I- Maxwell equations :

(Heaviside version) :

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Gauss)}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad (\ -\ )$$

$$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday)}$$

$$\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} \qquad \text{(Ampère)}$$

Problemas?

Bom: $\nabla\cdot\nabla\wedge\vec{A} \equiv 0$ [convença-se disto]

(Qual o significado geométrico deste resultado?)

As equações acima (pré Maxwell) não são coerentes com este resultado:

$$-\nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{E}) = (\nabla\cdot\dot{\vec{B}}) \equiv 0 \qquad \text{(o.k.)}$$

Mas

$$\nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{B}) = \mu_0\,\nabla\cdot\vec{j} \neq 0 \qquad \text{(em geral)}$$

Falta qualquer coisa!

Conservação local de carga $\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{j} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$; se a densidade volúmica de carga variar no tempo, então a Lei de Ampère tem que falhar

Como corrigir esta incoerência?

$$\nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{B}) = \mu_0\,\nabla\cdot\vec{j} + \mu_0\,\frac{\partial\rho}{\partial t} \equiv 0 \qquad \text{(como tem que ser!)}$$

$$= \mu_0\,\nabla\cdot\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\,\nabla\cdot\dot{\vec{E}} \equiv 0$$

Então, em situações dinâmicas, a lei de Ampère tem que ser modificada para:

$$\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Evidentemente, em situações estacionárias a correcção é irrelevante.

Definamos: $\vec{J}_D = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ ($\vec{J}_D$ é designada por corrente de deslocamento)

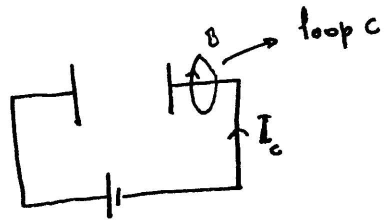
Então:

$$\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \vec{J}_D\right)$$

$\vec{J}_D$ reflecte o facto de um campo eléctrico variável no tempo gerar, inevitavelmente, um campo magnético $\vec{B}$

Vejamos um exemplo simples sobre como se manifesta este problema com a lei de Ampère original:

a) Carga de um condensador:



I_c = corrente de carga do condensador

Forma integral da Lei de Ampère:

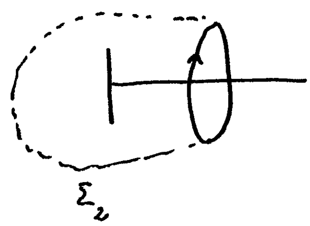
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c$$

($I_c \equiv$ corrente através da área delimitada pelo loop c)

↓

$(2\pi r B = \mu_0 I_c)$

Mas, consideremos Σ_2



Aqui I através da superfície é nula. Logo B (num ponto do loop deve ser nulo! $(B = 0)$.

O que falha? Há cargas a acumularem-se nas armaduras do condensador. Essas cargas dão origem a um campo eléctrico entre armaduras, e esse campo varia no tempo. Admitamos a aproximação de um condensador de área grande (comparada com a distância d entre armaduras) $(\sqrt{A} >> d)$. Nesta aproximação o campo eléctrico entre armaduras (lei de Gauss) é:

$$E \doteq \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} I_c$$

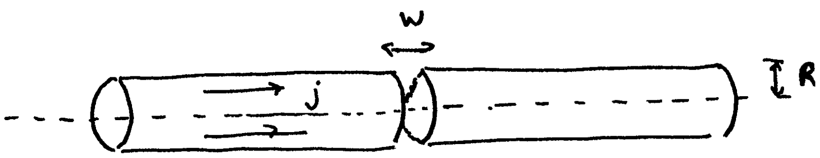
Com o novo termo,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma} \equiv \mu_0 (I_c + I_D)$$

Evidentemente, se $\Sigma_1 \Rightarrow I_C \neq 0$ e $I_D = 0$

se $\Sigma_2 \Rightarrow I_C = 0$ e $I_D = I_C$ no circuito!
(através de Σ_2)

b) <u>Problema</u>: Um cilindro de raio a transporta uma corrente I constante e uniforme (na sua secção transversal de área a). O cilindro apresenta uma pequena descontinuidade, o que dá origem um condensador plano ($\sqrt{a} \gg w$). Calcule o campo magnético na descontinuidade a uma distância $s < R$ do eixo do cilindro.



