

1. a) Considere os seguintes potenciais electromagnéticos  $\varphi(\vec{r}, t) = 0$  e  $\vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qt}{r^3} \vec{r}$ .  
Obtenha os campos eléctrico e magnético correspondentes, bem como uma distribuição de cargas e correntes que os possam originar.
- b) Use a função de Gauge  $\lambda(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qt}{r}$  para obter novos potenciais e comente o resultado.

(Observação: pode eventualmente ser-lhe útil saber que  $\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r})$ )  
(4,5 valores)

2. Uma corrente constante  $I_0$  é abruptamente injectada num fio rectilíneo de comprimento infinito (orientado segundo  $zz'$ ) no instante  $t = 0$  (isto é:  $I = I_0$  se  $t > 0$  e  $I = 0$  se  $t \leq 0$ ). O fio permanece electricamente neutro.
- a) Mostre que o potencial vector magnético retardado sentido num ponto a uma distância  $s$  do fio é:

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \cdot \ln \left[ \frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \right]$$

Explique convenientemente o seu raciocínio.

(Nota:  $\int \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} = \ln[z + \sqrt{s^2 + z^2}] + C$ ).

- b) Obtenha o campo eléctrico correspondente. Por que razão um fio electricamente neutro produz um campo eléctrico? Qual o valor deste campo no limite em que  $t \rightarrow \infty$ ?

(5 valores)

3. a) Um condensador plano carregado (as armaduras possuem uma densidade superficial de carga  $|\sigma_0|$  e estão orientadas perpendicularmente a  $y$ ) está em repouso no referencial de laboratório  $S_0$ . Explique por que razão espera que o campo eléctrico medido nesse condensador mas num referencial  $S_1$  que se mova relativamente a  $S_0$  com uma velocidade uniforme  $v\hat{x}$ , esteja também orientado segundo  $\hat{y}$  mas tenha uma magnitude  $E_1 = \gamma E_0$  (sendo  $E_0$  o campo no condensador medido em  $S_0$ ).
- b) Como pôde verificar, as componentes dos campos eléctrico e magnético alteram-se sob a transformação de Lorentz usual como:

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \\ B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -v\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & +v\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \frac{v}{c^2} & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \frac{v}{c^2} & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

onde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ . Usando este resultado calcule os campos eléctrico e magnético gerados por uma carga pontual em movimento uniforme.

(6,5 valores)

Responda apenas a uma das seguintes duas perguntas (4 valores)

4. Num certo referencial, a força de Lorentz ( $\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$ ) é um exemplo de uma 3-força ordinária local. Em geral, podemos definir um 4-vector força (força de Minkowski) como  $K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$ , onde  $p^\mu$  é o 4-vector momento e  $\tau$  o tempo próprio.
- Obtenha, com generalidade a relação entre  $\vec{F}$  e as componentes espaciais da força de Minkowski  $K^i$ . Explique convenientemente.
  - Calcule explicitamente  $K^0$ . Qual o seu significado físico?

4'. No referencial de laboratório, um fio rectilíneo infinito transporta uma corrente eléctrica constituída por uma fila de cargas positivas que se movem para a direita com velocidade  $v$  e uma fila de cargas negativas que se movem para a esquerda com velocidade  $-v$ . Admita que as filas de cargas podem ser tratadas como uma distribuição contínua de densidades  $\pm\lambda$ , de tal forma que o fio permaneça electricamente neutro.

Considere agora que uma carga de prova se move para a direita com velocidade  $u < v$ . Analise o problema no referencial próprio desta carga e mostre que, neste referencial, o fio tem uma carga efectiva correspondente a uma densidade linear  $\lambda^* = -\frac{2\lambda uv}{c^2 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$  e, consequentemente, a carga sentirá uma força eléctrica atractiva. Qual é a expressão dessa força no referencial de laboratório?