Processamento de Sinal

3º Ano
Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Resumo

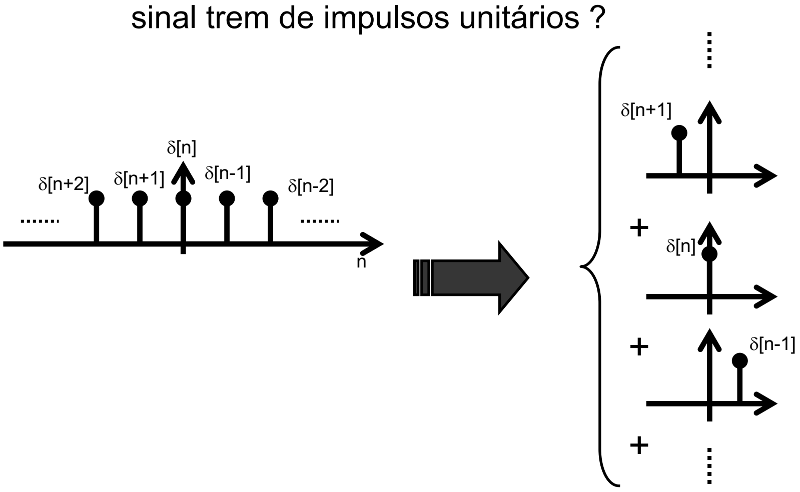
- Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo Discretos (SLITs Discretos)
- Somatório de Convolução
- SLITs Contínuos
- Integral de Convolução
- Propriedades de SLITs

Resposta de um sistema Linear Discreto

- Como calcular a resposta de um sistema linear discreto no tempo ?

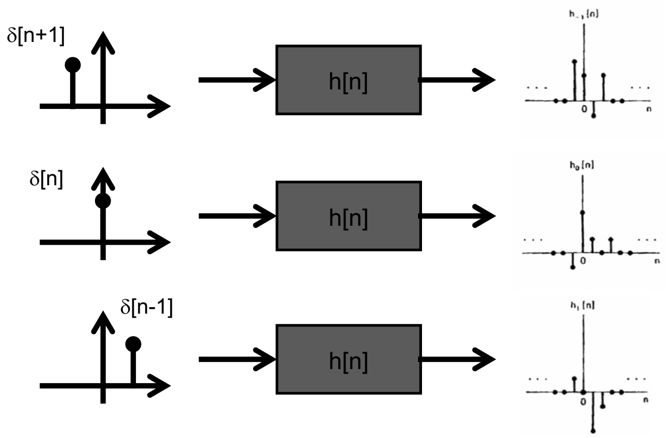
Resposta a um Trem de Impulsos

- Qual será a resposta de um sistema linear a um sinal trem de impulsos unitários ?



Resposta a um Trem de Impulsos

- Se aplicarmos ao sistema linear um conjunto de sinais impulsos unitários discretos deslocados no tempo, δ[n – k], teremos as seguintes respostas:



Resposta a um Trem de Impulsos

- Pelo princípio da <u>*aditividade*</u> *de um sistema linear*, a resposta ao sinal trem de impulsos será o somatório das respostas do sistema a cada um dos impulsos unitários:

$$y[n] = \ldots + y_{-2}[n] + y_{-1}[n] + y_0[n] + y_1[n] + \ldots$$

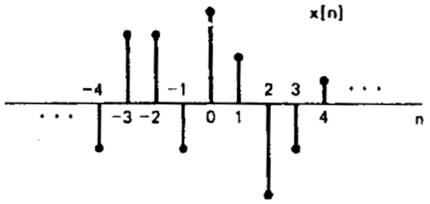
$$y[n] = \ldots + h_{-2}[n] + h_{-1}[n] + h_0[n] + h_1[n] + \ldots$$

ou seja,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k[n]$$

Resposta a uma sequência

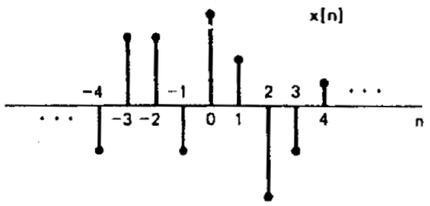
- Qual será a resposta de um sistema linear ao sinal ***x[n]*** ?



  - A resposta é quase directa se atentarmos:
    - à resposta do sistema a um trem de impulsos;
    - à propriedade da homogeneidade.

