

## Física Quântica II

### Soluções

#### Exercício 24: Absorção por um oscilador

Neste problema, consideramos um oscilador harmónico em uma dimensão, descrito pelo Hamiltoniano,  $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left( \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + 1/2 \right)$  e supomos que o estado próprio deste sistema a  $t = 0$  é o estado próprio  $|n\rangle$ , tal que  $\hat{n}_0 |n\rangle = n |n\rangle$ , em que,  $\hat{n}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$ , é o operador número de ocupação do oscilador.

Assume-se que este sistema é perturbado por um campo eléctrico sinusoidal a partir deste momento, sendo a perturbação dada por  $\hat{H}_1(t) = -q\mathcal{E}_0 \hat{x} \cos(\omega t)$ , onde  $q$  é a carga do oscilador,  $\mathcal{E}_0$  a magnitude do campo eléctrico,  $\omega$  a sua frequência e onde  $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger)$  é o operador de posição.

- a) A fórmula para a amplitude de transição do estado inicial  $|n\rangle$  para um estado final  $|m\rangle$  é dada por (com  $t_0 = 0$ )

$$\gamma_{n \rightarrow m}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t du \langle m | \hat{H}_1(u) | n \rangle e^{-i\omega_{nm}u}, \quad (113)$$

em que  $\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = (n - m)\omega_0$ . Substituindo a expressão para  $\hat{H}_1(u)$  na equação (113), e levando em conta que  $\langle m | (\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger) | n \rangle = \sqrt{n} \langle m | n - 1 \rangle + \sqrt{n + 1} \langle m | n + 1 \rangle = \sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n + 1} \delta_{m,n+1}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_{n \rightarrow m}(t) &= \frac{iq\mathcal{E}_0}{\hbar} \left( \frac{\hbar}{2m\omega_0} \right)^{1/2} \left( \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \int_0^t du \cos(\omega u) e^{i\omega_0 u} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{n} \delta_{m,n-1} \int_0^t du \cos(\omega u) e^{-i\omega_0 u} \right) \end{aligned} \quad (114)$$

que é a solução da alínea.

- b) Se o sistema se encontra no estado fundamental, ou seja  $n = 0$ , então apenas o primeiro termo da equação (114) contribui para a amplitude de transição e obviamente,  $m = 1$ , pelo que obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_{0 \rightarrow 1}(t) &= \frac{iq\mathcal{E}_0}{\hbar} \left( \frac{\hbar}{2m\omega_0} \right)^{1/2} \int_0^t du \cos(\omega u) e^{i\omega_0 u} \\ &= \frac{iq\mathcal{E}_0}{\hbar} \left( \frac{\hbar}{2m\omega_0} \right)^{1/2} \left( e^{i(\omega_0 + \omega)t/2} \cdot \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)t/2]}{\omega_0 + \omega} \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\omega_0 - \omega)t/2} \cdot \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t/2]}{\omega_0 - \omega} \right). \end{aligned} \quad (115)$$

A probabilidade de transição é simplesmente dada pelo módulo quadrado desta quantidade, e obtemos

$$p(t) = \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2}{2m\hbar\omega_0} \left\{ \frac{\sin^2[(\omega_0 + \omega)t/2]}{(\omega_0 + \omega)^2} + \frac{2\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin[(\omega_0 + \omega)t/2] \sin[(\omega_0 - \omega)t/2] + \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \right\}. \quad (116)$$

**Exercício 25:** *Função de Green em 1d e potencial duplo delta-de-Dirac*

Verificamos na aula teórica qual a expressão para a função de Green de uma partícula livre em 3d. O objetivo deste exercício é repetir a análise em uma dimensão.

- a) Vamos começar por considerar o caso de estados ligados, ou seja, com energia  $E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} < 0$ . Se  $G_\kappa(x - x') = -\frac{e^{-\kappa|x-x'|}}{2\kappa} = -\frac{1}{2\kappa} [e^{-\kappa(x-x')}\theta(x - x') + e^{\kappa(x-x')}\theta(x' - x)]$ , temos primeiro, com  $\theta'(x - x') = \delta(x - x')$  e  $\theta'(x' - x) = -\delta(x - x')$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dG_\kappa}{dx} &= \frac{1}{2} [e^{-\kappa(x-x')}\theta(x - x') - e^{\kappa(x-x')}\theta(x' - x)] \\ &\quad - \frac{1}{2\kappa} [e^{-\kappa(x-x')}\delta(x - x') - e^{\kappa(x-x')}\delta(x - x')] \\ &= \frac{1}{2} [e^{-\kappa(x-x')}\theta(x - x') - e^{\kappa(x-x')}\theta(x' - x)], \end{aligned} \quad (117)$$

onde o segundo termo do lado direito é zero, porque as exponenciais que multiplicam as funções delta devem ser avaliadas em  $x = x'$ . Agora, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G_\kappa}{dx^2} &= -\frac{\kappa}{2} [e^{-\kappa(x-x')}\theta(x - x') + e^{\kappa(x-x')}\theta(x' - x)] \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa} [e^{-\kappa(x-x')}\delta(x - x') + e^{\kappa(x-x')}\delta(x - x')] \\ &= \kappa^2 G_\kappa + \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (118)$$

ou seja,

$$\frac{d^2 G_\kappa}{dx^2} - \kappa^2 G_\kappa = \delta(x - x'), \quad (119)$$

cqd.

- b) Queremos mostrar, utilizando a equação (119), que a equação de Schrödinger para uma partícula em 1d se pode escrever como

$$\psi(x) = -\frac{m}{\hbar^2 \kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-\kappa|x-x'|} V(x') \psi(x'), \quad (120)$$

em que  $V(x)$  é o potencial que atua sobre a partícula. Aplicando o operador  $\frac{d^2}{dx^2} - \kappa^2$  ao lado esquerdo e ao lado direito de (120), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \kappa^2 \psi(x) &= -\frac{m}{\hbar^2 \kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left( \frac{d^2}{dx^2} - \kappa^2 \right) e^{-\kappa|x-x'|} V(x') \psi(x') \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \delta(x - x') V(x') \psi(x') \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} V(x) \psi(x), \end{aligned} \quad (121)$$

que é a equação de Schrödinger para um estado estacionário em 1d. Logo, vemos que a equação integral (120) é equivalente a esta equação.

- c) Consideramos agora o potencial duplo delta-de-Dirac,  $V(x) = \frac{V_0}{2}[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$ . Substituindo na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\frac{mV_0}{2\hbar^2\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-\kappa|x-x'|} [\delta(x'-a) + \delta(x'+a)] \psi(x') \\ &= -\frac{mV_0}{2\hbar^2\kappa} [\psi(a)e^{-\kappa|x-a|} + \psi(-a)e^{-\kappa|x+a|}].\end{aligned}\quad (122)$$

É fácil ver que para  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\psi(x) \sim e^{-\kappa|x|}$ , ou seja a função de onda representa um estado que decai exponencialmente, um estado ligado.

Como a equação (122) também é válida para  $x = -a$  e  $x = a$ , tomando sucessivamente cada uma destes valores para  $x$ , obtemos o seguinte sistema homogêneo de duas equações a duas incógnitas, que só tem solução quando o determinante associado se anula.

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{2\hbar^2\kappa}{mV_0}\right) \psi(a) + e^{-2\kappa a} \psi(-a) = 0 \\ e^{-2\kappa a} \psi(a) + \left(1 + \frac{2\hbar^2\kappa}{mV_0}\right) \psi(-a) = 0 \end{cases}.$$

No entanto, como o potencial é uma função par, o Hamiltoniano comuta com o operador paridade  $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ , pelo que podemos sempre escolher as funções próprias como pares ou ímpares.

Para a função própria par,  $\psi(-a) = \psi(a)$ , e obtemos a equação  $\kappa_+ = -\frac{mV_0}{2\hbar^2}(1 + e^{-2\kappa a})$  que, como  $\kappa_+ > 0$ , só tem solução, se  $V_0 < 0$ .

De igual modo, para a função própria ímpar,  $\psi(-a) = -\psi(a)$  e obtemos a equação  $\kappa_- = -\frac{mV_0}{2\hbar^2}(1 - e^{-2\kappa a})$  que, como  $\kappa_- > 0$ , também só tem solução, se  $V_0 < 0$ .

