



# T5 - Estudo do efeito do atrito no movimento oscilatório

A92839 - Beatriz Sousa Demétrio | A92846 - Carlos Miguel Passos Ferreira

**Alunos do Mestrado Integrado em Engenharia Física**

Departamento de Física, Escola de Ciências, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, 4710-057 Braga  
Portugal

03 de novembro de 2020

## Sumário

Procede-se a uma montagem experimental segundo os movimentos harmónicos simples e com amortecimento. Para isso, prendeu-se uma esfera a uma mola elástica, ligando este sistema a um sensor, recolhendo assim a posição do sensor e a força resultante. Esta experiência permitiu a obtenção do valor do  $k$  (constante elástica da mola),  $k = 10,457 \pm 0,051 \left(\frac{N}{m}\right)$ , e permitiu estudar o movimento harmónico amortecido causado pelas diferentes forças de atrito, quando acrescentado um bloco de madeira e submergindo o sistema oscilante num recipiente com parafina.

---

## 1. Introdução

Designemos por movimento harmónico/periódico a todo o movimento que se repete em intervalos regulares.

Designemos também por período  $T(s)$  o tempo necessário para completar uma oscilação completa (ou um ciclo).

Designemos por frequência  $f$  o número de oscilações completas por segundo:

$$f \text{ (Hz)} = \frac{1}{T \text{ (s)}}$$

Por fim, designemos por amplitude  $A \text{ (m)}$  o módulo do deslocamento máximo do corpo no sentido positivo ou negativo.

### MOVIMENTO HARMÓNICO SIMPLES

O **movimento harmónico simples** é um movimento executado por um corpo sujeito a uma força proporcional ao deslocamento do corpo e de sinal oposto. É representado por uma função sinusoidal do tempo.



Pela segunda lei de Newton, sabemos que  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ . Sabemos também que o movimento de um corpo de massa  $m$  está sujeito a uma força elástica  $\vec{F} = -k\vec{x}$ . Portanto vamos ter que o movimento do corpo é dado pela equação:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1)$$

(ver 1) do apêndice para ver como chegamos a esta equação (1))

onde  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  é a frequência angular do movimento e  $f_0$  e  $T_0$  são a frequência e o período natural do movimento sem amortecimento, respetivamente.

Observação:  $A$  e  $\varphi_0$  determinam-se a partir das condições iniciais e  $\omega_0$  depende, neste caso, da constante elástica da mola e da massa do corpo.

Desta expressão retiramos que:

$$T_0(s) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2) \quad \omega_0 \left(\frac{rad}{s}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

onde  $k$  é a constante de elasticidade.

A velocidade do corpo calcula-se derivando a equação do movimento:

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Na ausência de forças dissipativas, a energia associada ao oscilador mantém-se constante ao longo do tempo, ou seja, a energia de um oscilador é transformada repetidamente de energia cinética em energia potencial (e vice-versa), enquanto a soma das duas energias, a energia do oscilador  $E$ , permanece constante no tempo.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (4)$$

onde  $k = m\omega^2$ .

Observação: normalmente, um sistema oscilatório contém um elemento de elasticidade, que armazena energia potencial, e um elemento de inércia, que armazena energia cinética.

- Sabemos que quando a elongação é máxima, ou seja,  $x = A$ , que a energia cinética é nula. Portanto, vamos ver que nesses casos a energia do oscilador pode ser escrita em função da amplitude do movimento:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (5)$$

Verificamos aqui que a energia do oscilador é constante e independente do tempo.

- Sabemos também que a velocidade máxima é atingida na posição de equilíbrio ( $x = 0$ ), ou seja, quando a elongação é nula, também vai ser nula a energia potencial. Logo, vamos ver que nesses casos a energia do oscilador vai ser escrita apenas em função da velocidade do corpo quando este passa pela posição de equilíbrio, isto é, quando a sua velocidade é máxima:



$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad (6)$$

### MOVIMENTO HARMÓNICO NA PRESENÇA DE UMA FORÇA DE ATRITO

O **movimento harmónico na presença de uma força de atrito**, tal como o nome indica, é um movimento afetado por uma força externa ao corpo, uma força de atrito. Aqui verificamos que a amplitude do movimento diminui ao longo do tempo, contrariando o que diz a equação 1. Isto verifica-se, pois, as forças de atrito têm um efeito no corpo na qual não pode ser desprezável, diminuindo assim a energia do oscilador e com isto verificamos a diminuição da amplitude (vemos esta relação na equação 5).

Portanto, para podermos estudar este movimento teremos de conhecer as forças de atrito existentes. Iremos fazer isto vendo qual o efeito que estas provocam na energia do oscilador.

Sabemos que na ausência de forças não conservativas, a variação da energia do oscilador entre uns instantes quaisquer A e B é igual ao trabalho das forças de atrito:

$$W_{AB}^{atrito} = E_B - E_A$$

Observação: se não se conhecer a velocidade do oscilador em cada instante, então só iremos calcular a energia do oscilador em instantes onde a velocidade é nula, ou seja, quando a elongação é máxima, que é nos pontos onde o oscilador se encontra nas posições extremas. Por isso, não podemos analisar toda a variação instantânea da energia do oscilador, mas sim a energia nos pontos máximos e mínimos e usá-los para estudar o efeito do atrito nas diferentes situações propostas.