No hiato, a corrente "óhmica" é nula. A corrente de deslocamento vale:

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) = \frac{1}{a}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{a} = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\, 2\pi s = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi s^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I s^2}{R^2 s\, 2\pi}$$

[Aula TP: problemas 7.32 e 7.33 do Griffiths.]

As equações de Maxwell, após a correcção da lei de Ampère, são:

$$\text{(Gauss)} \quad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Faraday)}$$

$$(\;-\;) \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Ampère-Maxwell)}$$

Estas equações estabelecem como cargas e correntes (ρ e $\vec{j}$) geram os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Evidentemente, falta o recíproco: como os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ afectam ρ e $\vec{j}$. Este último aspecto pode, em princípio, ser respondido se soubermos como uma carga pontual é afectada por $\vec{E}$ e $\vec{B}$. E sabemos:

$$\vec{F} = q\left[\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right]$$

A força de Lorentz mais as equações acima contêm, em princípio, toda a electrodinâmica

<u>Observações:</u> A equação da continuidade foi "injectada" na lei de Ampère para a corrigir. Está, de facto, implícita na lei de Ampère-Maxwell:

$$\nabla\cdot\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\nabla\cdot\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{E} = \mu_0\left[\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right] \equiv 0$$

Podemos escrever as equações de Maxwell acima, pondo os campos de um lado e as fontes do outro:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\wedge\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla\wedge\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J}$$

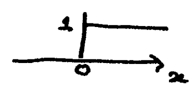
Se soubermos ρ e $\vec{J}$ podemos obter $\vec{E}$ e $\vec{B}$. E o inverso?

Problema 7.34 (Griffiths):

Considere os seguintes campos:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\Theta(vt-r)\,\hat{r} \qquad (*)$$

↳ Heaviside



$$\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

(*) Campo de uma carga pontual no interior de uma capa esférica que se expande com velocidade v

Mostre que são compatíveis com as equações de Maxwell e encontre possíveis fontes:

Solução:

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\nabla\cdot\left[\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\Theta(vt-r)\right]$$

Nota:
$$\nabla\cdot(f\vec{A}) = f(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot\nabla f$$

Usando este resultado:

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\Theta(vt-r)\;\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\nabla\left(\Theta(vt-r)\right)$$

- $\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) \equiv 0$! Mas $\left|\frac{\hat{r}}{r^2}\right| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \infty$!

Fluxo de $\frac{\hat{r}}{r^2}$ através de uma sup. esférica de raio R

$$\int_\Sigma \frac{\hat{r}\cdot\hat{r}}{r^2}\,r^2\sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi = 4\pi \underset{\text{Gauss}}{\equiv} \int_V \left(\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}\right)\cdot d^3r$$

Mas $\int_V \left(\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}\right) d^3r = 0$ para todo $r \neq 0$. Então:

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) \equiv 4\pi\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

- $\frac{\partial}{\partial r}\,\Theta(vt-r) = -\,\delta(vt-r)\;\hat{r}$

Assim:

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\Theta(vt-r)\cdot 4\pi\,\delta(x)\delta(y)\delta(z) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\hat{r}\cdot\hat{r}}{r^2}\,\delta(vt-r)$$

$$\Rightarrow \rho = -\frac{q}{4\pi}\left[4\pi\,\delta(\vec{r})\,\Theta(vt-r) - \frac{\delta(vt-r)}{r^2}\right]$$

- $\nabla\wedge\vec{B} = 0 \Rightarrow$ But: $\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \equiv 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{j} = -\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = +\varepsilon_0\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\delta(vt-r)\,\hat{r}$$

o.k.

2. Monopólos magnéticos?

No <u>espaço livre de cargas e correntes</u>, as eq. de Maxwell são simétricas para $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 = \nabla\cdot\vec{B}$$

$$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla\wedge\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} \longleftrightarrow -\varepsilon_0\mu_0\vec{E}$$

Esta simetria perde-se quando são introduzidas cargas e correntes! Excepto se introduzirmos cargas magnéticas, cuja conservação implicaria uma equação de continuidade

$$\nabla\cdot\vec{J}_{mag} + \frac{\partial\rho_{mag}}{\partial t} = 0$$

Mas tal coisa parece não existir (para muita pena de Dirac)

Imaginemos contudo que existiam. Teríamos então:

$$\nabla\cdot\vec{B} = \alpha_0\,\rho_{mag} \qquad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \beta_m\vec{J}_{mag.} \qquad \nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

um conjunto de equações perfeitamente simétrico.

Problema 7.35 (Griffiths)

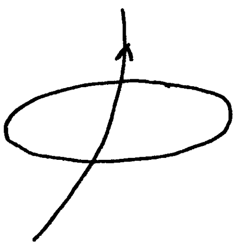
Se existisse $\rho_{mag} \neq 0$, como seria numa situação estacionária?

$$\nabla \cdot \vec{B} = \alpha_0 \rho_{mag} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \beta_m \vec{J}_{mag} \qquad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e$$

$$\vec{F} = q_e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + q_m [\vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \wedge \vec{E}]$$

Problema 7.36 (Griffiths)



Um monopólo magnético passa por um loop s/ Resistência que tem uma auto-indução L. Que corrente será induzido no loop?

Lei de Faraday generalizada seria:

$$\nabla \wedge \vec{E} = +\beta \vec{J}_{mag} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\iint_\Sigma (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{\Sigma} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E} = + \beta I_{mag} - \frac{\partial \phi_{mag}}{\partial t}$$

↓

Novo termo

$$\mathcal{E} = - L \frac{dI}{dt} = \beta I_{mag.} - \frac{\partial \phi_{mag}}{\partial t}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\beta}{L} I_{mag} + \frac{1}{L} \frac{\partial \phi_{mag}}{\partial t}$$

$$I = -\frac{\beta}{L} Q_m + \frac{\Delta \phi}{L}$$

(Método Experimental) ↳ contribuição adicional para a corrente.

3. Equações de Maxwell num meio material.

Magnetizável : $\vec{M}$

Polarizável : $\vec{P}$

3.1. Polarização

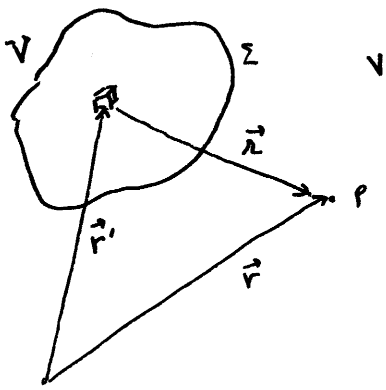
O potencial de um dipolo eléctrico (na origem do referencial) é:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{r^2} \qquad \text{(cargas ligadas)}$$

Para uma distribuição contínua podemos definir uma densidade volúmica de momento dipolar $\vec{P}$ tal que

$$\vec{p} = \vec{P}\, d\tau'$$ (Momento dipolar eléctrico no elemento de volume $d\tau'$)

O princípio da sobreposição permite-nos então escrever que



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\hat{\mathscr{r}}\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{\mathscr{r}^2}\, d\vec{r}'$$

$$\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Note que $\nabla'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \vec{P}(\vec{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) d\vec{r}'$

