

Universidade do Minho - Escola de Ciências
Licenciatura em Física

Notas - Mecânica Analítica e Ondas

Segundo ano - Primeiro semestre



Tiago Antão
Número de aluno: a89643
20 de Janeiro de 2020

Conteúdo

1	Equações de Lagrange	7
1.1	Princípio dos trabalhos virtuais	7
1.1.1	Formulação Newtoniana	7
1.1.2	Coordenadas generalizadas	7
1.1.3	Trabalhos virtuais	8
1.2	Equações de Lagrange	9
1.2.1	Princípio de D'Alembert	9
1.2.2	Derivação	10
1.2.3	Casos especiais	12
1.2.4	Princípio de Hamilton [†]	13
1.2.5	Métodos Variacionais - O problema matemático [†]	14
1.2.6	Aplicação à derivação das equações de Lagrange partindo do princípio de Hamilton [†]	15
1.3	Leis de Conservação	16
1.3.1	Integrais primários	16
1.3.2	Momentos canônicos	17
1.3.3	Coordenadas cíclicas e conservação	17
2	Equações de Hamilton	18
2.1	Equações de Hamilton	18
2.1.1	Transformações de Legendre [†]	18
2.1.2	Transição Lagrange→Hamilton	19
2.1.3	Equações de Hamilton	19
2.1.4	Casos especiais	20
2.1.5	Vantagens do tratamento de coordenadas cíclicas	20
2.2	Derivação Variacional das equações de Hamilton [†]	21
2.2.1	Derivação das Equações de Hamilton	21
2.2.2	Variações Δ	22
2.2.3	O princípio da ação mínima	22
2.3	Teorema de Noether [†]	24
2.3.1	Derivação do Teorema	24
2.3.2	Exemplo - Homogeneidade do espaço/ Momento linear	26
2.3.3	Espaço de configuração estendido	28
2.3.4	Exemplo - Homogeneidade do Tempo/ Energia	29
3	Corpo Rígido	32
3.1	Corpo rígido e transformações ortogonais	32
3.1.1	Graus de liberdade do corpo rígido	32

3.1.2	Cossenos diretores	33
3.1.3	Ângulos de Euler	34
3.1.4	Rotações finitas [†]	35
3.1.5	Rotações Infinitesimais	36
3.1.6	Velocidade Angular - Definição [†]	37
3.2	Movimento do corpo rígido	39
3.2.1	Velocidade Angular - Em termos familiares	39
3.2.2	Momento angular	40
3.2.3	Velocidade angular em termos dos ângulos de Euler	41
3.2.4	Diagonalização do tensor inércia	42
3.2.5	Energia Cinética	42
3.2.6	Momento de Inércia - Em termos familiares [†]	43
3.2.7	Elipsoide de Inércia	45
3.2.8	Equações de Euler do movimento de um corpo rígido [†]	46
4	Transformações Canónicas[†]	48
4.1	Notação Simplética	48
4.1.1	Receita para obter as equações de Hamilton	48
4.1.2	Forma Funcional do Hamiltoneano	48
4.1.3	Equações de Hamilton em Notação Simplética	49
4.2	As equações das transformações canónicas	50
4.2.1	Utilidade e Aplicação	50
4.2.2	Transformações de coordenadas (espaço de configuração e espaço de fases)	51
4.2.3	Transformações Canónicas - Algumas Definições	52
4.2.4	Função Geradora e a forma de transformações Canónicas	53
4.3	Transformações Canónicas em notação simplética	56
4.3.1	Condições diretas para uma transformação canónica (restrita)	56
4.3.2	Transição para notação matricial	57
4.3.3	Transformações canónicas infinitesimais	58
4.4	Parênteses de Poisson	60
4.4.1	Definição	60
4.4.2	Equações de Hamilton	61
4.4.3	Propriedades algébricas dos parênteses de Poisson	61
4.4.4	Constantes do movimento	62
4.4.5	Teorema de Liouville	62
5	Vibrações e Oscilações	65
5.1	Vibrações Sinusoidais	65
5.1.1	Importancia do movimento sinusoidal	65
5.1.2	Descrição e Interpretação Física	66
5.1.3	Representação em termos de rotação de vetores	66
5.2	Sobreposição de Ondas	68
5.2.1	Sobreposição de ondas em uma dimensão	68
5.2.2	Sobreposição de diferentes frequências e batimento	69
5.2.3	Sobreposição de muitas vibrações da mesma frequência	70
5.2.4	Sobreposição de vibrações perpendiculares	71
5.2.5	Sobreposição perpendicular com iguais frequências	72
5.3	Vibrações de sistemas Físicos	74

5.3.1	Uma massa numa mola - Lei de Hooke	74
5.3.2	Uma mola com massa	75
5.3.3	Objetos flutuantes	76
5.3.4	Pêndulos	77
5.3.5	O decaimento de vibrações livres	78
5.3.6	Diferentes casos - Amortecimento crítico, sub-crítico e super-crítico	79
5.4	O Oscilador Forçado	80
5.4.1	O oscilador não amortecido com uma força periódica	80
5.4.2	Oscilador forçado amortecido	81
5.4.3	Efeito da variação do atrito - Qualidade	82
5.4.4	Regime transiente	83
5.4.5	Potencia absorvida por um oscilador forçado	85
5.4.6	Potencia absorvida por um oscilador forçado amortecido	85
5.4.7	Ressonância num circuito elétrico	87
6	A equação de Onda[†]	90
6.1	Ondas a uma dimensão	90
6.1.1	Uma derivação elementar	90
6.1.2	Lei de Newton para uma corda elástica (infinita) sobre tensão	91
6.1.3	Formulação Lagrangeana - Corda discretizada	93
6.1.4	Densidade Lagrangeana e o limite do contínuo	94
6.1.5	Derivação variacional das equações de Lagrange para sistemas contínuos unidimensionais	94
6.2	Ondas Harmónicas	96
6.2.1	Ondas harmónicas	96
6.2.2	Ondas Estacionárias	97
6.2.3	Soluções separáveis - Soluções de Bernoulli	98
6.2.4	Energia transportada numa onda	100
6.2.5	Energia transportada por uma onda harmónica	101
6.3	Modos normais	102
6.3.1	Modos normais de dois osciladores acoplados	102
6.3.2	Soluções de D'Alembert	104
6.4	Ondas 2D	105
6.4.1	Membranas elásticas: Ondas transversais 2D	105
7	Apêndices	109
7.1	Teorema de Euler sobre equações homogêneas	109
7.2	Notação indicial - Algumas definições e provas	109
	Referências	110

Prefácio

Estas notas correspondem à unidade curricular de Mecânica Analítica e Ondas 2019/2020. Lecionada no primeiro semestre de segundo ano da Licenciatura em Física na Universidade do Minho pelo Professor José Manuel Pereira Carmelo. A informação aqui apresentada corresponde a uma revisão e resumo das notas da professora Maria Helena Andrade e Silva e das próprias aulas do professor. Têm o propósito duplo de “resumir” as notas da professora Maria Helena Andrade e Silva e atualizá-las para um formato digital moderno. É apresentado igualmente, material não lecionado e não contemplado nas notas da professora Maria Helena, mas antes baseado nas notas do professor José Luís Pires Ribeiro da cadeira no ano letivo 2018/2019 (um agradecimento é devido ao colega Rui Dias por ceder as notas do professor e pelo esforço de as reescrever a limpo), bem como em várias secções do fantástico livro de Herbert Goldstein “Classical Mechnics”¹. As secções e subsecções não abordadas na unidade curricular encontram-se marcadas com uma cruz[†] de modo a serem facilmente identificadas.

Estas notas contêm, primeiramente uma secção sobre o principio dos trabalhos virtuais, introduzindo a noção de ligação, coordenadas generalizadas e espaço de configuração, de modo a, através do princípio de D’Alembert serem derivadas as equações de Lagrange. São considerados vários aspetos teóricos da formulação Lagrangeana da Mecânica, bem como vários casos particulares, e posteriormente é apresentada a derivação correspondente ao método variacional partindo do princípio de Hamilton. São considerados também alguns aspetos relacionados com leis de conservação.

Seguidamente é feita a transição para as equações de Hamilton, sendo abordadas as transformações de Legendre e considerados, igualmente vários aspetos teóricos e práticos da formulação Hamiltoniana. Procura-se, do mesmo modo expor a derivação das equações de Hamilton através de métodos variacionais. É introduzido, posteriormente o teorema de Noether enquanto correspondência entre simetrias e leis de conservação.

O terceiro capítulo é dedicado ao corpo rígido, sendo introduzidos os cossenos diretores e os ângulos de Euler. A partir da “framework” de rotações infinitesimais é definida a velocidade angular.

São posteriormente analisados vários aspetos do movimento do corpo rígido, nomeadamente a relação entre momento angular, velocidade angular e o tensor de Inércia. São apresentados alguns resultados da cadeira anterior de Mecânica Newtoniana de uma forma mais “rigorosa” como o teorema de Steiner e a definição de momento de inércia em torno de um eixo. É também apresentado o elipsoide de Inércia como representação visual do tensor de inércia enquanto forma quadrática.

¹(Goldstein, Poole, & Safko, 2014)

Os parênteses de Poisson são mencionados brevemente na UC, no entanto, é incluído nas notas um capítulo inteiro sobre transformações canónicas e as equações de Hamilton em notação matricial/simplética de modo a procurar explicitar a sua importância enquanto ferramentas de transição entre a Mecânica clássica e teorias mais modernas da Física, bem como a interpretação das equações do movimento como sucessões de transformações canónicas infinitésimas. É tratado, neste capítulo, o teorema de Liouville.

A maioria dos temas relacionados com mecânica analítica é revisto tendo por base algumas secções do primeiro volume do famoso curso de Física de Landau e Lifshitz, “Mechanics”², especialmente a secção relacionada com o teorema de Liouville.

Numa segunda parte das notas, correspondente à segunda “metade” da cadeira, são abordados vários aspetos chave da física dos movimentos periódicos, sendo as notas baseadas exaustivamente no livro “Vibrations and Waves”³ de A. P. French.

É incluído, por último um capítulo composto por temas abordados nas notas do professor José Luís Ribeiro, relativas à derivação da equação de onda por três métodos diferentes, incluindo a utilização da densidade Lagrangeana para a corda vibrante e para o caso de uma “superfície vibrante”, bem como a densidade Hamiltoniana de modo a caracterizar a energia transportada por uma onda. Este capítulo procura, assim, relacionar ambas as partes da cadeira, realçando a importância basilar da mecânica analítica na física, aplicando-a ao tema das ondas.

²(Landau, Lifshitz, Sykes, & Bell, 1976)

³(French, 1971)

Capítulo 1

Equações de Lagrange

1.1 Princípio dos trabalhos virtuais

1.1.1 Formulação Newtoniana

A formulação Newtoniana da mecânica corresponde a resolver um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$\vec{F}_i = m\vec{a}_i$$

Ou, numa forma mais detalhada para um conjunto de N partículas:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N-1} \vec{F}_{ij} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

A ideia é que se aplica uma força no sistema (lado esquerdo da equação) e o sistema responde com uma alteração no momento ao longo do tempo (lado direito da equação).

Num sistema de N partículas, cada partícula i tem 3 coordenadas de posição (um total de $3N$ variáveis), a relação acima representa $3N$ equações. Isto implica que admite solução.

Em princípio todos os problemas da mecânica correspondem a soluções de problemas deste tipo, no entanto há que notar que por vezes existem ligações que acoplam as equações diferenciais.

1.1.2 Coordenadas generalizadas

É útil em mecânica considerar em vez de o que acontece a cada partícula, o que acontece em cada grau de liberdade.

Definição 1.1.1. Graus de Liberdade

O número de graus de liberdade é o número de variáveis livres e independentes.

Definição 1.1.2. Ligações

Ligações reduzem os graus de liberdade, ou seja, são constrangimentos que limitam o movimento do sistema.

Definição 1.1.3. Ligações holónomas

Ligações são holónomas quando podem ser representaas por

$$f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

O número de graus de liberdade é dado por:

$$m = 3N - l$$

A imposição de ligações torna difícil a solução de problemas mecânicos porque as $3N$ equações de Newton que descrevem o movimento do sistema não são independentes, estão ligadas pela equação de ligação.

Assim, consideramos as posições de cada partícula como funções de $3N - l$ coordenadas generalizadas q_j . Uma para cada grau de liberdade.

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\vdots$$

$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

1.1.3 Trabalhos virtuais**Definição 1.1.4. Deslocamentos virtuais**

$$\delta \vec{r} = \lim_{dt \rightarrow 0} d\vec{r}$$

É um deslocamento infinitesimal instantâneo, ou seja uma variação à configuração de um sistema resultante de uma variação infinitesimal de qualquer das coordenadas \vec{r}_i compatível com as ligações impostas ao sistema num dado instante t .

Uma força, exerce um trabalho virtual num deslocamento virtual dado por:

$$\delta W = \vec{F}_{tot} \cdot \delta \vec{r}$$

Podemos decompor a força total aplicada sobre o sistema em forças aplicadas e forças de ligação:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F} + \vec{R}$$

No entanto, as forças de ligação são sempre perpendiculares ao movimento, ou seja $\vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0$.

Definição 1.1.5. Princípio dos trabalhos virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais diz que quando um sistema está em equilíbrio, o trabalho virtual efetuado pelas forças aplicadas num deslocamento virtual é nulo

$$\begin{aligned} \delta W &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \end{aligned}$$

1.2 Equações de Lagrange

1.2.1 Princípio de D'Alembert

Temos, pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Se considerarmos coordenadas generalizadas, como cada força é independente, então cada termo do somatório tem de ser 0:

$$(\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

A ideia agora é reduzir o problema dinâmico a um problema estático:

A observação de D'Alembert é precisamente que:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

É equivalente a:

$$\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

E substituindo no princípio dos trabalhos virtuais:

Definição 1.2.1. Princípio de D'Alembert

A resposta dada por um sistema em equilíbrio a uma dada força aplicada é uma força equivalente tal que o trabalho realizado pela sua soma num deslocamento virtual é nulo:

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Análogamente, considerando deslocamentos independentes

$$\left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

1.2.2 Derivação

O problema é assim facilitado quando consideramos deslocamentos independentes. Para tal consideramos coordenadas generalizadas (do espaço de configurações) das quais dependem as posições no espaço físico.

$$q_1, q_2, \dots, q_{3N-l}$$

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N-l}$$

Podemos, pois, traduzir o Princípio de D'Alembert nestas coordenadas:

Definimos a velocidade de cada partícula:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

(regra da cadeia de funções de muitas variáveis)

Expressimos o deslocamento virtual em termos das coordenadas generalizadas:

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-l} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

E podemos assim definir os componentes da força generalizada Q_j :

Definição 1.2.2. Força generalizada

Força num determinado grau de liberdade:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Traduzimos os as derivadas dos momentos:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-l} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Como $p_i = m_i \vec{v}_i$ podemos pegar na expressão acima e notar (já que $\frac{d}{dt}(a \cdot b) = \dot{a} \cdot b + a \cdot \dot{b}$):

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$

E o primeiro termo do RHS é o que aparece na derivada dos momentos:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-l} \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j$$

Simplificando e usando no fim a tradução das velocidades:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^{3N-l} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

Usando a expressão traduzida da velocidade:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

E usando $\frac{d}{dt}(a \cdot a) = 2(\dot{a} \cdot a)$:

$$m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

E então, substituindo tudo no princípio de D'Alembert:

$$\sum_{j=1}^{3N-l} \left(Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = 0$$

Como as coordenadas generalizadas são independentes:

Definição 1.2.3. Equações de Lagrange de segunda Espécie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Uma ideia importante é que as partículas (índices i) perdem individualidade para trazer individualidade aos graus de liberdade (índices j).

1.2.3 Casos especiais

Admitindo que a força deriva de um potencial que apenas depende das posições:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x_i} \\ -\frac{\partial V}{\partial y_i} \\ -\frac{\partial V}{\partial z_i} \end{bmatrix}$$

Temos que a força generalizada é:

$$Q_j = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Substituindo a força generalizada nas equações de Lagrange de segunda espécie:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T - V}{\partial q_j} = 0$$

E ainda, uma vez que o potencial não depende das velocidades generalizadas \dot{q}_j :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T - V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T - V}{\partial q_j} = 0$$

Definição 1.2.4. Lagrangeano

O Lagrangeano é uma função das coordenadas e velocidades generalizadas dado por $\mathcal{L} = T - V$

Assim temos:

Definição 1.2.5. Equações de Lagrange

Equações diferenciais de segunda ordem que descrevem as coordenadas e velocidades generalizadas em função do tempo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

No caso em que V depende das velocidades generalizadas:

$$V = V(q_j, \dot{q}_j)$$

Se as forças generalizadas surgirem do potencial como:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

As equações de Lagrange têm a mesma forma e o potencial U é muitas vezes apelidado de potencial generalizado ou potencial dependente da velocidade. (Um exemplo importante é o do potencial eletromagnético, ou de forças dissipativas.)

1.2.4 Princípio de Hamilton[†]

Definição 1.2.6. Sistemas monogénicos

Um sistema monogénico é tal que o potencial generalizado é uma função que pode ser escrito em função as coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas e do tempo.

Definição 1.2.7. Princípio de Hamilton

O movimento de um sistema desde o tempo t_1 até o tempo t_2 é tal que o o integral de linha (Ação):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

tem um valor estacionário para o caminho tomado pela partícula.

Com valor estacionário quer-se dizer que o integral tem o mesmo valor para variações infinitesimais de primeira ordem.

Ou seja, o movimento de um sistema é tal que a variação da ação é nula:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{3N-l}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-l}, t) dt = 0$$

Para sistemas monogénicos, o principio de Hamilton é condição suficiente para derivar as equações de Lagrange. Assim, tomamos o princípio de Hamilton como o postulado básico que nos permite derivar as leis da Mecânica, ao contrário das leis do movimento de Newton.

1.2.5 Métodos Variacionais - O problema matemático[†]

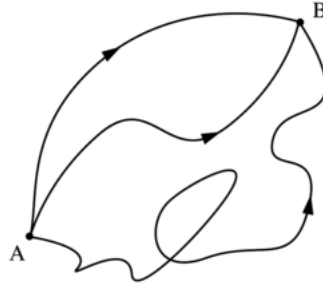
Seja $f = f(y, \dot{y}, x)$ uma função definida num caminho $y = y(x)$ entre dois valores x_1 e x_2 onde \dot{y} é a derivada:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

Queremos encontrar um caminho $y(x)$ tal que o integral de linha J entre x_1 e x_2 seja estacionário:

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx = 0$$

Consideramos que os extremos estão fixos $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$.



Consideramos então o problema numa forma que nos permite usar o aparato usual do cálculo diferencial. Consideramos uma vizinhança infinitesimal de caminhos relativamente ao caminho correto. Variações no caminho podem ser pensadas como variando um parâmetro α . Representamos assim esta vizinhança como $y(x, \alpha)$ como $y(x, 0)$ sendo o caminho correto. Escolhemos assim uma função $\eta(x)$ que é nula em x_1 e x_2 , e então:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$$

Temos assim o integral que também dependerá de α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx$$

A condição de que o integral é estacionário em $y(x, 0)$ é simplesmente que:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

Assumindo f suficientemente bem comportada podemos derivar dentro do integral:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx$$

Considerando o integral que depende de \dot{y} :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx$$

Que podemos integrar por partes ($u = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$, $dv = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} \Rightarrow du = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$ e $v = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$) e obter o resultado:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

Como y_1 e y_2 são constantes o termo fora do integral é nulo e então obtemos:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = 0$$

Definição 1.2.8. Lema fundamental do cálculo de variações

O Lema fundamental do cálculo das variações diz que se:

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0$$

Para qualquer função arbitrária $\eta(x)$ de classe \mathcal{C}^2 , $M(x)$ tem de ser igual a zero no intervalo $]x_1, x_2[$.

Se aplicarmos o Lemma ao problema anterior, obtemos que J é estacionário sse:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

1.2.6 Aplicação à derivação das equações de Lagrange partindo do princípio de Hamilton[†]

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{3N-l}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-l}, t) dt = 0$$

Escrevemos cada coordenada generalizada em termos do parâmetro α :

$$\begin{aligned} q_1(t, \alpha) &= q_1(t, 0) + \alpha \eta_1(t) \\ q_2(t, \alpha) &= q_2(t, 0) + \alpha \eta_2(t) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Escrevemos o integral da ação:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3N-l} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right) dt$$

E aplicando o resultado do cálculo das variações:

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3N-l} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} dt = 0$$

O Lema fundamental implica então:

$$\sum_{j=1}^{3N-l} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

E por último, a independência das coordenadas generalizadas implica que cada j desaparece:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Ou escrito de uma forma mais familiar obtemos as equações de Lagrange a partir do princípio de Hamilton:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

1.3 Leis de Conservação

1.3.1 Integrais primários

Nem sempre obter o movimento integrando as equações de Lagrange é fácil, mas é possível extrair informação do problema a partir de integrais primários do movimento

Definição 1.3.1. Integrais primários do movimento

São quantidades que se conservam ao longo do movimento:

$$f(q_j, \dot{q}_j, t) = \text{const.}$$

1.3.2 Momentos canônicos

Definição 1.3.2. Momento canônico

É a generalização do momento e do momento angular para as coordenadas generalizadas no espaço de configuração

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

1.3.3 Coordenadas cíclicas e conservação

Definição 1.3.3. Coordenada cíclica

Se o Lagrangeano não depende de alguma coordenada generalizada q_j esta diz-se cíclica:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

E assim, pelas equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{dp_j}{dt} = 0 \Rightarrow p_j = \text{const.}$$

Ou seja, a existência de uma coordenada cíclica q_j implica a existência de uma lei de conservação do momento canônico p_j .

Capítulo 2

Equações de Hamilton

2.1 Equações de Hamilton

2.1.1 Transformações de Legendre[†]

Do ponto de vista matemático, a mudança da formulação Lagrangeana para a Hamiltoniana corresponde a uma mudança de variáveis de (q_j, \dot{q}_j, t) para (q_j, p_j, t) .

Esta transformação é feita via uma transformação de Legendre.

Seja $f(x, y)$ uma função com diferencial:

$$df = u \, dx + v \, dy$$

Onde:

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Se considerarmos:

$$g = f - ux$$

O diferencial de g é dado por:

$$\begin{aligned} dg &= df - u \, dx - x \, du \\ &= v \, dy - x \, du \end{aligned}$$

Onde:

$$x = \frac{\partial g}{\partial u} \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}$$

Ou seja, obtemos uma função cujo diferencial depende de du e dy como desejado, e x e v são funções das variáveis u e y dadas pelas relações acima.

2.1.2 Transição Lagrange→Hamilton

O diferencial do Lagrangeano é dado por:

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3N-l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{3N-l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Usamos notação de soma de Einstein (índices repetidos somam).

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Pela definição de momento canónico:

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Definição 2.1.1. Hamiltoneano

Introduzimos então o Hamiltoneano \mathcal{H} gerado pela transformação de Legendre:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Que tem diferencial:

$$d\mathcal{H} = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

2.1.3 Equações de Hamilton

Assim como o diferencial do Hamiltoneano pode ser escrito:

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

Obtemos as $(2n)$ equações de Hamilton canónicas:

Definição 2.1.2. Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

E ainda a relação:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

2.1.4 Casos especiais

Notemos que no caso em que o potencial não depende das velocidades generalizadas $V = V(q_j)$, o momento canónico é dado por:

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

E o hamiltoneano é assim dado por:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{3N-l} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L}$$

E pelo teorema de Euler (cf. Secção 7.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 2T - \mathcal{L} = 2T - T + V \\ &= T + V \end{aligned}$$

Corresponde á energia total do sistema.

Definição 2.1.3. Conservação da energia

Assim, nos casos em que o Hamiltoneano não depende do tempo t explicitamente e o potencial V não depende das velocidades generalizadas \dot{q}_j , verifica-se a conservação da energia do sistema. De certo modo quando o tempo t é uma coordenada cíclica, a quantidade conservada é a energia.

2.1.5 Vantagens do tratamento de coordenadas cíclicas

Se q_j é uma coordenada cíclica, pelas equações de Lagrange:

$$\dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j = \alpha$$

O Lagrangeano poderá depender da velocidade generalizada \dot{q}_j se a coordenada generalizada q_j for cíclica:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_{3N-l}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-l})$$

O Hamiltoniano no entanto não depende do momento generalizado p_j , dependendo apenas de α .

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_{3N-l}, p_1, \dots, p_{j-1}, \alpha, p_{j+1}, \dots, p_{3N-l})$$

2.2 Derivação Variacional das equações de Hamilton[†]

2.2.1 Derivação das Equações de Hamilton

Foi demonstrado, no capítulo anterior, que as equações de Lagrange são consequência de um princípio variacional, o princípio de Hamilton.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$$

Este aplica-se a movimentos no espaço de configuração. Se pretendemos derivar as equações de Hamilton, então o princípio variacional deve ser modificado de modo a tratar trajetória no espaço de fases.

O integrando na ação deve ser expresso como uma função de q e p e das suas derivadas em ordem ao tempo. Isto pode ser alcançado através da transformação de Legendre habitual.

Definição 2.2.1. Princípio de Hamilton Modificado

Este princípio variacional é muitas vezes apelidado de princípio de Hamilton modificado:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - \mathcal{H}(q, p, t)) dt = 0$$

Este corresponde precisamente a um problema variacional no espaço de fase de $2m$ variáveis:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} f(q, \dot{q}, p, \dot{p}) dt = 0$$

As $2m$ equações de Lagrange correspondentes são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} = 0$$

É de notar no entanto, que a única dependência de \dot{q} é no termo $p\dot{q}$ e assim, a primeira equação de Lagrange torna-se imediatamente:

$$\dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = 0$$

De notar também é que o integrando da ação não depende de \dot{p}_j , assim, a segunda equação de Lagrange reduz-se a:

$$\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = 0$$

Recuperam-se, precisamente as equações de Hamilton a partir do princípio de Hamilton modificado.

2.2.2 Variações Δ

Até agora consideramos variações δ , ou seja, no porcesso discutido anteriormente, o caminho variado no espaço de configuração termina sempre nos pontos que representam a configuração do sistema nos tempos t_1 e t_2 no caminho correto. Para obter as equações de Lagrange, foi também necessário admitir que a variação nos pontos finais era nula $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$.

Variações Δ são menos constrangidas. De um modo geral, o integral da ação pode ser avaliado em instantes iniciais e finais diferentes dos instantes iniciais e finais dados pelo caminho correto. Pode deste modo existir uma variação das coordenadas nos instantes extremos.

Usando assim uma parametrização para a variação em tudo semelhante à anterior recorrendo a um parâmetro α que é 0 para o caminho correto.

$$q_j(t, \alpha) = q_j(t, 0) + p\alpha\eta_j(t)$$

Aqui, as funções η_j não são nulas nos pontos extremos como anteriormente.

2.2.3 O princípio da ação mínima

A variação Δ do integral de ação é definida como:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \equiv \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} \mathcal{L}(\alpha) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(0) dt$$

Onde $\mathcal{L}(\alpha)$ significa que o integral é avaliado no caminho variado, e \mathcal{L} corresponde ao caminho correto do movimento.

Assim, esta variação consiste em duas partes, a primeira correspondendo à mudança dos limites de integração por quantidades infinitesimais, e a segunda parte é causada pela mudança no integrando no caminho variado, mas agora nos mesmos limites que o integral original. Assim, a variação Δ toma a forma:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = L(t_2)\Delta t_2 - \mathcal{L}(t_1)\Delta t_1 + \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

Este integral pode ser avaliado como anteriormente, mas retendo o termo da integração por partes:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Pelas equações de Lagrange, a quantidade em parênteses retos é nula, pelo que:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = (\mathcal{L} \Delta t + p_j \delta q_j) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Note-se, no entanto que:

$$\begin{aligned} \Delta q_j(t_2) &= q_j(t_2 + \Delta t_2, \alpha) - q_j(t_2, 0) \\ &= q_j(t_2, \alpha) + \dot{q}_j(t_2, \alpha) \Delta t_2 - q_j(t_2, 0) \\ &= \delta q_j(t_2) + \dot{q}_j \Delta t_2 \end{aligned}$$

E a mesma coisa para Δt_1 . Ou seja:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = (\mathcal{L} \Delta t - p_j \dot{q}_j \Delta t + p \Delta q_j) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

E escrevendo em termos do Hamiltoniano:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = (p_j \Delta q_j - \mathcal{H} \Delta t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Assim restringimo-nos, com o intuito de derivar o princípio da ação mínima a sistemas tal que:

1. O Lagrangeano \mathcal{L} e consequentemente o Hamiltoniano \mathcal{H} não dependem explicitamente do tempo.
2. O Hamiltoniano é conservado no caminho variado, bem como no caminho correto.
3. Δq_j é nula nos extremos do caminho (mas não necessariamente Δt)

Nestas condições, a variação Δ é simplesmente:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = -\mathcal{H}(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

No entanto, nestas condições o integral de ação é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_j \dot{q}_j dt - \mathcal{H}(t_2 - t_1)$$

A variação Δ do integral de ação então é dado por:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_j \dot{q}_j dt - \mathcal{H}(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

Definição 2.2.2. Princípio da ação mínima

E portanto, comparando as expressões da variação Δ do integral de ação obtido, obtem-se o princípio da ação mínima:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_j \dot{q}_j dt = 0$$

2.3 Teorema de Noether[†]

2.3.1 Derivação do Teorema

O princípio da ação mínima permite formular a mecânica com grande simplicidade. Como referido na subsecção referente à derivação das equações de Lagrange por métodos variacionais, o movimento de um sistema é tal que a ação é minimizada:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0$$

Esta condição implica as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

É de notar que a dinâmica do sistema não muda se:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{dG}{dt}$$

Onde G é uma função das coordenadas generalizadas e do tempo (já que os extremos são fixos $q(t_1, \alpha) = q(t_1)$, $q(t_2, \alpha) = q(t_2)$, $\forall \alpha$):

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} + \frac{dG}{dt} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt + \delta [G(q(t_1), t_1) - G(q(t_2), t_2)] = 0$$

Assim, considere-se uma transformação infinitesimal do sistema:

$$q_j \rightarrow q_j + \delta q_j$$

Uma transformação deste tipo, em geral alterará o Lagrangeano do sistema. Contudo, no caso de a mudança induzida no Lagrangeano puder ser escrita como:

$$\delta L = L' - L = \frac{dF}{dt}$$

O Lagrangeano permanece invariante, constituindo a transformação uma simetria da ação.

Definição 2.3.1. Teorema de Noether

Se $q \rightarrow q + \delta q$ é uma transformação infinitesimal que deixa a ação invariante, então existe uma lei de conservação, e a quantidade que é conservada, J , pode ser obtida partindo do Lagrangeano e da simetria considerada

A variação infinitesimal no lagrangeano pode ser escrita:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{3N-l} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right]$$

E esta variação tem de ser igual a:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{dF}{dt}$$

Usando as equações de Lagrange abaixo de modo a simplificar a expressão anterior:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

E ainda:

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$$

Vem:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{3N-l} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \right]$$

E verificamos que a expressão corresponde á derivada de um produto:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{3N-L} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$$

Usando a condição anterior para a invariância do integral de ação:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_{j=1}^{3N-L} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = \frac{dF}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^{3N-L} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - F \right] &= 0 \end{aligned}$$

Definição 2.3.2. Corrente de Noether

Ou seja, existe a quantidade J que é conservada, apelidada de corrente de Noether:

$$J = \sum_{j=1}^{3N-l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - F$$

2.3.2 Exemplo - Homogeneidade do espaço/ Momento linear

A conservação do momento linear está associado à homogeneidade do espaço. É possível alterar continuamente a origem do sistema de coordenadas sem alterar a física.

Por simplicidade, considerando o caso de uma partícula livre, tem-se o Lagrangeano (note-se que se aplica a notação de soma de Einstein):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i$$

É possível, sobre o sistema realizar uma translação da k -ésima coordenada:

$$x'_i = x_i + a_k\delta_{ik}$$

$$\delta x_i = a_k\delta_{ik}$$

É de notar que as velocidades não sofrem qualquer transformação e por isso a sua variação é nula:

$$\dot{x}'_i = \dot{x}_i$$

$$\delta\dot{x}_i = 0$$

A variação do Lagrangeano é:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = \frac{dF}{dt}$$

Mas como \mathcal{L} não depende de x_i a primeira derivada é nula. Adicionalmente, a variação na velocidade $\delta\dot{x}_i = 0$, o que implica:

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

Assim:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow F = \text{const.} \equiv C$$

A corrente de Noether é portanto:

$$J = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta x_i - C = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}a_k\delta_{ik} = C'$$

No entanto, como a_k é arbitrário, então:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k} = \text{const.}$$

$$\Leftrightarrow m\dot{x}_k = \text{const.}$$

É conservado o momento linear correspondente à coordenada k .

2.3.3 Espaço de configuração estendido

A simetria de translação temporal não pode ser explorada sem a capacidade de variar o tempo num problema variacional. Como tal, seja τ um parâmetro que podemos variar de forma a "deformar" o tempo:

$$t = T(\tau)$$

Definição 2.3.3. Espaço de configuração estendido

Assim, introduz-se o espaço de configuração estendido, que inclui o tempo como coordenada generalizada.

Variações nas coordenadas no espaço de configuração estendido podem ser expressas como:

$$\delta q_j = \delta q_j(T(\tau)) = \delta Q(\tau)$$

$$\delta t = \delta T(\tau)$$

Fazendo a mudança de variável no integral de ação:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \frac{dt}{d\tau} d\tau$$

O Lagrangeano passa, portanto também, a depender de:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}\dot{T} = \mathcal{L}'(Q_j, \dot{Q}_j, T, \dot{T})$$

Adicionalmente, as velocidades generalizadas adquirem a forma:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} = \frac{dq_j}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \dot{Q} \frac{1}{\dot{T}}$$

Desta forma, as equações de Lagrange nas novas coordenadas são:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q} &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{T}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial T} &= 0\end{aligned}$$

2.3.4 Exemplo - Homogeneidade do Tempo/ Energia

Se uma transformação infinitesimal das coordenadas generalizadas deixar o integral de ação invariante então:

$$\delta \mathcal{L}' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_j} \delta Q_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_j} \delta \dot{Q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial T} \delta T + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{T}} \delta \dot{T}$$

E procedendo como anteriormente utilizando as equações de Lagrange:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_j} \right) \delta Q_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_j} \delta \dot{Q}_j + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{T}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{T}} \delta \dot{T}$$

Simplificando do mesmo modo:

$$\delta \mathcal{L}' = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_j} \delta Q_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{T}} \delta T \right)$$

A condição de invariância é, deste modo:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L}' &= \frac{dF}{d\tau} \\ \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_j} \delta Q_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{T}} \delta T - F \right) &= 0\end{aligned}$$

Utilizando as relações derivadas anteriormente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \mathcal{L} \dot{T} \\ \dot{q} &= \dot{Q} \frac{1}{\dot{T}}\end{aligned}$$

É possível escrever:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \dot{T} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}} \dot{T} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q}\end{aligned}$$

Assim, a condição de invariância pode ser escrita em termos das antigas coordenadas:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\mathcal{L}\dot{T})}{\partial \dot{Q}_j} \delta Q_j + \frac{\partial(\mathcal{L}\dot{T})}{\partial \dot{T}} \delta T - F \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \dot{T} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t - F \right) &= 0\end{aligned}$$

Pelo que a corrente de Noether é:

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t - F = \text{const.}$$

Como o momento conjugado é:

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

O segundo termo da corrente de Noether correspondente a $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{T}}$ é a transformação de Legendre que corresponde a $-\mathcal{H}$. O hamiltoniano é, pois, o momento canónico conjugado de t .

$$J = p_j \delta q_j - \mathcal{H} \delta t - F$$

Note-se, que, dada uma translação do tempo:

$$\begin{aligned}q'_j &= q_j \Rightarrow \delta q_j = 0 \\ t' &= t + \epsilon \Rightarrow \delta t = \epsilon\end{aligned}$$

A variação do Lagrangeano, admitindo que este não depende explicitamente do tempo é:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t = 0 \\ &\Rightarrow F = c\end{aligned}$$

Logo:

$$J = -\mathcal{H}\epsilon - c = \text{const.}$$

$$\Rightarrow J = -\mathcal{H}\epsilon = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \text{const.}$$

Então conclui-se que \mathcal{H} é o momento conjugado de t e é conservado se t for uma coordenada cíclica.

Capítulo 3

Corpo Rígido

3.1 Corpo rígido e transformações ortogonais

3.1.1 Graus de liberdade do corpo rígido

O corpo rígido, que consideramos discreto (sendo que no limite do contínuo basta substituir a soma das massas pelo integral da densidade no volume) e constituído por muitas partículas que mantêm, ao longo do tempo, as distâncias entre si constantes.

Ou seja, um corpo rígido constituído por N partículas pode no máximo ter $3N$ graus de liberdade, no entanto este número é consideravelmente reduzido pelas equações de ligação que correspondem à preservação das distâncias entre pontos:

$$r_{ij} = c_{ij}$$

Onde r_{ij} é a distância entre a partícula i e j e c_{ij} são constantes.

Notando que há um total de ${}^NC_2 = \frac{1}{2}N(N-1)$ equações deste tipo, poderíamos pensar que há um total de $3N - \frac{1}{2}N(N-1)$ total de graus de liberdade.

No entanto, basta notar que para N muito grande $\frac{1}{2}N(N-1)$ é muito maior que $3N$, o que é impossível. Isto leva-nos à conclusão que as equações de ligação não são todas independentes.

Na realidade, para fixar um ponto no corpo rígido não é necessário especificar a sua distância a todas as outras partículas, só precisamos de especificar a sua distância a 3 outras.

Ou seja, os três pontos têm apenas $3 \times 3 = 9$ graus de liberdade e há apenas três equações de ligação:

$$r_{12} = c_{12}, \quad r_{13} = c_{13}, \quad r_{23} = c_{23}$$

Assim, o corpo tem $9 - 3 = 6$ graus de liberdade.

Este número de graus de liberdade corresponde aos 3 graus necessários para especificar a localização (translação) e outros 3 para especificar a orientação (rotação) do corpo no espaço.

3.1.2 Cossenos diretores

Existem várias maneiras de especificar a orientação de um sistema cartesiano de eixos em relação a outro com origem comum. Uma destas maneiras é estabelecer 9 cossenos diretores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Definição 3.1.1. Cossenos diretores \rightarrow

$$\begin{cases} \alpha_1 = \cos(x', x) \\ \alpha_2 = \cos(x', y) \\ \alpha_3 = \cos(x', z) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = \cos(y', x) \\ \beta_2 = \cos(y', y) \\ \beta_3 = \cos(y', z) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 = \cos(z', x) \\ \gamma_2 = \cos(z', y) \\ \gamma_3 = \cos(z', z) \end{cases}$$

Temos assim, que:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ou em notação indicial:

$$x_i = a_{ij}x_j$$

Estas são 9 variáveis, mas nem todas são independentes, nomeadamente, uma vez que são uma rotação:

$$||\vec{x}'|| = ||\vec{x}||$$

Ou em notação indicial:

$$x'_i x'_i = x_i x_i$$

Substituindo a matriz transformação:

$$x_i x_i = a_{ij} a_{ik} x_j x_k$$

E isto apenas se verifica se:

Definição 3.1.2. Condição de ortogonalidade \rightarrow

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{ij}$$

Ou em notação simbólica (matricial):

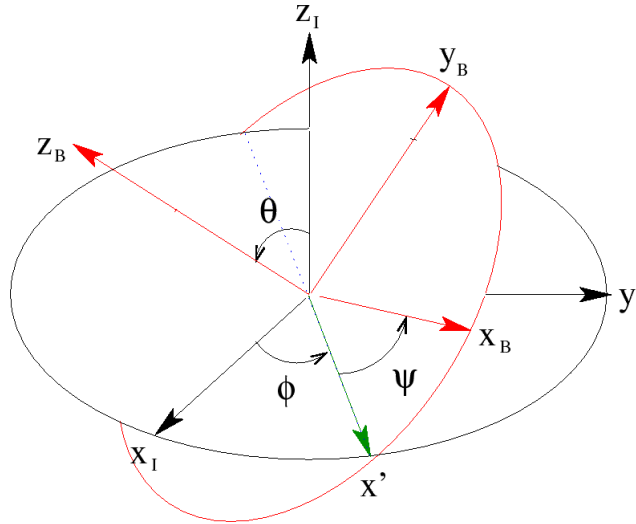
$$AA^t = I$$

Esta condição corresponde a 6 equações de ligação:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \\ \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

E por isso os cossenos diretores correspondem a $9 - 6 = 3$ graus de liberdade. Isto sugere a introdução de 3 ângulos, os ângulos de Euler.

3.1.3 Ângulos de Euler



Uma rotação arbitrária que leva um eixo cartesiano (x, y, z) para outro (x', y', z') pode ser pensada como uma composição de 3 rotações.

A primeira rotação de um ângulo ϕ é feita em torno do eixo z e faz alinhar x com a linha dos nodos, que corresponde à interseção entre o plano xOy e o plano $x'Oy'$.

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A segunda é feita em torno da linha dos nodos alinhando ζ com z' .

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

A terceira rotação é uma rotação em torno de z' alinhando finalmente ξ com x' .

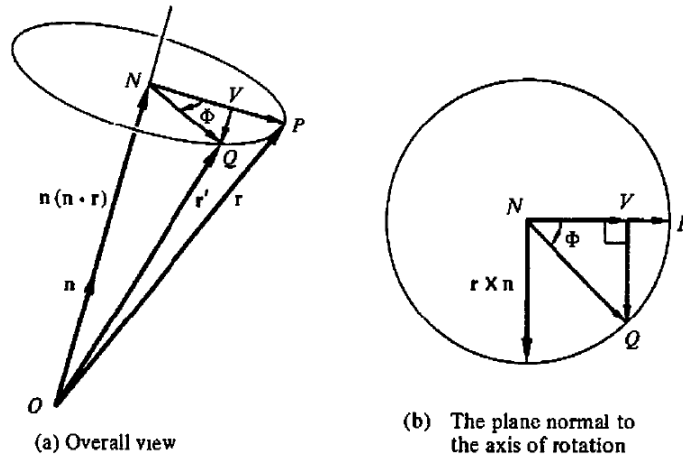
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix}$$

A rotação total corresponde à composição das 3 rotações, ou seja, ao produto das matrizes:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3.1.4 Rotações finitas[†]

A rotação de um sistema cartesiano de eixos em torno de outro pode ser representada de várias maneiras, entre elas os ângulos de Euler descritos na secção anterior. No geral, como demonstrado por Euler, qualquer composição de rotações pode ser descrita como uma única rotação em torno de um eixo. É natural, portanto, procurar uma representação desta rotação em termos do ângulo de rotação e dos cossenos diretores do eixo de rotação.



Note-se, na figura, que:

$$\vec{r}' = O\vec{N} + N\vec{V} + V\vec{Q}$$

Ou seja, escrevendo em termos de \hat{n} e \vec{r} :

$$\vec{r}' = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r}) + [\vec{r} - \hat{n} \cdot \vec{r}] \cos \Phi + (\vec{r} \times \hat{n}) \sin \Phi$$

Definição 3.1.3. Fórmula das Rotações Finitas \rightarrow Simplificando, é obtida a fórmula das rotações finitas:

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos \Phi + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})(1 - \cos \Phi) + (\vec{r} \times \hat{n}) \sin \Phi$$

Esta relação é verdadeira para todos os ângulos de rotação, independentemente da sua magnitude.

É possível, adicionalmente, exprimir o ângulo de rotação em termos dos ângulos de Euler:

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

3.1.5 Rotações Infinitesimais

No geral rotações finitas não comutam:

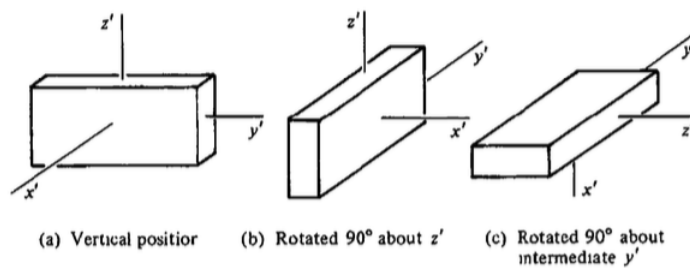


FIGURE 4.9 The effect of two rotations performed in a given order.

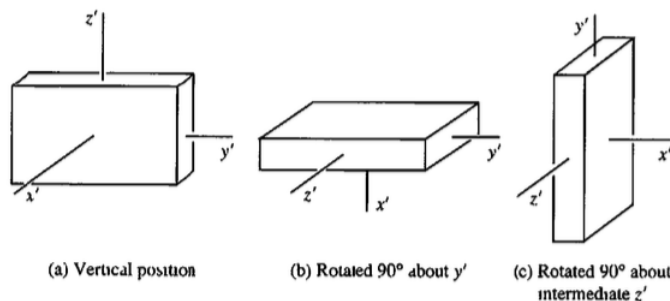


FIGURE 4.10 The two rotations shown in Fig. 4.9, but performed in reverse order.

Consideramos então rotações infinitesimais dadas por uma matriz ϵ_{ij} :

$$\begin{aligned}x'_i &= x_i + \epsilon_{ij}x_j \\ &= (\delta_{ij} + \epsilon_{ij})x_j\end{aligned}$$

Ou, em notação matricial:

$$\vec{x}' = (I + \epsilon)\vec{x}$$

Calculando assim o produto de duas matrizes correspondentes a rotações infinitesimais:

$$(I + \epsilon_1)(I + \epsilon_2) = I + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2$$

Como a rotação é infinitesimal desprezamos termos de segunda ordem:

$$= I + \epsilon_1 + \epsilon_2$$

É fácil, então verificar que o produto efetuado pela ordem inversa resulta no mesmo resultado. Dizemos, pois, que rotações infinitesimais são comutativas

Fácil também é verificar que a matriz inversa de $(I + \epsilon)$ corresponde a $(I - \epsilon)$:

$$(I + \epsilon)(I - \epsilon) = I - \epsilon^2 = I$$

E pela condição de ortogonalidade $AA^t = I$, temos que a matriz inversa é igual à transposta, ou seja:

$$(I + \epsilon^t) = (I - \epsilon) \Rightarrow \epsilon^t = -\epsilon$$

Ou seja, a matriz que representa rotações infinitesimais é anti-simétrica, podendo ser representada por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.6 Velocidade Angular - Definição[†]

Observe-se, que exprimindo as mudanças nas componentes de um vetor quando sobre ele atua uma rotação infinitesimal:

$$\vec{r}' - \vec{r} = d\vec{r}' = \epsilon \vec{r}$$

E escrevendo explicitamente esta relação:

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2 \\ dx_2 = x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3 \\ dx_3 = x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1 \end{cases}$$

Ou seja, equivale a um produto vetorial:

$$d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega}$$

É possível provar que de facto $d\Omega$ obedece às propriedades de transformação de um vetor. E considerando a fórmula das rotações finitas para um ângulo de rotação infinitesimal $d\Phi$, obtemos:

$$\vec{r}' - \vec{r} = d\vec{r} = \vec{r} \times \hat{n} d\Phi$$

Como visto anteriormente,

$$d\vec{r} = \hat{n} \times d\Omega$$

Isto implica claramente que:

$$d\vec{\Omega} = \vec{n} d\Phi$$

Onde $d\Phi$ é o ângulo infinitesimal de rotação. Assim vem:

$$d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{n} d\Phi$$

Eventualmente, pode ter-se em conta que a visão que um observador num sistema de eixos fixados ao corpo tem de uma mudança de um ponto descrito por um vetor \vec{G} no corpo difere de um observador num sistema de referencia fixo apenas por uma rotação (As primeiras equações correspondem a uma derivação mais heurística. As entre parênteses a uma mais formal):

$$(d\vec{G})_{\text{espaço}} = (d\vec{G})_{\text{corpo}} + (d\vec{G})_{\text{rotação}}$$

$$(G_i = a_{ij}^t G'_{ij} = a_{ji} G'_j)$$

Em que:

$$(dG)_{\text{rotação}} = d\vec{\Omega} \times \vec{G}$$

$$\begin{pmatrix} dG_i = a_{ji}dG'_j + da_{ji}G'_j \\ da_{ji} = \epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij} \\ -\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk}d\Omega_k = \epsilon_{ikj}d\Omega_k \end{pmatrix}$$

Ou seja:

$$(d\vec{G})_{\text{espaço}} = (d\vec{G})_{\text{corpo}} + d\vec{\Omega} \times \vec{G}$$

$$\left(dG_i = dG'_i + \epsilon_{ikj}d\Omega_k G_j = dG'_i + (d\vec{\Omega} \times \vec{G})_i \right)$$

Isto leva-nos à definição:

Definição 3.1.4. Velocidade angular \rightarrow Vetor segundo o eixo de rotação instantânea do instante entre t e $t + dt$ e com magnitude dando a variação instantânea de rotação do corpo:

$$\vec{\omega} dt = d\vec{\Omega}$$

Assim:

$$\left(\frac{dG}{dt} \right)_s = \left(\frac{dG}{dt} \right)_b + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

3.2 Movimento do corpo rígido

3.2.1 Velocidade Angular - Em termos familiares

Numa rotação em torno do eixo z :

$$\vec{\Omega} = d\theta \hat{e}_z$$

E a velocidade angular é então:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

A velocidade de uma rotação pura é assim:

$$v_i = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} y_i \\ \dot{\theta} x_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

A sua norma é pois:

$$v_i = \dot{\theta} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \dot{\theta} R$$

No caso de velocidade constante:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{2\pi}{T} \\ \Rightarrow v_i &= \frac{2\pi R}{T} \end{aligned}$$

3.2.2 Momento angular

Definição 3.2.1. Momento angular → O momento angular corresponde a uma parte de translação e uma parte de rotação (que procuramos exprimir em função dos ângulos de Euler.

$$\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v} + \vec{L}'(\phi, \theta, \psi)$$

Definição 3.2.2. Energia cinética → Do mesmo modo a energia cinética pode ser separada numa componente de translação e noutra de rotação

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + T'(\phi, \theta, \psi)$$

Usando a velocidade em termos da velocidade angular e considerando apenas a parte rotacional:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))$$

E simplificando (cf. Secção 7.2)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}))$$

Tomando por exemplo a coordenada x do momento angular

$$L_x = \omega_x m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y m_i x_i y_i - \omega_z m_i x_i z_i$$

E definimos assim um tensor I_{ij} :

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

Analogamente para L_y e L_z :

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Definição 3.2.3. Tensor inércia → O momento angular está relacionado com a velocidade angular por uma transformação linear, que pode ser expressa através do tensor inércia:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

3.2.3 Velocidade angular em termos dos ângulos de Euler

É muitas vezes conveniente exprimir a velocidade angular em termos dos 3 ângulos de Euler. Para tal fazermos podemos reparar que a rotação infinitesimal correspondente a $\vec{\omega}$ pode ser vista como a composição de três rotações infinitesimais com velocidades angulares $\omega_\phi = \dot{\phi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$ e $\omega_\psi = \dot{\psi}$.

Tendo em conta a natureza vetorial de $\vec{\omega}$, temos que:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi$$

No entanto é de notar que estes vetores não são ortogonais uns aos outros, e por isso, começando em sentido inverso, como $\vec{\omega}_\psi$ ocorre em torno do eixo dos z' a sua expressão é a mais simples:

$$\vec{\omega}_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Continuando ao contrário, a rotação $\vec{\omega}_\theta$ ocorre em torno da linha dos nodos. E então basta aplicar a rotação ψ ao vetor:

$$\vec{\omega}_\theta = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\theta} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}$$

E como $\vec{\omega}_\phi$ ocorre em torno do eixo dos z , aplica-se a inteira transformação ortogonal:

$$\vec{\omega}_\phi = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

Ou seja, obtemos o vetor velocidade angular total pela soma dos vetores:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

3.2.4 Diagonalização do tensor inércia

Note-se que o tensor inércia é representável por uma matriz simétrica. Em particular, uma matriz simétrica é normal, e assim, pelo teorema espectral é diagonalizável numa base de vetores próprios ortogonais. Além disto, os seus valores próprios são reais por tensor ser simétrico.

