Cónicas e Formas quadráticas - CCGA

Propriedades das formas quadráticas:

$\rightarrow Q(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^2 Q(x_1, \ldots, x_n)$

$Q(x_1, \ldots, x_n) = U A U^T$

A ≡ matriz valores próprios
U ≡ matriz vetores próprios

$Q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$

$Q(x,y) = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$

U é uma matriz ortogonal, ou seja, $U^T = U^{-1}$; diagonalizadora.

exemplo:

$$Q(x,y) = 2x^2 + 5y^2 + 4xy$$

$Q(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Valores próprios: $\det(Q - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0$
$\Leftrightarrow 10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$
$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 6$

matriz A (valores próprios): $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

Calcular matriz U (vetores próprios):

$Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} x & y \\ \hline \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = x \Leftrightarrow 2y = -x \Leftrightarrow x = -2y \\ 2x + 5y = y \Leftrightarrow 2x = -4y \Leftrightarrow x = -2y \end{array}$

$Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} x & y \\ \hline \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 6x \Leftrightarrow 2y = 4x \Leftrightarrow y = 2x \\ 2x + 5y = 6y \Leftrightarrow 2x = y \end{array}$

Se $x = 2$ em $x = -2y$, $y = -1$ Se $x = 1$ em $2x = y$, $y = 2$

Assim, temos:

$U = \frac{1}{\text{norma}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\text{norma} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$Q = UAU^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares

Se T é uma transformação linear, $Q(X) = \langle T(X), X \rangle$ define uma forma quadrática.

Valores Próprios de Transformação Linear Associada a uma f.q.

Seja T uma transformação linear que define uma forma quadrática Q: os valores próprios de T correspondem aos valores máximos e mínimos que Q toma no círculo unitário.

Identificar Cónicas

$\Delta = b^2 - 4ac$

Elipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ elipse

$\Delta < 0 \rightarrow$ elipse (se $A = C$, $B = 0$, círculo)

Hipérbole

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{hipérbole} \\ \Delta > 0\end{array}$$

Parábola

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

$\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, $\Delta = 0 \rightarrow$ parábola

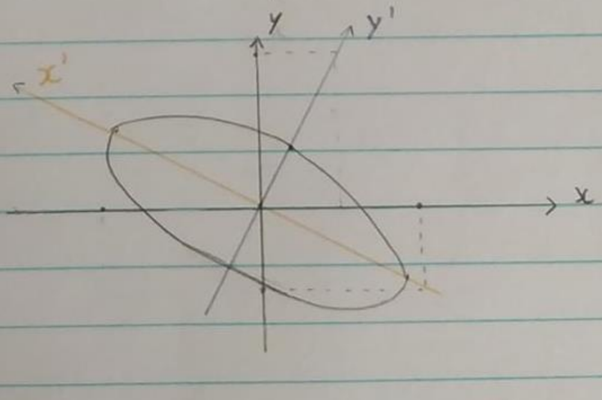
Exemplo

$$2x^2 + 5y^2 + 4xy - 1 = 0$$

Como previamente constatado, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

Nas novas coordenadas, $x'^2 + 6y'^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + 6y'^2 = 1$

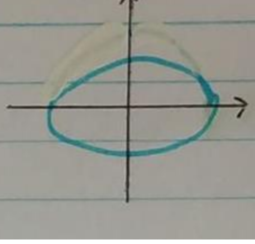
$\Leftrightarrow \dfrac{x'^2}{1^2} + \dfrac{y'^2}{(1/\sqrt{6})^2} = 1$ $\quad a = 1$, $\quad b = 1/\sqrt{6}$



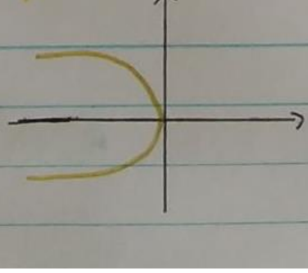
Vetores próprios:

$\underbrace{(2;-1)}_{x'}; \underbrace{(1,2)}_{y'} \rightarrow$ Elipse

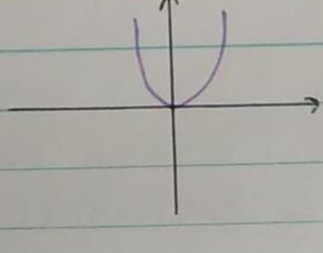
Elipse



Hipérbole



Parábola



Exponenciais de Matrizes e Sistemas de Equações Diferenciais

Exponencial de uma matriz

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots + \frac{A^n}{n!}$$

Curva definida pelo exponencial

$$\boxed{G(t) = e^{tA}}$$

$\frac{d}{dt} G(t) = A\,G(t)$ $\qquad \dot{G}(0) = A$ $\qquad G(-t) = G(t)^{-1}$

Propriedades da norma

$\|\lambda v\| = \|\lambda\|\,\|v\|$ $\qquad \|v + w\| \leq \|w\| + \|v\|$

Isometrias e Transformações Ortogonais

As isometrias tal que $f(0) = 0$ são transformações lineares $X \to AX$, com $A \in O(n)$. Toda a isometria de R^3 é $X \to AX + b$ com $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^3$

Relação com o exponencial / Matrizes Reais

Se uma matriz A $n \times n$ é real e anti-simétrica $(A^T = -A)$, então:

$e^A \in O(n)$ $\quad (e^A$ é ortogonal $\to (e^A)^T = (e^A)^{-1})$

($O(n)$ é o grupo ortogonal de matrizes $n \times n$, ou seja, e^A é ortogonal)

Relação com o exponencial / Matrizes "Imaginárias"

Se uma matriz A $n \times n$ é hermítica $(A = A^* = \bar{A}^T)$, então:

$e^{iA} \in U(n)$ $\quad (e^{iA}$ é unitária $\to (e^{iA})^* = (e^{iA})^{-1})$

($U(n)$ é o grupo unitário de matrizes $n \times n$)

Traço e Determinante do Exponencial

$$\det e^A = e^{tr\,A}$$

Métodos do Cálculo do Exponencial de uma Matriz

Se tivermos que $A = U \Lambda U^{-1}$, temos:

$$\boxed{e^A = U \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} U^{-1}}$$

$U \equiv$ matriz vetores próprios normalizados

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios da matriz A.

$\Lambda \equiv$ matriz diagonal dos valores próprios de A

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$ Valores próprios: $\det(A-\lambda)=0$

$\Leftrightarrow (5-\lambda)(2-\lambda)-4=0 \Leftrightarrow 10-5\lambda-2\lambda+\lambda^2-4=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2-7\lambda+6=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \vee \lambda=6$ $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

Vetores próprios:

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 5x-2y=x \Leftrightarrow -2y=-4x \Leftrightarrow y=2x \\ -2x+2y=y \Leftrightarrow -2x=-y \Leftrightarrow y=2x \end{array}$$

Se $x=1$, $(1,2)$

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 5x-2y=6x \Leftrightarrow -2y=x \\ -2x+2y=6y \Leftrightarrow -2x=4y \Leftrightarrow -x=2y \end{array}$$

Se $y=1$, $(-2,1)$

Assim, os vetores próprios são $(1,2)$ e $(-2,1)$ $\quad n=\sqrt{5}$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad U^T = U^{-1} = \frac{1}{\det U}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\det U = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Assim,

$$e^A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Cálculo do Exponencial de uma matriz

Se a matriz estiver na forma $A=\lambda I+N$, temos que:

$$e^A = e^\lambda \left(I + N + \frac{N^2}{2} + \dots + \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

Transformação entre grupos lineares com o exponencial

$SL(2,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2,\mathbb{R}) \text{ tal que } \det A = 1\}$

$sl(2,\mathbb{R}) = \{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ tal que } tr\, A = 0\}$

Exemplo

matriz $A \rightarrow e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots + \frac{A^n}{n!}$ $\quad I \equiv$ identidade

Sistemas de Equações Diferenciais

. $\dot{X} = AX$, com condições iniciais $X(0) = X_0$, temos a solução: $X(t) = e^{tA} X_0$

Escrita de um sistema sobre forma matricial

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Possíveis soluções:

. no caso de ser diagonalizável: $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

$a > d > 0 \rightarrow$ nodo instável

$d < a < 0 \rightarrow$ nodo estável

$a < 0 < d \rightarrow$ sela

Nodo estável degenerado $\boxed{A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \lambda I + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

. no caso: $A = \begin{bmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad X(t) = \begin{bmatrix} \cos(wt) & \sin(wt) \\ -\sin(wt) & \cos(wt) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

. no caso: $A = \begin{bmatrix} \rho & w \\ -w & \rho \end{bmatrix}$ $\qquad \rho < 0 \rightarrow$ foco estável
$\rho > 0 \rightarrow$ foco instável

$$\boxed{X(t) = e^{t\rho}\begin{bmatrix} \cos(wt) & \sin(wt) \\ -\sin(wt) & \cos(wt) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}}$$

Exemplo

Para as condições iniciais $(x(0), y(0)) = (2, 1)$ do sistema:

$$\dot{x} = x + y \qquad \dot{y} = y - x$$

Temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho = 1 \text{ e } w = 1$$

como $\rho > 0$, foco instável

Assim,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{t}\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

grupos

. um grupo é um conjunto G munido de uma operação binária associativa ($(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$) que associa a cada par $(a,b)\in G$ um elemento $a\cdot b \in G$ tal que:

$$\exists e \in G: a\cdot e = e\cdot a = a, \forall a \in G \quad \text{(elemento neutro)}$$

$$\forall a \in G, \exists a^{-1}: aa^{-1} = a^{-1}a = e \quad \text{(inverso)}$$

grupo abeliano → $a\cdot b = b\cdot a$

grupo mais pequeno → $G = \{e\}$

Segundo grupo mais pequeno → $G = \{e, a\}$

Propriedades dos Grupos:

Associativa: $(ab)c = a(bc)$

Elemento neutro: $eg = ge = g$

Inverso: $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Comutativa: $ab = ba$

Para qualquer grupo, as equações $ax = b$ e $ya = b$ admitem sempre soluções únicas, dadas por $x = a^{-1}b$ e $y = ba^{-1}$ (que são iguais caso o grupo seja abeliano).

grupo Linear geral → $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$

grupo Especial Linear → $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat_{n\times n} : \det(A) = 1\}$

grupo Ortogonal → $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^TA = AA^T = I\}$ $\quad (A^T = A^{-1})$

Grupo Ortogonal Especial → $SO(n) = \{A \in O(n)\ \det A = 1\}$

Grupo Unitário → $U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^*A = AA^* = I\}$ $\quad A^* = A^{-1}$

Grupo Unitário Especial → $SU(n) = \{A \in U(n)\ \det(A) = 1\}$