- $\int a^x = \frac{a^{u+1}}{u+1} + C$
- $\int \frac{1}{u} = \ln|u| + C$
- $\int a^u = \frac{a^u}{\log a}, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $\int \frac{1}{\cos^2 u} = \tan u$
- $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} = -\cot x$
- $\int \cosh x = \operatorname{senh} u$
- $\int \operatorname{senh} u = \cosh u$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u$
- $\int \frac{1}{1+u^2} = \operatorname{arctan} u$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{argsenh} u$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} u$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arccos} x$
- $\int \frac{-1}{1+u^2} = \operatorname{argcot} x$

- $\int \cos^2 u = \int \frac{\cos 2u + 1}{2}$
- $\int \frac{1}{\cosh^2 u} = \tanh(u) + C$

Integrais

- $\int_b^a f(u) = -\int_a^b f(u)$
- $\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$
- $\int_a^b f(u)\,du =$ área limitada pelo gráfico

Critério da raiz

$\sum a_k \quad \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

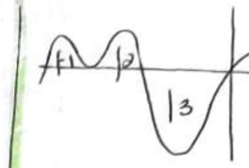
- $\ell<1$ é convergente
- $\ell>1$ é divergente
- $\ell=1$ não sabemos

Critério da razão:

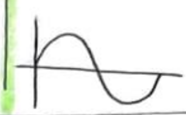
$\sum a_k \quad \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

- $\ell<1$ é convergente
- $\ell>1$ é divergente
- $\ell=1$ não sabemos

área:



$\int 1 + \int 2 + \int 3$



$\int_1^2 f(u) = \left| \int_0^2 f(u) - \int_0^1 f(u) \right|$

$\int \operatorname{sen}(2u)\, 3^{\operatorname{sen}^2(u)} =$

$\frac{1}{\ln 3} \int \operatorname{sen}(2u)\, 3^{\operatorname{sen}^2(u)} \ln 3$

$= \frac{3^{\operatorname{sen}^2 u}}{\ln 3} + C, C \in \mathbb{R}$

primitivas por partes:

$\frac{2}{3}\int \cdots \quad e \quad \frac{3}{2}\int \cdots \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} \times \frac{4}{9}$

$\frac{2}{3} \times \frac{9}{}$ $\quad \frac{3}{2} \times \frac{4}{}$

$2f(u) = 9x \cdots 4u \Leftrightarrow f(u) = \frac{9}{2}u \cdots 2u$

$\Leftrightarrow f(u) = (\frac{9}{2}u \cdots 2u) : 13(4+9)$

mudança de variável em integrais

$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \cos t\,dt$

~~t = sen x~~

$x = \operatorname{sen} t \;/\; t = \operatorname{arcsen} x$

$dx = \cos t\,dt$

$\cancel{t(\frac{\pi}{4})} = t(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

$t(0) = \operatorname{arcsen}(0) = 0$

Taylor: função linear: função de Taylor de 1ª ordem

$y(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u-u_0) + \frac{f''(u_0)}{2!}(u-u_0)^2$

T.Y: $y(u) =$ função de Taylor $+ x^n \varepsilon(u)$, $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$

T.L: $f(u) = P(u) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(u-u_0)^{n+1}$, c estritamente entre x_0 e x

$\boxed{\text{factorial: } (n+1)! = (n+1)n!}$

30	40	60
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Raio de convergência: seja R o raio. Então a série é divergente para $|u-u_0|>R$. Para $|u-u_0|=R$, não se pode dizer nada à priori

Séries: numéricas: $\sum_{k=R}^{\infty} a_k$ (a_k = sucessão)

Conv → limite finito

Div → limite infinito ou não existe

harmónica: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (α é dado). $\alpha>1$ – convergente

$\alpha \le 1$ – $(+\infty)$ divergente

geométrica: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ $(q\in\mathbb{R})$ $\cdot |q|<1 = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ convergente

$\cdot |q|>1 =$ divergente

$(1-q)\sum q^k = \sum q^k - q^{k+1} = q^0 - q^1 + q^1 - q^2 + q^2 \cdots + q^n - q^{n+1}$

