2º Teste: Resolução:

## Problema - 1

(a) Os campos associados a esta onda plana

$$\tilde{\vec{E}}(y,t) = \tilde{E}_0 \hat{z}\, e^{i(ky-\omega t)} = E_0 \hat{z}\, e^{i(ky-\omega t+\delta)}$$

$$\tilde{\vec{B}}(y,t) = \tilde{B}_0 (\hat{y}\times\hat{z})\, e^{i(ky-\omega t)} = \tilde{B}_0 \hat{x}\, e^{i(ky-\omega t)} = B_0 \hat{x}\, e^{i(ky-\omega t+\delta')}$$

Mas $\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} k|\vec{E}_0| = \omega|\vec{B}_0| \Rightarrow B_0 = \dfrac{k}{\omega}E_0 = \dfrac{E_0}{c} \\ \delta = \delta' \quad \text{(os campos estar em fase)} \end{cases}$$

$$\vec{E} = E_0 \hat{z} \cos(ky-\omega t+\delta)$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\hat{x}\cos(ky-\omega t+\delta)$$

$$T_{ij} = \varepsilon_0\left[E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2\right]$$

Obviamente $T_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$T_{xx} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[E_0^2 - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}B_0^2\right]\cos^2(ky-\omega t+\delta) = 0$$

$$T_{zz} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[E_0^2 - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}B_0^2\right]\cos^2(\quad) = 0$$

$$T_{yy} = -\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0 c^2}B_0^2 = -\varepsilon_0 E_0^2$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -\varepsilon_0 E_0^2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \cos^2(ky - \omega t + \delta) \quad (*)$$

b) d ≡ comprimento de penetração =

$$\vec{E}(y,t) = E_0 \, \hat{z} \, e^{-k_2 y} \, e^{i(k_1 y - \omega t)}$$

$$|\vec{E}(d,t)| = E_0 \, e^{-1} \Rightarrow d = \frac{1}{k_2}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

$$\sigma \gg \varepsilon\omega \quad (10^7 \gg 10^{-11} \cdot 10^{10}) \Rightarrow k_2 \simeq k_1 \simeq \omega \sqrt{\frac{\mu \cancel{\varepsilon}}{2} \frac{\sigma}{\cancel{\varepsilon}\omega}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}} \simeq \sqrt{\frac{\cancel{10^7} \cdot 10^{10} \cdot \cancel{10^{-7}} \cdot \cancel{4}^{2}\pi}{\cancel{2}}} = \sqrt{2\pi \cdot 10^{10}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{2\pi \; 10^{10}}} \text{ m}$$

c) $\Delta\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$ ; dado que $k_2 \sim k_1 \Rightarrow \Delta\varphi = \pi/4$

---

(*) Note que $\langle T_{yy} \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T T_{yy}\, dt = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = -\langle u \rangle$

(densidade volumica de energia)

Problema - 2

(a) $\rho = 0$ (no interior do tubo oco e nas paredes perfeitamente condutoras) (tubo orientado segundo $zz'$)

A lei de Gauss $\Rightarrow$ $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

Se $E_z = 0$ (Modo TEM) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0$

Se $B_z = 0$ (também) $\Rightarrow$ $(\nabla \times \vec{E})_z = -\dot{B}_z = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Então, como

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0(x,y)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\tilde{\vec{B}} = \tilde{\vec{B}}_0(x,y)\, e^{i(kz-\omega t}$$

$\nabla \times \tilde{\vec{E}}_0 = 0$ $\left(\text{visto que } \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = 0\right)$

O campo $\tilde{\vec{E}}_0$ tem uma $\nabla \cdot \tilde{\vec{E}}_0 = 0$ e $\nabla \times \tilde{\vec{E}}_0 = 0$. Pode ser portanto escrito como $-\nabla\phi$, sendo que $\nabla \cdot \tilde{\vec{E}}_0 = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\nabla^2 \phi = 0$ (Laplace) ; $\phi$ é uma função harmónica. Como na fronteira (condutor perfeito) $\phi = \text{const}$ e $\phi$ não tem mínimo ou máximo locais, então $\phi = \text{const}$. Isto impõe que $-\nabla\phi = \tilde{\vec{E}}_0 = 0$. Logo um modo TEM tem amplitude nula.

2b)

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}}$$

$$\cdot\ v_g^{-1} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{\cancel{2}}\left(\omega^2 - \omega_{mn}^2\right)^{-1/2} \cdot \cancel{2}\omega \Rightarrow v_g = \frac{c}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_{mn}^2\right)^{1/2}$$

$$= c\left(1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega}\right)^{1/2} < c$$

$$\cdot\ v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}}} > c$$

Note que, como provou, a energia propaga-se c/ $v_g < c$, enquanto que $v_f$ (a velocidade de frente de onda) pode ser maior do que c.

Problema - 3

a) Consideremos as equações de Maxwell homogéneas :

$$\text{i)} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{ii)} \quad \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

i) $\Rightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (sendo $\vec{A}$ um campo vectorial diferenciável

Então $\nabla \times \vec{E} = - \nabla \times \dot{\vec{A}}$ (por ii)) $\Rightarrow \nabla \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0$

Logo $\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\nabla \phi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Os campos electrico e magnético podem ser expressos à custa dos campos $\phi$ e $\vec{A}$, garantindo que i) e ii) são verificadas.

Podemos considerar agora as outras duas equações :

$$\text{iii)} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{iv)} \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{J}$$

Então,

iii)
$$\nabla \cdot \left[ -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

iv)
$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \frac{1}{c^2} \left[ -\nabla \dot{\phi} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}$$

b) $\vec{A}$ e $\phi$ não são univocamente definidos:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}$$

$$\phi' = \phi + \beta$$

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{\alpha} = \vec{B} \Rightarrow \nabla \times \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = -\nabla \lambda$$

(Podemos somar a $\bar{A}$ um gradiente de um qualquer campo escalar bem comportado)

$$E = -\nabla \phi' - \frac{\partial \bar{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi - \nabla \beta - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} \equiv$$

$$\equiv -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\nabla \beta = \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = -\nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t} \Rightarrow \beta = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + C'(t)$$

Então, como $C(t)$ não afecta os campos (as suas derivadas espaciais são nulas), temos que:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} - \nabla \lambda \\ \phi' = \phi + \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} + C(t) \end{cases}$$

Esta liberdade de redefinir os potenciais sem alterar os campos designa-se por liberdade de padrão (gauge ou Eichinvarianz)

c) $\varphi = 0 \qquad \vec{A} = A\,\hat{y}\,\sin(kx - \omega t)$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 + A\,\hat{y}\,\omega\cos(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x}\,\hat{z} = A\,k\cos(kx - \omega t)\,\hat{z}$$

---

<u>Nota</u>: $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow \frac{\partial A_y}{\partial x}\,\hat{z} = A\,\omega\,k\,\sin(kx - \omega t) =$

$$= -\left(-\omega A k \sin(kx - \omega t)\,\hat{z}\right) \qquad \text{o.k.}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\hat{y})\,A\,k^2 \sin(kx - \omega t) + \frac{A}{c^2}\omega^2 \sin(kx - \omega t) = \mu_0 \vec{j}$$

Se $\vec{j} = 0 \Rightarrow c = \frac{\omega}{k}$ (No espaço livre de cargas e correntes)

$$\left[\nabla \cdot \vec{B} = 0 = \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow \rho = 0\right]$$

Problema - 4

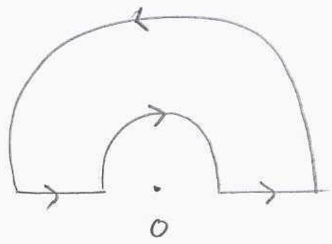
$$I(t) = k\,t^2$$

$\rho = 0 \Rightarrow \varphi(\vec{r},t) = 0$ (fio é electricamente neutro)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(t_R)}{r}\,d\vec{l}$$

$$t_R = \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} k \oint \frac{\left(t-\frac{r}{c}\right)^2}{r}\,d\vec{l} = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\oint \left[\frac{t^2 - 2t\frac{r}{c} + \frac{r^2}{c^2}}{r}\right] d\vec{l}$$



$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left[t^2 \oint \frac{d\vec{l}}{r} - \frac{2t}{c}\oint d\vec{l} + \oint \frac{1}{c^2}\, r\, d\vec{l}\right]$$

$$\oint d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left[t^2 \oint \frac{d\vec{l}}{r} + \frac{1}{c^2}\oint r\, d\vec{l}\right]$$

$$\oint \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{1}{a}\, 2a\, \hat{x} - \frac{1}{b}\, 2b\, \hat{x} + 2\hat{x}\int_a^b \frac{dx}{x} = 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$$

$$\oint r\, d\vec{l} = \left[a\, 2a\, \hat{x} - b\, 2b\, \hat{x} + 2\hat{x}\int_a^b x\, dx\right]$$

$$= 2\left[a^2 - b^2\right]\hat{x} + \left(b^2 - a^2\right)\hat{x} = \left(a^2 - b^2\right)\hat{x}$$

Logo:

$$\vec{A}(0,t) = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left[2t^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{c^2}(a^2-b^2)\right]\hat{x}$$

O campo eléctrico em O é:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{4\pi}\left[4t \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]\hat{x}$$

(O campo cresce proporcionalmente ao tempo)