?):

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 < t < 0 \\ 0 & , \quad \text{outro } t \end{cases}$$

  - Sinais com potência finita, $P_\infty < \infty$, que são denominados sinais de potência. Estes sinais têm $E_\infty = \infty$ (Porque ?).

$$x(t) = 3$$

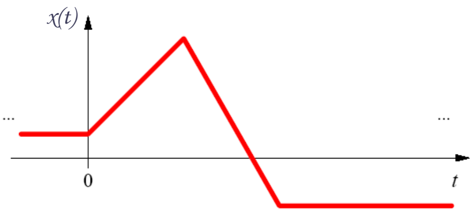
Energia e Potência

- Sinais com energia infinita, $E_\infty = \infty$, e potência infinita, $P_\infty = \infty$.

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ x[n] &= 2n \end{aligned}$$

Transformações : Deslocamento Temporal

$y(t) = x(t - t_0)$



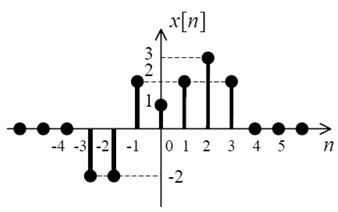
Quando

- $t_0 > 0$ o sinal está em atraso
- $t_0 < 0$ o sinal está em avanço

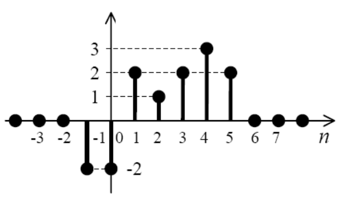
Como seria para ?

$y(t) = x(t + t_0)$

Transformações : Deslocamento Temporal

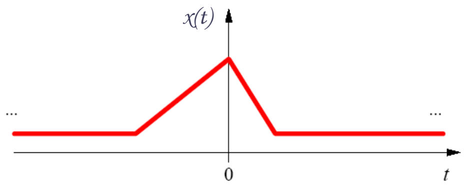


Qual será a expressão de y[n] ?

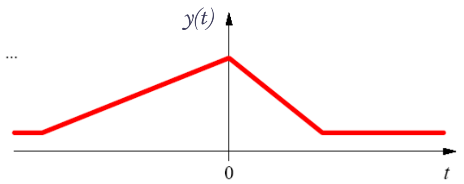


Transformações : Escalamento Temporal

$y(t) = x(\alpha t), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

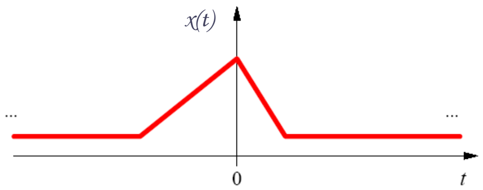


Neste caso α é maior ou menor do que 1 ?



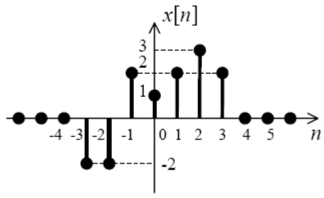
Transformações : Inversão Temporal

$y(t) = x(-t)$



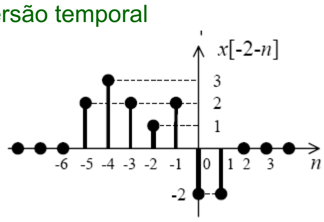
Transformações : Inversão Temporal

Determine a sequência x[-2-n]



Esta sequência é obtida por:

- Alteração da escala com inversão temporal
- Deslocamento temporal

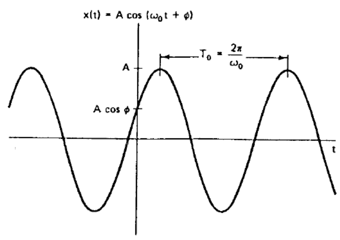


Sinal Periódico Contínuo

- Um sinal x(t) diz-se periódico se existir um valor positivo T tal que

$$x(t) = x(t+T),\ \forall t$$

  – Ao menor valor de T dá-se o nome de período fundamental (T_0).



