Introdução

Teoria de Controlo

Licenciatura Engenharia Física - 3º ano

Tuesday, February 22, 2022

Vinícius Silva | Automação Controlo e Robótica | ID7267@alunos.uminho.pt

Conteúdo da Apresentação

1. O que é o Controlo Automático de Processos
2. Os Problemas dos Sistemas Manuais de Controlo
3. Constituição de um Sistema Automático de Controlo
4. Termos Importantes em Controlo de Processos
5. Objectivo e Importância dos Sistemas Automáticos de Controlo
6. Controlo Regulador e Servo Controlo
7. Sinais de Transmissão
8. Estratégias de Controlo
9. Conhecimentos Necessários para o Controlo de Processos, exercícios
10. Introdução as Transformadas de Laplace

O que é o Controlo de Processos Automático?

- Consiste num sistema onde o controlo das variáveis do sistema **não requer** a **intervenção** do operador.

- Ex: Sistema de controlo de temperatura, sistema de controlo de velocidade, sistema de controlo de nível de água.
  - As variáveis temperatura, velocidade, nível são controladas automaticamente.

Os problemas dos sistemas manuais de controlo

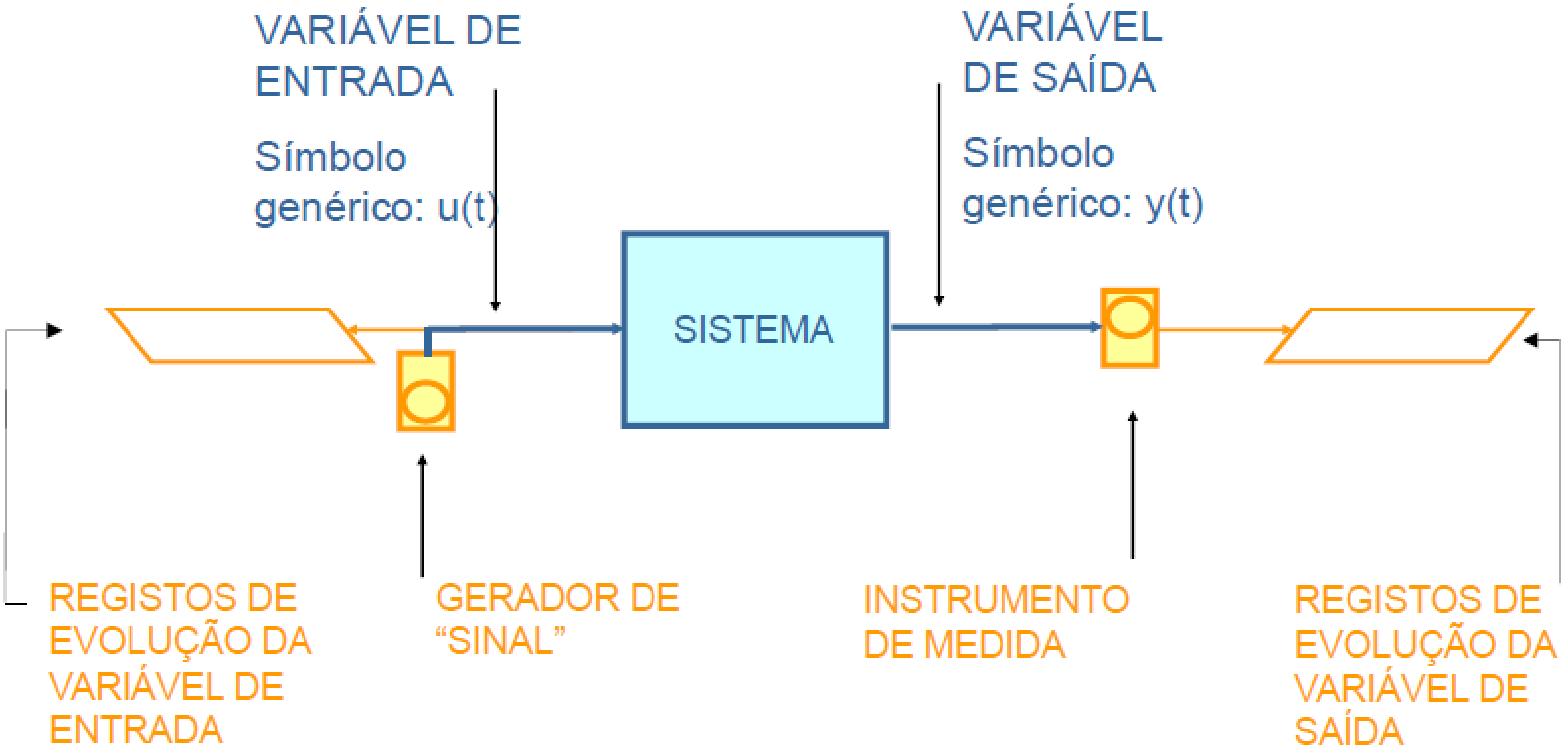
- Os **sistemas manuais** de controlo são caracterizados por:
  - A constante monitorização dos operadores para efetuar as alterações corretivas;
  - Diferentes operadores podem efectuar diferentes decisões, ou seja com resultados menos consistentes;
  - Nos processos de grandes dimensões, existem inúmeras variáveis a controlar, o que requeria um grande número de operadores.
- Estes problemas são resolvidos pelo controlo automático.

