

# Interferência e interferômetros

## Interferência

- Apenas polarizações paralelas interferem
- Interferência duma onda com a própria onda

## O interferômetro de Michelson

- Franjas devido um atraso
- Aplicações

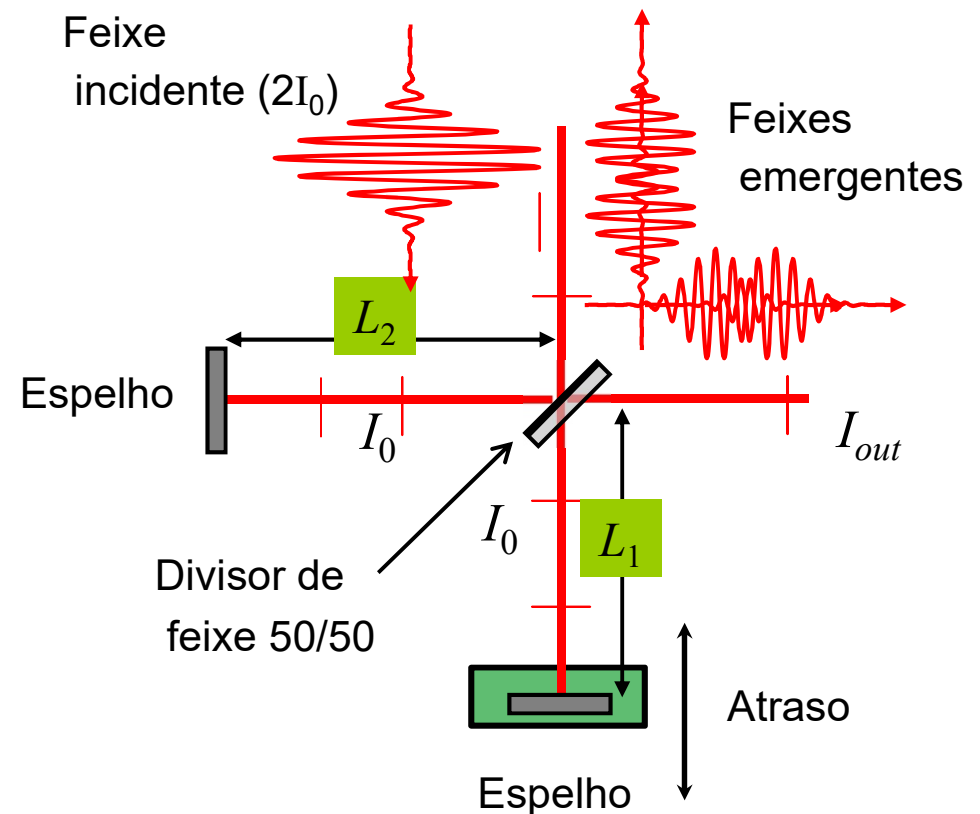
## Outros Interferômetros

- Mach-Zehnder
- Sagnac
- Iridescência

Ref: Hecht secção 9.4

Peatross Ware secções 8.1, 8.2, 12.1

Saleh Teich seção 2.5



# Sobreposição

---

A equação de onda é linear

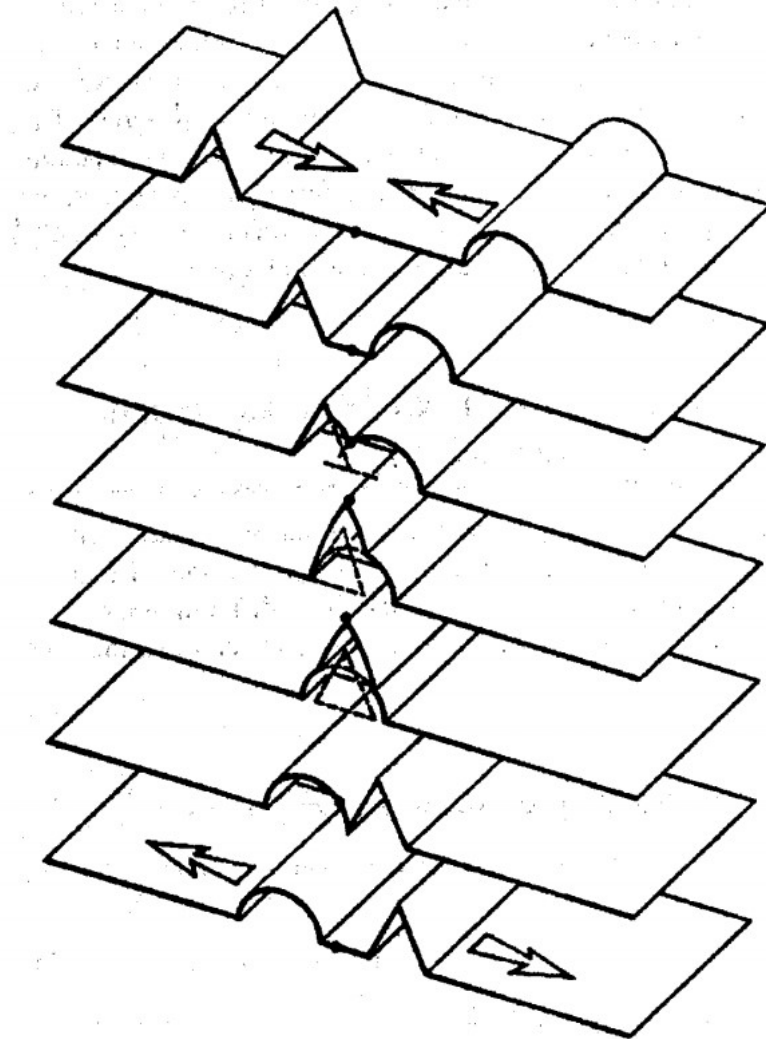
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0$$

Se ambas  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$   
são soluções, então a sobreposição

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$$

também é uma solução

O princípio de sobreposição  
permite as ondas se atravessarem  
sem interagir



# Soma de duas ondas: a irradiância

---

	Mesma polarização	Polarizações perpendiculares
<b>Sobreposição coerente</b> Mesma frequência (cor)	$I = I_1 + I_2 + c\epsilon \operatorname{Re}\{E_1 \cdot E_2^*\}$	$I = I_1 + I_2$
<b>Sobreposição incoerente</b> Frequências (cores) diferentes	$I = I_1 + I_2$	$I = I_1 + I_2$

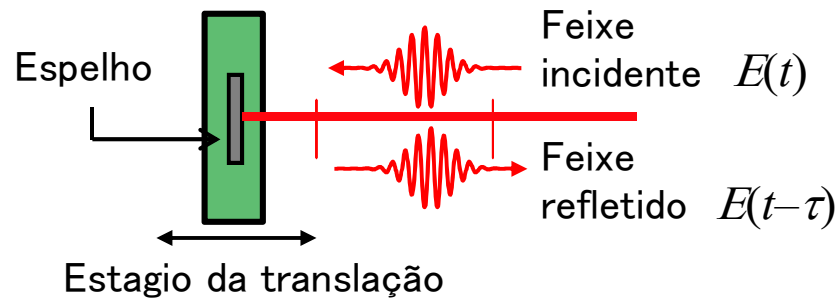
Interferência acontece apenas quando as ondas tem a mesma frequência e polarização. Vamos focar neste caso

---

# Franjas devido um atraso

Sobreposição de duas ondas monocromáticas

$$I = I_1 + c\varepsilon \operatorname{Re}\{E_1 \cdot E_2^*\} + I_2$$



Luz se propaga  $300 \mu\text{m}$  em  $10^{-12}\text{s}$   
 $1 \mu\text{m} \leftrightarrow 6.6 \text{ fs}$  (cerca 2 ciclos)

Uma onda com um atraso  $\tau$

$$\tau = 2\delta L / c$$

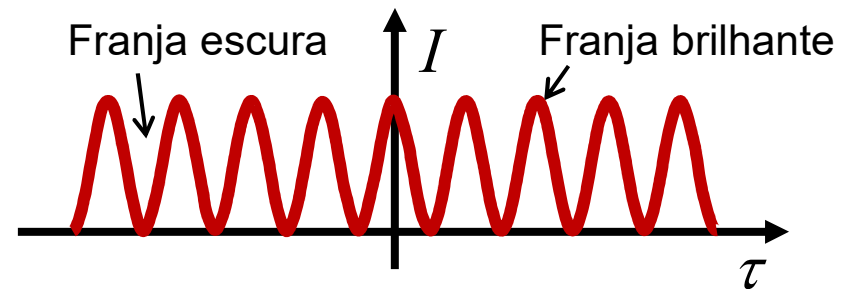
$$\Delta\phi = \omega\tau$$

$$= 2\omega \delta L / c$$

$$= 2k \delta L$$

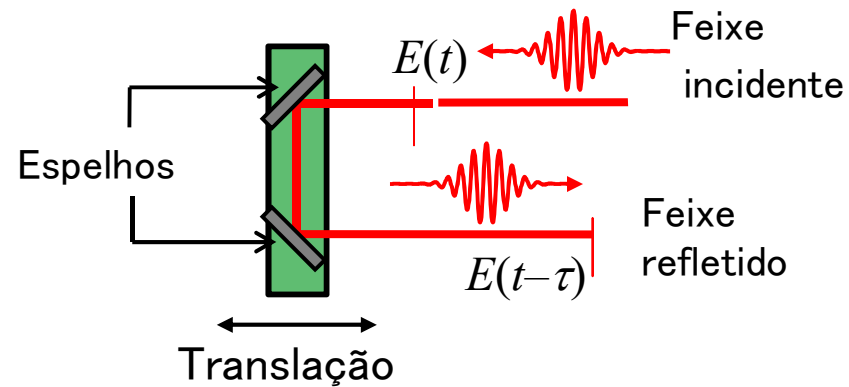
$$I = 2I_0 + c\varepsilon \operatorname{Re}\{E_0 \exp(i\omega t) \cdot E_0^* \exp[-i\omega(t - \tau)]\}$$

$$\Rightarrow I = 2I_0 + 2I_0 \cos(\omega\tau)$$

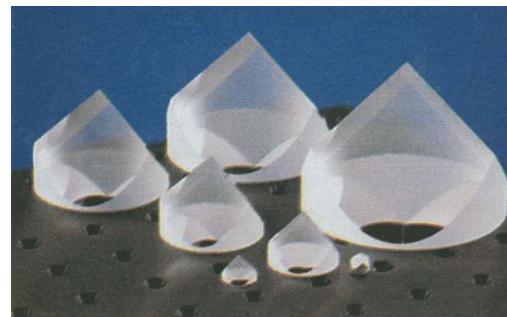
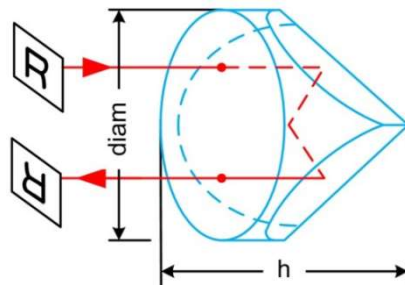


# Vários métodos para introduzir um atraso

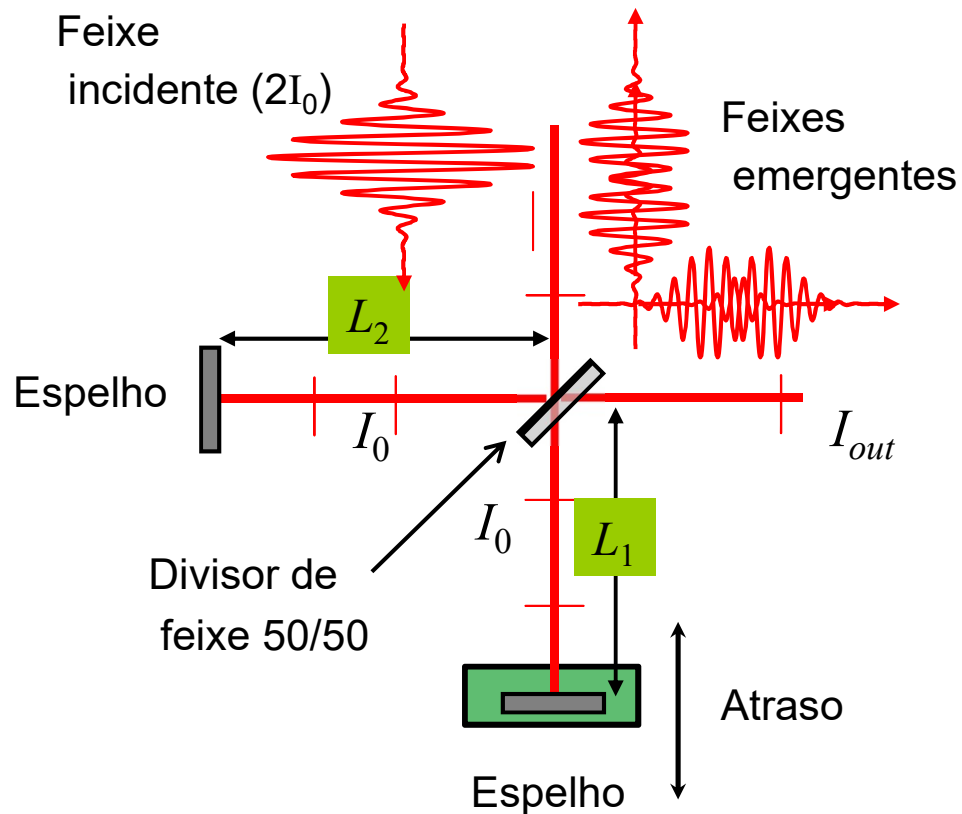
2 espelhos criam um atraso e desloca o feixe. Espelhos desalinhos fazem que os feixes não sejam paralelos.



Conjunto de três superfícies refletoras á 90° criam sempre um feixe paralelo ao feixe incidente.



