

UNIVERSIDADE DO MINHO
ESCOLA DE CIÊNCIAS

Análise em Frequência de Circuitos Lineares

TRABALHO LABORATORIAL 2
ELETRÓNICA E INSTRUMENTAÇÃO EM FÍSICA

Afonso Costeira A89636
André Mouquinho A90129
Miguel Godinho A89624

27 de janeiro de 2021

Conteúdo

1	Sumário	2
2	Procedimento, Resultados e Análise	3
2.1	Ponte de Schering	3
2.2	Circuito RC de Baixa-Banda	5
3	Análise de Resultados e Conclusão	10

1 Sumário

Esta atividade experimental é composta por duas partes.

Na primeira parte, pretende-se determinar a capacidade de um condensador presente numa Ponte de Schering.

Já na segunda parte, é pretendido o estudo da função de transferência de um circuito RC (filtro passa-baixo).

2 Procedimento, Resultados e Análise

2.1 Ponte de Schering

De acordo com as instruções que nos foram dadas, montámos o circuito presente na figura 1.

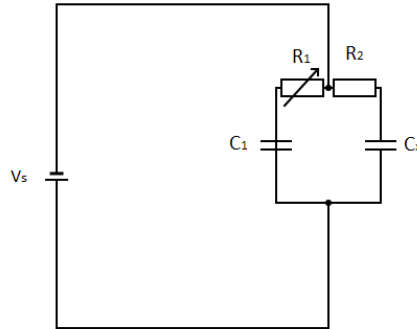


Figura 1: Ponte de Schering. R_1 é uma resistência variável. $R_2 = 98.9 \text{ k}\Omega$. C_x é o valor do condensador que queremos obter. $C_1 = 47 \text{ nF}$.

Após o circuito montado, fomos ligar o circuito. A tensão de entrada, V_s , foi de 7 V . A capacidade do condensador C_x utilizado, a qual já conhecíamos à priori, é de 22 nF . Consideramos este valor como valor tabelado.

Experimentalmente não foi possível fazer com que a tensão da ponte fosse exatamente nula devido à elevada sensibilidade do circuito perante a variação de R_1 . Deste modo, valor medido mais próximo de 0 foi 0.073 V para o qual o valor medido da resistência R_1 correspondente foi $45.05 \text{ k}\Omega$.

De seguida, fomos procurar a função que nos dá o valor de C_x em função das restantes componentes quando a ponte está em equilíbrio.

Utilizando a 1ª Lei de Kirchhoff (Lei dos Nós) para o nó entre R_2 e C_x e para o nó entre R_1 e C_3 temos que, respetivamente,

$$I_2 - I_x + I_G = 0$$

e

$$I_1 - I_3 - I_G = 0.$$

Utilizando a 2ª Lei de Kirchhoff (Lei das Malhas) para as malhas da ponte temos

$$V_2 - V_G - V_1 = 0 \Leftrightarrow I_2 Z_2 - I_G Z_G - I_1 Z_1 = 0$$

e

$$V_x - V_3 - V_G = 0 \Leftrightarrow I_x Z_x - I_3 Z_3 - I_G Z_G = 0,$$

quando a ponte está em equilíbrio ($I_G = 0$) temos que

$$I_2 = I_x,$$

$$I_1 = I_3,$$

$$I_2 Z_2 = I_1 Z_1$$

e

$$I_x Z_x = I_3 Z_3.$$

Resolvendo o sistema, obtemos a equação para o valor experimental de C_x .

$$Z_2 Z_3 = Z_1 Z_x \Leftrightarrow \frac{R_2}{j\omega C_3} = \frac{R_1}{j\omega C_x} \Leftrightarrow C_x = \frac{R_1 C_3}{R_2} \quad (1)$$

Deste modo, calcula-se o valor experimental de C_x através da Eq.(1).

$$C_x = \frac{R_1 C_3}{R_2} = \frac{45.05 \cdot 47}{98.9} = 21.4 \text{ nF}$$

2.2 Circuito RC de Baixa-Banda

Na segunda parte da atividade experimental, foi nos pedido inicialmente para montar o circuito na figura 2.

