Resoluções dos problemas da folha-1

1. a) expansão isotérmica (gás monoatómico)

$$pV = n\mathcal{N}k_B T = nRT \xrightarrow{n=1} p = \frac{RT}{V}$$

$$E = \frac{3}{2}kT$$

$$\Delta W = \int_{V_0}^{3V_0} \frac{RT_0}{V}\,dV = RT_0 \ln\left(\frac{3V_0}{V_0}\right)$$

$\Delta E = 0$ (processo isotérmico de um gás perfeito)

$$\Delta Q = \Delta E + \Delta W \Rightarrow \Delta Q = \Delta W \quad \text{(calor absorvido)}$$

b) expansão isobárica

$$\Delta W = \int_{V_0}^{3V_0} p_0\,dV = p_0 2V_0$$

$$p = \frac{RT}{V} = \text{const} \Rightarrow \frac{T}{V} = \text{const} \Rightarrow T = \text{const}\cdot V$$

processo em ef. $\Rightarrow$ $T = \text{const}\cdot V = \frac{p}{R}V$

Logo

$$\Delta E = \frac{3}{2}k\Delta T = \frac{3}{2}k\frac{p}{R}2V_0 = \frac{3}{\mathcal{N}}pV_0$$

$$\Delta Q = 2p_0V_0 + \frac{3}{\mathcal{N}_A}p_0V_0 = \left(2 + \frac{3}{\mathcal{N}_A}\right)p_0V_0 \quad \text{(calor absorvido)}$$

c) Expansão livre e adiabática

$$\left.\begin{array}{l}\Delta W = 0\\ \Delta Q = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E = 0$$

2. Gás perfeito diatómico. Fracção de calor convertido em trabalho realizado numa expansão

a) Processo isotérmico $T = \text{const.}$

$$E = \frac{5}{2} N k T$$

$$pV = NkT$$

$T = \text{const.} \Rightarrow \Delta E = 0$

$\Delta W = \Delta Q$; $p = \frac{NkT}{V} \rightarrow \Delta W = \Delta Q = NkT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

Todo o calor é convertido em trabalho

b) Processo isobárico

$$\Delta W = p (V_f - V_i)$$

$$T_i = p \frac{V_i}{Nk} \qquad T_f = \frac{p}{Nk} V_f$$

$$\Delta E = \frac{5}{2} \cancel{Nk} \frac{p}{\cancel{Nk}} (V_f - V_i) = \frac{5}{2} p (V_f - V_i)$$

$$\Delta Q = \Delta E + \Delta W = \frac{7}{2} p (V_f - V_i)$$

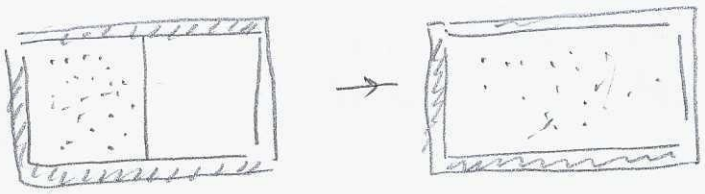
$$\frac{\Delta W}{\Delta Q} = \frac{2}{7}$$

3. Gás ideal : $pV = NkT$ $\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0$ (a energia é indep. da pressão)

a) Em geral a energia interna é uma função de quaisquer duas variáveis termodinâmicas independentes

Por exemplo: $E \equiv E(T,V)$

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV$$



expansão livre $\Delta W = 0$; $\Delta Q = 0$ (adiabático) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta E = 0$

(a energia interna não muda numa expansão livre e adiabática)

É este processo isotérmico? Bem, se for: $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \equiv 0$

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T dp$$

Se a expansão livre e adiabática for isotérmica $\Rightarrow \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0$

Ora, <u>por definição</u>, um gás ideal é aquele que verifica

$$\begin{cases} pV = NkT \\ \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0 \end{cases}$$

Basta isto para garantir que o processo é isotérmico e $\therefore E \equiv E(T)$ apenas

Repare-se:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

Mas $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{NKT}{V^2} = -\frac{p}{V} \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0$

Para um gás ideal $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -\frac{p}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T$$

Consequentemente

$E \equiv E(T)$ apenas.

b) $pV^\gamma = \text{const.}$ (processo adiabático), onde $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

$$đQ = dE + p\,dV \qquad \text{(em geral)}$$

$$\left(\frac{đQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{dE}{dT}\right)_V = C_V$$

(↑)

[Num gás ideal $E \equiv E(T)$]

Logo, em geral:

$$\boxed{đQ = C_V\,dT + p\,dV} \quad (*)$$

$pV = NKT \Rightarrow p\,dV + V\,dp = NK\,dT$

Então

$(*) \Rightarrow đQ = (C_V + NK)\,dT - V\,dp = C_p\,dT - V\,dp$

$đQ = C_p\,dT - V\,dp$

$$\boxed{C_p = C_V + NK}$$

(Monoatómicos)

$$\frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{NK}{C_V} \qquad E = \frac{3}{2} NKT$$

$$C_V = \frac{3}{2} NK$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{NK}{\frac{3}{2}NK} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = \text{const}$$

Vejamos então:

$$đQ = C_V \, d\Theta + p \, dV$$

$$đQ = C_p \, d\Theta - V \, dp$$

Num processo adiabático $đQ = 0$ e

$$C_p \, d\Theta = V \, dp$$

$$C_V \, d\Theta = -p \, dV$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{C_p}{C_V} = -\frac{V}{p}\frac{dp}{dV} \iff -\frac{dV}{V}\gamma = \frac{dp}{p}$$

integrando:

$$\ln p = -\gamma \ln V + \ln C' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{pV^\gamma = \text{const}}$$

Como $pV = NKT \Rightarrow V = \frac{NKT}{p}$

$$p\left(\frac{NKT}{p}\right)^\gamma = \text{const} \Rightarrow \boxed{p^{\gamma-1} T^\gamma = \text{const}}$$

4. Considere uma mole de um gás ideal (...)

a) $\Delta W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV = NKT \int \frac{dV}{V} = NKT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

(processo isotérmico)

$\left[\Delta W = R \cdot 273.15 \ln(10)\right]$

b) Expansão adiabática: $V_0 \to 10 V_0$ Qual o temp. final?

$-\Delta E = \Delta W$ (visto que $\Delta Q = 0$)

Noutro: $\Delta W = \int_{V_0}^{10V_0} p\,dV$ $\qquad \underbrace{P_0 V_0^{\gamma} = P V^{\gamma} = \text{const}}$

$p = \frac{P_0 V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}}$

$\Delta W = \int_{V_0}^{10V_0} P_0 V_0^{\gamma} \frac{dV}{V^{\gamma}}$

$= P_0 V_0^{\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma} V^{1-\gamma} \Big|_{V_0}^{10V_0}$

$= \underbrace{\frac{P_0 V_0^{\gamma}}{1-\gamma}} \left[(10V_0)^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}\right] = \frac{P_0}{1-\gamma}\left(10^{1-\gamma} V_0 - V_0\right)$

$\Delta Q = 0 \Rightarrow -\Delta E = \Delta W$

$\Delta W = \underbrace{\left(10^{1-\gamma} - 1\right)}_{1-\gamma} \cdot NKT_0 \Rightarrow \frac{1 - 10^{1-\gamma}}{1-\gamma} NK\, T_0 = \frac{3}{2} NK (T_f - T_0)$

(...)

(compare gás diatómico $E = \frac{5}{2} NKT$ etc)

5. O azoto tem um nº de massa 14. (...)

a) 1 mole $\equiv$ 28 g

$\frac{1000}{28} = \nu$ (nº de moles em 1000g de N_2)

$pV = \nu RT$ $\qquad C_v = \frac{5}{2}\nu R$

$E = \frac{5}{2}\nu RT$

$C_p = \frac{7}{2}\nu R$

a) ΔQ (isobárico) =

$$dQ = C_p\, dT - V\, dp \quad (dp = 0)$$

$$dQ = \frac{7}{2}\nu R\, dT$$

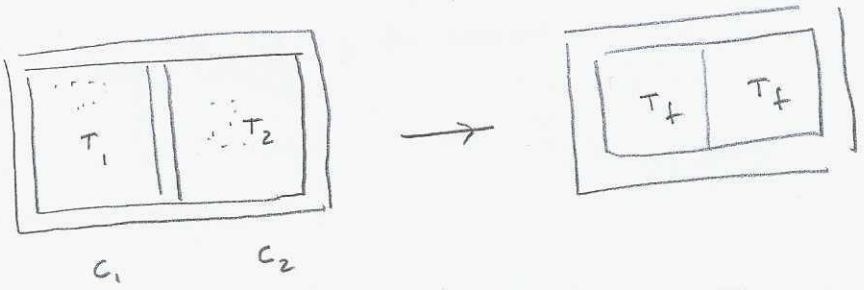
$$\Delta Q = \frac{7}{2}\nu R\,[T_f - T_i]$$

b) Variação da energia interna do gás

$$\Delta E = \frac{5}{2}\nu R\,[T_f - T_i]$$

c) Trabalho realizado: $\Delta Q - \Delta E = \Delta W = \nu R\,[T_f - T_i]$

6.



