Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

• **Fluido** – Substância que pode escoar. Quando se movem, os fluídos deformam-se continuamente. A razão de poderem escoar está ligado ao facto de não suportarem forças tangenciais (que estão ligadas à viscosidade).

• Podem ser gases ou líquidos, dependendo das forças de coesão entre as moléculas.

• À escala macroscópica, as propriedades dos fluídos (pressão, volume, densidade, etc) variam de uma forma contínua ao longo deles.
• Podem ser considerados meios contínuos.
• Pode usar-se o cálculo diferencial e integral para a análise dos fluídos.

i) Em repouso – Hidrostática   ii) Em movimento – Hidrodinâmica

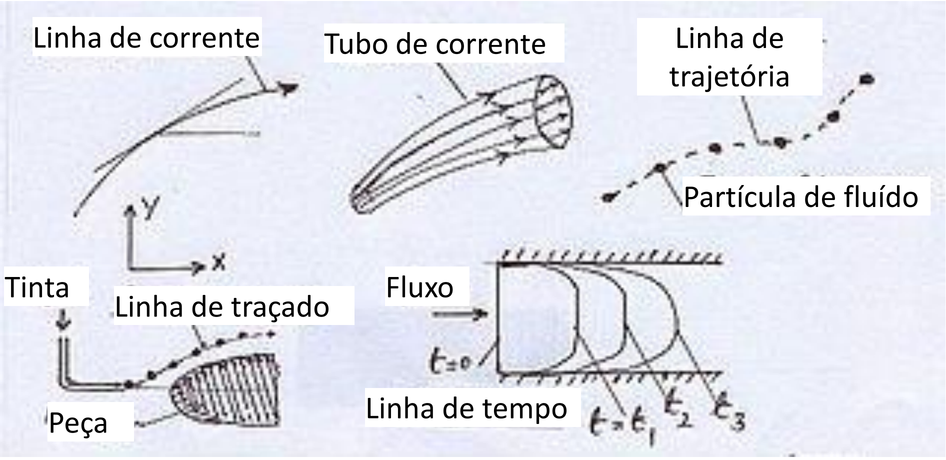
• Campos:
• Cada partícula de fluído irá ter uma velocidade dada por $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ onde $\vec{r}$ é a posição da partícula de fluído.
• $\vec{v}(\vec{r},t)$ é A velocidade é a velocidade do centro de massa do conjunto de moléculas que foram a partícula de fluído. Ela forma um campo de velocidades definido em cada ponto do espaço e do tempo.
• Da mesma forma, as pressões e densidades encontram definidos em todos os pontos do espaço e do tempo, formando os campos $P(\vec{r},t)$ e $\rho(\vec{r},t)$.

• Como o vetor deslocamento é $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0$, onde $\vec{r}_0$ é constante, então:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt}}$$

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Visualização de campos (velocidade, posição, etc) num fluído
- Linha de corrente – A velocidade num dado instante é tangente às linhas de corrente.
- As linhas de corrente nunca se intersectam, mas podem mudar no tempo.
- Uma vez que para diferentes instantes do tempo o padrão das linhas de corrente pode mudar (esse padrão depende do tempo), as linhas de corrente não têm que corresponder, no caso geral, à trajetória das partículas.
- Linha de trajetória – é o caminho realmente percorrido por um elemento de fluido ao longo do tempo.
- Linha de traçado – É o caminho percorrido por um corante, ou semelhante, largado a partir de um ponto do fluído (fumo, corante, ...). Destina-se à visualização de escoamentos.
- Escoamento estacionário – Velocidade e pressão são constantes em cada ponto (independentes do tempo), embora possam diferentes em pontos diferentes.
- Num escoamento estacionário as linhas de corrente, de trajetória e de traçado são iguais.



Omarskhan, Wikimedia

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

• Tempo:

• Escoamento estacionário – Velocidade e pressão são constantes em cada ponto (independente do tempo), embora possam ser diferentes em pontos diferentes. Ou seja, tem-se $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ e $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$; para a pressão: $\frac{dP}{dt} = 0$ e $P = P(\vec{r})$ (dependem de $\vec{r}$, mas não de t).

• Escoamento não estacionário – Velocidade e pressão em cada ponto do fluído dependem do tempo, ou seja: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ e $P = P(\vec{r}, t)$ (dependem de $\vec{r}$ e t).

• Trajetória

• Escoamento turbulento – Partículas apresentam trajetórias irregulares, não paralelas, formando curvas, que variam no tempo. Há formação de vórtices.

