ELECTROMAGNETISMO
2012/13
(Lic. Física)

2º Teste : 28/Nov/2012

---

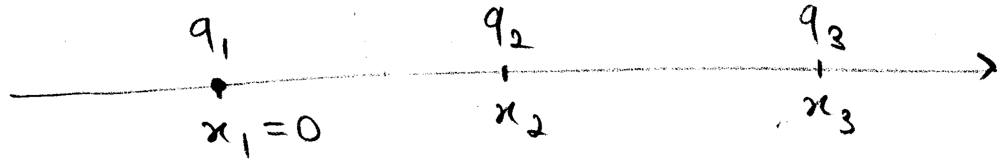
1. Resposta A

A energia electrostática de um sistema de três cargas q_i $(i=1,2,3)$ é dada por

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} q_i V(\vec{r}_i)$$

onde $V(\vec{r}_i)$ é o potencial no ponto onde se encontra q_i devido a todas as outras cargas.

No caso em estudo as cargas distribuem-se sobre o eixo dos xx:



$x_1 = 0$

$x_2 = a = 5{,}0$ cm

$x_3 = x$ é desconhecido

$q_1 = q_2 = q$

$q_3 = -q$

Tem-se então

$$W = \frac{1}{2}\left[q_1(V_{21}+V_{31}) + q_2(V_{12}+V_{32} + q_3(V_{13}+V_{23})\right]$$

onde V_{ij} é o potencial criado pela carga $\underline{i}$ no ponto onde se encontra a carga $\underline{j}$

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{31}}\right) + q_2\left(\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{32}}\right) + \right.$$

$$\left. + q_3\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)\right]$$

onde r_{ij} é a distância entre a carga $\underline{i}$ e a carga j.

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{a} + \frac{q_1 q_3}{x} + \frac{q_1 q_2}{a} + \frac{q_2 q_3}{x-a} + \right.$$

$$\left. + \frac{q_1 q_3}{x} + \frac{q_2 q_3}{x-a}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{x} - \frac{q^2}{x-a}\right]$$

Como $W=0$ (energia que o sistema teria se as cargas estivessem infinitamente afastadas), vem:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} = 0 \Rightarrow x(x-a) - a(x-a) - ax = 0$$

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4a^2}}{2}$$

$$x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\times 5 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

$\boxed{x \simeq 13 \text{ cm}}$ $\vee$ $x \simeq 2$ cm

2. Resposta <u>E</u>

As esferas L e M encostadas comportam-se como um só condutor (L-M). Ao aproximar-se a vareta carregada negativamente são induzidas cargas positivas nas regiões do condutor L-M mais próximas (esfera L) e cargas negativas nas regiões mais afastadas (esfera M). De facto, sendo L-M um metal, as cargas livres são electrões, com carga negativa, que são repelidos pela vareta, deixando as regiões mais próximas da vareta carregadas positivamente. Globalmente o condutor L-M continua neutro.
Quando as duas esferas são separadas, continuando sob influência do campo eléctrico criado pela vareta, a esfera L fica com carga positiva e a esfera M fica com carga negativa.

3. Resposta c

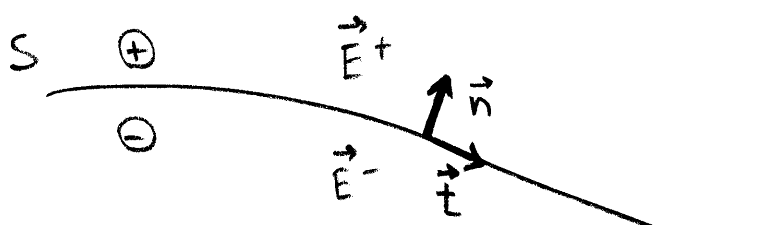
Num condutor com cavidade a carga que recobre a superfície interior é igual em módulo e de sinal contrário à soma das cargas situadas no interior da cavidade.
No caso apresentado não existem cargas no interior da cavidade, pelo que a superfície interior deverá ter carga nula. Consequentemente a esfera que é introduzida na cavidade e posta em contacto com a superfície não poderá adquirir qualquer carga.
Note-se que a existência de um pequeno orifício (para a introdução da esfera) deverá dar origem a uma pequena carga sobre a superfície interior. Mas, se o orifício for muito pequeno, essa carga deverá ser desprezável.

4.

a) Um condutor perfeito é definido como um corpo homogéneo no interior do qual as cargas eléctricas têm a mais completa mobilidade. A única limitação a essa mobilidade ocorre nas superfícies do condutor no que diz respeito aos deslocamentos normais a essas superfícies.

Se no interior do condutor existisse um campo eléctrico, as cargas livres mover-se-iam, dando origem a uma corrente eléctrica. Ora, numa situação de equilíbrio electrostático as cargas não podem mover-se. Conclui-se, assim, que o campo no interior do condutor em equilíbrio electrostático só pode ser nulo.

b) Seja $\underline{S}$ uma superfície carregada que separa as regiões (+) e (−) do espaço, como se ilustra na figura



$\vec{E}^+ \equiv$ campo eléctrico na região ⊕ num ponto vizinho de $\underline{S}$.

