Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Soluções

Exercício 8: *Projetores*

Um projetor num estado $\mid \varphi_\alpha \rangle$, pertencente a uma base do espaço de Hilbert de um problema de Física Quântica, é um operador linear, definido pela seguinte equação

$$\hat{P}_\alpha \mid \varphi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \mid \varphi_\beta \rangle \,, \tag{36}$$

ou seja, o operador transforma o estado $\mid \varphi_\alpha \rangle$ nele próprio e anula qualquer outro estado da base.

a) Se $\mid \Psi \rangle$ é um estado arbitrário que se escreve, na base $\{\mid \varphi_\gamma \rangle\}$, com $\gamma = 1, \ldots, N$, onde N é a dimensão do espaço de Hilbert em questão (N pode mesmo ser infinito), como $\mid \Psi \rangle = \sum_\gamma c_\gamma \mid \varphi_\gamma \rangle$ (e em que $c_\gamma = \langle \varphi_\gamma | \Psi \rangle$), aplicando $\hat{P}_\alpha$ a este estado vem $\hat{P}_\alpha \mid \Psi \rangle = \sum_\gamma c_\gamma \hat{P}_\alpha \mid \varphi_\gamma \rangle = \sum_\gamma c_\gamma \delta_{\alpha\gamma} \mid \varphi_\gamma \rangle = c_\alpha \mid \varphi_\alpha \rangle$.

b) Temos $\hat{P}_\alpha \hat{P}_\beta \mid \Psi \rangle = c_\beta \hat{P}_\alpha \mid \varphi_\beta \rangle = c_\alpha \delta_{\alpha\beta} \mid \varphi_\alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta} \hat{P}_\alpha \mid \Psi \rangle$. Como o estado é arbitrário, a igualdade entre operadores segue.

c) É uma simples observação. Os estados próprios de $\hat{P}_\alpha$ são $\mid \varphi_\alpha \rangle$ com valor próprio 1 e os restantes $\mid \varphi_\beta \rangle$, com $\beta \neq \alpha$, com valor próprio 0, é esse o significado da equação (36).

d) Temos $\hat{P}^2 = \sum'_\alpha \sum'_\beta \hat{P}_\alpha \hat{P}_\beta = \sum'_\alpha \sum'_\beta \delta_{\alpha\beta} \hat{P}_\alpha = \sum'_\alpha \hat{P}_\alpha = \hat{P}$, em que a soma se estende a alguns dos estados da base, mas não necessariamente a todos e onde usamos o resultado provado em b). Logo, como $\hat{P}^2 - \hat{P} = \hat{P}(\hat{P} - \hat{\mathbb{1}}) = 0$, se $\mid u \rangle$ é um estado próprio de $\hat{P} \mid u \rangle = \lambda \mid u \rangle$, o valor próprio λ obedece à equação $\lambda(\lambda - 1) = 0$, ou seja é igual a 1 ou a 0, logo $\hat{P}$ é um projetor.

e) Temos $\sum_\alpha \hat{P}_\alpha \mid \Psi \rangle = \sum_\alpha c_\alpha \mid \varphi_\alpha \rangle = \mid \Psi \rangle$ onde usamos o resultado provado em a). Como $\mid \Psi \rangle$ é arbitário, segue que $\sum_\alpha \hat{P}_\alpha = \hat{\mathbb{1}}$ (resolução da identidade ou relação de completude).

f) Escreve-se, $\langle \Psi | \hat{P} | \Psi \rangle = \sum'_\alpha \langle \Psi | \hat{P}_\alpha | \Psi \rangle = \sum'_\alpha c_\alpha \langle \Psi \mid \varphi_\alpha \rangle = \sum'_\alpha |\langle \varphi_\alpha | \Psi \rangle|^2 = p$, dado que $c_\alpha = \langle \varphi_\alpha | \Psi \rangle$, ou seja, a probabilidade pode ser escrita ela própria como o valor médio de um projetor.

g) Dado um certo operador linear $\hat{A}$ com base própria $\{\mid \varphi_\gamma \rangle\}$ e com valores próprios a_α, escrevemos $\hat{A} \mid \Psi \rangle = \sum_\alpha c_\alpha \hat{A} \mid \varphi_\alpha \rangle = \sum_\alpha a_\alpha c_\alpha \mid \varphi_\alpha \rangle = \sum_\alpha a_\alpha \hat{P}_\alpha \mid \Psi \rangle$, onde usamos o resultado da alínea a). Como o estado é arbitário, o resultado segue.

