

Física Quântica II

Exame 25/01/2023 - Correção

Exercício 1: Adição de dois momentos angulares

Um momento angular orbital caracterizado por $l = 2$ é adicionado a um spin, caracterizado por $s = 1/2$.

- a) Com base na teoria de adição de dois momentos angulares, sabemos que j , o número quântico que caracteriza o momento angular total do sistema, pode assumir os valores inteiros ou semi-inteiros tais que $|l - s| \leq j \leq l + s$. Como $l = 2$ e $s = 1/2$, $3/2 \leq j \leq 5/2$, ou seja, j pode tomar dois valores possíveis, $j_{\max} = 5/2$ e $j_{\min} = 3/2$, como afirmado. O multiplete $j_{\max} = 5/2$ é constituído por $2j_{\max} + 1 = 6$ estados, a saber $|5/2 \ 5/2, 2 \ 1/2\rangle$, $|5/2 \ 3/2, 2 \ 1/2\rangle$, $|5/2 \ 1/2, 2 \ 1/2\rangle$, $|5/2 \ -1/2, 2 \ 1/2\rangle$, $|5/2 \ -3/2, 2 \ 1/2\rangle$ e $|5/2 \ -5/2, 2 \ 1/2\rangle$, enquanto que multiplete $j_{\min} = 3/2$ é constituído por $2j_{\min} + 1 = 4$ estados, $|3/2 \ 3/2, 2 \ 1/2\rangle$, $|3/2 \ 1/2, 2 \ 1/2\rangle$, $|3/2 \ -1/2, 2 \ 1/2\rangle$ e $|3/2 \ -3/2, 2 \ 1/2\rangle$. **(2 valores)**

- b) Genericamente, podemos escrever

$$|5/2 \ m_j, 1 \ 1/2\rangle = \sum_{m_l+m_s=m_j} a_{m_l m_s}^{2 \ 1/2} (5/2, m_j) |2 \ m_l \ 1/2 \ m_s\rangle, \quad (1)$$

em que $a_{m_l m_s}^{2 \ 1/2} (5/2, m_j)$ são os coeficientes de Clebsch-Gordan. No entanto, a soma estende-se apenas aos estados $|2 \ m_l \ 1/2 \ m_s\rangle$ tais que $m_j = m_l + m_s$. Se $m_j = j_{\max} = 5/2$, há apenas um estado que satisfaz esta condição, a saber, o estado com $m_l = 2$ e $m_s = 1/2$. Como todos os estados estão por definição normalizados, temos que ter

$$|5/2 \ 5/2, 2 \ 1/2\rangle = |2 \ 2 \ 1/2 \ 1/2\rangle,$$

ou, se se quiser, $a_{2 \ 1/2}^{2 \ 1/2} (5/2, 5/2) = 1$. **(1 valor)**

- c) Aplicando o operador \hat{J}_- a $|5/2 \ 5/2, 2 \ 1/2\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |5/2 \ 5/2, 2 \ 1/2\rangle &= \hbar \sqrt{\frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} + 1\right) - \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} - 1\right)} |5/2 \ 3/2, 2 \ 1/2\rangle \\ &= \sqrt{5} \hbar |5/2 \ 3/2, 1 \ 1/2\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Mas isto é igual a

$$\begin{aligned} (\hat{L}_- + \hat{S}_-) |2 \ 2 \ 1/2 \ 1/2\rangle &= \hbar \sqrt{2(2+1) - 2(2-1)} |2 \ 1 \ 1/2 \ 1/2\rangle + \hbar |2 \ 2 \ 1/2 \ -1/2\rangle \\ &= 2\hbar |1 \ 0 \ 1/2 \ 1/2\rangle + \hbar |1 \ 1 \ 1/2 \ -1/2\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

onde aplicamos \hat{L}_- e \hat{S}_- , respetivamente, a $|2 \ 2\rangle$ e $|1/2 \ 1/2\rangle$ (note que $|2 \ 2 \ 1/2 \ 1/2\rangle = |2 \ 2\rangle \otimes |1/2 \ 1/2\rangle$). Igualando as duas partes, obtemos

$$\begin{aligned} |5/2 \ 3/2, 2 \ 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2 |2 \ 1 \ 1/2 \ 1/2\rangle \\ &\quad + |2 \ 2 \ 1/2 \ -1/2\rangle), \end{aligned}$$

cqd.

