Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Exercícios

Exercício 24: *Absorção por um oscilador*

Considere um oscilador harmónico em uma dimensão, descrito por um Hamiltoniano, $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + 1/2\right)$. Suponha que o estado próprio deste sistema a $t = 0$ é o estado próprio $|n\rangle$, tal que $\hat{n}_0 |n\rangle = n |n\rangle$, em que, $\hat{n}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$, é o operador número de ocupação do oscilador.

Assuma que este sistema é perturbado por um campo elétrico sinusoidal a partir deste momento, sendo a perturbação dada por $\hat{H}_1(t) = -q\mathcal{E}_0 \hat{x} \cos(\omega t)$, onde q é a carga do oscilador, $\mathcal{E}_0$ a magnitude do campo elétrico, ω a sua frequência e onde $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger)$ é o operador de posição.

a) Mostre que a amplitude de transição do estado inicial $|n\rangle$ para um estado final $|m\rangle$ é genericamente dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{n\to m}(t) \quad = \quad & \frac{iq\mathcal{E}_0}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^{1/2} \left(\sqrt{n+1}\, \delta_{m,n+1} \int_0^t du \cos(\omega u) e^{i\omega_0 u} \right. \\ & \left. + \sqrt{n}\, \delta_{m,n-1} \int_0^t du \cos(\omega u) e^{-i\omega_0 u} \right) \end{aligned} \tag{72}$$

b) Considere agora que o sistema se encontra no estado fundamental, ou seja $n = 0$. Mostre que a probabilidade de absorção de um quanta de energia é dada por

$$\begin{aligned} p(t) \quad = \quad & \frac{q^2\mathcal{E}_0^2}{2m\hbar\omega_0} \left\{ \frac{\sin^2[(\omega_0+\omega)t/2]}{(\omega_0+\omega)^2} + \frac{2\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin[(\omega_0+\omega)t/2] \sin[(\omega_0-\omega)t/2] \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \right\} . \end{aligned} \tag{73}$$

Exercício 25: *Função de Green em 1d e potencial duplo delta-de-Dirac*

Verificamos na aula teórica qual a expressão para a função de Green de uma partícula livre em 3d. O objetivo deste exercício é repetir a análise em uma dimensão.

a) Comece por considerar o caso de estados ligados, ou seja, energia $E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} < 0$. Mostre que $G_\kappa(x - x') = -\frac{e^{-\kappa|x-x'|}}{2\kappa}$ obedece à equação

$$\frac{d^2 G_\kappa}{dx^2} - \kappa^2 G_\kappa = \delta(x - x'). \tag{74}$$

Pista: Escreva $G_\kappa(x - x') = -\frac{1}{2\kappa}\left[e^{-\kappa(x-x')}\theta(x - x') + e^{\kappa(x-x')}\theta(x' - x) \right]$, em que $\theta(x)$ é a função escada, com $\theta'(x) = \delta(x)$.

b) Mostre, utilizando a equação (74), que a equação de Schrödinger para uma partícula em 1d se pode escrever como

$$\psi(x) = -\frac{m}{\hbar^2 \kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, e^{-\kappa|x-x'|} V(x')\psi(x'), \tag{75}$$

em que $V(x)$ é o potencial que atua sobre a partícula.

c) Considere agora o potencial duplo delta-de-Dirac, $V(x) = \frac{V_0}{2}[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$. Substituindo na equação acima, obtenha a equação para $\psi(x)$ em termos de $\psi(-a)$ e $\psi(a)$. Como esta equação é válida também para $x = \pm a$, obtenha um sistema homogéneo de duas equações a duas incógnitas, que só tem solução quando o determinante associado se anula.

No entanto, como o potencial é uma função par, o Hamiltoniano comuta com o operador paridade $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$, pelo que podemos sempre escolher as funções próprias como pares ou ímpares. Mostre que a função própria par dá origem à equação de valores próprios, $\kappa_+(1 + \tanh(\kappa_+ x)) = -\frac{mV_0}{\hbar^2}$, e a função ímpar à equação de valores próprios $\kappa_-(1 + \coth(\kappa_- x)) = -\frac{mV_0}{\hbar^2}$. Mostre ainda que estas equações só têm solução se $V_0 < 0$, que $\kappa_+ > \kappa_-$, e logo que $E_+ < E_-$, e que a segunda equação só tem solução se $|V_0| > \frac{\hbar^2}{ma}$.

d) Considere agora o prolongamento analítico a energias positivas, $\kappa = -ik$. A equação (75) escreve-se como

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, e^{ik|x-x'|} V(x')\psi(x'), \tag{76}$$

onde está incluída a possibilidade de soluções propagantes provenientes de $x = -\infty$ (poderíamos igualmente considerar a possibilidade de soluções provenientes de $x = +\infty$, isto tem apenas que ver com as condições-fronteira escolhidas), que são soluções da equação de Schrödinger na ausência de um potencial.

Mostre que se o potencial se anular fora de uma região de tamanho $2L$ em torno de 0, então $\psi(x) = t(k)e^{ikx}$ para $x \geq L$, e $\psi(x) = e^{ikx} + r(k)e^{-ikx}$ para $x \leq L$, em que

$$t(k) = 1 + \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-L}^{+L} dx'\, e^{-ikx'} V(x')\psi(x'), \tag{77}$$

$$r(k) = \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-L}^{+L} dx'\, e^{ikx'} V(x')\psi(x'). \tag{78}$$

e) Considere agora o potencial duplo delta-de-Dirac introduzido acima. Substituindo-o nas equações (77) e (78), obtenha duas equações lineares para $t(k)$ e $r(k)$ em temos de $\psi(-a)$ e $\psi(a)$ (obviamente, aqui $L = a$). Como $\psi(-a) = e^{-ika} + r(k)e^{ika}$ e $\psi(a) = t(k)e^{ika}$, obtenha um sistema de duas equações a duas incógnitas para $t(k)$ e $r(k)$, e mostre que a sua solução é dada por

$$t(k) = \frac{1}{\left(1 + \frac{imV_0}{2\hbar^2 k}\right)^2 + \frac{m^2 V_0^2}{4\hbar^4 k^2} e^{4ika}}, \tag{79}$$

e por

$$r(k) = -\frac{imV_0}{\hbar^2 k} \cdot \frac{\cos(2ka) + \frac{mV_0}{2\hbar^2 k}\sin(2ka)}{\left(1 + \frac{imV_0}{2\hbar^2 k}\right)^2 + \frac{m^2 V_0^2}{4\hbar^4 k^2} e^{4ika}}. \tag{80}$$

f) Mostre que $|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1$.

g) Mostre que $t(k)$ e $r(k)$ têm pólos para $k = i\kappa$, onde κ é dado pelas duas soluções $\kappa_\pm$ obtidas acima.

Exercício 26: *Aproximação de Born e teorema ótico*

Vimos que na aproximação de Born, $f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}V(q)$, onde $V(q)$ (com $q = 2k_i \sin^2(\theta/2)$) é a transformada de Fourier do potencial, sendo que $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$.

Ao mesmo tempo, esta quantidade, que é sempre positiva, integrada sobre todo o ângulo sólido, é igual à seção eficaz total que, de acordo com o teorema ótico, é igual a $\sigma = \frac{4\pi}{k}\text{Im}(f(0))$.

No entanto, $f(0) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}V(0)$ na aproximação de Born, que é uma quantidade real, e logo $\sigma = 0$! Como resolver esta contradição?

Pista: Lembre-se que a aproximação de Born é uma aproximação em série no potencial de espalhamento $V(q)$, e dê uma olhadela à solução do problema 20.

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt