2º TESTE de ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA EC

9 de janeiro de 2021 duração 1h 45m

Nome ______________________ Nº __________ Curso __________

Relativamente às questões seguintes notar que nas suas respostas:

i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação da resposta, nos espaços indicados;

ii) a resolução dos sistemas de equações lineares deve ser feita pelo método de Gauss, de Gauss-Jordan ou de Cramer

iii) o cálculo de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace ou através da condensação de Gauss

1. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1/2 & 2 & -1/2 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Sem calcular o polinómio caraterístico, verifique que -5 é um valor próprio de A.

   (b) Determine os restantes valores próprios de A.

   (c) Cacule o conjunto dos vetores próprios de A associados a -5.

a) -5 é valor próprio de A se e só se $\det(A-(-5)I)=0$.

$$\det(A-5I) = \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1/2 & 7 & -1/2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{(\text{T. Laplace})}{=} 7(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = 7(9-9)=0.$$

Logo -5 é valor próprio de A.

b)
$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -2-\lambda & 0 & -3 \\ 1/2 & 2-\lambda & -1/2 \\ -3 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} -2-\lambda & -3 \\ -3 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left((-2-\lambda)^2-9\right) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+5)$$

$\det(A-\lambda I)=0 \iff \lambda=2 \lor \lambda=1 \lor \lambda=-5$.

Os restantes valores próprios de A são 2 e 1.

c) $(A+5I)X=0 \iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1/2 & 7 & -1/2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1/2 & 7 & -1/2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow 6L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3}]{} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{42}L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{Conj. Sol.} = \{(\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Logo o conjunto dos vetores próprios de A associados a -5 é

$$\left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

ou, escrito de outra forma $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\det A$.

(b) Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações e justifique a resposta com base no resultado da alínea (a):

i. $AX = 0$ é possível e determinado.

ii. $AX = B$ é possível e indeterminado para qualquer matriz coluna $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

iii. A é uma matriz invertível.

iv. 0 é um valor próprio de A.

v. No espaço $\mathbb{R}^3$, os vetores $(2, -1, -1)$, $(1, 1, 4)$ e $(3, 0, 3)$ são complanares.

vi. $\big((2, -1, -1),\ (1, 1, 4),\ (3, 0, 3)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Nota: Se a resposta for justificada de outra forma, a classificação máxima é 50% da cotação indicada.

a) $\det A = \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\det} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}}{=} 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3}{=} 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$

b i) Como $\det A = 0$, então $r(A) < 3 =$ nº de incógnitas de $AX = 0$. Logo o sistema $AX=0$ é possível e indeterminado. A afirmação é falsa.

ii) Como $AX=0$ é possível e indeterminado (b i)) podemos concluir que $AX=B$ é possível e indeterminado ou impossível. Como $r(A) < 3$ é possível escolher B de modo a que $r(A|B) = 3$ e o sistema $AX=B$ é impossível. A afirmação é falsa

iii) Se $\det A = 0$, então $r(A) < 3$ e A é não invertível. Logo a afirmação é falsa.

iv) $\det(A - 0I) = \det A = 0$. Logo 0 é valor próprio de A. A afirmação é verdadeira.

v) Como $\det A = 0$, verifica-se a seguinte igualdade usando o produto misto:

$$((2,-1,-1) \times (1,1,4)) \cdot (3,0,3) = \det A = 0$$

Entaõ $(3,0,3)$ é ortogonal a $(2,-1,-1) \times (1,1,4)$. Por sua vez $(2,-1,-1) \times (1,1,4)$ é ortogonal a $(2,-1,-1)$ e a $(1,1,4)$. Consequentemente, $(3,0,3)$ é complanar com $(2,-1,-1)$ e $(1,1,4)$.
A afirmaçã é verdadeira.

vi) Como $\det A = 0$, entaõ $r(A) < 3$ pelo que as colunas de A saõ constituidas por vetores linearmente dependentes, ou seja, $(2,-1,-1)$, $(1,1,4)$ e $(3,0,3)$ saõ três vetores linearmente dependentes. Consequentemente, $((2,-1,-1),(1,1,4),(3,0,3))$ nã é uma base. A afirmaçã é falsa.

3. Sejam $\mathcal{W} = \langle (2,1,1,1),(1,0,2,1),(0,2,0,1) \rangle$ e $\mathcal{U} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - w = 0,\ x + y = 0\}$.

(a) Calcule uma forma geral de um vetor de $\mathcal{U}$.

(b) Calcule $\dim \mathcal{U}$.

(c) Verifique se $(1,\ -1,\ 3,\ 1) \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.

a) $\begin{cases} x - w = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = x \\ y = -x \end{cases}$

$\mathcal{U} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = x,\ y = -x\} = \{(x,-x,z,x) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$

Uma forma geral dos vetores de $\mathcal{U}$ é $(x,-x,z,x)$, em que $x,z \in \mathbb{R}$.

b) $\mathcal{U} = \{x(1,-1,0,1) + z(0,0,1,0) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1,-1,0,1),\ (0,0,1,0) \rangle$

$$\dim \mathcal{U} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

c) $(1,-1,3,1) \in (\mathcal{U} \cap W)$ se e só se $(1,-1,3,1) \in \mathcal{U}$ e $(1,-1,3,1) \in W$.

Como $(1,-1,3,1)$ verifica as condições $x = w$ e $x = -y$, pois $1 = 1$ e $1 = -(-1)$, respetivamente, então $(1,-1,3,1) \in \mathcal{U}$.

$(1,-1,3,1) \in W$ se e só se $(1,-1,3,1)$ é combinação linear dos vetores que geram W, isto é, se e só se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,-1,3,1) = \alpha_1 (2,1,1,1) + \alpha_2 (1,0,2,1) + \alpha_3 (0,2,0,1).$$

Assim pretende-se saber se é possível o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Podemos então concluir que o sistema é possível, pelo que $(1,-1,3,1) \in W$.

A conclusão final é que $(1,-1,3,1) \in (\mathcal{U} \cap W)$.

4. Sendo $\mathcal{B}_3$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$, considere $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule $f(2,1,-1)$.

Como as coordenadas de $(2,1,-1)$ na base canónica B_3 são $2, 1, -1$, fazemos

$$\mathcal{M}(f; B_3, B_2) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

As coordenadas de $f(2,1,-1)$ na base B_2 são -2 e 4, ou seja,

$$f(2,1,-1) = -2(1,0) + 4(0,1) = (-2,4).$$

COTAÇÃO: **1***a*) 1 *b*) 1.5 *c*) 1.5 **2***a*) 2 *b*) 6 **3***a*) 2 *b*) 2 *c*) 2 **5** 2