1.2.8 – Método geral de análise de circuitos. Resposta em frequência.

Vimos anteriormente que era muito mais fácil estudar o comportamento de uma rede linear em corrente alternada sinusoidal, fazendo uma correspondência biunívoca entre as grandezas sinusoidais e o seu fasor (Amplitude complexa)

$$x(t) \quad \leftrightarrow \quad \overline{X}$$

Podemos fazer o estudo de uma rede linear para outros tipos de excitação, usando a transformada de Laplace que estabelece uma correspondência biunívoca entre uma função no tempo e a sua transformada

$$x(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s)$$

onde **s=σ + jω** designa-se por frequência complexa.

A transformada de Laplace de x(t) define-se como

$$X(s) \equiv L[x(t)] \equiv \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

e possui as seguintes propriedades:

$$L\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = s.X(s) - x(0) \qquad L\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s)$$

Considerando condições iniciais nulas, as relações tensão-corrente para os vários elementos escrevem-se agora genericamente como

Resistência: $v(t) = R \cdot i(t)$ $\qquad V(s) = R \cdot I(s)$

Indutância: $v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$ $\qquad V(s) = s \cdot L \cdot I(s)$

Condensador: $v(t) = \frac{1}{C}\int i dt$ $\qquad V(s) = \frac{1}{s \cdot C} I(s)$

Para uma rede eléctrica biporto, com uma excitação x(t) na entrada e uma resposta y(t) na saída, designa-se por função de transferência a relação

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

A função de transferência pode ser expressa como o quociente de dois polinómios em função de s,

$$H(s) = K\,\frac{(s+z_1)\ldots(s+z_n)}{(s+p_1)\ldots(s+p_n)}$$

As raízes do numerador e denominador designam-se respectivamente por **zeros** (z_1,.., z_n) e **pólos** (p_1,.., p_n) da função de transferência, respectivamente.

A função de transferência contém toda a informação sobre o funcionamento da rede. Assim se H(s) é conhecida a resposta y(t) da rede a uma excitação x(t) obtém-se de

$$y(t) = L^{-1}\left[H(s) \cdot X(s)\right]$$

Os dois tipos de excitação que estudamos até agora surgem como casos especiais:

- **Corrente contínua,** fazendo s=0 em H(s)

$$y(t) = H(0) \cdot x(t)$$

- **Corrente alternada sinusoidal,** fazendo s=jω em H(s)

$$\overline{Y} = H(j\omega) \cdot \overline{X}$$

designado-se **H(jω)** neste caso por **Resposta de frequência** da rede.

A **resposta em frequência** pode escrever-se como

$$H(j\omega) = K\frac{(j\omega)^{\pm 1}(j\omega + z_1)\ldots(j\omega + z_n)}{(j\omega + p_1)\ldots(j\omega + p_n)} = K_1\frac{(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega/z_1)\ldots(1 + j\omega/z_n)}{(1 + j\omega/p_1)\ldots(1 + j\omega/p_n)}$$

A qual se pode escrever na forma polar: $H(j\omega) = |H(j\omega)|\,e^{j\angle H(j\omega)}$

- **Característica de amplitude** $$|H(j\omega)| = K_1\frac{(\omega)^{\pm 1}\left|1 + {j\omega}/{z_1}\right|\ldots\left|1 + {j\omega}/{z_n}\right|}{\left|1 + {j\omega}/{p_1}\right|\ldots\left|1 + {j\omega}/{p_n}\right|}$$

- **Característica de fase** $$\angle H(j\omega) = \pm\frac{\pi}{2} + \angle\left(1 + {j\omega}/{z_1}\right) + \ldots + \angle\left(1 + {j\omega}/{z_n}\right)$$ $$- \angle\left(1 + {j\omega}/{p_1}\right) - \ldots - \angle\left(1 + {j\omega}/{p_n}\right)$$

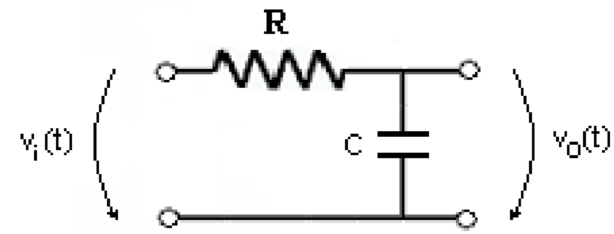
Os **diagramas de Bode** são uma representação gráfica das características de amplitude (Ganho) e de fase em função da frequência, em escala logarítmica. O ganho é igualmente expresso numa escala logarítmica em **decibel** (dB)

$$\left|H(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|H(j\omega)\right|$$

$\left\|H(j\omega)\right\|$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100	1000
$\left\|H(j\omega)\right\|_{dB}$	0	3	6	20	40	60

Para grande parte das aplicações é suficiente uma representação aproximada da resposta em frequência, designada por **diagrama de Bode assimptótico**. Os termos devido aos zeros e pólos são aproximados por segmentos de recta, tomando os limites assimptóticos destes termos para baixas e altas frequências, permitindo o esboço rápido dos diagramas de Bode.

Exemplo: Determinar a resposta em frequência do circuito.



Supondo que v_i é sinusoidal, podemos usar os métodos de estudo de circuitos de CA para obter v_0

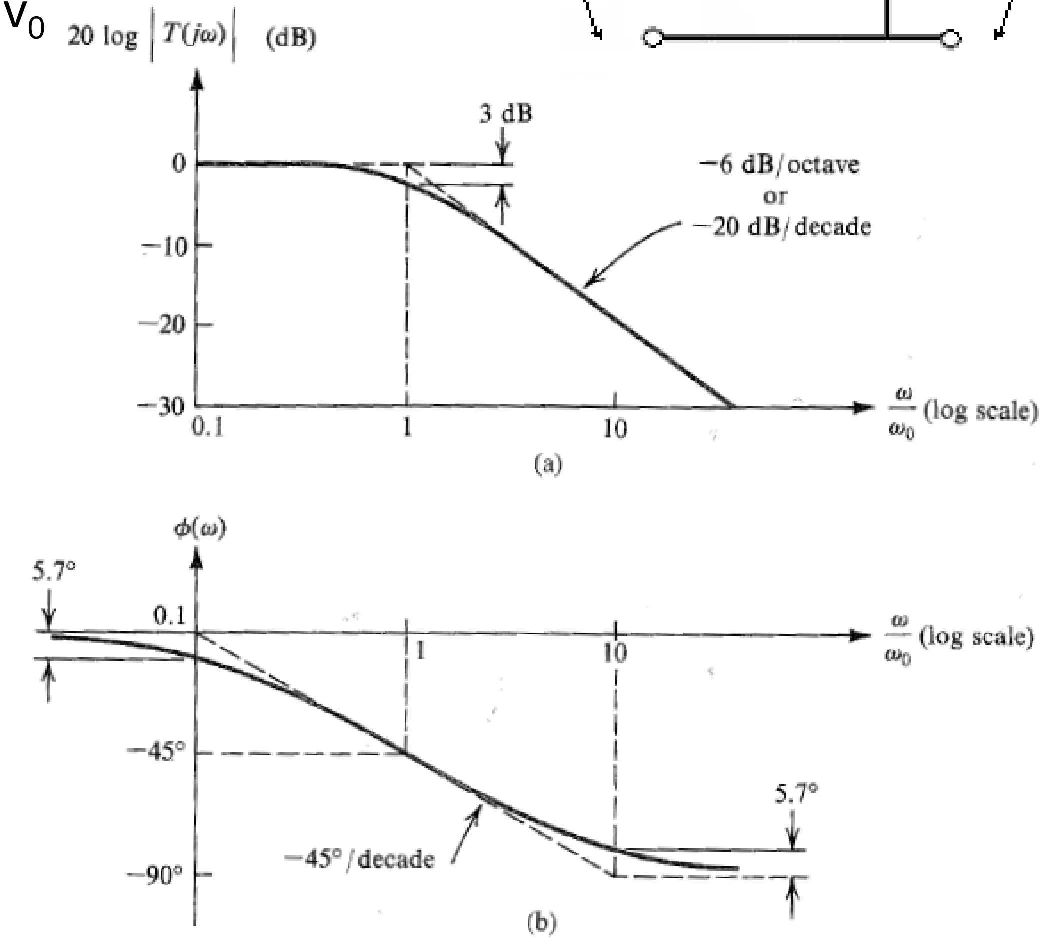
$$\bar{V}_0 = \frac{\bar{V}_i (j\omega C)^{-1}}{\left(R + (j\omega C)^{-1}\right)} = \frac{\bar{V}_i}{(1 + j\omega RC)}$$

A resposta em frequência é:

$$T(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \frac{1}{(1 + j\omega RC)} = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_0)}$$