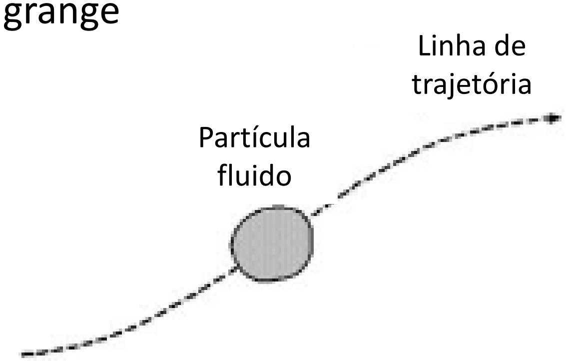
• Escoamento laminar – Partículas descrevem trajetórias paralelas.

• Escoamento uniforme – Escoamento estacionário em que a velocidade é igual em todos os pontos de cada linha de trajetória (embora possa ser diferente para linhas de trajetória diferentes).

• Escoamento rotacional/irrotacional – Em que as partículas podem rodar ou não em torno do seu centro de massa.

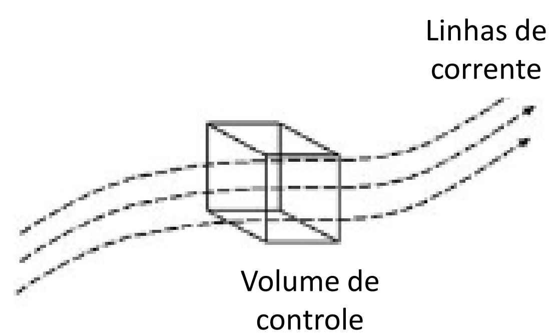
- Estudos em dinâmica dos fluídos
- Vetor deslocamento -> $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0$
- Método de Euler – Volume de controlo. Observador num ponto fixo. É observado escoamento através do volume de controlo
- Método de Lagrange – Observador acompanha o movimento da partícula de fluído ela própria (matéria), dependendo da posição inicial $\vec{r}_0$.
- Euler -> campos dependem de $\vec{r}$ e t. Lagrange -> campos dependem de $\vec{r}_0$ (posição inicial) e t.
- É comum em fluídos utilizar-se a formulação de Euler.

Lagrange



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t); A = A(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t)$$

Euler



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t); A = A(\vec{r}, t)$$

Onde $\vec{F}$ é um campo vetorial (ex: velocidade) e A é um campo escalar (ex: pressão).
Válido para um tensor em geral.

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Derivada material (relação entre formulações Euler e Lagrange)
- Considere-se um campo $\vec{F}(\vec{r}, t)$
- $\vec{r}$ pode ele próprio depender de t.
- O exemplo aqui efetuado é para um campo vetorial, mas para campo escalar ou para um campo tensorial em geral o desenvolvimento é o mesmo.

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\hat{e}_y + \\ + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\hat{e}_z$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \left(v_x\frac{\partial F_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial F_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(v_x\frac{\partial F_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial F_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{e}_y + \\ + \left(v_x\frac{\partial F_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial F_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\hat{e}_z$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla F_x)\hat{e}_x + (\vec{v} \cdot \nabla F_y)\hat{e}_y + (\vec{v} \cdot \nabla F_z)\hat{e}_z$$

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Derivada material (relação entre formulações Euler e Lagrange)

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{F}$$

Campo vetorial

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla A$$

Campo escalar

$$\frac{dT_{ij\ldots}}{dt} = \frac{\partial T_{ij\ldots}}{\partial t} + v_k \frac{\partial T_{ij\ldots}}{\partial x_k}$$

Campo tensorial (caso geral)

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)}$$

→ Derivada material →

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$$

Notação comum usada na literatura.

$\vec{F}(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t)$

Lagrange (material)

$\vec{F}(\vec{r}, t)$

Euler (espacial)

