Incertezas e Propagação de Incertezas

Cursos:	Biologia
	Biologia Marinha
Disciplina:	Física
Docente:	Carla Silva

Nos cálculos deve:

- Ser coerente nas unidades (converter tudo para S.I. e atender às potências de 10).
- Fazer uma análise dimensional (considerar
- as dimensões como quantidades algébricas).
- Ter noção da ordem de grandeza.
- Considerar os algarismos significativos.

As incertezas podem corresponder a:

- Uma série de medidas
  - **Aleatórias ou acidentais** – são aquelas que tendem, com igual probabilidade, a tornar as medidas mais elevadas ou menos elevadas – ex: carregar num cronómetro.
  - **Sistemáticas** - são aquelas em que a medida vem sempre influenciada num dos sentidos – ex: termómetro que mede sempre 1ºC acima do valor real.

- Uma única medida
  - **De leitura** – são aquelas que estão relacionadas com o aparelho de medida – ex: régua graduada.

A incerteza de leitura…

…é tida, habitualmente, como metade da menor divisão do aparelho (ex: régua graduada); no entanto, também pode ser a menor divisão (ex: cronómetro – descontínuo).

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ***Regra 1*** - A medida deve vir sempre acompanhada da incerteza de leitura:

$$x = x_{\mathbf{med}} \pm \Delta x_{\mathbf{leit}}$$

- ***Regra 2*** – x e Δx devem ter ambos o mesmo nº de casas decimais.

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- Para estimar a incerteza aleatória, realizamos *n* medidas e admitimos que o valor mais provável é o ***valor médio***, definido por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- O ***desvio de uma medida em relação ao valor médio*** é, então, dado por:

$$\delta x_i = x_i - \bar{x}$$

- Nesta sequência, define-se ***desvio médio***, que quantifica o efeito das incertezas aleatórias, como:

$$\Delta x_{\text{obs}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\delta x_i\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ex:

	t(s)	Δt_{leit}(s)
	0.45	0.01
	0.40	0.01
	0.51	0.01
	0.47	0.01
	0.46	0.01

$$\bar{t} = \mathbf{0.46\ s} \qquad t_{obs} = \mathbf{0.03\ s}$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- O resultado de uma série de medidas pode ser escrito na forma:

$$\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}} \pm \Delta \boldsymbol{x}_{\mathbf{obs}}$$

- Ou seja, considerando os dados anteriores:

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{0.46} \pm \mathbf{0.03\ s}$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- **Regra 3** - As quantidades e devem ter ambos o mesmo nº de casas decimais e igual ao de (que é a grandeza que determina o nº de casas decimais).

- A medida deve, então, ser dada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} \pm \mathbf{Max}\left\{\Delta \boldsymbol{x}_{\mathbf{obs}}, \Delta \boldsymbol{x}_{\mathbf{leit}}\right\}$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- Se o nº de observações for maior que 10, a incerteza observacional pode vir dada pelo ***desvio padrão da média*** ou ***incerteza padrão***:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- Neste caso, σ_m substitui Δx_{obs}.

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- O resultado vem, então, dado por:

$$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} \pm \sigma_{\boldsymbol{m}}$$

com o seguinte significado: existe 67% de probabilidades de o valor real estar

entre $\bar{\boldsymbol{x}} - \sigma_{\boldsymbol{m}}$ **e** $\bar{\boldsymbol{x}} + \sigma_{\boldsymbol{m}}$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- A este respeito, existe também a grandeza ***desvio padrão***, dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

que dá uma medida da **dispersão** dos valores experimentais.

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- Comparação entre σ e σ_m:

σ_m	σ
incerteza ao assumir-se o valor médio como o valor mais provável	dispersão dos valores experimentais
é dado por: $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
$\longrightarrow$ 0, quando $n \longrightarrow \infty$	$\longrightarrow$ valor constante, quando $n \longrightarrow \infty$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- Em alguns casos, usa-se σ quando n<10 e σ_m quando $n \geq 10$, embora estes critérios variem com o experimentalista.

- ***Regra 4*** – Nos passos intermédios dos cálculos podem considerar-se todas as casas decimais, o arredondamento para o nº de casas decimais correcto faz-se apenas no final.

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ***Regra 5*** – Na soma e subtracção de várias parcelas o resultado final mantém o nº de casas decimais da parcela que as tiver em menor nº.

- ***Regra 6*** – Se o 1º algarismo a desprezar for menor que 5, o último a ser conservado mantém-se inalterado.

ex: $45.42 \approx 45.4$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ***Regra 7*** – Se o 1º algarismo a desprezar for maior que 5, ao último a ser conservado acrescenta-se 1.

  ex: $45.47 \approx 45.5$

- ***Regra 8*** – Se o 1º algarismo a desprezar for igual a 5, o último a ser conservado deve ser ímpar (par).

  ex: $45.45 \approx 45.5$ (45.4)

  ex: $45.75 \approx 45.7$ (45.8)

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- O nº de algarismos significativos está relacionado com a escala do instrumento de medida, que, por sua vez, determina a incerteza de leitura e, portanto, o nº de casas decimais a considerar.

- Está também relacionado com a ordem de grandeza do valor a que diz respeito.

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ***Regra 9*** – Os zeros à esquerda do 1º algarismo diferente de zero, não são considerados.

- ***Regra 10*** – Se o último algarismo é zero, ele só conta como algarismo significativo se houver um ponto decimal na expressão (por poder ser ambíguo, deve-se usar a notação científica).

- ***Regra 11*** – Se o 1º algarismo diferente de zero for maior ou igual a 5, então ele conta como dois algarismos significativos.

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ex: A.S.

0015	2
0,015	2
0.100005	6
150	2
15000	2
300.	3
30.0	3
44.0000	6
55.0000	7
666	4
777000	4
777001	7

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- **Regra 12** – O resultado da multiplicação ou divisão de duas medidas tem o número de algarismos significativos da parcela com menor nº de algarismos significativos.

ex:	$7.24 \times 0.0013 = 0.009412$	(4×2)	0.009
	$100.01 / 27 = 3.704074...$	(5×2)	3.7
	$462 / 247 = 1.870445...$	(3×3)	1.87
	$5.2 \times 10^{26} \times 1.3 \times 10^{-18} = 6.76 \times 10^{8}$	(3×2)	7 x 108
	$5.2 \times 10^{26} \times 1.30 \times 10^{-18} = 6.76 \times 10^{8}$	(3×3)	6.8 x 108

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- O nº de algarismos significativos não muda com a unidade de medida escolhida:

  ex: $1.23mm = 0.00123m = 1.23 \times 10^{-3}m$

- ***Regra 13*** – O nº de algarismos significativos de uma grandeza obtida a partir de outras por uma operação arbitrária é dado pela regra da multiplicação (regra 12), excepto se se trata de uma soma simples. O arredondamento faz-se sempre no fim.

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ex:

$$z(l_1, l_2) = \frac{l_1^2}{\sqrt{l_2}} + \frac{l_2^2}{\sqrt{l_1}}$$

$l_1 = 3.0$ cm

$l_2 = 2.20$ cm

$$z = \frac{3.0^2}{\sqrt{2.20}} + \frac{2.20^2}{\sqrt{3.0}} = 8.8623\ \mathrm{cm}^{3/2} = 9\ \mathrm{cm}^{3/2}$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- Sejam: x_1, x_2,..., x_n medidas experimentais afectadas de incertezas Δx_1, Δx_2,..., Δx_n, e seja $y = y(x_1, x_2,..., x_n)$ uma função das medidas x_i, a incerteza associada a y é dada por:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- Casos particulares:

$$z = a \pm b \pm c\ldots \qquad (\Delta z)^2 = (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2 + \ldots$$

$$z = abc\ldots \qquad (\Delta z)^2 = z^2\left[\frac{(\Delta a)^2}{a^2} + \frac{(\Delta b)^2}{b^2} + \frac{(\Delta c)^2}{c^2} + \ldots\right]$$

$$z = \frac{a}{b} \qquad (\Delta z)^2 = \frac{1}{b^2}(\Delta a)^2 + \frac{a^2}{b^4}(\Delta b)^2$$

$$z = a^n \qquad \Delta z = n\left(\frac{z}{a}\right)(\Delta a)$$

$$z = ka \qquad \Delta z = k\Delta a$$

$$z = e^{ka} \qquad \Delta z = kz\Delta a$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ex:

$$s = 1.0000 \pm 0.0005\ \text{m (régua graduada em mm)}$$

$$t = 0.46 \pm 0.03\ \text{s}$$

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow g = \frac{2s}{t^2} \Leftrightarrow g = \frac{2 \times 1.0000}{0.46^2} = 9.45\ \text{m/s}^2 = 9\ \text{m/s}^2$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\Delta s\right)^2 + \left(\frac{-2 \times 2s}{t^3}\right)^2 (0.03)^2} = 1.2325\ \text{m/s}^2 = 1\ \text{m/s}^2$$

$$g = 9 \pm 1\ \text{m/s}^2$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- Pode considerar-se que os factores que aparecem nos cálculos têm uma precisão infinita.

- A ***precisão da medida*** vem dada pela razão:

$$\frac{\Delta x}{x}$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- A precisão pode servir para resolver casos especiais…

- ***Regra 14*** – Numa operação sobre várias grandezas, o valor final deve ter aproximadamente a mesma precisão da grandeza com menor precisão.

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- ex: triângulo rectângulo

Catetos: $a = 3.3 \pm 0.1\text{cm}$

$b = 6.6 \pm 0.1\text{cm}$

Hipotenusa:

$$\boldsymbol{h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3.3^2 + 6.6^2} = 7.37902\ \text{cm} = 7\ \text{cm}}$$

$$\boldsymbol{\Delta h = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta b\right)^2} = 0.1\text{cm} = 0\ \text{cm}}$$

Regras para apresentar e estimar as incertezas associadas a medidas

- Calculando a precisão associada a cada uma das quantidades:

$$\frac{0.1}{3.3} \rightarrow 3.0\% \qquad \frac{0.1}{6.6} \rightarrow 1.5\% \qquad \frac{0.1}{7.4} \rightarrow 1.4\%$$

- Como se verifica, a precisão associada ao resultado, embora um pouco mais pequena do que a associada aos dados, é da mesma ordem de grandeza, portanto, é aceitável apresentar o resultado como:

$$h = 7.4 \pm 0.1 \text{ cm}$$