Física Quântica II   Conjunto 3 para entregar no dia 4 de Novembro,2013

1. Considere um oscilador anarmónico com o Hamiltoniano: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\lambda\hat{x}^4$.

   (a) Usa a função de prova gaussiano $\psi(x) = \left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\alpha^2 x^2\right]$ para estimar a energia do estado fundamental.

   Ajuda dum amigo matemático: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 \exp(-x^2) = \left(3\sqrt{\pi}\right)/4$

   (b) O valor exata da energia do estado fundamental é $1,060\lambda^{1/3}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{2/3}$. Com recurso a teorema de Feynman-Hellmann estimar $\langle \hat{p}^2 \rangle$ e $\langle \hat{x}^4 \rangle$. O resultado está de acordo com a previsão da teorema virial quântica?

2. **Tamanho finita do núcleo** Um dos efeitos que se altera ligeiramente a energia dos níveis do átomo de hidrogénio é a influência do tamanho finito do protão. Medidas de difusão indicam que o tamanho dum protão é aproximadamente $b = 1.3\,fm$ (f=10^{-15}) Para simplicidade, assumir que a carga do protão é uniformemente distribuída numa esfera de raio b. Mostrar que a energia potencial de um eletrão no campo elétrico criado pelo núcleo passa ser

$$U(r) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\ \textit{quando}\ r \geq b \quad \textit{ou} \quad \frac{+e^2}{4\pi\varepsilon_0 b}\left[\frac{r^2}{2b^2} - \frac{3}{2}\right] \ \textit{quando}\ r < b$$

Invocando a teoria de perturbação da primeira ordem, estimar o desvio da energia do estado fundamental de hidrogénio (1S). Qual é a comparação numérica entre este desvio e a grandeza da energia do estado fundamental (não perturbado)? Entre este desvio e a grandeza do efeito Hiperfina? Qual seria o resultado para os estados 2P? Lembrar que $b \ll a_0$, o que permite uma simplificação considerável das integrais relevantes!

$$|\psi_{1s}\rangle = \sqrt{\frac{1}{4\pi a_o^3}} e^{-r/2a_0}; \quad |\psi_{2p,0}\rangle = \sqrt{\frac{1}{32\pi a_o^5}} r\cos\theta e^{-r/2a_0}; \quad |\psi_{2p,\pm1}\rangle = \sqrt{\frac{1}{64\pi a_o^5}} rsen\theta e^{\pm i\phi} e^{-r/2a_0}$$

3. **A potencial de Van der Waals** - Considere dois átomos idênticos separados por uma distância, R. Uma vez que os átomos são eletricamente neutrais poderia esperar que não haverá nenhuma força elétrica entre eles. No entanto, como os átomos são polarizáveis, existe uma força fraca e atrativa. Para entender a origen desta força, considere um modelo muito simples em que cada átomo é representada como um eletrão (de massa *m* e carga –*e*) ligado ao seu núcleo (de carga +*e*) através uma mola com um constante de força *k*. Para simplificar as contas podem assumir que os núcleos são suficientemente pesados que não se deslocam.

O Hamiltoniâno que descreve os “átomos” independentes pode ser escrito como :

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}_1^2 + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}_2^2$$

enquanto a interação entre estes “átomos”, (o Hamiltoniano da perturbação) , será

$$\hat{H}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R-x_1} - \frac{e^2}{R+x_2} + \frac{e^2}{R-x_1+x_2}\right)$$

(a) Mostre que para $R \gg x_1, x_2$ o Hamiltoniano, $\hat{H}_P$ se reduz a $\hat{H}_P \approx -\left(e^2 2x_1x_2\right)/\left(4\pi\varepsilon_0 R^3\right)$.

Pista: para $|\varepsilon \ll 1|$ $(1\pm\varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon + n(n-1)\varepsilon^2/2 \pm ...$

(b) Utilizar a teoria de perturbação para achar a primeira correção não nula a energia do estado fundamental do sistema devida a perturbação da alínea anterior.
Pista: Considere o uso dos operadores de aniquilação e criação do oscilador harmónico.