Ficha 3- Ex. 4 Para cada alínea do Ex 3. diga, justificando, se a transformação linear é injetiva, sobrejetiva, bijetiva.

(a) $$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-3y,0) \end{array}$$

Do Ex. 3 sabemos que $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1 \neq 0$. Logo T não é injetiva e já podemos dizer que não é bijetiva.

Também sabemos (do Ex. 3) que $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$. Como $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ e $\dim \mathrm{Im}(T) < 2$, concluimos que T não é sobrejetiva.

Nota: usando o Teorema da dimensão, a alinea correspondente do Ex 3 pode ser resolvida com os seguintes passos:

- $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$, com base $(3,1)$, como fizemos na resolução do Ex 3.

- Pelo teorema da dimensão, vem $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Ker}(T) = 1$.

- Como $\mathrm{Im}(T) = \langle T(1,0), T(0,1)\rangle$, $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$ e $T(1,0) = (1,0)$ é um vetor linearmente independente ($\neq \vec{0}$) de $\mathrm{Im}(T)$ podemos concluir que este vetor forma uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

(b) $$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,2x) \end{array}$$

- $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0)\}$, de dimensão 0. Logo T é injetiva
- $\dim \mathrm{Im}(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Logo T é sobrejetiva.

Como é injetiva e sobrejetiva, concluímos que T é bijetiva.

Alternativamente, podemos dizer que T é bijetiva porque os espaços de partida e chegada têm a mesma dimensão e T é injetiva.

(c) $$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,2y,0) \end{array}$$

- $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0)\}$, de dimensão 0. Logo T é injetiva.
- $\dim \mathrm{Im}(T) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$. Logo T não é sobrejetiva nem bijetiva.

(d) $$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z, y-2z) \end{array}$$

- $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$. Logo T não é injetiva e portanto não é bijetiva.
- $\dim \operatorname{Im}(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Logo T é sobrejetiva.

Ficha3-Ex. 8

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma transformação linear e seja

$$\mathcal{C} = A + \langle v_1, \cdots, v_k \rangle \qquad (A, v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n)$$

um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a imagem de $\mathcal{C}$ pela transformação T é o subespaço afim de $\mathbb{R}^p$ dado por

$$T(\mathcal{C}) = T(A) + \langle T(v_1), \cdots, T(v_k) \rangle.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} T(\mathcal{C}) &= \{T(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in \mathcal{C}\} \\ &= \{T(A + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) \colon \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \\ &= \{T(A) + \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) \colon \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \quad \text{(por linearidade)} \\ &= T(A) + \langle T(v_1), \cdots, T(v_k) \rangle. \end{aligned}$$

Ficha3-Ex. 9

Usando o exercício anterior, determine e represente graficamente a imagem das seguintes retas de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{R}_1 = \langle (1,2) \rangle \qquad \mathcal{R}_2 = (0,1) + \langle (1,2) \rangle$$

por cada uma das seguintes transformações lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x,-y)$

$$T(\mathcal{R}_1) = \langle T(1,2) \rangle = \langle (1,-2) \rangle \qquad T(\mathcal{R}_2) = T(0,1) + \langle T(1,2) \rangle = (0,-1) + \langle (1,-2) \rangle$$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (2x-y, 0)$

$$T(\mathcal{R}_1) = \{(0,0)\} \qquad T(\mathcal{R}_2) = \{(-1,0)\}$$

Representação gráfica ao cuidado do leitor.

Ficha 3 Ex. 10

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e sejam $v_1, \cdots, v_k \in V$ vetores linearmente independentes. Mostre que, se T é injetiva, então $T(v_1), \cdots, T(v_k)$ são linearmente independentes.

Sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = 0_W.$$

Como T é linear, temos

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = 0_W = T(0_V).$$

Como T é injetiva, a linha anterior implica que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_V.$$

Como $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes, podemos concluir que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

o que significa que $T(v_1), \cdots, T(v_k)$ são linearmente independentes.

Ficha 4 Ex. 6(b)

Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é dita *simétrica* se $A^t = A$ e *anti-simétrica* se $A^t = -A$.

(b) Mostre que o conjunto das matrizes simétricas de ordem 2×2 é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a sua dimensão.

Denota-se por W o conjunto das matrizes simétricas de ordem 2×2, isto é

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, A^t = A\}.$$

Vamos verificar que W é um s.e.v de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- O vetor nulo de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, isto é a matriz nula de ordem 2×2, pertence a W pois
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Sejam $A, B \in W$. Tem-se $A^t = A$ e $B^t = B$. Logo, pelas propriedades da transposta, tem-se
$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$$
o que significa que $A + B \in W$.

- Sejam $A \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se $A^t = A$. Logo, pelas propriedades da transposta, tem-se
$$(\alpha A)^t = \alpha(A^t) = \alpha A$$
o que significa que $\alpha A \in W$.

Sendo estas três condicões verificadas podemos dizer que W é um s.e.v de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Para determinar a dimensão de W precisamos de terminar uma sua base.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$A \in W \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = c$$

Disso podemos concluir que

$$W = \{A \in \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}\}$$

Escrevendo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vemos que as três matrizes simétricas $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são geradores de W. Para podermos concluir que E, F, e G formam uma base de W ainda precisamos de verificar que são linearmente independentes. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha E + \beta F + \gamma G = 0_{2\times 2}$ (onde $0_{2\times 2}$ representa a matriz nula de ordem 2×2). Tem-se

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde podemos concluir que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo E, F, e G são linearmente independentes.

Em conclusão, E, F, e G formam uma base de W pelo que a dimensão de W é 3.