ELECTROMAGNETISMO
2011/12
Exame da Época Especial
12/set/2012

---

1. Resposta <u>B</u>

Num condutor em equilíbrio electrostático o campo é nulo no seu interior e toda a carga se encontra distribuida sobre a superfície. O campo no exterior do condutor é normal à sua superfície.

2. Resposta <u>C</u>

A energia do condensador é dada por $\frac{1}{2}CV^2$, onde $\underline{C}$ é a capacidade e $\underline{V}$ a diferença de potencial entre as placas.

A carga do condensador mantem-se constante quando se aproximam as placas e é dada por

$$Q = CV$$

Então a energia do condensador vem dada por

$$W = \frac{1}{2}CV^2$$

$$= \frac{1}{2}C\left(\frac{Q}{C}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

O trabalho realizado para aproximar as placas é igual à diferenca de energias do condensador na situação final e situação inicial:

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_f} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_i} = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(5\times10^{-6})^2\left(\frac{1}{10\times10^{-6}} - \frac{1}{5\times10^{-6}}\right)$$

$$= -1{,}25\times10^{-6}\ J$$

3. Resposta E

Uma carga eléctrica q com velocidade $\underline{v}$ e submetida à acção de um campo $\vec{B}$ exterior é actuada pela força de Lorentz

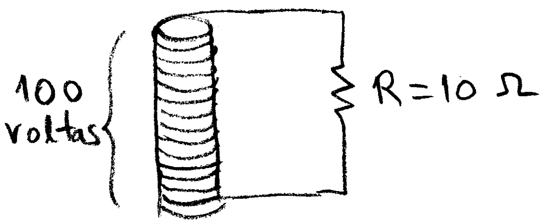
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

No presente caso a carga é um electrão

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad , \quad e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ C$$

$\vec{F}$ é perpendicular a plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. No presente caso $\vec{F}$ tem a direcção do eixo z. Devido ao sinal menos na expressão a aplicação da regra da mão direita impõe que $\vec{F}$ tenha o sentido negativo.

4. Resposta D



O campo magnético B varia desde 1,00 T até −1,00 T. Em módulo

$$\Delta B = 2{,}00\ T$$

Pela Lei de Faraday a força electromotriz induzida na bobina com N=100 voltas vale, em módulo

$$\mathcal{E} = N \frac{d\phi}{dt}$$

onde $\phi = BA$ é o fluxo através de cada espira. Por outro lado $\mathcal{E} = RI = R\,\Delta Q/\Delta t$.

Então

$$R\frac{\Delta Q}{\Delta t} = N A \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\Delta Q = \frac{NA}{R}\Delta B = \frac{100 \times 0{,}1}{10} \times 2{,}00 = 2{,}00\ C$$

5. a) A grandes distâncias da carga pontual o campo eléctrico devido à carga é desprezável e o campo resultante é aproximadamente igual ao campo exterior. Podemos então escrever que a grandes distâncias

$$\vec{E}_{ext} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\Delta V}{\Delta x} \vec{\mu}_x$$

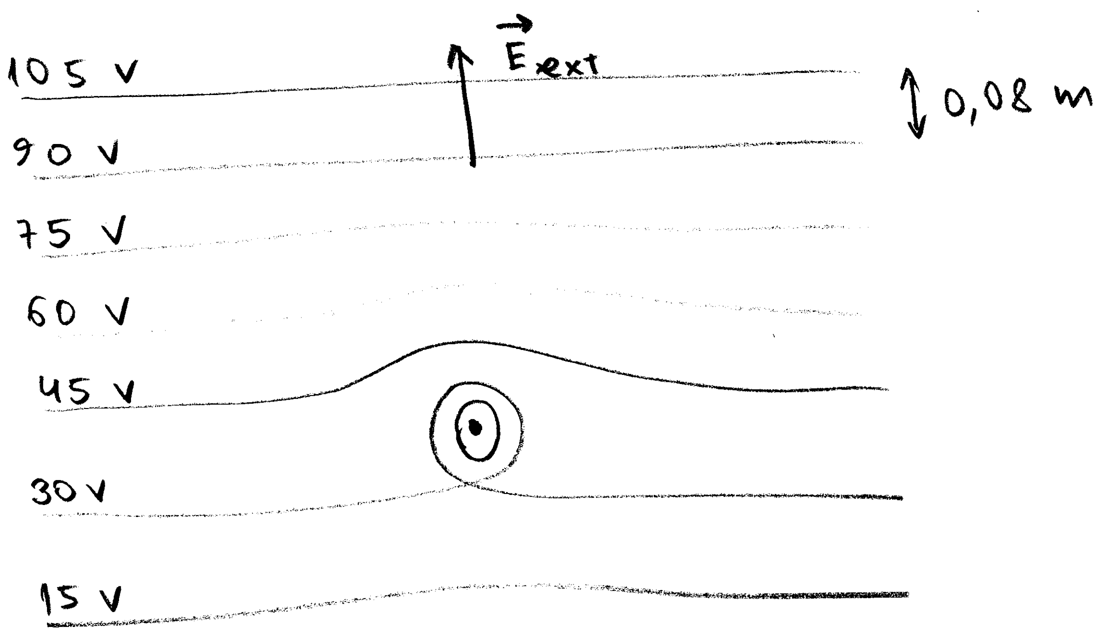
sendo $\vec{\mu}_x$ um vector unitário perpendicular às equipotenciais e apontando no sentido dos potenciais decrescentes.

$\Delta V = 5$ V

$\Delta x = 0{,}08$ m tem como resultado

$$\vec{E}_{ext} = -\frac{15}{0{,}08} \vec{\mu}_x$$

$$= -187{,}5 \, \vec{\mu}_x \quad (V/m)$$



b) No ponto P_1 as curvas equipotenciais cruzam-se o que significa que o campo é nulo nesse ponto (ponto sela).

O campo resultante é igual à soma do campo devido à carga pontual e do campo externo. Então o campo devido à carga pontual tem que ser igual e de sentido oposto ao campo externo. Isto significa que as linhas de campo da carga pontual se dirigem para a carga. Logo a carga é negativa.

c) A carga pontual está apenas sujeita ao campo externo, pelo que a força que sobre ela actua é dada por

$$\vec{F} = -q\vec{E}_{ext}$$ onde q é o módulo da carga

A força tem a mesma direcção de $\vec{E}_{ext}$ e sentido oposto.

d) Como vimos na alínea a) o campo devido à carga pontual no ponto P vale 187,5 V/m

Então

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = 187{,}5 \quad , \quad \text{onde } r = 0{,}09 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} q &= 4\pi\varepsilon_0 r^2 \cdot 187{,}5 \; , \\ &= 1{,}69 \times 10^{-10} \text{ C} \\ &= 0{,}169 \text{ nC} \quad \text{(módulo da carga)} \end{aligned}$$

4.

a) A carga do dieléctrico central obtem-se integrando a carga volúmica no volume. Consideremos uma porção do dieléctrico central (de forma cilíndrica) de comprimento L, e calculemos a carga contida nesse volume:

$$Q = \int_{vol} \rho \, dv \qquad , \qquad \text{onde} \quad \rho = Kr$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho r \, dr \, d\phi \, dz \qquad \text{(utilizando coordenadas cilíndricas)}$$

$$= \int_0^a Kr^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz$$

$$= 2\pi K L \frac{1}{3} \left[r^3 \right]_0^a$$

Então a carga por unidade de comprimento vale

$$\frac{Q}{L} = \frac{2\pi}{3} K a^3$$

b) Para calcular o campo eléctrico nas diversas regiões poderemos utilizar o teorema de Gauss, considerando superfícies gaussianas de forma cilíndrica coaxiais com os dieléctricos cilíndricos, e de raios $r<a$, $a<r<b$, $b<r<c$ e $r>c$.

Como o vector deslocamento eléctrico, $\vec{D}$, é sempre radial, o fluxo de $\vec{D}$ através das bases da superfície gaussiana é nulo; por outro lado o fluxo através da superfície cilíndrica lateral de altura $\underline{L}$ é dado por

$$\phi = \int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, da = D . 2\pi r L$$

pois: $\vec{D} \parallel \vec{n}$ ($\vec{n} \equiv$ normal à superfície)

$|\vec{D}|$ é constante sobre a superfície

Consideremos então as quatro regiões que se pretende estudar

i) $r<a$ (interior do dieléctrico central)

T. Gauss: $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, da = q_{int}$

onde q_{int} é a carga (verdadeira) interior à superfície gaussiana vem então

$$D \cdot 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k r^3 L$$

pois, como vimos na alinea a)

$$\frac{q_{int}}{L} = \frac{2\pi}{3} k r^3 .$$

Tendo em conta que $\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \vec{E}$$

vem

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E \cdot 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k r^3 L$$

$$\boxed{E = \frac{k}{3\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} r^2}$$, sendo $\underline{E}$ radial

ii) $a < r < b$ (vácuo)

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n}\, da = q_{int} = Q$$

$$\varepsilon_0 E\, 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k a^3 L$$, pois no vácuo $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\boxed{E = \frac{k}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r}}$$

iii) $b < r < c$ (interior do dieléctrico externo)

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, da = q_{int}$$
$$= Q$$

A carga interior à superfície continua a ser a carga do cilindro central, pois o dieléctrico exterior não tem cargas verdadeiras.

