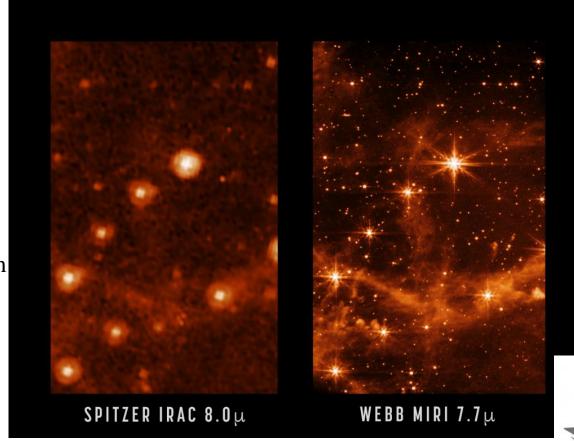
Telescópio James Webb



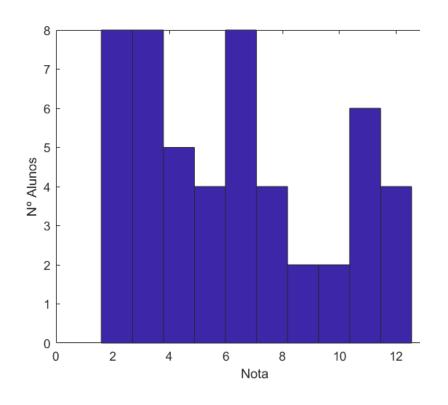
Diâmetro = 0.85 mf = 10.2 m

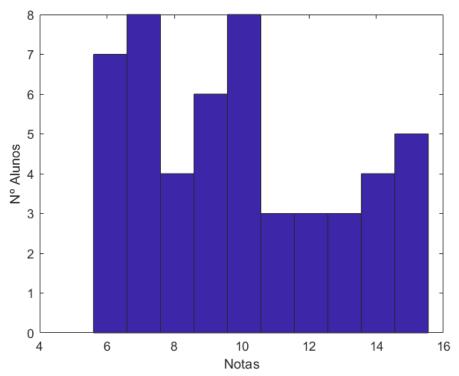
 $\theta_{\min} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} \approx 9.4 \mu rad$

 $\theta_{\min} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} \approx 1.2 \mu rad$

Diâmetro = 6.5 mf = 131.4 m

Resultados do primeiro teste





Nota média 6.28 ± 3.25

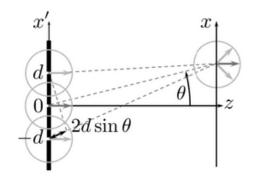
Nota média 9.93 ± 2.94

Metade de cotação nas alíneas 2c, 3a e 4 + 4 valores (Nota máxima possível 21) Δ mínima +3 valores

Interferência

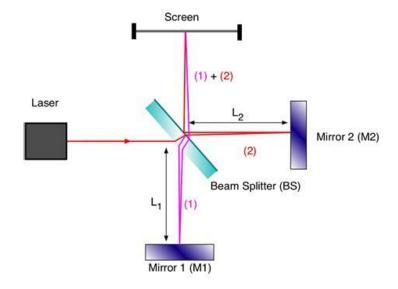
Divisão das frentes de ondas

Fendas de Young Fendas múltiplas Redes de difração

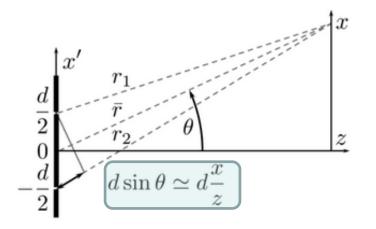


Divisão dos amplitudes

Películas, filmes
Interferómetros de
Michelson
Mach-Zenhder
Fabry Perot



Interferometro de Young



$$E_{tot} \approx \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{ik\overline{r}} \left[e^{ikr_1} + e^{ikr_2} \right] \qquad r_{1,2} \approx \overline{r} \mp \frac{xd}{2z} + \frac{d^2}{8z}$$

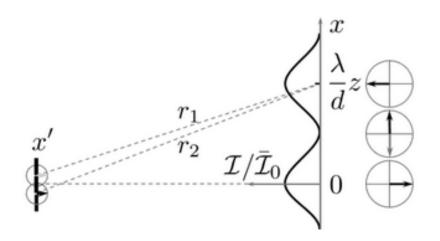
$$E_{tot} \approx \frac{E_0 e^{i(k\overline{r} - \omega t)}}{ik\overline{r}} e^{ikd^2/8z} \left[e^{-ikxd/2z} + e^{+ikxd/2z} \right]$$

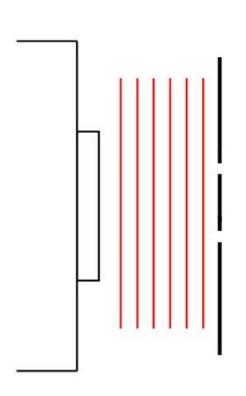
$$2\cos\left(\frac{kxd}{2z}\right)$$

$$I_{tot} \approx 4I_f \cos^2\left(\frac{kxd}{2z}\right) = 4I_f \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)$$

