ELECTROMAGNETISMO - 2011/12

Exame de recurso
9/Fev/2012

RESOLUÇÃO

1. Resposta **E**

Num condutor a carga distribui-se sobre as suas superfícies.
Na cavidade de um condutor a carga na superfície interior é igual em módulo e de sinal contrário à carga no interior da cavidade.
Conclui-se, então, que nas três situações apresentadas a carga na superfície interior do condutor é:

(1) $-4q$
(2) $+6q$
(3) $-16q$

Então, para garantir que a carga total no condutor (carga na sup. interior + carga sup. ext) é:
(1) 0 , (2) $+10q$, (3) $-12q$,

a carga na superfície exterior deve ser

(1) $+4q$, (2) $+4q$, (3) $+4q$

2. Resposta <u>A</u>

Um condensador de placas paralelas com dois dieléctricos lado a lado, como se apresenta na figura, é equivalente a dois condensadores em paralelo, um preenchido com um dieléctrico de permitividade relativa κ_1 e outro preenchido com um dieléctrico de permitividade relativa κ_2.

A sua capacidade equivalente é então

$$C = C_1 + C_2$$

onde

$$C_1 = \varepsilon_0 \kappa_1 \frac{A/2}{d} \quad , \quad C_2 = \varepsilon_0 \kappa_2 \frac{A/2}{d}$$

são as capacidades de cada um dos condensadores de placas paralelas

Resulta:

$$C = \varepsilon_0 (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{A}{2d}$$

3. Resposta $\underline{B}$

Quando uma partícula carregada com carga q e velocidade $\vec{v}$ fica sob acção de um campo magnético $\vec{B}$, exerce-se sobre ela uma força magnética dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Esta força é perpendicular ao plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Se $\vec{v}$ for perpendicular a $\vec{B}$, como é o caso da situação aqui apresentada, a partícula tende a descrever um movimento curvilíneo actuada pela força magnética central. Se a carga for positiva o movimento tem, pela regra da mão direita, o sentido contrário aos ponteiros do relógio. Na figura o sentido é o dos ponteiros do relógio, o que significa que a carga deve ser negativa.
Por outro lado, o raio da trajectória da partícula, r, é tal que

$$\frac{mv^2}{r} = qvB\operatorname{sen}\theta$$
$$= qvB \quad (\text{neste caso } \operatorname{sen}\theta = 1)$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$

Sendo $\underline{B}$, $\underline{m}$ e $\underline{q}$ constantes, a diminuição de $\underline{r}$ patente no movimento em espiral só pode resultar de uma diminuição do módulo da velocidade, $\underline{v}$.