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$I = U I_\Lambda U^{-1}$$

Onde U é a matriz cujas colunas são os vetores próprios.

Definição 3.2.4. Momentos de Inércia → Os momentos de inércia são os elementos na diagonal no tensor de Inércia. Quando diagonalizada, os termos diagonais chamam-se momentos principais de Inércia.

Definição 3.2.5. Produtos de Inércia → Os produtos de inércia são elementos não diagonais do tensor de Inércia. Quando diagonalizada, os produtos de inércia tornam-se nulos. O corpo rígido é assim caracterizado principalmente pelos seus momentos de inércia.

Definição 3.2.6. Eixos principais de Inércia → Os eixos principais de inércia são os eixos definidos pelos vetores próprios do tensor de Inércia, ou seja, são os eixos segundo os quais são medidos os momentos principais de Inércia.

3.2.5 Energia Cinética

A energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

E pela anti-simetria do símbolo de Levi-Civita (cf. Secção 7.2):

$$\vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

Vem:

$$T = \frac{\vec{\omega}}{2} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

Usando o tensor de inércia:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

Podemos então, tendo em conta que $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ onde \hat{n} é o versor do eixo de rotação escrever:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \hat{n} \cdot \hat{I} \cdot \hat{n} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

3.2.6 Momento de Inércia - Em termos familiares[†]

Definição 3.2.7. Momento de inércia em torno do eixo de rotação \rightarrow Este escalar (forma quadrática):

$$I = \hat{n} \cdot \hat{I} \cdot \hat{n} = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \hat{n})^2]$$

Em discussões elementares (i.e. Mecânica Newtoniana) costuma definir-se o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular como sendo:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

Isto é claro já que a perpendicularidade do eixo de rotação e \vec{r}_i implica:

$$(\vec{r}_i \cdot \hat{n})^2 = 0 \Rightarrow I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

Se considerarmos dois pontos com posições \vec{r} sobre um eixo a e \vec{r}' sobre um eixo b paralelo a a unidos por um vetor \vec{R} de \vec{r}' a \vec{r} :

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$$

E por isso o momento de inércia sobre o eixo a é:

$$I_a = m_i (\vec{r}_i \times \hat{n})^2 = M (\vec{R} \times \hat{n})^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \hat{n})^2 + \sum_{i=1}^N 2m_i (\vec{R} \times \hat{n}) \cdot (\vec{r}'_i \times \hat{n})$$

Onde $M = \sum_{i=1}^N m_i$ é a massa total do corpo. Adicionalmente, este último termo do RHS pode ser escrito como:

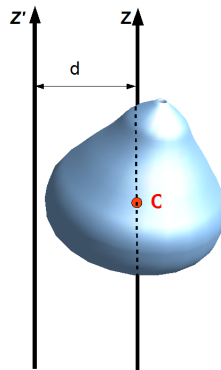
$$-2(\vec{R} \times \hat{n}) \cdot \left(\hat{n} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right)$$

Pela definição do centro de massa o termo $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i$ desaparece, e então podemos exprimir I_a em termos do momento de inércia de um eixo paralelo b :

$$I_a = I_b + M(\vec{R} \times \hat{n})^2 = I_b + MR^2 \sin^2 \theta$$

Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $R = d$ recupera-se, então o teorema de Steiner:

$$I_z = I_{CM} + Md^2$$



3.2.7 Elipsoide de Inércia

Podemos (e historicamente assim é feito) entender os eixos principais de Inércia utilizando os cossenos diretores.

O momento de inércia em torno de um eixo é a forma quadrática

$$I = \hat{n} \cdot \hat{I} \cdot \hat{n}$$

E utilizando os cossenos diretores temos:

$$\hat{n} = \alpha \hat{e}_x + \beta \hat{e}_y + \gamma \hat{e}_z$$

Então o momento de inércia em torno de \hat{n} pode ser escrito:

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha$$

Se definirmos um vetor:

$$\vec{\rho} = \frac{\hat{n}}{\sqrt{I}}$$

Podemos dividir por I em ambos os lados na expressão dos cossenos diretores e ficar com:

$$1 = I_{xx} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{I}} \right)^2 + I_{yy} \left(\frac{\beta}{\sqrt{I}} \right)^2 + I_{zz} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{I}} \right)^2 + 2I_{xy} \left(\frac{\alpha\beta}{\sqrt{I}^2} \right) + 2I_{yz} \left(\frac{\beta\gamma}{\sqrt{I}^2} \right) + 2I_{zx} \left(\frac{\gamma\alpha}{\sqrt{I}^2} \right)$$

Ou seja temos uma forma quadrática em ρ :

$$I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3 + 2I_{zx}\rho_3\rho_1 = 1$$

Esta forma quadrática define um elipsoide, e pode ser sempre diagonalizada.

Definição 3.2.8. Elipsoide Inercial \rightarrow É uma forma quadrática que representa um elipsoide no espaço de ρ e pode ser diagonalizada e tomar a forma:

$$I_1\rho_1'^2 + I_2\rho_2'^2 + I_3\rho_3'^2 = 1$$

Note-se que o sistema de eixos que diagonaliza o tensor momento de inércia corresponde precisamente ao sistema de eixos que diagonaliza a forma quadrática correspondente ao elipsoide inercial. Assim os valores próprios do tensor inércia (os momentos principais de inércia) determinam o tamanho dos eixos do elipsoide inercial:

- Se todos os momentos principais de inércia são diferentes, todos os eixos são diferentes.
- Se dois dos momentos principais de inércia são iguais então o elipsoide tem dois eixos iguais, ou seja é um elipsoide de revolução.
- Se todos os momentos principais de inércia são iguais então o elipsoide inercial é uma esfera.

3.2.8 Equações de Euler do movimento de um corpo rígido[†]

Com todas as ferramentas teóricas desenvolvidas nas secções anteriores, é possível agora atacar o problema de escrever as equações do movimento para um corpo rígido. Note-se que no caso de um corpo com um ponto fixo, a rotação do corpo pode ser descrita fixando a origem do referencial nesse ponto, ou seja, é considerado o problema da rotação em torno desse ponto. Caso o corpo considerado não tenha um ponto fixo, o ponto de referência mais útil é quase sempre o centro de massa. Como verificado anteriormente, a energia cinética e o momento angular são divididos em componentes de translação e de rotação.

Uma rotação em torno do centro de massa tem energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Em sistemas na presença de ligações holónomas, o Lagrangeano toma então a forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CM}(q_{CM}, \dot{q}_{CM}) + \mathcal{L}_b(q_b, \dot{q}_b)$$

Onde \mathcal{L}_{CM} é o lagrangeano relativo ao movimento de translação do centro de massa, e \mathcal{L}_b é o lagrangeano relativo à orientação do centro de massa.

Efetivamente o problema divide-se em dois.

Aplicando a formulação newtoniana ao problema, obtemos diretamente que, considerando um referencial inercial com origem no ponto fixo de um corpo rígido, ou no caso em que este tem velocidade de translação, considerando um sistema de eixos com origem no seu centro de massa:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_s = \tau$$

Onde τ é o torque aplicado e o índice inferior s indica que a derivada em ordem ao tempo é realizada em relação a eixos fixos, ou seja, que não partilham a rotação do corpo.

Esta expressão pode ser escrita em termos de eixos que partilham esta rotação como:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_s = \left(\frac{dL}{dt}\right)_b + \omega \times L$$

Onde o índice b se refere aos eixos que partilham a rotação do corpo. Deste modo, a equação de movimento é:

$$\frac{dL}{dt} + \omega \times L = \tau$$

Se os eixos considerados forem os eixos principais de inércia, então os componentes do momento angular são $L_1 = I_1\omega_1$, $L_2 = I_2\omega_2$ e $L_3 = I_3\omega_3$.

E assim, substituindo na equação do movimento:

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k I_k = \tau_i$$

Ou expandindo as três equações:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) = \tau_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) = \tau_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = \tau_3 \end{cases}$$

Estas equações constituem as equações de Euler do movimento de um corpo rígido.

Capítulo 4

Transformações Canónicas†

4.1 Notação Simplética

4.1.1 Receita para obter as equações de Hamilton

Lembramo-nos que, no caso da formulação Hamiltoniana temos a “receita”:

1. Com uma dada escolha de coordenadas generalizadas q_j é construído o Lagrangeano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = T - V$.
2. Os momentos canónicos são definidos como funções de q_j , \dot{q}_j e t :

$$p_j = \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}_j}$$

3. É utilizada uma transformação de Legendre para formar o Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}$$

4. São invertidas as relações dos momentos canónicos de modo a escrever \dot{q}_j em função de p_j e escrever o Hamiltoniano como:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_j, p_j, t)$$

4.1.2 Forma Funcional do Hamiltoniano

Num grande número de problemas, no entanto, acontece que podemos escrever o Lagrangeano da seguinte forma:

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}_0(q, t) + \dot{q}_j a_j(q, t) + \dot{q}_j^2 T_j(q, t)$$

Onde a_j e T_j são funções de q_j e t . Podemos, no entanto, escrever o Lagrangeano como:

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}_0(q, t) + \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{a} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}}$$

Onde $\dot{\mathbf{q}}$ é um vetor coluna correspondente ao agrupamento das velocidades generalizadas num vetor coluna. Assim $\dot{\mathbf{q}}^t$ é o seu transposto, ou seja, um vetor linha cujas componentes são, mais uma vez, as velocidades generalizadas. Adicionalmente \mathbf{a} é uma matriz coluna e \mathbf{T} é uma matriz quadrada $3n - l \times 3n - l$ simétrica.

Utilizando esta notação podemos escrever o Hamiltoneano:

$$\mathcal{H} = \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{p} - \mathcal{L}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{H} = \dot{\mathbf{q}}^t (\mathbf{p} - \mathbf{a}) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}_0$$

Os momentos canónicos, definidos da mesma forma habitual são escritos:

$$\mathbf{p} = \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}$$

A natureza positiva definida da energia cinética assegura a existência de um inverso \mathbf{T}^{-1} . Isto permite a inversão da expressão anterior de modo a escrever:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a})$$

$$\dot{\mathbf{q}}^t = (\mathbf{p}^t - \mathbf{a}^t) \mathbf{T}^{-1}$$

Definição 4.1.1. Forma funcional do Hamiltoneano → Substituindo $\dot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\mathbf{q}}^t$ no Hamiltoneano, podemos obter uma forma funcional:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^t - \mathbf{a}^t) \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{a}) - \mathcal{L}_0(q, t)$$

4.1.3 Equações de Hamilton em Notação Simplética

É evidente que as equações de Hamilton não tratam as coordenadas generalizadas e os momentos canónicos de uma forma inteiramente simétrica (considere-se o sinal de menos na equação para \dot{p}). É possível, no entanto, combinar as duas equações numa de uma forma útil.

Para um sistema com $m = 3n - l$ graus de liberdade, é construído um vetor coluna $\vec{\eta}$ com $2m$ elementos tal que:

$$\begin{cases} \eta_i = q_i & \text{Se } i < m \\ \eta_i = p_i & \text{Se } i > m \end{cases}$$

De um mesmo modo, o vetor coluna $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\eta}}$ tem os elementos:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \right)_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} & \text{Se } i < m \\ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \right)_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} & \text{Se } i > m \end{cases}$$

Assim, podemos definir uma matriz J :

Definição 4.1.2. Matriz $J \rightarrow$

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Onde cada $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$ são a matriz identidade $I_{m \times m}$ e nula $0_{m \times m}$ respetivamente.

Esta matriz é ortogonal, o seu quadrado é:

$$J^2 = -I_{2m \times 2m}$$

E o seu determinante é:

$$\det J = 1$$

As equações de Hamilton podem ser escritas de uma forma compacta utilizando esta matriz e o vetor coluna $\vec{\eta}$, sendo apelidada esta escrita das equações de Hamilton de notação simplética ou matricial:

Definição 4.1.3. Equações de Hamilton em notação simplética (matricial) \rightarrow

$$\dot{\eta}_i = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_i}$$

4.2 As equações das transformações canónicas

4.2.1 Utilidade e Aplicação

Quando aplicada diretamente, a formulação Hamiltoneana não diminui drasticamente a dificuldade de um problema de mecânica face à sua contraparte Lagrangeana. No entanto, é possível utilizar esta formalização de modo a adquirir mais informação acerca da estrutura formal da mecânica. Adicionalmente, o igual estatuto dado a coordenadas e momentos canónicos dá maior liberdade à seleção daquilo que pode ser designado como “coordenadas” e “momentos”. Esta seleção, para

além de ser uma ferramenta útil na solução prática de problemas mecânicos, abre os horizontes à construção de teorias mais modernas da matéria, sejam elas a física estatística ou a mecânica quântica.

Como descrito no capítulo referente às equações de Hamilton, há evidentes vantagens na utilização das equações de Hamilton quando existem coordenadas cíclicas. De facto, no caso em que todas as coordenadas são cíclicas as equações do movimento são triviais já que todos momentos canónicos são constantes e assim o hamiltoneano é apenas função destas constantes.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

As equações de Hamilton são pois:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha_j} = \omega_j \\ \dot{p}_j = 0 \end{cases}$$

Onde os ω_j são funções de α_j e por isso constantes no tempo. Assim, as equações do movimento têm solução imediata:

$$q_j = \omega_j t + \beta_j$$

Agora é de notar que para um dado sistema é possível a escolha de várias coordenadas generalizadas e o número de coordenadas cíclicas pode depender da escolha. Pode até, ser possível, encontrar um conjunto de coordenadas generalizadas que sejam todas cíclicas.

No entanto, em geral as coordenadas generalizadas sugeridas pela simetria do problema não são em geral todas cíclicas, pelo que é necessário encontrar um procedimento para transformar um sistema de coordenadas noutro mais útil.

4.2.2 Transformações de coordenadas (espaço de configuração e espaço de fases)

Definição 4.2.1. Transformações pontuais do espaço de configuração \rightarrow Transformações usuais de coordenadas que envolvem a mudança de umas coordenadas q_j para outras Q_j da forma:

$$Q_j = Q_j(q, t)$$

São denominadas transformações pontuais.

No entanto, as transformações referidas devem representar uma transformação simultânea das coordenadas e momentos para um novo conjunto com equações de transformação invertíveis:

Definição 4.2.2. Transformações pontuais do espaço de fases →

$$Q_j = Q_j(q, p, t)$$

$$P_j = P_j(q, p, t)$$

Estas novas coordenadas devem ser definidas em termos das antigas coordenadas e antigos momentos. São transformações pontuais do espaço de fases.

4.2.3 Transformações Canônicas - Algumas Definições

No caso da mecânica Hamiltoniana, apenas são interessantes transformações pontuais do espaço de fases tal que as novas coordenadas são coordenadas canônicas. Assim, é necessário que exista uma função $K(Q, P, t)$ tal que as equações de Hamilton sejam:

$$\begin{cases} \dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \end{cases}$$

Definição 4.2.3. Kamiltoneano → A função K corresponde, pois, ao Hamiltoniano nas novas coordenadas (Kamiltoneano!).

Se as coordenadas Q_j e P_j são canônicas então obedecem ao princípio de Hamilton modificado:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_j \dot{Q}_j - K(Q, P, t)) dt = 0$$

E do mesmo modo as variáveis antigas q_j e p_j satisfazem um princípio semelhante:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q, p, t)) dt = 0$$

A validade simultânea das duas equações é satisfeita se os integrandos estiverem relacionados por:

$$\lambda(p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}) = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{dF}{dt}$$

Onde F é uma função com segundas derivadas contínuas.

A constante λ é independente das coordenadas canônicas e do tempo, e está relacionada com as chamadas transformações de escala.

Definição 4.2.4. Transformação de escala → Correspondem a mudar o tamanho das unidades usadas para medir as coordenadas e momentos tal que as coordenadas são transformadas da forma:

$$\begin{cases} Q'_j = \mu q_j \\ P'_i = \nu p_j \end{cases}$$

As equações de Hamilton são satisfeitas com Kamiltoneano $K'(Q', P') = \mu\nu\mathcal{H}(q, p)$. E os integrandos dos princípios de Hamilton modificados estão relacionados por:

$$\mu\nu(p_j q_j - \mathcal{H}) = P'_j Q'_j - K'$$

Ou seja, correspondem a $\lambda = \mu\nu$. Dada uma transformação de escala adequada, é sempre possível limitar a análise a transformações de variáveis canónicas com $\lambda = 1$. Como tal, dada uma transformação canónica com $\lambda \neq 1$ é sempre possível encontrar uma transformação intermédia com $\lambda = 1$ utilizando uma transformação de escala com $\mu\nu = \lambda$.

Definição 4.2.5. Transformações Canónicas → São tais que:

$$p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{dF}{dt}$$

Definição 4.2.6. Transformações Canónicas estendidas → São transformações canónicas com $\lambda \neq 1$. Ou seja, transformações canónicas seguidas de uma transformação de escala.

Definição 4.2.7. Transformações Canónicas restritas → São transformações canónicas que não dependem do tempo explicitamente:

$$\begin{cases} Q = Q(q, p) \\ P = P(q, p) \end{cases}$$

4.2.4 Função Geradora e a forma de transformações Canónicas

O último termo da condição das transformações canónicas é útil de modo a expressar a forma exata das transformações canónicas.