# Interferómetro Michelson



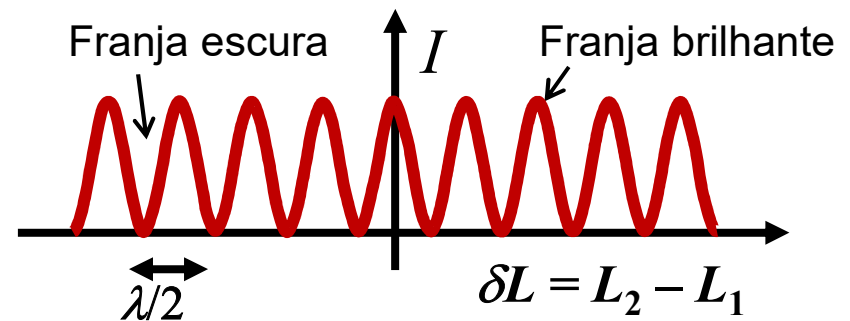
O interferómetro de Michelson pode ser usado para determinar o comprimento de onda duma fonte monocromática

Mudança de fase no divisor de feixe introduza o sinal -

$$I_{out} = 2I_0 - 2I_0 \cos(\omega\tau)$$

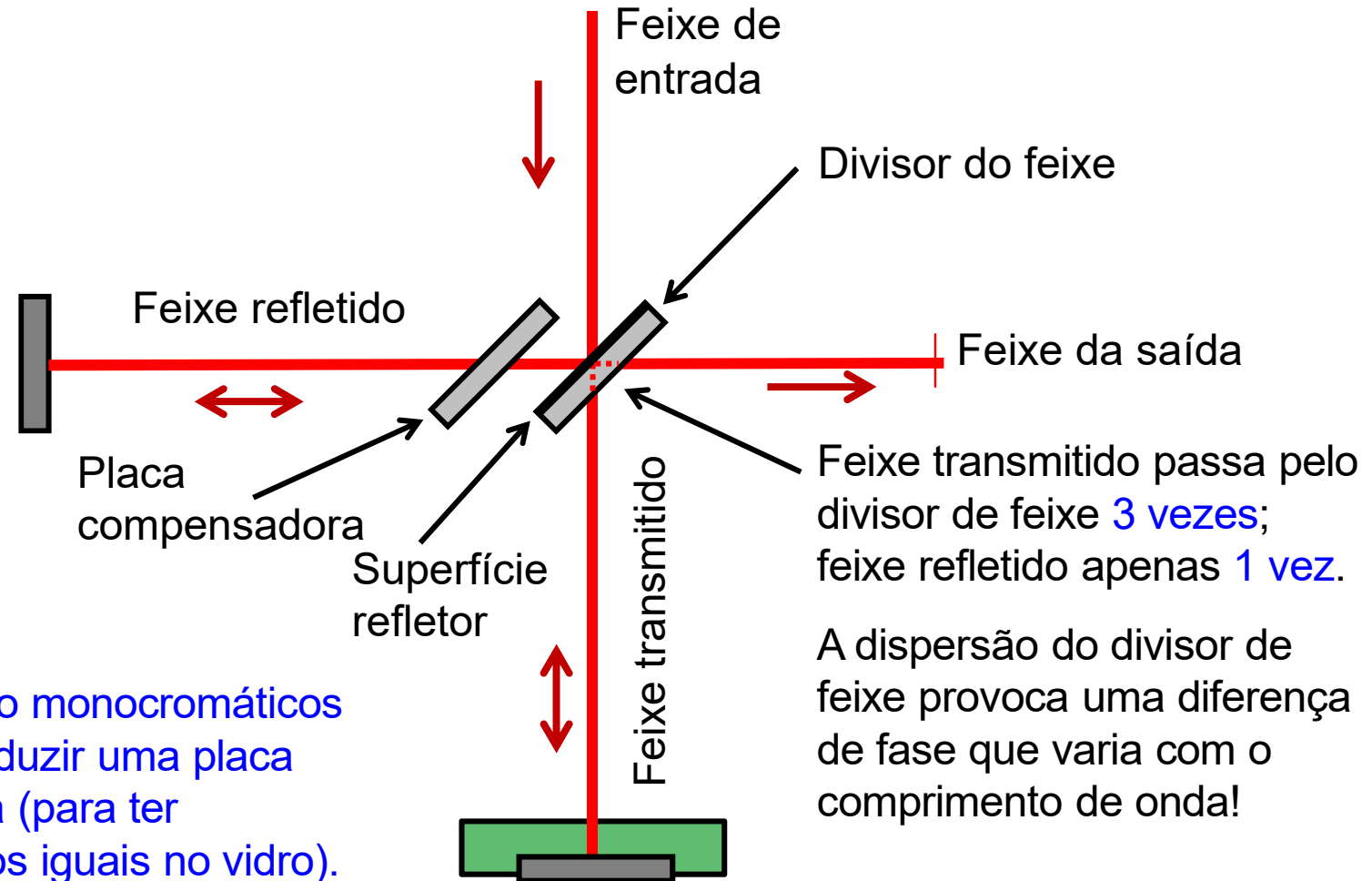
$$= 2I_0 - 2I_0 \cos(2k\delta L)$$

$$\delta L = L_2 - L_1$$



# Pormenor técnico – a placa compensadora

---

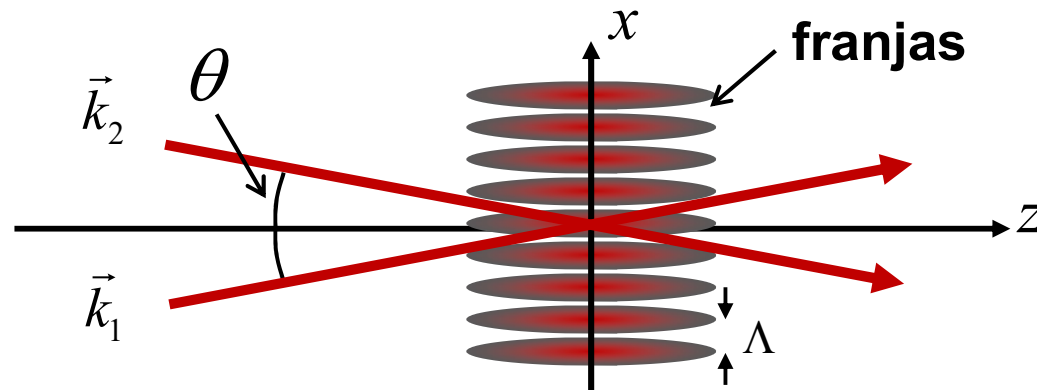


Para feixes não monocromáticos é comum introduzir uma placa compensadora (para ter caminhos óticos iguais no vidro).

# Franjas de inclinação

---

Muitas vezes o interferômetro de Michelson é “desalinhado” para criar um pequeno ângulo entre os feixes da saída



$$\vec{k}_1 = k \cos \theta \hat{z} + k \sin \theta \hat{x}$$

$$\vec{k}_2 = k \cos \theta \hat{z} - k \sin \theta \hat{x}$$

$$\begin{aligned} E(x, z, t) &= E_0 \exp[i(kz \cos \theta - \omega t)] [\exp(+ikx \sin \theta) + \exp(-ikx \sin \theta)] \\ &= 2E_0 \exp[i(kz \cos \theta - \omega t)] \cos(kx \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(x, t) = 4I_0 \cos^2(kx \sin \theta) = 2I_0 [1 + \cos(2kx \sin \theta)]$$

Separação entre as franjas:  $\Lambda = 2\pi/(2k \sin \theta)$      $\Lambda = \lambda/(2 \sin \theta)$

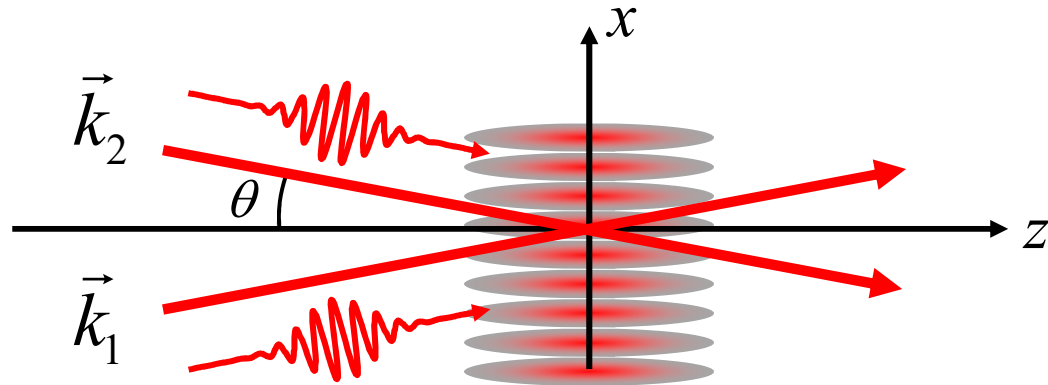
---



# Franjas de inclinação com atraso

---

Deslocar um feixe de distância  $\delta L$  provoca uma atraso na fase igual a  $k \delta L$



$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_0 \left\{ \exp[i(kz \cos \theta + kx \sin \theta - \omega t)] + \exp[i(kz \cos \theta - kx \sin \theta + k \delta L - \omega t)] \right\} \\ &= 2E_0 \exp[i(kz \cos \theta - \omega t)] \exp(ik \delta L / 2) \cos(kx \sin \theta - k \delta L / 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I(x, t) &\propto I_0 \cos^2(kx \sin \theta - k \delta L / 2) \\ &= \frac{1}{2} I_0 [1 + \cos(2kx \sin \theta - k \delta L)] \end{aligned}$$

Atrasar um feixe resulta num deslocamento de fase das franjas por  $k \delta L$ .

# Resumo

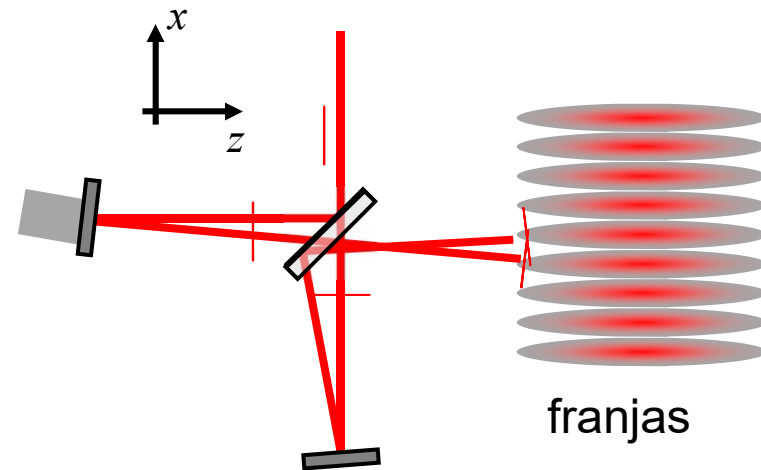
---

Desalinhar os espelhos para formar franjas na saída

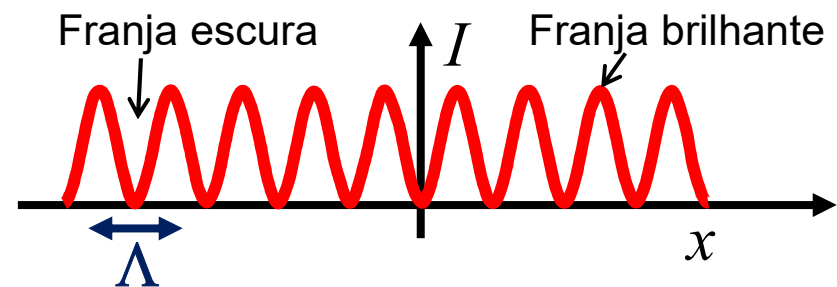
$$I(x) \propto 1 - \cos(2kx \sin \theta)$$

Deslocar um espelho de distância  $\delta L$  provoca uma mudança na fase das franjas  $2k \delta L$  ( $= \omega \tau$ ):

$$\begin{aligned} I(x) &\sim 1 - \cos(2kx \sin \theta - 2k \delta L) \\ &\sim 1 - \cos(2kx \sin \theta - \omega \tau) \end{aligned}$$



## Franjas ao longo do eixo dos xxs

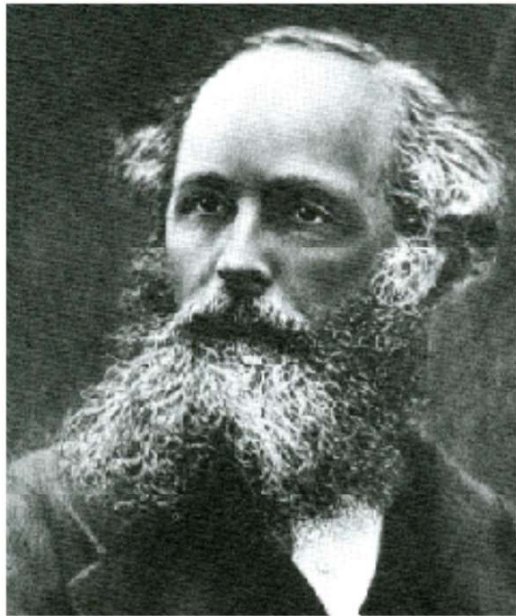


$$\Lambda = \lambda / (2 \sin \theta)$$

---

# Ondas Eletromagnéticas

---

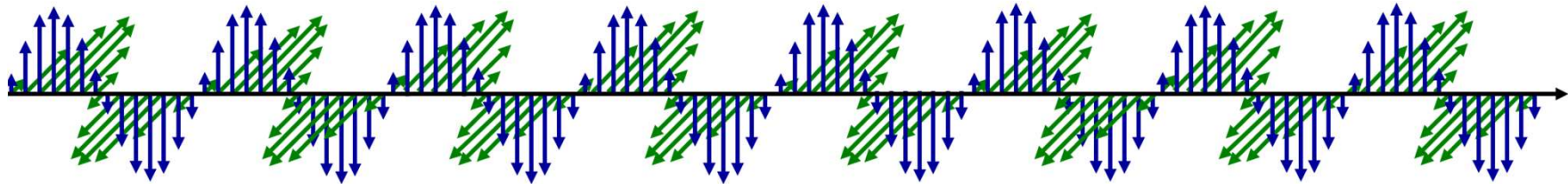


James Clerk Maxwell  
(1831-1879)

1864 : deduz 4 equações que descreve EM

Velocidade da onda EM  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Qual é a referência?

