

## T1 - Estudo do movimento de um projétil.

### 1. Objetivos

- Estudar experimentalmente o movimento de um projétil lançado obliquamente.
- Modelar a trajetória do projétil.

### 2. Sugestões de procedimento

- A montagem experimental a utilizar (esquematisada a seguir) consiste basicamente num canhão lançador de projéteis e um fototransistor para medição de tempos. O projétil é uma esfera plástica que pode ser lançada de um ângulo escolhido, sendo possível medir a velocidade de lançamento recorrendo ao tempo de passagem à saída do canhão.

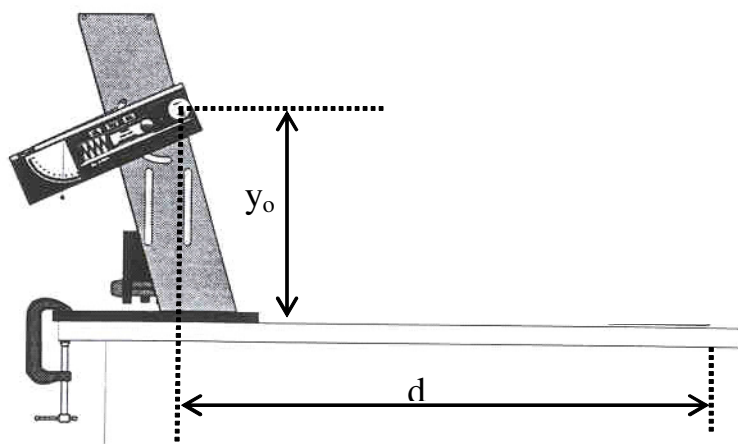


Fig 1. Esquema da montagem experimental a utilizar

Nota: verificar que inicialmente o canhão está na **posição de curto alcance** ("short range").

- De modo a poder determinar a velocidade de lançamento deverá, escolhido um determinado ângulo de lançamento, efetuar um número suficiente de medidas independentes da distância ( $d$ ) atingida pelo projétil.
- Escolha um ângulo de lançamento (por exemplo,  $30^\circ$ ) e determine experimentalmente a trajetória do projétil. Um ponto da trajetória pode ser obtido registando a posição da marca do projétil deixada num alvo vertical; a marca é deixada pela colisão do projétil numa folha branca sobre a qual é colocada uma folha de papel químico coladas sobre uma placa rígida vertical. Os vários pontos da trajetória obtêm-se repetindo a experiência para várias distâncias do alvo ao ponto de lançamento do projétil. Sugere-se a realização de vários ensaios para cada ponto da trajetória.

- Repita o procedimento acima para diferentes ângulos de lançamento.

### **3. Resultados**

- Execute todos os cálculos pedidos e/ou necessários à concretização dos objetivos e tarefas propostos.
- Modele a trajetória do projétil com uma equação adequada. Despreze, em primeira aproximação, o efeito da resistência do ar. Se necessário, considere este efeito numa segunda aproximação (veja, por exemplo, §6 do cap. X do livro “*A first course in fluid dynamics*” indicado na bibliografia).
- Comente criticamente todos os resultados que obtiver.

### **Bibliografia**

- D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, *Fundamentals of Physics*, Wiley, 7th edition (2005).
- A. R. Paterson, *A first course in fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1983).

---

## **T2 – Estudo de choques num sistema de atrito reduzido**

---

### **1. Objetivos teóricos**

- Estudo de choques a uma dimensão: conservação da quantidade de movimento.
- Classificação dos choques em função do seu caráter elástico.

### **2. Objetivos técnicos**

- Utilização de uma calha de ar: nivelamento da calha e do cavaleiro.
- Determinação do centro de massa de um corpo.
- Medição de velocidades com fotocélulas.

### **3. Introdução à experiência**

A utilização de uma calha de ar apresenta duas vantagens importantes no estudo de choques : (i) serve para alinhar o movimento dos corpos de forma a que os choques se deem nas condições pretendidas de forma reprodutível e (ii) compensando o peso sem introduzir atrito apreciável garante que o movimento dos corpos se faz com velocidade constante antes e após o choque numa extensão suficiente para que as medidas da velocidade dos corpos sejam fáceis e precisas.

Há três aspetos técnicos importantes nesta experiência : nivelar a calha e o cavaleiro de forma a compensar o peso deste ; determinar a posição do centro de massa dos cavaletes para poder regular a posição dos batentes de forma a evitar que o choque provoque movimento de rotação dos cavaleiros ; melhorar a precisão da medição das velocidades.

O nivelamento da calha faz-se por meio de dois parafusos. É importante que a distribuição de massas do cavaleiro seja simétrica para que este se mantenha horizontal. Com efeito a força de pressão do ar sob o cavaleiro que vai compensar o peso deste é perpendicular à sua superfície inferior. Se o cavaleiro estiver inclinado, devido a uma má distribuição das massas, esta força deixa de ser vertical e a sua soma com o peso não é nula mas tem uma resultante horizontal que acelera o cavaleiro (faça a experiência : o sentido desta aceleração é o que esperava ?).

Os centros de massa de cada cavaleiro no momento do choque definem uma reta que deve incluir o ponto de contacto (central) do choque para que os cavaleiros não ganhem movimento de rotação. Nota : as possibilidades de regulação da posição dos batentes nos cavaleiros são grosseiras.

A velocidade do cavaleiro é determinada indiretamente medindo uma distância (comprimento da bandeira) e o tempo que o cavaleiro demora a percorrer essa distância. O sinal de sincronismo que inicia e para o cronómetro é gerado em função da bandeira do cavaleiro interromper ou não um feixe de luz (Figura 1).

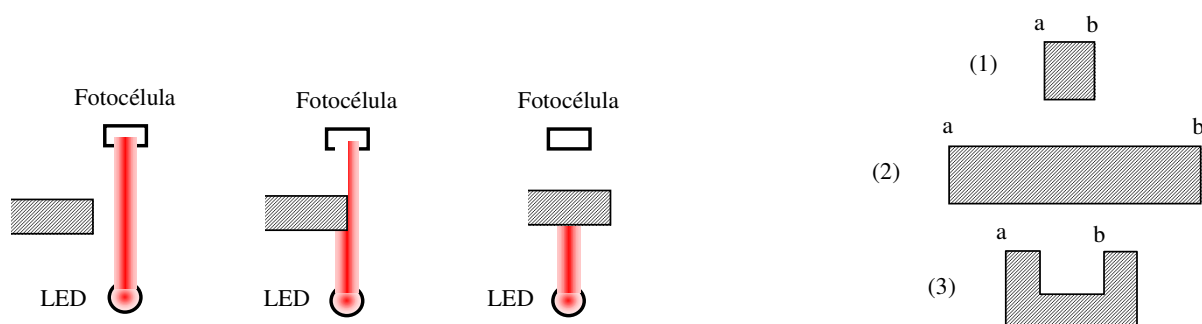


Figura 1

Devido à largura do feixe de luz não ser desprezável o sinal elétrico gerado pela fotocélula não é uma onda quadrada (ver Figura 2), mas apresenta uma rampa inicial e final. Os circuitos eletrônicos deverão decidir, analisando este sinal, a partir de que instante a bandeira já interrompeu / deixou de interromper o feixe de luz. O sincronismo da cronometragem nem sempre se efetua a meio da rampa, podendo ter lugar numa zona da rampa mais para baixo ou para cima do centro, introduzindo-se assim um erro na distância percorrida.

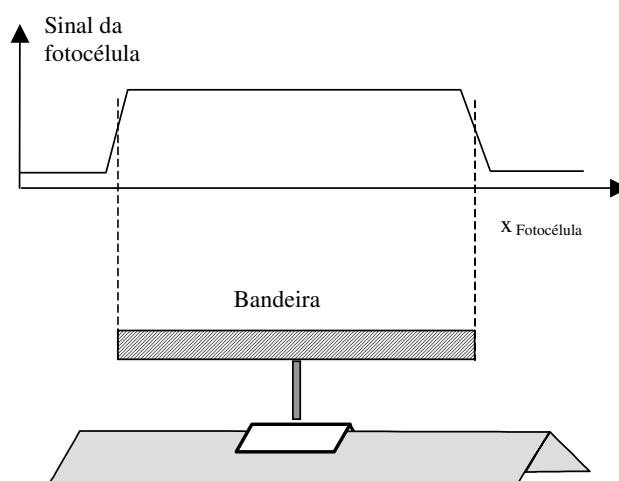


Figura 2

Para reduzir o erro de sincronismo (ver figura 1), pode usar-se uma bandeira mais comprida, (2) em lugar de (1), diminuindo o erro relativo (mas não o erro absoluto) ou então usar-se a bandeira dupla, (3) em lugar da (1), neste caso a cronometragem faz-se em duas rampas a subir (ou a descer), cancelando o erro de sincronizar demasiado em baixo ou em cima.

