Cap. 1. Conceitos básicos de Geometria Analítica em $\mathbb{R}^n$ (Resumo)

1 O conjunto $\mathbb{R}^n$

Seja $n \geq 1$ um número natural. Indicamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto dos n-uplos ordenados de números reais:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, : \, x_1 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Em particular:

- $\mathbb{R}^1$ identifica-se ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.
- Os elementos de $\mathbb{R}^2$ são os pares ordenados (x, y) de números reais x, y.
- Os elementos de $\mathbb{R}^3$ são os ternos ordenados (x, y, z) de números reais x, y, z.

Os números reais $x_1, x_2, \ldots x_n$ são as **componentes** do elemento $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Vamos também usar às vezes a notação em coluna e escrever

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

em vez de $(x_1, \cdots, x_n)$. Dois elementos $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ são iguais se têm as mesmas componentes (na mesma ordem), isto é se, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $x_i = y_i$.

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados *pontos* ou *vetores* de $\mathbb{R}^n$ e podem ser representados gemetricamente por pontos ou segmentos orientados (setas). O elemento $(0, \ldots, 0)$ é chamado *origem* ou *vetor nulo* de $\mathbb{R}^n$ e é denotado por $\vec{0}$ ou $\mathcal{O}$.

Soma de vetores. A soma de dois elementos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ é o elemento de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\underbrace{\mathbf{x} + \mathbf{y}}_{\text{notação}} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Multiplicação escalar. O produto de um elemento $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ por um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ é o elemento de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\underbrace{\lambda \cdot \mathbf{x}}_{\text{notação}} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Muitas vezes, escreveremos $\lambda \mathbf{x}$ em vez de $\lambda \cdot \mathbf{x}$.

Observações.

- A soma é uma operação comutativa e associativa: para $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tem-se
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad \text{e} \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}).$$

- Também tem-se, para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$\begin{array}{llll} \mathbf{x} + \vec{0} = \mathbf{x} & 0 \cdot \mathbf{x} = \vec{0} & 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} & \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{x} = \vec{0} \\ \alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x} & \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x} = (\alpha + \beta)\mathbf{x} & \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}. & \end{array}$$

Simétrico. O simétrico de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o elemento de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\underbrace{-\mathbf{x}}_{\text{notação}} = (-1) \cdot \mathbf{x} = (-x_1, ..., -x_n).$$

Diferença. A diferença de dois elementos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ é o elemento de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{y}}_{\text{notação}} = \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{y} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n).$$

Observação. Dados dois pontos A e B de $\mathbb{R}^n$, a diferença $B - A$ será muitas vezes indicada por $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

e representada por um segmento orientado de A para B. Observe-se que, denotando a origem por $\mathcal{O}$, tem-se, para todo o $M \in \mathbb{R}^n$, $M = M - \mathcal{O} = \overrightarrow{\mathcal{O}M}$.

2 Retas e Planos de $\mathbb{R}^n$

Vetores paralelos. Dois vetores v, w de $\mathbb{R}^n$ são **paralelos** se um dos vetores for múltiplo escalar do outro, isto é, se existir um número real α tal que

$$v = \alpha w \quad \text{ou} \quad w = \alpha v.$$

Observações.

- Com esta definição, o vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a todo o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ pois $\vec{0} = 0v$.
- Se v, w forem <u>não nulos</u> tem-se:

$$\begin{aligned} v \text{ e } w \text{ são parelelos} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe um número real } \alpha \neq 0 \text{ tal que } v = \alpha w \\ &\Leftrightarrow \quad \text{existe um número real } \beta \neq 0 \text{ tal que } w = \beta v. \end{aligned}$$

Combinação linear de vetores. Sejam $u, w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que o vetor u é **combinação linear** (CL) dos vetores $w_1, \ldots w_k$ se existirem $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k.$$

Exemplos.

- Todo o vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ pois
$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2.$$
- Todo o vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ pois
$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$
Escreva a generalização a $\mathbb{R}^n$!
- (Ver Ficha 1, Ex.2) Em $\mathbb{R}^2$, o vetor $(0, 1)$ é CL de $v = (1, 2)$ e $w = (-3, 1)$ pois existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(0, 1) = \alpha v + \beta w$. Explicitamente $(0, 1) = \frac{3}{7}v + \frac{1}{7}w$.

