ÓTICA ONDULATÓRIA

1. Introdução

O mundo que nos rodeia está preenchido por ondas.

Onda – forma de transportar energia e momento de um ponto do espaço para outro, sem transporte de matéria. Para caracterizar uma onda, tem que se descrever matematicamente a forma como a perturbação que é gerada num dado ponto varia (se propaga) no espaço e no tempo.

Tipos de ondas:

Ondas Mecânicas ou Ondas Elásticas – a energia e momento são transportados mediante uma perturbação do meio elástico (ondas em cordas, ondas sonoras, ondas no mar) (dependem das prop. elásticas do meio)

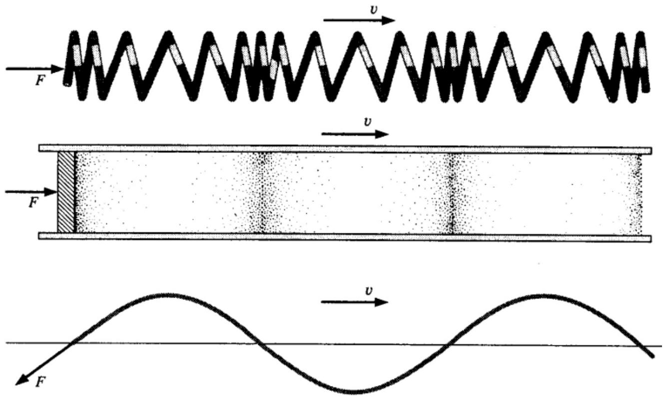
Ondas eletromagnéticas – a energia e o momento são transportados por oscilações dos campos elétricos e magnéticos associados a oscilações de cargas elétricas (oscilações dipolares) e podem-se propagar mesmo no vazio (luz, raios-X, micro-ondas, ondas de rádio, etc)

Ondas Transversais – a perturbação do meio (mov. oscilatório de cada partícula) é perpendicular à direção de propagação da onda. **(cordas, REM, mola)**

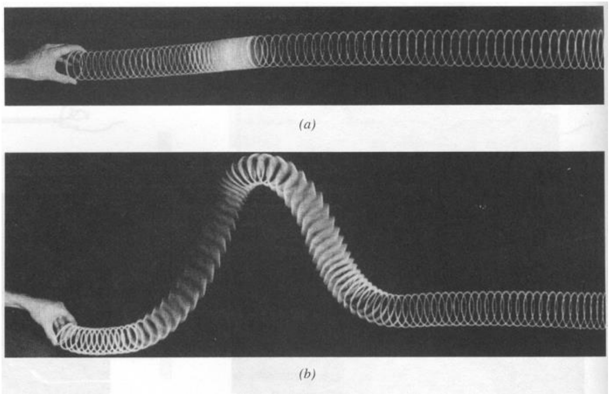
Ondas Longitudinais – a perturbação do meio (mov. oscilatório de cada partícula) é paralela à direção de propagação da onda. **(som, mola)**

ÓTICA ONDULATÓRIA

1. Introdução



Ondas Mecânicas longitudinais numa mola e num gás e ondas transversais numa corda.



Ondas Mecânicas longitudinais e transversais numa mola.

A forma mais fácil de visualizar uma onda é numa corda. Vamos recorrer por isso à **onda numa corda** para descrever algumas propriedades das ondas que são gerais e que iremos usar mais tarde nas ondas eletromagnéticas.

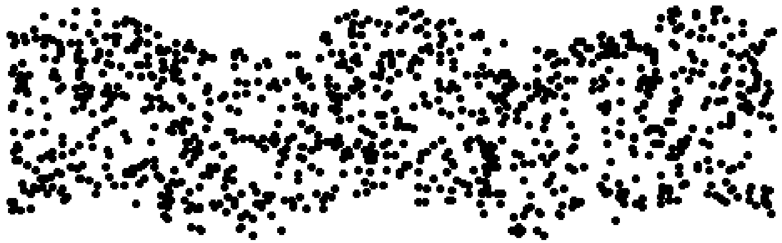
Por exemplo, quando uma onda chega ao fim da corda, será **reflectida**. Se a corda estiver ligada a outra de densidade mássica diferente, parte da onda é **reflectida** e parte é **transmitida (refractada)** para a segunda corda, dependendo a relação entre as fracções reflectida e refractada das propriedades das duas cordas.

ÓTICA ONDULATÓRIA

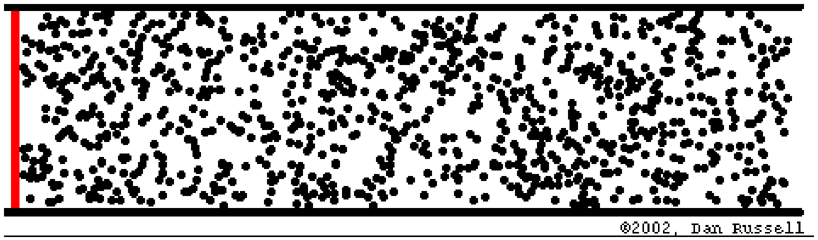
1. Introdução

Tipos de propagação de ondas

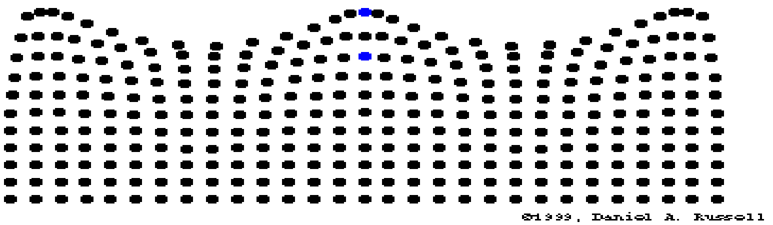
- **Onda Transversal**



- **Onda Longitudinal**

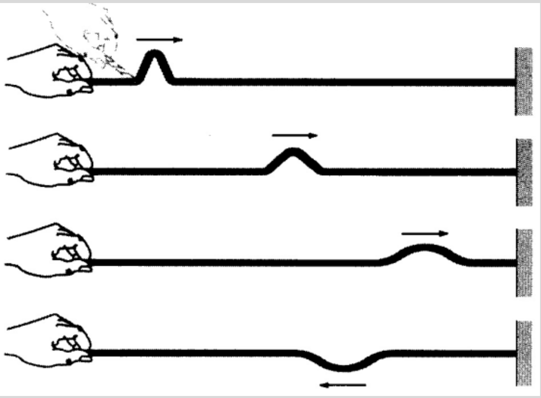


- **Ondas Mistas**

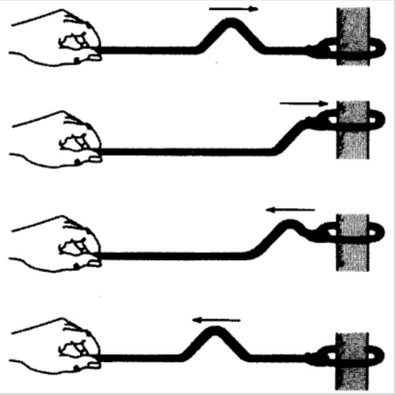


ÓTICA ONDULATÓRIA

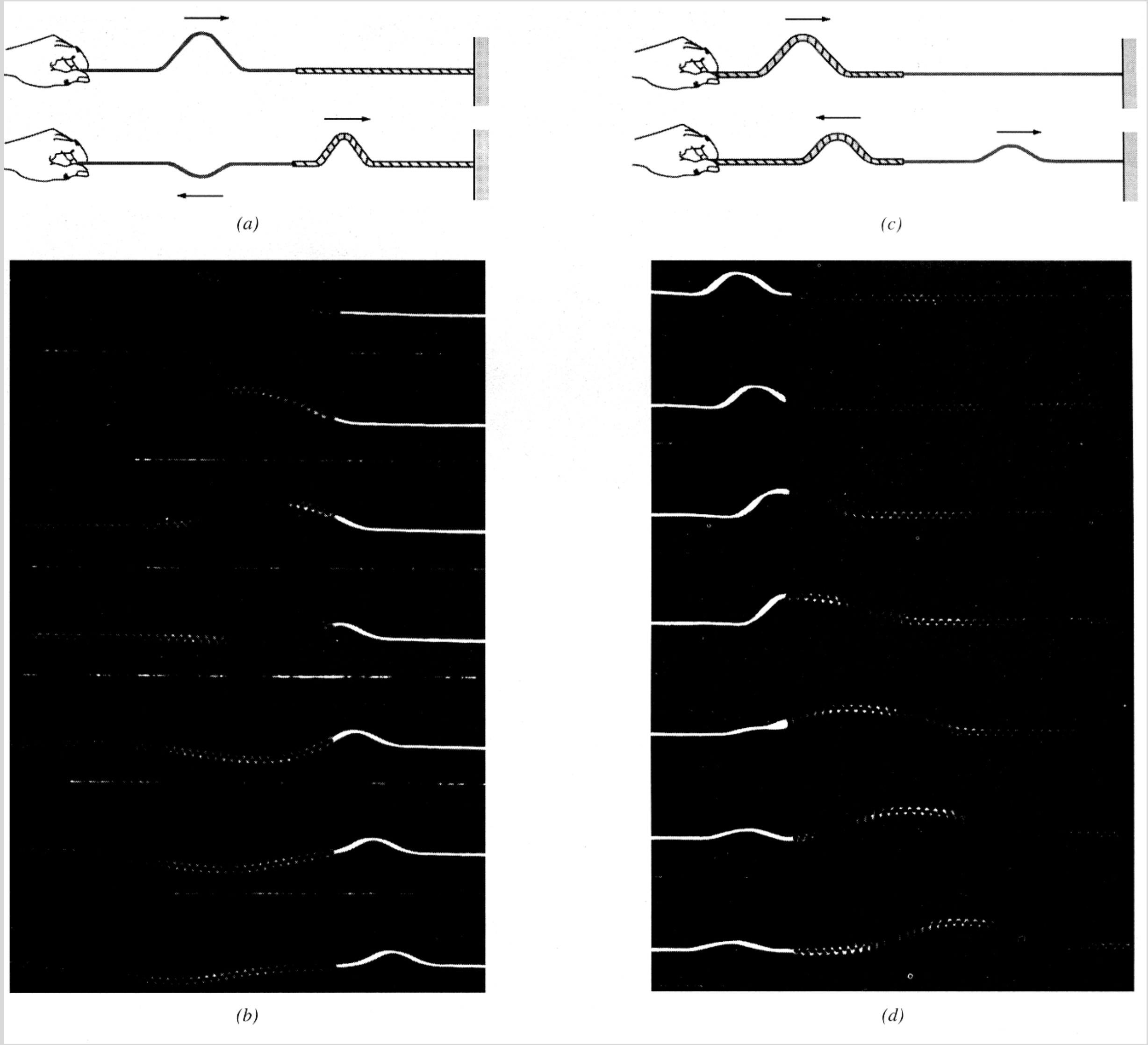
1. Introdução



Onda transversal numa corda a mover-se para a direita e a ser refletida com inversão – extremidade fixa da corda



Onda transversal numa corda a mover-se para a direita e a ser refletida sem inversão – extremidade livre da corda



Onda transversal numa corda a mover-se para a direita e a ser refletida e transmitida. A transmissão dá-se sempre sem inversão. A reflexão dá-se com inversão se a segunda corda for mais densa que a primeira e sem reflexão se for menos densa.

ÓTICA ONDULATÓRIA

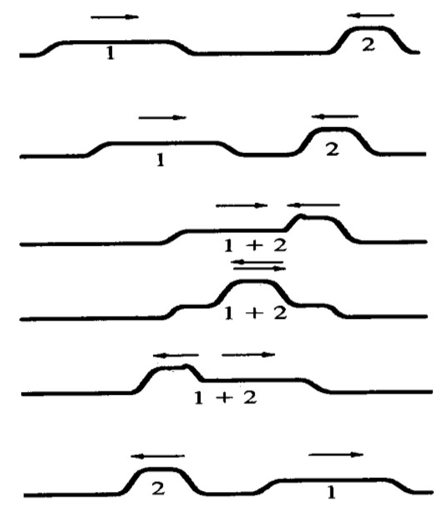
1. Introdução

Todos os tipos de ondas, para além de serem **refletidas e refratadas**, podem sofrer **difração** quando se intercalam obstáculos no seu caminho e podem **interferir** quando se sobrepõem no espaço e no tempo.

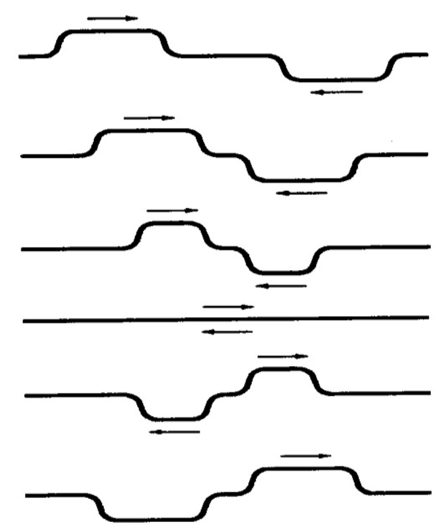
Na figura junta mostra-se o resultado da **sobreposição** de duas ondas que se deslocam, uma para a direita e a outra para a esquerda.

Quando se cruzam, as perturbações, isto é os deslocamentos, “adicionam-se”.

Ver o caso (b) em que, num dado instante, a perturbação “global” é nula, porque se estão a adicionar deslocamentos numericamente iguais mas simétricos.



(a)

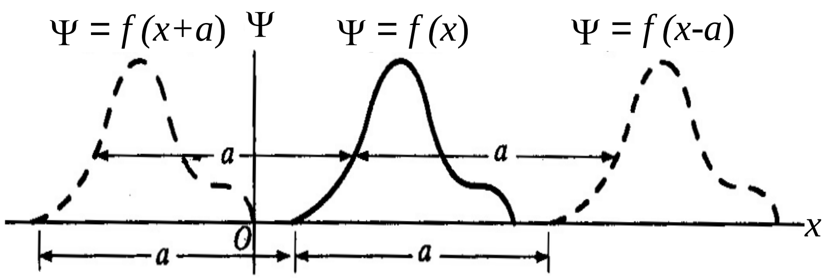


(b)

ÓTICA ONDULATÓRIA

2. Movimento Ondulatório

Na figura junta mostra-se uma função genérica $\Psi = f(x)$.



A forma da curva não varia se esta sofrer uma translação de a. Podemos representar a função a deslocar-se para a direita por $\Psi = f(x-a)$ e a deslocar-se para a esquerda por $\Psi = f(x+a)$.

Se a representar o deslocamento da curva, à velocidade v, no intervalo de tempo t,

$$\Psi = f(x - vt) \qquad \text{e} \qquad \Psi = f(x + vt)$$

representam a função Ψ genérica a deslocar-se, respetivamente, para a direita e para a esquerda, com velocidade v.

A natureza da perturbação é irrelevante! Pode ser um deslocamento numa corda, numa mola ou numa haste, uma perturbação dos campos elétricos e magnéticos associados à radiação ou mesmo uma variação da probabilidade quântica associada a uma onda de matéria (mecânica quântica).

- Para algumas situações simples, ondas numa corda, numa mola, numa haste ou numa coluna de gás, é possível, partindo das leis de Newton da física clássica (forças), obter uma equação diferencial que relacione a propagação da perturbação com as propriedades do meio em que ela se propaga.

2. Movimento Ondulatório

Chega-se sempre a uma equação diferencial do tipo que é a chamada **equação de onda diferencial**

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Alguns exemplos (ver deduções no Alonso & Finn)

1. Onda transversal numa corda: $v^2 = T/\mu$ (T é a tensão na corda e μ a sua densidade linear ou massa por unidade de comprimento)

2. Ondas elásticas longitudinais num gás (som): $v^2 = k/\rho$ (k é o módulo volumétrico de elasticidade do gás, ou seja a variação de pressão por unidade de variação de densidade, e ρ é a sua densidade)

3. Ondas elásticas longitudinais numa mola: $v^2 = kL/m$ (k é a constante elástica da mola, L o comprimento da mola não deformada e m a sua densidade linear)

4. Ondas elásticas longitudinais numa haste: $v^2 = Y/\rho$ (Y é o módulo de elasticidade de Young e ρ é a densidade do material)

5. Ondas elásticas transversais numa haste: $v^2 = G/\rho$ (G é o chamado módulo de rigidez e ρ é a densidade do material)

6. Ondas superficiais num líquido: $v^2 = g\lambda/2\pi + 2\pi T/\rho\lambda$ (ρ é a densidade do líquido, T a sua tensão superficial, g a aceleração da gravidade e λ o comprimento de onda das ondas)

Esta expressão da velocidade é muito mais complicada do que nas situações anteriores e depende do c.d.o.! Esta dependência entre a velocidade e o c.d.o. vai-se também encontrar nas ondas eletromagnéticas! (dispersão)

2. Movimento Ondulatório

Para uma qualquer situação genérica, em que a função Ψ que se propaga seja do tipo *f (x ± vt)*, tem-se, derivando uma vez,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}(-v) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -v\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

e derivando de novo,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(v^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad ou} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$

Mostrou-se assim que qualquer função genérica, periódica, em que o argumento seja uma função de *(x ± vt)* obedece à equação diferencial de uma onda.

A função periódica mais simples é a **função sinusoidal**.

A função $\Psi(x,t) = \Psi_0 \, sen \, k(x \pm vt)$ deve então descrever uma onda, que se diz **harmónica.**

É uma função periódica no espaço e no tempo.

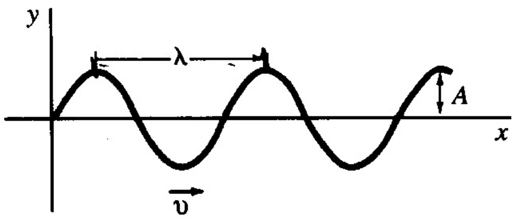
11

ÓTICA ONDULATÓRIA

2. Movimento Ondulatório

$$\boxed{\Psi(x,t) = \Psi_0 \; sen\, k(x \pm vt)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$



Se se substituir x por $x+2\pi/k$, a função repete-se, ou seja **$2\pi/k$** é o "*período espacial*" a que se chama **comprimento de onda, $\lambda = 2\pi/k$.** A constante positiva **$k = 2\pi/\lambda$** chama-se **número de onda**.