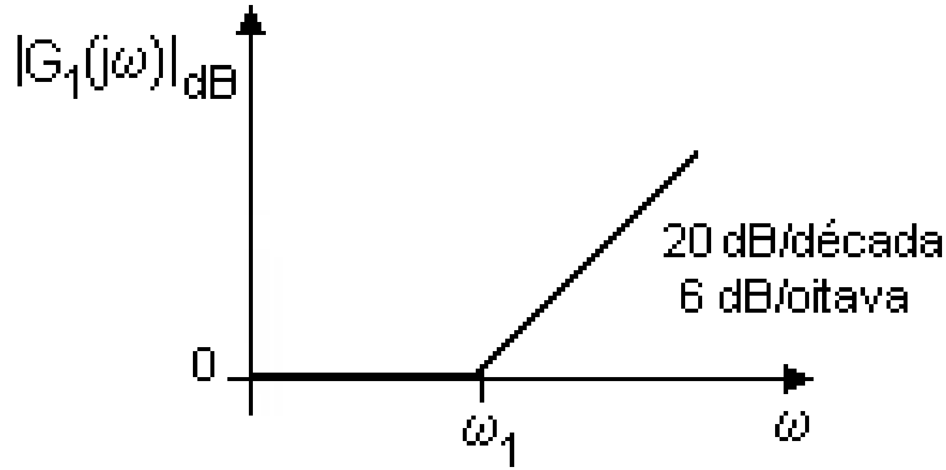
onde $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \quad \text{e} \quad \phi(\omega) = -arctg(\omega/\omega_0)$$



Exemplo: Diagrama de Bode assimptótico de um zero de H(jω): $G_1(j\omega) = \left(1 + {j\omega}/{z_1}\right)$

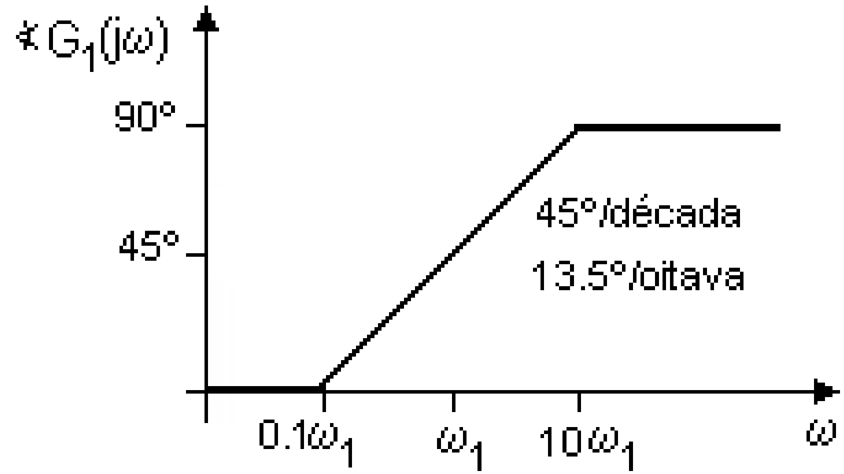
$$|G_1(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_1 \\ 20\log\left({\omega}/{\omega_1}\right), & \omega > \omega_1 \end{cases}$$



A amplitude cresce de um factor igual a 20 dB por cada aumento de 10 (década) na relação ω/ω_1, originando uma recta com declive 20 dB/década no diagrama de Bode. Por vezes o declive exprime-se em oitavas, representando uma oitava um factor de 2 na relação ω/ω_1.

$$\angle G_1(j\omega) = \arctan\left(\omega/\omega_1\right)$$

$$= \begin{cases} 0^{\circ}, & \omega < 0.1\omega_1 \\ \dfrac{\pi}{4}\left(1+\log\left(\omega/\omega_1\right)\right), & 0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \omega > 10\omega_1 \end{cases}$$



A fase é quase nula para frequências $\omega<0.1\omega_1$, sendo igual a 45º para $\omega=\omega_1$ e de 90º para $\omega>10\omega_1$. Estes resultados conduzem à aproximação rectilínea com declive de 45º/década, usada para fase na gama de frequências $0.1\omega_1 > \omega > 10\omega_1$.

O desvio máximo da curva assimptótica de amplitude em relação à curva exacta ocorre para a frequência de transição $\omega = \omega_1$, sendo o erro de 3dB (- 3dB no caso dos pólos reais). O erro máximo na curva assimptótica de fase ocorre à distância de uma década da frequência de canto, sendo de cerca de 6º. No caso de zeros e pólos complexos os erros envolvidos na aproximação assimptótica são mais elevados, não devendo esta ser usada para estes termos.

O traçado do diagrama de Bode começa pela factorização de $H(j\omega)$, exprimindo-se em seguida a amplitude $|H(j\omega)|$ em dB. Deste processo resulta que as curvas de amplitude e de fase vão ser compostas pela soma das contribuições individuais dos zeros e pólos. Basta depois localizar as frequências de transição e representar as assimptotas de cada zero e pólo. Por fim somam-se as componentes assimptóticas de todos os termos, para obter o resultado final.

O **diagrama de Bode assimptótico** usa-se assim sobretudo quando os zeros e polos são reais e estão afastados entre si, pois se estiverem sobrepostos os erros envolvidos também se adicionam limitando a validade do diagrama de Bode.

Exemplo: Esboçar o diagrama de Bode assimptótico da resposta em frequência

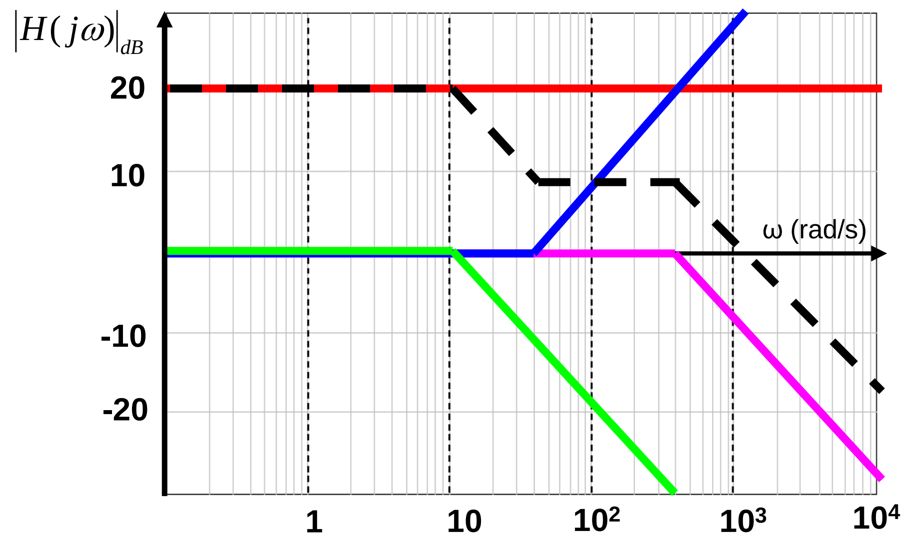
$$H(j\omega)=\frac{10^3(j\omega+40)}{\left((j\omega)^2+410j\omega+4000\right)}$$

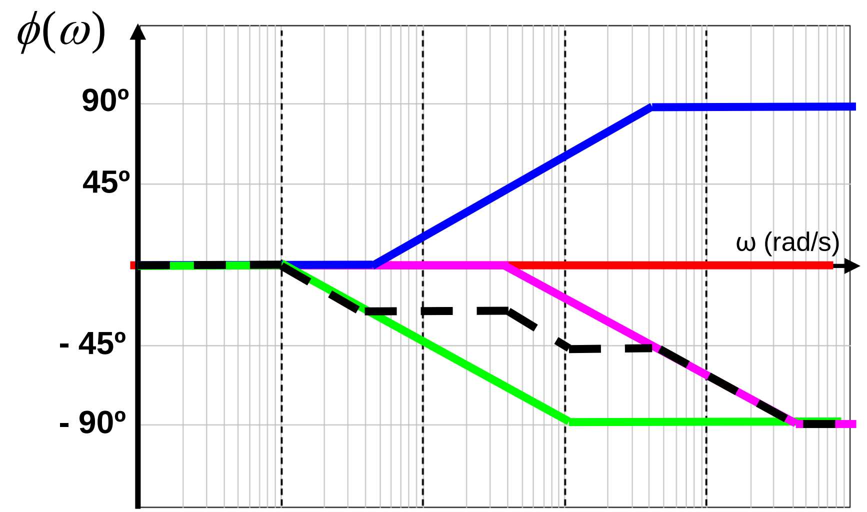
Factorizando H($j\omega$):

$$H(j\omega)=\frac{10(1+j\omega/40)}{(1+j\omega/10)(1+j\omega/400)}$$

O factor constante (10) representa um ganho de 20 dB.

A frequência de canto do zero é 40 rad/s e as frequências de canto dos pólos são 10 rad/s e 400 rad/s.





