4. Os potenciais e a formulação Lagrangiana e Hamiltoniana da electrodinâmica.

4.1 - Formulação Lagrangiana para potenciais dependentes da velocidade.

Consideremos uma força $\vec{F}$ que actua numa partícula. $\vec{F}$ pode ter uma componente conservativa e outra não conservativa:

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + Q_k \qquad (7)$$

Se definirmos $L = T - U$ (o Lagrangiano), então, o princípio de acção mínima implica que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \qquad (8)$$

Consequentemente:

$$\sum_k \left\{ \dot{q}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \right\} = \sum_k \dot{q}_k Q_k \qquad (9)$$

Mas:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dt}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Admitamos que L não depende explicitamente do tempo $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Então:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{d\dot{q}_k}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Logo:

$$(9) \iff \sum_k \left\{ \dot{q}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right\} - \frac{dL}{dt} = \sum_k \dot{q}_k Q_k$$

$$\iff \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\sum_k \dot{q}_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - L \right]}_{H} = \sum_k \dot{q}_k Q_k$$

$$\frac{d}{dt} H = \sum_k \dot{q}_k Q_k$$

(o Hamiltoniano varia no tempo devido à força dissipativa)

A força de Lorentz depende da posição e velocidade da partícula. Se queremos exprimir essa força a partir de um potencial, então, esse potencial deverá depender da posição e velocidade da partícula:

$$U(q_k, \dot{q}_k)$$

Claro que a relação entre U e F_k deve ser:

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

- $\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k}(T-U) = 0 \right]$

• Verifique dimensionalmente:

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right)}$$

$F_k \rightarrow M L T^{-2}$

$-\dfrac{\partial U}{\partial q_k} \rightarrow M L^2 T^{-2} . L^{-1}$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) \rightarrow T^{-1} M L^2 T^{-2} L^{-1} T$

$\downarrow$

$M L^2 T^{-2} L^{-1}$ o.k.

Vejamos então:

$$\vec{F} = q\left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right]$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

$$\vec{F} = q\left[-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \nabla \wedge \vec{A}\right]$$

Podemos associar a esta força um potencial? De acordo com as considerações anteriores

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) \quad (*)$$

Então:

$$F_x = q\left[-\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y\left[\nabla\wedge\vec{A}\right]_z - v_z\left[\nabla\wedge\vec{A}\right]_y\right]$$

$$= q\left[-\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\right]$$

$$F_x = q\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - V_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - V_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - V_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right]$$

$$= q\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\nabla)A_x \right]$$

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)A_x \right]$$

Note que $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{r},t)$ não depende da velocidade. Isto significa que:

$$\frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{v}\cdot\vec{A}) = A_x$$

claro que: $\dfrac{d}{dt} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)$

Então:

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) \right]$$

Mas $\phi(\vec{r},t)$ também não depende de $\vec{v}$. Então podemos escrever

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A})\right]\right]$$

Comparando com (*) concluímos que

$$U_{em} = q\left[\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right]$$

e fica $$F_x = -\frac{\partial U_{em}}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_{em}}{\partial v_x}\right)$$

O Lagrangiano da partícula é:

$$L(\vec{r},\vec{v}) = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + q\,\vec{v}\cdot\vec{A}$$

As equações de movimento (Euler-Lagrange) são:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

O momento conjugado

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} = m v_k + q A_k$$

i.e.:

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$ (não é a quantidade de movimento).

O Hamiltoniano é:

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_k \dot{q}_k)$$

$$= \vec{v}\cdot\vec{p} - L(\vec{r},\vec{v})$$

$$= m\,\vec{v}\cdot\vec{v} + \cancel{q(\vec{v}\cdot\vec{A})} - \frac{1}{2} m v^2 + q\phi - \cancel{q(\vec{v}\cdot\vec{A})}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2} m v^2 + q\phi} \Rightarrow H = \sum_k \left(\frac{p_k - q A_k}{m}\right)^2 \frac{m}{2} + q\phi$$

Notas à margem:

- A quantização do campo electromagnético faz-se naturalmente a partir da sua formulação Lagrangeana (ou Hamiltoniana) e envolve então os potenciais e não os campos directamente.

- Além disso, os campos são derivados a partir de um único 4-vector $(\phi, \vec{A})$ que tem origem nas cargas e correntes que também formam um 4-vector $(\rho, \vec{J})$. Isto significa que a formulação do campo electromagnético se deverá poder fazer de forma mais eficiente no contexto de um espaço de Minkowski. Ou, de outra forma, que o campo electromagn. de Maxwell é um campo conforme aos princípios da Relatividade restrita. (Veremos seguidamente mais coisas sobre isto adiante).

