Exercícios de Física Computacional

Escola de Ciências da Universidade do Minho

Física e Engenharia Física

ano letivo 2019/2020, 1º semestre

Folha 9

1. Resolva a equação
$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \sin(t)$$
usando os métodos de Runge-Kutta de segunda e quarta ordem, sabendo que $x(t = 0) = 0$. Compare, no mesmo gráfico, $N = 10, 20, 50, 100$. Sugestão: fazer um gráfico para os cada um dos métodos onde se comparem os vários N.

2. As equações de Lotka–Volterra descrevem um modelo de interação entre presas e predadores. Sejam as variáveis x e y proporcionais ao tamanho de população de coelhos (presas) e raposas (predadores).

   No modelo de Lotka–Volterra os coelhos reproduzem-se a uma taxa proporcional à sua população e são comidos pelas raposas a uma taxa proporcional à população de coelhos e raposas:
$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy,$$
   onde α e β são constantes.

   Ao mesmo tempo as raposas reproduzem-se a uma taxa proporcional à taxa a que comem coelhos – porque precisam de comida para poderem crescer e reproduzir-se – mas também morrem a partir de uma certa idade a uma taxa proporcional à sua própria população:
$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y,$$
   onde γ e δ também são constantes.

   (a) Resolva estas equações numericamente para $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0.5$ e $\delta = 2$ com a condição inicial $x = y = 2$, fazendo o gráfico de ambas as populações em função do tempo. Assuma que a população quer de raposas quer de coelhos é 100 vezes maior que y e x, respetivamente.

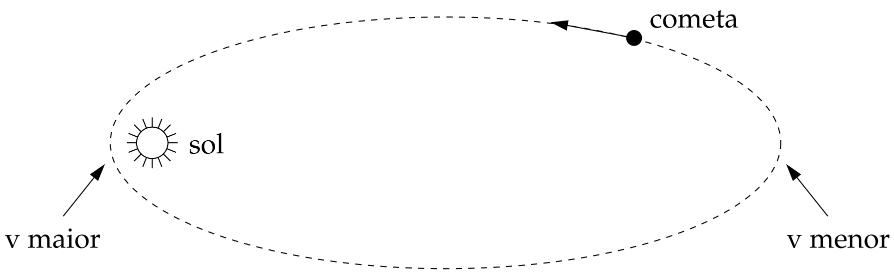
   (b) Interprete os gráficos obtidos.

3. O *oscilador de van der Pol*, que aparece em eletrónica e física dos lasers, é descrito pela equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Resolva esta equação numericamente entre $t = 0$ to $t = 50$, representando o correspondente diagrama de espaço de fase (*i.e.* dx/dt em função de x) para $\omega = 1$, $\mu = 5$, e condições iniciais $x = 1$ e $dx/dt = 0$. Tenha em atenção que o intervalo de tempo deve ser suficientemente pequeno para que o diagrama obtido seja suficientemente suave e preciso.

4. É frequente os cometas terem órbitas muito excêntricas à volta do sol. Durante a maior parte do tempo deslocam-se lentamente fora do sistema solar mas quando passam perto do sol deslocam-se com velocidades maiores:



Este é um caso em que o uso de passos adaptativos na resolução de equações diferenciais é útil, uma vez que para velocidades menores se podem usar passos maiores, sendo necessário diminuir o passo para velocidades maiores.

A equação diferencial que define o movimento do cometa pode ser facilmente obtida. A força entre o sol, com massa M, e o cometa com massa m é GMm/r^2, sendo $\vec{r}$ o vetor posição. De acordo com a segunda lei de Newton temos então que:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\left(\frac{GMm}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Cancelando m e tomando a componente x temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM\frac{x}{r^3}\,,$$

e analogamente para as coordenadas y e z. Como a órbita está definida num plano podemos, sem perda de generalidade, ignorar uma das coordenadas orientando o sistema de eixos de forma a que este plano seja perpendicular a z, ficando então com duas equações diferenciais de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM\frac{x}{r^3}\,, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -GM\frac{y}{r^3}\,,$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Converta estas duas equações de segunda ordem em quatro de primeira ordem.

(b) Resolva estas equações usando o método de Runge–Kutta de quarta ordem com passo fixo, usando os valores tabelados para G e M. Como condição inicial, assuma que o cometa está inicialmente em $x = 4$ mil milhões de quilómetros e $y = 0$, o que corresponde a uma posição perto da órbita de Neptuno, tendo como velocidade inicial $v_x = 0$ e $v_y = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. É importante escolher um passo fixo h suficientemente pequeno para que as órbitas sejam precisos. Um bom indicador da precisão das trajetórias é observar a sobreposição entre várias órbitas sucessivas no gráfico de y em função de x.

(c) Modifique o seu programa para que o cálculo seja feito usando um passo adaptativo com uma precisão alvo de $\delta = 1$ km/ano. Represente os pontos correspondentes à posição calculada em cada iteração do método, de forma a ver os passos pequenos junto ao sol e mais largos em posições mais distantes.

5. Escreva um programa para resolver a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x + 5 = 0$$

usando o método do salto de rã (*leapfrog method*). Resolva entre $t = 0$ e $t = 40$ em passos de $h = 0.001$ com as condições iniciais $x = 1$ e $dx/dt = 0$. Represente a solução obtida (x em função de t).

Para casa:

6. Use o método de Verlet para calcular a posição da terra em torno do sol. As equações de movimento para a posição $\vec{r} = (x, y)$ de um planeta no seu plano orbital são as derivadas no problema 4:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM\frac{\vec{r}}{r^3}\,,$$

onde $G = 6.6738 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ é a constante gravitacional de Newton e $M = 1.9891 \times 10^{30}$ kg é a massa do sol. A órbita da terra não é perfeitamente circular, estando o planeta umas vezes mais próximo do sol e outras mais afastado. No ponto de maior aproximação ao sol (periélio) a terra move-se tangencialmente (*i.e.* perpendicuar à linha entre a terra e o sol), estando a uma distância de 1.4710×10^{11} m do sol e uma velocidade linear de $3.0287 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

   (a) Calcule numericamente a órbita da terra usando o método de Verlet com um passo de uma hora. Represente a órbita mostrando que não é perfeitamente circular.

   (b) Considere a energia potencial gravítica, $-GMm/r$, onde $m = 5.9722 \times 10^{24}$ kg, e a energia cinética, $1/2mv^2$. Calcule estas duas quantidades em cada passo, mostrando a respetiva variação, bem como a energia total.

   (c) Discuta os resultados obtidos.