1. a) A massa solar é cerca de $2\cdot 10^{33}$ g: estime o nº de electrões aí presentes.

b) Numa anã branca, estes electrões podem estar contidos numa esfera de raio 2×10^{9} cm. Qual a correspondente energia de Fermi? E qual a velocidade de Fermi?

c) Se o mesmo número de electrões estiverem numa pulsar com raio de 10 Km, qual a energia de Fermi?

Solução: $m_p = 1{,}7\times 10^{-27}\ \text{Kg} = 1{,}7\times 10^{-24}\ \text{g}$

$$\text{Nº protões: } \frac{2\times 10^{33}}{1{,}7\times 10^{-24}} = 10^{57} \text{ electrões.}$$

Numa anã branca o volume é $\frac{4}{3}\pi\,(2\times 10^{9})^{3} \sim 3\times 10^{28}\ \text{cm}^3$

$$n = \frac{10^{57}}{3\times 10^{28}} \simeq 3\times 10^{28}\ \text{cm}^{-3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\pi r_s^3 = \frac{1}{3}\times 10^{-28}\ \text{cm}^3 \Rightarrow r_s \sim \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}10^{-28}} \sim < 0{,}1\ \text{Å} \right)$$

Admitindo $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = \hbar^2 k_F^2 c^2 + m^2 c^4$

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \Rightarrow E_F^2 = \hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} c^2 + m^2 c^4$$

c) (...)

~~d) Pressão no caso de uma anã branca:~~

2. a) Calcule a densidade de estados para um gás de Fermi 2-dim

Solução

$$\pi k^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{N}{2} \quad \to \quad \frac{N}{L^2} = \frac{k^2}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\,\frac{2mE}{\hbar^2} = N(E)$$

$$\boxed{g(E) = \frac{m}{\pi \hbar^2}}$$

b) Calcule a energia média por partícula a $T=0$

$$\frac{1}{V}\, E_{TOT} = \int_0^{E_F} \frac{m}{\pi\hbar^2}\, E\, dE = \frac{1}{2}\, E_F^2\, \frac{m}{\pi\hbar^2}$$

$$\frac{1}{V}\, N = \int_0^{E_F} \frac{m}{\pi\hbar^2}\, dE = \frac{m E_F}{\pi\hbar^2} \to$$

$$\frac{E_{TOT}}{N} = \frac{1}{2}\,\frac{E_F^{\cancel{2}}\,\cancel{m}}{\cancel{\pi\hbar^2}} \Big/ \frac{\cancel{m}\cancel{E_F}}{\cancel{\pi\hbar^2}} = \frac{1}{2}\, E_F$$

c) Calcule a "pressão" do gás a $T = 0$ K

$$p = -\frac{\partial U}{\partial V} \;;\quad U = \frac{1}{2} N E_F \;;\qquad n = \frac{k_F^2}{2\pi} \Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\, 2\pi n$$

$E_F =$

$$U = \frac{1}{2} N \frac{\hbar^2}{2m} \cdot 2\pi \frac{N}{V}$$

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -\frac{N^2 \hbar^2 \pi}{2m}\,\frac{1}{V^2} \to p = \frac{N^2 \hbar^2 n}{L^2\, 2m} \quad (\ldots)$$

3. Na tem uma estrutura ccc com $a = 4{,}25 \times 10^{-8}$ cm

Calcule n, E_F,

$$n = a^{-3}\, 2 = 2{,}6 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}$$

$$\frac{4}{3}\pi k_F^3 = \frac{(2\pi)^3}{V} \cdot \frac{N}{2}$$

$$(3\pi^2 n)^{1/3} = k_F$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} = 3{,}18\ \text{eV}.$$

4 - Prove que (para um gás de Fermi 3-dim) $g(E_F) = \frac{3}{2}\frac{n}{E_F}$

$$g(E_F) = \frac{m}{\pi^2\hbar^2}\sqrt{\frac{2mE_F}{\hbar^2}} = \frac{m}{\pi^2\hbar^2}(3\pi^2 n)^{1/3}$$

$$\cancel{\frac{2mE_F}{\hbar^2} = (3\pi^2 n)^{2/3}}$$

$$\cancel{g(E_F) = \frac{m}{\pi^2\hbar^2}(3\pi^2 n)^{1/3}}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} \longrightarrow \frac{3}{2}\,\frac{n}{\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}}$$

$$g(E_F) = \frac{m}{\pi^2\hbar^2}(3\pi^2 n)^{1/3} \longleftrightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{2m}{\hbar^2}\,\frac{n^{1/3}}{(3\pi^2)^{2/3}}$$

$$= \frac{m}{\quad}$$