Diferenciabilidade de funções com duas variáveis

Seja f: R^2->R. Dizemos que f é diferenciável em (x_0,y_0), se $\partial f/_{\partial x}$ e $\partial f/_{\partial y}$ existir em (x_0,y_0) e se:

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}\rightarrow 0\ \ com\ (x,y)\rightarrow(x_0,y_0)$$

Plano tangente

Seja f: R^2->R diferenciável em $x_0=(x_0,y_0)$. O plano definido pela equação:

$$z=f(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)$$

É chamado de plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0,y_0).

Matriz das derivadas parciais de f em x_0:

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x_0})=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

Gradiente

∇f é o vetor formado pelas derivadas parciais da função. Só é possível calcular o gradiente de uma função de contradomínio R.

Teorema 8

Se houver uma função **f** derivável no ponto **x**, o qual pertence ao domínio da função, então **f** é continua no ponto **x**.

Teorema 9

Se as derivadas parciais de uma função existem e são continuas numa vizinhança de um ponto **x**, pertencente ao domínio, então **f** é diferenciável em **x**.

Vetor Tangente

A velocidade **c'(t)** é um vetor tangente ao "caminho" **c(t)** no tempo **t**. Se **C** é uma curva traçada por **c** e se **c'(t)** é diferente de 0, então **c'(t)** é um vetor tangente à curva **C** no ponto **c(t)**.

Linha tangente a um "caminho"

Se **c(t)** é um "caminho" e **c'**$(t_0)\neq 0$, a equação da linha tangente ao ponto **c**$(\mathbf{t_0})$ é

$$\boldsymbol{l(t)=c(t_0)+(t-t_0)c'(t_0)}$$

Se **C** é a curva traçada por **c**, então a linha traçada por **l** é a linha tangente à curva **C** no ponto **c**$(\mathbf{t_0})$**.**

Teorema 10

(i) Seja **f** uma função diferenciável num ponto $\mathbf{x_0}$ e **c** um numero real. h(**x**)=**c**f(**x**) é diferenciável em $\mathbf{x_0}$ e Dh($\mathbf{x_0}$)=**c**Df($\mathbf{x_0}$) (igualdade de matrizes).

(ii) Sejam **f** e **g** diferenciáveis em $\mathbf{x_0}$. h(**x**)=f(**x**)+g(**x**) é diferenciável em $\mathbf{x_0}$ e Dh($\mathbf{x_0}$)=Df($\mathbf{x_0}$)+Dg($\mathbf{x_0}$) (soma de matrizes).

(iii) Sejam f e g diferenciáveis em $\mathbf{x_0}$ e seja h(**x**)=g(**x**)f(**x**). Seja h diferenciável em $\mathbf{x_0}$ e Dh($\mathbf{x_0}$)=g($\mathbf{x_0}$)Df($\mathbf{x_0}$)+f($\mathbf{x_0}$)Dg($\mathbf{x_0}$).

(iv) Com as mesmas condições que acima e sendo desta vez h(**x**)=f(**x**)/g(**x**) e supondo que g(**x**) nunca é 0 no seu domínio, então h é diferenciável em $\mathbf{x_0}$ e $\boldsymbol{D}h(\boldsymbol{x_0})=\frac{g(x_0)\boldsymbol{D}f(x_0)-f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Regra da Cadeia

Supondo que g é diferenciável em $\mathbf{x_0}$ e f diferenciável em $\mathbf{y_0}$ **=** g($\mathbf{x_0}$). Entao f∘g é diferenciável em $\mathbf{x_0}$ e **D**(f∘g)($\mathbf{x_0}$) = **D**f($\mathbf{y_0}$)**D**g($\mathbf{x_0}$) (produto da matriz **D**f($\mathbf{y_0}$) por **D**g($\mathbf{x_0}$)).

Gradientes em R^3

Sendo f: R^3->R diferenciável, o gradiente de f em (x,y,z) é o vetor no espaço dado por $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\nabla f(x,y,z)$. ∇f é a matriz da derivada **D**f, escrito como um vetor.

Derivadas direcionais

f: R^3->R. A derivada direcional de f em **x** na direção do vetor **v** é dada por:

$$\frac{d}{dx}f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})\Big|_{t=0}=\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot v$$

se existir. Normalmente usa-se **v** como um vetor unitário (norma igual a 1).

Teorema 12
Se f:R^3->R é diferenciável então todas as derivadas direcionais existem. A derivada direcional em **x** na direção do vetor **v** é dada por:

$$\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{x})\right] v_3$$

em que **v**=(v_1,v_2,v_3).

Teorema 13
Assumindo ∇f(**x**)≠0. Entao ∇f(**x**) aponta na direção em que f aumenta mais rapidamente.

Teorema 14
f:R^3->R é um mapa C^1.
(x_0,y_0,z_0) está sob a superfície S definida por f(x,y,z)=k, com k constante.
∇f(x_0,y_0,z_0) é normal à superfície de nível no seguinte sentido: Se **v** é o vetor tangente em t=0 no caminho **c**(t) em S com **c**(0)=(x_0,y_0,z_0), então ∇f(x_0,y_0,z_0) · **v =** 0.

Planos tangentes a Superfícies de Nível
Seja S uma superfície de (x,y,z) tal que f(x,y,z)=k, com k constante. O plano tangente a S no ponto (x_0,y_0,z_0) de S é definido por:

$$\boldsymbol{\nabla}f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

se ∇f(x_0,y_0,z_0)≠0.