(2 valores)

d) Tal como na equação (1), temos

$$|3/2\ 3/2, 2\ 1/2\rangle = \sum_{m_l+m_s=m_j} a_{m_l m_s}^{2\ 1/2}(3/2, m_j) |2\ m_l\ 1/2\ m_s\rangle. \quad (4)$$

Mas, para $m_j = 3/2$, ou $m_l = 1$ e $m_s = 1/2$, ou $m_l = 2$ e $m_s = -1/2$. Assim, podemos escrever

$$|3/2\ 3/2, 2\ 1/2\rangle = \alpha |2\ 1\ 1/2\ 1/2\rangle + \beta |2\ 2\ 1/2\ -1/2\rangle, \quad (5)$$

em que α e β são os únicos coeficientes de Clebsch-Gordan não nulos neste caso, com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, já que o estado está normalizado.

Mas, $\langle 5/2\ 3/2, 2\ 1/2 | 3/2\ 3/2, 2\ 1/2 \rangle = 0$, uma vez que estes estados são forçosamente ortogonais, já que são estados próprios de \hat{J}^2 , com valores próprios distintos. Assim, $2\alpha + \beta = 0$, pelo que

$$|3/2\ 3/2, 2\ 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (|2\ 1\ 1/2\ 1/2\rangle - 2|2\ 2\ 1/2\ -1/2\rangle),$$

que está devidamente normalizado.

(1 valor)

Exercício 2: Teoria de perturbações independentes do tempo

Consideramos um oscilador harmónico bi-dimensional isotrópico, cuja dinâmica é descrita por um Hamiltoniano $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + 1)$, em que os operadores de destruição de criação são dados por $\hat{a}_x = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}}\hat{p}_x\right)$, $\hat{a}_x^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}}\hat{p}_x\right)$, $\hat{a}_y = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{y} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}}\hat{p}_y\right)$, $\hat{a}_y^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{y} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}}\hat{p}_y\right)$.

Aqui \hat{x} , \hat{p}_x , \hat{y} e \hat{p}_y são os operadores de posição e momento nas direções cartesianas de x e y . Dadas as relações de comutação entre estes operadores, resulta que $[\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] = \hat{1}$ e $[\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger] = \hat{1}$, sendo que os restantes comutadores que envolvem operadores de criação e destruição são nulos.

Consideramos a perturbação $\hat{H}_1 = -\frac{\epsilon}{m}\hat{p}_x\hat{p}_y$. Convenientemente, iremos representá-la em termos dos operadores de criação e destruição. Para tal, basta representar os operadores \hat{p}_x e \hat{p}_y em termos desses operadores. Utilizando as expressões dadas acima e subtraindo \hat{a}_x^\dagger a \hat{a}_x , e \hat{a}_y^\dagger a \hat{a}_y , facilmente concluímos que $\hat{p}_x = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger)$, e que $\hat{p}_y = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger)$, pelo que obtemos

$$\hat{H}_1 = \frac{\epsilon\hbar\omega_0}{2}(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger). \quad (6)$$

a) Temos $E_{0,0}^1 = \langle 0, 0 | \hat{H}_1 | 0, 0 \rangle$. Ora, o único produto de operadores presente na equação (6) que não destrói o estado fundamental é o termo que envolve $\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger$. Mas, $\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger | 0, 0 \rangle = | 1, 1 \rangle$, utilizando as regras para a ação dos operadores de criação nos estados dadas no formulário, e portanto, $\langle 0, 0 | \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger | 0, 0 \rangle = \langle 0, 0 | 1, 1 \rangle = 0$, já que os dois estados são ortogonais, pelo que $E_{0,0}^1 = 0$. (2 valores)

b) Temos $E_{0,0}^2 = \sum_{n_x \neq 0 \vee n_y \neq 0} \frac{|\langle n_x, n_y | \hat{H}_1 | 0, 0 \rangle|^2}{E_{0,0} - E_{n_x, n_y}}$. Como vimos, $\hat{H}_1 | 0, 0 \rangle = \frac{\epsilon\hbar\omega_0}{2}\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger | 0, 0 \rangle = \frac{\epsilon\hbar\omega_0}{2} | 1, 1 \rangle$, pelo que

$$E_{0,0}^2 = \frac{\epsilon^2\hbar^2\omega_0^2}{4} \sum_{n_x \neq 0 \vee n_y \neq 0} \frac{|\langle n_x, n_y | 1, 1 \rangle|^2}{E_{0,0} - E_{n_x, n_y}}. \quad (7)$$

Dada a ortogonalidade dos estados, o único termo nesta soma que sobrevive é o termo em que $n_x = 1$ e $n_y = 1$. Como $E_{0,0} = \hbar\omega_0$ e $E_{1,1} = 3\hbar\omega_0$, obtemos finalmente $E_{0,0}^2 = -\frac{\epsilon^2 \hbar \omega_0}{8}$. **(2 valores)**