$= 1 - q^{n+1}$

Convergente
A soma é finita
Divergente
A soma é infinita

- $\sum a_k$ é div. se (a_k) NÃO tender para 0 (se tender pode ou não ser convergente)
- $\sum_{k=R}^{\infty} a_k = \sum_{k=R}^{\ell-1} a_k - \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k$

Critério de comparação:

i) $\sum_{p=R} c_u = \text{conv}. \exists p \ge R: k \ge p, |a_k| \le |c_u| \to \sum_{k=R} a_k =$ convergente

ii) $\sum_{k=R} d_u = \text{div}. \exists p \ge R: k \ge p. a_k \ge d_u \to \sum_{k=R} a_k =$ divergente

Regra de Leibniz:

- $(a_k)_{k\ge R}$ → sucessão monótona que tende para zero.

$\sum_{k=R} (-1)^k a_k =$ convergente $\qquad \sum \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{k}$ não decresce de forma monótona

Séries de Potências:

- $\sum a_k(x-u_0)^k$ (centradas em x_0) Ex: séries de Taylor

a) se é conv. para $x = u_1$, então é conv. para qualquer $|u-u_0| < |x_1 - x_0|$.

b) se a série é Div. para $u=y$, então é Div. para qualquer $|u-u_0| > |y-u_0|$.

função injetiva: $\forall x, y \in D_f : x \neq y \wedge f(x) \neq f(y)$

função sobrejetiva: $\forall x, y \in$ conj. cheg. , $\exists x \in D_f : f(x) = y$

função par: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)$

função ímpar: $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$

função bijetiva: $g \circ f = f \circ g = x$ — se f é bijetiva, f e f^{-1} são simétricas em relação à reta $y = x$

 ímpar  par

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Equação da reta tangente: $\begin{cases} y = f(a) + f'(a)(x - a) \\ y = \underbrace{f'(a)x}_{ax} + \underbrace{f(a) - f'(a) \times a}_{b} \end{cases}$

função f é derivável se:

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe e é limitada

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

Teoremas

Rolle: seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$ então $\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$

Lagrange: se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$: $\exists c \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ [se $f'(c) = 0$ então f é constante em $[a,b]$.

L'Hospital: Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Confronto: seja D um conjunto não majorado e f, g, h: $D \to \mathbb{R}$ 3 funções. Suponhamos que existe $N \in \mathbb{N} : \forall x \in D$: $x > N \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Nestas condições se $\lim f(x) = \lim h(x)$, então $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

Corolário: se f for limitada e $g(x) = 0$ então $\lim g(x) f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) f(x) = 0$

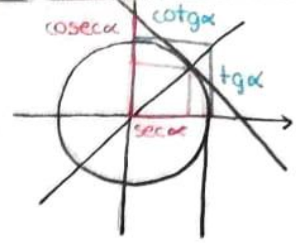
$\mathrm{cosec}(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}$

$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$\mathrm{cotg}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

$\mathrm{cosec}'(x) = \frac{-1}{\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{sen}(x)}$ | $\sec'(x) = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos x}$

$\mathrm{cotg}'(x) = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)}$



$\mathrm{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$ $\mathrm{cosech}(x) = \frac{1}{\mathrm{senh}(x)}$

$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \to \mathrm{cotgh}(x) = \frac{1}{\mathrm{tgh}(x)}$

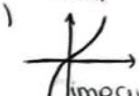
- $(\mathrm{senh}(x))' = \cosh(x)$
- $(\cosh(x))' = \mathrm{senh}(x)$
- $\mathrm{sh}^2(x) = \frac{(\mathrm{ch}(2x) - 1)}{2}$
- $\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{tgh}^2(x)$
- $(\mathrm{tgh}(x))' = (\mathrm{sech}(x))^2$
- $(\cosh(x))^2 - (\mathrm{senh}(x))^2 = 1$
- $\cosh(x) + \mathrm{senh}(x) = e^x$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \mathrm{senh}\,x\,\mathrm{senh}\,y$
- $\mathrm{senh}(x+y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,y\,\mathrm{ch}\,x$

mas com (-) em vez de (+)

ARC:

$\mathrm{arcsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$\mathrm{arcsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

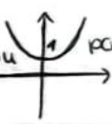
sh(x)  ímpar

$\mathrm{arcch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$\mathrm{arcch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$\mathrm{ch} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$

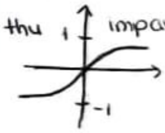
$\mathrm{arch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$

chx  par

$\mathrm{arcth}(x)' = \frac{1}{1 - x^2}$

$\mathrm{arcth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

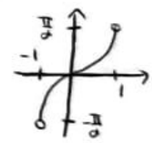
$\mathrm{arctgh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

thx  ímpar

$\mathrm{arcsen}(x) : D = [-1, 1]$

$D^{-1} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\mathrm{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

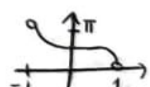


arcsen

$\mathrm{arccos}(x) = D = [-1, 1]$

$D^{-1} = [0, \pi]$

$\mathrm{arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

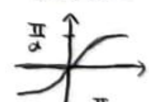


arccos

$\mathrm{arctg}(x) : D = \mathbb{R}$

$D^{-1} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$



arctg

Derivadas

- $\mathrm{th}'(x) = 1/\cosh^2 x$
- $(\mathrm{sech})' = -\mathrm{sech}(x) \times \mathrm{tgh}(x)$ | $\mathrm{cotgh}(x)' = -(\mathrm{cosech}(x))^2$
- $(\mathrm{cosech}(x))' = -\mathrm{cosech}(x) \times \mathrm{cotgh}(x)$ | $(\mathrm{cotg}\,x)' = -1/\mathrm{sen}^2 x = -(1 + \mathrm{cotg}^2 x)$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ | $(\mathrm{tg}\,x)' = x' \cdot (\sec^2(x))$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(f(x)^n)' = n f(x)^{n-1} f'(x)$ | $(a^x)' = x' a^x \ln a$

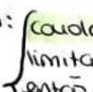
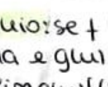
Limites (definição): dizemos que f tende para $-\infty$ quando x tende para a e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$

Primitivas: seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, I intervalo de $\mathbb{R}$. $F : I \to \mathbb{R}$ diz-se uma primitiva de f se $F' = F$

Indeterminações: $\infty - \infty$ / $0 \times \infty$ / $0/0$ / ∞/∞ / 0^0 / ∞^0 / 1^∞

$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} = 1$ | $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ | $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

 ln  e^x

$\tan(x + y) = \frac{(\tan x + \tan y)}{1 - \tan x \tan y}$

$\mathrm{sen}\,2x = 2\,\mathrm{sen}\,x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$

eq. diferenciais

linear $\neq a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c$

$\Rightarrow y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)} y(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$

$\Rightarrow y'(x) e^P + e^P P y(x) = e^P \frac{c(x)}{a(x)}$

$\Rightarrow e^P y(x) = Q + C, C \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ —

$\mathbb{R} \to [0, \pi]$ —

$\mathbb{R} \to]0, \pi[$ —

$\mathrm{arccosec}(x)' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

$\mathrm{arcsec}(x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

arcsh

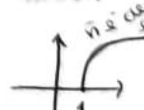
$\mathrm{arccotg}(x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$

$\mathrm{arccosech}(x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$

$\mathrm{arcsech}(x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$

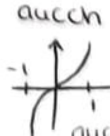
$\mathrm{arccotgh}(x)' = \frac{1}{1 - x^2}$

não é derivável em 1



f(1) = 0

arcch



arcth(x)

diferenciável separável:

$y'(x) = g(x) h(y(x))$

$\Rightarrow \frac{y(x)}{h(y(x))} = g(x)$

↓ encontrar primitivas

→ calcular o domínio novo

taxa proporcional (varia a uma) = K

$\lim (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \lim e^{\frac{1}{x^2} \ln(1 + x^2)}$