Interface do Sistema

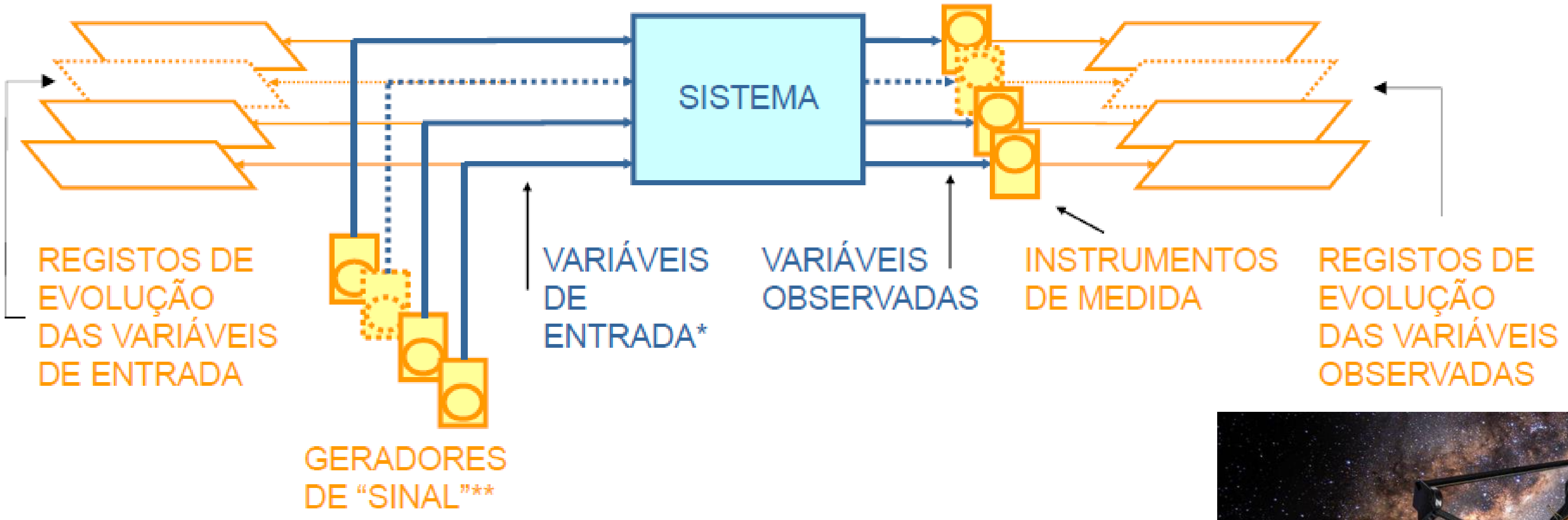
- Sistemas SISO – Single Input | Single output
  - Sistemas mais simples;
  - São os mais comuns.

- Sistemas MIMO – Multiple Input | Multiple output
  - Sistemas mais complexos;

Sistema SISO



Sistema MIMO



Webber telescope

Constituição de um sistema de controlo (1)

- Para se alcançar um sistema de controlo, este deve ser projectado e implementado.

- Os **3 elementos** básicos de um sistema de controlo são:
  - **Sensor/transmissor** – efectua a medição/transmissão da variável a monitorizar;
  - **Controlador** –”cérebro” do sistema, toma as decisões a implementar, para alcançar o desejado;
  - **Actuador** – aplica as acções ao sistema por ordem do controlador.

Constituição de um sistema de controlo (2)

- As acções de Medida (M), Decisão (D) e Acção (A), associadas aos elementos básicos do sistema de controlo, devem estar **em malha fechada**.

  - Ou seja, na base de uma medida é efectuada um decisão, e na base de uma decisão é efectuada uma acção.

  - Bem como, uma acção efectuada deve retornar e afectar a medição, de outra forma o controlo não é alcançado.

Termos importantes em controlo de processos (1)

- **Variável controlada** ou **variável do processo** - consiste na variável que deve ser mantida ou controlada num valor desejado – objeto do meu controlo.
- **Variável de medida** – Valor obtido pelo sensor.
- ***Set Point ou Referência*** – consiste no valor desejado da variável controlada, ou seja a função do sistema de controlo é mantê-la nesse valor.
- **Variável de comando** – é a ordem que vai do controlador para o atuador.
- **Variável de manipulação** – variável utilizada para manter a variável controlada no *set point* – variável manipulada pelo atuador.

Termos importantes em controlo de processos (2)

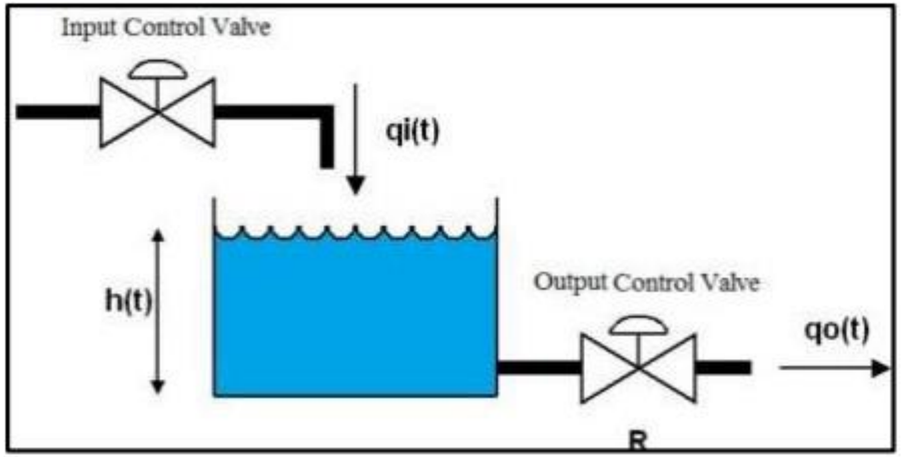
- ***Disturbance ou Perturbação*** – variável que provoca um desvio não desejado da variável controlada ao *set point*.

  - Os sistemas devem garantir capacidade de controlo para as perturbações comuns.

  - Se não ocorrem perturbações, os sistemas eram estacionários, ou seja não seria necessário monitorizar continuamente o processo.