$\vec{E}^- \equiv$ campo eléctrico na região ⊖ num ponto vizinho de $\underline{S}$.

$\vec{n} \equiv$ vector unitário normal à superfície $\underline{S}$

$\vec{t} \equiv$ vector unitário tangente a $\underline{S}$

A descontinuidade do campo eléctrico quando se atravessa a superfície $\underline{S}$ com densidade superficial de carga $\underline{\sigma}$ é expressa por

$$(\vec{E}^+ - \vec{E}^-).\vec{n} = \sigma/\varepsilon_0 \qquad (1)$$

$$(\vec{E}^+ - \vec{E}^-).\vec{t} = 0 \qquad (2)$$

A primeira expressão traduz a descontinuidade do componente do campo normal à superfície $\underline{S}$. A segunda expressão traduz a continuidade da componente do campo tangencial à superfície $\underline{S}$.

No caso de $\underline{S}$ ser a superfície limítrofe da placa metálica de um condensador de placas paralelas, as expressões (1) e (2) vêm

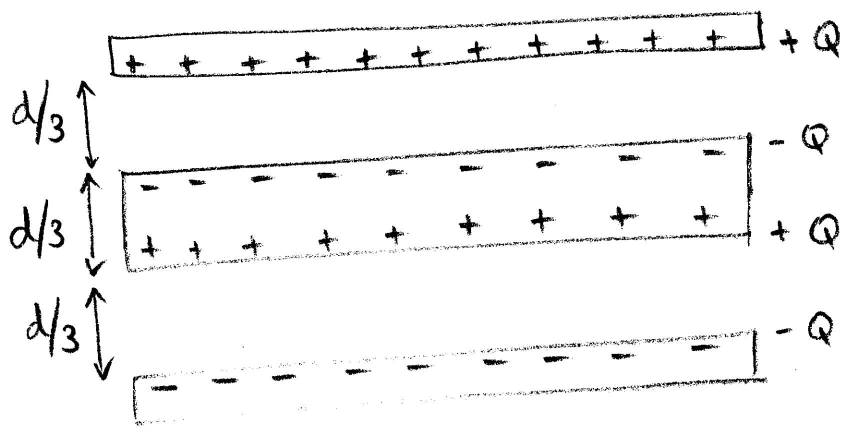
$$\vec{E}^+ . \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{E}^+ . \vec{t} = 0$$

pois $\vec{E}^-$ (campo no interior da armadura) é nulo. Como o campo entre as placas (infinitas), é uniforme, conclui-se que o campo eléctrico entre as placas é perpendicular às placas, dirige-se da placa com carga positiva para a placa com carga negativa e tem intensidade $E = \sigma/\varepsilon_0$.

c) A introdução da lâmina condutora neutra não altera em nada a distribuição de carga nas placas do condensador.

Assim, o campo eléctrico no espaço vazio permanece inalterado.

d) Depois de atingido o equilíbrio são induzidas na lâmina condutora as cargas $-Q$ e $+Q$ nas superfícies superior e inferior, respectivamente, como se ilustra na figura:



O sistema passa agora a comportar-se como uma associação de dois condensadores em série, com uma separação entre as placas de $d/3$.

Então a capacidade equivalente, C', é tal que

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

onde $$C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{\left(\frac{d}{3}\right)} = \varepsilon_0 \frac{3A}{d}$$

Então

$$\frac{1}{C'} = 2 \frac{d}{3\varepsilon_0 A}$$

$$C' = \varepsilon_0 \frac{3A}{2d}$$

5.

a) Todos os pontos para $r<a$ são interiores ao condutor pelo que nessa região é nulo o campo eléctrico.

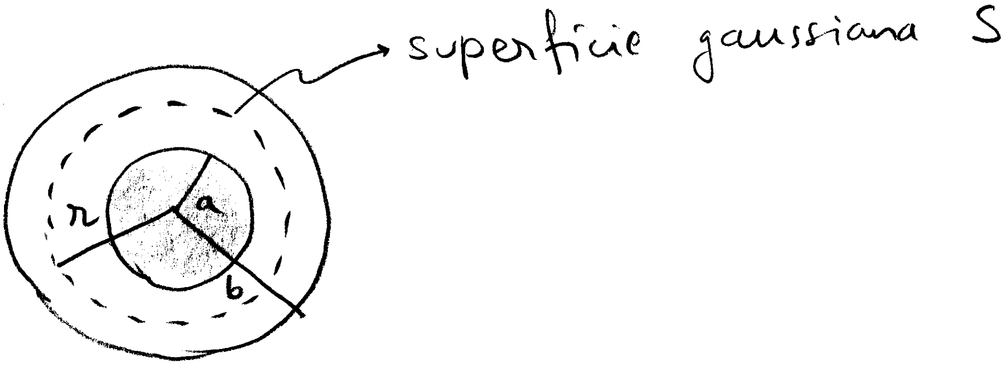
Na região $b<r<a$ encontra-se o dieléctrico de constante dieléctrica relativa ε_r.