Derivadas de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Teorema 1
Se f(x,y) é de classe C^2(ou seja, duas vezes continuamente diferenciável), então as derivadas parciais misturadas são iguais, isto é:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Extremos
Numa dada função escalar, um ponto $\mathbf{x_0}$ é um ponto crítico se f não é diferenciável em $\mathbf{x_0}$, ou se o é, **D**f($\mathbf{x_0}$)=0.
Um ponto crítico que não é um extremo é chamado de ponto cela.

Procedimento para encontrar extremos livres
(i) Fazer um sistema com as derivadas parciais de f igualadas a 0.
(ii) Resolvendo o sistema obtém-se as coordenadas dos pontos críticos.
(em R^2, num domínio fechado e condicionado, comparando os valores obtidos a partir das coordenadas calculadas, consegue-se encontrar o máximo (maior valor) e o mínimo (menor valor), teorema 7).

Teste da segunda derivada para classificar extremos livres

$$Hf(\boldsymbol{x_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

teorema 5
Se Hf($\mathbf{x_0}$) é definida positiva, isto é, os determinantes são todos positivos, então $\mathbf{x_0}$ é um mínimo de f. Se Hf($\mathbf{x_0}$) for definida negativa, ou seja, os determinantes forem alternadamente positivos e negativos, então $\mathbf{x_0}$ é um máximo.

Teorema 6 - teste da segunda derivada para funções com duas variáveis
Seja f(x,y) de classe C^3 num domínio aberto em R^2. Um ponto (x_0,y_0) é mínimo de f se:
(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$
(iii) $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \; em \; (x_0, y_0)$
(D é chamado de descriminante da hessiana). Se em (ii) for <0 em vez de >0 e a condição (iii) não mudar, então em vez de um mínimo teremos um máximo.

Teorema 7
Seja D fechado e condicionado em R^n e seja f: D -> R contínua. Então f assume o seu mínimo e máximo absoluto em algum ponto $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ de D.

Teorema 8 – método de lagrange
Suppose that f: $U \subset R^n$ -> R and g: $U \subset R^n$ -> R are given C^1 real-valued functions. Let $\mathbf{x}_0 \in U$ and $g(\mathbf{x}_0)=c$, and let S be the level set for g with value c (recall that this is the set of points $\mathbf{x} \in R^n$ satisfying $g(\mathbf{x})=c$). Assume $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$.
If f|S, which denotes "f restricted to S", has a local maximum or minimum on S at $\mathbf{x}_0$, then there is a real number λ such that $\nabla f(\mathbf{x}_0)=\lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$.

Teorema 9
Se f, quando restrita a uma superfície S, tem um máximo ou um mínimo em $\mathbf{x}_0$, então $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ é perpendicular a S em $\mathbf{x}_0$.

Procedimento para encontrar extremos condicionados
(i) Seja uma função g, a condição como uma superfície de nível de uma função.
(ii) Usar o método de lagrange, isto é, sistema com derivadas parciais de f igualadas às derivadas parciais de g multiplicadas por λ.
(iii)Resolvendo o sistema obtem-se as coordenadas dos pontos críticos.

Teorema 10 – classificar extremos condicionados
Let f: $U \subset R^2$ -> R and g: $U \subset R^2$ -> R be smooth (at least C^2) functions. Let $\mathbf{v}_0 \in U$, $g(\mathbf{v}_0) \neq c$, and S be the level curve g with value c. Assume that $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq 0$ and that there is a real number λ such that $\nabla f(\mathbf{v}_0)=\lambda \nabla g(\mathbf{v}_0)$. Form the auxiliary function h = f – λg and the **bordered Hessian** determinant

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \textit{ evaluated at } \boldsymbol{v}_0$$

(i) if |H| >0, then $\mathbf{v}_0$ is a local maximum point for f|S.
(ii) if |H| <0, then $\mathbf{v}_0$ is a local minimum point for f|S.
(iii) if |H| = 0, the test is inconclusive and $\mathbf{v}_0$ may be a minimum, a maximum, or neither.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

Teorema 11 – implicit function
Suppose that F: R^{n+1} -> R has continuous partial derivatives. Denoting points in R^{n+1} by $(\mathbf{x},z)$, where $\mathbf{x} \in R^n$ and $z \in R$, assume that $(\mathbf{x}_0,z_0)$ satisfies

$$F(\boldsymbol{x}_0, z_0) = 0 \qquad and \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0, z_0) \neq 0$$

Then there is a ball U containing $\boldsymbol{x}_0$ in R^n and a neighborhood V of z_0 in R such that there is a unique function z = $g(\mathbf{x})$ defined for $\mathbf{x}$ in U and z in V that satisfies

$$F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) = 0.$$

Moreover, if $\mathbf{x}$ in U and z in V satisfy $F(\mathbf{x},z)=0$, then $z=g(\mathbf{x})$. Finally, $z=g(\mathbf{x})$ is continuously differentiable, with the derivative given by

$$\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{x}, z)} \boldsymbol{D}_x F(\boldsymbol{x}, z) \Bigg|_{z=g(x)},$$

Where $\mathbf{D}_x F$ denotes the (partial) derivative of F with respect to the variable $\mathbf{x}$, that is, we have $\mathbf{D}_x F = [\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n]$; in other words,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

Once it is known that $z=g(\mathbf{x})$ exists and is differentiable, formula (1) may be checked by implicit differentiation; to see this, note the chain rule applied to $F(\mathbf{x},g(\mathbf{x}))=0$ gives

$$\boldsymbol{D}_x F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))\right] [\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x})] = 0,$$

Which is equivalent to formula (1).