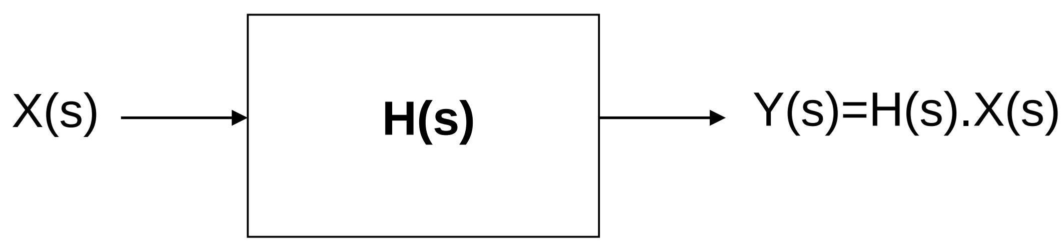
1.3 - Conceito de sistema

A palavra **sistema** vem do grego e significa “juntar as partes”.

Qualquer sistema pode ser descrito em termos de um conjunto de unidades funcionais (caixa pretas), cada uma delas agrupando um determinado número de componentes, e desempenhando uma determinada função.

Estas caixas pretas são descritas pela sua função e por um conjunto de características operacionais, e não pelos seus componentes ou método utilizado para que cumpram a sua função.

A função de um bloco ou de um sistema é representada pela sua função de transferência H(s).



1.3.1 – Representação de sistemas. Diagrama de blocos.

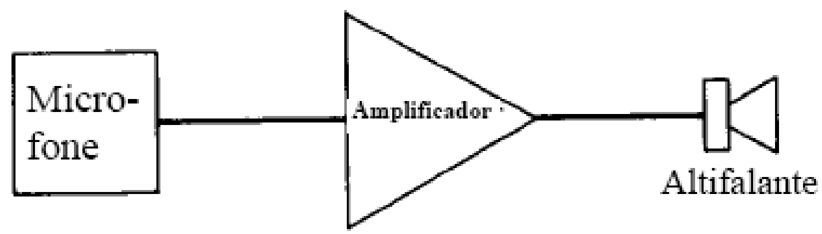
O diagrama de blocos é uma representação esquemática de um sistema, em termos das várias unidades funcionais (blocos ou caixas pretas) que o constituem, sendo cada uma delas descrita pela sua função de transferência.

Num diagrama de blocos considera-se que:

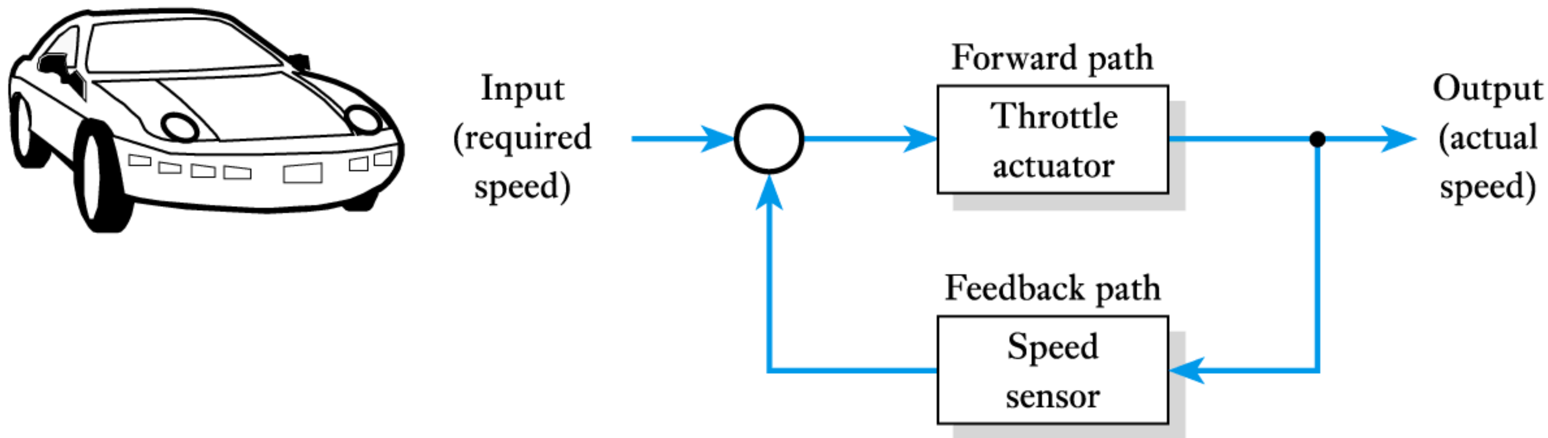
- Cada bloco é um **elemento unilateral**, quer dizer que a transmissão de informação faz-se num único sentido, da entrada para a saída.
- A função de um bloco não é alterada quando outros blocos lhe são ligados.

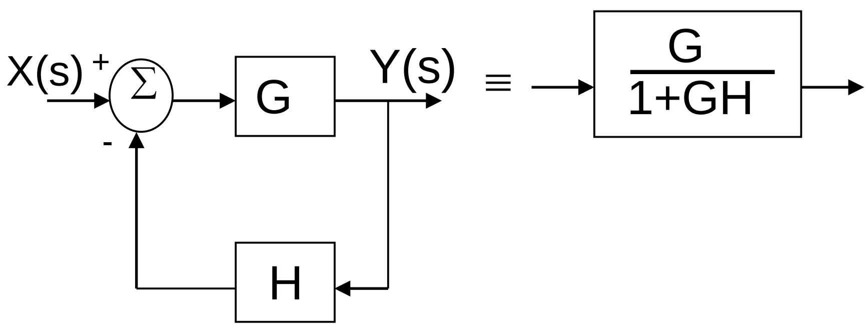
Sistema de malha aberta

$$\rightarrow \boxed{G} \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \; \equiv \; \rightarrow \boxed{GH} \rightarrow$$



Sistema de malha fechada ou realimentado





G, é o ganho de malha aberta.

GH , é o ganho de retorno

$\dfrac{\mathbf{G}}{\mathbf{1+GH}}$ **,** ganho de malha fechada

Tipos de realimentação

– Se GH é negativo

e é menor do que 1 então $(1 + GH) < 1$

Neste caso $G/(1+GH) > G$ e temos realimentação positiva

– Se GH é positivo

Então $(1 + GH) > 1$

Neste caso $G/(1+GH) < G$ e temos realimentação negativa

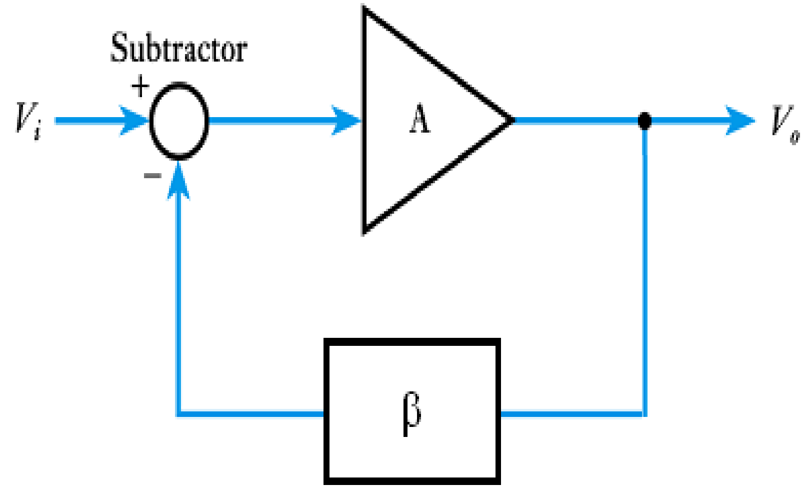
Se $GH \gg 1$

$$\frac{G}{1+GH} \approx \frac{G}{GH} = \frac{1}{H}$$

- O ganho é independente do ganho de malha aberta

Estabilidade e critério de Barkhausen.

O uso de realimentação pode dar origem a que o sistema se torne instável.



$$G = \frac{A}{1 + A\beta}$$

Se $A\beta=-1$ (realimentação positiva) o ganho do sistema torna-se infinito, produzindo um sinal de saída mesmo que a entrada $V_i=0$, dizendo-se que entrou em oscilação.

Assim para um sistema entrar em oscilação (critério de Barkhausen) temos:

- O módulo de Aβ deve ser 1.
- A fase de Aβ deve ser igual 180º

1.3.5 – Especificações de sistemas.

As especificações reflectem a qualidade de um sistema.

- **Gama de utilização,** valores máximos e mínimos admissíveis de uma dada variável de funcionamento do sistema.

