Universidade do Minho - Escola de Ciências

Licenciatura em Física

Notas - Complementos de Eletromagnetismo

Terceiro ano - Primeiro Semestre

Tiago Antão

Número de aluno: a89643

20 de janeiro de 2021

Conteúdo

Para a Vitória

Prefácio

Estas notas correspondem à cadeira de Complementos de Eletromagnetismo 2020/2021 lecionada no primeiro semestre do terceiro ano da Licenciatura em Física da Universidade do Minho pelo professor José Luís Pires Ribeiro. A informação aqui apresentada corresponde a um compêndio das notas manuscritas do professor. Sendo esta a segunda cadeira de eletromagnetismo do curso de Física, as notas pressupõem algum conhecimento prévio de teoria eletromagnética, especificamente familiaridade e prática na aplicação das equações de Maxwell a problemas simples. Procura-se, nestas notas, complementar a abordagem geral do professor e, paralelamente, do livro "Introduction to Electrodynamics"[1]. Para além de outras explorações tangenciais ao material lecionado, ao longo do texto será dada especial atenção à abordagem de simetria, sendo utilizadas várias referências para a consideração dos temas abordados, de entre as quais se destaca o livro "Physics from Symmetry"[2]. Utilizam-se, também, certos resultados ou conceitos apresentados nas notas correspondentes às cadeiras de Mecânica Analítica e Ondas, bem como de Termodinâmica e Física Estatística lecionadas no ano anterior.

Realça-se que certas secções correspondem a secção não avaliada ou não lecionadas. Estas secções encontram-se marcadas com uma cruz†. Resultados ou equações importantes encontram-se dentro de uma $\boxed{caixa}$.

O primeiro capítulo introduz a correção de Maxwell à lei de Ampère e explora a corrente de deslocamento como uma necessidade para a consistência matemática para as equações de Maxwell. São, neste contexto exploradas a dualidade de Heaviside e Heaviside-Larmor que relacionam os campos elétricos e magnéticos no vazio e são analisadas as suas extensões para o caso da existência de cargas magnéticas. Introduzem-se, posteriormente, os campos auxiliares de deslocamento elétrico e de excitação magnética, sendo escritas as equações de Maxwell em meios materiais. Discutem-se as relações constitutivas dos meios materiais de um ponto de vista de simetria.

O segundo capítulo foca-se em leis de conservação. Observamos em primeira instância como as equações de Maxwell por construção contêm a equação da continuidade que leva à conservação local de carga. Seguidamente analisamos o teorema de Poynting como resultado para a conservação local de energia.

No terceiro capítulo

Um último capítulo é dedicado à derivação, utilizando métodos de simetria, as equações de Maxwell com base na abordagem de "Physics from Symmetry".

[1] (Griffiths, 2014)
[2] (Schwichtenberg, 2015)

O objetivo destas notas é a derivação e análise de resultados de eletrodinâmica. Adicionalmente, estas notas são um complemento à matéria estudada nas aulas de complementos de eletromagnetismo, sendo que todo o material abordado se encontra explorado de forma mais rigorosa e detalhada nos livros e artigos referidos.

Capítulo 1

As equações de Maxwell

1.1 Eletrodinâmica e as equações de Maxwell

1.1.1 Eletrodinâmica antes de Maxwell

O nosso ponto de partida é a teoria eletromagnética utilizada no meado do século 19. Na formulação de Heaviside, as equações da eletrodinâmica (pré-Maxwell) são quatro equações que governam o comportamento dos campos eletromagnéticos:

$$\boxed{\begin{gathered} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{gathered}}$$

Para começarmos as nossas investigações, é de notar que, para todo o vetor $\vec{A}$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Podemos, assim, considerar o caso do campo elétrico $\vec{E}$:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B})$$

Como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ pelas equações de Maxwell, temos:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0$$

Pelo que a identidade vetorial considerada se verifica. Por outro lado, para o campo elétrico:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \vec{J})$$

Como a densidade de corrente elétrica $\vec{J}$ não é, em geral, nula, as equações da eletrodinâmica pré-Maxwell não são matematicamente consistentes. Em particular, temos a equação da continuidade que exprime a conservação da carga:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Então, a lei de Ampère tem de falhar quando as densidades volúmicas de carga variam no tempo.

1.1.2 A correção de Maxwell

A questão que se põe agora recai sobre a correção deste problema. Para forçar o anulamento da divergência do rotacional do campo magnético, consideramos, pela equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Assim, de modo a anluar a divergência do campo elétrico, injetamos a equação da continuidade na lei de Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Definimos, assim, a corrente de deslocamento como:

$$\vec{J}_D := \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

E assim, a lei de Ampère-Maxwell toma a forma:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_D)$$

Este termo de correção introduz uma simetria nas equações de Maxwell. Assim como um campo magnético variável (lei de Faraday) cria um campo magnético, um campo magnético variável cria um campo elétrico (lei de Ampère-Maxwell).

As equações de Maxwell na forma atual são, assim:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}}$$

Em princípio, estas equações descrevem totalmente a evolução dos campos elétricos e magnéticos, dada uma distribuição de cargas e correntes arbitrária. Com a adição da força de Lorentz, que governa a dinâmica de partículas dados os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, a eletrodinâmica fica inteiramente descrita.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

1.1.3 Monopolos magnéticos?

A não existência de monopolos magnéticos cria uma asssimetria nas equações de Maxwell. No entanto, no espaço livre de cargas e correntes esta simetria é recuperada:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

A simetria recuperada é apelidada de dualidade de Heaviside e estabelece:

$$\vec{B} \longleftrightarrow -\varepsilon_0 \mu_0 \vec{E}$$

Se existissem cargas magnéticas, a sua conservação implicaria:

$$\nabla \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

E assim, por um argumento análogo ao utilizado para introduzir a correção de Maxwell à lei de Ampère, teriamos as equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1.2 Dualidade de Heaviside-Larmor†

1.2.1 Dualidade de Heaviside-Larmor no vazio

Utilizando $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ temos, como referido anteriormente, a dualidade de Heaviside que diz que as equações de Maxwell no vazio são invariantes por transformações com a forma:

$$\begin{cases} \vec{E}' = -c\vec{B} \\ \vec{B}' = \frac{\vec{E}}{c} \end{cases}$$

A demonstração é imediata por substituição direta. No entanto, podemos pensar nesta transformação como uma rotação por um ângulo de $\pi/2$:

Esta simetria pode ser generalizada para ângulos genéricos η. A generalização é apelidada de Dualidade de Heaviside-Larmor e tem a forma:

$$\begin{bmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\eta & -\sin\eta \\ \sin\eta & \cos\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

Demonstra-se, agora a invariância das equações de Maxwell no vazio pelas transformações acima referidas. Para as divergências dos campos elétricos e magnéticos, temos trivialmente:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Para o rotacional do campo elétrico, temos:

$$\nabla \times \vec{E}' = \nabla \times \left[\vec{E}\cos\eta - c\vec{B}\sin\eta\right]$$

$$= \cos\eta \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \sin\eta \; c \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{c}\left[-\cos\eta\; c\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \sin\eta\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = -\frac{1}{c}c\vec{B}' = -\vec{B}'$$

Par o rotacional do campo magnético, temos:

$$\nabla \times \vec{B}' = \nabla \times \left[\frac{\vec{E}}{c}\sin\eta + \vec{B}\cos\eta\right]$$

$$= -\sin\eta\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\cos\eta\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[\sin\eta(-c\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) + \cos\eta\vec{E}\right] = \frac{1}{c^2}\vec{E}'$$

1.2.2 Dualidade de Heaviside-Larmor com existência de monopolos magnéticos

Assim, demonstramos o pretendido. Analisamos agora a recuperação de simetria pela introdução de monopolos magnéticos, procurando estender esta dualidade às cargas e correntes magnéticas.

Utilizando as equações de Maxwell com cargas magnéticas, vem:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left[\vec{E}\cos\eta - c\vec{B}\sin\eta\right] = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\cos\eta - c\mu_0\rho_m\sin\eta$$

A definição correta para ρ_e' é, pois:

$$\frac{\rho_e'}{\varepsilon_0} := \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\cos\eta - c\mu_0\rho_m\sin\eta$$

$$\Rightarrow \rho_e' = \rho_e\cos\eta - \frac{1}{c}\rho_m\sin\eta$$

Pelo rotacional de $\vec{E}'$ temos de ter:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_m'$$

Comparando com o resultado para as equações homogéneas, temos:

$$\nabla \times \left[\vec{E}\cos\eta - c\vec{B}\sin\eta\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\sin\eta - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cos\eta - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_m'$$

Expandindo os termos pelas equações de Maxwell, vem:

$$\cos\eta\left[-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_m\right]-c\sin\eta\left[\mu_0\vec{J}_e+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\sin\eta-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cos\eta-\frac{1}{\varepsilon}\vec{J}'_m$$

Obtemos, assim:

$$\vec{J}'_m:=\vec{J}_m\cos\eta+\frac{1}{c}\sin\eta\vec{J}_e$$

Analogamente para o rotacional de $\vec{B}'$:

$$\nabla\times\left[\frac{1}{c}\vec{E}\sin\eta+\vec{B}\cos\eta\right]=\mu_0\vec{J}'_e+\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cos\eta-c\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\sin\eta\right]$$

Expandindo e cancelando os termos como no caso anterior, obtemos:

$$\vec{J}'_e=\vec{J}_e\cos\eta-c\vec{J}_m\sin\eta$$

Assim, verificamos que a dualidade de Heaviside-Larmor para as equações de Maxwell é extensível para as equações não homogéneas, se:

$$\begin{bmatrix}\rho'_e\\\rho'_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\eta & -\frac{1}{c}\sin\eta\\ c\sin\eta & \cos\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho_e\\\rho_m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\vec{J}'_e\\\vec{J}'_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\eta & -c\sin\eta\\ \frac{1}{c}\sin\eta & \cos\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{J}_e\\\vec{J}_m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\vec{E}'\\\vec{B}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\eta & -c\sin\eta\\ \frac{1}{c}\sin\eta & \cos\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{E}\\\vec{B}\end{bmatrix}$$

1.3 Equações de Maxwell em meios materiais

1.3.1 Polarização

Procuramos agora tratar as equações de Maxwell de tal modo que conseguimos isolar campos e cargas externas de campos e cargas inerentes ao próprio meio material onde estão a atuar os campos externos.

Um exemplo pode ser um material dielétrico composto por moléculas neutras ou polares sobre o qual é aplicado um campo elétrico. A aplicação do campo pode induzir sobre as moléculas neutras um momento dipolar, ou causar um alinhamento de moléculas polares. Cada uma delas terá um momento dipolar:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

O material diz-se polarizado. Uma medida deste efeito é a polarização:

$$\vec{P} := \text{momento dipolar por unidade de volume}$$

Procuramos agora saber qual o campo elétrico que a polarização do material produz.

É mais fácil trabalhar com o potencial. Para um único dipolo temos:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

Onde $\mathscr{r}$ é o vetor desde o dipolo até ao ponto com coordenadas $\vec{r}$.

$$\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Com $\vec{r}'$ coordenadas do dipolo.

Tendo assim em conta que $\vec{p} = \vec{P}dV$, ou seja, fazendo uma aproximação de meio contínuo, temos o potencial total:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\hat{r}\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{\mathscr{r}^2}d^3r'$$

Notando que:

$$\nabla'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = \nabla'\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right) = \frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

E substituindo na expressão para o potencial, temos:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\nabla'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\cdot\vec{P}(\vec{r}')\ d^3r'$$

Integrando por partes, temos:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{\mathscr{r}}\right) \, d^3r' - \int_{V'} \frac{1}{\mathscr{r}} \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \, d^3r'\right]$$

E utilizando o teorema da divergência, vem:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Sigma} \frac{\vec{P}}{\mathscr{r}} \cdot \hat{n} \, d\Sigma - \int_{V'} \frac{1}{\mathscr{r}} \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \, d^3r'$$

Fazemos agora a identificaçaõ de uma densidade de cargas ligadas na superfície:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

E no bulk:

$$\rho_b = -\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

Estas densidades superficiais e volúmicas apelidam-se de cargas ligadas para as distinguir das cargas volúmicas e superficiais livres, injetadas no material.

O procedimento quando um meio dielétrico se encontra polarizado pode então passar por tentar encontrar estas distribuições e depois calcular o seu efeito como fariamos para outro qualquer problema de eletrodinâmica.

1.3.2 Magnetização

Procuramos agora um resultado análogo para momentos dipolares magnéticos.

Como anteriormente, caracterizamos o alinhamento de dipólos magnéticos (por exemplo spins) de moléculas num meio material com uma grandeza apelidada de magnetização:

$$\vec{M} := \text{momento dipolar magnético por unidade de volume}$$

A abordagem é semelhante. Começamos com o potencial vetor magnético de um único dipolo $\vec{m}$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

Fazendo a aproximação de meios contínuos, obtemos o potencial vetor total:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

Utilizando novamente a identidade:

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathscr{r}} \right) = \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

Temos, integrando por partes:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{1}{\mathscr{r}} \left(\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \right) \, d^3r' - \int_{C'} \nabla' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\mathscr{r}} \, d^3r' \right]$$

Utilizando o resultado em apêndice sobre integrais de rotacionais, temos:

$$-\int_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\mathscr{r}} \right) \, d^3r' \equiv \int_{\Sigma} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{\mathscr{r}} \, d\Sigma$$

Podemos agora identificar uma densidade de corrente volúmica:

$$\vec{J}_b = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$

E uma densidade de corrente superficial de cargas ligadas:

$$\vec{k}_b := \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}$$

Estas correntes e superficiais e volúmicas ligadas desempenham o mesmo papel que as densidades superficiais e volúmicas de cargas ligadas.

Tendo, por último atenção ao caso não estático, isto é, o caso em que:

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} \neq 0$$

Temos, pela conservação de carga, uma equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_p = 0$$

Temos pois, que:

$$\rho_b = -\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Rightarrow \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = -\nabla' \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Ou seja a definição da corrente de polarização é:

$$\vec{J}_p := \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

1.3.3 Equações de Maxwell num meio material

Estamos agora na posição para tentar exprimir as equações de Maxwell num meio material.

Admitimos, por simplicidade, que o meio estudado tem uma extensão tão grande que a sua superfície σ pode ser considerada no infinito. Assim densidades superfíciais de cargas e correntes são irrelevantes. O sistema fica descrito por:

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b = \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Onde ρ_f são as cargas livres, injetadas externamente no meio, e $\vec{J}_f$ a densidade de corrente de cargas livres, correspondentes ao movimento das cargas injetadas.

Os restantes termos têm origem na polarização e magnetização do próprio meio.

A Lei de Gauss lê, pois:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \vec{P})$$

Ou seja:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

Introduzimos, assim, a definição do vetor deslocamento elétrico:

$$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Em termos de $\vec{D}$ podemos escrever a lei de Gauss dependendo apenas de cargas livres:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

De forma semelhante, da lei de Ampère-Maxwell, vem:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right] + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ou seja:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right)$$

Definindo agora o vetor excitação magnética:

$$\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

Podemos exprimir a lei de Ampère exclusivamente à custa de cargas e correntes livres:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Assim, podemos escrever todas as equações de Maxwell num meio material:

$$\boxed{\begin{gathered} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{gathered}}$$

Nesta versão das equações de Maxwell as propriedades do meio são "varridas"para os campos auxiliares $\vec{H}$ e $\vec{D}$.

Temos evidentemente um preço a pagar, que corresponde a especificar como dependem os campos $\vec{D}$ e $\vec{H}$ dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Ou seja, para as equações de Maxwell serem úteis temos de conhecer as relações:

$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}) \end{cases}$$

Estas relações são apelidadas de relações constitutivas do meio material. Exploraremos com base em considerações de simetria.

Usualmente, admitem-se relações constitutivas o mais simples possível, que correspondem a relações de linearidade:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \mu \vec{B} \end{cases}$$

1.3.4 Condições de fronteira das equações de Maxwell num meio material

Imaginemos agora que o meio material apresenta uma descontinuidade entre duas regiões separadas por uma fronteira Σ e tem propriedades diferentes nas duas regiões, ou que existe uma superfície Σ do meio que transporta uma densidade superficial de carga σ e de corrente $\vec{k}$. Procuramos explorar o comportamento dos diferentes campos nesta descontinuidade.

Começamos por escrever as equações de Maxwell na sua forma integral:

$$\int_\Sigma \vec{D} \cdot \hat{n} d\Sigma = Q_f$$
$$\int_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = 0$$
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \vec{D} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Podemos considerar uma pequena caixinha colocada sobre uma interface entre os dois meios. No limite em que a caixinha é muito fina, o volume por ela delimitado e a área das suas paredes vão para zero.

A lei de Gauss, neste limite, apenas contempla cargas de superfície livres:

$$A(\vec{D}_1 \cdot \hat{n} - \vec{D}_2 \cdot \hat{n}) = \sigma_f A$$

Onde A é a área das tampas superiores e inferiores da caixa. Esta quantidade cancela e deixa-nos:

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f$$

A componente de $\vec{D}$ perpendicular à superfície Σ apresenta uma descontinuidade correspondente à densidade de cargas livres.

A mesma construção leva-nos à obtenção para as condições de fronteira de $\vec{B}$:

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

Considerando um circuito amperiano cuja altura tende para zero numa superfície pela qual flui uma densidade de corrente dá, para o campo elétrico:

$$E_1^{//} - E_2^{//} = 0$$

E a mesma construção para o campo de excitação magnética $\vec{H}$ dá:

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{l} - \vec{H}_2 \cdot \vec{l} = I_f$$

A corrente livre I_f é dada por:

$$I_f = \vec{k}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{l}) = \vec{l} \cdot (\vec{k}_f \times \hat{n})$$

Onde foi utilizada a propriedade de permutação cíclica do tensor de Levi-Civita.

Assim temos:

$$\vec{H}_1^{//} - \vec{H}_2^{/} = \vec{k}_f \times \hat{n}$$

1.3.5 Relações Constitutivas

As equações de Maxwell nada dizem, então, sobre como os campos vetoriais $\vec{P}$ e $\vec{M}$ respondem aos campos elétricos e magnéticos. Como referido, essa informação vem sob a forma das chamadas relações constitutivas do meio material. Para pequenas intensidades de campos elétricos e magnéticos é sempre plausivel admitir que a dependência em $\vec{P}$ e $\vec{M}$ é linear. Esta aproximação é muito satisfatória, no entanto as relações constitutivas dependem do meio material e, em particular da sua simetria.

Vamos começar pelo caso mais simples, que corresponde ao meio material isotrópico. Neste caso podemos admitir que:

$$\begin{cases} \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{M} = \chi_m \vec{H} \end{cases}$$

Se isto for verdade, então:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left[\vec{E} + \chi_e \vec{E} \right] = \varepsilon_0 \left[1 + \chi_e \right] \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \left[\vec{H} + \vec{M} \right] = \mu_0 \left[1 + \chi_m \right] \vec{H}$$

Neste caso muito simples:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$\vec{B}$ e $\vec{D}$ são simplesmente proporcionais a $\vec{E}$ e $\vec{H}$ e ε e μ são as constante dielétrica do meio e a permeabilidade magnética do meio.

Note-se que ($\vec{B}$ e $\vec{H}$) e ($\vec{D}$ e $\vec{E}$ são paralelos no caso de um meio isotrópico. Tal não é o caso se o meio for anisotrópico. As relações constitutivas envolverão um tensor de segunda ordem:

$$B_i = \mu_{ij}H_j$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j$$

Com:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0\left[\delta_{ij} + \chi^e_{ij}\right]$$

$$\mu_{ij} = \mu_0\left[\delta_{ij} + \chi^m_{ij}\right]$$

1.3.6 Relações constitutivas a partir de considerações de simetria†

Um vetor é uma grandeza que define uma orientação, um sentido e uma magnitude. Estes tipos de quantidade podem transformar-se de diferentes formas sobre inversão espacial $\bar{1}$, inversão temporal $1'$. Notamos que quando consideradas rotações por um ângulo de π em torno de um eixo perpendicular $C_2^\perp$ o vetor terá o sinal oposto, pela definição dada de seta orientada. Construindo uma tabela com as diferentes configurações vemos que existem 4 tipos diferentes de campos vetoriais com respeito a simetrias de inversão temporal e espacial. No eletromagnetismo conseguimos identificar todos os campos vetoriais considerados:

	$1'$	$\bar{1}$	$C_2^\perp$	
$\vec{P}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$	1	-1	-1	(vetor polar, temporalmente par)
$\vec{M}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$	-1	1	-1	(vetor axial, temporalmente impar)
$\nabla\times\vec{E}$	1	1	-1	(vetor axial, temporalmente par)
$\nabla\times\vec{H}$	-1	-1	-1	(vetor polar, temporalmente impar)

Definamos os campos de excitação como $\vec{E}$ e $\vec{H}$. Note-se que estes campos definem grandezas intensivas por oposição aos campos $\vec{B}$ e $\vec{D}$ que definem grandezas extensivas.

Procuramos agora averiguar como se pode gerar uma polarização e uma magnetização sob ação destes campos (por simplicidade num meio isotrópico). Em princípio teriamos:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \alpha^d \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \alpha^b \vec{E}$$

Mas note-se que:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Também geram respostas semelhantes e têm simetrias distintas de inversão espacial e temporal.

Consideramos estes termos como excitações distintas das consideradas anteriormente. Assim, temos:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \beta^d (\nabla \times \vec{E}) + \alpha^d \vec{H} + \gamma^d \nabla \times \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \beta^b (\nabla \times \vec{H}) + \alpha^b \vec{E} + \gamma^b \nabla \times \vec{E}$$

Estas relações têm de ser tensorialmente homogéneas, i.e. o lado esquerdo tem de se transformar da mesma maneira que o lado direito da igualdade. Assim podemos obter as propriedades de transformação dos coeficientes que caracterizam o meio. Por exemplo, considerando:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Uma vez que $\vec{D}$ é $1'$-par e $\bar{1}$-ímpar, e $\vec{E}$ é, igualmente $1'$-par e $\bar{1}$-ímpar, então ε tem de ser $1'$-par e $\bar{1}$-par. Adicionalmente, tem de ser invariante por ações de $C_2^{\perp}$. Aplicando este tipo de raciocínio a todas as componentes podemos classificar as transformações dos vários tensores:

	$\bar{1}$	$1'$	$C_2^{\perp}$
ε, μ	1	1	1
β^d, β^b	-1	1	1
α^d, α^b	-1	-1	1
γ^d, γ^b	1	-1	1

Invocamos agora o princípio de Neumann que afirma que uma propriedade física descrita por um tensor ξ só pode existir se a simetria intrínseca deste tensor for igual ou superior à simetria do meio.

Assim, os vários tensores ε, μ, α^i, β^i e γ^i (leia-se $i = d, b$) só podem existir em meios que preservem as simetrias respetivas.

- ε e μ são universais. Existem em todos os meios independentemente da sua simetria. Dizem-se, deste modo, respostas neutrais.
- β^i só podem existir em meios não centro-simétricos.
- α^i só podem existir em meios não centro-simétricos que quebrem a simetria de inversão temporal.
- γ^i só podem existir em meios que quebrem a simetria de inversão temporal.

Estas considerações sugerem a classificação de meios materiais em quatro tipos fundamentais:

- Neutral (ε, μ)
- Space-odd (ε, μ, β^d, β^b)
- Time-odd (ε, μ, γ^d, γ^b)
- Magneto-elétrico (ε, μ, α^d, α^b)

As respostas podem, evidentemente, coexistir em meios de simetria reduzida.

Capítulo 2

Leis de Conservação

2.1 Conservação local da carga elétrica

Como vimos na primeira secção do capítulo 2, a correção de Maxwell é feita de modo a garantir a conservação local de carga. Por outras palavras, a coerência formal das equações de Maxwell exige que a carga seja localmente conservada:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \left[\nabla \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \right] \equiv 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Deste modo, vendo as equações de Maxwell como as equações fundamentais da eletrodinâmica, dizemos que a lei de Ampère-Maxwell impõe a validade da equação da continuidade.

2.2 Teorema de Poynting-Heaviside

2.2.1 Energia de uma concentração de carga na aproximação quasi-estática

Consideramos a energia de uma configuração estática de cargas pontuais:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \frac{1}{2}$$

Onde o fator de 1/2 existe para descontar os termos contados duas vezes pelas somas. Assim:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \left[\sum_{j\neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

No limite do contínuo, a soma é substituida por um integral sobre $dq = \rho(\vec{r})d\vec{r}$:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})\ d^3r$$

Podemos exprimir esta energia à custa dos campos eletromagnéticos e não dos respetivos potenciais. Num meio material linear é útil considerar a energia associada à densidade de cargas livres. Assim, tendo em conta:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

Podemos escrever:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot \vec{D}V(\vec{r})\ d^3r$$

Podemos, no entanto, usar a identidade:

$$\nabla(V\vec{D}) = V(\nabla \cdot \vec{D}) + \vec{D} \cdot (\nabla V)$$

Logo temos que:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left[\nabla \cdot (V(\vec{r})\vec{D}) - \vec{D} \cdot (\nabla V)\right]\ d^3r$$

E usando o teorema de Gauss:

$$W = \frac{1}{2}\left[\int_\Sigma V(\vec{r})\vec{D} \cdot \hat{n}\ d\Sigma + \int_V \vec{D} \cdot \vec{E}\ d^3r\right]$$

Para um meio material muito extenso, podemos ignorar a contribuição do primeiro termo de superfície para a densidade local de energia. Podemos assim definir uma densidade volúmica de energia elétrica como:

$$\omega = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$$

E assim:

$$W = \int_v \omega(\vec{r})\ d^3r$$

Como comentamos anteriormente, $\vec{D}$ é uma grandeza extensiva e $\vec{E}$ uma grandeza intensiva. Como o produto $\vec{E} \cdot \vec{D}$ tem unidades de energia dizemos que estas variáveis são termodinamicamente conjugadas.

2.2.2 Energia de uma configuração quasi-estática de correntes

Consideramos agora um circuito de corrente $I(t)$. O simétrico da força eletromotriz $-\varepsilon$ é o trabalho necessário para que uma carga unitária dê percorra o circuito e volte ao ponto onde começou.

A energia despendida por unidade de tempo é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon I$$

Mas a força eletromotriz pode ser expressa em termos do coeficiente de auto-indutância L do circuito:

$$\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Assim temos:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Logo:

$$W = \int_0^I LI'dI' = \frac{1}{2}LI^2$$

Por outro lado:

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n}\ d\Sigma$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n}\ d\Sigma$$

E usando o teorema de Stokes temos:

$$\phi_B = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = LI$$

E agora podemis substituir em W para obter:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{A} \cdot Id\vec{l}$$

Ou seja, como $Id\vec{l} = \vec{I}dl$ temos:

$$W = \frac{1}{2} \oint_C \vec{A} \cdot \vec{I}dl$$

A generalização para correntes volúmicas é evidente. Basta substituir $\vec{I}$ por $\vec{J}$ e integrar sobre o volume a ser considerado:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J})\, d^3r$$

Podemos, tal como fizemos para distribuições volúmicas de carga exprimir esta energia à custa dos campos. Especificamente, como anteriormente, procuramos fazê-lo num meio material à custa de correntes de carga livres $\vec{J}_f$:

A equação de Maxwell para $\vec{H}$ é:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Numa aproximação quasi-estática podemos ignorar a contribuição de correntes de deslocamento. Então:

$$\vec{J}_f = \nabla \times \vec{H}$$

Temos, pois:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) d^3r$$

No entanto:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

Então temos:

$$W = \frac{1}{2} \left[\int_V \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) \; d^3r - \int_V \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) \; d^3r \right]$$

Aplicando o teorema da divergência:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} d^3r - \frac{1}{2} \int_\Sigma (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} \; d\Sigma$$

Como anteriormente, consideramos que os meios materiais são extensos o suficiente para os termos de superfície não contribuírem para a soma. Podemos definir como anteriormente:

$$\omega = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Como anteriormente notamos que como $\vec{B}$ é extensiva e $\vec{H}$ é intensiva e o seu produto interno tem unidades de energia, estas quantidades também se dizem termodinamicamente conjugadas.

Os resultados desta e da anterior secção são gerais para sistemas quasi-estáticos. Se o meio material que consideramos for neutral temos:

$$\omega = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

A densidade de energia pode ser expressa â custa dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$

2.2.3 O Teorema de Poynting-Heaviside

O objetivo agora é sem fazer a aproximação quasi-estática analisar a energia associada aos campos elétricos e magnéticos bem como às cargas e correntes que lhes dão origem. Procuramos um resultado mais geral.

O trabalho realizado sobre uma carga pontual q que se desloca uma distância $d\vec{l}$ é:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right] \cdot \vec{v} dt = q \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

Onde foi utilizado o facto de $\vec{v} \times \vec{B}$ ser ortogonal a $\vec{v}$. Isto corresponde à usual asserção que o campo elétrico não realiza trabalho.

No limite do contínuo temos:

$$d\omega = (\rho d\vec{r})\vec{E} \cdot \vec{v}dt = \vec{E} \cdot \vec{J}d\vec{r}dt$$

Obtemos, pois:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) d^3r$$

Usando a lei de Ampère-Maxwell num meio material:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Podemos exprimir esta taxa de realização de trabalho associada às correntes livres $\vec{J}_f$:

$$J_f = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \left[\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right] d^3r$$

Utilizando a identidade:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

Podemos escrever:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \left[-\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right] \, d^3r - \int_\Sigma (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} \; d\Sigma$$

O trabalho total realizado por unidade de tempo sobre cargas livres é igual à diminuição de energia armazenada nos campos por unidade de tempo somada à energia que flui para (ou para fora) do sistema através de uma fronteira Σ. Esta observação corresponde ao teorema de Poynting-Heaviside.

Evidentemente, se o meio linear for neutral (e isotrópico, por simplicidade), então temos $\vec{B} = \mu\vec{H}$ e $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$.

Neste caso, temos então:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_V \left[\frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial t}\right] d^3r - \frac{1}{\mu}\int_\Sigma (\vec{E}\times\vec{B})\cdot\hat{n}d\Sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V (\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2)d^3r - \int_\Sigma \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}\cdot\hat{n}d\Sigma$$

O que nos leva à definição:

$$u_{em} := \frac{1}{2}\left[\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right]$$

E à definição do vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}$$

Assim conseguimos exprimir a conservação local de energia:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} - \int_\Sigma \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}$$

O trabalho realizado sobre as cargas livres no sistema em dt mais a variação da energia eletromagnética armazenada nos campos em dt tem de igualar o flixo de energia por unidade de tempo injetado no sistema. Na sua forma diferencial o teorema de Poynting lê:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u_{mec+u_{em}}\right) = -\nabla\cdot\vec{S}$$

2.3 Conservação do momento linear

2.3.1 Tensor de Maxwell

A força eletromagnética que atua sobre uma carga q é dada pela força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

Se considerarmos um corpo com distribuição de carga $\rho = \rho(\vec{r})$ e volume V, no limite do contínuo temos $dq = \rho dV$ e como tal podemos escrever que a força total sentida por esse corpo é:

$$\vec{F} = \int_V (\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\rho d^3r = \int_V (\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B})d^3r$$

A força por unidade de volume é, pois, dada por:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

Num meio material, que pode ou não ser o vazio, podemos exprimir esta força à custa da densidade de correntes e cargas livres.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Assim podemos escrever a força de Lorentz como:

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + \left[\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right] \times \vec{B}$$

Utilizamos agora o facto:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{D} \times \vec{B}\right] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} = \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{D} \times \vec{B}\right]$$

Ou seja, subsituindo na expressão para a força por unidade de volume temos:

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B} + \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{D} \times \vec{B}\right]$$

Utilizando a lei de Faraday e trocando a ordem dos argumentos do produto vetorial que inclui o rotacional de $\vec{H}$ temos ainda:

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{D} \times \vec{B}\right]$$

Uma vez que a divergência de $\vec{B}$ é nula podemos ainda escrever a expressão anterior como:

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{H} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{D} \times \vec{B}\right]$$

E agrupando os termos devidamente, obtemos:

$$\vec{f} = \left[(\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E})\right] + \left[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{H} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H})\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{D} \times \vec{B}\right]$$

Até este ponto o tratamento é geral para todos os meios materiais, no entanto, por simplicidade assumimos daqui em diante que os meios são neutrais e isotrópicos assumimos relações constitutivas:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Substituimos agora a na equação para $\vec{f}$ e utilizamos a identidade:

$$\frac{1}{2}\nabla(a^2) = \vec{a} \times (\nabla \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{a}$$

Para escrever:

$$\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2}\nabla(E^2) - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$$
$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{2}\nabla(B^2) - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}$$

Podemos assim escrever:

$$\vec{f} = \varepsilon\left[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}\right] - \frac{1}{2}\nabla(\varepsilon E^2) + \frac{1}{\mu}\left[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}\right] - \frac{1}{2}\nabla\frac{B^2}{\mu} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E} \times \vec{B}\right]$$

Podemis simplificar esta expressão drasticamente introduzindo o tensor $\overline{\overline{T}}$ com componentes:

$$T_{ij} = \varepsilon\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right] + \frac{1}{\mu}\left[B_iB_j - \frac{1}{2}\delta ijB^2\right]$$

Este tensor é apelidado de Tensor de Maxwell. A escolha de uma base permite a escrita do tensor na forma de uma matriz:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

Podemos agora considerar a componente j da divergência do tensor de Maxwell:

$$\left(\nabla \cdot \overline{\overline{T}}\right)_j = \partial_i T_{ij} = \varepsilon\left[(\partial_i E_i)E_j + (E_i\partial_i)E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_i E_kE_k\right] + \frac{1}{\mu}\left[(\partial_i B_i)B_j + (B_i\partial_i)B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_i B_kB_k\right]$$

$$= \varepsilon \left[(\partial_i E_i) E_j + (E_i \partial_i) E_j - \frac{1}{2} \partial_j E_k E_k \right] + \frac{1}{\mu} \left[(\partial_i B_i) B_j + (B_i \partial_i) B_j - \frac{1}{2} \partial_j B_k B_k \right]$$

O que implica:

$$\nabla \cdot \overline{\overline{T}} = \varepsilon \left[(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \right] + \frac{1}{\mu} \left[(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right]$$

Podemos identificar esta expressão na força por unidade de volume escrita anteriormente. Identificando também $\vec{E} \times \vec{B}/\mu$ como o vetor de Poynting, podemos escrever:

$$\vec{f} = \nabla \cdot \overline{\overline{T}} - \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$$

Considerando este resultado podemos considerar a força total eletromagnética no volume V. Integrando sobre o volume e utilizando o teorema da divergência obtem-se:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} \; d^3 r = \int_V \nabla \cdot \overline{\overline{T}} \; d^3 r - \varepsilon \mu \int_V \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \; d^3 r = \int_\Sigma \overline{\overline{T}} \cdot \hat{n} \; d\Sigma - \varepsilon \mu \int_V \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \; d^3 r$$

2.3.2 Conservação do momento linear

De acordo com a segunda lei de Newton, a força aplicada a um objeto é igual à taxa de variação do seu momento:

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{P}_{mech}}{\partial t}$$

Assim, somos levados a definir uma quantidade apelidada de momento eletromagnético dada por:

$$P_{em} = \mu \varepsilon \int_V \vec{S} \; d^3 r$$

Assim temos:

$$\frac{\partial \vec{P}_{mec}}{\partial t} = \int_\Sigma \overline{\overline{T}} \cdot \hat{n} \; d\Sigma - \frac{\partial \vec{P}_{em}}{\partial t}$$

Este momento eletromagnético corresponde ao momento guardado nos campos. O termo que contém o tensor de Maxwell corresponde a um fluxo de momento por unidade de tempo através da superfície.

A densidade de momento armazenada nos campos é definida de forma evidente:

$$\vec{p}_{em} = \mu\varepsilon\vec{S}$$

Em particular, se:

$$\frac{\partial\vec{P}_{mec}}{\partial t} = 0$$

Temos:

$$\frac{\partial\vec{p}_{em}}{\partial t} - \nabla\cdot\overline{\overline{T}} = 0$$

O que corresponde a uma equação da continuidade para o momento. Note-se esta equação é válida apenas se não ocorrem variações de momento mecânico, por exemplo no vazio. Se tal não for o caso o momento mecânico e o momento armazenado nos campos eletromagnéticos não é conservado, apenas o momento total o é.

2.4 Conservação do momento angular

Vimos nestas duas secções que os campos eletromagnéticos, que são construídos como mediadores das forças entre cargas tomam um papel muito mais independente e central do que inicialmente considerado. Estes carregam uma densidade de energia:

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

E uma densidade de momento:

$$\vec{p}_{em} = \varepsilon(\vec{E}\times\vec{B})$$

E assim, podemos definir uma densidade de momento angular armazenada nos campos, definida por:

$$\vec{l}_{em} = \vec{r}\times\vec{p}_{em} = \varepsilon_0(\vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B}))$$

Capítulo 3

Ondas Eletromagnéticas

3.1 Ondas eletromagnéticas no vazio

3.1.1 As equações de Maxwell e a equação de onda

A promoção dos campos eletromagnéticos a quantidades físicas discutida no último capítulo pode ser descrita pela existência de ondas eletromagnéticas. Procuramos, nesta secção, uma explorar o que ocorre na situação mais simples.

No vazio, as densidades de cargas e correntes são nulas. As equações de Maxwell lêm:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Estas equações constituem um conjunto de equações diferenciais parciais de primeira ordem acopladas para $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Estas podem ser desacopladas se aplicarmos o rotacional:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Assim, temos uma equação:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Analogamente, para $\vec{B}$ temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{E} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

E obtemos uma equação:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Temos assim duas equações separadas para $\vec{E}$ e $\vec{B}$, no entanto são equações diferenciais parciais de segunda ordem.

São, de facto, equações de onda tridimensionais. Cada componente cartesiano dos campos elétricos e magnéticos satisfaz a equação de onda. A velocidade da onda é dada por:

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

Podemos, essencialmente pelo princípio de Fourier, escrever qualquer solução para a equação de onda como uma soma de ondas planas. Assim, restringimos a nossa análise a ondas planas, i.e. ondas sinusoidais com frequência ω.

Tomamos:

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}$$
$$\tilde{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{B}}_0 e^{\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}$$

Substituindo na lei de Faraday, obtemos:

$$\nabla \times \tilde{\vec{E}} = -\frac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow i\vec{k} \times \tilde{\vec{E}}_0 = i\omega \tilde{\vec{B}}_0$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \tilde{\vec{E}}_0 = \omega \tilde{\vec{B}}_0$$

Ou seja, temos que a polarização dos campos magnéticos e elétricos são perpendiculares, e são perpendiculares à direção de propagação:

$$\tilde{\vec{B}} \perp \tilde{\vec{E}} \perp \vec{k}$$

Notamos agora que se os três vetores são perpendiculares, então as suas amplitudes podem ser relacionadas de forma simples:

$$|\vec{k} \times \tilde{\vec{E}}_0| = \omega |\tilde{\vec{B}}_0|$$

O que pode ser escrito:

$$|\tilde{\vec{E}}_0| = \frac{\omega}{k} |\tilde{\vec{B}}_0|$$

As amplitudes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão, pois, relacionadas, apesar de as equações de onda estarem desacopladas. Podemos escrever esta relação sucintamente como:

$$E_0 = cB_0$$

3.1.2 Energia e momento de uma onda eletromagnética

Como visto anteriormente, no caso de uma onda plana monocromática, temos que:

$$B^2 = \frac{1}{c^2} E^2 = \mu_0 \varepsilon_0 E^2$$

E assim, as contribuições elétricas e magnéticas para a energia armazenada nos campos são iguais:

$$u_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

Ao propagar-se, a onda carrega um fluxo de energia. Este é dado pelo vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Para ondas planas monocromáticas temos:

$$\vec{S} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)\hat{k} = c\ u\ \hat{k}$$

O vetor de Poynting é igual é densidade de energia carregada vezes a velocidade de propagação da onda.

A densidade volúmica de momento linear é:

$$\vec{p}_{em} = \mu_0\varepsilon_0\vec{S}$$

Para uma onda plana é, assim dada por:

$$\vec{p}_{em} = \mu_0\varepsilon_0\frac{1}{c\mu_0}E_0^2\cos^2(kz - \omega t + \delta)\hat{z} = \frac{u}{c}\hat{z}$$

Ou seja, temos uma relação de dispersão:

$$p_{em}c = u$$

Fazemos, para terminar uma observação†. O momento linear por unidade de volume é definido sem ser invocado o conceito de massa m. No entanto é possível imaginar que este fluxo de energia e momento (que se propaga à velocidade da luz) se deva a um gás de partículas. Isto corresponde à perspetiva de Newton. No entanto, o momento linear de uma partícula em relatividade restrita é definido como:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Aqui $|\vec{p}|$ só pode ser finito para $v = c$ se $m = 0$. Uma consequência direta da relatividade restrita é que as partículas de luz de Newton têm massa nula e de facto, o mesmo é o caso para qualquer partícula que se propague à velocidade da luz.

3.1.3 Valores médios de energia e momento linear de uma onda plana: Pessão de radiação

Como vimos, para uma onda plana:

$$u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi)$$

$$\vec{S} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi)\hat{z} = cu\hat{z}$$

$$\vec{p}_{em} = \frac{1}{c}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi)\hat{z} = \frac{u}{c}\hat{z}$$

Em média, $\left\langle \cos^2 \right\rangle = 1/2$. Podemos assim calcular os valores médios destas grandezas:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

$$\vec{I} \equiv \left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

$$\langle \vec{p}_{em} \rangle = \frac{1}{2c}\varepsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

Podemos, assim definir a pressão de radiação eletromagnética como o momento linear transferido por unidade de tempo através de uma superfície de área A. Uma variação de momento é dada por:

$$\Delta\vec{p} = \langle \vec{p} \rangle \, c \Delta t A$$

Ou seja, podemos identificar uma pressão como:

$$P = \frac{\Delta\vec{p}}{A\Delta t} = \langle \vec{p}_{em} \rangle \, c = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}$$

3.2 Ondas eletromagnéticas num meio linear, neutral e isotrópico livre de cargas e correntes

3.2.1 Considerações gerais

Num meio isotrópico e neutral temos as equações de Maxwell no vazio:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

E as relações constitutivas:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

Se ε e μ são funções reais e constantes, i.e. o meio é homogéneo, então as equações acima são iguais às equações de Maxwell no vazio a menos de uma substituição simples de ε_0, μ_0 por ε, μ. As equações de onda vêm, do mesmo modo, de:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

O que corresponde a uma equação de onda com velocidade:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \equiv \frac{c}{n}$$

Onde $n \equiv \sqrt{\varepsilon \mu / \varepsilon_0 \mu_0}$ é definido como o índice de refração do meio material.

Tudo o resto permanece, a menos desta substituição, idêntico. A densidade de energia e o vetor de Poynting são respetivamente dados por:

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B})$$

E no caso de ondas planas, temos:

$$\begin{cases} \omega = kv \\ B_0 = E/v \end{cases}$$

Temos ainda que a intensidade dada pelo valor médio do vetor de Poynting corresponde a:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2\mu} \frac{E_0^2}{v} = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2$$

Para proceder à análise do comportamento dos campos eletromagnéticos quando ocorrem descontinuidades entre dois meios, recorremos às condições de fronteira impostas pelas equações de Maxwell:

$$\begin{cases} D_1^{\perp} = D_2^{\perp} \\ E_1^{//} = E_2^{//} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1^\perp = B_2^\perp \\ H_1^{//} = H_2^{//} \end{cases}$$

3.2.2 Reflexão e transmissão para incidência normal

No caso de incidência normal, consideramos que as ondas se propagam segundo $\hat{z}$ e encontram uma interface no plano xy. Assumindo, sem perda de generalidade, uma polarização do campo elétrico segundo $\hat{x}$ e do campo magnético segundo $\hat{y}$ temos ondas planas incidentes com a forma:

$$\begin{cases} \vec{\tilde{E}}_i(z,t) = \tilde{E}_{0i}\hat{x}e^{i(k_i z - \omega t)} \\ \vec{\tilde{B}}_i(z,t) = \tilde{B}_{0i}\hat{y}e^{i(k_i z - \omega t)} = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1}\hat{y}e^{i(k_i t - wt)} \end{cases}$$

E refletidas, com a forma:

$$\begin{cases} \vec{\tilde{E}}_r(z,t) = \tilde{E}_{0r}\hat{x}e^{i(k_i z - \omega t)} \\ \vec{\tilde{B}}_r(z,t) = -\tilde{B}_{0r}\hat{y}e^{i(k_i z - \omega t)} \end{cases}$$

Por outro lado, as ondas transmitidas têm ainda a forma:

$$\begin{cases} \vec{\tilde{E}}_t(z,t) = \tilde{E}_{0t}\hat{x}e^{i(k_i z - \omega t)} \\ \vec{\tilde{B}}_t(z,t) = \frac{\tilde{E}_{0t}}{v_2}\hat{y}e^{i(k_i z - \omega t)} \end{cases}$$

Podemos analisar as condições de fronteira em $z = 0$, obtendo:

$$\begin{cases} E_1^{//} = E_2^{//} \Rightarrow \tilde{E}_{0i}(z=0) + \tilde{E}_{0r}(z=0) = \tilde{E}_{0t}(z=0) \\ \frac{B_1^{//}}{\mu_1} = \frac{B_2^{//}}{\mu_2} \Rightarrow \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0i}(z=0) - \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0r}(z=0)\right) = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{1}{v_2}\tilde{E}_{0t}(z=0)\right) \end{cases}$$

Assim, simplificando a notação anterior e deixando caír a notação $z = 0$ nas várias expressões, obtemos:

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t} \\ \tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}\tilde{E}_{0t} \end{cases}$$

Introduzindo a constante $\beta = \mu_1 v_1/\mu_2 v_2$, reescrevemos as expressões acima como:

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t} \\ \tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \beta\tilde{E}_{0t} \end{cases}$$

Somando as equações anteriores, obtemos:

$$2\tilde{E}_{0i} = (1+\beta)\tilde{E}_{0t}$$

Ou seja, obtemos a intensidade do campo transmitido em função do incidente:

$$\tilde{E}_{0t} = \frac{2}{1+\beta}\tilde{E}_{0i}$$

Subtraindo as mesmas expressões, escrevemos:

$$2\tilde{E}_{0r} = (1-\beta)\tilde{E}_{0t}$$

E substituindo agora o valor de $\tilde{E}_{0t}$ obtido anteriormente, escrevemos imediatamente:

$$\tilde{E}_{0r} = \frac{(1-\beta)}{1+\beta}\tilde{E}_{0i}$$

Podemos, assim, introduzir a definição de índice de refração:

$$n = \frac{c}{v} = c\sqrt{\varepsilon\mu}$$

β pode ser escrito em termos deste coeficiente:

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 \frac{c}{n_1}}{\mu_2 \frac{c}{n_2}} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

E podemos obter as expressões gerais para as amplitudes dos campos:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{0t} &= \frac{2}{1+\beta}\tilde{E}_{0i} = \frac{2\mu_2 n_1}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2}\tilde{E}_{0i}\\ \tilde{E}_{0r} &= \frac{2}{1+\beta}\tilde{E}_{0i} = \frac{\mu_2 n_1 - \mu_1 n_2}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2}\tilde{E}_{0i}\end{aligned}$$

Podemos particularizar para o caso de um meio não-magnético, ou seja, como $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Neste caso:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{0t} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2}\tilde{E}_{0i}\\ \tilde{E}_{0r} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\tilde{E}_{0i}\end{aligned}$$

De notar, é que aqui se torna evidente que se $n_1 > n_2$, ou seja $v_2 > v_1$, a onda refletida estará em fase com a incidente, ao passo que se $n_2 > n_1$, ou seja $v_2 < v_1$, a onda refletida está em anti-fase com a incidente.

Para termos as relações desejadas para as amplitudes reais, tomamos o módulo:

$$E_{0t} = \left|\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right| E_{0i}$$
$$E_{0r} = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right| E_{0i}$$

Podemos, procurar, agora definir não as relações entre as amplitudes das ondas incidentes, refletidas e transmitidas, mas antes as relações entre as suas intensidades. Lembrando que a intensidade é a energia média por unidade de área por unidade de tempo (potência média por unidade de área) e é dada por:

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2$$

Em geral, o coefiente de refleção R é definido como:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_{or}^2}{E_{0i}^2} = \left(\frac{n_1\mu_2 - \mu_1 n_2}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2}\right)^2$$

Por outro lado, o coeficiente de transimssão é dado por:

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{ot}^2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{0i}^2} = \left(\frac{2\mu_2 n_1}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2}\right)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}} = \left(\frac{2\mu_2 n_1}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2}\right)^2 \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}$$

Ou seja:

$$T = \frac{4\mu_1\mu_2 n_2 n_1}{(\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2)^2}$$

Estes resultados podem ainda ser simplificados para o caso de um meio não magnético. Obtém-se, imediatamente:

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Notamos que quer para meios magnéticos, quer para meios não magnéticos $R+T=1$.

Provamos, por último, que a polarização das ondas transmitidas e refletidas é a mesma da incidente. Para tal efeito consideramos os dois vetores de polarização normalizados incidentes e transmitidos escritos de uma forma geral:

$$\hat{n}_t = \cos\theta_t\hat{x} + \sin\theta_t\hat{y}$$

$$\hat{n}_r = \cos\theta_r\hat{x} + \sin\theta_r\hat{y}$$

Pela continuidade do campo elétrico, temos:

$$E_{0i}\hat{x} + E_{0r}\hat{n}_r = E_{0t}\hat{n}_r$$

E para a condição de fronteira do campo magnético:

$$E_{0i}\hat{y} - E_{0r}(\hat{z}\times\hat{n}_r) = \beta E_{0t}(\hat{z}\times\hat{n}_t)$$

Para o campo elétrico, segundo $\hat{y}$ temos:

$$E_{0r}\sin\theta_r = E_{0t}\sin\theta_t$$

E para o campo magnético, segundo $\hat{x}$, vem:

$$E_{0r}\sin\theta_r = \beta E_{0t}\sin\theta_t$$

Como ambas as expressões têm de ser verdadeiras, então obtemos a condição:

$$\sin\theta_r = \sin\theta_t = 0$$

Isto implica que a polarização das ondas refletidas e transmitidas tem de ser igual.

3.2.3 Refletividade para incidência oblíqua†

3.3 Ondas eletromagnéticas num metal

3.3.1 Absorção por cargas livres

Nas anteriores secções, estipulamos que as cargas livres ρ_f e densidades de correntes livres $\vec{J}_f$ eram nulas. Estes predicados são válidos apenas se consideramos ondas que se propagam no vácuo ou em materiais isoladores, como o virdo. No caso de condutores não temos estas condições. De facto, verifica-se a lei de Ohm:

$$\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$$

Podemos relacionar esta densidade de corrente com uma densidade de carga invocando a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

Substituindo pela lei de Ohm, temos:

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

E utilizando a lei de Gauss, temos:

$$\sigma \frac{\rho_f}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

Isto corresponde a uma equação diferencial para as cargas livres que pode ser facilmente resolvida e tem solução geral:

$$\rho_f(t) = \rho_f(0) e^{-\sigma/\varepsilon t}$$

Assim, qualquer carga livre injetada num condutor será dissipada num tempo característico $\tau = \varepsilon/\sigma$. No caso de um condutor perfeito: $\sigma = \infty \Rightarrow \tau = 0$. No caso de um condutor bom, $\tau \gg T$ onde T é algum tempo de interesse para um dado problema, por exemplo o período de uma onda. No caso de um mau condutor $\tau \gg T$, e temos um comportamento transiente.

Se não estivermos interessados neste tipo de comportamento transiente, podemos considerar, em boa aproximação, para um bom condutor $\rho_f = 0$, ou seja, temos as equações de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 & \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \nabla \times \vec{B} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\sigma\vec{E} \end{cases}$$

Procedemos analogamente ao caso de ondas no vazio ou num meio material homogéneo e isotrópico, e calculamos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

E do mesmo mofo para o campo magnético. Obtemos, assim, as equações:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla^2 \vec{B} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Para as resolver podemos procurar soluções do tipo onda plana, considerando os vetores complexos:

$$\tilde{\vec{E}}(z,t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i\tilde{k}z - \omega t}$$
$$\tilde{\vec{B}}(z,t) = \tilde{\vec{B}}_0 e^{i\tilde{k}z - \omega t}$$

Substituindo estes anstazs nas equações, obtemos:

$$-\tilde{k}^2 = -i\mu\sigma\omega - \mu\varepsilon\omega^2$$

Em particular, temos, assim:

$$\tilde{k}^2 = k^2 - \eta^2 + 2ik\eta$$

Temos um sistema de equações:

$$\begin{cases} k^2 - \eta^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \\ 2k\eta = \mu\sigma\omega \end{cases}$$

Resolvendo em ordem a k, obtemos:

$$k^2 - \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2k}\right)^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

Multiplicando todos os termos por k^2, vem:

$$k^4 - \mu\varepsilon\omega^2 k^2 - \frac{1}{4}\mu^2\sigma^2\omega^2 = 0$$

Temos assim:

$$k^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 \pm \sqrt{\mu^2\varepsilon^2\omega^4 + \mu^2\sigma^2\omega^2}}{2}$$

Ou seja, colocando termos em evidência:

$$k^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]$$

Como k tem de ser real, apenas temos, como solução válida, o termo positivo. Vem:

$$k = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}\right]^{1/2}$$

Procedendo de modo equivalente para η, temos a equação:

$$\left(\frac{\mu\sigma\omega}{2\eta}\right)^2 - \eta^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

Multiplicando por η^2, vem:

$$-\eta^4 - \mu\varepsilon\omega^2\eta^2 + \frac{1}{4}\mu^2\sigma^2\omega^2 = 0$$

Pelo que vem:

$$\eta^2 = -\frac{\mu\varepsilon\omega^2 \pm \sqrt{\mu^2\varepsilon^2\omega^4 + \mu^2\sigma^2\omega^2}}{2}$$

Colocando termos em evidência, vem:

$$\eta^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]$$

Para que o resultado seja real, apenas é válida a solução com a soma. Assim, vem:

$$\eta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2}$$

Assim, com este vetor de onda complexo, as soluções para as equações de Maxwell nas condições descritas são ondas atenuadas exponencialmente:

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-\eta z} e^{i(kz-\omega t)}$$
$$\tilde{\vec{B}} = \tilde{\vec{B}}_0 e^{-\eta z} e^{i(kz-\omega t)}$$

O comprimento de penetração da radiação num metal condutor é, assim definido como:

$$d \equiv \frac{1}{\eta}$$

Assim, a parte imaginária do vetor de onda é uma medida do quão longe a onda penetra num condutor, enquanto a parte real determna, como anteriormente, a velocidade de propagação, comprimento de onda e índice de refração:

$$v = \frac{\omega}{k}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$n = \frac{ck}{\omega}$$

3.3.2 Restrições adicionais impostas pelas equações de Maxwell

Notamos, agora, que a caracterização das ondas feita até agora pelas equações de onda num meio condutor é incompleta. De facto as equações de Maxwell impõem restrições adicionais sobre o comportamento das ondas, nomeadamente sobre a sua fase e polarização. Primeiramente, das equações:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Obtemos imediatamente que as ondas são transversais. Consideramos, sem perda de generalidade que:

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_0 \hat{x} e^{-\eta z} e^{i(kz-\omega t)}$$

Assim, utilizando:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

, vem:

$$i(\tilde{\vec{k}} \times \tilde{\vec{E}}) = -i\omega \vec{B}$$

O que implica:

$$\tilde{k}\tilde{E}_0(\hat{z} \times \hat{x}) = \omega \tilde{\vec{B}}$$

Assim, temos que $\tilde{\vec{B}}$ tem a direção $\hat{y}$ e o módulo:

$$\tilde{B}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega}\tilde{E}_0$$

Ou seja:

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{\tilde{k}}{\omega}\vec{E}_0 \hat{y} e^{-\eta z} e^{i(kz-\omega t)}$$

E novamente, os campos elétricos e magnéticos são mutuamente perpendiculares entre si e entre a direção de propagação.

Procuramos agora estabelecer de uma forma mais clara a relação entre as amplitudes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Tendo em conta que qualquer número complexo $\tilde{k}$ pode ser escrito em forma polar como:

$$\tilde{k} = Ke^{i\phi}$$

Com:

$$K = \sqrt{k^2 + \eta^2} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2}}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\eta}{k}\right)$$

Assim, as amplitudes complexas dos campos elétricos e magnéticos estão relacionadas por:

$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K}{\omega} e^{i\phi} E_0 e^{i\delta_E}$$

Os campos elétricos e magnéticos deixam de estar em fase e verifica-se uma diferença de fase correspondente a:

$$\delta_B - \delta_E = \phi$$

As amplitudes reais estão relacionadas por:

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}$$

3.3.3 Refletividade de uma superficie metálica

As condições de fronteira utilizadas para analisar a reflexão e refração entre dois dielétricos não é válida na presena de cargas livres, sendo assim necessário utilizar as condições de fronteira gerais para as equações de Maxwell previamente derivadas:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \sigma_f \\ E_1^{//} = E_2^{//} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1^{\perp} = B_2^{\perp} \\ \frac{1}{\mu_1}B_1^{//} - \frac{1}{\mu_2}B_2^{//} = \vec{k}_f \times \hat{n} \end{cases}$$

3.4 Guias de ondas

Podemos considerar um tubo oco com paredes dotadas de uma condutividade elétrica perfeita. Assim, nas paredes $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} = 0$ no interior do material.

As condições de fronteira impõe, assim:

$$\begin{cases} B_1^{\perp} = 0 \\ E_1^{//} = 0 \end{cases}$$

Note-se que cargas e correntes livres irão gerar-se na superfície do condutor de modo a fazer com que as condições de fronteira sejam obedecidas. Estamos interessados em ondas monocromáticas que se propaguem ao longo do tubo. Estas terão a forma genérica:

$$\tilde{\vec{E}}(x,y,z,t) = \tilde{\vec{E}}_0(x,y)e^{ikz-\omega t}$$

$$\tilde{\vec{B}}(x,y,z,t) = \tilde{\vec{B}}_0(x,y)e^{ikz-\omega t}$$

Os campos elétricos no interior do tubo terão de satisfazer as equações de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Procuramos, deste modo encontrar as amplitudes $\tilde{\vec{E}}_0$ e $\tilde{\vec{B}}_0$ de modo a que os campos fiquem sujeitos às condições de fronteira.

Como iremos ver, estas ondas confinadas não são, de um modo geral, transversais.

Admitindo amplitudes gerais, da forma:

$$\tilde{\vec{E}}_0 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$$

$$\tilde{\vec{B}}_0 = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

A lei de Faraday e de Ampère-Maxwell impõe:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z & (i) \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} - ikE_y = i\omega B_x & (ii) \\ ikE_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y & (iii) \\ \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_z & (iv) \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_x & (v) \\ ikB_x - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_y & (vi) \end{cases}$$

As equações (ii), (iii), (v) e (vi) podem ser resolvidas de modo a exprimir as componentes E_x, E_y, B_x, B_y à custa das restantes componentes.

Os resultados são:

$$\begin{cases} E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\dfrac{\partial E_z}{\partial x}+\omega\dfrac{\partial B_z}{\partial y}\right) \\ E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\omega\dfrac{\partial B_z}{\partial x}\right) \\ \\ B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\dfrac{\partial B_z}{\partial x}-\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}\right) \\ B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\dfrac{\partial B_z}{\partial y}-\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right) \end{cases}$$

Inserindo estes resultados nas restantes equações de Maxwell é simples obter:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+(\omega/c)^2-k^2\right]E_z=0 \\ \\ \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+(\omega/c)^2-k^2\right]B_z=0 \end{cases}$$

Assim, temos de resolver estas equações diferenciais para escrever as componentes longitudinais dos campos. Em particular, se $E_z = 0$ o campo elétrico é puramente transversal. Diz-se que as ondas se propagam num modo TE. Por outro lado, se $B_z = 0$ é o campo magnético que se propaga de uma forma puramente transversal e diz-se que o campo se propaga num modo TM. Se ambos $E_z = B_z = 0$ então o campo propaga-se num modo TEM. Como iremos ver num guia de ondas oco, não podem ocorrer modos TEM.

Se $E_z = 0$, a lei de Gauss diz:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$$

E se $B_z = 0$, a lei de Faraday diz:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0$$

Como $\vec{E}_0$ tem então divergência e rotacional nulos, $\vec{E}_0 = \nabla\phi$ com $\nabla^2\phi = 0$. Uma vez que

$$\vec{E}^{//}=0$$

nas paredes do tubo, então estas são equipotenciais. Um potencial ϕ que satisfaz as condições de fronteira e a equação de Laplace é $\phi = const.$. Pelo teorema da existência e unicidade de soluções da equação de Laplace, esta solução é única, e assim $\vec{E} = 0$ para todo o interior. A única solução que existe para um modo TEM é assim um campo elétrico (e magnético por conseguinte) nulo.

3.4.1 Modos TE - o caso de um tubo retangular

Podemos considerar um guia de ondas retangular com altura a e largura b. Consideramos, em primeira instância, um a propagação de um modo TE. Para resolver as equações que determinam a componente longitudinal do campo magnético fazemos separação de variáveis:

$$B_z(x,y) = X(x)Y(y)$$

Substituindo na equação diferencial e dividindo por XY, obtemos:

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \left[(\omega/c)^2 - k^2\right] = 0$$

Assim, uma vez que os termos dependentes de x e y têm de ser constantes, temos:

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -k_x^2 X$$
$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = -k_y^2 Y$$

Com $-k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0$. Para o caso de X, a solução geral é da forma:

$$X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

No entanto, as condições de fronteira impõe $B_x(0) = 0$. Como $B_x \propto dX/dx$, então:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}(0) = 0$$

O que implica imediatamente $A = 0$. Por outro lado, a mesma condição em $x = a$ impõe uma quantização do vetor de onda:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}$$

Procedendo de um modo semelhante para B_y e dY/dy obtemos:

$$k_y = \frac{n\pi}{b}$$

E uma solução da forma:

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Esta solução é apelidada de modo TE_{mn}. O vetor de onda associado com esta solução é:

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \pi^2 \left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]}$$

Note-se que no caso em que $\omega < c\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \equiv \omega_{mn}$, então o vetor de onda é imaginário e as ondas serão exponencialmente amortecidas. A frequência ω_{mn} é apelidada de frequência de corte.

A menor frequência a que uma onda se pode propagar no guia de ondas corrresponde assim a:

$$\omega_{1,0} = \frac{c\pi}{a}$$

Uma vez que o modo $TE_{0,0}$ não pode ocorrer. Note-se, agora que o vetor de onda pode ser escrito como:

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}$$

A velocidade de fase é assim dada por:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}}$$

Como $\omega \geq \omega_{mn}$, então $v > c$, o que parece ser um problema por quebrar a causalidade. No entanto, notamos que a energia carregada pela onda viaja à velocidade de grupo:

$$v_g = \frac{1}{\frac{\partial k}{\partial \omega}}$$

Temos:

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{2\omega}{2c\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}}$$

E assim:

$$v_g = \frac{\omega}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2} < c$$

3.4.2 Modos TM - o caso de um tubo retangular

3.4.3 Modos TEM - o caso de um guia de ondas coaxial

Vimos, nas secções anteriores que um guia de ondas oco não suporta ondas TEM. Tal não é o caso se considerarmos um guia de ondas coaxial.

Como anteriormente, se considerarmos as equações de Maxwell na forma obtida para ondas monocromáticas com $E_z = B_z = 0$, temos:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0$$

Capítulo 4

Potenciais e Campos

4.1 Potenciais eletromagnéticos

4.1.1 Escrita das equações de Maxwell à custa de potenciais

O objetivo deste capítulo é a derivação das soluções gerais para as equações de Maxwell não só para o caso estático, mas também para o caso dinâmico. Ou seja, procuramos, dado $\rho(\vec{r},t)$ e $\vec{J}(\vec{r},t)$ encontrar os campos $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B}(\vec{r},t)$ e generalizar a lei de Coulomb e Biot-Savart para a eletrodinâmica.

O primeiro passo neste sentido é a formulação das equações de Maxwell à custa do potencial-vetor magnético e do potencial escalar elétrico.

Começamos por notar que na eletrostática $\nabla \times \vec{E} = 0$, no entanto, em geral $\nabla \times \vec{E} = d\vec{B}/dt \neq 0$ e assim não podemos dizer com generalidade $\vec{E} = -\nabla\phi$. Por outro lado, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ no caso dinâmico. Assim, para qualquer um dos casos:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Consequentemente, podemos dizer em geral:

$$\nabla \times \vec{E} = -\left(\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Logo:

$$-\nabla\phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Temos equações que relacionam em geral na eletrodinâmica os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com os potenciais $\vec{A}$ e ϕ:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

Usamos, até agora duas das quatro equações de Maxwell. Se considerarmos as outras duas e substituirmos os campos assim obtidos, podemos escrever:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \mu_0\varepsilon_0 \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right)$$

Utilizando o rotacional do rotacional, esta expressão pode ser escrita como:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \varepsilon_0\mu_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Ou seja, as restantes equações de Maxwell relacionam os potenciais com as fontes:

$$\begin{cases} \nabla^2\phi + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left[\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right] = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Isto é, dadas as fontes, podemos calcular os potenciais $\vec{A}$ e $\vec{J}$ utilizando estas equações.

É simples verificar que tomando:

$$L = \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

E considerando o operador d'Alembertiano: $\Box^2 = \nabla^2 - 1/v^2 \partial^2/\partial t^2$, os potenciais podem ser escritos de forma simétrica:

$$\begin{cases} \Box^2\phi + \dfrac{\partial L}{\partial t} = -\rho/\varepsilon_0 \\ \Box^2\vec{A} - \nabla^2 L = -\mu_0\vec{J} \end{cases}$$

4.1.2 Liberdade de Gauge

As expressões anteriores fornecem um possível caminho para o cálculo dos potenciais ϕ e $\vec{A}$ partindo das fontes, no entanto, notamos que as equações para $\phi(\vec{E},\vec{B})$ e $\vec{A}(\vec{E},\vec{B})$ não definem os potenciais univocamente. Podemos modificar os potenciais de modo a simplificar a sua relação com as fontes. A modificação pode ser introduzida do seguinte modo:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha} \\ \phi' = \phi + \beta \end{cases}$$

Desde que $\vec{A}'$ e ϕ' dêm origem aos mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Começamos por:

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \nabla \times \vec{\alpha} = 0$$

E por outro lado:

$$-\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow -\nabla\phi - \nabla\beta - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\Rightarrow -\nabla\beta - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = 0$$

No entanto, como $\vec{\alpha}$ é irrotacional, podemos escrever este termo como um gradiente:

$$\vec{\alpha} = \nabla\lambda$$

Ou seja:

$$\nabla\left[\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right] = 0$$

O que implica que a função não depende do espaço. Pode no entanto depender do tempo, pelo que:

$$\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = k(t)$$

Absorvendo $k(t)$ para λ, ou seja, definindo:

$$\lambda' = \lambda - \int_0^t dt' k(t')$$

Escrevemos, compactamente:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda' \\ \phi' = \phi - \dfrac{\partial\lambda'}{\partial t} \end{cases}$$

Verificamos, pois, que existe uma grande liberdade na escolha dos potenciais. Dado um campo escalar λ', podemos sempre somar $\nabla\lambda'$ a $\vec{A}$ e subtrair $\partial\lambda'/\partial t$ a ϕ sem alterar a física. Esta liberdade de alterar os potenciais é apelidada de liberdade de Gauge.

4.1.3 A Gauge de Coulomb e Lorentz

Em vista da secção anterior, podemos escolher várias Gauges que simplifiquem a forma das relações entre potenciais e fontes e permitam simplificar os cálculos. Em particular, podemos escolher λ' tal que $\nabla \cdot \vec{A} = -\nabla^2\lambda'$, ou seja, tornando $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$. Esta é apelidada de Gauge de Coulomb simplifica o cálculo de ϕ drasticamente:

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\nabla\dfrac{\partial\phi}{\partial t} \end{cases}$$

Note-se que um resultado peculiar da escolha da Gauge de Coulomb é que o potencial ϕ é determinado pela distribuição de carga no momento atual, o que parece contrariar a propagação de informação a uma velocidade finita (ou do ponto de vista da relatividade, viola a causalidade). No entanto, o campo $\vec{E}$ não varia instantaneamente com variações de diferença de carga, uma vez que $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$.

Podemos, por outro lado, escolher λ' tal que $L = 0$, o que impõe uma simetria perfeita das equações que relacionam os potenciais com as fontes:

$$\begin{cases} \Box^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \\ \Box^2\phi = -\rho/\varepsilon_0 \end{cases}$$

A escolha da Gauge de Lorentz prova-se como uma extensão natural do caso estático para a eletrodinâmica, já que o operador d'Alembertiano corresponde à extensão natural do Laplaciano para quatro dimensões (na métrica de Minkowski). Assim a eletrodinâmica com esta escolha de Gauge resume-se à solução de equações de onda não-homogéneas para fontes especificadas.

4.2 Os potenciais e a formulação Lagrangiana e Hamiltoniana da eletrodinâmica

4.2.1 Formulação Lagrangiana para potenciais dependentes da velocidade

Procuramos nesta secção derivar uma expressão para a Força de Lorentz à custa dos potenciais $\vec{A}$ e ϕ. Para tal efeito fazemos algumas considerações sobre mecânica Lagrangeana e procuramos exprimir a eletrodinâmica deste ponto de vista.

Começamos considerando, com generalidade uma força $\vec{F}$ que atua numa partícula. $\vec{F}$ pode ter uma componente conservativa e outra não conservativa.

$$F_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + Q_j$$

Se definirmos o Lagrangeano $\mathscr{L} = T - U$, então o princípio da ação mínima implica que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} = Q_j$$

Multiplicando de ambos os lados por $\dot{q}_j$ e somando sobre j temos:

$$\sum_j \left[\dot{q}_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\right] = \sum_j \dot{q}_j Q_j$$

No entanto, expandindo a derivada total:

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}$$

Admitindo que o Lagrangeano não depende explicitamente do tempo, podemos escrever:

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} - \sum_j \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \sum_j \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

Substituindo acima, vem:

$$\sum_j \left[\dot{q}_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} = \sum_j \dot{q}_j Q_j$$

E reconhecendo a derivada temporal de $\dot{q}_j \partial \mathscr{L}/\partial \dot{q}_j$ na soma, obtemos, da expressão anterior:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_j\left\{\dot{q}_j\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\right\}-\mathscr{L}\right]=\sum_j\dot{q}_jQ_j$$

Notando que a definição do Hamiltoneano é a transformada de Legendre do Lagrangeano:

$$\mathscr{H}=\sum_j\left\{\dot{q}_j\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}-\mathscr{L}\right\}$$

Podemos escrever compactamente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{H}=\sum_j\dot{q}_jQ_j$$

Assim, o Hamiltoneano varia no tempo devido à presença de forças dissipativas.

Estamos agora em posição de aplicar este formalismo à derivação da força de Lorentz em função de um potencial. Se tal for em princípio possível, o potencial dependerá não só das coordenadas, mas também das velocidades da partícula:

$$U(q_j,\dot{q}_j)$$

4.2.2 Notas marginais

4.3 Potenciais avançados e retardados

4.3.1 Potenciais avançados e retardados

No caso estático, as duas equações com o operador d'Alembertiano para os potenciais reduzem-se a quatro cópias da equação de Poisson:

$$\nabla^2V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$$

Estas têm a solução familiar:

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{\mathscr{r}}d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\mathscr{r}} d^3r'$$

Podemos prorcurar para situações não estacionárias invcar um argumento heurístico simples: Enquanto a informação acerca de alterações de ρ e $\vec{J}$ não chegarem a um ponto $\vec{r}$, essas alterações não serão sentidas. A informação viaja à velocidade da luz, assim, não é o tempo atual que importa no caso dinâmico, mas sim um tempo retardado t_r. Como a distância entre um ponto $\vec{r}'$ de uma distribuição de carga e o ponto $\vec{r}$ é $\vec{\mathscr{r}}$, o tempo retardado é definido como:

$$t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}$$

A generalização natural para fontes não estáticas é:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d^3r'$$
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d^3r'$$

4.3.2 Cálculo direto dos campos e as equações de Jefimenko

4.4 Campos criados por cargas em movimento

4.4.1 Os potenciais de Liénard-Wiechert

4.4.2 Campos de uma carga em movimento

Capítulo 5

Relatividade e Eletrodinâmica

5.1 O princípio da relatividade

5.1.1 A invariância de c

5.1.2 A transformação de Lorentz própria

5.1.3 Consequências cinemáticas

5.1.4 Momento linear

5.1.5 Força relativista

5.1.6 Transformações do 4-momento

Capítulo 6

Eletromagnetismo a partir de Simetria†

6.1 O grupo de Lorentz

6.1.1 Representação matricial do grupo de Lorentz

6.1.2 A algebra de Lie do grupo de Lorentz

6.1.3 Representações do grupo de Lorentz

6.2 Teorias de campo

6.2.1 Teorias de partículas e teorias de campo

6.2.2 Teorema de Noether para teorias de campo

6.2.3 Simetrias internas

6.3 Equação de Proca e as equações de Maxwell

6.3.1 Invariância e Covariância de Lorentz

6.3.2 Equação de Proca

6.4 Eletrodinâmica

6.4.1 As equações de Maxwell

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Integrais de rotacionais

Se $\vec{v}$ é um campo vetorial de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{c}$ é um campo vetorial constante, temos:

$$\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{c})$$

Como $\nabla \cdot \vec{c} = 0$, vem:

$$\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{v})$$

Assim:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{c})\ d^3r = \int_\Sigma (\nabla \times \vec{c}) \cdot \hat{n}\ d\Sigma$$

Mas temos também, pela propriedade cíclica do tensor de Levi-Civita:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{c})\ d^3r = \int_V \vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{v})\ d^3r$$

E assim:

$$\int_\Sigma (\nabla \times \vec{c}) \cdot \hat{n}\ d\Sigma = \int_V \vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{v})\ d^3r = \int_\Sigma \vec{c} \cdot (\hat{n} \times \vec{V})\ d\Sigma = -\int_\Sigma \vec{c} \cdot (\vec{v} \times \hat{n})\ d\Sigma$$

Ou seja, temos:

$$\int_V \vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{v})\ d^3r = -\int_\Sigma \vec{c} \cdot (\vec{v} \times \hat{n})\ d\Sigma$$

$$\Rightarrow \vec{c} \cdot \left[\int_V \nabla \times \vec{v}\ d^3r + \int_\Sigma \vec{v} \times \hat{n}\ d\Sigma\right] = 0$$

Referências

Griffiths, D. (2014). *Introduction to electrodynamics*. Pearson Education. Retrieved from `https://books.google.pt/books?id=J9ygBwAAQBAJ`

Schwichtenberg, J. (2015). *Physics from symmetry*. Springer International Publishing. Retrieved from `https://books.google.pt/books?id=_vLLCQAAQBAJ`