

3. ANÁLISE DE FOURIER DE SINAIS DISCRETOS

3.1. Resposta de um sistema LIT a exponenciais complexas

Função própria de um sistema LIT - sinal que tem como resposta ele próprio, a menos de uma constante multiplicativa.

Valor próprio de uma função própria - é a constante multiplicativa.

Exemplo: $x[n] = z^n$



$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k].x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k].z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k].z^{-k} = z^n.H(z)$$

Interesse das funções próprias e dos valores próprios:

A resposta de um sistema LIT é facilmente determinada quando:

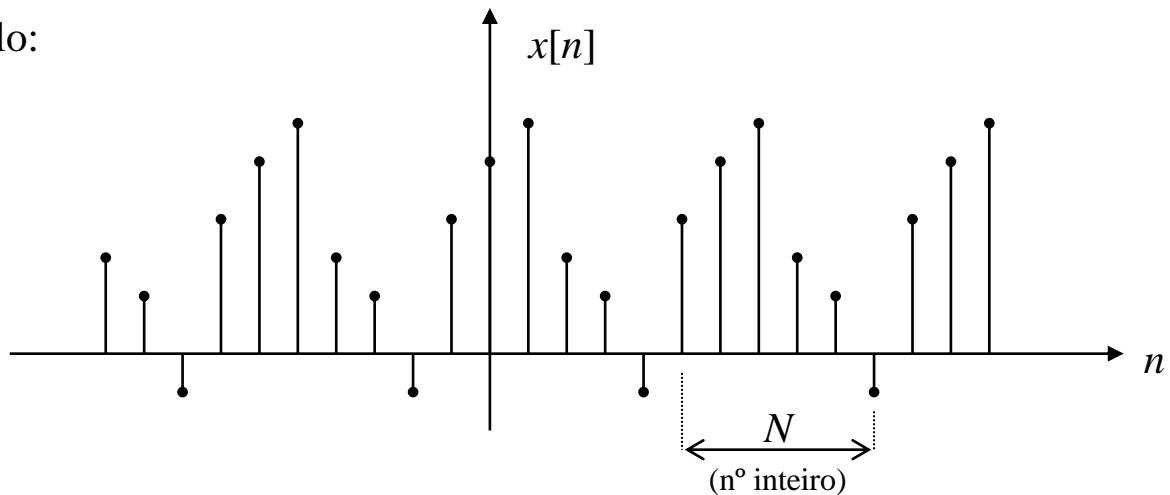
- A entrada é uma função própria
- A entrada é uma combinação linear de funções próprias (existem muitos sinais nestas condições)

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \quad \quad y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

3.2. Representação de sequências periódicas pelas séries de Fourier

Seja $x[n]$ uma sequência periódica de período N : $x[n] = x[n+N]$

Exemplo:



$\frac{2\pi}{N}$ é a frequência fundamental do sinal

Conjunto das exponenciais complexas relacionadas harmonicamente:

$$\Phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Porém, já havíamos visto que $\Phi_{k+N}[n] = \Phi_k[n]$ (só há N harmónicos \neq s)

Sendo assim, $x[n]$ periódica de período N será dada por:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (\text{eq. síntese})$$

Podendo-se provar que os coeficientes espectrais a_k são dados por:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (\text{eq. análise})$$

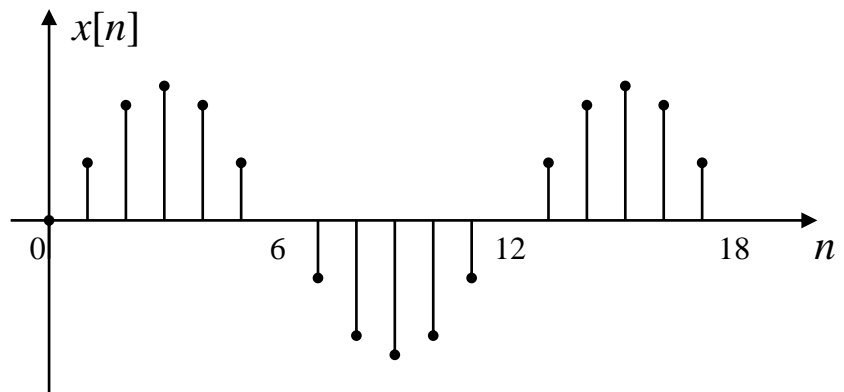
Como é óbvio $a_k = a_{k+N}$ ou seja, bastam N coefs. espectrais sucessivos para representar $x[n]$, o que não acontece no caso contínuo em que pode ser necessário um n° infinito de coefs. para representar $x(t)$.

Exemplo:

$$x[n] = \sin(\Omega_0 n)$$

$$\text{com } \Omega_0 = \frac{2\pi}{12}$$

$$N = 12$$



$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{12}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{12}n} \quad \text{e portanto temos}$$

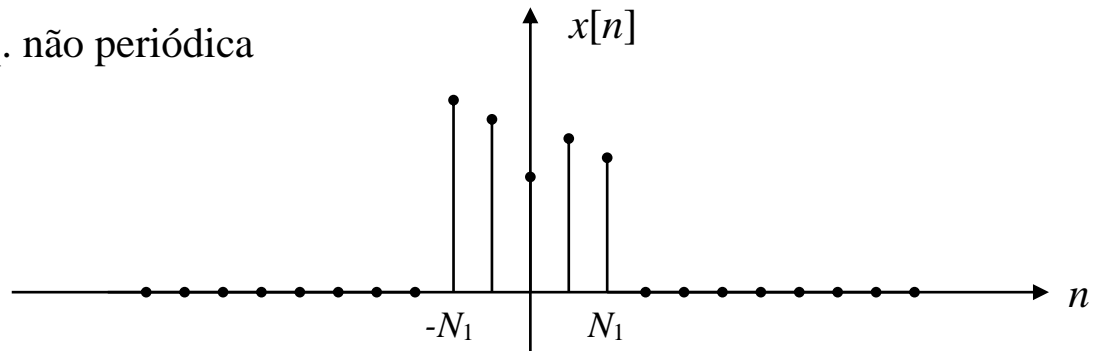
$$a_1 = \frac{1}{2j} = -0.5j \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} = 0.5j$$

e os restantes $\langle N \rangle$ são nulos.

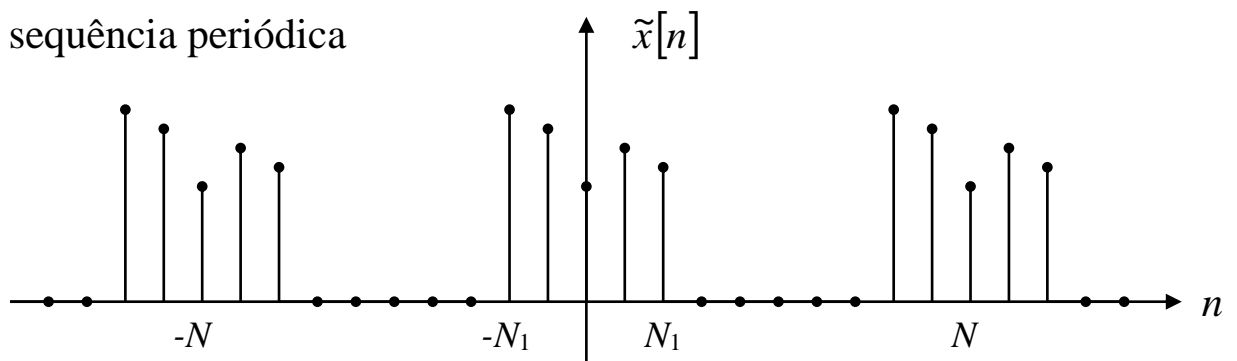
$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = -0.5j \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{10} = 0 \\ a_{11} = a_{-1} = 0.5j \end{array} \right.$$

3.3. Transformada de Fourier de seqüências não periódicas

$x[n]$ - seq. não periódica



$\tilde{x}[n]$ - seqüência periódica



$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Definindo $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ então $a_k = \frac{1}{N} \cdot X(k\Omega_0)$

Logo:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

$$\text{Fazendo } N \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}[n] \rightarrow x[n] \\ \Omega_0 \rightarrow 0 \\ \sum \rightarrow \int \end{cases}$$

Obteremos assim:

Eq. síntese:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

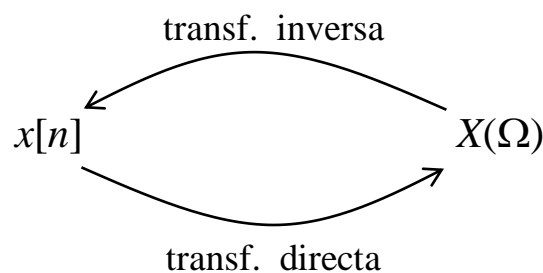
T. Fourier inversa

Eq. análise:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

T. Fourier directa

$X(\Omega) = \text{espectro de } x[n]$ (distribuição de x no domínio da frequência)



Notas importantes:

1. $X(\Omega)$ existe ou converge para qualquer Ω , se

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{ou} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

2. $X(\Omega)$ é periódica de período 2π .

3. Próximo de $\Omega = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ os valores de $X(\Omega)$ correspondem a componentes espectrais de baixa frequência.

4. Próximo de $\Omega = \dots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ os valores de $X(\Omega)$ correspondem a componentes espectrais de alta frequência.

Exemplo 1:

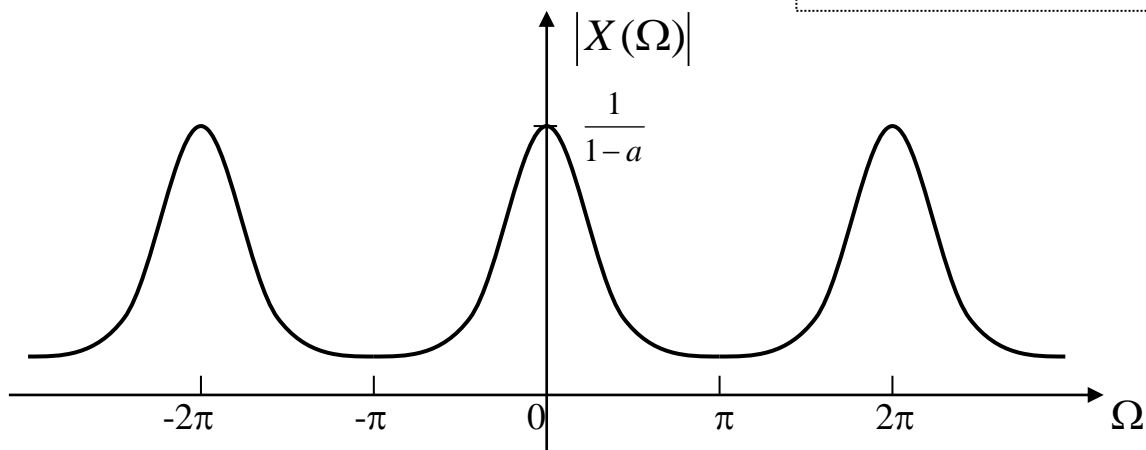
Determinar o espectro da sequência $x[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\Omega})^n$$

$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}$$

Nota: série geométrica

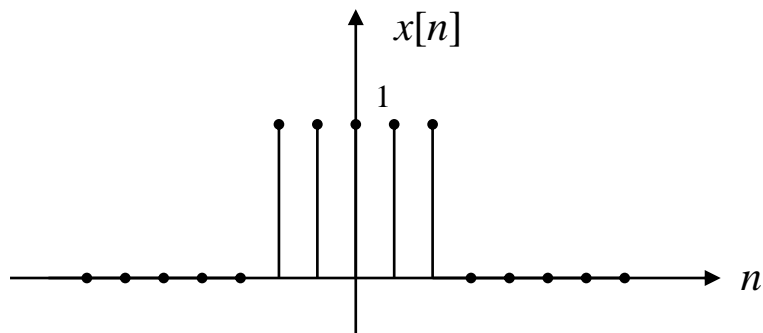
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & (\alpha = 1) \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & (\alpha \neq 1) \end{cases}$$



Poderíamos igualmente representar o argumento de $X(\Omega)$!

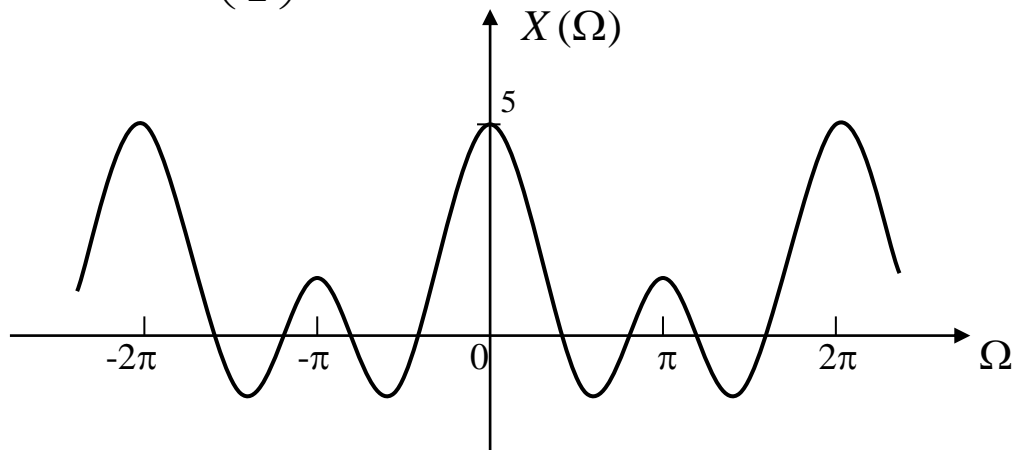
Exemplo 2:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & |n| > 2 \end{cases}$$



$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-2}^2 e^{-j\Omega n} = e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} =$$

$$X(\Omega) = \dots = \frac{\sin\left(\frac{5\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$



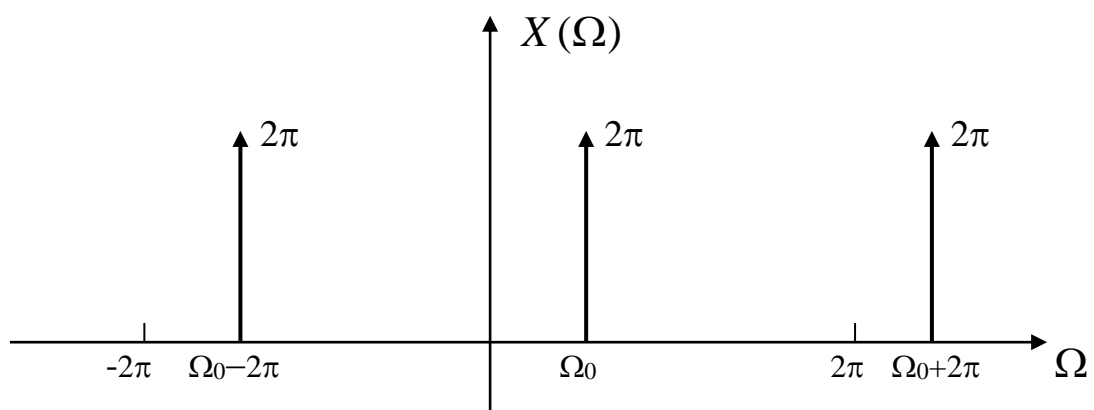
Exemplo 3:

$$x[n] = \delta[n] \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^0 1 \cdot e^{-j\Omega n} = 1$$

Exemplo 4:

Qual a sequência $x[n]$ cuja transformada de Fourier (espectro) é

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) \quad ?$$



Transformando inversamente:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_l 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) e^{j\Omega n} d\Omega =$$

integrando entre 0 e 2π :

$$x[n] = \int_0^{2\pi} \delta(\Omega - \Omega_0) e^{j\Omega_0 n} d\Omega = e^{j\Omega_0 n}$$

3.4. Transformada de Fourier de seqüências periódicas

Seja $\tilde{x}[n]$ uma seqüência periódica de período N : $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + N]$

Como $\tilde{x}[n]$ não verifica a condição: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}[n]| < \infty$ só podemos admitir $\tilde{X}(\Omega)$ em termos de impulsos.

$$\text{Seja } \tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

escolhendo k de 0 a $N-1$:

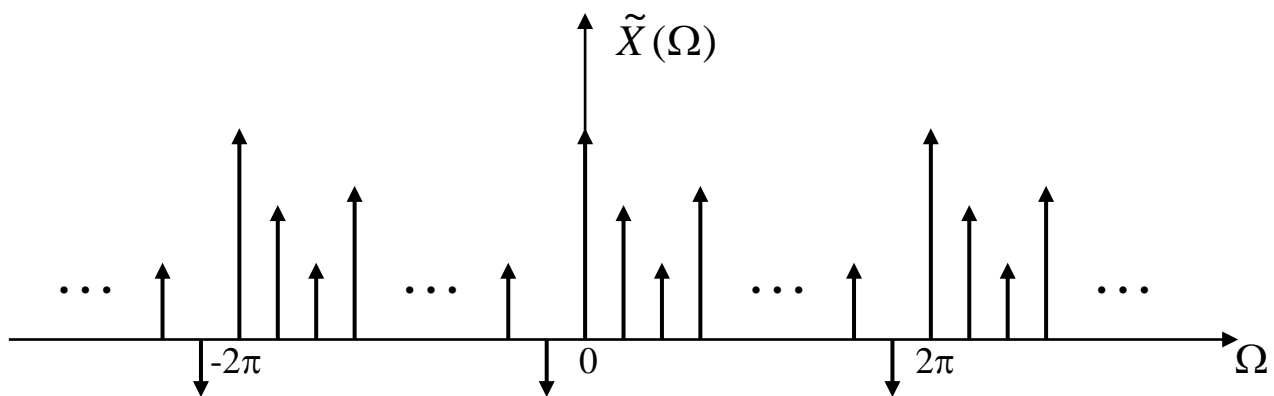
$$\tilde{x}[n] = a_0 + a_1 e^{j \frac{2\pi}{N} n} + a_2 e^{j 2 \frac{2\pi}{N} n} + a_3 e^{j 3 \frac{2\pi}{N} n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1) \frac{2\pi}{N} n}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\Omega) = & a_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - 2\pi l) + a_1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi l\right) + \dots + \\ & + a_{N-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta\left(\Omega - (N-1) \frac{2\pi}{N} - 2\pi l\right) \end{aligned}$$

A expressão anterior pode ser condensada:

$$\tilde{X}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

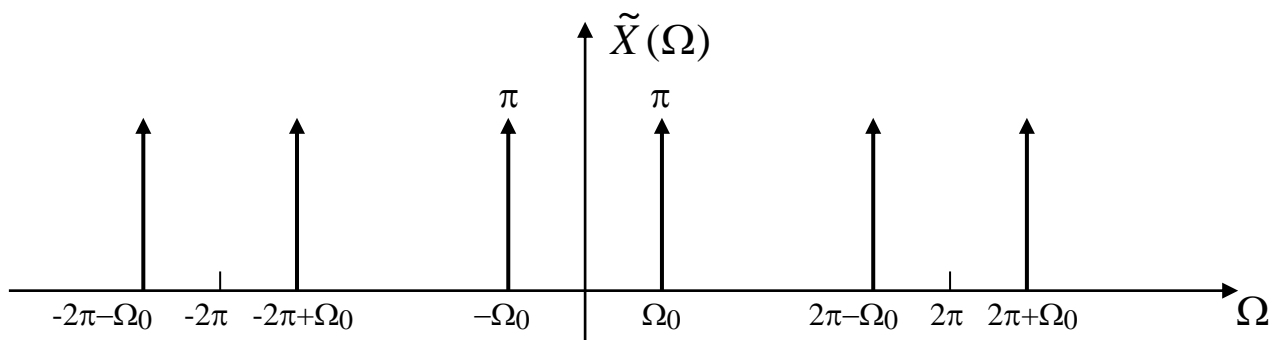
Em cada intervalo de largura 2π a transformada de Fourier é um conjunto de impulsos espaçados de $2\pi/N$ e magnitude $2\pi a_k$ (semelhante ao caso contínuo).

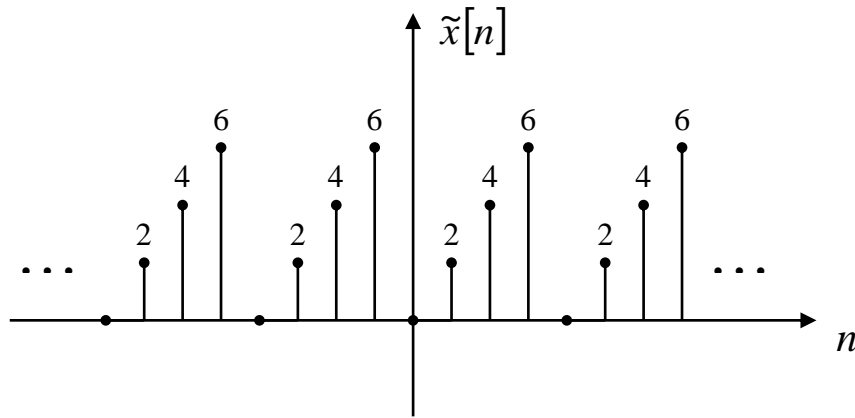


Exemplo 1:

$$\tilde{x}[n] = \cos(\Omega_0) = \text{T. Euler} = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 n}$$

Pelo que $\tilde{X}(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \pi \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)$



Exemplo 2:

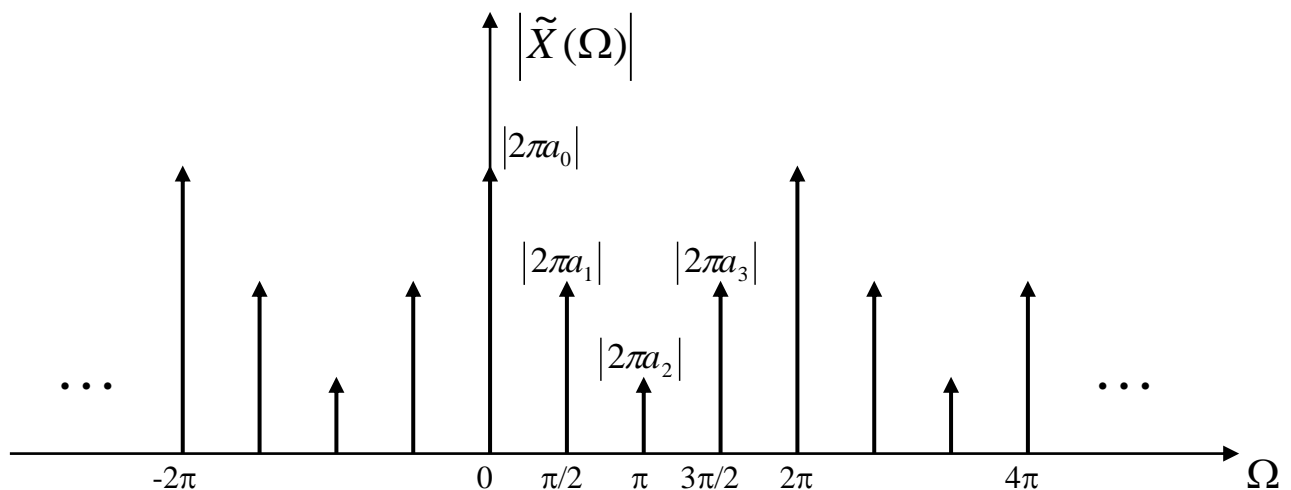
$N = 4 \Rightarrow$ só existem 4 coeficientes a_k distintos

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{4} n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk \frac{\pi}{2} n} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(x[0] e^0 + x[1] e^{-jk \frac{\pi}{2}} + x[2] e^{-jk \pi} + x[3] e^{-jk \frac{3\pi}{2}} \right)$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{4} (x[0] + x[1] + x[2] + x[3]) = 3 \\ a_1 = \dots = -1 + j \\ a_2 = \dots = -1 \\ a_3 = \dots = -1 - j \end{cases}$$

$$a_k = a_{k+4}$$



3.5. *Propriedades da transformada de Fourier de sinais discretos*

"semelhante ao caso contínuo"

"VER TABELAS"

3.6. *A transformada discreta de Fourier (DFT)*

Seja $\tilde{x}[n]$ uma sequência periódica de período N : $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + N]$.

Esta sequência fica completamente conhecida através do conhecimento de N pontos consecutivos uma vez que tem período N .

No domínio da transformada de Fourier (frequências) bastam também N valores para definirem espectralmente a sequência (como visto na secção 3.4) uma vez que os coeficientes a_k são também periódicos de período N . Conclui-se então que a sequência periódica é por natureza compatível com o processamento computacional, dado requerer recursos finitos de memória. De facto quer no domínio dos tempos quer no domínio da transformada de Fourier são necessários apenas N pontos para que a sequência periódica fique completamente definida.

Consideremos agora um período da sequência periódica. Sendo esta sequência não periódica, a sua representação espectral consiste numa função contínua, $X(\Omega)$, que será necessário conhecer entre 0 e 2π para poder representar o sinal (como visto na secção 3.3). Deste modo o processamento

da sequência não periódica requer, quando efectuado no domínio da Transformada de Fourier (DTFT), recursos de memória infinitos (função contínua) o que é incompatível com o processamento computacional.

Comparando as sequências no domínio dos tempos elas são de facto iguais excepto que para obter a sequência periódica é necessário repetir indefinidamente a sequência não periódica. O conhecimento de N pontos no domínio dos tempos define sem ambiguidade ambas as sequências. Então porque razão uma delas (a não periódica) necessita de infinitos pontos em frequência para ser caracterizada e a outra não?

Vejamos agora que um número de pontos finito (N) em frequência pode ser suficiente para caracterizar a sequência não periódica $x[n]$ de tamanho N , cuja representação em termos de DTFT é uma função contínua. Construamos a sequência periódica $\tilde{x}[n]$ por repetições de $x[n]$ ou seja

$$\begin{cases} \tilde{x}[n] = x[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ \tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+N] \end{cases}$$

A sequência periódica $\tilde{x}[n]$ assim obtida tem a mesma informação temporal que $x[n]$ e tem uma representação em termos de Transformada de Fourier de apenas N pontos dados por

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Se estes N pontos caracterizam espectralmente $\tilde{x}[n]$ também caracterizam espectralmente $x[n]$ no sentido que a obtenção de $x[n]$ a partir de $\tilde{x}[n]$ é trivial, basta ficar com um período de $\tilde{x}[n]$ e descartar o resto da sequência. Deste modo podemos dizer que uma sequência não periódica de tamanho N pode ser representada em termos de frequência por um número finito de pontos (N), e estes pontos são a DTFT de uma versão periódica da sequência não periódica.

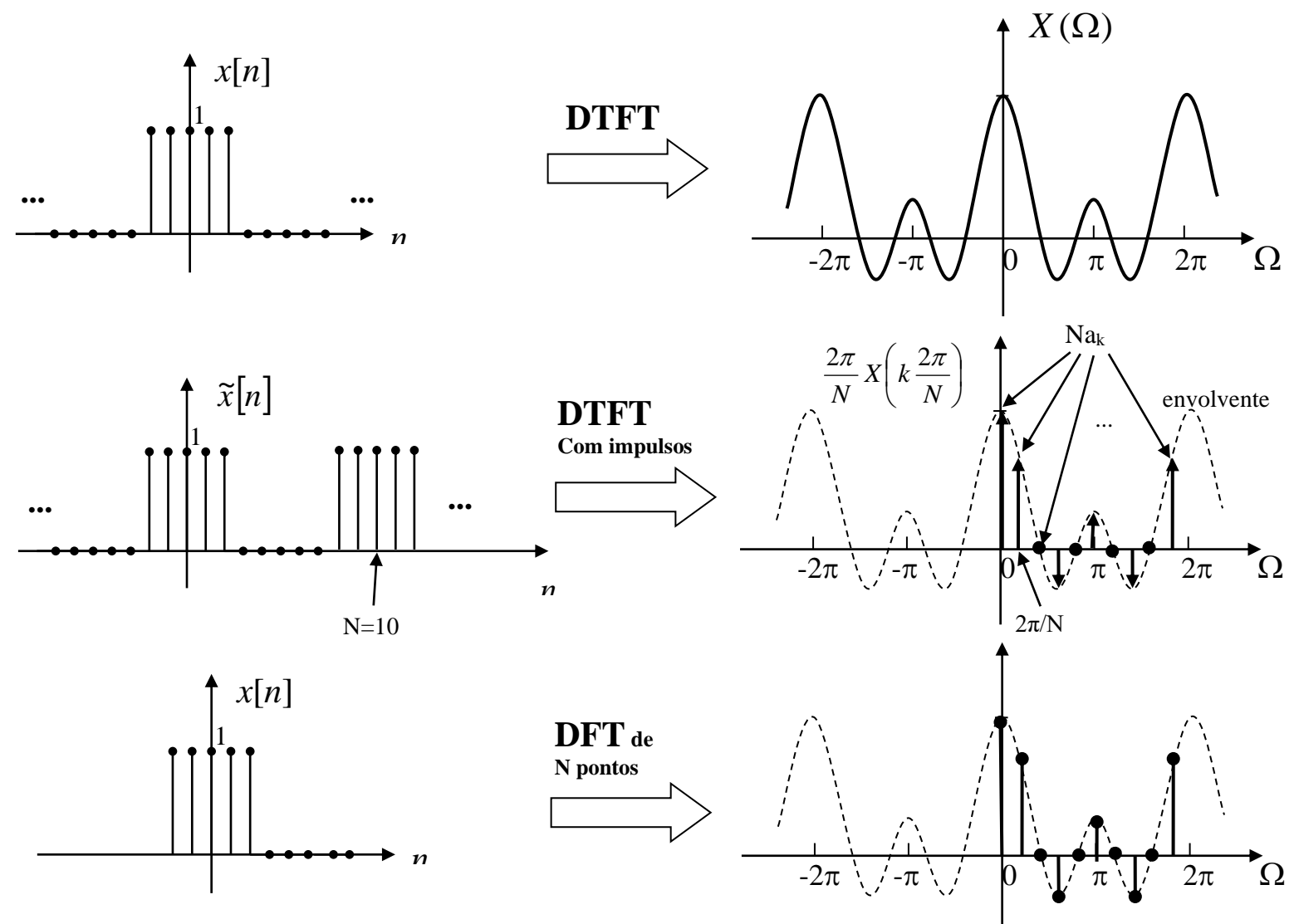
Definimos então uma transformada de Fourier diferente para sequências não periódicas finitas a Discrete Fourier Transform (DFT) em analogia aos coeficientes a_k do seguinte modo:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

A transformada inversa discreta de Fourier é dada por (ver pág. 8)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk \frac{2\pi}{N} n}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Como exemplo relacionemos graficamente a DTFT de uma sequência de duração finita com a sua DFT.



3.6.1A transformada rápida de Fourier (FFT)

A FFT (*Fast Fourier Transform*) de uma sequência finita não periódica não é mais que a sua DFT calculada através de um algoritmo especial que tira partido da simetria complexa conjugada e da periodicidade em n e k da exponencial complexa. Estas propriedades da exponencial complexa são aproveitadas para minimizar o número de operações matemáticas (somas e multiplicações complexas) necessárias ao cálculo da DFT.

O cálculo da DFT requer N multiplicações complexas e $N-1$ somas complexas como se pode verificar a partir da definição (desprezando a multiplicação por $1/N$). Como N é grande (tipicamente 512, 1024 ou superior) é comum assumir-se que o cálculo da DFT requer N multiplicações complexas e N somas complexas para o cálculo de cada coeficiente espectral. Como são N coeficientes o cálculo da DFT requer então N^2 multiplicações e N^2 somas complexas.

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

De modo a tornar o algoritmo mais legível consideremos a seguinte compactação de notação

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

É fácil verificar que a exponencial complexa tem simetria complexa conjugada

$$W_N^{k[N-n]} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$$

e é periódica em n e k

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$$

Os algoritmos da FFT baseiam-se no facto de que a DFT de uma sequência de comprimento N pode ser calculada pela DFT de sequências de tamanho menor obtidas por decomposição da primeira. O modo como este princípio é implementado leva a uma variedade de diferentes algoritmos com eficiência computacional comparável.

Os 2 algoritmos mais comuns são o algoritmo de decimação no tempo e o algoritmo de decimação em frequência. Nesta disciplina iremos apenas abordar o primeiro que deve o seu nome ao facto da sequência ser sucessivamente decomposta em subsequências de metade do tamanho, uma com as amostras de índice par e outra com as amostras de índice ímpar. Deste modo $X(k)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \frac{1}{N} \left(\sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] (W_N^2)^{rk} \right) \end{aligned}$$

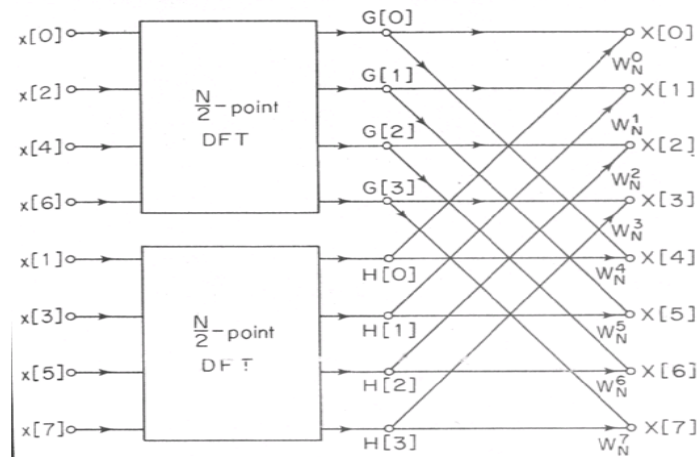
No entanto

$$W_N^2 = e^{-2j \frac{2\pi}{N}} = e^{-j \frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

Pelo que a DFT se pode escrever como

$$NX(K) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} = G(k) + W_N^k H(k)$$

Os somatórios na equação anterior representam DFT's de $N/2$ pontos e são combinados como mostra o seguinte fluxograma para o cálculo da DFT de N pontos. Repare que $G(k)$ e $H(k)$ são DFT's de $N/2$ pontos pelo que pela periodicidade da DTFT são periódicos de período $N/2$. Deste modo para o caso de $N=8$ temos $G(4)=G(0)$ o mesmo acontecendo para $H(k)$.



Cada somatório requer então aproximadamente $(N/2)^2$ somas e multiplicações complexas (pois representam DFT's de $N/2$ pontos) assumindo cálculos efectuados pela definição ou método directo. Os 2 somatórios têm que ser posteriormente combinados requerendo N multiplicações complexas (a exponencial complexa a multiplicar por $H(k)$) e N adições complexas. Deste modo o cálculo da DFT de N pontos requer apenas $N + N^2/2$ multiplicações e adições complexas em vez de N^2 pelo método directo, assumindo que o cálculo das DFT's de $N/2$ pontos é efectuado pelo método directo. Dado que para $N > 2$ se verifica

$$N + \frac{N^2}{2} < N^2$$

o número de adições e multiplicações complexas necessárias ao cálculo da DFT diminui quando se divide a sequência em 2 grupos de amostras; as de índice par e as de índice ímpar. No entanto a eficiência computacional do

cálculo da DFT pode ainda ser melhorada dado que se pode continuar a dividir as sequências em 2 grupos até obter grupos de apenas 2 pontos. Deste modo $G(k)$ pode ser escrito como

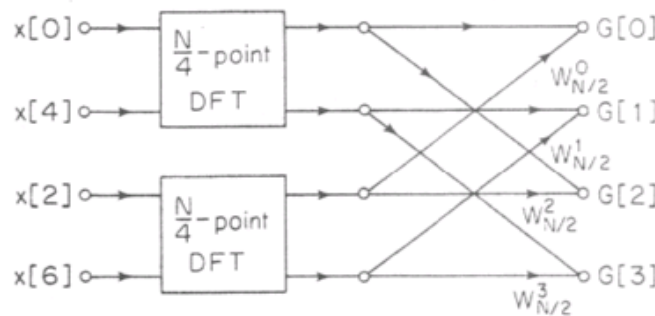
$$G(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g[r] W_{N/2}^{rk} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g[2l] W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g[2l+1] W_{N/2}^{(2l+1)k}$$

$$G(k) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g[2l] W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g[2l+1] W_{N/4}^{lk}$$