Exemplo

- Dispositivos do Sistema:
  - Sistema: Tanque.
  - Sensor: Boia.
  - Controlador: Microcontrolador.
  - Atuador: Válvula de entrada e saída.
- Variáveis de controlo:
  - Var. controlada: Nível de água do tanque.
  - Var. medida: Altura da água dada pela boia.
  - Var. referência: 5.75m de altura.
  - Var. comando: % de abertura ou fecho das válvulas.
  - Var. manipulação: fluxo de entrada e saída da água.
  - Var. perturbação: oscilação da água do tanque.



Termos importantes em controlo de processos (3)

- **Controlo manual** – condição na qual o controlador é desligado do processo, ou seja o controlo é efectuado pelo operador.

- **Controlo em malha fechada** – condição na qual o controlador é ligado ao processo, comparando o *set point* com a variável a controlar e determinando qual a acção correctiva a tomar.

Objectivo e importância dos sistemas de controlo automático de processos

- **Objectivo**: Ajustar a variável manipulada de forma a manter a variável controlada no *set point* considerando a influência das perturbações.
- **Importância**:
  - Prevenir os danos do equipamento de processos e nos recursos humanos, minimizar o desperdício, proteger o ambiente através do controlo de emissões.
  - Manter a taxa da planta de produção com um custo mínimo;
  - Manter a qualidade do produto numa base contínua e com custo mínimo.

Controlo Regulador e Servo Controlo

- **Controlo Regulador** – refere-se aos sistemas projectados para compensar os desvios das variáveis controladas ao *set point*, causados pelas perturbações (mais comum).

- **Servo Controlo** – refere-se aos sistemas nos quais o *set point* se altera em função do tempo devendo a variável controlada segui-lo.

Sinais de transmissão (1)

- Os processos industriais utilizam 3 principais tipos de sinais:
  - Sinais pneumáticos ou pressão de ar (entre 3 e 15 psi) - representação em P&IDs -
  - Sinais elétricos (entre 4 e 20 mA) – representação em P&IDs -
  - Sinais digitais ou discretos (0 e 1) – representação em P&IDs -

P&IDs – Piping and Instrumentation Diagrams

Sinais de transmissão (2)

- Por vezes é necessário convertê-los entre si, utilizando-se transdutores ou conversores:

  - De corrente para pressão – transdutor I/P

  - Analógico para digital (A/D) e digital para analógico (D/A) – de tensão

  - Transdutor P/I (pressão - corrente), E/P (tensão - pressão), P/E (pressão - tensão), etc

Estratégias de controlo (1)

Malha aberta

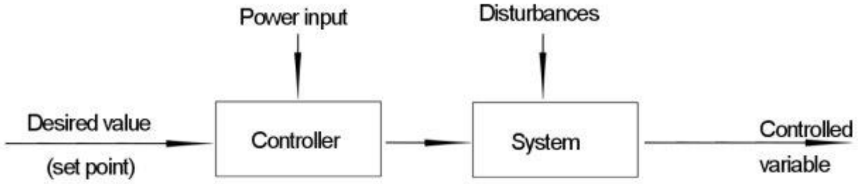


Figure 1A

Malha fechada

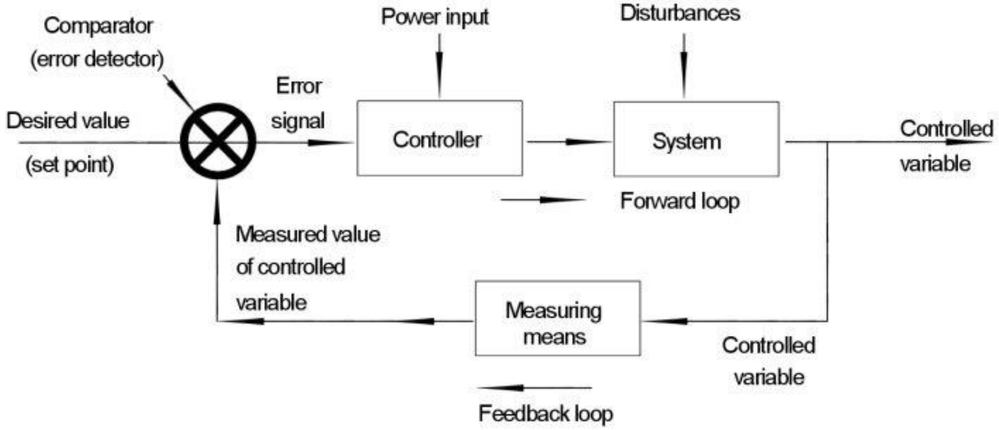


Figure 1B

Estratégias de controlo (2)

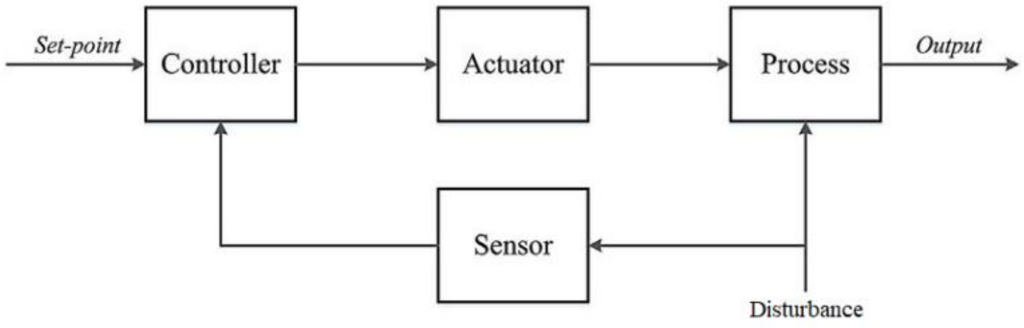
- Controlo em malha fechada (*feedback*)
  - Vantagens:
    - compensa a saída para todas as perturbações
      - quando a variável se desvia do *set point* , o controlador altera a sua saída para manter a a variável a controlar no valor desejado.
    - O controlador funciona com conhecimento mínimo do processo.