4. Resposta $\underline{E}$

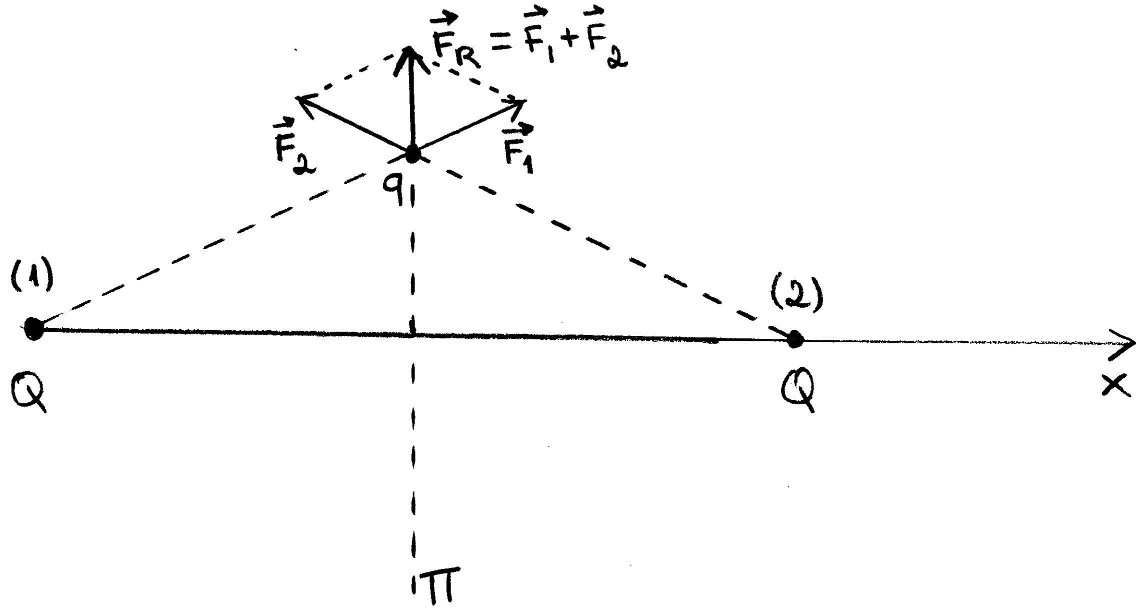
O campo magnético resultante de um elemento de corrente $\underline{i d\vec{l}}$ (elemento de fio $d\vec{l}$ com uma corrente de intensidade $\underline{i}$) a uma distância $|\vec{r}|$ do elemento de fio, onde $\vec{r}$ é o vector que aponta do elemento de corrente para o ponto onde se está a calcular o campo (ponto P da figura), é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Então, $d\vec{B}$ é perpendicular ao plano definido por $d\vec{l}$ e $\vec{r}$. No caso em estudo $d\vec{l}$ e $\vec{r}$ situam-se no plano da folha de papel, e, consequentemente, $d\vec{B}$ é perpendicular à folha. Utilizando a regra da mão direita conclui-se ainda que o vector resultante do produto $d\vec{l} \times \vec{r}$ aponta para dentro da folha.

5.

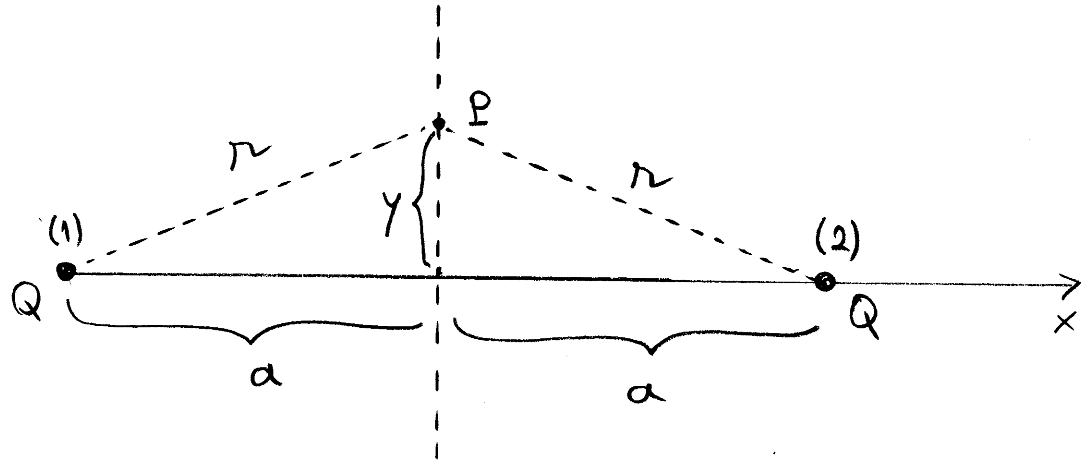
a)



Como se vê pelo esquema acima, a força eléctrica resultante sobre a carga q é a soma das forças que as cargas Q colocadas sobre as posições (1) e (2) exercem sobre q. Estas são forças repulsivas já que q e Q são positivas.