De modo idêntico $H(k)$ pode escrever-se como

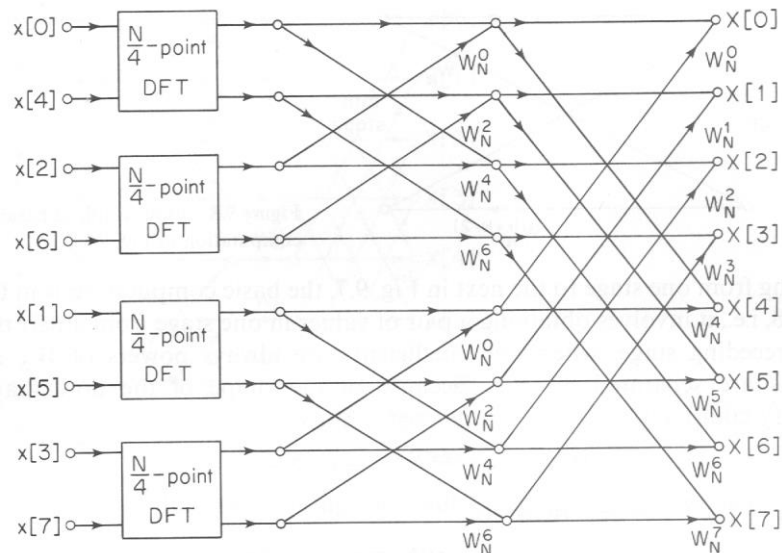
$$H(k) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h[2l] W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h[2l+1] W_{N/4}^{lk}$$

onde os somatórios que compõem $G(k)$ e $H(k)$ representam DFT's de $N/4$ pontos. O diagrama de fluxo seguinte mostra como se calcula $G(k)$ a partir da DFT de $N/4$ pontos ($N=8$).



Substituindo este diagrama de fluxo no diagrama de fluxo da página 3.16 obtém-se o diagrama de fluxo da figura seguinte em potências de W_N em vez de potências de $W_{N/2}$ atendendo à igualdade

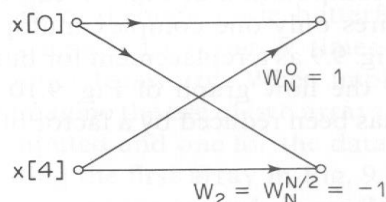
$$W_{N/2} = W_N^2$$



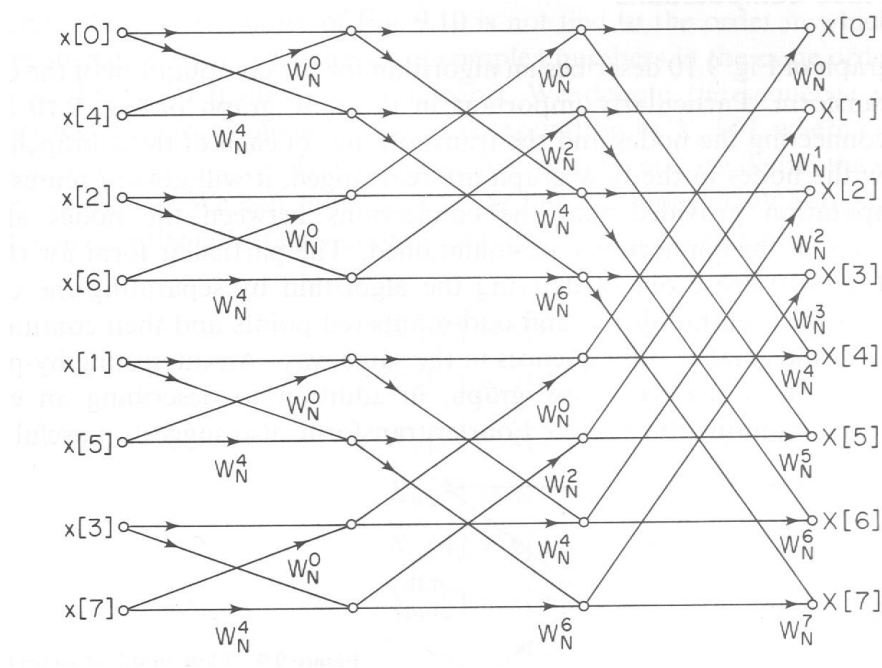
Como no nosso exemplo temos $N=8$ reduzimos já o cálculo da DFT de 8 pontos ao cálculo de DFT's de 2 pontos ($N/4$). Deste modo já não há lugar a mais divisões das seqüências correntes e podemos começar a fazer os cálculos. Temos então que calcular 4 DFT's de 2 pontos e seguir o diagrama de fluxo da figura anterior para obter a DFT de 8 pontos. A DFT de 2 pontos para os pontos $x[0]$ e $x[4]$ (primeiro somatório da expressão de $G(k)$) pode ser calculada como

$$\sum_{l=0}^{(N/4)-1} g[2l] W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^2 x[4l] W_{N/4}^{lk} = x[0] W_2^0 + x[4] W_2^1$$

A figura seguinte mostra o diagrama de fluxo para a DFT de 2 pontos calculada na expressão anterior



Substituindo este diagrama de fluxo no diagrama de fluxo da figura anterior obtemos o diagrama de fluxo completo para o cálculo da DFT de 8 pontos a partir do algoritmo FFT da decimação no tempo.



Através deste diagrama de fluxo podemos calcular qualquer coeficiente da DFT de 8 pontos. Por exemplo $X(3)$ pode ser calculado pela soma do fluxo que chega ao respectivo nodo. Um ramo proveniente do nodo localizado à esquerda ao qual chegam 2 ramos. Destes 2 ramos um é proveniente da parte superior do gráfico e transporta um fluxo de $x[0] + W_N^4 x[4]$, outro é proveniente da esquerda do nodo e transporta um fluxo de $W_N^6 (x[2] + W_N^4 x[6])$. Por um processo análogo se verifica que o ramo que chega a $X(3)$ proveniente da parte inferior do gráfico transporta um fluxo de $W_N^3 (x[1] + W_N^4 x[5] + W_N^6 (x[3] + W_N^4 x[7]))$.

Deste modo $X(3)$ pode ser calculado como

$$NX(3) = x[0] + W_N^4 x[4] + W_N^6 (x[2] + W_N^4 x[6]) + W_N^3 (x[1] + W_N^4 x[5] + W_N^6 (x[3] + W_N^4 x[7]))$$

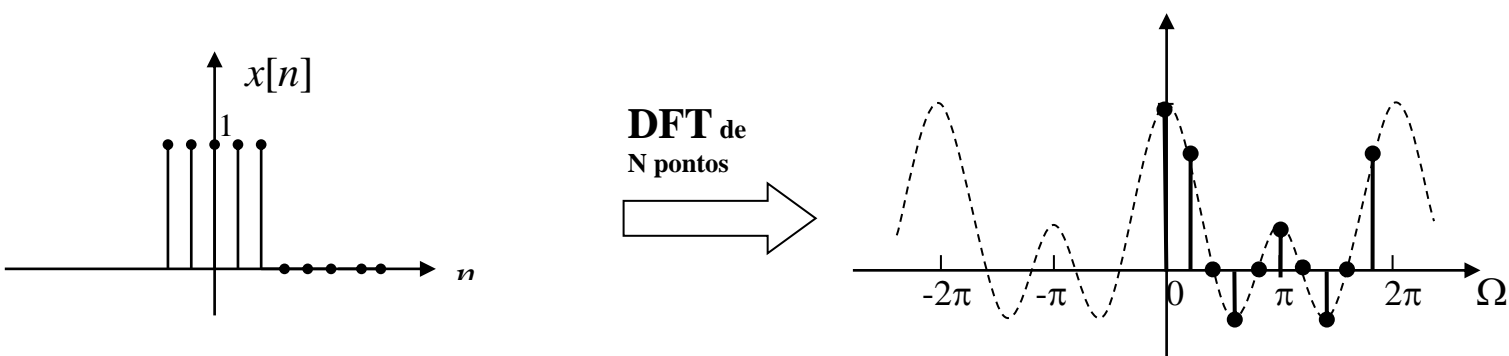
Para o caso mais geral, onde N é uma potência de 2 ($N=2^v$), decompunha-se agora as transformadas de $N/4$ pontos em transformadas de $N/8$ pontos e prosseguir-se-ia até obter transformadas de apenas 2 pontos. Este processo ia