Sinal Periódico Discreto

- Analogamente ao caso contínuo, um sinal *x[n]* discreto diz-se periódico se existir um valor positivo N de amostras tal que

$$x[n] = x[n+N],\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

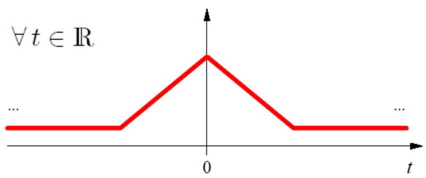
  - Ao menor valor de N dá-se o nome de período fundamental (N_0).
  - A amostragem de um sinal contínuo periódico pode resultar num sinal discreto que não é periódico.

Prof. C. A. Silva – Processamento de Sinal

Sinal Pares e Ímpares

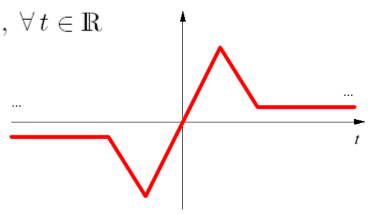
- Um sinal é par se for igual à sua inversão temporal:

$$x(t) = x(-t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}$$



- Um sinal é ímpar se for igual ao simétrico da sua inversão temporal:

$$x(t) = -x(-t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}$$



Prof. C. A. Silva – Processamento de Sinal

Componentes Par e Ímpar

- Qualquer sinal pode ser decomposto na soma de um sinal par com um sinal ímpar:

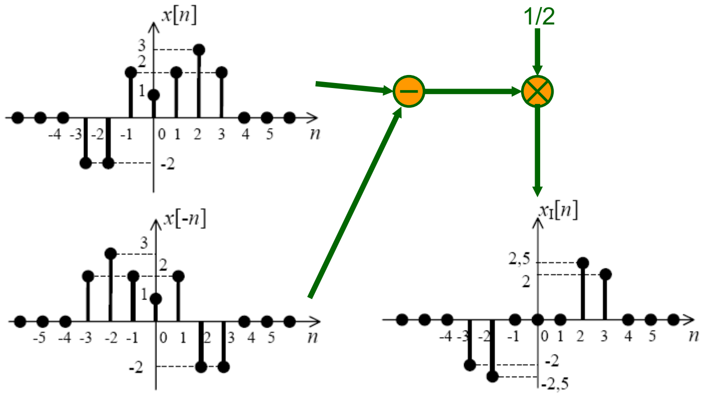
$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

onde

- Parte par $$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$
- Parte ímpar $$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Componentes Par e Ímpar

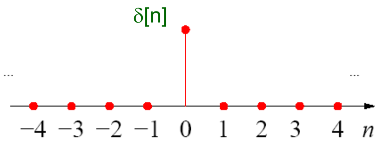
- Determine a parte ímpar do seguinte sinal:



Sinal Impulso Unitário Discreto

- O sinal impulso unitário discreto, ou *Kronecker*, é definido por

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n \neq 0 \end{cases}$$



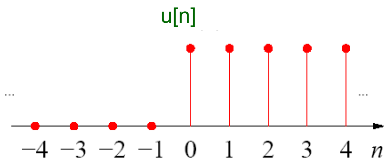
- Qualquer sequência pode ser expressa como uma soma de impulsos unitários escalados e deslocados no tempo:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Sinal Degrau Unitário Discreto

- O sinal degrau unitário discreto, é definido por

$$u[n] = \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ 1 & , \quad n \geq 0 \end{cases}$$



ou ainda:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

Impulso e Degrau Unitário Discreto

- O sinal degrau unitário discreto pode ser relacionado com o impulso unitário por:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

inversamente:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

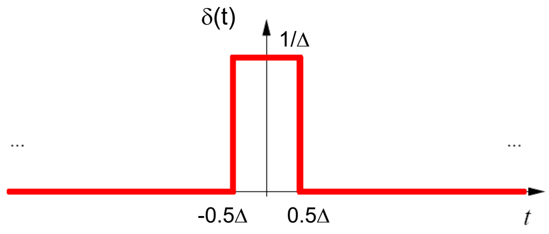
Sinal Impulso Unitário Contínuo

- O sinal impulso unitário contínuo, também conhecida por impulso de *Dirac*, é definido por

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0,\ t \neq 0 \\ \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(\tau) d\tau &= 1,\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

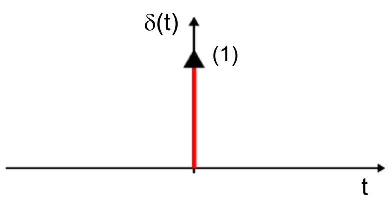
- A função impulso de *Dirac* não se encontra definida para t= 0.