Distribuição sinusoidal de intensidade que varia com a fase relativa

Escala espacial da padrão aumenta com z

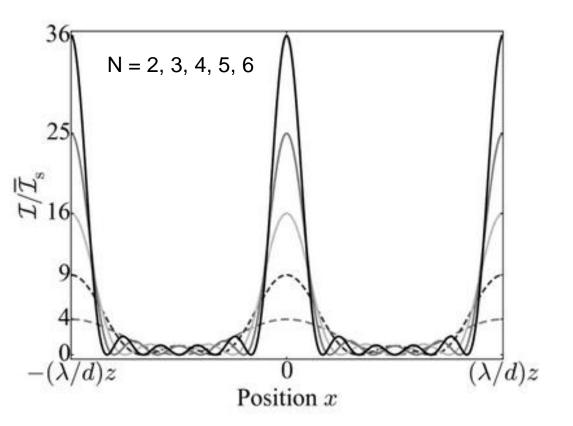






Redes de difração: Incidência normal

$$I_{tot} \approx I_s \frac{\sin^2\left(N\frac{kxd}{2z}\right)}{\sin^2\left(\frac{kxd}{2z}\right)}$$



Máximos quando

$$\frac{kx_{\max}d}{2z} = m\pi \quad x_{\max} = m\left(\frac{\lambda z}{d}\right)$$

$$I_{\max} = \lim_{\theta \to m\pi} I_s \left(\frac{\sin(N\theta)}{\sin(\theta)} \right)^2$$

$$= I_s \left(\lim_{\theta \to m\pi} \frac{\sin(N\theta)}{\sin(\theta)} \right)^2$$

$$= I_s \left(\lim_{\theta \to m\pi} \frac{N\cos(N\theta)}{\cos(\theta)} \right)^2$$

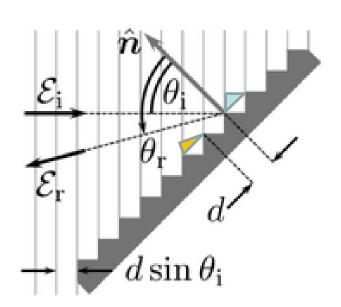
$$= N^2 I_s$$

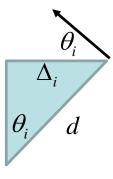
Primeiro mínimo

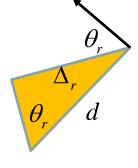
$$N\frac{kx_{\min}d}{2z} = \pi \quad x_{\min} = \left(\frac{\lambda z}{Nd}\right)$$

Rede de difração em reflexão

Um exemplo importante são redes de difração em reflexão Consiste de degraus com separação d







$$\Delta_i = d \sin \theta_i$$

$$\Delta_r = d\sin\theta_r$$

Diferença de fase de um degrau para o próximo $\phi = kd \sin \theta_i + kd \sin \theta_r$

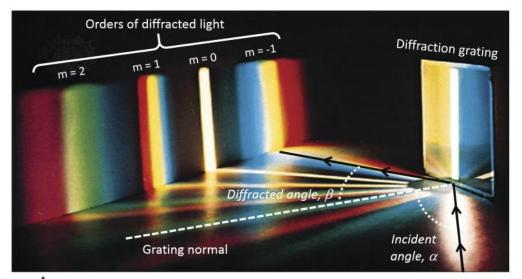
$$\mathcal{E}_{T} = \mathcal{E}_{r} e^{i(k\overline{r} - \omega t)} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{in\phi}$$

Máxima quando

$$m\lambda = d\sin\theta_i + d\sin\theta_r$$

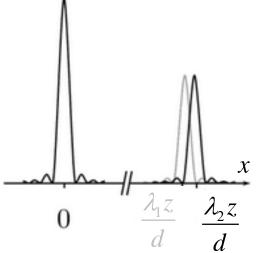
Comprimentos de onda diferentes são separados

Rede de difração



Capacidade de resolver dois picos

Critério de Rayleigh: Os dois espetro são distinguíveis quando o máximo de um espetro é coincidente com o primeiro mínimo de outro espetro



$$I_{tot} \approx I_s \frac{\sin^2\left(N\frac{kxd}{2z}\right)}{\sin^2\left(\frac{kxd}{2z}\right)}$$
 1° max $x_{max}^{\lambda} = \left(\frac{\lambda z}{d}\right)$ 1° min $x_{min}^{\lambda} = \frac{\lambda z}{Nd}$

Exemplo

Uma rede de difração

Pretende usar uma rede de difração para obter espetros com uma resolução de pelo menos $\Delta\lambda \leq 0.1$ nm na primeira ordem sobre toda a gama da luz visível (400 nm -700 nm). Determine o número mínimo de riscas N que tem ser iluminadas assumindo que a luz é incidente ao longo o normal da rede.