#### 4. Conhecimentos teóricos

Um choque é uma interação de pequena duração entre dois ou mais corpos e durante a qual atuam forças (muito) intensas.

Supondo as forças externas desprezáveis, face a estas, verifica-se a conservação da quantidade de movimento total dos corpos que chocam:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{constante} \quad (1)$$

Parte da energia cinética inicial pode ser convertida em deformação, calor, etc., sendo a restante redistribuída pelos corpos por forma a não violar (1):

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + E_{\text{deformação}} \quad (2)$$

Para dois corpos  $A$  e  $B$  que se movem antes e após o choque segundo o eixo dos  $xx$  estas equações tomam a forma :

$$\begin{cases} m_A v_{xA} + m_B v_{xB} = m_A v'_{xA} + m_B v'_{xB} \\ \frac{1}{2} m_A v_{xA}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{xB}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{xA}'^2 + \frac{1}{2} m_B v_{xB}'^2 + E_{\text{deformação}} \end{cases} \quad (3)$$

Os choques podem classificar-se em função do valor da energia de deformação. Analisando um choque de dois corpos no referencial do centro de massa, os corpos aproximam-se um do outro antes do choque e, após este, ou ficam parados ou se afastam com uma velocidade relativa menor ou igual à inicial. Assim o parâmetro  $e$ , chamado coeficiente de restituição e definido como segue,

$$e = \frac{v'_{xB} - v'_{xA}}{v_{xA} - v_{xB}} \quad (4)$$

está compreendido entre 0 e 1 (verifique que o seu valor não se altera se chamarmos  $A$  ao corpo  $B$  e vice-versa). A classificação dos choques é a seguinte :

<b>Choque perfeitamente elástico ( <math>e = 1</math> )</b>	<b>Choque parcialmente elástico/inelástico ( <math>0 &lt; e &lt; 1</math> )</b>	<b>Choque perfeitamente inelástico ( <math>e = 0</math> )</b>
$E_{\text{Cinicial}} = E_{\text{Cfinal}}$	$E_{\text{Cinicial}} \neq E_{\text{Cfinal}}$	$E_{\text{Cinicial}} \neq E_{\text{Cfinal}}$
$v_{\text{relativa inicial}} = v_{\text{relativa final}}$	$v_{\text{relativa inicial}} \neq v_{\text{relativa final}} \neq 0$	$v_{\text{relativa final}} = 0$

## 5. Procedimento experimental

Existem adaptadores com elásticos que se fixam nos cavaleiros e permitem realizar choques quase elásticos. Existem igualmente adaptadores que prendem e não se soltam permitindo simular choques perfeitamente inelásticos. É igualmente possível realizar choques parcialmente elásticos/inelásticos.

A dificuldade principal reside na escolha da posição das fotocélulas por forma a poder medir quer as velocidades dos corpos antes do choque quer as velocidades destes após o choque. Em todas as situações (sem exceção : porquê ?) o choque deve ter lugar com os dois cavaleiros na zona entre

as fotocélulas e durante toda a duração do choque nenhuma bandeira pode estar a interceptar os feixes de luz. Atenção também ao retorno dos cavaleiros após o choque com o limitador do fim da calha.

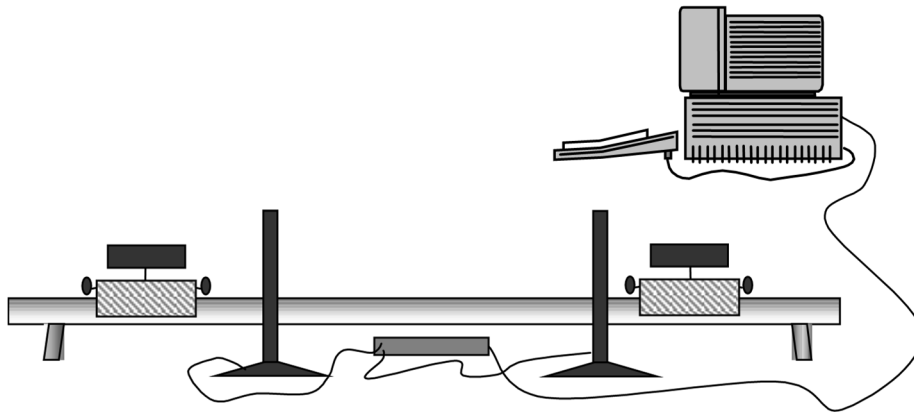


Figura 3

Escolha um conjunto de choques que permita fazer o seu estudo em função de:

- 1- massa dos cavaleiros (mesma massa ou massas diferentes)
- 2- velocidades iniciais (um parado, os dois a moverem-se em sentidos opostos, os dois a moverem-se no mesmo sentido)
- 3- Caráter elástico do choque (choques quase elásticos, choques perfeitamente inelásticos, choques parcialmente elásticos/inelásticos)

## **6. Tratamento dos dados e resultados da experiência**

Analise os resultados que obteve nos choques estudados, comparando a quantidade de movimento e a energia cinética antes e depois do choque.

## T3 – Conservação de energia e momento. Pêndulo balístico.

### 1. Objetivos

Estudo de choques a uma dimensão

Verificação da conservação da quantidade de movimento.

Medição de velocidades com fotocélulas.

Estudo do choque de um projétil com um corpo rígido.

### 1. Introdução

O estudo e compreensão das colisões entre objetos, está associado a alguns princípios físicos elementares de conservação que serão analisados nesta parte do trabalho.

O pêndulo balístico é um dos métodos clássicos mais usados em experiências de laboratório que tenham por objetivo a determinação da velocidade de um projétil. Neste sistema, uma esfera é disparada contra um pêndulo, analisando-se em seguida as relações de energia e momento antes e após o choque.

Existem dois métodos de calcular a velocidade da esfera. No primeiro, a que chamaremos método aproximado, vamos assumir que o pêndulo e a esfera se comportam como se fossem apenas uma massa pontual localizada no centro de massa do sistema. No segundo, a que chamaremos método exato, vamos considerar a inércia rotacional do pêndulo.

#### I. Método aproximado

A variação da energia potencial do pêndulo em consequência do impacto do projétil é dada por:

$$\Delta E_p = Mg \Delta h_{CM} \quad (1)$$

Em que  $M$  corresponde à massa do sistema pêndulo+esfera,  $g$  à aceleração da gravidade e  $\Delta h_{CM}$  à variação de altura do centro de massa do pêndulo. De acordo com a figura 1:

$$\Delta h_{CM} = R_{CM}(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

e assim,

$$\Delta E_p = MgR_{CM}(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

Em que  $R_{CM}$  representa a distância entre o eixo de rotação do pêndulo e o centro de massa do sistema pêndulo+esfera. Esta energia potencial

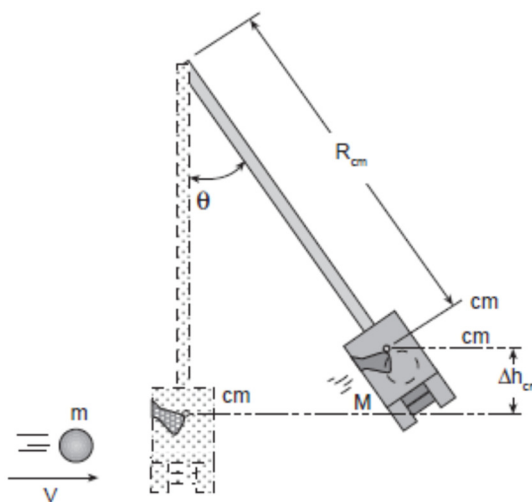


Figura 1

é igual à energia cinética do pêndulo imediatamente após a colisão. Imediatamente após a colisão o momento linear do pêndulo é dado por

$$p_p = \sqrt{2ME_c} \quad (4)$$

Sendo  $p_{esf} = mv_{esf}$ , em que  $m$  representa a massa da esfera, e atendendo às relações de conservação referidas, a velocidade da esfera pode ser calculada por:

$$v_{esf} = \frac{M}{m} \sqrt{2gR_{CM}(1 - \cos \theta)} \quad (5)$$

## II. Método exato

Tal como no caso anterior a energia potencial é dada pela equação (3). Neste caso a energia cinética do pêndulo terá de ser calculada através de:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (6)$$