Sinal Impulso Unitário Contínuo



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t)$$

Sinal Impulso Unitário Contínuo



A amplitude da seta indica o valor da área do impulso e não o valor do impulso para t= 0 que é infinito.

Sinal Impulso Unitário Contínuo

- Como podemos representar a amostragem de um sinal analógico ?

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

$$lim_{\Delta \to 0} x(t)\delta_\Delta(t) = lim_{\Delta \to 0} x(0)\delta_\Delta(t)$$

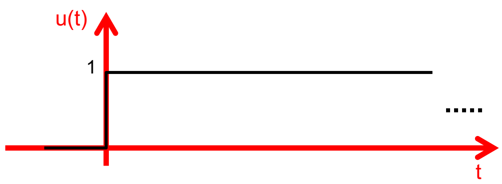
$$x(t)\delta(t) = \boxed{x(0)\delta(t)}$$

Qual é o significado ?

Sinal Degrau Unitário Contínuo

- Definição:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$



Sinal Degrau Unitário Contínuo

– O sinal degrau unitário relaciona-se com o impulso de Dirac pela seguinte equação:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

– Por sua vez, o impulso de Dirac relaciona-se com o degrau unitário da seguinte forma:

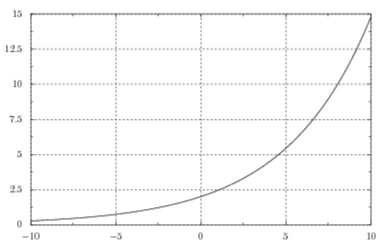
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

Sinal Exponencial Contínua

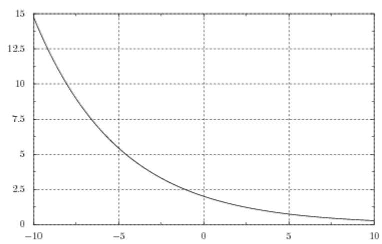
- A exponencial contínua é expressa pela seguinte expressão:

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

- Quando ***C*** e α são reais teremos



Para ***C*** = 2 e α = 0.2



Para ***C*** = 2 e α = -0.2

Prof. C. A. Silva – Processamento de Sinal

Sinal Exponencial Contínua

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

- Quando ***C*** e $\boldsymbol{\alpha}$ são imaginários, teremos

$$C = Ae^{j\phi}$$

$$\alpha = \alpha_r + j\omega_0$$

então

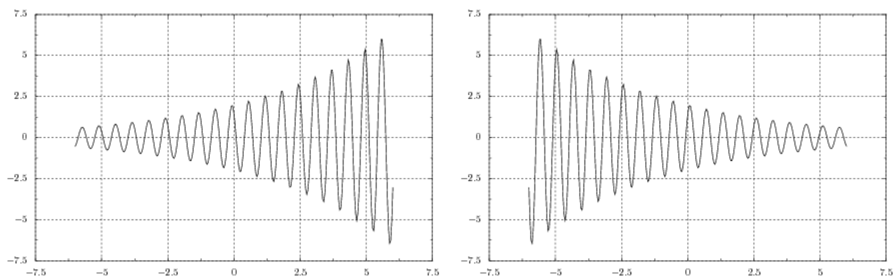
$$x(t) = Ce^{\alpha t} = Ae^{j\phi}e^{(\alpha_r + j\omega_0)t} = Ae^{\alpha_r t}e^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

Decompondo ***x(t)*** na sua componente real e imaginária:

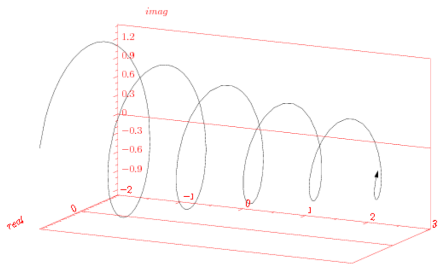
$$\Im\{x(t)\} = Ae^{\alpha t}sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\Re\{x(t)\} = Ae^{\alpha t}cos(\omega_0 t + \phi)$$

