Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática
Cálculo EC
2020/2021

Ficha de estudo autónomo

1. Qual é o erro do seguinte argumento?

   Sejam x e y dois números reais quaisquer tais que $x = y$. Então
   $$\begin{aligned} x^2 = xy \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = xy - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)(x-y) = y(x-y) \\ &\Leftrightarrow \quad x + y = y \quad \Leftrightarrow \quad 2y = y \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1 \end{aligned}$$

2. Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes relações é verdadeira ou falsa:

   (a) $|x| < |y|$
   (b) $x^2 < y^2$
   (c) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y} \quad (x, y \neq 0)$
   (d) $x^3 < y^3$
   (e) $x < \frac{x+y}{2} < y$
   (f) $\dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{|y|} \quad (x, y \neq 0)$

3. Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2 - 1) \geq 0\}$
   (e) $\{x \in \mathbb{R} : |5x + 2| \leq 1\}$
   (f) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$
   (g) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$
   (h) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$
   (i) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$
   (j) $\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{1-x}{2x+3} > 0\}$
   (k) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1\}$
   (l) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$
   (m) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$
   (n) $\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{x-2} \leq 0\}$
   (o) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2|x|\}$
   (p) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| > |x - 3|\}$

4. Indique em extensão os seguintes conjuntos:

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 4| = 3\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x + 2|\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 7)^2 = 0\}$

5. Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contraexemplo para as relações que forem falsas.

   (a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
   (b) $(x+y)^n = x^n + y^n$
   (c) $(xy)^n = x^n y^n$

6. Determine o maior domínio, no sentido da inclusão de conjuntos, onde são válidas as seguintes expressões:

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$;

   (b) $f(x) = \ln(1-x^2)$;

   (c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^2+x}$;

   (d) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$.

7. Esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

   (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2} - 1$;

   (c) $f :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$;

   (d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]-1,2] \\ 2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus]-1,2] \end{cases}$

8. Considere a função $f : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se} \quad -3 \leq x < -1 \\ x^2+1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 4-2x & \text{se} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

   Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $f([0,3]) = [-2,1]$;

   (b) existe $x \in [1,3]$ tal que $f(x) = -1$;

   (c) não existe $x \in [-3,0]$ tal que $f(x) = 2$.

9. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$ e, em cada caso, o seu domínio.

   (a) $f(x) = x^2 - 3x, \quad g(x) = \sqrt{x+2}$;

   (b) $f(x) = \sqrt{x+15}, \quad g(x) = x^2 + 2x$;

   (c) $f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{x+5}$;

   (d) $f(x) = \sqrt{25-x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x-3}$;

10. Se f e g são funções pares, o que se pode dizer de $f \circ g$? Se forem ímpares? Se uma for par e outra ímpar?

11. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

    (a) Defina uma restrição de f que admita inversa.

    (b) Defina a função inversa da função da alínea (a).

    (c) Esboce os gráficos da função e da sua inversa.

12. Uma função g satisfaz as condições indicadas; esboce um gráfico possível de g, em cada um dos seguintes casos:

    (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$

    (b) $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to2^+} g(x) = 4, \quad D_g = [-1,4]$

    (c) $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to2^+} g(x) = 4, \quad D_g =]-1,4[, \quad \lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to4} g(x) = -\infty$

13. Calcule os limites que se seguem:

(a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ (b) $\lim_{x\to -2^+} \frac{3}{x+2}$ (c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

(d) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ (e) $\lim_{x\to -3^+} \frac{|x+3|}{x+3}$ (f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\text{sen} x}{x}$

(g) $\lim_{x\to \pi/4} \frac{\text{tg } x}{1-\cos x}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } 3x}{\text{sen} 3x}$ (i) $\lim_{x\to 0} x^2 \text{sen} \frac{1}{x^2}$

(j) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$ (k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\text{sen} x}{x+\text{sen} x}$ (l) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(m) $\lim_{x\to +\infty} (x^2 + x\cos x)$ (n) $\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^4-2x+1}{-3x+1}$ (o) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-3x+10}{x^4-2x+4}$

14. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + a & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 1 - ax & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Determine o valor de a de modo que f seja contínua.

15. Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas:

(a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;
(b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;
(c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

16. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

e $f(x) = x + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Verifique que $\lim_{x\to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$.

17. Para cada uma das funções polinomiais definidas a seguir, encontre um $z \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$ para algum $x \in]z, z+1[$:

(a) $f(x) = x^3 - x + 3$ (b) $f(x) = x^5 + x + 1$ (c) $f(x) = -2x^3 + 10x - 1$

18. Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados:

(a) $x = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$
(b) $x = -\log x, \quad x \in]0, 1]$
(c) $2 + x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

19. (a) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Mostre que f possui um *ponto fixo*, isto é, $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$.

(b) Dê exemplo de uma função contínua, $f : [0, 1[\longrightarrow [0, 1[$, sem ponto fixo.

20. Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe uma função:

    (a) $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores negativos e positivos;

    (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínua tal que a função $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) + \mathrm{sen} x \end{array}$ é contínua.

21. Considere a função $g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possui máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.

22. Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

    (a) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua então $g \circ f$ não é contínua;
    (b) se $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é limitada;
    (c) existe $x \in]1, e[$ tal que $\log(x^3) = x$;
    (d) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então f atinge um máximo e um mínimo;
    (e) uma função $f : [0, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada possui máximo;
    (f) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua, então f também é contínua.

23. Calcule os seguintes números reais:

    (a) $\cos\alpha$ e $\mathrm{tg}\ \alpha$ sabendo que $\mathrm{sen}\alpha = 4/5$ e $\pi/2 < \alpha < \pi$;
    (b) $\mathrm{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ sabendo que $\mathrm{tg}\ \alpha = -2$ e $-\pi < \alpha < 0$.

24. Recorrendo às propriedades das funções trigonométricas resolva as equações seguintes:

    (a) $\cos(2x) = 1/2$;
    (b) $\sqrt{3}\mathrm{sen}(3x) + \cos(3x) = 2$. (Sugestão: use a fórmula de adição para o seno)

25. Mostre as seguintes igualdades

    (a) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$; (b) $\mathrm{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

26. Considere a equação $4\cos^3 x - 3\cos x = 1/2$.

    (a) Mostre que $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
    (b) Resolva a equação dada.

27. Calcule:

(a) $\cos(\arccos(1/8))$	(b) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$	(c) $\mathrm{arcsen}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$
(d) $\mathrm{sen}\left(\mathrm{arcsen}(-\sqrt{3}/2)\right)$	(e) $\mathrm{sen}(\mathrm{arcsen}(1) + \pi)$	(f) $\mathrm{arcsen}\left(\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
(g) $\mathrm{arcsen}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right)$	(h) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	(i) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\pi))$
(j) $\mathrm{tg}\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)$	(k) $\cos\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$	(l) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(2))$

28. Deduza as seguintes igualdades em domínios que deverá especificar:

(a) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

(b) $\operatorname{tg}\,(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

(c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$;

(d) $\operatorname{tg}\,(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(e) $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(f) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

29. Determine o número real R tal que:

(a) $R = \cos\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2} - \arccos\dfrac{3}{5}\right)$;

(b) $R = \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right) + 4\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(c) $R = \cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}\right)$;

(d) $R = \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{3}{5}\right) - \operatorname{cotg}^2\left(\arccos\dfrac{4}{5}\right)$.

30. Resolva as seguintes equações:

(a) $e^x = e^{1-x}$;

(b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$;

(c) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$;

(d) $\ln(x^2-1) + 2\ln 2 = \ln(4x-1)$

31. Recorde que $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Mostre as seguintes igualdades:

(a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

(b) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$;

(c) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$;

(d) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$;

(e) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;

(f) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

(g) $\operatorname{th}^2 x + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1$;

(h) $\coth^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1$.

32. Verifique que:

(a) $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$;

(b) $\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), x \in [1, +\infty[$;

(c) $\operatorname{argth} x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad x \in \,]-1, 1[$;

(d) $\operatorname{argcoth} x = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.