Em que  $I$  representa o momento de inércia e  $\omega$  a velocidade angular imediatamente após a colisão. Sendo  $L_p = I\omega$  o momento angular, a energia cinética é então dada por:

$$E_c = \frac{L_p^2}{2I} \quad (7)$$

Combinando as duas equações anteriores teremos:

$$L_p = \sqrt{2IE_c} \quad (8)$$

De acordo com as leis de conservação, este momento angular é igual ao momento angular da esfera imediatamente antes da colisão

$$L_{esf} = mR_{esf}^2 \omega = mR_{esf} v \quad (9)$$

Em que  $R_b$  representa a distância entre o eixo de rotação do pêndulo e o centro da esfera. Como  $L_p = L_{esf}$ , então:

$$v_{esf} = \frac{1}{mR_b} \sqrt{2IMgR_{CM}(1 - \cos \theta)} \quad (10)$$



É agora necessário determinar  $I$ , o momento de inércia do sistema pêndulo+esfera. Como sabemos:

$$\sum \tau = I\alpha \quad (11)$$

Em que  $\tau$  representa o momento e  $\alpha$  a aceleração angular.

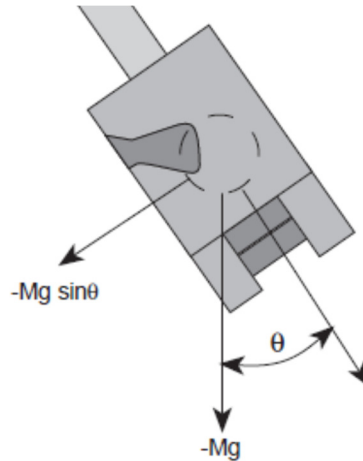


Figura 2

De acordo com a figura 2 temos:

$$F = -Mg \sin \theta \quad (12)$$

O momento no pêndulo é então dado por:

$$I\alpha = -R_{CM}Mg \sin \theta \quad (13)$$

Como sabemos, para ângulos pequenos  $\sin \theta \approx \theta$ . Nessa condição,

$$\alpha \approx -\frac{MgR_{CM}}{I} \theta \quad (14)$$

A equação acima tem a mesma forma da equação para o movimento harmônico simples linear.

$$\alpha = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x$$

Podemos então concluir que o pêndulo apresenta movimento harmônico simples, com uma frequência angular dada por:

$$\omega^2 = \frac{MgR_{CM}}{I} \quad (15)$$

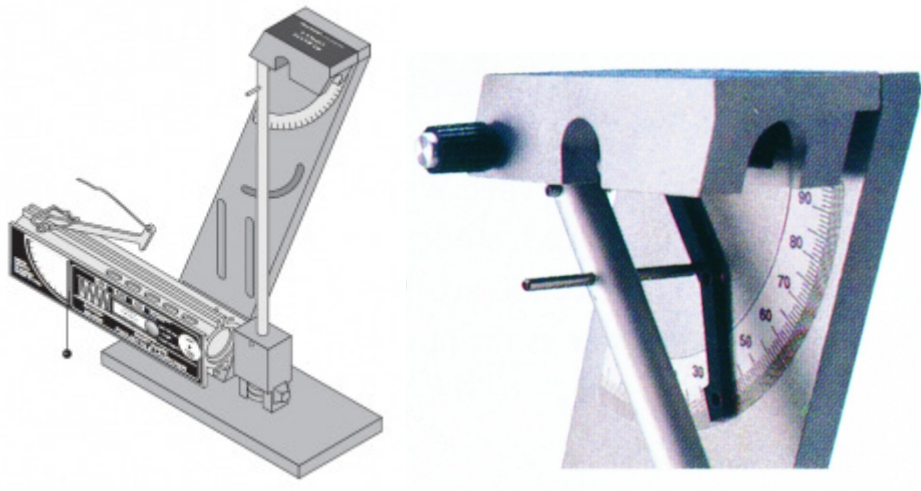
daqui resulta

$$I = \frac{MgR_{CM}}{\omega^2} = \frac{MgR_{CM}T^2}{4\pi^2} \quad (16)$$

em que T representa o período do pêndulo.

## 2. Procedimento

Dispõe, para a realização desta parte do trabalho, de um lançador de projéteis e de um pêndulo, como mostra a figura abaixo.



O suporte de suspensão do pêndulo tem acoplado um sistema que permite uma leitura fácil do ângulo de rotação.

Dispõe também de uma bola de aço, e de um conjunto de pequenas massas que podem ser acopladas ao pêndulo, variando a sua massa total. Meça a massa da esfera.

Usando uma corda dobrada, ou outro método que entenda adequado, **estime** o centro de massa do pêndulo (fig).



Para a medida “direta” da velocidade de lançamento da bola coloque o fotosensor na saída do lançador e retire o braço do pêndulo. Em seguida:

- Meça o diâmetro da esfera.
- Faça o lançamento da esfera e registre o tempo de passagem no fotosensor
- Repita várias vezes o lançamento e registre os tempo correspondentes

De modo a poder testar os dois modelos propostos, deve realizar as medidas necessárias à determinação da velocidade da esfera (equações 5 e 10).

Para o método aproximado faça vários lançamentos registando os ângulos correspondentes. Faça medidas para diferentes ângulos (variando a massa do pêndulo).

Para o método exato:

- Coloque a bola no recetáculo do pêndulo e registe a distancia entre o eixo de rotação do pêndulo e o centro da esfera
- Sem estar montado o lançador, coloque o pêndulo+bola no seu suporte
- Afaste o pêndulo cinco graus e registe o tempo de 10 oscilações. Determine o período de oscilação.
- Coloque o lançador e o pêndulo nas suas posições.
- Faça vários lançamentos registando os ângulos correspondentes.

Tenha especial atenção ao número de ensaios necessário para uma determinação correta de  $\theta$  e de  $T$ .

### **3. Resultados**

Execute todos os cálculos pedidos e/ou necessários à concretização dos objetivos e tarefas propostos.

Explique a opção por oscilações de pequena amplitude (ver equações 13 e 14), uma vez que  $I$  não depende de  $\theta$ .

Compare os resultados obtidos, para a velocidade do projétil, pelos dois modelos propostos. Compare com a medida “direta” da velocidade de lançamento.

Comente criticamente todos os resultados obtidos.

## T4 – Ondas estacionárias

### 1. Objetivos

Observar experimentalmente diversas situações em que são geradas ondas estacionárias.

Aprofundar a compreensão dos conceitos de sobreposição de ondas e de ressonância.

Estudar e compreender as várias dependências entre os parâmetros envolvidos.