Estando a carga q sobre o plano π, ela estará sempre a igual distância das cargas Q situadas em (1) e (2), qualquer que seja o ponto sobre o plano. Consequentemente, as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são iguais em módulo e com componentes em $\underline{x}$ iguais e de sentido oposto que se anulam. A força resultante $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ só poderá então ter componentes no plano π.

b)



O potencial no ponto P é igual à soma dos potenciais devidos às cargas situadas em (1) e (2):

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad , \quad r = (a^2+y^2)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(a^2+y^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

No ponto P o campo eléctrico tem apenas componente segundo o eixo y e pode ser calculado a partir do gradiente do potencial

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(a^2+y^2)^{1/2}}\right] \\ &= +\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}(a^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2y \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

c) O trabalho realizado pela força eléctrica no transporte de uma carga unitária entre os pontos A e B é igual a menos variação da função potencial entre esses dois pontos:

$$W_{A\to B} = -(V_B - V_A)$$
$$= V_A - V_B$$

Neste caso A situa-se na origem $(y=0)$ e B situa-se em $y = a$.

Então

$$V_A = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(a^2+0)^{1/2}}$$
$$= \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

$$V_B = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(a^2+a^2)^{1/2}}$$
$$= \frac{2}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

O trabalho realizado no transporte da carga q entre A e B é:

$$W'_{A\to B} = q(V_A - V_B) = q\left(\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\right)$$
$$= 2q\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

substituindo os valores numéricos nesta expressão $q = 1\times10^{-6}\,C$, $Q = 1\times10^{-5}\,C$, $a = 1\times10^{-2}\,m$, $1/4\pi\varepsilon_0 = 9\times10^{9}$

$$W'_{A\to B} = 2\times10^{-6}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 9\times10^{9}\cdot\frac{1\times10^{-5}}{1\times10^{-2}}$$
$$= 18\times10^{3}\times10^{-3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 18\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 18\,\frac{0{,}6}{2} = 5{,}4\ J$$

6. a) Seja $M(r, \theta, \varphi)$ um ponto genérico à distância $\underline{r}$ do centro das esferas.

Os vectores $\vec{D}$, $\vec{E}$ e $\vec{P}$ no ponto $\underline{M}$ têm que ser radiais e dependem apenas da distância $\underline{r}$, devido à simetria esférica do problema.

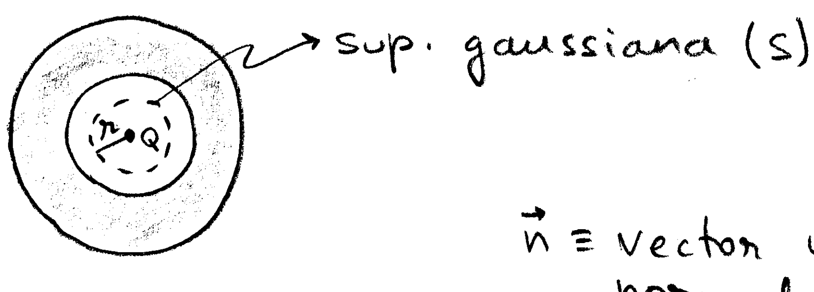
Examinemos as três regiões

- cavidade $(r < R')$
- dieléctrico $(R' < r < R)$
- exterior $(r > R)$

i) $r < R'$

Nesta região há vazio e consequentemente não pode haver polarização : $\vec{P} = 0$

O campo eléctrico pode ser calculado aplicando o Teorema de Gauss a uma superfície esférica, centrada em Q, e de raio $0 < r < R'$



$\vec{n} \equiv$ vector unitário normal à superfície

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, da = Q/\varepsilon_0$$

Sobre a superfície $\vec{E}$ é sempre paralelo a $\vec{n}$ e o seu módulo toma sempre o mesmo valor

Então $\oint_S \vec{E}.\vec{n}\, da = E\oint_S da$

$$= 4\pi r^2 E$$

vemos, assim, que $4\pi r^2 E = Q$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