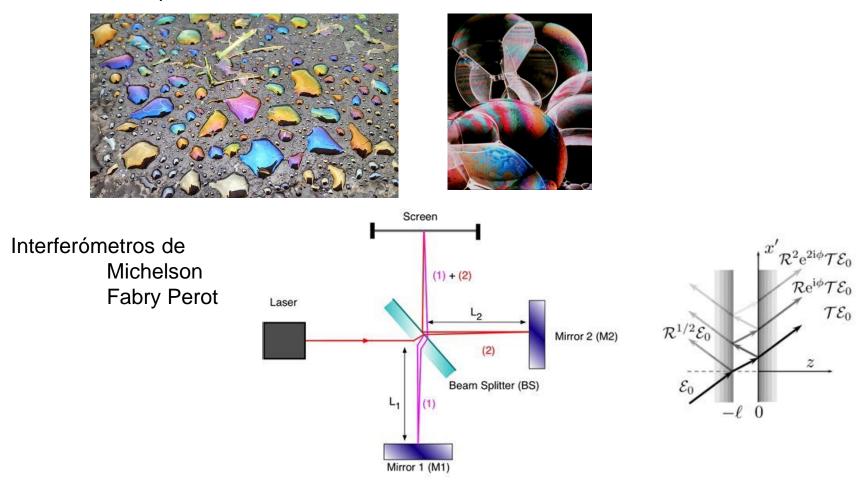
[Pista: Lembre o critério de Rayleigh para resolver dois picos próximos]

Resposta: N ≥ 7000

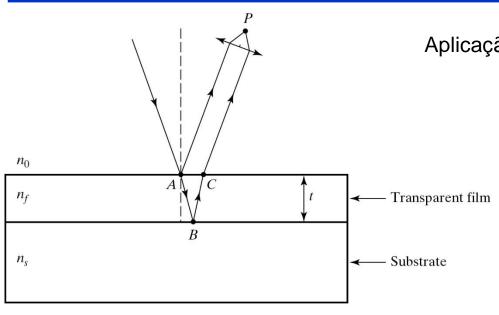
Interferência: divisão do amplitude

Películas, filmes

exemplos: bolhas de sabão, filmes antirreflexo, cunhas de ar, anéis de Newton



Interferência de filmes finos



Aplicação comum – revestimento antirreflexo

Incidência normal

$$r = \frac{n_{in} - n_{trans}}{n_{in} + n_{trans}}$$

Revestimento antirreflexo $n_0 < n_f < n_s$

Interferência destrutiva se a fase adquirida no percurso A→B→C

$$r_{0f} = \frac{1 - n_f}{1 + n_f}$$
 $r_{fs} = \frac{1 - (n_s / n_f)}{1 + (n_s / n_f)}$ $r_{0f} = r_{fs} \Rightarrow n_f = n_s / n_f$

$$\Delta \phi = k_f \, 2t = \pi \qquad t = \frac{\lambda_0}{4n}$$

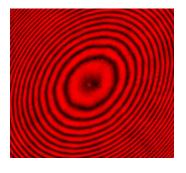
$$n_f = \sqrt{n_s}$$

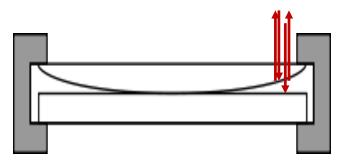
Vidro
$$n_s = 1.5$$
 $n_f = 1.22$

Vidro $n_s = 1.5$ $n_f = 1.22$ Na pratica é comum usar MgF₂ (n = 1.38)

As anéis de Newton

Sobreposição da reflexões entre uma lente esférica e uma superfície plana





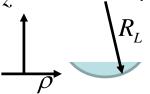
Fresnel incidência normal:

$$r_{s,p} \approx \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$$

$$r_{vidro \to ar} \approx \frac{1.5 - 1}{1.5 + 1} = \frac{1}{5} \equiv \sqrt{R}$$
 $r_{ar \to vidro} \approx -\sqrt{R}$

$$E_{Total} \approx \sqrt{R} E_0 e^{i(kz - \omega t)} - \sqrt{R} \left(1 - R\right) E_0 e^{i(kz - \omega t + 2ikd)} \approx \sqrt{R} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \left\{1 - e^{ik\rho^2/R_L}\right\}$$

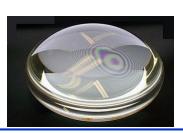
d é a espessura de ar entre a lente e a superfície plana



$$(R_{L} - z_{L})^{2} + \rho^{2} = R_{L}^{2}$$

$$z_{L} = R_{L} - \sqrt{R_{L}^{2} - \rho^{2}}$$

$$= R_{L} - R_{L} \sqrt{1 - (\rho / R_{L})^{2}} \approx \frac{1}{2} \frac{\rho^{2}}{R_{L}}$$

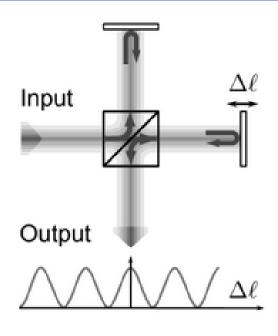


$$\frac{k\rho_{\text{max}}^2}{R_L} = (2m+1)\pi$$

interferência construtiva quando

$$\rho_{\text{max}} = \sqrt{(2m+1)R_L \lambda / 2}$$

Interferometro de Michelson



Divisor de feixe 50/50

Se a diferença nos caminhos óticos de 2 braços é $\Delta \ell$

Na saída

$$\mathcal{E}_{T} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{0} e^{i(k\bar{r} - \omega t)} \left[1 + e^{ik2\Delta \ell} \right]$$

$$I_{out} = \frac{1}{2} I_{in} \left[1 + \cos\left(k2\Delta \ell\right) \right] = I_{in} \cos^{2}\left(k\Delta \ell\right)$$

de um máximo para o próximo

$$2k\left(\Delta \ell_{m+1} - \Delta \ell_m\right) = 2\pi \quad \left(\Delta \ell_{m+1} - \Delta \ell_m\right) = \frac{1}{2}\lambda$$