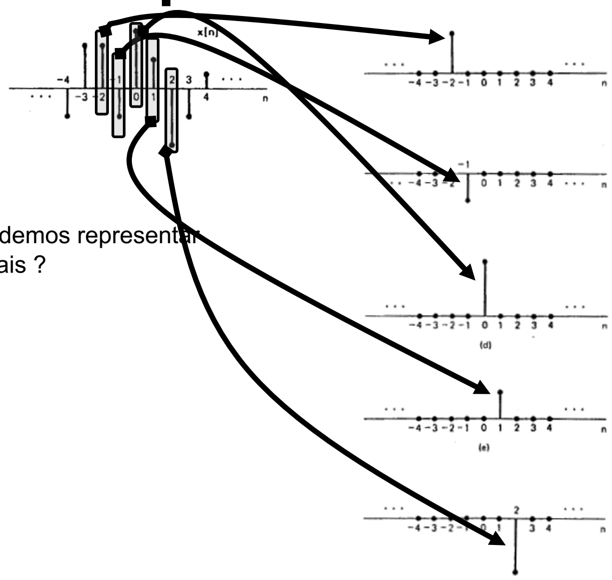
Representação de Sequências

- Como podemos representar uma sequência analiticamente ?



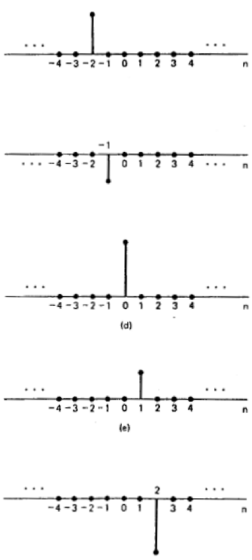
  - Como podemos decompor a sequência acima ?

Decomposição de uma Sequência



Como podemos representar estes sinais ?

Decomposição de uma Sequência



- Como podemos representar estes sinais ?

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1] & , \quad n = -1 \\ 0 & , \quad n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0] & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1] & , \quad n = 1 \\ 0 & , \quad n \neq 1 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{aligned} x[n] = \cdots & + \quad x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] \\ & + \quad [-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots \end{aligned}$$

Representação de Sequências

- O somatório anterior pode ser rescrito da seguinte forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

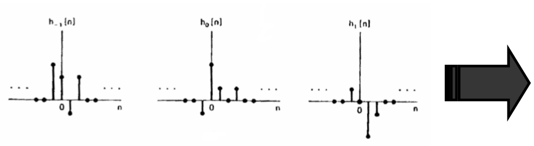
  – Esta expressão representa uma sequência arbitrária como uma combinação linear de impulsos unitários deslocados no tempo e escalados por *x[k]*.

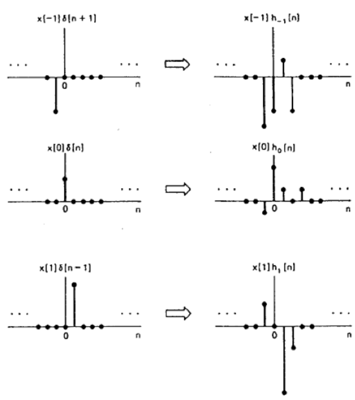
Resposta a uma sequência

- Propriedade da homogeneidade:

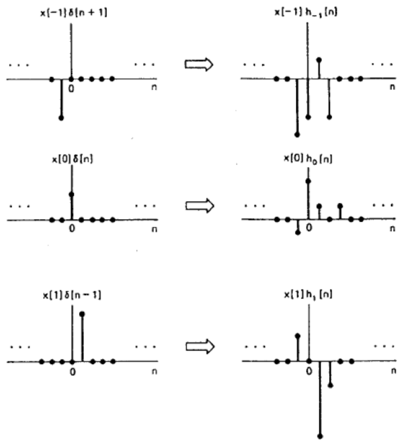
$$T\{x[n]\} = y[n] \longrightarrow T\{\alpha x[n]\} = \alpha y[n]$$

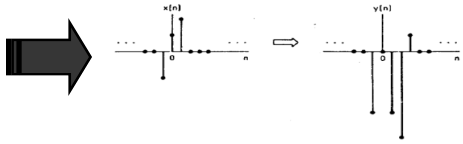
- Considerando a resposta do sistema ao trem de impulsos teremos:





