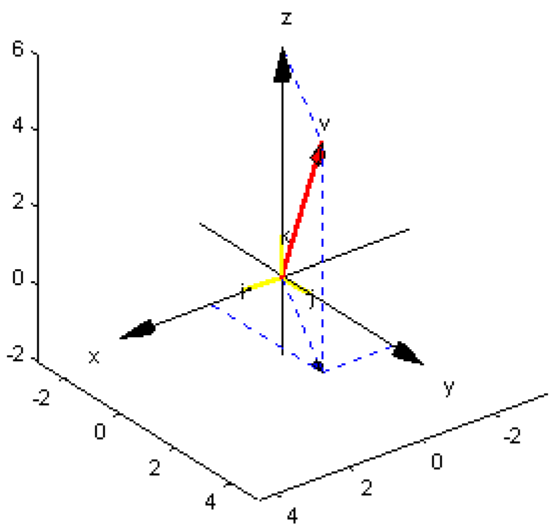


Cálculo Vetorial

Cláudio Graça

2012

Prefácio

Estas notas de aula cobrem de forma resumida o cálculo de duas e três variáveis, normalmente conhecido com Cálculo Vetorial, ou simplesmente Cálculo II ou III. Na época do desenvolvimento do eletromagnetismo por **James Clerk Maxwell** o cálculo vetorial não existia e Maxwell utilizava o formalismo de componentes para representar as grandezas vetoriais. Neste formalismo o vetor é representado por suas três componentes, ou seja, três letras. Para denominar as operações vetoriais envolvendo o operador nabla (∇), Maxwell, introduziu em 1870 os termos, rotacional, divergente, gradiente e laplaciano (como são conhecidos atualmente os operadores).

Notas de Aula de Cálculo Vetorial

Cláudio Graça, UFSM

20 de fevereiro de 2012

Sumário

1 Introdução

Nestas notas apresentam-se os fundamentos do cálculo vetorial, de tal forma que seja possível entender as equações de Maxwell. A forma de apresentação é clássica com objetivo de apresentar especialmente a nomenclatura, deixando maiores detalhes para os inúmeros livros sobre o tema.

1.1 Algebra Vetorial

As grandezas físicas são, em geral, representadas por escalares ou por vetores. As grandezas escalares são representadas por números reais enquanto que os vetores são representados por elementos de linha orientados no espaço. Como se mostra na Fig. 1, os vetores podem ser representados por dois pontos no espaço, no caso $\overrightarrow{AB}$ com uma dada orientação. Dessa maneira podemos dizer que uma grandeza escalar é representada pelo seu módulo, enquanto que a vetorial possui módulo e direção.

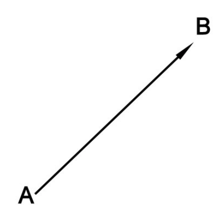


Figura 1: Representação de um vetor, na qual um segmento orientado representa um vetor, cujo ponto inicial A, a origem do vetor e ponto final B, a flexa indica a direção do mesmo.

Por convenção os vetores podem ser representados de várias formas; sendo a notação mais usual o caracter em negrito (ex., **v**), ou a mesma letra sublinhada (ex., $\underline{v}$). Nestas notas, escritas em Latex, optamos pela notação com um caracter sobrescrito com um vetor, (ex., $\vec{v}$). Uma grandeza física qualquer, vetorial $\vec{A}$ é definida por um vetor, cujo módulo ou norma é A e cuja direção é definida pelo versor, ou vetor unitário, $\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$ portanto

$$\vec{A} = A\hat{u}_A. \tag{1}$$

1.2 Vetores Unitários ou Versores

O versor é considerado um vetor unitário que apresenta a mesma orientação de um eixo Or cuja direção e sentido formam a referência vetorial, no qual $\hat{u}$ é o versor, ou vetor unitário desse eixo como se mostra na Fig. 2:

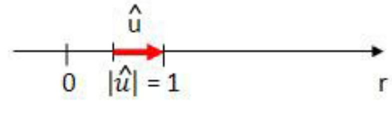


Figura 2: Representação do vetor unitário de um eixo qualquer Or

O vetor unitário pode ser definido a partir de um vetor qualquer no eixo Or, como:

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{2}$$

Vejamos um exemplo tridimensional, onde um sistema cartesiano é composto por três eixos possuem a mesma origem. Usualmente se consideram os vetores unitários dos eixos coordenados como, $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, respectivamente representando os versores dos eixos Ox, Oy e Oz.

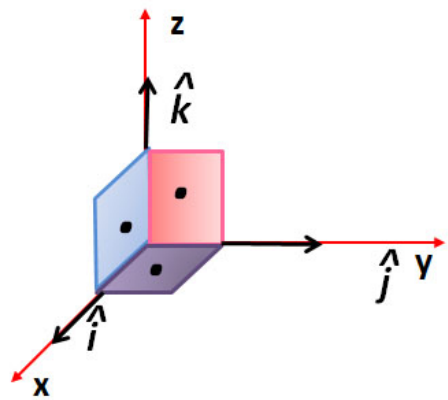


Figura 3: Representação dos versores cartesianos $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

Na forma cartesiana esses versores podem ser representados como:

$$\hat{i} \equiv (1,0,0) \tag{3}$$
$$\hat{j} \equiv (0,1,0) \tag{4}$$
$$\hat{k} \equiv (0,0,1) \tag{5}$$

Um conjunto de vetores unitários forma uma base do espaço vetorial. Neste caso como os versores são unitários são mutuamente perpendiculares, podem ser denominados base de vetores ortogonais. Dessa maneira um vetor qualquer $\vec{v}$, pode ser representado em termos da sua base ortogonal como:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}. \tag{6}$$

1.3 Adição de Vetores

Considerando que dois vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, representados no espaço cartesiano, conforme a Fig. 4, são adicionados formando o vetor soma $\vec{v}$.

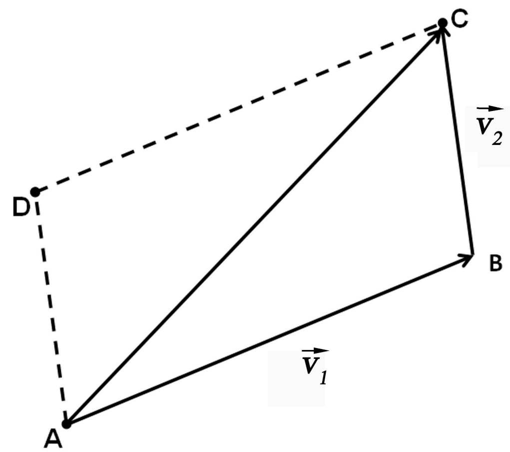


Figura 4: Representação da soma de dois vetores, formando o vetor resultante $\overrightarrow{AC}$.

Dessa forma podemos observar nessa figura, a regra de construção do paralelogramo: 7, 8 e 9;

$$\vec{v_1} \equiv \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{DC}, \tag{7}$$

$$\vec{v_2} \equiv \overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{AD}, \tag{8}$$

$$\vec{v} \equiv \overrightarrow{AC}, \tag{9}$$

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_2} + \vec{v_1}. \tag{10}$$

A equação 10, nos mostra a propriedade de adição de dois vetores é uma operação comutativa. No caso da soma de três vetores pode se mostrar a propriedade associativa:

$$\vec{v_1} + (\vec{v_2} + \vec{v_3}) = (\vec{v_2} + \vec{v_2}) + \vec{v_3} \tag{11}$$

Esta forma de tratar os vetores, baseada em elementos de linha no espaço é um enfoque geométrico. Uma outra forma mais apropriada para estudar os problemas físicos é a cartesiana, na qual um vetor é definido pelas suas componentes cartesianas:

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z). \tag{12}$$

Dessa forma a soma de dois vetores na Eq. 10 pode ser simplesmente escrita como:

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} \equiv (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y}, v_{1z+}v_{2z}). \tag{13}$$

Quando multiplicamos um vetor $\vec{v}$ por um escalar qualquer a, podemos observar que existe uma propriedade distributiva que permite observar que:

$$a\vec{v} = a\vec{v_1} + a\vec{v_2} \equiv (av_{1x} + av_{2x}, av_{1y} + av_{2y}, av_{1z} + av_{2z}). \tag{14}$$

1.4 Produto Escalar

O produto escalar é uma função binária definida entre dois vetores que fornece como resultado um número real, também chamado escalar. É o produto interno padrão do espaço Euclidiano

Na forma algébrica o produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, pode assim calculado:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{15}$$

Dessa maneira é possível observar que o resultado do produto escalar, na Eq. 15 é um escalar.

A definição geométrica de produto escalar de dois vetores,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta, \tag{16}$$

mostra que o produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o resultado do produto do comprimento (também chamado de norma ou módulo) pela projeção escalar de b em a, como nos mostra a Fig. 5:

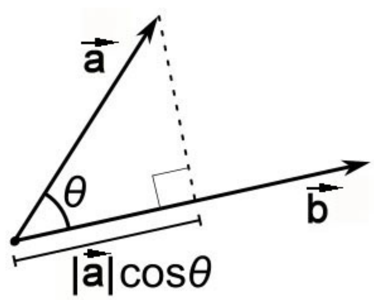


Figura 5: Representação geométrica do produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

,

na qual θ é o ângulo formado pelos vetores e ab é o produto dos seus comprimentos.

Note que não é necessário mencionar nenhum sistema de coordenadas para se obter o valor do produto escalar. A Eq. 5 é válida, independente do sistema de coordenadas, ou seja o produto escalar é invariante em relação à rotação em torno de qualquer eixo da base vetorial. Esta invariância do produto escalar é consequência da invariância do ângulo entre os dois vetores. Pode-se obter o ângulo entre os dois vetores através do produto escalar:

$$\theta = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{17}$$

Vários exemplos físicos da definição de produto escalar nos chamam a atenção, o primeiro é a própria definição de trabalho W realizado por uma força, $\vec{F}$ ao realizar um deslocamento $\vec{r}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}||\vec{r}| \cos\theta. \tag{18}$$

Um outro exemplo interessante é o cálculo do fluxo de um fluído que atravessa, com velocidade constante v, uma área A:

$$Fluxo = \vec{v} \cdot \vec{A} = |\vec{v}||\vec{A}| \cos\theta [m^3/s] \tag{19}$$

O vetor área $\vec{A}$ possui direção perpendicular ao plano da superfície considerada. Dessa maneira o produto escalar, representa a vazão de liquido através da superfície considerada.

O produto escalar de vetores tem as seguintes propriedades:

- Comutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
- Distributiva: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Uma outra propriedade muito importante, que é facilmente demonstrável, mostra que o produto escalar é independente do sistema de coordenadas o que resulta em uma excelente interpretação física do seu significado. Consideremos por exemplo o caso em que $\vec{a} = \vec{b}$, dessa maneira:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2. \tag{20}$$

Dessa maneira,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{21}$$

Portanto a invariância do produto escalar é equivalente à invariância do comprimento do vetor.

1.5 Produto Vetorial

O produto de dois vetores feito de forma vetorial, resulta em um vetor cujo comprimento e direção pode ser definido da seguinte maneira:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\, a_z b_x - a_x b_z,\, a_x b_y - a_y b_x). \tag{22}$$

O resultado do produto vetorial é um vetor, $\vec{c}$, cuja definição depende do sistema de coordenadas pois apesar do meu módulo ser invariante a sua direção depende da base vetorial, assim podemos verificar facilmente as seguintes propriedades desse produto:

- Anticomutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
- Não associativa: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

O resultado do produto vetorial é um vetor $\vec{c}$, perpendicular ao plano formado por ambos vetores, como mostra a Fig. 6, portanto:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{c} && (23)\\ \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= 0 && (24)\\ \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= 0 && (25) \end{aligned}$$

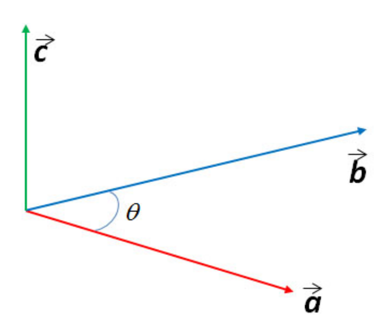


Figura 6: Representação geométrica do produto vetorial de dois vetores: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

A avaliação do módulo do produto vetorial é muito simples e nos leva ao seu conceito geométrico:

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})^2 &= (a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2 && (26)\\
&= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2 && (27)\\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 && (28)\\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 sen^2\theta && (29)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|sen\theta. \qquad (30)$$

Com esta expressão do produto vetorial torna-se muito simples verificar que $\vec{a}\times\vec{a} = 0$, pois nesse caso $\theta = 0$. Por outro lado verifica-se que para $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, os vetores são colineares. O ângulo θ pode ser calculado utilizando a relação entre o produto vetorial e escalar:

$$\arctan\theta = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{|\vec{A}\cdot\vec{B}|}. \qquad (31)$$

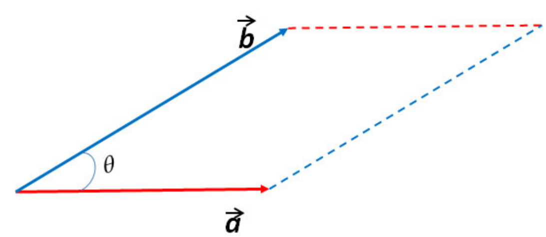


Figura 7: Paralelogramo, com área A, formado por dois vetores.

A expressão geométrica do produto vetorial, permite observar que o mesmo representa a área do paralelogramo, Fig. 7, formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Como resultado o produto vetorial, representa o vetor área $\vec{A}$, ortogonal ao plano formado pelos dois vetores,

$$\vec{A} = \vec{a}\times\vec{b}, \qquad (32)$$

cuja direção é definido pela regra da mão direita, girando o vetor $\vec{a}$ sobre o $\vec{b}$, Fig. 8, e o polegar indicando a direção do vetor área.

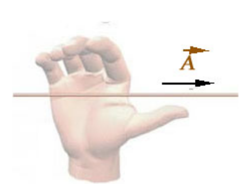


Figura 8: Regra da mão direita.

O cálculo de momentos ou torques e outras grandezas vetoriais relacionadas com a rotação podem ser interpretados de forma muito simples através do produto vetorial

Para exemplificar vamos calcular o momento que uma força $\vec{F}$ exerce quando colocada na extremidade do vetor posição, $\vec{r}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{33}$$

O módulo do vetor $\vec{M}$ igual a $|\vec{r}||\vec{F}|sen\theta$, depende do ângulo de rotação θ enquanto que a sua direção é definida, por convenção, como a direção do eixo em torno do qual a força faz girar o vetor posição. Essa convenção é denominada regra da mão direita, Fig. 8, pode ser facilmente entendida através da forma matricial do produto vetorial, resultando de forma convencional a direção do vetor produto:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{34}$$

2 Transformação de sistemas de coordenadas

Em inúmeras situações, é necessário transformar uma determinada grandeza, seja ela escalar ou vetorial, de um dado sistema de referência para outro sistema de coordenadas.