- A liberdade de Gauge $A'_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ $(\mu = 1,2,3,4)$ pode ser abordada no contexto das álgebras de Lie. Este é o ponto mais profundo que poderemos eventualmente abordar mais tarde. (veremos). Em todo o caso, a transformação de Gauge está associada a uma invariância sob um grupo contínuo $U(1)$ $[\psi \to e^{i\delta}\psi]$. Consequentemente, de acordo com o teorema de Noether, existe uma corrente que é conservada. No caso, essa corrente é $j_\mu = (\vec{J}, \rho)$ a carga eléctrica. Mas, a discussão deste muito importante ponto está fora do âmbito destas notas.

o

Problemas

1. Considere os seguintes potenciais

$$\phi = 0 \; ; \qquad \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 k}{4c} \left[ct - |x| \right]^2 \hat{z} & \text{se } |x| < ct \\ 0 & \text{se } |x| > ct \end{cases}$$

Encontre ~~a~~ uma distribuição de cargas e correntes que lhes correspondam.

Solução:

$|x| < ct$

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\dfrac{\mu_0 k}{2} \left[ct - |x| \right] \hat{z} \\ \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \hat{y} = \pm \dfrac{\mu_0 k}{2c} \left[ct - |x| \right] \hat{y} \end{cases}$$

$\left(\begin{matrix} + , & x > 0 \\ - & x < 0 \end{matrix} \right)$

$|x| > ct \qquad \vec{E} = \vec{B} = 0$

(**) $\quad \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = \dfrac{\partial B_y}{\partial y} = 0$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{y} = \mp \frac{\mu_0 k}{2} \hat{y}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = -\frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{z} = -\frac{\mu_0 k}{2c} \hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{c k \mu_0}{2} \hat{z} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \pm \frac{\mu_0 k}{2} \hat{y}$$

$\therefore$ Assim: $\quad \nabla \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \wedge \vec{B} = \dfrac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \dot{\vec{D}}$ (*)

(as eq. de Maxwell são verificadas se (*) $\vec{J} = 0$ e (**) $\rho = 0$)

$\vec{B}$ varia descontinuamente em $x=0$ (i.e., no plano YZ).

$$\bar{B}_+ - \bar{B}_- = 2.\frac{\mu_0 k t}{2}\,\hat{y}\;\Big|_{x=0}$$ $\Rightarrow$ existência de uma densidade superficial de corrente neste plano

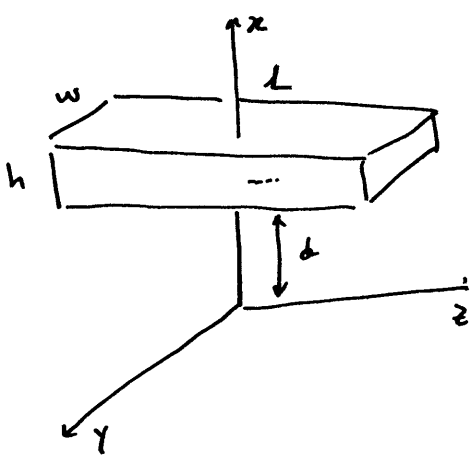
$$\frac{1}{\mu_1} B''_1 - \frac{1}{\mu_2} B''_2 = \vec{K}\wedge\hat{x} \qquad (\mu_1 = \mu_2 = \mu_0)$$

Então:

$$\frac{kt}{2}\,\hat{y} = \vec{K}\wedge\hat{x} \Rightarrow \underline{\vec{K} = kt\,\hat{z}}$$

□

2. (Problema 10.2) : Para o exemplo anterior (ex. 1), considere uma caixa rectangular de comprimento L largura w e altura h localizada a uma distância d acima do plano YZ :



a) Calcule a energia electromagnética na caixa para $t = t_1 = \frac{d}{c}$ e $t_2 = \frac{d+h}{c}$

b) Obtenha o vector de Poynting e determine o fluxo de energia para a caixa entre t_1 e t_2.

c) Compare b) e a).

Soluções:

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) \qquad \vec{E} = -\frac{\mu_0 K}{2}\left[ct - |x|\right]\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2c}\left[ct - |x|\right]\hat{y}$$

$t_1 = \frac{d}{c} \rightarrow \vec{E} = \vec{B} = 0 \Rightarrow u = 0$ (mas há energia em na caixa)

$$t_2 = \frac{d+h}{c} \rightarrow \vec{E} = -\frac{\mu_0 K}{2}\left[d+h - |x|\right]\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2c}\left[d+h-|x|\right]\hat{y}$$

$$\frac{E}{c} = B$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) = \varepsilon_0 E^2$$

$$U(t_2) = \int_V u \, d\vec{r} = Lw\,\varepsilon_0 \int \left(\frac{\mu_0 K}{2}\right)^2 (d+h-x)^2\, dx =$$

$$= Lw\,\varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 K^2}{4}\int_d^{d+h} (d+h-x)^2\, dx =$$

$$= Lw\,\varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 K^2}{4}\left(-\frac{1}{3}(d+h-x)^3\right)\Bigg|_d^{d+h} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 K^2 Lw\, h^3}{12}$$

b) $$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) = +\frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_0^2 K^2}{4c}\left[ct - |x|\right]^2 \hat{x}$$

A energia que entra na caixa entre t_1 e t_2 é:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{\cancel{\mu_0}}\frac{\mu_0^{\cancel{2}} K^2}{4c}\left[ct - d\right]^2 \cdot Lw\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \text{Resultado da (a)}.$$

Problema-3: Encontre os campos, cargas e correntes que correspondem os potenciais:

$$\phi = 0 \quad ; \quad \vec{A} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}$$

Solução:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{J} = 0 \quad e \quad \rho = q\,\delta(\vec{r})$$

Problema 4: Use a transformação de Gauge $\lambda = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r}$ para transformar os potenciais do problema anterior:

Solução:

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \vec{A}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r} = 0$$

Problema-5: Seja $\phi = 0$; $\vec{A} = A_0\hat{y}\sin(kx - \omega t)$

Calcule $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

Soluçaõ:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -A_0 \omega \hat{y} \cos(kx-\omega t)$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{z} = A_0 k \cos(kx-\omega t)\hat{z}$$

(verifique que as eq. de Maxwell são verificadas)

Problema -6 : Verifique se os potenciais dos exercícios 1, 3 e 5 estão no Gauge de Lorentz ou de Coulomb.

Soluçaõ:

(1) $\phi = 0$ $\quad \vec{A} = \frac{\mu_0 k}{4c}\left[ct - |x|\right]^2$ se $|x| < ct$

$\vec{A} = 0$ $\quad (|x| > ct)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \nabla\cdot\vec{A} = 0 \quad e \quad \nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

Gauge de Coulomb $\qquad$ Gauge de Lorentz.

(ambos)

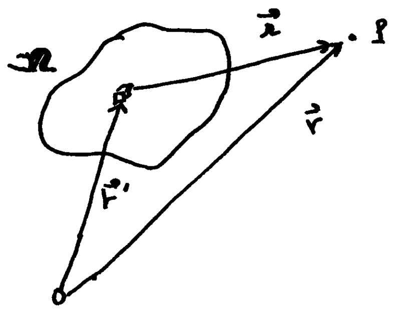
(3) $\phi = 0$; $\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}$

$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$; $\nabla\cdot\vec{A} \neq 0$ (Nem Coulomb nem Lorentz)

(5) $\phi = 0$; $A = A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{y}$

$\nabla \cdot \vec{A} = 0$ $\quad \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (ambas a Gauss.

5. Potenciais avançados e Retardados



Consideremos um volume Ω no qual existe uma distribuição de cargas e correntes descritas pelas densidades $(\rho, \vec{J})$. O problema que deveremos resolver é o de calcular os potenciais $\phi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ gerados em $\vec{r}$ por essas densidades. (ver figura).

Como vimos, as duas equações que relacionam potenciais e fontes são:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J}$$

Adoptemos a Gauge de Lorentz; então $\nabla\cdot\vec{A} \equiv -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Estas equações reduzem-se a

$$\nabla^2 \phi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

ou:

$$\Box^2 \begin{bmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \rho/\varepsilon_0 \\ \mu_0 \vec{J} \end{bmatrix}$$

(simples e simétrico!)

Em regime estacionário, ρ e $\vec{J}$ não dependem do tempo e $\therefore$ $(\phi, \vec{A})$ também não dependem do tempo. As equações anteriores reduzem-se, neste limite, a equações bem conhecidas da electro- e magneto-estática:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

Estas equações têm, como vimos, soluções do tipo:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r}\,d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{r}\,d^3r'$$

Para situações não estacionárias, podemos invocar um argumento heurístico simples: enquanto não chegar informação a $\vec{r}$ das alterações de ρ e $\vec{J}$ nada muda. Por outras palavras $\phi(\vec{r}, t)$ dependerá de $\rho(\vec{r}\,', t_r)$ em que $t_r = t - \frac{r}{c}$ é o tempo actual menos o tempo que a informação demora a propagar-se de $\vec{r}\,'$ a $\vec{r}$, a uma velocidade c.

