23/11/2010 | MECÂNICA ANALÍTICA E ONDAS

PARTE I

①

a) O Lagrangeano L de um tal sistema é igual à diferença da energia cinética do sistema (T) com a energia potencial do sistema (V), sendo ambos expressos em coordenadas e velocidades generalizadas.

b) L depende de 3N − l coordenadas e velocidades generalizadas porque as N partículas do sistema formam ao todo 3N equações, pois são constituídas por 3 componentes, mas como as coordenadas generalizadas tem de ser independentes umas das outras, então a essas 3N equações terei de retirar as l equações de ligação.

c) Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1,2,3,\dots,m$$
$$m = 3N - l$$

d) Equações de Hamilton:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad e \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad , \quad j = 1,\dots,3N-l$$

A relação entre o H e o L é que

$$H = \sum_i \dot{q}_i\, p_i - L \quad e \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad \text{e por isso}$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

②

a) $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do corpo rígido num certo instante de tempo e define a direção e sentido do eixo na qual o corpo rígido faz a sua rotação.

b) Os ângulos ϕ, η e ψ denominam-se por ângulos de Euler.

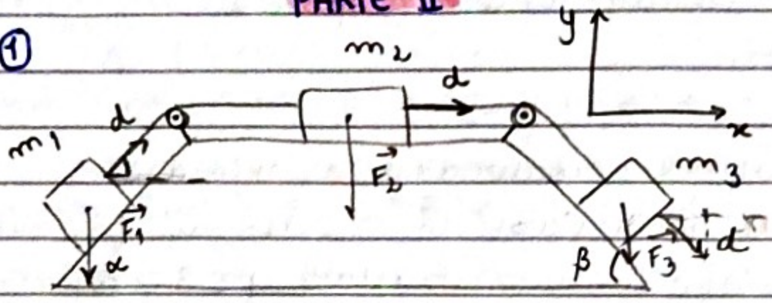
A velocidade angular $\vec{\omega}$ pode ser escrita como uma soma de vetores, $\vec{\omega} = \vec{\omega_\phi} + \vec{\omega_\eta} + \vec{\omega_\psi}$, pois representa rotações infinitesimais do corpo rígido, num certo instante de tempo.

c)

$$|\vec{\omega_\phi}| = \dot{\phi} \qquad |\vec{\omega_\eta}| = \dot{\eta} \qquad |\vec{\omega_\psi}| = \dot{\psi}$$

PARTE II

1)



$$\underbrace{\sum_i \vec{F_i} \cdot \delta \vec{r_i} = 0}_{\text{princípio dos trabalhos virtuais}}$$

$$\vec{F_1} = \vec{P_1} = -m_1 g \, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_2} = \vec{P_2} = -m_2 g \, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_3} = \vec{P_3} = -m_3 g \, \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_3 g \end{pmatrix}$$

$$\delta \vec{r_1} = d \cos(\alpha) \, \vec{e_x} + d \sin(\alpha) \, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} d \cos(\alpha) \\ d \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\delta \vec{r_2} = d \, \vec{e_x} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

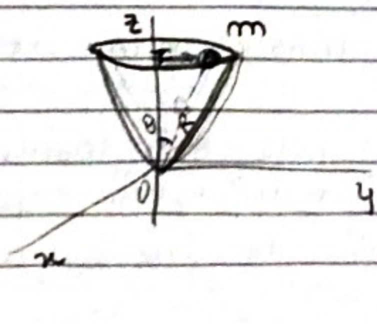
$$\delta \vec{r_3} = d \cos(\beta) \, \vec{e_x} - d \sin(\beta) \, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} d \cos(\beta) \\ -d \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_1} \cdot \delta \vec{r_1} + \vec{F_2} \cdot \delta \vec{r_2} + \vec{F_3} \cdot \delta \vec{r_3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -m_1 \cancel{g} \cancel{d} \sin(\alpha) + 0 + m_3 \cancel{g} \cancel{d} \sin(\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-m_1 \sin(\alpha) + m_3 \sin(\beta) = 0}_{\text{para o sistema estar em equilíbrio}}$$

2)

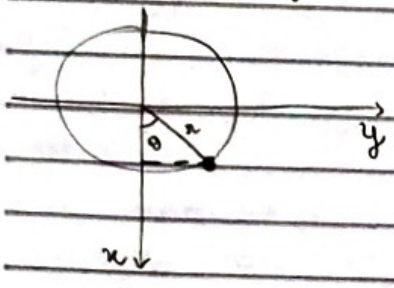


$$z = a(x^2 + y^2) + c$$

a) Como este sistema é constituído por apenas uma partícula e temos uma equação de ligação, então $3 \times 1 - 1 = 2$ graus de liberdade, e por isso, 2 coordenadas generalizadas

b)

$L = T - V$ $\qquad \{q_j\} = \{r, \theta\}$



$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$z = a\left(r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)\right) + c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = ar^2 + c$$

$\hookrightarrow V = mgz = mg(ar^2 + c)$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$\dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) - \dot{\theta} r \sin(\theta) \qquad z = 2ar$

$\dot{y} = \dot{r}\sin(\theta) + \dot{\theta} r \cos(\theta)$

$\hookrightarrow T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2(\theta) - \cancel{2\dot{r}r\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta)} + \dot{\theta}^2 r^2 \sin^2(\theta) + \right.$

$\left. + \dot{r}^2\sin^2(\theta) + \cancel{2\dot{r}r\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta)} + \dot{\theta}^2 r^2\cos^2(\theta) + 4a^2r^2\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 + 4a^2r^2\right)$$

Logo,

$$L = T - V \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 + 4a^2r^2 + 2gar^2 + 2c\right)$$

c)

θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{\theta}r^2\right) - 0 = 0 \Leftrightarrow \cancel{m}\ddot{\theta}r^2 + \cancel{m}\dot{\theta}\,2r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}r^2 + 2\dot{\theta}r = 0$$

r

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) - \left(m\dot{\theta}^2 r + m4a^2r + m2gar\right) = 0 \iff$$

$$\iff \cancel{m}\ddot{r} - \cancel{m}\dot{\theta}^2 r - 4\cancel{m}a^2 r - 2gar = 0 \iff$$

$$\iff \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - 4a^2 r - 2gar = 0$$