Consideremos um primeiro caso I em que F_I é uma função das m coordenadas do espaço de fases inicial q_j e das m coordenadas do espaço de fases transformado:

$$F = F_I(q, Q, t)$$

Para que a transformação entre os espaços de fase seja canónica, é necessário que obedeça a:

$$p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{dF_I}{dt}$$

E expandindo a derivada total em ordem a t pela regra da cadeia:

$$p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{\partial F_I}{\partial t} + \frac{\partial F_I}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_I}{\partial Q_j} \dot{Q}_j$$

É de notar que as coordenadas q e Q são independentes e como tal, a igualdade é sempre verdadeira se e só se:

$$\begin{cases} p_j = \frac{\partial F_I}{\partial q_j} \\ P_j = -\frac{\partial F_I}{\partial Q_j} \end{cases}$$

Deste modo os Hamiltonianos estão relacionados por:

$$K = \mathcal{H} + \frac{\partial F_I}{\partial t}$$

Repare-se que conhecida $F_I(q, Q, t)$ podemos obter p e P em função de q e Q , obtendo-se assim as variáveis transformadas em função das originais. A transformação fica assim definida. Por esta razão F é apelidada de função geradora da transformação canónica.

Pode acontecer, no entanto, que não seja prático ou possível descrever uma transformação canónica como uma função do tipo $F_I(q, Q, t)$, mas antes por uma função de q , P e t . É necessário, deste modo, procurar escrever uma expressão que envolva \dot{P}_j e não \dot{Q}_j . Isto pode ser possível com uma relação do tipo:

$$F = F_{II}(q, P, t) - Q_j P_j$$

Deste modo, substituindo na condição de transformação canónica:

$$\begin{aligned} p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} &= P_j \dot{Q}_j - K + \frac{\partial F_{II}}{\partial t} + \frac{\partial F_{II}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_{II}}{\partial P_j} \dot{P}_j - \dot{Q}_j P_j - Q_j \dot{P}_j \\ \Leftrightarrow p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} &= -\dot{P}_j Q_j - K + \frac{\partial F_{II}}{\partial t} + \frac{\partial F_{II}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_{II}}{\partial P_j} \dot{P}_j \end{aligned}$$

Isto implica, análogamente ao caso I , que:

$$\begin{cases} p_j = \frac{\partial F_{II}}{\partial q_j} \\ Q_j = \frac{\partial F_{II}}{\partial P_j} \end{cases}$$

E os hamiltoneanos estão relacionados por:

$$K = \mathcal{H} + \frac{\partial F_{II}}{\partial t}$$

Para todos os restantes tipos de transformações o procedimento é equivalente, e apresentado de seguida na tabela:

TABLE 9.1 Properties of the Four Basic Canonical Transformations

Generating Function	Generating Function Derivatives	Trivial Special Case
$F = F_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = q_i Q_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$
$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = q_i P_i, \quad Q_i = q_i, \quad P_i = p_i$
$F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$F_3 = p_i Q_i, \quad Q_i = -q_i, \quad P_i = -p_i$
$F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$F_4 = p_i P_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$

Como é evidente ao inspecionar a tabela, os quatro tipos básicos de transformações canónicas estão relacionadas entre si através de transformações de Legendre. No entanto, este facto não é equivalente a dizer que todas as transformações canónicas podem ser expressas em termos dos quatro tipos básicos. Muitas vezes aplicação de uma transformação de Legendre dá origem a transformações nulas ou indeterminadas.

É importante, por último, dizer que uma função geradora não necessita de depender de todas as coordenadas generalizadas ou momentos canónicos correspondentes a todos os graus de liberdade. Por exemplo, uma transformação canónica de um sistema com dois graus de liberdade pode admitir uma função geradora:

$$F'(q_1, p_2, P_1, Q_2)$$

Relacionada com F como:

$$F = F'(q_1, p_2, P_1, Q_2) + q_2 p_2 - Q_1 P_1$$

Como tal, as equações da transformação podem ser obtidas através de:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial F'}{\partial q_1} \\ Q_1 = \frac{\partial F'}{\partial P_1} \\ q_2 = -\frac{\partial F}{\partial p_2} \\ P_2 = -\frac{\partial F'}{\partial Q_2} \end{cases}$$

4.3 Transformações Canônicas em notação simplética

4.3.1 Condições diretas para uma transformação canônica (restrita)

Considere-se uma transformação canônica restrita:

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q, p) \\ P_i = P_i(q, p) \end{cases}$$

A derivada em ordem ao tempo de Q é dada por:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$$

Por outro lado, a inversão da transformações:

$$\begin{cases} q_j = q_j(Q, P) \\ p_j = p_j(Q, P) \end{cases}$$

Permite a escrita da derivada parcial do hamiltoneano em ordem a P_i :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i}$$

Já que a transformação é canônica então temos:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}$$

Definição 4.3.1. Condições diretas para transformações canônicas (restritas)

E comparando esta expressão com o resultado anterior, implica as igualdades:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}(q, p) = \frac{\partial p_j}{\partial P_i}(Q, P) \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}(q, p) = -\frac{\partial q_j}{\partial P_i}(Q, P) \end{cases}$$

Um método equivalente mas considerando \dot{P}_i e $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}$ implica as igualdades:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_i}{\partial q_j}(q, p) = \frac{\partial p_j}{\partial Q_i}(Q, P) \\ \frac{\partial P_i}{\partial p_j}(q, p) = -\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}(Q, P) \end{cases}$$

Estas igualdades são apelidadas de condições diretas para transformações canônicas restritas.

4.3.2 Transição para notação matricial

Lembrando que em notação matricial as equações de Hamilton tomam a forma:

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}$$

Onde J é a matriz anti-simétrica definida anteriormente.

Uma transformação canônica restrita toma então a forma:

$$\vec{\zeta} = \vec{\zeta}(\vec{\eta})$$

E podemos relacionar os procurar as equações do movimento escrevendo a dependencia temporal de um elemento de ζ :

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j$$

Ou, em notação matricial:

$$\dot{\zeta} = M \dot{\eta}$$

Onde M é a matriz jacobiana da transformação.

Usando, seguidamente as equações do movimento para η temos:

$$\dot{\zeta} = M J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}$$

Considerando a transformação invesa e \mathcal{H} como uma função de ζ , temos que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i}$$

Ou em notação matricial:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = M^t \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}$$

Assim, a combinação da relação para $\dot{\zeta}$ e $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}$, obtem-se a equação do movimento:

$$\dot{\zeta} = MJM^t \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}$$

Mas temos que para uma transformada canónica restrita, o Kamiltoneano é o Hamiltoneano escrito em termos das novas variáveis:

$$\dot{\zeta} = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}$$

E assim, uma transformação é canónica se e só se:

$$MJM^t = J$$

Esta é apelidada de condição simplética para uma transformação canónica e é valida também para todo o tipo de transformações canónicas, e não apenas transformações canónicas restritas.

4.3.3 Transformações canónicas infinitesimais

Tal como no caso de rotações infinitesimais discutido no capítulo referente ao corpo rígido, apenas termos de primeira ordem nos infinitésimos devem ser retidos em todos os cálculos. As equações das transformações podem ser escritas como:

$$\begin{cases} Q_i = q_i + \delta q_i \\ P_i = p_i + \delta p_i \end{cases}$$

Ou em forma matricial:

$$\zeta = \eta + \delta \eta$$

Um gerador para este tipo de transformações pode ser um gerador de tipo II :

$$F_{II} = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t)$$

Onde ϵ é um parâmetro infinitesimal da transformação e G é uma função qualquer dos $2m + 1$ argumentos.

Podemos, então escrever as equações de transformação do momento como:

$$p_j = \frac{\partial F_{II}}{\partial q_j} = P_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}$$

Ou seja:

$$\delta p_j = P_j - p_j = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}$$

Do mesmo modo:

$$Q_j = \frac{\partial F_{II}}{\partial P_j} = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j}$$

Ou seja, substituindo na derivada P_j por p_j , o que é legítimo para uma aproximação de primeira ordem:

$$\delta q_j = Q_j - q_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j}$$

Em notação matricial:

$$\delta \eta = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta}$$

É de notar que, comparando estas equações com a evolução do espaço de fase entre t e $t + \delta t$ gerado pelas equações de Hamilton se conclui que:

$$\epsilon \equiv \delta t$$

$$G \equiv H$$

Ou seja, o Hamiltoneano é o gerador desta transformação canónica infinitesimal. O movimento natural de um sistema mecânico pode ser descrito como uma sucessão de transformações canónicas infinitesimais, nas quais o gerador é o Hamiltoneano. Como uma sucessão de transformações canónicas é uma transformação canónica, é possível dizer que a evolução num tempo finito de um sistema mecânico é descrito por uma transformação canónica. Este é o ponto de partida da Teoria de Hamilton-Jacobi.

4.4 Parênteses de Poisson

4.4.1 Definição

Sejam:

$$F = F(q_1, \dots, q_{3N-l}, p_1, \dots, p_{3N-l}, t)$$

$$G = G(q_1, \dots, q_{3N-l}, p_1, \dots, p_{3N-l}, t)$$

Duas funções das coordenadas generalizadas e dos momentos generalizados:

Definição 4.4.1. Parênteses de Poisson

Os parênteses de Poisson de F e G são definidos como:

$$[F, G]_{PB} = \sum_{j=1}^{3N-l} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right)$$

Usando as equações de Hamilton:

$$[\mathcal{H}, F]_{PB} = - \sum_{j=1}^{3N-l} \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

Note-se que:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-l} \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Ou seja:

$$[\mathcal{H}, F]_{PB} = - \left(\frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

Definição 4.4.2. Equação de Poisson

$$\frac{dF}{dt} = -[\mathcal{H}, F]_{PB} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

A evolução temporal de uma função no espaço de fase pode ser expressa à custa desta relação. É apelidada de Equação de Poisson.

4.4.2 Equações de Hamilton

Note-se que a validade das equações de Hamilton implica a validade da equação de Poisson. O inverso também é verdade:

Se $F = q_j$, a equação de Poisson implica

$$\frac{dq_j}{dt} = -[\mathcal{H}, q_j]_{PB} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}$$

E por outro lado, se $F = p_j$, tem-se:

$$\frac{dp_j}{dt} = -[\mathcal{H}, p_j]_{PB} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$$

Ou seja, são reproduzidas as equações de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = [q_j, \mathcal{H}]_{PB} \\ \dot{p}_j = [p_j, \mathcal{H}]_{PB} \end{cases}$$

Assim, conclui-se uma relação de equivalência entre as equações de Hamilton e a equação de Poisson.

Note-se, por último, que como as equações de Hamilton são invariantes por transformações canônicas, então também a equação de Poisson é invariante por transformações canônicas.

4.4.3 Propriedades algébricas dos parênteses de Poisson

Nas variáveis do espaço de fases, temos as identidades

$$[q_i, q_j]_{PB} = 0$$

$$[p_i, p_j]_{PB} = 0$$

$$[q_i, p_j]_{PB} = \delta_{ij}$$

Anti-comutatividade:

$$[F, G]_{PB} = -[G, F]_{PB}$$

Multiplicação por um escalar:

$$[kF, G]_{PB} = k[F, G]_{PB}$$

Derivadas:

$$\frac{d}{d\xi}[F, G]_{PB} = \left[\frac{dF}{d\xi}, G \right]_{PB} + \left[F, \frac{dG}{d\xi} \right]_{PB}$$

Identidade de Jacobi:

$$[F, [G, H]_{PB}]_{PB} + [G, [H, F]_{PB}]_{PB} + [H, [F, G]_{PB}]_{PB} = 0$$

4.4.4 Constantes do movimento

Se F for uma constante de movimento então:

$$[\mathcal{H}, F]_{PB} = \frac{\partial F}{\partial t}$$

E no caso em que F não depende do tempo explicitamente:

$$[\mathcal{H}, F]_{PB} = 0$$

É uma maneira simples de verificar se F é um integral primário do movimento.

4.4.5 Teorema de Liouville

Definição 4.4.3. Elemento de Volume no espaço de Fase

O espaço de fase é, como referido anteriormente, o espaço vetorial cujas coordenadas são as $m = 3n - l$ coordenadas generalizadas q_j e os $m = 3n - l$ momentos canónicos p_j .

Um elemento de volume dV do espaço de fase é, portanto, dado por

$$dV = dq_1 dq_2 \cdots dq_m dp_1 dp_2 \cdots dp_m$$

Definição 4.4.4. Densidade do espaço de fase

O número de estados compreendidos num volume V do espaço de fases é:

$$N = \iiint \cdots \int_V \rho(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m) dq_1 \cdots dq_m dp_1 \cdots dp_m$$

Onde ρ é a densidade no espaço de fases de um sistema clássico.

Naturalmente, como ρ é uma função do espaço de fases, obedece à equação de Poisson:

$$\frac{d\rho}{dt} = -[\mathcal{H}, \rho]_{PB} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ou expandindo os parênteses de Poisson:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right)$$

E pelas equações de Hamilton:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right)$$

É de notar, agora, que um elemento de volume do espaço de fases, dV , irá evoluir no tempo de acordo com as equações de Hamilton. Naturalmente, a cada estado em t_1 corresponde um estado no volume V num outro tempo t_2 . Assim, o número de estados é conservado pois não há fontes ou sumidouros de estados no espaço de fase. Assim, podemos escrever uma versão da equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial(\rho \dot{q}_j)}{\partial q_j} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_j)}{\partial p_j} \right) = 0$$

Onde o segundo termo é uma espécie de “divergência” no espaço de fases:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\eta}) = 0$$

(A expressão acima não deve ser levada demasiado literalmente)

Expandindo agora, as derivadas parciais na equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho \dot{q}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \rho \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_j}$$

$$\frac{\partial \rho \dot{p}_j}{\partial p_j} = \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \dot{p}_j + \rho \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} = \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \dot{p}_j - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_j}$$

Assim a equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = 0$$

Definição 4.4.5. Teorema de Liouville

Comparando esta expressão com a equação de Poisson escrita anteriormente, concluímos que a densidade do espaço de fases é constante ao longo do tempo. Este facto é apelidado de Teorema de Liouville:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Capítulo 5

Vibrações e Oscilações

5.1 Vibrações Sinusoidais

5.1.1 Importancia do movimento sinusoidal

Um exemplo simples e extraordinariamente comum em problemas físicos quando se trata de ondas e oscilações são as vibrações sinusoidais. A razão para isto é que as oscilações sinusoidais ocorrem em sistemas físicos onde estão presentes forças de restauração proporcionais ao deslocamento.

Esta situação é descrita por uma força:

$$F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots)$$

Dados pequenos deslocamentos, os termos de ordem superior a 1 podem ser negligenciados e assim, a equação diferencial que descreve o movimento do corpo é:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x$$

Com solução:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Onde A e φ_0 são constantes que dependem das condições iniciais do movimento e onde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

Adicionalmente, uma razão matemática que justifica a importância deste tipo de oscilações baseia-se na possibilidade de descrição de movimentos periódicos como composição de ondas sinusoidais (Séries de Fourier).

5.1.2 Descrição e Interpretação Física

A constante de integração A é a amplitude do movimento. A oscilação está limitada entre $x = \pm A$.

O movimento de oscilação tem um período T igual ao intervalo entre máximos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

A constante de integração φ_0 corresponde a uma fase inicial do movimento.

Estas constantes de integração podem ser escritas em termos da posição e velocidades inicial x_0 e v_0 .

$$A = \sqrt{\left[x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right]}$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

5.1.3 Representação em termos de rotação de vetores

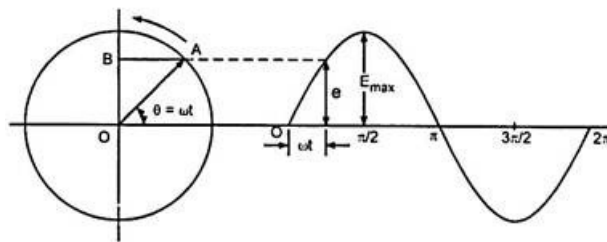


Fig. 3.30 Phasor Representation of An Alternating Quantity

Podemos representar oscilações sinusoidais como a projeção geométrica do movimento de rotação de um vetor em torno de um eixo.

É evidentemente, mais útil a representação do vetor em rotação em coordenadas polares (r, θ) . O valor do ângulo θ pode ser escrito como:

$$\theta = \omega t + \alpha$$

Onde α é o valor de θ em $t = 0$.

O valor do deslocamento no deslocamento real é então escrito:

$$x = \cos(\theta) = \cos(\omega t + \alpha)$$

É possível, portanto igualar esta expressão à vibração sinusoidal e é obtida assim uma relação entre φ_0 e α .

$$\varphi_0 = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

O movimento circular do vetor é completamente descrito recorrendo ao par de relação:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Note-se, no entanto, que o movimento em y é completamente fictício, isto é, resulta apenas da descrição do movimento em x como projeção geométrica do vetor com movimento circular. Uma ideia que pode resultar na melhor distinção entre o movimento físico e o movimento fictício é a representação do vetor, não como $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mas antes como $z \in \mathbb{C}$, um elemento dos números complexos.

$$z = x + iy$$

Ou em forma polar, lembrando a definição de exponencial complexo $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$:

$$z = e^{i\theta}$$

Recorrendo a estas representações é possível escrever:

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{x} = -\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{x} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = Ae^{i(\omega t + \alpha)} \\ \dot{z} = i\omega Ae^{i(\omega t + \alpha)} = i\omega z \\ \ddot{z} = -\omega^2 Ae^{i(\omega t + \alpha)} = -\omega^2 z \end{cases}$$

5.2 Sobreposição de Ondas

5.2.1 Sobreposição de ondas em uma dimensão

Muitas situações físicas envolvem a aplicação simultânea de duas ou mais vibrações harmónicas ao mesmo sistema. Nestes casos, a resultante de dois ou mais vibrações harmónicas é simplesmente a soma das vibrações individuais.

