19/06/2019 recurso	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	FIS MIENGFIS

Nome ....**N**^{o} .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$.

$$x(t) = e^{-2t}\left(\cos(t) + 3\sin(t)\right) .$$

2. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea $\ddot{x} - \dot{x} = t^2$.

$$x(t) = -2t - t^2 - \frac{1}{3}t^3 .$$

3. *(2 valores)* Considere, no espaço euclidiano real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canónico, a reflexão $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na reta $y = 3x$. Determine os valores e os vetores próprios de R.

   Os valores próprios são $\lambda_\pm = \pm 1$, e vetores próprios são $\mathbf{v}_+ = (1, 3)$ e $\mathbf{v}_- = (3, -1)$, respetivamente.

4. *(2 valores)* Diagonalize, se possível, a matriz complexa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} ,$$

   ou seja, determine uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível U tais que $\Lambda = U^{-1}AU$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *(2 valores)* Identifique a matriz simétrica da forma quadrática

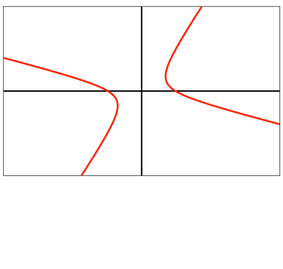
$$Q(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2 ,$$

   determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} U^\top \qquad \text{onde} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 12 = 0 .$$



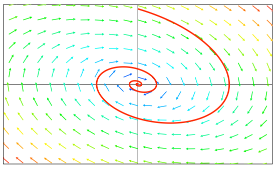
7. *(2 valores)* Se a matriz quadrada real A é simétrica (ou seja, $A^\top = A$) então e^A é ortogonal. Verdadeiro ou falso? Justifique.

   Falso. Por exemplo, a matriz identidade I é simétrica, mas $e^I = eI$ não é ortogonal.

8. *(2 valores)* Calcule o grupo a um parâmetro das matrizes $G(t) = e^{tE}$, com $t \in \mathbb{R}$, gerado pela matriz
$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$e^{tE} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

9. *(2 valores)* Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas órbitas) do sistema de EDOs
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - y \end{aligned}$$



10. *(2 valores)* Determine a solução (ou, pelo menos, uma fórmula integral para a solução) com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (0, 0)$ do sistema não homogéneo
$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q + e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left(\int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds \right).$$