

**Exercícios de Física Computacional**  
**Escola de Ciências da Universidade do Minho**  
**Física e Engenharia Física**  
**ano letivo 2020/2021, 1º semestre**

**Folha 7**

1. Resolva a equação

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \sin(t)$$

usando o método de Euler sabendo que  $x(t = 0) = 0$ .

2. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = 3(1 + x) - y$$

usando o método de Euler sabendo que para  $x = 1$  temos  $y = 4$ . Compare a solução numérica obtida com a solução analítica ( $y = 3x + e^{1-x}$ ), testando vários números de iterações na solução numérica.

3. Resolva a equação

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \sin(t)$$

usando os métodos de Runge-Kutta de segunda e quarta ordem, sabendo que  $x(t = 0) = 0$ . Compare, no mesmo gráfico,  $N = 10, 20, 50, 100$ . Sugestão: fazer um gráfico para os cada um dos métodos onde se comparem os vários  $N$ .

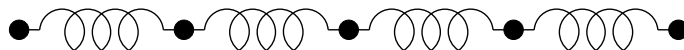
4. Em 1963 Edward Lorenz obteve as seguintes equações diferenciais no âmbito de um modelo atmosférico simples:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz,$$

sendo  $\sigma$ ,  $r$ , e  $b$  constantes. Estas equações são consideradas um dos primeiros exemplos de caos determinista, tendo um papel importante na historia da Física.

Escreva um programa *python* para resolver estas equações para  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = \frac{8}{3}$  no intervalo  $t \in [0, 50]$  s e com as condições iniciais  $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ . Represente num gráfico  $z$  em função de  $x$  para obter a famosa curva em forma de borboleta que nunca se repete.

5. Considere o seguinte sistema de  $N$  massas idênticas, juntas por molas lineares idênticas e na ausência de gravidade e atrito:



Os deslocamentos horizontais  $\xi_i$  das massas  $i = 1, \dots, N$  satisfazem as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} &= k(\xi_2 - \xi_1) + F_1, \\ m \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= k(\xi_{i+1} - \xi_i) + k(\xi_{i-1} - \xi_i) + F_i, \\ m \frac{d^2 \xi_N}{dt^2} &= k(\xi_{N-1} - \xi_N) + F_N. \end{aligned}$$

onde  $m$  é a massa de cada massa,  $k$  é a constante de cada mola e  $F_i$  é a norma da força externa na massa  $i$ .

Escreva um programa para resolver estas equações de movimento usando o método de Runge–Kutta de quarta ordem para  $m = 1$  kg,  $k = 6$  N/m e todas as forças externas são zero com exceção de  $F_1 = \cos \omega t$ , com  $\omega = 2$  s<sup>-1</sup>. Represente as soluções para os deslocamentos  $\xi_i$  de  $N = 5$  massas em função do tempo, entre  $t = 0$  s e  $t = 20$  s.

6. Escreva um programa para resolver a equação diferencial

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + x + 5 = 0$$

usando o método do salto de rã (*leapfrog method*). Resolva entre  $t = 0$  e  $t = 40$  em passos de  $h = 0.001$  com as condições iniciais  $x = 1$  e  $dx/dt = 0$ . Represente a solução obtida ( $x$  em função de  $t$ ).

7. Use o método de Verlet para calcular a posição da terra em torno do sol sabendo que as equações de movimento para a posição  $\mathbf{r} = (x, y)$  de um planeta no seu plano orbital são:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

onde  $G = 6.6738 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup> é a constante gravitacional de Newton e  $M = 1.9891 \times 10^{30}$  kg é a massa do sol. A órbita da terra não é perfeitamente circular, estando o planeta umas vezes mais próximo do sol e outras mais afastado. No ponto de maior aproximação ao sol (periélio) a terra move-se tangencialmente (*i.e.* perpendicular à linha entre a terra e o sol), estando a uma distância de  $1.4710 \times 10^{11}$  m do sol e uma velocidade linear de  $3.0287 \times 10^4$  m s<sup>-1</sup>.

- (a) Calcule numericamente a órbita da terra usando o método de Verlet com um passo de uma hora. Represente a órbita mostrando que não é perfeitamente circular.

- (b) Considere a energia potencial gravítica,  $-GMm/r$ , onde  $m = 5.9722 \times 10^{24}$  kg, e a energia cinética,  $\frac{1}{2}mv^2$ . Calcule estas duas quantidades em cada passo, mostrando a respetiva variação, bem como a energia total.
- (c) Discuta os resultados obtidos.