Com isto tudo, podemos dizer que  $E = \frac{1}{2}kA^2$  e que por isso:

$$W_{AB}^{atrito} = E_B - E_A = \frac{1}{2}kA_B^2 - \frac{1}{2}kA_A^2 \quad (7)$$

### MOVIMENTO HARMÓNICO DE UM CORPO SUJEITO A UMA FORÇA DE ATRITO DE

#### ESCORREGAMENTO

O trabalho realizado pela força de atrito durante um período, sendo que a força de atrito de escorregamento é constante:

$$W_{atrito} = F_{atrito} \times d \quad (8)$$

onde  $d$  é o espaço percorrido durante um período. Sabemos que durante um período, o corpo vai-se deslocar de  $x_{max}$  e  $x_{min}$  e vice-versa. Portanto, temos que  $d \cong 2(A_A + A_B)$ . Substituindo em cima, temos que:

$$W_{atrito} \cong F_{atrito} \times 2(A_A + A_B) \quad (9)$$

Da equação 7, sabemos que a variação da energia durante o mesmo período pode ser expressa através das amplitudes  $A_A$  e  $A_B$ . Por isso, ficamos a saber que:



$$F_{\text{atrito}} = \frac{1}{4}k(A_B - A_A)$$

#### MOVIMENTO HARMÔNICO DE UM CORPO SUJEITO A UMA FORÇA DE ATRITO DO TIPO

$$\vec{F}_{\text{atrito}} = -b\vec{v}$$

Quando um corpo está sujeito a este tipo de movimento, a aceleração do mesmo está sujeita a uma força restauradora,  $\vec{F}_{\text{restauradora}} = -k\vec{x}$ , e a uma força de atrito que é proporcional à velocidade,  $\vec{F}_{\text{atrito}} = -b\vec{v}$ , onde  $b$  é o coeficiente de atrito.

Observação: O coeficiente de atrito  $b$  depende tanto da viscosidade  $\eta$  do meio como da forma e dimensões do corpo que está em movimento. No caso desta experiência, em que iremos utilizar uma esfera, o coeficiente de atrito é dado por  $b = 6\pi\eta r$ , onde  $r$  é o raio da esfera e  $\eta$  a viscosidade do meio.

Soltando-se o corpo sem velocidade inicial, este irá fazer um movimento oscilatório amortecido, ou seja, um movimento que é reduzido por uma força externa. Portanto, descrevendo a segunda lei de Newton usando as equações de cima, temos que a posição do corpo em função do tempo, admitindo uma situação de amortecimento fraco, é igual a:

$$x(t) = Ae^{\left(\frac{-b}{2m}t\right)} \sin(\omega t) \quad (10)$$

(ver 2) do apêndice para ver como chegamos a esta equação (10))

onde a frequência angular é igual a:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (11)$$

Da equação 10 retira-se que a amplitude em função do tempo pode ser escrita da seguinte forma:

$$A(t) = Ae^{\left(\frac{-b}{2m}t\right)} \quad (12)$$

Logo, verifica-se através da equação 12 que a força de atrito presente é proporcional à velocidade e o coeficiente de proporcionalidade pode ser calculado através da função ajustada aos pontos experimentais.

Já a energia do oscilador pode ser calculada da seguinte forma:

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{\frac{-b}{m}t}$$

Por isso, verifica-se que a energia do oscilador diminui exponencialmente com o tempo.



## 2. Material utilizado e procedimento

Esta experiência foi realizada com intuito de observar a resposta de um corpo oscilante ao longo do tempo face a diferentes forças de atrito.

Um sistema oscilante é composto por uma mola elástica com uma determinada constante elástica “ $k$ ”, na qual se suspende um corpo de massa “ $m$ ” numa das suas extremidades, sendo a outra posteriormente ligada a um sensor de força, o qual nos apresenta o valor da força que o conjunto “mola + corpo” realiza no sensor através de um programa no computador.

O trabalho experimental subdividiu-se em 3 partes.

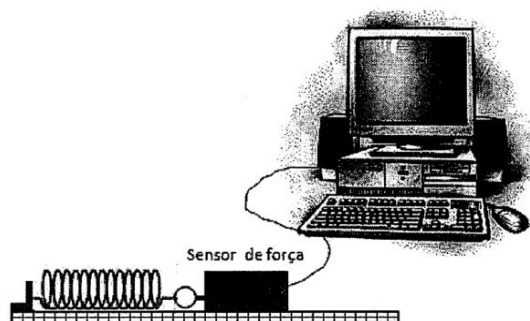
Na **primeira parte**, procedeu-se ao cálculo da constante elástica da mola.

Começou-se pela medição das massas da mola e do corpo e do diâmetro do corpo (para este experimento o corpo tratou-se de uma esfera).

De seguida, com a mola fixada a um suporte presente na mesa numa das extremidades e na outra o sensor de forças, fez-se variar a posição do sensor em relação ao suporte da mesa, medindo o valor da posição e da força sentida no sensor pela mola.

Recolheu-se os valores para 7 posições diferentes.

A imagem que se segue demonstra a montagem desta parte do experimento:

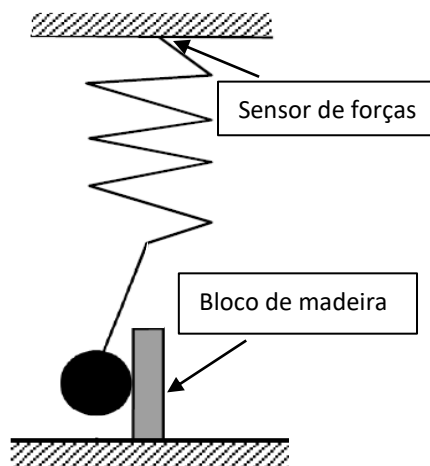


*i. Montagem da parte 1*

Prosseguindo para a **segunda parte**, introduziu-se ao sistema oscilante, que agora apresentará um movimento oscilatório vertical, um atrito de escorregamento.

Para tal colocou-se um bloco de madeira de forma que, durante a oscilação, a esfera/corpo permaneça sempre encostada ao bloco. É importante referir que o bloco de madeira precisa de se manter imóvel durante a oscilação. A imagem ao lado ilustra a montagem desta parte da experiência.

Antes de recolher os valores da força medida pelo sensor de forças (acoplado à extremidade da mola fixa) durante a oscilação, devemos sempre permitir que o



*iii. Montagem da parte 2*



sistema encontre a sua posição de equilíbrio (zona onde a força é nula) e “tarar” nesse instante o programa do sensor, para facilitar o tratamento dos dados posteriormente e só depois provocar a oscilação. A recolha de dados finaliza-se quando o programa de leitura atingir o seu limite de dados, os quais deverão ser posteriormente exportados para uma folha *Excel*.

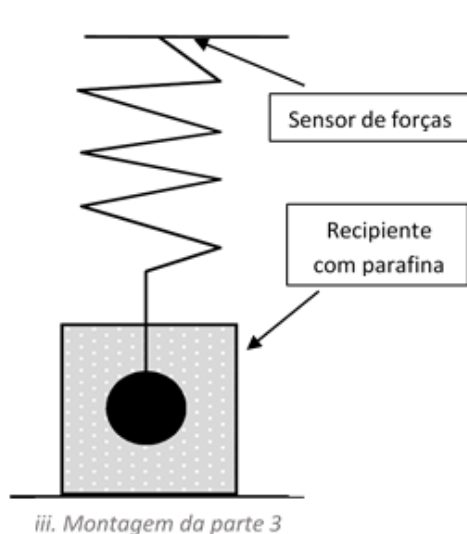
Ao longo da atividade aumentou-se a distância do bloco de madeira em relação à posição em que praticamente não existe contacto entre o corpo e o bloco, sendo esta distância tratada por  $dx$ . Recolheu-se os dados para 3 distâncias diferentes.

Por fim, na **terceira parte**, considerou-se o movimento oscilatório dentro do fluido com a viscosidade bastante elevada – a parafina.

A montagem desta parte em relação à anterior difere uma vez que o bloco de madeira será substituído por um recipiente de parafina, como demonstra a figura ao lado. Durante a oscilação, a esfera deverá ficar sempre submersa na parafina, para que seja aplicada a força de atrito de igual forma, e nunca deverá tocar.

O processo de “tarar” o programa do sensor após a esfera encontrar a posição de equilíbrio quando se encontrar submersa na parafina deverá ser igualmente realizada como na parte anterior para cada recolha dos dados.

Para confirmar uma uniformidade dos valores recolhidos, repetiu-se a oscilação e a recolhas dos valores cerca de 3 vezes.



iii. Montagem da parte 3

### 3. Tratamento e análise dos dados

Relativamente à **parte 1**, recolhemos os seguintes dados:

#### • Medição das massas da mola e da esfera

Objeto	Massa (g)	incerteza
Mola	16,95	± 0,01
Esfera	375,64	

#### • Medição do diâmetro da esfera

Objeto	diâm. (mm)	incerteza
Esfera	44,00	± 0,05

Recolhidos os valores para as 7 posições diferentes, temos a seguinte tabela que contém os valores da posição e da força do sensor e as suas respetivas incertezas e também o gráfico que representa essa força em função dessa posição do sensor.



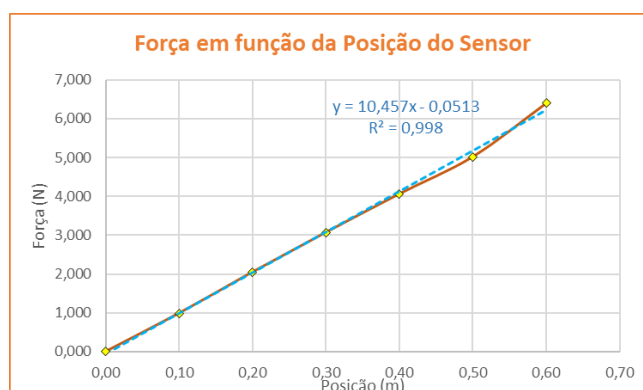
• **Registo da força e da posição do sensor**

Posição (m)	incerteza	Força (N)	incerteza
0,00	$\pm 0,05$	0,000	$\pm 0,001$
0,10		0,990	
0,20		2,050	
0,30		3,073	
0,40		4,065	
0,50		5,022	
0,60		6,400	

Aplicou-se uma regressão linear sobre os valores obtidos, de forma a obtermos uma equação que compatível com a fórmula  $\vec{F} = -k\vec{x}$ .

Assim, pelo declive da regressão linear, obteve-se o valor da constante elástica da mola:

k (N/m)	10,457
incerteza	$\pm 0,051$



(ver 3) do apêndice para entender como se obteve o valor da incerteza)

Sendo que o coeficiente de correlação da regressão obtida é aproximadamente 0,998, que é muito próximo de 1, significa que existe uma boa correlação entre as posições do sensor e da força medida.

Obtido o valor da constante elástica, procedeu-se ao cálculo da frequência natural e do período natural do sistema oscilante:

Pelas equações (2) e (3):

$\omega_0$ (rad/s)	5,276
incerteza	$\pm 0,013$

$T_0$ (s)	1,191
incerteza	$\pm 0,003$

(ver 2) e 3) do apêndice para entender como se obteve os valores das incertezas)

Em relação à **parte 2**, recolhemos os seguintes dados:

Após exportar os dados recolhidos pelo programa do sensor de forças, e através da expressão  $\vec{x} = -\frac{\vec{F}}{k}$  (derivada de uma equação anteriormente mencionada), calculou-se a posição do

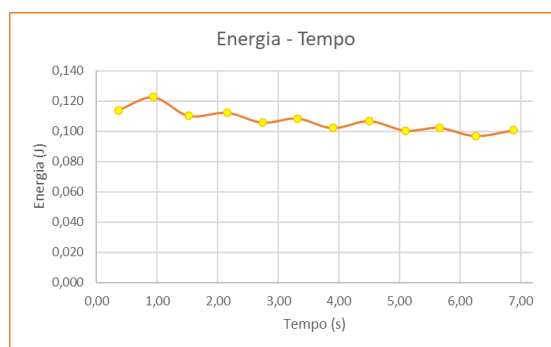
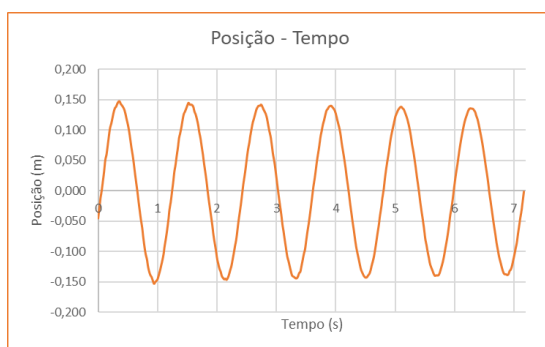


corpo em cada instante, traçando-se posteriormente um gráfico da posição do corpo em função do tempo, para cada distância  $dx$ .

