Física Quântica I / Mecânica Quântica

Spin 1/2 e outros sistemas de 2 níveis

Vítor M. Pereira

Departamento de Física | Universidade do Minho

2021/22 — 2º Sem

Lição 8

Experiências de Stern-Gerlach com Spin 1/2

Introdução ao conceito e experiências com spin 1/2

- Dipolos magnéticos em física clássica
- A experiência de Stern-Gerlach
- Quantização da projeção de spin
- Representação matricial das 3 projeções de spin

Interpretação de experiências de SG

- Preparação do estado de spin
- Sequências de experiências de SG

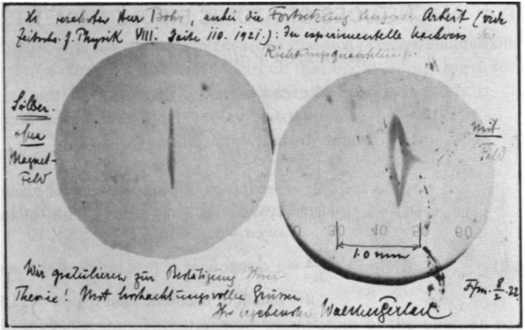

OTTO STERN
SCHNEIDE
$\frac{\partial B}{\partial z}$
N
S
RINNE
ATOMSTRAHL
Z
Z
WALTHER GERLACH
IM FEBRUAR 1922 WURDE IN DIESEM GEBÄUDE DES
PHYSIKALISCHEN VEREINS, FRANKFURT AM MAIN,
VON OTTO STERN UND WALTHER GERLACH DIE
FUNDAMENTALE ENTDECKUNG DER RAUMQUANTISIERUNG
DER MAGNETISCHEN MOMENTE IN ATOMEN GEMACHT.
AUF DEM STERN-GERLACH-EXPERIMENT BERUHEN WICHTIGE
PHYSIKALISCH-TECHNISCHE ENTWICKLUNGEN DES 20. JHDTS.,
WIE KERNSPINRESONANZMETHODE, ATOMUHR ODER LASER.
OTTO STERN WURDE 1943 FÜR DIESE ENTDECKUNG
DER NOBELPREIS VERLIEHEN.

SCIENTIFIC AMERICAN®

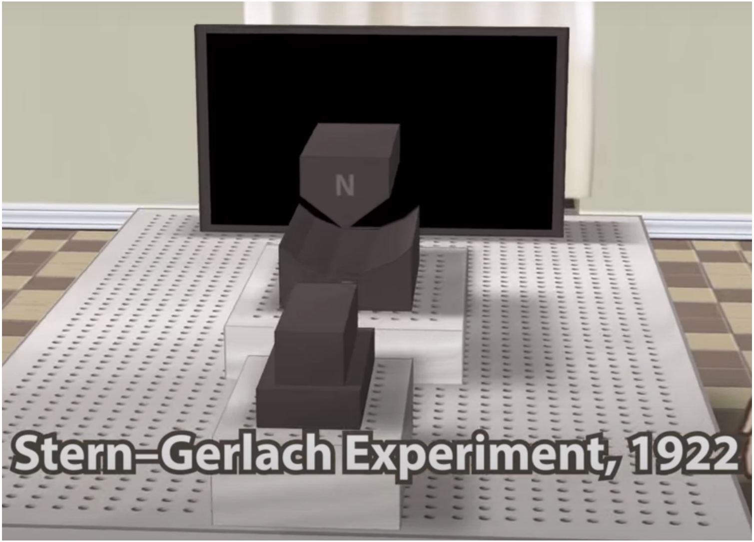
QUANTUM PHYSICS

100 Years Ago, a Quantum Experiment Explained Why We Don't Fall through Our Chairs

By Davide Castelvecchi on February 8, 2022



Em que consiste a experiência



[-- link para esta animação --]