Dadas duas vibrações harmónicas simples:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

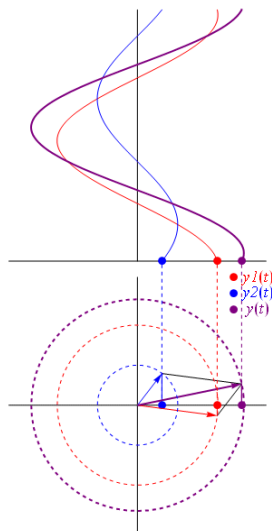
A sua combinação é simplesmente:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

É possível exprimir este deslocamento como uma única vibração harmónica:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Para alcançar este objetivo, é possível reverter novamente para a descrição de vetores em movimento circular. Este processo permite extrair de uma forma geométrica o valor da nova amplitude e fase inicial.



Pela lei dos cossenos obtemos diretamente:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

E adicionalmente, a constante de fase α da composição das vibrações será dada por:

$$\alpha = \alpha_1 + \beta$$

Onde β é o ângulo entre o vetor resultante da soma dos vetores e o vetor correspondente a x_1 .

No geral, a soma de vibrações não pode ser mais simplificada, mas no caso em que as amplitudes são iguais, e representando a diferença de fase $\alpha_2 - \alpha_1 = \delta$, obtemos as relações:

$$\begin{cases} \beta = \frac{\delta}{2} \\ A = 2A_1 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{cases}$$

5.2.2 Sobreposição de diferentes frequências e batimento

Considera-se, agora, o caso de sobreposição de ondas com diferentes frequências. Para simplificar a matemática considera-se que a fase inicial é nula:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

Contrariamente ao caso anterior a diferença entre as amplitudes está em continua alteração, no entanto é evidente que esta deve permanecer no intervalo entre a soma e diferença de A_1 e A_2 .

Neste caso, a não ser que exista alguma relação simples entre as frequências, o deslocamento resultante da sobreposição será uma função complicada do tempo, podendo em última instância não ser periódica. A condição para a periodicidade do movimento resultante da sobreposição é a comensurabilidade dos períodos, ou seja, a existencia de dois números inteiros n_1 e n_2 tal que:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

Considerando a soma de dois movimentos de igual amplitude tem-se:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Recorrendo às identidades trigonométricas:

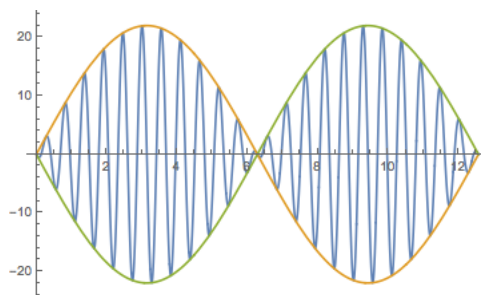
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$$

Através da análise desta relação é possível notar que a vibração complicada resultante da sobreposição poderá ser ajustada a um envelope definido por:

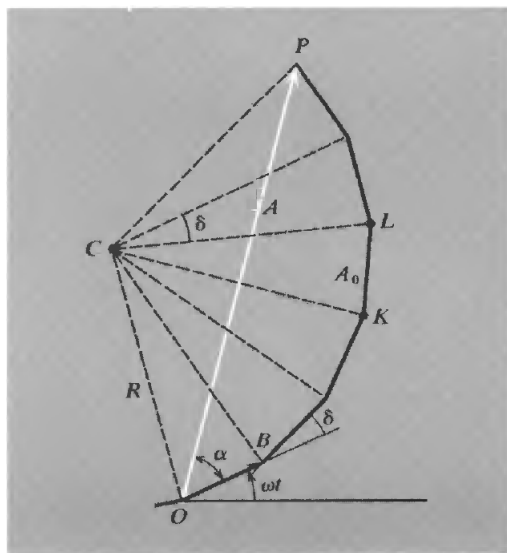
$$x = \pm 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Este envelope oscila lentamente comparado com a rápida oscilação do outro fator na oscilação, dada a sua frequência mais pequena.



5.2.3 Sobreposição de muitas vibrações da mesma frequência

Os procedimentos até agora considerados podem ser extendidos a um número arbitrário de ondas, com a mesma amplitude e frequência. Considera-se que entre duas ondas sucessivas há uma diferença de fase constante δ .



Se a primeira onda for descrita por um movimento oscilatório simples sem fase inicial:

$$x_0 = A_0 \cos(\omega t)$$

Então, da geometria da imagem acima, e considerando que a soma de vetores descreve um polígono regular, que em geral pode ser inscrito num círculo de raio R , podemos considerar:

$$A = 2R \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$A_0 = 2R \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Ou seja, obtemos uma relação entre a amplitude do movimento resultante da soma das N ondas e da amplitude de cada uma delas:

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

E o a fase inicial da sobreposição é dada por:

$$\alpha = \angle COB - \angle COP$$

$$\angle COB = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$$

$$\angle COP = \frac{\pi}{2} - \frac{N\delta}{2}$$

E então:

$$\alpha = \frac{(N-1)\delta}{2}$$

Ou seja, a vibração resultante no eixo dos x é descrita pela equação:

$$X = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \cos\left[\omega t + \frac{(N-1)\delta}{2}\right]$$

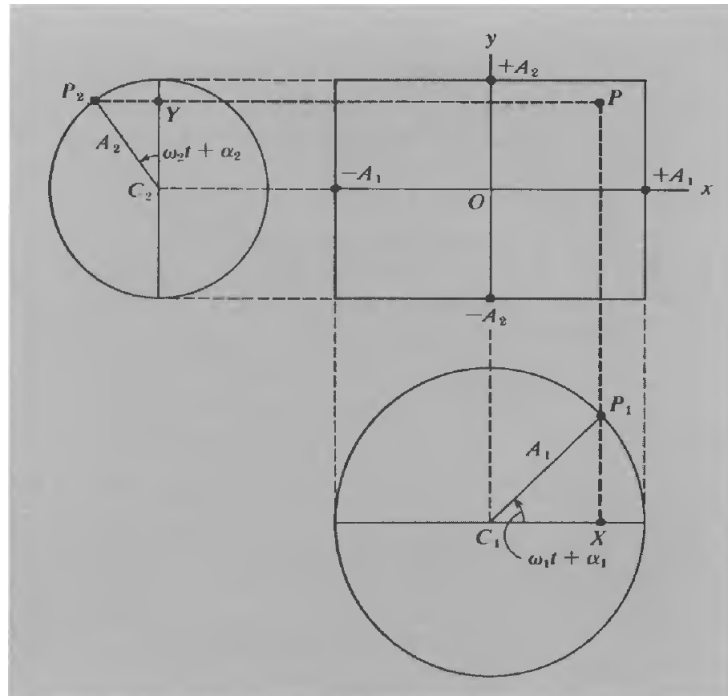
5.2.4 Sobreposição de vibrações perpendiculares

Discute-se, agora, o problema essencialmente diferente relacionado com a combinação de duas vibrações reais que ocorrem em direções perpendiculares.

Supondo que um ponto sofre os seguintes dois deslocamentos simultaneamente:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases}$$

É possível representar o movimento resultante aplicando duplamente a técnica dos vetores em rotação descrita anteriormente:



O movimento x_1 define a posição do ponto P_1 enquanto o movimento x_2 define a posição do ponto P_2 . A intersecção das projeções perpendiculares destes pontos definem a posição do ponto P com respeito à origem O que está no centro do retângulo de lados $2A_1$ e $2A_2$.

É evidente que independentemente da frequência e fase, o movimento do ponto P está confinado ao retângulo de lados $2A_1$ e $2A_2$.

As relações interessantes que surgem deste tipo de movimento aparecem quando há uma relação numérica entre as frequências dos dois movimentos e quando a diferença entre as fases iniciais é uma fração de 2π .

5.2.5 Sobreposição perpendicular com iguais frequências

Escolhendo adequadamente o instante $t = 0$ é possível escrever as vibrações de uma forma simples:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \delta) \end{cases}$$

Podemos então considerar diferentes valores de δ e criar uma imagem qualitativa de todos os possíveis movimentos:

1. $\delta = 0$

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos \omega t \end{cases}$$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

2. $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -A_2 \sin \omega t \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

3. $\delta = \pi$

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \pi) = -A_2 \cos \omega t \end{cases}$$

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x$$

4. $\delta = \frac{3}{2}\pi$

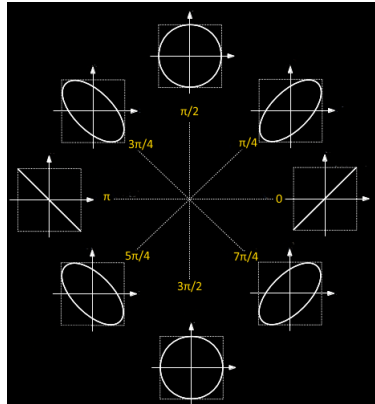
$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \frac{3}{2}\pi) = A_2 \sin \omega t \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

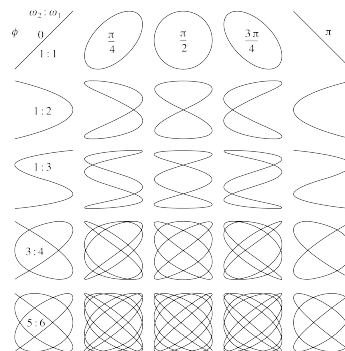
5. $\delta = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos \omega t - \frac{A_2}{\sqrt{2}} \sin \omega t \end{cases}$$

O significado de cada um destes casos é sintetizado na imagem:



Quando a análise anterior é estendida a movimentos com diferentes frequências, obtemos figuras diferentes, denominadas figuras de Lissajou. Em particular quando as frequências são relacionadas por fatores numéricos simples:



5.3 Vibrações de sistemas Físicos

5.3.1 Uma massa numa mola - Lei de Hooke

O exemplo da massa numa mola é útil no sentido de definir as características essenciais ao estabelecimento de movimentos oscilatórios. Estes são uma componente inercial, capaz de carregar energia cinética, e uma componente elástica, capaz de carregar energia potencial elástica.

Assim, a energia total, ou o Hamiltoniano é:

$$\mathcal{H} = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

E a força que atua no sistema é:

$$F = -\nabla V = -kx$$

Assim, tendo em conta a segunda lei de Newton $F = ma$, vem a equação diferencial:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Ou:

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

ii Sabemos que o deslocamento x é uma função do tempo dada por:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

5.3.2 Uma mola com massa

Temos tratado massas como objetos desprovidos de inércia, utilizados puramente como reservatórios de energia potencial elástica. Isto é, claramente, no máximo uma aproximação. Assim, consideremos um corpo de massa m ligado a uma mola de massa M de densidade linear λ uniforme e constante elástica k .

Seja o comprimento da mola relaxada l .

Procuramos escrever a energia cinética total da mola T num dado instante quando a extensão no fim da mola tem um deslocamento x .

Seja s a distância do fim fixo até um dado ponto da mola s . Um elemento de mola entre s e $s + ds$ tem uma massa dada por:

$$dM = \lambda ds = \frac{M}{l} ds$$

O deslocamento deste ponto é:

$$u = \frac{s}{l} x$$

Assim, um elemento de energia cinética será:

$$dT = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{l} ds \right) \left(\frac{s}{l} \frac{dx}{dt} \right)^2$$

E integrando no comprimento:

$$T = \int_0^l dT = \frac{M}{2l^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \int_0^l s^2 ds$$

$$T = \frac{1}{6} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Assim, a conservação de energia para o sistema, pode ser escrita:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{6} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Ou seja, a frequência pode ser escrita:

$$\omega^2 = \frac{k}{m + \frac{M}{3}}$$

5.3.3 Objetos flutuantes

Se um objeto flutuante é ligeiramente afundado ou erguido da sua posição de equilíbrio entra em jogo uma força de restauro igual ao aumento ou diminuição do peso do fluido deslocado pelo objeto. Assim é causado um movimento oscilatório.

Um higrómetro é um bom exemplo deste fenómeno (é usado para medir a gravidade específica de ácido de bateria). Se este tem uma área de secção A e é deslocado a uma distância y acima da sua posição de equilíbrio, o volume do fluido deslocado corresponde a $A \times y$ e assim a equação de Newton toma a forma:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho g A y$$

Vem, como anteriormente:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g A}{m}}$$

E o período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g A}}$$

5.3.4 Pêndulos

O pêndulo simples constitui um problema essencialmente bidimensional, apesar de o deslocamento ser completamente especificado por um único ângulo θ .

Se este ângulo θ é pequeno, então $y \ll x$ e assim podemos escrever y em função do comprimento do fio l e do deslocamento horizontal x :

$$l^2 = (l - y)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow y \approx \frac{x^2}{2l}$$

A conservação de energia é então:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E$$

E o quadrado da velocidade:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

E como $y \ll x \Rightarrow \frac{dy}{dt} \ll \frac{dx}{dt}$ então é possível escrever:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2 = E$$

Que corresponde a um oscilador harmónico com frequência $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

É possível formular o problema em termos do deslocamento angular θ . Neste caso temos que a velocidade é dada por:

$$v = l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

E a altura:

$$y = l(1 - \cos \theta) \approx \frac{1}{2}l\theta^2$$

Assim, a conservação de energia corresponde a:

$$\frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E$$

Para o caso do pêndulo real, utilizando a definição do momento de inércia em relação a um eixo e tendo em conta que a variação da energia potencial é proporcional à distância do centro de massa h ao eixo de rotação, então:

$$\frac{1}{2}I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mgh\theta^2 = E$$

Pelo teorema de Steiner, o momento de inércia é:

$$I = mk^2 + mh^2$$

Onde k é o raio de giração.

A conservação de energia é:

$$\frac{1}{2}m(k^2 + h^2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mgh\theta^2 = E$$

De onde sai:

$$\omega^2 = \frac{gh}{h^2 + k^2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h^2 + k^2}{gh}}$$

5.3.5 O decaimento de vibrações livres

Em sistemas físicos reais, as vibrações livres decaem com a passagem do tempo. Todo o sistema oscilatório tem inevitavelmente características dissipativas.

Quando sujeito à ação de um fluido, um objeto em movimento sente uma força resistiva cuja magnitude pode ser descrita por:

$$R(v) = b_1v + b_2v^2$$

Imediatamente assumimos velocidades pequenas, pelo que o movimento do corpo pode ser inteiramente descrito pelo termo linear. Neste caso, a equação de Newton corresponde a:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - bv$$

,

Ou, isolando o termo da segunda derivada:

$$\ddot{x} + \gamma x + \omega_0^2 x = 0$$

Onde $\gamma = \frac{b}{m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Conjeturando $x = e^{irt}$ e reduzindo a uma equação algébrica, a equação diferencial é resolvida facilmente e a solução tem forma:

$$x = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \alpha)$$

Onde $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$.

De notar é que a energia do sistema não é conservada, mas antes dada por:

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-\gamma t}$$

Definição 5.3.1. Qualidade

Define-se a qualidade como um parâmetro adimensional

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

Em termos da qualidade podemos escrever a equação de Newton:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

E quantidades relacionadas.

5.3.6 Diferentes casos - Amortecimento crítico, sub-crítico e super-crítico

O caso mais simples é corresponde ao caso em que $\frac{\gamma}{2} \ll \omega_0$ e assim a equação do movimento toma a forma simples:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

É o amortecimento sub-crítico.

No caso em que $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$, então temos:

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

É o amortecimento super-crítico.

E a solução da equação do movimento toma a forma:

$$x(t) = A_1 e^{(-\frac{\gamma}{2} + \beta)t} + A_2 e^{-(\frac{\gamma}{2} - \beta)t}$$

No caso em que $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$, a equação diferencial admite solução:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

É o amortecimento crítico.

5.4 O Oscilador Forçado

5.4.1 O oscilador não amortecido com uma força periódica

Como usual, tomamos o sistema como uma massa m numa mola com constante elástica k . No entanto, considera-se também uma força aplicada:

$$F = F_0 \cos \omega t$$

A equação do movimento é, pois:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Se o oscilador harmónico é movido da sua posição de equilíbrio e deixado oscilar, irá fazê-lo com a sua frequência natural ω_0 . Uma força periódica irá impor a sua própria frequência ω no oscilador. Neste caso o movimento será uma sobreposição dos movimentos ω e ω_0 .

No entanto, num sistema físico estão presentes forças de atrito tal que as oscilações livres do sistema eventualmente morrem. O estado inicial da oscilação em que ambos os tipos de movimento estão presentes é apelidado de estado transiente.

Passado algum tempo, o único movimento presente será o causado pela oscilação forçada. que continuará não afetado pelo atrito.

Para encontrar esta solução impõe-se:

$$x(t) = C \cos \omega t$$

E substituindo na equação do movimento:

$$-m\omega^2 C \cos(\omega t) + kC \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Ou seja, obtem-se a condição, para que a igualdade se verifique:

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Note-se que quando $\omega \rightarrow \omega_0$ o valor da frequência tende para infinito. Este fenómeno é apelidado de ressonância.

