Exame de Mecânica Analítica e dos Meios Contínuos

Licenciatura em Física

Universidade do Minho — 23 de Novembro de 2010

I

1- Considere um sistema formado por N partículas com l equações de ligação e sujeitas à acção de forças que derivam dum potencial escalar.

É a Diferença da Energia Cinética (T) e a Energia Potencial (V), expressa nas suas Coordenadas generalizadas

(a) O que entende por Lagrangeano L de um tal sistema?

$q_1, q_2, q_3, \cdots q_m$ $\quad 3N - l$

(b) De quantas coordenadas generalizadas q_j e velocidades generalizadas $\dot{q}_j$ depende L? Justifique a sua resposta.

(c) Escreva as equações de Lagrange de um tal sistema. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right) = Q_j$

(d) Escreva também as equações de Hamilton e discuta a relação destas equações com as equações de Lagrange. $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

$H = \sum_i p_i \cdot \dot{q}_i - L$

As equações de Hamilton Relaciona-se Lagrange com H por $\frac{\partial H}{\partial p_i}$

2- A energia cinética de um corpo rígido pode ser escrita como,

Relaciona-se Tl $= \dot{q}_i$; $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$; $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

$$T = \frac{\vec{\omega}.\vec{L}}{2}, \tag{1}$$

sendo $\vec{L}$ o momento angular do corpo.

(a)- Defina e explique o significado da quantidade $\vec{\omega}$. a Velocidade Angular

V.A. ⇒ Correspondente à função uma Rotação em torno do eixo.

(b)- Justifique porque é que a mesma se pode escrever como uma soma de vectores,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\eta + \vec{\omega}_\psi\,. \tag{2}$$

Podemos escrever como Soma de Vectores para podermos exprimir em função dos ângulos de Euler.

Como se denominam ângulos ϕ, η e ψ?

Ângulos de Euler

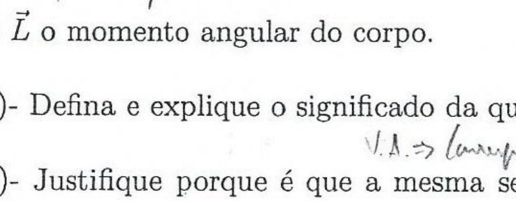
c)- Qual a expressão dos módulos ω_ϕ, ω_η e ω_ψ em termos desses ângulos?

$|\vec{\omega}_\eta| = \dot{\eta}$ $\quad |\vec{\omega}_\phi| = \dot{\phi}$

$|\vec{\omega}_\psi| = \dot{\psi}$

II

1- Considere o sistema da figura 1 (representada no quadro) que é formado por três corpos de massas m_1, m_2 e m_3 num campo gravítico, sendo nulo o atrito entre os corpos e os planos horizontal e inclinados. Usando o princípio dos trabalhos virtuais, encontre a relação entre m_1, m_2 e m_3 e os ângulos α e β, tal que



$\delta w = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

$\delta w = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \delta\vec{r}_3$

o sistema esteja em equilíbrio.

2- Considere a figura 2 (representada no quadro), a qual se refere a uma partícula de massa m a movimentar-se sem atrito sobre a superfície de um parabloide de equação,

$$z = a\,(x^2 + y^2) + c\,. \tag{3}$$

(a) Quantas são as coordenadas generalizadas da partícula? Justifique a sua resposta.

(b) Escreva o Lagrangeano representativo da dinâmica da partícula em coordenadas generalizadas.

(c) Escreva as equações de Lagrange para o Lagrangeano obtido em (b).