Usado por exemplo na industria para controlar maquinas de corte, tornos, berbequim

Interferómetro de Fabry-Perot

$$\frac{\mathcal{I}_T}{\mathcal{I}_0} = \frac{1}{1 + 4\left(\mathcal{F}^2 / \pi^2\right) \sin^2\left(\phi / 2\right)}$$
$$\phi = k\left(2l\right) \cos\theta$$

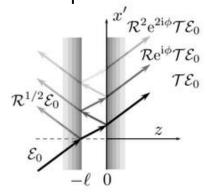
"o finesse"
$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}}$$

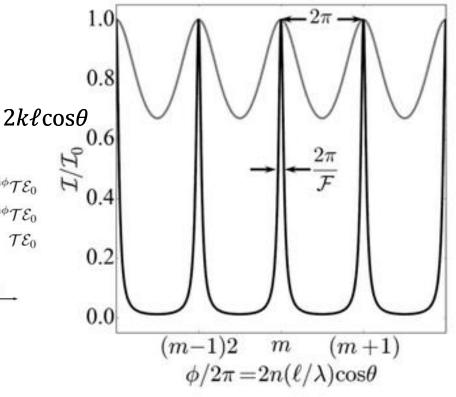
Interferência múltipla (análogo as redes de difração)

Interferência construtiva cada vez que

$$\phi_m = m2\pi$$

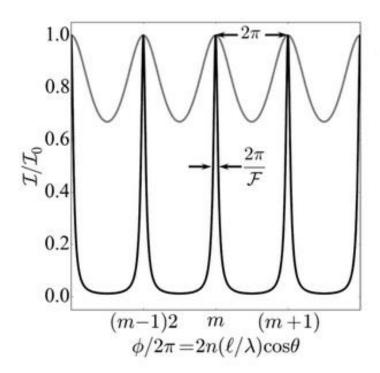
Tanto maior \mathcal{R} mais ondas interferem máximos mais finos

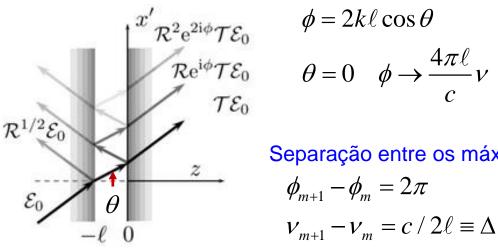




Largura dos picos

$$\frac{\mathcal{I}_T}{\mathcal{I}_0} \approx \frac{1}{1 + \left(\mathcal{F}^2 / \pi^2\right) \left(\delta \phi\right)^2}$$





$$\phi = 2k\ell\cos\theta$$

$$\theta = 0 \quad \phi \to \frac{4\pi\ell}{c} \nu$$

Separação entre os máximos

$$\phi_{m+1} - \phi_m = 2\pi$$

$$v_{m+1} - v_m = c / 2\ell \equiv \Delta v_{fsr}$$

"Free spectral range"

$$\delta\phi \rightarrow \frac{2\pi\ell}{c} (v - v_{\text{max}}) = \frac{\pi}{\Delta v_{fsr}} (v - v_{\text{max}})$$

$$\frac{\mathcal{I}_{T}}{\mathcal{I}_{0}} \approx \frac{\left(\Delta v / 2\right)^{2}}{\left(v - v_{\text{max}}\right)^{2} + \left(\Delta v / 2\right)^{2}} \qquad \Delta v = \frac{\Delta v_{fsr}}{\mathcal{F}}$$

Valores típicos:

$$\ell = 1mm$$
 $\Delta v_{fsr} = 150 \ GHz$ $\mathcal{F} = 100$ $\Delta v = 1.5 \ GHz$

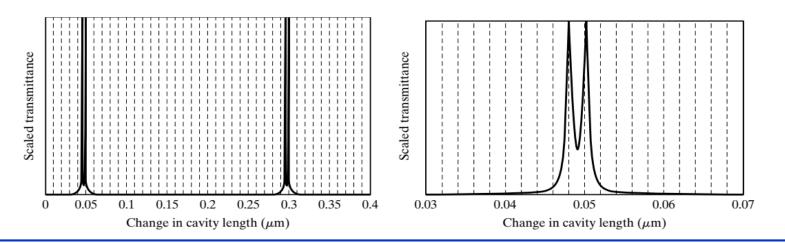
$$\lambda = 600nm$$
 $v = 5x10^{14} Hz = 5x10^5 GHz$

 \mathcal{F} pode chegar ~10⁹

exemplo

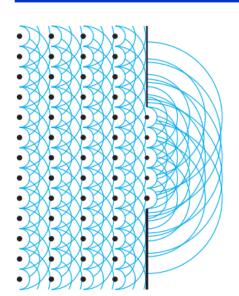
Etalon Fabry-Perot Luz colimada com dois comprimentos de onda, λ_1 e λ_2 , incide normalmente num etalon Fabry-Perot com espelhos planos idênticos separados por ar. A distância nominal entre os dois espelhos é 100 μ m. As figuras indicam a variação na transmissão do etalon quando a distância entre os espelhos é ligeiramente variada. A transmissão mínima é 0.005 do valor da transmissão máxima. Determine

- (a) o comprimento de onda médio, $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$
- (b) a diferença entre os comprimentos de onda $|\lambda_1 \lambda_2|$ (pode assume que a ordem dos 2 picos na imagem à direita é igual)
- (c) a refletância dos espelhos.