Estratégias de controlo (2)

- Controlo em malha fechada (*feedback*)
  - Desvantagens:
    - Pode apenas compensar uma perturbação se a variável a controlar se desviar do *set point*
      - a perturbação deve propagar-se por todo o processo antes que o esquema de controlo em malha fechada possa iniciar uma acção para a compensar.

Estratégias de controlo (3) – Antecipação (feedfoward)

- Identifica perturbações e prepara o sistema para não sentir o efeito das perturbações. Impede instabilidade na resposta.



Estratégias de controlo (3) – Antecipação (feedfoward)

- Controlo por antecipação (*feedforward*)

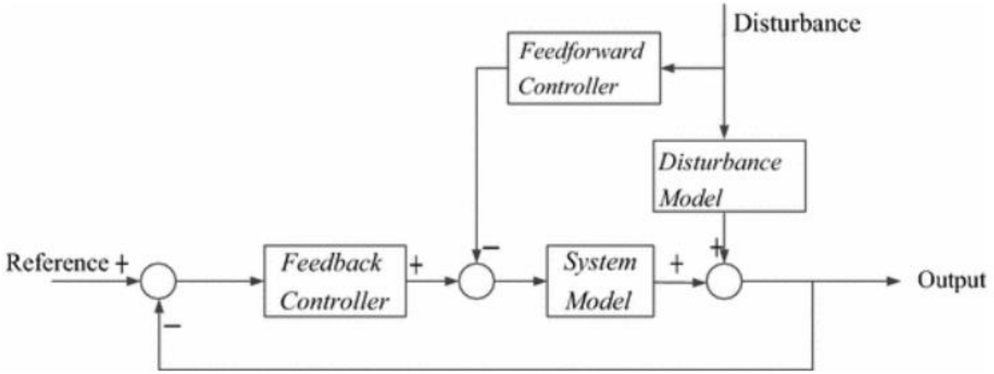
  - **Vantagem**: mede as perturbações e compensa-as antes que a variável a controlar se desvie do *set point*.

  - Normalmente o método mais comum na indústria

  - **Desvantagem**: geralmente mais dispendioso, por isso deve ser verificada se a sua implementação é vantajosa face à do controlo em malha fechada

Estratégias de controlo (4) - Realimentação Negativa + Antecipação

- Dois objetivos principais de ação de controlo:
  1. Ação reguladora em que se pretende manter o valor da variáveis de saída em níveis pré-estabelecidos;
  2. Ação servo em que se pretende que as variáveis de saída sigam trajetórias impostas aos ‘pontos estabelecidos’.



Conhecimentos necessários para o controlo de processos

- O engenheiro deve:
  - entender os princípios da engenharia do processos (termodinâmica, transferência de calor, eléctricos, etc)
  - entender o comportamento dinâmico dos processos
    - Desenvolver um conjunto de equações que descrevam os processos – modelação
      - Utilização de transformadas de Laplace, para simplificação

Exercícios

- Para os seguintes sistemas de controlo automático encontrados diariamente identifique os dispositivos que efectuam a medida (M), decisão (D) e funções de ação (A), e classifique o funcionamento da ação como “On/Off” ou “Regulador”:
  - Controlo Manual de temperatura de um chuveiro
  - Forno de cozinha
  - Torradeira
  - Velocidade de cruzeiro de um automóvel
  - Frigorífico
  - Controlo Automático de temperatura de um chuveiro

Ferramentas Matemáticas para Análise dos Sistemas de Controlo

Definição de transformada de Laplace

- Na análise da dinâmica de processo, as variáveis do processo e os sinais de controlo são funções do tempo, t. A transformada de Laplace de uma função f(t) é definida por:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$

- A transformada altera a função do tempo, f(t), numa função na variável da transformada de Laplace, F(S).
- Os limites de integração são apenas definidos para tempos positivos.

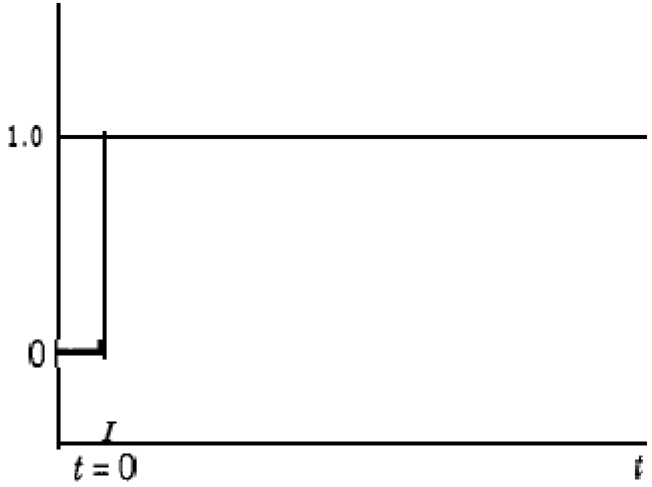
Principais funções de entrada dos processos