A tabela dos valores máximos e mínimos de amplitude poderá ser consultada no apêndice.

Recolhendo o tempo entre dois máximos, obteve-se o valor do período, o que permitiu a obtenção da frequência angular do movimento.

Para  $dx = 0 \text{ m}$ :

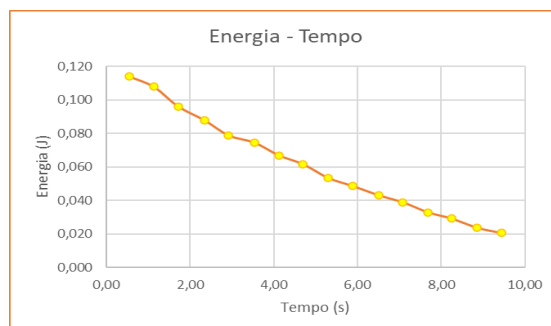
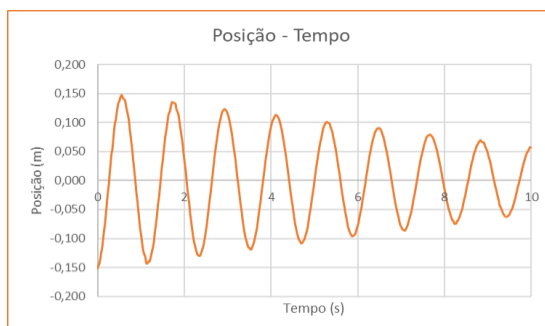


		incerteza
Período	(s)	1,16 ± 0,01
Frequência	(Hz)	0,86 ± 0,01
Frequência angular	(rad/s)	5,42 ± 0,06

Para  $dx = 0 \text{ m}$ , ou seja, quando praticamente não há contacto entre a esfera e o bloco, observamos que o gráfico Posição – Tempo se assemelha ao de um movimento harmónico simples, pois as amplitudes praticamente mantêm-se constantes devido à reduzida (ou quase inexistente) força de atrito que o bloco aplica na esfera.

Também verificamos que, tal como seria espectável, no gráfico Energia-Tempo não há grande dissipação de energia.

Para o primeiro aumento do  $dx$ :



		incerteza
Período	(s)	1,16 ± 0,01
Frequência	(Hz)	0,86 ± 0,01
Frequência angular	(rad/s)	5,42 ± 0,06

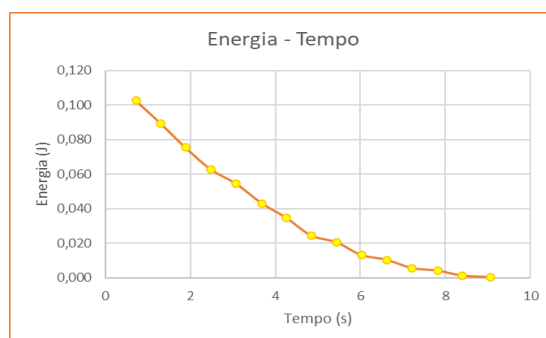
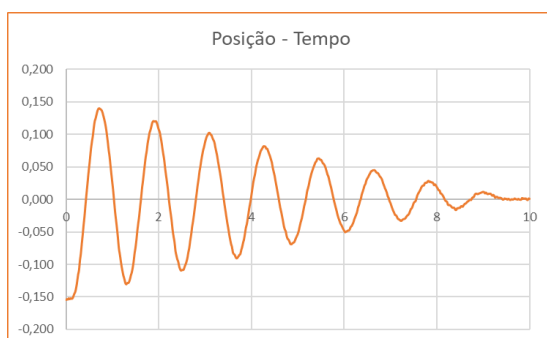




Para este primeiro aumento de  $dx$  verificamos que, em relação ao movimento harmónico sem amortecimento, no gráfico Posição-Tempo existe uma diminuição das amplitudes ao longo do tempo, ou seja, estas já não são constantes. Isto pode ser explicado pelo facto de que como a distância entre o bloco e a esfera é nula e o seu contacto é superior ao anterior (quando  $dx = 0\text{ m}$ ), então a força de atrito que o bloco provoca no movimento da esfera é muito superior.

Como temos esta diminuição nos valores de amplitude ao longo do tempo, então, como esperado, existe, também, uma diminuição da energia do sistema, em comparação com os gráficos anteriores.

Para o **segundo aumento do  $dx$** :



		incerteza	
Período	(s)	1,16	$\pm 0,01$
Frequência	(Hz)	0,86	$\pm 0,01$
Frequência angular	(rad/s)	5,42	$\pm 0,06$

Neste segundo e último aumento de  $dx$ , verificamos que, em relação ao movimento harmónico simples e às duas situações anteriores apresentadas, como a distância entre o bloco e a esfera continua nula, mas o contacto entre eles aumentou ainda mais, fazendo com que a força de atrito aumente ainda mais, então os valores das amplitudes vão diminuir ainda mais ao longo do tempo, como vemos no gráfico posição-tempo.

Logo, com uma maior diminuição dos valores das amplitudes, a energia do sistema também irá diminuir ainda mais, como observamos no gráfico Energia-Tempo.