2.1 Coordenadas retangulares ⇔ Coordenadas cilíndricas

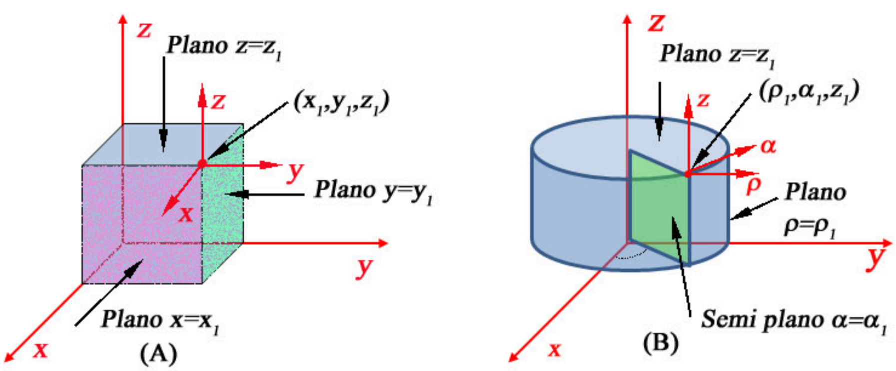
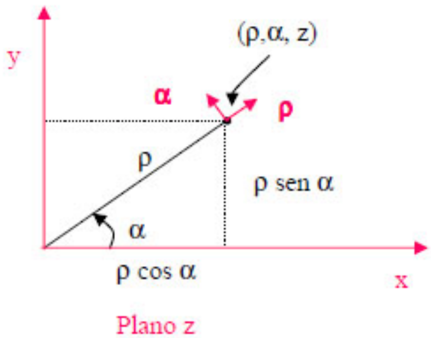


Figura 9: Transformação de Coordenadas retangulares (A) para coordenadas cilíndricas, (B) e vice versa.

A transformação de uma quantidade escalar é muito simples, pois basta fazer a substituição das coordenadas de um sistema para a do outro sistema, empregando algumas relações como as abaixo, de acordo com a Fig. 9:

A transformação de uma quantidade vetorial é feita em duas etapas. A primeira, é idêntica à etapa anterior, fazendo a substituição das coordenadas de um sistema para a do outro sistema, empregando as relações já apresentadas. Na segunda etapa, faz-se a transformação dos vetores unitários. Isto pode ser feito empregando as seguintes operações:



$$x = \rho cos\alpha \tag{35}$$
$$y = \rho sen\alpha \tag{36}$$
$$z = z \tag{37}$$
$$\tag{38}$$
$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \tag{39}$$
$$\alpha = tg^{-1}(\frac{y}{x}) \tag{40}$$
$$z = z \tag{41}$$

.	ρ	α	z
x	cos α	-sen α	0
y	sen α	cos α	0
z	0	0	1

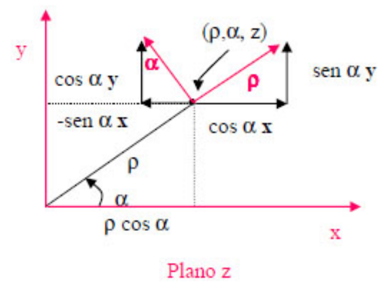


Figura 10: Transformações dos vetores unitários

2.2 Coordenadas retangulares ⇔ Coordenadas esféricas

Neste caso a transformação de uma quantidade escalar é feita de forma semelhante ao caso da transformação de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas e vice e versa, substituindo as coordenadas de um sistema para a do outro empregando as relações:

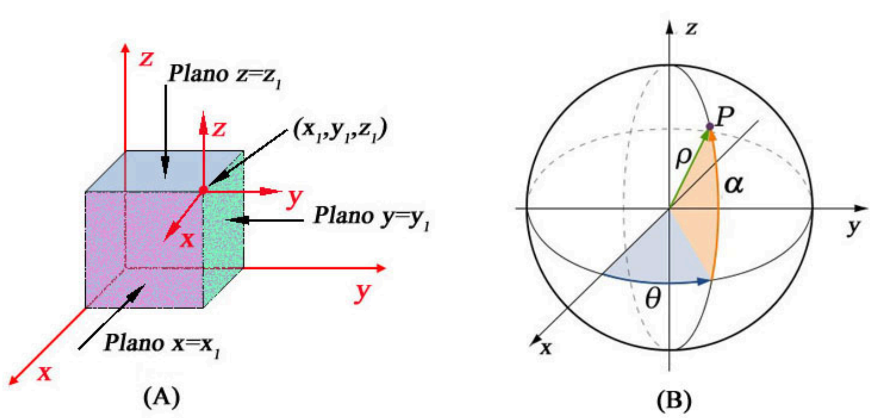
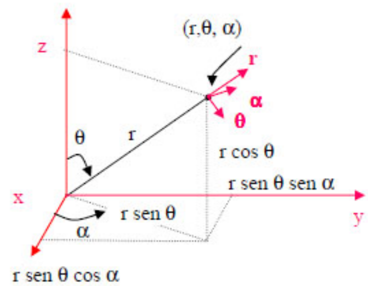


Figura 11: Transformação de Coordenadas retangulares (A) para coordenadas esféricas, (B) e vice versa.

- x = r sen θ cos α
- y = r sen θ sen α
- z = r cos θ

- $r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$
- $\theta = tg^{-1}[(x^2 + y^2)^{1/2}/z]$
- $\alpha = tg^{-1}[y/x]$



Para a transformação vetorial, a transformação dos vetores unitários do sistema de coordenadas retangulares e esféricas pode ser feita empregando as seguintes relações:

.	r	θ	α
x	sen θ cos α	cos θ cos α	-sen α
y	sen θ sen α	cos θ sen α	cos α
z	cos θ	-sen θ	0

3 Cálculo Vetorial

Nesta seção vamos dar alguns exemplos do calculo vetorial de especial interesse para o eletromagnetismo, relacionadas com a derivação e integração de funções vetoriais.

3.1 Diferenciação de Funções Vetoriais

Inicialmente vamos considerar um vetor $\vec{a} = \vec{a}(t)$, como a aceleração ou a velocidade variáveis com o tempo. A derivada temporal de uma função vetorial deste tipo pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \left[\frac{\vec{a}(t+\delta t) - \vec{a}(t)}{\delta t} \right]. \tag{42}$$

Utilizando a notação cartesiana, podemos escrever esta mesma expressão de forma simplificada:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right). \tag{43}$$

Imaginemos um caso em que a função vetorial, é produto de duas funções, uma escalar $c(t)$ e outra vetorial $\vec{b}(t)$; dessa maneira poderemos calculara a derivada temporal do produto, para cada uma de suas componentes:

$$\frac{da_x}{dt} = \frac{d}{dt}(cb_x) = \frac{dc}{dt}b_x + c\frac{db_x}{dt}, \tag{44}$$

$$\frac{da_y}{dt} = \frac{d}{dt}(cb_y) = \frac{dc}{dt}b_y + c\frac{db_y}{dt}, \tag{45}$$

$$\frac{da_z}{dt} = \frac{d}{dt}(cb_z) = \frac{dc}{dt}b_z + c\frac{db_z}{dt}, \tag{46}$$

Dessa maneira poderemos resumir, essa propriedade, ou regra da cadeia, análoga à já conhecida do cálculo convencional:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{dc}{dt}\vec{b} + c\frac{d\vec{b}}{dt}. \tag{47}$$

Podemos aplicar raciocínio semelhante ao produto escalar e ao produto vetorial, resultando na analogia proposta pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt}.\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt} && (48) \\ \frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt} && (49) \end{aligned}$$

3.2 Integração de Funções Vetoriais

Integrais, de linha, superfície e volume tem aplicações na Física tanto para funções escalares como para vetoriais. Vamos explorar algumas características dessas integrais visando a sua aplicação no eletromagnetismo.

3.2.1 Integrais de Linha

A integral de linha é uma generalização muito simples da integral definida na qual os limites do intervalo $[A, B]$ são substituídos por uma curva ou caminho entre esses limites e a função integrada é um campo escalar ou um campo vectorial definido e limitado a essa curva, Fig. 12. As integrais de linha são de uma importância fundamental em inúmeras aplicações, nomeadamente, em ligação com energia potencial, fluxo do calor, circulação de fluidos, etc.

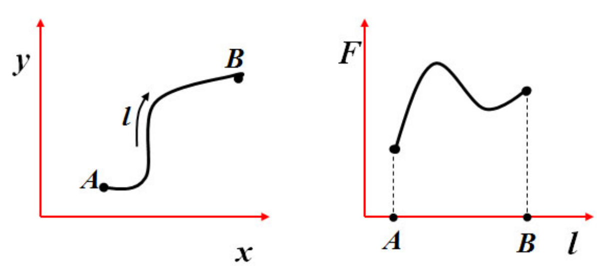


Figura 12: Função $F(x, y)$, mostrando o percurso de integração no plano (x, y) e da função em termos do percurso l.

A integral de linha estende o conceito de integral unidimensional à integração ao longo de uma linha em um espaço tridimensional,

$$\int_A^B F(x,y,z)dl = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_i F(l_i)\Delta l_i. \tag{50}$$

na qual a integral ao longo do percurso no espaço, inicia no ponto A e finda no ponto B e Δl_i é o elemento de linha ao longo da trajetória de integração. Como a integração tem uma direção de A para B, ao reverter o trajeto, o valor da integral muda de sinal.