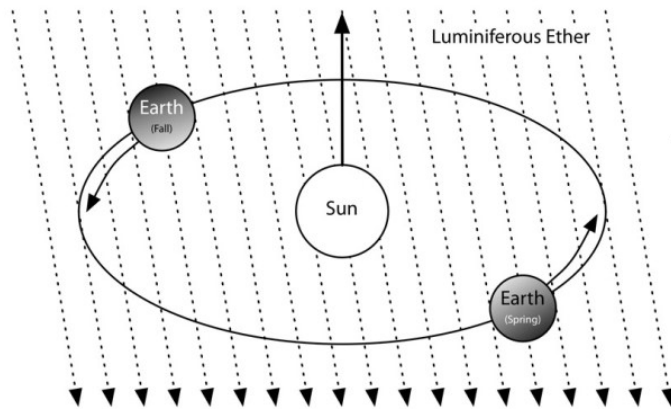


Na altura a hipótese foi que havia um “éter” que permeava o espaço e servia o meio de suporte para as ondas EMs.

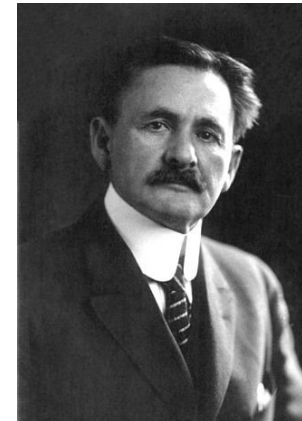
A velocidade da luz é  $c$  na referência em que o éter é estacionário.

---

# Experiência de Michelson-Morley



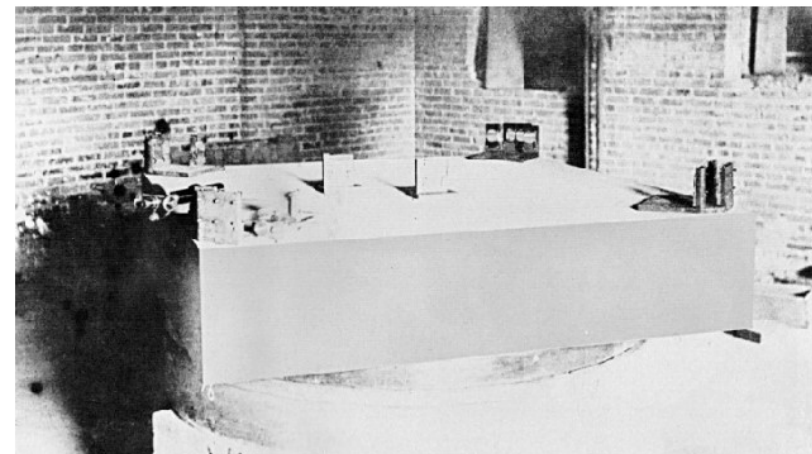
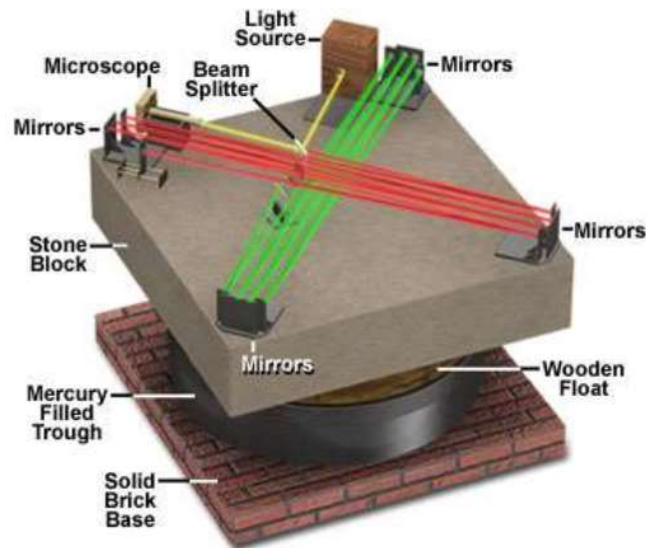
The Aether Wind



Albert Michelson  
Nobel 1907

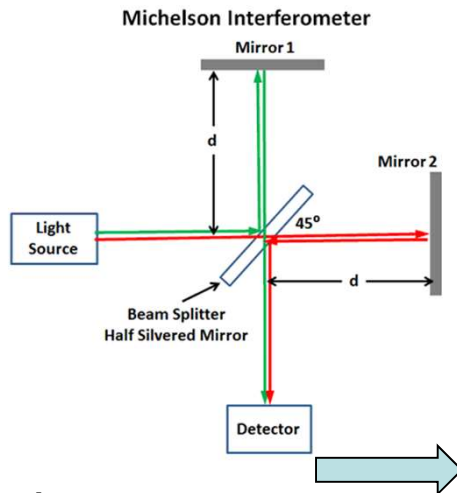


Edward Morley

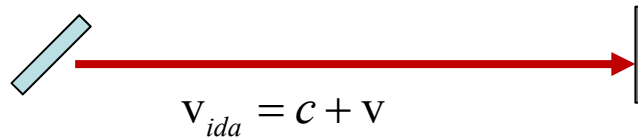


Laboratório 1887 (Case Western University)

Imagine que o éter se desloca com velocidade  $v$  na direção horizontal relativo ao interferómetro

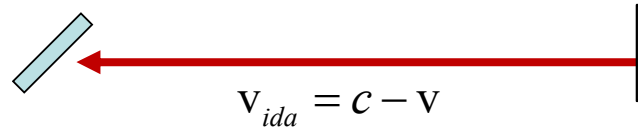


Tempo da ida no braço horizontal



$$t_{ida} = \frac{d}{c + v}$$

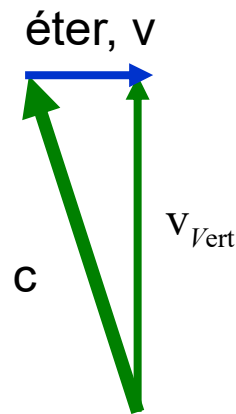
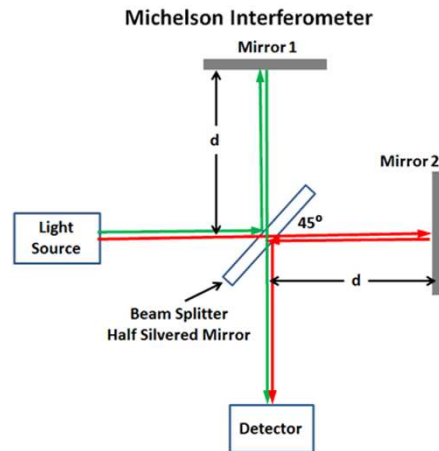
Tempo da volta



$$t_{volta} = \frac{d}{c - v}$$

$$t_{\text{Horz}} = \frac{d}{c + v} + \frac{d}{c - v} = 2d \frac{c}{c^2 - v^2} = \frac{2d}{c} \frac{1}{1 - (v/c)^2}$$

O braço vertical é ligeiramente mais complicado



No braço vertical tem haver uma pequeno componente horizontal para compensar a velocidade do éter.

A velocidade vertical efetiva é dão pela teorema de Pitágoras

$$c^2 = v^2 + v_{\text{Vert}}^2 \quad v_{\text{Vert}} = c \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Tempo da ida e volta no braço vertical

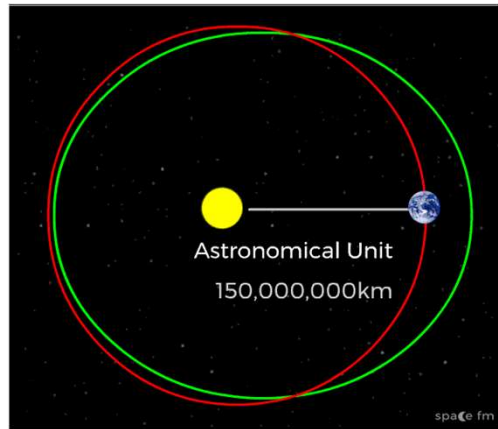
$$t_{\text{Vert}} = \frac{2d}{v_{\text{Vert}}} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Diferença no tempo entre os braços horizontal e vertical

$$t_{\text{Horz}} - t_{\text{Vert}} = \frac{2d}{c} \left[ \frac{1}{1 - (v/c)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right]$$

---

## Velocidade da Terra á volta do Sol



$$v_{Terra} \approx \frac{2\pi(1.5 \times 10^{11} m)}{\pi \times 10^7 s} \approx 3,0 \times 10^4 m/s$$

$$c \approx 3,0 \times 10^8 m/s$$

$$t_{Horz} - t_{Vert} = \frac{2d}{c} \left[ \frac{1}{1 - (v/c)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right]$$

## Expansão Taylor

$$(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon$$

$$\frac{1}{1 - (v/c)^2} \approx 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$t_{Horz} - t_{Vert} \approx \frac{d}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\approx \frac{d}{c} \times 10^{-8}$$

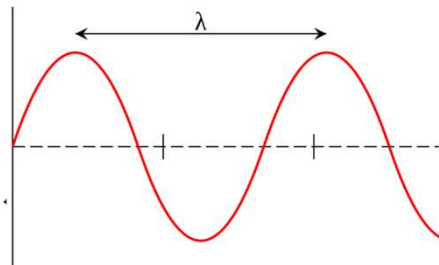
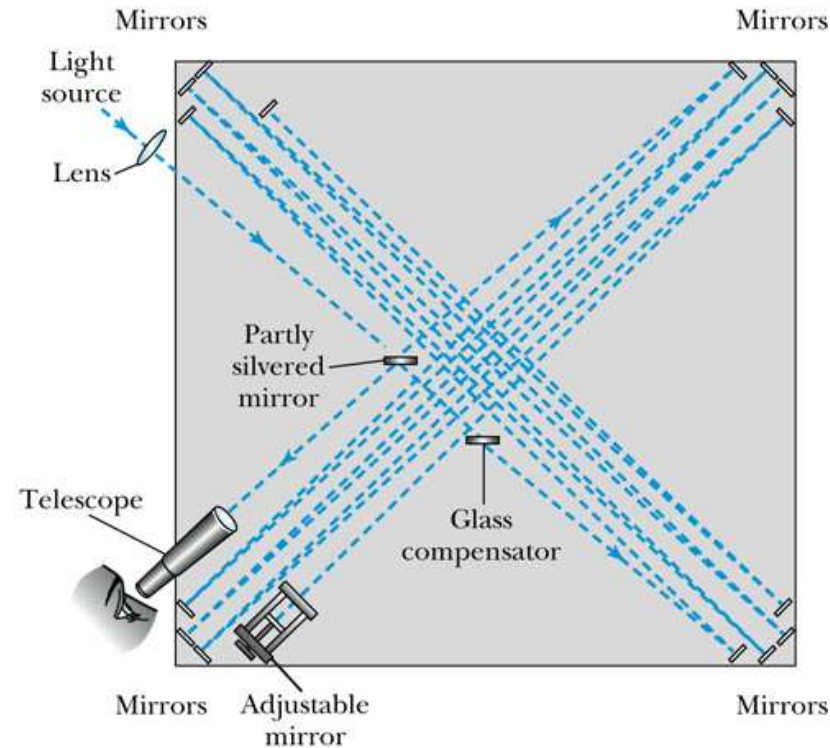
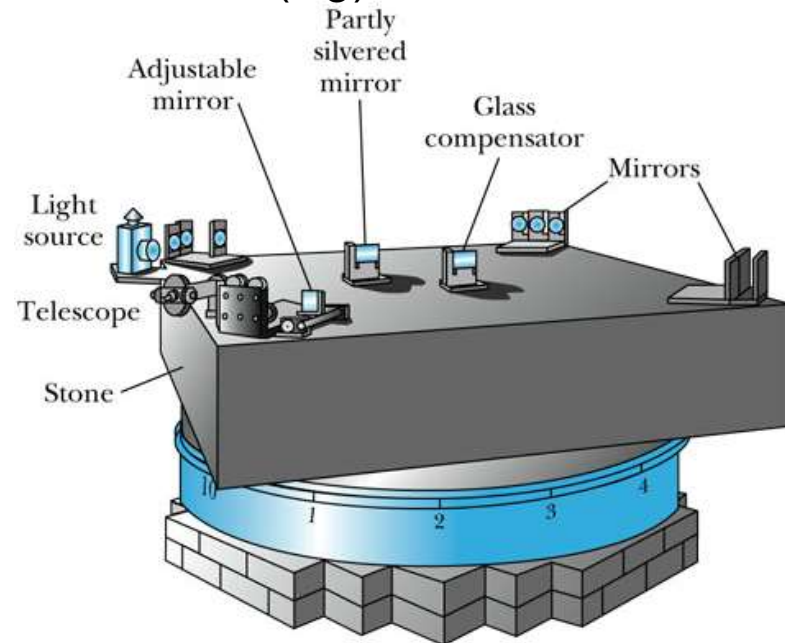
---



# Experiência de Michelson e Morely 1887

Comprimento de cada braço = 11m

$\lambda = 546.1 \text{ nm}$  (Hg)