O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $w_1, \cdots, w_k$ é

$$\underbrace{\langle w_1, \cdots, w_k \rangle}_{\text{notação}} = \{\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k \text{ com } \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

Em particular, se $w \in \mathbb{R}^n$, $\langle w \rangle = \{\alpha w \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Observação. Se v e w são dois vetores não nulos e paralelos, tem-se $\langle v, w \rangle = \langle v \rangle = \langle w \rangle$.

Retas. Sejam $v = (v_1, \cdots, v_n) \neq \vec{0}$ um vetor <u>não nulo</u> de $\mathbb{R}^n$ e $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. A **reta** de $\mathbb{R}^n$ que passa pelo ponto A e que é dirigida pelo vetor v é dada pelo conjunto

$$\mathcal{R} = \{A + tv \,:\, t \in \mathbb{R}\}$$

ainda denotado por

$$\mathcal{R} = A + \langle v \rangle.$$

Para $M = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$M \in \mathcal{R} \text{ se só se existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } M = A + tv.$$

Chamamos **equações paramétricas** da reta $\mathcal{R}$ ao sistema

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ \vdots & (t \in \mathbb{R}) \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases}$$

Observações.

- Se $v \neq \vec{0}$, $\langle v \rangle$ é a reta dirigida pelo vetor v que passa pela origem $\mathcal{O} = (0, ..., 0)$ de $\mathbb{R}^n$. A reta $A + \langle v \rangle$ é a imagem da reta $\langle v \rangle$ pela translação:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & u + A = u + \overrightarrow{\mathcal{O}A} \end{array}$$

- Sejam A e B dois pontos distintos de $\mathbb{R}^n$. A reta que passa por A e B é a reta $A + \langle \overrightarrow{AB} \rangle$.

Planos. Sejam $v = (v_1, \cdots, v_n)$ e $w = (w_1, \cdots, w_n)$ dois vetores não paralelos (e portanto não nulos) de $\mathbb{R}^n$ e seja $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. O **plano** de $\mathbb{R}^n$ que passa pelo ponto A e que é dirigido pelos vetores v e w é dado pelo conjunto

$$\mathcal{P} = \{A + tv + sw \,:\, t, s \in \mathbb{R}\} = A + \langle v, w\rangle.$$

Para $M = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$M \in \mathcal{R} \text{ se e só se existem } t, s \in \mathbb{R} \text{ tais que } M = A + tv + sw.$$

Chamamos **equações paramétricas** do plano $\mathcal{P}$ ao sistema

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 + sw_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tv_n + sw_n \end{cases} \qquad (t, s \in \mathbb{R})$$

Observações.

- Se $v, w \in \mathbb{R}^n$ não são paralelos, $\langle v, w\rangle$ é o plano dirigido pelos vetores v e w que passa pela origem $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$. O plano $A + \langle v, w\rangle$ é a imagem do plano $\langle v, w\rangle$ pela translação:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & u + A = u + \overrightarrow{\mathcal{O}A} \end{array}$$

- Sejam A, B e C três pontos de $\mathbb{R}^n$ tais que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são não paralelos (A, B e C são ditos não alinhados). O plano que passa por A, B e C é o plano $A + \langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle$.

Equação cartesiana.

Em $\mathbb{R}^2$, a eliminação do parâmetro nas equações paramétricas de uma reta $\mathcal{R} = A + \langle v\rangle$ permite determinar uma **equação cartesiana** da reta da forma

$$ax + by = c \qquad (\text{onde } a, b, c, \in \mathbb{R})$$

o que corresponde a uma descrição do conjunto $\mathcal{R}$ da seguinte forma

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ax + by = c\}.$$

Da mesma forma, em $\mathbb{R}^3$, a eliminação dos parâmetros nas equações paramétricas de um plano $\mathcal{P} = A + \langle v, w\rangle$ conduz a uma **equação cartesiana** do plano da forma

$$ax + by + cz = d \qquad (\text{onde } a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

correspondendo a uma descrição do conjunto $\mathcal{P}$ da seguinte forma

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, ax + by + cz = d\}.$$

Observações.

- O produto escalar, desenvolvido na próxima seção, vai permitir interpretar geometricamente essas equações.
- Em $\mathbb{R}^3$, uma reta pode ser caracterizada através de um sistema de duas equações cartesianas de planos. Isto corresponde a descrever a reta como interseção de dois planos de $\mathbb{R}^3$.

