| 27/1/2020 recurso | Análise Complexa | FIS MIENGFIS |
|---|---|---|

1. *(2 valores)* Resolva as equações

$$z^3 = i \qquad \text{e} \qquad \cos(z) = -2\,.$$

$$z = e^{i\pi/6},\, e^{i5\pi/6},\, e^{i3\pi/2} \qquad \text{e} \qquad z = \pi \pm i\, \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + 2\pi n \qquad \text{com } n \in \mathbb{Z}\,.$$

2. *(2 valores)* Verifique se a seguinte função, definida em $\mathbb{C}$, é holomorfa:

$$f(x+iy) = e^y \cos x + i\, e^y \sin x\,.$$

Não é holomorfa, pois é a função $f(z) = e^{i\overline{z}}$, e portanto $\overline{\partial} f(z) = i\, f(z) \neq 0$.

3. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

ao longo do contorno $\gamma = \{z(t) = e^{-it} \;:\; t \in [0,\pi]\}$.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = -\pi i\,.$$

4. *(2 valores)* Determine as série de Laurent centradas em $p = 0$, e os respetivos aneis de convergência, da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z}\,.$$

$$f(z) = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots \qquad \text{se} \quad 0 < |z| < 1$$

e

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} + \dots \qquad \text{se} \quad |z| > 1$$

5. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas e calcule os respetivos resíduos da função

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2+z}$$

A função $f(z)$ tem uma singulariade removível em 0 e um pólo simples em $-1$, com $\mathrm{Res}(f,-1) = \sin(1)$.

6. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+z}\, dz\,.$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+z}\, dz = 2\pi i \sin(1)\,.$$

7. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{x^2+9}\, dx\,.$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{x^2+9}\, dx = \frac{\pi}{6}\cos 6\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de cosenos $a_0/2 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(nx)$ da função definida, no intervalo $[0,\pi]$, por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{se } \ \pi/2 < x \le \pi \end{cases} \,,$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_n \frac{\sin(n\pi/2)}{n}\cos(nx) \\ &\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{7}\cos(7x) + \dots\right)\,. \end{aligned}$$

9. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

no intervalo $x \in [0,\pi]$ com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \ge 0$, e condição inicial $u(x,0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 8).

$$\begin{aligned} u(x,t) &\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\pi/2)}{n}\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx) \\ &\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(e^{-t}\cos(x) - \frac{1}{3}e^{-9t}\cos(3x) + \frac{1}{5}e^{-25t}\cos(5x) - \frac{1}{7}e^{-49t}\cos(7x) + \dots\right)\,. \end{aligned}$$

10. *(2 valores)* Sabendo que a transformada de Fourier da gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$ é $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$, calcule as transformadas de Fourier das funções

$$f(x) = x^2 e^{-\pi x^2} \qquad \text{e} \qquad h(x) = e^{-\pi(x-1)^2}\,.$$

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi} - \xi^2\right) e^{-\pi\xi^2} \qquad \text{e} \qquad \widehat{h}(\xi) = e^{-\pi\xi^2 - i2\pi\xi}\,.$$