Podemos adivinhar então (para a situação dinâmica) soluções do tipo:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,', t_r)}{r}\,d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{A}(\vec{r}\,', t_r)}{r}\,d^3r'$$

Evidentemente, $t_R = t_R(t, \vec{\imath})$. Vejamos se este tipo de soluções satisfaz. Consideremos $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$\nabla^2\phi = ?$ $\qquad \nabla\cdot\nabla\phi$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}', t_R)}{\imath}\right] d^3r'$$

∇ actua sobre $\vec{r}$; ora $|\vec{\imath}| = |\vec{r}-\vec{r}'|$ e $t_R = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ dependem de $\vec{r}$. Logo:

$$\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\nabla\rho\cdot\frac{1}{\imath} + \rho\,\nabla\left(\frac{1}{\imath}\right)\right] d^3r'$$

- $\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t_R}\nabla t_R \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t}\nabla t_R$ $\quad$ (visto que $t_R = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$)

$$\equiv -\frac{1}{c}\dot{\rho}\,\hat{\imath}$$

- $\nabla\left(\frac{1}{\imath}\right) = -\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}$

$$\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\imath}}{\imath} - \rho\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right] d^3r'$$

Podemos agora calcular a divergência ($\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$)

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\,\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\imath}}{\imath}\right) - \frac{\hat{\imath}}{\imath\cdot c}\cdot\vec{\nabla}\left(\dot{\rho}\right) - \frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\cdot(\nabla\rho) - \rho\,\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right)\right] d^3r'$$

[Recorde que $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot\nabla f$]

claro que:

$$\nabla(\dot{\rho}) = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\,\nabla r = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\,\hat{r}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta(\vec{r})$$

(verifique isto)

Então:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\cancel{-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{1}{r^2}} + \frac{\hat{r}}{rc}\cdot\frac{1}{c}\ddot{\rho}\,\hat{r} - \cancel{\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\left(-\frac{1}{c}\dot{\rho}\,\hat{r}\right)} - \rho\,4\pi\delta(\vec{r})\right]d^3r'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{r} - 4\pi\rho\,\delta(\vec{r})\right]$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} - \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$ que é a eq. original.

A soluçao "Retardada" satisfaz a equaçao. Da mesma forma, se provo que $\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = -k\vec{j}$ também é satisfeita pela respectiva soluçao "retardada"

<u>Mas</u>, nada impede, na electrodinâmica de Maxwell, que os potenciais actuais dependam das distribuições de cargas e correntes futuras!

Isto é, podemos definir soluções do tipo:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_a)}{r}\,d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{A}(\vec{r}\,',t_a)}{r}\,d^3r'$$

onde:

$$t_a = t + \frac{r}{c}$$

(a informação vem do futuro e não do passado)

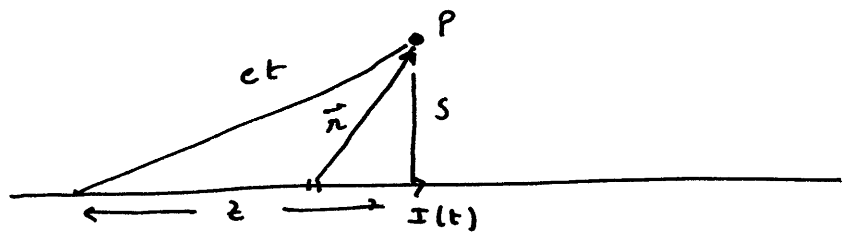
Pode verificar que estas soluções (potenciais avançados) são igualmente soluções das equações de Maxwell.

Não há diferença entre passado e futuro na electrodinâmica, assim como não há diferença na mecânica.!

Observação: Pode provar-se que os potenciais anteriores (Retardados ou avançados) satisfazem a Gauge de Lorentz (o que é exigível por coerência).

