1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$.

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$
   (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 2x\}$
   (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x - 3y = 1\}$
   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x - 3y = 0\}$
   (e) $E = \{\lambda(2, 1) \,:\, \lambda \geq 0\}$
   (f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x^2\}$

2. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $\langle u, v\rangle = \{\alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

3. Mostre que o conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - y - 3z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

4. Seja $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$ e seja $b \in \mathbb{R}$. Em que condições

$$\mathcal{H}_b \;\; = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, a_1x_1 + ... + a_nx_n = b\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, (\mathbf{a}|\mathbf{x}) = b\}$$

   é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$?

5. Seja $V$ um $\mathbb{R}$-espaço vectorial e sejam $A$ e $B$ dois subespaços vectoriais de $V$. Mostre que a intersecção $A \cap B$ também é um subespaço vectorial de $V$.

6. Escreva, se possível, o vetor $v = (3, 3) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear de:

   (a) $v_1 = (1, 1)$;
   (b) $v_1 = (1, 2)$;
   (c) $v_1 = (1, 2),\ v_2 = (4, 2)$;
   (d) $v_1 = (1, 1),\ v_2 = (2, 2)$;
   (e) $v_1 = (1, -1),\ v_2 = (0, 1),\ v_3 = (2, 0)$.

7. Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, os vetores $u = (1, -1, 1)$ e $v = (2, 1, -2)$. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras.

   (a) $(1, -4, 5)$ é combinação linear de $u$ e $v$.
   (b) $(1, 2, 3) \in \langle u, v\rangle$.

(c) $\{u, v\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ (isto é, $\langle u, v\rangle = \mathbb{R}^3$)

(d) $u$ e $v$ são linearmente independentes.

(e) $u$, $v$ e $w = (1, 0, 1)$ são linearmente independentes.

(f) $u$, $v$ e $(1, -4, 5)$ são linearmente independentes.

8. Para cada alínea, diga, justificando, se os vetores considerados são linearmente independentes.

   (a) $u = (1, 2)$ e $v = (1, 0)$.

   (b) $u = (1, 2)$, $v = (1, 0)$ e $w = (4, 2)$.

   (c) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-2, -4, 0)$ e $w = (-2, -1, 2)$.

   (d) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-2, -4, 0)$ e $w = (-2, -3, 2)$.

9. Mostre que as funções $f_1$ e $f_2$ dadas por $f_1(x) = \cos x$ e $f_2(x) = \operatorname{sen} x$ são dois vetores independentes do espaço vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

10. Indique se os seguintes vetores são linearmente independentes, se formam um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$ e se formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

    (a) $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 0)$

    (b) $u = (1, 2)$

    (c) $u = (-1, 2)$ e $v = (2, -4)$

    (d) $u = (0, 1)$ e $v = (-1, 0)$ e $w = (1, 1)$.

11. Em cada alínea, determine uma base do espaço vetorial considerado e indique a sua dimensão.

    (a) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x = y\}$.

    (b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x = y\}$.

    (c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - 2y + z = 0\}$.

    (d) $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - 2y + z = 0 \text{ e } z = 0\}$.

12. Usando que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, diga, justificando, se os vectores considerados formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

    (a) $u = (0, 1, 2)$ e $v = (-1, 0, 3)$.

    (b) $u = (0, 1, 2)$ e $v = (-1, 0, 3)$ e $w = (1, 1, 0)$.

    (c) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-1, 0, 3)$ e $w = (1, 1, -1)$.

    (d) $t = (-3, 2, 1)$, $u = (0, 1, 2)$, $v = (-1, 0, 3)$ e $w = (1, 1, -1)$.

13. Usando que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, diga, justificando, se os vetores considerados formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

    (a) $u = (0, 1, 2, 3)$ e $v = (-1, 0, 3, 0)$ e $w = (1, 1, 0, 0)$.
    (b) $t = (0, -3, 2, 1)$, $u = (0, 0, 1, 2)$, $v = (0, -1, 0, 3)$ e $w = (0, 1, 1, -1)$.
    (c) $t = (1, 0, 0, 0)$, $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1, 0)$ e $w = (1, 1, 1, 1)$.

14. Considere a base de $\mathbb{R}^2$ formada pelos vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (0, 1)$ (nesta ordem). Determine as coordenadas de $u = (-2, 3)$ nesta base (isto é o único par $(\alpha, \beta)$ de números reais tais que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$).

15. Sejam $u$, $v$ e $w$ três vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Mostre que se $u$, $v$ e $w$ são ortogonais 2 a 2 então são linearmente independentes. Indique generalizações deste resultado a $\mathbb{R}^n$.

16. Chamamos *base ortonormada* de $\mathbb{R}^n$ a uma base constituída de $n$ vectores ortogonais dois a dois e de norma 1. Os seguintes vectores formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$?

    (a) $u = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $v = (0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $w = (1, 0, 0)$.
    (b) $u = (0, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 1, 1)$.

17. Seja $\mathcal{P}ol_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinómios a coeficientes reais de grau 2 ou menos, isto é o conjunto dos $P(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que os seguintes polinómios $P_0$, $P_1$ e $P_2$ são linearmente indenpendentes
    $$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = x^2$$
    (b) Determine uma base de $\mathcal{P}ol_2(\mathbb{R})$. Qual a dimensão de $\mathcal{P}ol_2(\mathbb{R})$?
    (c) É verdade que os seguintes polinómios formam uma base de $\mathcal{P}ol_2(\mathbb{R})$?
    $$P(x) = 1, \quad Q(x) = 1 - x, \quad R(x) = (1 - x)^2.$$

18. Sejam $V$ um espaço vetorial e $v_1$, $v_2$, $v_3$ e $v_4$ vetores de $V$. Admita que os vetores $v_1$ e $v_2$ formam uma base de $V$.

    (a) $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto gerador de $V$?
    (b) $A$ é constituído por vetores linearmente independentes?
    (c) $B = \{v_1\}$ é um conjunto gerador de $V$?
    (d) $B$ é constituído por vetores linearmente independentes?
    (e) Seja $C$ um subconjunto de $V$ que gera $V$. Que pode dizer sobre o número de vetores de $C$?
    (f) Seja $D$ um subconjunto de $V$ constituído por vetores linearmente independentes. Que pode dizer sobre o número de vetores de $D$?
    (g) Em que condições o conjunto $E = \{v_1, v_4\}$ é um conjunto gerador de $V$?