Teste Modelo Álgebra Linear e Geometria Analítica

1. Seja X um espaço euclidiano. $Y \subset X$ é um subespaço e $x \in X$ é um vetor. Encontre a distância entre x e Y.

Tomemos o seguinte exemplo:

vetor $(2,4,0,-1)$ subespaço $\rightarrow$ $2x_1+2x_2+x_3+x_4=0$
$2x_1+4x_2+2x_3+4x_4=0$

1º passo. Encontrar a base de vetores do subespaço definido pelo sistema.

Para tal, aplica-se o método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 \rightarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad L_1 \rightarrow L_1 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$ x_3 e x_4 são variáveis livres (seja $\alpha = x_3$ e $\beta = x_4$)

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\beta = 0 \\ 2x_2 + \alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta \end{cases}$$

Os vetores deste subespaço são da forma

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\beta, -\alpha/2 - 3\beta/2, \alpha, \beta)$

$= (0; -\alpha/2; \alpha; 0) + (\beta; -3\beta/2; 0; \beta)$

$= \alpha \underbrace{(0, -1/2; 1; 0)}_{b_1} + \beta \underbrace{(1; -3/2; 0; 1)}_{b_2}$

Ou seja, são uma combinação linear dos vetores $(0,-1/2,1,0)$ e $(1,-3/2,0,1)$. Logo, este subespaço é dado por

$Lin\{(0,-1/2;1,0);(1,-3/2,0,1)\}$

2º passo - determinar a distância

A distância entre um vetor e um dado subespaço é dada por:

$$\delta^2 = \frac{G(b_1, b_2, \dots, b_n, V)}{G(b_1, \dots, b_n)}$$

$v \to$ vetor

$\{b_1, \dots, b_n\}$ base do subespaço

Logo, sendo $b_1 = (0; -1/2; 1; 0)$ e $b_2 = (1; -3/2; 0; 1)$ e $V = (2, 4, 0, -1)$, temos que:

$$\delta^2 = \frac{G(b_1, b_2, V)}{G(b_1, b_2)}$$

$$G(b_1, b_2) = \det \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 17/4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{17}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{19}{4}.$$

$$G(b_1, b_2, V) = \det \begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \langle b_1, V \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \langle b_2, V \rangle \\ \langle V, b_1 \rangle & \langle V, b_2 \rangle & \langle V, V \rangle \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 & -2 \\ 3/4 & 17/4 & -5 \\ -2 & -5 & 21 \end{bmatrix} = \frac{266}{4}$$

$$\delta^2 = \frac{266}{4} \times \frac{4}{19} \Leftrightarrow \delta^2 = 14 \Leftrightarrow \delta = \sqrt{14}$$

Nota: $\langle b_1, b_1 \rangle = \langle (0, -1/2, 1, 0) . (0, -1/2, 1, 0) \rangle = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

soma das multiplicações

2. Encontre os valores e vetores próprios da matriz dada.

Tomemos o exemplo da seguinte matriz A:

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 & -20 \\ -2 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Seja o determinante da matriz seguinte 0 (assumindo que λ são os valores próprios da matriz A):

$$\det\begin{bmatrix} 7-\lambda & 10 & -20 \\ -2 & -2-\lambda & 8 \\ 2 & 4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (7-\lambda)[(-2-\lambda)(-3-\lambda)-8\times 4] - 10(-2(-3-\lambda)-8\times 2)$$
$$-20[-2\times 4 - 2\times(-2-\lambda)] = 0$$
$$\Leftrightarrow (7-\lambda)(6+2\lambda+3\lambda+\lambda^2-32)-10(6+2\lambda-16)$$
$$-20(-8+4+2\lambda)=0$$
$$\Leftrightarrow (7-\lambda)(\lambda^2+5\lambda-26)-10(2\lambda-10)-20(-4+2\lambda)=0$$
$$\Leftrightarrow (7\lambda^2+35\lambda-182-\lambda^3-5\lambda^2+26\lambda-20\lambda+100+80-40\lambda=0$$
$$\Leftrightarrow -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1 \vee \lambda=1 \vee \lambda=2$$

Assim encontrei os valores próprios da matriz A, que são -1, 1 e 2, e para os quais a condição $A\lambda = \lambda v$ é verdadeira.

Aplicarei agora o método de Gauss para achar os vetores próprios da matriz A:

Para $\lambda=-1$,

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & -20 \\ -2 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad L_2 \to L_2 + \frac{L_1}{4} \qquad L_3 \to L_3 - \frac{L_1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & -20 \\ 0 & 3/2 & 3 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{bmatrix} \quad L_3 \to L_3 - L_2 \quad \begin{bmatrix} 8 & 10 & -20 \\ 0 & 3/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui, retiramos as equações:

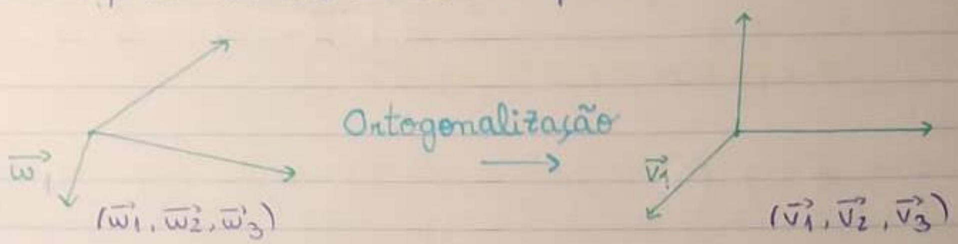
$$8x+10y-20z=0 \qquad \text{Seja } z=1$$
$$\frac{3}{2}y+3z=0 \qquad \frac{3}{2}y=-3 \Leftrightarrow y=-2 \quad 8x=20-10\times 2 \Leftrightarrow 8x=40 \Leftrightarrow x=5$$

Então, para $\lambda=-1$, o vetor próprio é $(5,-2,1)$.

(fazer o mesmo para $\lambda=1$ e $\lambda=2$)

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Método de transformar qualquer base do espaço vetorial em base ortogonal ou ortonormal. Exemplo:



$\vec{w_1} = \vec{v_1}$ $\quad\quad$ $\vec{v_2} = \vec{w_2} - \underbrace{\frac{\langle \vec{w_2}, \vec{v_1} \rangle}{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1} \rangle}}_{*1} \vec{v_1}$ $\quad\quad$ $\vec{v_3} = \vec{w_3} - \underbrace{\frac{\langle \vec{w_3}, \vec{v_1} \rangle}{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1} \rangle}}_{*2} \vec{v_1} - \underbrace{\frac{\langle \vec{w_3} \cdot \vec{v_2} \rangle}{\langle \vec{v_2} \cdot \vec{v_2} \rangle}}_{*3} \vec{v_2}$

. Tendo n vetores 'tortos', considera-se que 1 deles (neste caso o $\vec{w_1}$) já esta 'desentortado'.

* Note-se que 1) é a projeção do $\vec{w_2}$ no $\vec{v_1}$.

2) projeção de $\vec{w_3}$ em $\vec{v_1}$

3) projeção de $\vec{w_3}$ em $\vec{v_2}$

Fórmula da projeção:

$$\left.\mathrm{proj}_{\vec{y}}\vec{x} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{y}|^2}\vec{y}\ \right\}\text{ projetar } \vec{x} \text{ em } \vec{y}$$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| . |\vec{y}| . \cos\varphi$ $\quad\quad\quad$ $\varphi = \angle(\vec{x}, \vec{y})$

Ex. sejam $x_1 = (1,0,2,1)$, $x_2 = (0,1,0,1)$, $x_3 = (1,1,1,1)$ os vetores que queremos ortogonalizar. Os resultados serão y_1, y_2 e y_3.

Assuminos que: $y_1 = x_1$

Logo, $y_1 = (1,0,2,1)$

Assim,

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{|y_1|^2} y_1$$

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{|y_1|^2} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{|y_2|^2} y_2$$

C.A. $y_2 = (0,1,0,1) - \frac{\langle (0,1,0,1), (1,0,2,1) \rangle}{(\sqrt{1^2+0^2+2^2+1^2})^2} . (1,0,2,1)$

$\Leftrightarrow y_2 = (0,1,0,1) - \frac{1}{6}(1,0,2,1) \Leftrightarrow y_2 = (0, 6/6, 0, 6/6) - (1/6, 0, 2/6, 1/6)$

$\Leftrightarrow y_2 = (-1/6, 1, -1/3, 5/6)$

$y_3 = (1,1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1,1), (1,0,2,1) \rangle}{6} (1,0,2,1) - \frac{\langle (1,1,1,1), (-1/6, 1, -1/3, 5/6) \rangle}{11/6} (-1/6, 1, -1/3, 5/6)$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$|<x,y>| \leq |x|\,|y|$ $\qquad$ $|x+y| \leq |x|+|y|$

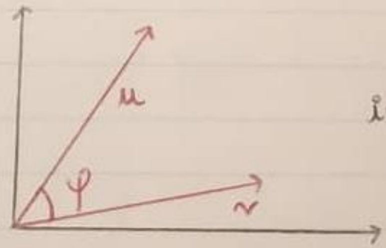
A desigualdade garante que, para quaisquer 2 vetores x e y de um espaço vetorial, tem-se que:

$$<x,y>^2 \leq <x,x> \cdot <y,y>$$

Note-se que:

Só se e só se x e y forem linearmente dependentes é que se verifica a igualdade. Linearmente dependentes $\Rightarrow$ paralelos $\Rightarrow$ ângulo entre eles é $0 \Rightarrow \cos 0° = 1 \Rightarrow |a||b| \cos\varphi \; (\varphi=0) = |a||b|\cos 0° = |a||b|$.

Analisemos os seguintes casos: (em R^2)



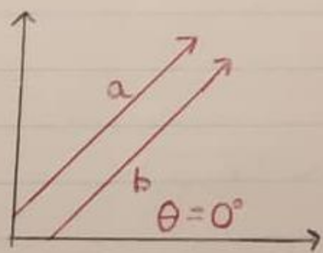
Neste caso, vemos que u e v são linearmente independentes pois $\alpha u + \beta v = 0 \Rightarrow \alpha, \beta = 0$.

Assim, formam entre si um ângulo φ.

$\cos\varphi$ não é, neste caso, um.

Assim, $<u,v> = |u||v| \cos\varphi$

Como $0 \leq \cos\varphi \leq 1$, $|<u,v>| \leq |u||v|$



Neste caso, a e b são linearmente dependentes pois são paralelos. Assim, $\theta = 0°$.

$<a,b> = |a||b| \cos 0°$

Como $\cos 0° = 1$, $<a,b> = |a||b|$

Note-se que $<c,d> = 0$ se $c \perp d$ $(\cos 90° = 0)$.

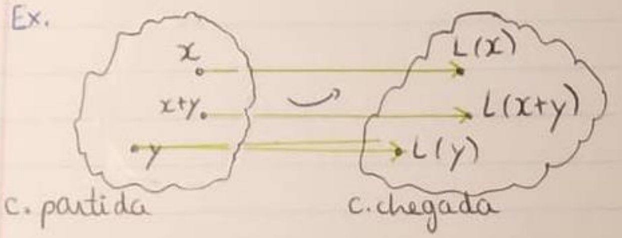
Transformações Lineares

$L: X \to Y$ ↪ a transformação "pega" em elementos de um espaço vetorial e leva-os para outro espaço vetorial

Obedecem às seguintes propriedades:

$$L(x+y) = L(x) + L(y)$$

Ex.



$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \to (y,x)$

$$L(\alpha x) = \alpha L(x) \Rightarrow L(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L(x_k)$$

Espaço Euclidiano

Espaço linear X no qual está definida a função produto escalar e se verificam as seguintes condições:

→ $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
→ $\langle x+y, z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$
→ $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$
→ $\langle x,x \rangle \geqslant 0$
→ $\langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Conceito de Base e Independência Linear

Uma base é um conjunto de vetores que gera todo o espaço. Não podem ser paralelos nem coincidir e têm de ser geradores e linearmente independentes.

$\alpha u + \beta v \Rightarrow \alpha, \beta = 0 \}$ condição de independência linear

A base é o nº mínimo de vetores que geram o espaço e são linearmente independentes e isso é o número da dimensão.

