Resolução do 1º Teste 21/22

Física Experimental

Abstract

As resoluções apresentadas foram elaboradas rapidamente e sem grande atenção. É apenas natural que contenha erros, razão pela qual devem ser usadas exclusivamente como instrumento de auxílio e de referência.

1 Questão 1

1.1 Alínea a.

Vamos assumir que as medições foram independentes e calcular a média de cada uma das medições, propagando as incertezas de acordo com o método dos coeficientes de sensibilidade.

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} \tag{1}$$

As incertezas propagam-se por aplicação de (2):

$$u_{\bar{c}}^2 = \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial c_i}\right)^2 u_{c_i}^2 \tag{2}$$

Que resulta em:

$$u_{\bar{c}} = \frac{1}{3}\sqrt{u_{c_1}^2 + u_{c_2}^2 + u_{c_3}^2} \tag{3}$$

Ficamos então com:

$$\bar{c} = \frac{299798 + 299789 + 299797}{3} \approx 299795 \text{ km/s}$$

Com uma incerteza igual a:

$$u_{\bar{c}} = \frac{1}{3}\sqrt{5^2 + 4^2 + 8^2} = \approx 3 \text{ km/s}$$

O melhor valor para c_{exp} é então:

$$\tilde{c} = 299795 \pm 3 \text{ km/s}$$

1.2 Alínea b.

Na leitura do aparelho digital, a incerteza de leitura deve-se a arredondamentos. A FDP associada é previsivelmente retangular com uma semilargura igual a $a = 0.005$ g (uma vez que qualquer valor entre $83.355 \leq m < 83.365$ g tem igual probabilidade de arredondar para o valor apresentado no visor do aparelho). A incerteza de leitura associada é então, por definição, $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$ pelo que o valor final fica expresso da forma:

$$m = 83.360 \pm 0.003 \text{ g}$$

Por outro lado, a incerteza na leitura do aparelho analógico é descrita por uma FDP triangular (já que temos uma noção mais precisa de quais valores são mais realistas para o resultado). O valor está muito perto de $U = 2.3$ V, pelo que podemos exprimir a medição como uma FDP triangular com centro em $U_0 = 2.28$ V e uma semilargura de $a = 0.02$ V. A incerteza associada a uma FDP triangular é dada por $u = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Logo, o resultado final pode ser apresentado como:

$$U = 2.28 \pm 0.01 \text{ V}$$

2 Questão 2

2.1 Alínea a.

Assumindo que a incerteza padrão u é a mesma para cada medida, temos, para o caso dos dez cilindros:

$$l = \frac{l_1 + \dots l_{10}}{10} \tag{4}$$

E a incerteza padrão associada é simplesmente a incerteza da média:

$$u_l = \frac{1}{\sqrt{10}} u \tag{5}$$

Por outro lado, fazendo uma única medição e dividindo por 10, o comprimento l do cilindro é:

$$l = \frac{l'}{10} \tag{6}$$

onde l' é a medição do comprimento dos 10 cilindros seguidos. A incerteza é simplesmente:

$$u_l^2 = \left(\frac{dl}{dl'}\right)^2 u_{l'}^2$$

A derivada é de fácil computação, e ficamos com:

$$u_l = \frac{1}{10} u_{l'} = \frac{1}{10} u \tag{7}$$

uma vez que $u_{l'} = u$, pelo enunciado, a incerteza da medição dos 10 comprimentos é igual à incerteza de cada uma das medições individuais. Note-se que a incerteza associada a uma única medição do comprimento dos 10 cilindros é inferior à incerteza associada à medição de cada um dos comprimentos individualmente, pelo que concluimos que este segundo procedimento permite obter o resultado desejado com uma maior precisão.
O resultado é esperado, já que ao invés de andar a acumular incertezas nas várias medições, efetuamos uma única medida que acumula apenas um desses fatores de incerteza.

2.2 Alínea b.

Assumindo que a incerteza relativa $u_r = \frac{u}{l}$ é a mesma para qualquer medição, temos, para o primeiro procedimento, novamente:

$$l = \frac{l_1 + \dots l_{10}}{10} \tag{8}$$

Mas desta vez cada uma das medidas tem incerteza igual a $u_{l_i} = u_r l_i$ pelo que:

$$u_l = \frac{1}{10}\sqrt{u_r^2 l_1^2 + \cdots + u_r^2 l_{10}^2} \iff u_l = \frac{u_r}{10}\sqrt{\sum l_i^2} \tag{9}$$

com $i = 1, \dots, 10$. Por outro lado, para uma única medição do comprimento dos dez cilindros, temos, mais uma vez a expressão (6)

$$l = \frac{l'}{10} \tag{10}$$

Cuja incerteza é dada por:

$$u_l = \frac{1}{10} u_{l'} \iff u_l = \frac{u_r}{10} l' \tag{11}$$

Uma vez que $u_{l'} = u_r l'$. Então, fazendo a razão entre (9) e (10) obtemos:

$$r = \frac{\sqrt{\sum l_i^2}}{l'} \tag{12}$$

Como $l' = l_1 + \cdots + l_{10}$, o seu quadrado é $l'^2 = (l_1 + \cdots + l_{10})^2 > l_1^2 + \cdots + l_{10}^2$. Logo, chegamos à conclusão que $\sqrt{\sum l_i^2} < l'$ e, portanto, $r < 1$.
Logo, o primeiro procedimento resulta numa incerteza associada ao resultado final inferior quando comparada com o segundo procedimento.
Podemos pensar que, sendo as incertezas relativas idênticas para todas as medições, é melhor efetuar 10 medições com incertezas relativamente pequenas, acumulando-as, do que executar uma única medida com uma incerteza resultante muito maior.

