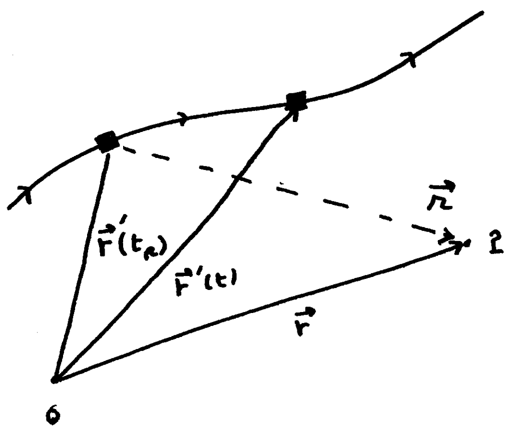
1. Os potenciais de Liénard-Wiechert



$\vec{r}'(t)$ ≡ trajectória de um objecto rígido uniformemente carregado

$\vec{r}$ ≡ raio vector de posição do local aonde se pretende calcular os potenciais (retardados)

$\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$ ≡ distância do objecto a P num tempo retardado

A "informação" da posição do objecto propaga-se com velocidade c

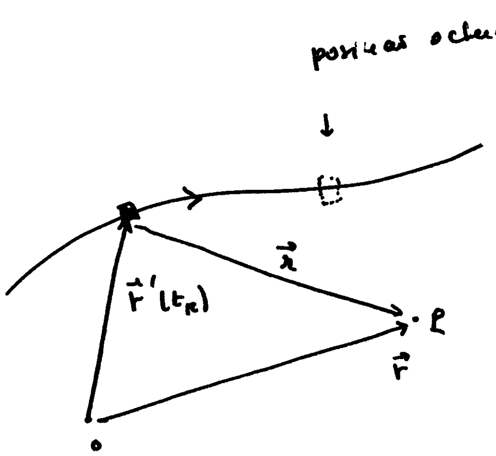
Logo:
$$|\vec{\mathscr{r}}| = c\,(t - t_R)$$

<u>Observação</u>: Num certo instante t (fixo), o ponto P está "em comunicação" com apenas uma posição retardada do objecto, admitimos. Com efeito.

Se
$$\mathscr{r}_1 = c\,(t - t_1)$$
$$\mathscr{r}_2 = c\,(t - t_2)$$

estivessem ambas "em comunicação" com P num dado t, então
$$\mathscr{r}_1 - \mathscr{r}_2 = c\,(t_1 - t_2)$$

I.e.: a velocidade média da partícula (objecto rígido) entre t_1 e t_2 teria que ser c. Podemos assim admitir equivalentemente que a partícula só pode viajar a velocidades inferiores a c.



Então o potencial (eléctrico) retardado é:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}\,', t_R)}{\mathscr{r}}\, d^3r'$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,', t_R)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'(t_R)|}\, d^3r'$$

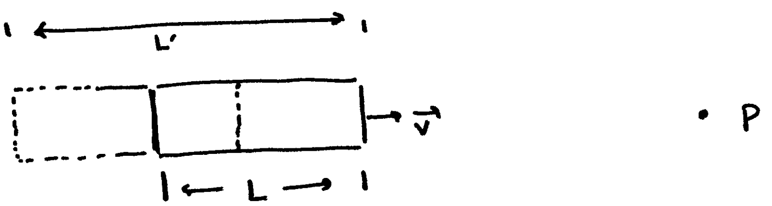
(Algo idêntico para $\vec{A}$ trocando ρ por $\vec{j}$).

O problema com o cálculo de um integral deste tipo é que $t_R \equiv t_R(t, \vec{r}\,', \vec{r})$: a diferentes locais do objecto em movimento correspondem tempos retardados diferentes. Por este facto

$\int_\Omega \rho(\vec{r}\,', t_R)\, d^3r'$ não corresponde à carga total do objecto!

Vejamos este ponto:

Consideremos um objecto paralelipipédico que se move ao longo do eixo dos x com velocidade v



Um observador em P vê o objecto que se aproxima mais comprido porque a informação sobre a posição da cauda foi "emitida" num tempo retardado menor do que a informação "emitida" pela frente, se ambas devem chegar a P ao mesmo tempo.

Isto é válido para qualquer sector do objecto: em P, os tempos retardados para cada ponto do objecto são diferentes.