- Degrau Unitário

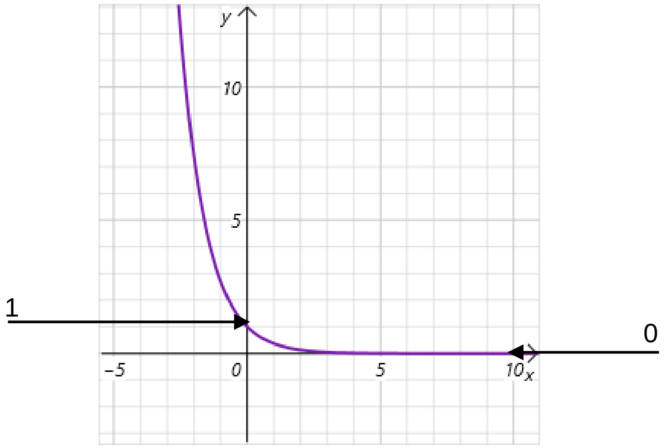
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s}(0 - 1) = \frac{1}{s}$$



e^{-st}



Principais funções de entrada dos processos

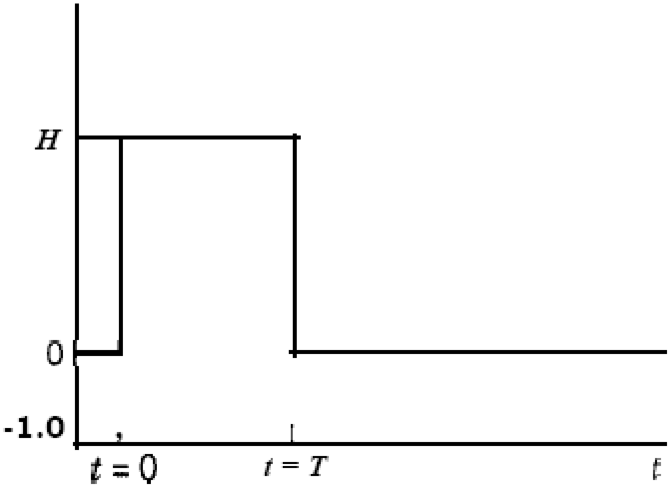
- Degrau de magnitude H e duração T

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,\ t \geq T \\ H & 0 \leq t < T \end{cases}$$

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^T He^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{H}{s}e^{-st}\Big|_0^T = -\frac{H}{s}(e^{-sT} - 1)$$

$$= \frac{H}{s}(1 - e^{-sT})$$

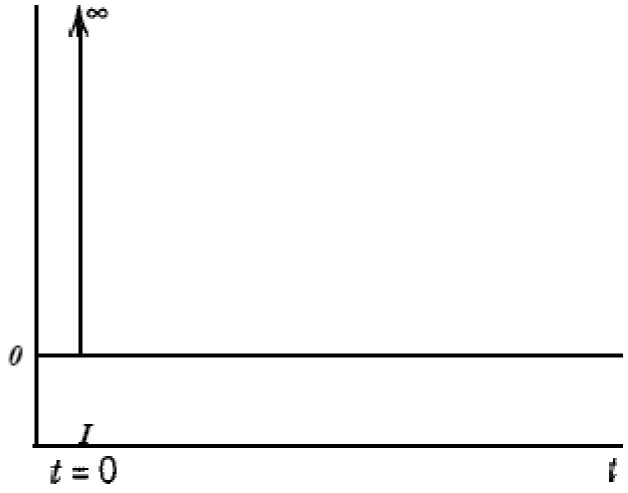


Principais funções de entrada dos processos

- Impulso Unitário ou Dirac
  - Impulso ideal de duração zero e amplitude infinita
  - O resultado da integração é a área do impulso, 1

$\delta(t)$

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$$



Principais funções de entrada dos processos

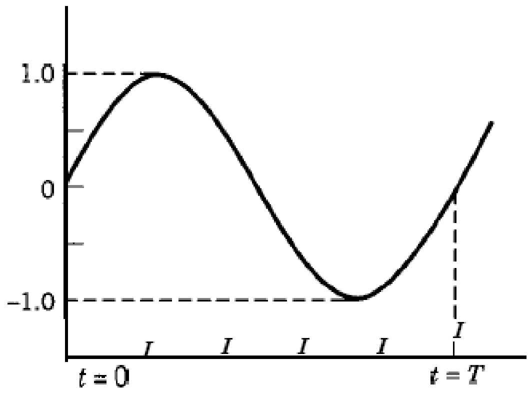
- Onda sinusoidal de amplitude unitária e frequência ω

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

$$L[\sin \omega t] = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st} dt =$$

$$\frac{1}{2i}\int_0^\infty \left[e^{-(s-i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t}\right] dt = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} + \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{s+i\omega}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{0-1}{s-i\omega} + \frac{0-1}{s+i\omega}\right| = \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



Transformada de Laplace de funções comuns

$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$	$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$		

Propriedades da transformada de Laplace

- Linearidade
  - $L\{af(t)\} = aL\{f(t)\} = aF(s)$
  - $L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
- Teorema da Diferenciação Real
  - $L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - \left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$
- Teorema da Integração Real
  - Para o n^{th} integral de uma função a transformada de Laplace é a transformada da função dividida por s^n.
    - $L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s} F(s)$

Propriedades da transformada de Laplace

- Teorema da Translação Real
  - $L\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$
- Teorema do Valor Final
  - $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to 0} sF(s)$
- Teorema da Translação Complexa
  - $L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
- Teorema do Valor Inicial
  - $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to\infty} sF(s)$

Exemplo

- Derive a transformada de Laplace da seguinte equação diferencial:
  - $9\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)$
- As condições iniciais são:
  - $y(0) = 0$
  - $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$

Exercício-1

- Resolução
  - Aplicando a propriedade da linearidade:

$$9\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + 6\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + \mathcal{L}[y(t)] = 2\mathcal{L}[x(t)]$$

  - Seguidamente, o teorema da diferenciação real:

$$9s^2Y(s) + 6sY(s) + Y(s) = 2X(s)$$

  - Por último, resolvendo em ordem a Y(s):

$$Y(s) = \frac{2}{9s^2 + 6s + 1}X(s)$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace

- Procedimento de 3 passos:
  - Transformar a equação diferencial numa equação algébrica na transformada de Laplace.
  - Resolver a transformada para a variável de saída.
  - Inverter a transformada para obter a resposta da variável de saída, no tempo, t.