O valor máximo da função é $\Psi_0 = A$. A A chama-se **amplitude**

Se se substituir t por $t+T$, sendo T o **período temporal**, a função deve-se manter inalterada, ou seja $k\,v\,T = 2\pi$, donde **$T = \lambda/v$.**

Ao **inverso do período chama-se frequência** **$f = 1/T = v/\lambda$**

Note-se que a **frequência** depende da fonte que gera a onda (frequência da oscilação numa corda, por exemplo) e não do meio onde ela se propaga, enquanto que **a velocidade e o c.d.o**. dependem do meio em que a onda se propaga.

Uma forma conveniente de escrever a função de onda é $\Psi(x,t) = A\, sen\,(kx - wt)$ $w = 2\pi f$ onde **w é a frequência angular.**

Estamos a falar de ondas com uma única frequência, que se chamam **ondas monocromáticas**, mesmo que não sejam ondas eletromagnéticas .

2. Movimento Ondulatório

$$\Psi(x,t) = A\,sen(kx - wt)$$

$$\Psi(x,t) = A\,sen\,\varphi$$

Ao argumento da função *seno* chama-se **fase da onda**

A taxa de variação da fase ao longo do tempo é a frequência angular $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}_{(x=cte)} = -w$

A taxa de variação da fase com a posição é o número de onda $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}_{(t=cte)} = k$

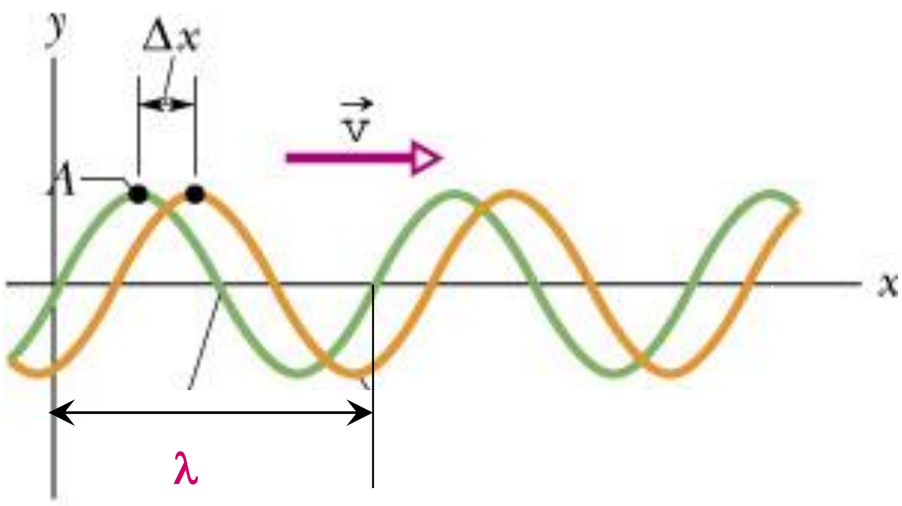
Usando a relação $$\frac{\partial x}{\partial t}_{(\varphi=cte)} = \frac{-(\partial\varphi/\partial t)}{(\partial\varphi/\partial x)} = \frac{w}{k} = v$$

vê-se que a velocidade de propagação a fase constante é v.

Esta é a velocidade à qual o perfil sinusoidal se propaga e chama-se **velocidade de onda** ou **velocidade de fase.**

Velocidade de grupo (slide 17 e 18)

2. Movimento Ondulatório



comprimento de onda

$$\lambda = vT$$

período

$$T = \frac{1}{f}$$

frequência

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

número de onda

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda} = kv$$

frequência angular

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)}$$

2. Movimento Ondulatório

Sobreposição de duas ondas, y_1 e y_2, com a mesma amplitude, y_m, e a mesma frequência angular, w, e numero de onda k <u>mas desfasadas de ϕ</u>

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) \qquad y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$\boxed{y'(x,t) = \left[2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right] \sin\left[kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right]}$$

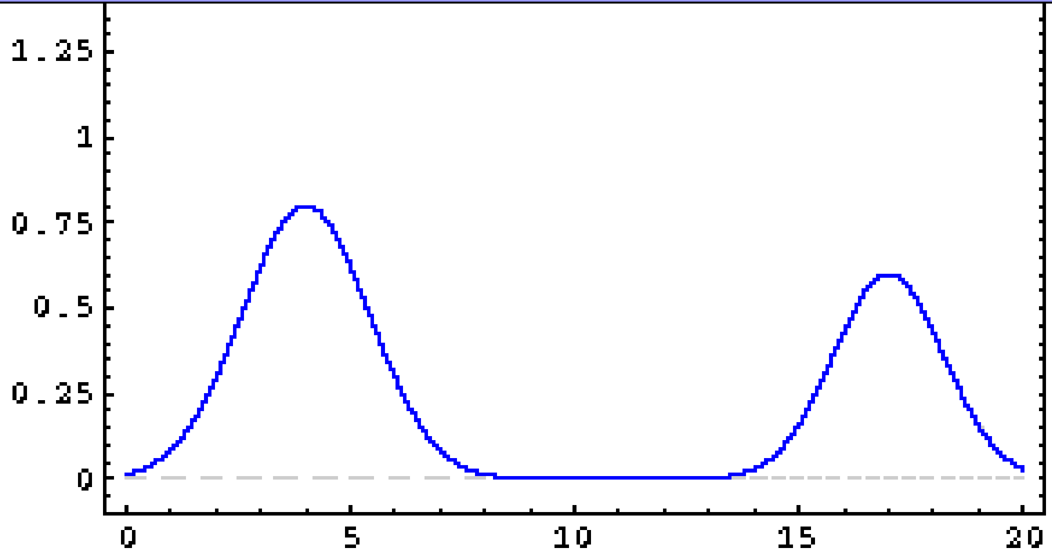
amplitude na posição x
(não depende do tempo)

termo oscilante

ÓTICA ONDULATÓRIA

2. Movimento Ondulatório – sobreposição de duas ondas

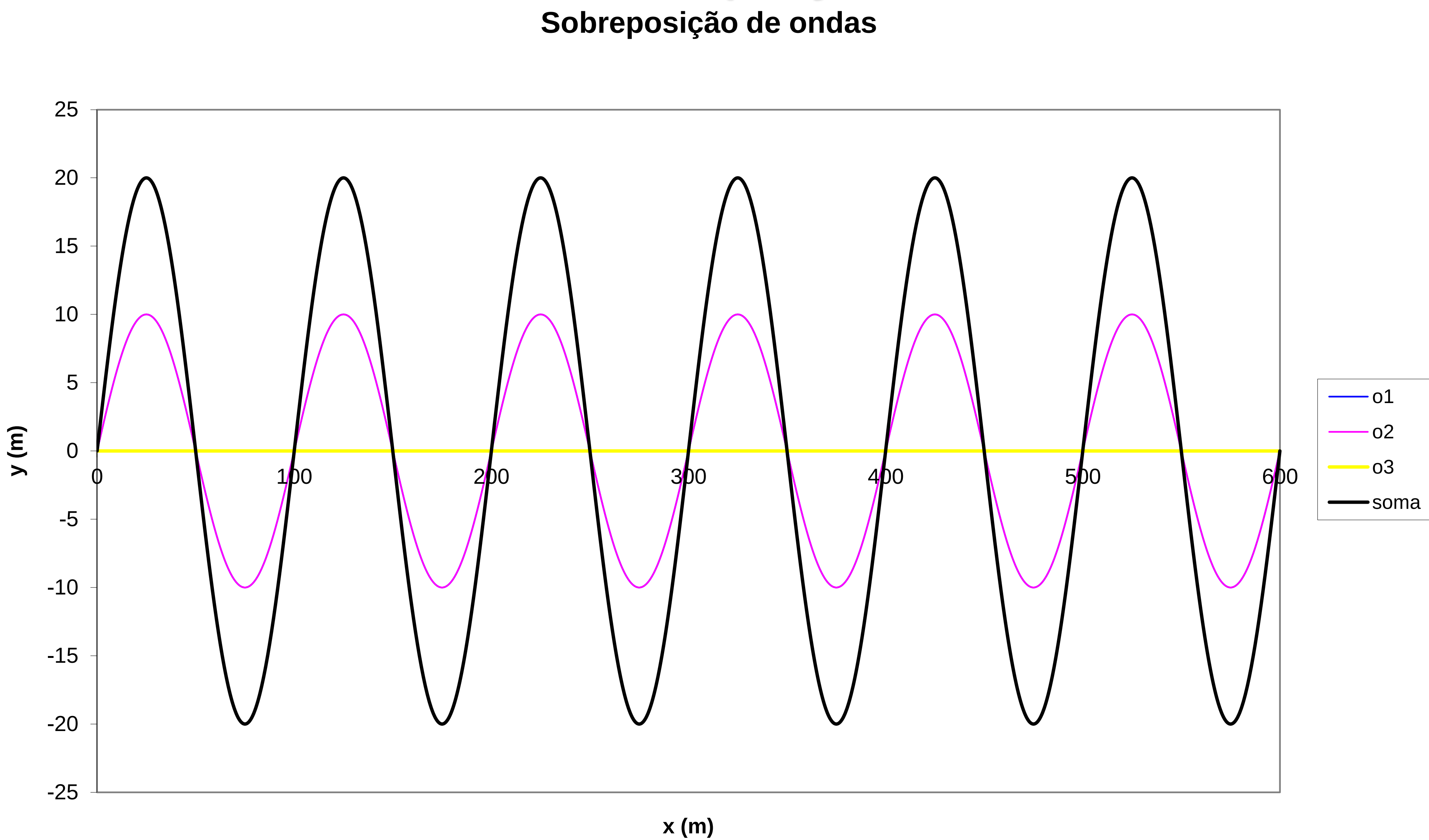
A sobreposição de ondas resulta numa onda que corresponde à soma algébrica das ondas sobrepostas



