Análise Complexa — LFis/MiEFis

Primeiro teste

1 $z \in \mathbb{C}$

a $\operatorname{sen} z = i \iff \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \iff e^{iz} - e^{-iz} = -2$

Mudança de variável: $y = e^{iz}$

$\operatorname{sen} z = i \iff y - \frac{1}{y} = -2 \iff y^2 + 2y - 1 = 0$

$\iff y = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \iff y = -1 \pm \sqrt{2}$

$\iff e^{iz} = -1 \pm \sqrt{2} \iff iz = \ln(-1+\sqrt{2}) \vee iz = \ln(-1-\sqrt{2})$

$\iff iz = \ln(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi i \quad \vee \quad iz = \ln(1+\sqrt{2}) + (\pi + 2k\pi)$

$\iff z = -i \ln(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi \quad \vee \quad z = -i\ln(1+\sqrt{2}) + (2k+1)\pi$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

b $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$

$\dfrac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} + \dfrac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} = \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4} = 1$

c A função ~~cos~~ z está definida em $\mathbb{C}$ e é analítica (combinação elementar da função exponencial e polinómios) se fosse limitada, pelo teorema de Liouville, seria uma função constante, o que é absurdo. Logo $\cos z$ não é limitada.

Resolução alternativa: $\cos(in) = \dfrac{e^{-n} + e^{n}}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Portanto, não existe $M>0$: $|f(z)| < M, \ \forall z \in \mathbb{C}$

2 $f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ onde:

$u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + 1$ e $v(x,y) = 2xy + 3y$

$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3 & -2y \\ 2y & 2x+3 \end{bmatrix}$

Assim $\begin{cases} \partial u/\partial x = \partial v/\partial y \\ \partial v/\partial x = -\partial u/\partial y \end{cases}$ Além disso, as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções diferenciáveis, pois são polinomiais. Logo, pelo Teorema de Cauchy-Riemann, f é analítica em $\mathbb{C}$.

Alternativa: Observar que $f(z) = z^2+3z+1$

f é analítica porque é polinomial (em z)

3 a $\int_\gamma e^{z^2}dz$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$

A função $f(z) = e^{z^2}$ é analítica (composta da função exponencial com um polinómio). A curva γ é uma curva fechada (circunferência de centro 0 e raio 1). Além disso $f(z)$ está definida em $\mathbb{C}$ que é claramente um domínio simplesmente conexo. Assim, $\int_\gamma e^{z^2}dz = 0$, pelo teorema de Cauchy.

b $\int_\gamma z e^z dz$, γ é o segmento de reta que une os pontos i e $-i$

A função $f(z) = ze^z$ é uma função analítica definida em $\mathbb{C}$ (domínio simplesmente conexo). Logo sabemos que $\int_\gamma ze^z dz$ não depende da curva escolhida, apenas dos seus extremos e $\int_\gamma ze^z dz = F(i) - F(-i)$ onde F é uma primitiva de $f(z) = ze^z$.

Usando o método da primitivação por partes

$$\int ze^z dz = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Logo, $\int_\gamma ze^z dz = ie^i - e^i - (-ie^{-i} - e^{-i}) =$

$= i(e^i + e^{-i}) - (e^i - e^{-i})$

$= 2i\cos(1) - 2i\,\mathrm{sen}(1) = 2i(\cos(1) - \mathrm{sen}(1))$

Alternativa:

$\gamma(t) = -i + 2it = i(-1+2t), \quad t \in [0,1]$

$$\int_\gamma ze^z dz = \int_0^1 i(-1+2t)\, e^{(-1+2t)i} \cdot 2i\, dt =$$

$$= \int_0^1 -2(-1+2t)\left(\cos(-1+2t) + i\,\mathrm{sen}(-1+2t)\right) dt =$$

$$= -2\int_0^1 (-1+2t)\cos(-1+2t)\,dt - 2i\int_0^1 (-1+2t)\,\mathrm{sen}(-1+2t)\,dt$$

Usando primitivação por partes:

$$\int_0^1 (-1+2t)\cos(-1+2t)\,dt =$$

$$= (-1+2t)\,\frac{\operatorname{sen}(-1+2t)}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{sen}(-1+2t)\,dt =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(1)}{2} - \left(-\frac{\operatorname{sen}(-1)}{2}\right) - \left(-\frac{\cos(-1+2t)}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\cos(1)}{2} - \frac{\cos(-1)}{2} = 0$$

$$\int_0^1 (-1+2t)\operatorname{sen}(-1+2t)\,dt =$$

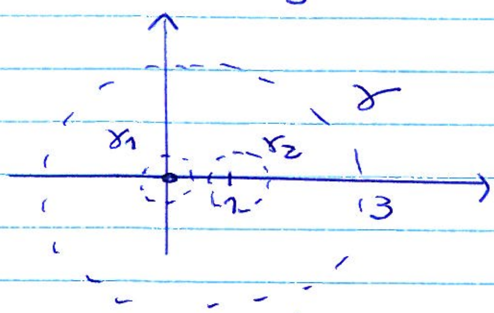
$$= (-1+2t)\,\frac{\cos(-1+2t)}{-2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos(-1+2t)\,dt =$$

$$= -\frac{\cos(1)}{2} - \frac{\cos(-1)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(-1+2t)}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= -\cos(1) + \frac{\operatorname{sen}(1)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(-1)}{2} = -\cos(1) + \operatorname{sen}(1)$$

Logo, $\int_\gamma z e^z\,dz = 2i\,(\cos(1) - \operatorname{sen}(1))$.

5. $\int_\gamma \frac{\operatorname{senh}(z^2+1)}{z^3-z^2}\,dz$, $\gamma = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3 \}$



$z^3 - z^2 = z^2(z-1)$

$f(z) = \frac{\operatorname{senh}(z^2+1)}{z^3-z^2}$

é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

Pelo teorema de Cauchy para um sistema de curvas

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

onde $\gamma_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{3} \}$ e $\gamma_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = \frac{1}{3} \}$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2}\,dz$$ onde $g(z) = \frac{\operatorname{senh}(z^2+1)}{z-1}$

Pela fórmula integral de Cauchy

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i\, g'(0)$$

$$g'(z) = \frac{2z\cosh(z^2+1)(z-1) - \operatorname{senh}(z^2+1)}{(z-1)^2}$$

$$g'(0) = -\operatorname{senh}(1)$$

Também pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i\, h(1)$$

onde $h(z) = \dfrac{\operatorname{senh}(z^2+1)}{z^2}$ $\qquad \left(h(1) = \operatorname{senh}(2) \right)$

Assim, $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{senh}(2) - \operatorname{senh}(1) \right)$