Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Soluções

Exercício 5: *Coeficientes de Clebsch-Gordan*

As regras de adição de dois momentos angulares determinam que para $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$, os valores possíveis de j estão quantizados e compreendidos entre $|l - s| \leq j \leq l + s$. Como $s = 1/2$, existem apenas dois valores possíveis de $j = l - 1/2, l + 1/2$ (a não ser que $l = 0$, mas nesse caso, o exercício está resolvido *a priori*).

É pedido que se expressem os autoestados de $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{\boldsymbol{S}}^2$, $|\; j\, m_j,\, l\, s\,\rangle$ em termos dos autoestados de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ e $\hat{S}_z$, $|\, l\, m_l\, s\, m_s\,\rangle$, em que $m_s = \pm 1/2$, $|m_l| \leq l$.

a) No multipleto $j = l + 1/2$, consideramos o estado com m_j máximo, ou seja, $m_j = l + 1/2$. É fácil ver que existe apenas um estado de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$, $\hat{L}_z$ e $\hat{S}_z$ com $m_j = m_l + m_s = l + 1/2$, ou seja, o estado com $m_l = l$, $m_s = 1/2$. Portanto, tem-se

$$|\, j = l + 1/2\, m_j = l + 1/2\,, l\, s\,\rangle = |\, l\, m_l = l\, s\, m_s = 1/2\,\rangle\,.$$

b) A fórmula que provamos na última folha de problemas é a seguinte

$$|\, l\, m\,\rangle \;=\; \hbar^{m-l}\sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}}\hat{L}_-^{l-m}\,|\, l\, l\,\rangle\,. \tag{32}$$

Esta fórmula é válida para momentos angulares inteiros ou semi-inteiros, dado que $l - m$ e $l + m$ são sempre números inteiros, tal como $2l$. Substituindo $l \to j$, $m \to m_j$, com $j = l + 1/2$ e m_j semi-inteiros e $\hat{L}_- \to \hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{S}_-$, obtemos

$$\begin{aligned} |\, j = l + 1/2\, m_j,\, l\, s\,\rangle \;&=\; \hbar^{m_j - l - 1/2}\sqrt{\frac{(l + 1/2 + m_j)!}{(2l+1)!(l + 1/2 - m_j)!}} \\ &\quad \times \hat{J}_-^{l+1/2-m_j}\;|\, j = l + 1/2\, m_j = l + 1/2,\, l\, s\,\rangle\,, \end{aligned}$$

No entanto, como $\hat{S}_-^2 = 0$, temos $\hat{J}_-^{l+1/2-m_j} = (\hat{L}_- + \hat{S}_-)^{l+1/2-m_j} = (\hat{L}_- + (l + 1/2 - m_j)\hat{S}_-)\hat{L}_-^{l-1/2-m_j}$, ou seja, a expansão binomial reduz-se a dois termos (para aqueles que estão preocupados com a possibilidade de se expandirem funções polinomiais de operadores, manipulando os seus argumentos como se de números se tratassem, recordo que $\hat{L}_-$ e $\hat{S}_-$ comutam entre si). Aplicando este resultado à equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} |\, j = l + 1/2\, m_j\,, l\, s\,\rangle = \hbar^{m_j - l - 1/2}\sqrt{\frac{(l + 1/2 + m_j)!}{(2l+1)!(l + 1/2 - m_j)!}} \times \\ (\hat{L}_- + (l + 1/2 - m_j)\hat{S}_-)\,\hat{L}_-^{l-1/2-m_j}\;|\, l\, m_l = l\, s\, m_s = 1/2\,\rangle\,. \end{aligned} \tag{33}$$

c) Utilizando de novo a relação (32) (com $m = m_j + 1/2$), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{L}_-^{l-1/2-m_j} \mid l\, m_l = l\, s\, m_s = 1/2\, \rangle &= \hbar^{l-1/2-m_j} \sqrt{\frac{(2l)!(l-1/2-m_j)!}{(l+1/2+m_j)!}} \\ &\times \mid l\, m_l = m_j + 1/2\,, s\, m_s = 1/2\, \rangle\,. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação (34), obtemos após alguns cancelamentos entre o numerador e o denominador

$$\begin{aligned} \mid j = l + 1/2, m_j = l + 1/2\, \rangle &= \frac{1}{\hbar\sqrt{(2l+1)(l+1/2-m_j)}} (\hat{L}_- + (l+1/2-m_j)\hat{S}_-) \\ & \mid l\, m_l = m_j + 1/2\, s\, m_s = 1/2\, \rangle\,. \end{aligned}$$

Finalmente só temos que reparar que

$$\begin{aligned} \hat{L}_- \mid l\, m_l = m_j + 1/2\, s\, m_s = 1/2\, \rangle &= \hbar\sqrt{(l+1/2+m_j)(l+1/2-m_j)} \\ &\times \mid l\, m_l = m_j - 1/2\, s\, m_s = 1/2\, \rangle\,, \\ \hat{S}_- \mid l\, m_l = m_j + 1/2\, s\, m_s = 1/2\, \rangle &= \hbar \mid l\, m_l = m_j + 1/2\, s\, m_s = -1/2\, \rangle\,. \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados acima, obtemos

$$\begin{aligned} |j = l + 1/2\ m_j,\, l\, s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \Big\{ & \sqrt{l+1/2+m_j}\ |l\ m_l = m_j - 1/2\ s\ m_s = 1/2\rangle \\ & + \sqrt{l+1/2-m_j}\ |l\ m_l = m_j + 1/2\ s\ m_s = -1/2\rangle \Big\}\,, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

d) Já que, como no exercício acima e dado m_j, existem apenas duas maneiras de escolher m_l e m_s tal que $m_j = m_l + m_s$, ou seja, $m_l = m_j - 1/2$ e $m_s = 1/2$ ou $m_l = m_j + 1/2$ e $m_s = -1/2$, o estado $|j = l - 1/2\ m_j,\, l\, s\rangle$, pertencente ao multipleto $j = l - 1/2$, quando expresso em termos dos autoestados de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$, $\hat{L}_z$ e $\hat{S}_z$, tem que se escrever como

$$\begin{aligned} |j = l - 1/2\ m_j,\, l\, s\rangle &= \alpha\ |l\ m_l = m_j - 1/2\ s\ m_s = 1/2\rangle \\ &+ \beta\ |l\ m_l = m_j + 1/2\ s\ m_s = -1/2\rangle\ . \end{aligned} \tag{34}$$

No entanto, este estado tem que ser ortogonal a $|j = l + 1/2\ m_j,\, l\, s\rangle$, i.e.

$$\langle\, j = l + 1/2\ m_j,\, l\, s \mid j = l - 1/2\ m_j,\, l\, s\, \rangle = 0\,.$$

Desta condição e da condição de normalização do estado, segue que $\alpha = \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}}$, $\beta = -\sqrt{\frac{l+1/2+m_j}{2l+1}}$, i.e.

$$\begin{aligned} |j = l - 1/2\ m_j,\, l\, s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \Big\{ & \sqrt{l+1/2-m_j}\ |l\ m_l = m_j - 1/2\ s\ m_s = 1/2\rangle \\ & - \sqrt{l+1/2+m_j}\ |l\ m_l = m_j + 1/2\ s\ m_s = -1/2\rangle \Big\}\,, \end{aligned}$$

o que conclui o exercício.

Note-se que outra forma possível de resolver este exercício seria executar a diagonalização de $\hat{\boldsymbol{J}}^2 = \hat{\boldsymbol{L}}^2 + \hat{\boldsymbol{S}}^2 + 2\hat{L}_z\hat{S}_z + \hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+ = \hbar^2[l(l+1) + \frac{3}{4}]\mathbb{1} + 2\hat{L}_z\hat{S}_z + \hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+$, no subespaço gerado pelos vectores $|l\ m_l = m_j - 1/2\ s\ m_s = 1/2\rangle$ e $|l\ m_l = m_j + 1/2\ s\ m_s = -1/2\rangle$.

Exercício 6: *Matrizes de Spin de Pauli: Representação bidimensional da álgebra* $\mathfrak{su}(2)$ *(revisão)*

a) É trivial mostrar, por multiplicação direta das matrizes, que

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_x^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\hat{\sigma}_y^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\hat{\sigma}_z^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

o que mostra que $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{\mathbb{1}}$.

b) Para $i = j$, a fórmula produz $2\hat{\sigma}_i^2 = 2\hat{\mathbb{1}}$, para $i = x, y, z$, que é exatamente o que mostramos acima. Tudo o que resta mostrar é que $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = -\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i$ para $i \neq j$. Temos

