Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Exercícios

Exercício 29: *Potencial delta de Dirac em 3d - aproximação de Born*

Considere o seguinte potencial central $V(r) = \frac{\hbar^2}{2ma}\delta(r-a)$, ou seja a partícula quântica sente apenas o seu efeito quando se encontra à superfície de uma esfera de raio a em torno da origem, sendo a energia da partícula incidente dada por $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, em que k é o módulo do momento incidente, suposto alinhado com o eixo dos z.

a) Mostre que, na primeira aproximação de Born, dada pela equação (57), a seção eficaz diferencial para este potencial é dada por $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2(qa)}{q^2}$, em que $q = 2k\sin(\theta/2)$, sendo θ o ângulo de defleção da partícula após o espalhamento.

b) Integrando esta expressão sobre o ângulo sólido, mostre que a seção eficaz total é dada por $\sigma = \pi a^2 f(ka)$, em que $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x du\, \frac{\sin^2(2u)}{u}$. Considere esta expressão no limite de altas energias, $ka \gg 1$.

Exercício 30: *Potencial delta de Dirac em 3d - tratamento por ondas parciais*

Considere de novo o potencial central $V(r) = \frac{\hbar^2}{2ma}\delta(r-a)$. Separando a equação de Schrödinger em termos de ondas parciais, obtemos para a função radial $R_l(r)$, com momento angular l, a equação

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l(r) - \frac{1}{a}\delta(r-a)R_l(r) + k^2 R_l(r) = 0, \tag{83}$$

em que $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, onde $E > 0$ é a energia da partícula quântica.

a) Introduzindo a função $u_l(r) = rR_l(r)$, mostre que podemos escrever a equação (83) como

$$\frac{d^2u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}u_l(r) - \frac{1}{a}\delta(r-a)u_l(r) + k^2 u_l(r) = 0. \tag{84}$$

b) Considere agora a onda s, com $l = 0$. Mostre que a função $u_0(r)$ e a sua derivada obedecem às seguintes condições fronteira, $u_0(0) = 0$, $u_0(a^-) = u_0(a^+)$ e $u_0'(a^+) - u_0'(a^-) = \frac{u_0(a)}{a}$.

c) Escrevendo, à semelhança do poço de potencial considerado na aula teórica, a solução desta equação como $u_0(r) = Ce^{i\delta_0}\sin(kr)$ para $r < a$, $u_0(r) = e^{i\delta_0}\sin(kr+\delta_0)$, para $r \geq a$, mostre que $C = \frac{\sin(ka+\delta_0)}{\sin(ka)}$, e que o desvio de fase δ_0 é dado por $\tan\delta_0 = -\frac{2\sin^{(}ka)}{2ka+sin(2ka)}$.

d) Considerando apenas a contribuição da onda s para a seção eficaz total $\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$, válida para baixas energias, mostre que $\sigma = \pi a^2 g(ka)$, em que

$$g(ka) = \frac{4\sin^4(ka)}{(ka)^2[(ka)^2 + ka\sin(2ka) + \sin^2(ka)]}.$$

Considere o limite desta expressão para baixas energias, $ka \ll 1$.

Exercício 31: *Função de onda de dois fermiões*

Considere o átomo ${}^4_2$He. Se ignorarmos a repulsão de Coulomb entre os dois eletrões (que pode ser tratada posteriormente como uma perturbação), pode-se construir a função de onda eletrónica como um produto de funções de onda de um único eletrão (incluindo o spin). No entanto, é preciso tomar em conta que tal função de onda deve mudar de sinal se permutarmos $(\boldsymbol{r}_1, \sigma^1)$ com $(\boldsymbol{r}_2, \sigma^2)$, onde $\boldsymbol{r}_{1,2}$ é a posição do primeiro (respectivamente, segundo) eletrão e $\sigma^{1,2}$ é a projeção do spin do primeiro (respectivamente, segundo) eletrão ao longo do eixo z. Construa as seguintes funções de onda (anti-simétricas):

a) A função de onda do estado fundamental, ou seja, os dois eletrões ocupam a orbital $1s$ (tome a parte espacial das funções de onda de um único eletrão como sendo dada por $\varphi_{1s}(\boldsymbol{r}_1)$, $\varphi_{1s}(\boldsymbol{r}_2)$, a sua expressão exata não é importante aqui). Mostre que a parte de spin de tal função de onda representa um estado singleto, e assim que o spin eletrónico total do átomo é zero.

b) O primeiro estado excitado, onde o primeiro eletrão ocupa o nível $1s$, sendo a projeção de seu spin ao longo do eixo z igual a $\hbar/2$ e o segundo eletrão ocupa o nível $2s$, sendo a projeção de seu spin ao longo do eixo z igual a $-\hbar/2$. Qual a probabilidade de que uma medida do spin total $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ (onde $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}(\hat{\sigma}_i^1 + \hat{\sigma}_i^2)$) ter como resultado $S = 0$? Mais uma vez, tome as funções de onda espaciais como sendo dadas por $\varphi_{1s}(\boldsymbol{r}_1)$ e $\varphi_{2s}(\boldsymbol{r}_2)$.

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt