# ELECTROMAGNETISMO - 2011/12
(Lic. Física)

3º Teste (12/Dez/2011)

---

## 1. Resposta B

A velocidade de arrastamento, $v_d$, é tanto maior quanto maior for o tempo de relaxação. se se admitir que após cada choque a velocidade de arrastamento é nula, tem-se

$$v_d = a\tau$$

onde $a$ é a aceleração devida ao campo $\vec{E}$.

Então

$$v_d = \frac{qE}{m}\tau$$

$q \equiv$ carga da partícula
$m \equiv$ massa " "

sendo $q$, $m$ e $E$ iguais nos dois materiais,
se $\tau_A = 2\tau_B$ então $v_{d(A)} = 2 v_{d(B)}$

## 2. Resposta B

A lei de Biot-Savart diz-nos que o campo magnético devido a um elemento de fio $d\vec{l}$ com uma corrente $i$ é dado por

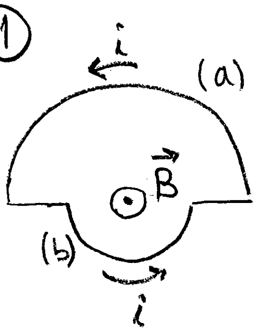
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{r} \equiv$ vector que aponta de $d\vec{l}$ para o ponto onde se está a calcular o campo

- As porções de fio constituídas por segmentos de recta não dão origem a qualquer campo magnético no ponto C, pois $d\vec{l} \,//\, \vec{r}$.

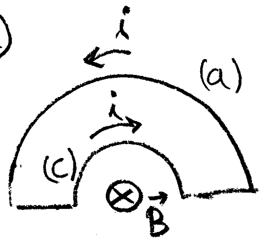
- Os arcos de circunferência dão origem a campos magnéticos perpendiculares ao plano da folha, com sentidos que dependem do sentido da corrente, e de intensidade que é tanto maior quanto menor for o raio do arco de circunferência.

1



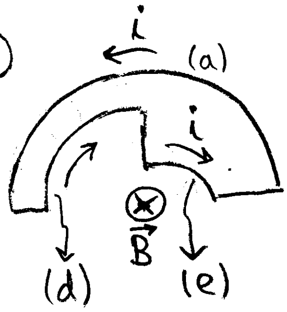

Os campos devidos aos dois arcos têm o mesmo sentido (para fora da folha): somam-se.

2




Os campos devidos aos dois arcos têm sentidos opostos: o campo resultante aponta para dentro da folha e é menor que no caso 1.

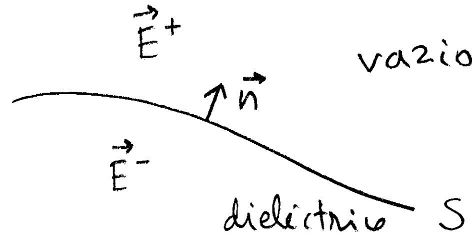
3




O campo devido ao arco (a) aponta para fora da folha. Os campos devidos aos arcos (d) e (e) apontam para dentro da folha e têm resultante menor que o campo devido ao arco (c) do caso 2. O campo resultante aponta para dentro da folha e é menor que no caso 2.

3. A expressão que traduz a descontinuidade do campo eléctrico quando se atravessa uma superfície carregada com densidade superficial de carga $\sigma$ escreve-se

$$(\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \cdot \vec{n} = \sigma / \varepsilon_0$$




$\vec{n} \equiv$ vector unitário normal à superfície $S$

No caso de $S$ ser a superfície limítrofe de um dieléctrico polarizado

$$\sigma = \sigma' + \sigma_p$$

$\sigma' \equiv$ densidade superficial de cargas verdadeiras

$\sigma'_p \equiv$ densidade " " " de polarização

Conclui-se, por isso, que a componente normal do campo eléctrico na fronteira de um dieléctrico polarizado é em geral descontínua, mesmo que a superfície do dieléctrico não esteja electrizada (pois, em geral, $\sigma_p \neq 0$ para um dieléctrico polarizado).

Utilizando a relação

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

a expressão da descontinuidade de cima escreve-se :

$$(\vec{E}^+ - \vec{E}^-)\cdot\vec{n} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma' + \vec{P}^-\cdot\vec{n})$$

onde $\vec{P}^-$ é a polarização do dieléctrico (note-se que a polarização do vazio é $\vec{P}^+ = 0$).

vem então

$$\varepsilon_0\vec{E}^+\cdot\vec{n} - \varepsilon_0\vec{E}^-\cdot\vec{n} - \vec{P}^-\cdot\vec{n} = \sigma'$$

$$\left[\varepsilon_0\vec{E}^+ - (\varepsilon_0\vec{E}^- + \vec{P}^-)\right]\cdot\vec{n} = \sigma'$$

Mas $\vec{D}^- = \varepsilon_0\vec{E}^- + \vec{P}^-$ vector deslocamento no dieléctrico, num ponto infinitamente próximo da superfície limítrofe

$\vec{D}^+ = \varepsilon_0\vec{E}^+$ vector deslocamento eléctrico no vazio

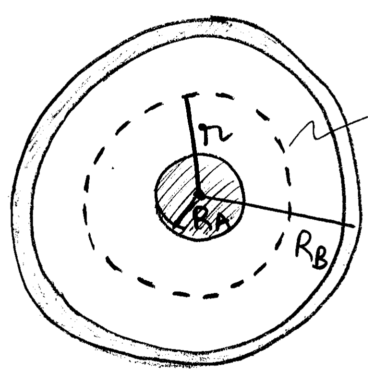
A condição a que deve obedecer o vector $\vec{D}$ na fronteira entre o dieléctrico e o vazio é pois

$$(\vec{D}^+ - \vec{D}^-)\cdot\vec{n} = \sigma'$$

Se a superfície do dieléctrico estiver carregada ($\sigma' \neq 0$), a componente normal de $\vec{D}$ é descontínua ao atravessar a fronteira.

Se a superfície do dieléctrico estiver descarregada ($\sigma' = 0$), a componente normal de $\vec{D}$ não sofre qualquer descontinuidade ao atravessar a fronteira entre o dieléctrico e o vazio.

4. Comecemos por determinar o vector deslocamento eléctrico, $\vec{D}$, no interior do dieléctrico. Para isso, calculamos o fluxo de $\vec{D}$ através de uma superfície gaussiana esférica, concêntrica com as armaduras do condensador e aplicamos o teorema de Gauss




superfície gaussiana esférica, S

$\vec{n} \equiv$ vector unitário normal à superfície S

$$\oint_S \vec{D}.\vec{n}\, da = q_{int}$$

$q_{int} \equiv$ carga (verdadeira) interior a S

Devido à simetria esférica $\vec{D} \parallel \vec{n}$ (o que implica que $\vec{D}\cdot\vec{n} = D$) e $|\vec{D}|$ é constante sobre todos os pontos de S.
vem então

$$D.\, 4\pi r^2 = q_{int}$$

$q_{int}$ é a carga na armadura A.
como esta carga se distribui na superfície do condutor, tem-se

$$q_{int} = \sigma_A .\, 4\pi R_A^2 \quad , \quad \sigma_A \equiv \text{densidade superficial de carga em A}$$

Vem então

$$D \cdot 4\pi r^2 = \sigma_A \, 4\pi R_A^2$$

$$D = \sigma_A \left(\frac{R_A}{r}\right)^2$$

Tendo em conta que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ ; $\vec{E} \equiv$ campo eléctrico

vem

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma_A \left(\frac{R_A}{r}\right)^2$$

$\vec{D}$ e $\vec{E}$ são vectores com direcção radial

A diferença de potencial entre as armaduras A e B é dada por

$$V_A - V_B = \int_{R_A}^{R_B} E \, dr$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} R_A^2 \sigma_A \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} R_A^2 \sigma_A \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_A}^{R_B}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} R_A^2 \sigma_A \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} R_A^2 \sigma_A \left(\frac{R_B - R_A}{R_A R_B}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma_A R_A \left(\frac{R_B - R_A}{R_B}\right)$$

Resulta então

$$\sigma_A = \varepsilon_0 \varepsilon_r (V_A - V_B)\left(\frac{R_B}{R_B - R_A}\right)\frac{1}{R_A}$$

A carga na armadura B tem que ser igual em módulo e de sinal oposto:

$$4\pi R_A^2 \sigma_A = -4\pi R_B^2 \sigma_B$$

$$\sigma_B = -\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \sigma_A$$

$$= -\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r (V_A - V_B)\left(\frac{R_B}{R_B - R_A}\right)\frac{1}{R_A}$$

$$= -\varepsilon_0 \varepsilon_r (V_A - V_B)\left(\frac{R_A}{R_B - R_A}\right)\frac{1}{R_B}$$

O campo eléctrico é, como vimos atrás,

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\sigma_A\left(\frac{R_A}{r}\right)^2$$

substituindo a expressão que dá $\sigma_A$ na expressão do campo vem

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\varepsilon_0 \varepsilon_r (V_A - V_B)\left(\frac{R_B}{R_B - R_A}\right)\frac{1}{R_A}\cdot\frac{R_A^2}{r^2}$$

$$= (V_A - V_B)\left(\frac{R_A R_B}{R_B - R_A}\right)\frac{1}{r^2}$$

A polarização do dieléctrico é dada por

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$\chi \equiv$ susceptibilidade eléctrica

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)(V_A - V_B) \left( \frac{R_A R_B}{R_B - R_A} \right) \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$