É fácil mostrar que estas duas equações se podem escrever como

$$\kappa_+(1 + \tanh(\kappa_+ a)) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}, \quad (123)$$

para o autovalor de  $\kappa_+$  (função de onda par) e

$$\kappa_-(1 + \coth(\kappa_- a)) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}, \quad (124)$$

para o autovalor  $\kappa_-$  (função de onda ímpar).

Que cada uma destas equações tem no máximo uma solução, pode ser visto pelo fato de que elas podem ser escritas na forma

$$f_+(x_+) = -\frac{mV_0 a}{\hbar^2}, \quad (125)$$

$$f_-(x_-) = -\frac{mV_0 a}{\hbar^2}, \quad (126)$$

onde  $x_{\pm} = \kappa_{\pm} a$  e  $f_+(x) = x(1 + \tanh(x))$ ,  $f_-(x) = x(1 + \coth(x))$ . Ambas as funções,  $f_+(x)$  e  $f_-(x)$ , são estritamente monotônicas no intervalo  $[0, +\infty[$  e portanto, elas interceptam a reta  $y = -\frac{mV_0 a}{\hbar^2}$  no máximo uma vez e somente se essa linha estiver localizada acima do eixo dos  $x$ , ou seja, se  $V_0 < 0$ , como vimos acima.

O decaimento exponencial da função de onda para  $x \rightarrow \pm\infty$  foi o elemento crucial que determinou que o espectro de energias deve ser discreto, pois o sistema de equações (123) é homogêneo precisamente por causa deste fato.

Mais abaixo, obteremos um espectro contínuo de estados para energia positiva devido à presença de um termo independente nas equações decorrentes das condições fronteira. Este termo deve a sua origem à presença de um onda plana proveniente de  $x = -\infty$ , com amplitude 1.

Note-se agora que

$$f_+(x_+) = f_-(x_-) \Leftrightarrow \kappa_+(1 + \tanh(\kappa_+a)) = \kappa_-(1 + \coth(\kappa_-a)).$$

No entanto,  $1 + \tanh(\kappa_+a) < 1 + \coth(\kappa_-a) \forall \kappa_+, \kappa_-$ , donde segue imediatamente que  $\kappa_+ > \kappa_-$ . Como  $E_{\pm} = -\frac{\hbar^2 \kappa_{\pm}^2}{2m}$ , isso implica que  $E_+ < E_-$ , ou seja,  $E_+$  é mais negativo, logo a função de onda par é estado fundamental.

Como pode ser visto nos gráficos abaixo, a função de onda par não tem nós, enquanto a função de onda ímpar tem um nó, em  $x = 0$ . Uma vez que um número maior de nós indica uma energia cinética mais elevada e conseqüentemente uma energia maior, pode-se assim entender por que a função de onda par tem uma energia menor do que a função de onda ímpar.

Como discutido acima, as energias dos dois estados ligados são dada pelas equações (125,126), onde ambas as funções  $f_+(x)$ ,  $f_-(x)$  são monotonicamente crescentes em  $x \in [0, +\infty[$ . Portanto,  $f_+(x) > f_+(0) = 0$ , enquanto  $f_-(x) > f_-(0) = 1$ .

A existência de uma solução no primeiro caso depende simplesmente da desigualdade

$$-\frac{mV_0a}{\hbar^2} = f_+(x_+) > 0, \quad (127)$$

que é satisfeita para qualquer valor de  $V_0 < 0$ .

No segundo caso, deve-se ter

$$-\frac{mV_0a}{\hbar^2} = f_-(x_-) > 1, \quad (128)$$

que coloca um limite mínimo no valor de  $|V_0|$ , nomeadamente

$$|V_0| > \frac{\hbar^2}{ma},$$

para que o estado ligado exista.