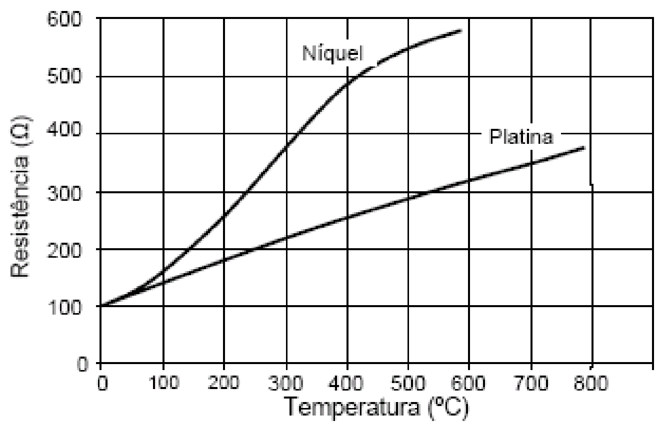
- **Sensibilidade**, entende-se como a variação da saída por unidade de variação da entrada, ou de outro parâmetro (temperatura ambiente, etc).

- **Linearidade**, é o desvio máximo da função de transferência do sistema de uma linha recta.

Exemplo: Característica de resistência vs temperatura para dois sensores (Níquel e platina).

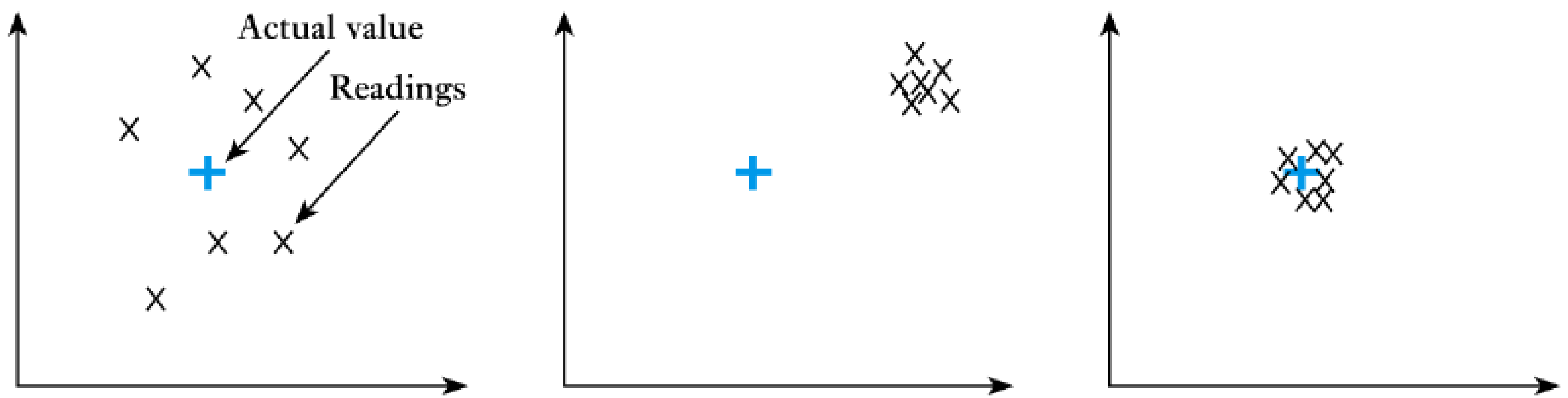
a) Qual o que apresenta melhores características de linearidade?

b) Qual o que tem maior sensibilidade?



- **Exactidão**, é uma medida do desvio do valor indicado pelo sistema em relação ao valor real. Pode ser controlada fazendo a calibração do sistema.

- **Precisão**, é uma medida da repetibilidade dos valores indicados pelo sistema quando é usado em condições equivalentes. Exprime-se, em geral, como uma percentagem da gama de utilização, do valor lido ou do fim de escala.



(a) Low precision, low accuracy

(b) High precision, low accuracy

(c) High precision, high accuracy

• **Resolução ou discriminação**, define-se como sendo a variação mais pequena na entrada (saída) que o sistema é capaz de distinguir (produzir).

• **Nível de ruído.** Todos os dispositivos electrónicos produzem ruído que se sobrepõe à entrada do sistema. A potência de ruído de origem térmica está relacionada com a temperatura do sistema (T) e com a sua largura de banda (B),

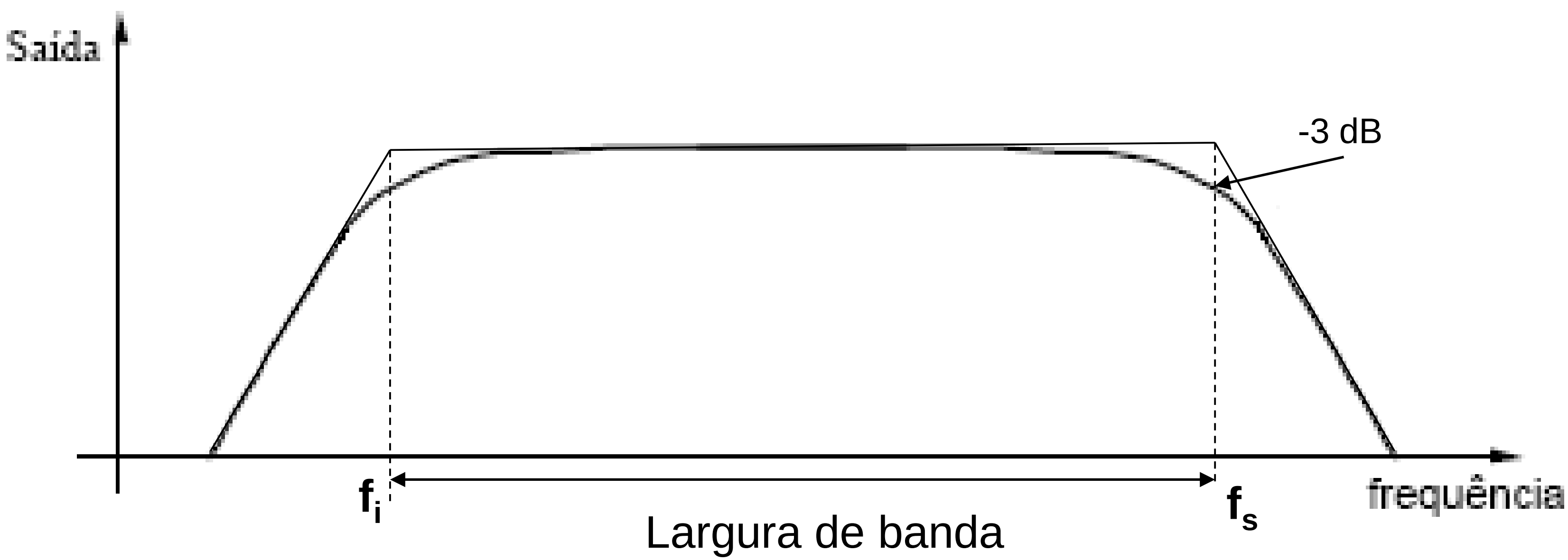
$$P_r = 4kTB$$

Em geral é especificada o valor eficaz da tensão de ruído:

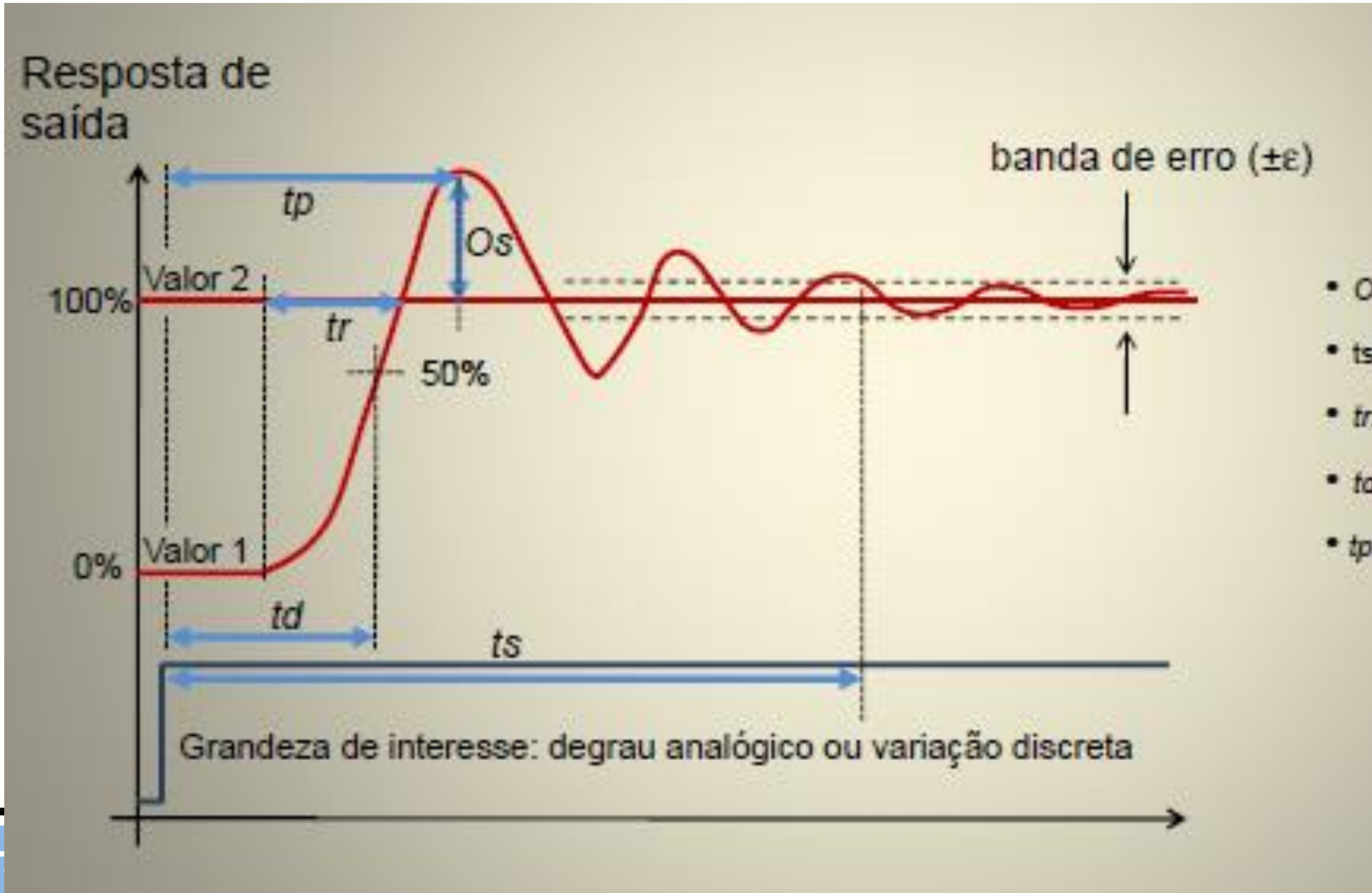
$$V_n = \sqrt{4kTBR}$$

- **Resposta em frequência**, é especificada normalmente em termos da gama de frequências útil do sinal de entrada que é possível processar. As frequências limite são aquelas para as quais a saída diminui 70,7% (-3dB) em relação à saída máxima.

- A diferença entre os limites superior (f_s) e inferior (f_i) de frequência, designa-se por **largura de banda do sistema**.



- **Resposta no tempo,** o tempo de resposta (t_r) de um sistema define-se como o intervalo de tempo que decorre enquanto o sinal de saída, y(t), varia entre 10% e 90% do valor final em resposta a uma **entrada em pulso**, x(t), e está relacionado com a frequência superior de corte do sistema.



$$t_r \approx \frac{0.35}{f_s}$$

1.3.2 – Amplificadores

A amplificação é a operação de processamento mais frequente, uma vez que os sensores em geral produzem sinais de pequena amplitude.

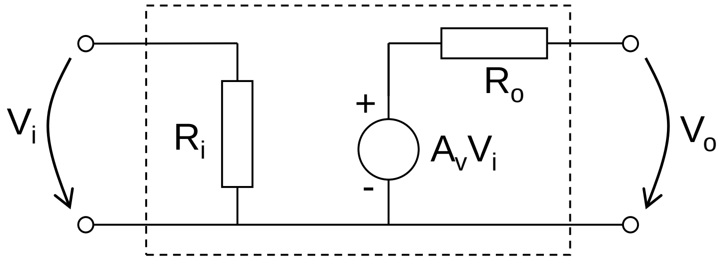
A amplificação de um sistema é descrita pelo seu ganho, que se define como sendo a razão entre a saída e a entrada. Consoante a grandeza eléctrica usada pode-se definir três tipos de ganho:

$$A_v = \frac{V_o}{V_i}$$ Ganho de tensão

$$A_i = \frac{I_o}{I_i}$$ Ganho de corrente

$$A_p = \frac{P_o}{P_i}$$ Ganho de potência

Circuito equivalente de um amplificador de tensão



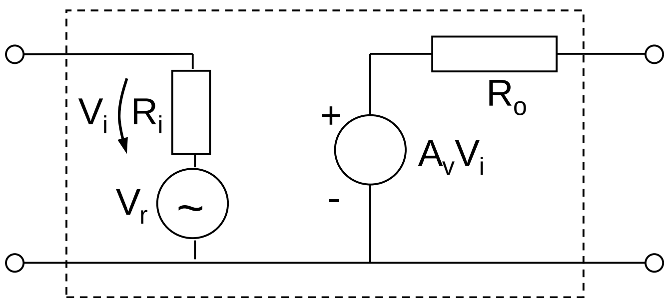
R_i , resistência de entrada

R_o , resistência de saída

A_v , ganho de tensão

Para um amplificador de tensão ideal tem-se: $R_i=\infty$ e $R_o=0$

Todos os componentes electrónicos geram ruído devido à agitação térmica dos átomos. O ruído adicionado ao sinal de entrada pelo amplificador é representado por uma fonte de tensão (V_r) em série com resistência de entrada (R_i).

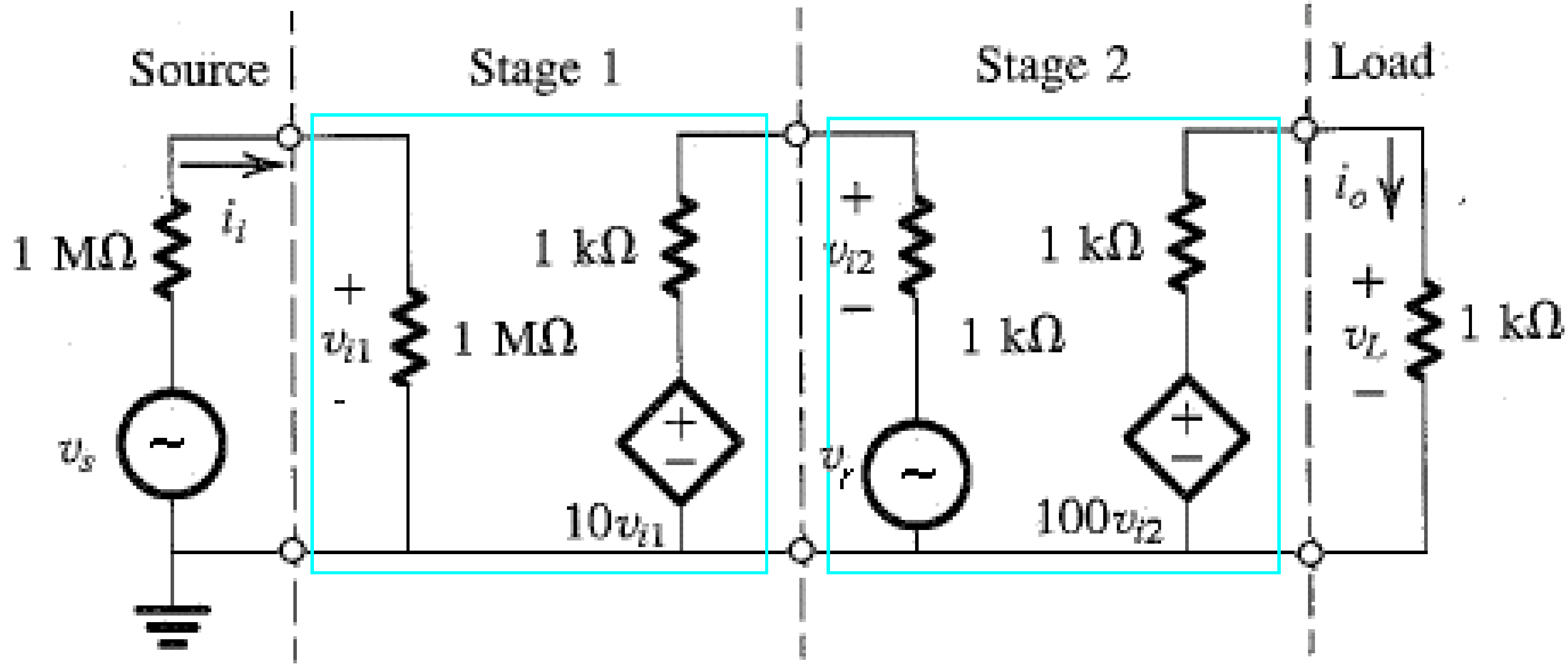


A **relação sinal-ruído (S/N)** de um amplificador define-se como

$$S/N = 20\log\left(\frac{V_o}{V_r}\right) \quad \text{(dB)}$$

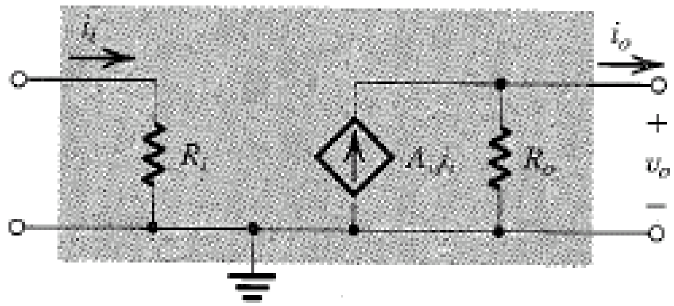
Exemplo: a) Calcular o ganho total de tensão, de corrente e de potência do conjunto.

b) Se v_s=0.1 V e a tensão de ruído v_r=10 mV calcular a relação S/N à saída do sistema.



