Universidade do Minho

Problemas de Mecânica Analítica e Ondas

Série 3 – Equações de Hamilton

1- Considere o caso do movimento no plano de uma partícula de massa m sob um campo central de força central, $V(r)$. Para simplificar, considera-se que o movimento da partícula ocorre apenas no plano XY.

(a) Escreva as equações de Hamilton do sistema.

(b) O que pode dizer sobre a componente L_z segundo o eixo OZ do momento angular da partícula a partir do comportamento do momento generalizado p_θ?

2- Escreva as equações de Hamilton para uma partícula livre de massa m, isto é, uma partícula que não é actuada por nenhuma força.

3- Escreva as equações de Hamilton para o oscilador harmónico linear.

4- Escreva as equações de Hamilton para o pêndulo simples.

5- Expresse o Hamiltoniano para o pêndulo duplo coplanar em termos das coordenadas generalizadas e dos momentos generalizados e indique como se chegaria às equações de Hamilton desse sistema.

6- Um ponto material de massa m, sujeito à acção da gravidade, é obrigado a permanecer sobre a superfície de um cone de eixo horizontal. Determine as equações de Hamilton do movimento deste sistema.

7- O Lagrangeano de uma partícula de massa m e de carga eléctrica e num campo electromagnético é dado por:

$$L = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{e}{c}\,\vec{A}\cdot\vec{v} - e\,\phi$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, $\vec{v}$ a velocidade da partícula, $\vec{A}$ o vector potencial magnético e ϕ o potencial eléctrico. Para simplificar, omite-se a dependência explícita de $\vec{A}$ e ϕ nas coordenadas Cartesianas, o que fisicamente corresponde ao caso em que essas quantidades têm o mesmo valor em todos os pontos do espaço.

Usando a transformação de Legendre,

$$H = \sum_i p_i\,\dot{q}_i - L$$

obtenha:

(a) O Hamiltoniano.

(b) As equações de Hamilton.

Dados Auxiliares da Série 3

Matriz inversa de uma matriz de 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Aqui $ad - bc$ é o determinante da matriz.