Se o objecto se mover com velocidade $\vec{v}$ (ao longo de xx'):

$L' - L = v\,\Delta t$ e Δt = diferença entre os tempos retardados da frente e da cauda.

$$c\,\Delta t = \left(\vec{r}\,'_{\text{cauda}} - \vec{r}\,'_{\text{frente}}\right) = L'$$

Logo:
$$L' - L = \frac{v}{c} L' \iff L'\left(1 - \frac{v}{c}\right) = L$$

(Sendo L o tamanho "real" do comboio: o tamanho medido no referencial do comboio.)

O volume do objecto é: $V'\left(1 - \frac{v}{c}\right) = V$

(V é o volume do objecto em repouso), dado que as dimensões ortogonais não são afectadas. Dito de outro modo, os tempos retardados para pontos em planos ortogonais à direcção do movimento são iguais. (Se $|\vec{r}| >>$ dimensões do objecto).

Podemos então prosseguir: Para um objecto pequeno:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_R)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'(t_R)|}\, d^3r' \sim$$

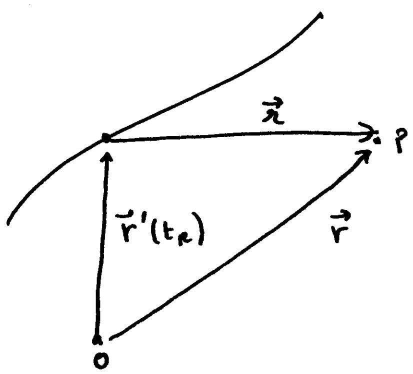
$$\sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\langle\vec{r}\,'\rangle|}\,\rho\int d^3\vec{r}\,' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\langle r\rangle}\,\rho\,\frac{V}{1-\frac{v}{c}}$$

(densidade de carga uniforme ρ)

Para uma carga pontual movendo-se ao longo de x com velocidade v:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r}\,\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$$

Para uma orientação qualquer da velocidade relativamente a $\vec{r}$ temos:



$$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r}\,\frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\hat{r}}{c}}}$$

De forma semelhante temos, para o potencial vector de um pequeno objecto rígido:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\rho(\vec{r}',t_R)\cdot\vec{v}(t_R)}{r}\,d^3r' \simeq$$

$$\simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\langle\vec{v}(t_R)\rangle\cdot\int\frac{\rho(\vec{r}',t_R)}{r}\,d^3r'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\langle\vec{v}(t_R)\rangle\cdot\int\frac{1}{c^2}\,\frac{\rho(\vec{r}',t_R)}{r}\,d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}(t_R)}{c^2}\cdot\phi(\vec{r},t_R)$$

Isto é:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot\frac{\vec{v}(t_R)}{r-\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c}}}$$

Estes são os potenciais de Liénard - Wiechert para cargas pontuais em movimento.

Alfred - Marie Liénard (1898) e Emil Wiechert (1900) obtiveram estas expressões que descrevem os efeitos electromagnéticos de cargas pontuais em movimento.

Mas estas expressões precisam ainda de ser trabalhadas para serem úteis: Precisamos calcular $\vec{r}$ e t_R explicitamente.

Vejamos: o caso de uma partícula movendo-se // xx' : com vel. const.

$$r = c\,(t - t_R)$$

$$c^2 (t - t_R)^2 = (x - v\,t_R)^2 + y^2 + z^2$$

$$c^2 (t^2 + t_R^2 - 2 t t_R) = x^2 + v^2 t_R^2 - 2 x v t_R + y^2 + z^2$$

$$(v^2 - c^2)\, t_R^2 - 2\,(x v - c^2 t)\, t_R + x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

$$t_R = \frac{\cancel{2}\,(x v - c^2 t) \pm \sqrt{\cancel{4}(x v - c^2 t)^2 - \cancel{4}\,(v^2 - c^2)\left[x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2\right]}}{\cancel{2}\,(v^2 - c^2)}$$

$$t_R = \frac{(x v - c^2 t) \pm \sqrt{x^2 v^2 + c^4 t^2 - 2 x v c^2 t - \cdots\cdots}}{-\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2}$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) t_R = \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \mp \frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}$$

que soluçãs devemos escolher?

