ELECTROMAGNETISMO

Lic. Física - 2012/13

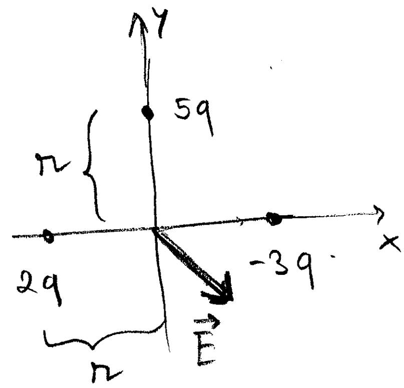
1º Teste (24/outubro/2012)

---

1. Respostas A e C

Nos diagramas seguintes apresenta-se o campo eléctrico para cada um dos casos:

(1)

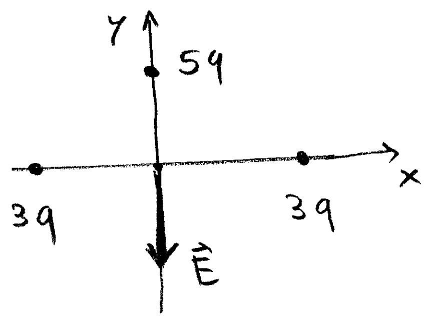


$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q+3q}{r^2} \qquad E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5q}{r^2}$$

$$\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5\sqrt{2}q}{r^2}$$

(2)

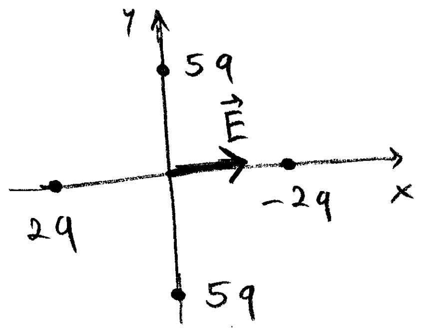


$E_x = 0$ (os campos devidos às cargas sobre o eixo x anulam-se)

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5q}{r^2}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5q}{r^2}$$

(3)

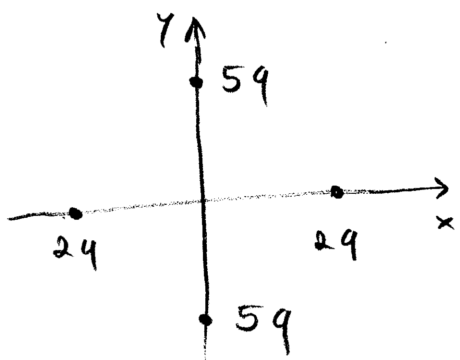


$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{r^2}, \qquad E_y = 0$$

(os campos devidos às cargas sobre o eixo y anulam-se)

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{r^2}$$

(4)



$E_x = 0$

$E_y = 0$

$|\vec{E}| = 0$

Cargas iguais colocadas simetricamente em relação à origem criam nesse ponto um campo nulo.

Vemos, assim, que:

- o campo tem maior intensidade na situação 1
- o campo é nulo na situação 4
- apenas na situação 2 o campo aponta para baixo (dirigido segundo o eixo y no sentido negativo)

2. Resposta E

Vejamos porque é que as afirmações A, B, C e D são falsas.

A. Um protão, com carga positiva, deve dirigir-se no sentido das linhas de campo. Como o campo se dirige no sentido dos potenciais decrescentes, isso significa que o protão se dirige das regiões de maior potencial para as regiões de menor potencial.

B. O potencial num ponto está definido a menos de uma constante arbitrária. O valor do potencial depende, por isso, da escolha da constante. Assim, o sinal do potencial de uma carga negativa em determinadas regiões dependerá dessa constante.

C. e D.

A relação entre o campo eléctrico e o potencial é

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

ou

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

o que mostra que a nulidade de uma das funções num ponto não implica a nulidade da outra.

3. Resposta <u>D</u>

$$\vec{E} = 24\vec{u}_x + 30\vec{u}_y + 16\vec{u}_z \quad (N/C)$$

o fluxo do campo através da superfície S:

$$\phi = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, da$$

onde $\vec{n}$ é o vector unitário normal a <u>S</u>

Neste caso, como S se encontra no plano yz, a normal tem a direcção do eixo x.

