1ª Prova Escrita de Física Quântica II

8 de Novembro de 2018

1. (3 pts) Considere as funções de onda de uma partícula numa caixa de largura L dadas por
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$
Diga qual, ou quais, das afirmações seguintes são verdadeiras:
   (a) As funções de onda são alternadamente simétricas e antissimétricas relativamente ao centro da caixa ($x = L/2$).
   (b) O estado fundamental ocorre para $n = 0$.
   (c) As funções de onda são todas ortogonais entre si.
   (d) Apenas as funções de onda pares são ortogonais às ímpares e vice-versa.

2. (4 pts) Considere duas partículas com spin $s_1 = 3/2$ e spin $s_2 = 1/2$, respectivamente. Sabendo que o spin total tem a forma $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ e que os operadores de spin das duas partículas actuam em subespaços diferentes:
   (a) diga quantas torres de momento angular existem e quais os valores do momento angular total.
   (b) construa a tabela de coeficientes de Clebsh-Gordon para este sistema.

3. (4 pts) Considere um sistema cujo hamiltoniano é dado por
$$H = \frac{\vec{L}^2}{2I} + \frac{\vec{S}^2}{2I_s} + \alpha \vec{S} \cdot \vec{L}, \tag{1}$$
onde I e I_s t êm unidades de momento de inércia, $\vec{L}$ é o operador de momento angular orbital, $\vec{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$ e $\vec{\sigma}$ é o vector composto pelas matrizes de Pauli.
   (a) Diga quais as unidades da constante α.
   (b) Se o sistema estiver num estado de momento angular orbital $l \neq 0$, diga quantas torres de estados de momento angular total espera ter e indique o valor do número quântico j correspondente ao momento angular total associado a cada uma das torres de momento angular.

(c) Determine os valores próprios do Hamiltoniano, nas condições do ítem anterior.

(d) Para $l = 1$ construa a representação matricial dos operadores L_z e $\vec{L}^2$.

4. (5 pts) Considere o seguinte hamiltoniano que representa um oscilador harmónico com duas constante elásticas diferentes

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2. \tag{2}$$

(a) Diga quais os valores próprios deste hamiltoniano.

(b) Sabendo que o estado fundamental pode ser presentado por $|0\rangle$, construa um estado arbitrário $|n\rangle$, normalizado à unidade, à custa dos operadores de criação $a^\dagger$ e do estado fundamental.

(c) Admita agora que o hamiltiano anterior é perturbado por um termo da forma

$$H_1 = \beta x \tag{3}$$

i. Diga qual a unidade de β.

ii. Calcule a correcção à energia de um estado $|n\rangle$ em primeira ordem de teoria de perturbações.

iii. Calcule a correcção à energia de um estado $|n\rangle$ em segunda ordem de teoria de perturbações.

iv. Calcule a função de onda do estado de número quântico n em primeira ordem de teoria de perturbações.

v. Encontre as energias próprias exactas do hamiltoniano $H = H_0 + H_1$.

5. (4 pts) Considere um hamiltoniano H_0 tal que $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$. Considere, agora, que no intervalo $t \in [0, T]$ actua uma perturbação da forma $H_1 = f(x)g(t)$, onde $g(t) = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}$. Calcule a amplitute the probabilidade $\gamma^{(1)}(t)$ do sistema transitar do estado fundamental $|0\rangle$, de energia E_0, para um estado excitado $|n\rangle$, de energia E_n. Faça a derivação da expressão pedida usando a função $g(t)$ completa.