$$\left\{\begin{array}{l} v=0 \\ \vec{r}'=0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{t_R = t \mp \frac{1}{c} r}$$

A soluçãs causal (retardado) é a com sinal $-$:

$$t_R = t - \frac{r}{c} = t - \frac{\mathscr{r}}{c}$$

$$c\left(t_R - t\right) = \mathscr{r} \qquad \text{o.k.}$$

Logo:

$$t_R\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)} \qquad (*)$$

Entas:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\mathscr{r} - \frac{\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}}{c}}$$

(como vimos):

Mas: $\vec{v}\cdot\vec{\mathscr{r}} = v\,(x - v\,t_R)$; entao:

$$\frac{1}{\mathscr{r} - \frac{\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}}{c}} = \frac{1}{c(t-t_R) - \frac{v}{c}(x - v\,t_R)} = \frac{1}{c\left[\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) - \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t_R\right]}$$

Mas

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) t_R = \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}$$

Logo:

$$\frac{1}{r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c}} = \frac{1}{c\left[\cancel{\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)} - \cancel{\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)} + \frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}\right]}$$

Então:

- $$\phi(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^2 + y^2 + z^2}}$$

- $$\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{\vec{V}(t_R)}{c^2}\,\phi(x,y,z,t)$$

c) t_R dado pela expressão (*) da página anterior.

claro que, para movimento uniforme $\vec{V}(t_R) = \vec{V}(t) \equiv \vec{V}$

<u>Observação:</u> Repare que, para uma partícula em repouso:

$$\vec{A} = 0$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

A expressão para $v_x \neq$ const. supõe que

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

se $\quad x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z.$

(esta é a transformação de Lorentz : a menos do factor $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (que afecta ϕ globalmente), temos que o movimento do corpo quebra a simetria esférica do potencial.

A transformação de Lorentz foi obtida neste contexto e é "pré-relativista".

Campo criado por cargas pontuais em movimento

Voltemos aos potenciais da página 4:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\text{ℛ}}\,\frac{c}{c - \vec{v}\cdot\hat{\text{ℛ}}}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}}{c^2}\,\phi(\vec{r},t)$$

$$\left[\text{ onde } \vec{\text{ℛ}} = \vec{r} - \vec{r}\,'(t_R) \quad ; \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}\,'(t_R) \right]$$

Podemos calcular o campo

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

As contas são trabalhosas (ver Griffiths) e o resultado será:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\text{ℛ}}{(\vec{\text{ℛ}}\cdot\vec{u})^3}\left[(c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{\text{ℛ}} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{a})\right]$$

(onde $\vec{u} = c\,\hat{\text{ℛ}} - \vec{v}$ e $\vec{a}$ = aceleração da partícula)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\,\hat{\text{ℛ}} \wedge \vec{E}(\vec{r},t)$$

Vejamos o caso particular de uma carga em movimento uniforme:

Neste caso:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{u})^3} (c^2 - v^2)\, \vec{u}\, \mathscr{r}$$

$$c(t - t_R) = \vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}' \quad e \quad \vec{r}' = \vec{v}\, t \qquad \vec{u} = (c\hat{\mathscr{r}} - \vec{v})$$

- $$\mathscr{r}\,\vec{u} = c\,\vec{\mathscr{r}} - \mathscr{r}\,\vec{v} =$$

$$= c(\vec{r} - \vec{v}\, t_R) - c(t - t_R)\vec{v} =$$

$$= c(\vec{r} - \vec{v}\, t)$$

- $$\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{u} = \mathscr{r} c - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v} = \sqrt{(c^2 t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2} =$$

$$= |\vec{r} - \vec{v}\, t|\, c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}$$

(onde $\theta \equiv$ ângulo entre $\underbrace{(\vec{r} - \vec{v}\, t)}_{\vec{R}}$ e $\vec{v}$)

(ver, nesta passagem, o problema 10.14 do Griffiths)

Então:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{R}}{R^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\,\hat{\mathscr{r}} \wedge \vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\hat{\mathscr{r}} = \frac{\vec{r} - v t_r}{\mathscr{r}} = \frac{(\vec{r} - \vec{v} t) + (t - t_R)\vec{v}}{\mathscr{r}} = \frac{\vec{R}}{\mathscr{r}} + \frac{v}{c}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\,(\vec{v} \wedge \vec{E})}$$