Resposta de um sistema Linear Discreto





Podemos escrever o resultado como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

Este somatório chama-se:

- Somatório de Convolução

Resposta de um sistema Linear Discreto

- Se nos restringirmos ao caso dos sistemas lineares e <u>invariantes no tempo</u>.
  - Teremos que as respostas aos vários impulsos deslocados serão respostas iguais, estando apenas deslocadas no tempo (porque ?).

$$h_k[n] = h_0[n-k]$$

  - Na prática usamos a seguinte notação:

$$h[n] = h_0[n]$$

  - Temos então que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Resposta de um sistema Linear Discreto

- As duas relações obtidas anteriormente são muito importantes:

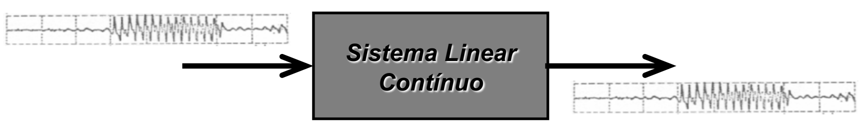
$$h[n] = h_0[n] \quad (1)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (2)$$

  – Conclusões:
    - Da equação (1) temos que um sistema LIT é completamente caracterizado pela sua resposta a um impulso unitário.
      – A resposta de um sistema LIT discreto ao impulso unitário chamamos de ***resposta impulsional***.
    - A equação (2) diz-nos então que a resposta de um sistema relativa a um sinal de entrada x[n] é obtida pela convolução do sinal de entrada pela resposta impulsional do sistema.

Resposta de um sistema Linear Contínuo

- Como calcular a resposta de um sistema linear contínuo no tempo ?

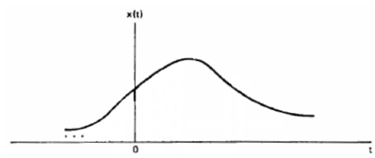


Resposta de um sistema Linear Contínuo

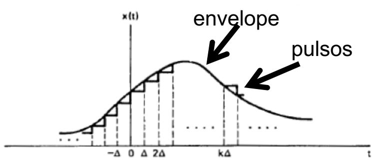
- O que foi que nos permitiu deduzir a expressão da resposta do sistema linear ?
  - A capacidade de decompor um sinal discreto num somatório de funções impulsos unitários discretos, desfasados de *k* e escalados pelo valor do sinal de entrada no instante *k*.

Representação de um sinal contínuo

- Consideremos o sinal x(t):

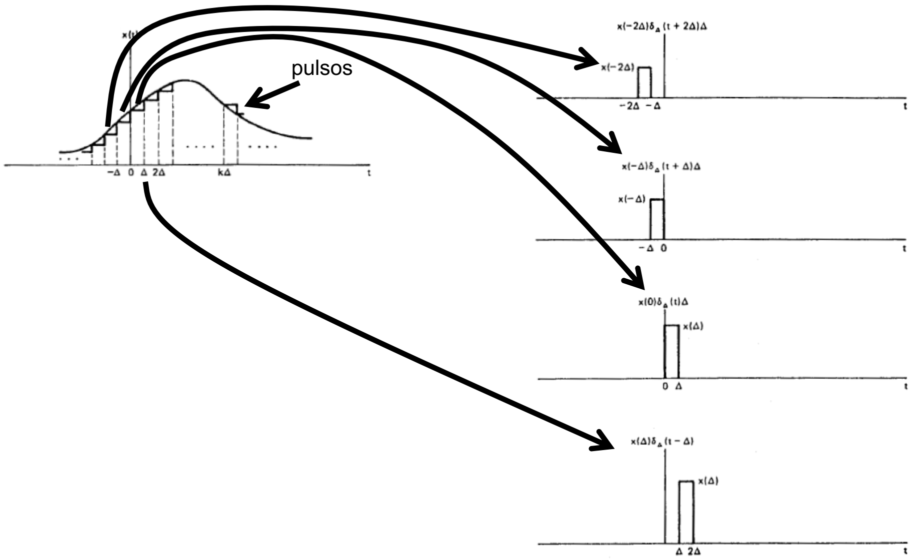


  - Existe alguma forma de aplicar neste sinal, o raciocínio desenvolvido anteriormente ?
    - O sinal x(t) pode ser aproximado por um somatório de pulsos escalados pela sua envelope.

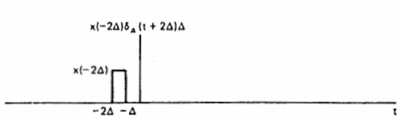


    - Como posso expressar analiticamente a aproximação acima ?

Representação de um sinal contínuo



Representação de um sinal contínuo



- Cada pulso pode ser expresso pela seguinte equação:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & , \quad 0 \le t < \Delta \\ 0 & , \quad outros\ valores \end{cases}$$

- Uma vez que o termo $\Delta\delta_\Delta(t)$ tem área unitária, podemos escrever a equação da aproximação do sinal x(t) como:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\underbrace{\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta}_{= 1}$$

Como esta aproximação pode ser melhorada ?

Representação de um sinal contínuo

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta$$

- Esta aproximação melhorará se diminuirmos a duração do pulso:

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta$$

  - No limite esta equação representa a operação de integração, ou seja:

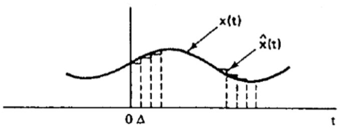
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

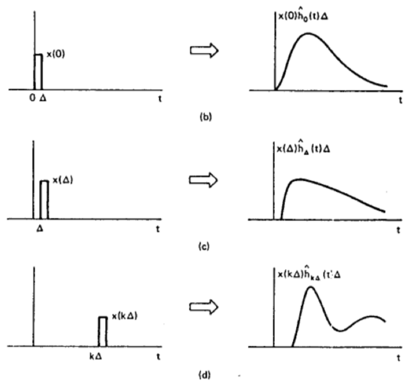
Resposta de um Sistema Linear a um sinal contínuo

- Qual será resposta de um sistema linear a um sinal x(t) ?
  - Se definirmos o sinal

    $\widehat{h}_{k\Delta}(t)$

    como sendo a resposta do sistema ao sinal <u>pulso</u> unitário, δ_Δ(t – kΔ).





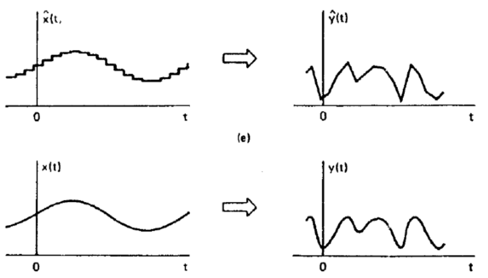
Resposta de um Sistema Linear a um sinal contínuo

Então com base nas propriedades de aditividade e da homogeneidade, podemos calcular a resposta do sistema, y(t), ao sinal de entrada x(t) como sendo:

$$\widehat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\widehat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

Resposta de um Sistema Linear a um sinal contínuo

- O que acontecerá a medida que Δ tender para zero ?



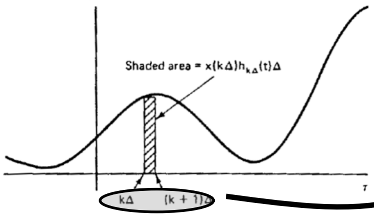
  - O que acontecerá é que x(t) e a sua aproximação coincidirão quando $\Delta \to 0$. Teremos então que

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\Delta$$

Resposta de um Sistema Linear a um sinal contínuo

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t)\Delta$$

– Portanto quando a duração do pulso diminui:
  - No limite a resposta ao pulso torna-se na resposta ao impulso.
  - O somatório torna-se no integral



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau$$

Quando $\Delta \rightarrow 0$

Resposta de um Sistema Linear a um sinal contínuo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau$$

– Este integral descreve a resposta de um sistema linear ao sinal de entrada x(t), chamando-se *integral de convolução*.