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_z \\
&= -\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x \\
\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_x \\
&= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y\,, \\
\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_y \\
&= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z\,,
\end{aligned}$$

o que mostra que as matrizes Pauli anticomutam para $i \neq j$.

c) No exercício anterior, verificamos a relação $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$, onde ε_{ijk} é o símbolo de permutação e $i \neq j \neq k$. Definindo $\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_i, \hat{S}_j] &= \frac{\hbar^2}{4}(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j - \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i) = \frac{\hbar^2}{2}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = i\hbar\varepsilon_{ijk}\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k\,,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que as matrizes de Pauli anticomutam. Este resultado mostra que as componentes de $\hat{\boldsymbol{S}}$ obedecem às relações de comutação do momento angular. Como $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\mathbb{1}}$, para $i = x, y, z$, obtemos $\hat{\boldsymbol{S}}^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2) = \frac{3}{4}\hbar^2\hat{\mathbb{1}}$, logo $s = 1/2$.

d) Como $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{n}_x\hat{\sigma}_x + \hat{n}_y\hat{\sigma}_y + \hat{n}_z\hat{\sigma}_z$, segue que

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \hat{n}_z & \hat{n}_x - i\hat{n}_y \\ \hat{n}_x + i\hat{n}_y & -\hat{n}_z \end{pmatrix},$$

e logo que

$$
\begin{aligned}
(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 &= \begin{pmatrix} \hat{n}_z & \hat{n}_x - i\hat{n}_y \\ \hat{n}_x + i\hat{n}_y & -\hat{n}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{n}_z & \hat{n}_x - i\hat{n}_y \\ \hat{n}_x + i\hat{n}_y & -\hat{n}_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2 & 0 \\ 0 & \hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{1}}\,,
\end{aligned}
$$

que mostra a primeira identidade. Deve-se notar que $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ é apenas a componente de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ao longo do eixo $\hat{\boldsymbol{n}}$ e assim que esta identidade é equivalente às identidades provadas em a), o que simplesmente reflete a isotropia do espaço, ou seja, que qualquer sistema de eixos ortogonais é equivalente.

Expandindo a função de um operador, $\exp(i\varphi\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, numa série de potências, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\exp(i\varphi\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^n}{n!}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^{2n+1} \\
&= \hat{\mathbb{1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi^{2n}}{(2n)!} + i\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \hat{\mathbb{1}}\cos\varphi + i\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\sin\varphi\,,
\end{aligned}
$$

onde usamos a representação de Taylor de $\cos\varphi$ e de $\sin\varphi$ e as identidades $(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^{2n} = ((\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^2)^n = \hat{\mathbb{1}}$, $(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^{2n+1} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^{2n} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Isto conclui a resolução do exercício.

e) Tem-se das igualdades demonstradas no exercício anterior (com $\hat{m}_x = \cos\vartheta$, $\hat{m}_y = \sin\vartheta$), que

$$
\begin{aligned}
\exp(i\varphi/2\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}) &= \hat{\mathbb{1}}\cos\frac{\varphi}{2} + i\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\sin\frac{\varphi}{2} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \\
\hat{\boldsymbol{m}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{m}_x - i\hat{m}_y \\ \hat{m}_x + i\hat{m}_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\vartheta} \\ e^{i\vartheta} & 0 \end{pmatrix}, \\
\exp(-i\varphi/2\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}) &= \hat{\mathbb{1}}\cos\frac{\varphi}{2} - i\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\sin\frac{\varphi}{2} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

e essas igualdades implicam que

$$
\begin{aligned}
e^{i\frac{\varphi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}}(\hat{\boldsymbol{m}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})e^{-i\frac{\varphi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}} &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\vartheta} \\ e^{i\vartheta} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\vartheta-\varphi)} \\ e^{i(\vartheta-\varphi)} & 0 \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{m}}'\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,,
\end{aligned}
$$

com $\hat{m}'_x = \cos(\vartheta-\varphi)$; $\hat{m}'_y = \sin(\vartheta-\varphi)$. Esses resultados implicam que, sob tal transformação, o vetor $\hat{\boldsymbol{m}}$ foi rodado por um ângulo $-\varphi$ em torno do eixo z.

