

1. Represente graficamente os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 .

$$C_1 = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$C_2 = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in [0, 1]\}$$

$$C_3 = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in [-2, 0]\}$$

$$C_4 = \{(-3 + \alpha, 1 + 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$C_5 = \{\alpha(1, 2) + \beta(-3, 1) : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in [0, +\infty[\}$$

$$C_6 = \{(2 + \alpha - 3\beta, 2\alpha + \beta) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$$

$$C_7 = \{(2 + \alpha - 3\beta, 2\alpha + \beta) : \alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1]\}$$

2. Considere novamente o conjunto $C_5 = \{\alpha(1, 2) + \beta(-3, 1) : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in [0, +\infty[\}$ do exercício anterior. É verdade que $(1, 0) \in C_5$? e $(0, 1) \in C_5$? Justifique a sua resposta.
3. Represente graficamente os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 .

$$C_1 = \{(\alpha, 2\alpha, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$C_2 = \{\alpha(1, 2, -1) + \beta(3, 0, 1) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$$

4. Para cada alínea, diga, justificando, se os vetores considerados são paralelos.

(a) $u = (1, 2)$ e $v = (-2, -4)$.

(b) $u = (1, 2)$ e $v = (1, 0)$.

(c) $u = (1, -1, 2)$ e $v = (-2, 2, 6)$.

5. Sejam $v = (x, y)$ and $v' = (x', y')$ dois vetores de \mathbb{R}^2 . Mostre que v e v' são paralelos sse $xy' - x'y = 0$.
6. Determine equações paramétricas da reta de \mathbb{R}^3 que passa pelos pontos $A = (-1, 0, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$. Esta reta passa pelo ponto $C = (2, 0, 2)$? e pelo ponto $D = (1, -\frac{1}{2}, 1)$?
7. Determine equações paramétricas e uma equação cartesiana da reta de \mathbb{R}^2 que passa pelo ponto $A = (-2, 1)$ e que é paralela ao vetor $(3, 2)$.
8. Determine elementos A e v de \mathbb{R}^2 tais que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = -1\} = \{A + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Quais são as escolhas possíveis para A e v ?

9. Determine equações paramétricas do plano \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

10. Considere, em \mathbb{R}^3 , o ponto $A = (0, 0, 1)$ e os vetores $u = (1, -1, 1)$ e $v = (2, 0, -2)$.
- Verifique que u e v não são paralelos.
 - Escreva equações paramétricas e uma equação cartesiana do plano $A + \langle u, v \rangle$.
 - Verifique se $(1, 2, -3)$ pertence ao plano $A + \langle u, v \rangle$.
11. Determine vetores não paralelos $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que
- $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - 3z = 0\} = \langle u, v \rangle.$$
12. Considerando em \mathbb{R}^3 os vetores $u = (\frac{1}{2}, 1, 0)$, $v = (\frac{3}{2}, 0, 1)$, $u' = (1, 2, 0)$, e $v' = (0, -3, 1)$, mostre que $\langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle$.
13. Considere, em \mathbb{R}^2 , os vetores $u = (2, 0)$ e $v = (1, 1)$.
- Calcule $\|u\|$, $\|v\|$ e $(u|v)$.
 - Determine $\angle(u, v)$.
14. Considere, em \mathbb{R}^3 , os vetores $u = (1, -1, \sqrt{2})$ e $v = (0, 1, 0)$.
- Calcule $\|u\|$, $\|v\|$ e $(u|v)$.
 - Determine $\angle(u, v)$.
15. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$.
- Estabeleça o Teorema de Pitágoras: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ sse $(u|v) = 0$.
 - Mostre a *identidade do paralelograma*: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
 - Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostre a *desigualdade triângular*: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
16. Determine o centro e o raio da esfera de \mathbb{R}^3 de equação $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = -1$.
17. Considere em \mathbb{R}^2 a circunferência centrada na origem e de raio 1. Determine o (outro) ponto de interseção desta circunferência com a reta que passa pelo ponto $(-1, 0)$ e que é dirigida pelo vetor $(\cos \theta, \sin \theta)$ onde $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Interprete geometricamente. (*Ind.:* use uma equação paramétrica da reta e uma equação cartesiana da circunferência).
18. Determine uma equação cartesiana da reta de \mathbb{R}^2
- que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $(-3, 2)$.
 - que passa pelo ponto $(1, 4)$ e é perpendicular ao vetor $(-3, 2)$.
 - que passa pelos pontos $A = (1, 3)$ e $B = (-2, 2)$.
19. Determine um vetor normal à reta de \mathbb{R}^2
- que passa pelo ponto $A = (1, 3)$ e que é paralela ao vetor $v = (5, 2)$.

(b) de equação cartesiana $2x - 3y = 4$.

20. Determine uma equação cartesiana do plano de \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e que é perpendicular ao vetor $(-1, 2, 1)$.

21. Determine uma equação cartesiana do hiperplano de \mathbb{R}^4 que passa pelo ponto $(0, 1, 2, 3)$ e que é perpendicular ao vetor $(-1, 2, 0, 1)$.

22. Considere em \mathbb{R}^3 os planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' dados pelas seguintes equações cartesianas:

$$\mathcal{P} : x - 2y + z = 0 \quad \mathcal{P}' : z = 1$$

(a) Determine um vetor normal para cada um desses planos.

(b) Determine a interseção desses planos.

23. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo.

(a) Suponha que $w = \lambda v + u$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e u é ortogonal a v . Mostre que $\lambda = \frac{(w|v)}{(v|v)}$.

(b) Mostre que todo o vetor $w \in \mathbb{R}^n$ escreve-se de maneira única como $w = \lambda v + u$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e u ortogonal a v .

24. Considere, em \mathbb{R}^2 , a reta \mathcal{R} de equação cartesiana $-x + 3y = 2$.

(a) Verifique que o ponto $(1, 2)$ não pertence à \mathcal{R} .

(b) Determine a distância entre o ponto $(1, 2)$ e a reta \mathcal{R} .

25. Determine a distância entre o ponto $(1, 1, 1)$ e o plano \mathcal{P} de equação $x - 2y = 0$.

26. (a) Considerando $u = (1, 2, 3)$ e $v = (1, 0, -2)$, calcule $u \wedge v$ e $v \wedge u$.

(b) Considerando $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ verifique que:

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2 \quad e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) \neq (e_1 \wedge e_1) \wedge e_2$$

27. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. Mostre a *identidade de Lagrange*

$$||u \wedge v||^2 = ||u||^2 ||v||^2 - (u|v)^2$$

e deduza disso que $||u \wedge v|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin \angle(u, v)$.

28. Utilizando o produto vetorial, determine uma equação cartesiana dos planos de \mathbb{R}^3 dados pelas seguintes equações paramétricas:

$$(a) \begin{cases} x = t - 2s \\ y = t + s \\ z = 2t \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$(b) \begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = -1 - \beta \\ z = 2\alpha \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$