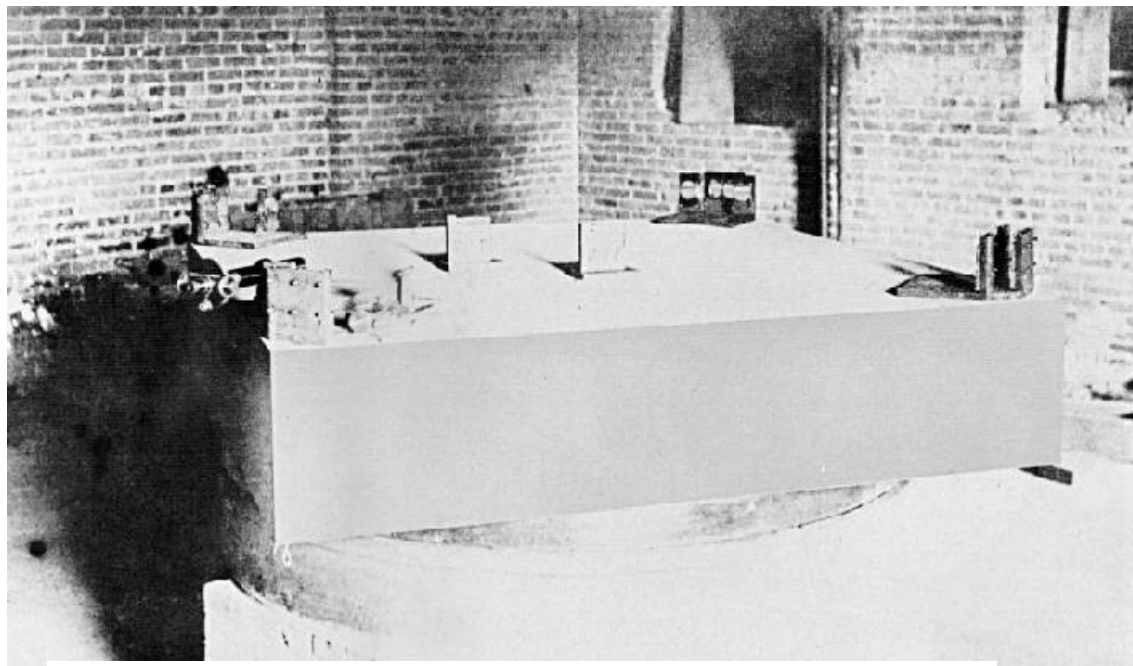


O comprimento de onda da luz visível é muito pequeno

$$\Delta t \approx \frac{d}{c} \times 10^{-8}$$

$$\Delta \phi = \omega \Delta t \approx \omega \frac{d}{c} \times 10^{-8} \approx 2\pi \left( \frac{d}{\lambda} \right) \times 10^{-8} \approx 2\pi (0.2)$$



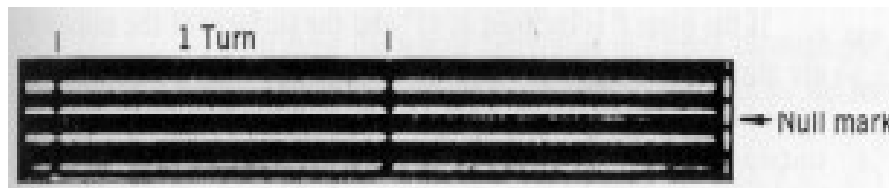


Não é possível parar a Terra, mas ao rodar o interferômetro 90° os braços trocam posições.

O Michelson e Morley esperava observar as franjas deslocarem 0.4 dum ciclo.

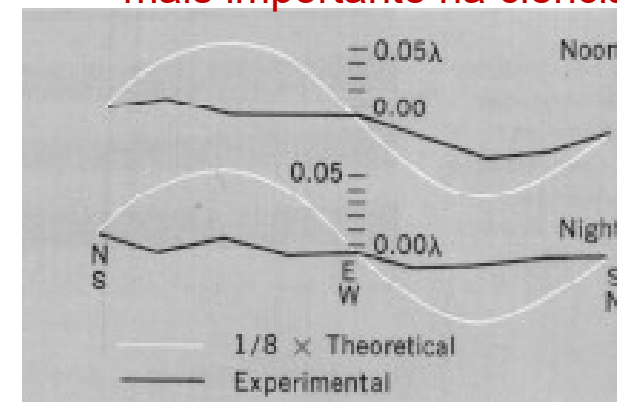
Testarem dia e noite, verão e inverno e o resultado eram sempre  $\approx 0$ .

Talvez o resultado negativo mais importante na ciência



Deslocamento de franjas esperado  $0.4\lambda$

Resolução das medidas  $0.02\lambda$



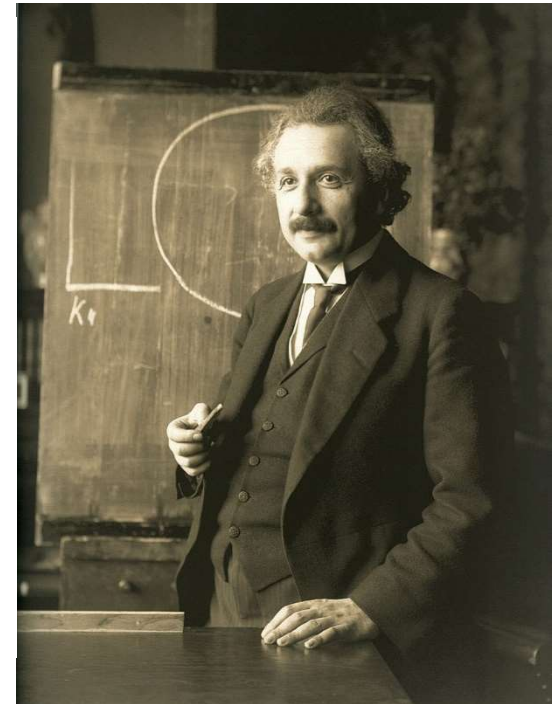
A. A. Michelson, *Studies in Optics*

---

Einstein propôs que luz é uma onda que não requer um meio para propagar.

Afirmou que as equações de Maxwell são válidas em qualquer referencial inercial (sem aceleração).

- Uma consequência é que observadores em qualquer referência inercial observam a mesma velocidade para luz.
- Todas as leis de Física (e não apenas as leis de Newton) são iguais em qualquer referência inercial. Não existe nenhuma maneira de detectar movimento absoluto.



O conceito de espaço não pode ser separado do conceito do tempo.  
As transformações de Lorentz misturam espaço e tempo.

Igualmente na relatividade restrita campos elétricos e campos magnéticos não são independentes.

---

# Relatividade Geral

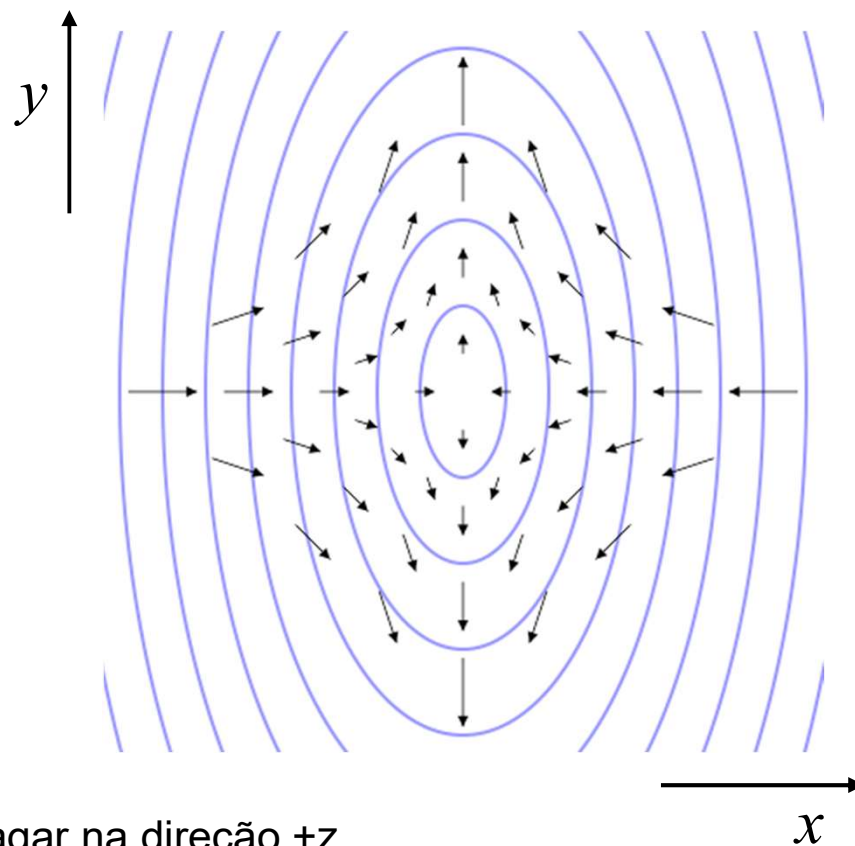
---

Massas distorcem a geometria do espaço a sua volta

Massas em aceleração emitem onda gravíticas

Ondas gravíticas são ondas quadrupolares

– esticam espaço numa direção e contraem espaço na direção perpendicular.

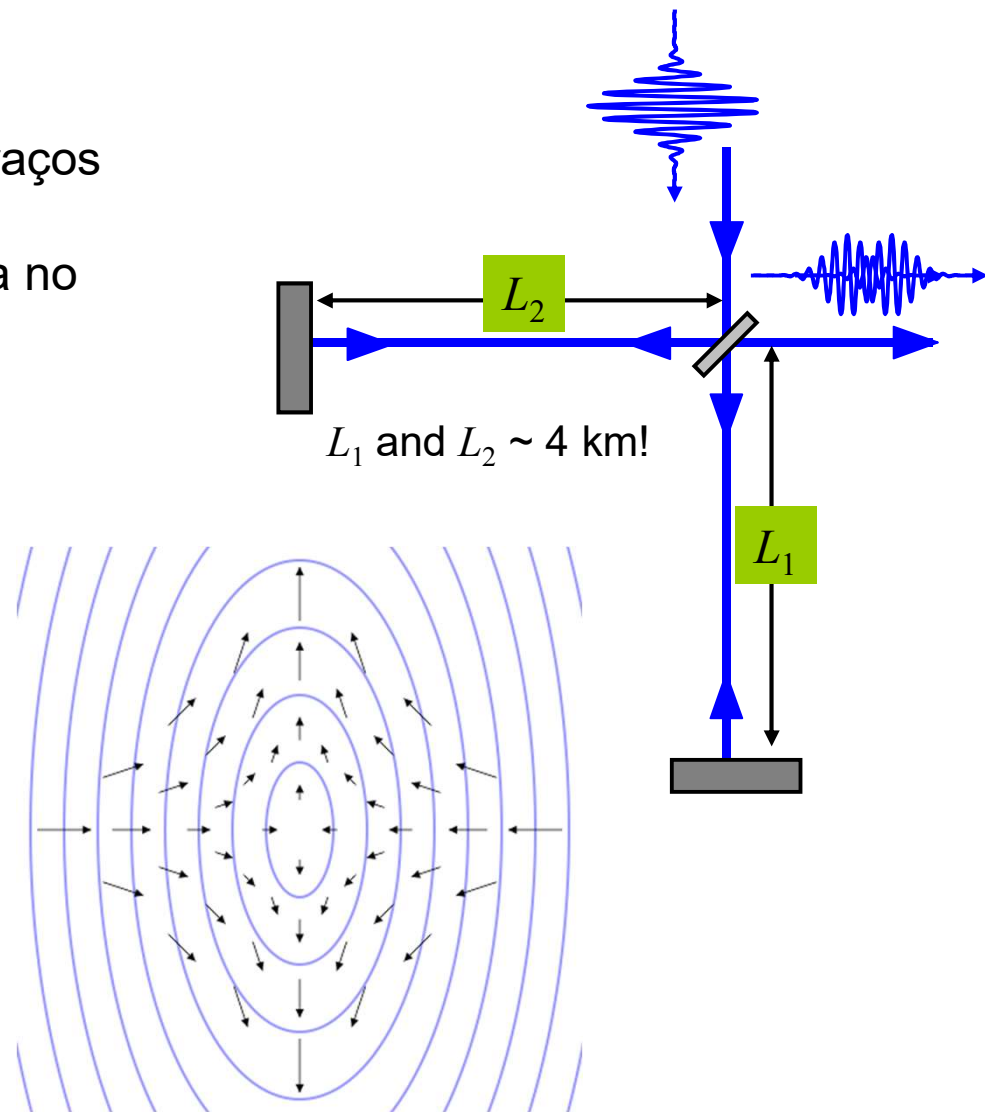


Um onda gravítica a propagar na direção  $+z$ .

---

Ondas gravíticas produzem uma diferença no comprimentos do braços  $\delta L$  que varia sinusoidalmente no tempo enquanto a onda se passa no interferómetro.

A distorção é muito pequena ( $\delta L \sim 10^{-16}$  cm) cerca de 1000 vezes menor do que o raio dum protão!



