2º Prova Escrita de Física Quântica II

17 de Dezembro de 2018

1. Considere o seguinte Hamiltoniano

$$H_0 = E_0 \sigma_x, \tag{1}$$

onde E_0 é uma constante positiva e σ_x é a matriz de Pauli x. Considere agora que este sistema é sujeito a uma perturbação dependente do tempo, da forma

$$H_1 = E_1 \sigma_y \cos(\omega t) e^{-\gamma t}, \tag{2}$$

onde E_1, γ e ω são constantes positivas e σ_y é a matriz de Pauli y.

   (a) Mostre explicitamente que H_0 e H_1 não comutam.

   (b) Admitindo que em $t = 0$ o sistema está no estado fundamental, calcule a probabilidade de encontrar o sistema no estado excitado, para tempos muito longos. Explicite o que significa "tempos muito longos" no contexto deste problema.

2. Considere o espalhamento de uma onda plana pelo potencial tridimensional $V(\mathbf{r}) = \gamma \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r - a)$ e descrita por

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r}} = e^{ik_i z}. \tag{3}$$

Sabendo que a função de Green livre em três dimensões tem a forma

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} : \tag{4}$$

   (a) Calcule a função de onda total (incidente mais espalhada) em $\mathbf{r}$ à custa de $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ e de $\psi(a\hat{\mathbf{u}}_r)$, admitindo que esta última quantidade existe e está bem definida. O seu resultado deverá ser da forma

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{inc}(\mathbf{r}) + \Lambda G(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{u}}_r)\psi(a\hat{\mathbf{u}}_r). \tag{5}$$

   Escreva a forma explicita de Λ à custa dos parâmetros do problema e diga quais as suas unidades.

   (b) Usando o resultado anterior, calcule explicitamente a amplitude de espalhamento na primeira aproximação de Born, a qual vem expressa em termos de $\psi_{inc}(a\hat{\mathbf{u}}_r)$.

(c) Usando mais uma vez o resultado do ítem (a), escreva a expressão da amplitude de espalhamento na segunda aproximação de Born.

3. Considere considere o Hamiltoniano de uma partícula livre, que se move em uma dimensão, e o qual é da forma

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}. \tag{6}$$

(a) Determine as funções de onda, $\psi_k(x)$, deste problema, normalizadas numa caixa de comprimento L com condições de fronteira periódicas (ajuda: os valores de k sairão quantizados).

(b) A função de Green livre pode ser escrita como

$$G(x - x') = \sum_k \frac{\psi_k^*(x)\psi_k(x')}{(k_0 + i0^+)^2 - k^2}, \tag{7}$$

onde 0^+ é uma quantidade infinitesimal positiva. Considerando o limite $L \to \infty$, calcule a função de Green atrás definida, sabendo que $k_0 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ (ajuda: é preciso transformar o somatório num integral).

4. Considere o espalhamento de uma onda plana pelo potencial tridimensional $V(\mathbf{r}) = \gamma\delta(r - a)$ e descrita por

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r}} = e^{ik_i z}. \tag{8}$$

(a) Escreva a forma geral da amplitude the espalhamento $f(\theta)$ à custa dos desvios de fase δ_l.

(b) Determine o valor exacto do desvio de fase δ_0.

(c) Calcule o desvio de fase δ_0 para baixas energias.

(d) Calcule a secção eficaz total, admitindo que apenas δ_0 contribui significativamente para esta a baixas energias.

(e) Calcule a secção eficaz diferencial na primeira aproximação de Born e compare com a mesma quantidade calculada usando apenas δ_0 no limite de baixas energias.