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace

Equação Diferencial	Condições iniciais
$a_2 \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \dfrac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = bx(t)$	$y(0)$ $dy/dt\,\vert_{t=0}$

- 1º passo - aplicar a propriedade da linearidade

$$a_2\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + a_1\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + a_0\mathcal{L}[y(t)] = b\mathcal{L}[x(t)]$$

- 2º passo - o teorema da diferenciação real

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0) - \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} \\ \mathcal{L}\left[\dfrac{dy(t)}{dt}\right] = sY(s) - y(0) \end{cases}$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace

- 3º passo – substituir os termos e reorganizar a equação

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) - (a_2 s + a_1)y(0) - a_2 \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = bX(s)$$

- 4º passo – manipular a equação algébrica para a resolver para a transformada da variável de saída Y(s)

$$Y(s) = \frac{bX(s) + (a_2 s + a_1)y(0) + a_2 \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}}{a_2 s^2 + a_1 s + a,}$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace

- 5º passo – substituir as condições iniciais

$$Y(s) = \left[\frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_o}\right] X(s)$$

- 6º passo – inverter a transformada de forma a obter uma resposta no domínio dos tempos y(t)
  - Para uma resposta ao degrau X(s)= 1/s

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_o} \frac{1}{s}\right]$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de fracções parciais

- Considerando o denominador da equação anterior, pode escrever-se:

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)s = a_2(s - r_1)(s - r_2)s$$

- Onde r1 e r2 correspondem às raízes reais (para raízes complexas conjugadas o processo é semelhante) da função quadrática, cujos valores satisfazem a equação:

$$a_2 s^2 + a_1 s + a, = 0$$

- Podendo ser calculados pela expressão:

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de fracções parciais

- Após a factorização do denominadores em termos de 1ª ordem, a fracção é expandida em frações parciais da seguinte forma, considerando que r1,r2 e r3=0 são diferentes entre si:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \frac{A_3}{s}$$

- Neste o valor dos coeficientes A1,A2 e A3 é determinado pela expressão:

$$A = \lim_{s \to r_k} (s - r_k) Y(s)$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de fracções parciais

- Por último aplicando a transforma inversa de Laplace obtém-se:

$$y(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + A_3 u(t)$$

- Exercício: Considerando uma planta quadrática, calcule resposta ao degrau y(t). (a_2=9, a_1=10 , a_0=1 e b=2)

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \frac{1}{s}\right]$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de fracções parciais

- Calculando as raízes quadráticas obtém-se: r1= -1/9 e r2=-1. O denominador é fatorizado da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{2}{9\left(s+\frac{1}{9}\right)(s+1)}\,\frac{1}{s}$$

$$= \frac{A_1}{s+\frac{1}{9}} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s}$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de fracções parciais

- Os coeficientes são calculados seguidamente :

$$A_1 = \lim_{s \to -1/9} \frac{2}{9(s+1)s} = -2.25$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1} \frac{2}{9\left(s + \frac{1}{9}\right)s} = 0.25$$

$$A_3 = \lim_{s \to 0} \frac{2}{9\left(s + \frac{1}{9}\right)(s+1)} = 2$$

- Finalmente obtém-se:

$$y(t) = -2.25e^{-t/9} + 0{,}25e^{-t} + 2u(t)$$

Exercícios

1. Derive a transformada de Laplace F(s) das seguintes funções (consulte a tabela e as propriedades):
   1. $f(t)=t$
   2. $f(t)=e^{-at}$
   3. $f(t)=\cos wt$
   4. $f(t)=e^{-at}\cos wt$
   5. $f(t)=u(t) + 2t + 3t^2$
   6. $f(t)=e^{-2t} [u(t) + 2t + 3t^2]$
   7. $f(t)=u(t) + e^{-2t} - 2e^{-t}$
   8. $f(t)=u(t) - e^{-t} + te^{-t}$
2. Obtenha a solução y(t) das seguintes equações diferenciais, supondo as condições iniciais nulas em resposta ao degrau x(t)=u(t).
   1. $dy(t)/dt + 2y(t) = 5\,x(t) + 3$
   2. $d^2y(t)/dt^2 + 18dy(t)/dt + 4y(t) = 8x(t) - 4$

Soluções

Aplicação dos teoremas:

Linearidade

- $L\{af(t)\} = aL\{f(t)\} = aF(s)$
- $L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$

Teorema da Diferenciação Real

- $L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - \left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$

Exercício 1:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = 5x(t) + 3 \qquad \begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{matrix} \qquad x(t) = \mu(t)$$

$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$$L\left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sY(s) - y(0)$$

$$L[2y(t)] = 2Y(s)$$

$$L[5x(t)] = L[5u(t)] = 5 \cdot \frac{1}{s}$$

$$L[3] = \frac{3}{s}$$

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s) + 3$$

$$Y(s) \cdot (s+2) = 5X(s) + \frac{3}{s} \qquad Y(s) = \frac{(5+3)/s}{s+2} \qquad Y(s) = \frac{8}{s(s+2)} = 8 \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{8}{s+2} \cdot \frac{1}{s}$$

Polos:

$s = 0$
$s = -2$

Inversa:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} \qquad L^{-1}\left[\frac{4}{s} - \frac{4}{s+2}\right] \qquad \boxed{y(t) = -4\mathrm{e}^{-2t} + 4}$$

$$A_1 = \lim_{s \to 0} \frac{8}{(s+2)} = 4$$

$$A_2 = \lim_{s \to -2} \frac{8}{s} = -4$$

Soluções

Aplicação dos teoremas:

Linearidade

- $L\{af(t)\} = aL\{f(t)\} = aF(s)$
- $L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$

Teorema da Diferenciação Real

- $L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - \left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$

