FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, onde $z = x + iy$

⚠ Esta função satisfaz todas as propriedades do exponencial elevado a nºs reais, apesar de $z = x + iy$ (um nº complexo)

Fórmula Euler: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

$$\begin{cases} e^{-iy} = \cos y - i\sin y & (1) \\ e^{iy} = \cos y + i\sin y & (2) \end{cases}$$

- Somando as 2:

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y \longrightarrow \cos(\underset{\text{nº real}}{y}) = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right)$$

Iremos definir:

$$\cos(\underset{\text{nº complexo}}{z}) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

- Subtraindo (2) e (1):

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i\sin y \longrightarrow \overbrace{\sin y}^{\text{função real}} = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right)$$

Iremos definir:

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

funções analíticas em todo o plano complexo pois e^{iz} e e^{-iz} também são!

⚠ Todas as propriedades do sin e cos de nºs reais são válidas para os nºs complexos.

$$\log z = \ln|z| + i\theta + 2\pi k i, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{d}{dz}\cos(z) = -\sin(z) \qquad \frac{d}{dz}\sin(z) = \cos(z)$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

$$\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$$
$$\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$$

EXERCÍCIO:

Resolva a equação $\cos(z) = 2$

$$\cos(z) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \xrightarrow{\times e^{iz}} \Leftrightarrow (e^{iz})^2 + 1 = 4e^{iz} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16-4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} = e^{\log(2\pm\sqrt{3})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow iz = \log(2\pm\sqrt{3}) \Leftrightarrow iz = \ln(2\pm\sqrt{3}) + i2\pi k \Leftrightarrow$$

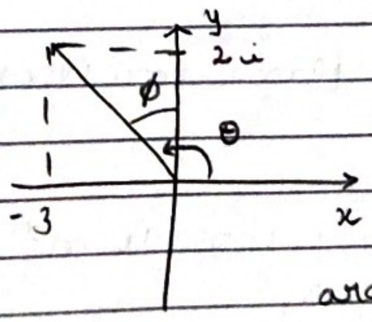
$$\Leftrightarrow z = -i\ln(2\pm\sqrt{3}) + 2\pi k$$

NÃO ESQUECER:

$$\log(z) = \ln|z| + i\,\overset{\text{argumento}}{\arg(z)}$$

EXEMPLO:

$$\log(-3+2i) = \ln\left|\sqrt{9+4}\right| + i\arg(-3+2i)$$
$$= \ln\sqrt{13} + i\arg(-3+2i)$$



$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\emptyset = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\arg(-3+2i) = \theta + 2\pi$$

Logo,

$$\log(-3+2i) = \ln\sqrt{13} + i\left(\arctan\frac{3}{2} + \frac{5\pi}{2}\right)$$