Verifique-se no entanto, que quando ω passa por ω_0 ocorre uma descontinuidade, sendo que o limite esquerdo de C é $+\infty$ e o limite negativo de C é $-\infty$. O fenómeno de ressonância, é, no entanto capturado pelo módulo da amplitude tendendo para infinito. Assim, a imposição da amplitude ser uma quantidade positiva:

$$A = |C|$$

Pode ser obedecida exprimindo o movimento em termos de uma vibração sinusoidal com uma fase α que muda em $\omega = \omega_0$:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \text{Se } \omega < \omega_0 \\ \alpha = \pi & \text{Se } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

5.4.2 Oscilador forçado amortecido

No caso da consideração de atrito proporcional ao oscilador forçado descrito na subsecção anterior, a lei de newton é:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Fazendo as substituições $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $\gamma = \frac{b}{m}$:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

A resolução da equação diferencial passa pela imposição de uma solução complexa do tipo:

$$z = Ae^{i(\omega t \pm \delta)}$$

Com o movimento físico dado por:

$$x = \text{Re}(z)$$

Substituindo na equação do movimento, obtemos a equação algébrica:

$$(-\omega^2 A + i\gamma\omega A + \omega_0^2 A)e^{i(\omega t - \delta)} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

Que é verdadeira apenas quando as partes imaginárias e reais são iguais:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A = \frac{F_0}{m} \cos \delta \\ \gamma\omega A = \frac{F_0}{m} \sin \delta \end{cases}$$

É possível assim escrever a amplitude e a fase como:

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \\ \tan \delta(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

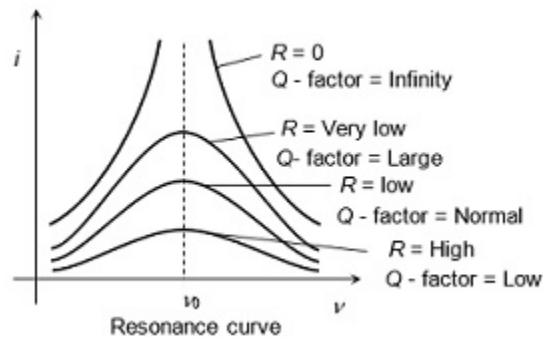
5.4.3 Efeito da variação do atrito - Qualidade

A amplitude e a fase podem ser escritas em termos da qualidade:

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega_0\omega/Q)^2}} \\ \tan \delta(\omega) = \frac{\omega_0\omega/Q}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

Além disto, é, em muitos casos útil considerar a razão ω/ω_0 , reescrevendo as equações anteriores:

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0/\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} \\ \tan \delta = \frac{1/Q}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}} \end{cases}$$



5.4.4 Regime transiente

A discussão até agora centra-se em vibrações inteiramente estáveis, após o seu estabelecimento, como se a força motora $F_0 \cos \omega t$ tivesse atuado sobre o sistema desde um tempo $t = -\infty$, no entanto, em qualquer situação real, quando a força motora é em primeira instância aplicada sobre o sistema, em $t = 0$, apenas após algum tempo se verifica um regime de vibrações estacionário.

De facto, se se proceder na análise da solução do oscilador forçado sem atrito, como verificado a solução é:

$$x = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

No entanto, note-se que em $t = 0$ obtem-se uma posição que se desvia do equilíbrio no sentido do eixo positivo se $\omega < \omega_0$ e se $\omega > \omega_0$ então o sistema deslocaria-se no sentido oposto à força aplicada. Claramente ambas as situações não são físicas, e isto implica a necessidade de um regime transiente.

Matematicamente recorremos a uma sobreposição do caso em que atua uma força, e em que não atua qualquer força:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$$

A soma das duas equações resulta evidentemente num movimento que obedece à equação do oscilador forçado:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

A solução será, pois uma sobreposição de ondas sinusoidais:

$$x = B \cos(\omega_0 t + \beta) + C \cos \omega t$$

Onde C é dada do mesmo modo que anteriormente:

$$C = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega}$$

Adicionalmente, o segundo termo obedece a:

$$B \cos \beta + C = 0$$

Ou derivando em $t = 0$:

$$0 = -\omega_0 B \sin \beta$$

O que implica que $\beta = 0$ ou π . E assim, para qualquer um dos casos, $B = -C$.

Deste modo, a solução é:

$$x = C(\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

Que é um exemplo típico de batimento. Na ausência de amortecimento, o fenómeno de batimento continuaria indefinidamente, o que implica que um regime estacionário como o descrito anteriormente nunca seria atingido.

No caso em que o atrito está presente, é possível postular a combinação de oscilações livres e de regime estacionários:

$$x = B e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_1 t + \beta) + A \cos(\omega t - \delta)$$

Onde:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

$$\delta = \arctan \left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

5.4.5 Potencia absorvida por um oscilador forçado

Considerações sobre o ritmo a que energia deve ser fornecida a um oscilador harmónico de modo a manter as oscilações a uma amplitude fixa, levam à consideração da potencia fornecida:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv$$

Considerando a equação já derivada para o regime estacionário:

$$x = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t = C \cos \omega t$$

Como tal, a velocidade:

$$v = -\omega C \sin \omega t$$

E assim, a potência é:

$$P = -\omega C F_0 \sin \omega t \cos \omega t = -\omega C F_0 \sin(2\omega t)$$

Note-se que a potência média em meio período é nula, devido à proporcionalidade a $\sin(2\omega t)$. Assim, durante um quarto de ciclo energia é fornecida ao sistema, e no segundo quarto de ciclo energia é retirada.

5.4.6 Potencia absorvida por um oscilador forçado amortecido

O movimento do oscilador forçado amortecido é descrito por:

$$x = A \cos(\omega t - \delta)$$

A sua velocidade é, portanto:

$$v = -A\omega \sin(\omega t - \delta)$$

E é possível escrever:

$$v = v_0 \sin(\omega t - \delta)$$

Com:

$$v_0(\omega) = \frac{F_0\omega_0/k}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}}$$

Definição 5.4.1. Ressonância de Velocidade

O valor de v_0 passa, por um máximo em $\omega = \omega_0$, sendo este processo apelidado de ressonância de velocidade

Considerando, então, o valor necessário para manter as oscilações forçadas, tem-se:

$$P = -F_0v_0 \cos(\omega t - \delta) = -F_0v_0 \cos \omega t (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta)$$

É possível, deste modo, separar os termos da expressão anterior obtendo:

$$P = (-F_0v_0 \cos \delta) \sin \omega t \cos \omega t + (-F_0v_0 \sin \delta) \cos^2 \omega t$$

Considerando a média num número inteiro de ciclos, o primeiro termo da expressão acima é nulo, e a média de \cos^2 é $1/2$, pelo que:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} F_0 v_0 \sin \delta = \frac{1}{2} \omega A F_0 \sin \delta$$

Substituindo as expressões para δ e A , obtem-se:

$$\overline{P}(\omega) = \frac{F_0^2 \omega_0}{2kQ} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}$$

Tal como a velocidade, a potência média absorvida é máxima quando $\omega = \omega_0$ para qualquer qualidade Q .

A potencia máxima, é dada por

$$P_m = \frac{F_0^2 \omega_0 Q}{2k} = \frac{Q F_0^2}{2m \omega_0}$$

Notando que a curva da potência tem uma forma semelhante à da amplitude, é conveniente definir uma largura para estas curvas. Esta largura é definida tomando a diferença entre os valores de ω para qual a potência absorvida é metade do máximo, e ω_0 , quando a potência é máxima.

Considerando esta diferença pequena, ou seja, considerando $\omega \approx \omega_0$, temos que:

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega\omega_0} = \frac{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}{\omega\omega_0} \approx \frac{2\omega_0(\omega_0 - \omega)}{\omega_0^2} = \frac{2(\omega_0 - \omega)}{\omega_0}$$

Substituindo pois, na potência média anterior, esta aproximação permite-nos escrever:

$$\bar{P} = \frac{F_0^2(\omega_0/Q)}{2(k/\omega_0^2)} \frac{1}{4(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0/Q)^2}$$

No entanto, a quantidade ω_0/Q corresponde precisamente à constante de amortecimento γ que caracteriza a taxa de perda de energia do oscilador amortecido na ausência de uma força.

$$E = E_0 e^{-\gamma t}$$

Deste modo, é possível, ainda, escrever a potência média em termos de γ .

$$\bar{P}(\omega) = \frac{\gamma F_0^2}{2m} \frac{1}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

Denotando assim $(\omega_0 - \omega) \equiv \Delta\omega$, vem que a potência média corresponde a metade do máximo quando:

$$\bar{P} = \frac{\gamma F_0^2}{2m} \frac{1}{2\gamma^2}$$

Ou seja, quando:

$$4(\Delta\omega)^2 = \gamma^2$$

O que implica que:

$$\Delta\omega = \frac{\gamma}{2}$$

Assim é obtida uma relação entre o decaimento das oscilações de um sistema oscilatório quando apenas está presente um amortecimento, e a largura da curva da ressonância de potência do sistema oscilatório quando estão presentes quer amortecimento, quer uma força periódica.

5.4.7 Ressonância num circuito elétrico

Um dos exemplos mais importantes de sistemas onde ocorre ressonância é um circuito elétrico constituído por um condensador e uma bobine. Consideramos primeiro as oscilações livres de um tal circuito no qual não existe resistência elétrica.

O condensador é um dispositivo cuja função é acumular carga elétrica e o correspondente potencial eletrostático. A capacidade C do condensador é definida em termos da carga q e do potencial elétrico nele acumulado V_C :

$$C = \frac{q}{V_C}$$

Assim, o potencial elétrico é dado por:

$$V_C = \frac{q}{C}$$

No caso de corrente que se altera com o tempo, a bobine responde com uma diferença de potencial proporcional à sua indutância L e à taxa de mudança da corrente elétrica no tempo:

$$V_L = L \frac{dI}{dt}$$

Num circuito elétrico LC, a soma de V_L e V_C tem de ser nula, pela lei das malhas, assim:

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$$

No entanto, a corrente é dada por:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

E assim, a equação acima pode ser escrita:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0$$

Que corresponde precisamente à equação do oscilador harmónico com:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

No caso da presença de uma resistência R , surge um termo adicional correspondente à diferença de potencial nos terminais da resistência:

$$V_R = RI$$

A equação diferencial que descreve o circuito é precisamente:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Nesta equação, R/L tem exatamente o papel da constante de amortecimento γ . A carga nas placas do condensador sofrerá oscilações exponencialmente amortecidas.

Finalmente, se o circuito for forçado por uma tensão alternada, tem-se a equação típica de um oscilador forçado amortecido:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{V_0}{L} \cos \omega t$$

Apresenta-se uma tabela com todos os paralelos entre as quantidades do oscilador harmónico e o circuito eléctrico considerado:

TABLE 4-2: MECHANICAL AND ELECTRICAL RESONANCE PARAMETERS

<i>Mechanical system</i>	<i>Electrical system</i>
Displacement x	Charge q
Driving force F	Driving voltage V
Mass m	Inductance L
Viscous force constant b	Resistance R
Spring constant k	Reciprocal capacitance $1/C$
Resonant frequency $\sqrt{k/m}$	Resonant frequency $1/\sqrt{LC}$
Resonance width $\gamma = b/m$	Resonance width $\gamma = R/L$
Potential energy $\frac{1}{2}kx^2$	Energy of static charge $\frac{1}{2}q^2/C$
Kinetic energy $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2 = \frac{1}{2}mv^2$	Electromagnetic energy of moving charge $\frac{1}{2}L(dq/dt)^2 = \frac{1}{2}Li^2$
Power absorbed at resonance $F_0^2/2b$	Power absorbed at resonance $V_0^2/2R$

Capítulo 6

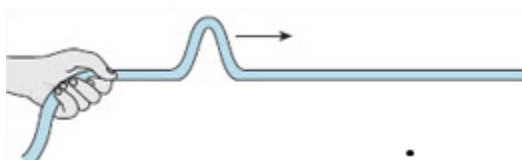
A equação de Onda[†]

6.1 Ondas a uma dimensão

6.1.1 Uma derivação elementar

Imaginemos que temos uma corda elástica longa sob tensão, e num certo instante é produzida uma perturbação agitando uma extremidade segundo y .

Esta perturbação propaga-se ao longo da corda com uma velocidade c e com um perfil (i.e. a forma da perturbação para $t = t_1$, por exemplo descrita pela função $y = f(x)$).



Num instante subsequente, a perturbação desloca-se para a direita, movendo o seu perfil. Para $t = t_2$:

$$y = f(x - c(t_2 - t_1))$$

Se o tempo for cronometrado com início em t_1 , $t_2 \equiv t$:

$$y = f(x - ct)$$

Se a perturbação tivesse sido iniciada na outra extremidade da corda, seria obtida uma perturbação a propagar-se para a esquerda, ou seja:

$$y = f(x + ct)$$

Se definirmos $z = x - ct$, então temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{dy}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -c \frac{df}{dz} \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{dy}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}\end{aligned}$$

E assim, temos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial x}$$

Diferenciando novamente a equação, obtem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{dz} \right) = -c \frac{d^2 f}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial t} = c^2 \frac{d^2 f}{dz^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{dz} \right) = \frac{d^2 f}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dz^2}\end{aligned}$$

Ou seja, obtem-se a equação de onda:

Definição 6.1.1. Equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

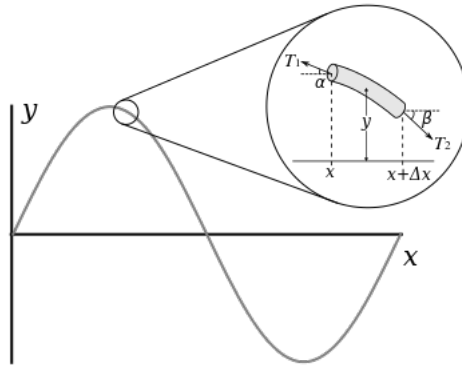
É de notar que esta equação tem como soluções possíveis as perturbações a propagarem-se em ambos os sentidos.

6.1.2 Lei de Newton para uma corda elástica (infinita) sobre tensão

Considera-se, agora, o caso de uma corda elástica, com uma densidade linear mássica μ e sobre uma tensão T .

Para a derivação que se segue, admitimos como pressuposto que as deslocações são pequenas ($y \ll 1$) e que cada ponto da corda se desloca apenas segundo y . Admitimos também que a tensão T na corda é constante, e que o efeito da gravidade pode ser ignorado.

Considerando uma porção infinitesimal de corda, muito ampliada:



Assim, temos que $\beta - \alpha = \delta\theta$ e por isso utiliza-se a notação $\alpha \equiv \theta$, $\beta \equiv \theta + \delta\theta$. Do mesmo modo: $T_1 = T_2 \equiv T$

A resultante das forças segundo y que atua nesta porção de corda, é:

$$F_y = T \sin(\theta + \delta\theta) - T \sin \theta \approx T(\theta + \delta\theta) - T\theta$$

A aproximação é justificada pois $y \ll 1$, logo $\theta \ll 1$. Assim:

$$F_y = T\delta\theta = T \frac{\partial\theta}{\partial x} \delta x$$

Mas como:

$$\theta \sim \tan \theta = \frac{\delta y}{\delta x}$$

Vem:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}$$

E assim, podemos escrever a força em y como:

$$F_y = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta x$$

No entanto, utilizando a equação de Newton $F = ma$, tem-se:

$$F_y = \mu \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Obtem-se, pois, a igualdade:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ou seja:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Onde:

$$c^2 = \frac{T}{\mu}$$

6.1.3 Formulação Lagrangeana - Corda discretizada

Comecemos, agora, por resolver um problema preliminar. Considere-se um conjunto infinito de corpos, ligados entre si por molas de constante elástica k . O Lagrangeano do sistema é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \sum_i \dot{x}_i - \frac{1}{2}k \sum_i (x_{i+1} - x_i)^2$$

E assim, a equação de Lagrange para a massa i é:

$$m\ddot{x}_i + 2kx_i - k(x_{i+1} - x_{i-1}) = 0$$

Voltando agora ao problema da corda elástica, é possível, em primeira instância considerar um conjunto discreto de partículas separadas por uma distância ϵ em vez da corda contínua.

A equação da partícula i é:

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = T [\sin(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i)] = \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{\epsilon} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\epsilon} \right]$$

Ou seja:

$$m\ddot{y}_i + 2y_i \frac{T}{\epsilon} - \frac{T}{\epsilon} [y_{i+1} - y_{i-1}]$$

Esta equação é análoga à das molas ligando partículas idênticas, e então o Lagrangeano do sistema correspondente à corda discretizada é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \sum_i \dot{y}_i - \frac{T}{2\epsilon} \sum_i (y_{i+1} - y_i)^2$$

6.1.4 Densidade Lagrangeana e o limite do contínuo

É possível, agora, passar ao limite do contínuo, com:

$$m = \mu dx$$

$$\epsilon = dx$$

E escrever:

$$\mathcal{L} = \int_0^{l_0} \frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

Definição 6.1.2. Densidade Lagrangeana

Definimos então densidade Lagrangeana \mathcal{L} como a versão contínua do Lagrangeano, ou seja, tal que o Lagrangeano é dado por:

$$\mathcal{L} = \int_V \mathcal{L} dV$$

O sistema considerado da corda elástica, tem então densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Assim:

$$\mathcal{L} = \int_0^{l_0} \mathcal{L} dx$$

6.1.5 Derivação variacional das equações de Lagrange para sistemas contínuos unidimensionais

É possível considerar, como para o caso do Lagrangeano habitual, a variação da ação:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{l_0} \mathcal{L}(y, \dot{y}, y', x, t) dx \right) dt \right]$$

Onde:

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x}$$

É de notar que espaço e tempo (x e t são tratados com igualdade).