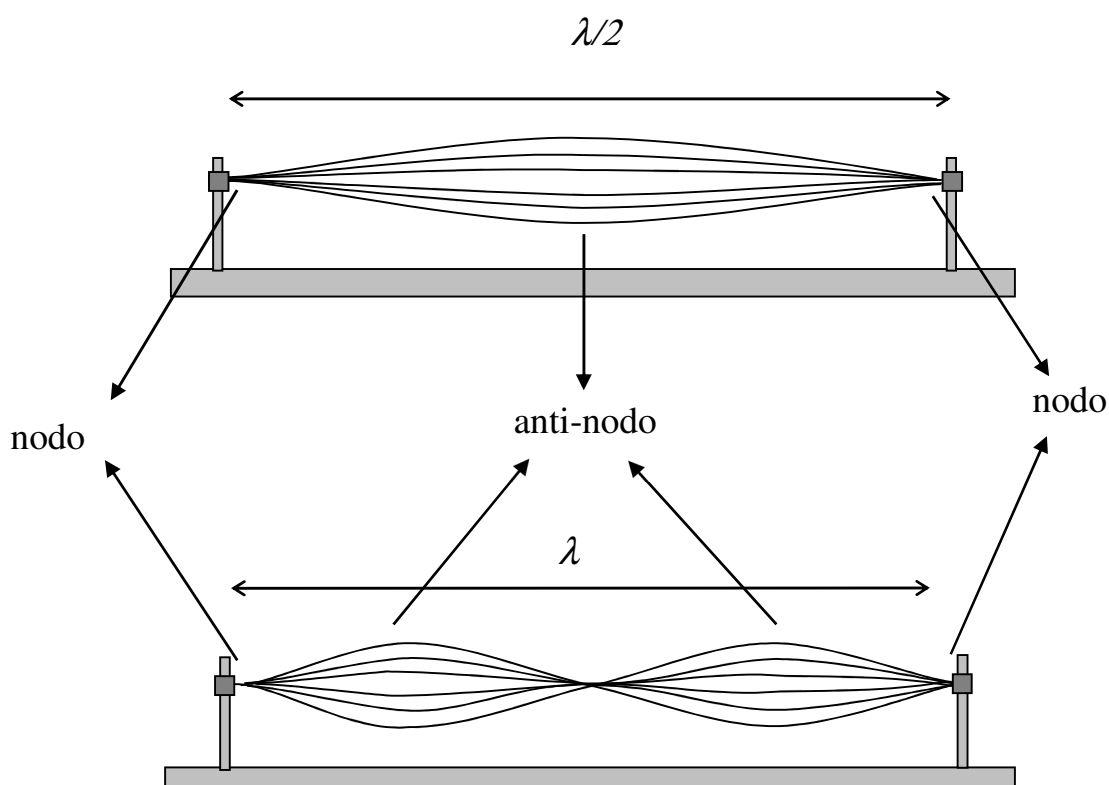
### PARTE A – Corda vibrante

#### A2. Fundamentos

Quando um fio, com as extremidades fixas, é colocado em vibração, as reflexões originadas em ambas as extremidades originam ondas que se propagam na mesma direção mas em sentidos opostos. Estas ondas combinam-se de acordo com o princípio da sobreposição. Para um dado comprimento do fio existem certas frequências para as quais a sobreposição das ondas dá origem a uma onda denominada **onda estacionária**.

Neste tipo de ondas existem pontos em que a amplitude de vibração é nula. Estes pontos são denominados **nodos**. Entre cada par de nodos, existem pontos de máxima amplitude de vibração denominados **antinodos**.

O número de nodos que se formam entre as duas extremidades depende do comprimento de onda (fig.).



A velocidade de propagação das ondas transversais no fio, sujeito a uma certa tensão, pode ser calculada através da equação:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7.1)$$

em que  $T$  corresponde à tensão no fio e  $\mu$  à massa do fio por unidade de comprimento. Se  $f$  for a frequência da onda e  $\lambda$  o seu comprimento de onda, então:

$$v = f\lambda \quad (7.2)$$

Usando a equação 7.1 obtém-se:

$$f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7.3)$$

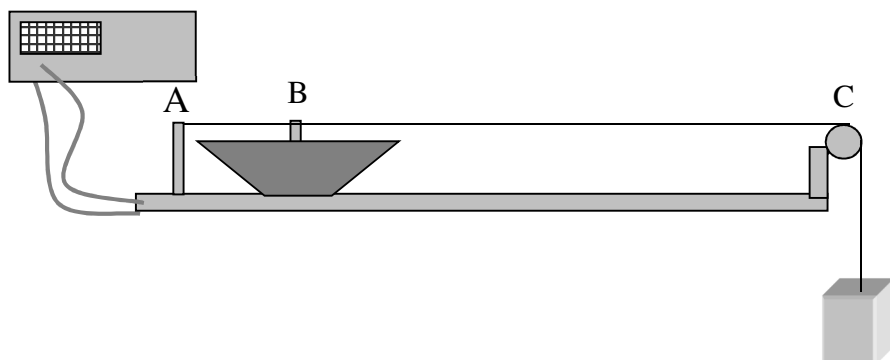
$$f = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7.4)$$

em que  $l$  representa o comprimento do fio, que se encontra relacionado com  $\lambda$  através da expressão

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (7.5)$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$

Para estudar experimentalmente a dependência da frequência de ressonância da onda estacionária com a tensão aplicada na corda usa-se, neste trabalho, a montagem esquematizada na figura seguinte:



Um fio é esticado entre os pontos A e C; ao ponto B é ligado um altifalante que permite transmitir à corda uma vibração com uma frequência previamente escolhida; a tensão no fio é controlada suspendendo um corpo na corda.

### A3. Sugestões de procedimento

Coloque diferentes massas na extremidade livre do fio de modo a variar de forma controlada a tensão (nota :  $T = mg$ ).

Para cada valor de tensão, obtenha um sistema de ondas estacionárias com frequência diferente: para tal ajuste o gerador de sinal (o que na prática permitirá visualizar um diferente número de antinodos para cada valor de frequência da onda estacionária). Registre a frequência e o número de antinodos da onda estacionária gerada desta forma (para cada valor de tensão do fio, registre o número de antinodos obtidos para pelo menos cinco valores diferentes de frequência).

Verifique se os dados experimentais se encontram em concordância com a equação (7.4), recorrendo, para o efeito, a um gráfico de  $f = g(n)$ .

Através dos gráficos obtidos, determine o valor da tensão no fio e compare com o valor medido.

Para cada caso, calcule os valores da frequência e compare com os valores lidos no gerador.

## PARTE B – Tubo de Kundt

### B2. Fundamentos

Nesta experiência ondas longitudinais produzidas numa haste ou barra fina são transmitidas a uma coluna de gás contida num tubo (*Tubo de Kundt*). O objetivo da experiência é determinar a velocidade de propagação da onda na barra e/ou no gás, usando as propriedades do movimento ondulatório.

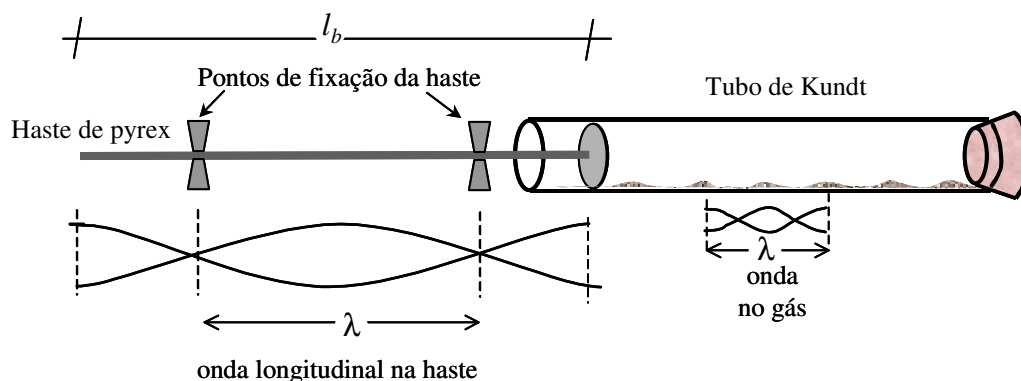


Figura B1 – Montagem experimental utilizada para a determinação da velocidade de propagação do som, utilizando um tubo de Kundt.

O tubo transparente, fechado numa das extremidades, contém um pó fino distribuído uniformemente ao longo do seu comprimento. Quando uma onda sonora é gerada dentro do tubo, o ar vibra e o pó movimenta-se.

Se o comprimento do tubo (distância entre a placa na extremidade da barra e a extremidade fechada do tubo) for igual a um número inteiro de  $\lambda_{ar}/2$ , uma onda estacionária é criada no tubo e o pó

acumula-se em determinados pontos – *os nodos* – onde a pressão é mais baixa. Medindo a distância entre nodos pode-se determinar o comprimento de onda no gás ( $\lambda_{ar}$ ).

Se a velocidade de propagação do som no gás ( $v_{ar}$ ) / na barra ( $v_b$ ) for conhecida a frequência da onda ( $f$ ) pode ser calculada:

$$v_{ar} = \lambda_{ar} f \quad (7.6)$$

E como a frequência da onda na barra é igual à frequência da onda no gás, fica:

$$f = \frac{v_{ar}}{\lambda_{ar}} = \frac{v_b}{\lambda_b} \quad (7.7)$$

Repare que a barra é móvel, permitindo ajustar o comprimento útil do tubo (ver figura) de forma a obter uma onda estacionária.

Nesta experiência a onda é gerada pela vibração da barra de um material para o qual a velocidade de propagação do som é eventualmente (dê)s conhecida. Esta barra tem acoplado um disco, que funciona como fonte geradora da onda que se propaga no tubo.