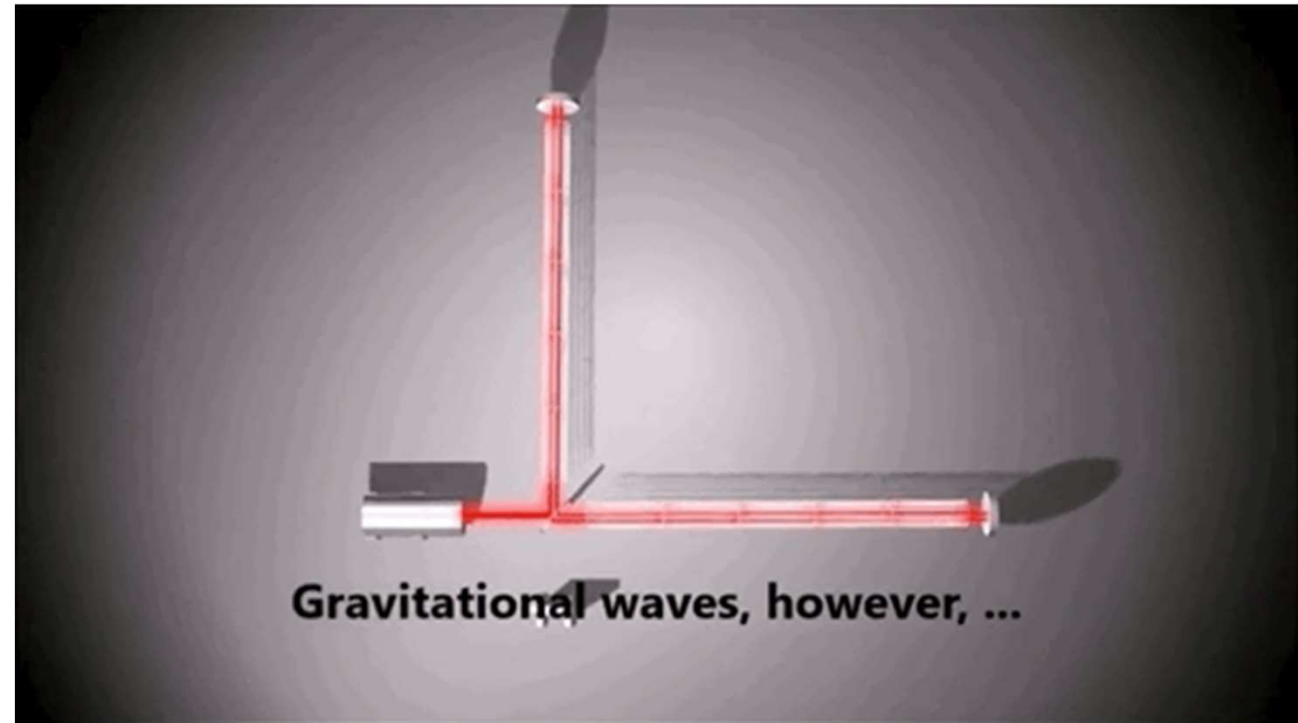
# Ligo

---

Os braços (tuneis de vácuo com um comprimento de 4km) são ajustados para produzir uma franja escura na saída.

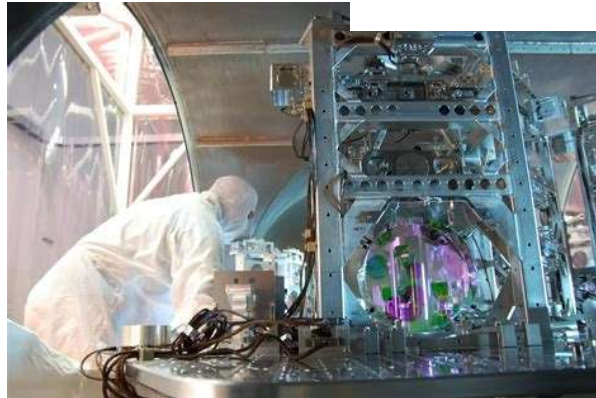
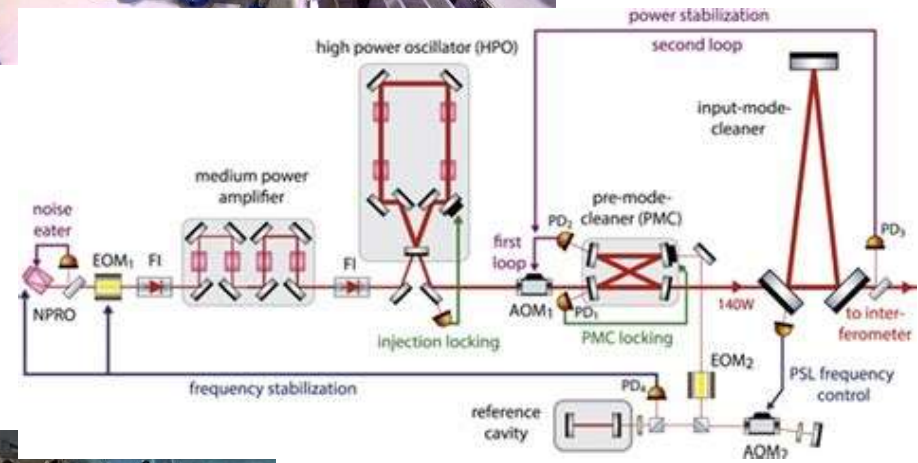
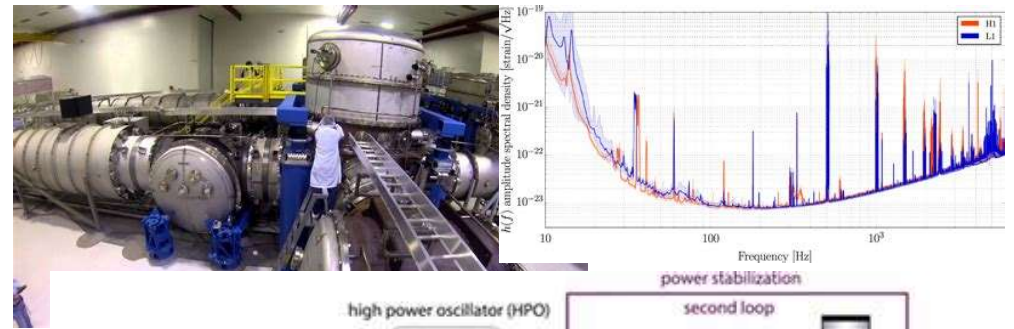
Têm feixes lasers uma potência – 1kW a circular dentro do interferómetro.

Qualquer perturbação façam que alguma luz sai, pois a interferência já não completamente destrutiva.





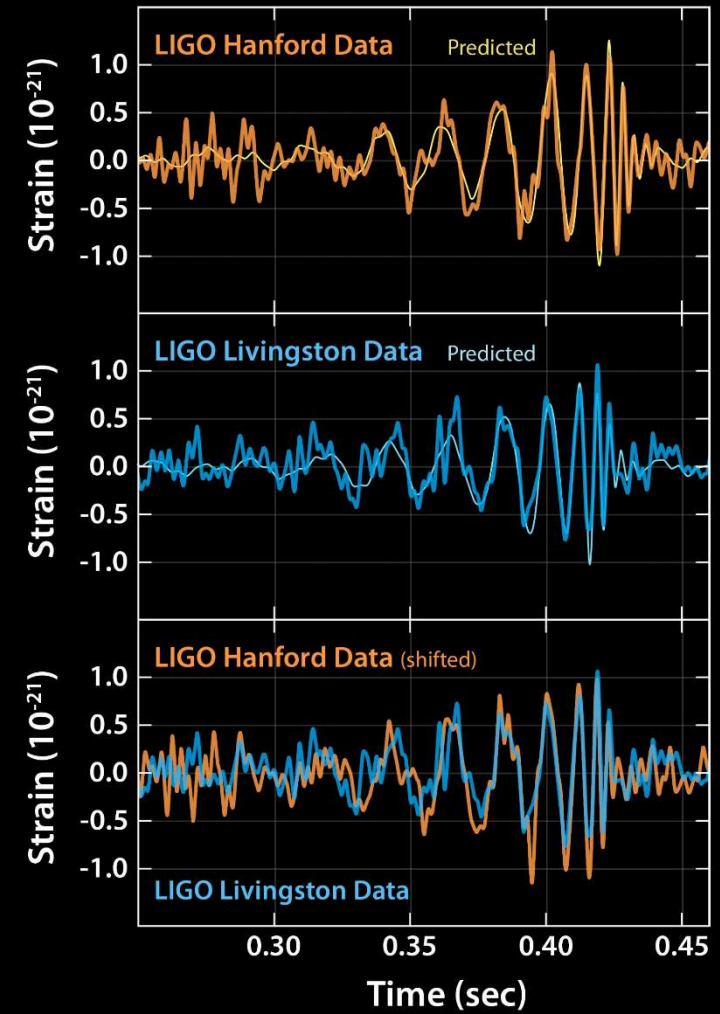
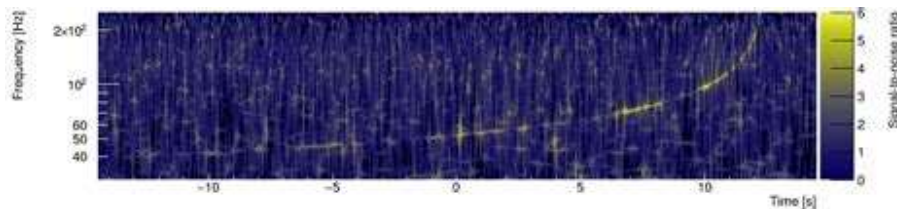
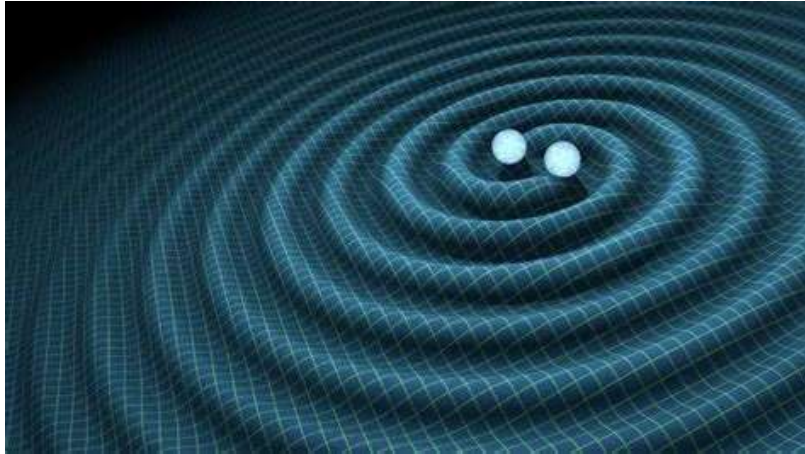
# Ligo



Braços ~4 km

resolução  $\frac{\delta L}{L} \approx 10^{-21}$

# Primeira detecção

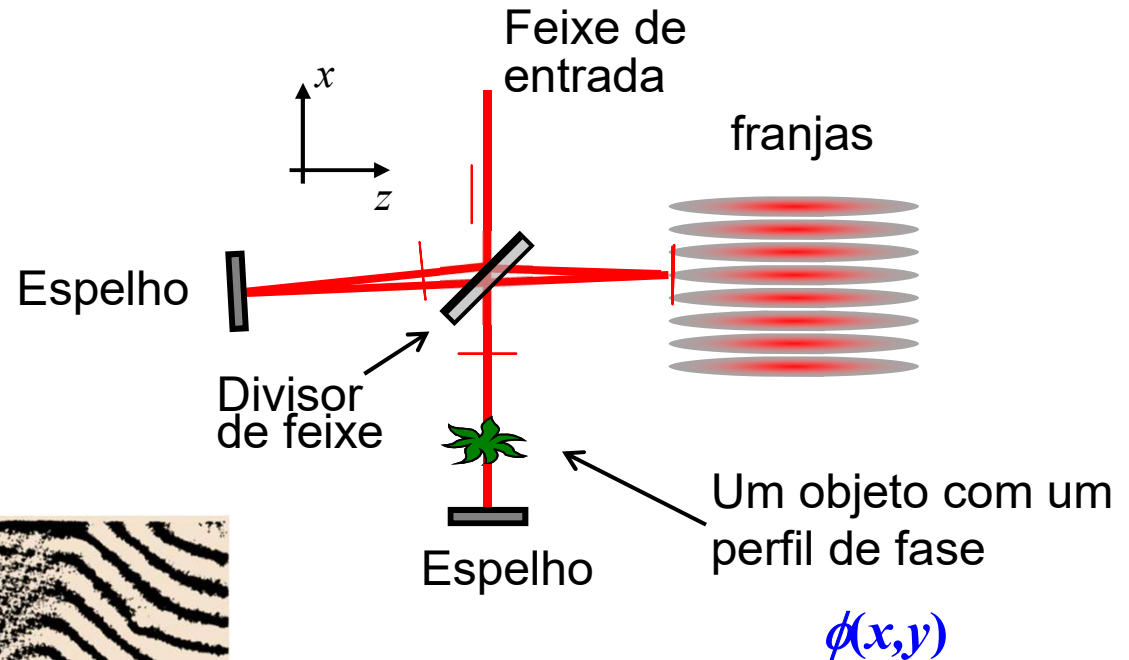
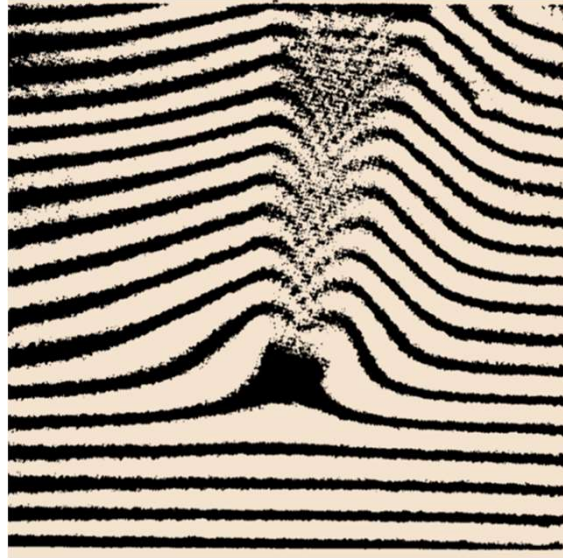


# Michelson “desequilibrado”

Ao colocar um objeto transparente num dos braços uma variação de fase será induzida que reflete as propriedades física do objeto.