$$C_1 (T_1 - T_f) = C_2 (T_f - T_2)$$

$$C_1 T_1 - C_1 T_f = C_2 T_f - C_2 T_2$$

$$C_1 T_1 + C_2 T_2 = (C_1 + C_2) T_f$$

$$\boxed{T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}}$$

7. Considere a função $H = E - pV$ (entalpia) (...)

a) $\quad \delta Q = dE + p\,dV$

$$\delta Q = dE + d(pV) - V\,dp$$

a pressão constante:

$$\delta Q = d(E + pV) = dH$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Gás ideal

$$H = E + NkT \rightarrow C_p = C_V + Nk$$

c) (...)

8. Um tijolo de 1,5 kg de massa (...)

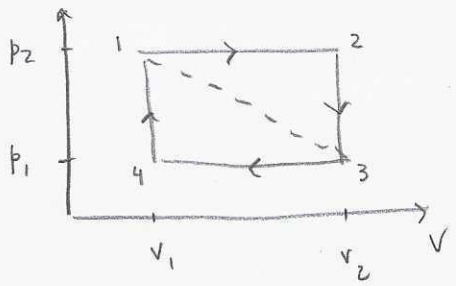
como anteriormente

$$T_f = \frac{m_{tijolo}\, c_{tijolo}\, T_{tijolo} + m_{H_2O}\, c_{H_2O}\, T_{H_2O}}{m_{tij}\, c_{tijol.} + m_{agua}\, c_{agua}}$$

$$\begin{cases} c_{tijolo} \approx 750 \ J/kg \cdot K \\ c_{H_2O} \approx 4184 \ J/kg\,K \end{cases} \quad (...)$$

9.

a)



$W_{1\to 2} = p_2 (V_2 - V_1)$

$W_{2\to 3} = 0$

$W_{34} = -p_1 (V_2 - V_1)$

$W_{41} = 0$

$\Delta W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) \neq 0$ (trabalho realizado sobre o exterior)

b) $W_{3\to 1} = ?$ $\quad p = -aV + b$

$$a = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} \rightarrow p = -\left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}\right) V + b$$

em (3) $\longrightarrow$ $p_1 = -\left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}\right) V_2 + b \Rightarrow \boxed{b = p_1 + \left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}\right) V_2}$

$$W_{1\to 2}: \quad p = -\left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}\right) V + p_1 + \left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}\right) V_2$$

$$p = \left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}\right)(V_2 - V) + p_1$$

$$\Delta W_{1\to 3} = \int_{V_2}^{V_1} \left[\left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}\right)(V_2 - V) + p_1\right] dV$$

$$= \int_{V_2}^{V_1} \left[\left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} V_2 + p_1\right) - \left(\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}\right) V\right] dV$$

(...)

c) $Q_{1\to 2} = C_p (T_2 - T_1)$

$Q_{2\to 3} = C_V (T_3 - T_2)$

$Q_{3\to 4} = C_p (T_4 - T_3)$

$Q_{4\to 1} = C_V (T_1 - T_4)$

$$Q = C_p [T_2 - T_1 + T_4 - T_3] + C_V [T_3 - T_2 + T_1 - T_4]$$

$$= (C_p - C_V)[T_2 - T_1 + T_4 - T_3]$$

$$= \cancel{Nk} \cdot \left[\frac{p_2 V_2}{\cancel{Nk}} - \frac{p_2 V_1}{\cancel{Nk}} + \frac{p_1 V_1}{\cancel{Nk}} - \frac{p_1 V_2}{\cancel{Nk}}\right] =$$

$$= p_2 (V_2 - V_1) + p_1 (V_1 - V_2) = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) =$$

$= \Delta W$ sobre o exterior. (claro $\Delta E = 0$ no fim!)