- c) Os primeiros estados excitados deste sistema são degenerados e são naturalmente o estado em que $n_x = 1$ e $n_y = 0$, ou seja $|1, 0\rangle$, e o estado em que $n_x = 0$ e $n_y = 1$, ou seja $|0, 1\rangle$, com energia $E_{1,0} = E_{0,1} = 2\hbar\omega_0$. Como é sabido, para encontrar as correções de primeira ordem da energia em teoria de perturbações para estados degenerados, devemos diagonalizar a perturbação no subespaço dos níveis de energia degenerados. Temos $\langle 1, 0 | \hat{H}_1 | 1, 0 \rangle = 0$, $\langle 0, 1 | \hat{H}_1 | 0, 1 \rangle = 0$, $\langle 0, 1 | \hat{H}_1 | 1, 0 \rangle = -\frac{\epsilon \hbar \omega_0}{2} \langle 0, 1 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x | 1, 0 \rangle = -\frac{\epsilon \hbar \omega_0}{2}$ e $\langle 1, 0 | \hat{H}_1 | 0, 1 \rangle = -\frac{\epsilon \hbar \omega_0}{2} \langle 1, 0 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y | 0, 1 \rangle = -\frac{\epsilon \hbar \omega_0}{2}$, utilizando as regras para a ação dos operadores de criação e destruição dadas no formulário (o operador $\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger$ leva-nos para fora deste subespaço, enquanto que o operador $\hat{a}_y \hat{a}_x$ destrói ambos os estados). Somos pois levados a diagonalizar uma matriz 2×2 , o que implica que a seguinte equação secular deve ser satisfeita

$$\begin{vmatrix} -E & -\frac{\epsilon \hbar \omega_0}{2} \\ -\frac{\epsilon \hbar \omega_0}{2} & -E \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

ou seja, $E^2 - \frac{\epsilon^2 \hbar^2 \omega_0^2}{4} = 0$, com soluções $E = \pm \frac{\epsilon \hbar \omega_0}{2}$, que são as correções desejadas. Os vetores próprios dessa matriz são os estados naturais para se prosseguir a análise de teoria de perturbações e encontrar as correções às funções de onda em primeira ordem na perturbação, mas não eram aqui pedidos. **(2 valores)**

Exercício 3: Teoria de perturbações dependentes do tempo

Um oscilador harmónico em uma dimensão, de carga $-e$, caracterizado pelo Hamiltoniano $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + 1/2)$, interage com um campo elétrico constante. Tal perturbação pode ser representada (aparte uma constante dependente do tempo irrelevante) na chamada gauge de Weyl, como $\hat{H}_1(t) = -\frac{e\mathcal{E}t}{m} \hat{p}_x$, em que \mathcal{E} é a magnitude do campo elétrico.

No instante inicial, $t = 0$, o oscilador encontra-se no seu primeiro estado excitado, ou seja, o estado com $n_x = 1$, $|1\rangle$, com energia $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$, momento a partir do qual a perturbação é aplicada.

Desejamos calcular a probabilidade de transição para o estado fundamental do sistema não perturbado, ou seja, o estado com $n_x = 0$, $|0\rangle$, com energia $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$, a $t = T$.

A equação para a amplitude de transição é dada genericamente por

$$\gamma_{n \rightarrow m}^1(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t du \langle m | \hat{H}_1(u) | n \rangle e^{-i\omega_{nm}(u-t_0)}, \quad (9)$$

em que $\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ e t_0 é o momento em que a perturbação é aplicada. Neste caso, $t_0 = 0$, $t = T$, $|n\rangle = |1\rangle$, $|m\rangle = |0\rangle$ e $\omega_{nm} = \omega_0$, pelo que temos que calcular a seguinte quantidade

$$\begin{aligned} \gamma_{1 \rightarrow 0}^1(T) &= \frac{ie\mathcal{E}}{\hbar m} \langle 0 | \hat{p}_x | 1 \rangle \int_0^T du u e^{-i\omega_0 u} \\ &= \frac{ie\mathcal{E}}{\hbar m \omega_0^2} \langle 0 | \hat{p}_x | 1 \rangle \int_0^{\omega_0 T} dv v e^{-iv}, \end{aligned} \quad (10)$$

após a substituição de variável $v = \omega_0 u$ no penúltimo integral. Desenvolvendo agora $e^{-iv} = \cos v - i \sin v$ no integral e, escrevendo $\hat{p}_x = -i\sqrt{\frac{\hbar m \omega_0}{2}}(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger)$, pelo que