Finalmente, dada a propriedade provada em a), é frequente escrever um projetor $\hat{P}_\alpha = |\varphi_\alpha\rangle \langle\varphi_\alpha|$, e que é uma notação (*diádica*) muito conveniente.

Exercício 9: *Avatares do oscilador harmónico*

Consideramos o oscilador harmónico de massa m e frequência ω_0, cujo Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2 \,, \tag{37}$$

onde $\hat{x}$ e $\hat{p}$ são os operadores da coordenada e do momento em 1d, com $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\, \hat{\mathbb{1}}$.

Introduzindo os operadores de destruição e criação, $\hat{a}_0 = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\, \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}}\, \hat{p}$, $\hat{a}_0^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\, \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}}\, \hat{p}$, pode-se escrever

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \frac{\hat{\mathbb{1}}}{2} \right) \,, \tag{38}$$

com $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$.

a) Vimos que os estados próprios de $\hat{n}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$, $|j\rangle$ são de valor próprio inteiro j, maior ou igual a zero, e dado que $[\hat{n}_0, \hat{a}_0] = -\hat{a}_0$, $[\hat{n}_0, \hat{a}_0^\dagger] = \hat{a}_0 \dagger$, é fácil mostrar que $\hat{a}_0 \mid j \rangle = C_-(j) \mid j-1 \rangle$ e $\hat{a}_0^\dagger \mid j \rangle = C_+(j) \mid j+1 \rangle$, como discutido no problema 3. O módulo de cada um destes estados é $\|\hat{a}_0 \mid j \rangle\|^2 = \langle j \mid \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \mid j \rangle = j = |C_-(j)|^2$, logo $C_-(j) = \sqrt{j}$. De igual modo, $\|\hat{a}_0^\dagger \mid j \rangle\|^2 = \langle j \mid \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \mid j \rangle = \langle j \mid \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \hat{\mathbb{1}} \mid j \rangle = j + 1 = |C_+(j)|^2$ e logo $C_+(j) = \sqrt{j+1}$.

b) Considere agora outro oscilador harmónico, de massa m e de frequência $\omega = \omega_0 \sqrt{1+\lambda} \geq \omega_0$, como discutido na aula teórica.

Introduzindo novos operadores de destruição e criação, $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\, \hat{p}$, $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\, \hat{p}$, podemos escrever o operador Hamiltoniano para este oscilador como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\mathbb{1}}}{2} \right) \,. \tag{39}$$

Podemos agora expressar os operadores $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger)$ e $\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(\hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger)$ em termos de $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_0^\dagger$, e substituir nas expressões acima para os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. Obtemos

$$\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} + \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} \right) \hat{a}_0 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} \right) \hat{a}_0^\dagger \,, \tag{40}$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} \right) \hat{a}_0 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} + \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} \right) \hat{a}_0^\dagger \,. \tag{41}$$

Escrevendo agora $e^x = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} = (1+\lambda)^{1/4}$, ou seja, $x = \frac{1}{4}\ln(1+\lambda)$, podemos finalmente escrever

$$\hat{a} = \cosh x\, \hat{a}_0 + \sinh x\, \hat{a}_0^\dagger \,, \tag{42}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sinh x\, \hat{a}_0 + \cosh x\, \hat{a}_0^\dagger \,, \tag{43}$$

que é a solução do problema.

c) Considerando que $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_0^\dagger$ não dependem de x e que $(\cosh x)' = \sinh x$ e $(\sinh x)' = \cosh x$, se derivarmos as equações (42) e (43) em ordem a x, obtemos $\frac{d\hat{a}}{dx} = \hat{a}^\dagger$, $\frac{d\hat{a}^\dagger}{dx} = \hat{a}$.