Em coordenadas cartesianas o integrando da Eq. 50, pode ser expresso em termos dos incrementos de suas coordenadas portanto,

$$d\vec{l} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz, \tag{51}$$

cujo módulo vale:

$$|d\vec{l}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{52}$$

Existem dois tipos diferentes de funções que resultam em integrais de linha, que dependem unicamente dos pontos inicial e final de integração e não do percurso de integração, e aquelas cujo valor depende tanto dos limites como do percurso de integração.

3.2.2 Integrais de Linha em Cálculo Vetorial

Considere o contorno C mostrado na figura a seguir, onde $\hat{l}(x, y, z)$ é o vetor unitário tangente à curva em um ponto qualquer (x, y, z).

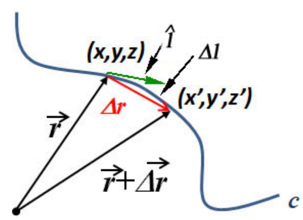


Figura 13: Função $F(x, y)$, mostrando o percurso de integração ao longo da circulação C em termos do percurso l, definido pelo deslocamento do vetor posição $\vec{r}$.

Considerando $\vec{F}(x, y, z)$ como um campo vetorial, definimos integral de linha ao longo da circulação C, como:

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \hat{l}dl \tag{53}$$

Para avaliar esta integral, considere o vetor posição $\vec{r}$ que localiza o ponto (x, y, z), tendo como referência a origem de um sistema de referência genérico O. O vetor $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ é por sua vez o vetor posição que localiza, sobre a curva C, um ponto próximo ao ponto (x', y', z'). Seja Δl o comprimento da curva C que vai do ponto (x, y, z) ao ponto próximo (x', y', z'). Assim, podemos definir o vetor unitário $\hat{l}(x, y, z)$ como sendo:

$$\hat{l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta l} = \frac{d\vec{r}}{dl} \tag{54}$$

Substituindo na integral de linha o vetor tangente, temos:

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \frac{d\vec{r}}{dl}dl = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}(x, y, z). \tag{55}$$

O vetor diferencial $d\vec{r}$, nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, possui as seguintes expressões:

- Cartesianas: $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$
- Cilíndricas: $d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{k}$

- Esféricas: $d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + rsen\theta\alpha d\alpha\hat{\alpha}$

A substituição de $d\vec{r}$ dado nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas leva às seguintes expressões:

$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}(x,y,z) = \int_i^f F_x dx + \int_i^f F_y dy + \int_i^f F_z dz \quad (56)$$

$$\int_C \vec{F}(\rho,\alpha,z)\cdot d\vec{r}(\rho,\alpha,z) = \int_i^f F_\rho d\rho + \int_i^f F_\alpha d\alpha + \int_i^f F_z dz \quad (57)$$

$$\int_C \vec{F}(r,\theta,\alpha)\cdot d\vec{r}(r,\theta,\alpha) = \int_i^f F_r dr + \int_i^f F_\theta r d\theta + \int_i^f F_\alpha rsen\theta d\alpha \quad (58)$$

Muitas vezes o percurso de interesse é fechado, ou seja o ponto inicial é o mesmo final, e dessa maneira a integral de linha fechada será,

$$\oint_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}(x,y,z) \quad (59)$$

Exemplo

Como exemplo vamos estudar um campo vetorial, conhecido, que se aplica ao campo gravitacional, ou ao campo elétrico, no qual a função vetorial é do tipo: $\vec{F} = \frac{1}{r^2}\hat{r}$, e o vetor $d\vec{l} = d\vec{r} = dr\hat{r}$, portanto a integral de linha será:

$$\int_A^B \vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{1}{r^2}\hat{r}dr\hat{r} = \int_A^B \frac{1}{r^2}dr = \left[\frac{1}{r}\right]_A^B \quad (60)$$

Neste caso a integral é relativa a campos ditos conservativos e portanto resulta independente do percurso de integração. Como consequência quando a integração for feita em uma linha fechada a integral será nula, característica dos campos conservativos:

$$\oint_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}(x,y,z) = 0 \quad (61)$$

Considerando uma função bidimensional $F(x,y)$, definida de forma contínua em todos os pontos x e y.

3.3 Integrais de Superfície Vetoriais

Considere a superfície qualquer S mostrada na Fig. 14, a seguir, na qual o vetor $d\vec{S}$ é um elemento vetorial da superfície S no ponto (x,y,z). O vetor $d\vec{S} = dS\hat{n}$, é um vetor normal à superfície no ponto (x,y,z).

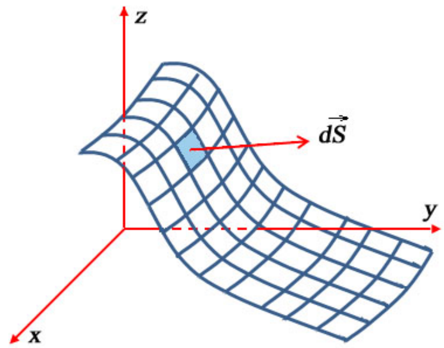


Figura 14: Superfície (x, y, z), mostrando a malha de integração e o vetor normal à mesma num ponto qualquer (x, y, z).

Considerando um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$, a integral de superfície será dada por

$$\int\int_S = \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \lim_{dS \to 0} |\sum F dS cos\theta|, \tag{62}$$

na qual θ é o ângulo entre o vetor $\vec{F}$ e a normal à superfície no ponto $(x, y, z$.

3.3.1 Integrais de Volume

Uma integral de volume (tripla) toma a forma:

$$\int\int\int_V F(x, y, z) dV, \tag{63}$$

na qual V é o volume de integração e o elemento infinitesimal é $dV = dxdydz$. Quando tratamos de simetria esférica, utilizamos d^3r como elemento de volume. No caso do volume de uma esfera, poderemos integrar o elemento de volume considerando uma esfera de raio R:

$$\int\int\int_V dV = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 sen\theta dr d\theta d\phi, \tag{64}$$

$$= \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 sen\theta \tag{65}$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3} \tag{66}$$

Ao resultado da integração do componente normal de uma grandeza vetorial sobre uma superfície S denominamos de fluxo desta quantidade que atravessa a superfície.

3.4 Operadores Vetoriais

As operações vetoriais podem ser feitas sobre campos escalares e vetoriais. Um campo escalar qualquer é uma função $f(\vec{r})$ que associa um escalar f a cada posição $\vec{r}$ enquanto que uma função vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ associa um vetor $\vec{F}$ a cada ponto $\vec{r}$ de um campo vetorial.

Para realizar as operações diferenciais vetoriais utiliza-se, o operador diferencial $\vec{\nabla}$, definido, em coordenadas cartesianas, como

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}. \tag{67}$$

O operador $\vec{\nabla}$ não tem significado físico ou geométrico, o seu significado só ocorre quando ele é aplicado a uma função.

Gradiente: No cálculo vectorial o gradiente é a alteração no valor de uma grandeza escalar, por unidade de espaço. Por exemplo, o gradiente do potencial eléctrico é o campo elétrico. O gradiente da energia de campo é a força de campo.

O gradiente de uma função escalar $f(\vec{r})$ é expresso como:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}, \tag{68}$$

O gradiente de uma função escalar é um vetor cujo módulo, direção e sentido representam a máxima taxa de crescimento desta função escalar. O vetor gradiente aponta para o máximo crescimento da função no ponto considerado e é perpendicular à superfície em que a função escalar é constante nesse ponto.

Divergente: Seja $\vec{F}(r) = F_x(x,y,z)\hat{\imath} + F_y(x,y,z)\hat{\jmath} + F_z(x,y,z)\hat{k}$ uma função vetorial contínua e com derivadas contínuas pelo menos até à primeira ordem. Por definição, o divergente é um escalar calculado pelo produto escalar do operador $\vec{\nabla}$ e a função vetorial considerada:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{69}$$

A divergência de um campo vetorial $\vec{F}(r)$, $div\vec{F}(r)$, dá como resultado o fluxo líquido (fluxo que sai $-$ fluxo que entra) por unidade de volume.

Rotacional: o produto vetorial do operador $\vec{\nabla}$ com um campo vetorial $\vec{F}$, permite definir o rotacional do campo como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{70}$$

O rotacional de um campo vetorial $\vec{F}(r)$, $rot\vec{F}(r)$, dá como resultado um vetor cujos componentes x, y e z resultam na circulação desse campo vetorial por unidade de área respectivamente nos planos normais a esses componentes.

Operadores e Operações de Segunda Ordem

Utilizando o operador nabla, pode-se formar dois operadores de segunda ordem:

$$\nabla \times \nabla \tag{71}$$

$$\nabla \cdot \nabla \tag{72}$$

As expressões para esses operadores de segunda ordem, em coordenadas cartesianas são respectivamente:

$$\nabla \times \nabla = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{73}$$

e

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{74}$$

O operador da expressão Eq. 73, não possui designação especial enquanto que o do produto escalar Eq. 74 é denominado operador Laplaciano, simplesmente escrito em coordenadas cartesianas como:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial\ 2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{75}$$

Laplaciano: o operador laplaciano ∇^2, é obtido a partir do cálculo da divergência do gradiente de um campo escalar:

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}. \tag{76}$$

O laplaciano de um campo escalar $f(r)$ é definido como o divergente do gradiente da função:

$$\nabla^2 f(r) = div(grad\ f(r)). \tag{77}$$

Este operador Laplaciano também atua sobre campos vetoriais. O laplaciano de um campo vetorial $\vec{F}(r)$ é definido como:

$$\nabla^2 \vec{F}(r) = grad(div\ \vec{F}(r)) - rot(rot\vec{F}(r)) \tag{78}$$

Os dois operadores são completamente diferentes e as suas expressões somente são idênticas em coordenadas cartesianas.