$$\langle 0 | \hat{p}_x | 1 \rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m \omega_0}{2}} \langle 0 | (\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) | 1 \rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m \omega_0}{2}},$$

dado que $\hat{a}_x | 1 \rangle = | 0 \rangle$ e $\langle 0 | \hat{a}_x^\dagger = 0$, e utilizando os integrais dados no formulário, obtemos

$$\gamma_{1 \rightarrow 0}^1(T) = \frac{e\mathcal{E}T}{\sqrt{2m\hbar\omega_0}} \left[\left(\sin(\omega_0 T) - \frac{1 - \cos(\omega_0 T)}{\omega_0 T} \right) + i \left(\cos(\omega_0 T) - \frac{\sin(\omega_0 T)}{\omega_0 T} \right) \right]. \quad (11)$$

A probabilidade de transição procurada é simplesmente o módulo quadrado desta expressão, pelo que obtemos, após o desenvolvimento dos quadrados da parte real e da parte imaginária, o resultado

$$p_{1 \rightarrow 0}^1(T) = \frac{e^2 \mathcal{E}^2 T^2}{2m\hbar\omega_0} \left(1 - \frac{2 \sin(\omega_0 T)}{\omega_0 T} + \frac{4 \sin^2(\omega_0 T/2)}{\omega_0^2 T^2} \right). \quad (12)$$

Note que esta probabilidade cresce quadraticamente com o tempo, o que implica que o tratamento só é válido para T suficientemente pequeno, tal que $\frac{e^2 \mathcal{E}^2 T^2}{2m\hbar\omega_0} \ll 1$.

De qualquer forma, a magnitude da perturbação cresce linearmente com o tempo, pelo que a condição de aplicação da teoria de perturbações é justamente que devemos considerar T pequeno.

(3 valores)

Exercício 4: Dinâmica de um spin 1/2

Um spin 1/2, que se encontra no estado próprio de $\hat{\sigma}_z$ com valor próprio igual a +1, penetra, a $t = 0$, numa região em que existe um campo magnético segundo y , de tal modo que o Hamiltoniano que descreve a sua dinâmica é dado por $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_y$.

- a) Os estados próprios deste Hamiltoniano são os estados próprios de $\hat{\sigma}_y$, $|+, \hat{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|-\rangle)$ e $|-, \hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$, com energias iguais a $E_{\pm} = \mp \frac{\hbar\omega_0}{2}$.

O estado inicial pode escrever-se à custa destes estados como $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, \hat{y}\rangle + |-, \hat{y}\rangle)$.

A sua evolução temporal é dada por

$$\begin{aligned} |\Psi_t\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{iE_+}{\hbar}t}|+, \hat{y}\rangle + e^{-\frac{iE_-}{\hbar}t}|-, \hat{y}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\frac{i\omega_0 t}{2}}|+, \hat{y}\rangle + e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}}|-, \hat{y}\rangle) \\ &= \cos(\omega_0 t/2)|+\rangle - \sin(\omega_0 t/2)|-\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

onde reexpressamos a evolução temporal em termos da base de auto-estados de $\hat{\sigma}_z$.

(2 valores)

- b) O valor de t mínimo necessário para que $|\Psi_t\rangle = e^{i\alpha}|+, \hat{x}\rangle$, em que α é a fase do estado, é dado por $t_{\min} = \frac{3\pi}{2\omega_0}$, sendo que nesse caso $\alpha = \pi$. Se o spin viajar em linha reta com velocidade constante v , $L_{\min} = vt_{\min} = \frac{3\pi v}{2\omega_0}$.

(1 valor)

Exercício 5: *Anti-simetria da função de onda de um sistema atômico com dois férmions*

Consideramos um estado excitado do átomo ${}^4\text{He}$, onde o primeiro elétron ocupa o nível $2s$, sendo a projeção do seu spin ao longo do eixo z igual para $-\hbar/2$ e o segundo elétron ocupa o nível $3s$, sendo a projeção do seu spin ao longo do eixo z também igual a $-\hbar/2$.

