Cálculo

Ficha 8

Integração usando substituição

1. Calcule as seguintes primitivas, usando a substituição aconselhada em cada caso.

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

   Esta é uma função do tipo $R(x, \sqrt{a^2-b^2x^2})$ com $a=b=1$, pelo que a substituição aconselhada é $x=\sin(t)$.
   Seja $g:[\alpha,\beta]\to[1,2]$ definida por $g(t)=\sin t$. Então $g'(t)=\cos t$. Quantos aos extremos de integração, tem-se

$$\begin{cases} x=0 \\ x=\sin t \Leftrightarrow t=\arcsin x \end{cases} \Rightarrow t=\arcsin 0=0$$
$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=\sin t \Leftrightarrow t=\arcsin x \end{cases} \Rightarrow t=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

   Então
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2(t)}{|\cos(t)|}\cos(t)\,dt$$
   Como $\cos(t)>0$, para $t\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$,
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^2(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\left[t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sin(2\frac{\pi}{6})}{2}-\left(-\frac{\sin(0)}{2}\right)\right] = \frac{2\pi-3\sqrt{3}}{24}\end{aligned}$$

   (b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} x\,(x+3)^{\frac{1}{3}}\,dx.$

   Esta é uma função do tipo $R(x,(ax+b)^{p/q})$ com $a=1$, $b=3$, $p=1$ e $q=3$, pelo que a substituição aconselhada é $(ax+b)=(x+3)=t^m$, onde $m=\text{m.m.c}(3)=3$, ou seja, $x+3=t^3$.
   Seja $g:[\alpha,\beta]\to[-3,0]$ definida por $g(t)=t^3-3$. Então $g'(t)=3t^2$. Quantos aos extremos de integração, tem-se

$$\begin{cases} x=-3 \\ x=t^3-3 \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{x+3} \end{cases} \Rightarrow t=\sqrt[3]{-3+3}=0$$
$$\begin{cases} x=0 \\ x=t^3-3. \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{x+3} \end{cases} \Rightarrow t=\sqrt[3]{0+3}=\sqrt[3]{3}$$

Então

$$\int_{-3}^{0} x\ (x+3)^{\frac{1}{3}}\ dx = \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} \left(t^3-3\right)\ \left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}\ 3t^2\ dt = \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} \left(t^3-3\right)\ t\ 3t^2\ dt$$

$$= 3\int_{0}^{\sqrt[3]{3}} \left(t^6-3t^3\right)\ dt = 3\left[\frac{t^7}{7}-\frac{3t^4}{4}\right]_0^{\sqrt[3]{3}}$$

$$= 3\left[\frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^7}{7}-\frac{3\left(\sqrt[3]{3}\right)^4}{4}-0\right] = 3\left[\frac{9\sqrt[3]{3}}{7}-\frac{9\sqrt[3]{3}}{4}-0\right]$$

$$= -\frac{81}{28}\sqrt[3]{3}$$

(c) $\displaystyle\int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\ dx.$

Esta é uma função do tipo $R(x, x^{p/q}, x^{r/s})$ com $p=1$, $q=2$, $r=1$, $s=3$ pelo que a substituição aconselhada é $x=t^m$, onde $m=\text{m.m.c}(2,3)=6$, ou seja, $x=t^6$.
Seja $g:[\alpha,\beta]\to[2,8]$ definida por $g(t)=t^6$. Então $g'(t)=6t^5$. Quantos aos extremos de integração, tem-se

$$\begin{cases} x=2 \\ x=t^6 \Leftrightarrow t=\sqrt[6]{x} \end{cases} \Rightarrow t=\sqrt[6]{2}$$

$$\begin{cases} x=8 \\ x=t^6 \Leftrightarrow t=\sqrt[6]{x} \end{cases} \Rightarrow t=\sqrt[6]{8}$$

Então

$$\int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\ dx = \int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \frac{\sqrt{t^6}}{t^6-\sqrt[3]{t^6}}6t^5\ dt = \int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \frac{t^3}{t^6-t^2}6t^5\ dt = 6\int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \frac{t^6}{t^4-1}\ dt$$

Como não se trata de uma fracção simples e o grau do numerador é maior que o grau do denominador, vamos efectuar a divisão

$$\begin{array}{r|l} t^6+0t^5+0t^4+0t^3+0t^2+0t+0 & t^4-1 \\ \cline{2-2} -t^6+0t^5+0t^4+0t^3+t^2+0t+0 & t^2 \\ \cline{1-1} 0t^6+0t^5+0t^4+0t^3+t^2+0t+0 & \end{array}$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{t^6}{t^4-1} = t^2+\frac{t^2}{t^4-1} = t^2+\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}$$