Respostas: (a) $\approx <\lambda > 500$ nm; (b) $\Delta \lambda \approx 10$ pm; (c) R ≈ 0.87

Difração: o Integral da propagação Fresnel-Huygens



Cada ponto na abertura [f(x', y')] é tratado como uma fonte de onda esférica Dentro da aproximação Fresnel o integral representa a sobreposição destas fontes.

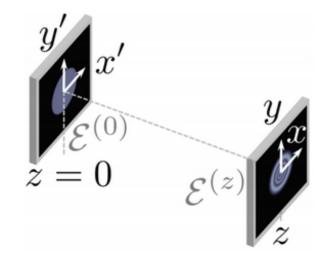
$$\mathcal{E}(x,y,z) = \frac{\mathcal{E}_0}{i\lambda z} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x',y') e^{\left\{ik\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]/2z\right\}} dx' dy'$$

Efetivamente uma soma infinita de fasores

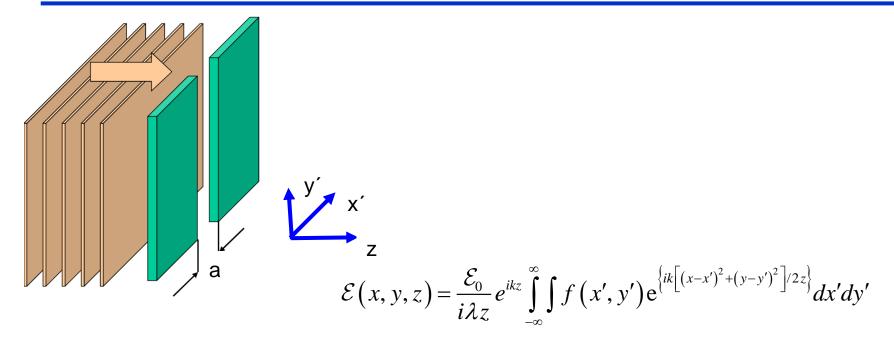
$$r_p^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$$

$$r_p \approx z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}$$

Aproximação Fresnel (paraxial) $z \gg x, y, x', y'$



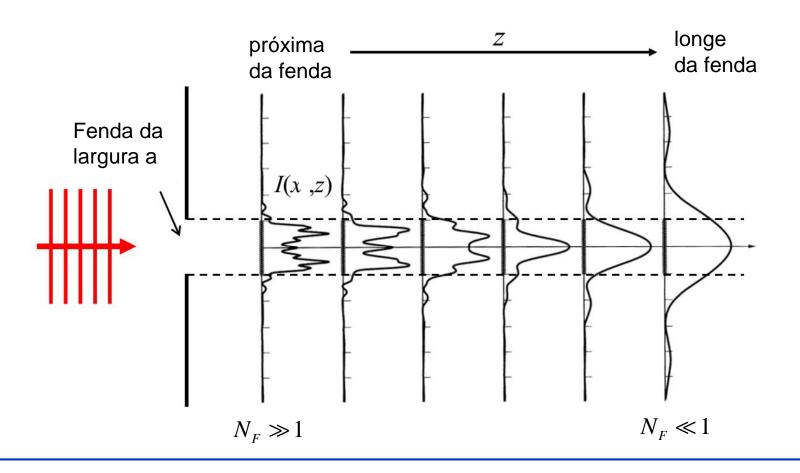
Caso de uma fenda simples



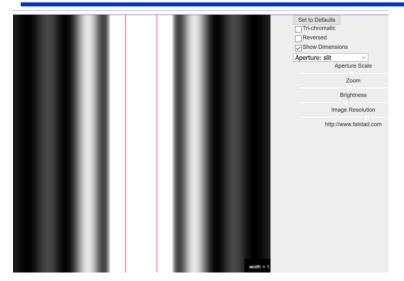
Talvez o problema mais simples de difração. Mesmo assim o integral é complicado – é necessário efetuar ainda mais uma aproximação para chegar á um resultado analítico.

Difração de uma fenda simples

$$\mathcal{I}(x,z) = N_F \mathcal{I}_0 \left| \int_{-1}^{1} \exp\left[i\pi N_F \left(u - u'\right)^2\right] du' \right|^2 \qquad u = \frac{2x}{a} \qquad N_F \equiv \frac{(a/2)^2}{z\lambda}$$



Difração Fenda simples (aproximação Fraunhofer)

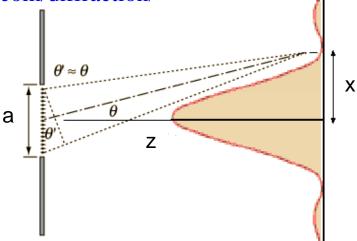


$$\mathcal{I}(x,z) = \mathcal{I}_0 \left(\frac{a^2}{\lambda z}\right) \left[\frac{\sin(\pi ax/\lambda z)}{\pi ax/\lambda z}\right]^2$$

$$N_F = \frac{(a/2)^2}{\lambda z} \ll 1$$

$$\operatorname{sinc}(\xi) = \left[\frac{\sin(\xi)}{\xi}\right]^2$$
 $\lim_{\xi \to 0} \operatorname{sinc}(\xi) = 1$