Esfregando a barra com um papel molhado em álcool, criam-se oscilações longitudinais. Se os pontos de fixação forem bem escolhidos é possível gerar ondas estacionárias na barra cujo comprimento de onda (e por isso também a frequência) depende da posição dos pontos fixos. Nesta experiência a barra deve ser fixada a  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{3}{4}$  do seu comprimento  $l_b$ . Estes pontos são obrigatoriamente nodos da oscilação, enquanto o centro e os extremos da barra são pontos de amplitude máxima – antinodos, ou seja, o comprimento da barra  $l_b$  corresponde ao comprimento de onda  $\lambda_b$  (ver figura).

Como vimos a partir da equação (7.7), o cálculo da velocidade do som no gás/sólido é imediato, uma vez conhecida a velocidade de propagação num deles:

$$v_{ar} = \frac{\lambda_{ar}}{\lambda_b} v_b \quad (7.8)$$

De lembrar ainda que a velocidade do som num gás ideal depende da temperatura ( $T$ ), da massa molecular ( $M$ ) e do expoente adiabático ( $\gamma$ ), de acordo com:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \quad (7.9)$$

Então, a velocidade do som no ar pode aproximar-se por:

$$v_{ar} = (331.45 + 0.6T[^\circ C]) \text{ m/s} \quad (7.10)$$

### *B3. Sugestão de procedimento experimental*

#### *B3.1 Cuidados a ter na execução da experiência*

Em toda a execução deste trabalho é fundamental que todos os movimentos sejam feitos com  muito cuidado. O tubo e a barra são frágeis, e como estão fixos em determinadas zonas , qualquer movimento mais brusco pode facilmente quebrar uma das peças da experiência.

Verifique que o disco não toca nas paredes do tubo – se tal acontecer, quando provoca a vibração da barra pode quebrar o tubo.

Durante a experiência, quando friccionar a barra não a desloque dos apoios.

#### *B3.2 Execução da experiência*

Distribua uniformemente o pó ao longo de todo o comprimento do tubo. Coloque o tubo no suporte e rode-o ligeiramente ( $\sim 45^\circ$ ) para permitir visualizar a onda estacionária no seu interior.

Friccione a barra, provocando uma onda sonora no tubo. Verifique se a onda é estacionária. Se for necessário, desloque a barra fina, variando o comprimento útil do tubo, até observar que obtém uma onda estacionária no seu interior. Deve conseguir obter uma figura no pó semelhante à esquematizada na figura B1.

Meça a separação entre diversos máximos e/ou mínimos, no interior do tubo.

Meça o comprimento da barra fina. Meça a temperatura da sala.

Repita a experiência até ter confiança nos valores medidos.

Repita a experiência com a outra barra.

### *B4. Algumas questões e resultados da experiência*

Determine a velocidade do som no ar. Confira posteriormente os valores utilizados para a velocidade do som nos outros meios utilizados. Compare com os valores da literatura.

Se variar a força com que fricciona a barra, qual a característica da onda que varia?

Como se poderia variar a frequência do som produzido no tubo?

Justifique a existência de ondas estacionárias no tubo.

Justifique a equação (7.10).

Compare os dois métodos presentes neste trabalho, evidenciando os principais méritos e as principais dificuldades experimentais associadas a cada um deles.



ANEXO A

Velocidade de propagação do som em vários meios

GASES

MATERIAL	V(M/S)
Hidrogénio (0°C)	1286
Hélio (0°C)	972
Ar (20°C)	343
Ar (0°C)	331
CO <sub>2</sub> (0°C)	259

LÍQUIDOS A 25°C

MATERIAL	V(M/S)
Glicerol	1904
Água salgada	1533
Água	1493
Mercúrio	1450

SÓLIDOS

MATERIAL	V(M/S)
Diamante	12000
Vidro (Pyrex)	5640
Vidro (Flint)	4000
Ferro	5130
Cobre	3560
Latão	4700
Alumínio	5100

## T5 – Estudo do efeito do atrito no movimento oscilatório

### Objetivos

- Calcular a constante elástica de uma mola
- Estudar o movimento harmônico amortecido
- Observar o efeito no movimento causado por diferentes forças de atrito.

### Fundamento teórico. *Movimento harmônico simples*

O movimento de um corpo, de massa  $m$ , sujeito a uma força elástica do tipo  $\vec{F} = -k\vec{x}$  pode descrever-se recorrendo à segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \quad \text{mas } \sum \vec{F} = \vec{F}_{\text{elástica}} = -k\vec{x} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, \quad \text{então:}$$

$$-k\vec{x} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{k}{m}\vec{x} = 0, \quad \text{com a solução:} \quad x(t) = A \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0), \quad \text{Equação 1}$$

em que  $A$  e  $\varphi_0$  são constantes de integração que se podem determinar a partir das condições iniciais e  $\omega_0$  ( $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$  é frequência angular do movimento;  $f_0$  ( $T_0$ ) é frequência (período) natural do movimento, sem amortecimento) depende das características do oscilador, neste caso da constante elástica da mola e da massa do corpo.

A velocidade pode ser calculada derivando a expressão anterior:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

Na ausência de forças dissipativas a energia associada ao oscilador mantém-se constante ao longo do tempo. A energia do oscilador é em cada instante igual à soma da sua energia cinética e potencial nesse instante:

$$E_{\text{oscilador}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} \quad \Leftrightarrow \quad E_{\text{oscilador}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{Equação 2}$$

ou, substituindo  $k = m\omega^2$ , na expressão anterior:

$$E_{\text{oscilador}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Quando a elongação é máxima ( $x = A$ ), a energia cinética é nula. Sendo assim a energia total do oscilador nos pontos em que a sua elongação é máxima, pode ser escrita em função da amplitude ( $A$ ) do movimento:

$$E_{\text{oscilador}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{Equação 3}$$

A energia do oscilador pode também ser escrita em função da velocidade máxima: a velocidade máxima é atingida na posição de equilíbrio ( $x = 0$ ); quando a elongação é nula, é nula a energia

potencial. Sendo assim a energia total do oscilador, nesta posição, pode ser escrita apenas em função da velocidade do corpo quando este passa pela posição de equilíbrio (velocidade máxima):

$$E_{\text{oscilador}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 \quad \text{Equação 4}$$

### ***Movimento harmônico, na presença de uma força de atrito***

Quando se observa um movimento oscilatório é fácil constatar que a amplitude  $A$  do movimento diminui ao longo do tempo contrariando a *equação 1*. Isso acontece porque, na grande maioria das situações, as forças de atrito que estão presentes têm um efeito que não é desprezável e são responsáveis pela diminuição da energia do oscilador e consequentemente pela diminuição da sua amplitude (*equação 3*).

Para estudar um movimento oscilatório numa situação real é então necessário conhecer as forças de atrito existentes, o que nem sempre é muito fácil de fazer diretamente. O método proposto neste trabalho para estudar o atrito é observar o efeito que provoca na energia do oscilador.

Pode-se fazer uma estimativa aproximada da variação da energia média por período, medindo a variação da amplitude do movimento ou da velocidade máxima em períodos sucessivos. Representando a energia do oscilador em função do tempo, pode-se conhecer a energia dissipada por atrito em cada período daí retirar alguma informação sobre a força de atrito que atua no sistema.

Na ausência de outras forças não conservativas, a variação da energia mecânica do sistema entre o instante  $A$  e  $B$  é igual ao trabalho da força de atrito:

$$W_{AB}^{\text{atrito}} = E_B^{\text{mecânica}} - E_A^{\text{mecânica}}$$

Se não se conhecer a velocidade do oscilador em cada instante, só se consegue calcular a energia do oscilador em instantes em que a velocidade seja nula (pontos em que o oscilador se encontra nas posições extremas).

Não se pode, por isso, analisar a variação instantânea da energia do oscilador. Pode-se, no entanto, calcular a energia em alguns pontos (todos os máximos e mínimos) e usar esses dados para estudar o efeito do atrito nas diferentes situações.

Nota: É importante observar que no oscilador amortecido a velocidade máxima não é atingida exatamente na posição de equilíbrio, devido à existência da força de atrito e por isso o cálculo da energia mecânica do oscilador amortecido através das expressões (3) e (4) não é exato, no entanto esta é uma aproximação razoável (visto que neste caso uma precisão muito grande do resultado não é fundamental) que simplifica muito o problema.