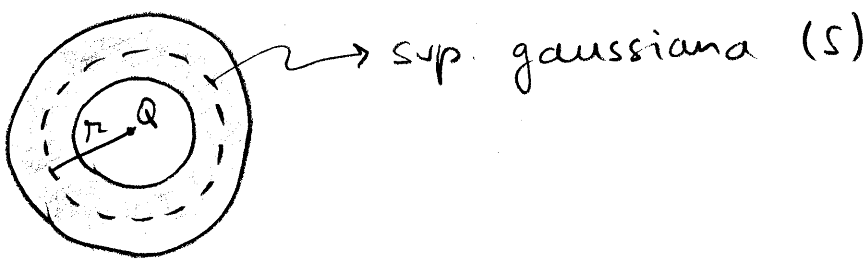
O vector deslocamento eléctrico é definido por

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

como $\vec{P} = 0$, vem $\vec{D} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$

ii) $R' < r < R$

Aplicando agora o teorema de Gauss a uma superfície esférica centrada em Q mas que passa pelo dieléctrico:



vem

$$\oint_S \vec{D}.\vec{n}\, da = Q$$

pois Q é a única carga verdadeira interior à superfície.

Pelas mesmas razões de simetria invocadas em (i) para $\vec{E}$, vem agora para o cálculo do fluxo de $\vec{D}$ através da superfície S

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

Logo:

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

como o dieléctrico é linear podemos escrever

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$\varepsilon \equiv$ constante dieléctrica

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Obtem-se, então

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

A polarização pode ser calculada por

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

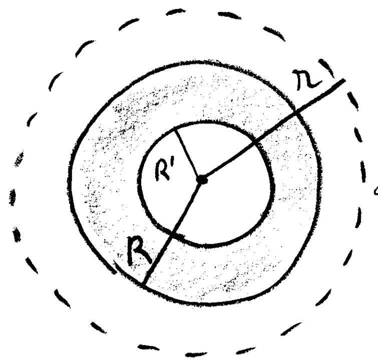
$$= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} - \varepsilon_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^2} \right) \vec{u}_r$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r$$

iii) $r > R$

Neste caso, temos de novo $\vec{P} = 0$ (exterior do dieléctrico).

Como o dieléctrico tem carga total nula, podemos determinar $\vec{D}$ e $\vec{E}$ de forma inteiramente análoga à forma como o cálculo foi efectuado em (i) para $r < R'$, mas agora tomando uma superfície gaussiana que passa no exterior



Obtem-se então:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

b) A densidade de cargas de polarização distribuídas em volume é dada por

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Recorrendo à expressão da polarização no dieléctrico, obtida na alínea anterior, vem

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r \right]$$

Utilizando a expressão da divergência em coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

conclui-se que $\rho_p = 0$, pois o vector polarização só tem componente segundo r $\left(P_r = \left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi r^2},\ P_\theta = 0,\ P_\varphi = 0\right)$ e,

logo,
$$\vec{\nabla}.\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\cancel{r^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi \cancel{r^2}}\right]$$
$$= 0$$

c) A densidade superficial de cargas de polarização é dada por

$$\sigma_p = \vec{P}.\vec{n}$$

onde $\vec{n}$ é o vector unitário normal à superfície do dieléctrico e dirigido para fora.

Comecemos por considerar a superfície externa, onde $\vec{n}$ tem a mesma direcção e sentido que $\vec{u}_r$. Neste caso $\vec{u}_r.\vec{n} = 1$ e vem

$$\sigma_p(R) = \left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R^2}$$

Como $\varepsilon_r > 1$, então $\sigma_p(R)$ tem o mesmo sinal de Q.

Análogamente a densidade superficial de cargas de polarização sobre a superficie interna do dieléctrico é dada por

$$\sigma_p(R') = -\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R'^2} \quad ,$$

pois neste caso $\vec{u}_r \cdot \vec{n} = -1$ ($\vec{n}$ tem a mesma direcção que $\vec{u}_r$, mas sentido contrário)

$\sigma_p(R')$ tem sinal oposto a $\underline{Q}$.

d) consideremos uma superficie gaussiana de raio $\underline{r}$ igual àquela que foi utilizada na alínea a), ponto (ii) (isto é, tal que $R' < r < R$).