Nota: $\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla'\left[\frac{1}{[[\vec{r}-\vec{r}']^2]^{1/2}}\right] = \frac{\hat{r}}{r^2}$ (∇' actua sobre $\vec{r}'$)

Então:

$$\nabla\cdot(f\vec{A}) = f\,(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot\nabla f$$

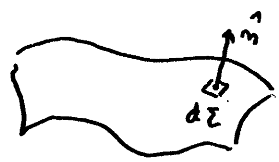
$$\downarrow$$

$$P(\vec{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla'\cdot\left(\frac{1}{r}\vec{P}(\vec{r}')\right) - \frac{1}{r}\nabla'\cdot P(\vec{r}')$$

Consequentemente:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{1}{r}\vec{P}(\vec{r}')\right)d\vec{r}' - \int_V \frac{1}{r}\nabla'\cdot P(\vec{r}')\,d\vec{r}'\right]$$

$$\downarrow \text{ Gauss}$$



Σ delimita V

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_\Sigma \frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{r}\,d\Sigma - \int_V \frac{1}{r}\nabla'\cdot P(\vec{r}')\,d\vec{r}'\right]$$

$\downarrow$ termo de superfície

$\downarrow$ contribuição volume

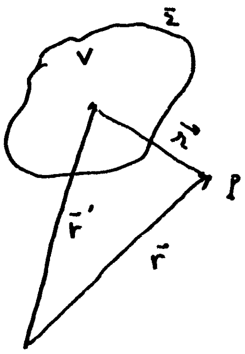
$\vec{P}\cdot\hat{n} \equiv \sigma_b \equiv$ densidade superficial de cargas

$-\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}') = \rho_b \equiv$ densidade volúmica de cargas

Uma densidade volúmica de momento dipolar cria campos equivalentes a campos gerados por σ_b e ρ_b

3.2. Magnetização

O potencial vector de um dipolo magnético $\vec{m}$ é



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\wedge\hat{r}}{r^2}$$

Numa aproximação contínua, para um volume V delimitado por uma superfície Σ

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\wedge\hat{r}}{r^2}\,d\vec{r}\,'$$

($\vec{M}(\vec{r}\,') \equiv$ densidade volúmica de momento dipolar magnético em $\vec{r}\,'$)

Como antes: $\dfrac{\hat{r}}{r^2} = \nabla'\left(\dfrac{1}{r}\right)$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{M}(\vec{r}\,')\wedge\left[\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\vec{r}\,'$$

Recorde que:

$$\nabla\wedge(f\vec{C}) = f(\nabla\wedge\vec{C}) - \vec{C}\wedge(\nabla f)$$

Então:

$$\vec{M}(\vec{r}\,')\wedge\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\nabla\wedge\vec{M}(\vec{r}\,') - \nabla\wedge\left(\frac{M(\vec{r}\,')}{r}\right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{1}{r}\left[\nabla\wedge\vec{M}(\vec{r}\,')\right]d\vec{r}\,' - \int_V \nabla\wedge\left(\frac{M(\vec{r}\,')}{r}\right)d\vec{r}\,'\right]$$

O 1º termo representa a contribuição de uma densidade volúmica de correntes:

$$\vec{J}_b = (\nabla\wedge\vec{M})$$

Vejamos o segundo termo:

$$\int_V \left(\nabla \wedge \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{r}\right) d\vec{r}\,'$$

Comecemos por ver o seguinte: seja $\vec{v}$ um campo vectorial e $\vec{c}$ um campo vectorial constante. Então, o Teor. de Gauss:

$$\int_V \nabla\cdot(\vec{v}\wedge\vec{c})\, d\vec{r} \equiv \int_\Sigma (\vec{v}\wedge\vec{c})\cdot\hat{m}\; d\Sigma$$

Mas:

$$\nabla\cdot(\vec{v}\wedge\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\nabla\wedge\vec{v}) - \underbrace{\vec{v}\cdot(\nabla\wedge\vec{c})}_{=0} \equiv \vec{c}\cdot(\nabla\wedge\vec{v})$$