Se  $|V_0|$  é muito pequeno, então apenas o estado fundamental existe e pode-se expandir  $f_+(x_+) \approx x_+$  na equação (125), donde resulta

$$x_+ = k_+a \approx -\frac{mV_0a}{\hbar^2},$$

do qual se obtém uma energia  $E_+$  igual a

$$E_+ = -\frac{m|V_0|^2}{2\hbar^2},$$

que é exatamente o valor obtido para um único poço de potencial delta, como seria de esperar (escolher  $|V_0|$  pequeno é equivalente a escolher  $a$  pequeno, e recuperamos o resultado anterior).

Para representar as funções de onda, tomamos  $a = 1$  e  $\frac{mV_0}{2\hbar^2} = -1$ . As funções representadas não estão normalizadas.

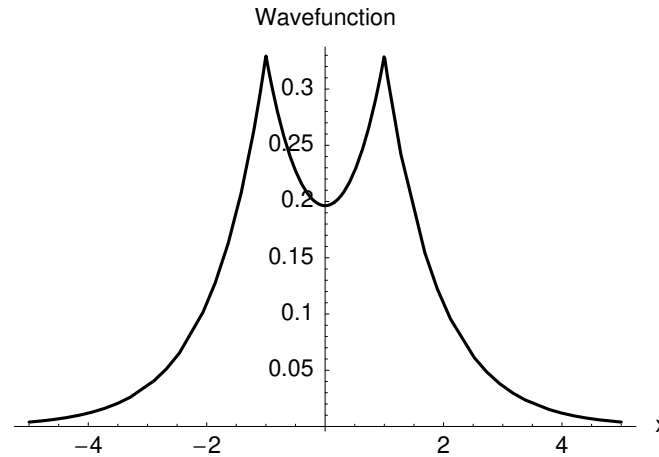


Figure 2: Função de onda do estado fundamental (par) para uma escolha de  $a = 1$  e  $\frac{mV_0}{2\hbar^2} = -1$ .

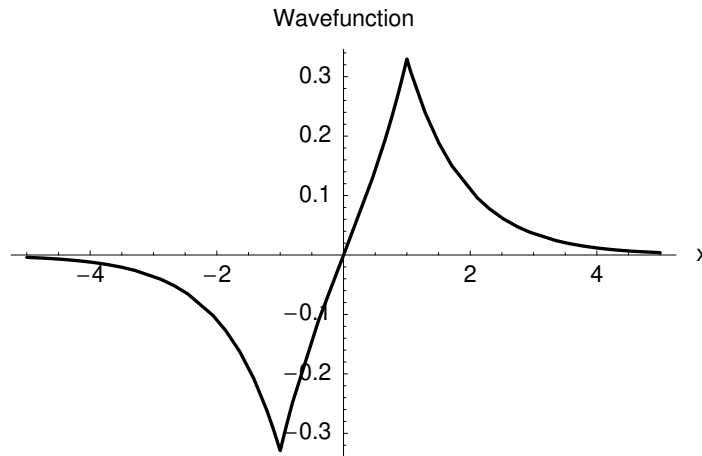


Figure 3: Função de onda do estado excitado (ímpar) para uma escolha de  $a = 1$  e  $\frac{mV_0}{2\hbar^2} = -1$ .

Este problema representa um modelo muito simples (unidimensional!) de um sistema como a molécula  $H_2^+$ , em que os potenciais delta imitam a atração dos prótons sobre o único elétron existente (deixamos de lado a repulsão próton-próton). A orbital de energia mais baixa será necessariamente dada pela função de onda par, enquanto o primeiro (e neste caso único) estado excitado será dado pelo função de onda ímpar.

Essas funções de onda são conhecidas em química, respectivamente, como orbitais ‘ligantes’ e ‘antiligantes’. Além disso, se desejarmos colocar um segundo elétron na orbital de menor energia, então a função de onda de spin do par será necessariamente anti-simétrica,

uma vez que a parte orbital é simétrica e, de acordo com o princípio de exclusão de Pauli, a função de onda total deve ser anti-simétrica na troca de coordenadas dos dois elétrons (fermiões). Isso significa que no estado fundamental, se espera que a molécula  $H_2$  tenha um spin total igual a 0.