d) As equações (42) e (43) definem uma transformação unitária entre os dois conjuntos de operadores, já que ambos obedecem às mesmas relações de comutação entre si, ou seja, $\hat{a} = \hat{U}_x \hat{a}_0 \hat{U}_x^\dagger$, $\hat{a}^\dagger = \hat{U}_x \hat{a}_0^\dagger \hat{U}_x^\dagger$, em que $\hat{U}_x$ é um operador unitário e $\hat{U}_x^\dagger$ é o seu inverso, $\hat{U}_x \hat{U}_x^\dagger = \mathbb{1}$.

Escrevendo $\hat{U}_x = e^{ix\hat{V}}$, em que $\hat{V}$ é um operador hermítico, temos $\frac{d\hat{U}_x}{dx} = i\hat{U}_x \hat{V}$ e $\frac{d\hat{U}_x^\dagger}{dx} = -i\hat{V}\hat{U}_x^\dagger$, logo $\frac{d\hat{a}}{dx} = i\hat{U}_x(\hat{V}\hat{a}_0 - \hat{a}_0\hat{V})\hat{U}_x^\dagger = i\hat{U}_x[\hat{V}, \hat{a}_0]\hat{U}_x^\dagger$.

A expressão para $\frac{d\hat{a}^\dagger}{dx}$ pode obter-se de forma análoga ou simplesmente considerando o adjunto desta equação e obtemos $\frac{d\hat{a}^\dagger}{dx} = i\hat{U}_x[\hat{V}, \hat{a}_0^\dagger]\hat{U}_x^\dagger$.

Utilizando o resultado da alínea anterior, vem $i\hat{U}_x[\hat{V}, \hat{a}_0]\hat{U}_x^\dagger = \hat{a}^\dagger = \hat{U}_x \hat{a}_0^\dagger \hat{U}_x^\dagger$. Multiplicando esta equação por $\hat{U}_x^\dagger$ à esquerda e $\hat{U}_x$ à direita, obtém-se $[\hat{V}, \hat{a}_0] = -i\hat{a}_0^\dagger$ e analogamente para $[\hat{V}, \hat{a}_0^\dagger] = -i\hat{a}_0$.

Tomando $\hat{V} = \frac{1}{2i}[(\hat{a}_0)^2 - (\hat{a}_0^\dagger)^2]$, é imediato ver que $[\hat{V}, \hat{a}_0] = \frac{i}{2}[(\hat{a}_0^\dagger)^2, \hat{a}_0] = -i\hat{a}_0^\dagger$, e analogamente $[\hat{V}, \hat{a}_0^\dagger] = -i\hat{a}_0$. Assim, $\hat{U}_\lambda = e^{\frac{1}{8}\ln(1+\lambda)[(\hat{a}_0)^2 - (\hat{a}_0^\dagger)^2]}$ onde trocamos aqui o subescrito x por λ e substituimos a expressão de x em termos de λ.

e) Se $\mid j\,\rangle$ é um estado próprio de $\hat{n}_0$ com valor próprio j, temos para $\mid \lambda, j\,\rangle = \hat{U}_\lambda \mid j\,\rangle$, que $\hat{n} \mid \lambda, j\,\rangle = \hat{U}_\lambda \hat{n}_0 \hat{U}_\lambda^\dagger \hat{U}_\lambda \mid j\,\rangle = \hat{U}_\lambda \hat{n}_0 \mid j\,\rangle = j \mid \lambda, j\,\rangle$, logo este estado é um estado próprio de $\hat{n}$, com o mesmo valor próprio.