Tem-se então

$$\varepsilon_2 E . 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k a^3 L \quad , \quad \text{pois } \vec{D} = \varepsilon_2 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} \vec{E}$$

$$\boxed{E = \frac{k}{3\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} \frac{a^3}{r}}$$

iv) $r > c$ (vácuo)

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, da = q_{int}$$
$$= Q$$

como no vácuo $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, vem

$$\varepsilon_0 E \; 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k a^3 L$$

$$\boxed{E = \frac{k}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r}}$$

O campo tem direcção radial em todas as regiões.

c) seja $\vec{P}_1$ a polarização do dieléctrico central:

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_1 \vec{E} \qquad (\chi_1 \equiv \text{susceptibilidade do dieléctrico 1})$$

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_{r_1} - 1) \vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_{r_1} - 1) \frac{K}{3\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} r^2 \vec{u}_r$$

A densidade de carga de polarização superficial é

$$\sigma_1 = \left(\vec{P}_1 \cdot \vec{n}\right)_{r=a}$$

$$= \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{3\varepsilon_{r_1}} K a^2 \qquad (\vec{P}_1 \parallel \vec{n})$$

A densidade de carga de polarização em volume é

$$\rho_1 = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1$$

$$= - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_1)$$, pois as componentes em coordenadas cilíndricas segundo ϕ e z de $\vec{P}_1$ são nulas

$$\rho_1 = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \right) K r^2 \right]$$

$$= - \frac{1}{r} \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} K \cdot 3 r^2$$

$$= - 3 \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} K r$$

seja $\vec{P}_2$ a polarização do dieléctrico mais exterior:

$$\vec{P}_2 = \varepsilon_0 \chi_2 \vec{E} \qquad (\chi_2 \equiv \text{susceptibilidade do dieléctrico } 2)$$

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_{r_2} - 1) \vec{E}$$

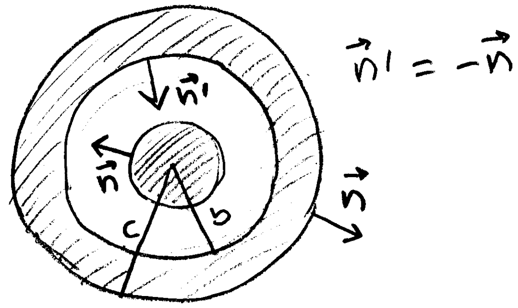
$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_{r_2} - 1) \frac{k}{3\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} \frac{a^3}{r} \vec{u}_r$$

Sejam σ_2 e ρ_2 as cargas de polarização superficial e em volume, respectivamente. Analogamente ao cálculo efectuado para o dieléctrico interior, tem-se:

$$\sigma_2 = (\vec{P}_2 \cdot \vec{n}')_{r=c}$$

na superfície exterior do dieléctrico $r = c$

$$= \frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{3\varepsilon_{r_2}} k \frac{a^3}{c}$$



$$\sigma_2' = (\vec{P}_2 \cdot \vec{n}')_{r=b}$$

na superfície interior do dieléctrico $r = b$

$$= -\frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{3\varepsilon_{r_2}} k \frac{a^3}{b}$$

$$\rho_2 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_2)$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\varepsilon_{r_2}-1}{3\varepsilon_{r_2}}\ K\frac{a^3}{r}\right)$$

$$= 0$$

Nota: este último resultado deve-se ao facto do dieléctrico ser linear e sem cargas verdadeiras.
De facto, para um dieléctrico linear

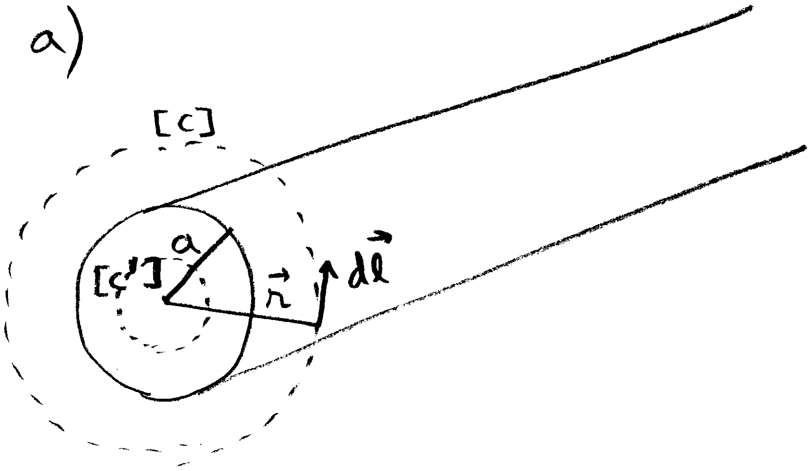
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

logo $\quad \vec{\nabla}.\vec{D} = \varepsilon\,\vec{\nabla}.\vec{E}$

Mas $\quad \vec{\nabla}.\vec{D} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ (porque não há cargas verdadeiras)

se o dieléctrico não estiver electrizado (sem cargas verdadeiras) vem $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$ e, consequentemente $\vec{\nabla}.\vec{P} = \varepsilon_0 \chi\, \vec{\nabla}.\vec{E} = 0$ (não há neste caso cargas de polarização em volume)

7. a)



Comecemos por calcular o campo $\vec{B}$ no exterior do cilindro. Para aplicar o Teorema de Ampère escolhemos um contorno [C] circular em torno do cilindro, tal que a superfície $\underline{S}$ que assenta em [C] é atravessada pelo cilindro (ver figura):

$$\oint_{[C]} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I$$

Por razões de simetria $|\vec{B}|$ toma o mesmo valor sobre todos os pontos de [C] e $\vec{B}$ é sempre tangente a essa mesma curva. Então

$$B \oint_{[C]} dl = \mu_0 I$$

$$B \, . \, 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (r \geq a)$$

Para o cálculo de $\vec{B}$ no interior do condutor consideremos uma curva [C'] circular, centrada com o eixo do cilindro, com raio $r<a$, como se mostra na figura.

Aplicando o Teorema de Ampère

$$\oint_{[C']} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}$$

onde I_{int} é a corrente que atravessa a superfície assente em [C']. Como a densidade de corrente é uniforme tem-se

$$\frac{I_{int}}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi a^2} \iff I_{int} = \frac{r^2}{a^2} I$$

Pelas mesmas razões de simetria invocadas para o caso $r>a$, tem-se que a circulação de $\vec{B}$ vale $B.2\pi r$:

$$B.2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \qquad (r \leq a)$$

b) A densidade de corrente no condutor vale

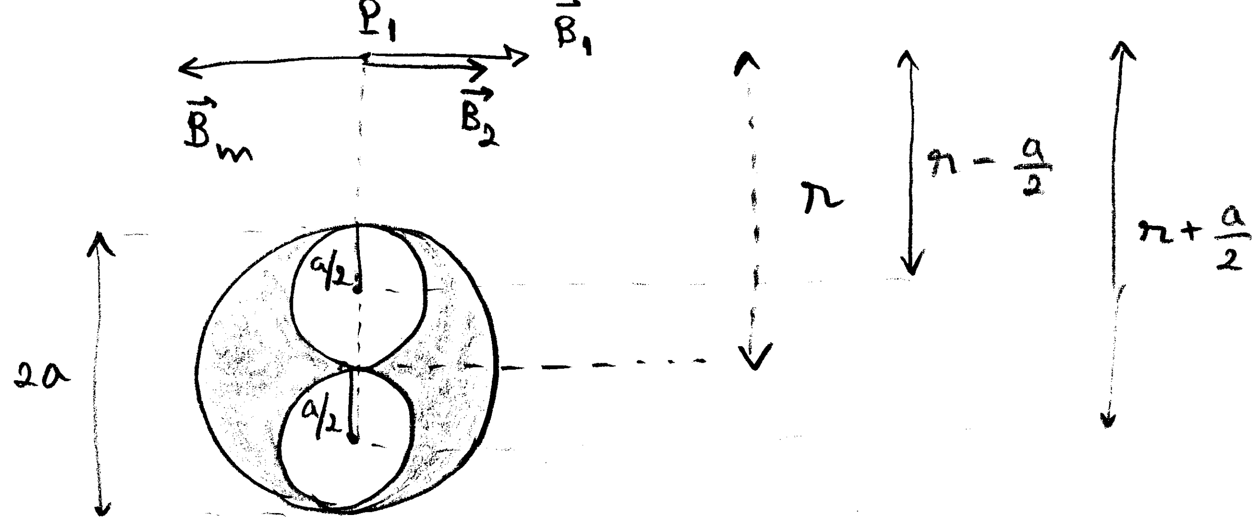
$$J = \frac{I}{A}$$

onde $$A = \pi\left[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\pi a^2$$

