Jaime Santos
Universidade do Minho

Física Quântica II

Soluções

Exercício 21: *Secção eficaz total para o espalhamento no potencial de Yukawa*

Verficamos na aula teórica, utilizando teoria de perturbações dependentes do tempo, que no limite de um potencial estático que é lentamente ligado, de modo que $\hat{H}_1(t) = V(\hat{\boldsymbol{r}})e^{-\eta|t|}$, a seção eficaz diferencial é dada, na primeira aproximação de Born, por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\,|V(\boldsymbol{q})|^2, \tag{93}$$

em que $V(\boldsymbol{q}) = \int d^3r\, e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, V(\boldsymbol{r})$ é a transformada de Fourier do potencial de espalhamento, $V(\boldsymbol{r})$, e $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_f - \boldsymbol{k}_i$ é o momento transferido para a partícula pelo potencial e tal que, para espalhamento elástico, como é o caso (potencial estático), $q = 2k_i \sin(\theta/2)$ em que θ é o ângulo de espalhamento.

Para $V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-\alpha r}$ (potencial blindado de Coulomb produzido por uma carga $+Ze$ numa carga $+e$), obtivemos também que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2e^4m^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^4(\alpha^2+q^2)^2}, \tag{94}$$

Integrando sobre o ângulo sólido, obtemos para a seção eficaz total $\sigma = \int d\Omega\, \frac{d\sigma}{d\Omega}$, a expressão

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{Z^2e^4m^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^4}\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1}{[\alpha^2+4k_i^2\sin^2(\theta/2)]^2}\\
&= \frac{Z^2e^4m^2}{\pi\varepsilon_0^2\hbar^4}\int_0^1 dv\,\frac{1}{(\alpha^2+4k_i^2 v)^2}\\
&= \frac{Z^2e^4m^2}{16\pi\varepsilon_0^2\hbar^4k_i^4}\int_{\frac{\alpha^2}{4k_i^2}}^{1+\frac{\alpha^2}{4k_i^2}}\frac{dv}{v^2}\\
&= \frac{Z^2e^4m^2}{\pi\varepsilon_0^2\hbar^4\alpha^2(\alpha^2+4k_i^2)},
\end{aligned} \tag{95}$$

onde fizemos a transformação de variável $v = \frac{1-\cos\theta}{2}$, na passagem da primeira para a segunda linha.

A altas energias, que é onde a primeira aproximação de Born é aplicável, $\alpha \ll k_i$, e $\sigma = \frac{Z^2e^4m^2}{4\pi\varepsilon_0^2\hbar^4\alpha^2k_i^2}$. Ou seja, $\sigma \propto \alpha^{-2}$, que dá uma medida da área em que o potencial é efetivo.

Exercício 22: *Secção eficaz diferencial para o espalhamento num potencial repulsivo soft-wall*

Considere agora o potencial $V(r) = V_0$, se $r < R$, e $V(r) = 0$, se $r > R$ (note que $V_0 > 0$). A sua transformada de Fourier é dada por

$$
\begin{aligned}
V(q) &= \int d^3r\, e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, V(r) \\
&= V_0 \int_0^R dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-iqr\cos\theta} \\
&= 2\pi V_0 \int_0^R dr\, r^2 \int_{-1}^1 d\mu\, e^{-iqr\mu} \\
&= \frac{4\pi V_0}{q} \int_0^R dr\, r\, \sin(qr) \\
&= -\frac{4\pi V_0 R}{q^2} \left(\cos(qR) - \frac{\sin(qR)}{qR} \right), \qquad (96)
\end{aligned}
$$

após integração por partes na penúltima linha para obter a última.

Assim, temos, substituindo na expressão (93)

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 V_0^2 R^2}{\hbar^4 q^4} \cdot \left(\cos(qR) - \frac{\sin(qR)}{qR} \right)^2 . \qquad (97)
$$

Fixando q^2, a quantidade adimensional que deve ser pequena é $\frac{mV_0 R}{\hbar^2 q} \ll 1$, assim $V_0 \ll \frac{\hbar}{\tau}$, em que $\tau = R/\Delta v$ é o tempo de travessia do poço de potencial, com $\Delta v = \frac{\hbar q}{m}$.

Se fixarmos ao invés R^2, temos que ter $\frac{V_0}{\hbar^2 q^2/(2m)} \ll 1$, ou seja $V_0 \ll E_{\text{cin}}$. De todo o modo, V_0 tem que ser pequeno comparado com uma energia definida da partícula. Como para um potencial *hard-wall*, $V_0 \to \infty$, é fácil perceber que a primeira aproximação de Born não é aplicável a este caso.