- d) Consideramos agora o prolongamento analítico a energias positivas,  $\kappa = -ik$ . A equação (120) escreve-se como

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{ik|x-x'|} V(x') \psi(x'), \quad (129)$$

onde está incluída a possibilidade de soluções propagantes provenientes de  $x = -\infty$  (poderíamos igualmente considerar a possibilidade de soluções provenientes de  $x = +\infty$ , isto tem apenas que ver com as condições-fronteira escolhidas), que são soluções da equação de Schrödinger na ausência de um potencial.

Se o potencial se anular fora de uma região de tamanho  $2L$  em torno de 0, então a equação (129) reduz-se a

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-L}^{+L} dx' e^{ik|x-x'|} V(x') \psi(x'), \quad (130)$$

Se  $x \geq L$ , então podemos escrever  $e^{ik|x-x'|} = e^{ikx} e^{-ikx'}$  no integral acima, pelo que temos

$$\psi(x) = e^{ikx} \left( 1 + \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-L}^{+L} dx' e^{-ikx'} V(x') \psi(x') \right), \quad (131)$$

pelo que  $\psi(x) = t(k)e^{ikx}$  para  $x \geq L$ , com

$$t(k) = 1 + \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-L}^{+L} dx' e^{-ikx'} V(x') \psi(x'). \quad (132)$$

De igual modo, se  $x \leq -L$ , então podemos escrever  $e^{ik|x-x'|} = e^{-ikx} e^{ikx'}$  no integral que aparece no lado direito da equação (130), pelo que

$$\psi(x) = e^{-ikx} + \frac{me^{-ikx}}{i\hbar^2 k} \int_{-L}^{+L} dx' e^{ikx'} V(x') \psi(x'), \quad (133)$$

ou seja,  $\psi(x) = e^{-ikx} + r(k)e^{-ikx}$  para  $x \leq -L$ , em que

$$r(k) = \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-L}^{+L} dx' e^{ikx'} V(x') \psi(x'). \quad (134)$$

- e) Consideramos agora o potencial duplo delta-de-Dirac introduzido acima. Substituindo-o nas equações (132) e (134), obtemos as seguintes equações lineares para  $t(k)$  e  $r(k)$  em termos de  $\psi(-a)$  e  $\psi(a)$  (obviamente, aqui  $L = a$ )

$$\begin{aligned} t(k) &= 1 - \frac{imV_0}{2\hbar^2 k} [\psi(-a)e^{-ika} + \psi(a)e^{ika}], \\ r(k) &= -\frac{imV_0}{2\hbar^2 k} [\psi(-a)e^{ika} + \psi(a)e^{-ika}]. \end{aligned} \quad (135)$$

Como  $\psi(-a) = e^{-ika} + r(k)e^{ika}$  e  $\psi(a) = t(k)e^{ika}$ , substituindo estes resultados nas equações acima e após algum rearranjo dos termos, obtemos o seguinte sistema não homogêneo de duas equações a duas incógnitas para  $t(k)$  e  $r(k)$

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{imV_0}{2\hbar^2 k}\right) t(k) + \frac{imV_0}{2\hbar^2 k} e^{2ika} r(k) = \left(1 - \frac{imV_0}{2\hbar^2 k}\right) \\ \frac{imV_0}{2\hbar^2 k} e^{2ika} t(k) + \left(1 + \frac{imV_0}{2\hbar^2 k}\right) r(k) = \frac{imV_0}{2\hbar^2 k} \end{cases}.$$

A sua solução pode ser obtida por eliminação de uma das variáveis, e é dada por

$$t(k) = \frac{1}{\left(1 + \frac{imV_0}{2\hbar^2 k}\right)^2 + \frac{m^2 V_0^2}{4\hbar^4 k^2} e^{4ika}}, \quad (136)$$

e por

$$r(k) = -\frac{imV_0}{\hbar^2 k} \cdot \frac{\cos(2ka) + \frac{mV_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka)}{\left(1 + \frac{imV_0}{2\hbar^2 k}\right)^2 + \frac{m^2 V_0^2}{4\hbar^4 k^2} e^{4ika}}. \quad (137)$$

- f) O denominador de  $t(k)$  e  $r(k)$  pode ser escrito, separando suas partes reais e imaginárias, como

