Cálculo

Primitivação de funções racionais.

1. Calcule as primitivas das seguintes funções racionais:

   (a) $F(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x-6}$
   Uma vez que o grau do polinómio no denominador é maior que o grau do polinómio no numerador, avançamos directamente para a factorização de x^2-5x-6. Para tal, determinamos as suas raízes

$$x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow x=6 \vee x=-1$$

   Os zeros 6 e -1 têm assim multiplicidade 1. Desta forma, podemos escrever $x^2-5x-6 = (x+1)(x-6)$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x^2-5x-6} &= \frac{x-1}{(x+1)(x-6)}\\ &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-6}\\ &= \frac{A(x-6)+B(x+1)}{(x+1)(x-6)}\\ &= \frac{(A+B)x-6A+B}{(x+1)(x-6)}\end{aligned}$$

   Para determinar A e B construímos e resolvemos o seguinte sistema (método dos coeficientes indeterminados)

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -6A+B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7A-1=1 \\ B=6A-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{7} \\ B=\frac{5}{7} \end{cases}$$

   Logo,

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{x-1}{x^2-5x-6}\Big) &= P\Big(\frac{2/7}{x+1}+\frac{5/7}{x-6}\Big)\\ &= \frac{2}{7}P\Big(\frac{1}{x+1}\Big)+\frac{5}{7}P\Big(\frac{1}{x-6}\Big)\\ &= \frac{2}{7}\ln|x+1|+\frac{5}{7}\ln|x-6|+C\end{aligned}$$

   (b) $F(x) = \dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$
   Uma vez que o grau do polinómio no denominador é maior que o grau do polinómio no

numerador, avançamos directamente para a factorização de x^3+2x^2+x. Para tal, determinamos as suas raízes

$$\begin{aligned}
x^3+2x^2+x=0 &\Leftrightarrow x(x^2+2x+1)=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \vee x^2+2x+1=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}\\
&\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1
\end{aligned}$$

O zero 0 tem multiplicidade 1 e o zero -1 multiplicidade 2 (Isto acontece quando a raíz quadrada presente na fórmula resolvente é nula, obtendo assim apenas uma raiz distinta num polinómio de grau 2). Desta forma, podemos escrever $x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+2x^2+x} &= \frac{1}{x(x+1)^2}\\
&= \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\\
&= \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x^3+2x^2+x}\\
&= \frac{(A+B)\,x^2+(2A+B+C)\,x+A}{x^2-5x-6}
\end{aligned}$$

Para determinar A e B construímos e resolvemos o seguinte sistema (método dos coeficientes indeterminados)

$$\begin{cases} A+B=0\\ 2A+B+C=0\\ A=1\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} B=-1\\ C=-1\\ A=1\end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{x^3+2x^2+x}\right) &= P\left(\frac{1}{x}\right)+P\left(\frac{-1}{x+1}\right)+P\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\\
&= P\left(\frac{1}{x}\right)-P\left(\frac{1}{x+1}\right)-P\left(\underbrace{1}_{f'}.\underbrace{(x+1)^{-2}}_{f^{-2}}\right)\\
&= \ln|x|-\ln|x+1|-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C,\\
&= \ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C \quad C\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

(c) $F(x)=\dfrac{x^4-x+1}{x^3-x^2}$

Uma vez que o grau do polinómio no denominador é menor que o grau do polinómio no numerador é necessário realizar a divisão de polinómios.

$$\begin{array}{l|l}
x^4+0x^3+0x^2-x+1 & x^3-x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4+x^3+0x^2+0x+0} & x+1 \\
0x^4+x^3+0x^2-x+1 & \\
\underline{-x^3+x^2+0x^2+0x+0} & \\
0x^4+0x^3+x^2-x+1 &
\end{array}$$

Desta forma, podemos escrever

$$\frac{x^4-x+1}{x^3-x^2}=x+1+\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2}=x+1+\frac{x^2-x+1}{x^2\,(x-1)} \tag{1}$$

No próximo passo, decompomos o termo mais a direita (função racional) em fracções parciais ou simples usando a técnica anteriormente vista. O denominador $x^2(x-1)$ já se encontra factorizado. As raízes são 0 de multiplicidade 2 e 1 de multiplicidade 1. Então,

$$\begin{aligned}\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \\ &= \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{(A+C)x^2+(-A+B)x-B}{x^2(x-1)}\end{aligned} \tag{2}$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, resulta

$$\begin{cases} A+C=1 \\ -A+B=-1 \\ -B=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ A=0 \\ B=-1 \end{cases} \tag{3}$$

Logo, de (1), (2) e (3) temos,

$$\begin{aligned}P\left(\frac{x^4-x+1}{x^3-x^2}\right) &= P\left(x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right) \\ &= P(x+1)-P\left(x^{-2}\right)+P\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{x}+\ln|x-1|+C, \quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

(d) $F(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}$ Começamos por verificar que não é necessário realizar divisão de polinómios. Além disso, o denominador já se encontra factorizado. Os zeros neste caso são

$$(x-1)^2=0 \vee x^2+1=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{0\pm\sqrt{0-4}}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=\pm i$$

Tem-se então que o par complexo $\pm i$ e 1 são zeros com multplicidade 1 e 2, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(Ax+B)(x-1)^2+C(x-1)(x^2+1)+D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+C)x^3+(-2A+B-C+D)x^2+(A-2B+C)x+B-C+D}{(x^2+1)(x-1)^2}\end{aligned}$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, resulta

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-C+D=0 \\ A-2B+C=1 \\ B-C+D=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=-C \\ B+D=-C \\ -2B=1 \\ -2C=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-1/2 \\ C=0 \\ D=1/2 \end{cases}$$

e

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{-1/2}{x^2+1}+\frac{1/2}{(x-1)^2}.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}\right) &= P\left(\frac{-1/2}{x^2+1}+\frac{1/2}{(x-1)^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}P\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}P\left(\underbrace{1}_{f'}.\underbrace{(x-1)^{-2}}_{f^{-2}}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\arctan(x)-\frac{1}{2x-2}+C \quad C\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(e) $F(x) = \dfrac{5x^2-2x+2}{x^3+1}$. Começamos por verificar que não é necessário realizar divisão de polinómios. Para factorizar x^3+1 calculamos as suas raízes. É fácil ver que -1 é raíz, pelo que utilizamos a regra de Rufini para determinar uma factorização do polinómio. Assim,

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & & -1 & 1 & -1 \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

pelo que

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$$

Então,

$$
\begin{aligned}
(x+1)\left(x^2-x+1\right)=0 &\Leftrightarrow x=-1 \vee x^2-x+1=0\\
&\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}\\
&\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}
$$

Tem-se então que o par complexo $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}$ e -1 são zeros de multplicidade 1. Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{5x^2-2x+2}{x^3+1} &= \frac{5x^2-2x+2}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}\\
&= \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\\
&= \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{x^3+1}\\
&= \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{x^3+1}
\end{aligned}
$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, resulta

$$
\left\{\begin{array}{c} A+B=5\\ -A+B+C=-2\\ A+C=2\end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=5-A\\ -A+5-A+2-A=-2\\ C=2-A\end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=5-A=2\\ A=3\\ C=2-A=-1\end{array}\right.
$$

e

$$\frac{5x^2-2x+2}{x^3+1}=\frac{3}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{5x^2-2x+2}{x^3+1}\right) &= 3P\left(\frac{1}{x+1}\right)+P\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\\
&= 3\ln|x+1|+\ln\left(x^2-x+1\right)+C, \quad C\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$