Resposta de um Sistema Linear a um sinal contínuo

– Se o sistema for também invariante no tempo, então

$$h_\tau(t) = h_0(t-\tau)$$

- No caso dos sistemas LIT a sua resposta será:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

– Esta equação pode ser representada por

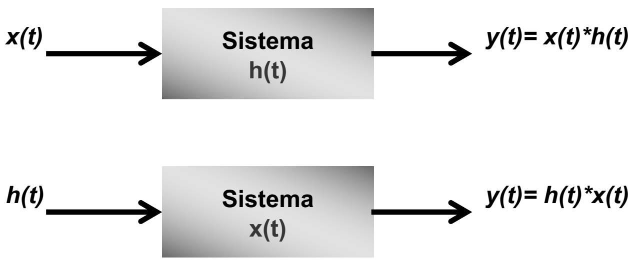
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Propriedades da Convolução

- Propriedade comutativa:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

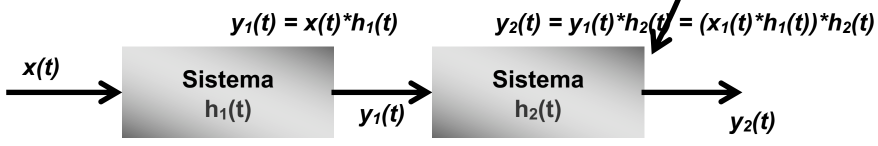


Propriedades da Convolução

- Propriedade associativa:

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = \boxed{(x(t) * h_1(t)) * h_2(t)}$$

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

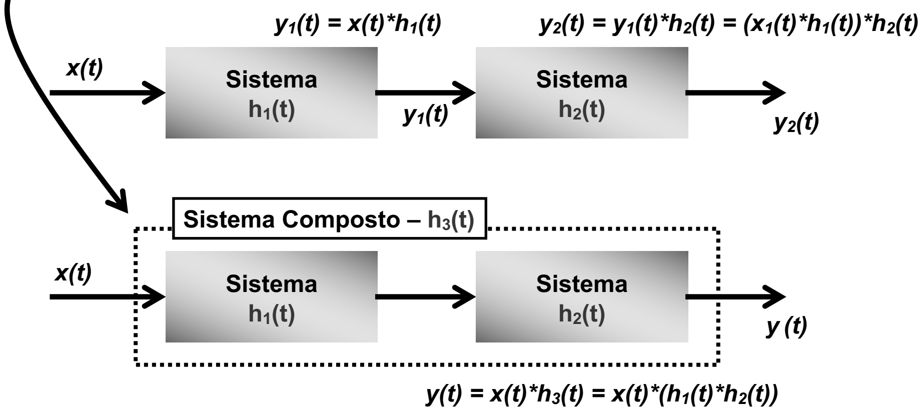


Propriedades da Convolução

- Propriedade associativa:

$$\boxed{x(t) * (h_1(t) * h_2(t))} = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

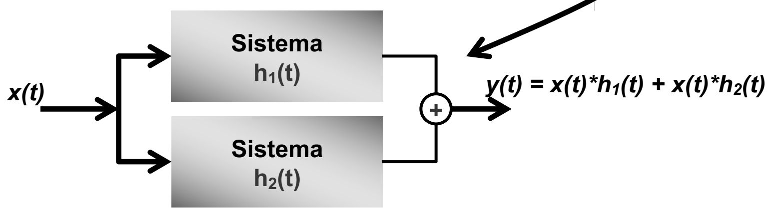


Propriedades da Convolução

- Propriedade distributiva:

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = \boxed{x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)}$$

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

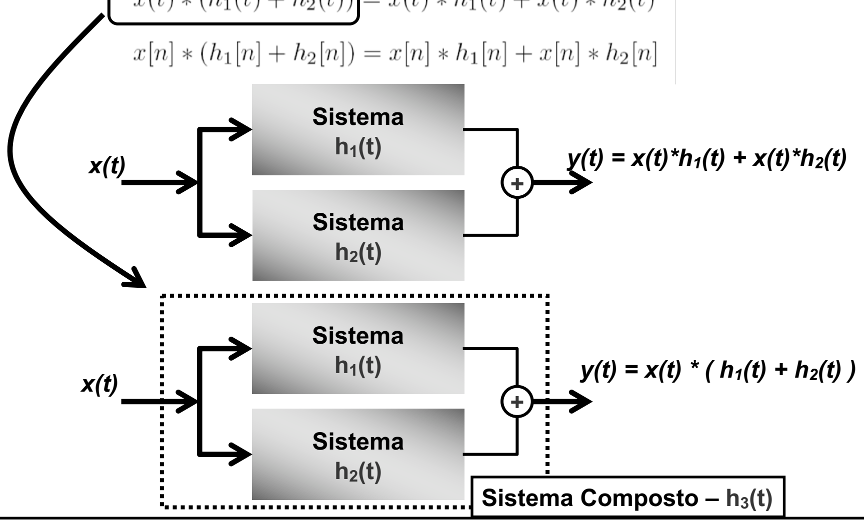


Propriedades da Convolução

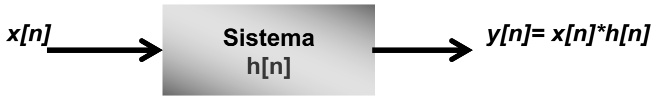
- Propriedade distributiva:

$$\boxed{x(t) * (h_1(t) + h_2(t))} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



Propriedades dos Sistemas LIT



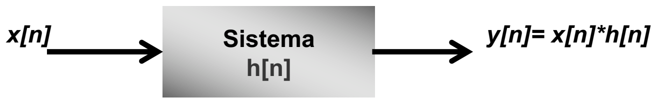
- Sistemas sem memória:
  - Definição:

    Um sistema diz-se sem memória se o seu valor de saída, para um dado valor da variável independente, só depender da entrada nesse instante.
  - Que condição a resposta impulsional deve obedecer para a definição ser válida ?

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

    - A resposta impulsional, h[n], deve ser nula, excepto para n= 0.

Propriedades dos Sistemas LIT



- Sistemas causais:
  - Definição:

    Um sistema diz-se causal se a saída num instante de tempo só depende das entradas presentes e passadas.
  - Que condição a resposta impulsional deve obedecer para a definição ser válida ?

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

    - A resposta impulsional, h[n], deverá ser nula para n < 0.

Propriedades dos Sistemas LIT

– No caso dos sistemas causais, a expressão da convolução pode ser simplificada:

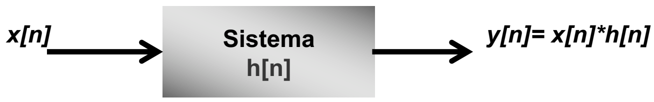
- Caso discreto

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Caso contínuo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Propriedades dos Sistemas LIT



- Sistemas estáveis:
  - Definição:

    Um sistema é estável se todo sinal de entrada limitado produzir um sinal de saída limitado.

$$|x[n]| < B \quad \longrightarrow \quad |y[n]| < B', \quad \text{onde } B,\ B' > 0$$

  - Que condição a resposta impulsional deve obedecer para a definição ser válida ?

Propriedades dos Sistemas LIT

– Consideremos a resposta de um sistema discreto:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

Aplicando o módulo a ambos os lados da igualdade:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \right|$$

A expressão anterior é menor ou igual a soma do produto do módulo dos termos:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]|\,|h[k]|$$

Propriedades dos Sistemas LIT

– Pela definição de estabilidade, teremos:

$$|y[n]| < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B\,|h[k]| = B \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

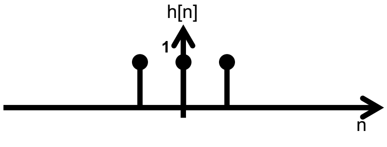
Qual é a condição que a resposta impulsional deve verificar para esta condição ser verdadeira, ou seja para o sistema ser estável ?

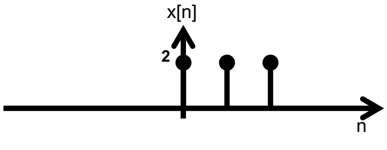
- *A resposta impulsional tem que ser absolutamente somável para a condição ser válida.*

Exemplos

Resposta de um sistema Linear Discreto

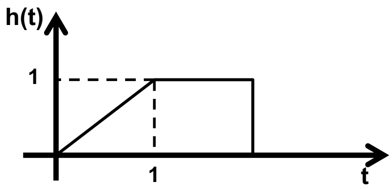
- Calcule a resposta do sistema, cuja resposta impulsional é h[n], ao sinal de entrada x[n]:





Resposta de um Sistema Linear a um sinal contínuo

- Problema:
  - Um sistema LTI tem resposta impulsional h(t). Determine e esboce o sinal de saída quando é aplicado ao sistema o sinal x(t) = 2[u(t-1) – u(t-2)].



Propriedades dos Sistemas LIT

- Determine para cada sistemas que propriedades são satisfeitas:
  - *Sem memória, causalidade, invariância e estabilidade*.