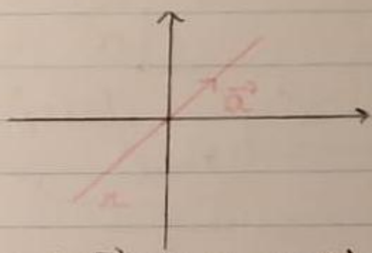
Em $\mathbb{R}^n$, n vetores linearmente independentes formam base.
$n-1$ vetores não são geradores
$n+1$ vetores não são linearmente independemdentes

Espaços Vetoriais / Lineares

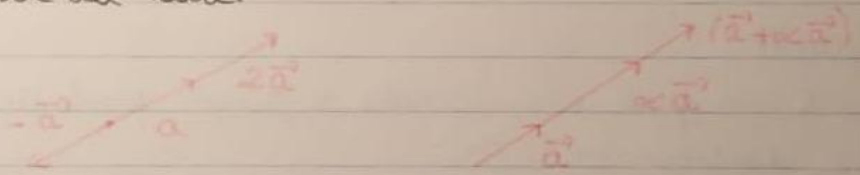
$X \rightarrow$ espaço vetorial
↳ conjunto fechado por soma e multiplicação por um escalar,
↳ o vetor nulo pertence ao espaço vetorial

Tendo-se que $v \in X$ e $w \in X$, então $(v+w) \in X$ e $(\alpha v) \in X$
Em $\mathbb{R}^2$, as retas que passam pela origem são espaços vetoriais.
Exemplos:

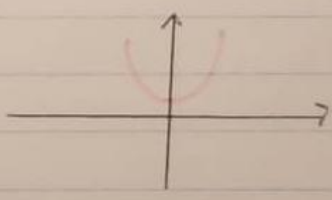
vetor $(1,2)$
reta $\rightarrow (x,y) = \lambda (1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
vetor diretor



Isto é um espaço vetorial:
→ o vetor nulo pertence ao espaço ($\alpha \vec{a} = 0$ se $\alpha = 0$) → α ≡ escalar
→ $\alpha \vec{a}$, qualquer que seja o valor de α, pertence à reta r
→ qualquer soma que se faça usando vetores da reta resulta num vetor da reta.

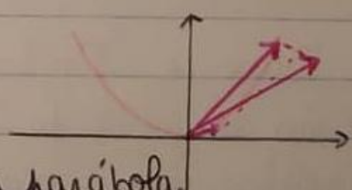


. Analisemos agora o caso de parábolas:



→ Não é espaço linear pois o vetor nulo (ponto $(0,0)$) não pertence à parábola.

Apesar de conter o vetor nulo, não é espaço linear pois a soma de vetores da parábola não resulta em vetores da parábola.



Em suma, X é espaço linear/vetorial se e só se:
. $\vec{0} \in X$
. se $\vec{v} \in X$ e $\vec{w} \in X$, então $(v+w) \in X$ e $(\alpha v) \in X$ e $(\alpha w) \in X$

Determinante de Vandermond

Identificar matriz Vandermond:

→ tem de ter uma linha toda com o elemento 1

→ a linha base (linha abaixo da linha com elemento 1) origina as restantes linhas, elevando os seus elementos ao quadrado, ao cubo, e assim consecutivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$ → exemplo de matriz Vandermond

Calcular determinante da matriz Vandermond:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}$$ $\det A = (y-x).(z-x).(z-y)$

Valores e Vetores Próprios

No espaço linear, designa-se vetor próprio da matriz A:

$$Av = \lambda v$$

λ corresponde ao valor próprio que corresponde ao vetor próprio v.
Os vetores correspondentes aos valores próprios diferentes são linearmente independentes.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0$$

Caso 1. Quando os coeficientes de grau 1 são 0 ($ax^2 + 2bxy + cy^2 + g = 0$)

ex. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0$

1. Escrever a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Determinar os seus valores próprios/autovetores

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6 - 7\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 \vee \lambda_1 = 6$$

3. Representar as novas coordenadas

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6x'^2 + y'^2 = 1 \Leftrightarrow x'^2 + \frac{y'^2}{6} = 1 \quad \to \text{Elipse}$$

Caso 2. Quando xy não existe (produto misto é 0) ($ax^2 + cy^2 + dx + fy + g = 0$)

. Completar os quadrados

.ex. $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2y^2 - 4y + 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2(y^2 - 2y) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2(y^2 - 2y + 1) + 0 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2(y-1)^2 = 0$

Seja

$x' = x + 1 \qquad y' = y - 1$

Então,

$x'^2 + 2y'^2 = 0$ (um ponto, a origem)

Caso 3. Equação completa ($ax^2+2bxy+cy^2+dx+fy+g=0$)

ex. $x^2+4xy+y^2+x-y-1=0$

1. Escrever matriz A

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Encontrar valores próprios de A

$$\det(A-\lambda)=0 \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2-4=0 \Leftrightarrow 1-2\lambda+\lambda^2-4=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0 \Leftrightarrow \lambda_1=3 \vee \lambda_2=-1$$

3. Calcular autovetores (vetores próprios) de A

Para $\lambda=3$
$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} L_2\to L_2+L_1 \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{seja } y=1, -2x=-2 \Leftrightarrow x=1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=-1$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} L_2\to L_2-L_1 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{seja } x=1, 2y=-2 \Leftrightarrow y=-1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Normalizar (dividir pela norma)

$$|a|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

5. Representá-las na forma matricial

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M=\frac{1}{\text{norma}}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$2\,y\,a=\sqrt{2}\,y \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

6. Temos que: $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$, ou seja, $3x'^2-y'^2$. Restam-nos agora descobrir os de 1º grau:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \qquad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \quad y=\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}x''}{2}-\frac{y''}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Nesta base, a equação canónica fica:

$$3x'^2-y'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')-\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')-1=0 \Leftrightarrow 3x'^2-y'^2+\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}=1$$
$$\Leftrightarrow 3x'^2-(y'^2-\sqrt{2}y')=1 \Leftrightarrow 3x'^2-\left(y'^2-\sqrt{2}y'+\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3x'^2-\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

7. Aplicar mudança de coordenadas

$x''=x'$

$y''=y'-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$3x''^2-y''^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 6x''^2-2y''^2=1 \qquad y=\frac{\sqrt{2}}{2}x''-\frac{\sqrt{2}}{2}y''+\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''+y''+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{x''}{\sqrt{2}}+\frac{y''}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x''+\frac{\sqrt{2}}{2}y''+\frac{1}{2}$$

Tipos de Quádricas

++1 1 Elipsoide $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$

+-1 2 Hiperbolóide de uma folha $ax^2 + by^2 - cz^2 - 1 = 0$

--1 3 Hiperbolóide de duas folhas $ax^2 - by^2 - cz^2 - 1 = 0$

+-z 4 Parabolóide Elíptico $ax^2 + by^2 - z = 0$

--z 5 Parabolóide Hiperbólico $ax^2 - by^2 - z = 0$

+-z² 6 Cone Elíptico $ax^2 + by^2 - z^2 = 0$

+-1 7 Cilindro Elíptico $ax^2 + by^2 - 1 = 0$

--1 8 Cilindro Hiperbólico $ax^2 - by^2 - 1 = 0$

-y 9 Cilindro Parabólico $ax^2 - y = 0$

3. Encontre a mudança de coordenadas que permite diagonalizar simultaneamente as formas quadráticas com as matrizes dadas.

Sejam as matrizes dadas $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -17/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

. Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Vamos escrever a sua equação:

$$5x^2 + 2xy + 2y^2 = 5\left(x^2 + \frac{2}{5}xy + \frac{2}{5}y^2\right)$$

$$= 5\left(x^2 + \frac{2}{5}xy + \left(\frac{y}{5}\right)^2\right) - \frac{1}{5}y^2 + 2y^2$$ → Completar o quadrado com termo em y

$$= 5\left(x + \frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{9}{5}y^2 = \left(\sqrt{5}\,(x + y/5)\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}y\right)^2$$

. Mudança de variável

Seja $x' = \sqrt{5}\,(x + y/5)$ $\quad y' = \frac{3}{\sqrt{5}}y$

. Forma matricial

$$P = \sqrt{5}\begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

valores de x em x' e y' valores de y em x' e y'

. Escrita da forma quadrática

$x'^2 + y'^2$

Sabemos assim que a mudança de coordenadas que diagonaliza A tem como matriz P^{-1}:

. Cálculo da matriz inversa de P

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \operatorname{adj} A \quad \Leftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3\sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/5 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/15 \\ 0 & \sqrt{5}/3 \end{bmatrix} & & \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \\ x' \quad\quad y' & & \end{array}$$

$$\det P = \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}.3}{5} - 0 = \frac{5.3}{5} = 3$$

Matriz complementos Algébricos:

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3\sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/5 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad . \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \beta = -1.\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \theta = -1.0 \quad \delta = 1.\sqrt{5}$$
$$\begin{array}{cc} \theta & \delta \end{array}$$

Mudança de coordenadas para matriz A

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{15}y' \qquad y = \frac{\sqrt{5}}{3}y'$$

Concluída a primeira etapa, é necessário mudar a forma quadrática $B = \begin{bmatrix} -17/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ para esta nova base:

$$(P^{-1})^T . B . P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & 0 \\ -\sqrt{5}/15 & \sqrt{5}/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -17/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/15 \\ 0 & \sqrt{5}/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -17/10 & 9/10 \\ 9/10 & 7/10 \end{bmatrix} = C$$

Seja esta nova matriz a matriz C.

. Cálculo dos valores próprios de C

$$\det \begin{bmatrix} -17/10-\lambda & 9/10 \\ 9/10 & 7/10-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{17}{10}-\lambda\right)\left(\frac{7}{10}-\lambda\right) - \frac{81}{100} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{119}{100} + \frac{17}{10}\lambda - \frac{7}{10}\lambda + \lambda^2 - \frac{81}{100} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \lor \lambda_2 = -2$$

. Cálculo dos vetores próprios de C

se $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -27/10 & 9/10 \\ 9/10 & -3/10 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to 10L_1 \\ L_2 \to 10L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} -27 & 9 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + \frac{L_1}{3} \begin{bmatrix} -27 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-27x = -9y \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y$$

vetores próprios são da forma $K(1,3)$

se $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 9/10 \\ 9/10 & 27/10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 3L_1 \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3x + 9y = 0 \\ \Leftrightarrow x = -3y \end{matrix}$$

Os vetores próprios são da forma $K(-3,1)$ para $\lambda = -2$.
Escolhemos $K = 1$ para ambos os casos.
$(1,3)$ e $(-3,1)$ são ortogonais.

cada vetor próprio é coluna

. Normalização dos vetores

$$|(1,3)| = |(-3,1)| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$

Assim, a matriz que diagonaliza a forma quadrática C é

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x' \\ y' \end{array}$$

Forma quadrática $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Mudança de coordenadas para matriz B

$$x' = \frac{x''}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}y'' \qquad y' = \frac{3x''}{\sqrt{10}} + \frac{y''}{\sqrt{10}}$$

Mudança de coordenadas que diagonaliza ambas as formas quadráticas

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{15}y' \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{x''}{\sqrt{10}} - \frac{3y''}{\sqrt{10}}\right) - \frac{\sqrt{5}}{15}\left(\frac{3x''}{\sqrt{10}} + \frac{y''}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\cancel{\sqrt{2}x''}}{10} - \frac{3\sqrt{2}}{10}y'' - \frac{\cancel{3\sqrt{2}x''}}{30} - \frac{\sqrt{2}y''}{30} \Leftrightarrow x = -\frac{9\sqrt{2}}{30}y'' - \frac{\sqrt{2}}{30}y'' \Leftrightarrow x = -\frac{10\sqrt{2}}{30}y''$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{3}y''$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{3}y' \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{3x''}{\sqrt{10}} + \frac{y''}{\sqrt{10}}\right) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{6}y''$$

Tipo 4 formativa

2. Encontre a mudança de coordenadas que permite escrever a equação cónica numa forma canónica. Esboce o gráfico.

a) $2x^2-12xy-7y^2+12x+14y-27=0$

Caso 3 → equação completa

1. Escrever a matriz A $\quad A=\begin{bmatrix}2 & -6\\ -6 & -7\end{bmatrix}$

2. Valores próprios de A

$\det A=0 \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix}2-\lambda & -6\\ -6 & -7-\lambda\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-7-\lambda)-36=0 \Leftrightarrow -14-2\lambda+7\lambda+\lambda^2-36=0$
$\Leftrightarrow 5\lambda+\lambda^2-50=0 \Leftrightarrow \lambda_1=5 \vee \lambda_2=-10$

3. Calcular vetores próprios

Para $\lambda=5$

$\begin{bmatrix}-3 & -6\\ -6 & -12\end{bmatrix} L_2\to L_2-\frac{L_1}{2} \begin{bmatrix}-3 & -6\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ Seja $y=1, -3x=6y \Leftrightarrow -3x=6 \Leftrightarrow x=-2$ $\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

Os vetores próprios para $\lambda=5$ são do tipo $K(-2,1)$

Para $\lambda=-10$

$\begin{bmatrix}12 & -6\\ -6 & 3\end{bmatrix} L_2\to L_2+\frac{L_1}{2} \begin{bmatrix}12 & -6\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ Seja $y=1,\ 12x=6y \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Para $\lambda=-10$, os vetores próprios são do tipo $K(1/2;1) \to (1,2)$
$(1,2)$ e $(-2,1)$ são ortogonais.

4. Normalizar os vetores
$|(1,2)|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

5. Representação na forma matricial

$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\to x\\ \to y\end{matrix}$

x'

6. Transformação associada / completar quadrados

$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'+y') \qquad y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y')$

Nesta base, a equação canónica fica:

$$5x'^2-10y'^2+12\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'+y')\right)+14\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y')\right)-27=0$$

$$\Leftrightarrow 5x'^2 - 10y'^2 + 12\left(-\frac{2x'}{\sqrt5} + \frac{y'}{\sqrt5}\right) + 14\left(\frac{x'}{\sqrt5} + \frac{2y'}{\sqrt5}\right) - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x'^2 - 10y'^2 - \frac{24}{\sqrt5}x' + \frac{12}{\sqrt5}y' + \frac{14}{\sqrt5}x' + \frac{28}{\sqrt5}y' - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x'^2 - 10y'^2 - \frac{10}{\sqrt5}x' + \frac{40}{\sqrt5}y' - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x'^2 - 10y'^2 - \frac{10\sqrt5}{5}x' + \frac{40\sqrt5}{5}y' - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x'^2 - 10y'^2 - 2\sqrt5 x' + 8\sqrt5 y' - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x'^2 - \frac{2\sqrt5}{5}x'\right) - 10\left(y'^2 - \frac{8y'\sqrt5}{10}\right) = 27$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x'^2 - \frac{2\sqrt5}{5}x' + \frac{1}{5}\right) - 10\left(y'^2 - \frac{8\sqrt5}{10}y' + \frac{4}{5}\right) = 27 + 1 - \frac{40}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x' - \frac{\sqrt5}{5}\right)^2 - 10\left(y' - \frac{2\sqrt5}{5}\right)^2 = 20$$

$2y'.b = \frac{8\sqrt5 y'}{10} \Leftrightarrow b = \frac{4\sqrt5}{5} \Leftrightarrow b = \frac{4\sqrt5}{10} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\frac{4.5}{25} = \frac{1}{5}$

$2x'.a = \frac{2\sqrt5}{5}x'$

$a = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

7. Aplicar a mudança de coordenadas

$$x'' = x' - \frac{\sqrt5}{5} \qquad y'' = y' - \frac{2\sqrt5}{5}$$

$$5x''^2 - 10y''^2 = 20 \Leftrightarrow x''^2 - 2y''^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{2} = 1$$

A eq. é do tipo $k_1x^2 + k_2y^2 = 1$, com $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$, logo representa uma hipérbole.

A mudança de coordenadas que permite escrever a equação cónica na sua forma canónica é:

$$x = \frac{1}{\sqrt5}(-2x' + y') \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt5}\left(-2\left(x'' + \frac{\sqrt5}{5}\right) + y'' + \frac{2\sqrt5}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2x''}{\sqrt5} - \frac{2}{5} + \frac{y''}{\sqrt5} + \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt5 x''}{5} + \frac{\sqrt5 y''}{5}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt5}(x' + 2y') \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt5}\left(x'' + \frac{\sqrt5}{5} + 2\left(y'' + \frac{2\sqrt5}{5}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x''}{\sqrt5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{\sqrt5}y'' + \frac{4}{5} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt5 x''}{5} + \frac{2\sqrt5 y''}{5} + 1$$