Logo:

$$\int_V \vec{c}\cdot(\nabla\wedge\vec{v})\, d\vec{r} = \int_\Sigma (\vec{v}\wedge\vec{c})\cdot\hat{m}\, d\Sigma = \int_\Sigma \vec{c}\cdot(\hat{m}\wedge\vec{v})\, d\Sigma =$$

$$= \int_\Sigma -\vec{c}\cdot(\vec{v}\wedge\hat{m})\, d\Sigma$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c}\cdot\left[\int_V (\nabla\wedge\vec{v})\, d\vec{r} + \int_\Sigma (\vec{v}\wedge\hat{m})\, d\Sigma\right] = 0 \quad , \quad \forall\, \vec{c}$$

$$\int_V (\nabla\wedge\vec{v})\, d\vec{r} = -\int_\Sigma (\vec{v}\wedge\hat{m})\, d\Sigma$$

O segundo termo do fim da página anterior vem então

$$-\int_V \nabla\wedge\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{r}\right) d\vec{r}\,' = +\int_\Sigma \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\wedge\hat{m}}{r}\, d\Sigma$$

$(\vec{M}\wedge\hat{m}) = K_b$ representa uma densidade superficial de correntes.

Temos assim novos termos a considerar

densid. sup. carga em Σ $\quad \vec{P}\cdot\hat{n} = \sigma_b$ $\qquad \vec{J}_b = \nabla\wedge\vec{M}$ → densidade vol. corr.

densid. vol. corrente $\quad -\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}') = \rho_b$ $\qquad \vec{K}_b = \vec{M}\wedge\hat{n}$ → densidade sup. de correntes em Σ

Mas há algo mais ainda, se a densidade volúmica de momento dipolar variar no tempo (caso dinâmico). Isto não consideramos ainda. Se $\vec{P}(t) \Rightarrow \rho_b = -\nabla\cdot\vec{P} \equiv \rho_b(t)$.

Então, a conservação local de carga (ligada) impõe que

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J}_p \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

$\vec{J}_p$ = densidade de corrente de polarização

Admitamos, por simplicidade, que o sistema tem uma extensão tão grande que $\Sigma \to \infty$. Então, neste caso, podemos admitir que apenas os termos de volume são relevantes ($\vec{K}_b$ e σ_b estão tão longe que não afectam os campos em $\vec{r}$). Se isto for verdade, então ficamos apenas com os termos de volume. Isto é:

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \nabla\wedge\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla\cdot\vec{P}$$

Num meio material infinito, a lei de Gauss vem:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f - \nabla\cdot\vec{P}\right)$$

Isto pode ser reescrito de uma forma simples

$$\nabla\cdot\underbrace{\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)}_{\vec{D}} = \rho_f$$

se definirmos um novo campo $\vec{D}$ → deslocamento eléctrico.

De forma semelhante, a lei de Ampère-Maxwell vem:

$$\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\left[\vec{J}_f + \nabla\wedge\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right] + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\wedge\left[\vec{B} - \mu_0\vec{M}\right] = \vec{J}_f\mu_0 + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right]$$

$$\nabla\wedge\underbrace{\left[\mu_0^{-1}\vec{B} - \vec{M}\right]}_{\vec{H}} = \vec{J}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{H} \equiv$ excitação magnética

Com estes campos auxiliares, as equações de Maxwell vêm:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f & \nabla\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\[2ex] \nabla\cdot\vec{B} = 0 & \nabla\wedge\vec{H} = \vec{J}_f + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{array}}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ $\qquad$ $\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B} - \vec{M}$ $\qquad$ (meio isotrópico)

Nesta versão das equações de Maxwell as propriedades do meio são "vertidas" para os campos auxiliares $\vec{H}$ e $\vec{D}$. Para serem úteis é $\therefore$ necessário explicitar como $\vec{H}$ e $\vec{D}$ dependem de $\vec{B}$ e $\vec{E}$ ou, equivalentemente, como $\vec{P}$ e $\vec{M}$ dependem de $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Esta dependência é especificada através das chamadas relações constitutivas do meio material que, obviamente, dependem criticamente do meio material. (Mais sobre isto adiante).