requerer $\nu = \log_2 N$ estágios de cálculo. Por análise da figura anterior podemos verificar que cada coluna de nodos (exceptuando a primeira onde entram os valores de $x[n]$) representa um estágio de cálculo. Como cada estágio tem 8 nodos significa que é necessário calcular $N=8$ coeficientes diferentes (nodos) em cada estágio. Pela análise da figura também se verifica que cada coeficiente (valor no nodo) requer uma multiplicação complexa e uma adição complexa. Deste modo o volume de cálculo requerido passa a ser o número de estágios a multiplicar pelo número de coeficientes em cada estágio ou seja $N \log_2 N$ em vez de N^2 quando se usa o método directo. Este método de cálculo da DFT a que se dá o nome de FFT apresenta uma substancial diminuição de operações matemáticas necessárias ao cálculo da DFT. Para ter uma ideia desta redução de operações consideremos $N=1024$ por ser um valor muito comum usado em reconhecimento automático da fala, análise de sinais biomédicos como electroencefalogramas (EEG), magnetoencefalogramas (MEG) e ressonâncias magnéticas (RMI). Neste caso usando o método directo seriam necessárias 1.048.576 somas e multiplicações complexas enquanto pelo método da FFT (decimação no tempo) seriam necessárias apenas 10.240. O método da FFT permite então neste caso uma redução superior a 100 vezes no número de somas e multiplicações complexas. Se atendermos a que estes sinais são segmentados e que a sua duração é em geral significativa então teremos uma redução de cálculo da ordem de 100 vezes o número de segmentos, o que é francamente significativo pois em geral estes sistemas devem ter um funcionamento do tipo “ON-LINE”. Por exemplo não faz sentido estar a falar para um reconhecedor automático da fala e só passados alguns instantes (por exemplo 5 minutos) é que o sistema interpretou o que foi dito. O algoritmo da

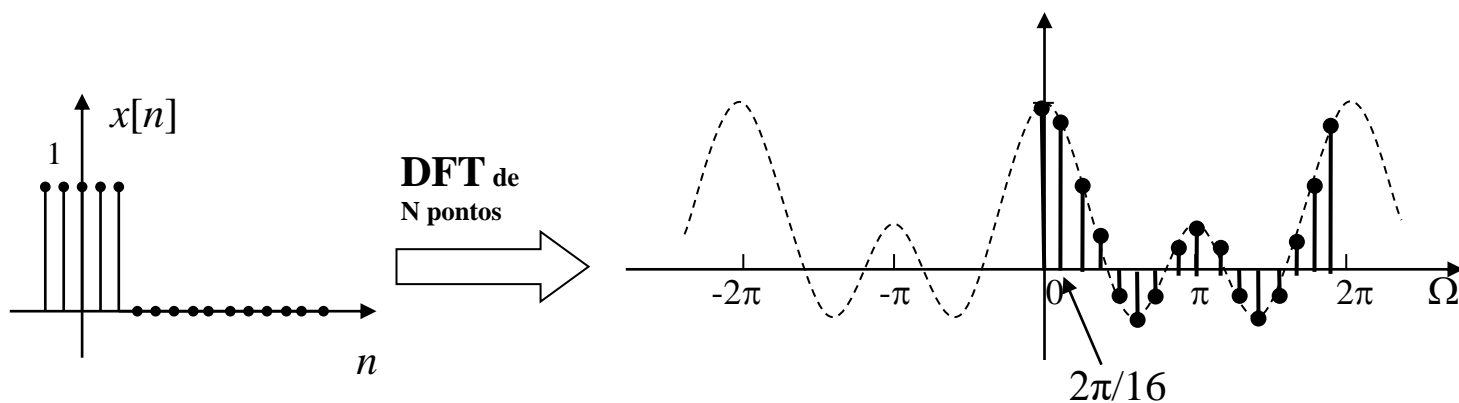
FFT faz então com que os sistemas sejam mais “on-line” ou seja mais rápidos na resposta.

Uma limitação ao uso da FFT poderá estar no facto de que o algoritmo só pode ser integralmente aplicado se o sinal discreto for composto por um número de pontos que seja uma potência de 2. No entanto podemos pensar que uma solução poderá ser acrescentar zeros ao sinal até obter um número de pontos que seja uma potência de 2. Vejamos de que forma o espectro do sinal vem alterado e analisemos a aplicabilidade desta solução.

Consideremos o pulso discreto $x[n]$ mostrado na figura da página 3.13 cuja duração não é uma potência de 2



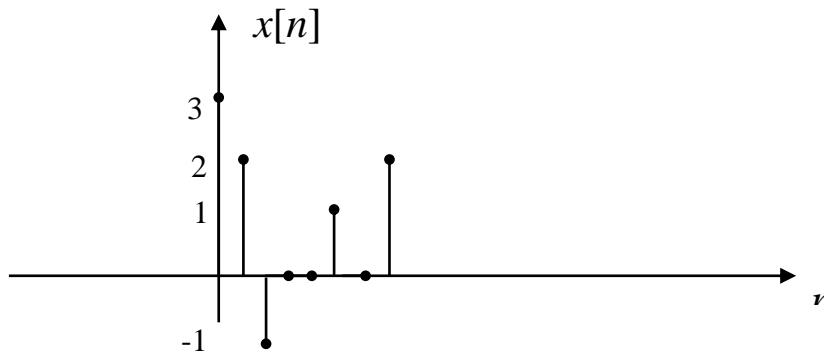
Consideremos agora que estendemos a duração do pulso para 16 (2^4). Podemos agora calcular a DFT deste pulso estendido usando o algoritmo da FFT segundo o mesmo raciocínio que foi usado na página 3.13 ou seja fazer um sinal periódico repetindo indefinidamente este sinal estendido, calcular a DTFT do sinal assim obtido e seguidamente tomando os pontos da DTFT do sinal periódico como os pontos da DFT do sinal estendido. O sinal e a sua transformada vêm então agora modificados como mostra a figura seguinte.



Comparando as duas figuras anteriores concluímos que estender um sinal com zeros significa obter mais pontos, quer no domínio dos tempos quer no domínio das frequências, aumentando-se deste modo na mesma proporção a resolução em frequência (mais pontos sobre a mesma função). De facto esta conclusão era expectável uma vez que o sinal periódico obtido por repetições do sinal estendido tem um período fundamental maior logo uma frequência fundamental menor. Como os harmónicos que constituem o sinal têm frequência múltipla da frequência fundamental significa que vão existir mais harmónicos até 2π pois estão menos espaçados em virtude da frequência fundamental ser menor. Como propriedade da DTFT depois tudo se repete com período 2π . Podemos então concluir que a única desvantagem deste método ou seja da extensão de uma sequência com zeros para aplicação do algoritmo da FFT será a necessidade de mais memória para armazenar mais coeficientes espectrais que os necessários à caracterização do sinal. Deste modo podemos dizer que se uma sequência finita não periódica for constituída por um número de pontos que é uma potência de 2 ($N=2^v$) então a DFT calculada pela definição (ver pág. 3.13) e a FFT são coincidentes. Noutros casos a FFT será não a DFT da sequência mas a DFT da sequência modificada, estendida com zeros até que seja obtido um comprimento da sequência que seja uma potência

de 2. Nestes casos a FFT tem mais pontos (maior resolução espectral) que a DFT.

Consideremos como um exemplo o cálculo da DFT da seguinte sequência $x[n]$ pelo método directo e usando o algoritmo da FFT. Seja então $x[n]$ dado na figura seguinte



Então pela definição temos

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] = \frac{7}{8} \quad \text{média ou componente contínua do sinal}$$

$$X(1) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{8}n} = \frac{1}{8} \left(3 + 2e^{-j\frac{\pi}{4}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\frac{5\pi}{4}} + 2e^{-j\frac{7\pi}{4}} \right) = \dots = \frac{3 + 3\sqrt{2}/2}{8} + j \frac{1 + \sqrt{2}/2}{8}$$

$$X(2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{4\pi}{8}n} = \frac{1}{8} \left(3 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\pi} + e^{-j\frac{5\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{7\pi}{2}} \right) = \dots = \frac{1}{2} - j \frac{1}{8}$$

$$X(3) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{6\pi}{8}n} = \frac{1}{8} \left(3 + 2e^{-j\frac{3\pi}{4}} - e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j\frac{15\pi}{4}} + 2e^{-j\frac{21\pi}{4}} \right) = \dots = \frac{3 - 3\sqrt{2}/2}{8} + j \frac{\sqrt{2}/2 - 1}{8}$$

$$X(4) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\pi n} = \frac{1}{8} \left(3 + 2e^{-j\pi} - e^{-j2\pi} + e^{-j5\pi} + 2e^{-j7\pi} \right) = \dots = -\frac{3}{8}$$

$$X(5) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{5\pi}{4}n} = \frac{1}{8} \left(3 + 2e^{-j\frac{5\pi}{4}} - e^{-j\frac{5\pi}{2}} + e^{-j\frac{25\pi}{4}} + 2e^{-j\frac{35\pi}{4}} \right) = \dots = \frac{3 - 3\sqrt{2}/2}{8} + j \frac{1 - \sqrt{2}/2}{8} = X^*(3) \quad (3)$$

Comparando as exponenciais que multiplicam por cada valor $x[n]$ nos cálculos de $X(3)$ e $X(5)$ verifica-se que são conjugadas. Por exemplo $e^{-j\frac{3\pi}{4}}$ em $X(3)$ é complexo conjugado de $e^{-j\frac{5\pi}{4}}$ em $X(5)$. Como ambas estas exponenciais estão a multiplicar pelo mesmo valor, $x[1]$, então o cálculo feito em $X(3)$ pode ser aproveitado para $X(5)$. Isto acontece para todas as outras exponenciais que multiplicam por cada um dos outros valores de $x[n]$. Esta é a simetria complexa conjugada que sendo aproveitada permite calcular a DFT com menos operações (somas e multiplicações complexas) uma vez que se evita repetição de cálculos. Esta é a razão pela qual $X(3)=X^*(5)$.

Mas existe ainda mais um tipo de simetria que pode ser aproveitada, a simetria periódica. Repare que as exponenciais $e^{-j\frac{3\pi}{4}}$ e $e^{-j\frac{35\pi}{4}}$ em $X(3)$ e $X(5)$ respectivamente têm o mesmo valor pois são ângulos que diferem de um número inteiro de 2π . Esta simetria acontece também para $e^{-j\frac{5\pi}{4}}$ e $e^{-j\frac{21\pi}{4}}$ respectivamente nos cálculos de $X(3)$ e $X(5)$.

Ambos os tipos de simetria acontecem conjuntamente para k e $N-k$ como se pode verificar pelo resultado dos restantes coeficientes da DFT, ou seja também $X(2)=X^*(6)$ e $X(1)=X^*(7)$. São justamente estas simetrias que são aproveitadas pelo algoritmo da FFT para minimizar o número de operações no cálculo da DFT.

Os restantes coeficientes da DFT são

$$X(6) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{3\pi}{2}n} = \frac{1}{8} \left(3 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} - e^{-j3\pi} + e^{-j\frac{15\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{21\pi}{2}} \right) = \dots = \frac{1}{2} + j\frac{1}{8} = X^*(2)$$

$$X(7) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{7\pi}{4}n} = \frac{1}{8} \left(3 + 2e^{-j\frac{7\pi}{4}} - e^{-j\frac{7\pi}{2}} + e^{-j\frac{35\pi}{4}} + 2e^{-j\frac{49\pi}{4}} \right) = \dots = \frac{3+3\sqrt{2}/2}{8} - j\frac{1+\sqrt{2}/2}{8} = X^*(1)$$

Usemos agora o algoritmo da FFT para calcular por exemplo $X(3)$ cujo caminho ao longo do gráfico de fluxo é dado na pág. 3.19

$$NX(3) = x[0] + W_N^4 x[4] + W_N^6 (x[2] + W_N^4 x[6]) + W_N^3 (x[1] + W_N^4 x[5] + W_N^6 (x[3] + W_N^4 x[7]))$$

como $x[4]=x[6]=x[3]=0$ temos

$$X(3) = 3 + W_N^6(-1) + W_N^3(2 + W_N^4 + W_N^6(2W_N^4)) = \dots = \frac{3-3\sqrt{2}/2}{8} + j\frac{\sqrt{2}/2-1}{8}$$

3.7. Sistemas discretos LTI e equações diferença

Na página 1.12 sugere-se que o comportamento de sistemas contínuos pode ser caracterizado por uma equação diferencial que relaciona a entrada e a saída. Do mesmo modo os sistemas discretos podem ser caracterizados por uma equação de diferenças relacionando a entrada e a saída. Se um sistema é linear então a equação que o caracteriza é de coeficientes constantes, por exemplo se um sistema discreto é linear e caracterizado pela equação

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n]$$

então os coeficientes a_k e b_k são constantes (não dependem de n). A equação anterior pode ser generalizada para

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

De modo a poder determinar a resposta em frequência do sistema caracterizado pela equação de diferenças anterior, apliquemos a transformada

de Fourier a ambos os lados da equação e usemos as propriedades da linearidade e do deslocamento no tempo. Obtém-se deste modo

$$Y(\Omega) \sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} = X(\Omega) \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}$$

Então a resposta em frequência do sistema pode ser calculada usando a propriedade da convolução, ou seja

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$

Consideremos agora um exemplo:

Considere o sistema discreto LTI com resposta a impulso $h[n] = (1/2)^n u[n]$. Utilize a DTFT para determinar a resposta do sistema ao sinal $x[n] = (n+1)(1/4)^n u[n]$.

Das tabelas temos

$$\begin{aligned} (n+1)\alpha^n u[n] &\xleftrightarrow{\text{T. F.}} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \right)^2 \\ \alpha^n u[n] &\xleftrightarrow{\text{T. F.}} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

pelo que $X(\Omega)$ e $H(\Omega)$ são respectivamente dados por

$$X(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega}\right)^2} \qquad H(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

Então a saída do sistema pode ser calculada pela propriedade da convolução, expandindo em seguida a expressão de $Y(\Omega)$ em fracções parciais para que se possam usar de novo as tabelas da transformada de Fourier, ou seja

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2} = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{-2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}$$

Recorrendo às 2 transformadas de Fourier mostradas em cima que correspondem a valores tabelados podemos expressar a saída do sistema como

$$y[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$