Exercício 2:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 18\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 8x(t) - 4$$

$$L\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$L\left[18\frac{dy(t)}{dt}\right] = 18sY(s) - y(0)$$

$$L[4y(t)] = 4Y(s)$$

$$L[8x(t)] = 8X(s)$$

$$L[-4] = -\frac{4}{s}$$

$$s^2Y(s) + 18sY(s) + 4Y(s) = 8X(s) - \frac{4}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 18s + 4) = 8 \cdot \frac{1}{s} - \frac{4}{s}$$

Polos:

$$s = -9 + \sqrt{77} = -0{,}23$$

$$s = -9 - \sqrt{77} = -17{,}77$$

Inversa:

$$Y(s) = \frac{4}{(s^2 + 18s + 4)s} \qquad Y(s) = \frac{A_1}{(s + 0{,}23)} + \frac{A_2}{(s + 17{,}77)} + \frac{A_3}{s} \qquad Y(s) = -\frac{1}{s + 0{,}23} + \frac{0{,}013}{s + 17{,}77} + \frac{1}{s}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -0{,}23} \frac{4}{(s + 17{,}77)s} = -0{,}99 \approx 1$$

$$A_2 = \lim_{s \to -17{,}77} \frac{4}{(s + 0{,}23)s} = 0{,}013$$

$$A_3 = \lim_{s \to 0} \frac{4}{(s + 17{,}77)(s + 0{,}23)} = 0{,}98 \approx 1$$

$$\boxed{y(t) = -e^{-0{,}23t} + 0{,}013e^{-17{,}77t} + 1}$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de frações parciais

- Considere-se agora o caso onde as raízes da função quadrática são iguais, ou seja r1=r2, a expansão é efectuada da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s - r_1)^2} + \frac{A_2}{s - r_1} + \frac{A_3}{s}$$

- Os coeficientes A1 e A2 são calculados da seguinte forma:

$$A_1 = \lim_{s \to r_1} (s - r_1)^2 Y(s)$$

$$A_2 = \lim_{s \to r_1} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [(s - r_1)^2 Y(s)]$$

- A3 é calculado da forma anterior.

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de frações parciais

- Por último efetuando a transformada inversa de Laplace, obtém-se:

$$y(t) = A_1 t e^{r_1 t} + A_2 e^{r_1 t} + A_3 u(t)$$

- De forma genérica, se uma raiz r1 é repetida m vezes, a expansão é obtida da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s - r_1)^m} + \frac{A_2}{(s - r_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{s - r_1} + \cdots$$

- Cujos coeficientes são calculados por:

$$A_1 = \lim_{s \to r_1} (s - r_1)^m Y(s) \qquad A_k = \lim_{s \to r_1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s - r_1)^m Y(s)]$$

- E a função no tempo y(t) por: $y(t) = \frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + A_m e^{r_1 t} + \cdots$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de frações parciais

- Exercício: Considerando uma planta quadrática, calcule resposta ao degrau y(t). (a_2=9, a_1=6,a_0=1 e b=2)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_,} \frac{1}{s}\right]$$

- Calculando as raízes quadráticas obtém-se: r1=r2=-1/3. O denominador é fatorizado da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{2}{9\left(s+\frac{1}{3}\right)^2 s} = \frac{A_1}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{A_2}{s+\frac{1}{3}} + \frac{A_3}{s}$$

Solução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace - Inversão por expansão de frações parciais

- Determinando os coeficientes A1, A2 e A3, obtém-se:

$$A_1 = \lim_{s \to -1/3} \frac{2}{9s} = -\frac{2}{3}$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1/3} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds}\left[\frac{2}{9s}\right]$$

$$= \lim_{s \to -1/3} -\frac{2}{9s^2} = -2$$

- A3=2, como anteriormente.
- Fazendo-se a transformada inversa obtém-se: $y(t) = \left(-\frac{2}{3}t - 2\right)e^{-t/3} + 2u(t)$

Exemplo completo

Em Resumo:
Considere a seguinte expressão no domínio de Laplace e resolva analíticamente para o domínio do tempo:

$$Y(s) = \frac{2}{9\left(s+\frac{1}{3}\right)^2 s}$$

Zeros do denominador:

$$s_1 = s_2 = -\frac{1}{3}$$

$$s_3 = 0$$

Inversa de Laplace:

Como há dois zeros iguais ($s_1 = s_2 = -\frac{1}{3}$), a expansão pro frações é feita da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{A_1}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{A_2}{\left(s+\frac{1}{3}\right)} + \frac{A_3}{s}$$

Nota:

$$A_k = \lim_{s\to} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}((s+r_1)^m Y(s))$$

$$A_1 = \lim_{s\to -\frac{1}{3}} \frac{2}{9s} = -\frac{2}{3}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -\frac{1}{3}} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left(\frac{2}{9s}\right) = 1.\left(-\frac{2}{9s^2}\right) = -2$$

$$A_3 = \lim_{s\to 0} \frac{2}{9\left(s+\frac{1}{3}\right)^2} = 2$$

$$Y(s) = \frac{-\frac{2}{3}}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{2}{\left(s+\frac{1}{3}\right)} + \frac{2}{s}$$

$$\boxed{y(t) = L^{-1}\left[\frac{-\frac{2}{3}}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{2}{\left(s+\frac{1}{3}\right)} + \frac{2}{s}\right] = -\frac{2}{3}te^{-\frac{t}{3}} - 2e^{-\frac{t}{3}} + 2u(t)}$$

Exercício

Exercício: Considerando uma planta cúbica, calcule a resposta ao degrau x(t). $X(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s}$

Inversa de Laplace:

Como há três zeros iguais ($s_1 = s_2 = -1$), a expansão pro frações é feita da seguinte forma:

$$X(s) = \frac{A_1}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)} + \frac{A_4}{s}$$