4. Condições de fronteira numa descontinuidade do meio

Imaginemos que o meio material apresenta uma descontinuidade entre duas regiões separadas por uma fronteira Σ. (tem propriedades diferentes nas duas regiões), ou que existe uma superfície Σ que transporta uma densidade superficial de carga σ e de corrente $\vec{K}$. Como se comportam os diferentes campos nesta descontinuidade?

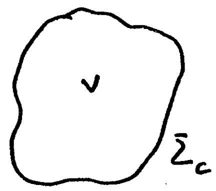
Comecemos por escrever as equações de Maxwell na sua fórmula integral:

$$\int_{\Sigma_c} \vec{D}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = Q_f \qquad\qquad \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_{ou}} \vec{B}\cdot\hat{n}\, d\Sigma$$

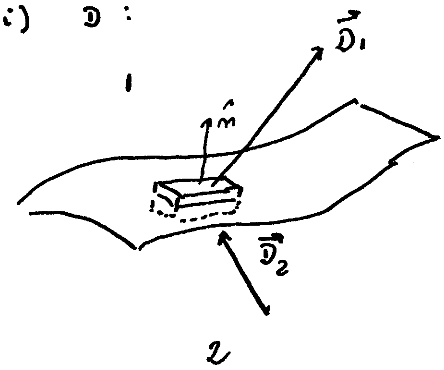
$$\int_{\Sigma_c} \vec{B}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = 0 \qquad\qquad \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt}\int_{\Sigma_{ou}} \vec{D}\cdot\hat{n}\, d\Sigma$$

Σ_c = qualquer superfície fechada

Σ_{ou} = qualquer superfície assente no contorno C.



i) $\vec{D}$:



No limite em que a altura do "caixinha" vai para zero, o ~~xxx~~ volume por ela delimitado e a área das suas paredes laterais também vão para zero

A lei de Gauss, neste limite, apenas contempla a carga de superfície livre:

$$A\left(\vec{D}_1\cdot\hat{n} - \vec{D}_2\cdot\hat{n}\right) = \sigma_f \cdot A$$

$A \equiv$ área das tampas do caixinho.

$$\downarrow$$

$$\boxed{D_1^{\perp} - D_2^{\perp} = \sigma_f}$$

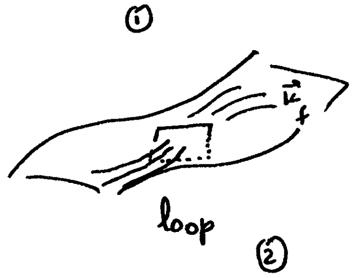
A componente de $\vec{D}$ $\perp$ à superfície Σ apresenta uma descontinuidade correspondente à densidade superficial de cargas livres.

ii) $\vec{B}$: mesma construção $\Rightarrow$ $\boxed{B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0}$

iii) $\vec{E}$:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{\ell} - \vec{E}_2 \cdot \vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \vec{B}\cdot\hat{n}\, d\Sigma \to 0$$

limite área do loop $\to 0$.



$$\boxed{E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0}$$

iv) Mesma construção que o anterior:

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{\ell} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\ell} = I_f$$

I_f superficial é o único sobrevivente quando a área do loop $\to 0$. Neste limite:

$$I_f \to \vec{K}_f \cdot (\hat{n} \wedge \vec{\ell}) \equiv \vec{\ell} \cdot (\vec{K}_f \wedge \hat{n}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = \vec{K}_f \wedge \hat{n}}$$