É possível obter uma resolução que é uma fração pequena de  $\lambda$

Franjas espaciais devida variações de temperatura provocadas por um ferro de soldadura



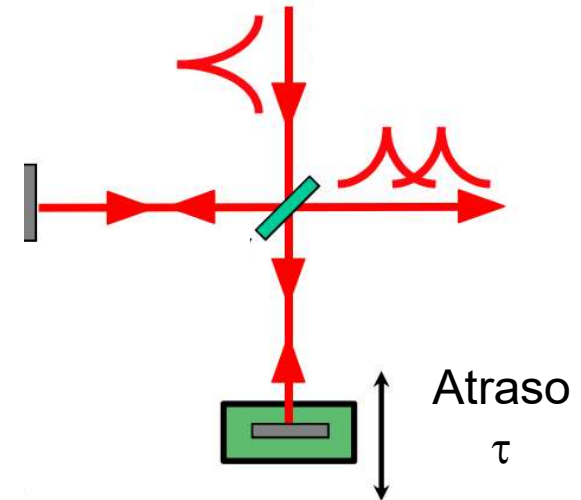
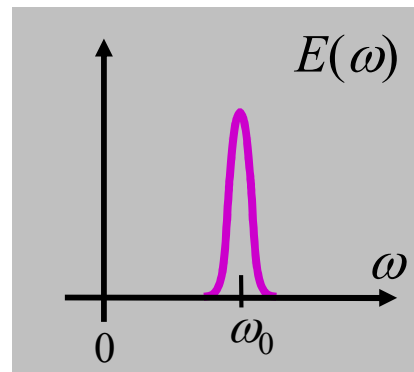
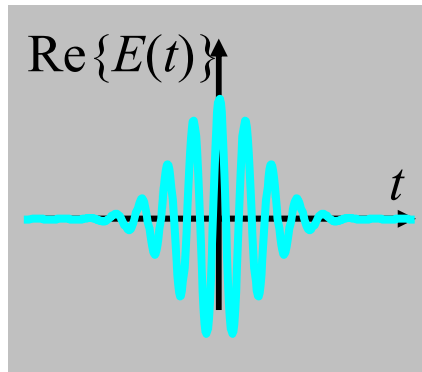
$$I(x) \propto 1 - \cos[2kx \sin \theta - 2\phi(x, y)]$$



# Quando a fonte não é monocromática

$$\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \rightarrow \vec{E}(t)$$

A transformada Fourier de  $E(t)$  dá o espectro



$$I_{saída}(\tau) = 2I_0 + \varepsilon c \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}(t) \bullet \vec{E}^*(t - \tau) \right\}$$

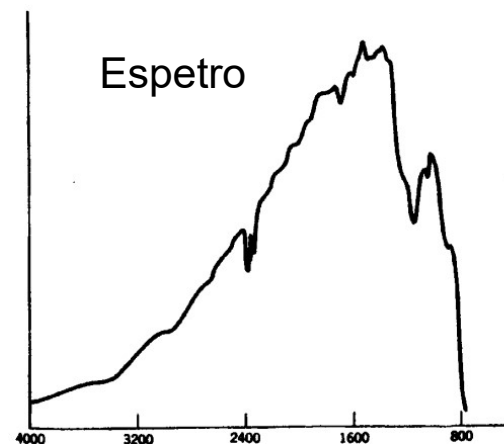
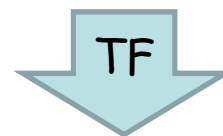
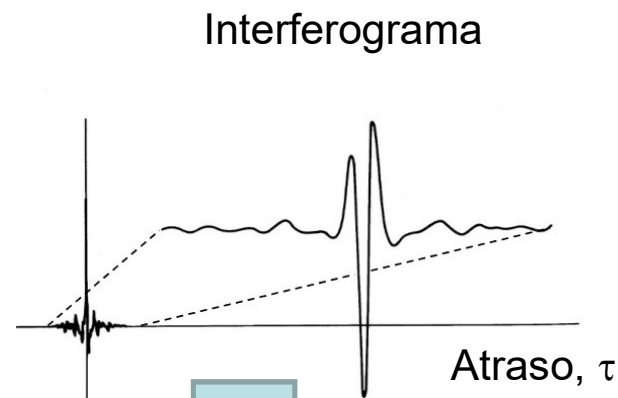
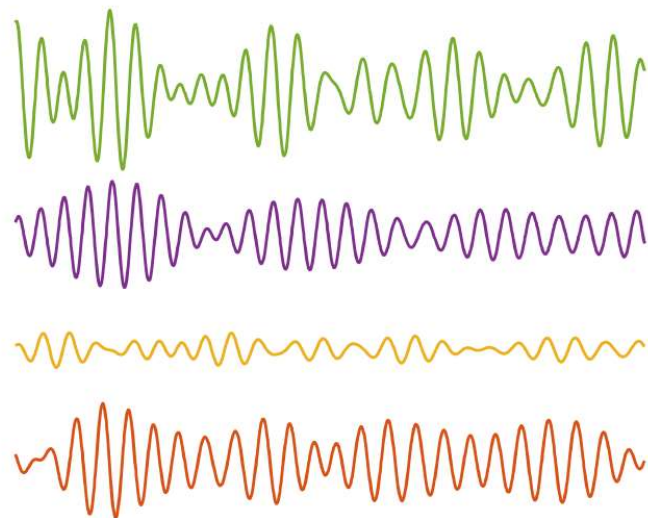
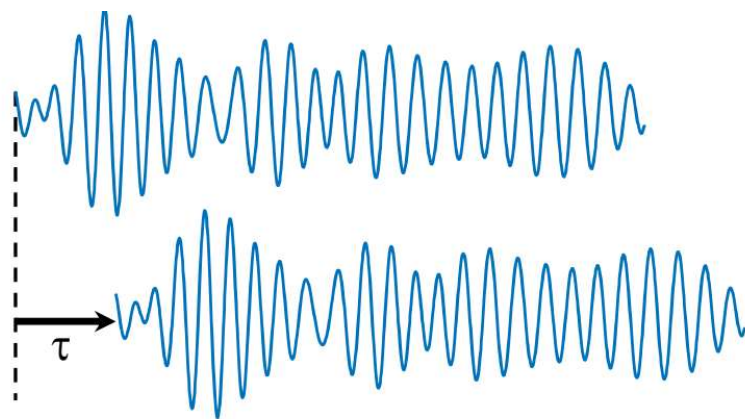
O campo Elétrico varia rapidamente ( $\sim 500$  THz) enquanto os detetores são mais lentos ( $\sim 10$  sGHz) integrar para obter energia

$$U(\tau) = 2I_0 \Delta T + \varepsilon c \operatorname{Re} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} dt \vec{E}(t) \bullet \vec{E}^*(t - \tau)$$

Função da autocorrelação

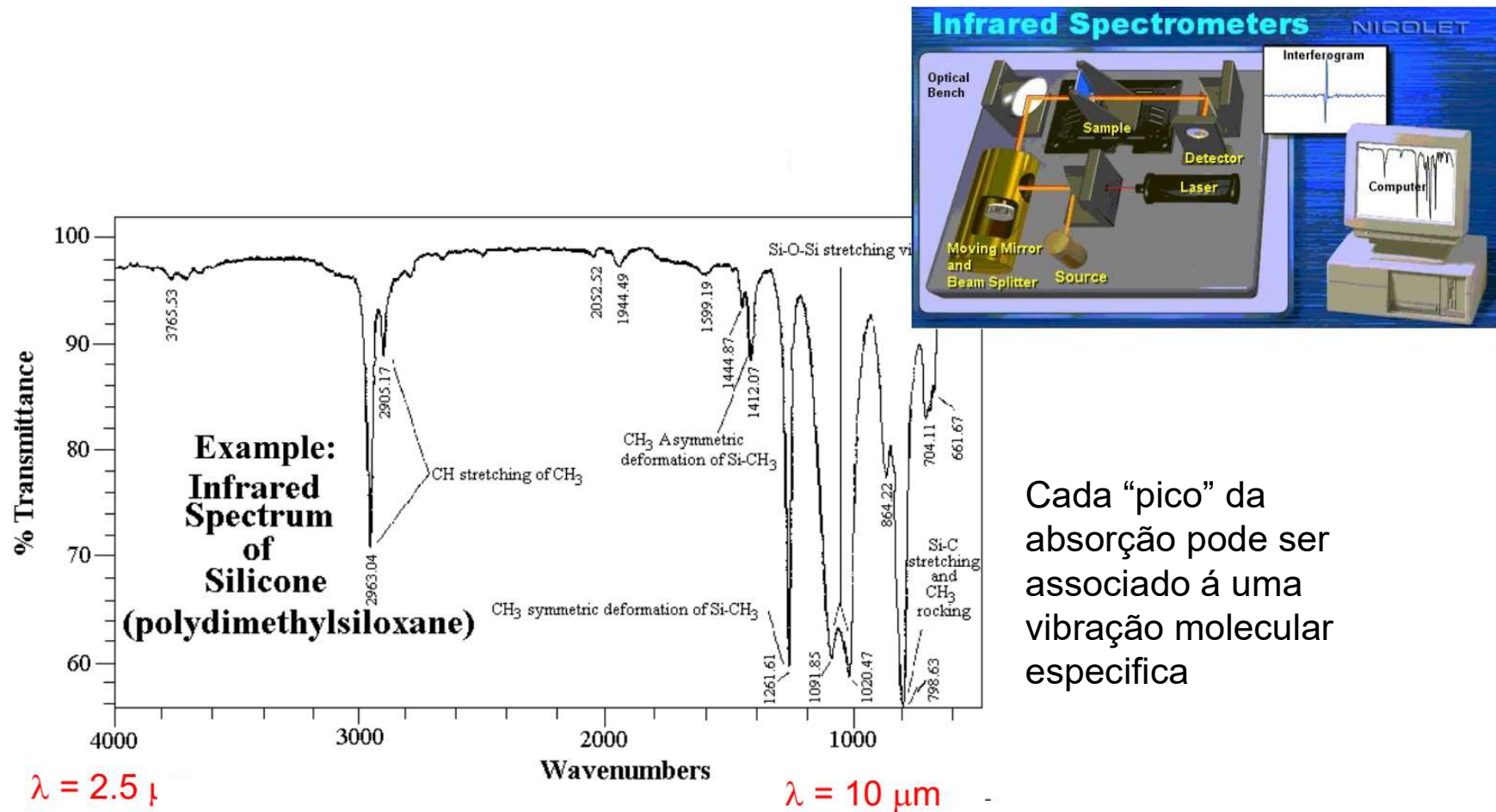
$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{Re} \vec{E}(t) \bullet \vec{E}^*(t - \tau) = |\mathbf{E}(\omega)|^2$$

# Esepectrometro de transformada Fourier



Usada mais no infravermelho (maiores  $\lambda$ s, mais fácil controlar  $\tau$ )

# Utilizado frequentemente para identificar componentes químicos

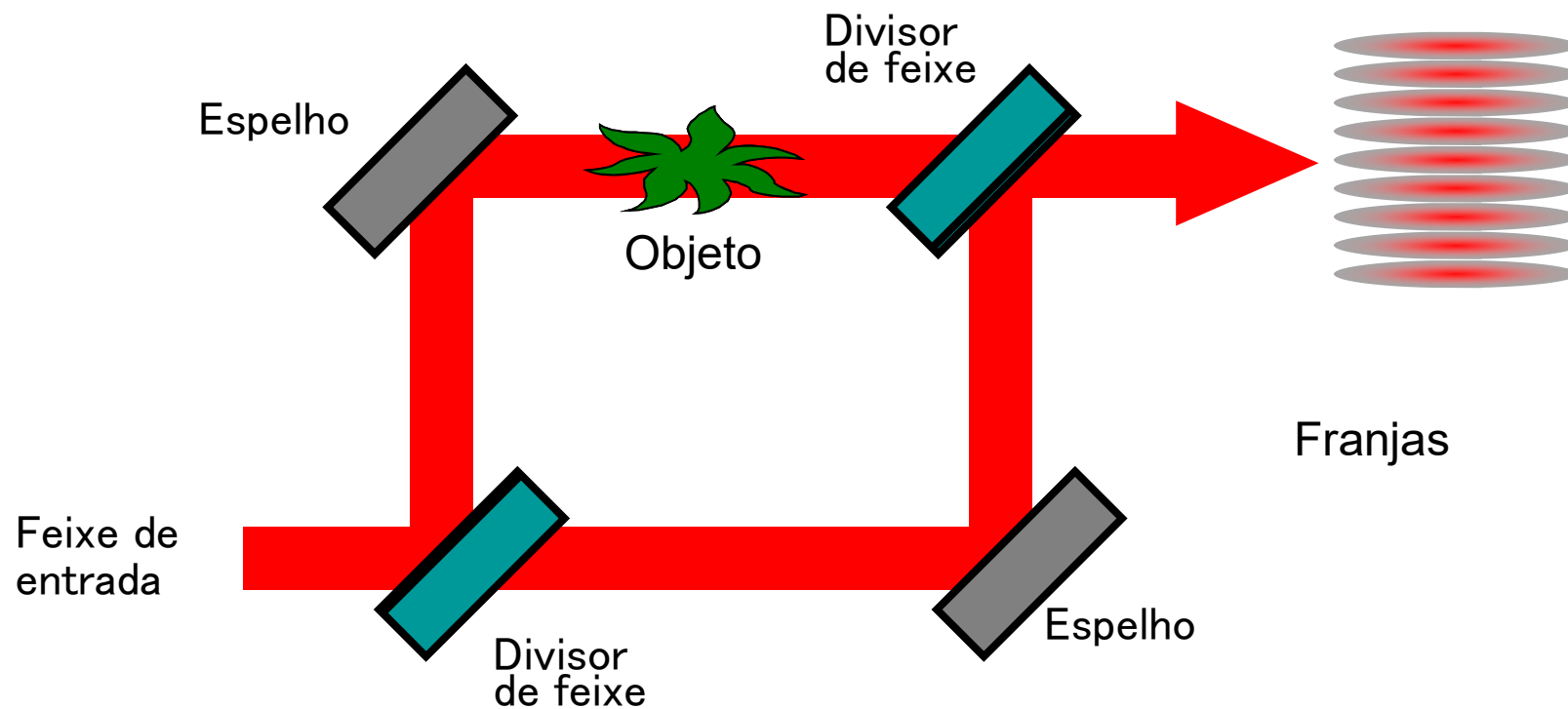


Cada “pico” da absorção pode ser associado á uma vibração molecular específica

$$\text{wavenumbers} = (\text{wavelength})^{-1}, \text{ units of } 1/\text{cm}$$

# Mach-Zehnder

---



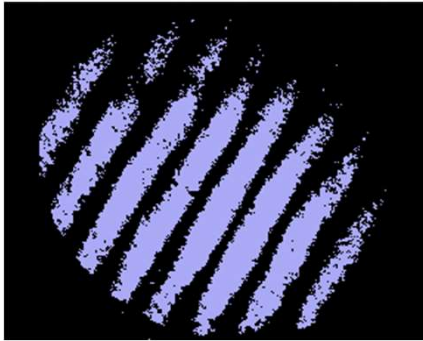
O feixe passa só uma vez no objeto  
Não há um feixe que volta para a trás na direção da fonte.

