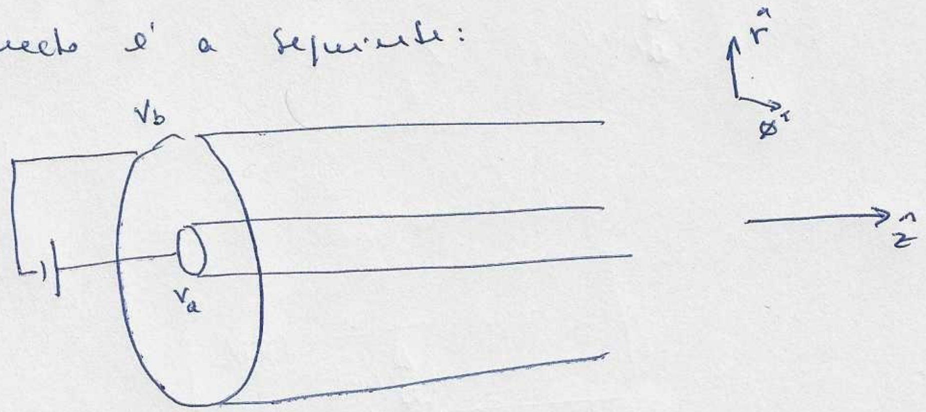
Problema-6 (folha TP4) ; ERRATA

A resolução do problema 6 apresentada na página-10 das notas "Leis de conservação em electrodinâmica"-I contém um erro no cálculo do campo eléctrico. A solução correcta é a seguinte:



$V_a > V_b \qquad V_a - V_b = V_{ap}$

$$\nabla^2 V(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\partial_r\left(r\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\frac{\partial V(r)}{\partial r} = C_1 \Rightarrow \frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

$$V(r) = C_1 \ln r + \cancel{C_2}$$

$$V_a - V_b = V_{ap} = C_1 \ln\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow C_1 = \frac{V_{ap}}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Logo: $V(r) = \dfrac{V_{ap}}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln r$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\hat{r} = -\frac{V_{ap}}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\frac{1}{r}\hat{r} = \frac{V_{ap}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{V_{ap}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\hat{r}$$

Em consequência, o vector de Poynting é:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\cancel{\mu_0}}\frac{\cancel{\mu_0} I}{2\pi r^2}\frac{V_{ap.}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\underbrace{(\hat{r}\times\hat{\phi})}_{\hat{z}}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{V_{ap.}\, I}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{2\pi r^2}\hat{z}}$$

e a potência dissipada (o fluxo de S através da secção transversal)

$$P = \int_a^b 2\pi r\,dr\;\frac{V_{ap}\, I}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{2\pi r^2} = V_{ap.}\, I$$

Observação:

O campo eléctrico pode ser calculado de outra forma:

A diferença de potencial aplicada entre as folhas cilíndricas carrega-as com densidades ~~superficiais~~ lineares de carga $\pm\sigma$ [(+): raio a ; (−): raio b]. O campo pode ser determinado à custa da lei de Gauss (sup. de Gauss cilíndrica de raio r):

$$a < r < b \longrightarrow 2\pi r\cdot \ell\cdot E(r) = \frac{\sigma\,\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Como determinar σ?

$$V_a - V_b = V_{ap} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \sigma = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_{ap}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Logo: $\vec{E}(r) = \frac{V_{ap}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{\hat{r}}{r}$ como antes

$\square$