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{m^2 V_0^2}{4\hbar^4 k^2} (1 - \cos(4ka)) + \frac{imV_0}{\hbar^2 k} \left(1 + \frac{mV_0}{4\hbar^2 k} \sin(4ka)\right) = \\ & 1 - \frac{m^2 V_0^2}{2\hbar^4 k^2} \sin^2(2ka) + \frac{imV_0}{\hbar^2 k} \left(1 + \frac{mV_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka) \cos(2ka)\right), \end{aligned}$$

onde usamos as fórmulas trigonométricas para expressar o  $\cos(4ka)$  e  $\sin(4ka)$  em termos de  $\cos(2ka)$  e  $\sin(2ka)$ .

O módulo ao quadrado desta expressão é, portanto, igual a

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{m^2 V_0^2}{2\hbar^4 k^2} \sin^2(2ka)\right)^2 + \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \cdot \left(1 + \frac{mV_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka) \cos(2ka)\right)^2 = \\ & 1 + \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \cos^2(2ka) + \frac{m^3 V_0^3}{\hbar^6 k^3} \sin(2ka) \cos(2ka) + \frac{m^4 V_0^4}{4\hbar^8 k^4} \sin^2(2ka) = \\ & 1 + \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \left(\cos(2ka) + \frac{mV_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka)\right)^2, \end{aligned}$$

como pode ser visto expandindo o termo na primeira linha e agrupando todos os termos trigonométricos. Portanto, a partir desta expressão, obtemos que  $|t(k)|^2$  é dado por

$$|t(k)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \left(\cos(2ka) + \frac{mV_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka)\right)^2}, \quad (138)$$

Pode-se também obter  $|r(k)|^2$ , que é dado por

$$|r(k)|^2 = \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \cdot \frac{\left(\cos(2ka) + \frac{mV_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka)\right)^2}{1 + \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \left(\cos(2ka) + \frac{mV_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka)\right)^2}, \quad (139)$$

sendo que agora é fácil verificar que  $|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1$ .

- g) Nesta alínea, tomamos  $k = i\kappa$  na equação (136). A quantidade  $t(i\kappa)$  terá pólos em valores de  $\kappa$  para o qual seu denominador é nulo, ou seja, quando

$$\left(1 + \frac{mV_0}{2\hbar^2 \kappa}\right)^2 - \frac{m^2 V_0^2}{4\hbar^4 \kappa^2} e^{-4\kappa a} = 0,$$

o que é equivalente a

$$\frac{2\hbar^2\kappa}{mV_0} + 1 = \pm e^{-2\kappa a}.$$

A escolha do sinal menos (respectivamente mais) na equação acima produz a equação (123) (respectivamente (124)). Evidentemente, as soluções existem, se  $V_0 < 0$ .

Este resultado mostra, portanto, que os pólos de  $t(k)$  estão no eixo imaginário em valores de  $\kappa$  que correspondem ao estados ligados encontrados na alínea anterior.

### **Exercício 26:** *Aproximação de Born e teorema ótico*

Vimos que na aproximação de Born,  $f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V(q)$ , onde  $V(q)$  (com  $q = 2k_i \sin^2(\theta/2)$ ) é a transformada de Fourier do potencial, sendo que  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$ .

Ao mesmo tempo, esta quantidade, que é sempre positiva, integrada sobre todo o ângulo sólido, é igual à seção eficaz total que, de acordo com o teorema ótico, é igual a  $\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$ .

No entanto,  $f(0) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V(0)$  na aproximação de Born, que é uma quantidade real, e logo  $\sigma = 0$ ! Como resolver esta contradição?

Na verdade, a aproximação de Born é uma aproximação em série no potencial de espalhamento  $V(q)$ . Se restaurarmos o fator  $\lambda$  em frente do potencial,  $V(q) \rightarrow \lambda V(q)$ , facilmente verificámos que  $f(0)$  é de ordem  $\lambda$  na aproximação de Born, enquanto  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$  é de ordem  $\lambda^2$ . Pelo que, tal como na solução do problema 20, para verificarmos o teorema ótico, seria necessário calcular  $f(0)$  pelo menos até ordem  $\lambda^2$ .