Então $$J = \frac{2I}{\pi a^2}$$

Para determinar o campo magnético no ponto P_1, vamos começar por achar o campo $\vec{B}_m$ que existiria se o cilindro fosse maciço, usando o resultado da alínea anterior.
Depois, usando o mesmo resultado, determinar os campos $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ que seriam devidos a condutores cilíndricos de raios $a/2$ que ocupassem as cavidades, mas percorridos por uma corrente de sentido contrário àquela que percorre o cilindro principal.
O campo magnético pretendido é, pelo princípio da sobreposição, igual à soma vectorial de $\vec{B}_m + \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

Calculemos então $\vec{B}_m$, $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$:



$$B_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$ e sentido indicado na figura

$$= \frac{\mu_0}{2\pi r} J \pi a^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi\left(r-\frac{a}{2}\right)} J \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$ sentido indicado na figura

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi\left(r+\frac{a}{2}\right)} J \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

O campo resultante vale então, em módulo:

$$B = B_m - B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 J \pi a^2}{2\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{4\left(r-\frac{a}{2}\right)} - \frac{1}{4\left(r+\frac{a}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot 2I}{2\pi}\left[\frac{4r^2 - a^2 - 2r^2}{4r\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi r}\left[\frac{2r^2 - a^2}{4r^2 - a^2}\right]$$ com o sentido de $\vec{B}_m$

8.

a) A equação de Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

que se escreve na forma integral

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{B}.\vec{n}\,da\right],$$

permite concluir que, em geral, o rotacional do campo eléctrico (ou a circulação do campo eléctrico) são diferentes de zero, bastando para tal que o campo eléctrico seja induzido por um campo magnético variável no tempo. Nestas condições ($\vec{\nabla}\times\vec{E}\neq 0$ ou $\oint\vec{E}.d\vec{l}\neq 0$) o campo eléctrico é, pois, não conservativo.

Mas se a fonte do campo eléctrico forem cargas eléctricas, então $\partial\vec{B}/\partial t = 0$, resultando

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \quad \text{ou} \quad \oint\vec{E}.d\vec{l} = 0,$$

o que significa que o campo é conservativo.

Isto é precisamente o que acontece na electrostática, em que o campo eléctrico tem cargas eléctricas estáticas como fontes.

b) A equação de Maxwell

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho \quad , \qquad \rho \equiv \text{densidade volúmica de carga}$$

escreve-se, no vazio

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Na forma integral esta equação toma a forma do Teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}\,da = q/\varepsilon_0$$

Esta equação mostra que o fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada é positivo, (se a carga que é fonte do campo for positiva) ou negativo (se a carga for negativa), mas sempre diferente de zero, desde que as cargas tenham resultante não nula. Existem, pois, dois tipos de cargas (positiva ou negativa) que, isoladas, dão origem ao campo. As linhas de força do campo eléctrico nascem nas cargas positivas e somem-se nas cargas negativas.

Pelo contrário, no caso do campo magnético, a equação

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

(ou $\oint \vec{B}.\vec{n}\,da = 0$, na forma integral) põe em evidência que as linhas de força de $\vec{B}$ se fecham sobre si próprias.

Isto é, todas as linhas de força que saem de um polo magnético têm necessariamente que entrar no outro polo, fazendo com que o fluxo de $\vec{B}$ através de uma qualquer superfície fechada seja sempre nulo. Os polos magnéticos não existem isoladamente.

c) Consideremos a equação de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Por palavras: o rotacional do campo magnético $\vec{H}$ é igual à soma de densidade de corrente de condução ($\vec{J}$) com a densidade de corrente de deslocamento ($\partial \vec{D}/\partial t$)
Aplicando o operador divergência a esta equação obtem-se

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Como a divergência de um rotacional de um vector é sempre nula, vem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = 0 .$$

Utilizando a equação de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho ,$$

$\rho \equiv$ densidade volúmica de carga

resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Esta equação, chamada equação da continuidade, traduz o princípio de conservação da carga eléctrica