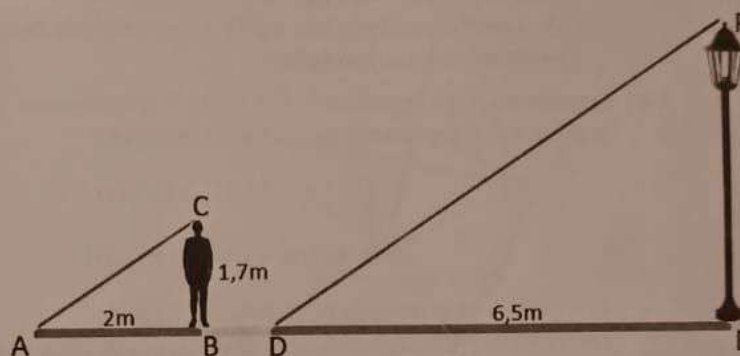


Matemática das Coisas

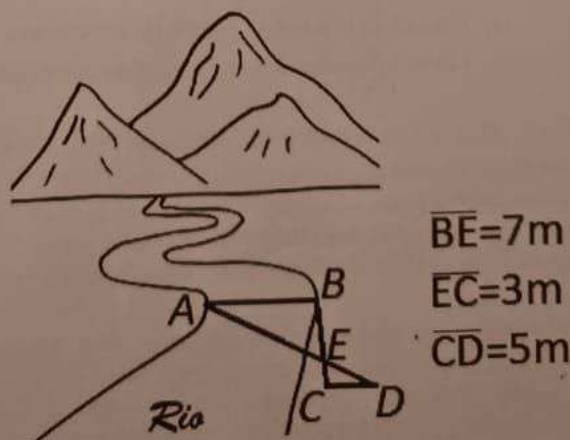
— Teste final - duas horas — 2022'23 —

1. (4 valores) Resolva **um, e apenas um**, dos seguintes exercícios (**1.A** ou **1.B**):

- 1.A)** Considere a figura abaixo onde as linhas horizontais escuras correspondem às sombras, respectivamente da pessoa e do poste de iluminação, a pessoa mede 1,7 metros de altura, a sombra da pessoa tem um comprimento de 2 metros e a sombra do poste tem um comprimento de 6,5 metros.



- (a) Assumindo que os raios solares são paralelos, justifique que os triângulos,  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , são semelhantes.  
(b) Calcule a altura do poste de iluminação.
- 1.B)** Considere a figura abaixo onde se ilustra um rio. Estando na margem esquerda do rio, pretende-se calcular a largura do rio no local representado pelo segmento de recta  $[AB]$ . Assuma que os segmentos de recta  $[AB]$  e  $[CD]$  são paralelos e o ponto  $E$  corresponde à intercepção dos segmentos  $[AD]$  com  $[BC]$ .



- (a) Justifique que os triângulos  $\triangle ABE$  e  $\triangle DCE$  são semelhantes.  
(b) Considerando as medidas indicadas na figura, calcule a altura do rio (no sítio indicado pelo segmento de recta  $[AB]$ ).

2. (4 valores) Resolva **um, e apenas um**, dos seguintes exercícios (2.A), 2.B) ou 2.C):

2.A) Considere o seguinte modelo populacional cooperativo para a interação entre duas espécies,  $P$  e  $Q$ :

$$\begin{cases} P'(t) = [3 - P(t) + Q(t)]P(t) \\ Q'(t) = [2 - Q(t) + 2P(t)]Q(t) \end{cases}$$

- (a) Calcule os pontos de equilíbrio do modelo (atenção: apenas pontos com componentes não negativas têm significado biológico).
- (b) Classifique a estabilidade local do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ .
- (c) De acordo com o modelo, existe a possibilidade de extinção das duas espécies simultaneamente?

2.B) Considere o seguinte modelo SIR, onde  $S(t)$  representa a população suscetível e  $I(t)$  representa a população infectada:

$$\begin{cases} S'(t) = 2S(t) - 4S(t)I(t) \\ I'(t) = -4I(t) + 4S(t)I(t) \end{cases}$$

- (a) Calcule os pontos de equilíbrio do modelo.
- (b) Classifique a estabilidade local do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ .
- (c) De acordo com o modelo, existe a possibilidade de extinção das populações de suscetíveis e de infectados simultaneamente?

2.C) Considere o seguinte modelo ecológico, onde  $V(t)$  representa a área verde e  $M(t)$  mede a produção de energia biológica:

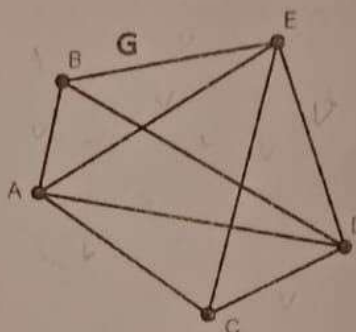
$$\begin{cases} V'(t) = M(t)V(t)(1 - V(t)) - V(t) \\ M'(t) = (1 - M(t))M(t) - \frac{1-V(t)}{2}M(t) \end{cases}$$

- (a) Calcule os pontos de equilíbrio do modelo.
- (b) Classifique a estabilidade local do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ .

3. (4 valores) Considere a equação às diferenças que se segue:

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

- (a) Determine os pontos de equilíbrio da equação às diferenças apresentada.  
 (b) Classifique a estabilidade de todos os pontos de equilíbrio obtidos no item anterior.
4. (4 valores) Considere o grafo  $G$ , cuja representação se encontra na figura abaixo.



- (a) identifique o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas;  
 (b) identifique, justificando, se é, ou não é, planar;  
 (c) identifique, ou justifique que não existe, um trajecto euleriano;  
 (d) identifique, justificando, se é, ou não é, um grafo euleriano.
5. (4 valores) Na tabela seguinte apresentam-se as distâncias (em Kms e por vias públicas) entre cinco aldeias de um certo concelho (designadas pelas letras  $A, B, C, D, E$ ).

	B	C	D	E
A	3	8	12	8
B	x	6	4	9
C	x	x	2	5
D	x	x	x	4

- (a) Represente a informação da tabela através de um grafo ponderado.  
 (b) Suponha que se pretende instalar uma nova rede de cabos elétricos unindo todas as aldeias e, por razões de custos de manutenção, os cabos têm que seguir pelas vias públicas. Apresente um mapa de instalação que minimize o comprimento dos cabos a utilizar, indicando o comprimento de cabos necessários.  
 (c) Suponha que, todos os meses um eletricista, que reside na aldeia  $A$ , necessita de se deslocar a todas as aldeias num só dia. Aplique o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas para obter uma solução para o percurso a realizar pelo eletricista desde a aldeia  $A$ , visitando todas as aldeias uma única vez e regressando a  $A$ .

Fim