Este estado pode ser escrito, em termos das funções de onda que dependem das coordenadas espaciais e de spin, como $\varphi_{2s}(\mathbf{r}_1) \varphi_{3s}(\mathbf{r}_2) |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2$. O operador que, quando aplicado a este estado, produz o estado normalizado e antissimétrico apropriado, é dado por $\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} - \hat{P}_{12})$, sendo \hat{P}_{12} o operador que permuta as coordenadas espaciais e de spin dos dois elétrons. Após a anti-simetrização, obtém-se o estado

$$\begin{aligned} |\Psi_A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} - \hat{P}_{12})\varphi_{2s}(\mathbf{r}_1) \varphi_{3s}(\mathbf{r}_2) |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{2s}(\mathbf{r}_1) \varphi_{3s}(\mathbf{r}_2) |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 - \varphi_{2s}(\mathbf{r}_2) \varphi_{3s}(\mathbf{r}_1) |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{2s}(\mathbf{r}_1) \varphi_{3s}(\mathbf{r}_2) - \varphi_{2s}(\mathbf{r}_2) \varphi_{3s}(\mathbf{r}_1)) |--\rangle. \end{aligned}$$

A densidade de probabilidade para encontrar os elétrons nas localizações $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ é dada pelo módulo quadrado $|\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2$, onde $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{2s}(\mathbf{r}_1) \varphi_{3s}(\mathbf{r}_2) - \varphi_{2s}(\mathbf{r}_2) \varphi_{3s}(\mathbf{r}_1))$ é a parte orbital da função de onda. No entanto, tal parte orbital é anti-simétrica na troca das duas coordenadas \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 e portanto $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) = 0$, ou seja, a densidade de probabilidade para encontrar os dois elétrons no mesmo local e com o mesmo spin é 0, como é bem conhecido.

(2 valores)

Exercício 6*: *Manipulação de um spin recorrendo a dois campos magnéticos distintos*

Se um spin $1/2$ se encontra, a $t = 0$, no estado próprio de $\hat{\sigma}_z$ com valor próprio igual a $+1$, não é possível, aplicando um campo magnético constante ao longo de x , ou de z , fazê-lo evoluir de modo a que se encontre, num instante $T > 0$, no estado próprio de $\hat{\sigma}_x, |+, \hat{x}\rangle$. Mas, se a dinâmica do sistema for determinada à vez pelos Hamiltonianos $\hat{H} = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_x$ e $\hat{H}' = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z$, é possível obter esse estado.

É claro que a dinâmica do sistema deve ser primeiro determinada por \hat{H} e só depois por \hat{H}' . De contrário, a evolução de $|+\rangle$ devida a \hat{H}' devolve simplesmente este estado multiplicado por uma fase, pelo que a evolução posterior devida a \hat{H} não poderia produzir $|+, \hat{x}\rangle$.

Uma resposta possível é que o sistema esteja sujeito à dinâmica determinada por \hat{H} durante um tempo T_1 tal que dessa evolução resulta o estado $|+, \hat{y}\rangle$. A evolução de $|+\rangle$ devida a \hat{H} é dada por

$$|\chi_{T_1}\rangle = \cos(\omega_0 T_1/2) |+\rangle + i \sin(\omega_0 T_1/2) |-\rangle, \quad (14)$$

sendo que obtemos o estado $|+, \hat{y}\rangle$, se escolhermos $T_1 = \frac{\pi}{2\omega_0}$.

Se agora aplicarmos a dinâmica determinada por \hat{H}' a $|+, \hat{y}\rangle$, tratando-o como estado inicial, este estado evolui após um intervalo de tempo T_2 para se tornar o estado

$$\begin{aligned} |\Phi_{T_2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\omega_0 T_2}{2}} |+\rangle + i e^{-\frac{i\omega_0 T_2}{2}} |-\rangle) \\ &= \frac{e^{-\frac{i\omega_0 T_2}{2}}}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i e^{-i\omega_0 T_2} |-\rangle), \end{aligned} \quad (15)$$

pelo que obtemos $|\Phi_{T_2}\rangle = e^{i\pi/4} |+, \hat{x}\rangle$, se $T_2 = \frac{\pi}{2\omega_0}$, ou seja $T = T_1 + T_2 = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Repare que, se reduzíssemos o valor dos campos aplicados para $2/3$ do valor original, $\omega_0 \rightarrow \frac{2}{3}\omega_0$, o valor de T seria igual a t_{\min} , obtido no exercício 4.

Podem os estados obtidos com um e o outro protocolo ser distinguidos? Não podem, porque as fases *per si* são irrelevantes, mas se aplicássemos o campo segundo y ao longo dos dois braços superiores de um interferômetro de Mach-Zehnder, e os campos segundo x e z ao longo, respectivamente, do primeiro e segundo braço inferior desse interferômetro, poderíamos observar uma interferência destrutiva parcial, já que a fase obtida percorrendo um caminho é π , e a obtida percorrendo o outro é $\pi/4$.
(2 valores extra)