"Oh dear! Oh dear!
I shall be too late!".- said the White Rabbit
Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

4. Valores e Vectores Próprios

- Definição de valores e vectores próprios de uma matriz.
- Cálculo de valores e vectores próprios de uma matriz.
- Diagonalização.

Definição

Seja A uma matriz de ordem n. Diz-se que λ é um valor próprio de A se e só existir um vector[1] $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, não nulo, tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Dizemos que x é um vector próprio associado ao valor próprio λ.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tem-se para $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\lambda = 2$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda = 2$ é um valor próprio de A associado ao vector próprio $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

[1] Designamos por *vector* uma matriz coluna.

Exemplos:

1. Seja A a matriz nula O_n de ordem n. Então,

$$\{\text{valores próprios de A}\} = \{0\}$$

$$\{\text{vectores próprios de A}\} = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Cada elemento de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ é um vector próprio associado ao valor próprio 0 de A.

2. Para $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x$$

Portanto, 3 é valor próprio de A associado a cada vector de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

• Chama-se espectro da matriz A ao conjunto de todos os valores próprios da matriz A, que se representa por $\lambda(A)$.

• Um vector próprio está associado apenas a um valor próprio
De facto, se λ' é outro valor próprio associado a x, então tem-se $Ax = \lambda x$ e $Ax = \lambda' x$.
Logo, $\lambda x = \lambda' x$ donde $(\lambda - \lambda')x = 0$. Dado que $x \neq 0$, deduz-se assim que $\lambda - \lambda' = 0$, ou seja, que $\lambda = \lambda'$.

• Um valor próprio está associado uma infinidade de vectores próprios.

Na verdade, se x é um vector próprio associado ao valor próprio λ, então, αx, com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, também é um vector próprio associado ao valor próprio λ.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A(\alpha x) = \lambda(\alpha x), \;\; \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n. Um escalar λ é um valor próprio de A se e só

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Demonstração:

Para um número real λ são válidas as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ é valor próprio de } A &\Leftrightarrow Ax = \lambda x \text{ para algum } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \text{ para algum } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \text{ é um sistema indeterminado} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ é uma matriz não invertível} \\ &\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \end{aligned}$$

Corolário

Seja A uma matriz de ordem n. Então tem-se:

$$det(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ é um valor próprio de } A.$$

Demonstração:

Se $\lambda = 0$ é um valor próprio de $A \Leftrightarrow det(A - 0I) = 0 \Leftrightarrow det(A) = 0$.

Deste corolário obtém-se de imediato o seguinte resultado.

Corolário

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então, A é uma matriz invertível se e só se $\lambda = 0$ não for valor próprio de A.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -2-\lambda & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2+\lambda)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2+\lambda)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2+\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) = (2+\lambda)^2(4-\lambda) \end{aligned}$$

Os valores próprios sao $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$

- Designa-se por polinómio característico o polinómio, em λ,

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_n).$$

Este polinómio é de grau n, ordem da matriz A.

- Chama-se equação característica à equação

$$det(A - \lambda I_n) = 0.$$

As raízes da equação característica são os valores próprios da matriz A.
Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, (m \leq n)$, são raízes do polinómio característico (ou seja valores próprios de A), então este pode ser factorizado do seguinte modo:

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_n)^{r_n}.$$

em que $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = n$.
Diz-se que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ têm multiplicidade algébrica $r_1, r_2, \ldots, r_n$, respectivamente.

polinómio característico: $p(\lambda) = (2+\lambda)^2(4-\lambda)$

equação característica: $(2+\lambda)^2(4-\lambda) = 0$

Donde os valores próprios de A são:

- $\lambda = -2$ de multiplicidade (algébrica) 2,
- $\lambda = 4$ de multiplicidade 1 (simples).

A matriz A é de ordem $n = 2 + 1 = 3$.

Se λ é um valor próprio de uma matriz A, de ordem n então o conjunto

$$U_\lambda = \{x : Ax = \lambda x\},$$

contém todos os vectores próprios associados ao valor próprio λ.

Tendo-se

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

o conjunto U_λ é o conjunto das soluções do sistema homógeneo $(A - \lambda I)x = 0$, o qual é um sistema possivel indeterminado.

Chama-se **multiplicidade geométrica** do valor próprio λ ao grau de indeterminação deste sistema homógeneo, que é igual a:

$$n - car(A - \lambda I).$$

Para uma dado valor próprio a sua multiplicidade geométrica e menor ou igual à sua multiplicidade algébrica.

Exemplo

A matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, com valores próprios $\lambda = -2$, de multiplicidade algébrica 2, e $\lambda = 4$ simples.

De modo a determinar o conjunto de vectores próprios a $\lambda = 4$ temos que resolver o sistema $(A - 4I_3)X = 0$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema reduz-se a $x = 0, y - z = 0$, sendo então o conjunto solução, constituído por vectores da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix},$$

tendo-se $U_{\lambda=4} = \{(0, y, y), y \in \mathbb{R}\}$, sendo $\lambda = 4$ de multiplicidade geométrica 1.

De modo a determinar o conjunto de vectores próprios associados a $\lambda = -2$ temos que resolver o sistema $(A + 2I_3)X = 0$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema reduz-se a $x = y, z = 0$, sendo então o conjunto solução, constituído por vectores da forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

tendo-se:

$$U_{\lambda=-2} = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\},$$

sendo $\lambda = -2$ de multiplicidade geométrica 1.

Propriedades

- Os valores próprios de uma matriz diagonal são os elementos da diagonal.

- Os valores próprios de uma matriz triangular superior (inferior) são os elementos da diagonal.

- Seja A uma matriz de ordem n. Se λ é valor próprio de A então $\alpha\lambda$ é valor próprio de αA, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

- Se β é um número, então $\lambda + \beta$ é um valor próprio de $A + \beta I$ e x é um vector próprio associado.

- Seja A uma matriz de ordem n. Se λ é valor próprio de A associado ao vector próprio x, então λ^n é valor próprio de A^n associado ao vector próprio x.

- A é invertível se e só se $\lambda \neq 0$. Neste caso, $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de A^{-1} e x é um vector próprio associado.

- λ é um valor próprio de A^T.

Definição

Duas matrizes A e B dizem-se semelhantes se existir uma matriz S, invertível , tal que

$$B = S^{-1}AS$$

Teorema

Duas matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.

Demonstração

Sejam A e B duas matrizes semelhantes. Então existe uma matriz S, invertível tal que $B = SAS^{-1}$.

Assim, vejamos que têm iguais polinómios característicos

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= |B - \lambda I| \\ &= |SAS^{-1} - \lambda(SS^{-1})| \\ &= |SAS^{-1} - S\lambda S^{-1}| \\ &= |S(A - \lambda I)S^{-1}| \\ &= |S||(A - \lambda I)||S^{-1}| \\ &= |S||(A - \lambda I)|\frac{1}{|S|} \\ &= |A - \lambda I| = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

Teorema

Sejam A e B matrizes semelhantes.
Se x é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ, então $S^{-1}x$ é vector próprio de B associado ao valor próprio λ.

Demonstração:

Seja B semelhante a A, ou seja, existe S, invertível, tal que: $B = S^{-1}AS$.
Se x é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ, então

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x \quad & \Rightarrow S^{-1}ASS^{-1}x = S^{-1}\lambda x \\ & \Rightarrow (S^{-1}AS)(S^{-1}x) = \lambda(S^{-1}x) \\ & \Rightarrow B(S^{-1}x) = \lambda(S^{-1}x) \end{aligned}$$

ou seja $S^{-1}x$ é vector próprio de B associado ao valor próprio λ.

Definição

Uma matriz é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.
Ou seja se existir uma matriz S, invertível, tal que

$$D = S^{-1}AS$$

é uma matriz diagonal.

Teorema

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com n valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (não necessariamente distintos) com vectores próprios associados, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Seja S a matriz que tem esses vectores próprios como colunas, i.e. $S = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n)$.
Se S é uma matriz invertível **então**

$$D = S^{-1}AS.$$

com D a matriz diagonal com elementos diagonais iguais aos valores próprios, ou seja $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Ou seja a matriz A é diagonalizável, sendo semelhante a uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são os valores próprios e, a matriz que tem por colunas os vectores próprios é uma matriz diagonalizante de A.

Teorema

2. Reciprocamente, suponhamos que A é diagonalizável, isto é, que temos $S^{-1}AS = D$ para uma certa matriz $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, invertível e com D diagonal.

Nesse caso, os elementos da diagonal de D são valores próprios de A, tendo como vectores próprios associados as colunas de S.

Demonstração:

1. Tem-se $Av_i = \lambda_i v_i$, e

$$
\begin{aligned}
AS &= A(v_1\ v_2 \dots\ v_n) \\
&= (Av_1\ Av_2 \dots\ Av_n) \\
&= (\lambda_1 v_1\ \lambda_2 v_2 \dots\ \lambda_n v_n) \\
&= (v_1\ v_2 \dots\ v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= SD
\end{aligned}
$$

De $AS = SD$ vem, multiplicando ambos os membros, à esquerda, por S^{-1} (que existe já que por hipótese S é invertível), que $D = S^{-1}AS$.

Demonstração:

2. Suponhamos que $S^{-1}AS = D$, com $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.
Temos

$$S^{-1}AS = D \Rightarrow SS^{-1}AS = SD \Rightarrow AS = SD.$$

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ as colunas de S. A igualdade $AS = SD$ escreve-se como

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

ou seja, temos

$$\begin{pmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\mathbf{v}_1 & d_2\mathbf{v}_2 & \cdots & d_n\mathbf{v}_n \end{pmatrix}.$$

Demonstração (cont.)

Segue-se, então, que

$$\begin{cases} A\mathbf{v}_1 = d_1\mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 = d_2\mathbf{v}_2 \\ \qquad\vdots \\ A\mathbf{v}_n = d_n\mathbf{v}_n \end{cases}$$

Como os vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são não nulos (são vectore próprios), as igualdades acima mostram que $d_1, d_2, \ldots, d_n$ são valores próprios de A com vectores próprios associados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ (as colunas de S), tal como se pretendia provar.

O teorema seguinte indica-nos uma condição suficiente (mas não necessária) para que uma matriz seja diagonalizável.

Teorema

Seja A uma matriz, quadrada de ordem n. com n valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distintos e sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores próprios associados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.
Então, a matriz com esses vectores próprios como colunas é uma matriz invertível e, portanto, A é diagonalizável.

Quando A tem n valores próprios reais múltiplos, A pode ou não ser diagonalizável.
Tal dependerá de ser ou não possível encontrar n vectores próprios associados a valores próprios de A, que formem uma matriz quadrada de ordem n, invertível.

Corolário

Se uma matriz A, de ordem n, e suponhamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são valores próprios distintos de A ($k \leq n$).
Então A é diagonalizável **se e só se**
o somatório das multiplicidades geométricas de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ é igual a n.

Exemplo

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável.

Note-se que, sendo o polinómio característico de A, $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2$, o único valor próprio é 1.

Sendo $U_{\lambda=1} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, o conjunto dos valores próprios associados a $\lambda = 1$, tem-se que a multiplicidade geométrica é igual a $1 \neq n$, com $n = 2$,

Observe-se que não é possivel determinar 2 vectores próprios que permitam definir uma matriz invertível.

Exemplo A matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável, uma vez que tem 3 valores próprios distintos $-1, 0$ e 1 sendo a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios igual a 1. Assim, a soma das multiplicidades geométricas é igual a $3 = n$. Considerando os três vectores próprios $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, associados cada um a um distinto valor próprio, podemos construir a matriz $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ invertível tal que

$S^{-1}AS = D$ com $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A matriz D é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os valores próprios da matriz A.

Teorema Seja A uma matriz quadrada de ordem n, simétrica. Então existe uma matriz ortogonal Q tal que

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = D,$$

onde D é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os valores próprios de A.

Exemplo

Consideremos a seguinte matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Temos

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Emtão,

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3.$$

Exemplo (cont.)

Resolvendo o sistema homogéneo $(A - 1I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, obtém-se o seguinte conjunto de soluções

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por outro lado, o sistema $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem como soluções os vectores do conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Escolhamos, então, um vector não nulo de cada um destes conjuntos, por exemplo, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Temos $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$, pelo que devemos considerar

$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Temos, também, $\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2 = 2$, pelo que devemos considerar $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exemplo (cont.)

Obtemos, então, a seguinte matriz Q, ortogonal e diagonalizante para A:

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De facto, a matriz Q é ortogonal, já que

$$Q^{\mathrm{T}} Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e além disso, Q diagonaliza A, já que:

$$Q^{\mathrm{T}} A Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

É possível classificar uma matriz A (e portanto, uma forma Q) em d.p., d.n., s.d.p,.s.d.n. ou indefinida, em função dos valores próprios de A, de acordo com o seguinte teorema.

Teorema Seja A uma matriz simétrica de ordem n e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os seus valores próprios (não necessariamente distintos). Então:

1. A é definida positiva se e só se todos os seus v.p.'s são positivos;
2. A é definida negativa se e só se todos os seus v.p.'s são negativos;
3. A é semidefinida positiva se e só todos seus v.p.'s são não negativos;
4. A é semidefinida negativa se e só se todos os seus v.p.'s são não positivos;
5. A é indefinida se e só se A tem (pelo menos) um valor próprio positivo e (pelo menos) um valor próprio negativo.

Demonstração (apenas de 1.) Como A é simétrica, sabemos que existe uma matriz ortogonal Q tal que $Q^{\mathrm{T}}AQ = D$, com $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Mas, $Q^{\mathrm{T}}AQ = D \Rightarrow A = QDQ^{\mathrm{T}}$. Tem-se, então, para qualquer vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(QDQ^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}DQ^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

$$= (Q^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}D(Q^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y},$$

com

$$\mathbf{y} = Q^{\mathrm{T}}\mathbf{x}.$$

Note-se que, sendo Q invertível, teremos

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = Q^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Então, tem-se

$$\begin{aligned} A \text{ é d.p.} &\iff \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ &\iff \mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y} > 0,\ \forall \mathbf{y} \neq 0 \\ &\iff \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 > 0,\ \forall \mathbf{y} \neq 0^{,} \\ &\iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0. \end{aligned}$$

como se pretendia mostrar.