Aplicando o teorema de Gauss para o cálculo do fluxo do campo eléctrico

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, da = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

onde Q' é a carga total (carga verdadeira + carga de polarização) interior à superficie gaussiana.

Tem-se então

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

O campo eléctrico no interior do dieléctrico (por onde passa a superfície gaussiana) foi calculado na alínea a) e vale

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

substituindo na expressão que resulta do Teorema de Gauss, vem

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

Conclui-se, assim, que $Q' = \dfrac{Q}{\varepsilon_r}$

Note-se que, sendo $\varepsilon_r > 1$, a carga Q' é inferior à carga Q. Isto compreende-se porque Q' é a soma de Q com a carga de polarização negativa distribuída sobre a superfície interior do dieléctrico.

7.

a) As linhas do campo magnético que saem através de uma das bases do cilindro têm que fechar-se sobre si próprias, tendo necessariamente que entrar na outra base.

Vamos fazer a aproximação de considerar que no exterior da bobina o campo magnético é nulo (trata-se de uma boa aproximação pois as linhas de força do campo são aí muito menos densas que no interior da bobina).

Vamos ainda considerar que no interior da bobina o campo tem a direcção do eixo do cilindro. Esta aproximação é razoável quando a bobina é muito comprida e desde que consideremos regiões afastadas das extremidades.

O Teorema de Ampère permite escrever para o campo magnético $\vec{H}$:

$$\oint_{[C]} \vec{H} \cdot \vec{dl} = i$$

Ou seja, a circulação do campo $\vec{H}$ ao longo da curva fechada [C] é igual à soma das intensidades de corrente que atravessam uma superfície $\underline{S}$ apoiada em [C]

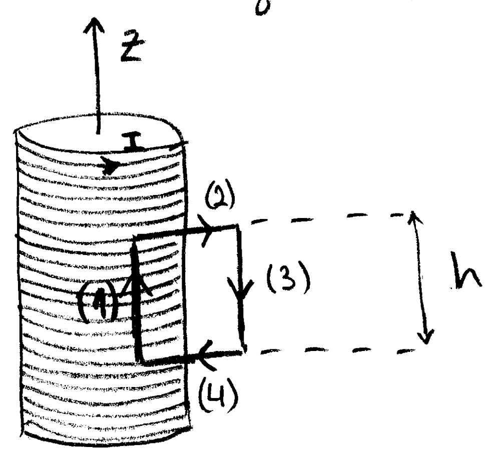
Tendo em conta a relacção entre o campo $\vec{H}$ e o campo de indução magnética $\vec{B}$

$$\vec{B} = \mu \vec{H},$$

O teorema de Ampère escreve-se

$$\oint_{[C]} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu i$$

Para efectuar o cálculo vamos escolher [C] como um caminho rectangular indicado na figura:



O integral pode ser decomposto em quatro integrais (ao longo de cada um dos segmentos (1), (2), (3) e (4)):

$$\oint_{[C]} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{[1]} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{[2]} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{[3]} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{[4]} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

O integral ao longo do caminho [3] é nulo pois $B \simeq 0$ fora da bobina.

Os integrais nos percursos [2] e [4] são também nulos, pois aí tem-se $\vec{B} \simeq 0$ numa parte do percurso (fora da bobina) e $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$ na outra parte (dentro da bobina).

Ao longo do percurso [1] o campo magnético toma sempre o mesmo valor (pois todos os pontos desse percurso estão à mesma distância do eixo da bobina) e tem sempre a mesma direcção ($\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$).