3 Questão 3

3.1 Alínea a.

Para determinar o valor da constante da mola, determinamos uma expressão em ordem a k a partir de

$$\omega^2 = \frac{k}{m_s + \frac{1}{3}m_{mola}} \iff k = \left(m_s + \frac{1}{3}m_{mola}\right)\omega^2 \tag{13}$$

Substituindo $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(m_s + \frac{1}{3}m_{mola}\right) \tag{14}$$

Convertendo as massas para unidades do sistema internacional e aplicando a fórmula (14) obtemos:

$$k = 0.119 \text{ kg/s}^2$$

Por outro lado, obtemos a incerteza padrão de k propagando as incertezas fornecidas de acordo com a fórmula (14):

$$u_k^2 = \left(\frac{\partial k}{\partial T}\right)^2 u_T^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial m_s}\right)^2 u_{m_s}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial m_{mola}}\right)^2 u_{m_{mola}}^2 \tag{15}$$

$$u_k^2 = \left(\frac{-8\pi^2}{T^3}\right)^2 \left(m_s + \frac{1}{3}m_{mola}\right)^2 u_T^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 u_{m_s}^2 + \left(\frac{4\pi^2}{3T^2}\right)^2 u_{m_{mola}}^2 \tag{16}$$

Aplicando os valores tabelados a (16), obtemos:

$$u_k = 0.006 \text{ kg/s}^2$$

Logo, o resultado final para a medição da constante elástica da mola pode ser apresentado como:

$$k = 0.119 \pm 0.006 \text{ kg/s}^2$$

3.2 Alínea b.

Para determinar uma expressão que nos permita determinar o valor da densidade da massa suspensa, olhamos para as duas situações da figura.
Na primeira situação (medição de $Y1$), o sistema está em equilíbrio e

$$F_g = -k(Y1 - Y0) \tag{17}$$

o segundo lado da equação é aplicação direta da lei de Hooke, $F = -k(x - x_0)$, onde x_0 é o ponto de equilíbrio. Na segunda situação, o sistema está igualmente em equilíbrio estático, no entanto o equilíbrio de forças tem em conta a força de impulsão:

$$F_g = -k(Y2 - Y0) + \frac{\rho_w}{\rho_s}m_s g \tag{18}$$

onde ρ_w é a densidade da água, ρ_s a densidade do sólido e m_s a massa do sólido (totalmente submerso). Como F_g é constante, podemos resolver em ordem a ρ_s ficando com:

$$\rho_s = \frac{\rho_w m_s g}{k(Y2 - Y1)} \tag{19}$$

Aplicando os valores tabelados a (19) obtemos:

$$\rho_s = 7876 \text{ kg/m}^3$$

Se for necessário, podemos obter a incerteza padrão de ρ_s propagando as incertezas de acordo com:

$$u_{\rho_s}^2 = \left(\frac{\rho_w g}{k(Y2 - Y1)}\right)^2 u_{m_s}^2 + \left(\frac{\rho_w m_s g}{k(Y2 - Y1)^2}\right)^2 \left(u_{Y1}^2 + u_{Y2}^2\right) \tag{20}$$

Aplicando os valores tabelados a (20), obtemos:

$$u_{\rho_s} = 101 \text{ kg/s}$$

Logo,

$$\rho_s = 7876 \pm 101 \text{ kg/s}$$

4 Questão 4

A expressão linear para a aceleração da gravidade g em função da altitude h, para pequenas altitudes $h << r_T$, é, de acordo com os dados experimentais:

$$g = -0.0034h + 9.801 \tag{21}$$

onde g está em m/s^2, h está em km, a ordenada da origem está em m/s^2 e o declive m em $\frac{\text{m}}{\text{km s}^2}$. Aplicando (21) para $h = 0.200$ km, obtemos:

$$g = 9.800 \text{ m/s}^2$$

A incerteza padrão na determinação de g pode ser obtida propagando as incertezas para o declive e a ordenada na origem:

$$u_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial m}\right)^2 u_m^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial b}\right)^2 u_b^2 \tag{22}$$

onde b é a ordenada na origem. Isto corresponde a:

$$u_g^2 = h^2 u_m^2 + u_b^2 \tag{23}$$

Logo, resolvendo em ordem a u_g obtemos:

$$u_g \approx 0.01 \text{ m/s}^2$$

Assim, o valor estimado para a aceleração da gravidade em Braga fica:

$$g = 9.80 \pm 0.01 \text{ m/s}^2$$