Como o denominador da última fracção racional tem raizes 1 e -1 (ambas de multiplicidade 1), e $\pm i$,tem-se

$$\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Cx+D}{t^2+1}$$

onde $A=1/4$, $B=-1/4$ e $C=1/2$. Portanto

$$t^2+\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} = t^2+\frac{1}{4\left(t-1\right)}-\frac{1}{4\left(t+1\right)}+\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx &= 6\int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \left(t^2+\frac{1}{4\,(t-1)}-\frac{1}{4\,(t+1)}+\frac{1}{2\,(t^2+1)}\right)dt \\
&= 6\left[\frac{t^3}{3}+\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \\
&= 6\left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt[6]{8}^3}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{8}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{8}+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{8} \\ -\left(\frac{\sqrt[6]{2}^3}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{2}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{2}+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2}\right)\end{array}\right] \\
&= 6\left[\begin{array}{c} \frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{8}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{8}+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{8} \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{2}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{2}+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2}\right)\end{array}\right]
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^x}{3^{2x}-3^x-2}\,dx.$

Esta é uma função do tipo $R(x,3^x,3^{2x})$ pelo que a substituição aconselhada é $3^{mx}=t$, onde $m=\text{m.d.c}(1,2)=1$, ou seja, $3^x=t$.

Seja $g:[\alpha,\beta]\to[0,1]$ definida por $g(t)=\log_3 t$. Então $g'(t)=\frac{1}{t\ln 3}$. Quantos aos extremos de integração, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_3 t \Leftrightarrow t=3^x \end{array}\right. \Rightarrow t=3^0=1$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=\log_3 t \Leftrightarrow t=3^x \end{array}\right. \Rightarrow t=3^1=3$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3^x}{3^{2x}-3^x-2}\,dx &= \int_1^3 \frac{t}{t^2-t-2}\cdot\frac{1}{t\ln 3}dt=\frac{1}{\ln 3}\int_1^3\frac{1}{t^2-t-2}\,dt \\
&= \frac{1}{\ln 3}\int_1^3 \frac{1}{(t-2)\,(t+1)}\,dt=\frac{1}{\ln 3}\int_1^3\left[\frac{1}{3\,(t-2)}-\frac{1}{3\,(t+1)}\right]dt \\
&= \frac{1}{\ln 3}\left[\frac{1}{3}\ln|t-2|-\frac{1}{3}\ln|t+1|\right]_1^3 \\
&= \frac{1}{\ln 3}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{3}\ln|3-2|-\frac{1}{3}\ln|3+1| \\ -(\frac{1}{3}\ln|1-2|-\frac{1}{3}\ln|1+1|)\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{\ln 3}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{3}\ln 1-\frac{1}{3}\ln 3 \\ -(\frac{1}{3}\ln 1-\frac{1}{3}\ln 2)\end{array}\right]=\frac{1}{\ln 3}\left[-\frac{1}{3}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2\right] \\
&= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{\ln 2}{\ln 3}
\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}.$

Esta é uma função do tipo $R(x,\sqrt{x^2+9})$ pelo que a substituição aconselhada é $x=\sinh(t)$.

Seja $g:[\alpha,\beta]\to[0,1]$ definida por $g(t)=3\sinh t$. Então $g'(t)=3\cos ht$. Quantos aos extremos de integração, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=3\sinh t\Leftrightarrow t=\operatorname{argsenh} x \end{array}\right. \Rightarrow t=\operatorname{argsenh} 0=\ln(0+\sqrt{1+0})=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=3\sinh t\Leftrightarrow t=\operatorname{argsenh} x/3 \end{array}\right. \Rightarrow t=\operatorname{argsenh} 1/3=\ln(1/3+\sqrt{1+1/9})=\ln(1+\sqrt{10/9})$$

Então

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{10/9})} \frac{1}{\sqrt{9\sinh^2(t)+9}} 3\cosh(t)\ dt$$
$$= \int_0^{\ln(1+\sqrt{10/9})} \frac{1}{|3\cosh(t)|} 3\cosh(t)\ dt$$

Como $\cosh(t) > 0,\ \forall t \in [0, +\infty[$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{10/9})} 1\ dt$$
$$= [t]_0^{\ln(1+\sqrt{10/9})} = \ln(1+\sqrt{10/9})$$