3 Produto escalar em $\mathbb{R}^n$

Dados dois vectores $u = (u_1, \dots u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$, o **produto escalar** (ou **produto interno**) de u e v é o número real dado por

$$\underbrace{(u|v) = u \cdot v}_{\text{notações}} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n.$$

O produto escalar tem as seguintes propriedades: dados $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

(a) $(u|v) = (v|u)$

(b) $(u|v + w) = (u|v) + (u|w)$ e $(u + v|w) = (u|w) + (v|w)$

(c) $(\lambda u|v) = \lambda(u|v)$ e $(u|\lambda v) = \lambda(u|v)$

(d) $(u|u) \geq 0$ e $(u|u) = 0$ sse $u = \vec{0}$.

A **norma** de um vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Observações.

- A norma de um vector de $\mathbb{R}^1$, isto é, de um número real x, é o valor absoluto (modulo) $|x|$ deste número.
- Para $v \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ e $\|v\| = 0$ sse $v = \vec{0}$.
- Geometricamente, a norma de um vetor v de $\mathbb{R}^n$ é o comprimento deste vetor, isto é, a distância do ponto v à origem $\mathcal{O}$.

A **distância** entre dois pontos $A, B \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\underbrace{d(A,B)}_{\text{notação}} = \|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\|.$$

Circunferências e esferas. Dados $r \geq 0$ um número real e $A = (a_1, ..., a_n)$ um ponto de $\mathbb{R}^n$, a **esfera** de $\mathbb{R}^n$ de centro A e de raio r é o conjunto

$$\{M = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : d(A, M) = r\}.$$

Como $d(A,M) = r \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2$, a equação cartesiana deste conjunto escreve-se

$$(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = r^2.$$

Se $n = 2$, usa-se a palavra **circunferência** em vez de esfera. Nota-se que a circunferência $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ de centro (a, b) e de raio $r > 0$, isto é, de equação cartesiana

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

pode também ser descrita através de equações *paramétricas*:

$$\begin{cases} x = a + r\cos t \\ y = b + r\operatorname{sen} t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Isto é, $\mathcal{C} = \{(a + r\cos t, b + r\operatorname{sen} t) : t \in \mathbb{R}\}$. Como as funções cos e sen são 2π-periódicas, o parâmetro pode ser tomado em qualquer intervalo de comprimento 2π.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$|(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Vale a igualdade se e só se u e v são paralelos (isto é, um dos vectores é múltiplo escalar do outro).

Observação. Da desigualdade de Cauchy-Scwarz pode-se deduzir a *desigualdade triangular*:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad (u, v \in \mathbb{R}^n).$$

Ângulos. Para dois vectores $u \neq \vec{0}$ e $v \neq \vec{0}$, temos, pela desigualde de Cauchy-Schwarz:

$$-1 \leq \frac{(u|v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

O **ângulo** entre dois vectores $u \neq \vec{0}$ e $v \neq \vec{0}$ de $\mathbb{R}^n$ é o único número real $\angle(u, v) \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \angle(u, v) = \frac{(u|v)}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Observações. Para dois vectores não nulos $u, v \in \mathbb{R}^n$, temos

- $\angle(u, v) = \angle(v, u)$ (é um ângulo não orientado).
- $(u|v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \angle(u, v)$.
- u e v são paralelos sse $\angle(u, v) = 0$ ou $\angle(u, v) = \pi$.
- $(u|v) = 0$ sse $\angle(u, v) = \dfrac{\pi}{2}$

Dizemos que os vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ são **ortogonais** se $(u|v) = 0$.

Observação. O vetor nulo $\vec{0}$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$. Dois vectores não nulos $u, v \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais se e só se $\angle(u, v) = \dfrac{\pi}{2}$.

Hiperplanos de $\mathbb{R}^n$. Sejam $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$ um número real. Seja $\mathcal{H}_b$ o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido pela equação cartesiana

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

isto é, $\mathcal{H}_b = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$.

Escrevendo $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, tem-se $\mathcal{H}_b = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a}|\mathbf{x}) = b\}$.

O conjunto $\mathcal{H}_b$ não é vazio pois, como $\mathbf{a} \neq \vec{0}$, sempre existe um ponto $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ pertencente a $\mathcal{H}_b$, isto é, verificando $a_1p_1 + \cdots + a_np_n = b$. Em particular, se $b = 0$ tem-se $(0, ..., 0) \in \mathcal{H}_0$.