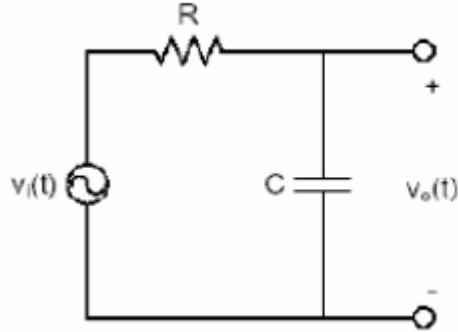


Figura 2: Diagrama de Bode.

No osciloscópio, víamos duas ondas. De seguida, fomos variar a frequência para obtermos diferentes valores de tensão para as ondas e fomos também determinar a diferença de período entre elas. Tudo isto foi com a ajuda do osciloscópio. Estes valores encontram-se na tabela 1.

Frequência, f (kHz)	V_{out} (V)	V_{in} (V)	Diferença de Período, Δt (μs)
0.011	5.441	5.601	-5000
0.101	5.601	5.921	-0
1.000	5.441	5.601	-50
10.00	1.761	5.441	-20
100.0	0.160	5.281	-2.4
8.100	2.116	5.440	-20
6.250	2.691	5.441	-28
3.300	3.920	5.601	-40
0.341	5.761	5.801	-0
0.500	5.610	5.801	-0

Tabela 1: Valores da tensão da onda 1, V_{in} , da onda 2, V_{out} e da diferença de período, Δt para as diferentes frequências.

Na análise de dados, é-nos pedidos, primeiramente, para medirmos a magnitude do ganho e a de fase as para as diferentes frequências. A magnitude é dada por

$$M = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|,$$

enquanto que a fase

$$\phi = 2\pi \cdot \Delta t \cdot f.$$

Na tabela 2.2 encontra-se os valores da magnitude e fase da funções de transferência para as diferentes frequências.

Frequência, f (kHz)	Magnitude, M (dB)	Fase, ϕ (°)
0.011	-0.252	-19.25
0.101	-0.483	-0.00
0.341	-0.060	-0.00
0.500	-0.291	-0.00
1.000	-0.252	-17.50
3.300	-3.100	-46.20
6.250	-6.115	-61.25
8.100	-8.202	-56.70
10.00	-9.798	-70.00
100.0	-30.372	-84.00

De seguida, pedem-nos a frequência de corte. Este pode ser obtida de duas formas: de forma teórica pela equação

$$f_c = \frac{1}{2\pi CR}$$

e de forma experimental a partir de diagramas de Bode sendo que nesta segunda podemos ir pelo diagrama de bode da magnitude em função da frequência ou da fase em função da frequência.

Primeiro começamos por ir buscar a frequência de corte teórica.

$$f_{c_{teórico}} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 4.82E - 08} = 3.302 \text{ kHz}$$

Continuamente, fomos procurar as frequências de corte experimentais. Deste modo, começamos por traçar os gráficos de magnitude e fase em função da frequência que se encontram na figura 3.

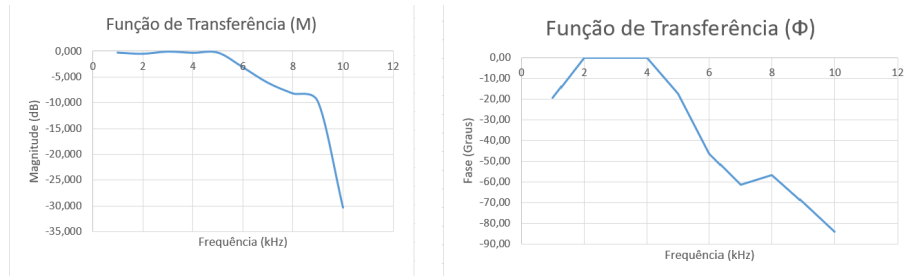


Figura 3: Gráficos da funções de transferência da magnitude do ganho e da fase em função da frequência.

A partir dos gráficos da figura 3 e o uso do programa *Origin Lab* fomos obter as frequências da corte. Para o gráfico da magnitude fomos verificar quando a magnitude era -3 dB que equivale à frequência de corte.

$$f_{c1} = 3.220\text{ kHz}$$

Por outro lado na função de transferência da fase fomos procurar a frequência que equivale a uma fase de 45° .

$$f_{c2} = 3.204\text{ kHz}$$

Não nos era pedido, mas fomos retirar alguns pontos de modo a termos um ajuste mais satisfatório para os diagramas.

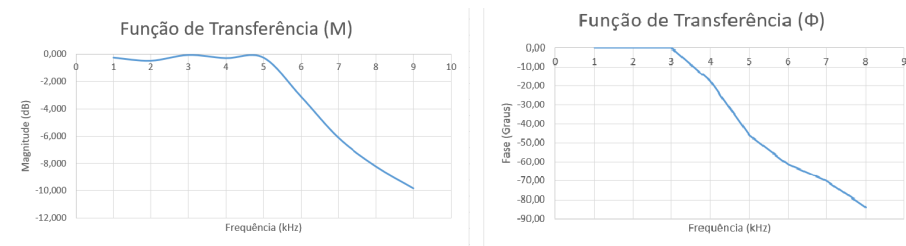


Figura 4: Melhor ajuste para os gráficos da funções de transferência da magnitude do ganho e da fase em função da frequência.

Com a frequência de corte calculada fomos formular a função de transferência. A Eq.(2) dá-nos a função de transferência geral.

$$H(jf) = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}} \quad (2)$$

Através da Eq.(2) fomos obter as funções de transferência para cada frequência de corte obtida.

$$H(jf)_{f_{c_{teórico}}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{3302}}.$$

$$H(jf)_{f_{c1}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{3220}}.$$

$$H(jf)_{f_{c2}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{3204}}.$$

Para terminar, fomos traçar os gráficos teóricos da magnitude e da fase para compararmos com os experimentais. Para isso, fomos, primeiramente, buscar as funções de transferência para a magnitude do ganho e da fase com a frequência de corte "teórica".

$$\left| H(jf)_{f_{c_{teórico}}} \right| = \left| \frac{v_{out}}{v_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{3302}\right)^2}}.$$

$$\phi = \arg(H(jf)_{f_{c_{teórico}}}) = \arg\left(\frac{1}{1 + j\frac{f}{3302}}\right) = \arctan\left(-\frac{f}{3302}\right)$$

Com as funções definidas, fomos correr as funções de transferência de 0 a 10 kHz usando as funcionalidades do *Python*. Decidimos usar apenas até 10 kHz , porque corresponde ao melhor ajuste que obtivemos, além que ao estender até 100 kHz iria diminuir a visualização do decaimento que é o que queremos. Os gráficos encontram-se nas figuras 5 e 6, respetivamente.

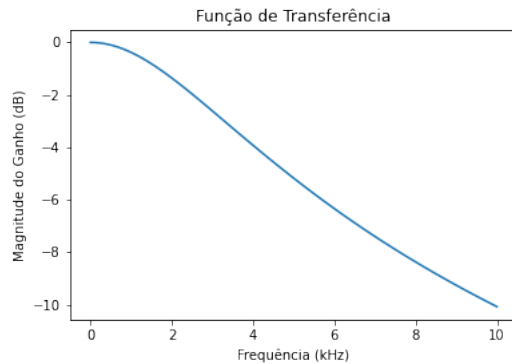


Figura 5: Gráfico teórico da função de transferência da magnitude do ganho em função da frequência.

