Exame de Mecânica Analítica e dos Meios Contínuos

Licenciatura em Física

Universidade do Minho — 10 de Fevereiro de 2011

I

1- Considere um sistema dinâmico formado por N partículas pontuais e tal que existem l equações de ligação. O princípio de d' Alembert pode para este sistema ser traduzido pela seguinte equação,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0\,.$$

(a) Como se denominam as quantidades $\delta\vec{r}_i$? Defina e explique as propriedades destas quantidades.

(b) Será que no presente caso as componentes das quantidades vectoriais da alínea anterior são independentes? Justifique a sua resposta.

(c) As equações de Lagrange deste sistema podem ser escritas em termos da energia cinética total T como,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j\,.$$

Qual é o número destas equações? Justifique a sua resposta.

(d) Indique qual a forma das forças $\vec{F}_i$ e das componentes de força generalizadas Q_j que permitem escrever as equações de Lagrange do sistema na seguinte forma,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,.$$

Justifique a sua resposta.

2- Ao contrário das molas ideais, as molas reais têm massa e são feitas de um certo material. Considere a quantidade,

$$\sigma_{ij} = 2\mu\, u_{ij} + \lambda\,\delta_{i,j}\sum_k u_{kk}\,. \qquad (1)$$

(a) A que tipo de material se aplica esta expressão?

materiais Isotrópicos

Tensões → Elementos adaptados tirando nas Diagonais

(b) Defina as quantidades σ_{ij} e u_{ij} e explique o seu significado físico.

→ Coeficiente de Distorção

(c) A que se referem os índices i e j que aparecem em σ_{ij} e u_{ij}? Qual o seu número?

N bm

(d) Qual a dimensão dessas duas quantidades? Em que unidades normalmente se expressam?

unidades adimensionais

(e) Defina também as quantidades μ e λ e explique o seu significado físico.

Coeficientes de Lamé

(f) Qual a Lei a que a expressão acima dada se refere? Tal Lei é nela expressa de forma directa ou inversa? Justifique as suas respostas. Lei de Hooke para Materiais Isotrópicos. A lei é expressa de forma directa.

II

1- Considere o seguinte Lagrangeano de um ponto material de massa m,

$$L = \frac{1}{2} m \, (\vec{v} + A\,\vec{r})^2 \,, \tag{2}$$

onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $\vec{r} = [x, y, z]$ é o vector posição do ponto material e A uma constante.

(a) Escreva as equações de Lagrange do sistema.

(b) Usando a devida transformação de Legendre, determine o Hamiltoneano do ponto material.

(c) Escreva as equações de Hamilton para o Hamiltoniano obtido na alínea anterior.

2- Considere um paralelepípedo homogéneo de base quadrada de lado $2a$ e cuja altura é $2c$. Utilize um sistema de referência Cartesiano cuja origem coincide com o centro geométrico do paralelepípedo e cujos eixos são paralelos às suas arestas, tal como representado na figura (desenhada no quadro). Determine:

(a) O tensor de inércia do sistema relativamente aos eixos coordenados representados na figura.

(b) O momento de inércia do corpo em relação a um eixo que passe pela origem das coordenadas, o qual forme com o eixo OZ um ângulo α e cuja projecção no plano OXY forme um ângulo β com o eixo OX.

(c) Os momentos principais de inércia do sistema e para cada um destes o respectivo eixo principal de inércia.