A sobreposição de ondas não afeta de nenhum modo a progressão de cada uma

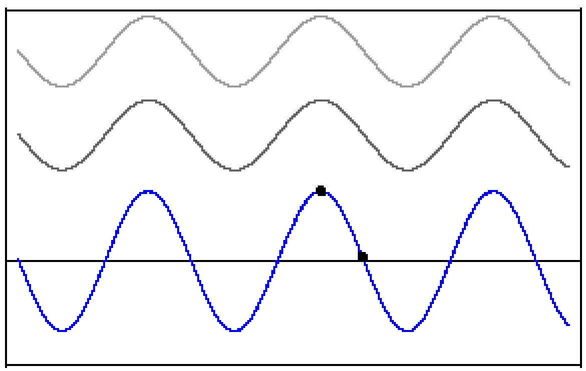
ÓTICA ONDULATÓRIA

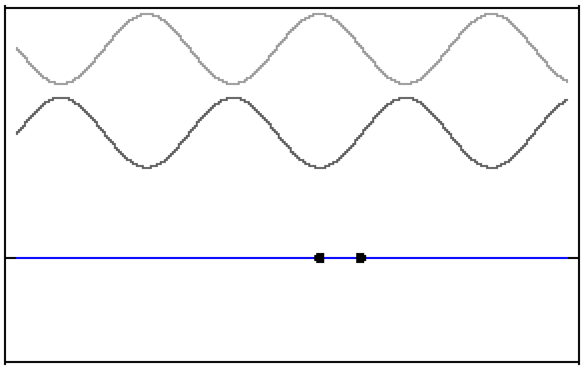
2. Movimento Ondulatório – sobreposição de duas ondas

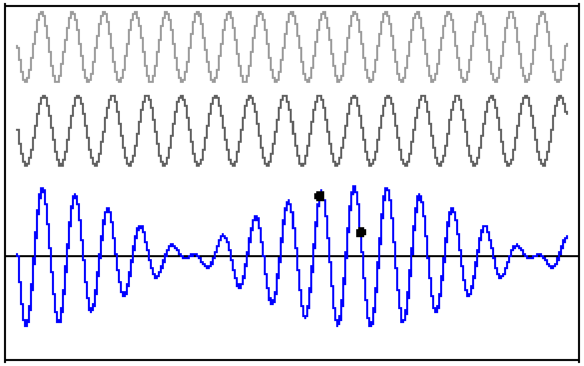


ÓTICA ONDULATÓRIA

2. Movimento Ondulatório – sobreposição de duas ondas

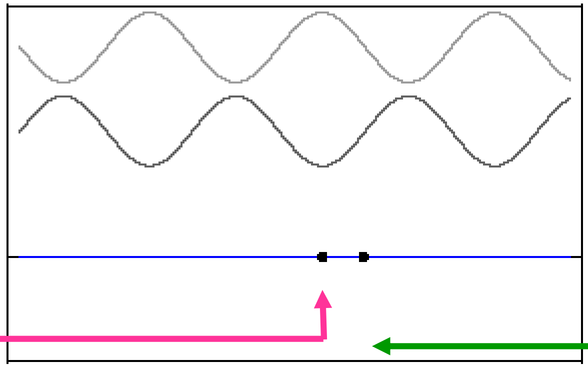






ÓTICA ONDULATÓRIA

2. Movimento Ondulatório – ondas estacionárias



nodo

antinodo

Se duas ondas com a mesma amplitude e comprimento de onda, se deslocarem em sentidos opostos ao longo da mesma direção, a sua interferência produzirá um onda estacionária

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$\boxed{y'(x,t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t}$$

amplitude na posição x

termo oscilante

2. Movimento Ondulatório

Representação complexa de uma onda

Em muitas situações manipular funções com senos e co-senos torna-se complicado e por isso **a representação trigonométrica de uma onda muitas vezes não é a mais conveniente**.

A representação **exponencial complexa** da função de onda é uma alternativa matematicamente mais simples e muito usada quer na mecânica clássica, quer na mecânica quântica, quer em ótica.

Usando o diagrama de Argand e a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\, sen\theta$

qualquer número complexo se pode escrever como $z = r(\cos\theta + i\, sen\theta) = re^{i\theta}$

Quer a parte real quer a parte imaginária de um número complexo podem representar ondas harmónicas. Se se escolher a parte real, $\boxed{Re(z) = r\cos\theta}$

$$\Psi(x,t) = A\cos(wt - kx + \varepsilon) = A\,e^{i(wt-kx+\varepsilon)} = A\,e^{i\varphi}$$

Quando é necessário operar com equações de ondas são muito mais simples as manipulações algébricas com **exponenciais complexas** do que com as formas trigonométricas.

2. Movimento Ondulatório – Ondas planas

$\Psi(x,t) = \Psi_0 \; sen \; k(x \pm vt)$ Representa uma onda que se propaga ao longo do eixo dos x, mas não necessariamente concentrada no eixo dos x. A perturbação pode-se estender a todo o espaço. Será então uma **onda plana tridimensional** que se propaga paralelamente a x.

A forma mais geral de escrever uma *equação de onda harmónica tridimensional plana* é a forma vetorial, em que a onda se propaga na direção do vetor $\vec{k}$, tendo componentes nas três direções cartesianas, sendo $\vec{k} = [k_x, k_y, k_z]$

$$\Psi(r,t) = A \; sen\,(\vec{k}.\vec{r} - wt) = Ae^{i(\vec{k}.\vec{r} - wt)}$$

O vetor $\vec{k}$, cujo módulo $k = 2\pi / \lambda$ é o **número de onda**, chama-se **vetor de propagação**, porque **identifica a direção de propagação da onda**.

As superfícies perpendiculares a $\vec{k}$ e formadas por pontos de igual fase, chamam-se **frentes de onda**.

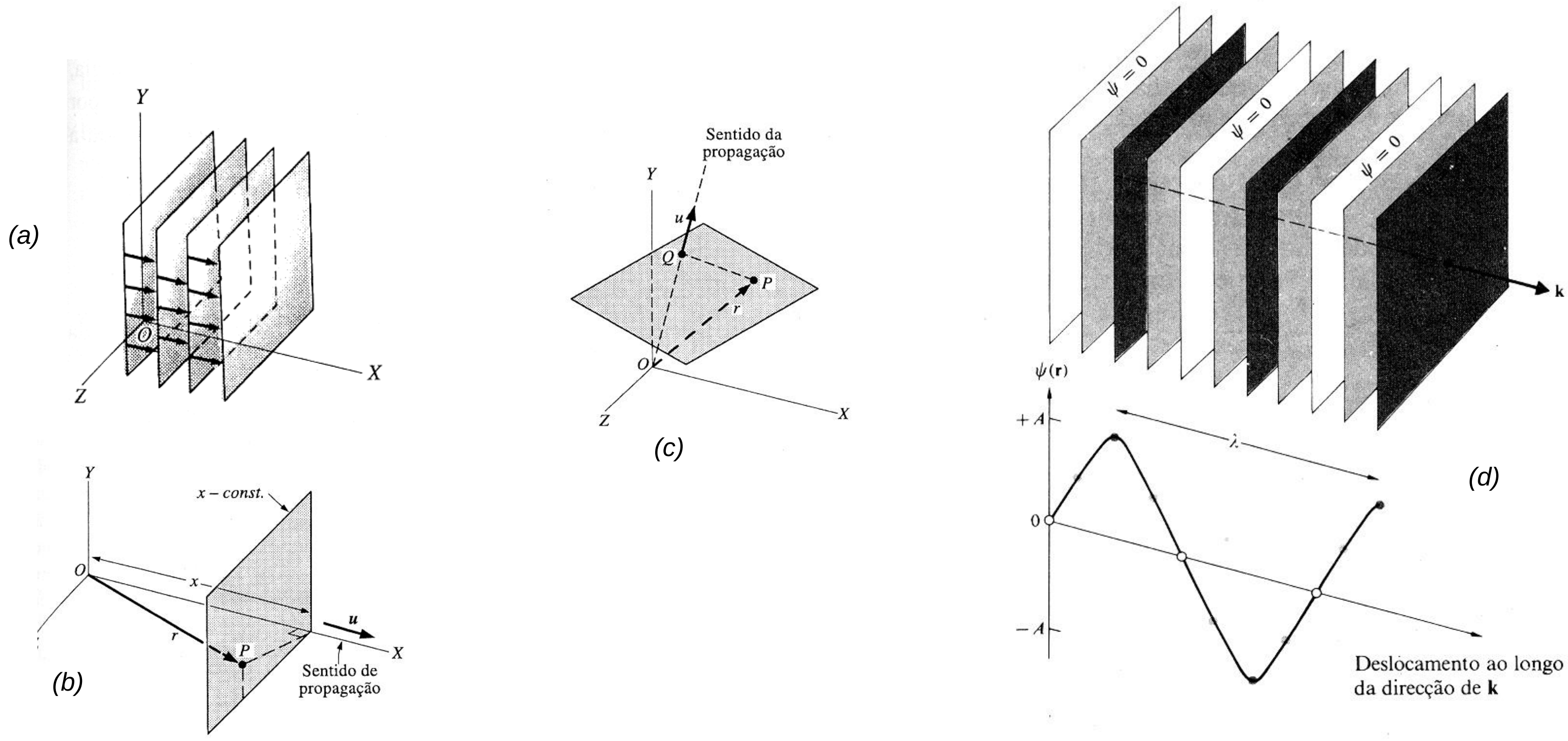
Uma **onda harmónica, plana, em coordenadas cartesianas** será

$$\Psi(x,y,z,t) = A \; sen\,(k_x x + k_y y + k_z z - wt) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - wt)} = Ae^{i[k(\alpha x + \beta y + \gamma z) - wt]}$$

Em que α, β e γ são os co-senos directores do vetor $\vec{k}$ em que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$

ÓTICA ONDULATÓRIA

2. Movimento Ondulatório – Ondas Planas



Representações de ondas planas (as frentes de onda são planas):
(a) e (b) as ondas propagam-se ao longo de x .
(c) e (d) a propagação das ondas é na direção do vetor $\vec{k}$
O que se mostra são **frentes de onda**, superfícies perpendiculares a $\vec{k}$ e que unem pontos de igual fase.

ÓTICA ONDULATÓRIA

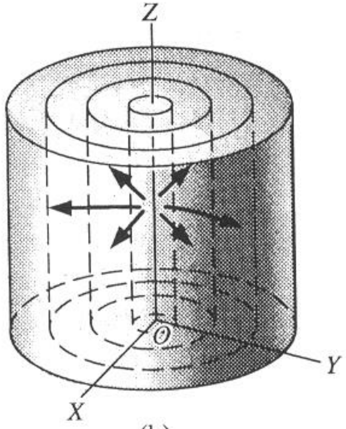
2. Movimento Ondulatório – Ondas Cilíndricas

~~As **ondas planas** são um caso muito particular de ondas tridimensionais, embora constituam um caso **muito importante em ótica** porque, com instrumentos óticos simples, é possível transformar ondas eletromagnéticas tridimensionais esféricas, por exemplo, em ondas planas.~~

~~As **ondas planas** propagam-se apenas numa direção bem definida do espaço, **a direção do vetor** $\vec{k}$.~~

~~No entanto, na natureza existem outros casos de **ondas**, para além das eletromagnéticas, **que se propagam em várias direções**. Os casos mais importantes são as **ondas cilíndricas e as esfér**~~**icas.**

Nas **ondas cilíndricas** as **frentes de onda são superfícies cilíndricas** coaxiais, paralelas a uma dada direção , por exemplo o eixo dos *z* na figura. Logo, **a propagação da onda é perpendicular a esta direção ,** ou seja **é ao longo do plano *xy* (os vetores $\vec{k}$ estão também no plano *xy*)**



(b)

ÓTICA ONDULATÓRIA

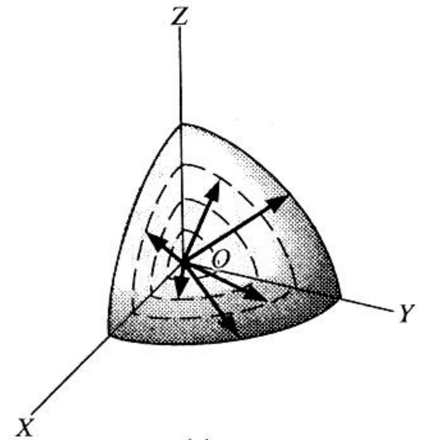
2. Movimento Ondulatório – Ondas Esféricas

Quando **uma perturbação, originada num determinado ponto, se propaga com a mesma velocidade em todas as direções do espaço**, isto é, quando **o meio é isotrópico**, dá origem a uma **onda esférica**.

As **frentes de onda** ou **superfícies de onda** são então **esferas concêntricas** em relação ao ponto em que a perturbação teve origem.

Quando se atira uma pedra para dentro de um tanque com água as ondulações à superfície na zona de impacto propagam-se como **ondas circulares**, **bidimensionais**.

Generalizando esta imagem, podemos imaginar uma pequena massa pontual, pulsante, no interior de um líquido compressível. **A perturbação propaga-se como uma onda esférica, do centro para a periferia**.



(c)

A mesma imagem é válida para uma **fonte pontual de radiação a propagar-se num meio isotrópico**.

Se **o meio for anisotrópico as velocidades de propagação não são iguais em todas as direções** e a **onda resultante não é esférica**, podendo assumir formas variadas e muito complexas.

2. Movimento Ondulatório – Equação Diferencial Tridimensional

Podemos generalizar, para a situação tridimensional, a **equação diferencial de uma onda** que será, **em coordenadas cartesianas**,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$

Ou, escrita de outra forma, mais compacta, usando o **operador Laplaciano**,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \textbf{(A)}$$

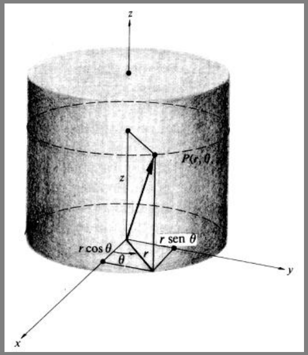
Esta forma de escrever a equação de onda é adequada para as **ondas tridimensionais planas**, mas não para as ondas cilíndricas ou esféricas.

Nestes casos deve-se **escrever a equação de onda**, respetivamente, **em coordenadas cilíndricas e esféricas**.

ÓTICA ONDULATÓRIA

2. Movimento Ondulatório – Equação Diferencial Tridimensional

Num sistema de **coordenadas cilíndricas** cada ponto P é função de r e de θ, como se mostra na figura. ($x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$)



O **Laplaciano de Ψ,** em coordenadas cilíndricas é

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

A simetria cilíndrica traduz-se por uma invariância em z e em θ, logo $\nabla^2\Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

A **equação diferencial de onda, em coordenadas cilíndricas,** fica então

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

Uma solução particular aproximada e válida apenas para valores de r elevados será

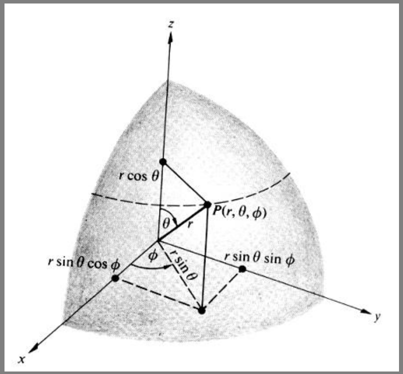
$$\Psi(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}}\cos k(r - vt) = \frac{A}{\sqrt{r}}e^{ik(r-vt)}$$

em que, como se vê, a amplitude decresce quando r aumenta

2. Movimento Ondulatório – Equação Diferencial Tridimensional

~~Num sistema de **coordenadas esféricas** cada ponto P é função de r, θ, e ϕ como se mostra na figura.~~

~~$(x = r\,sen\theta\cos\phi,\ \ y = r\,sen\theta\ sen\phi,\ \ z = r\cos\theta)$~~



~~O **Laplaciano de Ψ,** em coordenadas esféricas é~~

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

~~Se admitirmos que a simetria esférica se traduz por uma invariância angular em θ e em ϕ, tem-se~~

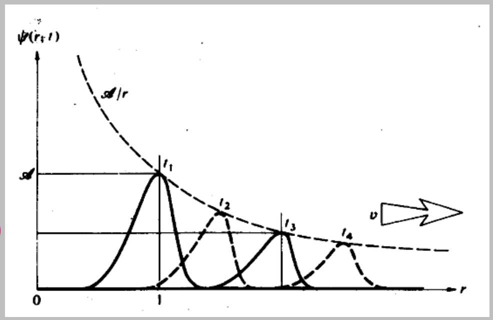
$$\nabla^2\Psi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)$$

~~Que se pode mostrar que é equivalente a~~

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi)$$

A equação diferencial de onda em coordenadas esféricas, fica então

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \qquad ou \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Psi)$$



Uma solução particular harmónica é do tipo

$$\Psi(r,t) = \frac{A}{r}\cos k(r - vt) = \frac{A}{r}e^{ik(r-vt)}$$

em que, como se vê, a amplitude decresce quando r aumenta

3. Ondas eletromagnéticas

Maxwell provou que a luz se propaga como uma **onda associada aos campos elétrico e magnético** e assim **a ÓTICA é** apenas **um ramo do eletromagnetismo.**

No tempo de Maxwell (~1850) só se conhecia radiação visível, ultra-violeta e infra-vermelha. Por esta altura Hertz criou, manipulando cargas elétricas, um tipo de radiação, hoje conhecida por ondas de rádio, e mostrou que esta radiação se propagava no ar com a mesma velocidade da luz, *c*.