Na figura 1 mostra-se um gráfico da posição de um oscilador em função do tempo. Nos instantes  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  o afastamento da posição de equilíbrio é máximo e a energia cinética é nula. A energia do oscilador nos instantes  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ , será então:

$$E_{t1} = \frac{1}{2} k A_1^2 \quad E_{t2} = \frac{1}{2} k A_2^2$$

$$E_{t3} = \frac{1}{2} k A_3^2$$

O trabalho da força de atrito entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  ou entre  $t_2$  e  $t_3$  será:

$$W_{t1 \rightarrow t2} = \frac{1}{2} k (A_2^2 - A_1^2) \quad \text{ou}$$

$$W_{t2 \rightarrow t3} = \frac{1}{2} k (A_3^2 - A_2^2)$$

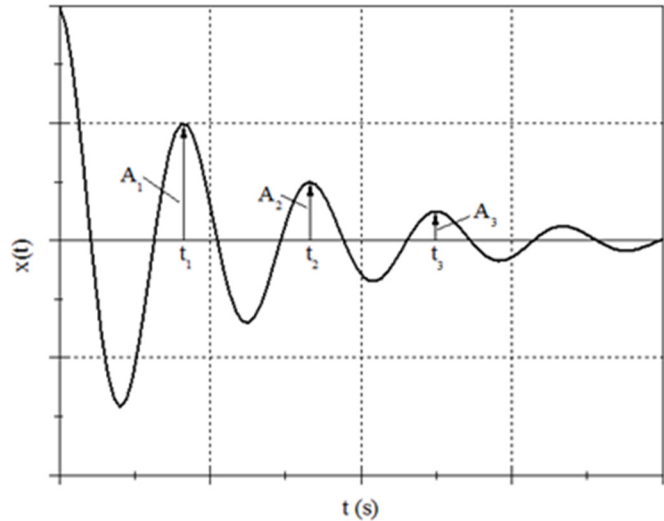


Figura 1: Posição em função do tempo para um oscilador com atrito (amortecimento fraco)

### ***Movimento harmónico dum corpo sujeito a uma força de atrito de escorregamento***

Se a força de atrito de escorregamento for constante, o trabalho realizado pela força de atrito durante um período será:

$$W_{\text{atrito}} = F_{\text{atrito}} \times d, \quad \text{equação 5}$$

em que  $d$  é o espaço percorrido durante um período. Num período o corpo desloca-se de  $x_{\max}$  a  $x_{\min}$  e novamente de  $x_{\min}$  a  $x_{\max}$ , ou seja  $d \cong 2(A_1 + A_2)$ . Substituindo na expressão 5:

$$W_{\text{atrito}} \cong F_{\text{atrito}} \times 2(A_1 + A_2) \quad \text{equação 6}$$

A variação de energia durante o mesmo período pode ser calculada através das amplitudes  $A_1$  e  $A_2$  (equação 4):

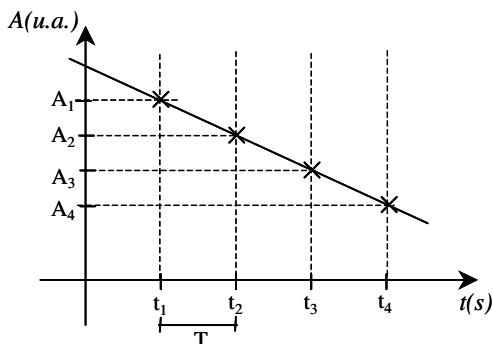


Figura 2: Amplitude em função do tempo.

$$W_{\text{atrito}} = E_2 - E_1 \cong \frac{1}{2} k (A_2^2 - A_1^2)$$

$$F_{\text{atrito}} \times 2(A_1 + A_2) \cong \frac{1}{2} k (A_2 - A_1) \times (A_2 + A_1)$$

$$F_{\text{atrito}} \cong \frac{1}{4} k (A_2 - A_1)$$

Se a variação da amplitude com o tempo for linear e a equação da reta de ajuste  $Y=ax+b$  na expressão

anterior a diferença ( $A_2 - A_1$ ) pode ser escrita em função do declive da reta de ajuste e do período do movimento:

$$a = \frac{A_2 - A_1}{T} \Rightarrow F_{\text{atrito}} = \frac{1}{4} k \times aT = \frac{1}{4} m \omega^2 \times aT,$$

em que  $a$  é o declive da reta experimental. Repare que nesta expressão não é importante em que unidades se exprime a amplitude.

**Movimento harmónico dum corpo sujeito a uma força de atrito do tipo  $\vec{F}_{\text{atrito}} = -b\vec{v}$**

A aceleração dum sistema que é sujeito a uma força restauradora ( $\vec{F}_{\text{restauradora}} = -k\vec{x}$ ) e a uma força de atrito proporcional à velocidade,  $\vec{F}_{\text{atrito}} = -b\vec{v}$ , pode descrever-se segundo a 2ª lei de Newton por:

$$\vec{F}_{\text{resultante}} = m \times \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad -k\vec{x} - b\vec{v} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad m\vec{a} + k\vec{x} + b\vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Soltando o sistema, sem velocidade inicial, este faz um movimento oscilatório amortecido. A posição em função do tempo, admitindo uma situação de amortecimento fraco, será dada por:

$$x(t) = Ae^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)} \sin(\omega t) \quad \text{equação 7}$$

em que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad \text{equação 8}$$

A amplitude em função do tempo vem então:

$$A(t) = Ae^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)} \quad \text{equação 9}$$

em que  $b$  é o coeficiente de atrito que se pretende calcular. Se a representação da amplitude em função do tempo, corresponder a uma função deste tipo, significa que a força de atrito presente é proporcional à velocidade e o coeficiente de proporcionalidade pode ser calculado através do função ajustada aos pontos experimentais.

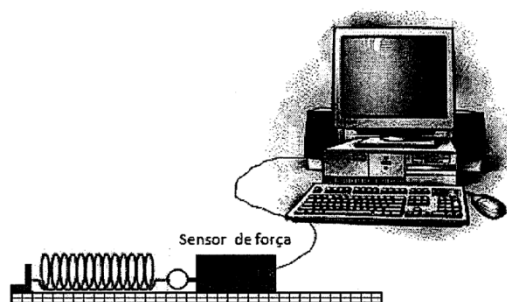
## Procedimento experimental

Nesta experiência pretende-se observar a variação de energia de um corpo oscilante ao longo do tempo, sujeito a diferentes forças de atrito. A montagem da experiência encontra-se esquematizada nas figuras.

O sistema oscilante é constituído por uma mola elástica de constante  $k$ , na qual se suspende, com um fio, um corpo de massa  $m$ . A mola encontra-se ligada a um sensor de força, que é lida num computador.

### 1 - Cálculo da constante elástica da mola

- Medir a massa da mola e a massa da esfera.
- Medir o diâmetro da esfera
- Fixar uma das extremidades da mola ao suporte da prancha e a outra extremidade ao sensor de força
- Afastar o sensor de força, esticando a mola.
- Registrar o valor da força e a posição do sensor.
- Repetir para 6 ou 8 valores de força.



### 2 - Análise de um movimento harmónico com atrito de escorregamento

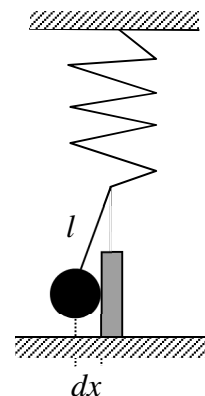
Considere-se agora a introdução de uma força de atrito de escorregamento e observe-se o efeito que tem no movimento. Nesta fase utilizar-se-á o sensor de força (o deslocamento pode ser facilmente calculado a partir da força medida pelo sensor e da constante da mola)

- Colocar o bloco de madeira, de forma que durante a oscilação a esfera permaneça encostada ao bloco (ver figura)

- Segurar o bloco para que este não deslize. Medir e registar a distância  $dx$ .

Dar início à oscilação. Iniciar a aquisição de dados.

- Copiar os valores da tabela para a folha Excel
- Aumentar a distância  $dx$ , e repetir o passo anterior.



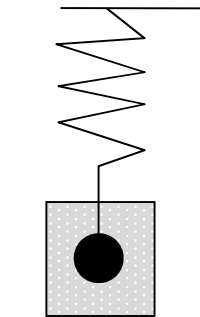
### 3 - Análise de um movimento harmónico dentro da parafina

Considere-se agora o movimento dentro de um fluido com viscosidade bastante elevada - a parafina.

- Retirar o bloco de madeira. Colocar o copo de parafina de forma que a esfera fique mergulhada na parafina. É importante que durante a experiência o corpo se movimente sempre completamente mergulhado na parafina.

- Colocar a esfera a oscilar e verificar se durante a oscilação a esfera não sai da parafina nem bate no fundo.

- Fazer a aquisição de dados e gravar os resultados. Repita duas ou três vezes.



NOTA: QUANDO A OSCILAÇÃO SE FAZ ENCOSTADA AO BLOCO DE MADEIRA OU DENTRO DA PARAFINA É PROVÁVEL QUE SÓ CONSIGA OBSERVAR 4 OU 5 OSCILAÇÕES.

### **Análise dos resultados**

#### 1 - Cálculo da constante elástica da mola

- Representar a força em função da posição do sensor.
- Calcular a equação da reta que melhor se ajusta aos resultados experimentais
- Calcular a constante da mola.
- Calcular a frequência natural e o período natural do oscilador a partir da massa da esfera e da constante da mola.

#### 2 -Análise de um movimento harmónico com atrito

Para cada um dos movimentos com atrito:

- Na tabela Excel, a partir dos dados registados pelo sensor, calcular a força resultante que atua no corpo para cada instante. Corrigir o gráfico para que, na posição de equilíbrio, a força seja nula.

- Usando o valor da constante da mola e a força resultante que atua no corpo, calcular a posição do corpo em cada instante.

- Traçar o gráfico da posição do corpo em função do tempo.

- Calcular o período e a frequência angular do movimento. Comparar com o valor obtido sem amortecimento (frequência natural)

- Registrar numa tabela os valores máximos e mínimos de amplitude e os instantes em que ocorrem. Calcular a energia do oscilador nesses instantes.

- Representar graficamente os valores da energia do oscilador em função do tempo.

- Comparar a frequência de oscilação nas várias experiências com a frequência natural do oscilador. Comentar o resultado.

- Comparar a variação da energia do oscilador em função do tempo nas várias experiências.

### *Anexo: forças de atrito*

#### **A força de atrito:**

Quando um corpo se move num fluido verifica-se em algumas situações que a força de atrito é proporcional à velocidade do corpo – diz-se neste caso que o corpo está sujeito ao chamado **atrito de Stokes**.

$$\text{Atrito de "Stokes":} \quad F_a = -bv$$

O coeficiente de atrito  $b$  depende da viscosidade  $\eta$  do meio e da forma e dimensões do corpo em movimento. Se o corpo em movimento é uma esfera, o coeficiente de atrito é dado por:  $b = 6\pi\eta r$ , em que  $r$  é o raio da esfera e  $\eta$  viscosidade do meio.

Muitas vezes, embora a força de atrito não seja proporcional à velocidade, pode exprimir-se em função de um coeficiente de atrito e de uma potência da velocidade. É costume classificar os tipos de atrito de acordo com a dependência da velocidade, assim:

$F_a = c v^n$	$n = 0$ atrito seco	$(c = \mu m g \sin\alpha)$
	$n = 0.5$ atrito de "Reynolds"	(película lubrificante)
	$n = 1$ atrito de "Stokes"	(velocidade moderada)
	$n = 2$ atrito de "Newton"	(velocidade alta)

Nas situações reais a força de atrito que surge é geralmente bastante complexa. Quando nenhum dos tipos de atrito descreve a realidade com suficiente rigor é sempre possível admitir a existência de dois ou mais tipos de atrito simultâneos e descrever a força de atrito como uma combinação linear de várias potências de velocidade.

Só uma análise cuidada dos resultados experimentais permite perceber qual, ou quais os efeitos de atrito mais importante em cada um dos casos.

Nota:  $\eta_{\text{ar}} = 0.0000174 \text{ Nsm}^{-2}$ ,  $\eta_{\text{parafina}} = 0,9 \text{ Nsm}^{-2}$  ( $T=20^\circ\text{C}$ ).



---

## T6 - Estudo das oscilações forçadas de um pêndulo mecânico

---

### 1. Objetivo

Estudo da resposta de um pêndulo mecânico a uma força exterior com uma variação temporal harmónica. Observação da variação da amplitude com a frequência de excitação. Determinação experimental da frequência de ressonância do pêndulo.

### 2. Preparação do trabalho prático

Antes de realizar o trabalho prático deve ter compreendido o movimento harmónico simples e o movimento oscilatório em regime amortecido e forçado. Sugere-se a leitura do Cap. 15 (Oscilações) do livro “Física” de Resnick e Halliday. Em especial deve compreender a secção 15.10 sobre oscilações forçadas e ressonância (os números do capítulo e secção referem-se à 4ª edição, versão brasileira (vol. 2)).

### 3. Dispositivo experimental

A figura 1 representa o sistema experimental adotado. Consiste essencialmente em dois pêndulos físicos, constituídos por hastes de metal com  $L \approx 1$  m de comprimento, acoplados através de uma pequena massa ( $m_{ac}$ ) pendurada no meio de um fio inextensível que liga os dois pêndulos (ver figura 1). O pêndulo da **esquerda**, designado por pêndulo de excitação, atuará como fonte de excitação do pêndulo da direita. Para isso, pode ser dotado de uma massa  $M$  de valor muito superior às massas das hastes e a  $m_{ac}$  ( $M$  pode ser variado entre aproximadamente 0.7 kg e 2 kg), que pode ser fixa na haste em diferentes posições. A marcação da posição dos pêndulos em folhas de papel colocadas na base do dispositivo e o recurso a uma régua ou fita métrica permitem a leitura expedita da amplitude de oscilação dos dois pêndulos. Utilizar-se-á um cronómetro para medir os períodos de oscilação dos pêndulos.

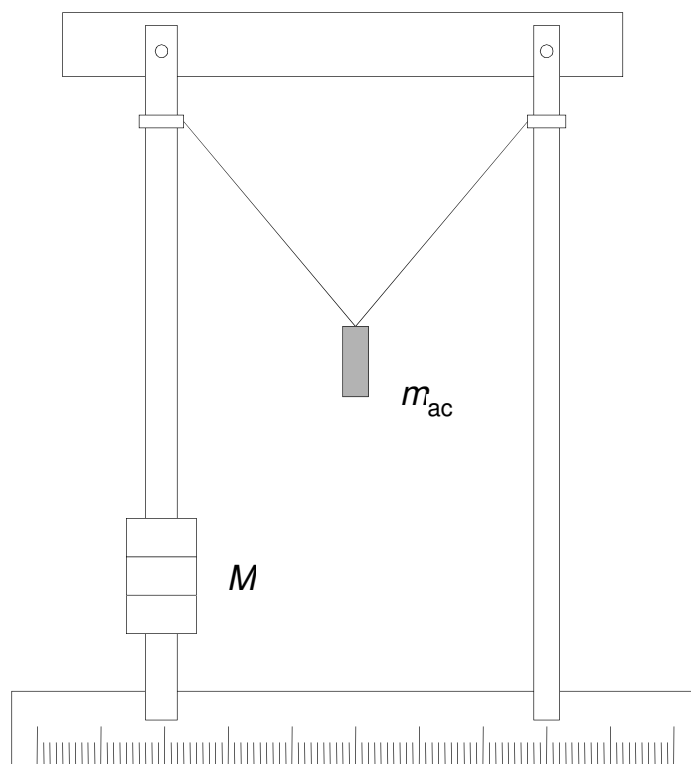


Figura 1: Representação esquemática do sistema experimental adotado.

#### 4. Procedimento experimental

##### 4.1 – Análise do comportamento de cada pêndulo na ausência de acoplamento

- i) Retire o fio e a massa que estabelece o acoplamento entre os dois pêndulos
- ii) Considere o pêndulo da direita.

Comece por marcar no papel colado na base do equipamento<sup>1</sup> a posição de equilíbrio do pêndulo. Depois coloque o pêndulo em movimento libertando-o do repouso a partir de uma amplitude inicial correspondente a um afastamento de 15 cm da posição de equilíbrio, medidos na régua graduada respectiva. Meça com o cronómetro o seu período de oscilação natural ( $T_0$ ) e registre o valor obtido. O valor da frequência natural de oscilação corresponde ao inverso deste valor ( $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ ). Note que para minorar os erros na medida do período

deve medir o tempo correspondente a várias oscilações. Sugere-se que meça o tempo de 10 oscilações e repita o procedimento várias vezes para poder estimar o erro da medida.

- iii) Considere agora o pêndulo da esquerda.

---

<sup>1</sup> Antes de iniciar a experiência deve colar papel limpo na parede junto à base do dispositivo para poder proceder às marcações da amplitude.