Setup moderno deste tipo de experiência

O dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$

1. Partícula carregada numa trajetória fechada

$$\boldsymbol{\mu} = I\,A\,\boldsymbol{u}_\perp = \frac{q}{2m}\boldsymbol{L}$$

2. Relação entre os momentos angular e magnético

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{L} \qquad (\gamma: \text{ fator giromagnético})$$

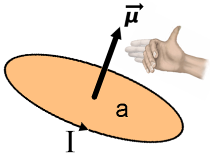
3. Magnetão de Bohr

$$\boldsymbol{\mu} = g\mu_B \frac{\boldsymbol{L}}{\hbar}, \qquad \mu_B \equiv \frac{q\hbar}{2m}$$

- A constante universal μ_B é chamada *magnetão de Bohr*
- No caso do spin do eletrão ($\boldsymbol{L} \to \boldsymbol{S}$):

$$g \simeq 2, \qquad q = -e, \qquad \boldsymbol{\mu} = -\frac{ge}{2m_e}\boldsymbol{S}$$

...logo, $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{S}$ são anti-paralelos.



$$\boldsymbol{\mu} = (\,\text{corrente} \times \text{área}\,)\,\boldsymbol{u}_\perp$$

Interação com campo magnético $\boldsymbol{B}$

$$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$$

Orientaçao paralela minimiza a energia.

Força sobre um dipolo magnético

Campo não constante $\boldsymbol{B} \approx B_z(z)\boldsymbol{u}_z$:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U = \boldsymbol{\nabla}\Big(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}\Big) \simeq \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}\boldsymbol{u}_z$$

No caso do momento magnético do eletrão:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{ge}{2m_e}S_z\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{u}_z$$

Preâmbulo clássico: momentos magnéticos e momento angular

O que está subjacente na interpretação da experiência de S-G:

- A deflexão de uma partícula neutra implica que esta possua um dipolo magnético não nulo, visto que a deflexão resulta de um força

$$F_z \simeq \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}, \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{F} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mu} \neq 0.$$

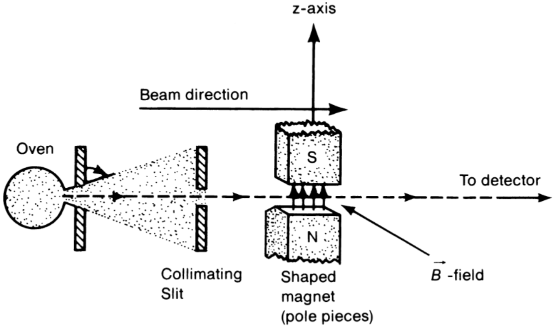
- Um dipolo magnético pressupõe um momento angular:

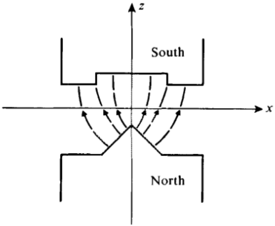
$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{ge}{2m_e}\boldsymbol{L}.$$

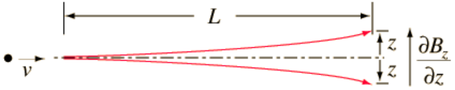
- Se escolhermos uma partícula com $\boldsymbol{L} = 0$, não esperaríamos qualquer deflexão.
- A ocorrência de deflexão com $\boldsymbol{L} = 0$ implica a existência de um tipo diferente (não orbital) de momento angular, e que gera um momento magnético finito.
- *Além* de momento angular orbital, o eletrão possui um momento angular intrínseco chamado spin.

Experiência original de 1922, com átomos neutros de Ag: [Kr] $4d^{10}\,5s^1$ (apenas 1 el. de valência $5s$)

- O μ total do átomo reduz-se ao μ do eletrão de valência.
- O momento angular orbital total é $L = 0$, porque o eletrão de valência ocupa uma orbital s.
- Portanto, na prática, esta experiência é sensível apenas ao momento magnético do eletrão de valência.