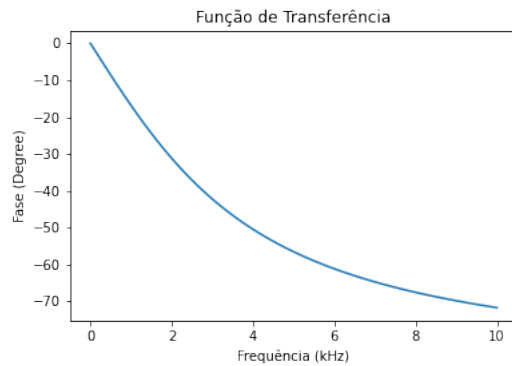


Figura 6: Gráfico teórico da função de transferência da fase em função da frequência.

3 Análise de Resultados e Conclusão

Na primeira parte, calculámos o valor de um condensador C_x presente numa ponte de Schering, tendo sido obtido o valor de 21.4 nF . Uma vez que o valor do condensador C_x já nos era conhecido, 22 nF , podemos calcular o erro experimental:

$$\frac{22 - 21.4}{22} \times 100 \approx 2.73 \%$$

Como podemos ver o erro experimental é muito pequeno e podemos dar a experiência como um sucesso. O grupo ponderou de onde poderia surgir este erro e chegamos as seguintes conclusões:

- Limitações das máquinas usadas para as medições;
- O valor das componentes não ser exatamente o valor retirado, mas uma aproximação;
- A nossa equação parte do princípio que a ponte está em equilíbrio, no entanto, nós não conseguimos chegar exatamente a esse equilíbrio.

Na segunda parte, fomos analisar um circuito RC de filtro baixa-banda. Fomos variar a frequência de modo a obter a magnitude do ganho e a fase do circuito e através dos mesmo fomos traçar gráficos das funções de transferência da magnitude do ganho e da fase em função da frequência. Foi possível obter dois valores para a frequência de corte com os gráficos:

$$f_{c1} = 3.220 \text{ kHz}$$

$$f_{c2} = 3.204 \text{ kHz}$$

Uma vez que a frequência de corte pode ser calculada usando os valores das componente do circuito, podemos obter um valor teórico para a frequência de corte.

$$f_{c_{\text{teórico}}} = 3.302 \text{ kHz}$$

Podemos assim calcular os erros percentuais para f_{c1} ,

$$\frac{(3.302 - 3.220)}{3.302} \times 100 \approx 2.48\%,$$

e f_{c2} ,

$$\frac{(3.302 - 3.204)}{3.302} \times 100 \approx 2.97\%.$$

Aqui também verificamos um baixo valor no erro experimental o que novamente, demonstra que a experiência foi um sucesso. Aqui apontamos que o erro pode ter surgido de forma semelhante aos dois primeiros pontos da experiência anterior.

Quando procedemos a comparação dos gráficos da magnitude do ganho e da fase em função da transferência experimentais ajustados com os teóricos torna-se um pouco mais complicado. No gráfico da magnitude, podemos observar o mesmo que nos erros experimentais, a pesar de existir erro, o decaimento é semelhante e sendo assim podemos dizer que os gráficos representam o mesmo e que o erro entre eles pode ter surgido igual ao dos erros experimentais. No entanto, quando comparamos os gráficos de fase, podemos reparar que existe uma diferença na curvatura que faz com que tenham um decaimento parcialmente diferente, mas, do ponto de vista experimental, desprezável. Para esta última, o grupo visou que esta diferença pode dever-se a:

- A falta de pontos em comparação com os gráfico teórico (o mesmo se pode aplicar ao gráfico da magnitude);
- Devido a baixa frequência não ser possível a detetação de uma diferença de período e comprometer os primeiro valores.

Concluindo, uma vez que tanto na primeira como na segunda parte os erro obtidos para os valores experimentais são **aceitáveis** (isto é, não são suficientes para tirar conclusões fora dos resultados previstos teoricamente), podemos dizer que a atividade laboratorial foi **bem sucedida**.