O fluxo do deslocamento eléctrico, $\vec{D}$, através de uma superfície fechada que passe por esta região é dado pelo Teorema de Gauss na presença de dieléctricos

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,da = q_{int}$$

onde q_{int} é a carga interior à superfície gaussiana $\underline{S}$ e $\vec{n}$ é o vector unitário normal a $\underline{S}$.

Escolhamos como superfície gaussiana uma superfície esférica concêntrica com a esfera metálica e de raio $a<r<b$, como se ilustra na figura:



A carga interior a $\underline{S}$ vale

$$q_{int} = \int_a^r \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho r'^2 \sin\theta \, dr' d\theta \, d\phi \; - Q$$

$$= 4\pi \int_a^r \rho r'^2 dr' \; - Q$$

$$= 4\pi \int_a^r \frac{Q}{4\pi r'^2 (b-a)} r'^2 \, dr \; - Q$$

$$= Q \frac{r-a}{b-a} - Q$$

O vector $\vec{D}$ está relacionado com o vector campo eléctrico, $\vec{E}$, no caso de um dieléctrico linear, por

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

O T. Gauss, vem então

$$\oint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot \vec{n} \, da = Q\left(\frac{r-a}{b-a} - 1\right)$$

Devido à simetria esférica, $\vec{E}$ tem direcção radial e toma o mesmo valor sobre todos os pontos de S. Logo, a equação anterior vem

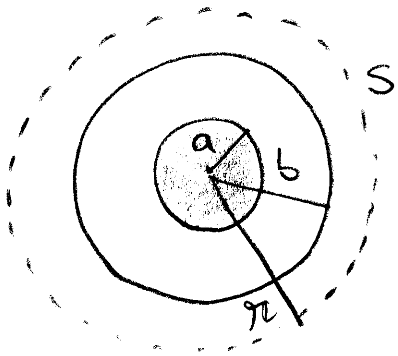
$$\varepsilon_0 \varepsilon_r E \cdot 4\pi r^2 = Q\left(\frac{r-a}{b-a} - 1\right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} Q\left(\frac{r-b}{b-a}\right) \frac{1}{r^2} \vec{u}_r \qquad (a < r < b)$$

Na região $r > b$ podemos aplicar o Teorema de Gauss para o vazio

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}\,da = q_{int}/\varepsilon_0$$

Escolhendo uma superfície gaussiana esférica centrada no centro e de raio $r > b$



e fazendo um raciocínio análogo ao anteriormente realizado na determinação do campo para $a < r < b$, vem

$$4\pi r^2 E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

onde agora q_{int} é toda carga do sistema, isto é, a soma das cargas da esfera metálica e da coroa dieléctrica.

Mas a carga da coroa esférica dieléctrica vale

$$Q' = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho r'^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 4\pi \int_a^b \frac{Q}{4\pi r'^2 (b-a)} r'^2 dr = +Q$$

Então $q_{int} = 0$ e logo

$$E = 0 \qquad (r > b)$$

b) A polarização do dieléctrico é dada por

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad , \quad \chi \equiv \text{susceptibilidade eléctrica}$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$= \cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\frac{1}{4\pi \cancel{\varepsilon_0} \varepsilon_r} Q\left(\frac{r-b}{b-a}\right)\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$$

A distribuição volúmica de cargas de polarização tem densidade

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

Usando coordenadas esféricas para o cálculo da divergência vem

$$\rho_p = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r} Q\left(\frac{r-b}{b-a}\right)\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{r^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{b-a}$$

$$= -\frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2(b-a)}$$

A distribuição superficial de cargas de polarização tem densidade

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}$$

onde $\vec{n}$ é o vector unitário normal à superfície do dieléctrico e apontando para fora.

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r} Q\left(\frac{r-b}{b-a}\right)\frac{1}{r^2}\vec{u}_r \cdot \vec{n}$$

Na superficie interior do dieléctrico

$r = a$

$\vec{u}_r \cdot \vec{n} = -1$

e consequentemente

$$\sigma_{p(r=a)} = \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r} Q \frac{b-a}{a^2(b-a)}$$

$$= \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r} \frac{Q}{a^2}$$

Na superficie exterior do dieléctrico

$r = b$

$\vec{u}_r \cdot \vec{n} = 1$

e consequentemente

$$\sigma_{p(r=b)} = \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r} Q \frac{b-b}{b^2(b-a)}$$

$$= 0$$

c) A energia electrostática do sistema pode ser determinada recorrendo à relação

$$W = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \vec{E}\cdot\vec{D}\, dv$$

onde a integração é efectuada sobre todo o espaço.

No caso em estudo, o campo é nulo para $r<a$ e para $r>b$. A integração fica limitada à região $a<r<b$:

$$W = \frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{E}\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{4\pi}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\int_a^b\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}Q\,\frac{r-b}{b-a}\,\frac{1}{r^2}\right]^2 r^2\, dr$$

$$= 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\frac{(r-b)^2}{r^2}\, dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\,\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left(1-\frac{2b}{r}+\frac{b^2}{r^2}\right) dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\,\frac{1}{(b-a)^2}\left[(b-a)-2b\ln\frac{b}{a}-b^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]$$