https://www.falstad.com/diffraction/



mínimos

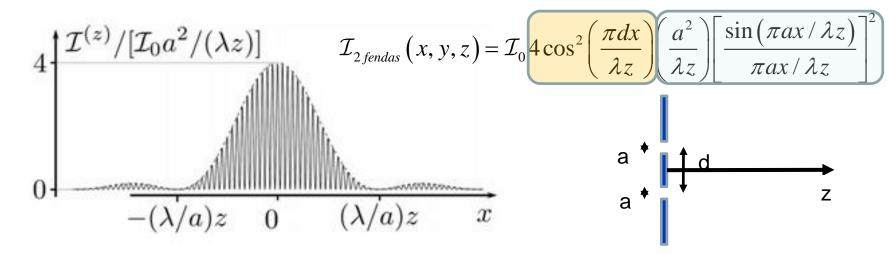
$$\mathcal{I}(x,z) = 0 \quad @ \frac{\pi a x_{\min}}{\lambda z} = m\pi$$

exceto m=0

$$a\frac{x_{\min}}{z} \approx a\sin\theta_{\min} = m\lambda$$

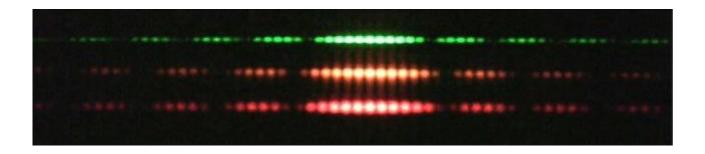
$$\sin \theta_{\min} = \frac{m\lambda}{a}$$

Padrão difração dupla fendas



Oscilação rápida devida a interferência das duas fendas

Modulação do amplitude devida a padrão da difração de uma fenda com largura a



exemplos

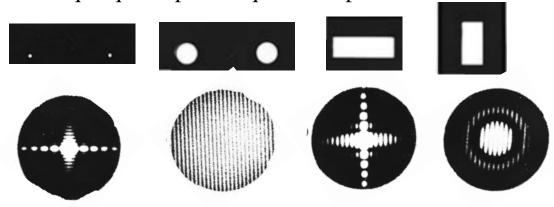
As duas fendas de Young

Numa experiência de duas fendas é observado 13 franjas brilhantes dentro do máximo central do padrão de difração no limite Fraunhofer. Estime a razão entre a separação das fendas e a largura de cada fenda.

Resposta:
$$6 < \frac{d}{a} \le 7$$

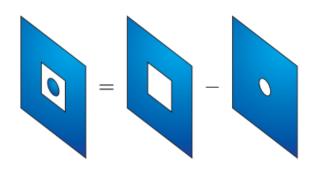
Padrões de difração

As seguintes aberturas produzirem os seguintes padrões de difração no limite Fraunhofer. Todas as imagens têm a mesma escala espacial mas podem ter tempos de integração diferentes. Indique qual o padrão que corresponde a cada abertura.



Principio de Babinet

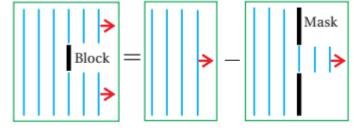
O principio de Babinet é efetivamente o principio de sobreposição



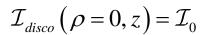


Jaques Babinet (1794-1872)

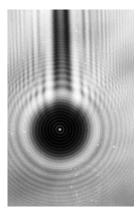
Em particular considere um disco circular O campo no eixo ótico é



$$\mathcal{E}_{disco}\left(\rho = 0, z\right) = \mathcal{E}_{plana}\left(0, z\right) - \mathcal{E}_{abertura}\left(0, z\right)$$
$$= \mathcal{E}_{0}e^{ikz} + \mathcal{E}_{0}e^{ikz} \left[e^{i\pi R_{a}^{2}/\lambda z} - 1\right]$$
$$= \mathcal{E}_{0}e^{ikz}e^{i\pi R_{a}^{2}/\lambda z}$$







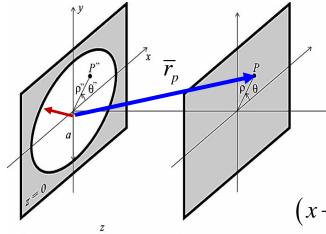
Interferência construtiva no centro do disco

O spot de Poisson/Arago

Integral Fresnel-Huygens com Simetria circular

$$\mathcal{E}(x,y,z) = \frac{\mathcal{E}_0}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x',y') e^{ikz} e^{ik\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]/2z} dx' dy'$$

Com simetria circular convêm usar coordenados polares



$$x' = \rho' \cos \theta'$$
 $y' = \rho' \sin \theta'$
 $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

$$\rho / y$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$(x-x')^2 = \rho^2 \cos^2 \theta - 2\rho \rho' \cos \theta \cos \theta' + {\rho'}^2 \cos^2 \theta'$$

$$\overline{r}_{p} = z + \rho^{2} / 2z$$

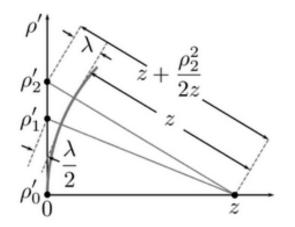
$$+ (y - y')^{2} = \rho^{2} \sin^{2} \theta - 2\rho \rho' \sin \theta \sin \theta' + \rho'^{2} \sin^{2} \theta'$$

$$(x - x')^{2} + (y - y')^{2} = \rho^{2} - 2\rho \rho' \cos(\theta - \theta') + \rho'^{2}$$

$$f(\rho') = \begin{cases} 1 & \rho' < R_a \\ 0 & \rho' \ge R_a \end{cases} \qquad \mathcal{E}(\rho, \theta, z) = \frac{\mathcal{E}_0}{i\lambda z} e^{ik\overline{r}_p} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{R_a} \rho' d\rho' \exp\left[-ik\frac{\rho \rho'}{z}\cos(\theta - \theta') + ik\frac{\rho'^2}{2z}\right] \end{cases}$$