Definição 6.1.3. Princípio de Hamilton para sistemas contínuos

De um modo semelhante ao feito anteriormente, o princípio de Hamilton para sistemas contínuos é definido como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} dx \mathcal{L}(y, \dot{y}, y', x, t) = 0$$

A coordenada generalizada é $y(x, t)$ e é esta a coordenada que deve ser feita variar de modo a encontrar o extremo da ação:

$$y(x, t) \longrightarrow y(x, t) + \delta y(x, t)$$

Esta coordenada, como visto anteriormente é sujeita a pontos iniciais e finais fixos, isto é:

$$\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = 0 \quad \forall x$$

É de notar também que no caso da corda vibrante, esta está sujeita a condições de fronteira que condicionam o problema:

$$\delta y(0, t) = \delta y(l_0, t) = 0 \quad \forall t$$

Então:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x \right] = 0$$

Os termos em x e y desaparecem, ao serem integrados por partes, já que a variação nos extremos é nula. Adicionalmente, integrando o 2º e 3º termos por partes:

$$\int_0^{l_0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y' dx = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) \delta y \Big|_0^{l_0} - \int_0^{l_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) \delta y dx = - \int_0^{l_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \, dt = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dt$$

Substituindo estes resultados na expressão para δS , obtemos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \right] \delta y(x, t) = 0$$

E pelo Lema fundamental do cálculo variacional, temos:

Definição 6.1.4. Equação de Lagrange para um sistema contínuo de dimensão 1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

Utilizando a densidade Lagrangeana derivada anteriormente, obtem-se:

$$\mu \ddot{y} - T y'' = 0$$

Ou seja, a equação de onda derivada anteriormente:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

6.2 Ondas Harmónicas

6.2.1 Ondas harmónicas

Uma solução importante da equação de onda, são precisamente as ondas sinusoidais estudadas no capítulo anterior, mais especificamente, ondas harmónicas. É possível procurar soluções do tipo onda plana:

$$y(x, t) = A e^{-i(kx - \omega t)} = A e^{-ik(x - ct)}$$

E substituindo na equação de onda, obtem-se:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A e^{-i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A e^{-i(kx - \omega t)}$$

Ou seja, olhando para a equação de onda, ondas planas são soluções quando:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$$

Ou seja:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

6.2.2 Ondas Estacionárias

De notar é que a soma de soluções da equação de onda é também uma solução. Ou seja, se \tilde{y} é uma solução, então:

$$y(x, t) = \mathbb{R}\tilde{y}(x, t)$$

Também o é.

Assim, consideremos duas soluções que correspondem a ondas que viajam em sentidos opostos com a mesma velocidade de propagação:

$$y_1(x, t) = A e^{-i(kx - \omega t)}$$

$$y_2(x, t) = A e^{-i(-kx - \omega t)}$$

Uma vez que são ambas soluções, a sua soma também é solução:

Definição 6.2.1. Onda estacionária

$$y = y_1 + y_2 = 2A e^{i\omega t} \cos(kx)$$

Na solução correspondente a uma onda estacionária, cada ponto da corda executa um movimento harmónico no tempo com amplitude constante.

6.2.3 Soluções separáveis - Soluções de Bernoulli

Fazendo a hipótese de que uma solução é separável, ou seja, existem funções ρ e Ω tal que:

$$y(x, t) = \rho(x)\Omega(t)$$

É uma solução da equação de onda, então:

$$\frac{\rho(x)}{c^2} \frac{\partial^2 \Omega(t)}{\partial t^2} = \Omega(t) \frac{\partial^2 \rho(x)}{\partial x^2}$$

Ou seja:

$$\frac{1}{\Omega(t)c^2} \frac{\partial^2 \Omega(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial^2 \rho(x)}{\partial x^2}$$

Como o lado direito da equação depende apenas de t e o lado esquerdo apenas de x , então na realidade, para a igualdade ser verdadeira para todo o t e todo o x , nenhum dos lados pode depender das variáveis. Têm de ser, pelo contrário, constantes. Chamamos por conveniência, a esta constante, $-k^2$. Obtem-se o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + k^2 \rho = 0 \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} + c^2 k^2 \Omega = 0 \end{cases}$$

São soluções particulares deste sistema:

$$\begin{cases} \rho(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \\ \Omega(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) \end{cases}$$

Consideremos as seguintes condições de fronteira:

$$\rho(0) = \rho(l) = 0$$

Correspondentes a uma corda de comprimento l fixa nos extremos.

Obtem-se imediatamente, utilizando $\rho(0) = 0$ que $B = 0$ e portanto:

$$\rho(x) = A \sin(kx)$$

E utilizando $\rho(l) = 0$ obtem-se:

$$\sin(kl) = 0$$

$$\Rightarrow kl = n\pi$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{n\pi}{l}; \quad n \in \mathbb{N}$$

Uma solução será:

$$y_n(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[C \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + D \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \right]$$

Existem, no entanto, um número infinito de soluções deste tipo. Uma solução geral da equação de onda numa corda com extremos fixos corresponde a uma sobreposição destas ondas harmónicas, apelidadas de modos normais de vibração. De facto, utilizando séries de Fourier é possível provar que qualquer função continua no intervalo l é representável por uma soma destes estados. De certo modo formam uma base do conjunto de soluções da equação.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \right]$$

Dadas condições iniciais:

$$y(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

É possível calcular os coeficientes A_n e B_n que correspondem aos coeficientes de Fourier da série de senos de f e g respetivamente:

$$A_n = \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) f(x) dx$$

$$\frac{n\pi c}{l} B_n = \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) g(x) dx$$

Assim, o problema fica inteiramente resolvido, e a esta solução é chamada a solução de Bernoulli.

6.2.4 Energia transportada numa onda

Como demonstrado anteriormente, a densidade Lagrangeana do sistema da corda vibrante é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{y}^2 - \frac{T}{2}y'^2$$

Onde a densidade de energia cinética é:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mu\dot{y}^2$$

E a densidade de energia potencial é:

$$\mathcal{V} = \frac{T}{2}y'^2$$

Definição 6.2.2. Densidade Hamiltoneana

A densidade Hamiltoneana pode ser definida analogamente ao Hamiltoneano, recorrendo a uma transformação de Legendre:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \dot{y} - \mathcal{L}$$

Deste modo:

$$\mathcal{H} = \int_0^{l_0} \mathcal{H} \, dx$$

No caso da corda vibrante, esta densidade Hamiltoneana corresponde a:

$$\mathcal{H} = \mu\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\mu\dot{y}^2 + \frac{T}{2}y'^2 = \frac{1}{2}(\mu\dot{y}^2 + Ty'^2) = \mathcal{T} + \mathcal{V}$$

Que é a densidade de energia da onda, e desta forma, o Hamiltoneano do sistema corresponderá à sua energia total:

$$E = \mathcal{H} = \int_0^{l_0} \mathcal{H} \, dx$$

6.2.5 Energia transportada por uma onda harmónica

Considere-se, por simplicidade, uma onda sinusoidal:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Uma vez que:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t)$$

A densidade Hamiltoneana é:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} [\mu A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t) + T A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t)] \\ &= \mu A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Note-se, pois, que a onda se propaga com velocidade $c = \frac{\omega}{k}$, no entanto:

$$\sin^2(kx - \omega t) = \frac{1 - \cos(2kx - 2\omega t)}{2}$$

Ou seja, a densidade Hamiltoneana é:

$$\mathcal{H} = \frac{\mu A^2 \omega^2}{2} (1 - \cos(2kx - 2\omega t))$$

Ou seja, a onda de densidade de energia \mathcal{H} propaga-se com uma frequência e número de onda duplos da frequência de vibração harmónica, mas a sua velocidade de propagação é igual.

Desta forma, a energia associada a um comprimento de onda é:

$$E = \int_0^\lambda \mathcal{H} dx = \int_0^\lambda \frac{\mu A^2 \omega^2}{2} (1 - \cos(2kx - 2\omega t)) dx = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \lambda$$

Uma vez que a velocidade de propagação da onda de energia é igual, a energia E demora um intervalo de tempo igual ao período $T = \frac{\lambda}{c}$ a passar por um dado ponto.

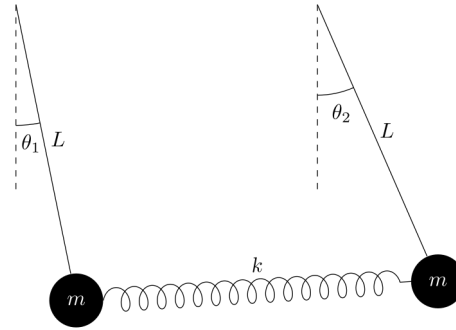
O fluxo de energia por unidade de tempo (a potencia) é, portanto:

$$P = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 c$$

6.3 Modos normais

6.3.1 Modos normais de dois osciladores acoplados

Considere-se um sistema correspondente a dois pêndulos com iguais massas e comprimentos de fio acoplados por uma mola de constante k .



Considerando os ângulos θ_1 e θ_2 muito pequenos, podemos fazer as aproximações:

$$\sin \theta_1 \approx \theta_1 \approx \frac{x_1}{l}$$

$$\sin \theta_2 \approx \theta_2 \approx \frac{x_2}{l}$$

Cada pêndulo está sujeito a uma força:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_e$$

Ou seja, as equações de Newton correspondem a um sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -mg \sin \theta_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -mg \sin \theta_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Realizando as aproximações em cima descritas:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -g \frac{x_1}{l} - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = -g \frac{x_2}{l} - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Substituindo as frequências naturais dos pêndulos $\omega_0 = \frac{g}{l}$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + g\omega_0^2 x_1 = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{k}{m}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Somando e subtraindo as equações do sistema obtem-se respetivamente, com uma mudança de variável $X = x_1 + x_2$ e $Y = x_1 - x_2$:

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

$$\ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) Y = 0$$

X e Y correspondem aos modos normais de vibração do sistema. A energia do sistema corresponde à soma das energias dos modos de vibração:

$$E_X = A\dot{X}^2 + BX^2$$

$$E_Y = C\dot{Y}^2 + DY^2$$

A energia do sistema é por isso:

$$E_{tot} = E_X + E_Y$$

Note-se também que as equações diferenciais dos modos normais de vibração correspondem a osciladores harmónicos com frequências $\omega_X = \omega_0$ e $\omega_Y = \sqrt{\omega_0^2 + 4\frac{k^2}{m^2}}$. As soluções são portanto:

$$X = x_1 + x_2 = X_0 \cos(\omega_X t + \phi_X)$$

$$Y = x_1 - x_2 = Y_0 \cos(\omega_Y t + \phi_Y)$$

Invertendo agora a mudança de modo a exprimir x_1 e x_2 em termos de X e Y :

$$x_1 = \frac{1}{2}(X + Y) = \frac{1}{2} [X_0 \cos(\omega_X t + \phi_X) + Y_0 \cos(\omega_Y t + \phi_Y)]$$

$$x_2 = \frac{1}{2} [X_0 \cos(\omega_X t + \phi_X) + Y_0 \cos(\omega_Y t - \phi_Y)]$$

Admitindo, por simplicidade que $\frac{1}{2}X_0 = \frac{1}{2}Y_0 = A$ e $\phi_X = \phi_Y = 0$. Então:

$$x = A \cos(\omega_X t) + A \cos(\omega_Y t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_Y - \omega_X}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_X + \omega_Y}{2}t\right)$$

$$y = A \cos(\omega_X t) - A \cos(\omega_Y t) = 2A \sin\left(\frac{\omega_Y - \omega_X}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_X + \omega_Y}{2}t\right)$$

Verifica-se um fenómeno de batimento como descrito no capítulo anterior. Cada um dos pêndulos exibe este fenómeno desfasado por uma fase de $\frac{\pi}{2}$.

6.3.2 Soluções de D'Alembert

Partindo da equação de onda, e tendo em conta que o sentido de propagação de uma onda não afeta a veracidade da equação, é possível fazer uma mudança de variável $y(x, t) \rightarrow y(\xi, \zeta)$:

$$\xi = x + ct$$

$$\zeta = x - ct$$

Assim:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)$$

E as segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta} \right)$$

Substituindo estas expressões na equação de onda, obtemos:

$$4 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$$

É possível, agora, integrar diretamente a expressão acima. Integrando em ordem a ζ

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = h(\xi)$$

E integrando agora em ordem a ζ , obtem-se:

$$y = \int h(\xi) d\xi + \psi(\zeta)$$

$$y = \phi(\xi) + \psi(\zeta)$$

E revertendo para as variáveis x e t :

Definição 6.3.1. Solução de D'Alembert

$$y = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

É apelidada de solução de D'Alembert.

6.4 Ondas 2D

6.4.1 Membranas elásticas: Ondas transversais 2D

Suponhamos, agora, que temos uma membrana elástica sobre tensão, por exemplo a pele de um tambor, à qual é causada uma perturbação.

Seja $u(x, y, t)$ o campo dos deslocamentos transversais, μ a densidade superficial de massa e $\tau = \tau(x, y)$ a tensão superficial ou densidade superficial de energia.

Note-se que:

$$[\tau] = \frac{\text{força}}{\text{comprimento}} = \frac{\text{energia}}{\text{área}}$$

Podemos definir uma densidade de energia cinética dada por:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2$$

E do mesmo modo procurar definir uma densidade de energia potencial \mathcal{V} .

Considerando um pequeno segmento da membrana, verifica-se que a energia correspondente ao elemento de área dA é:

$$\mathcal{V}dA = \tau(dS - dA)$$

Onde $d\vec{S}$ e $d\vec{A}$ são grandezas vetoriais, tal que:

$$||d\vec{A}|| = \hat{z} \cdot \hat{n}dS$$

A superfície deformada é descrita pelo campo de deslocamentos $u(x, y, t)$. A sua equação é:

$$z = u(x, y, t)$$

Considerando assim, esta superfície como o núcleo de uma função:

$$F(x, y, z, t) = z - u(x, y, t) = 0$$

E considerando uma curva pertencente à superfície e parametrizada como:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \alpha &\rightarrow (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) \end{aligned}$$

Podemos escrever a derivada de F em ordem a este parâmetro como:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \nabla F \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$$

Esta derivada é nula na superfície, porque a própria função é identicamente nula na superfície. Isto implica que:

$$\nabla F \perp \gamma(\alpha)$$

Ou seja, o gradiente de F é perpendicular a $u(x, y, t)$. Podemos, pois, definir um versor normal à superfície:

$$\hat{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{-\nabla u + \hat{z}}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$$

Assim, temos que:

$$\hat{z} \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$$

E a relação entre os elementos de área dS e dA é dada por:

$$dA = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$$

Finalmente, a energia potencial num elemento de área dA será dada por:

$$\mathcal{V}dA = \tau \left[\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} - 1 \right] dA$$

No entanto, como consideramos pequenos deslocamentos

$$\|\nabla u\| \ll 1$$

, e expandindo em série de Taylor e retendo termos até primeira ordem em $\|\nabla u\|^2$, obtem-se:

$$\mathcal{V} \approx \tau \left[1 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \tau \|\nabla u\|^2$$

A densidade Lagrangeana, será, pois:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \|\nabla u\|^2$$

Utilizando o princípio de Hamilton e recorrendo à análise variacional, é possível determinar a equação de Lagrange para este sistema, sendo obtido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

Finalmente, resolvendo as equações de Lagrange, e assumindo que $\tau = \text{const.}$ e $\mu = \text{const.}$, obtem-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Ou seja, obtem-se a equação de onda a duas dimensões, correspondendo a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

Com $c^2 = \tau/\mu$.

Para dimensões superiores a derivação é evidentemente em tudo semelhante a esta.

Capítulo 7

Apêndices

7.1 Teorema de Euler sobre equações homogêneas

Uma função homogênea é uma função tal que:

$$f(\lambda \vec{z}) = \lambda^k f(\vec{z})$$

Note-se que uma função linear é uma função homogênea com $k = 1$

O teorema de Euler diz que:

$$\sum_{i=1}^N z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} = k f(\vec{z})$$

7.2 Notação indicial - Algumas definições e provas

Definição 7.2.1. Símbolo de Levi-Civita

O símbolo de Levi-Civita é um tensor absolutamente anti-simétrico (anti-simétrico em todos os índices) definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (12312) \\ -1 & \text{se } (32132) \\ 0 & \text{em tudo o resto} \end{cases}$$

É de notar:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = \epsilon_{jki}$$

e por aí em diante.

Definição 7.2.2. Delta de Kronecker

O delta de Kronecker tem as propriedades:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Uma identidade útil é:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

Por exemplo, para provar que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B}$

$$\begin{aligned} & \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \\ &= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m \\ &= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) A_j B_l C_m \\ &= A_j B_j C_k - A_j C_j B_k \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} \end{aligned}$$

Referências

- French, A. (1971). *Vibrations and waves*. Norton. Retrieved from <https://books.google.pt/books?id=fqhlQgAACAAJ>
- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2014). *Classical mechanics: Pearson new international edition*. Pearson Education Limited. Retrieved from <https://books.google.pt/books?id=Xr-pBwAAQBAJ>
- Landau, L., Lifshitz, E., Sykes, J., & Bell, J. (1976). *Mechanics*. Elsevier Science. Retrieved from <https://books.google.pt/books?id=e-xASAehg1sC>