f) Expandindo $\hat{U}_\lambda$ em primeira ordem em λ na expressão de $\mid \lambda, j\,\rangle$, com $\hat{U}_\lambda \approx \hat{\mathbb{1}} + \frac{1}{8}\ln(1 + \lambda)((\hat{a}_0)^2 - (\hat{a}_0^\dagger)^2) \approx \hat{\mathbb{1}} + \frac{\lambda}{8}((\hat{a}_0)^2 - (\hat{a}_0^\dagger)^2)$, obtemos $\mid \lambda, j\,\rangle \approx \mid j\,\rangle + \frac{\lambda}{8}((\hat{a}_0)^2 - (\hat{a}_0^\dagger)^2) \mid j\,\rangle = \mid j\,\rangle + \frac{\lambda}{8}(\sqrt{j(j-1)} \mid j-2\,\rangle - \sqrt{(j+1)(j+2)} \mid j+2\,\rangle)$, a expressão obtida na aula teórica recorrendo à teoria de perturbações.

Note-se que se tem $\hat{H} = \sqrt{1+\lambda}\,\hat{U}_\lambda \hat{H}_0 \hat{U}_\lambda^\dagger$, e por isso os valores de energia são sujeitos ao *rescaling* por um factor de $\sqrt{1+\lambda}$, mas de resto mantém-se inalterados, como vimos na aula teórica. O operador $\hat{U}_\lambda$ é conhecido como operador de *squeezing* (veja Phys. Rev. A **80**, 053401 (2009), para mais informações).

Exercício 10: *Teoria de perturbações para o oscilador harmónico sujeito a uma força constante*

Consideramos o oscilador harmónico sujeito a um força constante

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \hat{x}^2 - F\hat{x}\,, \tag{44}$$

em que F é o valor da força externa aplicada ao oscilador (p.e. $F = q\mathcal{E}$, em que q é a carga do oscilador e $\mathcal{E}$ a magnitude do campo elétrico aplicado). A força externa será aqui tratada como perturbação.

a) Definindo o operador $\hat{X} = \hat{x} - \frac{F}{m\omega_0^2}\hat{\mathbb{1}}$, em que $[\hat{X}, \hat{p}] = i\hbar\hat{\mathbb{1}}$ e substituindo na equação (44), obtemos

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \hat{X}^2 - \frac{F^2}{2m\omega_0^2}\hat{\mathbb{1}}\,. \tag{45}$$

b) Podemos de novo introduzir operadores de destruição e criação em termos de $\hat{X}$ e $\hat{p}$, pelo que podemos escrever $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{n} + 1/2) - \frac{F^2}{2m\omega_0^2}\hat{\mathbb{1}}$, pelo que os níveis de energia do Hamiltoniano com perturbação são dados por $E_j = \hbar\omega_0(j + 1/2) - \frac{F^2}{2m\omega_0^2}$.

c) Em teoria de perturbações, a correção de primeira ordem à energia é dada por $E_{1j} = -F \langle j|\, \hat{x}\, |j\rangle = 0$.

d) A correção de segunda ordem é dada por $E_{2j} = \sum_{i\neq j} \frac{|\langle i|F\hat{x}|j\rangle|^2}{E_{0j}-E_{0i}} = \frac{F^2}{2m\omega_0^2} \sum_{i\neq j} \frac{|\langle i|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|j\rangle|^2}{j-i} = -\frac{F^2}{2m\omega_0^2}$, para qualquer estado, dado que $\langle i|\, \hat{a}\, |j\rangle = \sqrt{j}\, \delta_{i,j-1}$ e $\langle i|\, \hat{a}^\dagger\, |j\rangle = \sqrt{j+1}\, \delta_{i,j+1}$.

Note que este exercício mostra que não existem correções de energia em ordem superior à segunda, que já nos dá o resultado exato. Isso não é verdade em relação à função de onda.

Se está a pensar que existe uma transformação unitária que liga os estados dos dois sistemas, assim como o Hamiltoniano, está a pensar corretamente, nesse caso o operador unitário em questão é conhecido como *operador de deslocamento*. Este operador, aplicado ao estado fundamental $|\, 0\,\rangle$ de $\hat{H}_0$ (na ausência do campo externo), gera os famosos *estados coerentes* do oscilador harmónico.

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt