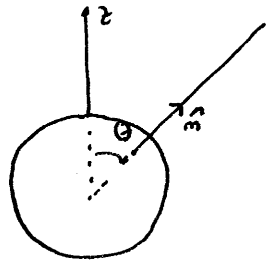
3. Campos criados por meio polarizado
e magnetizado (com problemas)

Campos eléctrico e magnético

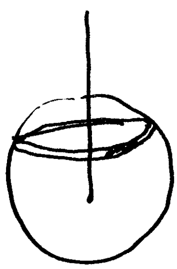
2. Calcule o campo eléctrico produzido por uma esfera de raio R uniformemente polarizada.

Solução:



Como vimos, a polarização do meio pode ser traduzida por $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ e por $\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$. Evidentemente, o primeiro termo é nulo porque a polarização é uniforme. Temos que considerar apenas a contribuição do segundo termo (densidade superficial)

$\vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos\theta$; Como calcular este campo?



Vejamos:

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (\text{visto } \rho = 0)$$

Usando coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

por simetria $V \equiv V(r,\theta)$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$V = R(r)\,\Theta(\theta) \longrightarrow \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \ell(\ell+1)$$

$$\frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{\partial\theta}\right) = -\ell(\ell+1) \quad \rightarrow \text{Legendre}$$

$$R(r) = A r^{\ell} + \frac{B}{r^{\ell+1}} \qquad \Theta(\theta) = P_\ell(\cos\theta)$$

↳ Polinómios de Legendre.

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

$r \leq R \rightarrow V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$ $\qquad B_\ell \equiv 0$ (se não diverge.)

$r \geq R \rightarrow V(r\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$

- Potencial deve ser contínuo a $r = R$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1} \qquad \forall \ell$$

- Na superfície ~~da~~ esfera há uma descontinuidade do campo radial:

$$\left(\frac{\partial V_{out}}{\partial r} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R} = -\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

Isto impõe:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left\{-(l+1)\frac{B_l}{R^{l+2}}P_l(\cos\theta) - l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta)\right\} = -\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

Mas $B_l = A_l R^{2l+1}$

$$\left(\frac{B_l}{R^{l+2}} = \frac{A_l R^{2l+1}}{R^{l+2}} = A_l R^{l-1}\right)$$

$$\sum_{l'=0}^{\infty} (2l'+1) A_l R^{l'-1} P_{l'}(\cos\theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

Usando a ortogonalidade dos polinómios de Legendre:

$$\sum_{l'}\int_0^\pi P_{l'} P_l A_l R^{l-1}(2l+1)\,d\theta = \int_0^\pi \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}P_l(\cos\theta)\,d\theta$$

↓

$$\int_0^\pi P_{l'} P_l \, d\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

$$\frac{2}{2\cancel{l+1}} A_l R^{l-1}(2\cancel{l+1}) = \int_0^\pi \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}P_l(\cos\theta)\,d\theta$$

$$A_l = \frac{1}{2R^{l-1}}\int_0^\pi \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}P_l(\cos\theta)\,d\theta$$

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

$\begin{cases} \cos\theta = x \\ dx = -\sin\theta\, d\theta \end{cases}$

$$-\int_{\pi}^{0} P_\ell(\cos\theta)\, P_{\ell'}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} P_\ell\, P_{\ell'} \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

$$\frac{2}{2\ell+1} A_\ell R^{\ell-1}(2\ell+1) = \int_0^{\pi} \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0} P_\ell(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

Seja então:

$$\sigma(\theta) = p\cdot\cos\theta = p\, P_1(\cos\theta)$$

(dado por $P_1(x) = \cos\theta$) ; $p \equiv$ polarização/volume.

Então; só $A_1 \neq 0$:

$$\frac{2}{3} A_1 R^0\, 3 = p\,\frac{2}{3\varepsilon_0} \rightarrow A_1 = \frac{p}{3\varepsilon_0}$$

No interior da superfície

$$V(\bar{r},\theta) = \frac{p}{3\varepsilon_0} r\cos\theta \qquad (r < R)$$

Fora da superfície:

$$B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1} \longrightarrow B_1 = R^3\cdot\frac{p}{3\varepsilon_0}$$

e:

$$V(r,\theta) = \frac{R^3 \frac{p}{3\varepsilon_0}}{r^2}\cos\theta \qquad (r > R)$$

Entao, se ~~V(r)~~ $\boxed{V(r,\theta) = \frac{P}{3\varepsilon_0} r\cos\theta = \frac{P}{3\varepsilon_0} z \qquad r<R}$

$$V(r,\theta) = \frac{R^3}{r^2}\frac{P\cos\theta}{3\varepsilon_0}$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot P = P_{TOT}$$

$$R^3 = \frac{P_{TOT}}{P}\frac{3}{4\pi}$$

$$V(r,\theta) = \frac{P_{TOT}\cdot\hat{n}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{P}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\boxed{V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}_{TOT}\cdot\hat{r}}{r^2} \qquad r>R}$$

$\downarrow$

Potencial de um dipolo $\vec{P}_{TOT}$ na origem

$E = -\nabla V$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \qquad r<R \qquad !!}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P_{TOT}\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\sin\theta}{r^3}$$

$$\boxed{\vec{E}_{OUT} = \frac{P_{TOT}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right]}$$

3 - Uma esfera de raio R tem uma polarização eléctrica

$$\vec{P}(\vec{r}) = k\,\vec{r} \qquad (k = \text{const.})$$

a) Calcule σ_b e ρ_b

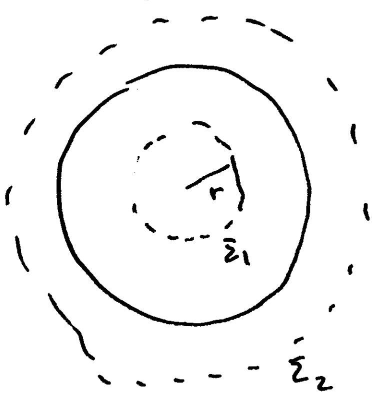
b) Calcule o campo eléctrico dentro e fora da esfera.

(a) $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = kR$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\,\partial_r\left(r^2 P_r\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\,\partial_r\left(r^3 k\right) = -3k$$

(b) $r < R$



Gauss: ρ_b Σ_1

$$\frac{-\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi}\, r^{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} k}{\varepsilon_0} = \cancel{4\pi r^2}\, E(r)$$

$$E(r) = -\frac{k\,r}{\varepsilon_0} \qquad (r < R)$$

$r > R$ (Σ_2) $\rightarrow$ carga total no interior:

$$Q_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_b + 4\pi R^2 \sigma_b =$$

$$= -\frac{4}{\cancel{3}}\pi R^3 \cancel{3} k + 4\pi R^2 k R \equiv 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow E = 0 \quad (r > R)$

□

4. Calcule o potencial de uma esfera uniformemente polarizada por integração directa:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\imath}\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')}{\imath^2}\,d\vec{r}\,'$$

Dado que $\vec{P}(\vec{r}\,') = \vec{P}_0$ (é uniforme)

$$V(\vec{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\,d\vec{r}\,'\right]\cdot\vec{P}_0$$

basta ∴ calcular o integral entre parentesis. Este integral é o que corresponde a um campo electrico criado por uma esfera uniformemente carregada com densidade de carga 1. Fica como exercício (para fazer sòzinho(a)) mostrar que:

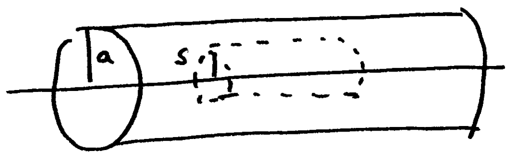
$$\imath > R \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\,d\vec{r}\,' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{r^2}\hat{r}$$

$$\imath < R \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{R^3}\vec{r}$$

Então

$$V(r) = \begin{cases} \imath > R & \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}P\cos\theta \\ \imath < R & \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}\cdot\vec{r} = \dfrac{Pr\cos\theta}{3\varepsilon_0} \end{cases}$$

5. Um fio (infinito!) tem uma densidade linear de carga λ e está revestido por um cilindro de borracha isoladora.



Calcule o vector deslocamento eléctrico.

Solução

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{livre} \quad \rightarrow \quad D\,(2\pi s \cdot L) = \lambda L$$

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi s}\,\hat{s} \quad \longrightarrow \quad \text{válido } \forall\, s$$

Campo eléct. se $s > a$? : Neste caso $\rho = 0 \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi s\,\varepsilon_0}\,\hat{s} \qquad s > a$$

para $s < a$ Não sabemos calcular $\vec{E}$ porque não sabemos ρ

6. Calcule o campo magnético gerado por uma esfera uniformemente magnetizada:

Solução :

$$\vec{J}_b = \nabla \wedge \vec{M} = 0 \quad ; \quad K_b = \vec{M} \wedge \hat{n} = M \sin\theta\,\hat{\phi}$$

Esta densidade superficial de corrente corresponde a uma superfície esférica uniformemente carregada e em rotação.

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \underbrace{\sigma \omega R}_{M} \sin\theta\,\hat{\phi}$$

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{r}$$

Este problema está resolvido no Griffiths. (pag. 236)

e obtém-se:

$$A(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3}(\vec{M}\wedge\vec{r}) & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^3}{3r^3}(\vec{M}\wedge\vec{r}) & r \geq R \end{cases}$$

$$\bar{B} = \nabla\wedge\bar{A}$$

$\underline{r \leq R}$ $\quad \vec{B} = \left[\nabla\wedge(\vec{M}\wedge\vec{r})\right]\frac{\mu_0}{3}$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{M}}_{0} - (M\cdot\nabla)\vec{r} + \vec{M}(\nabla\cdot\vec{r}) - \vec{r}\,\underbrace{(\nabla\cdot\vec{M})}_{0}$$

$$-M + 3M = 2M$$

$$\bar{B} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} \equiv \text{campo uniforme.}$$

$r > R$ $\quad$ campo de um dipolo electrico

$$\bar{B} = \frac{\vec{m}\,\mu_0}{4\pi}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

Dieléctrico homogéneo electricamente neutro

Observação:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\cancel{\varepsilon_0} \chi_e}{\cancel{\varepsilon_0} \varepsilon_r} \vec{D}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\chi_e}{\varepsilon_r} \rho_\ell \qquad (\text{dado que } \nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell)$$

$$\rho_b = -\frac{\chi_e}{1+\chi_e} \rho_\ell$$

Se $\rho_\ell = 0 \rightarrow \rho_b = 0$! a densidade volúmica de carga é nula. $\Rightarrow$ o potencial eléctrico obedece à equação de Laplace.

Problema: Consideremos então o seguinte problema: uma esfera dieléctrica imersa num campo eléctrico uniforme.

Obtenha o campo eléctrico no interior da esfera:

$$\nabla^2 V = 0$$

Cond. fronteira: a) continuidade do potencial $V_{in} = V_{out}$

$D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_\ell = 0 \longrightarrow$ b) Não há carga livre na superfície: $\Rightarrow$

$$\varepsilon \left.\frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right)_R = \varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{out}}{\partial r}\right)_R$$

potencial dipolo visto de longe $\longrightarrow$ c) $V_{out} \rightarrow -E_0 r \cos\theta \quad (r \gg R)$

Como vimos na aula TP de 20/9 :

$$V_{in}(\theta, r) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \, r^l \, P_l(\cos\theta)$$

(usando c) → $$V_{out}(\theta, r) = -E_0 \, r \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

a) ⇒ $$\sum_l A_l R^l P_l(\cos\theta) = -E_0 R \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$= -E_0 R \, P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$(P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

Então:

$l = 1$ → $$A_1 R \, \cancel{P_1(\cos\theta)} = -E_0 R \, \cancel{P_1(\cos\theta)} + \frac{B_1}{R^2} \cancel{P_1(\cos\theta)}$$

$$(A_1 + E_0) R = \frac{B_1}{R^2}$$

$l \neq 1$ $$\boxed{A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}}}$$

b) $$\varepsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l \, A_l R^{l-1} P(\cos\theta) = -E_0 \cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta)$$

↓

$$\begin{cases} \varepsilon_r \, l \, A_l R^{l-1} = -\dfrac{(l+1) B_l}{R^{l+2}} & l \neq 1 \\[2ex] \varepsilon_r A_1 = -E_0 - \dfrac{2 B_1}{R^3} & l = 1 \end{cases}$$

As 1ª condições a) e b) para $l \neq 1$

$$A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}}$$

$$\varepsilon_r l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1)}{R^{l+2}} B_l$$

só podem ser verificadas simultaneamente sse $A_l = B_l = 0$

Para $l=1$:
$$A_1 + E_0 = \frac{B_1}{R^3} \rightarrow B_1 = R^3 (A_1 + E_0)$$

$$\Rightarrow \qquad \varepsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2}{\cancel{R^3}} \cancel{R^3} (A_1 + E_0)$$

$$(\varepsilon_r + 2) A_1 = -3 E_0$$

$$A_1 = \frac{-3}{\varepsilon_r + 2} E_0 \quad ; \quad B_1 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 E_0$$

Logo:

$$V_{in}(\theta, r) = -\frac{3 E_0}{\varepsilon_r + 2} r \cos\theta = -\frac{3 E_0}{\varepsilon_r + 2} z \quad !!$$

$$\vec{E} = -\nabla V_{in} = \frac{3 E_0}{\varepsilon_r + 2} \hat{z} \quad \leftarrow \text{campo uniforme.}$$

Energia num sistema dieléctrico

Consideremos um meio dieléctrico infinito. Qual a energia que custa carregá-lo electricamente?

Seja ρ_f a densidade de carga injectada no meio dieléctrico. Essa densidade de carga gera um potencial eléctrico V (estático; todo este processo é quase-estático). Quanto custa (em energia) aumentar ρ_f em $\Delta\rho_f$?:

$$\Delta W = \int_V (\Delta \rho_f) \cdot V \, d\vec{r}$$

Mas $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \Delta \rho_f = \nabla \cdot (\Delta \vec{D})$

$$\Delta W = \int_V \left[\nabla \cdot (\Delta \vec{D}) \right] \cdot V \, d\vec{r}$$

Mas:

$$\nabla \cdot \left[(\Delta \vec{D}) V \right] = \left[\nabla \cdot (\Delta \vec{D}) \right] \cdot V + \Delta \vec{D} \cdot (\nabla V)$$

Então:

$$\Delta W = \int_V \nabla \cdot \left[(\Delta \vec{D}) \cdot V \right] d\vec{r} - \int_V \Delta \vec{D} \cdot (\nabla V) \, d\vec{r}$$

$$= \underbrace{\int_\Sigma (V \cdot \Delta \vec{D}) \, \hat{n} \, d\Sigma}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \Sigma \to \infty\,!}} + \underbrace{\int_V \Delta \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\vec{r}}_{\substack{\downarrow \\ \Delta W}}$$

$\Delta w \equiv$ variação da densidade volúmica de energia eléctrica

$$\Delta w = \vec{E} \cdot \Delta \vec{D}$$

Δw ↓ trabalho elementar

$\vec{E}$ ↓ Força → quant. intensiva

$\Delta \vec{D}$ ↓ deslocamento conjugado → quantidade extensiva

Isto é inteiramente geral.

Se, além disso, o dieléctrico for <u>linear e neutral</u>:

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta w = \vec{E} \cdot \varepsilon \, d\vec{E} = d\left[\varepsilon \, \vec{E} \cdot \vec{E} \, \frac{1}{2}\right] = d\left[\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}\right]$$

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

(Mas isto só é válido para estes materiais lineares e neutrais)

<u>Problema</u>: Uma esfera condutora de raio a e carga Q é revestida por um material dieléctrico (linear e neutral) que tem uma susceptibilidade eléctrica χ_E (espessura $(b-a)$).

Calcule a energia desta configuração:

Soluçaõ: Como vimos antes:

$$\vec{D} = \begin{cases} 0 & (r<a) \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} & (r>a) \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} 0 & (r<a) \\ \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon r^2}\hat{r} & (a<r<b) \\ \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r>b) \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, d\vec{r} = \frac{1}{2}\int \vec{D}(r)\cdot\vec{E}(\vec{r})\cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{Q}{4\pi r^2}\cdot\frac{Q}{\cancel{4\pi}\varepsilon \cancel{r^2}}\cdot\cancel{r^2}\cdot\cancel{4\pi}\, dr + \int_b^\infty \frac{Q}{4\pi r^2}\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 4\pi dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^{\cancel{2}}\cancel{\varepsilon}}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_b^\infty \frac{1}{r^2}dr\right]$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}\left(-\frac{1}{r}\right)_a^b + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_b^\infty\right\} =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(1+\chi_e)}\left(\frac{1}{a} + \frac{\chi_e}{b}\right)$$

__Problema__*: Calcule a energia de uma esfera dieléctrica uniformemente polarizada.

Como vimos antes, o campo gerado pela polarização no interior da esfera é $\vec{E} = -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$ $r<R$

e para $r>R$ é ~~o~~ o campo gerado por um dipolo $\vec{p} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\vec{P}$ colocado na origem:

$r>R$

$$\vec{E} = \frac{R^3 P}{3\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

A energia do sistema (o trabalho necessário para produzir o referido sistema) é então:

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, d\vec{r}$$ (dieléctrico neutral e linear)

Para $r > R$ $\quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

Para $r < R$ $\quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \frac{2}{3}\vec{P} = -2\varepsilon_0 \vec{E}$

<u>Então</u>

$r > R$

$$\Delta W_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\vec{r} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{R^3 P}{3\varepsilon_0}\right)^2 \int \frac{1}{r^6}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \cancel{\frac{(R^3 P)^2 \pi 2\, \varepsilon_0}{18\, \varepsilon_0^2} \int_0^{\pi} \frac{1}{r^6}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta \int_R^{\infty}}$$

$$= \frac{4\pi R^3 P^2}{27\varepsilon_0}$$

$r < R$

$$\Delta W_2 = \frac{1}{2}\int_{\vec{r}<\vec{R}} -2\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E}\, d\vec{r}$$

$$= \cancel{+\varepsilon_0 \int \left(\frac{P}{3\varepsilon_0}\right)^2 d\vec{r}} =$$

$$= -2\left[\frac{1}{2}\int_{\vec{r}<\vec{R}} \varepsilon_0 E^2 d\vec{r}\right] =$$

$$= -2\left(\frac{2\pi}{27}\,\frac{P^2 R^3}{\varepsilon_0}\right) \Longrightarrow \text{Energia total é nula: } \Delta W_1 + \Delta W_2 = 0$$

Campo magnético num meio material (linear e neutral)

1. Como vimos, $\vec{M}$ pode ser expresso através de uma densidade volúmica de corrente $\vec{J}_b = \nabla \wedge \vec{M}$ e de uma densidade superficial de corrente $\vec{K}_b = \vec{M} \wedge \hat{n}$

Considerando um meio infinito de tal forma que $\Sigma \to \infty$ (delimitando V), podemos ignorar o termo de superfície $\vec{K}_b$.

A lei de Ampère, como vimos, vem:

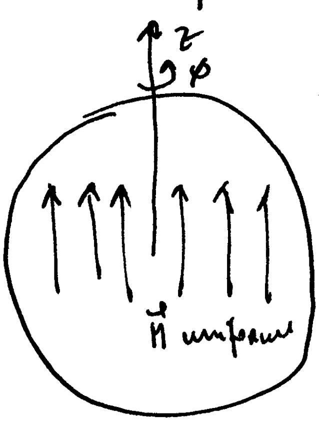
$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \wedge \vec{B}) = \vec{J}_f + \vec{J}_b = \vec{J}_f + \nabla \wedge \vec{M}$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_f$$

Assim, o campo auxiliar $\vec{H}$ responde exclusivamente à densidade de corrente livre $\vec{J}_f$, tal como $\vec{D}$ responde a ρ_L.

1.1 - Comecemos por analisar um problema simples: Qual o campo magnético de uma esfera uniformemente magnetizada



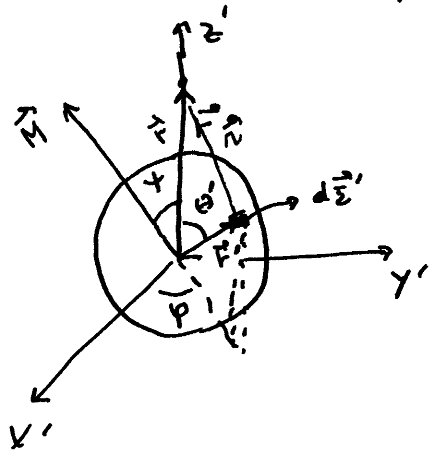
Neste caso $\vec{J}_b = \nabla \wedge \vec{M} = 0$

temos apenas o termo $\vec{K}_b = \vec{M} \wedge \hat{n}$;

com $\vec{M} \parallel \hat{z}$, $\vec{M} \wedge \hat{n} = M \sin\theta \, \hat{\phi}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}_b(\vec{r}\,')}{r} \, d\Sigma'$$

Consideremos o seguinte sistema de eixos:



$$r = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta'}$$

$$d\Sigma' = R^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi'$$

$$\vec{K}_b(\vec{r}\,') = \vec{M} \wedge \hat{n} =$$

$$= M\left[\sin\psi\, \hat{x} + \cos\psi\, \hat{z}\right] \wedge \hat{n}$$

$$\hat{n} = \hat{r} = \cos\theta'\, \hat{z} + \sin\theta' \cos\phi'\, \hat{x} + \sin\theta' \sin\phi'\, \hat{y}$$

$$K_b(\vec{r}\,') = M\left[\sin\psi\, \hat{x} + \cos\psi\, \hat{z}\right] \wedge \left[\sin\theta' \cos\phi'\, \hat{x} + \sin\theta' \sin\phi'\, \hat{y} + \right.$$
$$\left. + \cos\theta'\, \hat{z}\right]$$

$$= M\left[\sin\psi \sin\theta' \underset{\times}{\sin\phi'} (\hat{x}\wedge\hat{y}) + \sin\psi \cos\theta'\, \hat{x}\wedge\hat{z} + \right.$$

$$\left. + \cos\psi \sin\theta' \underset{\times}{\cos\phi'}\, \hat{z}\wedge\hat{x} + \cos\psi \sin\theta' \underset{\times}{\sin\phi'}\, \hat{z}\wedge\hat{y}\right]$$

Como $\int_0^{2\pi} \sin\phi'\, d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos\phi'\, d\phi' = 0$, os termos $(\times)$ não contribuem para $\vec{A}(\vec{r})$: Temos então:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi' \; \frac{M \sin\psi \cos\theta'\, \hat{y}}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta'}} =$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{2} R^2 \sin\phi \cdot M \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta' \sin\theta'}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta'}}\, d\theta' \; \hat{y}$$

Fazendo a mudança de variável $u = \cos\theta'$, podemos calcular o integral:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{2} R^2 \sin\phi \cdot M \int_{-1}^{+1} \frac{u\, du}{\sqrt{R^2+r^2-2Ru}} \; \hat{y}$$

$$= +\frac{\mu_0}{2} R^2 \sin\phi\, M \frac{1}{3R^2 r^2} \left[(R^2+r^2+Rr)|R-r| - (R^2+r^2-Rr)(R+r) \right] \hat{y}$$

- $r<R$ (interior da esfera):

$$(R^2+r^2+Rr)(R-r) - (R^2+r^2-Rr)(R+r) \stackrel{!}{=} 3R^2 r^2 \cdot \frac{2r}{3R^2}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2} R^2 \sin\phi\, M \frac{2r}{3R^2} \; \hat{y}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{3}(\vec{M} \wedge \vec{r})}$$

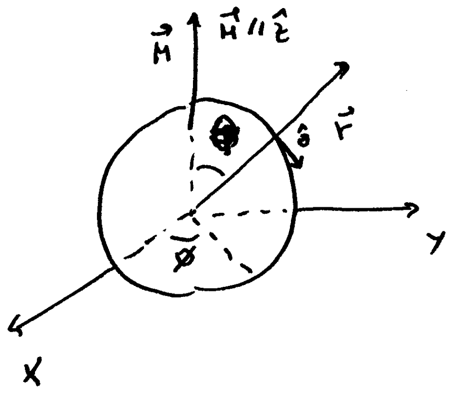
- $r>R$ (exterior da esfera:

o integral reduz-se a $\dfrac{2R}{3r^2}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2} R^3 M \sin\phi \frac{2}{3r^2} \hat{y} = \frac{\mu_0 R^3}{3r^2} \vec{M} \wedge \hat{r}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 R^3}{3r^3} (\vec{M} \wedge \vec{r})}$$

Voltando agora ao referencial natural



$$\vec{M} \wedge \vec{r} = M r \sin\theta$$

Logo:

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 M}{3} r \sin\theta \ \hat{\phi} & r < R \\ \dfrac{\mu_0 R^3}{3 r^2} \sin\theta \ \hat{\phi} & r > R \end{cases}$$

interior ($r<R$)

$$\nabla \wedge \vec{A} = \vec{B} = \nabla \wedge \left[\frac{\mu_0 M}{3} r \sin\theta \ \hat{\phi} \right] = \frac{2\mu_0 M}{3} \underbrace{\left[\cos\theta \ \hat{r} - \sin\theta \ \hat{\theta} \right]}_{\hat{z}} =$$

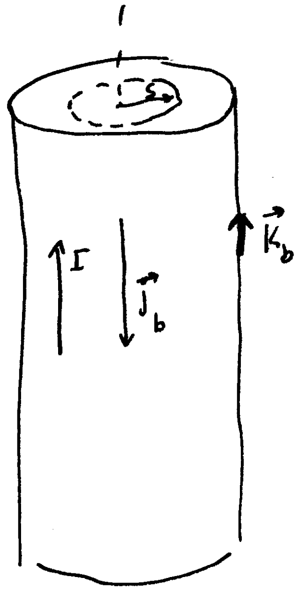
$$= \frac{2}{3} \mu_0 M \equiv \text{uniforme} \ !!$$

para $r > R$ → o campo $\vec{B}$ corresponde ao campo de um dipolo magnético centrado na origem

$$\vec{m} = \vec{M} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

Problema*:

Um cilindro longo de cobre (de raio R) transporta uma corrente uniformemente distribuída. Calcule $\vec{H}$ dentro e fora do cilindro



Lei de Ampère-Maxwell para $\vec H$:

$$\oint \vec H \cdot d\vec l = I_f$$

$s<R \rightarrow$ $\quad H\, 2\pi s = I \dfrac{\pi s^2}{\pi R^2}$

$$\boxed{\vec H = \frac{I}{2\pi R^2}\, s\, \hat\phi}$$

$s > R$ $\quad 2\pi s\, H = I \quad \rightarrow \quad \vec H = \dfrac{I}{2\pi s}\,\hat\phi$

//

Meio Linear:

Imagine que o meio é paramagnético ou diamagnético, de tal forma que $\vec M$ só existe na presença de $\vec B$ (se $\vec B = 0$ então $\vec M = 0$). Podemos escrever:

$$\vec M = \chi_m \vec H$$

(Repare que escolhemos $\vec M$ proporcional a $\vec H$ para definir a susceptibilidade magnética)

Então

$$\vec B = \mu_0 (\vec H + \vec M) = \underbrace{\mu_0 (1+\chi_m)}_{\mu} \vec H = \mu \vec H$$

[permeabilidade magnética]

Problema: Um cilindro longo de raio R tem uma magnetização uniforme paralelo ao eixo de simetria que cresce c/ distância ao eixo:

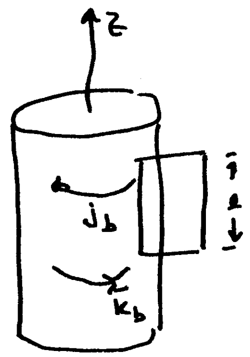
$$\vec{M} = k s \hat{z}$$

Calcule $\vec{B}$ dentro e fora do material

Solução #1

$$\vec{M} = k s \hat{z} \quad ; \quad \vec{J}_b = \nabla \wedge \vec{M} = - \frac{\partial M_z}{\partial s} \hat{\phi} = -k \hat{\phi}$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \wedge \hat{n} = k s (\hat{z} \wedge \hat{s})\Big|_{s=R} = k R \hat{\phi}$$



i) fora do cilindro $s > R$ $\quad \vec{M} = 0 \Rightarrow$ (ou $j_b = 0$) e $\Rightarrow \boxed{\vec{B} = 0}$

ii) dentro do cilindro $s < R$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = +\mu_0 \left[-k l (R-s) + k R l \right]$$

$$\ldots = \mu_0 k \cancel{l} s = B \cancel{l}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 k s \hat{z}}$$

Solução #2:

$\vec{H} = 0 \quad \forall s$ porque $\vec{J}_f = 0 \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$

$\vec{M} = 0$ para $s > 0 \Rightarrow \vec{B}_{out} = 0$ e $\vec{B} = \mu_0 k s \hat{z}$ dentro

(Muito mais simples.

Problema: Um solenóide (infinito com n espiras por unidade de comprimento) está preenchido com um material de susceptibilidade magnética χ_m. Obtenha $\vec{B}$ dentro e fora do solenóide. e as correspondentes correntes de deslocamento

Solução: $\vec{H} = nI\,\hat{z}$ (dentro)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$; como $\vec{M}$ é uniforme $\vec{J}_b = 0$

$$K_b = \vec{M} \wedge \hat{n} = \chi_m (\vec{H} \wedge n) = \chi_m n I \hat{\phi}$$

O campo no interior é reforçado se $\chi_m > 0$ (paramagnetismo) ou diminuído (diamagnetismo) se $\chi_m < 0$.

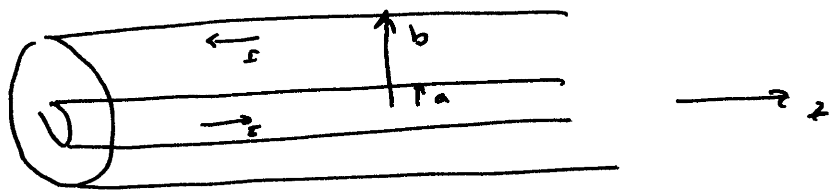
Observação: Num material homogeneo e neutro a densidade de corrente ligada $\vec{J}_b$ é proporcional à densidade de corrente $\vec{J}_f$:

$$\vec{J}_b = \nabla \wedge \vec{M} = \chi_m \nabla \wedge \vec{H} = \chi_m \vec{J}_f$$

Consequentemente, num isolador ($\vec{J}_f = 0$) homogeneo todas as correntes de deslocamento serão superficiais

Problema:

Um cabo co-axial consiste em duas superfícies cilíndricas separadas por um dieléctrico com $\chi_m > 1$. As correntes circulam



nestas superfícies como se indica na figura.

a) Calcule o campo magnético $\vec{B}$ na região entre os 2 tubos.

b) Calcule a magnetização e as correntes de cargas ligadas e confirme que dão o bom campo B

Solução.

$a < r < b \qquad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f = I \longrightarrow H\, 2\pi s = I \longrightarrow \vec{H}(s) = \frac{I}{2\pi s}\hat{\phi}$

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\, H = \mu_0(1+\chi_m)\frac{I}{2\pi s}\,\hat{\phi}$$

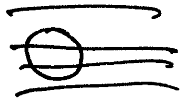
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m I}{2\pi s}\,\hat{\phi}$$

$$\vec{J}_b = \nabla \wedge \vec{M} = \frac{1}{s}\partial_s\left(s\frac{\chi_m I}{2\pi s}\right)\hat{z} \equiv 0$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \wedge \hat{m} = \frac{\chi_m I}{2\pi a}\, z \qquad s = a$$

$$= -\frac{\chi_m I}{2\pi b}\, z \qquad s = b$$

total corrente:



$$I + \frac{I\chi_m}{2\pi a}\cdot 2\pi a = (I + \chi_m) I$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = 2\pi s B = \mu_0 (1+\chi_m) I$$

Energia magnética

Num certo instante t, uma dada configuração de cargas e correntes produz $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Entre t e $t+dt$ os campos alteram a configuração de cargas e correntes. Qual é o trabalho realizado ~~para~~ nesse intervalo de tempo?

Uma carga Δq que se desloca $d\vec{l}$ em dt recebe uma energia (trabalho realizado pelos campos sobre a carga):
$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = \Delta q\,(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}\,dt = \Delta q\,\vec{E}\cdot\vec{v}\,dt$$

$$\Delta q = \rho\, d\vec{r} \quad ; \quad \rho\vec{v} = \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}\cdot d\vec{l} = \vec{J}\cdot\vec{E}\, d\vec{r}\, dt$$

(trabalho realizado sobre as cargas e correntes em $d\vec{r}$ durante dt).

~~Mas: $\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0(\vec{J}_f + \vec{J}_D) = \mu_0\vec{J} + \mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$~~

Mas:

(Maxwell-Ampère): $\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{J} = \dfrac{1}{\mu_0}(\nabla\wedge\vec{B}) - \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{J}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\wedge\vec{B})\cdot\vec{E} - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Mas:

$$\frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\cdot(\nabla\wedge\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}\cdot\underbrace{(\nabla\wedge\vec{E})}_{-\dot{\vec{B}}} - \nabla\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})\right]$$

Logo:

$$\vec{J}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\mu_0}\left[-\vec{B}\cdot\dot{\vec{B}} - \nabla\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})\right] - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{dt}$$

Isto é:

a ~~taxa de variação temporal da densidade volúmica~~ de ~~energia (que é o trabalho~~

$\vec{J}\cdot\vec{E}$ ≡ trabalho realizado sobre as cargas e correntes por unidade de volume e corrente

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{du_{em}}{dt} - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})$$

$$\frac{du_{em}}{dt} = \cancel{\text{densidade}}\ \vec{H}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{E}\cdot\frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\boxed{du_{em} = \vec{H}\cdot d\vec{B} + \vec{E}\, d\vec{D}}$$