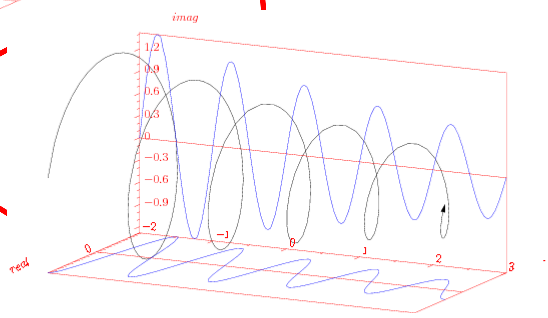
Sinal Exponencial Contínua



Sinal Exponencial Contínua



$$x(t) = Ae^{\alpha_r t}e^{\jmath(\omega_0 t+\phi)}$$



$$\Im\{x(t)\} = Ae^{\alpha t} sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\Re\{x(t)\} = Ae^{\alpha t} cos(\omega_0 t + \phi)$$

Sinal Exponencial Contínua

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

- Quando ***C*** é real e ***α*** é imaginário puro, teremos

$$C = A$$

$$\alpha = \alpha_r + \jmath\omega_0$$

então

$$x(t) = Ce^{\alpha t} = Ae^{\jmath\omega_0 t}$$

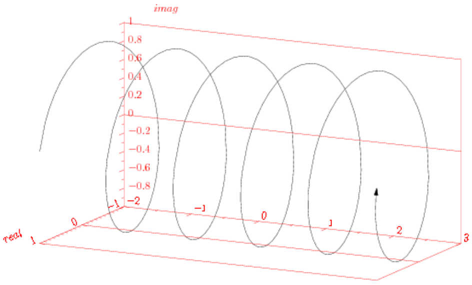
Decompondo ***x(t)*** na sua componente real e imaginária:

$$\Re\{x(t)\} = A\cos(\omega_0 t)$$

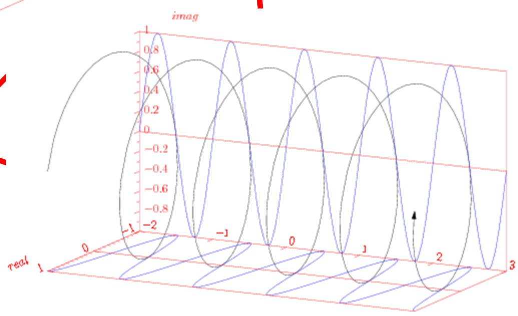
$$\Im\{x(t)\} = A\sin(\omega_0 t)$$

Portanto o sinal *x(t)* será periódico, com período $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Sinal Exponencial Contínua



$$x(t) = Ce^{\alpha t} = Ae^{j\omega_0 t}$$



$$\Re\{x(t)\} = A\cos(\omega_0 t)$$

$$\Im\{x(t)\} = A\sin(\omega_0 t)$$

Sinal Exponencial Discreta

$$x[n] = A\alpha^n$$

- Sendo α e A números reais:
  - $|\alpha| > 1$, resulta que a sequência |x[n]| é crescente
  - $|\alpha| < 1$, resulta que a sequência |x[n]| é decrescente
  - $\alpha > 0$, resulta que as amostras de x[n] terão todas o mesmo sinal de A.
  - $\alpha < 0$, resulta que as amostras de x[n] serão alternadamente positivas e negativas.

Sinal Exponencial Discreta

- Sendo $\alpha = e^{\jmath\omega_0}$ e $A = |A|e^{\jmath\phi}$:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= |A|e^{\jmath(\omega_0 n+\phi)} \\
&= |A|\cos(\omega_0 n+\phi) + \jmath|A|\sin(\omega_0 n+\phi)
\end{aligned}
$$

  - Por analogia com a função contínua, ω_0 chamar-se-á frequência da sinusóide complexa e ϕ a sua fase.