Nota:

$$A_k = \lim_{s\to} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}((s+r_1)^m Y(s))$$

$$A_1 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{s} = -1$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{(2-1)!} + \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 * \left(-\frac{1}{s^2}\right) = -1$$

$$A_3 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{(3-1)!} + \frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2} * \boxed{\left(\frac{2}{s^3}\right)} = -1$$

Nota:

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{s^2}\right) = -\left(\frac{1's^2 - 1.s^{2\prime}}{s^4}\right) = \frac{2s}{s^4} = \frac{2}{s^3}$$

$$A_4 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+1)^3} = 1$$

Nota:

$$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}} = \frac{2!}{(s+1)^{2+1}}$$

Então:

$$L^{-1}\left[-\frac{1}{(s+1)^3}\right] = -\frac{1}{2} L^{-1}\left[-\frac{2!}{(s+1)^3}\right] = -\frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

$$X(s) = -\frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{s}$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\boxed{-\frac{1}{(s+1)^3}} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{s}\right] = u(t) - \frac{1}{2}t^2e^{-t} + te^{-t} - e^{-t}$$

Atrasos na Resposta

- Os atrasos na resposta são descritos pela utilização do teorema da translação real

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0}F(s)$$

- Considere a seguinte expressão: $Y(s) = Y_1(s)e^{-st_0}$
- Onde Y1(s) pode ser factorizado da seguinte forma:

$$Y_1(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n}$$

- Cujo resultado da inversão y1(t) resulta em:

$$y_1(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + \ldots + A_ne^{r_nt}$$

- Seguidamente, utilizando o teorema da translação real obtém-se:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-st_0}Y_1(s)] = y_1(t - t_0)$$

$$= A_1e^{r_1(t-t_0)} + A_2e^{r_2(t-t_0)} + \ldots + A_ne^{r_n(t-t_0)}$$

Atrasos na Resposta

- Considere-se agora o caso de existirem múltiplos atrasos:

$$Y(s) = Y_1(s)e^{-st_{01}} + Y_2(s)e^{-st_{02}} + \dots$$

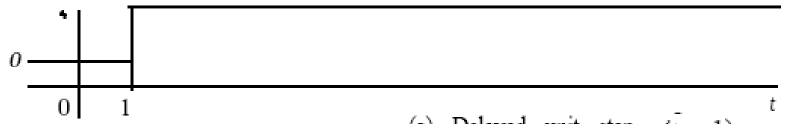
- Deve expandir-se cada uma das sub-transformadas Y1(s) e Y2(s) e seguidamente inverte-las.

- Finalmente, deve aplicar-se o teorema da translação real, obtendo-se:

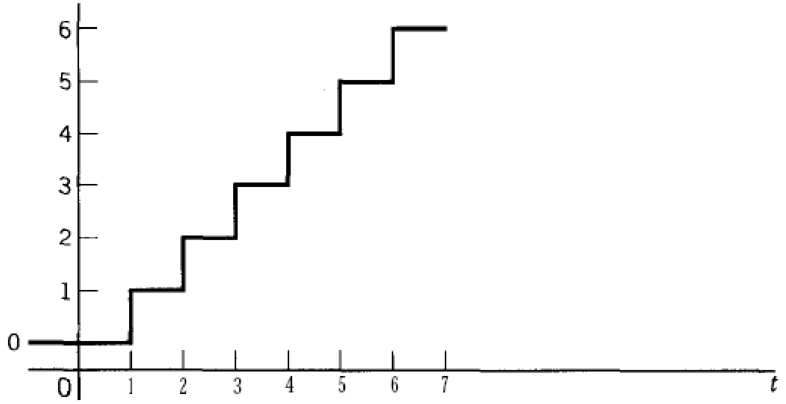
$$y(t) = y_1(t - t_{01}) + y_2(t - t_{02}) + \dots$$

Exemplo

- Considere a seguinte equação diferencial dc(t)/dt + 2 c(t) =f(t), com c(0) =0, determine a resposta às seguintes entradas:



(a) Delayed unit step, $u(t-1)$



(b) Staircase of unit steps.

$f(t) = u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + \ldots$

Exemplo

- Transforma-se a equação diferencial, resolve-se para C(s) e substitui-se F(s)= 1/s. e^{-s}, seguidamente inverte-se e aplica-se o teorema.

$$C(s) = \frac{1}{s+2}F(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s}e^{-s}$$

$$C_1(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s}$$

$$A_1 = \lim_{s\to -2}(s+2)\frac{1}{(s+2)s} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{(s+2)s} = \frac{1}{2}$$

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}u(t)$$

$$= \frac{1}{2}u(t)[1 - e^{-2t}]$$

$$\boxed{\begin{aligned} c(t) &= \mathscr{L}^{-1}[C_1(s)e^{-s}] \\ &= c_1(t-1) = \frac{1}{2}u(t-1)[1 - e^{-2(t-1)}] \end{aligned}}$$

Exemplo

- Para a resposta à rampa:

$$C(s) = \left[\frac{1}{s+2}\right]\left(\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} \cdots\right)$$

$$= \left[\frac{1}{(s+2)s}\right](e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \cdots)$$

$$= C_1(s)e^{-s} + C_1(s)e^{-2s} + C_1(s)e^{-3s} + \ldots$$

$$c(t) = c_1(t-1) + c_1(t-2) + c_1(t-3) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}u(t-1)[1 - e^{-2(t-1)}] + \frac{1}{2}u(t-2)[1 - e^{-2(t-2)}]$$

$$+ \frac{1}{2}u(t-3)[1 - e^{-2(t-3)}] + \ldots$$

Exercícios

- Considere a seguinte equação diferencial $d^2y(t)/dt^2 + 4dy(t)/dt + 1y(t) = 8x(t) - 4$
  - obtenha a resposta y(t) para a resposta ao degrau. (nota: condições iniciais nulas)
  - Considere agora a resposta para $(1/s).e^{-s/3}$