Coloque a massa  $M$  na extremidade inferior da haste. Coloque o pêndulo em movimento libertando-o do repouso com uma amplitude inicial correspondente a um afastamento de 15 cm da posição de equilíbrio. Registe o período de oscilação ( $T_1$ ). Coloque depois a massa  $M$  na extremidade superior da vareta e repita o procedimento anterior para medir e registar o novo valor do período de oscilação ( $T_2$ ). Compare os valores de  $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$  com os valores de  $\nu_1 = \frac{1}{T_1}$  e  $\nu_2 = \frac{1}{T_2}$ , certificando-se que  $\nu_1 < \nu_0 < \nu_2$ .

#### 4.2 – Observação do efeito de ressonância numa oscilação forçada

iv) Restabeleça o acoplamento entre os dois pêndulos recolocando o fio e a massa  $m_{ac}$  na posição representada na figura 1.

v) Coloque a massa  $M$  do pêndulo de excitação na extremidade inferior da haste. Certifique-se que os dois pêndulos estão em repouso.

vi) Coloque em movimento o pêndulo de excitação nas condições anteriormente descritas (a partir do repouso e com uma amplitude inicial equivalente a um afastamento de 15 cm). Aguarde alguns instantes até se certificar que o pêndulo de excitação oscila em regime estacionário. Observe que o pêndulo experimental oscila com uma amplitude modulada; este fenómeno, conhecido por batimento, resulta da sobreposição de dois movimentos harmónicos simples com frequências diferentes. Meça o período do pêndulo de excitação ( $T_{exc}$ ) assim como o máximo da amplitude angular do movimento induzido no pêndulo experimental<sup>2</sup>. Registe os valores que mediu para estas grandezas.

vii) Repita o procedimento descrito na alínea anterior fazendo variar a altura da massa  $M$  do pêndulo de excitação até à sua posição na extremidade superior. Considere cerca de 15 posições desta massa. Deve realizar um maior número de medidas nas posições centrais da massa  $M$  (na vizinhança da frequência de ressonância). Registe o valor das suas medições.

viii) Esboce gráficos da amplitude em função da frequência de excitação.

---

<sup>2</sup> Note que, devido ao acoplamento entre os dois pêndulos, a posição de equilíbrio pode ser ligeiramente alterada em relação à situação dos pêndulos não acoplados. Para determinar a amplitude angular meça o comprimento do pêndulo,  $L$ , e o seu afastamento  $A$  (em relação à posição de equilíbrio) segundo a direcção horizontal; o ângulo pode ser determinado tendo em conta que  $\tan \theta = A/L$ .

ix) Identifique a frequência correspondente à amplitude máxima de oscilação do pêndulo (frequência de ressonância) e compare-a com o valor da frequência natural determinada em 4.1.

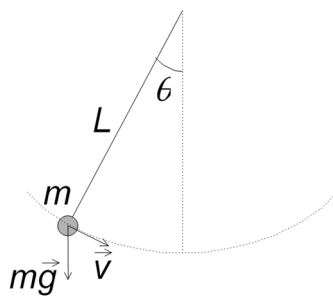
## 5. Resultados

- Execute todos os cálculos pedidos e/ou necessários à concretização dos objetivos e tarefas propostos.
- Descreva a variação da frequência de um pêndulo quando atuamos sobre o seu comprimento.
- Descreva a variação da amplitude e da fase de um pêndulo forçado, com a frequência de excitação.
- Comente criticamente todos os resultados que obtiver.

### Anexo 1: Pêndulo físico e pêndulo simples

O pêndulo que usará na realização deste trabalho é constituído por uma haste de aço (homogénea) e não por uma massa de pequenas dimensões suspensa num fio (inextensível e de massa desprezável). Como se compara a dinâmica destes dois sistemas?

#### i) Pêndulo simples



As equações da velocidade e aceleração tangencial do pêndulo são, respetivamente

$$\vec{v} = L \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_t$$

$$\vec{a}_t = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{e}_t$$

onde  $\hat{e}_t$  é o versor tangente à trajetória. Então a 2ª lei de Newton permite escrever para a força tangencial

$$\vec{F}_t = m\vec{a}_t = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{e}_t$$

Mas:

$\vec{F}_t = mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{e}_t = -mg \sin(\theta) \hat{e}_t$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

Logo, a 2ª lei de Newton conduz a

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

O sistema é linear apenas no limite dos pequenos ângulos, isto é:

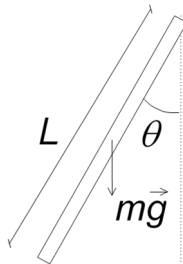
$$\theta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) \approx \theta$$

Neste caso, obtemos a equação do movimento de um pêndulo simples (linear)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \text{onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

A frequência angular de oscilação,  $\omega_0$ , depende da aceleração da gravidade e do comprimento do pêndulo.

## ii) Pêndulo físico (haste homogênea)



As equações do movimento deste sistema escrevem-se:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= I \vec{\omega} \\ \vec{\omega} &= \frac{d\theta}{dt} \hat{k} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} + I \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \vec{M} \end{aligned}$$

onde:

$\hat{k}$  é o versor perpendicular ao plano do pêndulo

$I$  é o momento de inércia da haste em relação ao eixo de rotação

$\vec{L}$  é o momento cinético (ou momento angular) da haste

$\vec{M}$  é o momento das forças aplicadas

Então, admitindo que a vareta é homogênea

$$\vec{M} = -mg \sin(\theta) \frac{L}{2} \hat{k}$$

e

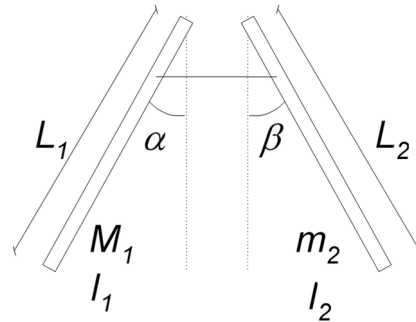
$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \frac{L}{2} \sin(\theta)$$

Naturalmente, no limite dos pequenos ângulos ( $\sin(\theta) \approx \theta$ ) obtemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{2I} \theta = 0 \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \text{onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{2I}}$$

A frequência de oscilação depende agora também do momento de inércia da haste, mas a equação diferencial que descreve o movimento é a mesma que aquela que foi obtida na análise do pêndulo simples.

## Anexo 2: Pêndulos acoplados: porque é que podemos considerar o pêndulo de maior inércia um motor?



Consideremos dois pêndulos físicos acoplados (ver figura). Seja  $I_1$  ( $I_2$ ) o momento de inércia do pêndulo da esquerda (direita). As equações do movimento dos dois pêndulos escrevem-se (ver figura):

$$I_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{1}{2} M_1 g L_1 \sin \alpha - k[\sin \alpha - \sin \beta]$$

$$I_2 \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -\frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin \beta + k[\sin \alpha - \sin \beta]$$

ou, no limite dos pequenos ângulos ( $\alpha, \beta \ll 1$ )

$$I_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{1}{2} M_1 g L_1 \alpha - k[\alpha - \beta]$$

$$I_2 \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -\frac{1}{2} m_2 g L_2 \beta + k[\alpha - \beta]$$

Consideremos agora que o acoplamento entre os pêndulos é fraco, isto é, que  $k \ll 1$ . Além disso, consideremos que o pêndulo da esquerda tem uma massa (e uma inércia) muito maior que o pêndulo da direita:  $M_1 \gg m_2$ ;  $I_1 \gg I_2$ . Então,  $M_1 g L_1 \gg k$  e a equação de cima pode simplesmente escrever-se como um oscilador independente:

$$I_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cong -\frac{1}{2} M_1 g L_1 \alpha$$

Quanto à segunda equação, podemos reescrevê-la como:

$$I_2 \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -\left[\frac{1}{2} m_2 g L_2 \beta + k\beta\right] + k\alpha \quad \text{i.e.: } I_2 \frac{d^2 \beta}{dt^2} + (\omega_0')^2 \beta = k\alpha(t)$$

onde  $(\omega_0')^2 = \frac{1}{2} m_2 g L_2 + k$

O segundo pêndulo é atuado por um momento exterior com uma variação temporal harmónica. O pêndulo da esquerda funciona como um motor do pêndulo da direita (que pode ver o valor da sua “frequência natural” ligeiramente alterada pelo acoplamento).