2º Prova Escrita de Física Quântica II

9 de Janeiro de 2020

1. (4 pts) Considere o seguinte hamiltoniano

$$H_0 = E_0 \sigma_x, \tag{1}$$

onde E_0 é uma constante positiva e σ_x é a matriz de Pauli x. Considere, agora, que este sistema é sujeito a uma perturbação dependente do tempo (ligada em $t = 0$), da forma

$$H_1 = E_1 \sigma_y \cos(\omega t) e^{-\gamma t}, \tag{2}$$

onde E_1, γ e ω são constantes positivas e σ_y é a matriz de Pauli y.

   (a) Mostre explicitamente que H_0 e H_1 não comutam.

   (b) Admitindo que em $t = 0$ o sistema está no estado fundamental, calcule a probabilidade de encontrar o sistema no estado excitado, para tempos muito longos. Explicite o que significa "tempos muito longos" no contexto deste problema.

2. (4 pts) Numa transição dipolar, com perturbação da forma $H_1 = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$, e com o campo eléctrico orientado segundo o eixo dos z's, é necessário calcular o elemento de matriz:

$$\langle l, m | z | l' m' \rangle. \tag{3}$$

Usando a seguinte relação entre harmónico esféricos:

$$\cos\theta Y_{l,m} = a_{l,m} Y_{l+1,m} + a_{l-1,m} Y_{l-1,m}, \tag{4}$$

onde

$$a_{l,m} = \sqrt{\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)}}, \tag{5}$$

encontre as regras de seleção para a transição dipolar referida atrás.

3. (4 pts) Considere uma partícula confinada numa caixa esférica de raio a e de paredes impenetráveis.

   (a) Encontre a equação transcendente que fornece os níveis de energia da partícula na caixa esférica, para um momento angular ℓ arbitrário.

(b) Considere, agora, o acoplamento spin-órbita, o qual toma a toma a forma

$$V_{s.o.} = \lambda \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \tag{6}$$

Calcule a diferença de energia entre os novos níveis de energia da partícula na caixa e os antigos (isto é, sem acoplamento spin-órbita).

4. (4 pts) Considere uma partícula em movimento harmónico simples. Se as velocidades forem elevadas, há uma correcção adicional à energia cinética da forma

$$H_1 = -\frac{p^4}{8m^3c^2}, \tag{7}$$

de origem relativista.

(a) Calcule, em primeira ordem de teoria de perturbações, o efeito de H_1 nos níveis de energia do oscilador harmónico. Deverá obter um resultado da forma

$$\langle n|H_1|n\rangle \propto -(2n^2 + 2n + 1). \tag{8}$$

(b) Diga quando é que a correcção calculada no item anterior deixa de fazer sentido físico. Para responder a esta questão, calcule o valor médio da energia cinética não-relativista num estado arbitrário do oscilador harmónico.

5. (4 pts) Considere uma partícula, movimentando-se em três dimensões, e sujeita ao potencial com simetria esférica

$$V(r) = g\delta(r - a), \tag{9}$$

onde a é uma constante positiva. Calcule, na primeira aproximação de Born, a seção eficaz diferencial de espalhamento para este potencial.