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{F}$$

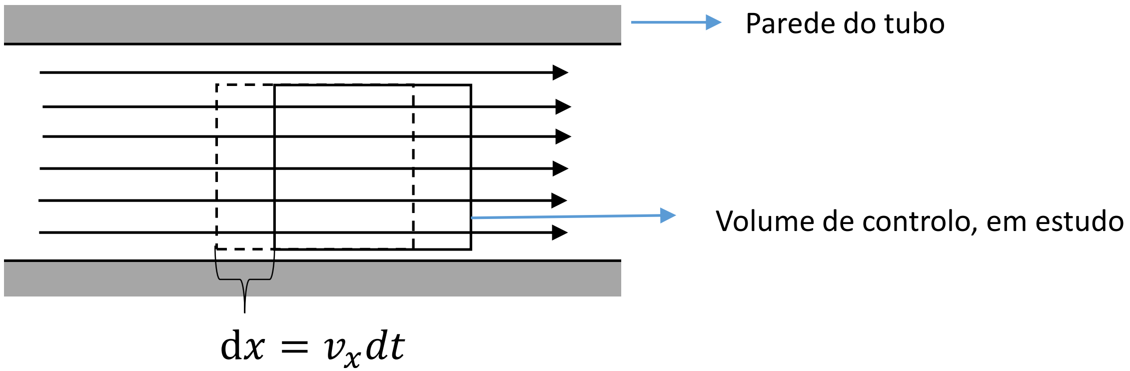
Taxa de variação de $\vec{F}$ no interior da partícula de fluído que, no instante t está a passar no volume de controlo.

Termo de convexão (ou advecção, ou inércia). Relacionado com o fluxo líquido de $\vec{F}$ através da superfície do volume de controlo, no instante t.

Variação local de $\vec{F}$. Relacionado com taxa de variação de $\vec{F}$ no interior do volume de controlo, no instante *t*.

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Equação da continuidade. Conservação da massa.
- Considere-se uma superfície de controlo, fechada, numa região do fluído.
- Como a massa se conserva, a massa que entra nessa região ou é igual à que sai, ou então acumula-se no volume de controlo.



- A massa que entra no volume de controlo no intervalo *dt* é: $m_{entra} = \rho\vec{v}dt \cdot \vec{S}_{entra}$
- A massa que sai do volume de controlo no intervalo *dt* é: $m_{sai} = \rho\vec{v}dt \cdot \vec{S}_{sai}$

Superfícies por onde entra ou por onde sai o fluído no volume de controlo.

- Consequentemente, a variação da massa no volume de controlo é:

$$dm = -(m_{sai} - m_{entra}) = -\rho\vec{v}dt \cdot d\vec{S}$$

Se sai (entra) mais massa do que entra (sai), então a variação da massa no volume de controlo é negativa (positiva). Daí o sinal menos em *dm*.

$d\vec{S}$ é sobre toda a superfície fechada em torno do volume de controlo.

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Equação da continuidade. Conservação da massa.
- A diferença entre a massa que sai e a que entra no volume de controlo não é zero, pois pode acumular-se massa dentro dele.
- A taxa (massa por unidade de tempo) a que isso acontece é:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho dV\right) = -\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

- Logo:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v})dV$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right) dV = 0$$ → Equação da continuidade, global

- Como a equação anterior tem que ser válida para qualquer volume de controlo, então:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0}$$ → Equação da continuidade

Para fluído incompressível

- Se o fluído é incompressível -> ρ = Constante -> $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ -> $\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0$ -> $\boxed{\nabla\cdot\vec{v} = 0}$

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Caudal.
- Caudal mássico Q_m.
- Caudal volúmico Q_V.

$$Q_M = \frac{massa\ que\ passa\ por\ uma\ superfície}{tempo} \Rightarrow \boxed{Q_M = \frac{dM}{dt}}$$

Caudal mássico

$$Q_V = \frac{volume\ que\ passa\ por\ uma\ superfície}{tempo} \Rightarrow \boxed{Q_V = \frac{dV}{dt}}$$

Caudal volúmico

$$Q_M = \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_M dm = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

$$Q_M = \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_M dm = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

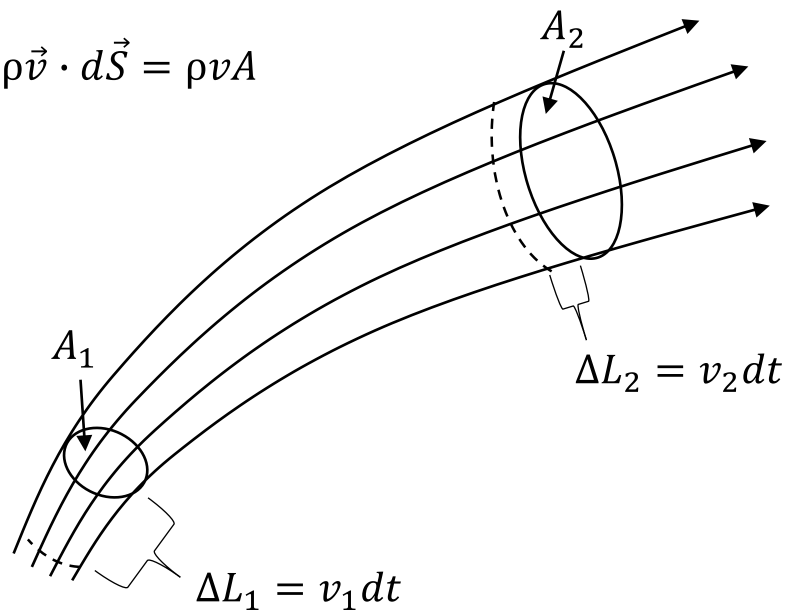
$$\boxed{Q_M = \int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}}$$

$$\boxed{Q_V = \int_S \vec{v}\cdot d\vec{S}}$$

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Caudal. Escoamento estacionário.