$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left[\frac{L}{v}\right]^2 = \pm\frac{\mu_B L^2}{4KE}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

A expetativa de acordo com a descrição física clássica:

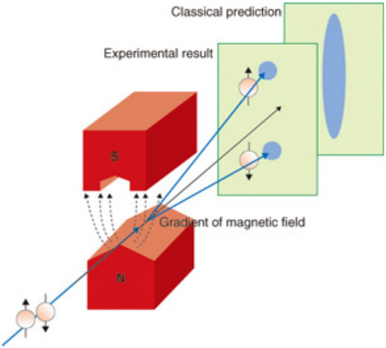
$$\boldsymbol{F} \simeq \mu_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) \boldsymbol{u}_z = -\frac{ge}{2m_e} S_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) \boldsymbol{u}_z$$

Medir a deflexão é equivalente a medir μ_z.

A orientação aleatória do $\boldsymbol{\mu}$'s dos diferentes átomos:

$$\mu_z = |\boldsymbol{\mu}| \cos(\theta), \qquad \theta \text{ aleatoreamente distribuido entre } [0,\ 2\pi[$$

deveria gerar um distribuição contínua de deflexões registadas no detetor!



Mas o resultado real é outro!

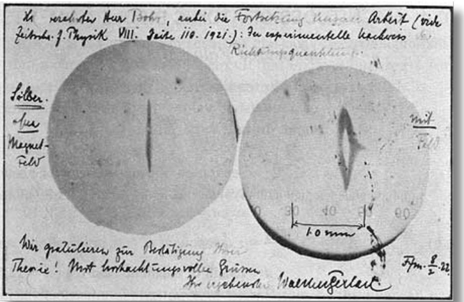
- Todos os átomos defletem pela mesma magnitude, numa ou noutra direção.
- Não há qualquer deflexão intermédia $\Rightarrow$ quantização.
- Medidas da deflexão mostram que $S_z = \pm\hbar/2$.

A experiência de Stern-Gerlach (S-G)

Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld.

Von **Walther Gerlach** in Frankfurt a. M. und **Otto Stern** in Rostock.

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 1. März 1922.)



> *"O feixe atómico separa-se em dois sob o efeito do campo magnético. Não são detetados átomos não-defletidos (...) Nestes resultados temos a prova experimental da quantização da orientação do dipolo magnético na presença de um campo magnético"*

Quantização do momento angular de spin

1. A existência de deflexão (apesar de $L = 0$) revela a existência de um momento angular intrínseco: o spin, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.
2. Segundo os postulados da MQ, a $\mathcal{S}_z$ temos de associar um operador Hermítico: $\hat{\mathrm{S}}_z$.
3. A experiência revela apenas 2 possíveis resultados na medição de $\mathcal{S}_z$: $s_+ = +\hbar/2$ ou $s_- = -\hbar/2$.
4. Logo, os autovalores de $\hat{\mathrm{S}}_z$ são $\pm\hbar/2$.
5. Cada partícula emerge do dispositivo experimental num de apenas dois estados quânticos possíveis, que designaremos por $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$.
6. Os estados $|\pm\rangle_z$ são auto-estados do operador $\hat{\mathrm{S}}_z$. (porquê?)
7. Como $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$ são ortogonais (porquê?), usá-los-emos para a base do espaço de estados de spin.

Nesta base dos seus auto-estados $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$, o operador $\hat{\mathrm{S}}_z$ tem uma representação simples:

$$\hat{\mathrm{S}}_z = s_+ \, |+\rangle_{zz}\langle+| + s_- \, |-\rangle_{zz}\langle-|, \quad \text{ou} \quad \hat{\mathrm{S}}_z \mapsto \begin{pmatrix} s_+ & 0 \\ 0 & s_- \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

onde, naturalmente,

$$_z\langle+|+\rangle_z = 1, \qquad _z\langle-|-\rangle_z = 1, \qquad _z\langle+|-\rangle_z = 0.$$

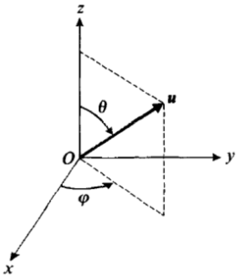
Um estado de spin genérico será uma combinação linear do tipo

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z \qquad \left(\text{com } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \text{ para que } \langle\psi|\psi\rangle = 1\right)$$

Mas... a direção z não tem nada de especial!!! A história está incompleta...

Definição de uma projeção de spin segundo qualquer direção

A direção z apenas nos indicava a orientação do gradiente do campo $\boldsymbol{B}$!



Se orientarmos $\boldsymbol{B}$ segundo qualquer outra direção $\boldsymbol{u}$:

- Estaremos a medir a projeção do spin nessa direção $\boldsymbol{u}$: $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$.
- Continuaremos a obter apenas $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ para $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$.
- Deflexão para cima ou para baixo relativamente a $\boldsymbol{u}$ implica:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}} \to +\frac{\hbar}{2}} |+\rangle_{\boldsymbol{u}} \qquad \text{ou} \qquad |\psi\rangle \xrightarrow{\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}} \to -\frac{\hbar}{2}} |-\rangle_{\boldsymbol{u}}$$

Os postulados da MQ dizem-nos que, à propriedade $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$, devemos associar um operador $\hat{\mathrm{S}}_{\boldsymbol{u}}$.

Sequências de experiências de S-G permitem obter a representação de qualquer projeção de spin. Em particular:

Na base em que $\hat{\mathrm{S}}_z$ é diagonal:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

Nesta base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$, a projeção de spin na direção de $\boldsymbol{u}$ é representada pela matriz seguinte:

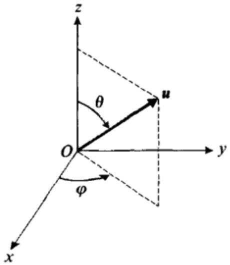
$$\hat{\mathrm{S}}_{\boldsymbol{u}} \mapsto S_{\boldsymbol{u}} = \frac{\hbar}{2}\left(u_x\,\sigma_x + u_y\,\sigma_y + u_z\,\sigma_z\right) = \frac{\hbar}{2}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

(recap. Folha de Problemas 1)

Não confundir direções no espaço físico real

$$\boldsymbol{u} = \cos\varphi \sin\theta \, \boldsymbol{u}_x + \sin\varphi \sin\theta \, \boldsymbol{u}_y + \cos\theta \, \boldsymbol{u}_z$$

(usado para especificar como estamos a orientar o dispositivo experimental)

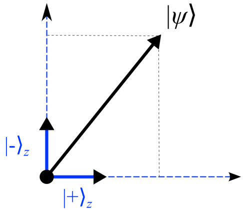


...com as componentes do vetor de estado:

$$|\psi\rangle = \alpha \, |+\rangle_z + \beta \, |-\rangle_z$$

este é um vetor que “vive” no espaço de estados/Hilbert.

(é o vetor que carateriza o estado do spin da partícula)



As três projeções do spin

Consequências notórias:

- Os autovalores da matriz $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u}$ são sempre ± 1 (Folha de Problemas 1), pelo que qualquer medida de spin resulta sempre em $\pm\hbar/2$, independentemente da direção escolhida.

- Projeções diferentes não comutam entre si:

$$S_\alpha = \frac{\hbar}{2}\sigma_\alpha \qquad \longrightarrow \qquad [S_\alpha, S_\beta] = \frac{\hbar^2}{4}[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = \frac{\hbar^2}{4}\left(2i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma\right) = i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma$$

  ou, de modo explícito:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \qquad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \qquad [S_z, S_x] = i\hbar S_y.$$

As observáveis $\hat{\mathrm{S}}_x$, $\hat{\mathrm{S}}_y$, e $\hat{\mathrm{S}}_z$ são incompatíveis. Apenas uma delas pode ser determinada/medida.

Não esqueçamos que não há nada especial acerca da direção z, nem da x ou y. O dispositivo de S-G pode sempre ser orientado segundo qualquer direção, para medir $\hat{\mathrm{S}}_x$, $\hat{\mathrm{S}}_y$, ou qualquer outra projeção $\hat{\mathrm{S}}_{\boldsymbol{u}}$ desejada.

Nota sobre os auto-estados das diferentes projeções de spin

1. Ao optarmos por usar como base os auto-estados (autovetores) de $\hat{S}_z$, e expansão de um estado genérico tem a forma

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z, \qquad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1).$$

Isto pode ser sempre escrito na forma

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle_z \equiv |+\rangle_{\boldsymbol{u}}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

que representa um spin que “aponta” na direção do vetor (Cartesiano) unitário $\boldsymbol{u}$.

2. Através da representação matricial das diferentes projeções de spin,

$$S_\alpha = \frac{\hbar}{2}\sigma_\alpha, \qquad (\alpha = x, y, z),$$

obtemos (Folha de Problemas 1) os auto-estados normalizados de $\hat{S}_x$ e $\hat{S}_y$:

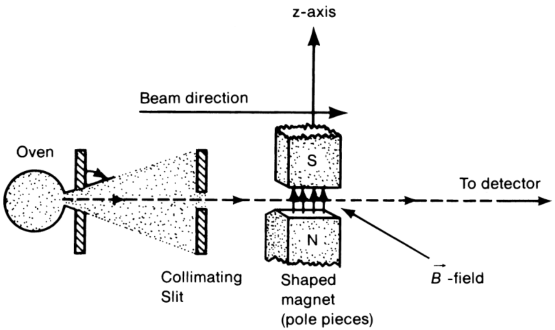
$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z \qquad \text{e} \qquad |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle_z.$$

e também os auto-estados normalizados de qualquer outra projeção de spin $\hat{S}_{\boldsymbol{u}}$:

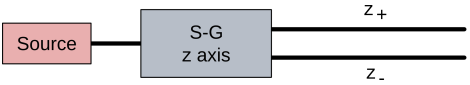
$$|+\rangle_{\boldsymbol{u}} = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle_z, \qquad |-\rangle_{\boldsymbol{u}} = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle_z - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle_z.$$

Múltiplas experiências/medições do tipo Stern-Gerlach

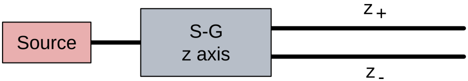
Representação esquemática de um dispositivo S-G



Todo este aparato experimental será representado esquematicamente por



cuja orientação do campo $\boldsymbol{B}$ interno é explicitamente indicada através da "etiqueta" *z axis*.

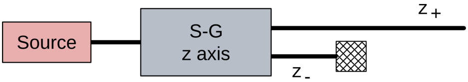


As partículas provenientes da fonte chegam num estado de spin aleatório:

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z, \qquad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1).$$

Mas as que emergem no feixe z_+ ou z_- estarão num estado onde $\mathcal{S}_z$ é perfeitamente definido!

Então, se bloquearmos uma dessas saídas:



- estamos a selecionar um dos estados $|+\rangle_z$ ou $|-\rangle_z$ (realizámos uma medição);
- chamaremos, por isso, a este dispositivo um seletor SG de z_+ ...
- ...porque todas as partículas no feixe não bloqueado emergem no estado

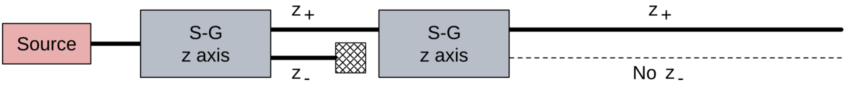
$$|\psi\rangle = |+\rangle_z.$$

Com um seletor SG orientado segundo z preparamos partículas com $\mathcal{S}_z$ perfeitamente definido.

Claro que, orientando segundo uma outra qualquer direção espacial $\boldsymbol{u}$ obtemos estados com projeção perfeitamente definida segundo essa direção, $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$.

Primeira experiência – confirmação do estado de spin

Sequências de medições tipo S-G são excelentes para testar os postulados e as previsões da MQ.



Interpretação

- De acordo com o postulado relativo à redução do vetor de estado, após o 1º SG (seletor):

$$|\psi_{SG1}\rangle = |+\rangle_z$$

- De acordo com o postulado que prescreve as probabilidades:

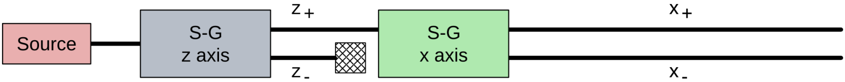
$$\text{prob. de medir } \mathcal{S}_z = +\tfrac{\hbar}{2} \text{ no 2º SG} = |{}_z\langle + | \psi_{SG1}\rangle|^2 = |{}_z\langle + | + \rangle_z|^2 = 1$$

$$\text{prob. de medir } \mathcal{S}_z = -\tfrac{\hbar}{2} \text{ no 2º SG} = |{}_z\langle - | \psi_{SG1}\rangle|^2 = |{}_z\langle - | + \rangle_z|^2 = 0$$

Já sabíamos, claro:

Repetindo a medição de uma mesma observável ($\hat{S}_z$ neste caso), obteremos com total certeza o mesmo resultado que acabámos de obter imediatamente antes, na 1ª medição!

Segunda experiência – medição de duas projeções diferentes



Resultado experimental

50 % das partículas que entram no 2º SG (orientado segundo x) emergem com spin a apontar segundo $+x$ e 50 % com spin a apontar segundo $-x$.

Interpretação:

- De acordo com o postulado relativo à projeção do vetor de estado, após o primeiro SG:

$$|\psi_{SG1}\rangle = |+\rangle_z$$

- O segundo SG mede $\hat{S}_x$. Segundo o postulado que prescreve a probabilidade dos resultados:

$$\mathcal{P}(x_+) = |{}_x\langle + | \psi_{SG1}\rangle|^2 = |{}_x\langle + | + \rangle_z|^2 = \frac{1}{2}$$

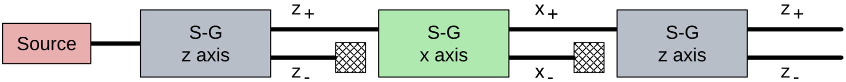
$$\mathcal{P}(x_-) = |{}_x\langle - | \psi_{SG1}\rangle|^2 = |{}_x\langle - | + \rangle_z|^2 = \frac{1}{2}$$

Este resultado decorre do facto de os auto-estados de $\hat{S}_x$ serem

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z.$$

O que acontecerá se bloquearmos o feixe z_+ em vez de z_- no primeiro SG?

Terceira experiência – re-medição de uma das projeções



O que deverá acontecer agora? Já tínhamos filtrado z_- no primeiro seletor SG...

Façamos uma previsão recorrendo aos postulados da MQ:

- Da experiência anterior, sabemos que $\mathcal{P}(x_+, SG2) = 0.5$.
- Todos os átomos que entram no 3º SG estão no estado

$$|\psi_{SG2}\rangle = |+\rangle_x$$

- Uma vez que o último SG mede $\hat{S}_z$, as probabilidades associadas são

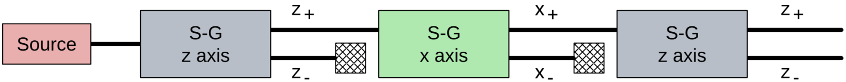
$$\mathcal{P}(z_+, SG3) = |{}_z\langle +|\psi_{SG2}\rangle|^2 = |{}_z\langle +|+\rangle_x|^2 = \frac{1}{2}$$
$$\mathcal{P}(z_-, SG3) = |{}_z\langle -|\psi_{SG2}\rangle|^2 = |{}_z\langle -|+\rangle_x|^2 = \frac{1}{2}$$

- Portanto, as probabilidades globais são: (relativamente a todos os átomos que entram em SG2)

$$\mathcal{P}(z_+) = \mathcal{P}(z_+, SG3) \times \mathcal{P}(x_+, SG2) = \frac{1}{4}, \qquad \mathcal{P}(z_-) = \mathcal{P}(z_-, SG3) \times \mathcal{P}(x_+, SG2) = \frac{1}{4}.$$

De todos os átomos que entram no segundo SG (orientado segundo x), a fração que emerge do último SG com spin apontando segundo $+z$ será 25 %, igual à fração que aponta segundo $-z$.

Terceira experiência – re-medição de uma das projeções



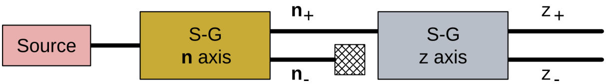
Reparemos no que sucede nesta terceira experiência:

- Estamos a medir as projeções x e z do spin $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ das partículas;
- O primeiro SG seleciona apenas aquelas para as quais $\mathcal{S}_z = +\frac{\hbar}{2}$;
- O segundo SG seleciona apenas aquelas para as quais $\mathcal{S}_x = +\frac{\hbar}{2}$;
- Talvez esperássemos que não aparecessem partículas com $\mathcal{S}_z = -\frac{\hbar}{2}$ depois do 1º SG;
- Todavia, o 3º SG deteta tantas partículas com $\mathcal{S}_z = +\frac{\hbar}{2}$ como com $\mathcal{S}_z = -\frac{\hbar}{2}$.

Projeções diferentes de spin são *incompatíveis*

- Fundamentalmente decorre de $[\hat{\mathrm{S}}_x, \hat{\mathrm{S}}_z] \neq 0$.
- A medição de $\mathcal{S}_x$ após a de $\mathcal{S}_z$ "inutiliza" o resultado dessa primeira medição.
- Esta experiência mostra diretamente que *a informação acerca de $\mathcal{S}_z$ obtida no primeiro SG se perde quando se efetua a medição subsequente de $\mathcal{S}_x$.*

Quarta experiência – seleção de uma projeção arbitrária



Consideremos um seletor SG orientado segundo a direção θ no plano xOz:

$$\boldsymbol{n} = \sin\theta\,\boldsymbol{u}_x + \cos\theta\,\boldsymbol{u}_z, \qquad\qquad (\varphi = 0).$$

Que fração emerge do último SG com $\mathcal{S}_z = +\hbar/2$ e $\mathcal{S}_z = -\hbar/2$? Como se calcula?

- O primeiro SG seleciona partículas no estado de spin

$$|+\rangle_{\boldsymbol{n}} = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle_z.$$

- A probabilidade destas partículas terem $\mathcal{S}_z = \pm\hbar/2$ é então

$$\mathcal{P}(z_+, SG2) = |{}_z\langle +|+\rangle_{\boldsymbol{n}}|^2 = \cos^2\tfrac{\theta}{2}$$

$$\mathcal{P}(z_-, SG2) = |{}_z\langle -|+_{\boldsymbol{n}}\rangle|^2 = \sin^2\tfrac{\theta}{2}$$

- Portanto, do segundo SG emergirão as seguintes frações:

$\cos^2\frac{\theta}{2}$ com spin paralelo à direção z, $\qquad$ $\sin^2\frac{\theta}{2}$ com spin paralelo à direção z.

Medições individuais e valores esperados

Consideremos por exemplo o seletor SG da pág. anterior, do qual emergem partículas cujo spin aponta segundo a direção de $\boldsymbol{n}$:

$$|+\rangle_{\boldsymbol{n}} = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle_z.$$

É bom recordar a diferença entre duas coisas fundamentalmente distintas:

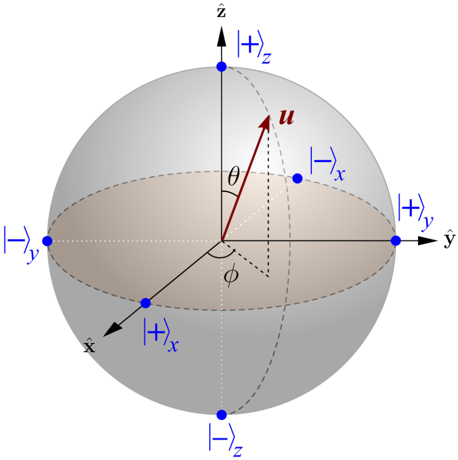
1. Para cada partícula, individualmente, o valor de $\mathcal{S}_z$ medido no segundo SG é apenas um de entre $S_z = \pm\hbar/2$.
2. O valor esperado (a média) de $\mathcal{S}_z$ repetindo a medição para um conjunto de partículas todas preparadas no mesmo estado $|+\rangle_{\boldsymbol{n}}$ é

$$\langle\hat{\mathrm{S}}_z\rangle = +\frac{\hbar}{2}\times\mathcal{P}(z_+) - \frac{\hbar}{2}\times\mathcal{P}(z_-) = {}_{\boldsymbol{n}}\langle +|\hat{\mathrm{S}}_z|+\rangle_{\boldsymbol{n}} = \frac{\hbar}{2}\cos\theta.$$

Tenhamos presente que

- Nenhuma medição individual de $\mathcal{S}_z$ resultará em $\frac{\hbar}{2}\cos\theta$. Este valor reflete a média sobre um grande número de medições idênticas de $\mathcal{S}_z$.
- “Medições idênticas” significa aqui que todas as partículas analisadas são preparadas no mesmo estado quântico previamente ao ato da medição de $\mathcal{S}_z$.
- Esta preparação do estado quântico é feita através de um seletor SG apropriado ao estado que se deseja obter.
- O valor esperado quântico recupera a expetativa clássica sobre a projeção z de um vetor com magnitude $\hbar/2$ apontando segundo a direção de $\boldsymbol{n}$: $\frac{\hbar}{2}\cos\theta$

Representação na "Esfera de Bloch"



Direção dada pelo vetor unitário (espaço real):

$$\boldsymbol{u} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Vetor do estado quântico (espaço de estados):

$$|+\rangle_{\boldsymbol{u}} = \cos\frac{\theta}{2}\,|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\phi}\,|-\rangle_z.$$

(representa o spin apontando na direção de $\boldsymbol{u}$.)

Por definição, é o auto-estado "positivo" de $\hat{\mathbf{S}}\cdot\boldsymbol{u}$:

$$(\hat{\mathbf{S}}\cdot\boldsymbol{u})\,|+\rangle_{\boldsymbol{u}} = +\frac{\hbar}{2}\,|+\rangle_{\boldsymbol{u}}.$$

Sumário – spin 1/2 e experiências de Stern-Gerlach

- Experiências de S-G revelam que qualquer projeção de spin é quantizada em unidades de $\frac{\hbar}{2}$.

- Na base de auto-estados de $\hat{S}_z$, projeções nas 3 direções Cartesianas são representadas pelas 3 matrizes de Pauli:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Os resultados da medição sequêncial de diferentes projeções de spin oferecem uma demonstração prática dos postulados da MQ.

- Observar uma partícula a emergir por um dos 2 feixes de um dispositivo SG constitui uma medição da sua projeção de spin segundo a direção do dispositivo utilizado.

- Ao bloquearmos um dos feixes de saída de um SG orientado segundo $\boldsymbol{n}$, estamos a selecionar partículas cujo estado de spin passa a ser conhecido. Por exemplo, bloqueando as defletidas para baixo, escolhemos o estado

$$|+\rangle_{\boldsymbol{n}} = \cos\frac{\theta}{2}\,|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\,|-\rangle_z,$$

  e é deste modo que podemos preparar o sistema em qualquer estado quântico desejado.

- Qualquer par de projeções diferentes de spin é incompatível (não comutam):

$$[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = i\hbar \sum_{\gamma=x,y,z} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_\gamma \neq 0, \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y, z\}).$$