Mecanização da Resolução de exercícios

Soluções Estacionárias

$$u(x,t) = X(x)$$

• Dada uma equação de calor φ, no intervalo x, com condições de fronteira α. Tome-se este exemplo, em que $\varphi \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in [0,\pi]$ e $\alpha \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$.

Procura-se uma função $u(x,t)$. Porém, como a solução desejada é estacionária, não dependerá do tempo, pelo que será do tipo $u(x,t) = X(x)$.
Além disso, como $u(x,t)$ não depende de t, então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Se a segunda derivada de u em ordem a x é 0 ($X''(x) = 0$), a primeira derivada terá de ser uma constante. Porém, como $X'(0) = X'(\pi) = 0$, sabe-se que $X'(x) = 0$. Assim, $X(x) =$ constante.

Soluções Separáveis

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

• Dada uma equação do calor φ, no intervalo x, com condições fronteira α, pode determinar-se as soluções separáveis.

Ex: $\varphi \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad x \in [0,\pi]$ $\quad \alpha \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$

Tendo em conta que se procura uma solução do tipo $u(x,t) = X(x)T(t)$, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

Igualando: $XT' = X''T \Leftrightarrow \boxed{\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \kappa}$ $\qquad n = \lambda$

Se $\kappa = -\lambda^2$, $\lambda > 0$:

$$X'' = -\lambda^2 X \Rightarrow X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$
$$T' = -n^2 T \Rightarrow T(t) = C e^{-n^2 t}$$

C.A. $X'(x) = -A\lambda \operatorname{sen}(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x)$ e $X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(\lambda x)$
$X'(\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = n, \; n \in \mathbb{Z}$

$u(x,t)$ é proporcional a $e^{-n^2 t}\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Série de Fourier

- Série de Fourier de Senos

$$\varphi_i(x) = \sum b_n \sin(nx)$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin(nx)\,dx}$$

Ex: $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ $[0,\pi]$ $\qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(nx)\,dx$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \underbrace{\varphi(x)}_{1}\sin(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \underbrace{\varphi(x)}_{0}\sin(nx)\,dx\right)$$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)\,dx \Leftrightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} \Leftrightarrow b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

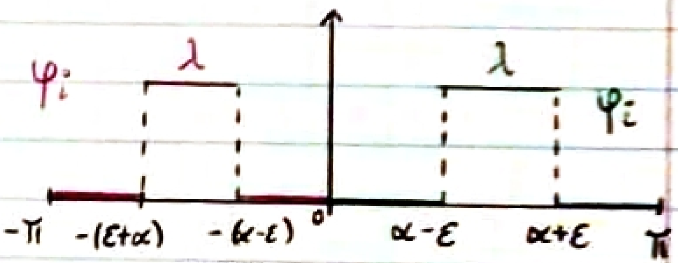
$$\varphi_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos(\pi n/2)}{n}\sin(nx)$$

- Série de Fourier de Cossenos

$$\varphi_i \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos(nx)\,dx} \qquad \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_p(x)\,dx}$$

Ex. $\varphi(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } |x-\alpha| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x-\alpha| > \varepsilon \end{cases}$



$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos(nx)\,dx$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{2\lambda}{\pi}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\cos(nx)\,dx \Leftrightarrow a_n = \frac{2\lambda}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \Leftrightarrow a_n = \frac{4\lambda}{\pi n}\cos(n\alpha)\sin(n\varepsilon)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_p(x)\,dx \Leftrightarrow a_0 = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\int_{-\varepsilon-\alpha}^{\varepsilon-\alpha}dx + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}dx\right) \Leftrightarrow a_0 = \frac{2\varepsilon\lambda}{\pi}$$

$$\varphi(x) \sim \frac{2\varepsilon\lambda}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\lambda}{n\pi}\cos(n\alpha)\cos(nx)\sin(n\varepsilon)$$

Nota: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} a\,d\varphi = \int_0^{\pi} 2a\,d\varphi$

Solução Formal

Exemplo 1: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ } corda vibrante $\quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$u(x,0) = \sin(3x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x)$

$u(x,t) = X(x)T(t)$

$$XT'' = X''T \Leftrightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = K = -n^2$$

Assim, $X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$ $\qquad T(t) = C\cos(nt) + D\sin(nt)$

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow X(x) = B\sin(\lambda x)$

$u(x,t) = \sum X(x)\,T(t) \Leftrightarrow u(x,t) = \sum (C\cos(nt) + D\sin(nt))\sin(nx)$

$\Leftrightarrow u(x,0) = \sin(3x)$

$\Leftrightarrow \sin(3x) = (C\cos 0 + \cancel{D\sin 0}^{\,0})\sin(nx) \Leftrightarrow C = 1 \wedge n = 3$

Assim:

$$u(x,t) = \cos(3t)\sin(3x) + \sum D\sin(nt)\sin(nx)$$

Como:

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi/2))\sin(nx)$ (exercício anterior)

Então: $\cancel{\sum} D.n.\cancel{\sin(nx)} = \cancel{\sum} \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi/2))\cancel{\sin(nx)}$

$\Leftrightarrow D = \frac{2}{n^2\pi}(1-\cos(n\pi/2))$ $\qquad u(x,t) = \sum \frac{2}{n^2\pi}(1-\cos(n\pi/2))\sin(nt)\sin(nx) + \sin(3x)\cos(3t)$

Soluções Separáveis e Limitadas

Ex.

Equação de ondas: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$

$XT'' = c^2X''T \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}\cdot\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow X'' = \lambda X$ e $T'' = c\lambda T$

$X = e^{inx} \qquad T = e^{\pm inct} \qquad u(x,t) = e^{in(x \pm ct)} \qquad p \in \mathbb{R}$

Demonstração $\boxed{g_t * g_s = g_{t+s}}$ A transformada de Fourier do produto de convolução $g_t * g_s$ é:

$\widehat{g_t * g_s}(\xi) = \hat{g}_t(\xi)\,\hat{g}_s(\xi) = e^{-\pi t\xi^2}e^{-\pi t\xi^2} = e^{-\pi(t-s)\xi^2}$

O que é a transformada de Fourier de g_{t+s}.