Outros tipos de amplificadores

Current Amplifier



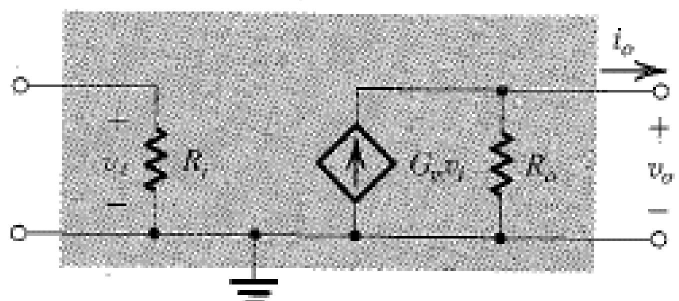
Short-Circuit Current Gain

$$A_{is} \equiv \left.\frac{i_o}{i_i}\right|_{v_o=0} \quad \text{(A/A)}$$

$R_i = 0$

$R_o = \infty$

Transconductance Amplifier



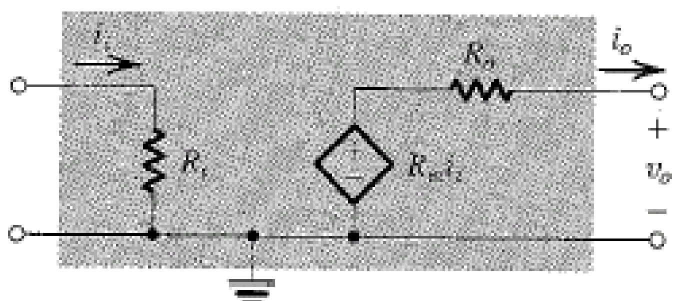
Short-Circuit Transconductance

$$G_m \equiv \left.\frac{i_o}{v_i}\right|_{v_o=0} \quad \text{(A/V)}$$

$R_i = \infty$

$R_o = \infty$

Transresistance Amplifier



Open-Circuit Transresistance

$$R_m \equiv \left.\frac{v_o}{i_i}\right|_{i_o=0} \quad \text{(V/A)}$$

$R_i = 0$

$R_o = 0$

1.3.3 – Realimentação em amplificadores.

O ganho da maior parte dos dispositivos electrónicos é extremamente variável. Além do processo de manufactura produzir dispositivos com ganhos bastante diferentes, este varia consideravelmente com a temperatura e com o tempo.

Vimos anteriormente que o uso de realimentação negativa permitia tornar o ganho de um sistema dependente apenas dos parâmetros da rede de realimentação (H), à custa da redução do ganho de malha aberta (G)

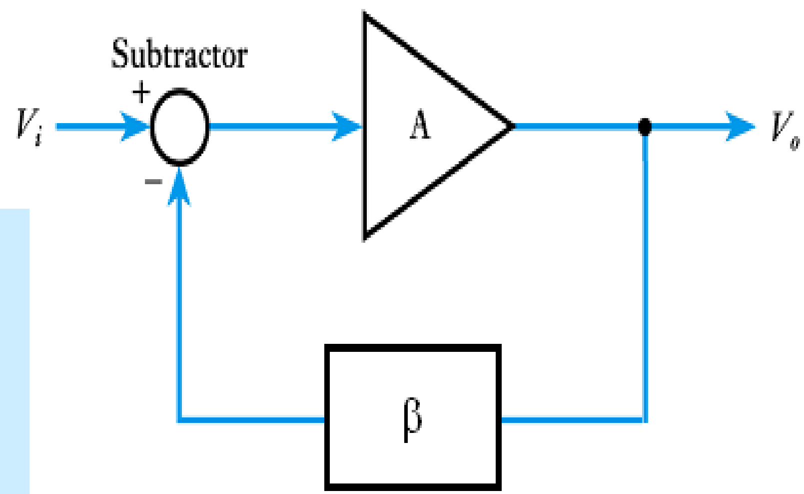
$$\frac{G}{1+GH} \approx \frac{G}{GH} = \frac{1}{H}$$

Como a rede de realimentação é em geral constituída por resistências e condensadores, o ganho do sistema é definido de forma bastante precisa e estável.

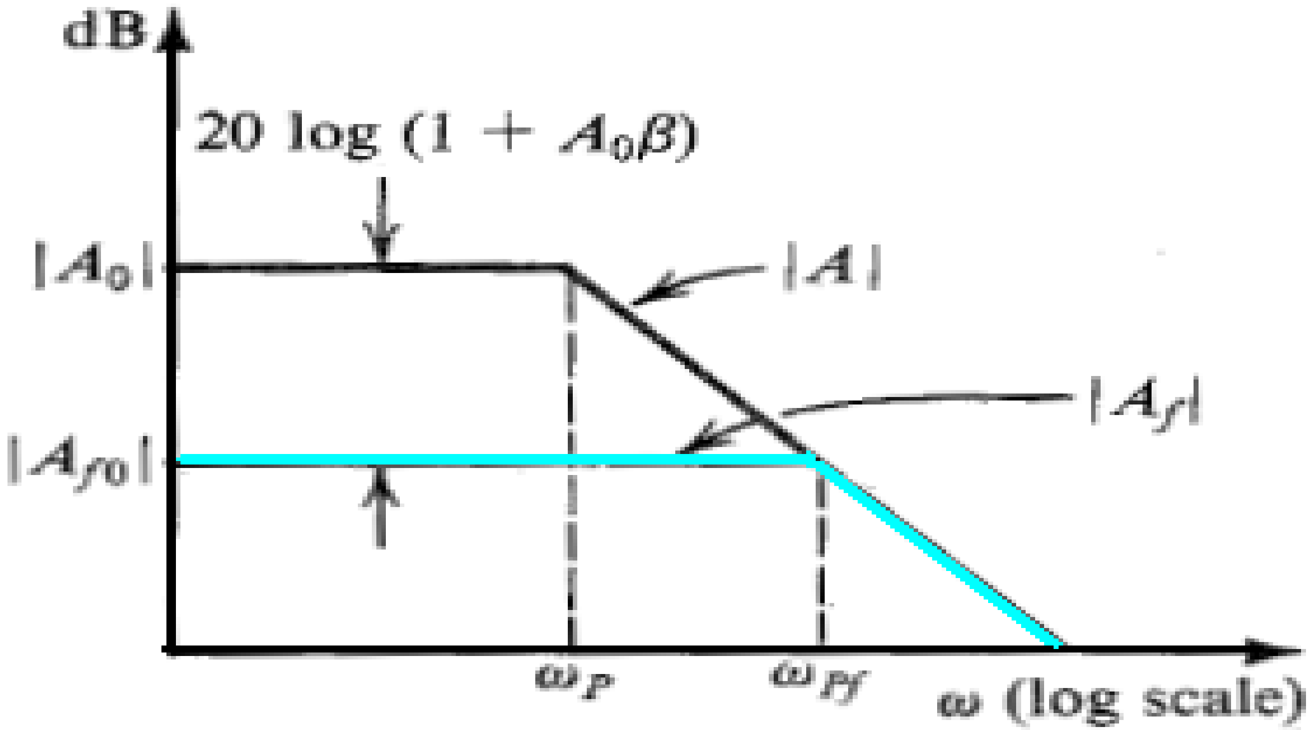
A resposta em frequência de um amplificador tipicamente tem um único pólo

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}$$

Usando realimentação negativa, parte da saída é subtraída à entrada, o ganho total vem



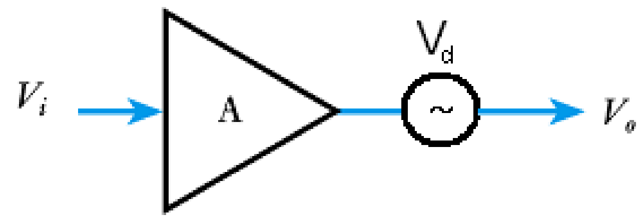
$$A_f(\omega) = \frac{A(\omega)}{1 + \beta \cdot A(\omega)} = \frac{A_0 / (1 + \beta \cdot A_0)}{1 + j\dfrac{\omega / \omega_p}{1 + \beta \cdot A_0}}$$



A realimentação negativa reduz o ganho do sistema de 20 log(1+A_0β) , contudo aumenta a largura de banda do sistema de um factor (1+A_0β).