Exercício 7: *Valores expectáveis no estado de singleto*

a) Temos

$$\begin{aligned}\langle \Psi \mid \hat{S}_i \mid \Psi \rangle &= \frac{\hbar}{2}\left(\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i \mid \Psi \rangle + \langle \Psi \mid \hat{\sigma}^2_i \mid \Psi \rangle\right) \\ &= \frac{\hbar}{2}\left(\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i \mid \Psi \rangle + \langle \Psi \mid \hat{P}_{12}\,\hat{\sigma}^1_i\,\hat{P}_{12} \mid \Psi \rangle\right) \\ &= \hbar\,\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i \mid \Psi \rangle = 0\,,\end{aligned}$$

e o resultado segue (a demonstração para $\hat{\sigma}^2_i$ é idêntica).

b) Temos

$$\begin{aligned}\langle \Psi \mid \hat{S}_i\,\hat{S}_j \mid \Psi \rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\langle \Psi \mid (\hat{\sigma^1}_i + \hat{\sigma}^2_i)\,(\hat{\sigma}^1_j + \hat{\sigma}^2_j) \mid \Psi \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\left(\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^1_j \mid \Psi \rangle + \langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^2_j \mid \Psi \rangle\right. \\ &\quad \left. + \langle \Psi \mid \hat{\sigma}^2_i\,\hat{\sigma}^1_j \mid \Psi \rangle + \langle \Psi \mid \hat{\sigma}^2_i\,\hat{\sigma}^2_j \mid \Psi \rangle\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\left(\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^1_j \mid \Psi \rangle + \langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^2_j \mid \Psi \rangle\right. \\ &\quad \left. + \langle \Psi \mid \hat{P}_{12}\,\hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^2_j\,\hat{P}_{12} \mid \Psi \rangle + \langle \Psi \mid \hat{P}_{12}\,\hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^1_j\,\hat{P}_{12} \mid \Psi \rangle\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2}\left(\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\sigma^1_j \mid \Psi \rangle + \langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^2_j \mid \Psi \rangle\right) = 0\,.\end{aligned}$$

Utilizamos agora a regra de composição das matrizes de Pauli, $\hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^1_j = \delta_{ij}\hat{\mathbb{1}} + i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}^1_k$. Obtemos $\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^1_j \mid \Psi \rangle = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_k \mid \Psi \rangle = \delta_{ij}$. Substituindo esta identidade acima, obtemos $\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^2_j \mid \Psi \rangle = -\delta_{ij}$, que é o resultado desejado.

c) É uma simples consequência da alínea anterior. Temos

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\,(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^1\cdot\hat{\mathbf{n}}^1)\,(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2\cdot\hat{\mathbf{n}}^2)\,|\Psi\rangle &= \sum_{ij}\hat{n}^1_i\hat{n}^2_j\,\langle \Psi \mid \hat{\sigma}^1_i\,\hat{\sigma}^2_j \mid \Psi \rangle \\ &= -\sum_{ij}\hat{n}^1_i\hat{n}^2_j\,\delta_{ij} \\ &= -\sum_{i}\hat{n}^1_i\hat{n}^2_i = -\,\hat{\mathbf{n}}^1\cdot\hat{\mathbf{n}}^2\,, \end{aligned}\tag{35}$$

da definição de produto escalar no espaço cartesiano. Pode mostrar-se que para certas orientações relativas dos dois vetores $\hat{\mathbf{n}}^1$ e $\hat{\mathbf{n}}^2$, este resultado não pode ser reproduzido por nenhuma teoria local e realista que pretenda destronar a mecânica quântica[1].

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt

[1]Para ser mais preciso, é necessário tomar uma combinação linear particular destes valores expectáveis, medidos ao longo dos eixos ($\hat{\boldsymbol{n}}^1$,$\hat{\boldsymbol{n}}^2$), ($\hat{\boldsymbol{n}}'^1$, $\hat{\boldsymbol{n}}^2$), ($\hat{\boldsymbol{n}}^1$, $\hat{\boldsymbol{n}}'^2$) e ($\hat{\boldsymbol{n}}'^1$,$\hat{\boldsymbol{n}}'^2$), ou seja, escolhemos duas orientações possíveis para cada membro do par e adicionamos o resultado com coeficientes particulares. Em mecânica quântica (e no mundo real, já que a prova experimental mostra que a MQ produz previsões corretas àcerca do comportamento deste último) e para uma escolha judiciosa destas quatro orientações, o resultado viola a designada desigualdade CHSH, uma das desigualdades ditas de Bell. O C desta desigualdade refere-se a John Clauser, Prémio Nobel da Física de 2022.