Intensidade no eixo ótico – as Zonas de Fresnel

No eixo ótico
$$(\rho = 0)$$
 $\mathcal{E}(\rho = 0, z) = \frac{\mathcal{E}_0}{i\lambda z} e^{ikz} 2\pi \int_0^{R_a} \exp\left[i\frac{k\rho'^2}{2z}\right] \rho' d\rho'$



Considere um ponto fixo, z, no eixo ótica

A maneira que ρ' aumenta a fase $e^{ik\rho'^2/2z}$ vai oscilar. Cada vez que a diferença em fase é igual meio ciclo, o sinal inverte.

Fresnel usou este efeito para definir zonas sobre qual o sinal da fase é positiva ou negativa Zonas brancas (fase positiva) Zonas cinzentas (fase negativa)

Raios limitadores
$$\frac{{\rho_m'}^2}{2z} = m\frac{\lambda}{2}$$
 $k\frac{{\rho_m'}^2}{2z} = m\pi$ ${\rho_m'} = \sqrt{m\lambda z}$

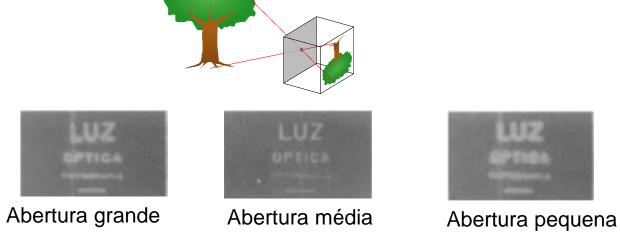
$$\frac{y'}{\sqrt{\lambda z}}$$

$$0 \quad 1 \quad \sqrt{2}$$

$$\frac{x'}{\sqrt{\lambda z}}$$

exemplo

Uma câmara obscura. A imagem abaixo demonstra o princípio de uma câmara obscura, ou câmara estenopeica, que utiliza uma abertura pequena para formar uma imagem real.



Para entender este fenómeno, considere um feixe colimado com incidência normal na abertura. Segundo a ótica geometria, quanto menor for a abertura, menor será a imagem. No entanto, devido aos efeitos de difração, quanto menor a abertura, maior será o tamanho do disco de Airy. Estime o diâmetro da abertura que resulta numa imagem mais nítida, assumindo que a distância entre abertura e o plano da imagem é 25 cm e que o comprimento de onda é 550 nm.

Resposta: D ≈ 740 μm

Difração de abertura circulares

Integral da difração de Fresnel

$$\mathcal{E}(\rho,\theta,z) = \frac{\mathcal{E}_0}{i\lambda z} e^{ik\overline{r}_p} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{R_A} \rho' d\rho' \exp\left[-ik\frac{\rho\rho'}{z}\cos(\theta-\theta') + ik\frac{\rho'^2}{2z}\right]$$

Para o caso de uma abertura circular com diâmetro D, existe 2 casos particulares onde a dependência nos termo $ho'^2/2z$.

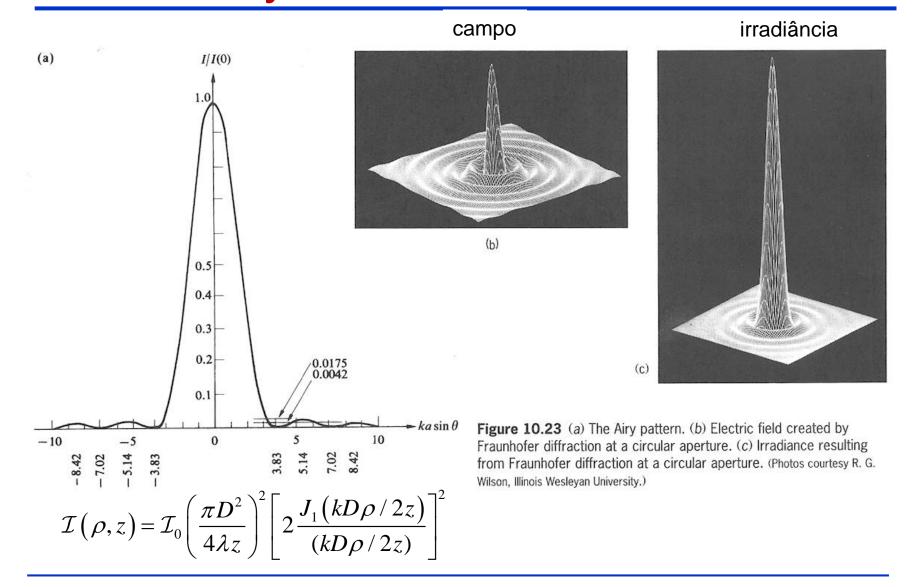
é anulada / desprezável

Caso I : Onda plana incidente, no limite Fraunhofer $N_F = \frac{D^2}{4\lambda z} \ll 1$

