Cálculo Vetorial **Exercícios - Folha 4**

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y + x$.

   (a) Determine a derivada direcional de f em $a = (1, 0)$ na direcção do vetor $v = (1, 1)$.

   (b) Determine a derivada direcional de f num ponto qualquer (x, y) na direcção do vetor $v = (1, 0)$.

2. Calcule as derivadas parciais das funções seguintes.

$$\begin{array}{ll} a)\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(zy) & c)\ f(x,y) = 2x^4y^2 + (3x-y)^3 \\ b)\ f(x,y) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{y}) & d)\ h(u,v,w) = \dfrac{u+v}{u+w} \end{array}$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   b) Será f diferenciável em $(0, 0)$?

4. Estude a diferenciabilidade das seguintes funções (no seu domínio):

$$a)\ f(x,y) = \operatorname{sen}(\frac{y}{x}) \quad b)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2x^2y^2} \quad c)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, derivável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi(\frac{x}{y})$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y) = x - y^2$.

   a) Determine e represente graficamente a curva de nível de f que passa pelo ponto $a = (-1, 0)$.

   b) Determine e represente graficamente o vetor gradiente de f em a.

   c) Justifique que f é diferenciável em a e determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f em a.