➔ Conseguimos observar que apesar do aumento do  $dx$  e das alterações que o mesmo provoca, o período, a frequência e a frequência angular não variam, ou seja, mantêm-se constantes com a variação do  $dx$ .

Por fim, na **parte 3**, recolhemos os seguintes dados:

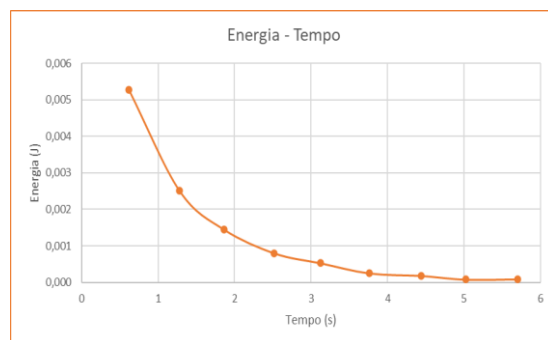
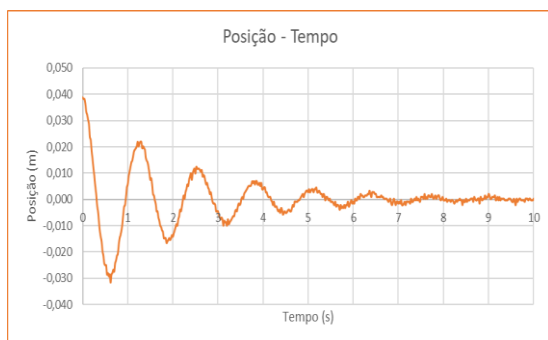
A recolha de dados repetiu-se cerca de 3 vezes de forma a comprovar uma certa uniformidade entre os valores obtidos:

Obteve-se o  $b_{teórico}$  pela expressão  $b_{teórico} = 6\pi\eta r = 6 * \pi * 0,9 * 22 \times 10^{-3} = 0,373$ .

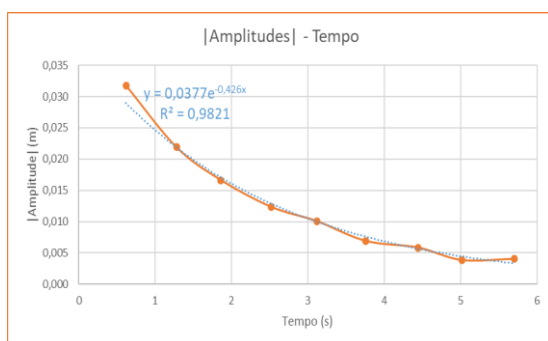


De forma a poder comparar este valor com o obtido através da atividade, recorreu-se a um gráfico do módulo das amplitudes em função do tempo e, após ter sido realizada uma regressão exponencial sobre esse gráfico, através da equação (12) recolhemos o  $b_{obtido}$ .

Para a **primeira tentativa**:



		incerteza
Período	(s)	1,24 ± 0,01
Frequência	(Hz)	0,81 ± 0,01
Frequência angular	(rad/s)	5,07 ± 0,06

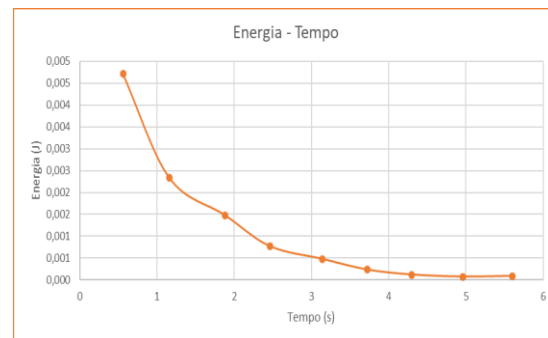
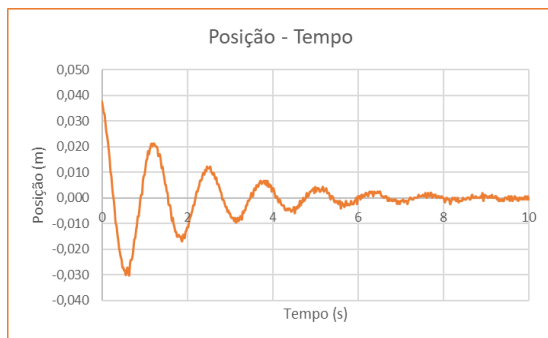


b _ teórico	0,373
b _ obtido	0,320
erro	± 0,142

**Nota:** É de salientar que o erro da tabela acima provém da expressão:

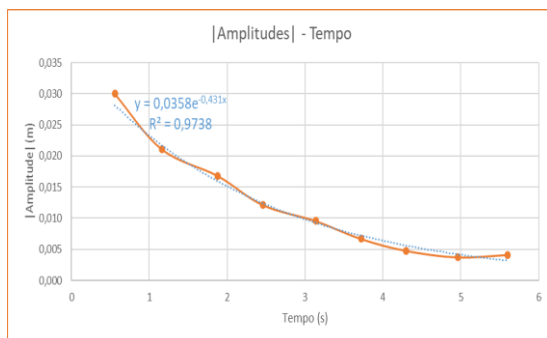
$$erro = \frac{|b_{obtido} - b_{teórico}|}{b_{teórico}}$$

Para a **segunda tentativa**:



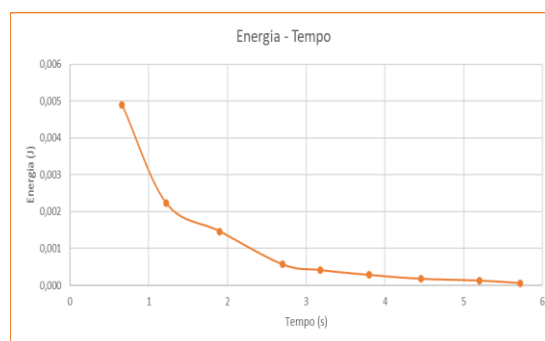
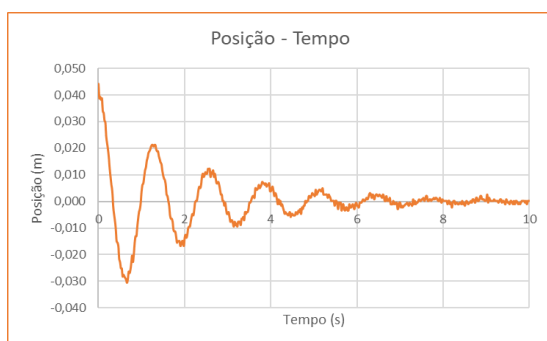


		incerteza	
Período	(s)	1,3	$\pm 0,01$
Frequência	(Hz)	0,77	$\pm 0,01$
Frequência angular	(rad/s)	4,83	$\pm 0,06$

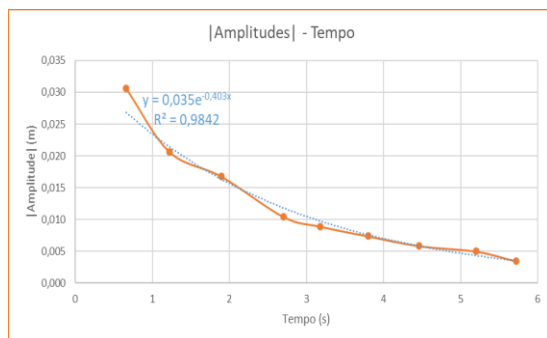


b _ teórico	0,373
b _ obtido	0,324
erro	$\pm 0,131$

Para a **terceira tentativa:**



		incerteza	
Período	(s)	1,24	$\pm 0,01$
Frequência	(Hz)	0,81	$\pm 0,01$
Frequência angular	(rad/s)	5,07	$\pm 0,06$



b _ teórico	0,373
b _ obtido	0,303
erro	$\pm 0,188$

**Observação:** A sinalização dos máximos e mínimos não é de todo precisa, tendo em conta que se trata de encontrar aproximadamente as suas posições nos gráficos, o que acrescenta uma série de erros na obtenção do período e da frequência angular.



Nota: No apêndice encontram-se as tabelas referentes aos máximos e mínimos, respectivas forças, posições e energias e incertezas das partes 2 e 3.

Verificamos, nestas três tentativas da parte 3, que existe uma diminuição exponencial das amplitudes, devido à força de atrito que a parafina provocou na esfera (gráficos Posição-Tempo e Amplitudes-Tempo), ao contrário do que vimos na parte 2 (na qual havia diminuição, mas não era tão acentuada, quase parecendo uma diminuição linear) e no movimento harmónico simples (onde as amplitudes se mantêm constantes no tempo). Com isto, sendo que a energia depende dos valores das amplitudes ao quadrado, também a mesma vai decrescer da mesma forma, ou seja, exponencialmente ao longo do tempo, como vemos no gráfico Energia-Tempo.

- ➔ Tendo em conta os feitos durante a realização da experiência que são representados pelas suas respectivas incertezas, podemos também afirmar, tal como na parte 2, que o período, a frequência e a frequência angular não variam, ou seja, mantêm-se constante ao longo das tentativas.

Nos gráficos  $|Amplitude| - Tempo$ , como obtemos também valores do coeficiente de correlação das regressões exponenciais bastante próximos de 1, conseguimos comprovar que existe uma boa interdependência entre os valores das Amplitudes e o tempo.

#### 4. Conclusão

Com esta experiência, quando colocamos forças de atrito a atuar na esfera, verificamos que a energia do oscilador vai diminuído ao longo do tempo. Isto é explicado devido à existência dessas forças de atrito, que ao realizarem trabalho vão levar à perda de energia do sistema. Ora, isto leva a uma paragem do movimento oscilatório do sistema, onde o tempo que demora a fazer essa paragem varia consoante a intensidade das forças de atrito que estão a atuar.

Resumindo, temos que nas partes 2 e 3 da experiência realizada, que existe uma diminuição da energia do sistema se atuarem forças de atrito e essa diminuição é mais acentuada se a força for mais elevada. Já na parte 1, concluímos que existe uma relação de proporcionalidade entre a força e a posição do sensor, na qual a constante de proporcionalidade é o  $k$  (constante elástica da mola). Portanto, podemos dizer que o movimento oscilatório da esfera é influenciado pelas características da mola e também é influenciado se introduzirmos forças de atrito de diferentes tipos, tais como a que foi introduzida pelo bloco de madeira e a que foi introduzida pela parafina.

Durante esta experiência, foi introduzido um grande número de erros que afetaram os resultados. Ora, alguns desses erros são:

- Na parte 2 e 3, quando estamos a falar do oscilador amortecido, a velocidade máxima pode não ser atingida exatamente na posição de equilíbrio, devido à existência de forças de atrito. Por isso, o cálculo da energia do oscilador através das equações 5 e 6 pode não ser exato, mas mesmo assim é uma aproximação razoável, pois neste caso não é necessária uma precisão muito elevada do resultado. Isto simplifica bastante na resolução deste problema.



- Na parte 2 e 3, quando provocado o movimento oscilatório, sem querer, era provocado uma certa agitação que era perpendicular ao movimento, que introduzia uma nova componente nas forças não conservativas e pode ter alterado o resultado.
- Na realização da experiência, nunca conseguíamos realmente colocar o sensor a zero, isto é, quando a esfera estava na parada na posição de equilíbrio, o sensor, mesmo depois de tarado, dava sempre um valor da força muito pequeno e muito próximo de zero, introduzindo, assim, um erro quando obtemos a força.
- Durante a realização desta experiência, a temperatura ambiente do laboratório não estava a 20°C. Logo, como o valor da viscosidade da parafina usado no cálculo do coeficiente de atrito não está inteiramente correto, pois esse valor é para quando a temperatura ambiente é 20°C, e neste caso, não foi isso que se verificou.