Verifica-se que $\mathcal{H}_b$ é uma reta se $n = 2$ e é um plano se $n = 3$. Veremos no Capítulo 2 que, em geral, $\mathcal{H}_b$ é um objeto de $\mathbb{R}^n$ de "dimensão" $n - 1$ que chamaremos **hiperplano** de $\mathbb{R}^n$. O produto escalar permite dar a seguinte interpretação:

- Se $b = 0$, $\mathcal{H}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a}|\mathbf{x}) = 0\}$ contém a origem de $\mathbb{R}^n$ e é o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais ao vetor $\mathbf{a}$. É chamado **hiperplano** de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem e que é **perpendicular** (**normal**) ao vetor $\mathbf{a}$. Também diz-se que o vetor $\mathbf{a}$ é **normal** ao hiperplano.

- Suponhamos agora $b \neq 0$ e seja $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) \neq (0, ..., 0)$ um ponto pertencente a $\mathcal{H}_b$. Como $a_1p_1 + \cdots + a_np_n = b$ tem-se

$$\begin{array}{rrcl} & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = & b \\ \Leftrightarrow & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = & a_1p_1 + \cdots + a_np_n \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{a}|\mathbf{x}) & = & (\mathbf{a}|\mathbf{p}) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{a}|\mathbf{x} - \mathbf{p}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} - \mathbf{p} & \in & \mathcal{H}_0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} & \in & \mathbf{p} + \mathcal{H}_0 \end{array}$$

  Isto significa que $\mathcal{H}_b = \mathbf{p} + \mathcal{H}_0$. É o conjunto de todos os $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{a}$ e a imagem de $\mathcal{H}_0$ pela translação

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \qquad u \mapsto u + \mathbf{p}$$

  Dizemos que $\mathcal{H}_b$ é o **hiperplano** de $\mathbb{R}^n$ que passa pelo ponto $\mathbf{p}$ e que é **perpendicular** (**normal**) ao vetor $\mathbf{a}$.

Projeção sobre um vetor. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Vímos, no Ex.23 da Ficha 1, que todo o vetor $w \in \mathbb{R}^n$ escreve-se de maneira única como

$$w = \frac{(w|v)}{(v|v)} v + u \qquad \text{com } (u|v) = 0.$$

Chama-se **projeção** do vetor w sobre o vetor v ao vetor

$$\underbrace{pr_v(w) = w_v}_{\text{notações}} = \frac{(w|v)}{(v|v)} v$$

Se $w \neq \vec{0}$, tem-se $\|pr_v(w)\| = \dfrac{|(w|v)|}{\|v\|} = \|w\| \cdot |\cos \angle(w, v)|$.

Distância entre um ponto e um hiperplano. Dados $\mathbf{a}$ um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ dois pontos, a **distância** entre $\mathbf{q}$ e o hiperplano $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^n$ que passa pelo ponto $\mathbf{p}$ e que é perpendicular ao vetor $\mathbf{a}$ é dada por:

$$d(\mathbf{q}, \mathcal{H}) = \|pr_{\mathbf{a}}(\mathbf{q} - \mathbf{p})\| = \frac{|(\mathbf{a}|\mathbf{q} - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{a}\|}$$

Pode se verificar que é a menor distância entre o ponto $\mathbf{q}$ e um ponto de $\mathcal{H}$:

$$d(\mathbf{q}, \mathcal{H}) = \min\{d(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in \mathcal{H}\}.$$

4 O produto vetorial em $\mathbb{R}^3$

Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ dois vectores de $\mathbb{R}^3$. O **produto vetorial** (ou **produto externo**) de u e v é o vector

$$\underbrace{u \wedge v = u \times v}_{\text{notação}} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

O produto vetorial tem as seguintes propriedades: dados $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

(a) $u \wedge v = -v \wedge u$

(b) $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v)$

(c) $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$

(d) $(u \wedge v|u) = (u \wedge v|v) = 0$

(e) (Identidade de Lagrange) $||u \wedge v||^2 = ||u||^2||v||^2 - (u|v)^2$

(f) $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen} \angle(u, v)$.

Observações. Usando essas propriedades podemos estabelecer que:

- o vector $u \wedge v$ é ortogonal a u e a v e a qualquer vetor de $\langle u, v\rangle$.
- u e v são paralelos se e só se $u \wedge v = (0, 0, 0)$.
- se u e v não são paralelos, então $u \wedge v$ é um vetor normal ao plano $\langle u, v\rangle$.
- o comprimento do vector $u \wedge v$ é igual à área do paralelogramo determinado pelos vetores u e v.