Então

$$\phi = \int_S (24\vec{u}_x + 3\vec{u}_y + 16\vec{u}_z)\cdot(\vec{u}_x)\, da$$

$$= 24 \cdot A$$

onde $A = 2{,}0\ m^2$ é a área da superfície

$$\phi = 24 \times 2 = 48 \quad Nm^2/C$$

4. $V = \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2z$ (volt)

a) Como $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, vem

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

$$\vec{E} = -3x\,\vec{u}_x - 2y\,\vec{u}_y - 2\,\vec{u}_z \quad (V/m)$$

b) A forma diferencial do Teorema de Gauss

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

permite relacionar, para cada ponto, o campo eléctrico $\vec{E}$ com a densidade volúmica de carga, ρ.

Tem-se então

$$\rho = \varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$
$$= \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$
$$= \varepsilon_0(-3 - 2 + 0)$$
$$= -5\varepsilon_0$$

c) No ponto de coordenadas $x = 1,0$, $y = 2,0$ e $z = 4,0$ o campo eléctrico toma o valor

$\vec{E} = -3,0\vec{u}_x - 4,0\vec{u}_y - 2,0\vec{u}_z$

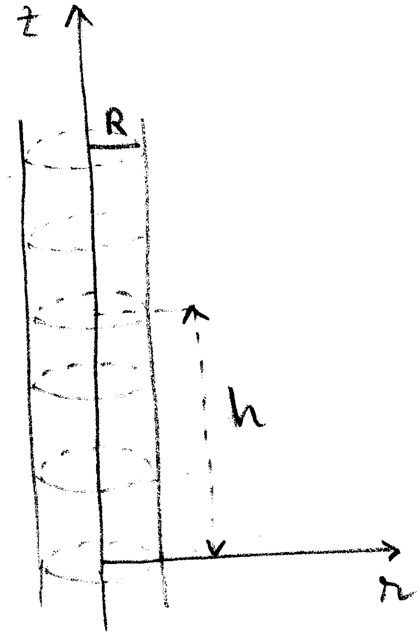
A força eléctrica a que a carga $q = 3,0\times10^{-6}$ C fica sujeita vale $\vec{F} = q\vec{E}$

utilizando a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, obtem-se

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \frac{3,0\times10^{-6}}{1,0\times10^{-3}}(-3,0\vec{u}_x - 4,0\vec{u}_y - 2,0\vec{u}_z) =$$
$$= (-9,0\vec{u}_x - 12,0\vec{u}_y - 6,0\vec{u}_z)\times10^{-3} \ m/s^2$$

5.

a)



$$\rho(r) = ar^2$$

A carga contida no volume do cilindro de altura $\underline{h}$ é dada por

$$Q = \int_{vol} \rho \, dv$$

utilizando coordenadas cilíndricas

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho r \, dr d\phi dz$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h ar^2 . r \, dr d\phi dz$$

$$= 2\pi h a \int_0^R r^3 dr$$

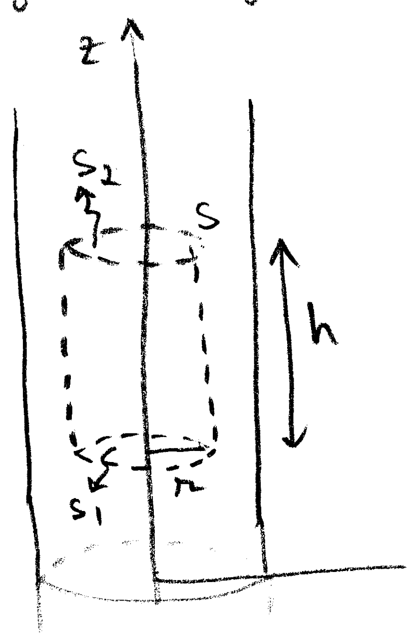
$$= 2\pi h a \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^h$$

$$= \frac{1}{2} \pi h a R^4$$

b) Uma vez que o cilindro é infinito, o campo eléctrico, dentro e fora do cilindro, deve ser sempre normal à superfície lateral do cilindro.

Podemos aplicar o Teorema de Gauss para calcular o campo escolhendo uma superfície gaussiana coaxial com o cilindro e de raio $\underline{r}$ e altura $\underline{h}$

No caso $r < R$ (dentro do cilindro) a superfície gaussiana é um cilindro interior ao cilindro carregado, como se mostra na figura seguinte



$S \equiv$ superfície cilíndrica fechada de altura $\underline{h}$ e raio $\underline{r}$

$$S = S_1 + S_2 + S_{lateral}$$

Pelo T. Gauss o fluxo do campo eléctrico através da superfície cilíndrica S é dado por

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0},$$

onde $\vec{n}$ é o vector unitário normal à superfície em cada ponto e onde q_{int} é a carga contida no interior de $\underline{S}$.

$\underline{S}$ pode ser separada nas superfícies das bases do cilindro (S_1 e S_2) e na superfície lateral ($S_{lateral}$):

$$\int_{S_1} \vec{E}.\vec{n}\,da + \int_{S_2} \vec{E}.\vec{n}\,da + \int_{S_{lateral}} \vec{E}.\vec{n}\,da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Os dois primeiros integrais são nulos uma vez que sobre as bases do cilindro se tem sempre $\vec{E} \perp \vec{n}$

O terceiro integral é dado por $E.2\pi r h$, uma vez que o campo eléctrico toma o mesmo valor sobre todos os pontos da superfície lateral e $\vec{E} \parallel \vec{n}$.

Por outro lado, fazendo um cálculo semelhante ao da alínea a) obtem-se

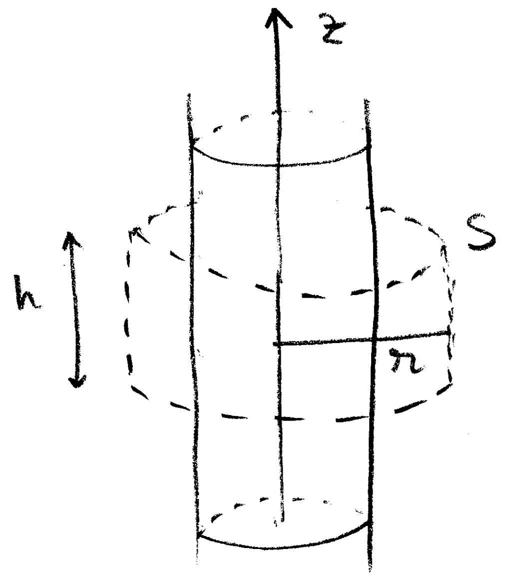
$$q_{int} = \frac{1}{2}\pi h a r^4.$$

O T. Gauss conduz então ao seguinte resultado

$$E.2\pi r h = \frac{\pi h a r^4}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\varepsilon_0} a r^3 \vec{u}_r \qquad (r < R)$$

No caso $r > R$ (fora do cilindro) a superfície gaussiana escolhida é um cilindro exterior ao cilindro carregado, como se ilustra na figura seguinte



Fazendo um raciocínio idêntico àquele que foi efectuado para $r < R$, tem-se, por aplicação do T. Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad , \quad q_{int} = \frac{1}{2} \pi h a R^4$$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{1}{2\varepsilon_0} \pi h a R^4$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\varepsilon_0} a \frac{R^4}{r} \vec{u}_r \qquad (r > R)$$

Vemos assim que o campo é sempre normal ao cilindro carregado e cresce com r^3 para pontos interiores ao cilindro e decresce (com $1/r$) para pontos exteriores ao cilindro.

c) A diferença de potencial entre os postos P_1 e P_2 está relacionada com o campo $\vec{E}$ por

$$V_1 - V_2 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Tomando P_1 em $r=0$ e P_2 em $r=R$, vem

$$V_{(r=0)} - V_{(r=R)} = \int_0^R E\, dr$$

considerando $V_{(r=0)} = 0$ e relembrando o resultado da alínea anterior para o campo no interior do cilindro $\left(E = \frac{1}{4\varepsilon_0} a r^3\right)$, vem

$$
\begin{aligned}
V_{(r=R)} &= -\int_0^R \frac{1}{4\varepsilon_0} a r^3\, dr \\
&= -\frac{a}{4\varepsilon_0} \int_0^R r^3\, dr \\
&= -\frac{a}{4\varepsilon_0} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \\
&= -\frac{a}{16\varepsilon_0} R^4
\end{aligned}
$$