T3 - Resposta em Frequência de um Circuito RLC

André Cruz - a92833; Beatriz Demétrio - a92839; Carlos Ferreira - a92846

15 de março de 2021

1 Valores teóricos

1.1 Circuito em Série

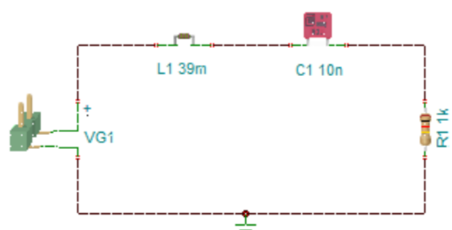


Figure 1: Circuito em Série

Temos os seguintes valores para os componentes apresentados:

$R = 1k\Omega = 1 \times 10^3\,\Omega$
$C = 10nF = 10 \times 10^{-9}\,F$
$L = 39mH = 39 \times 10^{-3}\,H$

1.1.1 Cálculo da Frequência de Ressonância

A frequência de ressonância é dada por $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ e que $w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Por isso, se substituirmos pelos valores acima apresentados, vamos ter que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{10 \times 10^{-9} \times 39 \times 10^{-3}}} \approx 50636,97\,rad/s$$

Logo, por isso a frequência de ressonância vai ser dada por:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx \frac{50636,97}{2\pi} \approx 8,06\,kHz$$

1.1.2 Cálculo da largura de banda β e da qualidade Q

Cálculo das Frequências de Corte

- $\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$

$$= -\frac{1 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{1 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx 39414,23\, rad/s$$

Logo, vamos ter que $f_1 \approx 6,273\, kHz$

- $\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$

$$= \frac{1 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{1 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx 65055,25\, rad/s$$

Logo, vamos ter que $f_2 \approx 10,353\, kHz$

Cálculo da Largura de Banda β

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 65055,25 - 39414,23 \approx 25641,02\, rad/s$$

Como β também é igual a R/L, então:

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{1 \times 10^3}{39 \times 10^{-3}} \approx 25641,02\, rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Cálculo da Qualidade Q

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} \approx \frac{50636,97}{25641,02} = 1,975$$

Como Q também é igual a $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, então:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{1 \times 10^3}\sqrt{\frac{39 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-9}}} \approx 1,975$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para Q.

1.1.3 Variação da Resistência

Sabemos da fórmula $\beta = \frac{R}{L}$ que com um aumento da resistência R, existe um aumento do valor da largura de banda β (e que o contrário também se verifica). Portanto, podemos afirmar que β e R são proporcionais. Mas iremos agora verificar exatamente isso:

Para $R = 500\Omega$:

A frequência de ressonância mantém-se a mesma ($f_0 \approx 8,06\,kHz$). Mas as frequências de corte irão mudar de valor:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} = \\
&= -\frac{500}{2 \times 39 \times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{500}{2 \times 39 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx \\
&\approx 44630,84\,rad/s \Rightarrow f_1 \approx 7,103\,kHz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} = \\
&= \frac{500}{2 \times 39 \times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{500}{2 \times 39 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx \\
&\approx 57451,36\,rad/s \Rightarrow f_2 \approx 9,144\,kHz
\end{aligned}$$

Portanto, o cálculo do valor de largura de banda β para este valor de resistência é:

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 57451,36 - 44630,84 \approx 12820,52\,rad/s$$

Como β também é igual a R/L, então:

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{500}{39 \times 10^{-3}} \approx 12820,52\,rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Por isso, para $R = 500\Omega$, o valor de β é aproximadamente igual a $12820,52\,rad/s$, o que significa ao diminuirmos o valor da resistência para metade, o valor de β também diminuí para metade.

Para $R = 1,5k\Omega$**:**

A frequência de ressonância mantém-se a mesma ($f_0 \approx 8,06\,kHz$). Mas as frequências de corte irão mudar de valor:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$$
$$= -\frac{1,5 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{1,5 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx$$
$$\approx 34934,95\,rad/s \Rightarrow f_1 \approx 5,560\,kHz$$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$$
$$= \frac{1,5 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{1,5 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx$$
$$\approx 73396,49\,rad/s \Rightarrow f_2 \approx 11,681\,kHz$$

Portanto, o cálculo do valor de largura de banda β para este valor de resistência é:

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 73396,49 - 34934,95 \approx 38461,54\,rad/s$$

Como β também é igual a R/L, então:

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{1,5 \times 10^3}{39 \times 10^{-3}} \approx 38461,54\,rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Por isso, para $R = 1,5 \times 10^3\Omega$, o valor de β é aproximadamente igual a $38461,54\,rad/s$, o que significa ao aumentarmos o valor da resistência para $3/2$ do seu valor original, o valor de β também aumenta na mesma proporção.

1.1.4 Variação do Condensador

Verificamos na fórmula $\beta = \frac{R}{L}$, que a largura de banda não depende do valor do condensador presente no circuito, ou seja, mesmo que alteremos o seu valor, em nada irá afetar o valor da largura de banda β. Mas iremos agora verificar exatamente isso:

Para $C = 20nF$**:**

A frequência de ressonância mantém-se a mesma ($f_0 \approx 8,06\,kHz$). Mas as frequências de corte irão mudar de valor:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} = \\ &= -\frac{1 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{1 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-9}}\right)} \approx \\ &\approx 25211,27\,rad/s \Rightarrow f_1 \approx 4,012\,kHz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} = \\ &= \frac{1 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{1 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-9}}\right)} \approx \\ &\approx 50852,30\,rad/s \Rightarrow f_2 \approx 8,093\,kHz\end{aligned}$$

Portanto, o cálculo do valor de largura de banda β para este valor de resistência é:

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 50852,30 - 25211,27 \approx 25641,03\,rad/s$$

Como β também é igual a $^R/_L$, então:

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{1 \times 10^3}{39 \times 10^{-3}} \approx 25641,03\,rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Por isso, apesar de aumentarmos o valor do condensador para $C = 20nF$ (e com isso alterarmos os valores das frequências de corte), o valor de β continua exatamente igual ao valor de β quando o condensador tem como valor $C = 10nF$.

Para $C = 5nF$**:**

A frequência de ressonância mantém-se a mesma ($f_0 \approx 8,06\,kHz$). Mas as frequências de corte irão mudar de valor:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$$
$$= -\frac{1\times 10^3}{2\times 39\times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{1\times 10^3}{2\times 39\times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39\times 10^{-3}\times 5\times 10^{-9}}\right)} \approx$$
$$\approx 59929,54\, rad/s \Rightarrow f_1 \approx 9,538\, kHz$$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$$
$$= \frac{1\times 10^3}{2\times 39\times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{1\times 10^3}{2\times 39\times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39\times 10^{-3}\times 5\times 10^{-9}}\right)} \approx$$
$$\approx 85570,57\, rad/s \Rightarrow f_2 \approx 13,619\, kHz$$

Portanto, o cálculo do valor de largura de banda β para este valor de resistência é:

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 85570,57 - 59929,54 \approx 25641,03\, rad/s$$

Como β também é igual a R/L, então:

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{1\times 10^3}{39\times 10^{-3}} \approx 25641,03\, rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Por isso, apesar de diminuirmos o valor do condensador para $C = 5nF$ (e com isso alterarmos os valores das frequências de corte), o valor de β continua exatamente igual ao valor de β quando o condensador tem como valor $C = 10nF$.

1.2 Circuito em Paralelo

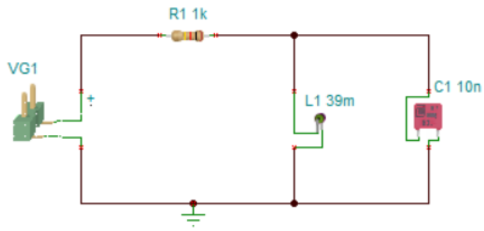


Figure 2: Circuito em Paralelo

Temos os seguintes valores para os componentes apresentados:

$R = 1k\Omega = 1 \times 10^3\,\Omega$
$C = 10nF = 10 \times 10^{-9}\,F$
$L = 39mH = 39 \times 10^{-3}\,H$

1.2.1 Cálculo da Frequência de Ressonância

O cálculo para a frequência de ressonância é o mesmo para este caso e, como tal, obtemos o mesmo resultado:

$$f_0 = 8,06\,kHz$$

1.2.2 Cálculo da largura de banda β e da qualidade Q

Cálculo das Frequências de Corte

- $\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$

$$= -\frac{1}{2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 1 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx$$
$$\approx 21162,51\,rad/s$$

Logo, vamos ter que $f_1 \approx 3,368\,kHz$

- $\omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$

$$= \frac{1}{2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 1 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx$$

$\approx 121162,51\, rad/s$

Logo, vamos ter que $f_2 \approx 19,284\, kHz$

Cálculo da Largura de Banda β

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 121162,51 - 21162,51 \approx 100000\, rad/s$$

Como β também é igual a $1/RC$, então:

$$\beta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9}} \approx 100000\, rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Cálculo da Qualidade Q

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} \approx \frac{50636,97}{100000} = 0,5064$$

Como Q também é igual a $R\sqrt{\frac{C}{L}}$, então:

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 1 \times 10^3 \sqrt{\frac{10 \times 10^{-9}}{39 \times 10^{-3}}} \approx 0,5064$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para Q.

1.2.3 Variação da Resistência

Sabemos da fórmula $\beta = \frac{1}{RC}$ que com um aumento da resistência R, existe uma diminuição do valor da largura de banda β. Portanto, podemos afirmar que β e R são inversamente proporcionais. Mas iremos agora verificar exatamente isso:

Para $R = 500\Omega$:

A frequência de ressonância mantém-se a mesma ($f_0 \approx 8,06\, kHz$). Mas as frequências de corte irão mudar de valor:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} = \\
&= -\frac{1}{2 \times 500 \times 10 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 500 \times 10 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx \\
&\approx 12089,71\, rad/s \Rightarrow f_1 \approx 1,924\, kHz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} = \\
&= \frac{1}{2 \times 500 \times 10 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 500 \times 10 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx \\
&\approx 212089,71\, rad/s \Rightarrow f_2 \approx 33,755\, kHz
\end{aligned}
$$

Portanto, o cálculo do valor de largura de banda β para este valor de resistência é:

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 212089,71 - 12089,71 \approx 200000\, rad/s$$

Como β também é igual a $1/RC$, então:

$$\beta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{500 \times 10 \times 10^{-9}} \approx 200000\, rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Por isso, para $R = 500\Omega$, o valor de β é aproximadamente igual a $200000\, rad/s$, o que significa ao diminuirmos o valor da resistência para metade, o valor de β aumenta para o dobro, tal como previsto.

Para $R = 1,5k\Omega$**:**

A frequência de ressonância mantém-se a mesma ($f_0 \approx 8,06\, kHz$). Mas as frequências de corte irão mudar de valor:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2 \times 500 \times 10 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 500 \times 10 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx$$

$$\approx 27290,21\, rad/s \Rightarrow f_1 \approx 4,343\, kHz$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2 \times 500 \times 10 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 500 \times 10 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}\right)} \approx$$

$$\approx 93956,87\, rad/s \Rightarrow f_2 \approx 14,954\, kHz$$

Portanto, o cálculo do valor de largura de banda β para este valor de resistência é:

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 793956,87 - 27290,21 \approx 66666,67\, rad/s$$

Como β também é igual a $^1/_{RC}$, então:

$$\beta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{500 \times 10 \times 10^{-9}} \approx 66666,67\, rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Por isso, para $R = 1,5 \times 10^3 \Omega$, o valor de β é aproximadamente igual a $66666,67\, rad/s$, o que significa ao aumentarmos o valor da resistência para $^3/_2$ do seu valor original, o valor de β diminuí para aproximadamente $^2/_3$ do seu valor original.

1.2.4 Variação do Condensador

Verificamos na fórmula $\beta = \frac{1}{RC}$, que a largura de banda depende do valor do condensador presente no circuito, ou seja, ao aumentar o seu valor, o valor da largura de banda β irá diminuir, e vice-versa. Mas iremos agora verificar exatamente isso:

Para $C = 20nF$:

A frequência de ressonância mantém-se a mesma ($f_0 \approx 8,06\,kHz$). Mas as frequências de corte irão mudar de valor:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$$
$$= -\frac{1}{2 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 1 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-9}}\right)} \approx$$
$$\approx 18669,80\,rad/s \Rightarrow f_1 \approx 2,971\,kHz$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} =$$
$$= \frac{1}{2 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 1 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-9}}\right)} \approx$$
$$\approx 68669,80\,rad/s \Rightarrow f_2 \approx 10,929\,kHz$$

Portanto, o cálculo do valor de largura de banda β para este valor de resistência é:

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 68669,80 - 18669,80 \approx 50000\,rad/s$$

Como β também é igual a ${}^1\!/_{RC}$, então:

$$\beta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-9}} \approx 50000\,rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Por isso, ao aumentarmos o valor do condensador para o dobro, $C = 20nF$, (e com isso alterarmos os valores das frequências de corte), o valor de β diminui para metade.

Para $C = 5nF$:

A frequência de ressonância mantém-se a mesma ($f_0 \approx 8,06\,kHz$). Mas as frequências de corte irão mudar de valor:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} = \\
&= -\frac{1}{2 \times 1 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 1 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-9}}\right)} \approx \\
&\approx 22996,77\, rad/s \Rightarrow f_1 \approx 3,660\, kHz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} = \\
&= \frac{1}{2 \times 1 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 1 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-9}}\right)^2 + \left(\frac{1}{39 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-9}}\right)} \approx \\
&\approx 222996,77\, rad/s \Rightarrow f_2 \approx 35,491\, kHz
\end{aligned}
$$

Portanto, o cálculo do valor de largura de banda β para este valor de resistência é:

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \approx 222996,77 - 229996,77 \approx 200000\, rad/s$$

Como β também é igual a $^1/_{RC}$, então:

$$\beta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-9}} \approx 200000\, rad/s$$

Verificamos que calculando destas duas maneiras, obtemos exatamente o mesmo valor para β.

Por isso, ao diminuirmos o valor do condensador para metade, $C = 5nF$, (e com isso alterarmos os valores das frequências de corte), o valor de β aumenta para o dobro.

1.3 Demonstração de como se chegou às expressões do ganho e da diferença de fase entre os sinais de saída e de entrada

Sabemos que o ganho é dado por:

$$ganho = \left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right|$$

onde V_{out} é a tensão de saída e V_{in} é a tensão de entrada.

Como estamos a falar de um circuito em série, então vamos ter que $V_{in} = i \times Z$ e $V_{out} = i \times Z$ onde Z é a impedância total do circuito e i é a corrente total do circuito. Logo, a impedância Z é dada por $Z = |Z| \lfloor \theta$. Como o circuito é em série, então vamos ter que o módulo de Z é dado por:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Já o ângulo θ, que corresponde ao ângulo de desfasamento entre os sinais de V_{out} e V_{in}, vai ser igual a:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right)$$

pois $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.

Logo, susbtituindo na equação do ganho, vamos ter que:

$$ganho = \left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

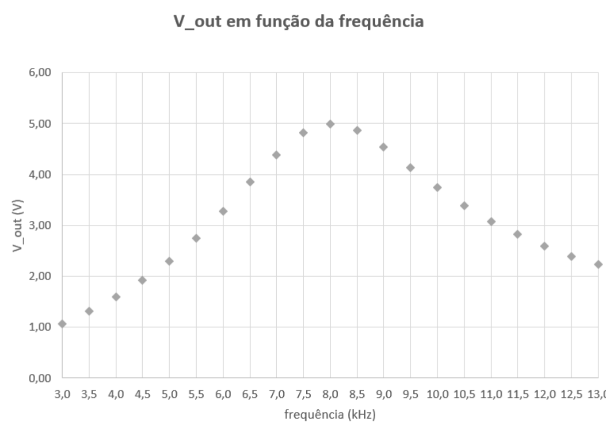
2 Valores experimentais

2.1 Circuito em Série

2.1.1 Determinação da Frequência de Ressonância

Tendo em conta que o circuito representa um filtro passa-banda, teremos, na vizinhança da frequência de ressonância, sinais de grande amplitude. Dessa forma, a obtenção da frequência de ressonância experimentalmente obteve-se variando a frequência so sinal de tensão de entrada e medindo para cada valor desta a onda da tensão de saída. Os dados encontram-se organizados na tabela e no gráfico abaixo:

$f\,(kHz)$	$V_{out}\,(V)$
$3,0$	$1,07$
$3,5$	$1,31$
$4,0$	$1,59$
$4,5$	$1,92$
$5,0$	$2,30$
$5,5$	$2,75$
$6,0$	$3,27$
$6,5$	$3,85$
$7,0$	$4,38$
$7,5$	$4,82$
$8,0$	$4,99$
$8,5$	$4,87$
$9,0$	$4,54$
$9,5$	$4,14$
$10,0$	$3,75$
$10,5$	$3,39$
$11,0$	$3,08$
$11,5$	$2,82$
$12,0$	$2,59$
$12,5$	$2,39$
$13,0$	$2,23$



Analisando os dados, concluiu-se que o valor da frequência para qual a amplitude de V_{out}é máxima, ou seja a frequência de ressonância, ronda os $8,0\,kHz$, o que corresponde aproximadamente ao valor obtido teoricamente.

2.1.2 Determinação da largura de banda β e da qualidade Q

Obtenção das Frequências de Corte Sendo que a largura de banda corresponde à diferença entre as frequências (angulares) de corte ω_1e ω_2, a preocupação inicial será a obtenção das frequências de corte f_{c_1}e f_{c_2}. Sabe-se que estes valores serão aqueles onde $V_{out} = \frac{V_{in}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54\,V$.

- Analisando a tabela acima, é-nos percetível que $\boldsymbol{f_{c_1}}$se encontra entre $6\,kHz$ e $6,5\,kHz$.Com recurso ao $Tina - Ti$obtivemos como valor mais próximo possível $\approx 6,24\,kHz$.
- Analisando a tabela acima, é-nos percetível que $\boldsymbol{f_{c_2}}$se encontra entre $10\,kHz$ e $10,5\,kHz$.Com recurso ao $Tina - Ti$obtivemos como valor mais próximo possível $\approx 10,28\,kHz$.

Além de estes valores obtidos serem próximos dos obtidos teoricamente, é igualmente percetível que entre $\boldsymbol{f_{c_1}}$ e $\boldsymbol{f_{c_2}}$a amplitude dos sinais de saída é superior ao do sinal de entrada a dividir por $\sqrt{2}$, levando à conclusão de que se trata de um filtro passa banda, tal como esperado.

Cálculo da Largura de Banda $\boldsymbol{\beta}$

$$\beta = (f_{c_2} - f_{c_1}) \times 2\pi \approx 25384,07\,rad/s$$

Confirma-se que este valor também é próximo do obtido teoricamente.

Cálculo da Qualidade $\boldsymbol{Q}$

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} \approx \frac{8kHz \times 2\pi}{25384,07} \approx 1,98$$

Como seria de esperar, os valores teórico e experimental de Q são bastante próximos.

2.1.3 Variação da Resistência

Com recurso ao $Tina - TI$ e utilizando o mesmo processo que no passo anterior, obteve-se os valores das frequências de corte para posterior cálculo de β.

- Para $R = 500\Omega$:
  - $f_{c_1} \approx 7,09\,kHz$
  - $f_{c_2} \approx 9,10\,kHz$
  - $\beta \approx 12629,20\,rad/s$
- Para $R = 1,5k\Omega$:
  - $f_{c_1} \approx 5,56\,kHz$
  - $f_{c_2} \approx 11,56\,kHz$
  - $\beta \approx 37699,11\,rad/s$

Comprova-se que os valores obtidos se aproximam aos calculados.

Além disso, ao reduzir o valor da resistência para metade do seu valor original, o valor de β também é reduzido aproximadamente para metade do seu valor inicial. Por outro lado, quando o valor da resistência é $1,5$ vezes o seu valor inicial, a mesma proporção é visível para β. Assim, comprova-se que a variação do valor da resistência é diretamente proporcional ao valor da largura de banda.

2.1.4 Variação do Condensador

- Para $C = 20nF$:
  - $f_{c_1} \approx 4,01\,kHz$
  - $f_{c_2} \approx 8,05\,kHz$
  - $\beta \approx 25384,07\,rad/s$
- Para $C = 5nF$:
  - $f_{c_1} \approx 9,51\,kHz$
  - $f_{c_2} \approx 13,48\,kHz$
  - $\beta \approx 24944,24\,rad/s$

Comprova-se que os valores obtidos se aproximam aos calculados.

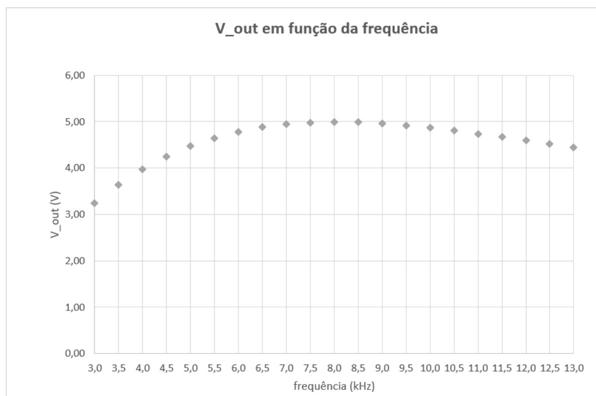
Uma vez que $\beta = \frac{R}{L}$, conclui-se que variar o valor do condensador não afeta o valor da largura de banda, ou seja, prova que estes valores são independentes entre si. Tal confirmou-se com os valores obtidos experimentalmente, nos quais é percetível apenas uma ligeira variação no valor de β, a qual podemos descartar.

2.2 Circuito em Paralelo

2.2.1 Determinação da Frequência de Ressonância

Assim como para o circuito em série, a obtenção da frequência de ressonância experimentalmente obteve-se variando a frequência so sinal de tensão de entrada e medindo para cada valor desta a onda da tensão de saída. Os dados encontram-se organizados na tabela e no gráfico abaixo:

$f\,(kHz)$	$V_{out}\,(V)$
$3,0$	$3,25$
$3,5$	$3,64$
$4,0$	$3,97$
$4,5$	$4,25$
$5,0$	$4,47$
$5,5$	$4,65$
$6,0$	$4,78$
$6,5$	$4,88$
$7,0$	$4,94$
$7,5$	$4,98$
$8,0$	$4,99$
$8,5$	$4,99$
$9,0$	$4,96$
$9,5$	$4,92$
$10,0$	$4,87$
$10,5$	$4,81$
$11,0$	$4,74$
$11,5$	$4,68$
$12,0$	$4,60$
$12,5$	$4,52$
$13,0$	$4,44$



Analisando os dados, concluiu-se que o valor da frequência para qual a amplitude de V_{out}é máxima, ou seja a frequência de ressonância, ronda os $8,0\,kHz$, o que corresponde aproximadamente ao valor obtido teoricamente, valor este também coincidente ao obtido para o circuito em série.

2.2.2 Determinação da largura de banda β e da qualidade Q

Obtenção das Frequências de Corte Sendo que a largura de banda corresponde à diferença entre as frequências (angulares) de corte ω_1e ω_2, a preocupação inicial será a obtenção das frequências de corte f_{c_1}e f_{c_2}. Sabe-se que estes valores serão aqueles onde $V_{out} = \frac{V_{in}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54\,V$.

- Analisando a tabela acima, é-nos percetível que $\boldsymbol{f_{c_1}}$se encontra entre $3\,kHz$ e $3,5\,kHz$.Com recurso ao $Tina-Ti$obtivemos como valor mais próximo possível $\approx 3,36\,kHz$.

- Para a $\boldsymbol{f_{c_2}}$, o valor encontra-se entre $19\,kHz$ e $19,5\,kHz$, sendo assim impossível a sua identificação pela tabela (uma vez que a frequência apenas se fez variar entre $3\,kHz$ e $13\,kHz$. Com recurso ao $Tina - Ti$obtivemos como valor mais próximo possível $\approx 19,09\,kHz$.

Assim como sucedido para o circuito em série, estes valores obtidos são próximos dos obtidos teoricamente, além de que entre $\boldsymbol{f_{c_1}}$ e $\boldsymbol{f_{c_2}}$a amplitude dos sinais de saída é superior ao do sinal de entrada a dividir por $\sqrt{2}$, levando à conclusão de que também se trata de um filtro passa banda.

Cálculo da Largura de Banda β

$$\beta = (f_{c_2} - f_{c_1}) \times 2\pi \approx 98834,50\,rad/s$$

Confirma-se que este valor também é próximo do obtido teoricamente.

Cálculo da Qualidade Q

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} \approx \frac{8kHz \times 2\pi}{98834,50} \approx 0,508$$

Como seria de esperar, os valores teórico e experimental de Q são bastante próximos.

2.2.3 Variação da Resistência

Com recurso ao $Tina - TI$ e utilizando o mesmo processo que no passo anterior, obteve-se os valores das frequências de corte para posterior cálculo de β.

- Para $R = 500\Omega$:
  - $f_{c_1} \approx 1,93\,kHz$
  - $f_{c_2} \approx 33,57\,kHz$
  - $\beta \approx 198799,98\,rad/s$
- Para $R = 1,5k\Omega$:
  - $f_{c_1} \approx 4,35\,kHz$
  - $f_{c_2} \approx 14,86\,kHz$
  - $\beta \approx 66036,28\,rad/s$

Comprova-se que os valores obtidos se aproximam aos calculados.

Ao reduzir o valor da resistência para metade do seu valor original, o valor de β aumenta aproximadamente para o dobro do seu valor inicial. Por outro lado, quando o valor da resistência é $1,5 = \frac{2}{3}$ vezes o seu valor inicial, β apresenta cerca de $\frac{3}{2}$do seu valor inicial. Assim, comprova-se que a variação do valor da resistência é inversamente proporcional ao valor da largura de banda, previsto anteriormente através da expressão $\beta = \frac{1}{RC}$.

2.2.4 Variação do Condensador

- Para $C = 20nF$:
  - $f_{c_1} \approx 2,97\,kHz$
  - $f_{c_2} \approx 10,88\,kHz$
  - $\beta \approx 49700\,rad/s$
- Para $C = 5nF$:
  - $f_{c_1} \approx 3,67\,kHz$
  - $f_{c_2} \approx 35,31\,kHz$
  - $\beta \approx 198799,98\,rad/s$

Comprova-se que os valores obtidos se aproximam aos calculados.

Além disso, ainda considerando a expressão $\beta = \frac{1}{RC}$, reconheceu-se que a largura de banda também seja inversamente proporcional ao valor da capacidade do condensador, relação esta confirmada pelos dados acima indicados.