$$Q_M = \int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho v A$$



Tubo de corrente

$$Q_{M1} = \rho_1 v_1 A_1$$

$$Q_{M2} = \rho_2 v_2 A_2$$

- Escoamento estacionário. Linhas não se cruzam e mantém-se fixas no tempo (velocidade é constante em cada ponto). Todas têm que atravessar áreas transversais tubos de corrente.
- Conservação do caudal:

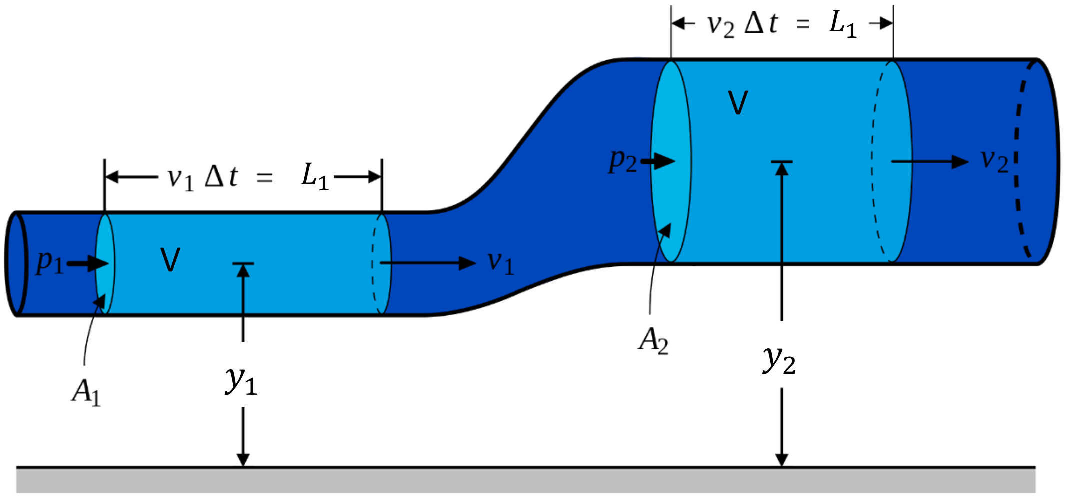
$$\boxed{\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2}$$

- Incompressível ($\rho = const$ -> $\rho_1 = \rho_2$):

$$\boxed{v_1 A_1 = v_2 A_2}$$

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Equação de Bernoulli.
- Escoamento estacionário. Fluído incompressível e sem viscosidade. Sem transferência de calor.
- Energia mecânica -> $E_m = E_c + E_p + W_{Fp}$. Conservação de energia -> $E_{m1} = E_{m2}$:



$$F_1L_1 + mgy_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = F_2L_2 + mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Ao longo de uma linha de corrente

$$\frac{F_1}{A_1}L_1A_1 + \rho Vgy_1 + \frac{1}{2}\rho Vv_1^2 = \frac{F_2}{A_2}L_2A_2 + \rho Vgy_2 + \frac{1}{2}\rho Vv_2^2 \qquad V = L_1A_1 = L_2A_2$$

$$\boxed{P_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

Equação de Bernoulli

$$\boxed{P + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = const}$$

Mecânica dos Fluidos – Dinâmica de Fluídos

- Campo de acelerações no fluído.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Utilizando a derivada material aplicada à velocidade. → $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$
- Obtém-se para a aceleração:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

- Tínhamos visto que a densidade de resultante das forças é (2ª lei Newton): $\vec{f}_R = \rho \vec{a}$
- Substituindo a aceleração na resultante das forças:

$$\boxed{\vec{f}_R = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}}$$

Equação de Cauchy

- Para um fluído sem viscosidade e incompressível: $\vec{f}_R = \rho \vec{g} - \nabla P$
- Tem-se então a equação do movimento:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{g} - \frac{\nabla P}{\rho}}$$

Equação de Euler

Para escoamento estacionário

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{g} - \frac{\nabla P}{\rho}$$