Problemas de Física Quântica–II

Adição de momento angular
Universidade do Minho

29 de Outubro de 2018

Adição de momento angular

1. Determine os estados de momento angular total de duas partículas, uma com spin $\frac{3}{2}$ e a outra com spin $\frac{1}{2}$, em função dos estados das partículas individuais.

2. Determine a forma normalizada dos spinores de S_y.

   (Gasiorowicz, 10.1)

3. Calcule os estados próprios de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$, em que $\boldsymbol{n}$ é o versor de uma direcção genérica na direcção definida pelos ângulos (α, β).

4. Prove que:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

   (Gasiorowicz, 10.7)

5. Mostre que, para qualquer vector $\boldsymbol{a}$ com comprimento a, temos:

$$e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}} = \cos a + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a}\frac{\sin a}{a}$$

   (Gasiorowicz, 10.10)

6. Uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ está num estado próprio de S_x com valor próprio $\frac{\hbar}{2}$ no instante $t = 0$. Nesse momento liga-se um campo magnético B apontando na direcção z, e o spin pode precessar durante um tempo T. Ao fim desse tempo, o campo magnético é rodado muito rapidamente, de modo a apontar na direcção y. Após outro intervalo de tempo T, faz-se uma medida de S_x. Qual é a probabilidade de se obter o valor $\frac{\hbar}{2}$?

   (Gasiorowicz, 10.8)

7. Considere dois electrões num estado singleto.

   (a) Se uma medida do spin de um dos electrões mostrar que está num estado com $s_z = 1/2$, qual é a probabilidade de uma medida da componente z do outro electrão dar $s_z = 1/2$?

   (b) Se uma medida do spin de um dos electrões mostrar que está num estado com $s_y = 1/2$, qual é a probabilidade de uma medida da componente x do outro electrão dar $s_x = 1/2$?

   (c) Se o electrão 1 está num estado descrito por

   $$\cos\alpha_1\,\chi_+ + \sin\alpha_1\,e^{i\beta_1}\,\chi_-$$

   e o electrão 2 está num estado descrito por

   $$\cos\alpha_2\,\chi_+ + \sin\alpha_2\,e^{i\beta_2}\,\chi_-$$

   qual é a probabilidade de o estado de dois electrões ser um estado tripleto?

   (Gasiorowicz, 10.13)

8. Num sistema de baixa energia neutrão-protão (que tem momentum angular orbital zero) a energia potencial é dada por:

   $$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\left(3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\right) + V_3(r)\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$$

   em que $\boldsymbol{r}$ é o vector que liga as duas partículas. Calcule a energia potencial para os sistema neutrão-protão:

   (a) No estado singleto.

   (b) No estado tripleto.

   (Gasiorowicz, 10.12)

9. Uma partícula de spin 1 move-se num potencial central da forma:

   $$V(r) = V_1(r) + \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}}{\hbar^2}V_2(r) + \frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L})^2}{\hbar^4}V_3(r)$$

   Quais são os valores de $V(r)$ no estados $j = l+1, l, l-1$?

   (Gasiorowicz, 10.14)

10. Considere um sistema de duas partículas de spin $1/2$. Definamos $|\pm_i^{(j)}\rangle$ os estados próprios de $\sigma_i^{(j)}$, com $j = 1,2$ e $i = x, y, z$.. para cada partícula.

(a) Escreva o estado singleto das duas partículas em termos dos estados próprios de $\sigma_x^{(j)}$, $\sigma_y^{(j)}$ e $\sigma_z^{(j)}$, com $j = 1, 2$.

(b) Mostre que

$$\langle S = 0|\sigma_i^{(1)}\sigma_j^{(2)}|S = 0\rangle = c\delta_{i,j} \tag{1}$$

e determine a constante c

(c) Calcule o valor esperado de $(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{a})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{b})$ no estado singleto.

(d'Emilio e Picasso, 15.5)