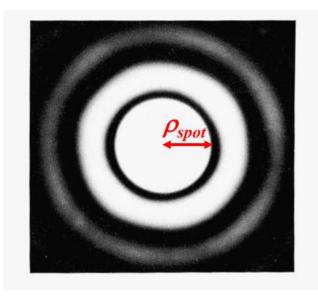
$$\frac{k\rho'^2}{2z} \le \pi \frac{D^2}{\lambda z} = 4\pi N_F \ll 1$$

$$\mathcal{E}(\rho,\theta,z) = \frac{\mathcal{E}_0}{i\lambda z} e^{ik\overline{r}_p} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{R_A} \rho' d\rho' \exp\left[-ik\frac{\rho\rho'}{z}\cos(\theta-\theta') + ik\frac{\rho^2}{2z}\right]$$

Padrão de Airy



Tamanho do spot central



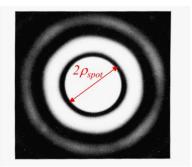
Definir o tamanho do spot centro como a distância radial do centro até o primeiro mínimo

$$\mathcal{I}(\rho,z) = \mathcal{I}_0 \left(\frac{\pi D^2}{4\lambda z}\right)^2 \left[2\frac{J_1(kD\rho/2z)}{(kD\rho/2z)}\right]^2$$

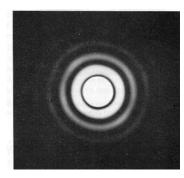
$$J_1(\xi) = 0$$
 $\xi \approx 3.83$

$$\frac{kD\rho_{spot}}{2z} = \frac{\pi D\rho_{spot}}{\lambda z} \approx 3.83$$

$$\rho_{spot} \approx \frac{3.83}{\pi} \frac{\lambda z}{D} = 1.22 \frac{\lambda z}{D}$$



Abertura menor



Abertura maior

$$\rho_{spot} \sim \frac{\lambda z}{D}$$

Característica de difração

No plano focal duma lenta

$$\mathcal{E}(\rho,\theta,z) = \frac{\mathcal{E}_0}{i\lambda z} e^{ik\overline{r}_p} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{D_L/2} f(\rho') \rho' d\rho' \exp\left[-ik\frac{\rho\rho'}{z}\cos(\theta-\theta') + ik\frac{\rho'^2}{2z}\right]$$

$$f(\rho') = \exp\left[-ik\rho'^2/2f\right]$$

No plano z = f as fases proporcionais $k \rho'^2 / 2f$ cortam

Efetivamente a lente transporta o limite z→∞ ao plano focal

$$\mathcal{E}_{lente}\left(\rho,\theta,z=f\right) = \frac{\mathcal{E}_{0}}{i\lambda f} e^{ikz-ik\rho^{2}/2f} \int_{0}^{2\pi} d\theta' \int_{0}^{D_{L}/2} \rho' d\rho' e^{\left[-ik\rho\rho'\cos(\theta-\theta')/f\right]}$$

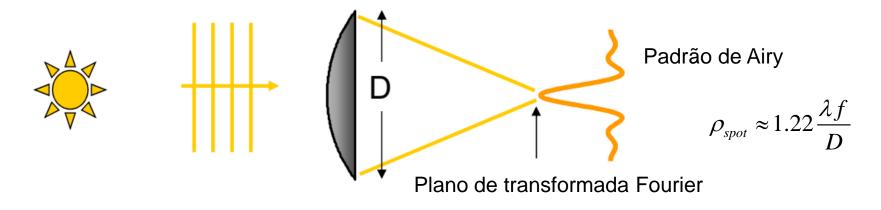
Igual ao caso I: Limite Fraunhofer $N_F = \frac{D^2}{4 \tau \lambda} \ll 1$

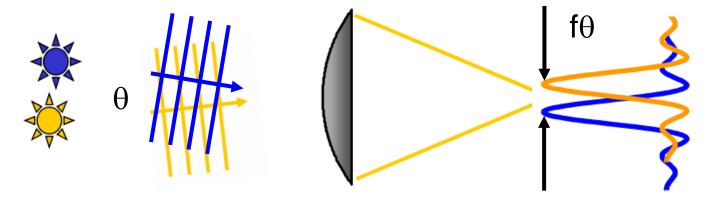
$$\mathcal{I}_{lente}\left(\rho, z=f\right) = \mathcal{I}_0 \left(\frac{\pi D^2}{4\lambda f}\right)^2 \left[2\frac{J_1(kD\rho/2f)}{(kD\rho/2f)}\right]^2$$



Limite da difração

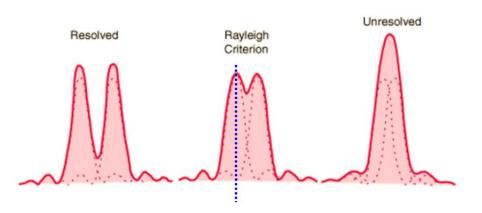
Imagine que utilize um telescópio para observar uma estrela distante





Será possível distinguir as duas estrelas?

Critério de Rayleigh



$$f\theta_{\min} = \rho_{spot} \approx 1.22 \frac{\lambda f}{D}$$

 $\theta_{\min} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$



John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh 1842 - 1919

