

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Notas Sobre as Aulas Teóricas

João TEIXEIRA, Maria João BORGES

1º Semestre de 2013/14

Índice

1	Análise Complexa	7
1.1	Notas Históricas Sobre Números Complexos	7
1.2	Números Complexos	14
1.2.1	Estrutura Algébrica	14
1.2.2	Inexistência de relação de ordem total em \mathbb{C}	16
1.2.3	Potências de Expoente Inteiro e Polinômios Complexos	17
1.2.4	Estrutura Geométrica, Representação Polar e Fórmula de Euler	18
1.2.5	Raízes Índice n de um Número Complexo	21
1.3	Sucessões e Séries de Números Complexos	23
1.3.1	Sucessões de Números Complexos	23
1.3.2	Séries Numéricas (Reais ou Complexas)	25
1.3.3	Série Geométrica	26
1.3.4	Resultados Gerais de Convergência de Séries Complexas	27
1.3.5	Série Harmônica	28
1.3.6	Séries de Mengoli	28
1.3.7	Convergência Absoluta	28
1.3.8	Séries Reais de Termos Não Negativos	28
1.3.9	Séries de Dirichlet	33
1.3.10	Séries Alternadas	34
1.3.11	Séries de Potências	35
1.4	Funções Complexas de Variável Complexa	38
1.4.1	Definição e Notação:	38
1.4.2	Funções Elementares	39
1.4.3	Limites	44
1.4.4	Continuidade:	46
1.4.5	Derivada Complexa	47
1.4.6	Equações de Cauchy-Riemann	50
1.4.7	Teorema de Cauchy-Riemann	53
1.4.8	Demonstração do Teorema de Cauchy-Riemann	54
1.4.9	Propriedades das Funções Analíticas	56
1.4.10	Condições de Cauchy-Riemann em Coordenadas Polares	58
1.4.11	Noções Básicas da Topologia em \mathbb{C}	59
1.4.12	Funções harmônicas em \mathbb{R}^2	60
1.5	Integração em \mathbb{C}	61
1.5.1	Curvas em \mathbb{C}	61
1.5.2	Integral complexo	63

1.5.3	Teorema de Cauchy e suas consequências	66
1.6	Séries de Potências	79
1.6.1	Convergência Pontual e Convergência Uniforme de Sucessões de Funções	79
1.6.2	Convergência Pontual e Convergência Uniforme de uma Série de funções	80
1.6.3	Convergência Uniforme e Analiticidade de uma Série de Potências	81
1.7	Séries de Taylor	82
1.7.1	Teorema de Taylor	82
1.7.2	Zeros de uma Função Analítica	85
1.8	Séries de Laurent	86
1.8.1	Definição de Série de Laurent	86
1.8.2	Teorema de Laurent	87
1.9	Singularidades, Resíduos e Teorema dos Resíduos	89
1.9.1	Singularidades	89
1.9.2	Classificação das Singularidades Isoladas	90
1.9.3	Resíduos	93
1.9.4	Teorema dos Resíduos	95
1.10	Aplicações do Teorema dos Resíduos ao Cálculo de Integrais Reais	96
1.10.1	Integrais Trigonométricos	96
1.10.2	Integrais Impróprios de 1ª espécie de Funções Racionais	97
1.10.3	Integrais Impróprios de 1ª espécie envolvendo funções Trigonométricas	100
2	Equações Diferenciais Ordinárias	105
2.1	Introdução	105
2.1.1	Notação e Definições	105
2.1.2	Ordem e Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária	106
2.1.3	Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	107
2.2	Equações Escalares de Primeira Ordem	108
2.2.1	Determinação da Solução Geral	108
2.2.2	Equações Lineares	108
2.2.3	Equações Separáveis	110
2.2.4	Equações Exactas	113
2.2.5	Equações Redutíveis a Exactas	116
2.3	Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções	119
2.3.1	Teorema de Peano	120
2.3.2	Exemplo de não unicidade de solução	120
2.3.3	Condição de Lipschitz	122
2.3.4	Teorema de Picard	123
2.3.5	Prolongamento de Solução	132
2.3.6	Comparação de Soluções	134
2.4	Equações Vectoriais de 1ª Ordem (ou Sistemas)	137
2.4.1	Condição de Lipschitz e Teorema de Picard no Caso Vectorial	137
2.4.2	Equações Vectoriais Lineares	138
2.4.3	Equações vectoriais Lineares — Caso Não Homogéneo	143
2.4.4	Equações Vectoriais Lineares de Coeficientes Constantes:	144
2.5	Equações Lineares de Coeficientes Constantes de ordem $n > 1$:	157
2.5.1	Solução Geral da Equação Homogénea	158
2.5.2	Soluções Particulares Através da Fórmula de Variação das Constantes	161

2.5.3	Método dos Coeficientes Indeterminados	163
2.5.4	Exemplos de Aplicação do Método dos Coeficientes Indeterminados	165
2.6	Transformada de Laplace	167
2.6.1	Definição e Propriedades	167
2.6.2	Aplicações da Transformada de Laplace às equações diferenciais	171
2.6.3	Distribuição Delta de Dirac	173
2.6.4	Inversão da Transformada de Laplace	175
3	Introdução às Equações Diferenciais Parciais	179
3.1	Método de Separação de Variáveis	180
3.2	Séries de Fourier	183
3.2.1	Definição e convergência pontual	183
3.2.2	O Núcleo de Dirichlet e as Somas Parciais das Séries de Fourier	187
3.2.3	Série de Fourier de Senos	190
3.2.4	Série de Fourier de Cosenos	192
3.3	Problema de Dirichlet Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional	193
3.3.1	Exemplo 1	193
3.3.2	Exemplo 2	194
3.4	Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional	195
3.5	Problema de Neumann Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional	196
3.6	Unicidade de Solução do Problema de Dirichlet para a Equação do Calor	198
3.7	A Equação das Ondas	199
3.7.1	Problema da Corda Vibrante	199
3.8	Equação de Laplace Bidimensional	202
3.8.1	Problema de Dirichlet Semi-Homogéneo para a Equação de Laplace	203
3.8.2	Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação de Laplace	206

Capítulo 1

Análise Complexa

1.1 Notas Históricas Sobre Números Complexos ¹

A introdução do conceito de número complexo está relacionada com as tentativas de resolução de equações algébricas, que tiveram lugar durante a Idade Média.

No seu compêndio de Álgebra, Al-Khawarizmi (780-850) apresenta a solução de vários tipos de equações quadráticas, que estão de acordo com a “fórmula resolvente” que hoje consta dos programas do ensino secundário, quando restrita a soluções positivas. Sob o califa al-Ma'mun, cujo reinado ocorreu entre os anos 813 e 833, em Bagdad, al-Khawarizmi tornou-se membro da “Casa da Sabedoria” (Dar al-Hikma), uma espécie de academia cujos estudos incidiam sobre a álgebra, geometria e astronomia. Aí foram efectuadas traduções em árabe de obras do período greco-romano, o que salvou algumas delas da destruição.

O compêndio de Al-Khawarizmi é um manual eminentemente prático, em estilo retórico (sem fórmulas) seguindo a tradição babilónia e hindu da resolução de problemas práticos de agrimensura e contabilidade, mas contendo também demonstrações geométricas das soluções dos problemas, inspiradas nos métodos gregos. Al-Khawarizmi enunciou seis casos distintos de equações do segundo e primeiro grau; em notação moderna, temos: (1) $ax^2 = bx$, (2) $ax^2 = c$, (3) $bx = c$, (4) $ax^2 + bx = c$, (5) $ax^2 + c = bx$ e (6) $bx + c = ax^2$. Isto era necessário pois os matemáticos desse tempo não reconheciam coeficientes nulos nem números negativos. Al-Khawarizmi apresentou sistematicamente as soluções de cada um desses problemas algébricos, e que eram conhecidas desde o tempo dos babilónios, mas acrescentou-lhes demonstrações geométricas, inspiradas nos *Elementos* de Euclides. Visto que não considerava números negativos, o seu estudo não levou à introdução de $\sqrt{-1}$, como hoje é feito quando se define esse número como sendo uma das soluções de $x^2 = -1$.

Os métodos da álgebra conhecidos pelos árabes foram difundidos em Itália pela tradução em latim da obra de al-Khawarizmi, feita por Gerard de Cremona (1114-1187). Mas foi o trabalho matemático de Leonardo Pisano (1170-1250), mais conhecido pelo seu pseudónimo, Fibonacci, que mais efectivamente difundiu a notação numérica e a álgebra em uso pelos árabes.

Ao tempo, Pisa era uma importante cidade comercial, que servia de nó a muitas rotas comerciais do Mediterrâneo. Guglielmo Bonacci, o pai de Fibonacci, era um despachante (ou, segundo outros, um oficial aduaneiro) numa cidade hoje situada na Argélia, de nome Béjaïa, anteriormente conhecida por Bugia ou Bougie, e de onde velas de cera eram exportadas para a Europa. Em França, as velas ainda hoje são denominadas *bougies*. Fibonacci foi assim educado no norte de

¹Esta secção é de leitura facultativa.

África, pelos mouros, e mais tarde viajou extensivamente por todo o Mediterrâneo, tendo tido a oportunidade de conhecer muitos mercadores e aprender o sistema de numeração árabe, bem como a álgebra. Tornara-se então óbvio o facto de a aritmética e a álgebra elementar serem bastante relevantes para a contabilidade e as finanças.

Nos três séculos seguintes, o trabalho de Fibonnaci dominou quer os aspectos teóricos da álgebra quer as técnicas de resolução de problemas práticos. Com a ascensão da classe mercantil em Itália, particularmente acentuada nos séculos XIV e XV, o ambiente matemático foi bastante influenciado pela expansão do negócio dos *maestri d'abbaco*. Esta maior ênfase comercial gerou grande procura por livros de matemática simplificados, escritos em linguagem comum e muito diferentes dos longos tratados em latim com demonstrações geométricas, que os precederam. No final do século XV, os *maestri d'abbaco* haviam acrescentado muito pouco aos resultados conhecidos no século XII. Mas a atmosfera cultural mais exigente do Renascimento fez os textos regressar paulatinamente à tradição teórica, representada pelos *Elementos* de Euclides e pelo *Libber Abbaci* de Fibbonaci.

Merece especial destaque o livro *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, de Luca Pacioli (1445-1517) que, por ser o primeiro texto impresso (e não manuscrito, como anteriormente) de matemática, teve larga difusão e tornou-se popular por condensar num volume toda a matemática conhecida até então. Se é certo que o conteúdo matemático da *Summa* acrescentava pouco ao que já se conhecia, a sua apresentação diferia, de forma substancial, da das suas fontes. Como vimos, as obras dos séculos XIII e XIV tinham um estilo puramente retórico, com todo o conteúdo (excepto os números) descrito em linguagem verbal. Porém, a *Summa* de Paccioli apresenta pela primeira vez os cálculos algébricos em forma abreviada, utilizando os percursos das modernas fórmulas matemáticas.

Com isto, a álgebra inicia nova evolução. As equações do terceiro grau tornam-se alvo de grande interesse, particularmente porque o maior rigor permitiu descobrir vários erros de que padeciam os trabalhos dos *maestri d'abbaco*, e que foram transmitidos acriticamente de geração em geração.

Como sabemos, da equação genérica do 3º grau,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

pode-se ser facilmente obter a equação cúbica reduzida,

$$y^3 + py + q = 0,$$

através da mudança de variável $y = x + \frac{a}{3}$. Scipione del Ferro conseguiu, provavelmente em 1504, resolver um dos casos irredutíveis de coeficientes positivos,

$$(a) \quad x^3 + px = q.$$

Admitindo apenas $p, q > 0$, os outros dois casos possíveis da equação reduzida (aparentemente não resolvidos por del Ferro) são:

$$(b) \quad x^3 = px + q,$$

$$(c) \quad x^3 + q = px.$$

A data exacta da descoberta não se conhece, por causas que em seguida se explicam.

Naquela época, em Itália, o mundo dos matemáticos era extremamente competitivo. Os estudantes pagavam directamente ao professor cada disciplina que frequentavam. Assim, caso

ficassem descontentes com o nível ou a qualidade do ensino, podiam suspender sumariamente o pagamento. Um professor que caísse em desgraça podia ser forçado a deixar a escola, ou mesmo a cidade. Para lutar pela sua reputação, assegurando assim a subsistência, os professores participavam em competições públicas em que o vencedor ganhava prestígio e, presumivelmente, um maior número de alunos. O formato destas competições era a de um duelo: o desafiante iniciava a contenda propondo uma lista de problemas a um professor mais famoso, enquanto o desafiado ripostava com uma lista de problemas de dificuldade comparável. Ela declarado vencedor aquele que conseguisse um maior número de respostas correctas. Em tal atmosfera, o guardião de uma nova solução ou técnica de demonstração dispunha de uma vantagem considerável sobre os seus potenciais concorrentes. O segredo era, assim, muito importante, sendo que um matemático nunca sentia grande interesse pela publicação das suas mais importantes descobertas.

Deste modo, a descoberta de del Ferro não foi comunicada à comunidade matemática, pelo que as ideias novas que introduzia (e suscitava) não tiveram impacto imediato. A morte de del Ferro, em 1526, permitiu a um seu discípulo, Fiore, libertar-se da promessa de sigilo que havia contraído. Fiori não perdeu muito tempo e, em 1530, desafiou Tonini da Coi para uma competição. Incapaz de resolver os problemas, Tonini da Coi desafiou por sua vez um seu rival, Niccolò Tartaglia. Nessa ocasião, Tartaglia respondeu que esses problemas eram impossíveis. Mas quando, em 1535, Fiori o desafiou directamente, Tartaglia descobriu sozinho a solução e ganhou mesmo a competição, ao conseguir resolver também a equação reduzida no caso (b).

Uma dificuldade com estas equações, que é visível no caso (b) mas que não aparece no caso (a), é a possibilidade de aparecer a raiz quadrada de um número negativo como resultado intermédio do cálculo de uma solução real positiva. Utilizando notação moderna, a dedução é simples. Substituindo $x = u + v$ em $x^3 = px + q$ obtém-se:

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = p(u + v) + q$$

Fazendo $3uv = p$ na equação acima ² obtém-se o sistema:

$$u^3 + v^3 = q \quad \text{e} \quad u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Deste sistema resulta uma equação quadrática em u^3 , $(u^3)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = qu^3$, de cuja solução se obtém:

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + w} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - w},$$

onde

$$w = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

O denominado *casus irreducibilis* ocorre quando a valor sob o símbolo da raiz quadrada, em w , é negativo.

Cardano soube do feito de Tartaglia e pediu-lhe para partilhar a sua descoberta, por forma a que a mesma pudesse ser publicada, com o devido reconhecimento de autoria, no livro que estava a escrever. Tartaglia, inicialmente relutante em aceitar o pedido de Cardano, ante a insistência acabou por lhe comunicar a descoberta, no ano de 1539. Em 1545, Cardano publicou finalmente o seu tratado, intitulado *Ars Magna*. Com a meticulosidade que evidencia em questões matemáticas,

²A equação original só tem uma incógnita, portanto podemos adicionar esta relação entre as variáveis u e v , que apenas fixa uma delas como função da outra.

Cardano indicou del Ferro como primeiro autor e Tartaglia como tendo descoberto o resultado independentemente, o que deu origem a uma das mais intensas controvérsias sobre a prioridade de uma descoberta.

Em *Ars Magna* (1545), Cardano apresenta as soluções de del Ferro e Tartaglia dos vários casos de equações do 3º grau com coeficientes positivos. Isto torna-se possível, em parte, à custa do estabelecimento de identidades algébricas. Porém, permaneciam os métodos de prova de Euclides. Ora, as considerações geométricas necessárias para obter as demonstrações criavam um problema: que significado se devia dar a um número negativo? O que significava um segmento de comprimento negativo, um quadrado de área negativa, ou um cubo de volume negativo? O que significava a diferença $a - b$, quando $a < b$? Ora Euclides, os árabes, Fibonacci, os *maestri d'abaco*, Pacioli, e Cardano contornaram sempre o problema da mesma forma: para não admitirem coeficientes negativos consideraram vários casos para uma mesma equação (da forma que vimos); pois só assim lhes era possível interpretar as equações do segundo grau como problemas geométricos envolvendo comprimentos de segmentos e áreas de polígonos.

Além disso, os números negativos introduziam uma enorme dificuldade quando apareciam sob o símbolo de raiz quadrada. Cardano estava ciente do problema e evitou discutir o *casus irreducibilis* em *Ars Magna*. Para uma equação do 2º grau, ele explica assim a dificuldade³: “se $ax = x^2 + b$ então:

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}. \quad (1.1)$$

[...] Se não se pode subtrair b de $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ [no caso em que $(a/2)^2 - b < 0$] então o problema é um falso problema, e a solução que foi proposta não se verifica”. Esta impossibilidade apenas significava que a interpretação geométrica da época (requerida pelos métodos de prova disponíveis) invalidava, à partida, os casos que poderiam levar à introdução de $\sqrt{-1}$.

No entanto, no capítulo 37 de *Ars Magna*, Cardano enuncia o problema

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases} \quad (1.2)$$

afirmando depois:

“É evidente que este caso é impossível. No entanto, procederemos como se segue: dividimos 10 em duas partes iguais, cada uma igual a 5. Estas elevamos ao quadrado, o que dá 25. Subtraia 40 do 25 anteriormente obtido, como eu mostrei no capítulo sobre operações [aritméticas] no livro VI, de onde resulta -15, a raiz quadrada do qual adicionada ou subtraída de 5 dá as soluções do problema. Estas são $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$.”

Como o problema (1.2) é equivalente à equação quadrática $x^2 + 40 = 10x$, ele resolveu-o com a fórmula (1.1), o que pode hoje ser considerado como óbvio mas decerto não o era na época. De facto, o uso de propriedades algébricas como meio de demonstração estava ainda na sua infância. Quando calculou $(10/2)^2 - 40 = -15$, ele comentou que “como tal resultado é negativo, o leitor terá que imaginar $\sqrt{-15}$ ” e concluiu admitindo que “isto é verdadeiramente sofisticado, pois com isto pode-se fazer as operações que não se pode fazer no caso de um número negativo e de outros [números]”. Assim, a rejeição das limitações da interpretação geométrica vigente produzia uma nova entidade algébrica cujas propriedades eram bem distintas de tudo o que até então era conhecido, uma entidade cuja interpretação geométrica escapava ao conhecimento da época. Por

³traduzimos as fórmulas em notação moderna

isso, Cardano viu-se na obrigação de escrever “e assim progride a subtileza da aritmética sendo o desígnio da mesma, como se diz, tão refinado quanto inútil”.

Em 1463, o humanista Johannes Müller, mais frequentemente designado pelo pseudónimo Regimontanus, comunicou que havia descoberto “os óptimos livros de Diofanto”, o maior algebrista grego e que viveu em Alexandria provavelmente na segunda metade do século III da nossa era. O livro mais importante que escreveu é a *Aritmética*, onde introduz uma notação simbólica similar à que fora sido desenvolvida até ao século XVI, com símbolos diferentes para uma incógnita, para o quadrado de uma incógnita, para o cubo, etc, e onde resolvia equações e inequações utilizando o que ele designou por fórmulas indeterminadas, e que são de facto propriedades algébricas genéricas, hoje descritas através de fórmulas com quantificadores. Até ao Renascimento, a *Aritmética* de Diofanto fora descoberta e traduzida várias vezes, a primeira das quais realizada por al-Karaji, em Bagdad, no século X. Porém, nunca até então a obra tinha conseguido impôr-se aos métodos geométricos de Euclides, largamente difundidos por al-Khwarizmi e, no Ocidente, por Fibonacci.

Considere-se, por exemplo, o seguinte problema do tomo II desse tratado: “Encontrar três números tais que o quadrado de qualquer um deles menos o seguinte dá um quadrado”. Usando notação moderna para descrever a solução de Diofanto, ele tomou $x + 1$, $2x + 1$, e $4x + 1$ como os três números pretendidos e verificou que satisfaziam as seguintes condições:

$$(x + 1)^2 - (2x + 1) = x^2, \quad (1.3)$$

ou seja, um quadrado, e

$$(2x + 1)^2 - (4x + 1) = 4x^2,$$

também um quadrado, e já agora

$$(4x + 1)^2 - (4x + 1) = 16x^2,$$

igualmente um quadrado. O facto de este problema ter uma infinidade de soluções permitiu a Diofanto enunciar uma propriedade genérica que os números em questão satisfazem. Em notação moderna, a propriedade escreve-se:

$$\text{Para qualquer } x, (x + 1)^2 - (2x + 1) = x^2$$

A sua técnica de demonstração usa os métodos algébricos, típicos da análise matemática moderna; além disso, Diofanto não procurou posteriormente qualquer demonstração geométrica da validade do resultado, como era norma.

Durante a segunda metade da década de 1560, Antonio Maria Pazzi descobriu uma cópia manuscrita da *Aritmética* de Diofanto na Biblioteca do Vaticano e mostrou-a a Rafael Bombelli. Convencidos dos seus méritos, os dois homens iniciaram a tradução da obra, tendo completado o trabalho em cinco dos volumes que a constituem. Esta descoberta provocou uma mudança significativa no ambiente matemático. Numa altura em que a vantagem dos métodos geométricos na solução de questões algébricas tinha sido enfraquecida pelas descobertas das soluções das equações do quarto grau e dos números negativos e complexos como soluções dessas equações, a abordagem não geométrica de Diofanto encontrou finalmente um ambiente favorável à sua difusão. Em 1572, quando Bombelli publica uma nova e mais completa edição o seu longo tratado *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica divisa in tre libri*, os termos de inspiração árabe *cosa* (para incógnita) e *census* (para o seu quadrado) são substituídos pelas traduções *tanto* e *potenza* da terminologia diofantina usada para representar número (arithmos, em grego) e potência (dynamis, em grego). Além disso, Bombelli removeu quase todos os problemas práticos originários

dos *maestri d'abbaco*, substituindo-os pelos problemas abstractos de Diofanto. Na sua introdução ao tomo III, ele anunciou que havia quebrado com o costume usual de enunciar problemas "... sob o desfarce de acções humanas (compras, vendas, trocas directas, câmbios, juros, desfalques, emissão de moeda, ligas, pesos, sociedades, lucro e prejuízo, jogos e outras inúmeras transacções e operações baseadas na vida diária)". Ele pretendia ensinar "a aritmética [álgebra] avançada, à maneira dos antigos". A variação introduzida pela álgebra de Bombelli, o seu tratamento de problemas cuja solução era impossível pelos métodos geométricos constituia, ao mesmo tempo, o reconhecimento de que a solução dos problemas algébricos não requeria justificação geométrica.

Assim, em "l'Algebra" Bombelli segue Cardano mas oferece uma discussão completa do *casus irreducibilis*, introduzindo a notação $\sqrt{-1}$ nas operações com números complexos. Por exemplo, ele considera a equação

$$x^3 = 15x + 4,$$

para a qual a fórmula de Cardano dá a solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Definindo

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1},$$

e elevando ao cubo ambos os membros das igualdades acima, ele conclui facilmente que $a = 2$ e $b = 1$, pelo que a solução

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

apesar de ser real e positiva, só pôde ser obtida por intermédio de números complexos.

René Descartes (1596-1650), que foi essencialmente um filósofo, produziu também importante obra científica. Instado pelos seus amigos a comunicar as suas ideias filosóficas, publicou em 1537 o "*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*". Esta obra tem três apêndices científicos: "*La Dioptrique*", "*Les Météores*" e "*La Géométrie*". Em *La Geometrie*, Descartes introduz ideias que estão na base da moderna geometria analítica. Porém — e infelizmente para a análise complexa — o filósofo considerava os números complexos como uma impossibilidade geométrica. Por exemplo, no método que usou para resolver a equação $x^2 = ax - b^2$, com a e b^2 positivos, Descartes introduz a palavra *imaginário*: "Para qualquer equação podemos imaginar tantas raízes [quanto o seu grau determina], mas em muitos casos não existe a quantidade que corresponde à que imaginámos".

John Wallis (1616-1703), na sua "*Algebra*", fez notar que os números negativos — à existência dos quais se havia também colocado objecções filosóficas durante vários séculos — têm uma interpretação física perfeitamente razoável, cuja base era uma recta com uma marca designando o ponto zero e os números positivos sendo aqueles que estão a uma correspondente distância do zero para a direita, enquanto os negativos estão a uma distância correspondente (em valor absoluto) para a esquerda. Assim surgiu o conceito moderno de recta real.

Abraham de Moivre (1667-1754) nasceu em França mas refugiou-se em Londres, aos dezoito anos de idade, segundo se crê por motivos religiosos. Em 1698, mencionou que Newton descobrira, em 1676, um caso particular da fórmula que, em notação moderna, se escreve:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Abraham de Moivre conhecia este resultado e usou-o varias vezes, mas é devido a Euler o primeiro enunciado explícito do mesmo.

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu em Basileia, na Suíça, mas viveu a maior parte da sua vida em S. Petersburgo e em Berlim. Privou com figuras importantes da história mundial como Frederico II (o Grande) da Prússia e a czarina Catarina (a Grande) da Rússia.

Euler é considerado um dos melhores e mais produtivos matemáticos de todos os tempos. A sua obra tocou tantas áreas distintas que é impossível descrevê-la em poucas linhas. Alguns dos seus maiores sucessos devem-se à facilidade com que ele formulava problemas da vida real utilizando para tal a linguagem da análise matemática. Tal era a atmosfera que se vivia depois do sucesso de Newton e de Leibniz na criação do cálculo diferencial, assunto que Euler depois desenvolveu sem ter deixado de tornar os seus fundamentos consideravelmente mais simples de compreender e de aplicar.

Euler introduziu a notação abreviada $i = \sqrt{-1}$; além disso, muita da notação da análise matemática moderna como, por exemplo, a representação de uma função genérica por $f(x)$, a notação actual das funções trigonométricas, o símbolo \sum usado em somatórios e séries, a ele se deve. Euler visualizava correctamente os números complexos como pontos do plano, da mesma forma que hoje o fazemos, embora não tenha explicitado uma construção dos números complexos baseada nessa ideia. Também introduziu a representação polar, $x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$; descobriu que as soluções da equação $z^n = 1$ são vértices de um polígono regular de n lados; definiu a exponencial complexa a partir de

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Um caso particular desta identidade,

$$e^{i\pi} = -1,$$

foi considerada por Richard P. Feynman a “fórmula mais notável da matemática”, por relacionar de forma simples os três números não racionais, π , e e i , mais conhecidos. O seu estudo da exponencial permitiu-lhe definir logaritmos de números reais negativos, e mostrar que só podiam ser números complexos.

A primeira definição consistente de número complexo é devida ao norueguês Caspar Wessel (1745-1818). Em 1799, Wessel publicou o artigo “On the Analitic Representation of Direction: An Attempt” nas *Memoirs* da Royal Danish Society of Mathematics. Wessel’s paper, escrito em dinamarquês, passou despercebido, e a sua importância só foi reconhecida um século depois, em 1897. A abordagem de Wessel recorre a vectores no plano: ele usou a soma de vectores e definiu o produto de forma equivalente ao que hoje fazemos quando somamos os argumentos e multiplicamos os módulos. Independentemente de Wessel, Jean-Robert Argand (1768-1822), um bibliotecário parisiense que se pensa não ter tido educação formal em matemática, mandou imprimir numa gráfica comum, em 1806, uma brochura anónima com o título “Ensaio sobre a Interpretação Geométrica de Quantidades Imaginárias”. A. Legendre obteve uma cópia deste texto, que o mencionou numa carta a um irmão de Jacques Français; este último publicou, em 1813, um artigo nos *Annales de Mathématiques* com a definição básica dos números complexos. No último parágrafo do seu artigo, Jacques reconheceu a importância da carta de Legendre, e pediu ao autor anónimo que se identificasse. Argand tomou conhecimento disto, e a sua resposta encontra-se no número seguinte da revista.

É porém sabido que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) conhecia a representação geométrica dos números complexos desde 1796 mas não a publicou até 1831. Entretanto William Rowan Hamilton (1805-1865), um importante físico e matemático, cujas descobertas mais importantes

são a mecânica hamiltoniana e os quatérnions, publicou em 1831 um importante trabalho onde os (mais tarde designados por) números complexos são definidos como pares ordenados de números reais, (a, b) . A sua soma foi definida por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e o seu produto por $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$. Isto constitui, com efeito, a definição algébrica moderna dos números complexos. Finalmente, em 1831, Gauss decide-se a publicar um artigo onde introduz a designação **número complexo**, Gauss sumariza assim as dificuldades enfrentadas:

“Se este assunto tem até agora sido tratado de um ponto de vista errado, e logo envolto em mistério e obscurecido, é em grande medida o uso de uma terminologia desadequada que deve ser culpado. Tivessem $+1$, -1 e $\sqrt{-1}$, em vez de sido chamados de unidade positiva, negativa e imaginária (ou, pior ainda, impossível), recebido os nomes, por exemplo, de unidade directa, inversa e lateral, então dificilmente teria existido qualquer contexto para tal obscuridade.”

1.2 Números Complexos

1.2.1 Estrutura Algébrica

Define-se o conjunto dos *números complexos* como sendo

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}, \text{ em que } i^2 = -1\}$$

x é denominado *parte real* do complexo z , $x = \operatorname{Re} z$, e y é denominado *parte imaginária* do complexo z , $y = \operatorname{Im} z$.

Podemos considerar os números reais como sendo os complexos cuja parte imaginária é 0. Por outro lado, os complexos com parte real nula denominam-se *imaginários puros*. De forma simplificada

$$\operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

- **Conjugado de um complexo:**

Se $z = x + iy$, define-se o seu conjugado por

$$\bar{z} = x - iy \quad (\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z} \text{ e } \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z})$$

É óbvio que

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- **Igualdade de complexos:**

Se $z = x + iy$, $w = a + ib \in \mathbb{C}$

$$z = w \Leftrightarrow x = a \text{ e } y = b$$

Exemplo:

1. O 0 (complexo) é o número cujas partes real e imaginária são 0 (real)

$$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$$

2. $z = \bar{z}$ se e só se $\text{Im } z = 0$, ou seja

$$z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$$

• **Soma/Produto de complexos:**

Se $z = x + iy$, $w = a + ib \in \mathbb{C}$

$$z + w = (x + a) + i(y + b) \quad , \quad zw = (xa - yb) + i(xb + ya)$$

O conjunto \mathbb{C} munido destas operações diz-se um *corpo*, isto é

– A soma tem as seguintes propriedades:

- * a soma de quaisquer números complexos é também um número complexo (fechado para a soma)

$$\text{Se } z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow z + w \in \mathbb{C}$$

- * propriedade associativa

$$z + (w + u) = (z + w) + u = z + w + u$$

- * propriedade comutativa

$$z + w = w + z$$

- * existência de elemento neutro, 0

$$z + 0 = z$$

- * existência de inverso aditivo (*simétrico*), representado por $-z$

$$z + (-z) = 0$$

– O produto tem as seguintes propriedades:

- * o produto de quaisquer números complexos é também um número complexo (fechado para o produto)

$$\text{Se } z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow zw \in \mathbb{C}$$

- * propriedade associativa

$$z(wu) = (zw)u = zwu$$

- * propriedade comutativa

$$zw = wz$$

- * existência de elemento neutro, 1

$$1z = z$$

- * existência de elemento absorvente 0

$$0z = 0$$

- * todos os complexos diferentes de 0 têm inverso multiplicativo (*inverso*), representado por $\frac{1}{z}$

$$z\left(\frac{1}{z}\right) = 1$$

– verifica-se a propriedade distributiva do produto relativamente à soma

$$z(w + u) = zw + zu$$

- **Simétrico/Diferença de complexos:** Se $w = a + ib \in \mathbb{C}$

$$-w = -a - ib \quad \text{ou seja} \quad \operatorname{Re}(-w) = -\operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im}(-w) = -\operatorname{Im} w$$

Como consequência da existência de simétrico, podemos definir a subtração de dois complexos como sendo a soma pelo simétrico, se $z = x + iy$, $w = a + ib \in \mathbb{C}$

$$z - w = (x - a) + i(y - b)$$

- **Inverso/Quociente de complexos:**

Se $w = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Como consequência da existência de inverso para todo o complexo não nulo, podemos definir o quociente de dois complexos como sendo o produto pelo inverso. Se $z = x + iy$, $w = a + ib \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{a^2 + b^2}$$

É fácil de mostrar que para $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se tem

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad ; \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

e se além disso $w = a + ib \in \mathbb{C}$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad ; \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \quad ; \quad \overline{w^{-1}} = (\bar{w})^{-1} \quad (w \neq 0)$$

Pelas propriedades de corpo, os números complexos verificam as mesmas propriedades algébricas dos números reais. Em particular a importante **lei do anulamento do produto**:

$$zw = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \quad \vee \quad w = 0$$

1.2.2 Inexistência de relação de ordem total em \mathbb{C}

Uma relação de ordem total (estrita) num conjunto M é uma relação, $<$, que verifica:

- (1) Dados $a, b \in M$ então verifica-se uma e só uma das seguintes proposições: $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$. (**tricotomia**)
- (2) Dados $a, b, c \in M$ tais que $a < b$ e $b < c$ então $a < c$. (**transitividade**)

Se M for um corpo, a relação diz-se compatível com a soma e o produto se

- (3) Dados $a, b, c \in M$, se $a < b$ então $a + c < b + c$.
- (4) Dados $a, b, c \in M$, se $a < b$ e $c > 0$ então que $ac < bc$.

Um corpo munido de uma relação de ordem compatível com a sua soma e produto diz-se um corpo ordenado. Os números racionais e os números reais, com a soma, o produto e a relação de ordem usuais, constituem dois bem conhecidos exemplos de corpos ordenados.

Dados quaisquer $a, b \in M$, diz-se que $a > b$ se $b < a$. A partir das propriedades de corpo e dos axiomas de ordem prova-se que se $a < 0$ então $-a > 0$ (basta usar o axioma 3. com $b = 0$ e $c = -a$), de onde resulta que:

(5) Dados $a, b, c \in M$, se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.

Isto implica, em particular, que $1 > 0$ (e que $-1 < 0$).⁴

A partir destes resultados prova-se então que não existe qualquer relação de ordem em \mathbb{C} que seja compatível com a soma e o produto (isto é, que satisfaça as propriedades 1-4). Pois supondo que existia, então, pela propriedade tricotómica, ou $i > 0$ ou $i < 0$. Mas se $i > 0$ então $i^2 = i * i > i * 0 = 0$ (propriedade (4)) o que contradiz $i^2 = -1 < 0$. Se $i < 0$ então $i^2 = i * i > i * 0 = 0$ (propriedade (5)) o que também contradiz $i^2 = -1 < 0$.

1.2.3 Potências de Expoente Inteiro e Polinómios Complexos

Se $n \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbb{C}$

$$z^n = \begin{cases} \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ vezes}} & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{z^{-n}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Como consequência das propriedades comutativa e associativa do produto, verificam-se as propriedades

$$z^n w^n = (zw)^n, \quad z^n z^p = z^{n+p}$$

Podemos então definir um polinómio como sendo

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

em que a_0, a_1, \dots, a_n são constantes complexas. Mais tarde demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema Fundamental da Álgebra

Se $P(z)$ é um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$ então P admite exactamente n raízes (contando com multiplicidades).

Isto significa, que se P é um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$, existem n complexos z_1, \dots, z_n tal que $P(z_k) = 0$ para todo $k = 1, \dots, n$ e como tal podemos escrever o polinómio na forma factorizada

$$P(z) = a_n(z - z_1)\dots(z - z_n)$$

⁴Note que o que provámos aqui não é auto-evidente: vimos que em qualquer corpo ordenado (e não apenas em \mathbb{R}) se verifica $1 > 0$, etc.

1.2.4 Estrutura Geométrica, Representação Polar e Fórmula de Euler

Cada elemento $x + iy \in \mathbb{C}$, pode ser identificado com o ponto (x, y) do plano \mathbb{R}^2 .

Na figura (1.1) podemos observar uma representação geométrica de \mathbb{C} . Nela, as rectas verticais representam os complexos com a mesma parte real, $\operatorname{Re} z = \alpha$, e as rectas horizontais representam os complexos com a mesma parte imaginária, $\operatorname{Im} z = \beta$. Assim, cada complexo $z = \alpha + i\beta$, é unicamente representado pela intersecção de duas rectas $\operatorname{Re} z = \alpha$ e $\operatorname{Im} z = \beta$.

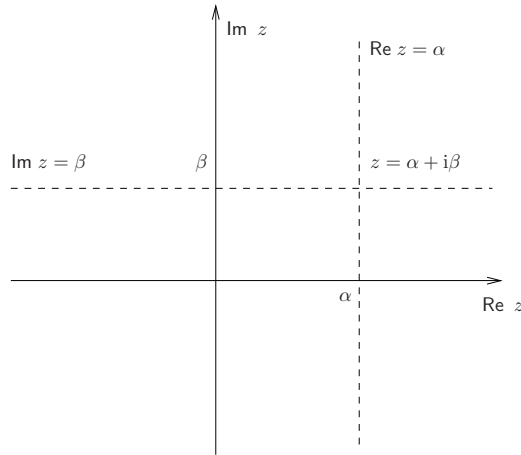


Figura 1.1: O Plano Complexo.

Em particular, $\operatorname{Im} z = 0$ é o *eixo real*, $\operatorname{Re} z = 0$ é o *eixo imaginário* e a sua intersecção é a origem.

Tal como em \mathbb{R}^2 , podemos também usar as coordenadas polares para representar um número complexo. Assim, se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, denomina-se por *módulo* de z , o número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por outro lado se $z \neq 0$, denomina-se por *argumento* de z qualquer número real θ que verifique as igualdades

$$x = |z| \cos \theta \quad \text{e} \quad y = |z| \sin \theta.$$

Isto implica que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x},$$

para $x \neq 0$. Desta forma, o complexo z pode ser escrito na *forma polar* por:

$$z = |z| \left(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z) \right).$$

Por agora apenas para simplificar a escrita, introduzimos a notação:

$$\cos(\arg z) + i \sin(\arg z) = e^{i \arg z}$$

Com esta abreviatura, a representação de um complexo na forma polar reduz-se a $|z|e^{i \arg z}$. Na figura (1.2) encontra-se a representação geométrica de um complexo em coordenadas polares.

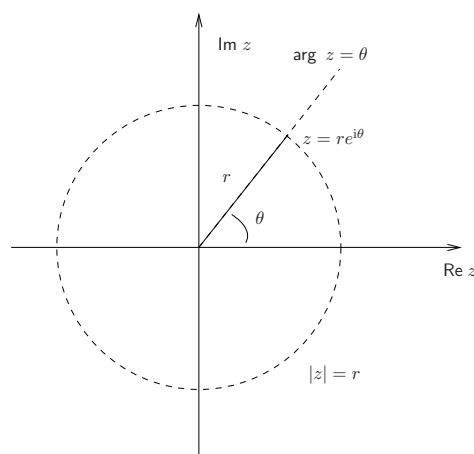


Figura 1.2: Representação geométrica de um complexo.

Nestas coordenadas, as semi-rectas com origem em 0 representam os complexos com o mesmo argumento, $\arg z = \theta$, e as circunferências centradas na origem representam os complexos com o mesmo módulo, $|z| = r$. Assim, cada complexo $z = re^{i\theta}$, é representado pela intersecção de uma semirecta com uma circunferência.

Euler definiu a exponencial de um número imaginário por

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{para qualquer } \theta \in \mathbb{R}.$$

Trata-se da famosa *fórmula de Euler*. Esta definição justifica-se pelo facto de $\cos \theta + i \sin \theta$ ter as propriedades que se esperam de uma função exponencial. Usando apenas trigonometria, pode-se provar facilmente que para quaisquer $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$:

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}$$

$$e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1$$

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k.$$

Recorrendo então à fórmula de Euler, a *forma polar* de um número complexo escreve-se, simplesmente:

$$z = |z| e^{i \arg z}. \quad (1.4)$$

Tomando $z = -1$ em (1.4) obtém-se

$$e^{i\pi} = -1,$$

fórmula também devida a Euler e que relaciona os três números não racionais mais conhecidos da Matemática.

O valor do argumento de um complexo não é único:

se θ verifica a igualdade (1.4) então $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também verifica (1.4).

No entanto é único em cada intervalo de comprimento 2π , isto é, para cada $z \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$ ou a $]\alpha, \alpha + 2\pi]$, tal que θ é o argumento de z .

- θ é o **Argumento Principal** se verifica (1.4) e pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$.
- θ é o **Argumento Mínimo Positivo** se verifica (1.4) e pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.
- Para certo $\alpha \in \mathbb{R}$, θ pertence ao **Ramo α do Argumento** se verifica (1.4) e pertence ao intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi[$.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, verifica-se que:

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{desigualdade triangular})$$

Geometricamente a desigualdade triangular é consequência do facto de que num triângulo o comprimento de qualquer dos lados é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Analiticamente, podemos demonstrá-la assim:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

Como consequência desta desigualdade, tem-se que:

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad |z - w| \geq \left| |z| - |w| \right|.$$

A partir da representação polar e da fórmula de Euler é fácil de obter algumas propriedades adicionais que melhor especificam a estrutura geométrica do conjunto dos números complexos, e que não se podem obter no espaço vectorial \mathbb{R}^2 . Assim, se $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$ então:

$$\bar{z} = |z|e^{-i\theta} \quad , \quad zw = r\rho e^{i(\theta+\varphi)} \quad , \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\varphi)}$$

pelo que

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad , \quad |zw| = |z||w| \quad , \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad , \quad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \quad , \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

1.2.5 Raízes Índice n de um Número Complexo

A partir da expressão do produto de números complexos na forma polar, obtém-se a *fórmula de De Moivre*:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daqui se deduz que qualquer complexo $z = |z|e^{i\theta}$ não nulo admite n raízes índice n distintas dadas por:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Para o caso $n = 2$ (raízes quadradas), a expressão anterior é equivalente a:

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Para $n \geq 3$, as raízes índice n de um número complexo formam um polígono regular de n lados.

É de notar que as propriedades das raízes reais ⁵ não são satisfeitas pelas raízes complexas, mesmo se interpretadas no sentido da igualdade de conjuntos.

Exemplo:

1. Determinar todos os valores de $\sqrt[4]{-1}$ e \sqrt{i} . Por um lado

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} = e^{\frac{i\pi+2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

pelo que as raízes quartas de -1 estão representadas no conjunto

$$R_1 = \left\{ e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}} \right\}.$$

Por outro lado

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{\frac{i\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}, \quad k = 0, 1,$$

e assim as raízes quadradas de i estão representadas no conjunto

$$R_2 = \left\{ e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}} \right\}.$$

É óbvio que $R_2 \subset R_1$ pelo que $\sqrt[4]{-1} \neq \sqrt{i}$. No entanto, a igualdade verifica-se para 2 das raízes: a representada geometricamente pelo argumento mínimo positivo e a sua simétrica.

2. Determinar todos os valores de $\sqrt[4]{(1+i)^2}$ e $\left(\sqrt[4]{1+i}\right)^2$. Por um lado

$$\sqrt[4]{(1+i)^2} = \sqrt[4]{2i} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

⁵Se $x \in \mathbb{R}^+$, n, m e $p \in \mathbb{N}$ então

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x^{mp}}} = \sqrt[n]{x^p} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$$

pelo que os valores possíveis de $\sqrt[4]{(1+i)^2}$ estão representados no conjunto

$$R_1 = \{\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{5i\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{9i\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{13i\pi}{8}}\}.$$

Por outro lado

$$\left(\sqrt[4]{1+i}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\right)^2 = \left(\sqrt[8]{2}e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}}\right)^2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{2} + k\pi}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

e assim os valores possíveis de $\left(\sqrt[4]{1+i}\right)^2$ estão representados no conjunto

$$R_2 = \{\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{9i\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{17i\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{25i\pi}{8}}\} = \{\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{17i\pi}{8}}\}$$

Mais uma vez se conclui que $R_2 \subset R_1$, pelo que $\sqrt[4]{(1+i)^2} \neq \left(\sqrt[4]{1+i}\right)^2$.

3. Determinar todos os valores de $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-i)^2}$ e $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}\right)^2$. Por um lado

$$\sqrt[3]{(\sqrt{3}-i)^2} = \sqrt[3]{\left(2e^{-i\pi/6}\right)^2} = \sqrt[3]{4e^{-i\pi/3}} = \sqrt[3]{4}e^{\frac{-i\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

pelo que os valores possíveis de $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-i)^2}$ estão representados no conjunto

$$R_1 = \{\sqrt[3]{4}e^{\frac{-i\pi}{9}}, \sqrt[3]{4}e^{\frac{5i\pi}{9}}, \sqrt[3]{4}e^{\frac{11i\pi}{9}}\}$$

Por outro lado

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2e^{-i\pi/6}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}e^{\frac{-i\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}}\right)^2 = \sqrt[3]{4}e^{\frac{-i\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2$$

e assim os valores possíveis de $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}\right)^2$ estão representados no conjunto

$$R_2 = \{\sqrt[3]{4}e^{-i\frac{\pi}{9}}, \sqrt[3]{4}e^{11i\frac{\pi}{9}}, \sqrt[3]{4}e^{23i\frac{\pi}{9}}\}$$

Verifica-se neste caso que $R_1 = R_2$. Pelo que neste caso se verifica que $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-i)^2} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}\right)^2$.

De facto podemos enunciar a seguinte propriedade:

Se $z \in \mathbb{C}$, n, p são números naturais primos entre si, então

$$\sqrt[n]{z^p} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^p$$

onde a igualdade deve ser interpretada como igualdade entre conjuntos.

1.3 Sucessões e Séries de Números Complexos

1.3.1 Sucessões de Números Complexos

Uma sucessão de números complexos, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma aplicação

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C},$$

ou seja, uma aplicação (ou função) que a cada número natural, n , faz corresponder um e um só número complexo $z_n = x_n + iy_n$. É costume representar uma sucessão por (z_n) ou ainda, mais abreviadamente, pelo seu *termo geral*, z_n . As sucessões $x_n = \operatorname{Re} z_n$ (a *parte real* de z_n) e $y_n = \operatorname{Im} z_n$ (a *parte imaginária* de z_n) são sucessões reais.

A sucessão z_n diz-se *limitada* se existe um número real positivo M tal que $|z_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Se $z_n = x_n + iy_n$ então

z_n é limitada em \mathbb{C} sse x_n e y_n são limitadas em \mathbb{R} .

Exemplos:

1. A sucessão $z_n = \frac{1}{in}$ é limitada, visto $|z_n| = \frac{1}{n} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. A sucessão $z_n = \frac{(n+2i)}{n}$ é limitada, visto $|z_n| = \sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}} \leq \sqrt{5}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. A sucessão $z_n = e^{in}$ é limitada, visto $|z_n| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Limite de uma sucessão. Sucessão convergente:

A sucessão z_n diz-se *convergente* para $L \in \mathbb{C}$, usando-se a notação

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim z_n \quad \text{ou, equivalentemente} \quad z_n \rightarrow L$$

se e só se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n \geq N \text{ então } |z_n - L| < \epsilon.$$

Esta definição significa que dado qualquer erro $\epsilon > 0$, existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ a partir da qual todos os termos da sucessão (os termos z_{N+1}, z_{N+2}, \dots) são aproximações do limite, L , com erro inferior a ϵ .

Exemplos:

1. A sucessão $z_n = \frac{i^n}{n^3}$ é convergente e o seu limite é 0, visto que para qualquer $\epsilon > 0$

$$\left| \frac{i^n}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3} < \epsilon \quad \text{para } n > \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}}$$

A definição de convergência é válida para $N > 1/\sqrt[3]{\epsilon}$.

2. A sucessão $z_n = \frac{(n+2i)}{n}$ é convergente e o seu limite é 1, visto que para qualquer $\epsilon > 0$

$$\left| \frac{n+2i}{n} - 1 \right| = \left| \frac{2i}{n} \right| = \frac{2}{n} < \epsilon \quad \text{para } n > \frac{2}{\epsilon}$$

A definição de convergência é verificada para $N > 2/\epsilon$.

As propriedades seguintes são consequências quase imediatas das definições anteriores.

Teorema:

Seja $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ uma sucessão convergente, então

1. A sucessão $(z_n)_n$ é limitada.
2. O seu limite é único.
3. Se $(w_n)_n$ é uma sucessão limitada e $\lim_n z_n = 0$ então $\lim_n (z_n w_n) = 0$.

Diz-se que z_n é uma *sucessão de Cauchy* se e só se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n, m \geq N \text{ então } |z_n - z_m| < \epsilon.$$

Esta definição é equivalente a:

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} (z_n - z_m) = 0$$

Prova-se que uma sucessão complexa é convergente se e só se é uma sucessão de Cauchy.

Listamos em seguida algumas propriedades dos limites de sucessões complexas convergentes, que nos permitem utilizar a 'álgebra de limites conhecida das sucessões de termos reais convergentes.

Propriedades:

Se (z_n) e (w_n) são sucessões complexas convergentes, então

1. Se $z_n = x_n + iy_n$ e $L = A + iB$ então

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Leftrightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ e } B = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

2. (\bar{z}_n) é convergente e $\lim \bar{z}_n = \overline{\lim z_n}$;
3. A sucessão real $(|z_n|)$ é convergente e $\lim |z_n| = |\lim z_n|$.
4. $(z_n + w_n)$ é convergente e $\lim(z_n + w_n) = \lim z_n + \lim w_n$;
5. $(z_n - w_n)$ é convergente e $\lim(z_n - w_n) = \lim z_n - \lim w_n$;
6. $(z_n w_n)$ é convergente e $\lim(z_n w_n) = \lim z_n \lim w_n$;
7. se adicionalmente $\lim w_n \neq 0$, (z_n/w_n) é convergente e $\lim(z_n/w_n) = \lim z_n / \lim w_n$.

Limite infinito

Se $(z_n)_n$ é uma sucessão complexa, definimos

$$\lim_n z_n = \infty \quad \text{sse} \quad \forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \Rightarrow |z_n| > M$$

Não entraremos em detalhe acerca do significado de limite infinito em \mathbb{C} , no entanto é fácil de demonstrar que $\lim_n z_n = \infty$ é equivalente a cada uma das afirmações:

- $\lim_n |z_n| = \infty$
- $\lim_n \frac{1}{z_n} = 0$

Observa-se que se pelo menos uma das sucessões $(\operatorname{Re} z_n)$ ou $(\operatorname{Im} z_n)$ diverge para infinito, então a sucessão (z_n) terá também limite infinito. Porém, o recíproco pode não se verificar.

Tal como no caso real, a álgebra de limites não é aplicável quando pelo menos uma das sucessões converge para infinito.

Exemplo:

Ex. 1 As sucessões $(ne^{i\pi n})$ e $(n + \frac{i}{n})$ convergem para ∞ , tendo em conta que:

$$\lim_n |ne^{i\pi n}| = \lim_n n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_n \operatorname{Re}(n + \frac{i}{n}) = \lim_n n = \infty$$

Ex. 2 Progressão Geométrica de razão z

Para $z \in \mathbb{C}$ fixo, define-se a progressão geométrica de razão z como sendo a sucessão cujo termo geral é z^n ; ou seja, o seu conjunto de termos é:

$$\{z, z^2, z^3, \dots, z^n, \dots\}$$

Escrevendo os termos da progressão na forma trigonométrica, $z^n = |z|^n e^{in \arg z}$, pode-se concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |z| < 1 \\ \infty & \text{se } |z| > 1 \\ 1 & \text{se } z = 1 \end{cases}$$

Se $|z| = 1$ e $z \neq 1$, então z^n não tem limite (finito ou infinito).

1.3.2 Séries Numéricas (Reais ou Complexas)

Dada uma sucessão de números complexos, z_n , define-se formalmente *série de números complexos* ou *série numérica* como a “soma”:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (1.5)$$

Os números z_1, z_2, \dots , denominam-se *termos* da série (1.5); a sucessão $z_n \in \mathbb{C}$ diz-se o *termo geral* (ou termo de ordem n) da série (1.5). Note-se que (1.5) designa uma “soma de uma infinidade de termos”. Através da definição de limite de sucessões, introduzida na secção anterior, é possível dar um significado concreto a este tipo de “somadas”.

Define-se, associada à série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, a sucessão das somas parciais $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$, por

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_2 &= z_1 + z_2 \\ S_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ &\vdots \\ S_N &= z_1 + z_2 + \dots + z_N = \sum_{n=1}^N z_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note-se que, no termo geral escrito na forma $S_N = \sum_{n=1}^N z_n$, n é variável muda.

Definição: (Natureza da série)

- Se a sucessão das somas parciais S_N é convergente em \mathbb{C} , isto é, se existe $S \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$$

a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diz-se *convergente* e

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

S é denominado por a *soma da série*.

- Se a sucessão das somas parciais S_N não converge em \mathbb{C} (S_N não tem limite ou tem limite infinito) a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diz-se *divergente*.

Proposição

A natureza de uma série não depende de um segmento inicial de termos, no sentido de que:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}_0, \text{ as séries } \sum_{n=p}^{\infty} z_n \text{ e } \sum_{n=q}^{\infty} z_n \text{ têm a mesma natureza.}$$

1.3.3 Série Geométrica

Para cada $z \in \mathbb{C}$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ denomina-se *série geométrica de razão z* . Para $z = 1$, a série diverge. Para $z \neq 1$, a correspondente sucessão das somas parciais é dada por:

$$S_N = \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}.$$

Como $z^{N+1} \rightarrow 0$ para $|z| < 1$ e z^{N+1} não converge em \mathbb{C} quando $|z| \geq 1$ (com $z \neq 1$), conclui-se que:

- Se $|z| < 1$ a série geométrica de razão z é convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \left(\sum_{n=p}^{\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z} \right)$$

- Se $|z| \geq 1$ a série geométrica de razão z é divergente.

1.3.4 Resultados Gerais de Convergência de Séries Complexas

- *Condição necessária à convergência de uma série*

Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é convergente então $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

- Como consequência directa desta propriedade (tomando o contra-recíproco), tem-se:

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ então a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é divergente.

Chama-se a atenção para o facto de que $z_n \rightarrow 0$ não implica que a série de termo geral z_n seja convergente.

- A série complexa $\sum_n z_n$ é convergente sse as séries reais $\sum_n \operatorname{Re} z_n$ e $\sum_n \operatorname{Im} z_n$ são ambas convergentes e

$$\sum_n z_n = \sum_n \operatorname{Re} z_n + i \sum_n \operatorname{Im} z_n.$$

- *Linearidade.* Se as séries $\sum_n z_n$ e $\sum_n w_n$ são convergentes para as somas S e T , respectivamente, então

– a série $\sum_n (z_n + w_n)$ é convergente e a sua soma é $S + T$.

– para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, a série $\sum_n (\lambda z_n)$ é convergente e a sua soma é λS .

- *Critério de Cauchy.*

A série $\sum_n z_n$ é convergente
sse

a sucessão das somas parciais associada é uma sucessão de Cauchy
sse

para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:
para todos os $n, m > N$, $|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_m| < \epsilon$.

1.3.5 Série Harmônica

A série harmônica é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Note-se que a sucessão das somas parciais desta série verifica:

$$S_{2N} - S_N = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} = N \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

para qualquer $N \in \mathbb{N}$. Em consequência, (S_N) não satisfaz o critério de Cauchy (basta tomar $\epsilon < \frac{1}{2}$). Por isso, a série harmônica é divergente.

1.3.6 Séries de Mengoli

Uma série de Mengoli (ou série telescópica) é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{n+1})$$

em que $z_n \in \mathbb{C}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. A sua sucessão das somas parciais reduz-se a

$$S_N = z_1 - z_{N+1},$$

pelo que a série converge sse existe $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Nesse caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{n+1}) = z_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

1.3.7 Convergência Absoluta

A série $\sum z_n$ diz-se *absolutamente convergente* se a série real $\sum |z_n|$ convergir. Costuma-se designar $\sum |z_n|$ como a série dos módulos (de $\sum z_n$).

A série $\sum z_n$ diz-se *simplesmente convergente* se for convergente e a série dos seus módulos for divergente i.e., se a série $\sum z_n$ convergir e a série $\sum |z_n|$ divergir. A partir do critério de Cauchy, deduz-se a:

Proposição: (critério da convergência absoluta)

Toda a série absolutamente convergente é convergente.

1.3.8 Séries Reais de Termos Não Negativos

Considere-se u_n uma sucessão de termos reais não negativos. Sendo assim, a sucessão das somas parciais associada à série de termos geral u_n , (S_N) é monótona (crescente) e minorada ($S_1 \leq S_N$ para qualquer $N \in \mathbb{N}$). Conclui-se então que neste caso

$$\sum u_n \text{ é convergente sse } (S_N) \text{ é majorada.}$$

Critérios de Convergência• **Critério geral de comparação**

Se u_n e v_n são sucessões reais tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $0 \leq u_n \leq v_n$, então:

- a) Se $\sum v_n$ é convergente também $\sum u_n$ é convergente.
 b) Se $\sum u_n$ é divergente também $\sum v_n$ é divergente.

Demonstração:

- a) Se $S_N = u_1 + u_2 + \dots + u_N$ e $T_N = v_1 + v_2 + \dots + v_N$ então como $\sum v_n$ é convergente, T_N é convergente, logo limitada. Como, para todo o $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq S_N \leq T_N$, S_N também é limitada; como também é monótona, logo é convergente.
 b) Caso contrário (isto é, se $\sum v_n$ fosse convergente), então pela alínea a) $\sum u_n$ seria convergente, o que contradiz a hipótese. Logo, $\sum v_n$ tem que ser divergente. \square

Nota: a conclusão do critério geral de comparação permanece válida se $0 \leq u_n \leq v_n$ se verifica apenas a partir de certa ordem pois, como vimos, a natureza das séries não depende de um segmento inicial de termos.

Exemplo:

Considere-se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$. Dado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $\log n < n$, teremos que, para $n > 1$

$$\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

pelo primeiro critério geral de comparação a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ será também divergente.

• **Corolário do Critério Geral de Comparação**

Se u_n e v_n são sucessões reais e $a < b$ são números reais positivos tais que

$$0 \leq av_n \leq u_n \leq bv_n \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N},$$

então $\sum u_n$ e $\sum v_n$ têm a mesma natureza.

Nota: este resultado é consequência simples do critério geral de comparação (porquê?).

• **2º Critério de Comparação**

Sejam u_n e v_n sucessões reais de termos não negativos tais que $\lim \frac{u_n}{v_n} = l$. Então, se $l \in]0, +\infty[$ conclui-se que as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ têm a mesma natureza.

Demonstração: Considere-se $\epsilon < l$, ou seja, tal que $l - \epsilon > 0$. Pela definição de limite, existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão u_n/v_n verificam

$$l - \epsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \epsilon,$$

pelo que (como $v_n \geq 0$):

$$0 \leq (l - \epsilon)v_n < u_n < (l + \epsilon)v_n.$$

Usando agora o corolário do critério geral de comparação, obtém-se o resultado. \square

Exemplo:

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{n}}$. Dado que

$$\lim_n \frac{\frac{2n+1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge}$$

pelo segundo critério geral de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{n}}$ é divergente.

• **Critério de D'Alembert**

Seja u_n uma sucessão real de termos positivos tal que existe

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Então:

- a) Se $l < 1$ a série $\sum_n u_n$ é convergente.
- b) Se $l > 1$ a série $\sum_n u_n$ é divergente.

Nota: No caso $l = 1$, o critério de D'Alembert é **inconclusivo**.

Demonstração: A ideia genérica desta prova é estabelecer uma comparação da série $\sum u_n$ com uma série geométrica de razão, r , apropriada. Para tal:

- a) Dado $\epsilon > 0$ tão pequeno que $l + \epsilon < 1$ (como $l < 1$, basta tomar $\epsilon < 1 - l$), a definição de limite da sucessão u_{n+1}/u_n garante-nos que a partir de certa ordem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \epsilon < 1.$$

Seja $r = l + \epsilon$. Então:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \epsilon = r = \frac{r^{n+1}}{r^n}$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade anterior por $\frac{u_n}{r^{n+1}}$ obtém-se:

$$\frac{u_{n+1}}{r^{n+1}} < \frac{u_n}{r^n}.$$

Assim, u_n/r^n é decrescente, logo majorada por um certo $M > 0$:

$$\frac{u_n}{r^n} \leq M \quad \Rightarrow \quad u_n \leq Mr^n$$

Além disso, $u_n > 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Do critério geral de comparação, como $\sum Mr^n$ é convergente ($r < 1$), então $\sum u_n$ também é uma série convergente.

- b) Dado $\epsilon > 0$ tão pequeno que $l - \epsilon > 1$ (como $l > 1$, basta tomar $\epsilon < l - 1$), a definição de limite da sucessão u_{n+1}/u_n garante-nos que a partir de certa ordem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \epsilon > 1$$

Seja $r = l - \epsilon$. Procedendo de forma análoga à demonstração de (a) (exercício), resulta que, para algum $L > 0$:

$$0 < Lr^n < u_n$$

Do critério geral de comparação, como $\sum Lr^n$ é divergente ($r > 1$), então $\sum u_n$ é também divergente. \square

Exemplo:

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$. Sendo $u_n = \frac{n^2}{e^{n^3}}$ tem-se que

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^2}{e^{(n+1)^3}}}{\frac{n^2}{e^{n^3}}} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 e^{n^3 - (n+1)^3} = 0 < 1$$

pelo que, por aplicação do Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$ é convergente.

• Critério da Raiz

Seja u_n sucessão real de termos não negativos, tal que existe

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$$

Então

- se $l < 1$ a série $\sum_n u_n$ é convergente.
- se $l > 1$ a série $\sum_n u_n$ é divergente.

Notas:

- No caso $l = 1$, o critério da raiz é **inconclusivo**.
- Se quiser justificar este resultado, use a ideia da prova do critério de D'Alembert. Os detalhes são um pouco mais simples, neste caso.

Exemplo:

Considere-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+(-1)^n}$. Começamos por observar que o Critério de D'Alembert não é aplicável; pois tomando $u_n = 2^{n+(-1)^n}$, então:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ par,} \\ \frac{2^{n+2}}{2^{n-1}} = 8 & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Pode-se, por isso, concluir que $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$ não existe. No entanto

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n 2^{1+\frac{(-1)^n}{n}} = 2 > 1$$

pelo que, por aplicação do critério da raiz, a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+(-1)^n}$ é divergente.

• Critério da Raiz de Cauchy

Seja u_n uma sucessão real de termos não negativos e defina-se

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} = l \quad (\text{finito ou infinito}).$$

Então

- a) se $l < 1$ a série $\sum_n u_n$ é convergente;
- b) se $l > 1$ a série $\sum_n u_n$ é divergente;

Notas:

- Define-se $\limsup \sqrt[n]{u_n}$ como o maior dos sublimites de u_n . Um sublimite de u_n é um limite de uma subsucessão de u_n .
- Este resultado generaliza o critério da raiz às situações onde o $\lim \sqrt[n]{u_n}$ não existe.
- No caso $l = 1$, o critério da raiz é **inconclusivo**.

Exemplo:

Considere-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(3+(-1)^n)^n}$. Começamos por observar que o critério da raiz não é aplicável (e, consequentemente, o critério de D'Alembert também não) visto que, com $u_n = \frac{5}{(3+(-1)^n)^n}$, se tem

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{4} \sqrt[n]{5} & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{1}{2} \sqrt[n]{5} & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim sendo, a subsucessão dos termos pares de $\sqrt[n]{u_n}$ converge para $\frac{1}{4}$, mas a subsucessão dos termos ímpares de $\sqrt[n]{u_n}$ converge para $\frac{1}{2}$; desta forma, o limite de $\sqrt[n]{u_n}$ não existe. No entanto, o conjunto dos sublimites da sucessão $\sqrt[n]{u_n}$ é

$$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$$

e assim

$$\limsup_n \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$$

pelo que, por aplicação do Critério da raiz de Cauchy, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(3+(-1)^n)^n}$ é convergente.

• **CrITÉrio do Integral**

Seja $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente. Se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se tem $f(n) = u_n$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ é convergente sse existe (em } \mathbb{R} \text{) o } \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x) dx.$$

Demonstração: Seja S_N a sucessão das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Atendendo a que f é decrescente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se $n \leq x \leq n+1$ então $u_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = u_n$, o que implica que

$$\underbrace{u_{n+1}}_{= \int_n^{n+1} f(n+1) dx} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \underbrace{u_n}_{= \int_n^{n+1} f(n) dx}.$$

Somando as desigualdades anteriores para $n = 1, 2, \dots, N-1$, obtém-se:

$$S_N - u_1 = \sum_{n=2}^N u_n \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} u_n = S_{N-1}, \quad (1.6)$$

Note que, como f é uma função positiva, a sucessão $T_N = \int_1^N f(x) dx$ é crescente. Das desigualdades (1.6) conclui-se que T_N é convergente sse S_N é convergente, o que é equivalente à conclusão que queríamos obter. \square

1.3.9 Séries de Dirichlet

Uma série de Dirichlet é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha \leq 1$, então $0 < n^\alpha \leq n$, pelo que

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Pelo critério geral de comparação, como a série harmónica, $\sum \frac{1}{n}$, diverge, a série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ também diverge.

No caso $\alpha > 1$, seja $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$. Como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N x^{-\alpha} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^N = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

pelo critério do integral, a série converge.

Podemos então concluir que:

- A série de Dirichlet **converge** sse $\alpha > 1$.
- A série de Dirichet **diverge** sse $\alpha \leq 1$.

1.3.10 Séries Alternadas

Uma série de termos reais diz-se *alternada* se os seus termos forem alternadamente positivos e negativos. Se assumirmos que o primeiro termo de uma série alternada é negativo (respectivamente positivo), então a série pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (1.7)$$

(resp. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$), em que $a_n > 0$. Basta então estudar (1.7).

Crítério de Leibnitz: Se (u_n) é uma sucessão de termos reais positivos, decrescente e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ é convergente.

Exemplo: *Determinação do erro da aproximação da soma de uma série alternada por uma soma parcial.*

Se uma série alternada converge obedecendo às condições do critério de Leibniz então, para $N + 1$ par, $(-1)^{N+1} a_{N+1} > 0$, e então:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n \right| &= a_{N+1} - \underbrace{(a_{N+2} - a_{N+3})}_{>0} - \underbrace{(a_{N+4} - a_{N+5})}_{>0} - \cdots \\ &\quad - \underbrace{(a_{N+k} - a_{N+k+1})}_{>0} - \cdots < a_{N+1} \end{aligned}$$

Se $N + 1$ é ímpar, deduzimos do caso anterior que:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} a_n \right| < a_{N+1}$$

Assim, o erro que se comete ao aproximar a série (1.7) pela sua sucessão das somas parciais, $-a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^N a_N$, é menor que a_{N+1} .

Nota: a estimativa anterior só foi provada para séries que satisfazem as condições do critério de Leibniz. No caso geral não é possível controlar o erro de aproximação da soma de uma série da forma acima descrita.

A série harmónica alternada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

é um exemplo de uma série que converge mais não converge absolutamente. Trata-se do exemplo mais simples de uma série *simplesmente convergente*.

1.3.11 Séries de Potências

Para $z_0 \in \mathbb{C}$ e a_n uma sucessão de termos complexos define-se a *série de potências de $z - z_0$* (ou série de potências centrada em z_0) por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots \quad (1.8)$$

Os termos da sucessão a_n denominam-se *coeficientes* da série e z_0 é o seu centro. Para cada $z \in \mathbb{C}$ a série poderá ou não convergir, pelo que será adequado definir o conjunto:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ converge} \right\},$$

Este conjunto é denominado *região de convergência* de (1.8).

Pela mudança de variável $w = z - z_0$, podemos reduzir o estudo da natureza de (1.8) ao caso em que $z_0 = 0$, que é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

Qual é a forma do domínio de convergência de uma série de potências? O seguinte resultado permite obter uma resposta para esta questão.

Teorema de Abel

Considere-se a série de potências centrada em z_0 e de coeficientes c_n . Então:

- Se existe $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n$ converge, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge absolutamente em todos os valores de z para os quais $|z - z_0| < |\xi - z_0|$.
- Se existe $\bar{\xi} \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\bar{\xi} - z_0)^n$ diverge, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ diverge em todos os valores de z para os quais $|z - z_0| > |\bar{\xi} - z_0|$.

Demonstração: como vimos, basta provar o resultado para caso $z_0 = 0$, isto é, para as séries do tipo $\sum a_n z^n$.

- Supondo que existe um ponto $z = \xi$ onde a série $\sum a_n z^n$ converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$. A existência deste limite implica, em particular, que $a_n \xi^n$ é uma sucessão limitada, ou seja:

$$\text{existe } M > 0 \text{ tal que } |a_n \xi^n| \leq M \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando qualquer valor de z que verifique $|z| < |\xi|$, define-se $r = \frac{|z|}{|\xi|}$. Assim, $0 < r < 1$.

Desta forma:

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n = |a_n| |\xi|^n \frac{|z|^n}{|\xi|^n} = |a_n \xi^n| \left(\frac{|z|}{|\xi|} \right)^n \leq M r^n \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Note que a série $\sum M r^n = M \sum r^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $r < 1$. Pelo critério geral de comparação, a série $\sum |a_n z^n|$ também converge; logo $\sum a_n z^n$ converge absolutamente para $|z| < |\xi|$.

- b) Supondo que existe $z = \bar{\xi}$ onde a série $\sum a_n z^n$ diverge, então a série terá que divergir para $|z| > |\bar{\xi}|$. Pois, caso contrário — se existisse \hat{z} , com $|\hat{z}| > |\bar{\xi}|$, onde a série convergisse — como $|\bar{\xi}| < |\hat{z}|$, pela alínea (a) a série $\sum a_n z^n$ convergiria **absolutamente** em $z = \bar{\xi}$, o que contradiz a hipótese. \square

O *raio de convergência*, R , de uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ define-se por:

$$R = \sup \left\{ \rho \in [0, +\infty[: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ converge em } |z - z_0| < \rho \right\}$$

R está bem definido, pois o conjunto acima nunca é vazio e $R \geq 0$. De notar que esse conjunto pode ser não limitado; nesse caso, $R = \infty$.

Utilizando o teorema de Abel, conclui-se facilmente o seguinte (porquê?):

Teorema: (região de convergência de uma série de potências)

Considere-se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ e seja R o seu raio de convergência. Então:

- a) A série converge absolutamente no disco $\{z : |z - z_0| < R\}$.
- b) A série diverge na região $\{z : |z - z_0| > R\}$.

O *disco de convergência* da série de potências é definido como sendo o interior da sua região de convergência, ou seja, a região dada por $|z - z_0| < R$.

Apoiando-nos nos critérios de convergência das séries de termos não negativos e no teorema de Abel, podemos obter fórmulas para o cálculo do raio de convergência de (1.8). Assim:

O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ é dado por:

- $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, caso este limite exista.
- $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, caso este limite exista.
- $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (**Teorema de Cauchy-Hadamard**).

Para mostrar que, caso o limite exista, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, usamos o critério de D'Alembert. Mais uma vez, estudaremos apenas o caso $z_0 = 0$. Assim:

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

Supondo que existe $R \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, então:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = \frac{|z|}{R}.$$

Para se ter $L < 1$ — caso em que, pelo critério de D'Alembert a série de potências é absolutamente convergente — então é necessário que $|z| < R$. Tomando $L > 1$ conclui-se que para $|z| > R$ a série não converge absolutamente.

Além disso, a série diverge sempre para $|z| > R$. Caso contrário, isto é, se convergisse para certo \hat{z} , com $|\hat{z}| > R$, então pelo teorema de Abel convergiria absolutamente em qualquer z tal que $R < |z| < |\hat{z}|$, o que contradiz a conclusão do parágrafo anterior!

Conclui-se que o raio de convergência da série $\sum a_n z^n$ é R . Por mudança de variável $w = z - z_0$, obtém-se o resultado para qualquer série de potências de $z - z_0$.

Note-se que, em teoria, a fórmula do Teorema de Cauchy-Hadamard é de aplicabilidade geral. Pode, contudo, não ser fácil de utilizar na prática; basta pensar em exemplos onde os sublimites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ são difíceis de determinar.

Exemplos:

1. Considere-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 2i)^n}{n(5i)^n}$. Por ser uma série de potências de centro em $2i$ e coeficientes $a_n = \frac{1}{n(5i)^n}$, a sua região de convergência será

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < R\}$$

em que R é dado por (porque o limite existe)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{n} = 5$$

ou seja a região de convergência é $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < 5\}$.

2. Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (in)^n z^n$. Por ser uma série de potências de centro em 0 e coeficientes $a_n = (in)^n$, a sua região de convergência será

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

em que R é dado por (porque o limite existe)

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Conclui-se que a série converge apenas em 0 , ou seja a sua região de convergência é $\{0\}$.

3. Considere-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} n(-i)^n(z+i)^{2n}$. Mais uma vez a sua região de convergência será

$$\{z \in \mathbb{C} : |z+i| < R\}$$

dado que o centro da série é $-i$. Visto que no desenvolvimento só ocorrem potências de expoente par, os coeficientes da série são dados por

$$a_n = \begin{cases} n(-i)^n & \text{para } n \text{ par} \\ 0 & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

e é fácil de perceber que não existem $\lim_n |a_n/a_{n+1}|$ e $\lim_n 1/\sqrt[n]{|a_n|}$. Então

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sup\{\lim_n \sqrt[n]{n}, \lim_n 0\}} = 1$$

Conclui-se que a região é $\{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 1\}$. Em alternativa, poderemos considerar

$w = -i(z+i)^2$ e estudar a região de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} nw^n$. Dado que

$$\lim_n \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

podemos concluir que esta série converge em $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, o que implicará que a série inicial é convergente para todos os valores de z tais que

$$|-i(z+i)^2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z+i| < 1.$$

1.4 Funções Complexas de Variável Complexa

1.4.1 Definição e Notação:

$f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diz-se uma função complexa de variável complexa se a todo $z \in D$ fizer corresponder um e um só $w = f(z) \in \mathbb{C}$. Nesse caso

$$D \ni z = x + yi \quad \mapsto \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C}$$

Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto em \mathbb{R}^2 que “corresponde geometricamente” a $D \subset \mathbb{C}$, isto é:

$$(x, y) \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad x + iy \in D$$

As funções $u : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são denominadas respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginária* de f . O conjunto D é denominado o *domínio* de f . Quando nada se diz acerca de D , subentende-se que:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \text{ está bem definido (em } \mathbb{C})\}$$

e corresponde, em \mathbb{R}^2 , a:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) \text{ e } v(x, y) \text{ estão bem definidos (em } \mathbb{R})\}$$

(\mathcal{D} é a intersecção dos domínios de u e v).

Exemplos:

1. Consideremos a função $f(z) = z^2 + 3$. Então

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 + 3 = x^2 + 2xyi - y^2 + 3 = x^2 - y^2 + 3 + 2xyi$$

Pelo que

$$\operatorname{Re} f = u(x, y) = x^2 - y^2 + 3 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = v(x, y) = 2xy$$

É óbvio que o domínio de f é \mathbb{C} .

2. A função $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, tem por domínio o conjunto

$$D = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

3. A função definida por $f(z) = z^2 - 4z + \operatorname{Re} z$ tem domínio \mathbb{C} e

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 - 4(x + yi) + x = (x^2 - y^2 - 3x) + (2xy - 4y)i$$

pelo que

$$\operatorname{Re} f = u(x, y) = x^2 - y^2 - 3x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = v(x, y) = 2xy - 4y.$$

4. Sendo $n \in \mathbb{N}$, considere-se $f(z) = \sqrt[n]{z}$ escolhendo o valor da raiz que verifica $\sqrt[n]{1} = 1$. É de observar que só quando se escolhe uma das n raízes índice n é que $\sqrt[n]{z}$ é função. Assim

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z}{n}}$$

pelo que o seu domínio é \mathbb{C} e

$$\operatorname{Re} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cos \frac{\arg z}{n} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \sin \frac{\arg z}{n}$$

1.4.2 Funções Elementares

Funções Polinomiais e Racionais

Uma *função polinomial* é definida através de um polinómio complexo:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

onde n é o grau do polinómio e $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ os seus coeficientes. O domínio das funções polinomiais é \mathbb{C} . Tal como no caso real, se z_0 for uma raiz de $P(z)$ então existe $Q(z)$ (de grau $n - 1$) tal que a factorização $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ é válida.

Uma *função racional* é dada por

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinómios. O domínio de $f(z)$ é

$$D = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$$

Admitindo que $P(z)$ e $Q(z)$ não têm raízes comuns, então se z_0 é uma raiz de $Q(z)$ resulta que $|f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \rightarrow \infty$ quando $|z - z_0| \rightarrow 0$. Este é o exemplo mais simples de uma *singularidade isolada* de uma função complexa, conforme veremos mais tarde.

Exponencial Complexa

Para $z \in \mathbb{C}$, define-se *exponencial complexa* por

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} \left(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z) \right)$$

isto é, se $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

A exponencial complexa é uma extensão da exponencial real ao plano complexo. O domínio da exponencial complexa é \mathbb{C} , e

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \operatorname{sen} y, \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z$$

Desta forma podemos observar que as imagens por $f(z) = e^z$ de complexos com parte real constante (rectas verticais) são complexos com módulo constante (circunferências centradas na origem) e a imagem de complexos com parte imaginária constante (rectas horizontais) são complexos com argumento constante (semi-rectas com origem em 0) — ver Figura 1.3.

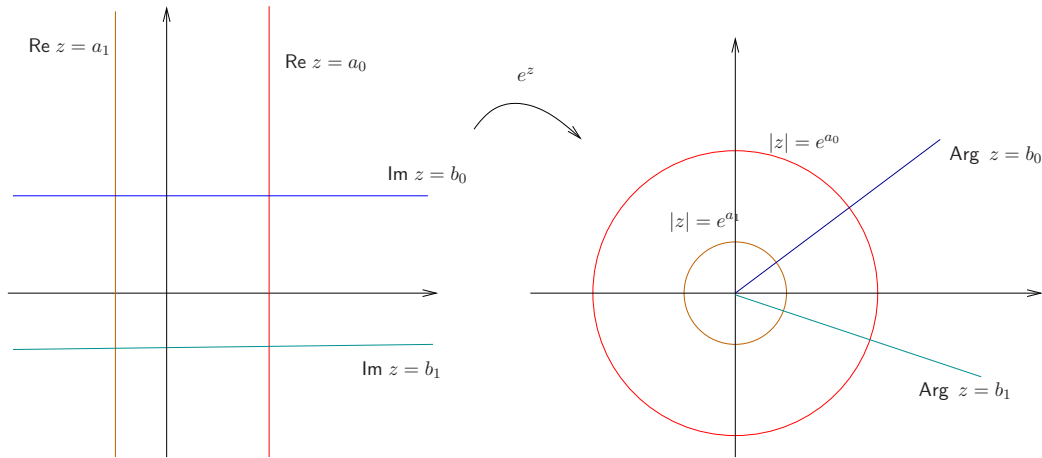


Figura 1.3: Transformação de rectas horizontais e verticais por $f(z) = e^z$.

Propriedades Elementares da Exponencial Complexa

- Para todos $z, w \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

- Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z, \quad k \in \mathbb{Z}$$

o que significa que a exponencial complexa é periódica de período $2\pi i$.

- Para qualquer $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a equação $e^z = w$ pode sempre ser resolvida e tem uma infinidade de soluções, que são dadas por:

$$e^z = w \Leftrightarrow z = \log |w| + i(\arg w + 2k\pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

(porquê?)

Funções Trigonométricas

A partir da fórmula de Euler tem-se, para qualquer $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y \\ e^{-iy} &= \cos y - i \sin y \end{aligned}$$

Somando e subtraindo as identidades anteriores obtém-se, respectivamente, $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$ e $\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$.

Podemos então generalizar as funções trigonométricas reais a funções complexas de variável complexa, definindo-as, para todo o $z \in \mathbb{C}$, por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

É óbvio que as funções $\sin z$ e $\cos z$ têm domínio \mathbb{C} , enquanto que o domínio da função $\operatorname{tg} z$ é $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos z = 0\}$ e o domínio da função $\operatorname{cotg} z$ é $\mathbb{C} \setminus \{z : \sin z = 0\}$.

As propriedades das funções trigonométricas complexas são análogas às das funções trigonométricas reais, e podem ser facilmente justificadas a partir das suas definições. Em particular, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$:

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$ e $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$
- $\operatorname{tg}(z + k\pi) = \operatorname{tg} z$
- $\operatorname{cotg}(z + k\pi) = \operatorname{cotg} z$.
- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$
- $\sin(-z) = -\sin z$
- $\cos(-z) = \cos z$.

O contradomínio das funções $\sin z$ e $\cos z$ é \mathbb{C} . Isto significa que quando as funções reais seno e cosseno são estendidas ao plano complexo, tanto as equações $\cos z = w$ como $\sin z = w$ passam a ter solução **para qualquer** $w \in \mathbb{C}$. Por periodicidade, essas equações têm uma infinidade de soluções — pois se \hat{z} é solução de $\cos z = w$ ou $\sin z = w$, então $\hat{z} + 2k\pi$ também o é, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. Chama-se a atenção que este facto implica, entre outras coisas, que as funções $\sin z$ e $\cos z$ **não são limitadas** em \mathbb{C} .

Funções Hipérbólicas

Para $z \in \mathbb{C}$ definem-se:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cotgh} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

É óbvio que as funções $\operatorname{sh} z$ e $\operatorname{ch} z$ têm domínio \mathbb{C} , enquanto que o domínio da função $\operatorname{tgh} z$ é $\mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{ch} z = 0\}$ e o domínio da função $\operatorname{cotgh} z$ é $\mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{sh} z = 0\}$.

Todas as igualdades verificadas pelas funções hiperbólicas reais são também verificadas pelas funções hiperbólicas complexas. Em particular, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$

- $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
- $\operatorname{sh}(z + 2k\pi i) = \operatorname{sh} z$
- $\operatorname{ch}(z + 2k\pi i) = \operatorname{ch} z$
- $\operatorname{sh}(z \pm w) = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} w \pm \operatorname{sh} w \operatorname{ch} z$
- $\operatorname{ch}(z \pm w) = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} w \pm \operatorname{sh} z \operatorname{sh} w$
- $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z$ e $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$.

Logaritmo Complexo

Define-se *logaritmo complexo* por

$$w = \operatorname{Log} z \quad \Leftrightarrow \quad e^w = z \quad \Leftrightarrow \quad w = \log |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Observa-se que o logaritmo complexo está bem definido em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Atendendo a que os argumentos de z formam um conjunto infinito, da forma $\{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, em que $\theta \in \mathbb{R}$ é um argumento particular de z , então também $\operatorname{Log} z$ terá uma infinidade de valores. Como tal, Log designa aquilo que em análise complexa se chama uma *função multivalente*.

De forma a definir funções *logaritmo complexo*, $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ (que tomam um único valor, $\log z \in \mathbb{C}$) há que restringir o valor do argumento a um intervalo de comprimento 2π , intervalo esse onde o argumento de z é único. Sendo assim, para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se o *ramo* α do logaritmo (resp. o *valor* α do logaritmo) por:

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \quad \arg z \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$$

(Resp., $\arg z \in]\alpha, \alpha + 2\pi]$ para o valor α de \log). O caso particular em que se considera o argumento principal, isto é

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \quad \arg z \in]-\pi, \pi]$$

denomina-se *valor principal do logaritmo*.

As propriedades algébricas de um ramo do logaritmo são verificadas a menos de múltiplos de $2\pi i$:

- $\log(zw) = \log z + \log w + 2p\pi i$ para certo $p \in \mathbb{Z}$.

- $\log(z/w) = \log z - \log w + 2p\pi i$ para certo $p \in \mathbb{Z}$.
- $\log(z^m) = m\log z + 2p\pi i$ para certo $p \in \mathbb{Z}$.

Observe-se que, no entanto, a propriedade

$$\text{Log}(z^m) = m\text{Log} z$$

é verificada para a função multivalente $\text{Log} z$.

Exemplos:

1. Determinar o valor principal de $\log(2\sqrt{3} - 2i) + \log(-1 - i)$ e de $\log[(2\sqrt{3} - 2i)(-1 - i)]$.
Por um lado

$$\begin{aligned} \log[(2\sqrt{3} - 2i)(-1 - i)] &= \log[(4e^{-i\pi/6})(\sqrt{2}e^{5\pi i/4})] \\ &= \log[4\sqrt{2}e^{13i\pi/12}] = \log[4\sqrt{2}e^{-11i\pi/12}] \\ &= \frac{5}{2}\log(2) - \frac{11\pi i}{12} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \log(2\sqrt{3} - 2i) + \log(-1 - i) &= \log(4e^{-i\pi/6}) + \log(\sqrt{2}e^{-3\pi i/4}) \\ &= \log 4 - \frac{i\pi}{6} + \log(\sqrt{2}) - \frac{3i\pi}{4} = \frac{5}{2}\log(2) - \frac{11\pi i}{12} \end{aligned}$$

Neste exemplo *em particular*, verifica-se que para o valor principal do logaritmo:

$$\log(2\sqrt{3} - 2i) + \log(-1 - i) = \log[(2\sqrt{3} - 2i)(-1 - i)]$$

2. Determinar o valor principal de $\log[(-\sqrt{3} - 3i)^5]$ e de $5\log(-\sqrt{3} - 3i)$. Por um lado

$$\begin{aligned} \log[(-\sqrt{3} - 3i)^5] &= \log[(\sqrt{12}e^{4\pi i/3})^5] = \log[(\sqrt{12})^5 e^{20\pi i/3}] = \log[(\sqrt{12})^5 e^{2\pi i/3}] \\ &= \frac{5}{2}\log(12) + \frac{2\pi i}{3} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$5\log(-\sqrt{3} - 3i) = 5\log(\sqrt{12})^5 e^{-2\pi i/3} = \frac{5}{2}\log(12) - \frac{10\pi i}{3}$$

Verifica-se, neste exemplo, que para o valor principal do logaritmo

$$\log[(-\sqrt{3} - 3i)^5] = 5\log(-\sqrt{3} - 3i) + 4\pi i$$

Observa-se no entanto que para a função multivalente logaritmo ⁶ se verifica

$$\text{Log}[(-\sqrt{3} - 3i)^5] = 5\text{Log}(-\sqrt{3} - 3i)$$

sendo a igualdade interpretada como igualdade entre conjuntos.

⁶Onde $\text{Log} z$ é um conjunto.

Potência de Expoente Complexo

Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $w \in \mathbb{C}$ fixo, define-se ramo- α da potência de expoente w por:

$$z^w = e^{w \log z}, \quad \arg z \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$$

O caso especial em que se considera o valor principal do logaritmo, isto é

$$z^w = e^{w \log z}, \quad \arg z \in]-\pi, \pi]$$

denomina-se valor principal da potência de expoente w .

Como exemplo, calculemos o valor principal de i^w , onde w é um número complexo de módulo 1 ou seja, $w = e^{i\theta}$, para certo $\theta \in]-\pi, \pi[$. Temos:

$$w^i = e^{i \log w} = e^{i \log(e^{i\theta})} = e^{i(\log 1 + i\theta)} = e^{i^2 \theta} = e^{-\theta}.$$

Se quiséssemos determinar o valor multivalente de w^i , então teríamos que considerar todos os possíveis valores do argumento de w , que são $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, o resultado é:

$$\{e^{-\theta - 2k\pi} : k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{-\theta + 2j\pi} : j \in \mathbb{Z}\}$$

1.4.3 Limites

Sendo $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$, define-se

$$L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon$$

Proposição

Se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $L = A + iB$ então:

$$L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = A \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = B \end{cases}$$

Em consequência, é válida a seguinte igualdade:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y)$$

(admitindo que os limites existem).

Demonstração:

Em primeiro lugar, assumindo que existem os limites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = A \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = B$$

Por definição, para cada $\epsilon > 0$ existem números positivos δ_1 e δ_2 tais que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1 \Rightarrow |u(x, y) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2 \Rightarrow |v(x, y) - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

Considere-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ Tem-se então que se $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta$

$$\begin{aligned} |u(x, y) + iv(x, y) - (A + iB)| &= |u(x, y) - A + i(v(x, y) - B)| \\ &\leq |u(x, y) - A| + |v(x, y) - B| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

o que demonstra que o limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A + iB$.

Reciprocamente, supondo que existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A + iB$, dados $\epsilon > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que se $|(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ então:

$$|u(x, y) + iv(x, y) - (A + iB)| = \sqrt{(u(x, y) - A)^2 + (v(x, y) - B)^2} < \epsilon$$

Suponhamos que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$; então:

$$|u(x, y) - A| \leq \sqrt{(u(x, y) - A)^2 + (v(x, y) - B)^2} < \epsilon$$

e

$$|v(x, y) - B| \leq \sqrt{(u(x, y) - A)^2 + (v(x, y) - B)^2} < \epsilon.$$

□

Do resultado anterior e dos teoremas correspondentes da análise real, deduzimos o seguinte:

Proposição:

Se existirem $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$, tem-se que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f/g)(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) / \lim_{z \rightarrow z_0} g(z),$$

sendo esta última propriedade válida desde que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$.

Exemplo:

$$1. \lim_{z \rightarrow i} e^{\pi z} = -1.$$

$$2. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - (i+1)z + i}{z^2 + (i-1)z - i} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-i}{z+i} = -i$$

É de observar que enquanto o cálculo algébrico de limites em \mathbb{C} é semelhante ao de \mathbb{R} , a noção de limite em \mathbb{C} é idêntica à de \mathbb{R}^2 ⁷.

Exemplo:

Observa-se que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z}$ representa uma indeterminação do tipo $0/0$. Escrevendo $z = |z|e^{i\theta}$ obtém-se

$$\frac{\operatorname{Re}(z)}{z} = \frac{|z|\cos(\theta)}{|z|e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\cos(\theta)$$

Fazendo $|z| \rightarrow 0$ verifica-se $\operatorname{Re}(z)/z$ converge para um valor que depende de θ (ou seja do argumento de z) e como tal o seu valor dependerá da forma como z está a convergir para 0. Assim, por exemplo, se z está a convergir para 0 ao longo do semi eixo real positivo ($\theta = 0$) tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathbb{R}^+} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z} = 1,$$

enquanto que se z está a convergir para 0 ao longo do semi-eixo imaginário positivo ($\theta = \pi/2$) tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in i\mathbb{R}^+} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z} = 0.$$

Conclui-se que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z}$ não existe.

1.4.4 Continuidade:

Sendo $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$, diz-se que f é *contínua* em z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Se f é contínua em todos $z_0 \in D$ diz-se que f é *contínua* em D . Demonstra-se que, se $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$ então f é contínua em z_0 se e só se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0) .

Sendo assim, se f e g são contínuas em z_0 então $f + g$, $f - g$, fg e no caso de $g(z_0) \neq 0$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ são contínuas em z_0 . Se g é contínua em z_0 e f é contínua em $g(z_0)$ então $f \circ g$ é contínua em z_0 .

Estudo da Continuidade das Funções Elementares

1. A função $f(z) = z = x + iy$ é contínua em \mathbb{C} , dado que $\operatorname{Re} f(z) = x$ e $\operatorname{Im} f(z) = y$ são contínuas em \mathbb{R}^2 .
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f(z) = z^n$ é contínua em \mathbb{C} , dado que é o produto de funções contínuas em \mathbb{C} .
3. A função polinomial é contínua em \mathbb{C} dado que é a soma de funções contínuas.
4. A função racional $P(z)/Q(z)$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\}$.

⁷As vizinhanças de um ponto em \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 são discos centrados nesse ponto; ou seja, as vizinhanças em \mathbb{C} e em \mathbb{R}^2 são geometricamente idênticas.

5. A função exponencial $f(z) = e^z$ é contínua em \mathbb{C} , dado que $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos(y)$ e $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin(y)$ são contínuas em \mathbb{R}^2 .
6. As funções $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$ e $\operatorname{sh} z$ são contínuas em \mathbb{C} (compostas e somas de funções contínuas em \mathbb{C}).
7. Considere-se a função valor principal do $\log z$, ie,

$$\log z = \log |z| + i \arg z \quad , \quad \arg z \in] - \pi, \pi]$$

Por um lado, $\operatorname{Re}(\log z) = \log |z|$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (consequência da continuidade da função logaritmo real em \mathbb{R}^+). Por outro lado, $\operatorname{Im}(\log z) = \arg z$ é contínua para todos os z tais que $\arg z \in] - \pi, \pi[$ (continuidade da função arctg num dos seus ramos). Falta então estudar a continuidade do valor principal do $\log z$ em qualquer ponto z tal que $\arg z = \pi$. Para isso, considere-se $z_0 \neq 0$ tal que $\arg z_0 = \pi$. Então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \begin{cases} \pi & \text{se } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi & \text{se } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

Conclui-se que não existe $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z$ para qualquer $z_0 \neq 0$ com $\arg z_0 = \pi$ (pelo que a função $\arg z$ não é contínua nestes pontos). Consequentemente o domínio de continuidade do valor principal de $\log z$ é

$$\mathbb{C} \setminus \{z = 0 \text{ ou } \arg z = \pi\}$$

ou escrito de outra forma

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x e^{i\pi}, x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

O conjunto

$$\{z = x e^{i\pi}, x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

é denominado *corte do valor principal* do logaritmo complexo.

8. De modo análogo se mostra que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de continuidade do ramo α do logaritmo

$$\log z = \log |z| + i \arg z \quad , \quad \arg z \in]\alpha, \alpha + 2\pi]$$

é

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x e^{i\alpha}, x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

O conjunto

$$\{z = x e^{i\alpha}, x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

é denominado *corte do ramo α* do logaritmo complexo.

1.4.5 Derivada Complexa

Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tem *derivada complexa* (ou que é diferenciável no sentido de \mathbb{C}) em $z_0 \in D$ se existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Se o limite existir, define-se

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Define-se *Domínio de Diferenciabilidade* ao conjunto de pontos do domínio de f para os quais existe derivada.

Exemplos:

1. Para $f(z) = 2z - z^2$, de domínio \mathbb{C} , verifica-se que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(z+h) - (z+h)^2 - (2z - z^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2 - 2z - h) = 2 - 2z \end{aligned}$$

Conclui-se que f é diferenciável em \mathbb{C} e

$$f'(z) = 2 - 2z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. Para $f(z) = f(x+iy) = 2x + 3iy$, de domínio \mathbb{C} , verifica-se que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h_1+ih_2 \rightarrow 0} \frac{2(x+h_1) + 3i(y+h_2) - (2x + 3iy)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h_1 + 3ih_2}{h_1 + ih_2} \end{aligned}$$

Observe-se que

- se $h_1 + ih_2 \rightarrow 0$ ao longo do eixo real, ter-se-á que $h_2 = 0$ e o valor do limite (direccional) é

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{2h_1}{h_1} = 2$$

- se $h_1 + ih_2 \rightarrow 0$ ao longo do eixo imaginário, ter-se-á que $h_1 = 0$ e o valor do limite (direccional) é

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in i\mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{3ih_2}{ih_2} = 3$$

pelo que este limite não existe. Conclui-se que para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ não existe e como tal o domínio de diferenciabilidade de f é o conjunto vazio.

3. Para $f(z) = z \operatorname{Re} z$, de domínio \mathbb{C} , verifica-se que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h) \operatorname{Re}(z+h) - z \operatorname{Re} z}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} h + h \operatorname{Re} z + h \operatorname{Re} h}{h} \\ &= \operatorname{Re} z + \lim_{h \rightarrow 0} (z+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h} \\ &= \operatorname{Re} z + z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h} \end{aligned}$$

Observe-se que, escrevendo o complexo h na forma polar, se tem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|h| \cos \theta}{|h| e^{i\theta}} = e^{i\theta} \cos \theta$$

pelo que este limite não existe. Se $z = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$$

e como tal f é diferenciável em 0 e $f'(0) = 0$. Por outro lado se $z \neq 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ não existe (**porquê?**) pelo que a função não é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Assim, o domínio de diferenciabilidade de f é $\{0\}$.

Nota: Os casos anteriores (2 e 3), mostram que não é suficiente que u e v sejam diferenciáveis em (x_0, y_0) para que $f = u + iv$ tenha derivada em $z_0 = x_0 + iy_0$. Por exemplo para $f(z) = f(x + iy) = 2x + 3iy$

$$\operatorname{Re} f = u(x, y) = 2x \quad , \quad \operatorname{Im} f = v(x, y) = 3y$$

admitem derivada (no sentido de \mathbb{R}^2) em todos os pontos, e no entanto a função $f = u + iv$ não admite derivada (no sentido de \mathbb{C}) em ponto algum de \mathbb{C} .

Tal como para as funções reais de variável real, é válido o seguinte resultado, com demonstração análoga ao caso real.

Proposição Se a função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável em z_0 então f é contínua em z_0 .

Notemos que, tal como no cálculo real, o recíproco não pode não ser verdade: existem funções contínuas num determinado ponto do seu domínio que não têm derivada nesse ponto (casos 2 e 3 do exemplo anterior. É no entanto muitas vezes utilizado na forma de contra-recíproco: se f não é contínua em z_0 então f não é diferenciável em z_0 .

Exemplo:

O valor principal do logaritmo complexo não admite derivada no conjunto

$$\{z = re^{i\pi} : r \geq 0\}$$

Para facilitar a notação, definimos o disco centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$ e de raio $\epsilon > 0$ como sendo o subconjunto de \mathbb{C} dado por:

$$D(z_0, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}.$$
⁸

A análise complexa estuda essencialmente as funções complexas de variável complexa que são diferenciáveis em alguma região aberta do seu domínio.

⁸O disco $D(z_0, \epsilon)$ é também um bola, $B_\epsilon(z_0)$, centrada em z_0 e de raio ϵ .

Definição: (Função Analítica ou Holomorfa)

Uma função diz-se *analítica* ou *holomorfa* em z_0 se

Existe um disco centrado em z_0 tal que f admite derivada em todos os pontos desse disco, ou seja, existe $\epsilon > 0$ tal que f admite derivada em todos os pontos de $D(z_0, \epsilon)$.

Define-se *domínio de analiticidade* ou *domínio de holomorfia* ao maior conjunto onde f é analítica. Uma função cujo domínio de analiticidade é \mathbb{C} diz-se *inteira*. Observe-se que o domínio de analiticidade está sempre contido no domínio de diferenciabilidade.

Exemplo:

1. Para $f(z) = 2z - z^2$ vimos que o domínio de diferenciabilidade é \mathbb{C} , pelo que o domínio de analiticidade é também \mathbb{C} . Esta função constitui um exemplo de função inteira.
2. Para $f(z) = f(x + iy) = 2x + 3iy$ vimos que o domínio de diferenciabilidade é o conjunto vazio, pelo que o domínio de analiticidade é também o conjunto vazio.
3. $f(z) = z \operatorname{Re} z$ vimos que o domínio de diferenciabilidade é $\{0\}$, pelo que o domínio de analiticidade é o conjunto vazio.

Nota: O domínio de analiticidade de uma função é sempre um conjunto aberto. Um conjunto $D \subset \mathbb{C}$ é aberto se para qualquer $z \in D$ existe pelo menos um disco centrado em z que está contido em D .

1.4.6 Equações de Cauchy-Riemann

Considere-se a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ pertencente ao domínio de f . Vamos estudar qual (ou quais) as propriedades de uma função complexa que admite derivada num ponto.

- **Condição necessária à existência de derivada**

Se f admite derivada em $z = x + iy$ então são verificadas as *equações de Cauchy-Riemann* em (x, y) , isto é

$$\text{se } f'(z) \text{ existe} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad (1.9)$$

No caso de existir derivada em z , tem-se que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

Demonstração:

Se existe a derivada complexa de $f = u + iv$ em $z = x + iy$, então os limites

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + iy + t) - f(x + iy)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + t, y) - u(x, y)}{t} + i \frac{v(x + t, y) - v(x, y)}{t} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + iy + it) - f(x + iy)}{it} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y + t) - u(x, y)}{it} + i \frac{v(x, y + t) - v(x, y)}{it} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.10}$$

(que correspondem a fazer, na definição de derivada complexa, $w \rightarrow 0$ nas direcções do eixo real, $w = t$, e imaginário, $w = it$) são iguais. Igualando os dois limites em (1.10), obtém-se

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

de onde resultam obviamente as *equações de Cauchy-Riemann*, (1.9). \square

É de salientar que as condições de Cauchy-Riemann não são suficientes para a existência de derivada num ponto, isto é:

- **(Contra-Recíproco)** Se as condições de Cauchy-Riemann não se verificam em (x, y) então $f'(x + iy)$ não existe.

Exemplo:

Para a função $f(z) = z + \operatorname{Re} z$ tem-se que

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y) = 2x, \quad \operatorname{Im} f(x + iy) = v(x, y) = y$$

pelo que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$$

É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann não se verificam em qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Podemos concluir que $f(z) = z + \operatorname{Re} z$ não admite derivada em qualquer $z \in \mathbb{C}$.

- Se as condições de Cauchy-Riemann se verificam em (x_0, y_0) então **nada se pode concluir** sobre a existência de $f'(x_0 + iy_0)$.

Exemplos:

a) Para a função definida em \mathbb{C} por

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

tem-se que

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\operatorname{Im} f(x + iy) = v(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = -1$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h, 0) - v(0, 0)}{h} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = 1$$

pelo que é óbvio que se verificam as condições de Cauchy-Riemann no ponto $(0, 0)$. Por outro lado, e escrevendo o incremento $\Delta z = \rho e^{i\theta}$, tem-se que se existir, $f'(0)$ verifica:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3 \theta (1 + i) - \rho^3 \sin^3 \theta (1 - i)}{\rho^3 e^{i\theta}} \\ &= \frac{\cos^3 \theta (1 + i) - \sin^3 \theta (1 - i)}{e^{i\theta}} \end{aligned}$$

Dado que o resultado do cálculo do limite depende do argumento de Δz , conclui-se que $f'(0)$ não existe.

b) Para a função $f(z) = 2z - z^2$ tem-se que

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y) = 2x - x^2 + y^2, \quad \operatorname{Im} f(x + iy) = v(x, y) = 2y - 2xy$$

pelo que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2 - 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 2 - 2x,$$

É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann se verificam para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vimos na secção anterior que $f'(z)$ existe para todo $z \in \mathbb{C}$. Este é um exemplo de uma função que verifica as condições de Cauchy-Riemann e tem derivada complexa (em \mathbb{C}).

1.4.7 Teorema de Cauchy-Riemann

O seguinte Teorema fornece uma condição necessária e suficiente à existência de derivada complexa.

Teorema de Cauchy-Riemann

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa de variável complexa, dada por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ num conjunto aberto D e $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Se as funções u e v são contínuas, têm derivadas parciais contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto (x_0, y_0) ,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

então a derivada $f'(z_0)$ existe (ou seja, f é diferenciável em z_0 no sentido complexo) e

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exemplos:

a) Para a função $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = e^y \cos x - ie^y \sin x$ tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -e^y \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^y \cos x, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -e^y \cos x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -e^y \sin x$$

Verifica-se facilmente que:

- (A) As funções u e v e as suas derivadas parciais são contínuas em \mathbb{R}^2 ;
- (B) as condições de Cauchy-Riemann são válidas em \mathbb{R}^2 .

Por (A) e (B), o Teorema de Cauchy-Riemann permite-nos concluir que f é diferenciável em \mathbb{C} , e para todo $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -e^y \sin x - ie^y \cos x$$

b) Para a função $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = x^3 + i(y - 1)^3$ tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 3(y - 1)^2$$

- (A) as funções u e v e as suas derivadas parciais são contínuas em \mathbb{R}^2 ;
- (B) as condições de Cauchy-Riemann são válidas sse $x^2 = (y - 1)^2$, isto é para os pontos do plano, (x, y) pertencentes a pelo menos uma das rectas de equação $x = y - 1$ ou $x = 1 - y$.

Podemos então concluir que, dado $z \in \mathbb{C}$:

- se $z \notin \{z = x + iy : x = y - 1\} \cup \{z = x + iy : x = 1 - y\}$, por (B) não existe $f'(z)$;
- se $z \in \{z = x + iy : x = y - 1\} \cup \{z = x + iy : x = 1 - y\}$ por (A) e (B) existe $f'(z) = 3x^2$ (ou $f'(z) = 3(y - 1)^2$).

Como tal o domínio de diferenciabilidade de função é

$$\{z = x + iy : x = 1 - y\} \cup \{z = x + iy : x = y - 1\}$$

e o domínio de analiticidade é o conjunto vazio.

1.4.8 Demonstração do Teorema de Cauchy-Riemann

Esta secção, embora numa primeira passagem seja de leitura opcional, é no entanto muito importante para o aluno compreender a relação entre a derivada complexa e a derivação no sentido de \mathbb{R}^2 . Vamos por isso enunciar e provar um teorema que implica a condição necessária e suficiente anteriormente descrita mas que, além disso, clarifica a noção de derivada complexa.

Se convencionarmos representar $i \in \mathbb{C}$ pelo o ponto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ e $1 \in \mathbb{C}$ pelo ponto $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$, podemos identificar cada ponto de \mathbb{C} com **um e um só** ponto de \mathbb{R}^2 por:

$$\mathbb{C} \ni \alpha_1 + i\alpha_2 = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

Como tal, qualquer função complexa, $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, pode ser interpretada como o campo vectorial $(u, v) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Recordamos que a função f é diferenciável no sentido de \mathbb{R}^2 em $a \in A$ (com A aberto) se e só se existe uma transformação linear $Df(a)$ tal que

$$\frac{f(z+h) - f(z) - Df(a)h}{h} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

Se f é diferenciável no sentido de \mathbb{R}^2 em a então:

- a) f é contínua em a .
- b) Existem as derivadas parciais $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ e $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ em a .
- c) $Df(a)$ é representada pela matriz jacobiana de f em a :

$$\begin{bmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{bmatrix}$$

(na base canónica de \mathbb{R}^2).

Se existem e são contínuas as derivadas parciais de u e v numa vizinhança de a , então $f = (u, v)$ tem derivada no sentido de \mathbb{R}^2 em a .

Lema (relação entre derivada complexa e derivada no sentido de \mathbb{R}^2):

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, onde $A \subset \mathbb{C}$ é aberto e $a \in A$. Então a derivada de f em a existe no sentido complexo se e só se ela existe no sentido de \mathbb{R}^2 e é representada por um produto complexo; mais concretamente, são **equivalentes** as seguintes proposições:

- (i) Existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha \quad (1.12)$$

(isto é, $f'(a)$ existe em \mathbb{C} e é igual a α).

- (ii) Existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que f tem derivada no sentido de \mathbb{R}^2 em a dada por $Df(a)h = \alpha h$, para qualquer h . (Onde αh designa o produto complexo de α por h).

Demonstração: De facto, (1.12) é válida se e só se

$$\frac{f(z+h) - f(z) - \alpha h}{h} \rightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

o que, atendendo a (1.11), é equivalente a (ii). \square

Teorema de Cauchy-Riemann-Goursat

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, onde $A \subset \mathbb{C}$ é aberto e $a = a_1 + ia_2 \in A$. São **equivalentes** as seguintes proposições:

- (a) f tem derivada (complexa) em a , $f'(a) \in \mathbb{C}$.
- (b) f é diferenciável em a no sentido de \mathbb{R}^2 e existe $f'(a) \in \mathbb{C}$ tal que $Df(a)h = f'(a)h$, para qualquer $h \in \mathbb{R}^2$.
- (c) f é diferenciável em a (no sentido de \mathbb{R}^2) e f verifica as equações de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, em (a_1, a_2) .

Se f tem derivada complexa em a , então

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a_1, a_2) = \frac{\partial v}{\partial y}(a_1, a_2) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)$$

Demonstração:

Prova de que **(a)** \Leftrightarrow **(b)**:

f tem derivada complexa em a , $f'(a)$, se e só se:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \rightarrow f'(a) \quad \text{quando } h \rightarrow 0$$

Pelo Lema isto é equivalente a dizer que f tem derivada no sentido de \mathbb{R}^2 em a dada por $Df(a)h = f'(a)h$, para qualquer h .

Prova de que **(b)** \Leftrightarrow **(c)**:

Seja $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$, que identificamos com $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Vamos provar que a equação

$$Df(a)h = f'(a)h \quad \text{para qualquer } h \in \mathbb{R}^2$$

é equivalente às equações de Cauchy-Riemann em (a_1, a_2) .

Seja $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ tal que, para qualquer $h = h_1 + ih_2$,

$$Df(a)h = \alpha h$$

(onde αh representa um produto complexo). A equação anterior é equivalente a

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = (\alpha_1 + i\alpha_2)(h_1 + ih_2) = \begin{bmatrix} \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2 \\ \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_x h_1 + u_y h_2 &= \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2 \\ v_x h_1 + v_y h_2 &= \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 \end{cases}$$

para qualquer h (com as derivadas parciais calculadas no ponto a). As identidades anterior são ambas verdadeiras para qualquer h se e só se:

$$\begin{cases} u_x &= \alpha_1 \\ u_y &= -\alpha_2 \\ v_x &= \alpha_2 \\ v_y &= \alpha_1 \end{cases} \quad (1.13)$$

Isto prova que existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Df(a)h = \alpha h$ para todo o $h \in \mathbb{C}$ **se e só se** $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ no ponto a . Assim sendo, e usando de novo o Lema, (b) é equivalente a (c). Se $f'(a)$ existir, então:

$$f'(a) = \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = u_x(a) + iv_x(a) = v_y(a) - iu_y(a).$$

□

A demonstração do teorema de Cauchy-Riemann é consequência imediata do teorema de Cauchy-Riemann-Goursat.

1.4.9 Propriedades das Funções Analíticas

O Teorema de Cauchy-Riemann permite demonstrar que, para as funções analíticas são válidas as regras de derivação já conhecidas do cálculo de funções reais de variável real. Mais concretamente:

Soma, produto e quociente

Se f e g são analíticas num conjunto $D \subset \mathbb{C}$, então:

- $f \pm g$ é analítica em D e $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
- fg é analítica em D e $(fg)' = f'g + fg'$;
- f/g é analítica em $D \setminus \{z : g(z) = 0\}$ e $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Função composta

Se g é analítica num conjunto $D \subset \mathbb{C}$ e f é holomorfa no contradomínio de g , $g(D)$, então

- $f \circ g$ é analítica em D e $(f \circ g)' = f'(g) g'$.

Função Inversa

Se f é analítica em D , e admite inversa em D , f^{-1} , então

- f^{-1} é analítica em $f(D)$ e $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, onde $b = f(a)$.

Estudo da Analiticidade das Funções Elementares

1. A função $f(z) = z = x + iy$ admite derivada em todo $z \in \mathbb{C}$, dado que $u = \operatorname{Re} f(z) = x$ e $v = \operatorname{Im} f(z) = y$:

- (A) têm derivadas parciais contínuas em \mathbb{R}^2 ;
 (B) verificam as condições de Cauchy-Riemann em \mathbb{R}^2 .

Assim $f(z) = z$ é inteira e para todo $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 1$$

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f(z) = z^n$ é inteira, dado que é o produto (iterado) de funções inteiras. Para todo $z \in \mathbb{C}$, a derivada é dada por:

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

Provemos esta fórmula por indução. O caso $n = 1$ é o exemplo 1. Admitindo agora que para certo $n \in \mathbb{N}$, $(z^n)' = n z^{n-1}$ então, usando a regra da derivada do produto e a hipótese de indução:

$$(z^{n+1})' = (z^n \cdot z)' = n z^{n-1} \cdot z + z^n \cdot 1 = n z^n + z^n = (n + 1) z^n$$

3. A função polinomial é inteira dado que é a soma de funções inteiras.
 4. A função racional $P(z)/Q(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\}$ dado que é o quociente de funções inteiras.
 5. A função exponencial $f(z) = e^z$ admite derivada em todo $z \in \mathbb{C}$, dado que $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = e^x \cos(y)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = e^x \sin(y)$:

- (A) têm derivadas parciais contínuas em \mathbb{R}^2 ;
 (B) verificam as condições de Cauchy-Riemann em \mathbb{R}^2 .

Assim $f(z) = e^z$ é inteira e para todo $z \in \mathbb{C}$

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

6. As funções $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ são inteiras (construídas a partir da composição, soma, diferença e produto de funções inteiras), tendo-se

$$(\operatorname{sen} z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \cos z \quad \text{e} \quad (\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = -\operatorname{sen} z$$

As funções $\operatorname{tg} z$ e $\operatorname{cotg} z$, por serem o quociente de funções inteiras, são analíticas, respectivamente, em

$$D_{\operatorname{tg}} = \mathbb{C} \setminus \left\{ z = \frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad D_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{C} \setminus \{ z = k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

tendo-se, nos seus domínios

$$(\operatorname{tg} z)' = \left(\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \right)' = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \text{e} \quad (\operatorname{cotg} z)' = \left(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \right)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$$

7. As funções $\operatorname{ch} z$ e $\operatorname{sh} z$ são inteiras (somas de funções inteiras), tendo-se

$$(\operatorname{sh} z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)' = \operatorname{ch} z \quad \text{e} \quad (\operatorname{ch} z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)' = \operatorname{sh} z$$

As funções $\operatorname{tgh} z$ e $\operatorname{cotgh} z$, por serem o quociente de funções inteiras, são analíticas, respectivamente, em

$$D_{\operatorname{tgh}} = \mathbb{C} \setminus \left\{ z = \frac{2k+1}{2}\pi i : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad D_{\operatorname{cotgh}} = \mathbb{C} \setminus \{ z = k\pi i : k \in \mathbb{Z} \}$$

tendo-se nos seus domínios

$$(\operatorname{tgh} z)' = \left(\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} \quad \text{e} \quad (\operatorname{cotgh} z)' = \left(\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$$

1.4.10 Condições de Cauchy-Riemann em Coordenadas Polares

Como já vimos, qualquer $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito ou na forma $z = x+iy$ ou na forma polar $z = re^{i\theta}$, sendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Assim, também uma função complexa pode ser caracterizada por

$$f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{ou} \quad f(z) = f(re^{i\theta}) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$$

Assim, utilizando a regra da derivação da função composta, as fórmulas acima escritas e as condições de Cauchy-Riemann já deduzidas, obtém-se por um lado

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta$$

e por outro lado

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial x} \sin\theta + r \frac{\partial v}{\partial y} \cos\theta = r \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta + r \frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta$$

Conclui-se que, se $r \neq 0$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

De igual modo

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \frac{\partial u}{\partial x} \sin\theta + r \frac{\partial u}{\partial y} \cos\theta$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin\theta = -\frac{\partial u}{\partial y} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin\theta$$

concluindo-se que, se $r \neq 0$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -r \frac{\partial V}{\partial r}$$

Condição suficiente à existência de derivada

Se as derivadas parciais de $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$ são contínuas em (r_0, θ_0) (com $r_0 \neq 0$) e se verificam as condições de Cauchy Riemann em coordenadas polares

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

no ponto (r_0, θ_0) , então f admite derivada em $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$.

Estudo da Analiticidade do Valor Principal do Logaritmo

Considere-se a função valor principal do $\log z$, isto é:

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta, \quad \theta \in]-\pi, \pi]$$

Vimos que a função não é contínua na semi-recta

$$\{z = xe^{i\pi}, x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

pelo que neste conjunto não existirá derivada. Para estudar a analiticidade no restante domínio, considere-se

$$\operatorname{Re} \log z = u(r, \theta) = \log r, \quad \operatorname{Im} \log z = v(r, \theta) = \theta$$

Assim

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

verificam

(A) são contínuas em todo $r > 0$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$;

(B) verificam as condições de Cauchy-Riemann no mesmo conjunto.

Conclui-se que o valor principal do $\log z$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z = xe^{i\pi}, x \in \mathbb{R}_0^+\}$. Para z no domínio de analiticidade, utilizando a regra da derivação da função inversa e o facto de $w = \log z$ é equivalente $e^w = z$, tem-se que

$$(\log z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

De modo análogo se mostra que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o ramo α do logaritmo,

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \quad \arg z \in]\alpha, \alpha + 2\pi],$$

é uma função analítica em

$$\mathbb{C} \setminus \{z = xe^{i\alpha}, x \in \mathbb{R}_0^+\},$$

sendo, neste conjunto, válida a mesma regra de derivação.

1.4.11 Noções Básicas da Topologia em \mathbb{C}

O conjunto dos complexos \mathbb{C} é topologicamente idêntico a \mathbb{R}^2 , isto é, as noções topológicas em \mathbb{C} são inteiramente equivalentes às já introduzidas no estudo de \mathbb{R}^2 . Assim, dado $D \subset \mathbb{C}$, e $z \in \mathbb{C}$ diz-se que z é um:

- *ponto interior* de D se existe $\epsilon > 0$ tal que $D(z, \epsilon) \subset D$ (note que $D(z, \epsilon) = B_\epsilon(z)$);
- *ponto exterior* se for um ponto interior do complementar de D , $\mathbb{C} \setminus D$.
- *ponto fronteiro* se não for nem interior nem exterior, ou seja, se para qualquer $\epsilon > 0$, o disco $D(z, \epsilon)$ intersecta tanto D como o complementar de D . O conjunto de todos os pontos fronteiros de D designa-se por fronteira de D e representa-se por ∂D ;

- *ponto aderente* se for interior ou fronteiro. O conjunto de todos os pontos aderentes de D denomina-se por *aderência* de D e representa-se por \bar{D} . Note que $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Diz-se que D é

- *aberto* se todos os pontos de D são pontos interiores, isto é:

$$\forall z \in D \quad \exists \epsilon > 0 \quad : \quad D(z, \epsilon) \subset D.$$

- *fechado* se o conjunto $\mathbb{C} \setminus D$ for aberto ou, equivalentemente, se todos os pontos aderentes a D estão em D , isto é $\bar{D} = D$.
- *conexo* se não existirem subconjuntos não vazios de D , A e B , que verifiquem
 - $A \cup B = D$;
 - $\bar{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \bar{B} = \emptyset$.⁹
- Um conjunto aberto é conexo se e só se não pode ser escrito como a união de dois conjuntos abertos e disjuntos.
- *simplesmente conexo* se for conexo e qualquer curva de fechada for homotópica a um ponto, isto é, qualquer curva fechada em D pode ser deformada continuamente num ponto sem sair do conjunto.¹⁰
- *multiplamente conexo* se for conexo e não for simplesmente conexo.

1.4.12 Funções harmónicas em \mathbb{R}^2

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto, e $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. A função u diz-se *harmónica* em \mathcal{U} sse $u \in C^2(\mathcal{U})$ e para todo $(x, y) \in \mathcal{U}$

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Δ designa o operador laplaciano (por vezes também representado por ∇^2).

Relação entre funções harmónicas (em \mathbb{R}^2) e funções analíticas (em \mathbb{C})

- Se $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica em U e $f = u + iv$ então u e v são funções *harmónicas* em $U \subset \mathbb{R}^2$. Nestas condições, u e v denominam-se *harmónicas conjugadas*.

Observa-se que as partes real e imaginária de uma função analítica verificam a equação de Laplace. Esta ligação entre funções analíticas e a equação de Laplace reforça a importância das funções de variável complexa e abre caminho para numerosas aplicações da matemática.

⁹Dois conjuntos não vazios tais que cada um deles é disjunto da aderência do outro, dizem-se *separados*. Então D é conexo se e só se não pode ser escrito como a união de dois conjuntos separados.

¹⁰Intuitivamente, um conjunto D é simplesmente conexo se for um “conjunto conexo sem buracos”; “ D não tem buracos” descreve-se rigorosamente pela proposição: para qualquer $z : [0, 1] \rightarrow D$ contínua, com $z(0) = z(1)$ existe $z_0 \in D$ e uma função contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ tal que $H(0, t) = z(t) \quad \forall t \in [0, 1]$ e $H(1, t) = z_0$, $\forall t \in [0, 1]$. A função H diz-se uma homotopia (de $z(t)$ em z_0) e deforma continuamente, sem sair de D , a curva parametrizada por $z(t)$ no ponto z_0 .

- Reciprocamente, seja $u : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmónica e $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simplesmente conexo. Então é sempre possível determinar (a menos de uma constante) a sua harmónica conjugada $v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ através das equações de Cauchy-Riemann.

Exemplo:

Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x, y) = y(x - 3).$$

Vamos começar por mostrar que u é uma função harmónica em \mathbb{R}^2 . Por ser uma função polinomial, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x - 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

concluindo-se o pretendido e, consequentemente, que u é a parte real (ou imaginária) de uma função inteira f . Para determinar $f = u + iv$ recorde-se que se f é inteira então as condições de Cauchy-Riemann são verificadas em todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = \int y \, dy + c(x) = \frac{y^2}{2} + c(x)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad x - 3 = -c'(x) \quad \Rightarrow \quad c(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + c$$

Então $v(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$ e

$$f(z) = f(x + iy) = y(x - 3) + i\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 3x + c\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

Note que:

$$f(z) = -\frac{i}{2} (x^2 + 2x(iy) + (iy)^2) + 3i(x + iy) + ic = -\frac{i}{2} z^2 - 3iz + ic.$$

1.5 Integração em \mathbb{C}

1.5.1 Curvas em \mathbb{C}

Sendo $z(t)$ uma função complexa **contínua** de domínio $[a, b] \subset \mathbb{R}$, define-se *caminho* ou *curva orientada* em \mathbb{C} como sendo a *curva*:

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [a, b]\}$$

que se convencionou percorrida no sentido especificado por $z(t)$. Os pontos $z(a)$ e $z(b)$ denominam-se respectivamente o *ponto inicial* e o *ponto final* do caminho. A aplicação $z(t)$ diz-se uma *parametrização* de γ . ¹¹

Exemplos:

¹¹Um caminho é pois uma curva à qual se acrescenta uma orientação. Neste sentido, quando nos referirmos a uma curva percorrida de uma certa forma, estamos a caracterizar um caminho.

1. Parametrização de um segmento de recta

O segmento de recta que une z_0 a z_1 pode ser parametrizado por:

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = tz_1 + (1 - t)z_0 \quad \text{onde } 0 \leq t \leq 1$$

2. Parametrização da circunferência centrada na origem de raio 1

Esta circunferência, se percorrida no sentido directo, pode simplesmente ser parametrizada por:

$$z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

De facto, é óbvio que $x^2(t) + y^2(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

3. Parametrização de uma circunferência genérica

Os pontos, z , de uma circunferência centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ de raio $r > 0$ verificam $|z - z_0| = r$. Assim sendo, $z - z_0 = re^{i\theta}$, onde θ é o argumento de $z - z_0$. Desta forma, podemos tomar:

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad \text{onde } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

(se a circunferência for percorrida uma vez no sentido directo), e

$$z(t) = z_0 + re^{-it}, \quad \text{onde } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

(se a circunferência for percorrida uma vez no sentido inverso).

4. A função $z(t) = x(t) + iy(t)$ definida por

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, \quad t \in [-1, 2]$$

é uma parametrização da porção da parábola $y = x^2$ unindo o ponto $z(-1) = -1 + i$ ao ponto $z(2) = 2 + 4i$.

O caminho γ (e a respectiva curva) diz-se

- **regular** se $z(t)$ é continuamente diferenciável, isto é, se $x'(t)$ e $y'(t)$ existem e são contínuas em $]a, b[$. Nesse caso tem-se que

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

Se $z'(t) \neq 0$ então $z'(t)$ designa-se por vector tangente à curva no ponto $z(t)$.

Todas as curvas dos exemplos acima descritos são regulares, sendo que:

1. se $z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = tz_1 + (1 - t)z_0$ tem-se que $z'(t) = z_1 - z_0$ (que é constante);
2. se $z(t) = e^{it}$ tem-se que $z'(t) = ie^{it}$;
4. se $z(t) = t + it^2$ tem-se que $z'(t) = 1 + 2it$.

Em todos os exemplos, existe vector tangente em qualquer dos pontos da curva.

- **seccionalmente regular** se $z(t)$ é regular para $t \in]a, b[\setminus \{t_1, \dots, t_k\}$;

Exemplo: a curva γ parametrizada por

$$z(t) = \begin{cases} t + it^2 & \text{se } -1 \leq t \leq 2 \\ t + 4i & \text{se } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

é seccionalmente regular. É fácil de observar que γ é a união da porção da parábola $y = x^2$ unindo $-1 + i$ a $2 + 4i$ com o segmento de recta horizontal $\text{Im} z = 4$ unindo $2 + 4i$ a $3 + 4i$. Ambas as curvas são regulares. No entanto a curva γ não é regular visto não existir $z'(2)$.

- **simples** se $z(t)$ é injectiva em $]a, b]$ e em $[a, b[$, isto é, se $t_1 \neq t_2$ então $z(t_1) \neq z(t_2)$ ou $(t_1 = a \text{ e } t_2 = b)$.¹²
- **fechada** se $z(a) = z(b)$;
- **curva de Jordan** se for simples e fechada.

Teorema da Curva de Jordan:

Qualquer curva de Jordan, γ , divide \mathbb{C} em duas regiões disjuntas de fronteira γ , uma das quais, denotada por *interior de γ* , $\text{int } \gamma$, é limitada e a outra, denotada por *exterior de γ* , $\text{ext } \gamma$, é não limitada.

1.5.2 Integral complexo

Se $\gamma \subset \mathbb{C}$ é um caminho seccionalmente regular, parametrizado por $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, e f uma função complexa contínua em γ , define-se

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (1.14)$$

Note-se que o integral do 2º membro da igualdade (1.14) pode ser interpretado como o integral da função vectorial, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(t) = f(z(t)) z'(t)$ para $t \in [a, b]$, e que é obtido à custa do integral de Riemann das funções reais de variável real por:

$$\int_a^b F(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \text{Re } F(t) dt + i \int_a^b \text{Im } F(t) dt$$

Exemplo:

Pretende-se determinar $\int_{\gamma} e^{\bar{z}} dz$ em que γ é o segmento de recta que une $-i$ a $1 + i$. Uma possível parametrização de γ é

$$z(t) = (1 + i)t - i(1 - t) = t + i(2t - 1) \quad , \quad t \in [0, 1]$$

Assim

$$\int_{\gamma} e^{\bar{z}} dz = \int_0^1 e^{\overline{t + i(2t - 1)}} (t + i(2t - 1))' dt = \int_0^1 e^{t + i(1 - 2t)} (1 + 2i) dt = \frac{-3 + 4i}{5} (e^{1-i} - e^i)$$

¹²Ou seja, um caminho simples apenas se pode autointersectar nos extremos.

Invariância por reparametrização. Seja γ um caminho simples, e f contínua em γ . Se $z(s)$, com $s \in [a, b]$, e $w(t)$, com $t \in [\alpha, \beta]$ são duas parametrizações distintas de γ , então

$$\int_a^b f(z(s))z'(s) ds = \int_\alpha^\beta f(w(t))w'(t) dt$$

Demonstração:

Consideremos primeiro o caso de uma curva aberta. Dado que a curva é aberta e simples, $z(s)$ e $w(t)$ são injectivas em, respectivamente, $[a, b]$ e $[\alpha, \beta]$. Então $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, que pode ser definida por

$$w(t) = z(\varphi(t)) \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \quad \Leftrightarrow \quad w = z \circ \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = z^{-1} \circ w$$

é injectiva em $[\alpha, \beta]$. Em consequência:

$$\int_\alpha^\beta f(w(t))w'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(z(\varphi(t)))z'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b f(z(s))z'(s) ds$$

A última igualdade decorre da substituição de variável $s = \varphi(t)$.

O caso de uma curva fechada prova-se agora facilmente, escrevendo-a como a união de duas curvas abertas. \square .

Vemos assim que o integral está bem definido no caso de o caminho ser simples, pois o seu valor é independente da parametrização utilizada. A partir da definição, mostram-se facilmente as seguintes propriedades:

Propriedades do integral

- **(Linearidade)** Se f e g são funções contínuas em γ , e α, β constantes complexas, então

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_\gamma f(z) dz + \beta \int_\gamma g(z) dz$$

- **(Aditividade)** Se γ é a concatenação de duas curvas regulares, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, então

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Note que se o extremo final de γ_1 coincide com o extremo inicial de γ_2 , a concatenação dos caminhos γ_1 com γ_2 , $\gamma_1 + \gamma_2$, consiste na união das curvas, percorrendo primeiro γ_1 e depois γ_2 .

- **(Simetria)** Se denotarmos por $-\gamma$ o caminho γ percorrida em sentido inverso ao de γ , então

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_\gamma f(z) dz$$

- **(Majoração do Integral)** Se f é contínua no caminho regular γ , e $z(t)$, com $t \in [a, b]$ é uma parametrização de γ , então

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)| |dz| \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \leq ML(\gamma)$$

onde $M \geq 0$ é um majorante de $|f(z)|$ em γ . Note que o comprimento da curva γ é dado por:

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |z'(t)| dt$$

Exemplos:

1. Considere-se a função $f(z) = f(x + iy) = x^2 + iy^2$, e a curva γ que une 0 a $2 + i$ através do segmento de recta unindo 0 a $1 + i$ — que designamos por γ_1 — e do segmento de recta unindo $1 + i$ a $2 + i$ — que designamos por γ_2 . Desta forma, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; usando a aditividade do integral:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Uma parametrização possível para γ_1 é

$$z_1(t) = (1 + i)t, \quad t \in [0, 1]$$

pelo que

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^1 f((1 + i)t) ((1 + i)t)' dt = (1 + i) \int_0^1 (t^2 + it^2) dt = \frac{(1 + i)^2}{3} = \frac{2i}{3}$$

Por outro lado, Uma parametrização possível para γ_2 é

$$z_2(t) = t + i, \quad t \in [1, 2]$$

pelo que

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_1^2 f(t + i) (t + i)' dt = \int_1^2 (t^2 + i) dt = \frac{7}{3} + i$$

Concluimos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \frac{7}{3} + \frac{5i}{3}$$

2. Vamos obter uma estimativa do valor do integral

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz \right|$$

onde γ é a circunferência $|z| = 2$ percorrida uma vez em sentido directo. Pela propriedade da majoração do integral temos que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz \right| \leq \int_{\gamma} \left| \frac{e^z}{z^2 + 1} \right| |dz| \leq \left| \frac{e^w}{w^2 + 1} \right| \int_{\gamma} |dz|$$

em que w é o ponto de γ onde o módulo da função $\frac{e^z}{z^2 + 1}$ toma o maior valor. Para o determinar, observe-se que, escrevendo $z = x + iy$ tem-se

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x \leq e^2 \quad \text{se} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

e como consequência da desigualdade triangular

$$|z^2 + 1| \geq \left| |z|^2 - 1 \right| = |4 - 1| = 3 \quad \text{se} \quad |z| = 2$$

Então, para $z \in \gamma$

$$\left| \frac{e^z}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{|e^z|}{|z^2 + 1|} \leq \frac{e^2}{3}$$

e assim

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{e^2}{3} \int_{\gamma} |dz| = \frac{4\pi e^2}{3}$$

tendo em conta que $\int_{\gamma} |dz|$ é igual ao comprimento de γ , ou seja, 4π .

1.5.3 Teorema de Cauchy e suas consequências

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto, se $g : D \subset \mathbb{C}$ é analítica em D com derivada, g' , também analítica em D , e se γ é a curva simples e seccionalmente regular contida em D que une z_1 a z_2 , então

$$\int_{\gamma} g'(z) dz = g(z_2) - g(z_1).$$

Neste caso, fazendo $F = g$ e $f = g'$, atendendo a que $F' = f$ diz-se que F é uma primitiva de f . Resulta então que:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Nesta forma, o teorema aplica-se a qualquer função primitivável sendo, em particular, válido para funções polinomiais. Se f for uma função primitivável e γ uma curva de Jordan seccionalmente regular, resulta também que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

A generalização deste resultado a qualquer função analítica é feita pelo seguinte teorema.

Teorema de Cauchy

Se γ é uma curva de Jordan seccionalmente regular e f é analítica num aberto simplesmente conexo contendo γ , então

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

“**Dem.:**” (com uma condição adicional)

Vamos assumir que as partes real e imaginária de uma função analítica têm derivada contínua no sentido de \mathbb{R}^2 ¹³. Assim, sendo $f = u + iv$ analítica em D , u e v são funções continuamente diferenciáveis em D . Tem-se então que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \oint_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) \\ &= \oint_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \oint_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy \end{aligned}$$

¹³A conclusão do teorema de Cauchy pode ser obtida sem recurso a esta hipótese adicional. A demonstração completa do teorema — devida a Goursat — é, contudo, bem mais elaborada do que esta, que apresentamos.

Atendendo às condições do Teorema (γ uma curva de Jordan definida num aberto simplesmente conexo D) e à condição adicional (u e v continuamente diferenciáveis em D) podemos aplicar o Teorema de Green¹⁴ aos dois integrais de linha da expressão anterior, obtendo-se

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \iint_{\text{int}\gamma} \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\text{int}\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

Visto a região $\text{int } \gamma \subset D$ (porque D é simplesmente conexo) e f é analítica em D , verificam-se as condições de Cauchy-Riemann na região $\text{int } \gamma$ e, como tal,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

□

Exemplos:

1. Considere-se a função complexa $f(z) = \text{sh}(\cos^2 z)$. Dado que f é uma função inteira, o Teorema de Cauchy permite concluir que

$$\oint_{\gamma} \text{sh}(\cos^2 z) dz = 0$$

para qualquer curva de Jordan em \mathbb{C} .

2. Dados z_0 e $z_1 \in \mathbb{C}$ fixos, considere-se a função complexa $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$. Por ser o quociente de funções inteiras, f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Assim, sendo γ a circunferência de centro em z_1 e de raio $R < |z_1 - z_0|$ (por forma a que z_0 não pertença ao interior da circunferência), conseguimos determinar um conjunto D aberto e simplesmente conexo que contém a curva e ao qual z_0 não pertence (por exemplo $D = \{z : |z - z_1| < R + \epsilon\}$ com ϵ tão pequeno quanto seja necessário). Pelo Teorema de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 0$$

Considerando agora $z_1 = z_0$ e $R > 0$ arbitrário, é óbvio que não se consegue determinar D nas condições do teorema visto que, para f ser analítica em D , z_0 não poderá pertencer a D . Mas, para que D seja simplesmente conexo, $z_0 \in \text{int } \gamma \subset D$. Assim o Teorema de Cauchy não é aplicável. Para calcular o integral, e assumindo que a curva está a ser percorrida em sentido directo, considere-se a parametrização de γ , $z(t) = z_0 + Re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$. Então

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + Re^{it} - z_0} (z_0 + Re^{it})' dt = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt = 2\pi i$$

¹⁴**Teorema de Green:** Sendo γ uma curva de Jordan contida em $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e simplesmente conexo, e sendo P e Q duas funções reais de classe C^1 em D , então:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\text{int}\gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Por outro lado, se γ é percorrida em sentido inverso:

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = - \oint_{\gamma^-} \frac{1}{z - z_0} dz = -2\pi i$$

Consequências do Teorema de Cauchy

- Independência do caminho de integração

Se f é analítica num aberto simplesmente conexo, $D \subset \mathbb{C}$, $z_1, z_2 \in D$ e γ_1, γ_2 duas curvas seccionalmente regulares em D unindo z_1 a z_2 . Então

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Como consequência, no caso de f ser analítica podemos definir

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

em que γ é qualquer curva regular unindo z_1 a z_2 definida em D .

- Primitivação de funções complexas de variável complexa

Dada uma função complexa f definida e contínua num aberto $D \subset \mathbb{C}$, diz-se que F é uma *primitiva* de f em D se $F'(z) = f(z)$, para todo $z \in D$. Como vimos, as regras de derivação das funções analíticas são similares às das funções reais de classe C^1 . Assim sendo, as regras de primitivação das funções analíticas são também similares às usadas no caso real.

Exemplo:

1. A função $F(z) = -\cos z$ é uma primitiva de $f(z) = \sin z$, visto que $(-\cos z)' = \sin z$. Dado que $(-\cos z + C)' = \sin z$, qualquer que seja $C \in \mathbb{C}$, $-\cos z + C$ é a expressão geral das primitivas de $\sin z$.
2. Se f e g são funções analíticas, vimos que o seu produto é também uma função analítica e $(fg)' = f'g + fg'$. Então podemos deduzir a fórmula da primitivação por partes

$$P(fg') = fg - P(f'g)$$

- Teorema Fundamental do Cálculo para Funções Primitiváveis

Considere-se $D \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, $z_1, z_2 \in D$ e sejam f, f' analíticas em D . Então, e considerando γ qualquer curva regular em D unindo z_1 a z_2 ,

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz &= \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (dx + i dy) \\ &= \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + i \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned}$$

Dado que f é analítica em D , pelas condições de Cauchy-Riemann podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz &= \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ &= \int_{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy) + i \int_{\gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy) \\ &= \int_{\gamma} \nabla u \cdot dr + i \int_{\gamma} \nabla v \cdot dr\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para campos conservativos, conclui-se que

$$\int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz = u(z_2) - u(z_1) + i(v(z_2) - v(z_1)) = f(z_2) - f(z_1)$$

obtendo-se tal como no caso das funções reais uma relação entre primitiva e integral de uma função complexa.

- **Teorema Fundamental do Cálculo para conjuntos simplesmente conexos**

Se f é analítica num aberto simplesmente conexo, $D \subset \mathbb{C}$, e $z_0 \in D$ então a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

está bem definida, é analítica e é uma primitiva de f , em D . Adicionalmente, se $z_1, z_2 \in D$, então

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

em que $F' = f$ é qualquer primitiva de f em D .

Demonstração:

Dado que f é analítica num aberto simplesmente conexo, D , o integral complexo não depende do caminho de integração e, como tal, $F(z)$ está bem definida para $z \in D$. Para $z \in D$ arbitrário considere-se γ uma curva regular e simples em D unindo z_0 a z . Defina-se também $r > 0$ para o qual $B(z, r) \subset D$, $z_1 \in B(z, r)$ e s o segmento de recta unindo z a z_1 . Então

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w) dw, \quad F(z_1) = \int_{s \cup \gamma} f(w) dw$$

É então fácil verificar que

$$\begin{aligned}\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z) &= \frac{\int_s f(w) dw - f(z)(z - z_1)}{z - z_1} \\ &= \frac{\int_s (f(w) - f(z)) dw}{z - z_1}\end{aligned}$$

Por continuidade de f em D , para qualquer $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ para o qual se tem $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ sempre que $|z - w| < r$. Assim

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z) \right| \leq \frac{\epsilon}{|z - z_1|} \int_s |dw| = \epsilon$$

Conclui-se que

$$\lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z)$$

ou seja, para qualquer $z \in D$ tem-se que $F'(z) = f(z)$, pelo que F é analítica e é uma primitiva de f em D . \square

Observe-se que a demonstração do teorema fundamental do cálculo, apenas usa a analiticidade de f , para estabelecer a independência do integral do caminho de integração.

Exemplo:

Vamos calcular o valor do integral $\int_C \left(\frac{1}{z-2} + ze^{z^2} \right) dz$, sendo C a curva parametrizada por $\gamma(t) = 3\cos(t) + 2i\sin(t)$, com $t \in [0, 3\pi/2]$.

Observe-se em primeiro lugar que a função ze^{z^2} é inteira, pelo que o teorema fundamental do cálculo é aplicável em $D = \mathbb{C}$. Assim

$$\int_C ze^{z^2} dz = P(ze^{z^2}) \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(3\pi/2)} = \frac{1}{2} e^{z^2} \Big|_3^{-2i} = \frac{e^{-4} - e^9}{2},$$

onde $P(ze^{z^2})$ designa uma primitiva da função $f(z) = ze^{z^2}$. Por outro lado, dado que todos os ramos de $\log(z-2)$ são primitiva da função $\frac{1}{z-2}$, há que ter o cuidado de escolher um ramo que seja analítico num conjunto aberto e simplesmente conexo que contenha a curva C . Para esse efeito, considere o ramo do logaritmo tal que $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-2) < \frac{7\pi}{4}$; o seu domínio de analiticidade é:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : z = 2 + re^{i\theta} \text{ onde } -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4} \text{ e } r > 0\}.$$

Para $z \in D$, vamos então usar o ramo:

$$\log(z-2) = \log|z-2| + i \arg(z-2), \quad \text{onde } -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-2) < \frac{7\pi}{4}.$$

Trata-se de uma função analítica em D , com $C \subset D$ e $\frac{d}{dz} \log(z-2) = \frac{1}{z-2}$ para qualquer $z \in D$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_C \frac{1}{z-2} dz = \log(z-2) \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(3\pi/2)} = \log(-2i-2) - \log(3-2) = \frac{3}{2} \log 2 + i \frac{5\pi}{4}.$$

Finalmente:

$$\int_C \left(\frac{1}{z-2} + ze^{z^2} \right) dz = \frac{e^{-4} - e^9}{2} + \frac{3}{2} \log 2 + i \frac{5\pi}{4}$$

• Teorema de Cauchy Generalizado

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simplesmente conexo, γ uma curva de Jordan em D , $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curvas de Jordan contidas no interior de γ e verificando para $i \neq j$

- $\overline{\text{int}(\gamma_j)} \cap \overline{\text{int}(\gamma_i)} = \emptyset$;
- todas as curvas têm orientação igual à orientação de γ .

Sendo ainda, f uma função analítica em $\overline{\text{int}(\gamma)} \setminus (\text{int}(\gamma_1) \cup \dots \cup \text{int}(\gamma_n))$, então

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} f(z) dz$$

Exemplo:

1. Sendo z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} e γ uma curva de Jordan tal que $z_0 \notin \gamma$. Então

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 0 & \text{se } z_0 \notin \text{int } \gamma \\ \pm 2\pi i & \text{se } z_0 \in \text{int } \gamma \end{cases}$$

Num exemplo anterior já tínhamos concluído que o integral é 0 se z_0 é um ponto exterior à curva e, por cálculo directo, que

$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

onde a curva é percorrida em sentido positivo. O Teorema de Cauchy generalizado permite concluir que se γ for percorrida positivamente e estiver nas condições enunciadas, se tem

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

sendo $R > 0$ escolhido de forma a que $D(z_0, R) \subset \text{int } \gamma$. Idem para o sentido negativo.

2. Sendo γ uma curva de Jordan percorrida em sentido directo e tal que $\pm 1 \notin \gamma$. Então

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \begin{cases} 0 & \text{se } \pm 1 \in \text{ext } \gamma \\ \pi i & \text{se } 1 \in \text{int } \gamma \text{ e } -1 \in \text{ext } \gamma \\ -\pi i & \text{se } -1 \in \text{int } \gamma \text{ e } 1 \in \text{ext } \gamma \\ 0 & \text{se } \pm 1 \in \text{int } \gamma \end{cases}$$

De facto:

- * se ± 1 não pertencem à região interior a γ o resultado é uma consequência imediata do teorema de Cauchy;
- * para o caso em que 1 pertence à região interior a γ e -1 pertence à sua região exterior, observa-se que $\frac{1}{z+1}$ é analítica num aberto simplesmente conexo contendo γ e como tal é aplicável a Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{z+1}}{z - 1} dz = 2\pi i \frac{1}{z + 1} \Big|_{z=1} = \pi i$$

- * para o caso em que -1 pertence à região interior a γ e 1 pertence à sua região exterior, observa-se que $\frac{1}{z-1}$ é analítica num aberto simplesmente conexo contendo γ e como tal é aplicável a Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{z-1}}{z + 1} dz = 2\pi i \frac{1}{z - 1} \Big|_{z=-1} = -\pi i$$

- * por último, se tanto 1 como -1 pertencem à região interior à curva γ , pelo teorema de Cauchy generalizado

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 - 1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 - 1} dz$$

em que γ_1 é qualquer curva de Jordan percorrida em sentido positivo e tal que $1 \in \text{int } \gamma_1$ e $-1 \notin \text{int } \gamma_1 \cup \gamma_1$, e γ_2 é qualquer curva de Jordan percorrida em sentido positivo e tal que $-1 \in \text{int } \gamma_2$ e $1 \notin \text{int } \gamma_2 \cup \gamma_2$.

• Generalização do Teorema de Cauchy

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, γ uma curva de Jordan em D , z_0 um ponto pertencente à região interior a γ e f uma função analítica em $D \setminus \{z_0\}$ verificando

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

Então

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Dem:

Pelo teorema de Cauchy generalizado, tem-se que para ϵ suficientemente pequeno

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{|z-z_0|=\epsilon} f(z) dz, \quad \forall \epsilon > 0$$

tendo a circunferência a mesma orientação que γ . Por outro lado, tendo em conta que, por hipótese, $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$ podemos determinar δ tão pequeno quanto se necessite, de forma a que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |(z - z_0)f(z)| < \epsilon \Rightarrow |f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - z_0|}$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \oint_{|z-z_0|=\epsilon} f(z) dz \right| \leq \oint_{|z-z_0|=\epsilon} |f(z)| |dz| \\ &\leq \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{\epsilon}{|z - z_0|} |dz| = \oint_{|z-z_0|=\epsilon} |dz| = 2\pi\epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtém-se

$$\left| \oint_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 0 \Rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

□

• Fórmula Integral de Cauchy

Se γ é uma curva de Jordan e f é analítica num aberto simplesmente conexo contendo γ , então para qualquer $z_0 \in \text{int } (\gamma)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

onde γ é percorrida uma vez no sentido directo.

Dem.

Dado que f é analítica em z_0 , tem-se que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

Assim, aplicando a generalização do teorema de Cauchy à função (de z) $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, obtém-se:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Então

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 + 2\pi i f(z_0)$$

□

Exemplos:

1. Vamos calcular

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi}{2}} dz$$

sendo γ qualquer curva de Jordan em \mathbb{C} orientada positivamente e tal que $\frac{\pi}{2} \in \text{int } \gamma$. Dado que $f(z) = e^{-z}$ é inteira, estamos nas condições da fórmula integral de Cauchy pelo que podemos concluir que:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi}{2}} dz = 2\pi i f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i e^{-\pi/2}.$$

2. Vamos calcular

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{2z + 1} dz$$

sendo γ qualquer curva de Jordan em \mathbb{C} orientada positivamente e tal que $-\frac{1}{2} \in \text{int } \gamma$. Atendendo a que a função $f(z) = z$ é inteira, por aplicação da fórmula integral de Cauchy obtém-se:

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{2z + 1} dz = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{z}{z + \frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \left(2\pi i f\left(-\frac{1}{2}\right) \right) = -\frac{\pi i}{2}$$

3. Vamos calcular

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + 9z} dz$$

em que γ é a circunferência $|z| = 1$ percorrida uma vez em sentido directo. A função integranda é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, -3i, 3i\}$; dos pontos onde a função não é analítica apenas 0 pertence à região $|z| < 1$. Assim

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + 9z} dz = \oint_{\gamma} \frac{\frac{\cos z}{z^2 + 9}}{z} dz = 2\pi i \left. \frac{\cos z}{z^2 + 9} \right|_{z=0} = \frac{2\pi i}{9}$$

onde utilizámos a fórmula integral de Cauchy e o facto de a função $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 9}$ ser analítica num aberto, simplesmente conexo contendo γ (por exemplo $|z| < 2$),

• Derivada de uma função analítica

Seja f uma função analítica num aberto simplesmente conexo D . Então a sua derivada f' é uma função analítica em D .

Demonstração:

Seja $z \in D$ arbitrário, e f analítica em D , para qualquer curva de Jordan, γ , contida em D percorrida em sentido directo e tal que $z \in \text{int } \gamma$, tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Em particular, para $r > 0$, tão pequeno que $D(z, r) \subset D$, tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

onde a circunferência é percorrida uma vez em sentido directo. Então

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \frac{1}{h} \left(\frac{f(w)}{w-(z+h)} - \frac{f(w)}{w-z} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{|w-z|=r} f(w) \frac{1}{(w-z-h)(w-z)} dw \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)} dw = \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

Para tal

$$\begin{aligned} & \left| \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)} dw - \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ &= \left| \oint_{|w-z|=r} f(w) \frac{h}{(w-z-h)(w-z)^2} dw \right| \\ &\leq \oint_{|w-z|=r} |f(w)| \frac{|h|}{|w-z-h| |w-z|^2} |dw| \\ &\leq \frac{M|h|}{r^2} \oint_{|w-z|=r} \frac{1}{|w-z-h|} |dw| \end{aligned}$$

onde M denota o máximo de $|f|$ na circunferência $|w-z| = r$. Atendendo a que $|w-z-h| \geq ||w-z| - |h|| \geq r - |h|$ na circunferência $|w-z| = r$ (e tomando $|h| < r$), podemos concluir

que

$$\begin{aligned} & \left| \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)} dw - \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ & \leq \frac{M|h|}{r^2|r-h|} \oint_{|w-z|=r} |dw| \\ & = \frac{2\pi M|h|}{r|r-h|} \rightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Demonstrámos então que se f é analítica em D , a sua derivada satisfaz a fórmula

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

para qualquer curva de Jordan γ em D percorrida em sentido directo e tal que $z \in \text{int } \gamma$. Repetindo o argumento anterior verifica-se que para qualquer $z \in D$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw$$

para qualquer curva de Jordan γ em D percorrida em sentido directo e tal que $z \in \text{int } \gamma$. Conclui-se que a derivada de f' está bem definida e existe em D pelo que f' é analítica em D . \square

- Fórmula Integral de Cauchy Generalizada

Nas mesmas condições da fórmula integral de Cauchy, tem-se que para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ a derivada de ordem n de f , $f^{(n)}$, está bem definida, é analítica em D e satisfaz a fórmula

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

para qualquer $z_0 \in D$.

Exemplo:

1. Pretendemos calcular o valor do integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4} dz$$

onde se supõe que a curva é percorrida uma vez em sentido directo. Começamos por observar que a função $\frac{e^z}{(z-1)^4}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, pelo que não é analítica na região interior à curva, e como tal não é aplicável o Teorema de Cauchy. Consideremos a função $f(z) = e^z$, que é uma função inteira, e tomando $z_0 = 1$ (que pertence à região interior à curva) estamos em condições de aplicar a fórmula integral de Cauchy generalizada para a derivada de f de ordem $n = 3$. Assim:

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} (e^z)''' \Big|_{z=1} = \frac{\pi e i}{3}$$

2. Pretendemos calcular o valor do integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{\log(z+3)}{z^2(z^2+9)} dz$$

onde se considera que a curva é percorrida uma vez em sentido directo e $\log z$ representa o valor principal do logaritmo. A função $f(z) = \frac{\log(z+3)}{z^2(z^2+9)}$ está definida em $\mathbb{C} \setminus \{-3i, 3i, -3, 0\}$ e é analítica em

$$\mathbb{C} \setminus \left(\{0, 3i, -3i\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3\} \right)$$

Considere-se $D = \{z : |z| < \frac{5}{2}\}$. Verifica-se que D é aberto, simplesmente conexo, contém a curva de integração no seu interior; definindo

$$f(z) = \frac{\log(z+3)}{z^2+9},$$

pelo que vimos acima f é analítica em D . Então, e usando a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 1,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\log(z+3)}{z^2(z^2+9)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{\log(z+3)}{z^2+9}}{z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{\log(z+3)}{z^2+9} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{27}$$

3. Pretendemos calcular o valor do integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz$$

em que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de domínio \mathbb{C} tal que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x, y) = y^3 - x^3 + 3xy^2 - 3x^2y,$$

e a curva é percorrida uma vez em sentido horário. Atendendo a que

- $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
- para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 3y^2 - 6xy) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 + 6xy - 3x^2) = 0$$

concluimos que u é harmónica em \mathbb{R}^2 pelo que existe $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ é uma função inteira. Por outro lado, visto que 0 pertence à região interior da circunferência $|z| = 1$, estamos em condições de aplicar a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 2 de f :

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz = -\frac{2\pi i}{2!} f''(0).$$

O sinal negativo decorre da orientação da curva. Note-se que a analiticidade de f nos permite, através das equações de Cauchy-Riemann, determinar $f''(0)$ sem conhecer explicitamente a função $v = \operatorname{Im} f$. De facto, para qualquer $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = (-3x^2 + 3y^2 - 6xy) - i(3y^2 + 6xy - 3x^2)$$

Usando as notações $\tilde{u} = \operatorname{Re} f'$ e $\tilde{v} = \operatorname{Im} f'$, então

$$\begin{aligned} f''(z) &= \left(f'(z) \right)' = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-3x^2 + 3y^2 - 6xy \right) + i \frac{\partial}{\partial x} \left(-3y^2 - 6xy + 3x^2 \right) \\ &= -6x - 6y + i(-6y + 6x) \end{aligned}$$

Finalmente

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz = -\pi i \left(-6x - 6y + i(-6y + 6x) \right) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0$$

Consequências das fórmulas integrais de Cauchy

- **Teorema de Morera**

Se $D \subset \mathbb{C}$ é aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua e

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para qualquer curva de Jordan γ definida em D , então f é analítica em D .

Demonstração:

Seja $w \in D$ arbitrário e considere-se $\delta > 0$ para o qual $D(w, \delta) \subset D$ ¹⁵. Para $z \in D(w, \delta)$, defina-se a função

$$F(z) = \int_w^z f(\chi) d\chi$$

Observe-se que a função está bem definida, visto a condição

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para qualquer curva de Jordan γ definida em $D(w, \delta)$ permitir concluir independência do integral do caminho de integração. Tal como na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo podemos então demonstrar que F é analítica em $D(w, \delta)$ e $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(w, \delta)$. A fórmula integral de Cauchy permite concluir que, sendo F analítica em $D(w, \delta)$, F' é também analítica em $D(w, \delta)$. Conclui-se que f é analítica em $D(w, \delta)$. Dado que w foi escolhido arbitrariamente o resultado fica demonstrado. \square

- **Teorema de Liouville**

Se f é uma função inteira e limitada então f é constante.

Demonstração:

Dado que f é inteira, a Fórmula integral de Cauchy permite concluir que f' é inteira e para todo $z \in \mathbb{C}$ se tem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

¹⁵Tal δ existe visto D ser aberto.

onde a circunferência de centro em z e raio $R > 0$ arbitrário, é percorrida uma vez em sentido positivo. Então

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|w-z|=R} \left| \frac{f(w)}{(w-z)^2} \right| |dw| \end{aligned}$$

Por outro lado, visto f ser limitada, existe $M > 0$ para o qual

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Então

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|w-z|=R} \frac{M}{R^2} |dw| = \frac{M}{R}$$

Visto R ser arbitrário, podemos considerá-lo tão grande quanto se queira; fazendo $R \rightarrow \infty$, concluímos que:

$$|f'(z)| \leq 0 \Rightarrow |f'(z)| = 0 \Rightarrow f'(z) = 0$$

pelo que f é constante em \mathbb{C} . □

• Teorema Fundamental da Álgebra

Seja $P(z)$ um polinómio não constante em \mathbb{C} . Então existe $\chi \in \mathbb{C}$ tal que $P(\chi) = 0$.

Demonstração:

Argumentando por contradição, vamos supor que tal χ não existe, isto é

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) \neq 0$$

o que implica de imediato que a função $1/P(z)$ é inteira. Por outro lado, visto $|P(z)| \rightarrow \infty$ quando $|z| \rightarrow \infty$, existe $R > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| < 1 \quad \text{se} \quad |z| > R \quad (1.15)$$

e, por continuidade de $1/P(z)$, existe $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| < M \quad \text{se} \quad |z| \leq R \quad (1.16)$$

As desigualdades (1.15) e (1.16) permitem afirmar que $1/P(z)$ é limitada em \mathbb{C} . Pelo Teorema de Liouville conclui-se que $1/P(z)$ é constante, o que constitui uma contradição. □

• Desigualdade de Cauchy

Se f é uma função analítica num conjunto aberto e simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ e escolha-se $r > 0$ tal que $\{z : |z - z_0| = r\} \subset D$. Então

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

sendo $M \in \mathbb{R}^+$ o máximo de $|f(z)|$ em $B_r(z_0)$.

1.6 Séries de Potências

1.6.1 Convergência Pontual e Convergência Uniforme de Sucessões de Funções

Considere-se $\{f_n(z), n \in \mathbb{N}\}$, com $z \in D \subset \mathbb{C}$, uma sucessão de funções complexas.

Convergência Pontual

- Diz-se que a sucessão $\{f_n(z)\}_n$ converge no ponto z_0 se para a sucessão numérica $\{f_n(z_0)\}_n$ for convergente. Se $\{f_n(z)\}_n$ convergir em todos os pontos de um conjunto D dizemos que $\{f_n(z)\}_n$ é pontualmente convergente em D . Neste caso podemos definir, para cada $z \in D$:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon, z) \text{ tal que } \forall n > N \text{ se tem } |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

Convergência Uniforme

- Diz-se que a sucessão f_n converge uniformemente em D ,

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente em } D \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \text{ tal que } \forall n > N \text{ se tem } |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in D$$

Note-se que, na noção de convergência uniforme, N é independente de $z \in D$.

- f_n converge uniformemente para f em D é equivalente a afirmar que

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \text{ tal que } \forall n > N \text{ se tem } \sup_{z \in D} |f(z) - f_n(z)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} |f(z) - f_n(z)| = 0$$

Crítério de Cauchy para Convergência Uniforme

- A sucessão de funções f_n converge uniformemente em D se e só se

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \text{ tal que } \forall n > m > N \text{ se tem } |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon, \forall z \in D$$

- f_n converge uniformemente para f em D é equivalente a afirmar que

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \text{ tal que } \forall m, n > N \text{ se tem } \sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)| = 0$$

Propriedades do Limite de uma sucessão de funções uniformemente convergente

Suponhamos que $\lim_n f_n = f$ uniformemente em $D \subset \mathbb{C}$. Então

- se D é aberto e para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é contínua em D , tem-se que f é contínua em D e

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_n \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

qualquer que seja a curva γ regular contida em D .

- se para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é analítica em D , com D simplesmente conexo, então tem-se que f é analítica em D e

$$f'(z) = \lim_n f'_n(z) \quad , \quad \forall z \in D$$

1.6.2 Convergência Pontual e Convergência Uniforme de uma Série de funções

Considere-se $\{f_n(z)\}$, $z \in D \subset \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções complexas e a sua respectiva soma $\sum_n f_n(z)$

- (Convergência Pontual da Série)

Diz-se que a série $\sum_n f_n(z)$ converge no ponto z_0 se a série numérica $\sum_n f_n(z_0)$, isto é, se a sucessão (numérica) das somas parciais $S_N(z_0) = f_1(z_0) + \dots + f_N(z_0)$ for convergente. Se $\sum_n f_n(z)$ convergir em todos os pontos $z \in D$ então dizemos que a série é pontualmente convergente em D . Neste caso podemos definir a função *soma* (da série) por:

$$f(z) = \sum_n f_n(z) \quad \text{para qualquer } z \in D$$

- (Convergência Uniforme da Série)

Diz-se que a série $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente em D , se a sucessão das somas parciais, $S_N(z)$ for uniformemente convergente em D , isto é, se

$$\forall \epsilon > 0 \exists P = P(\epsilon) : \forall N > P \text{ se tem } \forall z \in D \ |f(z) - S_N(z)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} |f(z) - S_N(z)| = 0$$

CrITÉrio de Weierstrass

Seja $f_n(z)$ uma sucessão de funções definidas para $z \in D$ que verifica

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad \text{para quaisquer } z \in D \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

e onde a série real de termos não negativos $\sum_n M_n$ é convergente. Então a série $\sum_n f_n(z)$ é uniformemente convergente em D .

Propriedades da Soma de uma série de funções uniformemente convergente

Considere-se $f(z) = \sum_n f_n(z)$ uniformemente em $D \subset \mathbb{C}$ aberto. Então

- se para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é contínua em D , tem-se que f é contínua em D e

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_n \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

qualquer que seja a curva γ regular contida em D .

- se para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é analítica em D e D é simplesmente conexo, tem-se que f é analítica em D e

$$f'(z) = \sum_n f'_n(z) \quad , \quad \forall z \in D$$

No caso particular das séries de potências, o Teorema de Abel, o Critério de Weierstrass e as propriedades dos limites das séries de potências uniformemente convergentes implicam o seguinte resultado.

1.6.3 Convergência Uniforme e Analiticidade de uma Série de Potências

Teorema: (Convergência uniforme de uma série de potências)

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ uma série de potências de raio de convergência R . Então a série é uniformemente convergente em todos os círculos

$$\overline{D(z_0, r)} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$$

com raio $r < R$.

Dado que, para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ é inteira, a partir da convergência uniforme da série podemos concluir que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ é analítica em $\{z : |z - z_0| < R\}$, e para todo z no interior do círculo de convergência

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (w - z_0)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} ((z - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1})$$

para qualquer curva regular γ em $D(z_0, R)$ onde a e z são os pontos inicial e final de γ , respectivamente. Em consequência, as primitivas de $f(z)$ são dadas por

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Em particular, podemos afirmar o seguinte.

Teorema:(Analiticidade de uma série de potências)

Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{em } |z - z_0| < R$$

isto é, f é uma série de potências de centro z_0 convergente em $|z - z_0| < R$. Então f é analítica no seu domínio de convergência.

1.7 Séries de Taylor

1.7.1 Teorema de Taylor

Vimos anteriormente que uma função representável por uma série de potências num disco centrado em z_0 é analítica (ou holomorfa) em z_0 . Reciprocamente, é válido o:

Teorema de Taylor:

Seja f uma função analítica num conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}$. Se $z_0 \in D$, então f admite o desenvolvimento em série de potências de $z - z_0$ dado por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{quando } |z - z_0| < R$$

R é o supremo dos números reais positivos, ρ , para os quais o disco $D(z_0, \rho)$ está contido no domínio de analiticidade de f , isto é, R é a distância de z_0 à fronteira de D .

Nota: conclui-se dos teoremas anteriores que afirmar que uma função f é analítica (ou holomorfa) num ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é **equivalente** a afirmar que $f(z)$ admite uma representação em série de potências de $z - z_0$ válida numa vizinhança de z_0 .

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

denomina-se série de Taylor de f em torno de z_0 .

No caso particular $z_0 = 0$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

denomina-se *série de Maclaurin* de f .

Por ser uma série de potências, ela é uniformemente convergente em $\overline{D(z_0, r)}$ para todos $0 < r < R$, pelo que pode ser integrada e derivada termo a termo. Isto é, se $z \in D(z_0, R)$,

$$\text{i) } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1}$$

$$\text{ii) } \int_{\gamma} f(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n+1)!} ((z - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1})$$

onde γ é uma curva seccionalmente regular contida em $D(z_0, R)$ e a, z são o extremo inicial e final (resp.) de γ . Em consequência, as primitivas da série de Taylor de $f(z)$ em torno de z_0 são

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n+1)!} (z - z_0)^{n+1},$$

onde $C \in \mathbb{C}$ é uma constante arbitrária.

Demonstração (do Teorema de Taylor):

Pretende-se mostrar que, dado z_0 no domínio de analiticidade de f , existe $R > 0$, tal que para todo z em $B_R(z_0)$ se tem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Sendo D o domínio de analiticidade de f , considere-se R o maior real positivo para o qual se tem $D(z_0, R) \subset D$. Para qual quer $z \in D(z_0, R)$, defina-se $R_0 = |z - z_0|$ e escolha-se $R_1 \in]R_0, R[$. Sendo $\gamma = \{w : |w - z_0| = R_1\}$ percorrida em sentido directo, por aplicação da fórmula Integral de Cauchy, tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Por outro lado, e tendo em conta o valor da soma da série geométrica, temos que

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

dado que, pela escolha que fizemos de R_1 :

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{R_0}{R_1} < 1.$$

Assim:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Atendendo a que a série geométrica é uniformemente convergente em $D(z_0, R_1)$ (pois $R_1 < R$), podemos integrar a série termo a termo e obter:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right] (z - z_0)^n$$

Usando a fórmula integral de Cauchy generalizada, obtém-se o resultado. □

Exemplos de Séries de Mac-Laurin:

- $f(z) = e^z$. Dado que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se tem $f^{(n)}(z) = e^z$, os coeficientes da série de Mac-Laurin da função exponencial são

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Como o domínio de analiticidade de e^z é \mathbb{C} temos então quebrado

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Para qualquer $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n i^n (1 - (-1)^n)}{n!} = \frac{1}{i} \sum_{n=0, n \text{ ímpar}}^{\infty} \frac{z^n i^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- De igual modo se obtém, que para qualquer $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

- Para $|z| < 1$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = -\frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = -\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (z^n) = -\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

- Considerando o valor principal do logaritmo

$$\log(1-z) = -\int \frac{1}{1-z} dz = -\int \sum_{n=0}^{\infty} z^n dz = -\sum_{n=0}^{\infty} \int z^n dz = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

este desenvolvimento será válido no maior círculo centrado em 0 onde a função (valor principal) $\log(1-z)$ é analítica. Como o seu domínio de analiticidade é $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ o domínio de convergência da série é $|z| < 1$. Atendendo a que o valor principal de $\log 1$ é 0, tem-se que

$$\log(1-z) \Big|_{z=0} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \Big|_{z=0} \Leftrightarrow C = 0.$$

Desta forma:

$$\log(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1$$

- Pretende-se desenvolver a função definida em $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ por

$$f(z) = \operatorname{sen}(\pi iz) + \frac{z}{z+i}$$

em série de Taylor em torno de $z_0 = i$. Para isso, note-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi iz) &= \operatorname{sen}(\pi i(z - i + i)) = \operatorname{sen}(\pi i(z - i) - \pi) \\ &= \operatorname{sen}(\pi i(z - i))\cos(-\pi) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} i^{2n+1}}{(2n+1)!} (z - i)^{2n+1}\end{aligned}$$

sendo a igualdade válida em \mathbb{C} . Por outro lado

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i\left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} (z-i)^n$$

sendo a igualdade válida em $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$, ou seja, em $|z-i| < 2$. Por último

$$z = (z-i) + i$$

obviamente para todo $z \in \mathbb{C}$. Então, para todo $z \in D(i, 2)$

$$\begin{aligned}f(z) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} i^{2n+1}}{(2n+1)!} (z-i)^{2n+1} + \left((z-i) + i\right) \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} (z-i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n+1} i^{2n+1}}{(2n+1)!} (z-i)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n+1} \\ &\quad + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^n\end{aligned}$$

1.7.2 Zeros de uma Função Analítica

Seja f uma função analítica em $D \subset \mathbb{C}$ aberto. Diz-se que $z_0 \in D$ é um *zero de ordem p* sse

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0$$

Como consequência do Teorema de Taylor, podemos afirmar que:

$$z_0 \text{ é um zero de ordem } p \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}f(z) &= a_p(z-z_0)^p + a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \dots \\ &= (z-z_0)^p (a_p + a_{p+1}(z-z_0) + \dots) \quad \text{para } |z-z_0| < \epsilon,\end{aligned}$$

e onde $a_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Sendo assim, z_0 é um zero de ordem p de f se e só se f admite uma factorização da forma

$$f(z) = (z - z_0)^p g(z)$$

num disco $|z - z_0| < \epsilon$, onde g é uma função analítica em z_0 e $g(z_0) \neq 0$.

Exemplos:

- A função $f(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ tem um zero de ordem 3 em $z_0 = 1$. De facto

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z - 1)^3 g(z) \quad , \quad g(z) \equiv 1$$

- A função $e^z - 1$ tem um zero de ordem 1 em $z_0 = 0$. De facto

$$e^z - 1 = zg(z) \quad , \quad g(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

- A função $e^z - 1$ tem um zero de ordem 1 em $z_0 = 2k\pi i$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. De facto, usando a periodicidade da exponencial complexa:

$$e^z - 1 = e^{z-2k\pi i} - 1 = (z - 2k\pi i)g(z)$$

com

$$g(z) = 1 + \frac{z - 2k\pi i}{2} + \frac{(z - 2k\pi i)^2}{3!} + \frac{(z - 2k\pi i)^3}{4!} + \dots$$

- A função $(e^z - 1)^2$ tem um zero de ordem 2 em $z_0 = 0$. De facto

$$(e^z - 1)^2 = z^2 g(z) \quad , \quad g(z) = \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots\right)^2$$

Note que g é analítica em \mathbb{C} . (Porquê?)

1.8 Séries de Laurent

1.8.1 Definição de Série de Laurent

Sendo $z_0 \in \mathbb{C}$, a série

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n &= \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned} \tag{1.17}$$

diz-se uma *série de Laurent* em torno do ponto z_0 .

Nesse caso, diz-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots$$

é a *parte principal* do desenvolvimento (1.17).

1.8.2 Teorema de Laurent

Teorema de Laurent:

Se f é analítica na região anular $A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, então f pode ser desenvolvida em *série de Laurent* em torno de z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

onde para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

e γ qualquer curva de Jordan seccionalmente regular contida em $A(z_0, r, R)$, percorrida uma vez no sentido positivo, e tal que $z_0 \in \text{int } \gamma$.

No teorema de Laurent, podemos tomar os raios interior, r (resp. exterior, R) da região anular $A(z_0, r, R)$ como sendo o ínfimo de todos os $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$ (resp., o supremo de todos os $\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$) para os quais f é analítica em $A(z_0, \sigma, \rho)$. Em particular, podemos ter $r = 0$ e $R = \infty$.

Demonstração:

Escolha-se $z \in A(z_0, r, R)$ arbitrário, e sejam r_1, r_2 números reais positivos para os quais $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Considerem-se ainda γ_1 e γ_2 as circunferências de centro em z_0 e de raios respectivamente r_1 e r_2 , percorridas em sentido directo. Sendo l um segmento de recta unindo γ_1 a γ_2 , defina-se

$$C = \gamma_2 + l + \gamma_1^- + l^-$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy, tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Para $w \in \gamma_2$

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(w - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

onde tivemos em conta que $|z - z_0| < r_2$ pelo que $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$. De modo análogo, para $w \in \gamma_1$

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}\right)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

onde tivemos em conta que $|z - z_0| > r_1$ pelo que $\left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right| < 1$. Então

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w) \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^j}{(w - z_0)^{j+1}} dw \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{\gamma} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n \end{aligned}$$

onde, pelo teorema de Cauchy generalizado, γ_1 e γ_2 foram substituídas por qualquer curva de Jordan em sentido positivo em $A(z_0, r, R)$ com z_0 no seu interior. \square

Exemplos de Séries de Laurent:

1. Para $z \in A(0, 0, \infty)$ (ou seja $|z| > 0$)

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}} = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots$$

2. Para $z \in A(0, 1, \infty)$ (isto é para $|z| > 1$)

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right)$$

Note-se que o desenvolvimento em série é convergente, pois $|z| > 1$ implica que $|1/z| < 1$.

3. Sendo $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+2i)}$, vamos determinar todos os possíveis desenvolvimentos em série de f em torno de $z_0 = i$. Dado que f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$ e $z_0 = i$ iremos ter dois desenvolvimentos; em $A(i, 0, 1)$ e em $A(i, 1, \infty)$. Observe-se que, como f não é analítica em i , nenhum dos desenvolvimentos será uma série de Taylor.

Para $z \in A(i, 0, 1)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z-i)(z+2i)} = \frac{z}{z-i} \cdot \frac{1}{z+2i} = \frac{z-i+i}{z-i} \cdot \frac{1}{z-i+i-2i} \\ &= \left(1 + \frac{i}{z-i}\right) \frac{1}{(z-i)-i} = \frac{1+i(z-i)^{-1}}{i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-i}{i}} \end{aligned}$$

Dado que estamos a efectuar o desenvolvimento na região $z \in A(i, 0, 1)$ tem-se que $|z-i| < 1$ e como tal $\frac{1}{1-\frac{z-i}{i}}$ representa a soma da série geométrica de razão $\frac{z-i}{i}$, e assim

$$f(z) = \frac{1+i(z-i)^{-1}}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{i^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{n-1}}{i^n}$$

Para $z \in A(i, 1, \infty)$ também é válido que:

$$f(z) = \frac{1 + i(z-i)^{-1}}{i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(z-i)}{i}}$$

No entanto, para $z \in A(i, 1, \infty)$ tem-se que $|z-i| > 1$ e ao contrário do caso anterior $\frac{1}{1 - \frac{(z-i)}{i}}$ **não** representa a soma da série geométrica de razão $\frac{z-i}{i}$. Porém, tem-se que $|\frac{i}{z-i}| < 1$; para tirar partido desse facto, factorizamos a função como se segue:

$$f(z) = \frac{1 + i(z-i)^{-1}}{i} \cdot \frac{-1}{\frac{(z-i)}{i}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{z-i}}$$

Desta forma, para $z \in A(i, 1, \infty)$, a função $\frac{1}{1 - \frac{i}{z-i}}$ representa a soma da série geométrica de razão $\frac{i}{z-i}$. Assim,

$$f(z) = \frac{1 + i(z-i)^{-1}}{i} \cdot \frac{-1}{\frac{(z-i)}{i}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z-i} \right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{(z-i)^{n+2}},$$

sendo que este desenvolvimento é válido para $|\frac{i}{z-i}| < 1$, ou seja, $|z-i| > 1$.

1.9 Singularidades, Resíduos e Teorema dos Resíduos

1.9.1 Singularidades

Seja f uma função complexa, com domínio de analiticidade $A \subset \mathbb{C}$. Diz-se que f tem uma *singularidade* em $z_0 \in \mathbb{C}$, se $z_0 \notin A$ (f não é analítica em z_0) e para todo $\epsilon > 0$ verifica-se que $D(z_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ (existem pontos numa vizinhança de z_0 onde f é analítica).

A singularidade z_0 diz-se *isolada* se existe $\epsilon > 0$ para o qual f é analítica em

$$A(z_0, 0, \epsilon) = D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}.$$

Isto significa que f é uma singularidade isolada se e só se f é analítica em todos os pontos de uma vizinhança de z_0 com excepção de z_0 . A partir daqui, trataremos apenas deste tipo de singularidades.

Exemplo:

1. A função $f(z) = \frac{1}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pelo que 0 é uma singularidade isolada de f .
2. A função $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$. Assim as singularidades de f são todos os complexos da forma $2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$. Atendendo a que para cada $k \in \mathbb{Z}$ existe $\epsilon > 0$ tal que f é analítica na região $0 < |z - 2k\pi i| < \epsilon$ (basta tomar para ϵ qualquer número real positivo menor que 2π) todas as singularidades são isoladas.
3. A função $f(z) = \log z$ (valor principal) é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. Assim as singularidades de f são todos os números reais não positivos. É óbvio que todas as singularidades de f não são isoladas, pois qualquer vizinhança de qualquer número real não positivo contém outros números não positivos.

1.9.2 Classificação das Singularidades Isoladas

Se z_0 é uma singularidade isolada de f , o Teorema de Laurent garante que f admite desenvolvimento em série de Laurent centrada em z_0

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad (1.18)$$

válido sempre que $0 < |z - z_0| < \epsilon$.

Com base na parte principal desta série, podemos classificar as singularidades isoladas.

- z_0 diz-se **removível** se a série (1.18) tem parte principal nula, ou seja, se:

$$a_{-n} = 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo;

A função $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Desenvolvendo em série de Laurent em torno de $z_0 = 0$, obtém-se

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots \quad , \quad \forall z \neq 0 \quad (1.19)$$

É então óbvio que a parte principal da série é nula e como tal 0 é uma singularidade removível de f . Note-se que a série que representa a função $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ é uma função inteira (porquê?). Usando esse facto, podemos então prolongar por analiticidade $\operatorname{sen} z/z$ a zero da seguinte forma

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

em que o valor $F(0) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots \Big|_{z=0} = 1$.

(1.18), reduz-se à série de potências de $z - z_0$:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad \text{para } 0 < |z - z_0| < \epsilon.$$

A função

$$F(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq z_0 \\ a_0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

diz-se a *extensão analítica* de f a z_0 , e então $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe (é igual a a_0). Podemos então enunciar o seguinte resultado:

Proposição (Critério para classificação de uma sing. removível)

z_0 é singularidade removível de f sse $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe (em \mathbb{C}).

Demonstração:

Pelo que vimos acima, se z_0 é uma singularidade removível então o $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe. Reciprocamente, se existe o $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ então $f(z)$ é limitada numa vizinhança de z_0 , D ; ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para $z \in D$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que a região anular $0 < |z - z_0| \leq r$ esteja contida em D e no domínio de analiticidade de f . Tomando $n \geq 1$ e $0 < \delta < r$, e utilizando o teorema de Laurent, os coeficientes da série (1.18) válida em $0 < |z - z_0| < r$ são dados por:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} f(z)(z-z_0)^{n-1} dz.$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} |a_{-n}| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=\delta} |f(z)| |z-z_0|^{n-1} |dz| \leq \frac{M\delta^{n-1}}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=\delta} |dz| \\ &= \frac{M\delta^{n-1} 2\pi\delta}{2\pi} = M\delta^n \rightarrow 0 \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Assim $a_{-n} = 0$ para $n \geq 1$, pelo que z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$. □

Exemplo:

A função $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ tem singularidades nos pontos $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dado que

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots} = 1$$

a singularidade 0 é removível. Por outro lado, para $k \neq 0$

$$\lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z}{\sin z} = \infty \notin \mathbb{C}$$

pelo que as singularidades $k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ não são removíveis.

- z_0 é um **pólo de ordem** $p \in \mathbb{N}$, se a série de Laurent (1.18) é da forma

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

em que $a_{-p} \neq 0$. Neste caso, $a_{-n} = 0$ para todo $n > p$, pelo que a parte principal da série de Laurent tem apenas um número finito de termos não nulos. Se $p = 1$ o pólo diz-se *simple*.

Exemplo:

A função $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Desenvolvendo em série de Laurent em torno de $z_0 = 0$, obtém-se

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots, \quad \forall z \neq 0 \quad (1.20)$$

É então óbvio que a parte principal da série tem apenas dois termos não nulos, pelo que 0 é um polo, e dado que a potência de menor expoente da série é z^{-3} , a sua ordem é 3.

Podemos então enunciar o seguinte resultado:

Proposição (Critério para classificação de uma sing. tipo polo)

z_0 é pólo de ordem p de f sse $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z)$ existe (em \mathbb{C}) e não é zero.

Demonstração:

Pela forma da série de Laurent, é fácil de concluir que se z_0 é um pólo de ordem p , então

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} (z - z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-p+n}(z - z_0)^n + \cdots$$

para $0 < |z - z_0| < \epsilon$. Assim sendo, $F(z)$ é uma função analítica em z_0 e $F(z_0) = a_{-p} \neq 0$, donde se conclui que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) = F(z_0) \neq 0$.

Reciprocamente, se o limite anterior existe e é não nulo então $F(z) = (z - z_0)^p f(z)$ tem uma singularidade removível em z_0 , pelo que o seu desenvolvimento em série de Laurent em torno de z_0 é da forma:

$$(z - z_0)^p f(z) = F(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Note que $b_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) \neq 0$. Assim,

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^p} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots + b_p + b_{p+1}(z - z_0) + b_{p+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

onde $b_0 \neq 0$, donde segue que z_0 é um pólo de ordem p de $f(z)$. □

Exemplo:

A função $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$ tem singularidades nos pontos $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Atendendo a que o numerador se anula em 0 e não se anula em $2k\pi$, para $k \neq 0$ vamos estudar estas singularidades separadamente. Assim, para classificar a singularidade 0, note-se que

$$f(z) = \frac{z}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}} = \frac{z}{\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots} = \frac{z}{z^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots \right)} = \frac{1}{z} G(z),$$

em que $G(z) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots}$ é analítica numa vizinhança de 0 e $G(0) = 2 \neq 0$. Conclui-se que 0 é um polo simples. Para $2k\pi$, $k \neq 0$, note-se em primeiro lugar que classificar a singularidade $2k\pi$ de $f(z)$ é equivalente a classificar a singularidade 0 de $f(z + 2k\pi)$. Assim, e mais uma vez utilizando a série de MacLaurin de $\cos z$,

$$f(z + 2k\pi) = \frac{z + 2k\pi}{1 - \cos(z + 2k\pi)} = \frac{z + 2k\pi}{1 - \cos z} = \frac{1}{z^2} H(z)$$

em que $H(z) = \frac{z + 2k\pi}{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots}$ é analítica numa vizinhança de 0 e $H(0) = 4k\pi \neq 0$. Concluímos que 0 é um polo de ordem 2 de $f(z + 2k\pi)$ pelo que $2k\pi$, $k \neq 0$ é um polo de ordem 2 de $f(z)$.

- z_0 diz-se uma **singularidade essencial** de f , se a parte principal do seu desenvolvimento em série de Laurent em torno de z_0 , válido em $A(z_0, 0, \epsilon)$, tem uma infinidade de termos não nulos.

Exemplo:

A função $f(z) = z^3 e^{1/z}$ tem uma singularidade isolada em 0. Note-se que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ não existe dado que a exponencial complexa é periódica e não é limitada. Assim, suspeita-se que a singularidade é essencial. De facto, fazendo o desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de 0

$$f(z) = z^3 + z^2 + \frac{z}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \dots \quad (1.21)$$

é fácil de verificar que a parte singular da série (termos a vermelho) tem uma infinidade de termos, pelo que se confirma que 0 é uma singularidade essencial.

1.9.3 Resíduos

Se z_0 é uma singularidade isolada de f , define-se *Resíduo* de f em z_0 , $\text{Res}(f, z_0)$, como sendo o coeficiente a_{-1} do desenvolvimento em série de Laurent (com centro em z_0) válida em $A(z_0, 0, r)$.

Exemplo:

Sendo

1. $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$, por (1.19), $\text{Res}(f, 0) = 0$.
2. $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z^4}$, por (1.20), $\text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{3!}$.
3. $f(z) = z^3 e^{1/z}$, por (1.21), $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{4!}$.

Proposição: (cálculo de resíduos em singularidades não essenciais)

- se z_0 é uma singularidade removível, então é óbvio que

$$\text{Res}(f, z_0) = 0$$

- se z_0 é um pólo de ordem p , então:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p f(z)]$$

Demonstração:

Por hipótese

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

sendo a série de Laurent uniformemente convergente numa região $0 < |z - z_0| < r$. Assim:

$$(z - z_0)^p f(z) = a_{-p} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{p-2} + a_{-1}(z - z_0)^{p-1} + a_0(z - z_0)^p + a_1(z - z_0)^{p+1} + \dots$$

Derivando $p - 1$ vezes (note que $\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(z - z_0)^k = 0$ para $k < p - 1$) resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z - z_0)^p f(z) \right] &= a_{-1} (p - 1)! + a_0 (p(p - 1) \cdots 3 \cdot 2) (z - z_0) \\ &\quad + a_1 ((p + 1)p \cdots 4 \cdot 3) (z - z_0)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $z \rightarrow z_0$ obtém-se:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z - z_0)^p f(z) \right] = (p - 1)! a_{-1}$$

□

Exemplo:

Sendo

- $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, vimos anteriormente que 0 é uma singularidade removível pelo que $\text{Res}(f, 0) = 0$.
- $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$ vimos que 0 é um polo simples, pelo que

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = G(0) = 2$$

e para $k \neq 0$, $2k\pi$ são polos de ordem 2, pelo que

$$\text{Res}(f, 2k\pi) = \lim_{z \rightarrow 2k\pi} \left((z - 2k\pi)^2 f(z) \right)' = 2\pi$$

O seguinte resultado é um caso particular do cálculo de o resíduo num polo simples,

Proposição:

Se $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, com $\phi(z)$ e $\psi(z)$ analíticas em z_0 , $\phi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ e $\psi'(z_0) \neq 0$ então z_0 é um pólo simples de f e

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Demonstração:

Como $\phi(z)$ e $\psi(z)$ são analíticas em z_0 , existem as séries de Taylor daquelas funções válidas numa vizinhança de z_0 . Assim sendo, e atendendo a que $\psi(z_0) = 0$

$$\frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(z_0) + a_1(z - z_0) + \cdots}{\psi'(z_0)(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots} = \frac{1}{z - z_0} \frac{\phi(z_0) + a_1(z - z_0) + \cdots}{\psi'(z_0) + b_2(z - z_0) + \cdots},$$

pelo que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)} \neq 0.$$

□

Se aplicarmos este resultado à função do exemplo anterior, $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$, o cálculo do resíduo é bastante mais fácil.

De forma idêntica se pode provar a seguinte versão da regra de Cauchy, que pode ser útil na classificação das singularidades não essenciais e cálculo dos respectivos resíduos.

Teorema: (Caso particular da regra de Cauchy)

Se $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, com $\phi(z)$ e $\psi(z)$ analíticas em z_0 e tais que $\phi(z_0) = \psi(z_0) = 0$ e $\psi'(z_0) \neq 0$ então:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi'(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

1.9.4 Teorema dos Resíduos

Por aplicação directa do teorema de Cauchy generalizado e do teorema de Larent obtém-se o resultado seguinte, que se revela muito importante do ponto de vista das aplicações.

Teorema dos Resíduos

Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto e simplesmente conexo, e considere-se

- i) f uma função analítica num aberto $D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$;
- ii) γ uma curva de Jordan em D percorrida em sentido directo e tal que $z_1, \dots, z_k \in \text{int } \gamma$.

Então

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j)$$

Exemplos:

(a) Pretendemos determinar o valor do integral

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4} dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido positivo. Sendo

$$f(z) = \frac{2z+6}{z^2+4} = \frac{2z+6}{(z+2i)(z-2i)}$$

é óbvio que f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$. Dado que

$$|-2i - i| = 3 > 2, \quad |2i - i| = 1 < 2,$$

temos que $-2i$ está no exterior da curva enquanto $2i$ está no seu interior. Aplicando o teorema dos resíduos:

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 2i).$$

Como

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)f(z) = \frac{4i + 6}{4i} = \frac{2i + 3}{2i},$$

concluimos que $2i$ é um pólo simples e $\text{Res}(f, 2i) = \frac{2i+3}{2i}$. Desta forma:

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4} dz = \pi(2i+3).$$

(b) Pretendemos determinar o valor do integral

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{3}{z}} dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido positivo. A função $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. A singularidade não é tipo pólo nem removível. Podemos escrever a série de Laurent de f em torno de $z_0 = 0$ para verificarmos que a singularidade é essencial e determinar o respectivo resíduo. Se $0 < |z| < \infty$, então

$$e^{\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!z^n} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{2z^2} + \frac{27}{6z^3} + \dots$$

pelo que se confirma que 0 é singularidade essencial e que $\text{Res}(f, 0) = 3$. Assim sendo:

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{3}{z}} dz = 6\pi i.$$

1.10 Aplicações do Teorema dos Resíduos ao Cálculo de Integrais Reais

1.10.1 Integrais Trigonométricos

Pretende-se calcular o integral

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

onde $F(u, v)$ é uma função real dependendo das duas variáveis reais u e v . Como consequência da fórmula de Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Temos então que, fazendo $z = e^{i\theta}$ (o que implica que $|z| = 1$ e $\frac{dz}{d\theta} = iz$), o integral pode ser escrito na forma

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}{iz} dz = \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

onde $f(z) = \frac{1}{iz} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$. Por aplicação do teorema dos resíduos:

$$I = 2\pi i \sum_{j=0}^k \text{Res}(f, z_j)$$

sendo z_j , $j = 0, \dots, k$, as singularidades de F interiores ao círculo unitário.

1.10. APLICAÇÕES DO TEOREMA DOS RESÍDUOS AO CÁLCULO DE INTEGRAIS REAIS

Exemplo:

Vamos calcular o integral

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2 \theta}$$

Considerando a parametrização $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ (da circunferência $|z| = 1$, percorrida uma vez no sentido directo), o integral pretendido pode ser escrito como:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 + \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz} = 4i \oint_{|z|=1} \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1} dz$$

A função

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \left\{ \sqrt{5+2\sqrt{6}}, -\sqrt{5+2\sqrt{6}}, \sqrt{5-2\sqrt{6}}, -\sqrt{5-2\sqrt{6}} \right\}$, sendo claro que:

$$\left| \sqrt{5+2\sqrt{6}} \right| > 1 \quad \text{e} \quad \left| \sqrt{5-2\sqrt{6}} \right| < 1.$$

Assim sendo, utilizando o teorema dos resíduos:

$$I = 4i \cdot 2\pi i \left(\text{Res}\left(f, \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right) + \text{Res}\left(f, -\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right) \right).$$

Sendo z_0 uma qualquer singularidade de f então z_0 é pólo simples, pelo que:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{z}{\frac{d}{dz}(z^4 - 10z^2 + 1)} \Big|_{z=z_0} = \frac{z}{4z^3 - 20z} \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{4z^2 - 20} \Big|_{z=z_0}.$$

Assim:

$$\text{Res}\left(f, \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{4z^2 - 20} \Big|_{z=\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = -\frac{1}{8\sqrt{6}}$$

e

$$\text{Res}\left(f, -\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{4z^2 - 20} \Big|_{z=-\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = -\frac{1}{8\sqrt{6}}.$$

Resulta então que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2 \theta} = -8\pi \left(-\frac{2}{8\sqrt{6}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

1.10.2 Integrais Impróprios de 1ª espécie de Funções Racionais

Pretende-se calcular o integral impróprio

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

em que

(C1) P e Q são polinómios reais;

(C2) $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(C3) $\text{Grau}(Q) - \text{Grau}(P) \geq 2$.

Observe-se que a condição (C2) faz com que a função $P(x)/Q(x)$ seja limitada em \mathbb{R} e a condição (C3) faz com que o integral impróprio seja convergente.

Considera-se a função complexa auxiliar $F(z) = P(z)/Q(z)$, e para R suficientemente grande a curva Γ_R como sendo a fronteira do semi-círculo centrado na origem e de raio R definido no semiplano $\{z : \text{Im } z \geq 0\}$. Por aplicação do Teorema dos resíduos

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=0}^k \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$$

sendo $z_j, j = 0, \dots, k$ os zeros de Q com parte imaginária positiva. Por outro lado

$$\Gamma_R = I_R \cup S_R = \{z = x : x \in [-R, R]\} \cup \{z = Re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$$

Então

$$\alpha = \int_{I_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$,

$$\alpha = I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

Dado que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que para $|z| = R$ suficientemente grande

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^{k-l}},$$

onde k e l são os graus de $Q(z)$ e $P(z)$, respectivamente. Assim sendo, para R suficientemente grande

$$\left| \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \int_{S_R} \frac{M}{|z|^{k-l}} |dz| = \frac{M\pi R}{R^{k-l}} = \frac{M\pi}{R^{k-l-1}},$$

Por aplicação da condição (C3) podemos concluir que $k - l - 1 \geq 2 - 1 = 1$, pelo que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$$

Conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \alpha = 2\pi i \sum_{j=0}^k \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right)$$

sendo $z_j, j = 0, \dots, k$ os zeros de $Q(z)$ com parte imaginária positiva.

Exemplo:

Determinar o valor de

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$$

Considere-se a função complexa de variável complexa

$$F(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)}$$

1.10. APLICAÇÕES DO TEOREMA DOS RESÍDUOS AO CÁLCULO DE INTEGRAIS REAIS

e para R suficientemente grande a curva γ_R como sendo a fronteira da região

$$D_R = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi\}$$

à qual se atribui a orientação positiva (ou sentido directo).

As singularidades de $F(z)$ são $\pm 2i$ e $\pm 3i$. Dado que $2i, 3i \in D_R$ e $-2i, -3i \notin D_R$, por aplicação do teorema dos resíduos

$$\oint_{\gamma_R} F(z) dz = 2\pi i \left(\text{Res}(F, 2i) + \text{Res}(F, 3i) \right)$$

Visto que

$$F(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z-3i)(z+3i)} \quad (1.22)$$

vê-se que todas as singularidades de (1.22) são zeros de ordem 1 do denominador e não anulam o numerador, pelo que são pólos simples de $F(z)$. Como tal:

$$\text{Res}(F, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i)F(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z+2i)(z^2+9)} = \frac{1}{20i}$$

e

$$\text{Res}(F, 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} (z-3i)F(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{(z^2+4)(z+3i)} = -\frac{1}{30i}$$

Então

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = \frac{\pi}{30}.$$

Por outro lado, atendendo ao facto de que a curva γ_R é composta pelo segmento

$$I_R = \{z \in \mathbb{C} : z = x, \quad x \in [-R, R]\}$$

e pela semicircunferência

$$S_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi]\}$$

podemos escrever

$$\frac{\pi}{30} = \int_{I_R} F(z) dz + \int_{S_R} F(z) dz$$

Em I_R , $z = x$ com $x \in [-R, R]$, pelo que

$$\frac{\pi}{30} = \int_{-R}^R F(x) dx + \int_{S_R} F(z) dz$$

e, fazendo R tender para $+\infty$

$$\frac{\pi}{30} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} F(z) dz$$

Por outro lado

$$\left| \int_{S_R} F(z) dz \right| \leq \int_{S_R} |F(z)| |dz| \leq \int_{S_R} \frac{|dz|}{(|z|^2 - 4)^2 (|z|^2 - 9)^2} = \frac{\pi R}{(R^2 - 4)^2 (R^2 - 9)^2}$$

Temos então que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{S_R} F(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{(R^2 - 4)^2 (R^2 - 9)^2} = 0$$

o que implica

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} F(z) dz = 0$$

e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \frac{\pi}{30}$$

1.10.3 Integrais Impróprios de 1ª espécie envolvendo funções Trigonométricas

Pretende-se calcular integrais impróprios do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(ax) dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(ax) dx$$

em que $a \in \mathbb{R}^+$ e:

(C1) f é analítica em \mathbb{C} excepto num conjunto finito de singularidades;

(C2) f não tem singularidades no eixo real.

Em ambos os casos, considera-se a função complexa auxiliar

$$F(z) = f(z) e^{iaz}$$

e, para R suficientemente grande, a curva Γ_R como sendo a fronteira do semi-círculo centrado na origem e de raio R , contido no semiplano $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Por aplicação do Teorema dos resíduos

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{j=0}^k \operatorname{Res}(F, z_j) \equiv \mathcal{I}$$

sendo z_j , para $j = 0, 1, \dots, k$, os zeros de Q com parte imaginária positiva. Note que o valor de \mathcal{I} não depende de R (desde que $R > \max\{|z_1|, \dots, |z_k|\}$). Por outro lado,

$$\Gamma_R = I_R \cup S_R = \left\{ z = x : x \in]-R, R[\right\} \cup \left\{ z = R e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi] \right\}$$

Então

$$\mathcal{I} = \int_{I_R} f(z) e^{iaz} dz + \int_{S_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx + \int_{S_R} f(z) e^{iaz} dz$$

Fazendo $R \rightarrow +\infty$,

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) e^{iaz} dz$$

Lema de Jordan Seja $a > 0$ e f uma função analítica em \mathbb{C} excepto num conjunto finito de singularidades. Seja S_R a semi-circunferência $|z| = R$, com $\operatorname{Im} z > 0$.

1.10. APLICAÇÕES DO TEOREMA DOS RESÍDUOS AO CÁLCULO DE INTEGRAIS REAIS

a) Para qualquer $R > 0$:

$$\int_{S_R} |e^{iaz}| |dz| < \frac{\pi}{a}$$

b) Seja $f(z)$ analítica em $|z| > r$, para algum $r > 0$ e tal que:

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty$$

então:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

Dem.:

a) Parametrizando a semicircunferência por $z(\theta) = Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$, então $\sqrt{R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta} = R$, pelo que:

$$\int_{S_R} |e^{iaz}| |dz| = \int_0^\pi |e^{iaR\cos\theta}| |e^{-aR\sin\theta}| R d\theta = \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} R d\theta \quad (1.23)$$

Como $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$, para $\theta \in [0, \pi]$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$ é um eixo de simetria do gráfico da função $g(\theta) = e^{-aR\sin\theta}$. Desta forma, e atendendo também a que $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ para qualquer $\theta \in [0, \pi/2]$:

$$\int_{S_R} |e^{iaz}| |dz| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}) < \frac{\pi}{a} \quad (1.24)$$

b) Como $M(R) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|z|=R} |f(z)| \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow +\infty$,

$$\left| \int_{S_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq M(R) \int_{S_R} |e^{iaz}| |dz| \leq \frac{M(R)\pi}{a} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty$$

□

Exemplo importante: Se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios reais (isto é, os seus coeficientes são reais), tem-se que se

$$\text{Grau } Q(z) > \text{Grau } P(z) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Grau } Q(z) - \text{Grau } P(z) \geq 1$$

então $\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{C}{R}$ para $|z| = R$, pelo que:

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \rightarrow 0, \quad \text{em } |z| = R \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty$$

Pelo lema de Jordan:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz = 0$$

□

Com f satisfazendo (C1) e $a > 0$, o lema de Jordan determina que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

Conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = \mathcal{I}$$

Dado que $ax \in \mathbb{R}$, resulta da fórmula de Euler que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(ax) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(ax) dx$$

pelo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(ax) dx = \operatorname{Re} \mathcal{I} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(ax) dx = \operatorname{Im} \mathcal{I}$$

Exemplo:

Vamos determinar o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2 + 1} dx$$

utilizando o Teorema dos Resíduos. Para tal considere-se a função complexa

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{4z^2 + 1}$$

e, para $R \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, a curva γ_R como sendo a fronteira do semi-círculo

$$\{z : |z| \leq R \text{ e } \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

com orientação positiva (percorrida em sentido directo). Visto F ser analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$, aplicando o Teorema dos Resíduos obtém-se

$$\oint_{C_R} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F(z), \frac{i}{2})$$

Dado que

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{4(z - \frac{i}{2})(z + \frac{i}{2})}, \quad (1.25)$$

como $i/2$ é zero de ordem 1 do denominador de (1.25) e não anula o numerador de (1.25), conclui-se que $i/2$ é pólo simples de F . Consequentemente:

$$\operatorname{Res}(F, \frac{i}{2}) = \lim_{z \rightarrow i/2} \left(z - \frac{i}{2}\right) F(z) = \frac{e^{-1/2}}{4i}$$

Sendo assim

$$\oint_{C_R} F(z) dz = \pi \frac{e^{-1/2}}{2}$$

1.10. APLICAÇÕES DO TEOREMA DOS RESÍDUOS AO CÁLCULO DE INTEGRAIS REAIS

Por outro lado

$$\gamma_R = I_R \cup S_R = \{z = x \in [-R, R]\} \cup \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$$

pelo que

$$\pi \frac{e^{-1/2}}{2} = \oint_{\gamma_R} F(z) dz = \int_{I_R} F(z) dz + \int_{S_R} F(z) dz$$

e atendendo à definição de I_R

$$\pi \frac{e^{-1/2}}{2} = \int_{-R}^R F(x) dx + \int_{S_R} F(z) dz$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$

$$\pi \frac{e^{-1/2}}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} F(z) dz$$

Atendendo a que $\operatorname{Grau}(4z^2 + 1) - \operatorname{Grau}(1) = 2$, tem-se que para $|z| = R$

$$\lim_{|z|=R \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{4z^2 + 1} \right| = 0$$

Por aplicação do lema de Jordan, podemos concluir que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} F(z) dz = 0$$

e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \pi \frac{e^{-1/2}}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{e}}$$

Finalmente, visto $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{4x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{4x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{e}}$$

concluindo-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{e}}$$

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias

2.1 Introdução

2.1.1 Notação e Definições

Designa-se por *equação diferencial* uma relação de igualdade entre termos envolvendo uma função $y(x)$, as suas derivadas e a variável independente x . A equação poderá também depender de parâmetros não directamente relacionados com a variável independente x . É talvez mais simples pensar numa equação diferencial como uma equação cuja incógnita pertence a um *espaço de funções*

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x)) \in \mathbb{R}^m$$

(pode-se ter \mathbb{C} em vez de \mathbb{R}). Desta forma, x_1, \dots, x_n são as variáveis independentes (e a dimensão do domínio de y , $n \in \mathbb{N}$, o seu número) e y_1, \dots, y_m as variáveis dependentes (e a dimensão do contradomínio de y , $m \in \mathbb{N}$, o seu número). Note que os (eventuais) parâmetros não são contados como variáveis independentes ou dependentes da equação.

As equações diferenciais dizem-se *ordinárias* se o domínio da função $y(x)$ está contido em \mathbb{R} , caso em que as derivadas que nela surgem são totais (em ordem a $x \in \mathbb{R}$). Dizem-se *parciais* se têm mais do que uma variável independente (o domínio de $y(x)$ está contido em \mathbb{R}^n) e envolvem derivadas parciais de y (em ordem a x_1, x_2, \dots).

As equações diferenciais classificam-se como *escalares* ou *vectoriais* consoante tenham uma ou mais do que uma variável dependente (ou seja, o contradomínio de $y(x)$ está contido em \mathbb{R} no caso escalar e \mathbb{R}^m no caso vectorial). Neste último caso é costume considerar que a variável dependente é o vector $y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x)) \in \mathbb{R}^m$.

Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} + 2axy = 0$$

é ordinária, x é a variável independente e $y = y(x)$ a variável dependente, enquanto a é um parâmetro. Já a 2ª Lei de Newton para o movimento de uma partícula em \mathbb{R}^3

$$F(t, \mathbf{r}) = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

é uma equação ordinária vectorial, pois $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aqui utilizou-se a notação de Newton

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

para representar as 1ª e 2ª derivadas em ordem a t . A massa da partícula, m , é apenas um parâmetro.

Como exemplos de equações diferenciais parciais escalares, podemos indicar a *equação de Laplace* num domínio bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

(já introduzida na Análise Complexa), onde $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; a *equação do calor* unidimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$; a *equação das ondas* unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Também poderemos ter versões tridimensionais destas equações como, por exemplo, a equação do calor no espaço:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} k \nabla^2 u$$

onde $u = u(t, x, y, z)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ e ∇^2 é o *operador laplaciano*.

Alguns problemas de equações diferenciais parciais são de estudo muito difícil. Um dos mais conhecidos exemplos consiste nas equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u = \nu \nabla^2 u + f(t, x)$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

onde $u = u(t, x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$, com $t \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$. As suas soluções descrevem o campo de velocidade, u , de um fluido incompressível de viscosidade ν que ocupa o domínio D e está sujeito a uma força exterior f . Trata-se, pois, de uma equação diferencial parcial vectorial, que é bem conhecida pelas suas aplicações à hidrodinâmica e aerodinâmica. Para uma descrição de um problema em aberto relacionado com estas equações ver

http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations

Dedicaremos o que resta deste capítulo ao estudo das equações diferenciais ordinárias.

2.1.2 Ordem e Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial (ordinária ou parcial) diz-se de ordem n se a maior ordem das derivadas das suas variáveis dependentes y_1, \dots, y_m é n . Representamos o espaço vectorial das funções contínuas $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ (com I um intervalo aberto) por $C(I, \mathbb{R}^m)$, que abreviaremos para $C(I)$. O espaço vectorial das funções contínuas e com derivadas contínuas até à ordem n será representado por $C^n(I, \mathbb{R}^m)$ ou, abreviadamente, $C^n(I)$. Assim:

$$C^n(I) = \left\{ y \in C(I) : y', y'', \dots, y^{(n)} \in C(I) \right\}$$

Uma função f é de classe C^n em I se e só se $f \in C^n(I)$.

Diz-se que uma função $y \in C^n(I)$, onde I é um intervalo aberto, é uma solução da equação diferencial (em I) se satisfaz a equação para qualquer $t \in I$, ou seja, se substituindo $y_1(t) \cdots y_n(t)$ na equação diferencial se obtém uma identidade, qualquer que seja $t \in I$.

Consideraremos equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem (escalares ou vectoriais) que podem ser explicitadas na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

onde $f : I \times D$, e onde D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m . Uma solução da equação (1) é uma função $y \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ tal que $y(t) \in D$ e $y'(t) = f(t, y(t))$ para qualquer $t \in I$.

Como veremos posteriormente, o estudo de alguns tipos de equações ordinárias de ordem n (escalares ou vectoriais) pode ser reduzido ao das equações vectoriais de 1ª ordem. Por exemplo, na 2ª Lei de Newton (2.1), introduzindo como variável dependente a *quantidade de movimento*, $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, obtém-se a equação vectorial de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = F(t, \mathbf{r}) \end{cases}$$

2.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Como exemplo, escrevemos a mais simples equação diferencial de 1ª ordem, no caso escalar:

$$y' = g(t).$$

A solução geral desta equação, que se obtém por primitivação, é

$$y(t) = \int g(t)dt + C,$$

estando bem definida em qualquer intervalo onde g é contínua. Note-se que existe uma infinidade de soluções para a equação diferencial; o mesmo se passa com qualquer equação diferencial ordinária de 1ª ordem, $y' = f(t, y)$, desde que f seja uma função contínua num conjunto aberto.

Acrescentando à equação de 1ª ordem uma *condição inicial*, obtém-se um *problema de valor inicial* (ou *problema de Cauchy*):

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Em certas condições (veremos isso mais tarde) um problema de valor inicial tem solução única.

O *intervalo máximo de solução*, I_{max} , do problema de valor inicial é o “maior intervalo” onde o problema (2.10) tem solução. Mais exactamente, I_{max} é o intervalo maximal de existência de solução ¹.

¹O intervalo I_{max} diz-se maximal no sentido em que existe uma solução de (2.10) em I_{max} e qualquer outro intervalo onde uma solução de (2.10) está definida está contido em I_{max} .

2.2 Equações Escalares de Primeira Ordem

2.2.1 Determinação da Solução Geral

Muitos métodos de determinação da solução geral de equações diferenciais escalares de 1ª ordem baseiam-se na redução da equação a uma igualdade do tipo

$$\frac{d}{dt}(G(t, y(t))) = g(t), \quad (2.3)$$

onde $G = G(t, y)$, $g = g(t)$ e a derivada no 1º membro da equação é uma derivada total em ordem a t . Por primitivação, a solução geral de (2.3), escrita na forma implícita, é:

$$G(t, y(t)) = \int g(t) dt + C$$

2.2.2 Equações Lineares

Uma equação escalar de primeira ordem diz-se *linear*, se pode ser escrita na forma

$$\dot{y} + a(t)y = b(t) \quad (2.4)$$

A equação diz-se homogénea se $b(t) \equiv 0$. Nesse caso, ela é equivalente a

$$\frac{y'}{y} = -a(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\log |y|) = -a(t)$$

Primitivando, obtém-se:

$$\begin{aligned} \log |y| = -\int a(t) dt + C &\Leftrightarrow |y| = e^C \exp\left(-\int a(t) dt\right) \\ &\Leftrightarrow y(t) = \pm D \exp\left(-\int a(t) dt\right) \end{aligned}$$

onde $D = e^C > 0$. Fazendo $K = \pm D$ e notando que $y(t) \equiv 0$ também é solução, obtemos a solução geral da equação linear homogénea

$$y(t) = K \exp\left(-\int a(t) dt\right), \quad t \in I$$

onde I é qualquer intervalo aberto onde $a(t)$ é contínua e $K \in \mathbb{R}$.

Resolvamos agora a equação não homogénea. Multiplicando a equação (2.4) por uma função $\mu(t)$ tal que $\dot{\mu} = a(t)\mu$, por exemplo, tomando

$$\mu(t) = \exp\left(\int a(t) dt\right)$$

obtém-se a equação equivalente ²:

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mu\dot{y} + \dot{\mu}y = \mu(t)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mu y) = \mu(t)b(t)$$

²As equações são equivalentes pois $\mu(t) = e^{\int a(t) dt} \neq 0$, para qualquer t

Assim, a solução geral de (2.4) é dada pela expressão:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t)b(t)dt + C \right]$$

Teorema: (Existência de solução de um PVI com equação linear)

Seja $I \subset \mathbb{R}$, a e b funções contínuas em I e $t_0 \in I$. Então, para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$, o PVI

$$\begin{cases} \dot{y} + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite solução única

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)b(s)ds + \mu(t_0)y_0 \right]$$

definida para todo $t \in I$.

Exemplo

- (1) Determinar a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de existência de solução:

$$\begin{cases} \dot{w} + w = e^{-2t} \\ w(0) = 3 \end{cases}$$

A equação $\dot{w} + w = e^{-2t}$ é linear, com $a(t) \equiv 1$ e $b(t) = e^{-2t}$ obviamente contínuas em \mathbb{R} . Um factor integrante (em $I = \mathbb{R}$) para a equação é:

$$\mu(t) = e^{\int 1 dt} = e^t$$

Sendo assim

$$\dot{w} + w = e^{-2t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^t w) = e^{-t} \Leftrightarrow w(t) = e^{-t}(-e^{-t} + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

Dado que $w(0) = 3$ conclui-se que $C = 4$ e a solução do PVI é

$$w(t) = e^{-t}(-e^{-t} + 4)$$

O intervalo máximo de solução corresponde ao maior intervalo onde $w(t)$ está bem definida e é continuamente diferenciável. Neste caso, $I_{\max} = \mathbb{R}$. Note que solução está definida (e é continuamente diferenciável) em $I = \mathbb{R}$, pois $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas em \mathbb{R} .

- (2) Determinar a solução do (PVI)

$$2xyy' + (1+x)y^2 = e^x, \quad x > 0 \text{ e } y(1) = 2$$

efectuando a mudança de variável $v = y^2$.

Usando a sugestão, sendo $v = y^2$ tem-se que $v' = (y^2)' = 2yy'$. Substituindo na equação

$$xv' + (1+x)v = e^x \Leftrightarrow v' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)v = \frac{e^x}{x}$$

Trata-se de uma equação linear, com $a(x) = \frac{1}{x} + 1$ e $b(x) = \frac{e^x}{x}$ obviamente contínuas para $x > 0$. Um factor integrante para a equação é:

$$\mu(x) = e^{\int (\frac{1}{x} + 1) dx} = xe^x$$

Sendo assim

$$v' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)v = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow xe^x v' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)xe^x v = e^{2x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(xe^x v) = e^{2x}$$

pelo que

$$v(x) = \frac{e^{2x} + c}{xe^x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dado que $v = y^2$, tem-se que

$$y(x) = \sqrt{\frac{e^{2x} + c}{xe^x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = -\sqrt{\frac{e^{2x} + c}{xe^x}}$$

tendo-se o primeiro caso se a condição inicial for positiva e o segundo se a condição inicial for negativa. Assim e dado que $y(1) = 2 > 0$, tem-se que a solução do (PVI) é

$$y(x) = \sqrt{\frac{e^{2x} + 4e - e^2}{xe^x}}$$

Como $e^{2x} + 4e - e^2$ é sempre positivo, $xe^x > 0$ se e só se $x > 0$ e o valor inicial $x_0 = 1 > 0$, então $I_{max} =]0, +\infty[$.

2.2.3 Equações Separáveis

Uma equação escalar de primeira ordem, diz-se *separável* se pode ser escrita na forma

$$f(y) \frac{dy}{dt} = g(t) \tag{2.5}$$

Para se poder encontrar a sua solução geral, é necessário que f e g estejam definidas e sejam contínuas em subconjuntos abertos de \mathbb{R} .

Se $F(y) = \int f(y)dy$ então:

$$\frac{d}{dt}F(y) = F'(y) \frac{dy}{dt} = f(y) \frac{dy}{dt} = g(t).$$

Em consequência, a solução geral da equação (2.5) é dada implicitamente por

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt + C$$

Note que a equação anterior é da forma

$$\Phi(t, y) = C \quad \text{onde} \quad \Phi(t, y) = F(y) - \int g(t)dt$$

Considere-se uma condição inicial genérica, $y(t_0) = y_0$. Se C for escolhido por forma a que (t_0, y_0) verifique a equação implícita, isto é, $C = \Phi(t_0, y_0)$, então o gráfico da solução do PVI é uma

curva de nível da função $\Phi(t, y)$. Para ser possível definir uma função $S(t)$ tal que $y = S(t)$ seja a única solução da equação implícita numa vizinhança de t_0 , isto é, para que, para (t, y) numa vizinhança de (t_0, y_0) ,

$$\Phi(t, y) = C \quad \Leftrightarrow \quad y = S(t)$$

então é obviamente necessário que a equação $\Phi(t, y) = C$ tenha uma e uma só solução pois, caso contrário, não se pode definir a função $S(t)$. Neste caso, $S(t)$ diz-se uma solução explícita (local) de $\Phi(t, y) = C$. Para poder concluir da existência de solução explícita local da equação, é útil o seguinte teorema:

Teorema da função implícita (em \mathbb{R}^2):

Seja $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(t_0, y_0) \in D$, $G(t_0, y_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0.$$

Então a equação

$$G(t, y) = 0$$

define uma única função y de classe C^1 numa vizinhança de t_0 tal que $y(t_0) = y_0$ e:

$$G(t, y(t)) = 0$$

para t nessa vizinhança.

No caso presente, temos $G(t, y) = \Phi(t, y) - C$, pelo que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Phi - C)(t_0, y_0) = F'(y_0) = f(y_0).$$

Consequentemente, basta verificar que $f(y_0) \neq 0$ para garantir a existência de solução explícita do PVI numa vizinhança de t_0 .

Teorema: (Existência de solução (local) do PVI para a equação separável)

Sejam f e g funções reais de variável real contínuas em vizinhanças de y_0 e t_0 respectivamente. Se $f(y_0) \neq 0$, então o PVI

$$\begin{cases} f(y) \frac{dy}{dt} = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite solução única definida numa vizinhança de t_0 . A solução é definida implicitamente pela equação

$$\int_{y_0}^y f(u) du = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

ou, equivalentemente,

$$\int f(y) dy - \int g(t) dt = C,$$

com C determinado pela condição inicial $y(t_0) = y_0$.

Exemplo

(1) Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(x-3) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Para determinar soluções tais que $y(t) \neq 0$, para qualquer t :

$$\frac{dy}{dx} = y(x-3) \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x-3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int \frac{1}{y} dy = x-3 \Leftrightarrow \log|y| = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = Ke^{\frac{x^2}{2} - 3x}, \quad \text{com } K \in \mathbb{R}$$

(Note que $y(t) \equiv 0$ também é solução da equação diferencial). Atendendo a que $y(0) = 5$ tem-se que $K = 5$ e como tal a solução do PVI é

$$y(x) = 5e^{\frac{x^2}{2} - 3x}$$

O domínio de diferenciabilidade da função y é \mathbb{R} , pelo que o intervalo máximo de existência de solução é $I_{\max} = \mathbb{R}$. (Observe-se também que $y(t) \neq 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, pelo que as equivalências acima são sempre válidas).

(2) Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Note-se em primeiro lugar que a equação $\frac{dy}{dx} = -3y$ admite a solução de equilíbrio (ou constante) $y(x) \equiv 0$, mas esta solução só verifica a condição inicial no caso em que $y_0 = 0$. Para determinar soluções não constantes,

$$\frac{dy}{dx} = -3y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int \frac{1}{y} dy = -3 \Leftrightarrow \log|y| = -3x + C$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = Ke^{-3x}$$

Atendendo a que $y(0) = y_0$ tem-se que $K = y_0$ e como tal a solução do PVI é

$$y(x) = y_0 e^{-3x}$$

Na Figura (2.1) encontra-se o traçado de algumas destas soluções. Note-se, em particular, que a solução constante, $y(x) \equiv 0$, tem a seguinte propriedade:

1. Todas as outras soluções se aproximam de $y(x) \equiv 0$ quando $x \rightarrow +\infty$.
2. Todas as outras soluções se afastam de $y(x) \equiv 0$ quando $x \rightarrow -\infty$.

Devido à propriedade 1, dizemos que a solução $y(x) \equiv 0$ é assintoticamente estável quando $x \rightarrow +\infty$.

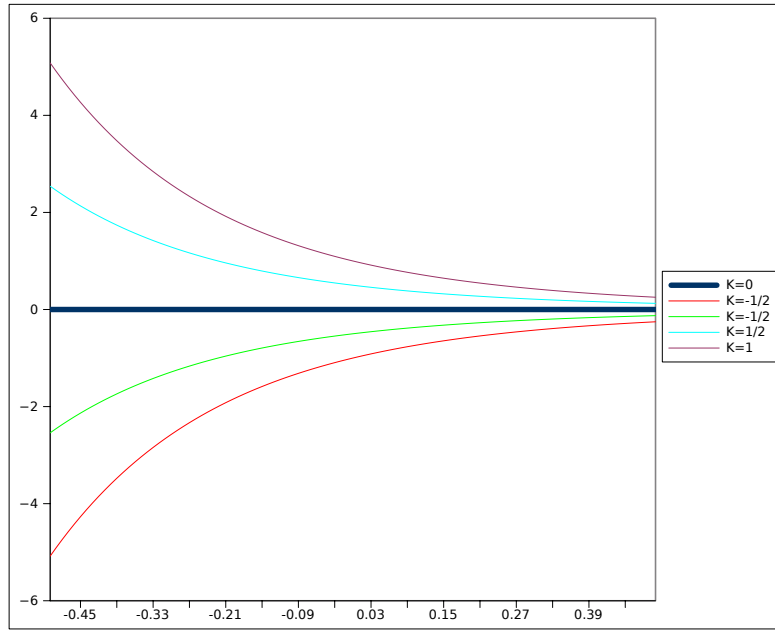


Figura 2.1: A solução de equilíbrio $y(t) \equiv 0$ e as soluções correspondentes a $y_0 = \pm 1/2$, $y_0 = \pm 1$.

2.2.4 Equações Exactas

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $M, N : A \rightarrow \mathbb{R}$. Uma equação diferencial do tipo

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

diz-se exacta se e só se é equivalente a

$$\frac{d}{dt} (\phi(t, y)) = 0, \quad (2.7)$$

onde $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 .

A solução geral, na forma implícita, da equação exacta é, então:

$$\phi(t, y) = C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Em que condições existe uma tal função ϕ , de forma a que a equação (2.6) seja equivalente a (2.7)? Começamos por notar que a equação (2.7) se pode escrever:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (2.8)$$

Comparando a equação (2.6) com (2.8), concluímos que para (2.6) ser exacta é necessário e suficiente que:

$$M = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{e} \quad N = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

ou seja, $(M, N) = \nabla\phi$, para certa função $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$. Isto é equivalente a dizer que o campo (M, N) é um campo gradiente ³.

Exemplo: as equações separáveis, como vimos, podem-se escrever na forma

$$-g(t) + f(y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

onde $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas ⁴ são exactas. De facto, basta tomar um potencial $\phi : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\phi(t, y) = \int f(y)dy - \int g(t)dt.$$

Este exemplo não parece muito interessante, pois obtivemos o potencial a partir do conhecimento prévio da solução geral da equação exacta.

Problemas mais interessantes – no sentido em que não podem ser facilmente resolvidos por outros métodos – podem-se abordar tomando como ponto de partida a seguinte (e já vossa conhecida) condição necessária para que um campo seja gradiente.

Proposição: se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e simplesmente conexo, $M, N : A \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^1 e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{em } A$$

então existe $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $(M, N) = \nabla\phi$. Em particular, isto implica que a equação $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$ é exacta.

Considerando agora um problema de valor inicial de uma equação exacta (2.7) com condição inicial $y(t_0) = y_0$, a sua solução geral é:

$$\phi(t, y) = C, \quad \text{com } C = \phi(t_0, y_0)$$

O teorema da função implícita garante a existência de solução local desde que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Phi - C)(t_0, y_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t_0, y_0) = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Teorema:(Existência de solução (local) do PVI para a equação exacta). Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e simplesmente conexo e $M, N : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Se

a) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ em A ,

b) $N(t_0, y_0) \neq 0$,

então existe $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que ⁵.

$$\phi(t, y) = C, \quad \text{com } C = \phi(t_0, y_0)$$

³ $(M, N) : A \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo gradiente com um potencial $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$.

⁴ $A, B \subset \mathbb{R}$ são conjuntos abertos

⁵De facto, as hipóteses garantem que ϕ é de classe C^2 ; mas esta conclusão mais forte não é necessária para o que iremos fazer.

define implicitamente a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

para t numa vizinhança de t_0 .

Exemplo

(1) Determinar a solução geral da equação

$$e^{4x} + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x, y) = e^{4x} + 2xy^2 \quad \text{e} \quad N(x, y) = \cos y + 2x^2y$$

é fácil de verificar que

- (i) M e N são continuamente diferenciáveis em $U = \mathbb{R}^2$;
- (ii) $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial N}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Conclui-se que (M, N) é um campo gradiente em \mathbb{R}^2 , isto é, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \Phi = (M, N)$.

Cálculo de Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M \Rightarrow \Phi(x, y) = \int (e^{4x} + 2xy^2) dx + C(y) \Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + C(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \Rightarrow 2x^2y + C'(y) = \cos y + 2x^2y \Rightarrow C(y) = \sin y + D$$

pelo que

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \sin y + D, \quad D \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias

$$e^{4x} + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2y) \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \sin y + D \right) = 0$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$\frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \sin y = K, \quad K \in \mathbb{R}$$

2.2.5 Equações Redutíveis a Exactas

Qualquer equação escalar de primeira ordem é *reduzível a exacta*, ou seja, pode ser transformada numa equação exacta, multiplicando-a por uma função $\mu(t, y)$ apropriada. A função μ denomina-se por um *factor integrante* da equação, e pode ser calculado resolvendo a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

No geral é impossível de obter uma solução (explícita) para esta equação. Pode ser resolvida nos casos em que o factor integrante, μ depende apenas de uma variável.

- A equação diferencial

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

é reduzível a exacta, com factor integrante só dependendo de t , $\mu = \mu(t)$, se a função

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

depender apenas de t . Se esta condição se verificar, o factor integrante é uma das soluções da equação diferencial

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \mu$$

- A equação diferencial

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

é reduzível a exacta, com factor integrante só dependendo de y , $\mu = \mu(y)$, se a função

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

depender apenas de y . Se esta condição se verificar, o factor integrante é uma das soluções da equação diferencial

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \mu$$

Em qualquer dos casos, a solução da equação inicial será dada por

$$\Phi(t, y) = C$$

em que Φ satisfaz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu M \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N$$

Exemplos:

1. Considere a equação diferencial

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x, y) = 3x^2y + 2xy + y^3, \quad N(x, y) = x^2 + y^2$$

é fácil de concluir que M e N têm derivada contínua em \mathbb{R}^2 (são funções polinomiais) e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2x + 3y^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

pelo que a equação não é exacta. Admitindo que é redutível a exacta, existe um factor integrante μ tal que a equação

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\mu + (x^2 + y^2)\mu \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta. Pelo que

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\frac{\partial \mu}{\partial y} + (3x^2 + 2x + 3y^2)\mu = (x^2 + y^2)\frac{\partial \mu}{\partial x} + 2x\mu$$

Supondo que $\mu = \mu(x)$ (o que implica $\partial \mu / \partial y = 0$) tem-se que

$$(3x^2 + 2x + 3y^2)\mu = (x^2 + y^2)\mu'(x) + 2x\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3x^2 + 2x + 3y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 3$$

Pode-se então verificar que a equação $\mu'(x)/\mu(x) = 3$ é possível de resolver (o segundo membro **não depende** de y), e como tal o factor integrante é $\mu(x) = e^{3x}$.

Considere-se então a equação

$$e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) + e^{3x}(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

que por construção é exacta: observe-se que as funções $e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)$ e $e^{3x}(x^2 + y^2)$ são diferenciáveis em \mathbb{R}^2 , e

$$\frac{\partial}{\partial y} [e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)] = \frac{\partial}{\partial x} [e^{3x}(x^2 + y^2)]$$

Sendo assim $(\mu M, \mu N)$ é um campo gradiente em \mathbb{R}^2 , isto é, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \Phi = (\mu M, \mu N)$.

Cálculo de Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mu M \Rightarrow \Phi(x, y) = \int [e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)] dx + C(y)$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} + c(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N \Rightarrow (x^2 + y^2)e^{3x} + C'(y) = e^{3x}(x^2 + y^2) \Rightarrow C(y) = \text{const.}$$

pelo que

$$\Phi(x, y) = x^2 y e^{3x} + \frac{y^3}{3} e^{3x} + \text{const.} \quad , \quad \text{const.} \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias

$$\begin{aligned} 3x^2 y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = 0 & \Leftrightarrow e^{3x}(3x^2 y + 2xy + y^3) + e^{3x}(x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(x^2 y e^{3x} + \frac{y^3}{3} e^{3x} + \text{const.} \right) = 0 \end{aligned}$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$x^2 y e^{3x} + \frac{y^3}{3} e^{3x} = k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Considere a equação diferencial

$$y + (2xy - e^{-2y}) \frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x, y) = y \quad , \quad N(x, y) = 2xy - e^{-2y}$$

é fácil de concluir que M e N têm derivada contínua em \mathbb{R}^2 e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

pelo que a equação não é exacta. Admitindo que é redutível a exacta, existe um factor integrante μ tal que a equação

$$y\mu + (2xy - e^{-2y})\mu \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta. Pelo que

$$y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu = (2xy - e^{-2y}) \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2y\mu$$

Supondo que $\mu = \mu(x)$ (o que implica $\partial \mu / \partial y = 0$) tem-se que

$$\mu = (2xy - e^{-2y})\mu'(x) + 2y\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1 - 2y}{2xy - e^{-2y}}$$

É fácil de verificar que a função $\frac{1 - 2y}{2xy - e^{-2y}}$ não depende apenas da variável x , pelo que **não existe** factor de integração dependendo apenas de x .

Supondo agora que $\mu = \mu(y)$ (o que implica $\partial \mu / \partial x = 0$) tem-se que

$$y\mu' + \mu = 2y\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{2y - 1}{y}$$

Pode-se então verificar que a equação $\mu'(y)/\mu(y) = (2y - 1)/y$ é possível de resolver (o segundo membro **depende** apenas de y), e como tal o factor integrante é $\mu(y) = \frac{e^{2y}}{y}$. Considere-se então a equação

$$e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

que por construção é exacta: observe-se que as funções e^{2y} e $2xe^{2y} - \frac{1}{y}$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, e

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[e^{2y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[2xe^{2y} - \frac{1}{y} \right]$$

Sendo assim $(\mu M, \mu N)$ é um campo gradiente em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ (ou em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$), isto é, existe $\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \rightarrow \mathbb{R}$) tal que $\nabla \Phi = (\mu M, \mu N)$.

Cálculo de Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M\mu \Rightarrow \Phi(x, y) = \int \left[e^{2y} \right] dx + C(y) \Rightarrow \Phi(x, y) = xe^{2y} + c(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N \Rightarrow 2xe^{2y} + C'(y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y} \Rightarrow C(y) = -\log|y| + \text{const.}$$

pelo que

$$\Phi(x, y) = xe^{2y} - \log|y| + \text{const.}, \quad \text{const.} \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias, para $y \neq 0$

$$\begin{aligned} y + (2xy - e^{-2y}) \frac{dy}{dx} = 0 &\Leftrightarrow e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(xe^{2y} - \log|y| + \text{const.} \right) = 0 \end{aligned}$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$xe^{2y} - \log|y| = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

2.3 Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções

Consideramos o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

onde a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tem domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. É costume designar $f(t, y)$ por *campo de direcções* da equação diferencial em (2.10); isto deriva do facto de **a recta tangente ao gráfico das soluções da equação diferencial** ter, em cada ponto (t, y) desse gráfico, **declive igual a $f(t, y)$** . Note que se $y(t)$ é solução da equação diferencial então $f(t, y(t)) = \frac{dy}{dt}(t)$.

Nesta secção estudamos as condições que a função $f(t, y)$ deve verificar para que a solução do PVI:

- exista;
- seja única;
- esteja definida num intervalo maximal $I =]a, b[$.

Estas questões matemáticas são muito importantes do ponto de vista das aplicações. Os métodos numéricos que na prática são aplicados no cálculo aproximado de soluções de uma equação diferencial ordinária exigem, como hipótese, que a solução do PVI exista, seja única e que dependa continuamente das condições iniciais — isto é, que seja um *problema bem posto*. É sabido que quando um PVI falha uma daquelas propriedades as soluções dos esquemas numéricos correspondentes podem exibir comportamentos que as tornam inúteis, na óptica das aplicações.

2.3.1 Teorema de Peano

Se exigirmos apenas continuidade de $f(t, y)$, podemos provar o:

Teorema de Peano (Existência de solução local)

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em $(t, y) \in D$. Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite pelo menos uma solução, $y(t)$, num intervalo $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ para certo $\alpha > 0$.

Pode-se então colocar a questão de saber se a continuidade de $f(t, y)$ é suficiente para provar unicidade de solução. A subsecção seguinte mostra que a resposta a esta questão é negativa.

2.3.2 Exemplo de não unicidade de solução

Considere-se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = |y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

Vamos construir um conjunto infinito de soluções para este PVI.

Começamos por notar que a solução constante $y(t) \equiv 0$ é solução do PVI. Por outro lado, admitindo que $y(t) > 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-1/2} \frac{dy}{dt} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int y^{-1/2} dy \right) = 1 \Leftrightarrow 2y^{1/2} = t + c$$

Desta forma, para $t + c > 0 \Leftrightarrow t > -c$, a função

$$y(t) = \frac{1}{4}(t + c)^2$$

é continuamente diferenciável e satisfaz a equação diferencial para $t > -c$.

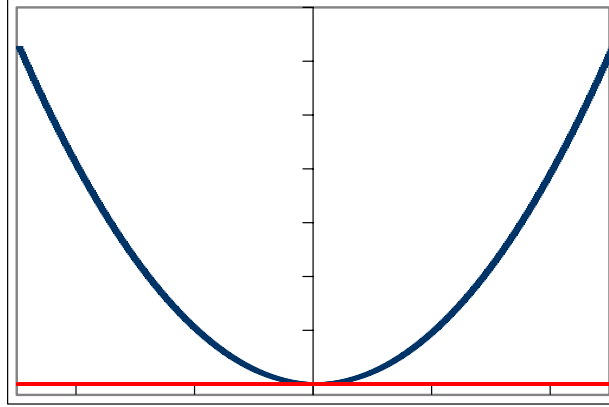


Figura 2.2: A solução de equilíbrio $y(t) \equiv 0$ e a solução $y(t) = t^2/4$.

Podemos agora utilizar o método de “cortar” e “colar” a partir das soluções $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}(t + c)^2$, para $t > -c$, para criar novas soluções do PVI. Será necessário, obviamente, que no “ponto de colagem” a nova solução seja uma função contínua, diferenciável e que verifique a equação diferencial.

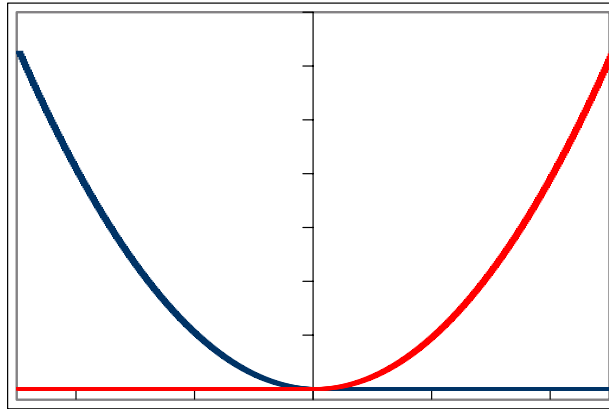


Figura 2.3: As soluções do PVI quando $c = 0$.

Para $t_1 > 0$, defina-se

$$y_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_1 \\ \frac{1}{4}(t - t_1)^2 & \text{se } t > t_1 \end{cases}$$

Verifica-se que y_{t_1} é diferenciável e verifica a equação diferencial em $\mathbb{R} \setminus \{t_1\}$, pois foi construída à custa das soluções $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}(t + c)^2$, com $c = -t_1$. Note que esta escolha de c faz

precisamente com que

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} y_{t_0}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} y_{t_1}(t) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \left(\frac{t_1}{2} - k\right)^2,$$

ou seja, que y_{t_1} seja contínua em t_1 e $y_{t_1}(t_1) = 0$. Também as derivadas laterais de y_{t_1} em t_1 existem e são nulas, pelo que y_{t_1} satisfaz a equação diferencial em t_1 .

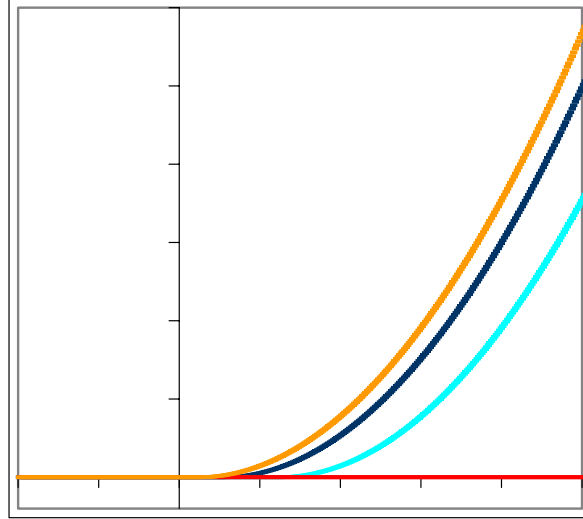


Figura 2.4: As soluções y_{t_1} com $t_1 = 1/5$, $t_1 = 1/2$ e $t_1 = 6/5$.

O facto de existir uma infinidade de soluções mostra que a continuidade da função $f(t, y) = \sqrt{y}$ no seu domínio não é suficiente para garantir unicidade de solução para o PVI.

De facto, temos que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y} \right| |x - y|,$$

onde o termo

$$\left| \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y} \right|,$$

não é limitado para x e y num vizinhança qualquer da origem. Isto implica, em particular, que fixando $y = 0$ as taxas médias de crescimento da função f não são limitadas. Ora, foi precisamente nos pontos onde a solução da equação é nula que se observou a bifurcação de soluções!

2.3.3 Condição de Lipschitz

Nesta Secção, definiremos uma classe de funções contínuas que não são necessariamente diferenciáveis relativamente a y , mas para as quais o Teorema de Picard é válido. O exemplo anterior sugere que se introduza a seguinte condição adicional sobre f , que é devida a Lipschitz.

Considere-se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D \subset \mathbb{R}^2$. Diz-se que

- f é lipschitziana relativamente a y em D sse

$$|f(t, y) - f(t, w)| \leq K|y - w| \quad \forall (t, y), (t, w) \in D$$

A constante $K \in \mathbb{R}^+$ é denominada a *constante de Lipschitz*. Observe-se que se a função f é lipschitziana relativamente a y em D , verificará

$$\left| \frac{f(t, y) - f(t, w)}{y - w} \right| \leq K \quad \forall (t, y), (t, w) \in D$$

o que significa que a taxa de crescimento de f relativamente à segunda coordenada, é limitada em D . Em particular isto significa que:

- Se $\partial f / \partial y$ existe (em D), então $\partial f / \partial y$ é uma função limitada em D ;
 - Se $\partial f / \partial y$ não existe em todos os pontos de D (porque não existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t, y+h) - f(t, y)}{h}$, para algum $(t, y) \in D$), ainda assim a razão incremental $\frac{f(t, y) - f(t, y+h)}{h}$ será sempre limitada, para todo h numa vizinhança de 0.
- f é **localmente lipschitziana relativamente a y em D** sse for lipschitziana relativamente a y em todo o subconjunto compacto de D .

- **Critério**

Se f é contínua num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe e é contínua em $D \subset \mathbb{R}^2$ então f é localmente lipschitziana relativamente a y em D .

2.3.4 Teorema de Picard

Enunciaremos, de seguida, o resultado que estabelece existência e unicidade de solução de um problema de valor inicial relativo a uma equação diferencial ordinária e escalar de primeira ordem. Veremos mais tarde que este teorema pode ser generalizado às equações vectoriais de primeira ordem, garantindo nessa versão a existência e unicidade de problemas de valor inicial envolvendo essas equações e (como sua consequência) também envolvendo equações lineares de ordem n .

Teorema de Picard

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a y em D . Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma única solução, $y(t)$, para t pertencente a $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ para certo $\alpha > 0$.

A demonstração deste teorema é feita de forma construtiva, sendo obtida a solução à custa de uma sucessão de aproximações da solução. Apresentaremos em seguida essa construção e depois os vários passos da demonstração do teorema.

Equivalência entre o Problema de Valor Inicial e um Problema Integral

É fácil verificar que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

é equivalente à equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (2.11)$$

para $y \in C^1(I)$, sendo I qualquer intervalo aberto contendo t_0 .

De facto, se $y \in C^1(I)$ satisfaz o PVI (2.10) então, integrando ambos os membros da equação diferencial entre t_0 e t e usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad \Leftrightarrow \quad y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Usando agora a condição inicial do PVI (2.10), obtém-se a equação integral (2.11).

Reciprocamente, admitindo que $y \in C^1(I)$ é solução da equação integral (2.11) então, aplicando o teorema fundamental do cálculo ao integral do membro direito da equação conclui-se que $y(t)$ é diferenciável e que:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I.$$

Assim sendo, $y(t)$ é solução da equação diferencial. Por outro lado, substituindo t por t_0 na equação integral (2.11), obtém-se $y(t_0) = y_0$.

A equação integral é, do ponto de vista da análise matemática, muito útil pois a estimação de integrais é mais fácil que a das derivadas.

Iteradas de Picard

Derivamos agora a partir da equação integral uma sucessão de aproximações — as iteradas de Picard. Trata-se de uma sucessão de funções contínuas $y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida recursivamente por:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds \\ &\vdots \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \\ &\vdots \end{aligned}$$

Exemplo 1: Considere-se o PVI

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

A solução do PVI (2.12) é

$$y(x) = e^{x^2}, \quad I_{\text{Max}} = \mathbb{R}$$

Por outro lado a sucessão $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ das iteradas de Picard associadas ao (PVI) é

$$y_0(x) = y_0 = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2sy_0(s) ds = 1 + \int_0^x (2s) ds = 1 + x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (2sy_1(s)) ds = 1 + \int_0^x 2s(1 + s^2) ds = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (2sy_2(s)) ds = 1 + \int_0^x 2s(1 + s^2 + \frac{s^4}{2}) ds = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$$

\vdots

Na Figura (2.5) estão representadas as primeiras iteradas de Picard assim como a solução do (PVI).

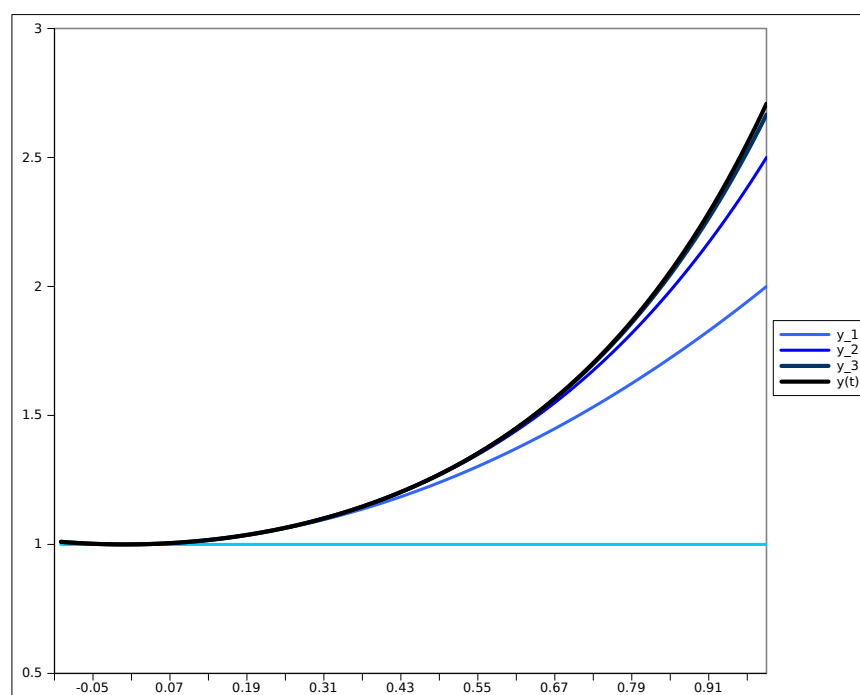


Figura 2.5: Algumas iteradas de Picard e a solução do (PVI) (2.12).

Pode-se verificar, por indução matemática, que:

$$y_n(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Neste caso, a sucessão das iteradas de Picard, y_n , é precisamente igual à sucessão das somas parciais da série de Maclaurin da solução do (PVI), $y(x) = e^{x^2}$. No entanto, e conforme se ilustra no exemplo seguinte, tal tipo de identidade pode não se verificar mesmo em casos simples.

Exemplo 2: Considere-se o (PVI)

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Vamos construir a sucessão $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ das iteradas de Picard associadas ao (PVI). Assim:

$$y_0(x) = y_0 = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (y_0(s))^2 ds = 1 + \int_0^x 1 ds = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (y_1(s))^2 ds = 1 + \int_0^x (1 + s)^2 ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (y_2(s))^2 ds = 1 + \int_0^x (1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3})^2 ds =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63}$$

⋮

Por outro lado, resolvendo a equação diferencial, obtém-se

$$y' = y^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int y^{-2} dy = 1 \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{c - x}.$$

A solução do (PVI) será então

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad I_{\text{Max}} =] - \infty, 1[$$

Na Figura (2.6) estão representadas as primeiras iteradas de Picard, bem como a solução do (PVI). É de observar que quando nos aproximamos do ponto $x = 1$ (onde a solução do (PVI) explode) a convergência das iteradas de Picard torna-se cada vez mais lenta.

Pode-se provar (a demonstração não é inteiramente trivial) que as iteradas de Picard deste problema verificam

$$y_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_{n+1}(x) = S_n(x) + R_{n+1}(x) \quad (2.14)$$

onde $R_{n+1}(x)$ é uma função polinomial com um zero de ordem $n + 1$ em $x = 0$. Note que $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ é a sucessão das somas parciais da série geométrica, cuja soma é precisamente a solução do (PVI), $y(x) = \frac{1}{1-x}$, mas somente em $] - 1, 1[$.

Em casos menos simples que estes dois exemplos — quando $f(t, y)$ não é uma função polinomial — as iteradas de Picard não são polinomiais; no entanto, e mesmo sem se conhecer a forma explícita dessas iteradas, pode-se usar a análise matemática para provar a sua convergência local.

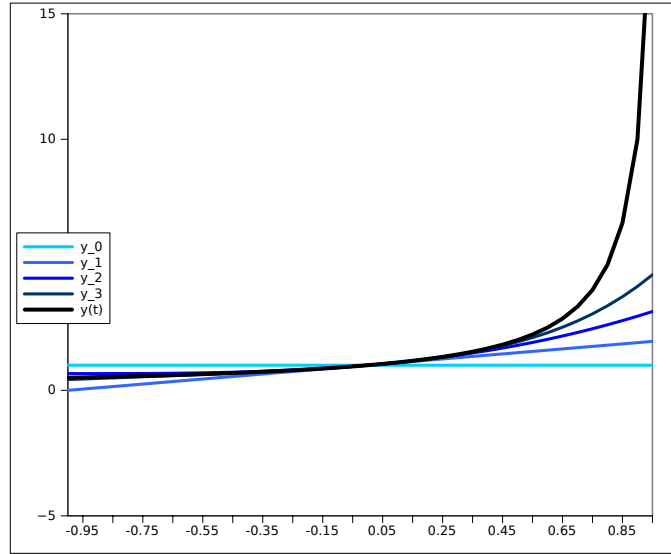


Figura 2.6: Algumas iterações de Picard e a solução do (PVI) (2.13).

Convergência Uniforme das Iteradas de Picard

Vamos então demonstrar que a sucessão das iterações de Picard, $y_n(t)$, converge uniformemente num intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, para certo $\alpha > 0$ a determinar (o seu valor irá depender de t_0 , y_0 e f).

Começamos por estimar a diferença entre duas iterações de Picard consecutivas ⁶:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))| |ds| \end{aligned}$$

Vamos estimar a função integranda através da condição de Lipschitz. Considere-se um rectângulo $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \text{ e } y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ contido no domínio, D , de f .

Seja K a constante de Lipschitz de f (relativamente a y) no conjunto compacto R , ou seja, K verifica:

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq K|y - x| \quad \forall (t, y), (t, x) \in R \quad (2.15)$$

Para que o gráfico das iterações de Picard permaneça no interior de R (por forma a que a estimativa de Lipschitz (2.15) seja válida quando aplicada a pontos $(t, y_n(t))$), é necessário que:

1º) $t \in]t_0 - a, t_0 + a[$, pelo que devemos ter $\alpha < a$.

⁶Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no intervalo I e $a, b \in I$ (sem que se tenha, necessariamente, $b \geq a$) então obtém-se, como caso particular da propriedade de majoração do integral complexo (Subsecção 1.5.2):

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| |dt|.$$

Note que $\int_a^b |f(t)| |dt|$ é igual a $\int_a^b |f(t)| dt$ se $b \geq a$ e a $\int_b^a |f(t)| dt$ se $b < a$. Em particular, $\int_a^b |dt| = |b - a|$.

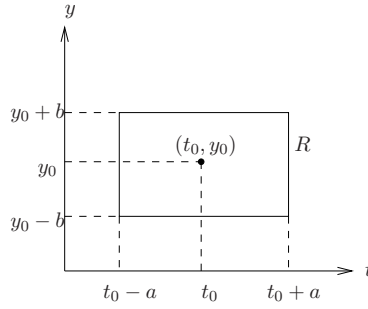


Figura 2.7: O rectângulo R .

2º) Seja

$$M = \max \{|f(t, y)| : (t, y) \in R\}$$

Para que $(t, y_n(t))$ esteja no interior de R para $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, é necessário que $|y_n(t) - y_0| < b$. Como

$$|y_n(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s))| |ds| \leq M \int_{t_0}^t |ds| = M|t - t_0| \leq M\alpha,$$

isso implica que devemos ter $M\alpha < b$. Para tal, é preciso exigir $\alpha < b/M$.

Assim, para qualquer $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \stackrel{\text{def}}{=} I_\alpha$:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))| |ds| \\ &\leq \int_{t_0}^t K |y_n(s) - y_{n-1}(s)| |ds| \\ &\leq K \max_{s \in I_\alpha} |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \int_{t_0}^t |ds| \\ &\leq K\alpha \max_{s \in I_\alpha} |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \end{aligned}$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} \max_{t \in I_\alpha} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq K\alpha \max_{t \in I_\alpha} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \\ &\leq (K\alpha)^2 \max_{t \in I_\alpha} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \\ &\vdots \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} |y_1(t) - y_0| \end{aligned}$$

Como $y_1(t) - y_0 = \int_{t_0}^t f(s, y_0) ds$, resulta então da desigualdade anterior que:

$$\begin{aligned} \max_{t \in I_\alpha} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_0) ds \right| \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \int_{t_0}^t |f(s, y_0)| |ds| \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \int_{t_0}^t M |ds| \\ &= (K\alpha)^n M\alpha < (K\alpha)^n b \end{aligned}$$

Definindo $r = K\alpha$, então

$$\max_{t \in I_\alpha} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| < br^n. \quad (2.16)$$

Utilizando somas telescópicas:

$$\begin{aligned} y_n(t) &= (y_n(t) - y_{n-1}(t)) + (y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)) + \dots \\ &\quad \dots + (y_2(t) - y_1(t)) + (y_1(t) - y_0) + y_0 \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t)) \end{aligned}$$

Isto significa que $y_n(t)$ é a sucessão das somas parciais da série

$$y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (y_k(t) - y_{k-1}(t)) \quad (2.17)$$

A terceira restrição que introduzimos ao valor de α é $r = K\alpha < 1$, ou seja $\alpha < 1/K$. Assim, como $|r| < 1$, $\sum_{k=m}^{\infty} br^k$ é uma série geométrica convergente. Por outro lado, o termo geral da série (2.17) verifica

$$|y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq br^k,$$

para $k \geq 1$. Pelo critério de Weierstrass, $y_n(t)$ converge uniformemente em I_α , e o limite é a soma da série de funções contínuas (2.17). Resulta assim que $y : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ existe e é contínua desde que tomemos:

$$\alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\} \quad (2.18)$$

Existência e Regularidade da Solução

Considerando agora as iteradas de Picard,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y_n(t)) dt \quad (2.19)$$

e usando a convergência uniforme de $y_n(t)$ para $y(t)$ em I_α , então tomando o limite em ambos os membros de (2.19) conclui-se que $y(t)$ satisfaz a equação integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t)) dt$$

Como $y(t)$ é contínua em I_α , então $f(t, y(t))$ é contínua em I_α . Por aplicação do teorema fundamental do cálculo ao 2º membro da equação integral, podemos concluir que $y \in C^1(I_\alpha)$.

Unicidade de Solução

Supondo que $y(t)$ e $z(t)$ são duas soluções do PVI, então verificam

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t)) dt$$

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, z(t)) dt$$

em $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde α satisfaz (2.18). Assim:

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| |ds| \\ &\leq \int_{t_0}^t K |y(s) - z(s)| |ds| \\ &\leq K \max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)| \int_{t_0}^t |ds| \\ &\leq K\alpha \max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)| \end{aligned}$$

Como $\alpha < 1/K$, ou seja, $K\alpha < 1$,

$$|y(t) - z(t)| \leq \max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)|,$$

sendo a igualdade apenas verificada quando $\max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)| = 0$. Como é impossível que se verifique a desigualdade estrita para todo o $t \in I_\alpha$ (pois o máximo de $|y(t) - z(t)|$ é atingido num ponto $t_1 \in I_\alpha$) concluímos que $\max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)| = 0$, ou seja:

$$y(t) = z(t) \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

□

Exemplos:

(1) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1 - xy} \quad , \quad y(0) = 0 \quad (2.20)$$

Começemos por observar que $f(x, y) = \sqrt[3]{1 - xy}$

- está definida e é contínua em \mathbb{R}^2 ;
- $\partial f / \partial y$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : xy = 1\}$, consequentemente, f é localmente lipschitziana neste conjunto.

Conclui-se que $f(x, y)$ verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : xy = 1\}$. Dado que $(x_0, y_0) = (0, 0) \in D$ o problema de valor inicial (2.20) admite uma única solução, $y(x)$ definida numa vizinhança de $x_0 = 0$.

(2) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1 - xy} \quad , \quad y(1) = 1 \quad (2.21)$$

Como vimos no exemplo anterior $f(x, y) = \sqrt[3]{1-xy}$ verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : xy = 1\}$. Em primeiro lugar, e dado que $f(x, y)$ é contínua em \mathbb{R}^2 , o Teorema de Peano garante que o PVI (2.21) admite pelo menos uma solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$. No entanto neste exemplo tem-se que $(x_0, y_0) = (1, 1) \notin D$. Apesar disso não se pode, de imediato, concluir que $f(x, y)$ não verifica as condições do Teorema de Picard num conjunto que contenha $(1, 1)$. O facto de $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ não existir não é suficiente para garantir que $f(x, y)$ não é lipschitziana em conjuntos contendo $(1, 1)$; teremos, por isso, que o verificar directamente. Assim, seja B qualquer subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^2 , e $(x, y_1), (x, y_2) \in B$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \sqrt[3]{1-xy_1} - \sqrt[3]{1-xy_2} \right| = \left| \frac{\sqrt[3]{1-xy_1} - \sqrt[3]{1-xy_2}}{y_1 - y_2} \right| |y_1 - y_2|$$

Para que f seja lipschitziana em B , a quantidade

$$L(x, y_1, y_2) = \left| \frac{\sqrt[3]{1-xy_1} - \sqrt[3]{1-xy_2}}{y_1 - y_2} \right|$$

tem que ser limitada para todos $(x, y_1), (x, y_2) \in B$. Considere-se $(x, y_2) = (1, 1)$ e $(x, y_1) = (1, 1+h)$ para $h \in \mathbb{R}$. Temos então que

$$L(1, 1, 1+h) = \left| \frac{\sqrt[3]{1-h}}{h} \right| = |h|^{-2/3}$$

É então fácil de observar que para valores de h próximos de 0 (o que corresponde a estarmos em pontos (x, y) próximos de $(1, 1)$), $|h|^{-2/3}$ aproxima-se de ∞ pelo que $L(1, 1, 1+h)$ não é limitada. Concluimos que f não é lipschitziana em qualquer conjunto contendo o ponto $(1, 1)$, pelo que não se verificam as condições do Teorema de Picard numa vizinhança de $(1, 1)$. Concluimos então que não se pode garantir unicidade de solução para (2.21).

(3) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = |x+y|, \quad y(1) = -1 \quad (2.22)$$

Começemos por observar que $f(x, y) = |x+y|$ está definida e é contínua em \mathbb{R}^2 o Teorema de Peano garante que o PVI (2.22) admite pelo menos uma solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$. Por outro lado, $\partial f / \partial y$ está definida e é contínua em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x+y = 0\}$. Visto $(x_0, y_0) \notin D$, teremos que averiguar directamente se $f(x, y)$ é lipschitziana numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (1, -1)$. conjunto limitado e fechado que contenha $(1, -1)$. Assim, seja B qualquer subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^2 , e $(x, y_1), (x, y_2) \in B$.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = ||x+y_1| - |x+y_2|| \leq |(x+y_1) - (x+y_2)| = |y_1 - y_2|$$

Tem-se então que $f(x, y)$ é lipschitziana em B (com constante de Lipschitz $L = 1$, pelo que f é localmente lipschitziana em \mathbb{R}^2 . O Teorema de Picard garante então unicidade de solução para (2.22).

2.3.5 Prolongamento de Solução

Sem acrescentar mais condições a f , a conclusão do teorema de Picard pode ser substancialmente melhorada da forma que em seguida se descreve.

Teorema (Prolongamento de Solução):

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $(t_0, y_0) \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e localmente lipshitziana relativamente a y em D . Então a solução única do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

está definida num intervalo máximo de definição, $I_{max} =]a, b[$, cujos extremos, $a, b \in \mathbb{R}$, verificam

- (i) $b = +\infty$ ou
(ii) $b < +\infty$ e $(t, y(t)) \rightarrow \partial D$ quando $t \rightarrow b^-$ ou
(iii) $b < +\infty$ e $\lim_{t \rightarrow b^-} |y(t)| = +\infty$
e
(i) $a = -\infty$ ou
(ii) $a > -\infty$ e $(t, y(t)) \rightarrow \partial D$ quando $t \rightarrow a^+$ ou
(iii) $a > -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow a^+} |y(t)| = +\infty$

Note que os casos do tipo (iii) significam que a solução explode (respectivamente, quando $t \rightarrow b$ ou $t \rightarrow a$). Quanto aos casos do tipo (ii), por exemplo

$$(t, y(t)) \rightarrow \partial D \quad \text{quando} \quad t \rightarrow b^-$$

significa que qualquer ponto limite do gráfico de $y(t)$ para $t \in [t_0, b[$ (este gráfico é o conjunto $\{(t, y(t)) : t \in [t_0, b[\} \subset \mathbb{R}^2$) pertence à fronteira de D , ∂D . Isto é equivalente a dizer que qualquer sucessão $t_n \in]a, b[$ tal que $t_n \rightarrow b$ e $y(t_n)$ é convergente verifica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n, y(t_n)) \in \partial D$$

(e, analogamente, quando $t \rightarrow a^+$).

Dem.:

Vamos provar a conclusão do teorema para o prolongamento para a direita, isto é, até b .

Seja J o conjunto dos $\tau \in \mathbb{R}$ tais que existe solução $y : [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ do problema de valor inicial. Pelo teorema de Picard, $J \neq \emptyset$. Se J não for majorado, então a conclusão do teorema é satisfeita pois verifica-se o caso (i). Por outro lado, se J é majorado, como $J \neq \emptyset$ então existe $b = \sup J < +\infty$.

Admitamos que tanto (ii) como (iii) não se verificam. Como $\lim_{t \rightarrow a^+} |y(t)| = +\infty$ não é verdade, então existe uma sucessão $s_n \rightarrow b^-$ tal que $y(s_n)$ é limitada; sendo limitada, tal sucessão tem uma subsucessão convergente. Isto mostra que existem sucessões $t_n \in]a, b[$ tais que $t_n \rightarrow b$ e $y(t_n)$ é convergente. Mas como (ii) não se verifica, então para pelo menos uma dessas sucessões, $(t_n, y(t_n))$ converge para um certo $(b, \omega) \in \text{int } D$.

Seja $\delta < \frac{1}{3} \text{dist}((b, \omega), \partial D)$; assim sendo, $\overline{B_{3\delta}(b, \omega)}$ é um subconjunto compacto de D . Seja K a constante de Lipshitz de f em $\overline{B_{3\delta}(b, \omega)}$ e

$$\alpha = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{K} \right\}. \quad (2.23)$$

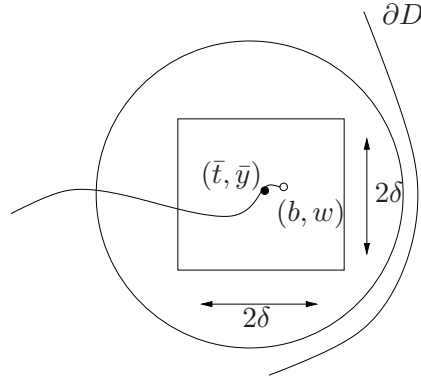


Figura 2.8

Seja (\bar{t}, \bar{y}) um termo da sucessão $(t_n, y(t_n))$ tal que

$$\|(\bar{t}, \bar{y}) - (b, \omega)\| < \alpha \quad (2.24)$$

Então o quadrado

$$R = \left\{ (t, y) : t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \text{ e } y \in [\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta] \right\}$$

verifica

$$R \subset \overline{B_{\delta\sqrt{2}}(\bar{t}, \bar{y})} \subset B_{\delta\sqrt{2}+\alpha}(b, \omega) \subset B_{3\delta}(b, \omega),$$

pois, tendo em conta (2.23), $\delta\sqrt{2} + \alpha \leq \delta\sqrt{2} + \delta < 3\delta$.

Pela demonstração do teorema de Picard e (2.23), concluímos que a solução $y(t)$ admite extensão ao intervalo $[t_0, \bar{t} + \alpha]$ e que, tendo em conta (2.24), $b - \bar{t} < \alpha$, o que implica que:

$$\bar{t} + \alpha > b$$

Mas isto é absurdo, pois contradiz o facto de que $b = \sup J$.

A demonstração do prolongamento para a esquerda (até a) é análoga à anterior. \square

Em qualquer um dos casos, verificar que a solução não pode ser prolongada até $t = \infty$ (ou $t = -\infty$) porque a fronteira do conjunto D é atingida pode ser fácil de constatar pois a função $f(t, y)$ é dada e, conseqüentemente, conhecemos os subconjuntos de \mathbb{R}^2 onde o gráfico da solução não pode entrar. Para mostrar que a solução explode (ou que não explode) ou, mais genericamente, que o seu gráfico está confinado a uma certa região de \mathbb{R}^2 , é muito útil o seguinte critério.

2.3.6 Comparação de Soluções

Comparação de Soluções:

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ verificando as condições do Teorema de Picard e $(t_0, y_0) \in D$.

Sejam ainda, $y(t)$ a solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

e $u(t)$ a solução do PVI

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \quad , \quad u(t_0) = y_0$$

Se

$$f(t, y) \leq g(t, y) \quad , \quad \forall (t, y) \in D$$

então

$$\begin{cases} y(t) \leq u(t) & \text{para todo } t \geq t_0 \\ y(t) \geq u(t) & \text{para todo } t \leq t_0 \end{cases}$$

Consequências:

- **Mostrar que a solução explode**

Seja $u(t)$ a solução do PVI

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \quad , \quad u(t_0) = \alpha$$

definida em $I_{\max}^u =]t_0 - \epsilon, T[$, tendo-se que $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$. Se $y(t)$ é solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = \alpha$$

e $f(t, y) \geq g(t, y)$ para todo (t, y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \geq u(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ explode no intervalo $]t_0, T[$, isto é, existe $\Theta \in]t_0, T[$ tal que $\lim_{t \rightarrow \Theta^-} y(t) = +\infty$ e consequentemente $\sup I_{\max}^y = \Theta$

- **Mostrar que a solução não explode**

Seja $u(t)$ a solução do PVI

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \quad , \quad u(t_0) = \alpha$$

definida em $I_{\max}^u =]a, +\infty[$ para certo $a < t_0$. Se $y(t)$ é solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = \alpha$$

e $f(t, y) \leq g(t, y)$ para todo (t, y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ não explode para $+\infty$ em $]t_0, +\infty[$. Analogamente, seja $v(t)$ a solução do PVI

$$\frac{dv}{dt} = h(t, v) \quad , \quad v(t_0) = \alpha$$

definida em $I_{\max}^v =]a_1, +\infty[$ para certo $a_1 < t_0$. Se $y(t)$ é solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = \alpha$$

e $f(t, y) \geq h(t, y)$ para todo (t, y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \geq v(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ não explode para $-\infty$ em $]t_0, +\infty[$. Conclui-se que $y(t)$ não explode no intervalo $]t_0, +\infty[$.

Exemplo 1

Considere-se o PVI

$$y' = (1 + y^2)f(ty) \quad , \quad y(0) = 0 \quad (2.25)$$

em que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, verificando $f(x) \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Como a função $(1 + y^2)f(ty)$ é contínua em \mathbb{R}^2 , e a função

$$\frac{\partial}{\partial y}((1 + y^2)f(ty)) = 2yf(ty) + (1 + y^2)f'(ty)t$$

é também contínua em \mathbb{R}^2 — logo f é localmente lipschitziana relativamente a y em \mathbb{R}^2 — o teorema de Picard garante a existência de uma solução única, $y(t)$, definida num vizinhança aberta da origem e que verifica $y(0) = 0$.

Pretendemos agora mostrar que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado. Note que, para qualquer número real ty , $f(ty) \geq 1$, o que implica que:

$$(1 + y^2)f(ty) \geq 1 + y^2 \quad \text{para qualquer } (t, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.26)$$

Consideremos agora o problema de valor inicial

$$u' = 1 + u^2 \quad , \quad u(0) = 0;$$

resolvendo a equação separável e fazendo uso da condição inicial, obtém-se a sua única solução:

$$u(t) = \operatorname{tg} t,$$

definida em $]\pi/2, \pi/2[$. Note que $u(t)$ explode quando $t \rightarrow \pm\pi/2$.

Tendo em conta a estimativa (2.26), utilizando o teorema de comparação de soluções, a solução $y(t)$ do (PVI) (2.25) verifica:

$$y(t) \geq u(t) = \operatorname{tg} t \quad \text{para } t \geq 0$$

Como $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = +\infty$ a solução explode e, como tal, o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.

Exemplo 2

Considere-se o problema de valor inicial

$$y' = -2(\sin(e^{ty}) + 2)y, \quad y(0) = 1 \quad (2.27)$$

Sendo

$$f(t, y) = -2(\sin(e^{ty}) + 2)y$$

é fácil de verificar que tanto f como $\partial f / \partial y$ são contínuas em \mathbb{R}^2 . Isto implica que f verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2$ e assim (2.27) tem uma solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$. Temos agora que mostrar que a solução pode ser prolongada a \mathbb{R} . Observemos que para $y(t) > 0$ (isso acontecerá, pelo menos, numa vizinhança de $t_0 = 0$), a equação é equivalente a:

$$\frac{y'}{y} = -2(\sin(e^{ty}) + 2)$$

Integrando esta igualdade de 0 a t , obtém-se:

$$\log y(t) - \log y(0) = \int_0^t (-2(\sin(e^{sy(s)}) + 2))ds$$

Como, para quaisquer $(s, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$-6 \leq -2(\sin(e^{sy(s)}) + 2) \leq -2$$

pode-se concluir que:

$$-6t \leq \int_0^t (-2(\sin(e^{sy(s)}) + 2))ds \leq -2t \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$-2t \leq \int_0^t (-2(\sin(e^{sy(s)}) + 2))ds \leq -6t \quad \text{para } t \leq 0.$$

Desta forma (e como $\log y(0) = \log 1 = 0$):

$$-6t \leq \log y(t) \leq -2t \quad \text{para } t \geq 0$$

$$-2t \leq \log y(t) \leq -6t \quad \text{para } t \leq 0$$

Em primeiro lugar, isto mostra que $\log y(t)$ não explode. Em particular, isto implica que $y(t) \neq 0$, para qualquer $t \in I_{\max}$; pois se existisse β tal que $y(\beta) = 0$ então $\lim_{t \rightarrow \beta} \log y(t) = -\infty$. Desta forma, as desigualdades acima estimam o valor de $y(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ onde a solução está definida. O gráfico da solução está confinado à região do plano situada entre as curvas $y = e^{-2t}$ e $y = e^{-6t}$, pelo que $y(t)$ não explode em tempo finito. Como o domínio de f é \mathbb{R}^2 , o teorema do prolongamento de solução garante a existência de uma (única) solução global.

2.4 Equações Vectoriais de 1ª Ordem (ou Sistemas)

Seja $I \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ e, para $i = 1, \dots, n$, $f_i : I \times A \rightarrow \mathbb{R}$, denomina-se por *equação diferencial vectorial* de primeira ordem um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$$

onde as soluções são funções $y_1(t), \dots, y_n(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 em I . Utilizando notação vectorial, este sistema pode então ser escrito de forma abreviada como a equação vectorial

$$\mathbf{y}'(t) = F(t, \mathbf{y}(t)),$$

sendo

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{bmatrix}$$

Tal como no caso escalar ($n = 1$), sendo $t_0 \in I$, denomina-se problema de valor inicial a

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = F(t, \mathbf{y}(t)) & , \quad t \in I \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

onde se supõe que $t_0 \in I$ e $\mathbf{y}_0 = (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)) \in A$.

2.4.1 Condição de Lipschitz e Teorema de Picard no Caso Vectorial

Uma função vectorial, $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua em D , denomina-se *localmente lipschitziana relativamente a \mathbf{y}* se cada uma das funções escalares $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$, for localmente lipschitziana relativamente a y_1, \dots, y_n em D , isto é

$$|f_i(t, y_1, \dots, y_n) - f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq K \|(y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n)\| \quad \text{onde}$$

$$\|(y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

para todos $(t, y_1, \dots, y_n), (t, x_1, \dots, x_n)$ em subconjuntos compactos de D . Isto é equivalente a dizer que existe $L \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

para quaisquer $(t, \mathbf{y}), (t, \mathbf{x}) \in D$. ⁷

⁷Recordamos que, dados dois conjuntos A e B , o produto cartesiano de A por B , denotado $A \times B$, é o conjunto dos pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. No nosso caso, se $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. É usual identificar $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com $(t, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$; neste sentido, podemos dizer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$.

O seguinte teorema tem demonstração análoga ao teorema homónimo que enunciámos anteriormente para o caso escalar.

Teorema de Picard (Existência e unicidade de solução no caso vectorial): Considere-se o domínio $D = I \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e localmente lipschitziana relativamente a \mathbf{y} . Se $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

admite solução única num intervalo $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, para certo $\alpha > 0$.

2.4.2 Equações Vectoriais Lineares

A equação vectorial denomina-se *linear* se a função $F(t, \mathbf{y})$ for linear em \mathbf{y} , isto é, se for da forma

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

ou, na forma vectorial:

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.28)$$

sendo

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Funções matriciais

No seguimento, será necessário estudar funções X cujo domínio é um intervalo real e cujo conjunto de chegada é um espaço vectorial de matrizes reais (ou complexas) de dimensão $n \times m$, que aqui denotaremos por $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ (ou \mathbb{C}).

Genericamente, um função $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, com

$$X(t) = \left[x_{ij}(t) \right]_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots m}}$$

pode, de facto, ser interpretada como uma função vectorial com as $n \times m$ componentes:

$$x_{11}(t), \dots, x_{1m}(t), x_{21}(t), \dots, x_{2m}(t), \dots, x_{n1}(t), \dots, x_{nm}(t).$$

Sendo assim, pode-se neste contexto utilizar os conceitos e resultados já discutidos quando se estudou as funções vectoriais. A derivada de $X(t)$ é, então, dada por

$$\frac{dX}{dt} = \left[\frac{dx_{ij}}{dt} \right]_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots m}},$$

e está bem definida se as funções componentes forem diferenciáveis em I . Analogamente, o integral de X entre $t_0, t \in I$ é dado por:

$$\int_{t_0}^t X(s) ds = \left[\int_{t_0}^t x_{ij}(s) ds \right]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m},$$

sempre que as funções componentes sejam seccionalmente contínuas em I . Desta forma, a *linearidade* da derivada e do integral ficam asseguradas.

Relativamente à derivada do produto de duas matrizes,

$$X(t) = \left[x_{ik}(t) \right]_{i=1, \dots, n}^{k=1, \dots, m} \quad \text{por} \quad Y(t) = \left[y_{kj}(t) \right]_{k=1, \dots, m}^{j=1, \dots, k},$$

o resultado tem que ser deduzido (porquê?). No entanto isso, é tarefa relativamente fácil: calculando a derivada da componente (i, j) de $X(t)Y(t)$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^m x_{ik}(t)y_{kj}(t) = \sum_{k=1}^m x'_{ik}(t)y_{kj}(t) + \sum_{k=1}^m x_{ik}(t)y'_{kj}(t),$$

Resulta assim que

$$(X(t)Y(t))' = X'(t)Y(t) + X(t)Y'(t).$$

Exemplo: Dada uma função escalar $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e uma matriz $n \times n$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, de componentes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (independentes de t), vejamos como se calculam a derivada e o integral da função matricial $\varphi(t)A$ ⁸.

(a) Se φ é de classe C^1 então:

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)A) = \left[\frac{d}{dt}(a_{ij}\varphi(t)) \right]_{i,j=1}^n = [a_{ij}\varphi'(t)]_{i,j=1}^n = \varphi'(t)[a_{ij}]_{i,j=1}^n = \varphi'(t)A$$

Identicamente (verifique):

(b) Se φ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado e limitado, então:

$$\int_{t_0}^t \varphi(s)A ds = \left(\int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right) A,$$

(c) Se φ é contínua então, usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \varphi(s)A ds = \varphi(t)A$$

⁸Note que $\varphi(t)A$ é o produto do escalar $\varphi(t)$ pela matriz constante A .

Caso Homogéneo e Matriz Solução Fundamental

Fazendo $\mathbf{b}(t) \equiv 0$ na equação (2.28), obtém-se a equação linear homogénea associada

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) \quad (2.29)$$

com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, onde as funções $a_{ij}(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.

Definição (Matriz Solução Fundamental): Uma matriz $\mathbf{S}(t)$ denomina-se matriz solução fundamental de (2.29) se e só se

- (i) $\det \mathbf{S}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, o que significa que as colunas de $\mathbf{S}(t)$ são linearmente independentes ($\mathbf{S}(t)$ é não singular) para qualquer $t \in I$;
- (ii) as colunas de $\mathbf{S}(t)$ são soluções da equação $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$.

Exemplo 1:

Considere-se a equação vectorial

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \quad \text{sendo} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Fazendo $\mathbf{y} = (x, y)$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -y \end{cases}$$

Atendendo a que a segunda equação só depende da função y , podemos resolvê-la. Assim:

$$y' = -y \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = c_1 e^{-t}$$

Substituindo na primeira equação obtém-se

$$x' - x = -c_1 e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{-t}x) = -c_1 e^{-2t} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{c_1}{2} e^{-t} + c_2 e^t$$

Tem-se então que a solução geral da equação vectorial é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{2} e^{-t} + c_2 e^t \\ c_1 e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(t)C,$$

É agora fácil de verificar que a matriz $\mathbf{S}(t)$ acima definida é uma matriz solução fundamental associada à equação (2.30). De facto

- (i) A matriz $\mathbf{S}(t)$ é não singular em \mathbb{R} , pois

$$\det \mathbf{S}(t) = -1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ii) Verifica-se que $\mathbf{y}'_i(t) = A\mathbf{y}_i(t)$, $i = 1, 2$ em que $\mathbf{y}_i(t)$ representa a coluna i de $\mathbf{S}(t)$. De facto, para $i = 1$

$$\mathbf{y}'_1(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\mathbf{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

e para $i = 2$

$$\mathbf{y}'_2(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\mathbf{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe-se que não há uma única matriz solução fundamental da equação — por exemplo, se $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental qualquer matriz obtida por troca de colunas de $\mathbf{S}(t)$ é também uma matriz solução fundamental.

Proposição (Caracterização da Matriz Solução Fundamental): $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação (2.29) se e só se:

(i) Existe um $t_0 \in I$ tal que $\mathbf{S}(t_0)$ é não singular.

(ii) $\mathbf{S}'(t) = A(t)\mathbf{S}(t)$

Demonstração: (ii) é apenas outra forma de escrever a alínea (ii) da definição de $\mathbf{S}(t)$. Quanto a (i), suponhamos que existe um $\hat{t} \in I$ tal que $\mathbf{S}(\hat{t})$ é singular; isto é, para certo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathbf{S}(\hat{t})\mathbf{b} = 0$, e derivemos uma contradição. Como

$$\mathbf{S}'(t)\mathbf{b} = A(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{b},$$

Considerando $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{b}$ então das equações anteriores:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(\hat{t}) = \mathbf{S}(\hat{t})\mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

Por unicidade de solução deste PVI, $\mathbf{y}(t) \equiv 0$. Conclui-se então que $\mathbf{S}(t)\mathbf{b} = 0$ para todo o $t \in I$, pelo que $\mathbf{S}(t)$ é singular para todo o $t \in I$; logo, em particular, também $\mathbf{S}(t_0)$ é singular, o que contradiz a hipótese. \square

Como corolário da proposição anterior, obtemos:

Teorema (Matriz Solução Fundamental): $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação (2.29) se e só se é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{S}' = A(t)\mathbf{S} \\ \mathbf{S}(0) = S_0 \end{cases}$$

para alguma matriz não singular, $S_0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2: Para obter uma matriz solução fundamental, $\mathbf{S}(t)$, da equação $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, podemos resolver os n problemas

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{e}_i \end{cases} \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$ são os vectores da base canónica de \mathbb{R}^n . As colunas de $\mathbf{S}(t)$ serão as soluções desses n problemas.

Resulta da definição que a matriz $\mathbf{S}(t)$ é invertível para todo o t . Sendo assim

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(t) \mathbf{S}^{-1}(t)) = \mathbf{S}'(t) \mathbf{S}^{-1}(t) + \mathbf{S}(t) \frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)),$$

pelo que $\mathbf{S}(t) \frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)) = -\mathbf{S}'(t) \mathbf{S}^{-1}(t)$. Desta forma:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)) = -\mathbf{S}^{-1}(t) \mathbf{S}'(t) \mathbf{S}^{-1}(t)$$

Atendendo a que $\mathbf{S}'(t) = A(t)\mathbf{S}(t)$ implica $A(t) = \mathbf{S}'(t)\mathbf{S}^{-1}(t)$, então a inversa da matriz solução fundamental verifica:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)) = -\mathbf{S}^{-1}(t)A(t) \quad (2.31)$$

Caracterização das Soluções da Equação Homogénea

Teorema: Considere-se $I \subset \mathbb{R}$ e $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, com $a_{ij}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, e o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (2.32)$$

onde $t_0 \in I$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Seja $\mathbf{S}(t)$ uma matriz solução fundamental da equação diferencial. Então o problema (2.32) tem uma única solução dada por $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$. Além disso, as soluções da equação diferencial formam um espaço vectorial de dimensão n , sendo uma sua base constituída pelas colunas de $\mathbf{S}(t)$; ou seja, a sua solução geral é:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)C \quad \text{com} \quad C = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

Demonstração: Seja $\mathbf{y}(t)$ uma solução arbitrária da equação $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ e considere-se $\mathbf{z}(t) = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}(t)$. Queremos mostrar que $\mathbf{z}(t)$ é constante. Então, usando a equação (2.31):

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= (\mathbf{S}^{-1}(t))' \mathbf{y}(t) + \mathbf{S}^{-1}(t) \mathbf{y}'(t) \\ &= -\mathbf{S}^{-1}(t)A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}'(t) \\ &= \mathbf{S}^{-1}(t)(\mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Temos então que $\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t) = C$, com $C \in \mathbb{R}^n$, o que nos permite concluir que:

- (1) a solução geral da equação diferencial é $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)C$;
- (2) se $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ então $C = \mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$, pelo que a solução do PVI (2.32) é $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$.

□

2.4.3 Equações vectoriais Lineares — Caso Não Homogéneo

Dada uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, pretendemos obter as soluções da equação não homogénea $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$

Teorema (Fórmula de Variação das Constantes): Sendo $A = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, com componentes $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, $\mathbf{b} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ também contínua, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{S}(t)$ uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, então a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (2.33)$$

é dada pela *fórmula de variação das constantes*:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{S}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \quad (2.34)$$

Demonstração: Escrevendo a equação diferencial (2.33) na forma $\mathbf{y}' - A(t)\mathbf{y} = \mathbf{b}(t)$, e multiplicando ambos os membros por $\mathbf{S}^{-1}(t)$, obtém-se:

$$\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}' - \mathbf{S}^{-1}(t)A(t)\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{b}(t)$$

Atendendo a que $(\mathbf{S}^{-1}(t))' = -\mathbf{S}^{-1}(t)A(t)$ (equação (2.31)), resulta pois que

$$\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}' + (\mathbf{S}^{-1}(t))'(t)\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{b}(t),$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}(t)) = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{b}(t) \quad (2.35)$$

Integrando entre t_0 e t , e considerando que $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, temos que:

$$\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{y}(t) - \mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds$$

Multiplicando agora à esquerda por $\mathbf{S}(t)$ obtém-se:

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = \mathbf{S}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds.$$

□

Corolário (Fórmula de Variação das Constantes para a Solução Geral): Nas mesmas condições do teorema anterior, a solução geral da equação

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

é dada por:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{C} + \mathbf{S}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^n; \quad (2.36)$$

(onde $\int^t \mathbf{x}(s)ds$ representa uma primitiva da função vectorial $\mathbf{x}(t)$).

Demonstração: Repita a prova do teorema anterior, primitivando ambos os membros da igualdade (2.35) em vez de os integrar entre t_0 e t (exercício). Note que a constante de primitivação, C , pertence a \mathbb{R}^n . \square

2.4.4 Equações Vectoriais Lineares de Coeficientes Constantes:

A equação vectorial linear denomina-se *de coeficientes constantes* se a matriz $A(t)$ tiver entradas constantes, isto é, se for da forma

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11} y_1(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1} y_1(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

ou, na forma vectorial,

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t), \quad (2.37)$$

sendo

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

Caso Homogéneo

Tal como anteriormente, o caso homogéneo corresponde a tomar $\mathbf{b}(t) \equiv 0$ na equação (2.37). Vamos assim estudar a equação

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \quad (2.38)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exponencial de uma Matriz

Dados uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, convencionamos-se que:

$$A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I,$$

onde I representa a matriz identidade de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Recordamos o problema de valor inicial escalar,

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

tem por única solução $y(t) = e^{at}$. Procedendo por analogia, definimos a exponencial de tA , que denotamos por e^{tA} , da forma que se segue.

Definição (Exponencial de uma Matriz): Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Então e^{At} é a (única) matriz solução fundamental de (2.58) que é igual à matriz identidade em $t = 0$. Isto equivale a dizer que $X(t) = e^{At}$ é a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = I \end{cases} \quad (2.39)$$

Resulta imediatamente da definição anterior que:

Proposição: Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e S é uma matriz solução fundamental de $y' = Ay$ então:

$$e^{tA} = S(t)S^{-1}(0)$$

Exemplo 3: No exemplo 1 desta secção (resolução da equação diferencial (2.30)), a solução também pode ser escrita na forma:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{2}e^{-t} + c_2e^t \\ c_1e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} S_1(t)C$$

pelo que $S_1(t)$ é também uma matriz solução fundamental. (A verificação é óbvia). Uma outra matriz solução fundamental é:

$$X(t) = S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^t & \frac{e^{-t}-e^t}{2} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Note que a exponencial da matriz tA , $X(t)$, tem uma propriedade importante — é a *única matriz solução fundamental que verifica* $X(0) = I$.

Para obter soluções linearmente de $y' = Ay$, podemos usar o seguinte resultado.

Proposição: Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de A e $v \in \mathbb{C}^n$ um vector próprio associado a λ então $y(t) = e^{t\lambda}v$ é uma solução da equação $y' = Ay$. Além disso, $u = \text{Re } y$ e $\hat{u} = \text{Im } y$ são soluções reais de $y' = Ay$.

Demonstração: Para provar a primeira parte, basta ver que:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}v) = e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} Av = A(e^{\lambda t}v) = Ay(t).$$

Tendo em conta que

$$(u + i\hat{u})' = u' + i\hat{u}' = Au + iA\hat{u} = A(u + i\hat{u}),$$

tomando a parte real e parte imaginária em ambos os membros desta igualdade obtém-se $u' = Au$ e $\hat{u}' = A\hat{u}$. \square

Se A for uma matriz $n \times n$ real diagonalizável, então existe um conjunto de n vectores próprios de A linearmente independentes v_1, v_2, \dots, v_n . Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ forem os respectivos

valores próprios associados, podemos construir uma matriz solução fundamental — e daí obter e^{At} — colocando nas colunas de S as soluções de $y' = Ay$ dadas pela proposição anterior; isto é:

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n.$$

Note que $S(0)$ é não singular.

Se λ for um valor próprio complexo de uma matriz real A , com vector próprio associado $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, então o procedimento anterior dá-nos uma matriz solução fundamental complexa; no entanto, podemos utilizar as funções reais $\operatorname{Re} e^{\lambda t} \mathbf{v}$ e $\operatorname{Im} e^{\lambda t} \mathbf{v}$, no lugar de $e^{\lambda t} \mathbf{v}$ e $e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}$ ⁹

Série da Exponencial de uma Matriz

Para encontrar um desenvolvimento em série para a exponencial de At , procuremos uma solução da equação (2.39) através das iteradas de Picard:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= I \\ X_{n+1}(t) &= I + \int_{t_0}^t A X_n(s) ds \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Calculando as primeiras 3 iterações, obtém-se:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= I \\ X_1(t) &= I + \int_{t_0}^t A ds = I + tA \\ X_2(t) &= I + \int_{t_0}^t (A + sA^2) ds = I + \int_{t_0}^t A ds + \int_{t_0}^t sA^2 ds = I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 \\ X_3(t) &= I + \int_{t_0}^t \left(A + sA^2 + \frac{s^2}{2} A^3 \right) ds = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 \end{aligned}$$

Resulta então que ¹⁰:

$$X_n(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k$$

Isto sugere que a forma da solução de (2.39) é o “limite” da expressão anterior, ou seja:

$$X(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k.$$

Esta fórmula é análoga à que define a série de Maclaurin da função exponencial, $e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}$, para $a, t \in \mathbb{R}$. No nosso caso trata-se de uma série de potências de matrizes onde, em cada termo, aparece tA no lugar de ta . Isto leva-nos a conjecturar o seguinte:

⁹Se A é uma matriz real, então $\bar{A} = A$. Se (λ, \mathbf{v}) é um par valor próprio, vector próprio (complexo) de A , então $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{v}})$ é também um par valor próprio, vector próprio de A , pois $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{A}\bar{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$. Neste caso, $\operatorname{Re} e^{\bar{\lambda}t} \bar{\mathbf{v}} = \operatorname{Re} e^{\lambda t} \mathbf{v}$ e $\operatorname{Im} e^{\bar{\lambda}t} \bar{\mathbf{v}} = -\operatorname{Im} e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Por cada par de vectores próprios conjugados, \mathbf{v} e $\bar{\mathbf{v}}$, produzem-se desta forma duas (não quatro!) funções reais linearmente independentes, $\operatorname{Re} e^{\lambda t} \mathbf{v}$ e $\operatorname{Im} e^{\lambda t} \mathbf{v}$.

¹⁰Pode-se facilmente provar este resultado por indução. No entanto, neste contexto isso será desnecessário, pois estamos apenas a usar as iteradas de Picard para formular uma conjectura cuja veracidade será depois comprovada por outro método.

Teorema (Série da Exponencial de uma Matriz): Sendo A uma matriz $n \times n$ de componentes reais e $t \in \mathbb{R}$, a exponencial de tA , e^{tA} , é dada por:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots \quad (2.40)$$

Além disso, a série (2.40) converge uniformemente para t em intervalos do tipo $[-R, R]$ (para qualquer $R > 0$) e verifica $Ae^{At} = e^{At}A$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Para provar este teorema, precisaremos em primeiro lugar de saber produzir estimativas de matrizes. Sendo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, consideramos:

$$\|A\| = n \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|.$$

Note que qualquer componente a_{ij} de A verifica:

$$|a_{ij}| \leq \frac{1}{n} \|A\|. \quad (2.41)$$

De facto, esta função tem as propriedades de uma norma ¹¹; mas vamos aqui provar apenas a propriedade de $\|A\|$ de que efectivamente precisamos.

Se $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n$ é outra matriz real, então as componentes do produto AB verificam:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \|A\| \|B\| = \frac{1}{n} \|A\| \|B\|$$

Ou seja, o módulo de cada componente de AB é majorado pelo mesmo valor: $\frac{1}{n} \|A\| \|B\|$. Desta forma:

$$\|AB\| \leq n \left(\frac{1}{n} \|A\| \|B\| \right) = \|A\| \|B\|$$

Pela desigualdade anterior, $\|A^k\| \leq \|A\| \|A^{k-1}\| \leq \|A\|^2 \|A^{k-2}\| \leq \cdots \leq \|A\|^k$, para $k = 1, 2, 3, \dots$. Como também $\|A^0\| = \|I\| = 1 = \|A\|^0$, resulta pois que:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Passamos agora à demonstração da convergência da série. Para tal, basta provar que todas as componentes da soma da série (2.40) existem (em \mathbb{R}).

Sendo $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, e denotando cada componente (i, j) de A^k por $a_{ij}^{(k)}$, então as componentes de e^{At} são as somas das séries reais ¹²:

$$\delta_{ij} + ta_{ij} + \frac{t^2}{2!}a_{ij}^{(2)} + \cdots + \frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)} \quad \text{com } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.43)$$

¹¹ É fácil provar que para quaisquer duas matrizes reais, A, B , de dimensão $n \times n$, se tem: **(a)** $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$; **(b)** $\|cA\| = |c| \|A\|$, para $c \in \mathbb{R}$; **(c)** $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$; **(d)** $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

¹² O símbolo δ_{ij} , designado na literatura por delta de Kronecker, representa as componentes da matriz identidade. Note que $a_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$.

Vamos agora provar a convergência uniforme destas séries, para t num intervalo do tipo $[-R, R]$, com $R > 0$. Para $|t| \leq R$, e usando (2.41) e (2.42), podemos majorar cada um dos termos das séries anteriores como se segue:

$$\left| \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)} \right| = \frac{|t|^k}{k!} |a_{ij}^{(k)}| \leq \frac{R^k}{k!} |a_{ij}^{(k)}| \leq \frac{R^k}{k!} \frac{\|A^k\|}{n} \leq \frac{R^k}{k!} \frac{\|A\|^k}{n} = \frac{(\|A\|R)^k}{n k!}$$

Como a série real

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|A\|R)^k}{k!}$$

é convergente — a sua soma é $\frac{1}{n}e^{\|A\|R}$ — então, pelo critério de Weierstrass, as séries (2.43) convergem uniformemente para t em intervalos do tipo $[-R, R]$; isto vale para qualquer $R > 0$. Em particular, as séries (2.43) convergem pontualmente para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Isto prova que e^{tA} está bem definida por (2.40), é diferenciável em \mathbb{R} e pode ser derivada termo a termo.

Usando o resultado anterior, podemos agora calcular a derivada de e^{tA} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt} \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!} A^n + \cdots \right) \\ &= 0 + A + \frac{2t}{2!} A^2 + \frac{3t^2}{3!} A^3 + \cdots + \frac{nt^{n-1}}{n!} A^n + \cdots \\ &= A \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!} A^n + \cdots \right) = A e^{tA} \\ &= \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!} A^n + \cdots \right) A = e^{tA} A \end{aligned}$$

Assim sendo:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$$

Note também que $e^{0A} = I$. Isto conclui a demonstração do teorema. \square

Algumas propriedades de e^{At}

Dado $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{i,j=1}^n(\mathbb{R})$, listamos aqui algumas das propriedades de $e^{At} = e^{tA}$:

- (a) e^0 é a matriz identidade em \mathbb{R}^n ;
- (b) $S(t) = e^{At}$ é a única matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ que verifica $S(0) = I$.
- (c) e^{At} é uma função diferenciável em qualquer $t \in \mathbb{R}$ e:

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = A e^{At} = e^{At} A$$

- (d) A matriz e^{At} é invertível para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

(e) Se A, B são quaisquer matrizes $n \times n$ verificando $AB = BA$, então:

$$e^{At}B = Be^{At}$$

(f) Se A, B são quaisquer matrizes $n \times n$ verificando $AB = BA$, então:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

Demonstração:

(d) Atendendo a que:

$$\frac{d}{dt}(e^{At}e^{-At}) = e^{At}Ae^{-At} + e^{At}(-A)e^{-At} = e^{At}Ae^{-At} - e^{At}Ae^{-At} = 0,$$

então $e^{At}e^{-At}$ é constante. Em particular:

$$e^{At}e^{-At} = e^{A0}e^{-A0} = I^2 = I.$$

(e) (Exercício)

(f) Considere $X(t) = e^{At}e^{Bt}$. Então $X(0) = I$ e (usando (e)):

$$X'(t) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt} = (A+B)X(t).$$

Isto prova que $X(t) = e^{(A+B)t}$. □

Solução do Problema de Valor Inicial da Equação $y' = Ay$

Teorema (Solução de uma equação vectorial linear homogênea de coeficientes constantes)

Se $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz $n \times n$, com $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem solução única, dada por:

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Além disso, as soluções da equação $y' = Ay$ formam um espaço vectorial de dimensão n , sendo dadas por $y(t) = e^{At}C$, onde $C \in \mathbb{R}^n$.

Cálculo da Matriz e^{At}

• A é uma matriz diagonal:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

• **A é uma matriz diagonalizável:**

Uma matriz A , $n \times n$, diz-se *diagonalizável* se admite n vectores linearmente independentes. Demonstra-se que,

$$\text{se } A \text{ é diagonalizável então } A = S\Lambda S^{-1}$$

em que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \\ | & \dots & | \end{bmatrix}$$

sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os valores próprios de A e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ os correspondentes vectores próprios.

Não é difícil de demonstrar que para matrizes A e B semelhantes, se tem

$$A = SBS^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = Se^{Bt}S^{-1}$$

Podemos então concluir que, se A é diagonalizável, isto é

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} S^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

Observações:

- Como consequência dos teoremas anteriores, dado que a matriz e^{At} é uma matriz solução fundamental da equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, a sua solução é da forma $\mathbf{y}(t) = e^{At}C$, com $C \in \mathbb{R}^n$. Atendendo a que $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$, então

$$\mathbf{y}(t) = Se^{\Lambda t}S^{-1}C \equiv Se^{\Lambda t}C_1$$

pelo que a matriz $\mathbf{S}(t) = Se^{\Lambda t}$ é também uma matriz solução fundamental associada à equação. No entanto, a não ser que a matriz S seja a matriz identidade, $\mathbf{S}(t)$ não é a matriz e^{At} , visto que $\mathbf{S}(0)$ não é a matriz identidade.

- Dada qualquer matriz A , como vimos a matriz e^{At} é a única matriz solução fundamental associada à equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, $\mathbf{S}(t)$, que verifica $\mathbf{S}(0) = I$.
- Conhecida qualquer matriz solução fundamental, $\mathbf{S}(t)$, associada à equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, tem-se que

$$e^{At} = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(0)$$

Exemplo 1

Determinar a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos escrever a equação na forma matricial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

e já sabemos que a solução do PVI é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de e^{At}

Os valores próprios da matriz A são ± 2 (pelo que podemos concluir desde já que a matriz A é diagonalizável).

O vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$ é uma solução **não nula** da equação

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b$$

pelo que podemos escolher, por exemplo $v_1 = (1, 1)$.

O vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = -2$ é uma solução **não nula** da equação

$$(A + 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow b = -3a$$

pelo que podemos escolher, por exemplo $v_2 = (1, -3)$. Assim teremos

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

pelo que

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Calculada a matriz e^{At} , a solução do PVI é

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Tal como foi observado, a matriz

$$S e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

é também uma matriz solução fundamental, pelo que poderíamos escrever a solução geral da equação

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

e à posteriori calcular as constantes c_1, c_2 de modo a que seja verificada a condição inicial (o que na prática corresponde a determinar a matriz S^{-1} e multiplicá-la pela condição inicial).

• **A é uma matriz não diagonalizável:**

A matriz A ($n \times n$) diz-se *não diagonalizável*, se A não admite n vectores próprios linearmente independentes. Neste caso, A não é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, não existem uma matriz diagonal Λ e uma matriz não singular S tais que $A = S\Lambda S^{-1}$.

Para determinar a matriz e^{At} , vamos precisar de algumas definições e resultados parciais.

Matriz Diagonal por Blocos

Uma matriz $n \times n$, é diagonal por blocos, se for da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & A_k \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

em que A_1, \dots, A_k são matrizes quadradas de dimensões $m_1 \times m_1, \dots, m_k \times m_k$, respectivamente, tendo-se $m_1 + \dots + m_k = n$.

Exemplo:

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal por blocos A_1, A_2, A_3 , em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponencial de uma matriz diagonal por blocos

Se A é diagonal por blocos, como em (2.44), então

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{A_2 t} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & e^{A_k t} \end{bmatrix}$$

Bloco de Jordan

Uma matriz $k \times k$ diz-se um *bloco de Jordan* se for da forma

$$J_{\lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$J_{-1}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad J_2^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad J_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exponencial de um Bloco de Jordan

Se J_{λ} é um bloco de Jordan de dimensão $k \times k$, então

$$e^{J_{\lambda} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{\lambda t} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \\ & & & & & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \\ 0 & & & & & & e^{\lambda t} & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

isto é, os elementos a_{ij} , $i, j = 1, \dots, k$ da matriz $e^{J_{\lambda} t}$ são da forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{se } i = j & (\text{diagonal principal}) \\ te^{\lambda t} & \text{se } i + 1 = j & (\text{diagonal acima da principal}) \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \text{se } i = j + 2 & (2^{\text{a}} \text{ diagonal acima da principal}) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} & \text{se } i + k - 1 = j & ((k-1) \text{ é sima diagonal acima da principal}) \\ 0 & \text{se } i < j & (\text{abaixo da diagonal principal}) \end{cases}$$

Exemplo:

Para os blocos de Jordan do exemplo anterior tem-se que

$$\exp(J_{-1}^2 t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \exp(J_2^3 t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\exp(J_0^4 t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponencial de uma matriz não diagonalizável

Seja A uma matriz, $n \times n$, não diagonalizável. Demonstra-se que,

se A é não diagonalizável então $A = SJS^{-1}$

em que J é uma matriz diagonal por blocos de Jordan, isto é

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{m_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\lambda_2}^{m_2} & \mathbf{0} \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & J_{\lambda_k}^{m_k} \end{pmatrix}$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são valores próprios de A com multiplicidades algébricas m_1, \dots, m_k , respectivamente, (multiplicidade enquanto raízes do polinómio característico) e multiplicidade geométrica 1 (cada valor próprio $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tem um único vector próprio associado v_1, \dots, v_k , respectivamente) ¹³.

A matriz S é também formada por k “blocos” de colunas

$$S = \begin{bmatrix} | & \cdot & \cdot & \cdot & | \\ S_1 & \cdot & \cdot & \cdot & S_k \\ | & \cdot & \cdot & \cdot & | \end{bmatrix}$$

em que, para $i = 1, \dots, k$

$$S_i = \begin{bmatrix} | & | & \cdot & \cdot & | \\ v_i & v_i^{G_1} & \cdot & \cdot & v_i^{G_{m_i-1}} \\ | & | & \cdot & \cdot & | \end{bmatrix}$$

sendo v_i o vector próprio associado ao valor próprio λ_i , e $v_i^{G_j}$, $j = 1, \dots, m_i - 1$, vectores próprios generalizados, i.e., verificando as equações

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_1} = v_i$$

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_2} = v_i^{G_1}$$

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_3} = v_i^{G_2} \dots$$

¹³A lista de valores próprios, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, pode conter repetições. Nesse caso se, por exemplo, $\lambda_2 = \lambda_1$ (e $\lambda_j \neq \lambda_1$, para $j \geq 3$) então λ_1 tem dois vectores próprios associados linearmente independentes, v_1 e v_2 (multiplicidade geométrica igual a 2) e $m_1 + m_2$ é a multiplicidade algébrica de λ_1 .

até se calcularem $m_i - 1$ vectores próprios generalizados.

Exemplo:

Determinar e^{At} sendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dado que a matriz não é nem diagonal, nem um bloco de Jordan (ou afim) nem diagonal por blocos, teremos que determinar e^{At} pelo processo usual de cálculo de valores e vectores próprios. Os valores próprios de A são as soluções de

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^3 = 0$$

Tem-se então que -2 é o valor próprio de A com multiplicidade algébrica 3. Note-se que só depois de calcular a sua multiplicidade geométrica (número de vectores próprios linearmente independentes associado a -2) poderemos concluir se A é diagonalizável (se a multiplicidade geométrica for 3) ou não diagonalizável (se a multiplicidade geométrica for 2 ou 1). Os vectores próprios associados a -2 são as soluções não nulas de

$$(A + 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v = (a, b, c) = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0)$$

Conclui-se que a multiplicidade geométrica do valor próprio é 1, ou seja admite apenas um vector próprio independente, que por exemplo pode ser $v = (1, 0, 0)$. Sendo assim a matriz A é não diagonalizável, pelo que é semelhante a uma matriz formada por um único bloco de Jordan, ou seja:

$$A = SJS^{-1}$$

em que

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & | & | \\ 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & | & | \end{bmatrix}$$

sendo v_1 e v_2 vectores próprios generalizados de v . O primeiro vector próprio generalizado é solução não nula de

$$(A + 2I)v_1 = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v_1 = (a, b, c) = (a, -1, 1) = a(1, 0, 0) + (0, -1, 1)$$

Podemos então escolher, por exemplo, $v_1 = (0, -1, 1)$. O segundo vector próprio generalizado é solução não nula de

$$(A + 2I)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v_1 = (a, b, c) = (a, 1, 0) = a(1, 0, 0) + (0, 1, 0)$$

Podemos então escolher, por exemplo, $v_2 = (0, 1, 0)$. Em consequência

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por ser um bloco de Jordan tem-se que

$$e^{Jt} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t + 1 & -t \\ 0 & t & t + 1 \end{bmatrix}$$

Caso Não Homogêneo

Vamos agora resolver a equação

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.45)$$

com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{b} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Fórmula da Variação das Constantes:

(Existência e unicidade de solução de uma equação vectorial linear de coeficientes constantes)

Aplicando a fórmula (2.36), concluímos que a solução geral da equação (2.45) é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}C + e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds, \quad C \in \mathbb{R}^n$$

Se adicionalmente for dada a condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, a solução do PVI será neste caso dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds$$

para todo $t \in I$.

Exemplo:

Determinar a solução do PVI

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(0) = (1, -1, 0)$$

2.5. EQUAÇÕES LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEM $N > 1$:

em que

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Tal como calculámos no exemplo anterior

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t + 1 & -t \\ 0 & t & t + 1 \end{bmatrix}$$

e aplicando a fórmula da variação das constantes a solução do PVI é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2s} \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t + 1 & -t \\ 0 & t & t + 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{2s} \begin{bmatrix} 1 & \frac{s^2}{2} & -s + \frac{s^2}{2} \\ 0 & s + 1 & s \\ 0 & -s & -s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2s} \end{bmatrix} ds \right) \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t + 1 & -t \\ 0 & t & t + 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}-1}{2} - t^2 + \frac{t^3}{3} \\ t^2 \\ -t^2 + 2t \end{bmatrix} \right) \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}-1}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - t^4 \\ -t^2 + t + 1 \\ 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.5 Equações Lineares de Coeficientes Constantes de ordem $n > 1$:

Uma equação de ordem $n \in \mathbb{N}$ diz-se linear de coeficientes constantes, se puder ser escrita na forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = h(t) \quad (2.46)$$

em que a_0, a_1, \dots, a_n são constantes reais, e $b : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I . Usando a notação $Dy = y'$ (e consequentemente $D^2y = y''$, ..., $D^n = y^{(n)}$), a equação pode ser escrita na forma

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = h(t)$$

e definindo $P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$, a equação pode ser escrita na forma abreviada

$$P(D)y = h(t)$$

É preciso notar que $P(D)$ é um operador, isto é, uma função cujo domínio é um conjunto de funções de classe C^n , sendo n o grau de P . O termo $P(D)$ designa um *polinómio diferencial* e em consequência da linearidade da derivada, demonstra-se que pode ser factorizado da mesma forma que um polinómio numérico. Por exemplo, se y é uma função de classe C^2 :

$$(D^2 - 4)y = (D - 2)(D + 2)y = (D + 2)(D - 2)y$$

Por ser uma equação linear, a solução geral de (2.46) é da forma

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t)$$

em que, $y_G(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada, i.e., $y_G(t)$ é solução da equação $P(D)y = 0$, e $y_P(t)$ é uma solução particular de $P(D)y = b(t)$.

2.5.1 Solução Geral da Equação Homogénea

A equação escalar de ordem n , $P(D)y = 0$, pode ser escrita na forma de uma equação vectorial de ordem 1 em \mathbb{R}^n da forma que em seguida se descreve. Considera-se

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} (y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

E assim

$$X' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_{n-1}) = (y', y'', \dots, y^{(n)}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -a_0 x_0 - a_1 x_1 - \dots - a_{n-1} x_{n-1})$$

onde se utilizou o facto de pela equação diferencial

$$y^{(n)} = -a_0 y - a_1 y' - \dots - a_{n-1} y^{(n-1)}$$

Então

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

é denominada *matriz companheira* da equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Pela teoria das equações vectoriais lineares, o espaço de soluções da equação $X' = AX$, tem dimensão n , pelo que existem n funções vectoriais linearmente independentes X_1, \dots, X_n (que são as colunas de uma matriz solução fundamental) e como tal a solução geral de $X' = AX$ é da forma

$$X(t) = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_1^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}^1 \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} x_0^n \\ x_1^n \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}^n \end{bmatrix}$$

Dado que para escrever a solução da equação $P(D)y = 0$ apenas precisamos de conhecer y , então a solução geral da equação homogénea $P(d)y = 0$ é uma combinação linear das primeiras componentes das funções vectoriais X_1, \dots, X_n .

Podemos então concluir que o espaço das soluções da equação

$$P(D)y = 0 \quad (2.47)$$

tem dimensão n , e como tal, a sua solução geral é da forma

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são constantes reais, e y_1, \dots, y_n são n soluções linearmente independentes da equação.

Cálculo das soluções y_1, \dots, y_n

Dada a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \Leftrightarrow (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = 0$$

define-se o seu *polinómio característico* por

$$P(R) = R^n + a_{n-1}R^{n-1} + \dots + a_1R + a_0$$

Trata-se do polinómio real com os mesmos coeficientes do polinómio diferencial associado à equação diferencial. Tem-se então que, se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são raízes distintas do polinómio característico (reais ou pares de complexos conjugados) de multiplicidades m_1, \dots, m_k , respectivamente, então por factorização

$$P(R) = (R - \lambda_1)^{m_1} \dots (R - \lambda_k)^{m_k},$$

onde $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. A equação (2.47) pode ser escrita na forma

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0 \quad (2.48)$$

pelo que se podem obter soluções linearmente independentes ¹⁴ de (2.48) resolvendo as equações:

$$(D - \lambda_1)^{m_1} y = 0, \quad \dots, \quad (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0$$

Cada uma destas equações admitirá m_j ($j = 1, \dots, k$) soluções linearmente independentes obtidas do seguinte modo:

¹⁴ Note que os λ_j , com $j = 1, 2, \dots, k$, são raízes distintas de $P(R)$.

- se λ_j é uma raiz real de multiplicidade m_j de $P(R)$, a equação

$$(D - \lambda_j)^{m_j} y = 0$$

admite m_j soluções linearmente independentes

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{m_j-1} e^{\lambda_j t}$$

Note que no caso de λ_j ser complexo, as funções listadas acima também são soluções da equação. Neste caso, contudo, elas são funções que tomam valores complexos quando t é real. Ora, não é prático usar uma base complexa do espaço de soluções da equação diferencial quando o objectivo é determinar soluções reais de um problema de valor inicial com dados reais.

- se $\lambda_j = a_j + ib_j$ é uma raiz complexa de multiplicidade m_j de $P(R)$, atendendo a que $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ também é raiz de multiplicidade m_j de $P(R)$, então a equação

$$(D - a_j - ib_j)^{m_j} (D - a_j + ib_j)^{m_j} y = 0$$

admite $2m_j$ soluções linearmente independentes

$$e^{a_j t} \cos(b_j t), te^{a_j t} \cos(b_j t), \dots, t^{m_j-1} e^{a_j t} \cos(b_j t)$$

$$e^{a_j t} \sin(b_j t), te^{a_j t} \sin(b_j t), \dots, t^{m_j-1} e^{a_j t} \sin(b_j t)$$

Estas soluções são a partir de combinações lineares das soluções complexas da forma $t^k e^{\lambda t}$, onde $k = 0, 1, \dots, m-1$, com m a multiplicidade das raízes, $\lambda = a \pm ib$, de $P(R)$:

$$t^k e^{at} \sin(bt) = \frac{1}{2i} t^k e^{at} (e^{ibt} - e^{-ibt}) = \frac{1}{2i} t^k e^{(a+ib)t} - \frac{1}{2i} t^k e^{(a-ib)t}$$

$$t^k e^{at} \cos(bt) = \frac{1}{2} t^k e^{at} (e^{ibt} + e^{-ibt}) = \frac{1}{2} t^k e^{(a+ib)t} + \frac{1}{2} t^k e^{(a-ib)t}$$

Utilizando estas soluções obtém-se uma base do espaço de soluções da equação homogénea formada apenas por funções que tomam valores reais quando $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1:

Determinar a solução geral da equação

$$y''' + 4y'' + 4y' = 0 \quad (2.49)$$

Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^3 + 4D^2 + 4D)y = 0 \Leftrightarrow D(D+2)^2 y = 0 \Leftrightarrow Dy = 0 \text{ ou } (D+2)^2 y = 0$$

Podemos então obter soluções linearmente independentes da equação (2.49) resolvendo $Dy = 0$ e $(D+2)^2 y = 0$. Uma solução da equação $Dy = 0$ é e^{0t} . Por outro lado a equação $(D+2)^2 y = 0$ tem como soluções, por exemplo, e^{-2t} e te^{-2t} . Como tal a solução geral de (2.49) é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2:

Determinar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad (2.50)$$

Fazendo $y' = DY$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^2 + 2D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D - (-1 + i))(D - (-1 - i))y = 0$$

As soluções complexas da equação são $e^{(-1+i)t}$ e $e^{(-1-i)t}$, pelo que $\operatorname{Re} e^{(-1+i)t}$ e $\operatorname{Im} e^{(-1+i)t}$ serão soluções reais de (2.50). Assim, a solução geral de (2.50) é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3:

Determinar a solução do PVI

$$y'' + 8y' + 12y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -14 \quad (2.51)$$

Começamos por determinar a solução geral da equação. Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^2 + 8D + 12)y = 0 \Leftrightarrow (D + 2)(D + 6)y = 0 \Leftrightarrow (D + 6)y = 0 \text{ ou } (D + 2)y = 0$$

Uma solução da equação $(D + 6)y = 0$ é e^{-6t} . Por outro lado a equação $(D + 2)y = 0$ tem como solução e^{-2t} . Como tal a solução geral da equação é dada por

$$y(t) = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Para que as condições iniciais se verifiquem

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -6c_1 - 2c_2 = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Finalmente a solução de (2.51) é

$$y(t) = 2e^{-6t} + e^{-2t}$$

2.5.2 Soluções Particulares Através da Fórmula de Variação das Constantes

Para calcular uma solução particular, $y_P(t)$, da equação

$$P(D)y = h(t) \quad (2.52)$$

começamos por discutir o método mais geral, e que consiste na aplicação da fórmula da variação das constantes (2.36). Em teoria, este método é aplicável a todos os problemas em que $h(t)$ é somente uma função contínua. Na prática, contudo, pode não ser fácil obter uma fórmula explícita por primitivação (e invocando apenas funções elementares).

A equação pode ser escrita na forma de uma equação vectorial de ordem 1

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(t) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

é a já referida *matriz companheira* da equação (2.52). Sendo y_1, \dots, y_n soluções linearmente independentes da equação homogénea associada (determinadas na Secção 2.4.1), define-se a matriz *Wronskiana* como sendo

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Como as colunas da matriz $W(t)$ são soluções da equação homogénea associada a (2.53), a matriz $W(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação vectorial (2.53) pelo que, por aplicação da fórmula da variação das constantes para equações vectoriais, tem-se que uma solução particular de (2.53) será dada por

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = W(t) \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(s) \end{bmatrix} ds,$$

tendo-se então que:

$$y_P(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{bmatrix} \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(s) \end{bmatrix} ds$$

Exemplo:

Determinar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \quad (2.54)$$

A solução geral da equação é da forma

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t)$$

em que y_G é a solução geral da equação homogénea associada, e y_P é uma solução particular de (2.54).

- *Cálculo de y_G*

Como foi referido, y_G é a solução de

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

e como tal a sua solução geral é (determinada no Exemplo 2)

$$y_G(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo de y_P*

Para determinar y_P vamos utilizar a fórmula da variação das constantes. Começamos por observar que $e^{-t} \cos t$ e $e^{-t} \sin t$ são soluções da equação homogénea, e como tal uma matriz Wronskiana é dada por:

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ (e^{-t} \cos t)' & (e^{-t} \sin t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(-\sin t + \cos t) \end{bmatrix}$$

Assim

$$y_P(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} = 2e^{-t}$$

Finalmente a solução geral de (2.54) é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t + 2e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.5.3 Método dos Coeficientes Indeterminados

O outro método para o cálculo de uma solução particular da equação

$$P(D)y = h(t) \tag{2.55}$$

é bastante eficiente, mas é **apenas** aplicável nos casos em que o termo não homogéneo, $h(t)$, é uma função da forma

$$t^p e^{\lambda t} \quad \text{ou} \quad t^p e^{at} \cos(bt) \quad \text{ou} \quad t^p e^{at} \sin(bt), \quad p \geq 0 \tag{2.56}$$

ou suas combinações lineares.

Dada uma função $f(t)$, define-se *polinómio aniquilador* de f ao polinómio diferencial $P_A(D)$ que verifica

$$P_A(D)f = 0$$

Se $f(t)$ é uma combinação linear de funções do tipo das em (2.56), então existe um polinómio aniquilador, e, pela secção 2.4.1, concluímos que

se $b(t) = t^p e^{\lambda t}$, então o seu polinómio aniquilador é

$$P_A(D) = (D - \lambda)^{p+1}$$

se $b(t) = t^p e^{at} \cos(bt)$ ou $b(t) = t^p e^{at} \sin(bt)$, então o seu polinómio aniquilador é da forma

$$P(D) = (D - (a + ib))^{p+1} (D - (a - ib))^{p+1} = ((D - a)^2 + b^2)^{p+1}$$

O método dos coeficientes indeterminados para resolver a equação $P(D)y = b(t)$ consiste em:

1. Determinar o polinómio aniquilador, $P_A(D)$, de $b(t)$. Seja k o seu grau.

2. Aplicar $P_A(D)$ a ambos os membros da equação inicial, donde resulta:

$$P(D)y = h(t) \Rightarrow P_A(D)P(D)y = P_A(D)h(t) \Leftrightarrow P_A(D)P(D)y = 0$$

Note que a aplicação de $P_A(D)$ **não** produz uma equação equivalente à inicial. Embora qualquer solução de $P(D)y = h(t)$ seja solução de $P_A(D)P(D)y = 0$, nem todas as soluções da segunda equação resolvem a primeira.

Assim obtivemos uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de ordem $n + k$.

3. A solução geral da equação $P_A(D)P(D)y = 0$ é dada por

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p$$

em que y_1, \dots, y_n são as soluções linearmente independentes da equação $P(D)y = 0$ determinadas previamente, ou seja:

$$y_G(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

Tem-se então que existem $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_P = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p$$

é uma solução particular de $P(D)y = b$.

4. Determinam-se os coeficientes β_1, \dots, β_p de modo a que $w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p$ verifique $P(D)w = b$.

Exemplo:

Determinar a solução do PVI

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad (2.57)$$

A solução da equação diferencial é da forma

$$y(x) = y_G(x) + y_P(x)$$

em que y_G é a solução geral da equação homogénea associada, e y_P é uma solução particular da equação completa.

- *Cálculo de y_g*

A equação homogénea associada é

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Fazendo $y' = Dy$, obtém-se

$$(D^2 + 3D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D + 1)(D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D + 1)y = 0 \text{ ou } (D + 2)y = 0$$

Uma solução da equação $(D + 1)y = 0$ é e^{-x} . Por outro lado a equação $(D + 2)y = 0$ tem como solução e^{-2x} . Como tal

$$y_G(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo de y_P*

Dado que $h(x) = e^{-x}$, podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados para determinar a solução particular y_P . O polinómio aniquilador de $h(x)$ é

$$P_A(D) = D + 1$$

Assim, e utilizando a factorização do polinómio característico feito anteriormente:

$$(D + 1)(D + 2)y = e^{-x} \Rightarrow (D + 1)(D + 1)(D + 2)y = (D + 1)e^{-x}$$

Ou seja

$$(D + 1)^2(D + 2)y = 0$$

Resolvendo a equação homogénea obtém-se que

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

Dado que $c_1 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$ representa a solução geral da equação homogénea associada a (2.57), conclui-se que a forma da solução particular é $w(x) = \alpha x e^{-x}$. Seguidamente teremos que determinar o valor da constante α de modo a que w seja solução da equação $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$. Tem-se então que

$$(\alpha x e^{-x})'' + 3(\alpha x e^{-x})' + 2(\alpha x e^{-x}) = e^{-x} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Conclui-se que

$$y_P(x) = x e^{-x}$$

- *Cálculo da solução geral de (2.57)*

Como já foi referido

$$y(x) = y_G(x) + y_P(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + x e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo da solução de (2.57)*

Para que as condições iniciais se verifiquem

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Finalmente a solução de (2.51) é

$$y(x) = x e^{-x}$$

2.5.4 Exemplos de Aplicação do Método dos Coeficientes Indeterminados

Como exemplo de aplicação dos métodos desta secção às equações vectoriais lineares — que estudámos na secção 2.4 — vamos agora resolver a equação vectorial linear de primeira ordem, de coeficientes constantes, no caso linear. O método consiste em resolver a equação

$$\mathbf{Y}'(t) = A\mathbf{Y}(t), \tag{2.58}$$

com $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, $A = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, procurando reduzi-la a uma equação linear homogénea de ordem n equivalente.

A equação vectorial linear de coeficientes constantes, homogénea, pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} y_1'(t) &= a_{11} y_1(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) \\ \vdots & \vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1} y_1(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) \end{cases}$$

Usando o método de substituição, esta equação pode em muitos casos ser reduzida a uma equação de ordem n , linear, de coeficientes constantes, homogénea numa das componentes y_i de \mathbf{Y} , para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. ¹⁵

Exemplo 1:

Determinar a solução geral da equação

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

Fazendo $\mathbf{Y} = (x, y)$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

Resolvendo (por exemplo) a primeira equação em ordem a y , obtém-se

$$y = -\frac{1}{3}(x' - x)$$

pele que, substituindo na segunda equação

$$\left(-\frac{1}{3}(x' - x)\right)' = 3x + \left(-\frac{1}{3}(x' - x)\right)$$

que é uma equação de segunda ordem (linear, de coeficientes constantes, homogénea) em x . Simplificando e resolvendo

$$x'' - 2x' + 10x = 0 \Leftrightarrow (D^2 - 2D + 10)x = 0$$

O polinómio característico associado, $P(R) = R^2 - 2R + 10$, tem raízes complexas conjugadas $1 \pm 3i$ pelo que uma base do espaço de soluções será (por exemplo) $\operatorname{Re} e^{(1+3i)t}$ e $\operatorname{Im} e^{(1+3i)t}$. Tem-se então que

$$x(t) = ae^t \cos(3t) + be^t \sin(3t)$$

e tornando a substituir

$$y = -\frac{1}{3}(x' - x) = -be^t \cos(3t) + ae^t \sin(3t)$$

¹⁵Nos casos em que isso não é possível — se A for uma matriz não derogatória — prova-se que a equação $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ pode ser reduzida a um sistema de equações lineares homogéneas **escalares** (de ordem maior ou igual a 1), e que podem ser resolvidas separadamente pois são independentes umas das outras.

Finalmente, a solução da equação vectorial é dada por

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} a \cos(3t) + b \sin(3t) \\ -b \cos(3t) + a \sin(3t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Vamos agora determinar a solução geral da equação

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Neste caso não vamos conseguir reduzir o sistema a uma equação de ordem 3 em qualquer uma das variáveis, consequência de nas duas últimas equações não há dependência em x e na primeira não haver dependência nas variáveis y e z . No entanto conseguiremos aplicar o método aos “sub-sistemas”

$$x' = 2x \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Para o primeiro

$$x' = 2x \Leftrightarrow x(t) = c_1 e^{2t}$$

Para o outro sistema, podemos utilizar dois métodos: ou reduzir a uma equação de ordem 2 (forçosamente em y) e resolvê-lo como no exemplo anterior, ou como método alternativo que resulta sempre que a matriz associada ao sistema é triangular, e que consiste em resolver a equação em z' (dado que só depende de z) substituir na equação em y' (dado que, conhecida z só depende de y). Assim

$$z' = 2z \Leftrightarrow z(t) = c_2 e^{2t}$$

Substituindo na equação em y'

$$y' = 2y + c_2 e^{2t} \Leftrightarrow y' - 2y = c_2 e^{2t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = c_2 \Leftrightarrow y(t) = e^{2t}(c_2 t + c_3)$$

e substituindo na equação em x' Finalmente, a solução da equação vectorial é dada por

$$Y(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 t + c_3 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

2.6 Transformada de Laplace

2.6.1 Definição e Propriedades

Definição da Transformada de Laplace

Seja $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Define-se a *Transformada de Laplace* de f , como sendo a função de variável complexa

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.59)$$

Por vezes usa-se a notação $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ para representar $\mathcal{L}\{f\}(s)$, em situações em que se designa a função f pela fórmula que a define.

Domínio da Transformada de Laplace

Se a função f for seccionalmente contínua em qualquer $[0, T]$, com $T \in \mathbb{R}^+$ e verificar

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.60)$$

para certas constantes $M > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace de f está bem definida no semi-plano complexo $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Demonstração: Para qualquer $t > 0$ e $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > \alpha \Leftrightarrow \alpha - \operatorname{Re} s < 0$:

$$|e^{-st} f(t)| = |e^{(-\operatorname{Re} s)t}| |e^{-i(\operatorname{Im} s)t}| |f(t)| \leq e^{(-\operatorname{Re} s)t} M e^{\alpha t} = M e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)t}$$

Então, para $\operatorname{Re} s > \alpha$:

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty M e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)t} dt = M \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)t}}{\alpha - \operatorname{Re} s} \Big|_0^R = \frac{M}{\operatorname{Re} s - \alpha}$$

□

Nota: Se $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, então podemos definir a transformada de Laplace de f pela equação (2.59), e a mesma estará bem definida para $\operatorname{Re} s > \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ é obtido a partir da condição de convergência (2.60).

Exemplo:

Sendo $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, (ou $a \in \mathbb{C}$) tem-se que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_{t=0}^R = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

Como caso particular

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \mathcal{L}\{e^{0t}\}(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Função de Heaviside

Sendo $c \in \mathbb{R}$, define-se a *função de Heaviside* (centrada em c) por

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

Se $c = 0$, escreve-se simplesmente $H(t) \stackrel{\text{def}}{=} H_0(t)$. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $H_c(t) = H(t - c)$.

Exemplo: (Transformada de Laplace da função de Heaviside)

Se $c \geq 0$

$$\mathcal{L}\{H_c(t)\}(s) = \int_0^\infty H(t - c) e^{-ts} dt = \int_c^\infty e^{-ts} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{e^{-ts}}{s} \Big|_c^N = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Propriedades Elementares da Transformada de Laplace:

Assumindo que as funções f e g admitem transformadas de Laplace bem definidas numa região $\operatorname{Re} s > a$ (para algum $a \in \mathbb{R}$):

(1) Linearidade

$$\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$$

e para $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s)$$

Em consequência, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s)$$

(2) Translação da Transformada de Laplace Para $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s + a)$$

(3) Derivada da Transformada de Laplace Para $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{ds^n} \left(\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \right) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

(4) Transformada de Laplace da Translação Para $c \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{H(t - c)f(t - c)\}(s) = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(5) Transformada de Laplace da Derivada

Se f admite derivada seccionalmente contínua em $[0, \infty[$ e $\operatorname{Re} s > 0$ então:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Então, aplicando $n \in \mathbb{N}$ vezes a propriedade anterior, se f admite derivadas seccionalmente contínuas até à ordem n em $[0, \infty[$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = -f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) \dots - s^{n-2} f'(0) - s^{n-1} f(0) + s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Demonstração:

(1) A propriedade é verdadeira devido à linearidade dos integrais impróprios.

$$(2) \mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{(s+a)t} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s + a)$$

(3) Vamos provar o resultado por indução. No caso $n = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} (e^{-st} f(t)) dt = \int_0^\infty e^{-st} (-t) f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s)\end{aligned}$$

Admitindo que a propriedade é válida para $n - 1$, então (e usando o caso $n = 1$):

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \right) = \frac{d}{ds} \left((-1)^{n-1} \mathcal{L}\{t^{n-1} f(t)\}(s) \right) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t^{n-1} f(t)\}(s) = (-1)^{n-1} (-1) \mathcal{L}\{t(t^{n-1} f(t))\}(s) \\ &= (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)\end{aligned}$$

(4) Como $H(t - c) = 0$ para $t \in [0, c]$:

$$\mathcal{L}\{H(t - c)f(t - c)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t - c)f(t - c) dt = \int_c^\infty e^{-st} f(t - c) dt$$

Fazendo $\theta = t - c$ no último integral, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{H(t - c)f(t - c)\}(s) = \int_0^\infty e^{-s(\theta+c)} f(\theta) d\theta = e^{-cs} \int_0^\infty e^{-s\theta} f(\theta) d\theta = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(5) Integrando por partes (e atendendo a que, por hipótese, $\operatorname{Re} s > 0$):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Exemplos

a) Para $b \in \mathbb{R}$, e usando a linearidade da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - ib} + \frac{1}{s + ib} \right) = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}\right\}(s) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - ib} - \frac{1}{s + ib} \right) = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

b) Para a e $b \in \mathbb{R}$, e usando a propriedade da translação da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s + a) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} s > -a$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \sin(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s + a) = \frac{b}{(s + a)^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} s > -a$$

c) Se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, e usando a propriedade da derivada da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) \right) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

Particularizando o resultado anterior para $a = 0$, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

d) Por aplicação da propriedade da transformada de Laplace da translação, determinar $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-2s} \frac{1}{s^2} = e^{-2s} \mathcal{L}\{t\}(s) = \mathcal{L}\{H(t-2)(t-2)\}(s)$$

2.6.2 Aplicações da Transformada de Laplace às equações diferenciais

Vamos introduzir um método que permite resolver um problema de valor inicial para uma equação linear de ordem n , de coeficientes constantes. Para tal, vamos usar a Transformada de Laplace para obter a solução de problemas de valor inicial do tipo:

$$\begin{cases} y^n + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(t) \\ y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1} \end{cases} \quad (2.61)$$

1. Aplicar a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial do problema (2.61):

$$\mathcal{L}\{y^n + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)$$

2. Aplicando as propriedades da transformada de Laplace, e com

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$

obtém-se

$$Y(s) = \frac{1}{P(s)}(B(s) + Q(s))$$

onde $P(s)$ é o polinómio característico associado a (2.61), $B(s)$ a transformada de Laplace de $b(t)$ e $Q(s)$ um polinómio de grau menor ou igual que $n-1$. Quando as condições iniciais são nulas, $Q(s) = 0$.

3. Finalmente, determinar a função $y(t)$ tal que

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s).$$

Em consequência:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$$

Diz-se que $y(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$. Utilizando este método, obtém-se a solução, $y(t)$, do PVI (2.61).

Exemplo:

Determinar a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:

$$\ddot{y} + y = b(t) \quad , \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

onde $b(t)$ é definida pela expressão

$$b(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 1 \end{cases} = (1 - H(t - 1)) t^2 = t^2 - H(t - 1) t^2$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + y\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s).$$

Pela propriedade da transformada de Laplace da translação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{b(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\}(s) - \mathcal{L}\{H(t - 1)t^2\}(s) = \frac{2}{s^3} - \mathcal{L}\{H(t - 1)((t - 1) + 1)^2\}(s) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \mathcal{L}\{(t + 1)^2\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s} \mathcal{L}\{t^2 + 2t + 1\}(s) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Por outro, usando a linearidade:

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + y\}(s) = \mathcal{L}\{\ddot{y}\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

Pela propriedade da transformada de Laplace da derivada,

$$-\dot{y}(0) - sy(0) + s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

Usando a notação $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, e atendendo a que $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, tem-se então:

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right),$$

ou seja:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \left(\frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \right)$$

Sejam $F_1(s)$ e $F_2(s)$ tais que:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3(s^2 + 1)}}_{F_1(s)} + \underbrace{e^{-s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \right)}_{F_2(s)}$$

Em $F_1(s)$, fazendo separação em fracções simples e aplicando as propriedades da Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
 F_1(s) &= \frac{-2}{s} + \frac{0}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{2s+0}{s^2+1} \\
 &= \frac{-2}{s} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s} + 2 \frac{s}{s^2+1} \\
 &= -2\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{t^2\}(s) + 2\mathcal{L}\{\cos t\}(s) \\
 &= \mathcal{L}\{-2 + t^2 + 2\cos t\}(s)
 \end{aligned}$$

Tratando $F_2(s)$ de forma similar:

$$\begin{aligned}
 F_2(s) &= e^{-s} \left(\frac{-1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{s-2}{s^2+1} \right) \\
 &= e^{-s} \left(\frac{-1}{s} - 2 \frac{d}{ds} \frac{1}{s} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} - 2 \frac{1}{s^2+1} \right) \\
 &= e^{-s} \left(-\mathcal{L}\{1\}(s) + 2\mathcal{L}\{t\}(s) + \mathcal{L}\{t^2\}(s) + \mathcal{L}\{\cos t\}(s) - 2\mathcal{L}\{\sin t\}(s) \right) \\
 &= e^{-s} \mathcal{L}\{-1 + 2t + t^2 + \cos t - 2\sin t\}(s) \\
 &= \mathcal{L}\left\{H(t-1) \left(-1 + 2(t-1) + (t-1)^2 + \cos(t-1) - 2\sin(t-1) \right)\right\}(s)
 \end{aligned}$$

Conclui-se que

$$Y(s) = \mathcal{L}\left\{-2 + t^2 + 2\cos t + H(t-1) \left(-1 + 2(t-1) + (t-1)^2 + \cos(t-1) - 2\sin(t-1) \right)\right\}(s)$$

e assim a solução do PVI é

$$\begin{aligned}
 y(t) &= -2 + t^2 + 2\cos t + H(t-1) \left(-1 + 2(t-1) + (t-1)^2 + \cos(t-1) - 2\sin(t-1) \right) \\
 &= \begin{cases} -2 + t^2 + 2\cos t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ -3 + t^2 + 2\cos t + 2(t-1) + (t-1)^2 + \cos(t-1) - 2\sin(t-1) & \text{se } t \geq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.6.3 Distribuição Delta de Dirac

A delta de Dirac é a distribuição que verifica

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Se f é contínua em $t = 0$ então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

Mais genericamente, podemos definir a distribuição delta de Dirac centrada em um dado $c \in \mathbb{R}$ por:

$$\delta_c(t) = \delta(t - c)$$

A distribuição $\delta_c(t)$ verifica, então:

a) $\delta_c(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t) dt = 1$

c) Se f é contínua em c então $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t) f(t) dt = f(c)$

Desta forma:

$$\mathcal{L}\{\delta_c(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t) e^{-st} dt = e^{-cs}.$$

Exemplo:

Determinar a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2\delta(t - 2) \quad , \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + y\}(s) = \mathcal{L}\{2\delta(t)\}(s) = 2e^{-2s}$$

Usando a linearidade, a propriedade da transformada de Laplace da derivada e a notação $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$

$$-\dot{y}(0) - sy(0) + s^2Y(s) + 2(-y(0) + sY(s)) + Y(s) = 2e^{-2s},$$

o que é equivalente a

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 2e^{-2s},$$

ou seja

$$Y(s) = e^{-2s} \frac{2}{(s+1)^2} = e^{-2s} \mathcal{L}\{2te^t\}(s) = \mathcal{L}\{2H(t-2)(t-2)e^{-(t-2)}\}(s)$$

Consequentemente, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = 2H(t-2)(t-2)e^{-(t-2)}.$$

2.6.4 Inversão da Transformada de Laplace

Teorema de Inversão da Transformada de Laplace

Seja $F(s)$ uma função analítica em \mathbb{C} excepto num conjunto finito de singularidades (isoladas), $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathbb{C}$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $F(s)$ é analítica no semi-plano $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ (isto é, α é maior que qualquer um dos valores $\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Re} s_2, \dots, \operatorname{Re} s_n$). Suponhamos também que $F(s)$ verifica, para certos $M, \beta, \hat{R} \in \mathbb{R}^+$:

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|^\beta}, \quad \text{se } |s| \geq \hat{R} \quad (2.62)$$

Então

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(e^{st}F(s), s_j) \quad (2.63)$$

satisfaz $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ para $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Demonstração: Seja $R > |\alpha|$ tal que todas as singularidades de $F(s)$ estão no interior da circunferência $|s| = R$ (isto é, $|s_j| < R$, para $j = 1, 2, \dots, n$).

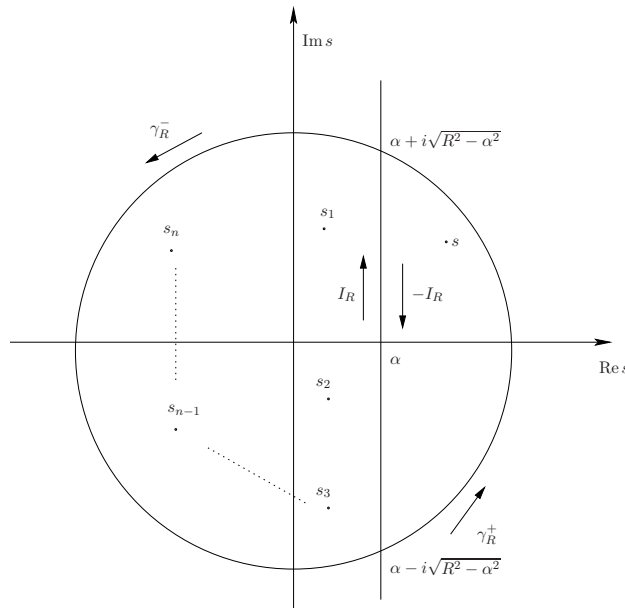


Figura 2.9: Demonstração do teorema de inversão da transformada de Laplace.

Sejam

$$\begin{aligned} \gamma_R^+ &= \{s \in \mathbb{C} : |s| = R \text{ e } \operatorname{Re} s \geq \alpha\} \\ \gamma_R^- &= \{s \in \mathbb{C} : |s| = R \text{ e } \operatorname{Re} s \leq \alpha\} \end{aligned}$$

(em que a circunferência é sempre percorrida no sentido directo) e I_R o segmento que une os extremos de ambas as curvas, com início em $\alpha - i\sqrt{R^2 - \alpha^2}$ e fim em $\alpha + i\sqrt{R^2 - \alpha^2}$. Considere-se as curvas de Jordan:

$$\Gamma_R^+ = \gamma_R^+ + (-I_R) \quad , \quad \Gamma_R^- = \gamma_R^- + I_R$$

Note que ambas as curvas são percorridas no sentido directo.

Aplicando o teorema dos resíduos à função $e^{st}F(s)$, que é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ (considera-se $t \in \mathbb{R}$ como parâmetro):

$$\int_{\Gamma_R^-} e^{st} F(s) ds = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{st} F(s), s_j) = 2\pi i f(t) \quad (2.64)$$

A transformada de Laplace de f (nos pontos $s \in \mathbb{C}$ onde o limite que define o integral impróprio converge) será então dada por:

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} \left(\int_{\Gamma_R^-} e^{zt} F(z) dz \right) dt.$$

Pelo teorema de Fubini:

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^-} \left(\int_0^N e^{(z-s)t} dt \right) F(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{(z-s)N} - 1}{z - s} F(z) dz.$$

Para $\text{Re } s > \alpha$ e notando que, para $z \in \Gamma_R^-$, $\text{Re } z \leq \alpha$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |e^{(z-s)N}| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} e^{(\alpha - \text{Re } s)N} = 0,$$

pelo que, para esses valores de s , o limite que define $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe e:

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = - \int_{\Gamma_R^-} \frac{F(z)}{z - s} dz.$$

Considera-se agora R suficientemente grande, de tal forma que — para além das singularidades s_1, s_2, \dots, s_n — também s está no interior da circunferência $|z| = R$, e a estimativa (2.62) é válida para $|z| = R$ (ou seja, $R \geq \hat{R}$). Aplicando a fórmula integral de Cauchy à curva Γ_R^+ e à função F (que é analítica nessa curva e no seu interior):

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = - \int_{\Gamma_R^-} \frac{F(z)}{z - s} dz - \underbrace{\int_{\Gamma_R^+} \frac{F(z)}{z - s} dz}_{=0} + 2\pi i F(s) = 2\pi i F(s) - \int_{|z|=R} \frac{F(z)}{z - s} dz.$$

Como:

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{F(z)}{z - s} dz \right| \leq \int_{|z|=R} \frac{|F(z)|}{|z - s|} |dz| \leq \frac{M/R^\beta}{R - |s|} \int_{|z|=R} |dz| = \frac{2\pi RM}{R^\beta(R - |s|)} \rightarrow 0$$

quando $R \rightarrow \infty$, concluímos que,

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi i F(s) - \int_{|z|=R} \frac{F(z)}{z - s} dz = 2\pi i F(s),$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s).$$

□.

Este teorema de inversão pode ser útil quando $F(s)$ é uma função racional, isto é, $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinómios. Neste caso, e como vimos na subsecção 1.10.3, basta que o grau de $Q(s)$ seja maior que o de $P(s)$ para a condição (2.62) seja satisfeita.

Exemplo 1:

Determinar a transformada de Laplace inversa de $F(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$.

Como $s^2 + s - 6 = (s+3)(s-2)$, $e^{st}F(s) = e^{st} \frac{s+1}{(s+3)(s-2)}$ tem por singularidades $s = 2$ e $s = -3$, sendo ambas pólos simples. Note que o grau de $s^2 + s - 6$ é maior que o de $s - 1$. Pelo teorema de inversão da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+3)(s-2)}\right\} = \text{Res}(e^{st}F(s), 2) + \text{Res}(e^{st}F(s), -3)$$

Os resíduos dos pólos simples são:

$$\text{Res}(G(s), 2) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s+1}{s+3} e^{st} = \frac{3}{5} e^{2t}$$

$$\text{Res}(G(s), -3) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+1}{s-2} e^{st} = \frac{2}{5} e^{-3t}.$$

Assim sendo,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{3}{5} e^{2t} + \frac{2}{5} e^{-3t}.$$

Exemplo 2:

Sendo $F(s)$ uma função que verifica as condições do teorema de inversão da transformada de Laplace, provar que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad \text{para } t > 0. \quad (2.65)$$

Notamos em primeiro lugar que a equação (2.64) é válida para qualquer R muito grande; tomando o limite em ambos os membros de (2.64) quando $R \rightarrow \infty$, então:

$$2\pi i f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{I_R} e^{st} F(s) ds + \int_{\gamma_R^-} e^{st} F(s) ds \right) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{st} F(s) ds$$

Resta provar que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{st} F(s) ds = 0$.

A curva γ_R^- é o arco de circunferência parametrizado por $s(\theta) = Re^{i\theta}$, com $\frac{\pi}{2} - \kappa \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + \kappa$ e $\kappa = \arctg \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}}$. Podemos escrever $\gamma_R^- = C_R^1 + S_R + C_R^2$ ¹⁶ onde o parâmetro θ satisfaz:

$$\frac{\pi}{2} - \kappa < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{para } z(\theta) \in C_R^1;$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \text{para } z(\theta) \in S_R;$$

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} + \kappa \quad \text{para } z(\theta) \in C_R^2.$$

Para estimar os integrais ao longo de $C_R^1 + C_R^2$, tendo em conta que $|e^{ts}| = e^{t\operatorname{Re} s} \leq e^{t\alpha}$ para $s \in \gamma_R^-$:

$$\left| \int_{C_R^- + C_R^+} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{Me^{t\alpha}}{R^\beta} \int_{C_R^- + C_R^+} |ds| = \frac{Me^{t\alpha}}{R^\beta} 2R|\kappa|$$

Como $|\arctg x| \leq |x|$, então $R|\kappa| = R \left| \arctg \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} \right| \leq R \frac{|\alpha|}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1 - \alpha^2/R^2}}$, pelo que:

$$\left| \int_{C_R^- + C_R^+} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{2Me^{t\alpha}|\alpha|}{R^\beta \sqrt{1 - \alpha^2/R^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty$$

O integral ao longo de S_R pode ser estimado usando o método da prova do lema de Jordan. Em primeiro lugar,

$$\begin{aligned} \int_{S_R} |e^{ts}| |ds| &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |e^{tR \cos \theta}| |e^{itR \sin \theta}| R d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR \cos \theta} R d\theta = \int_0^\pi e^{tR \cos(\omega + \frac{\pi}{2})} R d\omega = \int_0^\pi e^{-tR \sin \omega} R d\omega. \end{aligned}$$

Usando agora as estimativas da subsecção 1.10.3 (equações (1.23) e (1.24)), obtém-se:

$$\int_{S_R} |e^{ts}| |ds| \leq \frac{\pi}{t} \quad \text{para } t > 0.$$

Então, para $t > 0$,

$$\left| \int_{S_R} f(z) e^{ts} ds \right| \leq \frac{M}{R^\beta} \int_{S_R} |e^{ts}| |ds| \leq \frac{M\pi}{R^\beta t} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty$$

¹⁶A ideia desta decomposição baseia-se no facto de os comprimentos das curvas C_R^1 e C_R^2 não tenderem para ∞ quando $R \rightarrow \infty$, o que permite uma majoração mais simples dos integrais correspondentes. Por outro lado, o integral ao longo de S_R pode ser estimado pelo método que foi usado na prova do lema de Jordan.

Capítulo 3

Introdução às Equações Diferenciais Parciais

O objectivo de resolver uma equação diferencial parcial é determinar uma função $u(x_1, \dots, x_n)$ que verifica uma relação de igualdade envolvendo as suas derivadas (que serão derivadas parciais).

Centraremos o nosso estudo nas equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem em domínios (espaciais) rectangulares, em que as equações são afins aos três tipos seguintes:

- **Equação do Calor**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

em que $t > 0$, $x_1 \in [0, L_1], \dots, x_n \in [0, L_n]$, e $K > 0$ é a condutividade térmica do material. Este tipo de equações está associado a processos envolvendo condução térmica e difusão¹.

- **Equação de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

em que $x_1 \in [0, L_1], \dots, x_n \in [0, L_n]$. Este tipo de equações está associado a processos estacionários de condução térmica e difusão, à electrostática e ao movimento dos fluídos.

- **Equação das Ondas**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

em que $t > 0$, $x_1 \in [0, L_1], \dots, x_n \in [0, L_n]$, e c uma constante. Este tipo de equações está associado a processos envolvendo propagação de ondas.

Para resolver estas equações, necessitaremos de estabelecer

- **Condições de Fronteira**

Que predefinem o comportamento da função u na fronteira de $R = [0, L_1] \times \dots \times [0, L_n]$, e que poderão ser de vários tipos:

- *Condições de Dirichlet*

se definem o valor de u na fronteira de R ;

¹No caso de se tratar da equação de difusão, $\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$, $D > 0$ é o coeficiente de difusão da substância.

– *Condições de Neumann*

se definem o valor de $\frac{\partial u}{\partial x}$ na fronteira de R (ou seja, definem o fluxo de u na fronteira de R);

Poderão ainda ser *mistas* se existirem condições dos dois tipos.

As condições de fronteira dizem-se *homogêneas* se forem nulas.

• **Condições Iniciais**

que definem o estado inicial, isto é, para a equação do calor

$$u(0, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in R$$

e para a equação das ondas

$$\begin{cases} u(0, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad , \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in R$$

3.1 Método de Separação de Variáveis

Para descrever o método de separação de variáveis, vamos aplicá-lo ao problema de Dirichlet homogêneo para a equação do calor.

A equação do calor unidimensional modela a propagação de calor (ou a difusão de uma substância) através de um corpo unidimensional (por exemplo uma barra) de comprimento L . A função $u(t, x)$ mede a temperatura da barra no ponto x no instante t e verifica a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \forall t > 0 \quad , \quad x \in]0, L[$$

sendo $K > 0$ a condutividade térmica (ou o coeficiente de difusão). Assumiremos condições de fronteira de Dirichlet homogêneas, isto é

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad , \quad \forall t > 0$$

e a condição inicial

$$u(0, x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in]0, L[$$

em que f é uma função seccionalmente contínua e com derivada seccionalmente contínua definida no intervalo $[0, L]$.

Resolveremos então o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \quad , \quad x \in]0, L[\\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in]0, L[\end{cases} \quad (3.1)$$

Começamos por notar que se $f(x) \equiv 0$ então a solução de (3.1) é $u(t, x) \equiv 0$. Se f não é identicamente nula então u também não o será.

Vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (3.1) da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(T(t)X(x)) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)X(x)) \Leftrightarrow T'(t)X(x) = KT(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{KT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t > 0$ e $x \in]0, L[$ uma função de t ($\frac{T'(t)}{KT(t)}$) iguale uma função de x ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{KT(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira

- $u(t, 0) = 0$ implica $T(t)X(0) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.
- $u(t, L) = 0$ implica $T(t)X(L) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(L) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(L) = 0$.

É conveniente notar que, se não exigíssemos condições de fronteira nulas, o método de separação de variáveis falharia neste ponto. A razão é muito simples — a lei do anulamento do produto não seria aplicável.

Temos então dois problemas para resolver - correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}, \quad (\mathbf{P2}) \quad T' = \lambda KT$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**. Trata-se duma equação diferencial linear homogénea, cuja solução tem que verificar condições de fronteira nulas. Nesta situação, a função nula é sempre solução de **(P1)**. Existem no entanto alguns valores de λ para os quais essa não é a única solução de **(P1)**.

Definição: λ diz-se um *valor próprio* de **(P1)**. associado à função própria $\varphi(x)$, sse $\varphi(x)$ for uma solução **não nula** de **(P1)**.

Para continuar a nossa resolução, teremos que encontrar os valores próprios de **(P1)** a fim de determinar as suas soluções não nulas. Assim

$$X'' - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D - \mu)(D + \mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D + i\omega)(D - i\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as condições de fronteira, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(L) = 0 &\Rightarrow A\sin(\omega L) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

ou

$$\sin(\omega L) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow X(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices n inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer λ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T' = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}KT \Rightarrow T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as soluções da equação do calor unidimensional, da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

Princípio da Sobreposição

Qualquer combinação linear de soluções de equações diferenciais lineares homogêneas (incluindo de um número infinito, se houver convergência), verificando condições de fronteira homogêneas, é também solução da equação e verifica as mesmas condições de fronteira.

Observa-se que, relativamente a sobreposições com um número infinito de termos, será necessário verificar adicionalmente que a série obtida é uniformemente convergente em subconjuntos compactos do domínio onde a equação diferencial é satisfeita.

Então, atendendo a (3.23)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad c_n \in \mathbb{R}$$

é solução da equação do calor unidimensional que verifica condições de fronteira de Dirichlet nulas. Para determinar as constantes c_n teremos que utilizar a condição de fronteira $u(0, x) = f(x)$. Resulta então que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (3.3)$$

3.2 Séries de Fourier

3.2.1 Definição e convergência pontual

Para qualquer $L \in \mathbb{R}^+$, considere-se uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Pode-se associar a f a sua *Série de Fourier*, ou *série trigonométrica*

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Teorema: (convergência pontual da série de Fourier)

Se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $] -L, L[$, então para cada $x \in [-L, L]$, a série de Fourier associada é uma série convergente, tendo-se que

$$SF_f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo } x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sendo } x \text{ um ponto de descontinuidade de } f \\ \frac{f(L^-) + f(-L^+)}{2} & \text{sendo } x = -L \text{ ou } x = L \end{cases} \quad (3.4)$$

Se f é contínua em $x = -L$ e em $x = L$ tem-se, simplesmente ²:

$$SF_f(\pm L) = \frac{f(L) + f(-L)}{2}$$

Note-se que a série de Fourier SF_f está bem definida em \mathbb{R} , é periódica de período $2L$ e está relacionada, no sentido descrito em (3.4) com a extensão periódica, \bar{f} , de f a \mathbb{R} , isto é:

$$SF_f(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) & \text{sendo } x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \frac{\bar{f}(x^+) + \bar{f}(x^-)}{2} & \text{sendo } x \text{ um ponto de descontinuidade de } \bar{f} \end{cases}$$

Exemplo:

Determinar a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{se } x \in [-1, 0[\\ \pi & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

²Na maior parte das aplicações, f é contínua em $x = \pm L$; nos casos em que a continuidade em $x = \pm L$ não se verifica, pode-se de qualquer modo alterar a definição da função f de forma a que $f(L) = f(L^-)$ e $f(-L) = f(-L^+)$.

A série de Fourier associada a f será

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) \right)$$

Atendendo a que a função f é uma função ímpar, ter-se-á

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por outro lado

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 \pi \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{n} (1 - (-1)^n)$$

Concluimos que

$$SF_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (1 - (-1)^n) \sin(n\pi x)$$

Atendendo a que, para n par, $1 - (-1)^n = 0$, os termos de ordem par da série anterior são nulos:

$$SF_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k-1} \sin((2k-1)\pi x)$$

Dado que tanto f como f' são funções seccionalmente contínuas em $[-1, 1]$ o teorema anterior permite-nos concluir que $SF_f(x)$ está bem definida para $x \in [-1, 1]$. Pela periodicidade das funções $\sin(n\pi x)$, é fácil de compreender que SF_f está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e que é periódica de período 2. De seguida mostra-se alguns gráficos das aproximações da série de Fourier da função f , isto é, o gráfico de alguns termos da sucessão das somas parciais

$$S_N f(x) = \sum_{k=1}^N \frac{4}{2k-1} \sin((2k-1)\pi x)$$

(para alguns valores de $N \in \mathbb{N}$).

$$\text{Gráfico da função } (S_1 f)(x) = 4 \sin(\pi x)$$

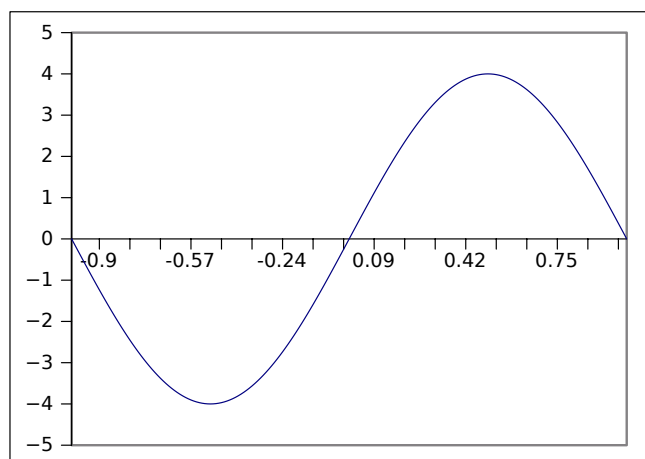
Figura 3.1: Aproximação $N = 1$

Gráfico da função $(S_2 f)(x) = 4\text{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\text{sen}(3\pi x)$

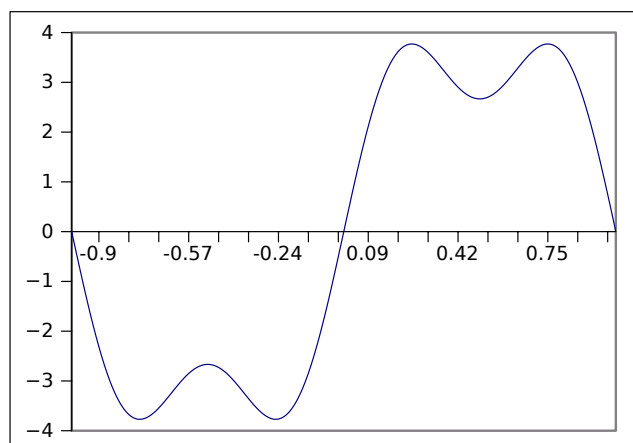
Figura 3.2: Aproximação $N = 2$

Gráfico da função $(S_3 f)(x) = 4\text{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\text{sen}(3\pi x) + \frac{4}{5}\text{sen}(5\pi x)$

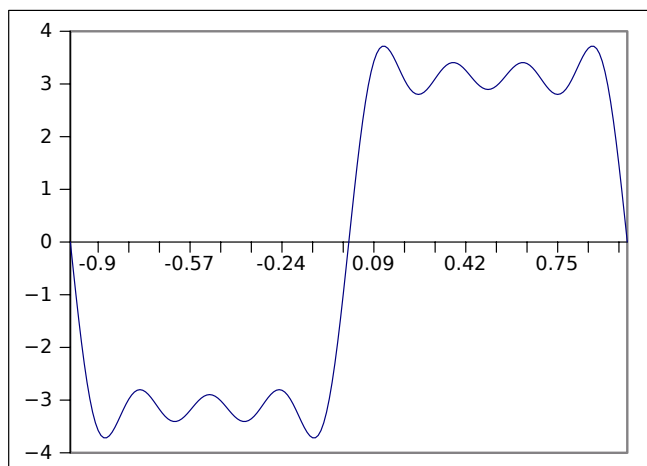


Figura 3.3: Aproximação $N = 3$

Gráfico da função $(S_5 f)(x) = 4\text{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\text{sen}(3\pi x) + \frac{4}{5}\text{sen}(5\pi x) + \frac{4}{7}\text{sen}(7\pi x) + \frac{4}{9}\text{sen}(9\pi x)$

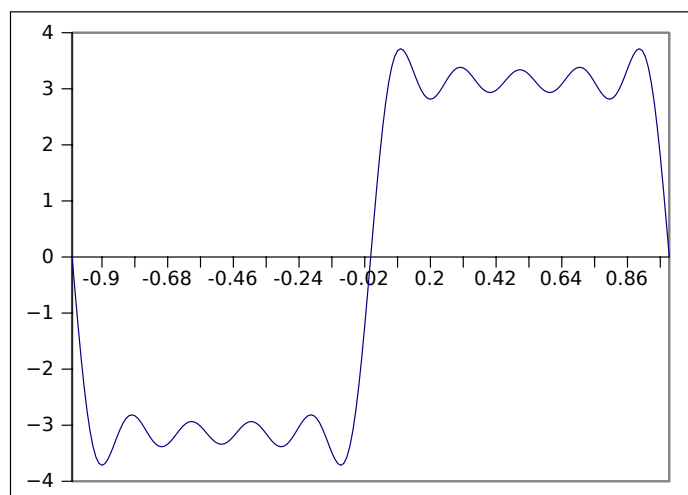


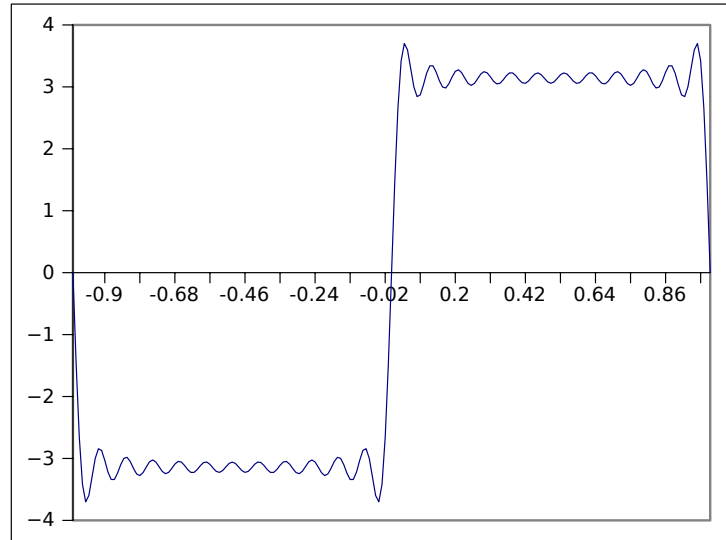
Figura 3.4: Aproximação $N = 5$

Gráfico da função $(S_{12} f)(x) = \sum_{n=1}^{12} \frac{4}{2n-1} \text{sen}((2n-1)\pi x)$

Em $[-1, 1]$ a soma da série de Fourier da função f será dada por:

$$SF_f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{se } x \in]-1, 0[\\ \pi & \text{se } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{se } x = \pm 1 \text{ ou } x = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Por ser uma função periódica de período 2, em \mathbb{R} a soma da série de Fourier da função f será dada pela extensão periódica de período 2 da função definida em (3.5).

Figura 3.5: Aproximação $N = 12$

3.2.2 O Núcleo de Dirichlet e as Somas Parciais das Séries de Fourier

Vamos nesta secção tentar explicar a razão do comportamento oscilatório das somas parciais das séries de Fourier.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos o **núcleo de Dirichlet**, $D_N(x)$, como sendo a função trigonométrica:

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(Nx) \quad (3.6)$$

Verifica-se facilmente que $D_N(x)$ é uma função par e que:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

Note também que:

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-iNx} + e^{-i(N-1)x} + \cdots + e^{-ix} + 1 + e^{ix} + \cdots + e^{iNx}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-iNx} (1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i2Nx}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} (e^{ix})^k \end{aligned}$$

Como o somatório acima obtido não é mais do que a soma dos primeiros $2N + 1$ termos da série

geométrica de razão e^{ix} , então:

$$\begin{aligned}
 D_N(x) &= \frac{1}{2} e^{-iNx} \frac{1 - (e^{ix})^{2N+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{2e^{-i\frac{x}{2}}} \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
 &= \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})x} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{2i} \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{2i}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}} \\
 &= -\operatorname{sen}\left((N + \frac{1}{2})x\right) \frac{1}{2} \frac{1}{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}\left((N + \frac{1}{2})x\right)}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

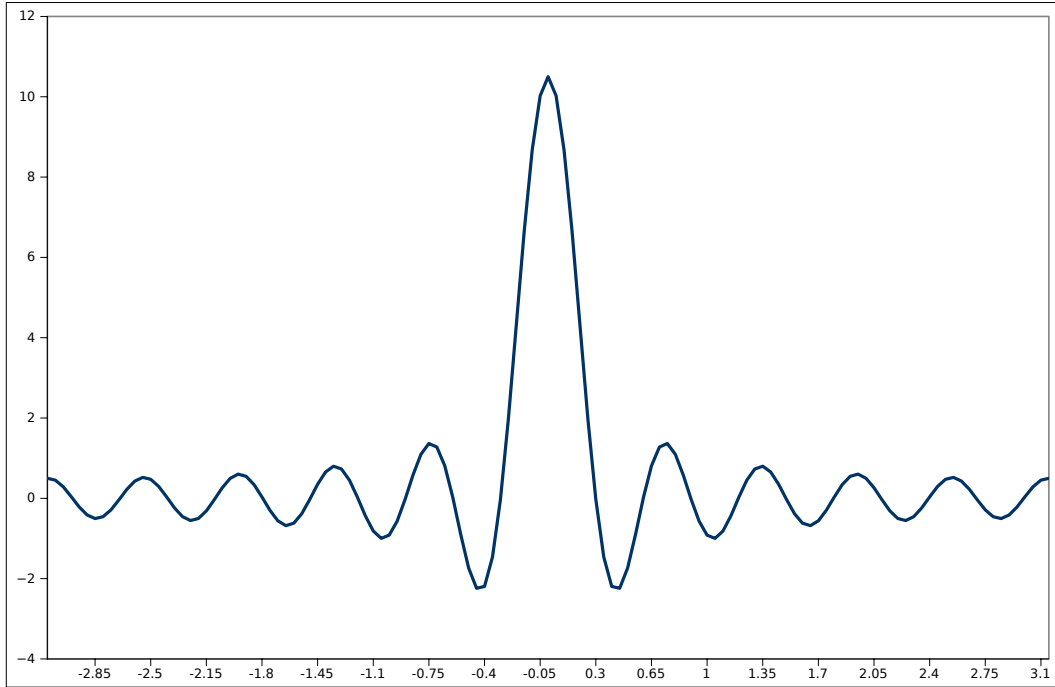
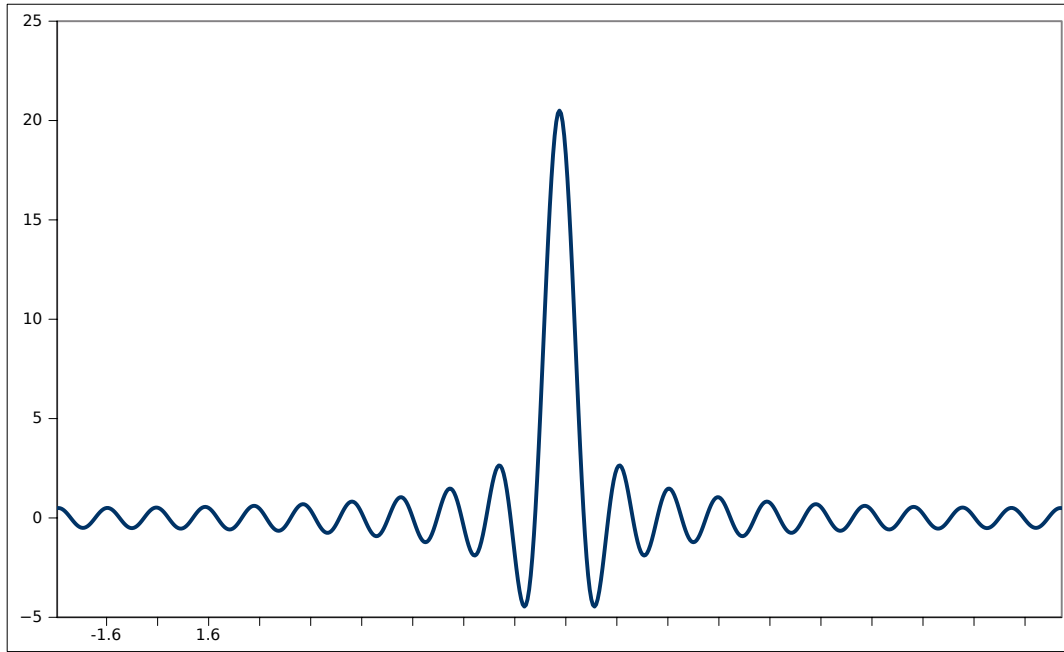


Figura 3.6: Gráfico de $D_{10}(x)$

Seja agora f uma função real, seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$, e admitamos que f foi periodicamente estendida a \mathbb{R} .³

³Ou seja, dada $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ pode-se definir $f(y)$ para qualquer $y \in \mathbb{R}$ tendo em conta que existem $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in [-\pi, \pi]$ tais que $y = x + 2k\pi$; assim sendo, considera-se que $f(y) = f(x + 2k\pi) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$. O que desta forma se obtém é, como se sabe, a extensão periódica de f a \mathbb{R} .

Figura 3.7: Gráfico de $D_{20}(x)$

A sucessão das somas parciais, $S_N(x)$, da série de Fourier de f é dada por:

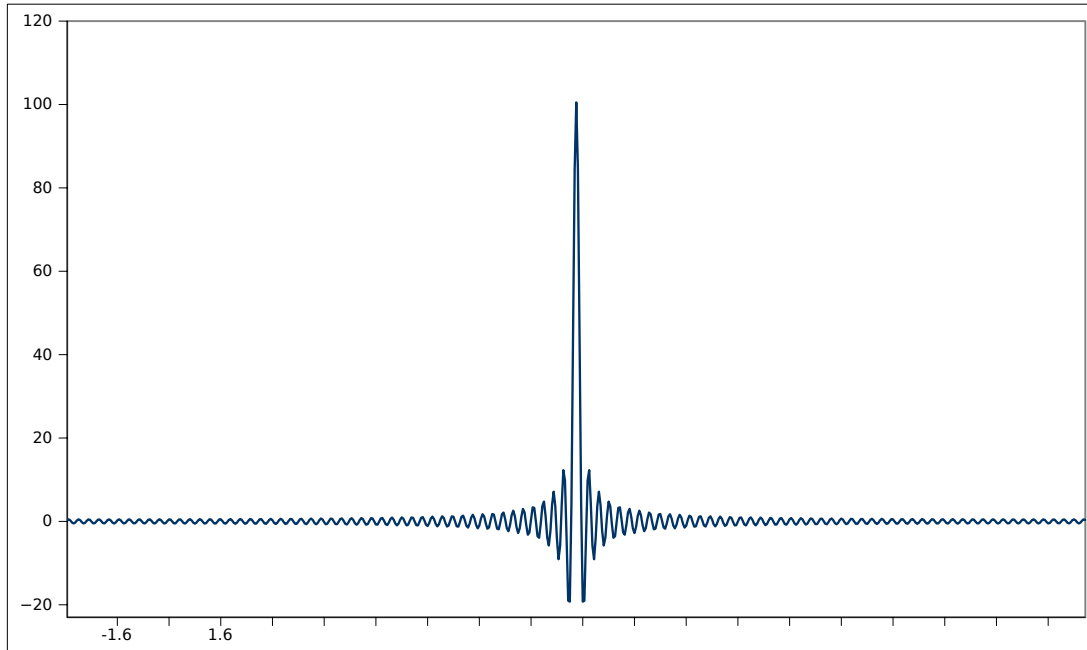
$$\begin{aligned}
 S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(y) dy + \sum_{k=1}^N \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky dy \right) \cos kx + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky dy \right) \sin kx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N (\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx) \right) dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos(k(y-x)) \right) dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(y-x) dy
 \end{aligned}$$

Desta forma se deduziu uma fórmula integral para a sucessão das somas parciais da série de Fourier de f :

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(y-x) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta) D_N(\theta) d\theta, \quad (3.7)$$

O último integral foi obtido através da substituição de variável $y-x = \theta$ ⁴.

⁴Como a função $f(x+\theta)D_N(\theta)$ é periódica de período 2π , o integral entre $-\pi-x$ e $\pi-x$ é igual ao integral entre $-\pi$ e π .

Figura 3.8: Gráfico de $D_{100}(x)$

A fórmula (3.7) diz-nos, grosso modo, que $S_N(x)$ é uma “média ponderada” de f numa vizinhança de x , em que os “pesos” são dados pelo núcleo de Dirichlet, $D_N(x)$. Note que a “soma dos pesos” é $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta) d\theta = 1$ ⁵. Nas figuras (3.6), (3.7) e (3.8) representa-se os gráficos de $D_N(x)$ para alguns valores de N . Pode-se observar o comportamento oscilatório do núcleo de Dirichlet: à medida que N cresce, as oscilações de $D_N(x)$ aumentam em amplitude mas concentram-se junto de $x = 0$. Se f for seccionalmente C^1 então é possível provar, a partir da fórmula (3.7), que $S_N(x)$ converge da forma descrita pelo teorema da convergência pontual (equação (3.4)).

3.2.3 Série de Fourier de Senos

Sendo $L > 0$ e $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $]0, L[$, pode-se associar a f a *série de senos*

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Esta série é obtida, efectuando a extensão ímpar de f ao intervalo $[-L, L]$, e calculando a sua série de Fourier. Observe-se que se uma dada função g é ímpar, os coeficientes da série de Fourier

⁵Em rigor, o primeiro integral da equação (3.7) designa-se por convolução de f com D_N .

verificam:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier e atendendo que se está a utilizar a extensão **ímpar** de f a $[-L, L]$, conclui-se que para $x \in [0, L]$

$$S_{\text{sen}} f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo } x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sendo } x \text{ um ponto de descontinuidad de } f \\ 0 & \text{se } x = L \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Exemplo:

Determinar a série de Fourier de senos da função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{se } x \in [1, 2][\end{cases}$$

A série de senos da função f em $[0, 2]$ será da forma

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$$

em que

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 (1 - x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Conclui-se que

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier, tem-se que em $[-2, 2]$

$$S_{\text{sen}} f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]0, 2[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-2, 0[\end{cases} \quad (3.8)$$

e em \mathbb{R} a soma da série de senos da função f será a extensão periódica de período 4, de (3.8) a \mathbb{R} .

3.2.4 Série de Fourier de Cosenos

Seja $L > 0$ e $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $]0, L[$, pode-se associar a f a *série de Cosenos*

$$S_{\cos} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

em que

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Esta série é obtida, efectuando a extensão par de f ao intervalo $[-L, L]$, e calculando a sua série de Fourier. Observe-se que se uma dada função g é par os coeficientes da série de Fourier verificam:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \forall n \geq 0$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier e atendendo que se está a utilizar a extensão **par** de f a $[-L, L]$, conclui-se que para $x \in [0, L]$

$$S_{\cos} f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo } x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sendo } x \text{ um ponto de descontinuidade de } f \\ f(L) & \text{se } x = L \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Determinar a série de Fourier senos da função $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{se } x \in [\frac{\pi}{4}, \pi] \end{cases}$$

A série de cosenos da função g em $[0, \pi]$ será da forma

$$S_{\cos} g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

em que

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} dx = \frac{3}{2}$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \cos(nx) dx = -\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$$

Conclui-se que

$$S_{\cos} g(x) = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \cos(nx)$$

Pelo Teorema da convergência das séries de Fourier, tem-se que em $[-\pi, \pi]$

$$S_{\cos} g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{se } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \pi] \\ 1/2 & \text{se } x = \pm \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (3.9)$$

e em \mathbb{R} a soma da série de cossenos da função g será a extensão periódica de período 2π , de (3.9) a \mathbb{R} .

3.3 Problema de Dirichlet Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional

Vamos resolver o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, x \in]0, \pi[\\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in]0, \pi[\end{cases} \quad (3.10)$$

em que f é uma função seccionalmente contínua em $]0, \pi[$. Tal como deduzimos na Secção 3.1, a solução do problema (3.10) é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 K t} \operatorname{sen}(nx), \quad c_n \in \mathbb{R}$$

e para determinar as constantes $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ usaremos a condição inicial, pelo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = f(x) \quad (3.11)$$

3.3.1 Exemplo 1

Se a condição inicial for

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)$$

por (3.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)$$

e é então fácil de deduzir que

$$c_2 = 1, \quad c_5 = -3 \quad \text{e} \quad c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 5\}$$

Concluimos que a solução de (3.10) quando $f(x) = \sin(2x) - 3\sin(5x)$ é dada por

$$u(t, x) = e^{-4Kt} \sin(2x) - 3e^{-25Kt} \sin(5x)$$

3.3.2 Exemplo 2

Se a condição inicial for

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

por (3.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = \frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - x \right|$$

pelo que para determinar as constantes (c_n) precisamos de determinar a série de senos da função $f(x)$ em $[0, \pi]$. Assim

$$S_{\sin} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

em que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} x \sin(nx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right] = \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Dado que a extensão periódica (de período 2π) a \mathbb{R} da extensão impar de f ao intervalo $[-\pi, \pi]$ é contínua, tem-se que para todo $x \in [0, \pi]$

$$\frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin(nx)$$

pelo que se conclui que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$c_n = \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

e a solução de (3.10) quando $f(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|$ é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} e^{-n^2 K t} \sin(nx)$$

3.4 Problema de Dirichlet não Homogêneo para a Equação do Calor Unidimensional

Vamos resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, x \in]0, L[\\ u(t, 0) = T_1, u(t, L) = T_2 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in]0, L[\end{cases} \quad (3.12)$$

em que T_1, T_2 são constantes. No contexto da equação do calor unidimensional, estas condições de fronteira significam que as extremidades da barra, 0 e L , são mantidas a temperatura constante, T_1 e T_2 respectivamente, durante todo o processo. Sendo estas constantes diferentes de zero, não podemos aplicar directamente o método de separação de variáveis. Temos então que considerar

$$u(t, x) = u_e(x) + v(t, x) \quad (3.13)$$

em que $u_e(x)$ é solução do problema de valores na fronteira

$$u_e'' = 0, \quad u_e(0) = T_1 \text{ e } u_e(L) = T_2$$

e $v(t, x)$ é solução do problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & t > 0, x \in]0, L[\\ v(t, 0) = 0, v(t, L) = 0 & t > 0 \\ v(0, x) = f(x) - u_e(x) & x \in]0, L[\end{cases} \quad (3.14)$$

Vamos verificar em primeiro lugar que se $u(t, x)$ é da forma dada em (3.13) então é solução de (3.12). De facto, utilizando a linearidade da derivada

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = K u_e'' + K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_e}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

pelo que verifica a equação diferencial de (3.12). Por outro lado

$$u(t, 0) = u_e(0) + v(t, 0) = T_1 + 0 = T_1 \text{ e } u(t, L) = u_e(L) + v(t, L) = T_2 + 0 = T_2$$

pelo que verifica as condições de fronteira de (3.12). Finalmente

$$u(0, x) = u_e(x) + v(0, x) = u_e(x) + f(x) - u_e(x) = f(x)$$

pelo que verifica a condição inicial de (3.12). Conclui-se que $u(t, x)$ dada em (3.13) é solução de (3.12). A função $u_e(x)$ é denominada uma solução estacionária de (3.12), pois não depende de t .

A equação $u_e'' = 0$ tem como solução $u_e(x) = Ax + B$. Dado que $u_e(0) = T_1$ e $u_e(L) = T_2$ conclui-se que

$$u_e(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

Por outro pela Secção 1, dado que (3.14) é o problema da equação do calor com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} t} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}$$

em que para todo $n \in \mathbb{N}$, (c_n) são os coeficientes da série de senos da função $f(x) - \frac{T_2 - T_1}{L}x - T_1$ em $[0, L]$, isto é

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \frac{T_2 - T_1}{L}x - T_1 \right) \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} dx \quad (3.15)$$

Concluimos que a solução de (3.12) é dada por

$$u(t, x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} t} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}$$

com (c_n) dados por (3.15).

3.5 Problema de Neumann Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional

Resolveremos o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, x \in]0, L[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in]0, L[\end{cases} \quad (3.16)$$

isto é, vamos estudar a propagação de calor numa barra de comprimento L em que não há troca de calor com o exterior pelas suas extremidades (o significado das condições de Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0$ é que o fluxo de calor através da fronteira do corpo, que neste caso são os pontos $x = 0$ e $x = L$, é nulo).

Observa-se que se $f(x) \equiv 0$ então a solução de (3.16) é $u(t, x) \equiv 0$. Se f não é identicamente nula então u também não o será.

Vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (3.16) da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial, tal como nos casos anteriores

$$\frac{\partial}{\partial t} (T(t)X(x)) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T(t)X(x)) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{KT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t > 0$ e $x \in]0, L[$ uma função de t ($\frac{T'(t)}{KT(t)}$) iguale uma função de x ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{KT(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

3.5. PROBLEMA DE NEUMANN HOMOGÊNIO PARA A EQUAÇÃO DO CALOR UNIDIMENSIONAL

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira

- $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0$ implica $T(t)X'(0) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X'(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X'(0) = 0$.
- $\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0$ implica $T(t)X'(L) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X'(L) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X'(L) = 0$.

Temos então dois problemas para resolver — correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}, \quad (\mathbf{P2}) \quad T' = \lambda K T$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**. Trata-se de um problema de valores próprios e para os determinar teremos que encontrar as soluções não nulas de **(P1)**. Assim

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D - \mu)(D + \mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D + i\omega)(D - i\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

O caso $\lambda > 0$ combinado com as condições de fronteira, produz apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio de **(P1)**.

Para o caso $\lambda = 0$ obtém-se $X(x) = Ax + B$ que combinado com as condições de fronteira, produz $X(x) = B$. Pelo que $\lambda = 0$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_0(x) = 1$. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X'(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ X'(L) = 0 &\Rightarrow B\omega \sin(\omega L) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$B = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\sin(\omega L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{n\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad X(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}$$

Temos assim que $\lambda = 0$, com $X(x) = 1$ e $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$, para $n \in \mathbb{N}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para $\lambda = 0$

$$T' = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0(t) = 1$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T' = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}KT \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as soluções da equação do calor unidimensional, da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_0(t, x) = T_0(t)X_0(x) = c_0 \quad \text{e} \quad u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Então

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t, x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad c_n \in \mathbb{R}$$

é solução da equação do calor unidimensional que verifica condições de fronteira de Neumann nulas. Para determinar as constantes c_n teremos que utilizar a condição de fronteira $u(0, x) = f(x)$. Resulta então que:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (3.17)$$

Concluindo-se que as constantes c_n são os coeficientes da série de cossenos de f em $[0, L]$, ou seja

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

3.6 Unicidade de Solução do Problema de Dirichlet para a Equação do Calor

Admitamos agora que $u(t, x)$ e $\hat{u}(t, x)$ são duas funções de classe C^1 na variável t e de classe C^2 na variável x ⁶ que satisfazem o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, x \in]0, L[\\ u(t, 0) = T_1, u(t, L) = T_2 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in]0, L[\end{cases}$$

Então $v(t, x) = u(t, x) - \hat{u}(t, x)$ satisfaz o problema homogêneo:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & t > 0, x \in]0, L[\\ v(t, 0) = v(t, L) = 0 & t > 0 \\ v(0, x) = 0 & x \in]0, L[\end{cases} \quad (3.18)$$

⁶Dizemos, por exemplo, que $u(t, x)$ é de classe C^1 na variável t se para qualquer $x_0 \in [0, L]$, a função $\varphi(t) = u(t, x_0)$ é de classe C^1 .

Multiplicando a equação do calor (3.18) por v e integrando em x no intervalo $[0, L]$, obtém-se:

$$\int_0^L v \frac{\partial v}{\partial t} dx = K \int_0^L v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx$$

Integrando o segundo membro por partes, e usando as condições iniciais ⁷ em (3.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx &= K \left(v(t, 0) \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) - v(t, L) \frac{\partial v}{\partial x}(t, L) - \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right) \\ &= -K \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

Quanto ao primeiro membro:

$$\int_0^L v \frac{\partial v}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \int_0^L 2v \frac{\partial v}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} (v(t, x))^2 dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L (v(t, x))^2 dx$$

Definido $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (v(t, x))^2 dx$, então conclui-se dos resultados anteriores que $\frac{dE}{dt} \leq 0$. Por outro lado, pela condição inicial $E(0) = 0$; além disso, $E(t) \geq 0$, para qualquer $t \geq 0$. Assim sendo, teremos necessariamente que $E(t) \equiv 0$, donde se conclui que:

$$v(t, x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(t, x) \equiv \hat{u}(t, x).$$

3.7 A Equação das Ondas

Um outro exemplo de equação diferencial parcial de extrema relevância física é a equação das ondas (linear). No mundo da física, os fenómenos ondulatórios são comuns: os exemplos óbvios são as perturbações na superfície de um fluido, as vibrações de cordas em instrumentos musicais, a as perturbações de pressão no ar que consistem na propagação de som, e a radiação electromagnética. Se a amplitude das perturbações for suficientemente pequena e regular, a variável de perturbação $u(x, t)$ associada às ondas verifica a equação das ondas (linear)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

onde $u(t, x)$ é uma função da posição e do tempo que descreve o comportamento da onda e c é a velocidade de propagação da onda no meio em questão.

3.7.1 Problema da Corda Vibrante

A equação das ondas unidimensional pode ser usada como modelo matemático de uma corda vibrante.

Considere-se o problema de ondas (não forçadas) numa corda de comprimento finito L , com posição e velocidade inicial dadas e extremidades fixas.

⁷Este mesmo argumento pode ser usado para provar unicidade de solução para o problema de Neumann; no caso de condições de fronteira de Neumann, teremos $\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, L) = 0$ em vez de $v(t, 0) = v(t, L) = 0$.

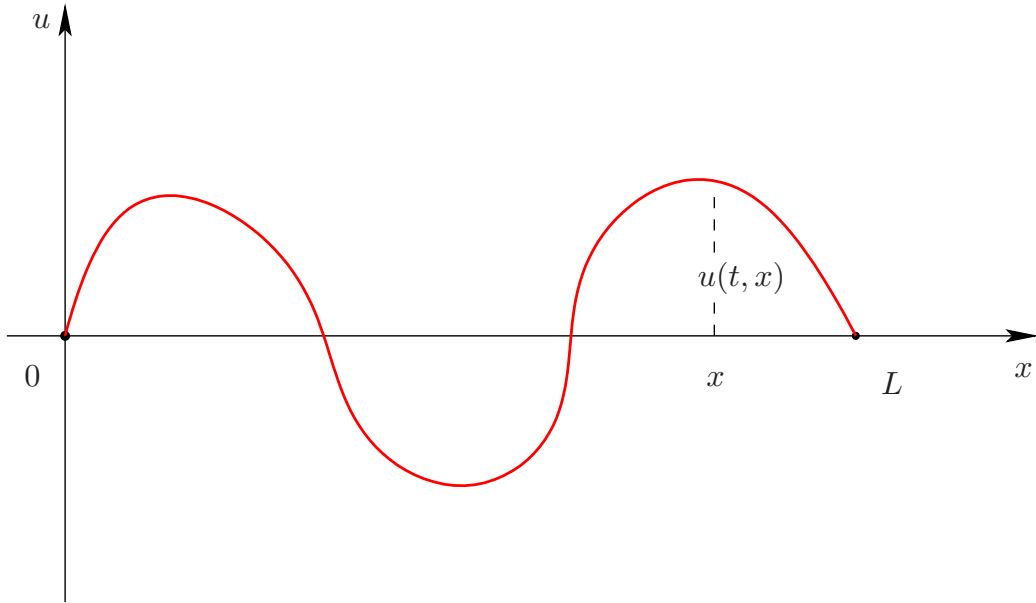


Figura 3.9: Problema da corda vibrante

Pretende-se então encontrar o deslocamento $u(t, x)$ verificando o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, x \in]0, L[\\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in]0, L[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) & x \in]0, L[\end{cases} \quad (3.19)$$

Começamos por notar que se $f(x) \equiv 0$ e $g(x) \equiv 0$ então a solução de (3.19) é $u(t, x) \equiv 0$. Se f ou g não são identicamente nulas então u também não o será.

Tal como para a resolução da equação do calor unidimensional, e dado que estamos a considerar condições de fronteira homogêneas, vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (3.19) da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (T(t)X(x)) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T(t)X(x)) \Leftrightarrow T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t > 0$ e $x \in]0, L[$ uma função de t ($\frac{T''(t)}{c^2 T(t)}$) iguale uma função de x ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos

igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira e possíveis condições iniciais nulas (note que pelo que já foi referido apenas uma delas o poderá ser)

- $u(t, 0) = 0$ implica $T(t)X(0) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.
- $u(t, L) = 0$ implica $T(t)X(L) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(L) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(L) = 0$.

Temos então dois problemas para resolver - correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}, \quad (\mathbf{P2}) \quad T'' = \lambda c^2 T$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**, que é um problema de valores próprios. Assim:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2 X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D - \mu)(D + \mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D - i\omega)(D + i\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A \operatorname{sen}(\omega x) + B \cos(\omega x)$;

Os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as condições de fronteira, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(L) = 0 &\Rightarrow A \operatorname{sen}(\omega L) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\operatorname{sen}(\omega L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{n\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad X(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices n inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer λ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T'' + \frac{n^2\pi^2}{L^2}c^2T = 0 \Rightarrow (D^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}c^2)T = 0 \Rightarrow T_n(t) = \alpha_n \sin \frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos \frac{n\pi ct}{L}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as soluções da equação das ondas unidimensional, da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \left(\alpha_n \sin \frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.20)$$

Por sobreposição, a solução da equação diferencial que satisfaz as condições de fronteira será:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(\alpha_n \sin \frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \right).$$

Utilizando a condição inicial $u(0, x) = f(x)$, resulta que:

$$\beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Utilizando a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$, resulta que

$$\frac{n\pi c}{L} \alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

ou seja:

$$\alpha_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

3.8 Equação de Laplace Bidimensional

A equação de Laplace bidimensional é a equação diferencial parcial de segunda ordem, linear

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

assim chamada em homenagem ao influente matemático francês do século XVIII, Pierre-Simon Laplace. Esta equação, assim como as suas versões em dimensões superiores, é sem dúvida uma das mais importantes equações diferenciais da física e da matemática. Como vimos, as soluções reais desta equação são denominadas *funções harmónicas*.

A versão não homogénea da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

é conhecida como a *equação de Poisson*, em homenagem Siméon-Denis Poisson, que foi aluno de Laplace.

Para além da sua importância teórica, as equações de Laplace e Poisson surgem como as soluções estacionárias numa grande variedade de modelos físicos. Por exemplo, $u(x, y)$ pode ser interpretada como o deslocamento de uma membrana e $f(x, y)$ representa uma força externa que actua sobre a superfície da membrana. Outro exemplo é o equilíbrio térmico de placas: neste caso, $u(x, y)$ representa a temperatura e $f(x, y)$ uma fonte de calor externa. Na mecânica de fluidos, $u(x, y)$ representa a função potencial cujo gradiente $v = \nabla u$ é o vector velocidade do um de um fluido cujo fluxo é invariante por translações segundo uma certa direcção. Esta mesma *teoria do potencial* é aplicável à electrostática bidimensional e aos potenciais gravitacionais.

Uma vez que a equação de Laplace — e, também, a de Poisson — descrevem situações estacionárias, elas surgem associadas a problemas de valor na fronteira. Note-se que as equações do calor e das ondas — que descrevem sistemas físicos que evoluem com o tempo — estão associadas a problemas de valor na fronteira e de valor inicial.

Procuramos uma solução, $u(x, y)$, para a equação de Laplace — definida para (x, y) numa região aberta e limitada, $D \subset \mathbb{R}^2$ — que satisfaz certas condições quando (x, y) pertence à fronteira do conjunto D . Observamos que no caso bidimensional a fronteira de D é constituída por uma ou mais curvas simples e fechadas. Como já referido, os tipos mais importantes de condições de fronteira são

- **Condições de Dirichlet:** que especificam o valor de $u(x, y)$ na fronteira do domínio

$$u(x, y) = h(x, y) \quad , \quad \text{para } (x, y) \in \partial D$$

para certa função h conhecida.

- **Condições de Neumann:** na qual é especificada a derivada de u segundo a normal na fronteira do domínio

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = k(x, y) \quad , \quad \text{para } (x, y) \in \partial D$$

para certa função k conhecida, e \mathbf{n} representa a normal unitária exterior à fronteira de D .

3.8.1 Problema de Dirichlet Semi-Homogéneo para a Equação de Laplace

Vamos resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a[, y \in]0, b[\\ u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u(x, b) = 0 & x \in]0, a[\\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & y \in]0, b[\end{cases} \quad (3.21)$$

Observa-se que se $f(x) \equiv 0$ a solução de (3.21) é $u(x, y) \equiv 0$. Por outro lado, pode-se provar que se f não for identicamente nula então u também não o será. Tal como nos exemplos anteriores, e tendo em conta que este problema tem 3 condições de fronteira homogéneas e um domínio rectangular, o método de separação de variáveis consiste na determinação de soluções **não nulas** do problema (3.21) da forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.22)$$

Note que nem $X(x)$ nem $Y(y)$ poderão ser identicamente nulas, pois caso contrário $u(x,y)$ também o será. Substituindo (3.22) na equação diferencial obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x)Y(y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(X(x)Y(y)) &= 0 \Leftrightarrow X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \end{aligned}$$

Observe-se que as variáveis aparecem separadas: pretende-se que **para todos** os $x \in]0, a[$ e $y \in]0, b[$, $\frac{X''(x)}{X(x)}$, que é função apenas de x , iguale $-\frac{Y''(y)}{Y(y)}$, que é função apenas de y . Para que tal se verifique é necessário que ambos os membros sejam iguais a uma constante; isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira nulas

- $u(0, y) = 0$ implica $X(0)Y(y) = 0$ e como tal ou $Y(y)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.
- $u(a, y) = 0$ implica $X(a)Y(y) = 0$ e como tal ou $Y(y)$ é a função identicamente nula ou $X(a) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(a) = 0$.
- $u(x, b) = 0$ implica $X(x)Y(b) = 0$ e como tal ou $X(x)$ é a função identicamente nula ou $Y(b) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $Y(b) = 0$.

Temos então dois problemas para resolver, envolvendo cada um deles uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem:

$$(\mathbf{P1}) \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \quad \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**, que é um problema de valores próprios. Assim:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D - \mu)(D + \mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D - i\omega)(D + i\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Como vimos no estudo da equação do calor, os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as duas condições de fronteira nulas, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(a) = 0 &\Rightarrow A\sin(\omega a) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\operatorname{sen}(\omega a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{n\pi}{a} \quad \Rightarrow \quad X(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ e $X(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices n inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer λ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}},$$

onde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. As soluções que satisfazem a condição $Y(b) = 0$ são as soluções de

$$a_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = 0,$$

ou seja,

$$b_n = -a_n e^{\frac{2n\pi b}{a}}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, as soluções de **(P2)** são:

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= a_n \left(e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{2n\pi b}{a}} e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \\ &= a_n e^{\frac{n\pi b}{a}} \left(e^{-\frac{n\pi b}{a}} e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{n\pi b}{a}} e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \\ &= 2a_n e^{\frac{n\pi b}{a}} \left(\frac{1}{2} e^{\frac{n\pi(y-b)}{a}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{n\pi(y-b)}{a}} \right) \\ &= \alpha_n \operatorname{sh} \frac{n\pi(y-b)}{a}, \quad \text{onde } \alpha_n = 2a_n e^{\frac{n\pi b}{a}} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que um conjunto de soluções linearmente independentes da equação de Laplace bidimensional, da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, que verificam as condições de fronteira homogêneas, é constituído pelas funções:

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi(y-b)}{a}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.23)$$

Podemos agora procurar uma solução da equação diferencial que satisfaça todas as condições de fronteira recorrendo ao princípio da sobreposição:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Da condição de fronteira não nula, $u(x, 0) = f(x)$, resulta que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sh} \left(-\frac{n\pi b}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}.$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes α_n são obtidos à custa dos coeficientes da série de senos de f em $[0, a]$ por

$$-\alpha_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

ou

$$\alpha_n = -\frac{2}{a \operatorname{sh}(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

3.8.2 Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação de Laplace

Consideremos agora o problema de valores na fronteira relativo à equação de Laplace com condições de Dirichlet não homogéneas. Pretende-se determinar uma solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a[, y \in]0, b[\\ u(x, 0) = f_1(x), u(x, b) = f_2(x) & x \in]0, a[\\ u(0, y) = f_3(y), u(a, y) = f_4(y) & y \in]0, b[\end{cases} \quad (3.24)$$

Pelo princípio da sobreposição, a solução de (3.24) pode ser escrita na forma

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 u_i(x, y)$$

em que u_1 é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a[, y \in]0, b[\\ u(x, 0) = f_1(x), u(x, b) = 0 & x \in]0, a[\\ u(0, y) = 0, u(a, y) = 0 & y \in]0, b[\end{cases}$$

u_2 é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a[, y \in]0, b[\\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = f_2(x) & x \in]0, a[\\ u(0, y) = 0, u(a, y) = 0 & y \in]0, b[\end{cases}$$

u_3 é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a[, y \in]0, b[\\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0 & x \in]0, a[\\ u(0, y) = f_3(y), u(a, y) = 0 & y \in]0, b[\end{cases}$$

e u_4 é solução de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in]0, a[, y \in]0, b[\\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0 & x \in]0, a[\\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f_4(y) & y \in]0, b[\end{array} \right.$$

A solução de cada um destes problemas é obtida pelo método utilizado na resolução de (3.21).