---

# Interferogramas Mach Zehnder

---

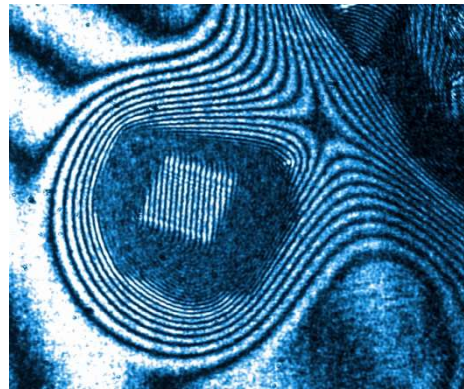
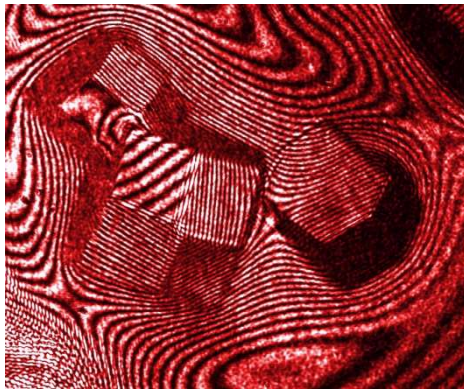
Braços vazios



Uma plasma num braço



Focar um laser pulsado intenso num dos braços de Mach-Zehnder.



Cristais de lisozima (uma proteína) a crescer num gel – as franjas representam contornos de concentração.

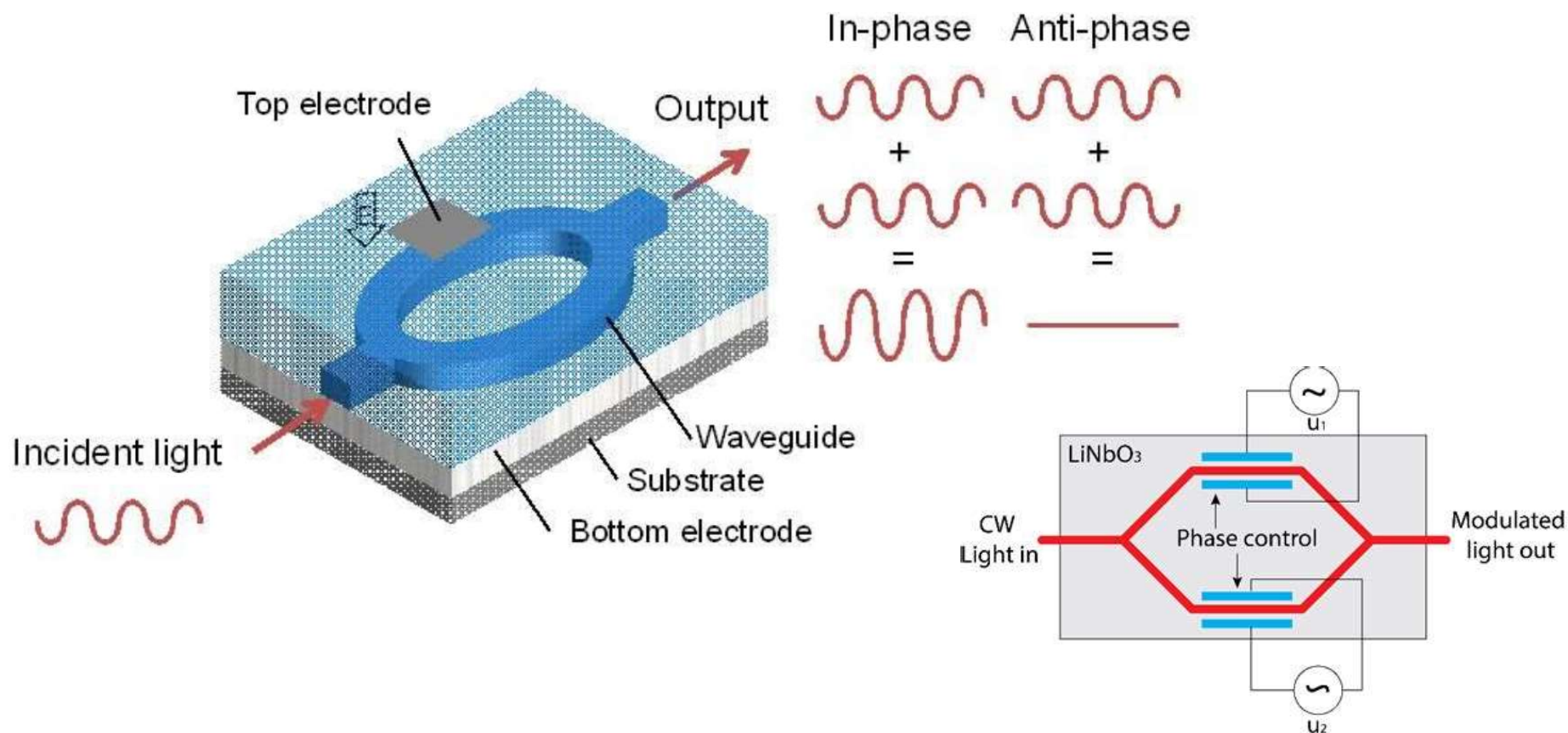
---



# Mach Zehnder em ótica integrada

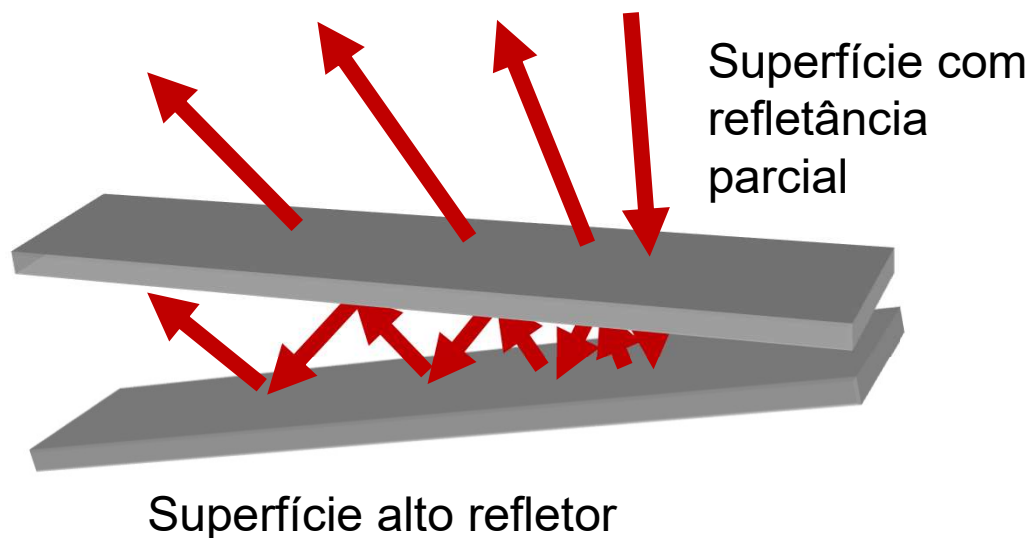
Com o efeito Pockels um Mach-Zehnder pode ser usado para modular a intensidade de um feixe numa guia de onda em ótica integrada.

É um componente comum nos sistemas de comunicação.

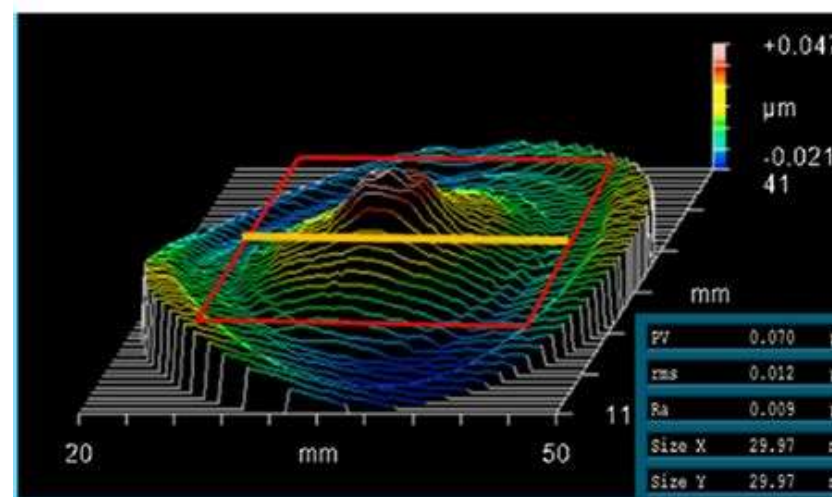
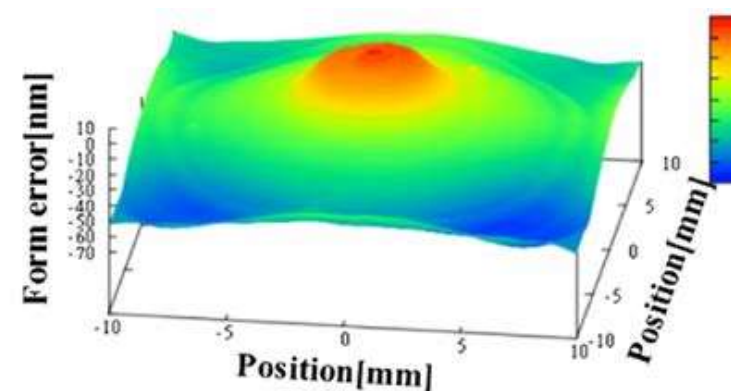


# Interferômetro de Fizeau

---



Produz uma padrão complexo de franjas com espessuras variáveis. Utilizado na indústria para caracterizar erros nas espessuras das lentes

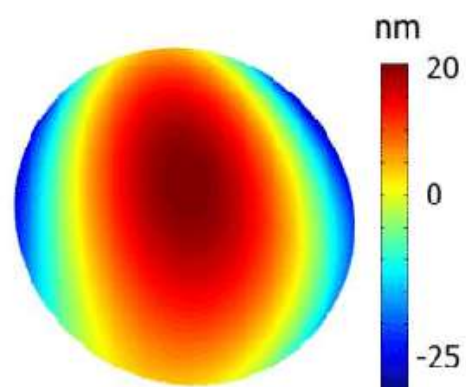


# Um interferómetro Fizeau comercial

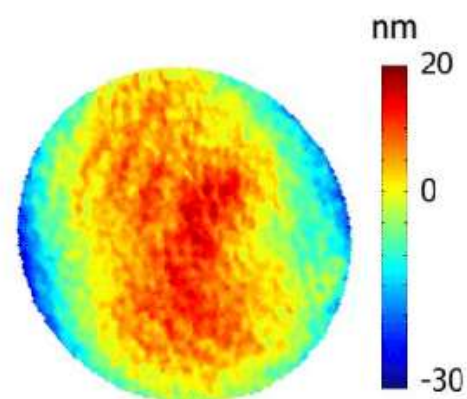
---



(a)



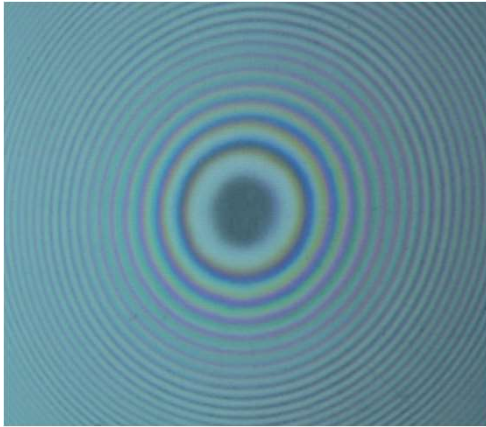
(b)



(c)



# Anéis de Newton



Interferência entre luz refletida nas duas fronteiras duma camada de ar entre uma superfície curva e uma plana.

Interferência construtiva ocorre quando as reflexões de frente de atrás são em fase (múltiplo inteiro de  $2\pi$ )

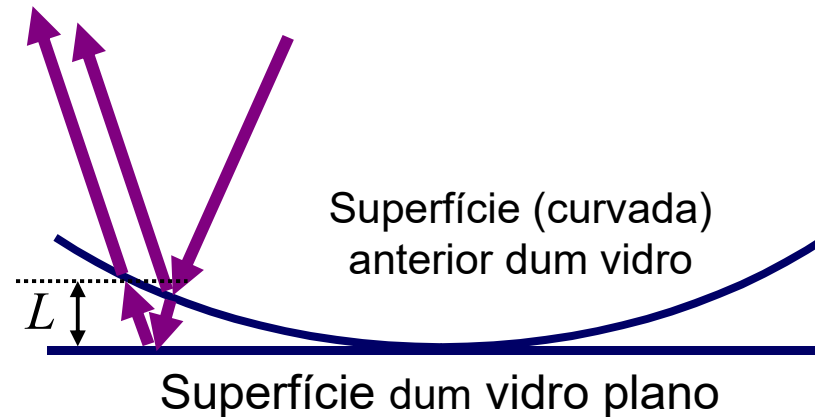


Interferência  
construtiva ou  
destrutiva

Interferência

construtiva  $2L = (2m + 1)\lambda$

destrutiva  $2L = (2m)\lambda$



# Iridescência

---

Interferência construtiva pode resultar em cores intensas.



Comum em biologia e geologia.

Têm uma dependência angular forte (porque?)



Opala



Bismulo

---

Possível usar para substituir tinta de impressores a cor?



# Filmes de sabão e óleo

---

Em geral vê as cores intensas apenas para a primeira e segunda ordem ( $m = 1$  ou  $2$ )

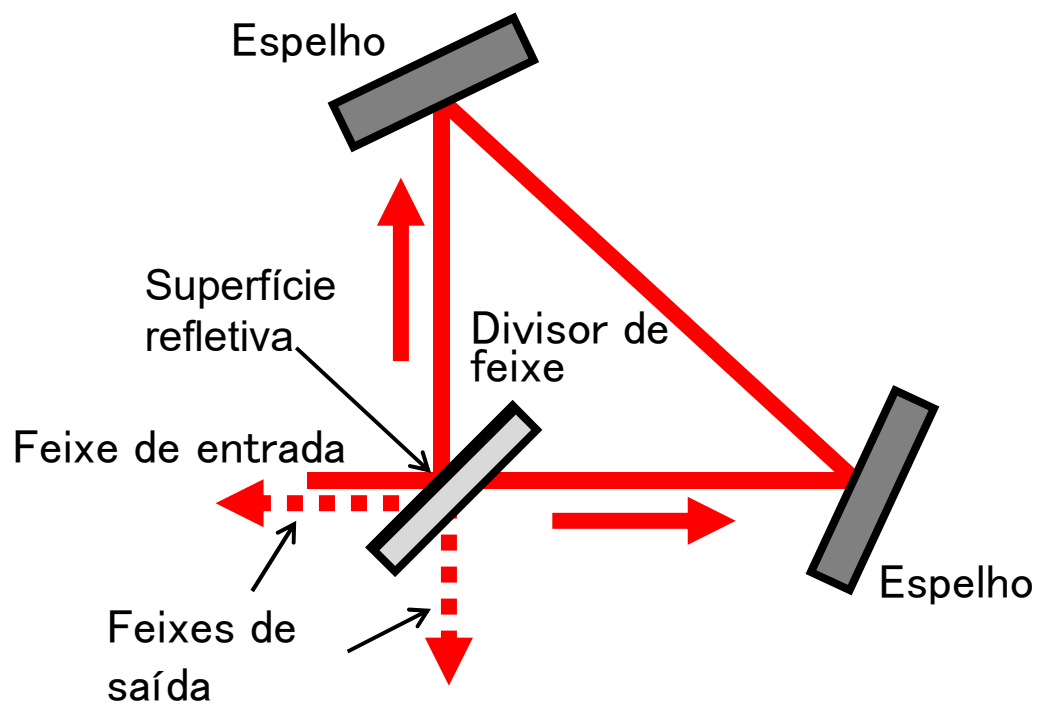
Em ordem maiores a variação de cores é tipicamente desmaiada rápida para o olho as resolver



# Interferómetro de Sagnac

---

Os 2 feixes temo mesmo caminho dentro do interferómetro.



Georges Sagnac  
1869 - 1926

Mesmo caminho no interferómetro

Os feixes passam pelo mesmo quantidade de vidro no divisor de feixe.

# Interferômetro de Sagnac

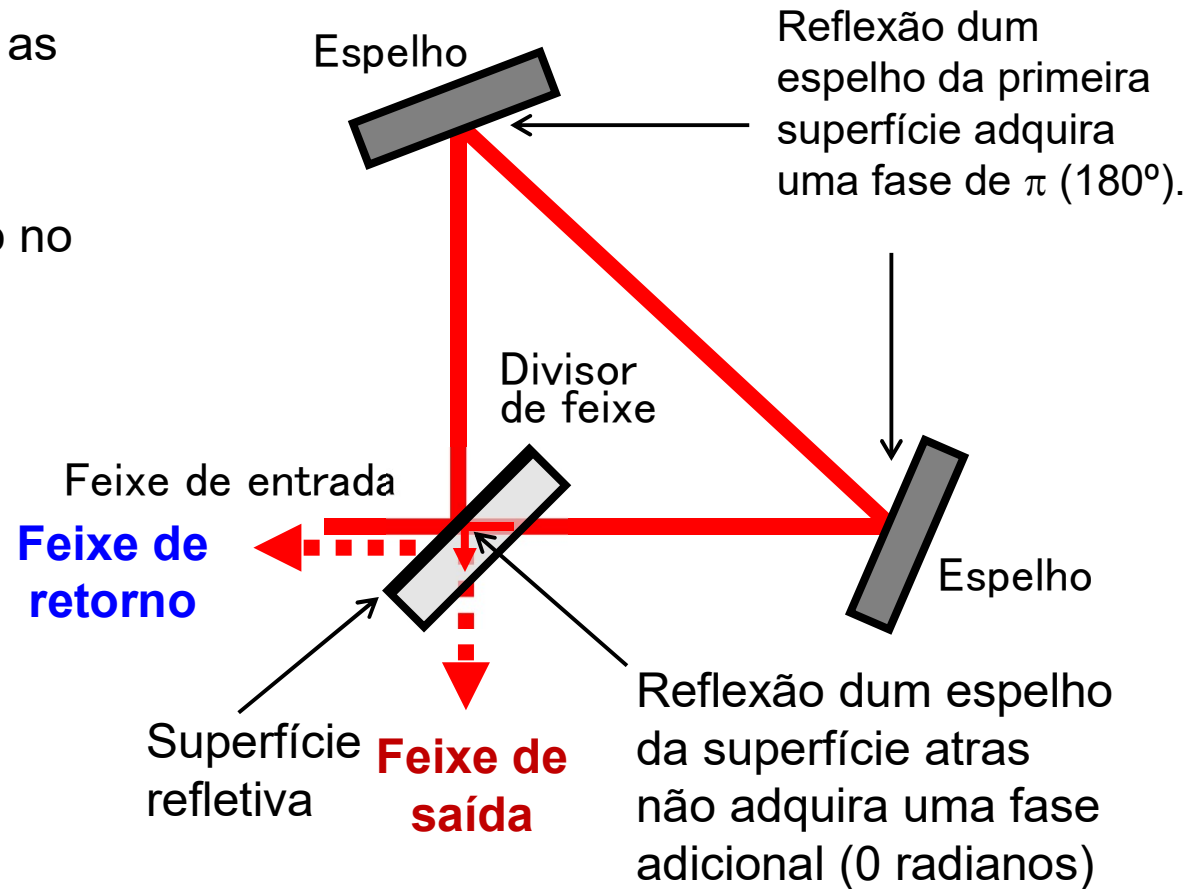
Mudanças de fase devida as reflexões:

**Feixe de retorno:** caminho no sentido dos relógios tem fases  $\pi$ ,  $\pi$ ,  $\pi$ , e  $0$ .

No sentido contra dos relógios fases:  $0$ ,  $\pi$ ,  $\pi$ , e  $\pi$ .

**Interferência construtiva!**

**Toda a luz volta a fonte**



**Feixe da saída:** No sentido dos relógios fases:  $\pi$ ,  $\pi$ ,  $\pi$ , e  $0$ .

Contra do sentido dos relógios fases:  $0$ ,  $\pi$ ,  $\pi$ , e  $0$ .

**Interferência destrutiva**

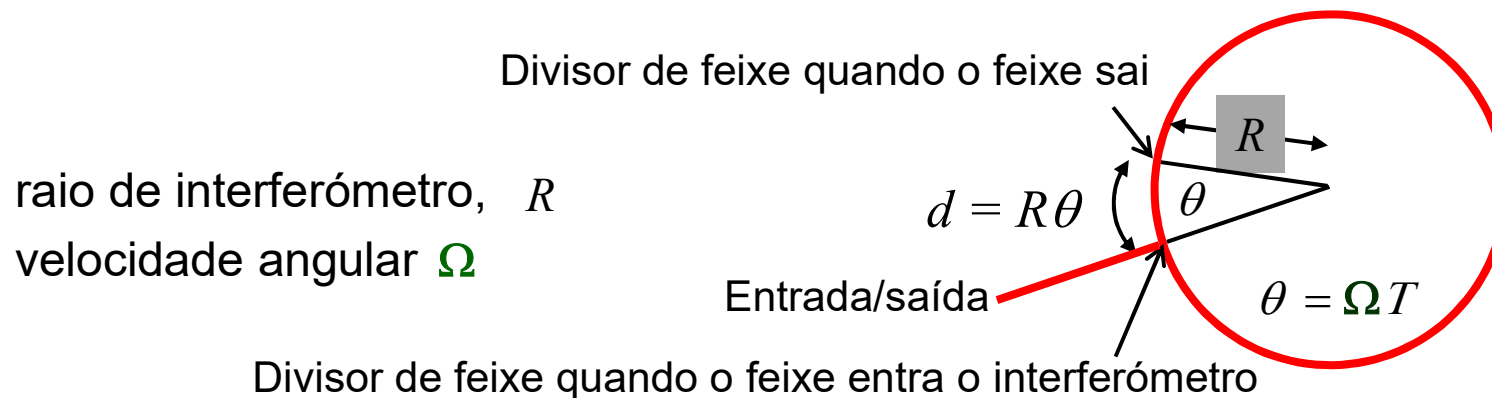
# O interferómetro de Sagnac sente rotação

---

Se houver uma rotação o divisor de feixe vai deslocar uma distância  $d$  durante o tempo  $T$  que a luz demora realizar uma volta.

Um feixe se desloca mais ( $d$ ) o outro menos ( $-d$ )

$$I_{exit} \propto |E_0 \exp(ikd) - E_0 \exp(-ikd)|^2 \propto I_0 \sin^2(kd)$$



$$d = R\theta = R(\Omega T) = R\Omega(2\pi R / c) = 2\Omega(\pi R^2) / c = 2\Omega(\text{Área}) / c$$

$$\Rightarrow I_{saída} \propto I_0 \sin^2(2k \Omega \text{Área} / c) \approx 4I_0 k^2 \Omega^2 \text{Área}^2 / c^2$$

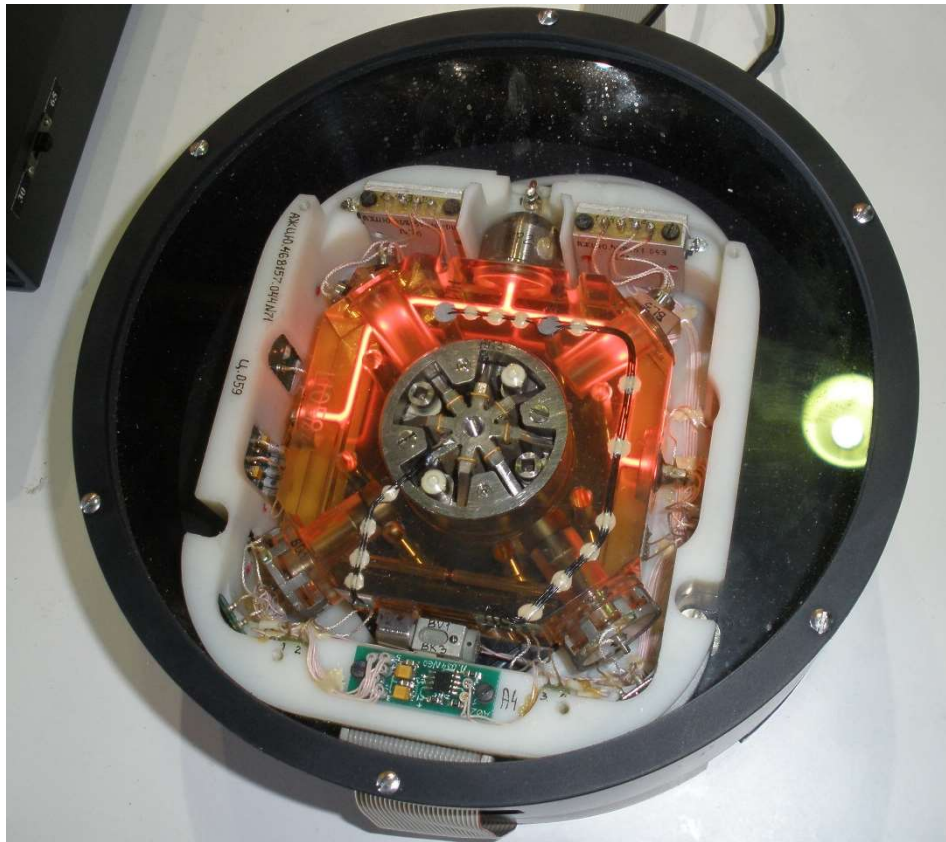
A sensibilidade á rotação  $\sim (\text{área do interferómetro})^2$

---



# Giroscópio baseado num interferómetro de Sagnac

Podem atingir uma precisão de  $0.01^\circ/\text{hora}$



Tipicamente usam  
fibras óticas enroladas  
numa forma circular.

São usados em aviões, naves espaciais (e mísseis)