Periodicidade Temporal

- No caso discreto, a sequência exponencial complexa nem sempre é periódica:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= x[n+N] \\
|A|e^{\jmath(\omega_0 n+\phi)} &= |A|e^{\jmath[\omega_0(n+N)+\phi]} \\
&= |A|e^{\jmath[\omega_0 n+\phi]}e^{\jmath\omega_0 N}
\end{aligned}
$$

  - Portanto, só será periódica se.

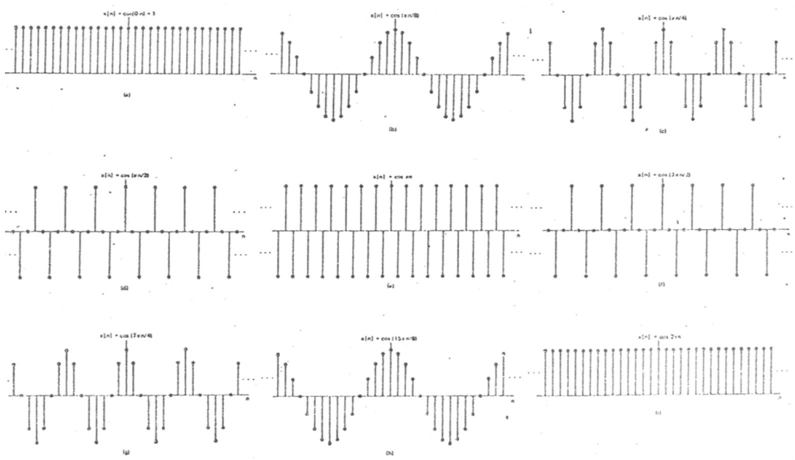
$$\omega_0 N = 2\pi k \Leftrightarrow N = \frac{2\pi k}{\omega_0}$$ onde N tem que ser inteiro

Periodicidade em Frequência

- No caso discreto, as exponenciais complexas com frequência (ω_0 + 2πr) são indistinguíveis entre si:

$$
\begin{aligned}
|A|e^{\jmath[(\omega_0+2\pi r)n+\phi]} &= |A|e^{\jmath(\omega_0 n+\phi)}e^{\jmath 2\pi r n} \\
&= |A|e^{\jmath(\omega_0 n+\phi)}
\end{aligned}
$$

Periodicidade em Frequência



Sequência para as frequências: 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, $7\pi/4$, $15\pi/8$, 2π.

Sistemas

- O que é um sistema ?
  - Um sistema pode ser definido como um processo que transforma sinais.
    - Este pode ser caracterizado como tendo um sinal de entrada e um sinal de saída que se relacionam pela transformação do sistema.
- Exemplo de transformações:
  - Compressão e descompressão de dados.
  - Encriptação e desencriptação.
  - Controlo de processos industriais: Controlo de fermentação.
  - Realçar parte de um sinal.
  - Nosso coração ?

Espaço de Funções

- Vimos que um sinal, x, é modelado como uma função matemática, logo terá um domínio, D, e um contradomínio, C.

$$x : D \longrightarrow C$$

- Se um sistema, S, aceitar à sua entrada sinais do tipo *x* podemos então dizer que o seu domínio é um ***espaço de funções*** ou ***espaço de sinais X*** a qual *x* pertence.
- Representaremos o espaço de funções como:

$$X : [D \longrightarrow C]$$

Prof. C. A. Silva – Processamento de Sinal

Sistemas como Funções

- Um sistema fará o mapeamento de um espaço de sinais noutro espaço de sinais.
  - Por exemplo:
    - Um microfone é um sistema que converte sinais acústicos em sinais eléctricos.

S: [Tempo $\rightarrow$ Pressão] $\rightarrow$ [Tempo $\rightarrow$ Tensão]

Sistemas Contínuos e Discretos

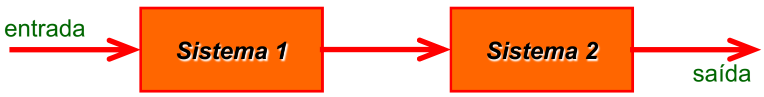
- Um sistema de tempo contínuo é um sistema que tem como domínio e como contra-domínio sinais em tempo contínuo.

$$C : [\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}] \longrightarrow [\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}]$$

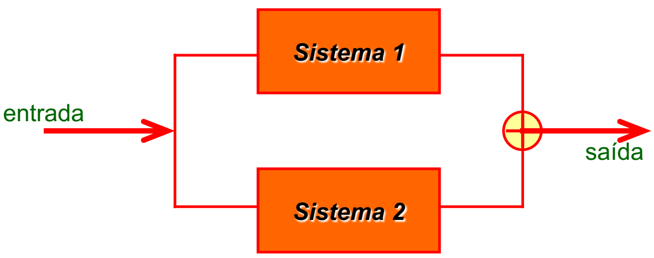
- Um sistema de tempo discreto é um sistema que tem como domínio e como contra-domínio sinais em tempo discreto.

$$D : [\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}] \longrightarrow [\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}]$$

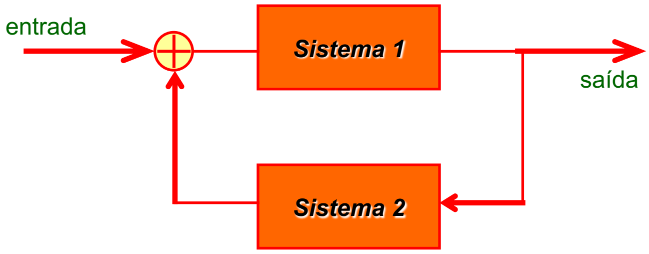
Associação em Cascata



Associação em Paralelo



Realimentação



Sistemas com e sem Memória

- Um sistema diz-se sem memória se o seu valor de saída, para um dado valor da variável independente, só depender da entrada nesse instante. *Exemplos ?*

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2x(t) + x^3(t) \\
y(t) &= x(t-1) \\
y(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \\
y[n] &= x[n-1] \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]
\end{aligned}
$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Sistema Invertível

- Um sistema é invertível se entradas distintas produzirem saídas distintas.
  - Se um sistema é invertível é possível encontrar um sistema inverso que ligado em cascata com o primeiro produz na sua saída a entrada original.

Sistema Invertível

- Qual será o sistema inverso ?

$$y(t) = 2x(t) \xrightarrow{\text{inverso}} z(t) = \frac{1}{2}y(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{\text{inverso}} z[n] = y[n] - y[n-1]$$

$$y(t) = x^2(t) \xrightarrow{\text{inverso}} \text{NÃO TEM}$$

Causalidade

- Um sistema diz-se causal se a saída num instante de tempo só depende das entradas presentes e passadas, ou seja o sistema não é antecipativo. *Exemplos ?*
  - Quais dos seguintes sistemas são causais ?

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x^2(t) \\
y(t) &= x(t) + x(t+1) \\
y(t) &= x(t) + y(t-1)
\end{aligned}
$$

Qual será a relação entre sistemas sem memória e sistemas causais ?

Estabilidade

- Um sistema é estável se todos os sinais de entrada limitados produzirem sinais de saída limitados.

$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \forall_n \longrightarrow |y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \forall_n$$

  - Quais dos seguintes sistemas são estáveis ?

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[n] \\
y[n] &= \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]
\end{aligned}
$$

Invariância

- Um sinal diz-se invariante no tempo, se uma translação do sinal de entrada resultar na mesma translação do sinal de saída.

$$T\{x[n]\} = y[n] \longrightarrow T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$$

  - Quais das seguintes relações representam sistemas invariantes ?

$$y(t) = x(2t)$$ **Não**

$$y(t) = \sin[x(t)]$$ **Sim**

$$y[n] = nx[n]$$ **Não**

Linearidade

- Propriedade de aditividade

$$\begin{aligned} T\{x_1[n]\} &= y_1[n] \\ T\{x_2[n]\} &= y_2[n] \\ T\{x_1[n]+x_2[n]\} &= y_1[n]+y_2[n] \end{aligned}$$

- Propriedade da homogeneidade

$$T\{x[n]\} = y[n] \longrightarrow T\{\alpha x[n]\} = \alpha y[n]$$

Um sistema diz-se linear se verificar simultaneamente as propriedades da aditividade e da homogeneidade