Origem da REM

Raios- γ, raios-X, ulta-violeta, visível – oscilações de cargas atómicas e nucleares;
Infra-vermelho – vibrações e rotações moleculares;
Micro-ondas – vibrações e rotações moleculares *(os fornos micro-ondas funcionam a 2.45GHz ou 12.2cm)* e inversões de spin do eletrão e do núcleo
Radiofrequências – geração artificial por circuitos eletrónicos

Maxwell provou, e é o que vamos fazer a seguir usando as equações de Maxwell, que **as OEM são transversais**, oscilando sempre os campos elétrico e magnético perpendicularmente um ao outro e perpendicularmente à direção de propagação da onda, a direção do vetor $\vec{k}$. As duas componentes da onda não existem independentemente uma da outra, só existem associadas.

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k} \qquad E = E_0 sen(kx - wt) \qquad \frac{E_0}{B_0} = c \qquad \frac{E}{B} = c \qquad \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{k} \qquad B = B_0 sen(kx - wt)$$

ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas

James Clerk **Maxwell** uniformizou todo o eletromagnetismo e conseguiu escrever um conjunto compacto e muito elegante de apenas 4 equações que resolvem todos os problemas do eletromagnetismo clássico.

As Equações de Maxwell estão para o eletromagnetismo clássico como as Leis de Newton estão para a mecânica clássica.

As **equações de Maxwell** relacionam os vetores campo elétrico, $\vec{E}$, e campo magnético, $\vec{B}$, com as respetivas fontes, cargas elétricas, correntes elétricas e campos variáveis.

As **equações de Maxwell mostram que, como resultado de cargas elétricas aceleradas, existe uma equação de onda associada aos vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$.**

Em 1887 **Hertz** criou, pela primeira vez, REM no laboratório manipulando cargas elétricas, validando as equações de Maxwell.

Das relações do eletromagnetismo sabe-se que:

Cargas elétricas estacionárias ➡ $\vec{E}$ = constante e $\vec{B} = 0$

Cargas elétricas em mov. uniforme ➡ $\vec{E}$ e $\vec{B} \neq 0$, mas não há radiação, não há fluxo de corrente

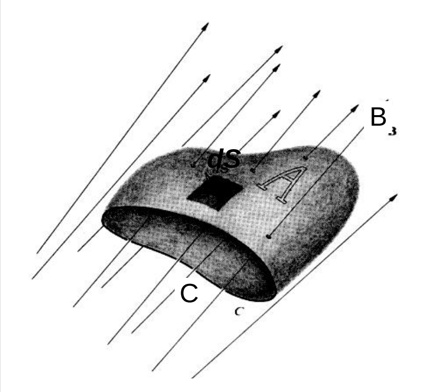
Cargas elétricas aceleradas ➡ dão origem à radiação EM

ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas – Equações de Maxwell

Qualquer carga q sujeita a uma força elétrica, F_E, e a uma força magnética, F_M, dá origem a campos elétricos e magnéticos em que $\boxed{\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_M = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$

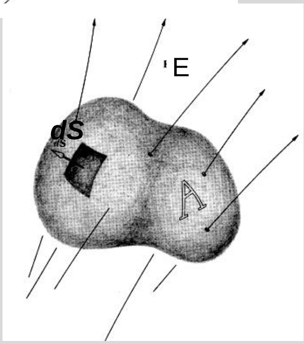
Os **campos elétricos são gerados por cargas elétricas e/ou por campos magnéticos variáveis no tempo**, e os **campos magnéticos são gerados por campos elétricos variáveis no tempo** (Lei de Gauss, Lei de Indução de Faraday e Lei e de Maxwell, que reformulou a lei de Ampère)



Lei de Indução de Faraday:

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\, dl = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, dS}$$

Um fluxo magnético variável no tempo através de uma superfície A, limitada pela curva fechada C, dá origem a um campo elétrico ao longo de C.



Lei de Gauss elétrica:

$$\boxed{\Phi_E = \oiint_A \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho\, dV}$$

Relaciona o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada A com a carga no seu volume interior

ε – permitividade elétrica do meio (para o vazio, $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}$)

ρ – densidade de carga

ÓTICA ONDULATÓRIA

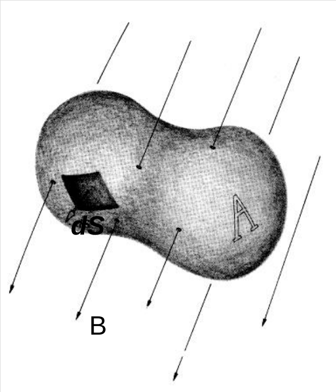
3. Ondas eletromagnéticas – Equações de Maxwell

Lei de Gauss Magnética:

Não se conhece o equivalente magnético da carga elétrica. Não havendo "cargas" magnéticas o equivalente magnético da lei de Gauss será,

$$\boxed{\Phi_B = \oiint_A \vec{B}\, d\vec{S} = 0}$$

isto é, não há variação do fluxo magnético através de uma superfície fechada.

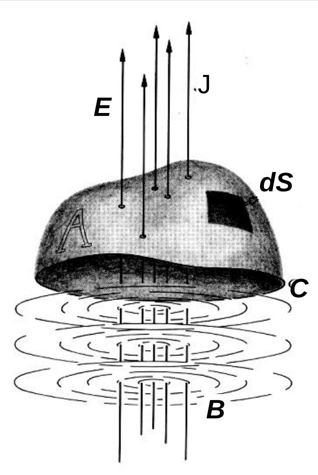


Lei de Indução de Maxwell (que reformulou a Lei de Ampère):

Lei de Ampère

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\, dl = \mu \iint_A \vec{J}\, dS = \mu\, i}$$

Relaciona o integral do campo magnético ao longo de uma curva fechada C, com a corrente i que flúi através de uma superfície aberta A delimitada por C.



Maxwell introduz o conceito de densidade de corrente de deslocamento reformulando a lei de Ampère

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\, dl = \mu \iint_A (\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t})\, dS}$$

μ – permeabilidade do meio (para o vazio, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} Ns^2C^{-2}$)
J – densidade de corrente

3. Ondas eletromagnéticas – Equações de Maxwell

Lei de Indução de Faraday:

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\, dl = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, dS} \qquad (1)$$

Lei de Indução de Maxwell
(que reformulou a Lei de Ampère):

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\, dl = \mu \iint_A (\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\, dS} \qquad (2)$$

Lei de Gauss elétrica:

$$\boxed{\oiint_A \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho\, dV} \qquad (3)$$

Lei de Gauss Magnética:

$$\boxed{\oiint_A \vec{B}\, d\vec{S} = 0} \qquad (4)$$

Usando dois teoremas conhecidos do cálculo vetorial,

*o **teorema de Gauss***

$$\oiint_A \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV$$

Aplicado a (3) e (4)

*e o **teorema de Stokes***

$$\oint_C \vec{F} \cdot dl = \iint_A \vec{\nabla} \times \vec{F}\, dS$$

Aplicado a (1) e (2)

*podemos passar das equações de Maxwell na forma integral para as mesmas equações na **forma diferencial***

(ver Hecht - Apêndice 1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \textbf{(1-a)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \textbf{(3-a)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu (\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \qquad \textbf{(2-a)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \textbf{(4-a)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = rot\ \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\ \vec{E}$$

3. Ondas eletromagnéticas – Equações de Maxwell

Podemos considerar que o meio é o **vazio**, isto é um **meio não condutor e sem cargas**, onde ρ **= 0,** J **= 0,** $\mu = \mu_0$ **e** $\varepsilon = \varepsilon_0$ ficando então as equações diferenciais com a forma

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \textbf{(1-b)} \qquad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} \quad \textbf{(3-b)}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \textbf{(2-b)} \qquad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad \textbf{(4-b)}$$

A **Lei de Indução de Faraday,** (1), (1-a) ou (1-b) e a **Lei de Maxwell** (2), (2-a), ou (2-b), mostram que a um campo elétrico variável no tempo está sempre associado um campo magnético **perpendicular** em cada ponto à direção ao longo da qual o campo elétrico varia e, vice-versa, a um campo magnético variável no tempo está sempre associado um campo elétrico **perpendicular** em cada ponto à direção ao longo da qual o campo magnético varia. Logo,

em qualquer perturbação eletromagnética arbitrária os campos $\vec{E}$ **e** $\vec{B}$ **são perpendiculares entre si e perpendiculares (transversais) relativamente à direção de propagação da perturbação.** Estas conclusões tornam-se mais claras quando escrevermos as equações de Maxwell na forma diferencial em coordenadas cartesianas.

3. Ondas eletromagnéticas – Equações de Maxwell

Para mostrar que as equações de Maxwell têm a forma de uma equação de onda, devemos fazer as segundas derivadas em relação às coordenadas espaciais,

Aplicando o operador rotacional sobre ambos os membros de (2-b)

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\nabla\times\vec{E})}_{-\frac{\partial B}{\partial t}\text{ por (1-b)}}$$

e usando a igualdade $\nabla\times(\nabla\times B) = \nabla\underbrace{(\nabla\cdot B)}_{0\text{ por (4-b)}} - \nabla^2 B$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B} = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$$

Aplicando o operador rotacional sobre ambos os membros de (1-b)

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\nabla\times\vec{B})}_{\mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\text{ por (2-b)}}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

Comparando as relações a que acabámos de chegar através das equações de Maxwell

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \qquad \boxed{\nabla^2\vec{B} = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$$

com a relação (A) da página 24, $\nabla^2\Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ facilmente se vê que acabámos de chegar à equação diferencial de onda eletromagnética em que $\boxed{\frac{1}{v^2} = \mu_0\,\varepsilon_0}$

ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas – Equações de Maxwell

Resolvendo os produtos vetoriais e escalares das relações (1-b), (2-b), (3-b) e (4-b), podemos escrever as equações de Maxwell na forma diferencial, em coordenadas cartesianas:

(1-c)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} \boxed{- \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t}} \\ \boxed{\dfrac{\partial E_y}{\partial x}} \underbrace{- \dfrac{\partial E_x}{\partial y}} \boxed{= -\dfrac{\partial B_z}{\partial t}} \end{cases}$$

(2-c)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} \boxed{- \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t}} \\ \boxed{\dfrac{\partial B_y}{\partial x}} \underbrace{- \dfrac{\partial B_x}{\partial y}} \boxed{= \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t}} \end{cases}$$

(3-c)
$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x}} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

(4-c)
$$\boxed{\frac{\partial B_x}{\partial x}} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Este tipo de representação é muito conveniente quando se considera radiação polarizada numa direção , por exemplo, ***consideremos que a radiação se propaga ao longo do eixo dos x****.*

Então, a única coordenada espacial em relação à qual as derivadas parciais não são nulas é a coordenada x.

Tem-se assim o campo elétrico a oscilar em z e/ou em y e o campo magnético a oscilar em y e/ou em z.

Considere-se, para simplificar, que o campo elétrico oscila apenas em y e campo magnético em z. Tem-se então

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad \textbf{(1-d)}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad \textbf{(2-d)}$$

3. Ondas eletromagnéticas – Equações de Maxwell

Como já se mostrou atrás a equação diferencial de onda admite como soluções mais simples, soluções harmónicas do tipo $\Psi(x,t)=\Psi_0\, sen\, k(x-vt)$ ou seja,

$$\vec{E}_y(x,t)=E_{0,y}\, sen\, k(x-vt)$$

$$\vec{E}_y(x,t)=E_{0,y}\, cos\,(wt-\frac{w}{c}x)$$

$$\vec{B}_z(x,t)=B_{0,z}\, sen\, k(x-vt)$$

$$\vec{B}_z(x,t)=B_{0,z}\, cos\,(wt-\frac{w}{c}x)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \textbf{(1-d)}$$

$$B_z=-\int\frac{\partial E_y}{\partial x}\partial t$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=E_{0,y}\frac{w}{c}sen\,(wt-\frac{w}{c}x)$$

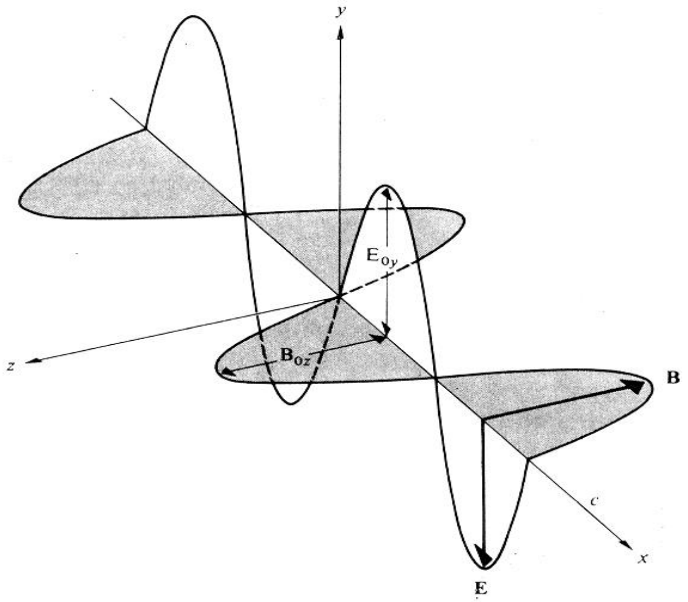
$$B_z=-\int E_{0,y}\frac{w}{c}sen\,(wt-\frac{w}{c}x)\,\partial t$$

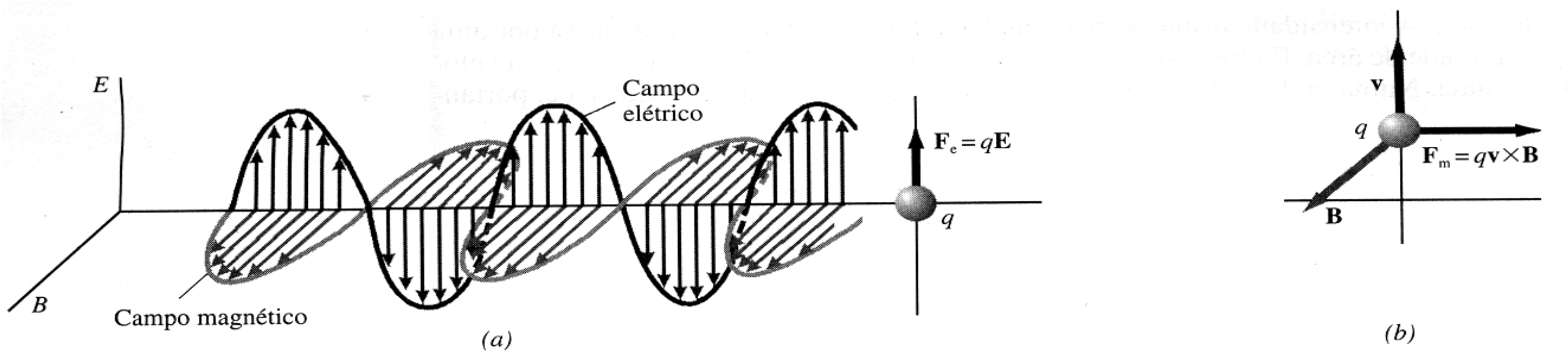
$$B_z=\frac{E_{0,y}}{c}cos\,(wt-\frac{w}{c}x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} B_{0,z}&=\frac{1}{c}E_{0,y}\\ E_{0,y}&=c\,B_{0,z}\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} B_z&=\frac{1}{c}E_y\\ E_y&=c\,B_z\end{aligned}}$$

ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas





ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas

Uma carga elétrica em repouso cria um campo elétrico radial e uniforme.

No instante em que a carga é acelerada o campo elétrico $\vec{E}$ é perturbado na vizinhança da carga.

Esta perturbação propaga-se no espaço com velocidade finita, *c*, e com a forma de um impulso ondulatório variável no tempo, o que, de acordo com (2), (2-a), (2-b) ou (2-c), induz um campo magnético $\vec{B}$ que depende do tempo.

Então, por (1), (1-a), (1-b) ou (1-c), é induzido um campo elétrico, e ….

O processo continua com os **campos elétrico e magnético intrinsecamente acoplados**. Estes dois campos não têm existência separada, Devem ser sempre considerados como dois aspectos do mesmo fenómeno, o **campo eletro-magnético**, **cuja fonte são cargas elétricas em movimento não uniforme**.

Maxwell escreveu, a propósito da relação a que acabava de chegar $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\, \varepsilon_0}}}$

“este valor de velocidade é tão próximo do valor experimental da velocidade da luz que parecem existir fortes indícios para se poder concluir que a própria luz (incluindo a radiação calorífica e outras, se as houver) é uma perturbação eletromagnética com a forma de uma onda que se propaga num campo eletromagnético de acordo com as leis do eletromagnetismo”

ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas – Energia e Momento

Uma onda eletromagnética transporta energia.

Densidade de energia – energia da radiação por unidade de volume, u [$Jm^{-3} \equiv Nm^{-2}$]

No eletromagnetismo esta densidade relaciona-se

quer com o campo elétrico $u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$

quer com o campo magnético $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

Sabendo que $E = c\,B$ e que $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ verifica-se que $u_E = u_B$

Então, como $u = u_E + u_B$, $\boxed{u = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2}$

A partir da **densidade de energia** [$Jm^{-3} \equiv Nm^{-2} \equiv Pa$] pode-se calcular o **fluxo de energia por unidade de tempo** [$Jm^{-2}s^{-1}$] **ou potência por unidade de área** [$Js^{-1}m^{-2}$],

$S = uc = \frac{1}{\mu_0} EB$ ou na forma vetorial $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \varepsilon_0\, \vec{E} \times \vec{B}}$

O valor de $\vec{S}$ varia periodicamente entre um valor máximo e um valor mínimo. Para frequências óticas esta variação é muito rápida (f ~10^{14}Hz) e por isso o que tem interesse é tomar um valor médio de $\vec{S}$.

$\boxed{\vec{S} = c^2 \varepsilon_0\, \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - wt)}$

ao vetor $\vec{S}$ chama-se vetor de Poynting

ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas – Energia e Momento

O **valor médio** no tempo da amplitude do vetor de Poynting é a **irradiância ou ~~intensidade~~ ou potência por unidade de área** [$Nm^{-1}s^{-1} \equiv$ watt m^{-2}]

como $\langle \cos^2(\vec{k}\vec{r} - wt) \rangle = \dfrac{1}{2}$ tem-se

$$\boxed{I = \langle S \rangle = \frac{c^2 \varepsilon_0}{2} E_0 B_0 = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0{}^2 = \frac{c}{2\mu_0} B_0{}^2}$$

Se definirmos valor quadrático médio do campo elétrico ou magnético como

$$\langle E \rangle = E_{qm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \qquad \langle B \rangle = B_{qm} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{I = \langle S \rangle = c\varepsilon_0\, E_{qm}^2 = \frac{c}{\mu_0} B_{qm}^2}$$

Maxwell, em 1873, escreveu *"em qualquer meio em que ondas se propaguem, exerce-se uma pressão ao longo da direção normal às ondas e numericamente igual à energia por unidade de volume".* A esta pressão chama-se pressão de radiação $\mathcal{P}$.

