Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEngFis e LFis

Cálculo para Ciências

2^0 teste — 04.01.2023

Justifique todas as respostas.

Exercício 1. [1,0 valor] Mostre que, para todo o $x \in \mathbb{R}$ se tem $\operatorname{ch}^2(x) = \frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}$.

Exercício 2. [14,0 valores] Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(2e^x-4)^{\frac{3}{2}}}\,dx$;

b) $\displaystyle\int x^3 \, \ln(x+1)\,dx$;

c) $\displaystyle\int x^3(1+2x^2)^6\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{2(x-1)(x+1)^2}\,dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x^2}}\,dx$, fazendo a mudança de variável $x=\sqrt{u^4-1}$;

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)+1}\,dx$, fazendo a mudança de variável $\operatorname{sen}(x)=t$.

Exercício 3. [2,5 valores] Considere a região $R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|-1 \leq y \leq 1-x^2\right\}$.

a) Faça um esboço de R.

b) Calcule a área de R,

Exercício 4. [2,5 valores]

a) Utilize integração por partes para mostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\,\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,\cos^2(x)\,dx.$$

b) Denotando $I_n = \displaystyle\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx$, mostre que

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \qquad I_n = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\,\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

FIM

BOA SORTE