Teorema da divergência: a integral de superfície de uma campo vetorial pode ser calculada pela integral de volume da divergência desse mesmo campo:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int \int_V \int \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV. \tag{79}$$

Teorema de Stokes: a circulação de um campo vetorial, pode ser calculado pela integral do rotacional sobre a superfície limitada por essa circulação:

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}. \tag{80}$$

4 Resumo da Análise Aplicada com Operadores

Os campos escalares e vetoriais são utilizados em vários ramos da Física, incluindo a eletricidade e o magnetismo, desse modo discutiremos as propriedades matemáticas dos campos escalares $V(x, y, z)$ e vetoriais $\vec{E}(x, y, z)$ lembrando que no nosso caso representam o potencial e o campo elétrico, mas considerando letras genéricas V e $\vec{E}$, podem representar qualquer tipo de campos conservativos.

4.1 Diferenciação de Campos Escalares e Vetoriais

As operações de diferenciação de campos escalares e vetoriais estão relacionadas com as diferentes operações que se podem realizar com o operador $\vec{\nabla}$. Como exemplo utilizamos um campo eletrostático cujo campo elétrico $\vec{E}$ obedece às leis de Maxwell e podemos escrever:

$$rot\vec{E} = 0 \tag{81}$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \tag{82}$$

Estas duas equações nos mostram operações de diferenciação do vetor campo elétrico. O operador $grad = \vec{\nabla}$ usado para a diferenciação de campos vetoriais, obtendo-se a divergência (div) e o rotacional (rot) de um campo vetorial:

$$div\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \tag{83}$$

e

$$rot\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z})\hat{\imath} + (\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x})\hat{\jmath} + (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})\hat{k}. \tag{84}$$

A interpretação geométrica da $div\vec{E}$ é muito simples pois o seu próprio nome indica a essência da operação fornecendo as fontes ou sumidouros do campo vetorial em cada ponto do espaço. Por exemplo, um campo que possui divergência nula em todos os pontos do espaço, deve mostrar um campo vetorial onde as linhas de campo não se originam nem terminam em nenhum lugar desse espaço devendo portanto formar anéis (loops) fechados. Por outro lado os campos vetoriais como o eletrostático são conhecidos como irrotacionais ou seja $rot\vec{E} = 0$.

Como exemplo de campos escalares utilizamos a função potencial, para descrever o mesmo campo elétrico, utlizando a operação $gradV$, ou gradiente de um campo escalar V definido em coordenadas cartesianas da seguinte forma:

$$gradV = \nabla\vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}, \tag{85}$$

Como o campo elétrico é irrotacional, pode ser representado pelo gradiente de um campo escalar:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -gradV, && (86)\\ &= \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}. && (87) \end{aligned}$$

Outro operador importante na análise vetorial é o operador laplaciano ∇^2, obtido no cálculo da divergência do gradiente da função potencial (função escalar).

$$\nabla^2 V = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V. \tag{88}$$

Nestas notas escrevemos os operadores unicamente em coordenadas cartesianas, mas o leitor poderá encontrar as respectivas expressões para a geometria esférica e cilíndrica na literatura.

4.2 Integração de Campos Escalares e Vetoriais

Existem três diferentes tipos de integração a integral de linha e a de superfície, para vetores e a integral de volume para escalares. No nosso caso, a integral de linha do campo elétrico, representa o trabalho por unidade de carga e está relacionada com o conceito de potencial elétrico:

$$W = \int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \triangle V. \tag{89}$$

Para as forças como as elétricas e gravitacionais, as integrais de linha resultam serem independentes da trajetória de integração, são ditas por isso forças conservativas. A integral de superfície é utilizada na lei de Gauss na sua forma integral;

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_o} \int_v \rho dv, \tag{90}$$

As integrais de volume de um campo escalar tem uma importância muito grande, pois a sua relação com a integral de superfície e de linha de campos vetoriais (teoremas de Stokes, e de Gauss) nos permitem obter interessantes relações na eletricidade.

Pelo Teorema de Stokes, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A}. \tag{91}$$

Pelo teorema de Gauss, pode-se obter a seguinte relação

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv. \tag{92}$$

A expressão do teorema de Stokes pode ser obtida em termos do gradiente de V portanto;

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A} = \int (\vec{\nabla} \times \nabla \vec{V}) d\vec{A}. \tag{93}$$

Como $\vec{\nabla} \times \nabla \vec{V} \equiv 0$ portanto no campo elétrico $rot\vec{E} = 0$. No caso da Lei de Gauss, pode-se escrever o fluxo elétrico em termos do divergente da seguinte maneira;

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \nabla \vec{V}) dv. \tag{94}$$

O que resulta na Equação de Poisson, escrita em função do potencial utilizado o operador laplaciano:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\,} \tag{95}$$

Esta mesma equação escrita para o espaço livre, sem carga elétrica;

$$\nabla^2 V = 0, \tag{96}$$

é a chamada equação de Laplace.

A equação de Laplace e a equação de Poisson são os exemplos mais simples de equações elípticas em derivadas parciais, sendo que o operador diferencial parcial, o laplaciano Eq. 88, ∇^2 pode ser definido em qualquer número de dimensões.