## 5. Bibliografia

- [1] Trabalho 5: Estudo do efeito do atrito no movimento oscilatório, Guia Prático fornecido pelo docente.
- [2] Função PROJ.LIN do Excel: <https://support.microsoft.com/pt-pt/office/proj-lin-fun%C3%A7%C3%A3o-proj-lin-84d7d0d9-6e50-4101-977a-fa7abf772b6d>  
[08 de dezembro de 2020]
- [3] Robert Resnick, David Halliday, Jearl Walker, Fundamentos De Fisica, Volume 2, 8ª edição, LTC, 2009

## 6. Apêndice

### 1) Demonstração da equação de posição (1):

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$  (2ª lei de Newton), mas como  $\sum \vec{F} = \vec{F}_{elástica} = -k\vec{x}$  e também  $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}$  então vamos ter que:

$$-k\vec{x} = m \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ logo terá como solução:}$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

### 2) Demonstração da equação de posição (10):

$$\vec{F}_{resultante} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow -k\vec{x} - b\vec{v} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{a} + k\vec{x} + b\vec{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$



Considerando uma situação de amortecimento fraco, então como solução temos que:

$$x(t) = Ae^{\left(\frac{-b}{2m}t\right)} \sin(\omega t)$$

3) Cálculo da incerteza da constante elástica,  $k$ :

Para obter a incerteza correspondente a  $k$  recorreu-se à função **PROJ.LIN** do *Excel*, a qual, utilizando o método dos "quadrados mínimos", calcula uma reta que se adapta melhor aos dados, fornecendo-nos as componentes dessa mesma reta.

(para mais informações, aceder ao link presente na bibliografia)

4) Cálculo da incerteza da frequência angular natural,  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} (\delta\omega_0)^2 &= \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial k}\right)^2 (\delta k)^2 + \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial m}\right)^2 (\delta m)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\delta\omega_0)^2}{(\omega_0)^2} &= \left(\frac{1}{2k}\right)^2 (\delta k)^2 + \left(\frac{1}{2m}\right)^2 (\delta m)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta\omega_0 &= \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2k}\right)^2 (\delta k)^2 + \left(\frac{1}{2m}\right)^2 (\delta m)^2} \end{aligned}$$

5) Cálculo da incerteza do período natural,  $T_0$ :

$$\begin{aligned} (\delta T_0)^2 &= \left(\frac{\partial T_0}{\partial \omega_0}\right)^2 (\delta\omega_0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\delta T_0)^2}{(T_0)^2} &= \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 (\delta\omega_0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta T_0 &= T_0 \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 (\delta\omega_0)^2} \end{aligned}$$

6) Parte 2: Tabela dos valores máximos e mínimos de amplitude

Para  $dx = 0\text{ m}$ :

Tempo (s)	incerteza	Força (N)	incerteza	Posição (m)	incerteza	Energia (J)	incerteza
0,36	± 0,01	-1,544	± 0,001	0,148	± 0,001	0,114	± 0,001
0,94		1,602		-0,153	± 0,001	0,123	± 0,001
1,52		-1,519		0,145	± 0,001	0,110	± 0,001
2,16		1,533		-0,147	± 0,001	0,112	± 0,001
2,74		-1,488		0,142	± 0,001	0,106	± 0,001
3,32		1,507		-0,144	± 0,001	0,109	± 0,001
3,9		-1,462		0,140	± 0,001	0,102	± 0,001
4,5		1,495		-0,143	± 0,001	0,107	± 0,001
5,1		-1,45		0,139	± 0,001	0,101	± 0,001
5,66		1,463		-0,140	± 0,001	0,102	± 0,001
6,26		-1,424		0,136	± 0,001	0,097	± 0,001
6,88		1,451		-0,139	± 0,001	0,101	± 0,001



Para o primeiro aumento do  $dx$ :

Tempo (s)	incerteza	Força (N)	incerteza	Posição (m)	incerteza	Energia (J)	incerteza
0,56	$\pm 0,01$	-1,544	$\pm 0,001$	0,148	$\pm 0,001$	0,114	$\pm 0,001$
1,14		1,502		-0,144	$\pm 0,001$	0,108	$\pm 0,001$
1,72		-1,418		0,136	$\pm 0,001$	0,096	$\pm 0,001$
2,34		1,357		-0,130	$\pm 0,001$	0,088	$\pm 0,001$
2,92		-1,285		0,123	$\pm 0,001$	0,079	$\pm 0,001$
3,54		1,249		-0,119	$\pm 0,001$	0,075	$\pm 0,001$
4,12		-1,184		0,113	$\pm 0,001$	0,067	$\pm 0,000$
4,7		1,136		-0,109	$\pm 0,001$	0,062	$\pm 0,000$
5,3		-1,058		0,101	$\pm 0,001$	0,054	$\pm 0,000$
5,88		1,010		-0,097	$\pm 0,000$	0,049	$\pm 0,000$
6,5		-0,951		0,091	$\pm 0,000$	0,043	$\pm 0,000$
7,08		0,903		-0,086	$\pm 0,000$	0,039	$\pm 0,000$
7,68		-0,831		0,079	$\pm 0,000$	0,033	$\pm 0,000$
8,24		0,783		-0,075	$\pm 0,000$	0,029	$\pm 0,000$
8,86		-0,705		0,067	$\pm 0,000$	0,024	$\pm 0,000$
9,44		0,657		-0,063	$\pm 0,000$	0,021	$\pm 0,000$

Para o segundo aumento do  $dx$ :