Tem-se então

$$B.h = \mu i$$

$$= \mu n h I \quad , \quad n \equiv \text{n.º de espiras por unidade de comprimento}$$

$$\vec{B} = \mu n I \vec{u}_z$$

O sentido do campo é dado pela regra da mão direita tendo em consideração o sentido da corrente indicado na figura.

b) Em regime quase estacionário o campo magnético $\vec{B}$ continua a ser dado, em cada instante, pela expressão determinada na alínea anterior

$$\vec{B} = \mu n I \vec{u}_z$$

onde $n = N/\ell$ é o nº de espiras por unidade de comprimento e I é agora uma corrente variável.
O fluxo do campo magnético através de cada espira é dado por

$$\phi = B A$$

onde $\underline{A}$ é a área de uma superfície assente sobre a espira. Escolhendo a superfície circular delimitada pela espira, vem

$$\phi = (\mu n I) \times (\pi R^2)$$

A f.e.m. auto-induzida na bobina com N espiras é, pela Lei de indução de Faraday,

$$\mathcal{E} = -N \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Mas, por outro lado, $\mathcal{E} = -L \dfrac{dI}{dt}$
onde L é a indutância.
Combinando as duas equações vem $L = N\phi/I$
substituindo nesta última equação a expressão do fluxo obtida acima $(\phi = \mu n I \pi R^2)$, resulta

$$L = \frac{N}{I} \mu n I \pi R^2 = \mu n^2 \pi R^2 \ell$$

A indutância, L, é independente da corrente; depende apenas de factores geométricos.

8.

a) A equação de Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

que se escreve na forma integral

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{B}.\vec{n}\,da\right],$$

permite concluir que, em geral, o rotacional do campo eléctrico (ou a circulação do campo eléctrico) são diferentes de zero, bastando para tal que o campo eléctrico seja induzido por um campo magnético variável no tempo. Nestas condições ($\vec{\nabla}\times\vec{E}\neq 0$ ou $\oint\vec{E}.d\vec{l}\neq 0$) o campo eléctrico é, pois, não conservativo.

Mas se a fonte do campo eléctrico forem cargas eléctricas, então $\partial\vec{B}/\partial t = 0$, resultando

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \quad \text{ou} \quad \oint\vec{E}.d\vec{l} = 0,$$

o que significa que o campo é conservativo. Isto é precisamente o que acontece na electrostática, em que o campo eléctrico tem cargas eléctricas estáticas como fontes.

b) A equação de Maxwell

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho \quad , \qquad \rho \equiv \text{densidade volúmica de carga}$$

escreve-se, no vazio

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Na forma integral esta equação toma a forma do Teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}\,da = q/\varepsilon_0$$

Esta equação mostra que o fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada é positivo, (se a carga que é fonte do campo for positiva) ou negativo (se a carga for negativa), mas sempre diferente de zero, desde que as cargas tenham resultante não nula. Existem, pois, dois tipos de cargas (positiva ou negativa) que, isoladas, dão origem ao campo. As linhas de força do campo eléctrico nascem nas cargas positivas e somem-se nas cargas negativas.

Pelo contrário, no caso do campo magnético, a equação

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

(ou $\oint \vec{B}.\vec{n}\,da = 0$, na forma integral)
põe em evidência que as linhas de força de $\vec{B}$ se fecham sobre si próprias.
Isto é, todas as linhas de força que saem de um polo magnético têm necessariamente que entrar no outro polo, fazendo com que o fluxo de $\vec{B}$ através de uma qualquer superfície fechada seja sempre nulo.
Os polos magnéticos não existem isoladamente.

c) Consideremos a equação de Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Por palavras: o rotacional do campo magnético $\vec{H}$ é igual à soma da densidade de corrente de condução ($\vec{J}$) com a densidade de corrente de deslocamento ($\partial\vec{D}/\partial t$)
Aplicando o operador divergência a esta equação obtem-se

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Como a divergência de um rotacional de um vector é sempre nula, vem

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) = 0 \quad .$$

Utilizando a equação de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \, ,$$

$\rho \equiv$ densidade volúmica de carga

resulta:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Esta equação, chamada equação da continuidade, traduz o princípio de conservação da carga eléctrica