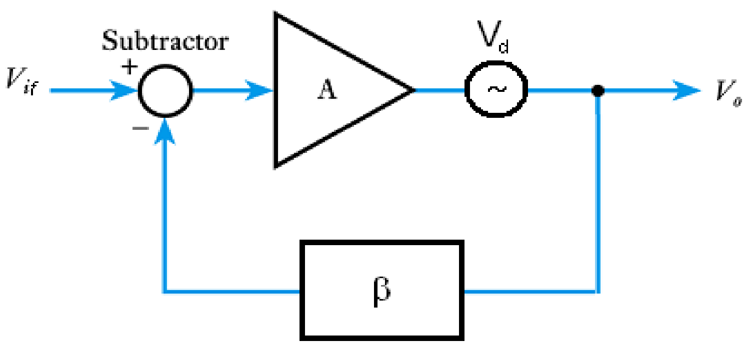
Notar no entanto, que o produto ganho x largura de banda se mantém constante.

A resposta não linear de um amplificador dá origem à distorção do sinal de entrada. A distorção introduzida pelo amplificador pode ser representada por uma fonte de tensão em série com a saída.



$$V_o = AV_i + V_d$$

O uso de realimentação negativa permite reduzir a distorção introduzida, a qual depende da magnitude de V_o. Mantendo V_o constante, temos de aumentar V_i para compensar a redução do ganho.

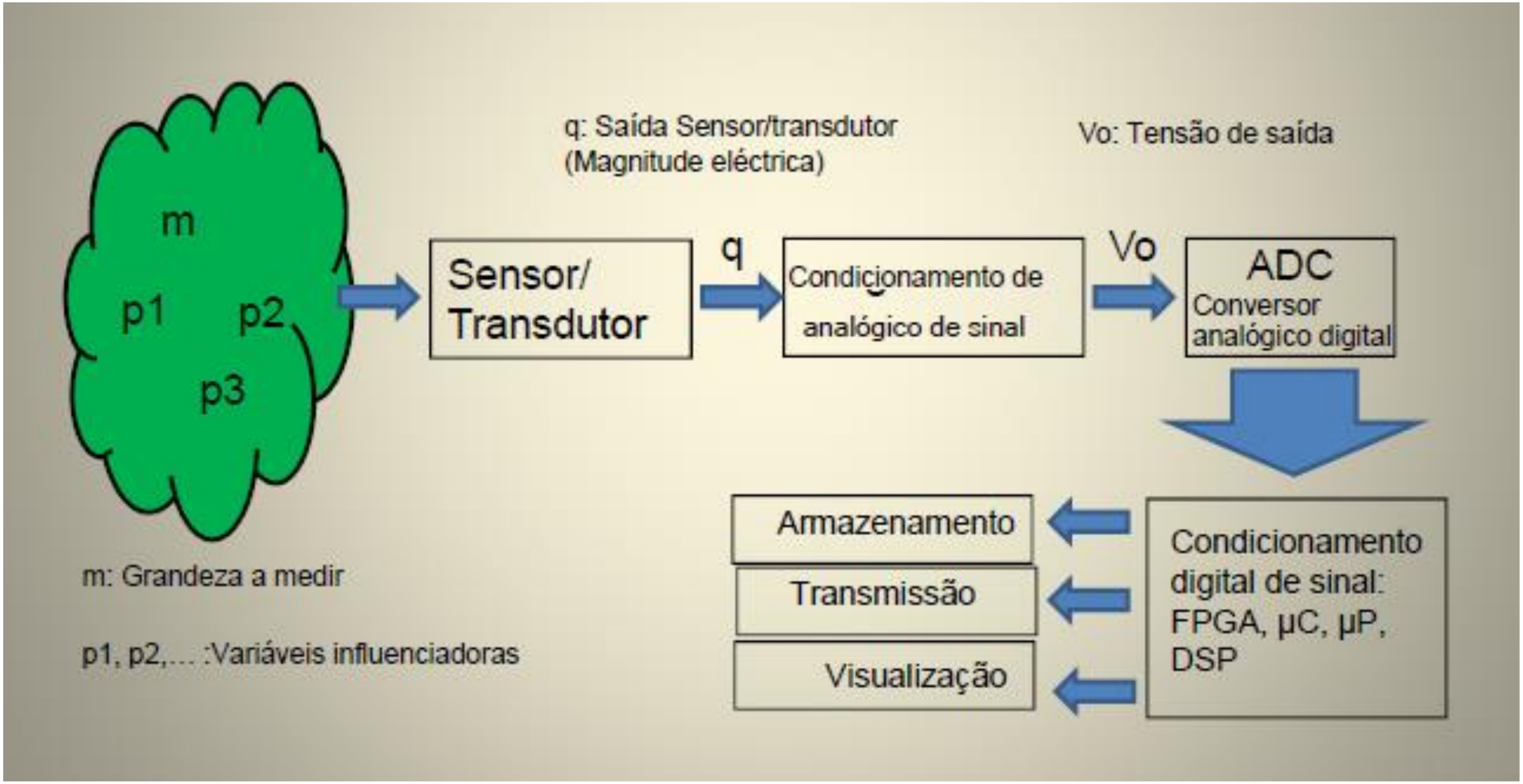


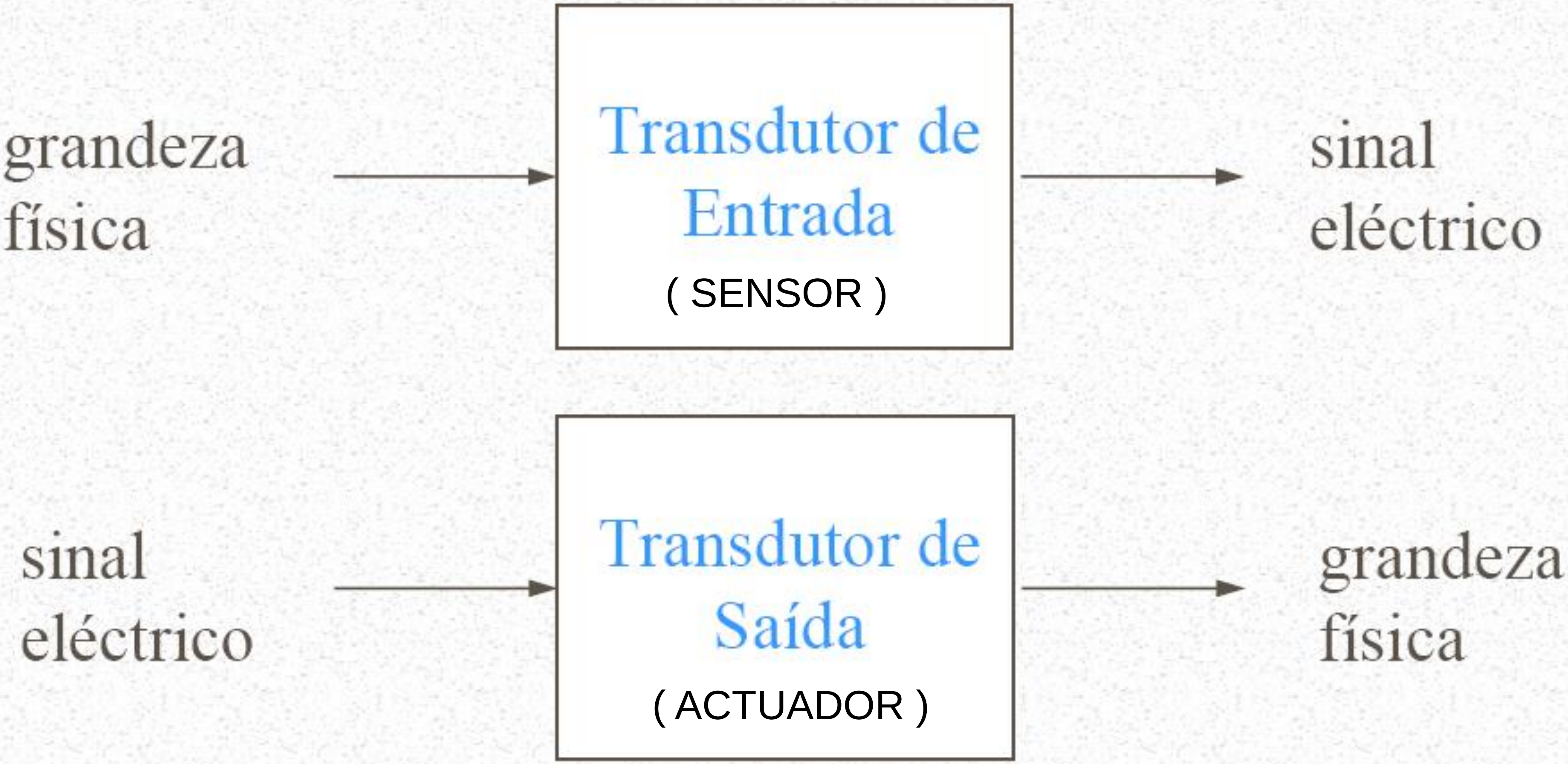
$$V_{if} = (1 + A\beta) \cdot V_i$$

$$V_o = \frac{AV_{if}}{1+\beta A} + \frac{V_d}{1+\beta A} = AV_i + \frac{V_d}{1+\beta A}$$

! O mesmo raciocínio pode aplicado no caso ruído interno gerado pelo amplificador.

1.3.4 – Arquitectura de um sistema de aquisição de dados

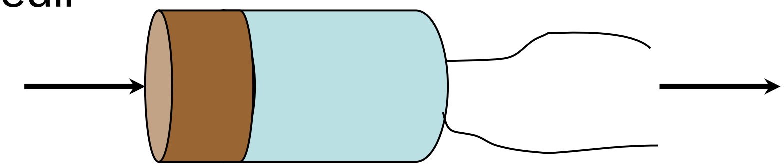



grandeza física
Transdutor de Entrada
(SENSOR)
sinal eléctrico
sinal eléctrico
Transdutor de Saída
(ACTUADOR)
grandeza física

Sensores

Grandeza a medir

Sinal eléctrico



m

grandeza de entrada

- Temperatura
- Humidade
- Velocidade
- Aceleração
- Força
- PH
- %O2
- %CO2

s

grandeza de saída ou resposta do transdutor

- Tesão
- Corrente
- Carga
- Impedância
- frequência

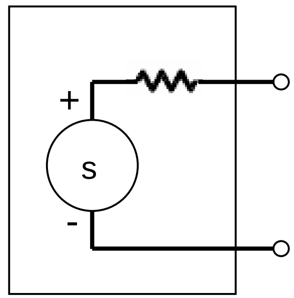
$$\boldsymbol{s = f(m)}$$

Se possível uma relação linear

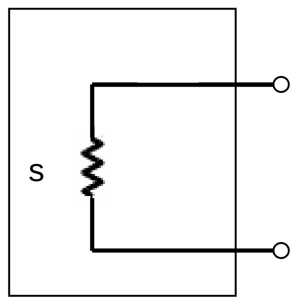
$$\boldsymbol{m = f^{-1}(s)}$$

Visto do circuito eléctrico o transdutor funciona como:

- <u>um gerador,</u> **s** - seja uma carga, uma tensão ou uma corrente, no caso de um **TRANSDUTOR ACTIVO**.



- <u>uma impedância,</u> s - seja uma resistência, uma indutância ou uma capacidade, no caso de um **TRANSDUTOR PASSIVO**.



Fenómenos de Base ao Funcionamento

- Resistência eléctrica como função do comprimento: $R = \rho \dfrac{\ell}{S}$

- Resistência eléctrica como função da temperatura: $R_f = R_i\left[1 + \alpha\left(t_f - t_i\right)\right]$

- Resistência eléctrica como função da radiação:

$$R = \alpha \cdot e^{\frac{\varepsilon}{kT}}$$

ε- varia com a intensidade e o tipo de radiação (λ)

- Capacidade como função da variação da distância e da área das armaduras:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

ε_r- constante dieléctrica relativa

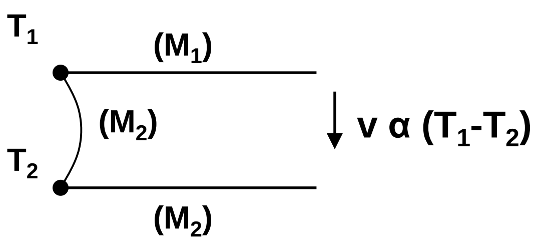
- Indutância como função das propriedades magnéticas do circuito:

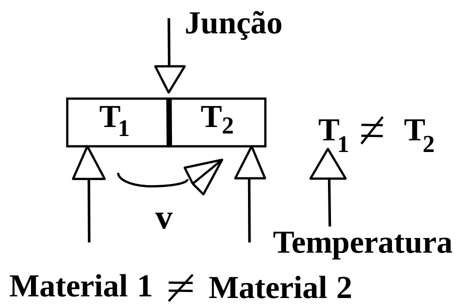
$$L = \mu_0 \mu_r \frac{A \cdot N^2}{\ell}$$

μ_r- permeabilidade magnética relativa do meio

TRANSDUTORES ACTIVOS

EFEITO TERMOELÉCTRICO

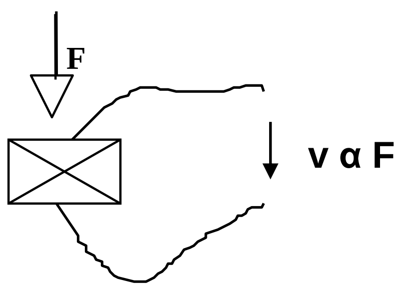




Materiais $\rightarrow$ platina, cobre, ligas metálicas (constantan, alumel, cromel)

Aplicação $\rightarrow$ Termopar

EFEITO PIEZOELÉCTRICO

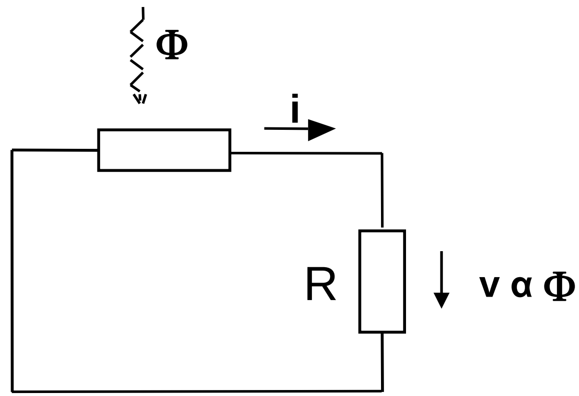


Quartzo $\rightarrow$ Material piezoeléctrico

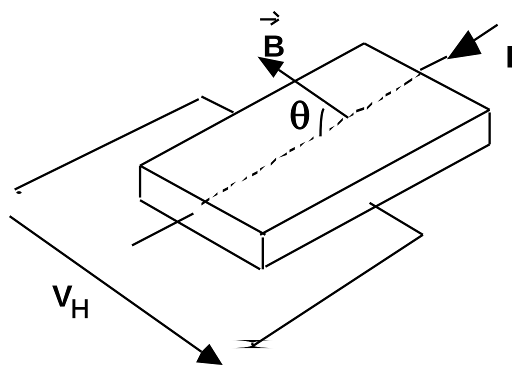
Aplicação $\rightarrow$ Sensor de pressão, aceleração

TRANSDUTORES ACTIVOS

EFEITO FOTOELÉCTRICO/ FOTOVOLTAICO



EFEITO HALL



$$V_H = K_H \cdot I \cdot B \cdot \sin\theta$$

TRANSDUTORES PASSIVOS

A variação de impedância é devida a variações na(s):

- geometria ou/e dimensões;

- propriedades eléctricas do material (resistividade r, permeabilidade magnética μ, constante dieléctrica ε).

➢ **Geometria ou/e dimensões**

(1) Transdutor com elemento móvel:
- potenciómetro;
- indutância com núcleo móvel;
- condensador de placas móveis;

(2) Transdutor com elemento deformável:
- armadura de um condensador
- diferencial (certas balanças...)
- extensómetro

➢ **Propriedades eléctricas**

Humidade $\rightarrow$ constante dieléctrica (e)

Temperatura $\rightarrow$ resistividade (r)

Campo magnético $\rightarrow$ resistividade (r)

Luz $\rightarrow$ resistividade (r)

TRANSDUTOR ENTRADA

Tipo	Entrada	Potência Disponível (W)	Tensão (V)	Corrente (A)	Saída
Termopar	Temperatura	0.5×10^{-4}	10^{-3}	10^{-1}	Tensão (CC)
Célula fotovoltaica	Luz	0.5×10^{-5}	10^{-1}	10^{-4}	Tensão (CC)
Extensómetro	Força	—	—	—	Resistência
Tacómetro	Velocidade	10^{-3}	10^{0}	10^{-3}	Tensão (CC)
Microfone	Som	10^{-8}	10^{-3}	—	Tensão (CA)
"Pickup" magnético	Vibração	0.25×10^{-6}	10^{-2}	10^{-4}	Tensão (CA)
Resolver	Ângulo	$10^{-2} – 10$	10	—	Tensão (CA)

TRANSDUTOR SAIDA

Tipo	Potência (W)	Rendimento (%)	Aplicações
Motor eléctrico	$1 - 10^6$	75 – 95	Sistemas de controlo
Altifalante	$1 - 10^2$	3 – 10	Sistemas de som
Galvanómetro	10^{-6} (F.S.D.)*	—	Sistemas de medida
Voltímetro electrostático	10^{-6} (F.S.D.)*	—	Sistemas de medida
Relé	$10^{-4} - 10^{-1}$	—	Sistemas de controlo
Tubo de raios catódicos (CRT)	10^{-7}	—	Sistemas de medida e monitorização