Dois exemplos ilustrativos:

A)



$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ I_0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(t_r)}{r}\,dz$$

$$z^2 + s^2 = c^2t^2 \quad \longrightarrow \quad |z| \leq \sqrt{c^2t^2 - s^2}$$ contribui para o campo a $t>0$

$$r = \sqrt{z^2+s^2}$$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 \hat{z} I_0}{4\pi}\cdot 2\int_0^{\sqrt{(ct)^2-s^2}} \frac{dz}{\sqrt{z^2+s^2}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\left[\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right]\hat{z}$$

Podemos agora calcular os campos:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 \hat{z}}{2\pi}\cdot\frac{c + \cancel{\frac{1}{2}}\left[(ct)^2-s^2\right]^{-1/2}\cdot\cancel{2}ct}{ct + \left[(ct)^2-s^2\right]^{1/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I \hat{z} c}{2\pi}\cdot\frac{1 + \frac{ct}{\left[(ct)^2-s^2\right]^{1/2}}}{ct + \left[(ct)^2-s^2\right]^{1/2}} =$$

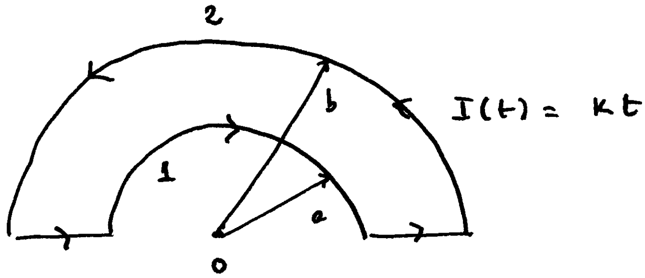
$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0 I \hat{z} c}{2\pi\sqrt{(ct)^2-s^2}}}$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\,\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0 c t}{2\pi s \cdot \sqrt{(ct)^2 - s^2}}\,\hat{\phi}$$

Repare que $t \to \infty$ $\quad \vec{B} \to \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\phi}$

$$\vec{E} \to 0$$

B)



Calcule o ~~potencial~~ potencial magnético retardado em O e o campo eléctrico.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(t_r)}{r}\,dl = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \frac{\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\,d\vec{l} =$$

$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left\{ t\int \frac{d\vec{l}}{r} - \frac{1}{c}\underbrace{\int d\vec{l}}_{0} \right\} \text{(loop}$$

$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left\{ t\,\frac{1}{a}\int_1 d\vec{l} + t\,\frac{1}{b}\int_2 d\vec{l} + t\,2\,\hat{x}\int_a^b \frac{dx}{x} \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 k t}{4\pi}\left\{ \left(\frac{2a}{a} - \frac{2b}{b}\right)\hat{x} + 2\ln\frac{b}{a} \right\}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 k t}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$$

6 - Cálculo directo dos campos: as equações de Jefimenko

(generalizações das leis de Coulomb e de Biôt-Savart)

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\text{ʀ}}\,d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\text{ʀ}}\,d^3r'$$

- $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\text{ʀ}}}{\text{ʀ}} - \rho\frac{\hat{\text{ʀ}}}{\text{ʀ}^2}\right]d^3r'$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t_r}\cdot\underbrace{\frac{\partial t_r}{\partial t}}_{1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{\text{ʀ}}\,d^3r' \qquad \left(t_r = t - \frac{\text{ʀ}}{c}\right)$$

Entao:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\rho(\vec{r}\,',t_r)\frac{\hat{\text{ʀ}}}{\text{ʀ}^2} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_r)}{c\,\text{ʀ}}\hat{\text{ʀ}} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{c^2\,\text{ʀ}}\right]d^3r'$$

(generaliza a lei de Coulomb)

- $\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A} \overset{(*)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{\text{ʀ}}\left(\nabla\wedge\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)\right) - \vec{J}(\vec{r}\,',t_r)\wedge\nabla\left(\frac{1}{\text{ʀ}}\right)\right\}d^3r'$

$$[\nabla\wedge\vec{J}]_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} = \dot{J}_z\frac{\partial t_r}{\partial y} - \dot{J}_y\frac{\partial t_r}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left[\dot{J}_z\frac{\partial\text{ʀ}}{\partial y} - \dot{J}_y\frac{\partial\text{ʀ}}{\partial z}\right]$$

$$\nabla(\text{ʀ}) = \hat{\text{ʀ}}$$

(*) $\nabla\wedge(f\vec{A}) = f(\nabla\wedge\vec{A}) - \vec{A}\wedge\nabla f$

$$\Longrightarrow \quad (\nabla \wedge \vec{J})_x = +\frac{1}{c}\left[\dot{J}_z \wedge \nabla(\imath)\right]_x = \frac{1}{c}(\dot{\vec{J}} \wedge \hat{\imath})_x$$

- $$\nabla\left(\frac{1}{\imath}\right) = -\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}$$

Logo:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t_r)\wedge\hat{\imath}}{c\,\imath} + \frac{\vec{J}\wedge\hat{\imath}}{\imath^2}\right\}d^3r'$$

(generaliza a lei de Biot - Savart)

$\square$