Então a pressão de radiação P (em N/m^2 ou Pa) (**para uma superfície absorvente**) é igual à densidade de energia, u, ou seja

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{I}{c}}$$

A força que a radiação exerce sobre uma superfície A, **absorvente** é F$= A\langle P \rangle = \dfrac{\Delta p}{\Delta t}$

NOTA IMPORTANTE

Se a superfície A for **completamente refletora** um feixe que incida com velocidade $+c$ é refletido com velocidade $-c$ e então **quer a pressão de radiação quer a força serão duplas das anteriores.**

3. Ondas eletromagnéticas – Energia e Momento

O modelo mais simples para perceber a produção de ondas eletromagnéticas é o **modelo do dipolo oscilante**: **duas cargas de sinais contrários que vibram ao longo da linha que as une.**

Tanto a luz visível como a radiação UV têm origem no rearranjo dos eletrões exteriores dos átomos e das moléculas, através da variação do seu **momento dipolar elétrico.** A partir do átomo criam-se então os campos elétrico e magnético, mutuamente perpendiculares, em fase e transversais relativamente à direção de propagação da perturbação que é, normalmente, **esférica**.

Se os campos se criam devido às oscilações do momento dipolar, aceita-se que **a intensidade dos campos elétrico e magnético dependa da chamada polarizabilidade do átomo ou molécula** (quanto maior for o momento dipolar maior é a polarizabilidade)

Como já vimos, *(slide 26)* para **ondas esféricas** a amplitude varia inversamente com r

$$E(r,t) = E_0 \cos k(r - vt) = \frac{\mathcal{A}}{r} \cos k(r - vt)$$

e portanto a **irradiância** varia inversamente com r^2

$$\boxed{I = \frac{c\varepsilon_0}{2} \frac{\mathcal{A}^2}{r^2}}$$

No parâmetro $\mathcal{A}$ está a dependência entre a amplitude do campo elétrico e a polarizabilidade.

ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas – Dispersão

A **teoria de Maxwell** da radiação eletromagnética **não prevê a dispersão**, variação da velocidade de propagação da radiação, num dado meio, com o comprimento de onda.

Nas equações de Maxwell a influência do meio é descrita pelos parâmetros ε e μ, que são independentes do c.d.o., devendo assim n ser constante **o que não está de acordo com a experiência**.

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\,\mu}{\varepsilon_0\,\mu_0}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

O tratamento teórico da **dispersão**, dependência entre o índice de refracção e a frequência, pressupõe a inclusão da natureza atómica da matéria no modelo, através do momento dipolar ou polarização $\vec{P}$.

A dependência entre o n e a frequência, w, está relacionada com a forma como os mecanismos de polarização dependem de w.

Não vamos fazer aqui a dedução (ver Hecht, 3.5) mas pode-se mostrar que $\vec{P} = N\,q_e\,x$

onde x é o deslocamento da carga elétrica (do eletrão) q_e provocado pela passagem do campo elétrico,
que se pode mostrar ser dado por

$$x(t) = \frac{q_e / m_e}{(w_0^2 - w^2)}\,E(t)$$

w_0 é a chamada frequência de ressonância, sendo $w_0 = \sqrt{k / m_e}$

ÓTICA ONDULATÓRIA

3. Ondas eletromagnéticas – Dispersão

Para muitos materiais verifica-se, aproximadamente, que $\vec{P} = \vec{E}\,(\varepsilon - \varepsilon_0)$

e então $\varepsilon = \varepsilon_0 + \dfrac{N q_e^2 / m_e}{(w_0^2 - w^2)}$ e $\boxed{n^2(w) = 1 + \dfrac{N q_e^2}{\varepsilon_0\, m_e\, (w_0^2 - w^2)}}$

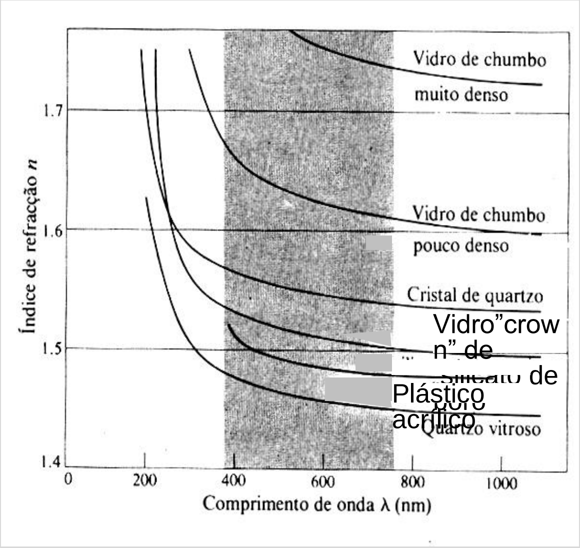
Esta relação a que chegámos é muito aproximada: prevê, por exemplo, que n seja infinito quando $w = w_0$, o que não se verifica experimentalmente.

Esta relação só tem significado, de acordo com o que foi dito, para $w < w_0$.

Se $w <<< w_0$, w pode-se desprezar e n é aproximadamente constante.

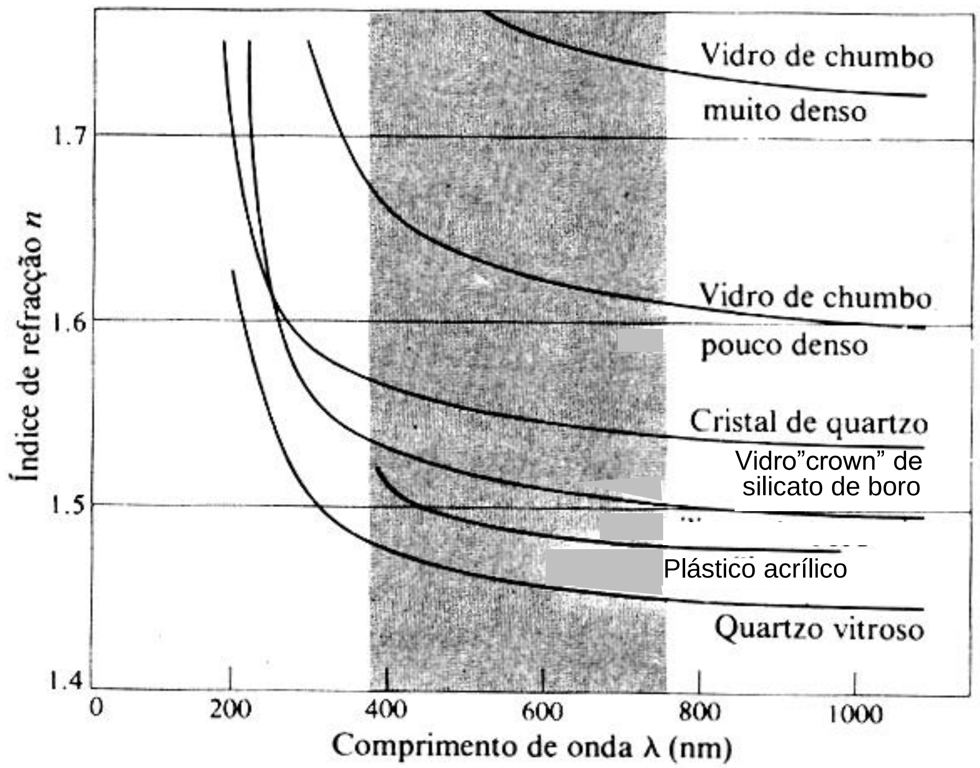
À medida que w **aumenta**, $(w_0^2 - w^2)$ diminui, logo n **aumenta**.

Para materiais transparentes, w_0 fica no ultra-violeta, logo, na zona das frequências óticas, zona do visível, n decresce quando o c.d.o. aumenta, como se mostra na figura junta.



n decresce quando o c.d.o. aumenta

3. Ondas eletromagnéticas – Dispersão



***n* decresce quando o c.d.o. aumenta**

Índice de Refração

$$n = \left(\frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2\text{-}C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2\text{-}C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2\text{-}C_3} + 1 \right)^{1/2}$$

em que λ vem expresso em μm e B_i e C_i são constantes para um dado material

Índice de Refração e dispersão

A mais importante distinção entre lentes (materiais) é avaliada, simultaneamente, pelo índice de refração e pela dispersão.

Quer a dispersão quer o índice de refração dependem do comprimento de onda. Em geral o índice de refração apresentado é para λ_d = 587,66 nm (linha d do hélio).

A dispersão é representada pelo chamado número de Abbe ou constrigência.

O número de Abbe é calculado a partir dos índices de refracção para λ_d = 587,66 nm (verde), λ_c = 656,3nm (vermelho), λ_f = 486,1 nm (azul)

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_f - n_c}$$

V_d define a velocidade de variação do índice de refração com λ.
Quanto menor V_d maior a taxa de variação de n com λ.

Crown: $n_d < 1{,}6$ e $V_d > 55$