Tempo (s)	incerteza	Força (N)	incerteza	Posição (m)	incerteza	Energia (J)	incerteza
0,72	$\pm 0,01$	-1,464	$\pm 0,001$	0,140	$\pm 0,001$	0,102	$\pm 0,001$
1,3		1,367		-0,131	$\pm 0,001$	0,089	$\pm 0,001$
1,88		-1,257		0,120	$\pm 0,001$	0,076	$\pm 0,001$
2,48		1,146		-0,110	$\pm 0,001$	0,063	$\pm 0,000$
3,08		-1,067		0,102	$\pm 0,001$	0,054	$\pm 0,000$
3,68		0,95		-0,091	$\pm 0,000$	0,043	$\pm 0,000$
4,26		-0,853		0,082	$\pm 0,000$	0,035	$\pm 0,000$
4,84		0,717		-0,069	$\pm 0,000$	0,025	$\pm 0,000$
5,44		-0,657		0,063	$\pm 0,000$	0,021	$\pm 0,000$
6,02		0,528		-0,050	$\pm 0,000$	0,013	$\pm 0,000$
6,62		-0,468		0,045	$\pm 0,000$	0,010	$\pm 0,000$
7,22		0,345		-0,033	$\pm 0,000$	0,006	$\pm 0,000$
7,82		-0,298		0,028	$\pm 0,000$	0,004	$\pm 0,000$
8,4		0,169		-0,016	$\pm 0,000$	0,001	$\pm 0,000$
9,06		-0,109		0,010	$\pm 0,000$	0,001	$\pm 0,000$

### 7) Parte 3: Tabela dos valores máximos e mínimos de amplitude

Para a primeira tentativa:

Tempo (s)	incerteza	Força (N)	incerteza	Posição (m)	incerteza	Energia (J)	incerteza
0,62	$\pm 0,01$	0,332	$\pm 0,001$	-0,032	$\pm 0,000$	0,005	$\pm 0,000$
1,28		-0,229		0,022	$\pm 0,000$	0,003	$\pm 0,000$
1,86		0,174		-0,017	$\pm 0,000$	0,001	$\pm 0,000$
2,52		-0,129		0,012	$\pm 0,000$	0,001	$\pm 0,000$
3,12		0,105		-0,010	$\pm 0,000$	0,001	$\pm 0,000$
3,76		-0,072		0,007	$\pm 0,000$	0,000	$\pm 0,000$
4,44		0,061		-0,006	$\pm 0,000$	0,000	$\pm 0,000$
5,02		-0,040		0,004	$\pm 0,000$	0,000	$\pm 0,000$
5,7		0,042		-0,004	$\pm 0,000$	0,000	$\pm 0,000$



Para a **segunda tentativa**:

Tempo (s)	incerteza	Força (N)	incerteza	Posição (m)	incerteza	Energia (J)	incerteza
0,56	± 0,01	0,314	± 0,001	-0,030	± 0,000	0,005	± 0,000
1,16		-0,221		0,021	± 0,000	0,002	± 0,000
1,88		0,176		-0,017	± 0,000	0,001	± 0,000
2,46		-0,127		0,012	± 0,000	0,001	± 0,000
3,14		0,100		-0,010	± 0,000	0,000	± 0,000
3,72		-0,070		0,007	± 0,000	0,000	± 0,000
4,3		0,050		-0,005	± 0,000	0,000	± 0,000
4,96		-0,039		0,004	± 0,000	0,000	± 0,000
5,6		0,043		-0,004	± 0,000	0,000	± 0,000

Para a **terceira tentativa**:

Tempo (s)	incerteza	Força (N)	incerteza	Posição (m)	incerteza	Energia (J)	incerteza
0,66	± 0,01	0,320	± 0,001	-0,031	± 0,000	0,005	± 0,000
1,22		-0,216		0,021	± 0,000	0,002	± 0,000
1,9		0,175		-0,017	± 0,000	0,001	± 0,000
2,7		-0,109		0,010	± 0,000	0,001	± 0,000
3,18		0,093		-0,009	± 0,000	0,000	± 0,000
3,8		-0,077		0,007	± 0,000	0,000	± 0,000
4,46		0,061		-0,006	± 0,000	0,000	± 0,000
5,2		-0,052		0,005	± 0,000	0,000	± 0,000
5,72		0,036		-0,003	± 0,000	0,000	± 0,000

8) Cálculo da incerteza do período:

$$(\delta T)^2 = (\delta T_1)^2 + (\delta T_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta T = \sqrt{(\delta T_1)^2 + (\delta T_2)^2}$$

9) Cálculo da incerteza da frequência:

$$(\delta f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 (\delta T)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\delta f)^2}{f^2} = f^2 (\delta T)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta f = f^2 (\delta T)^2$$

10) Cálculo da incerteza da frequência angular:

$$(\delta \omega)^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial f}\right)^2 (\delta f)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\delta \omega)^2}{\omega^2} = \frac{(\delta f)^2}{f^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta \omega = \omega \frac{\delta f}{f}$$





11) Cálculo da incerteza da posição:

$$\begin{aligned}(\delta x)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial F}\right)^2 (\delta F)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial k}\right)^2 (\delta k)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\delta x)^2}{x^2} &= \frac{(\delta F)^2}{F^2} + \frac{(\delta k)^2}{k^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta x &= x \sqrt{\frac{(\delta F)^2}{F^2} + \frac{(\delta k)^2}{k^2}}\end{aligned}$$

12) Cálculo da incerteza da energia do sistema:

$$\begin{aligned}(\delta E)^2 &= \left(\frac{\partial E}{\partial k}\right)^2 (\delta k)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial A}\right)^2 (\delta A)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\delta E)^2}{E^2} &= \frac{(\delta k)^2}{k^2} + \frac{(\delta A)^2}{A^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta E &= E \sqrt{\frac{(\delta k)^2}{k^2} + \frac{(\delta A)^2}{A^2}}\end{aligned}$$