Universidade do Minho

Problemas de Mecânica Analítica e Ondas

Série 7 – Sobreposição de Movimentos Periódicos

A sobreposição de movimentos periódicos é um fenómeno presente em muitas situações físicas de interesse. Resolva os seguintes problemas sobre esse tema:

1- Expresse na forma $x = \mathrm{Re}[A\, e^{i(\omega t+\alpha)}] = A\, \cos(\omega t+\alpha)$ onde $A > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ os seguintes desvios vibracionais:

(a) $x = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$.

(b) $x = \cos(\omega t - \pi/3) - \cos(\omega t)$.

(c) $x = 3\cos(\omega t) + 2\sin(\omega t)$.

(d) $x = \cos(\omega t) + \sin(\omega t) - 2\cos(\omega t - \pi/4) + \cos(2\omega t + \pi/8) + \sin(2\omega t - 3\pi/8)$.

2- Os desvios de duas vibrações ao longo da mesma linha são descritos pelas equações:

$x_1 = A\cos(10\pi t)$,

$x_2 = A\cos(12\pi t)$.

Faz-se notar que 10π e 12π são dados em unidades de s^{-1} (por segundo).

Determine o período de batimento da vibração resultante e produza uma figura com a dependência no tempo do desvio dessa vibração de envelope ao longo de um período de batimento.

3- Determine a amplitude $A > 0$, frequências ω e ν e fase na origem $\alpha \in [-\pi, \pi]$ do movimento combinado do seguinte par de movimentos harmónicos simples:

$x = \cos(2\pi t) + \sin(2\pi t - \sqrt{2})$.

Aqui 2π é dado em unidades de s^{-1} (por segundo).

4- Determine as frequências ω e ν do movimento combinado dos seguintes pares de movimentos harmónicos simples, que durante um certo número de ciclos corresponde a uma vibração que se aproxima de um comportamento sinusoidal:

(a) $x = \cos(13\pi t - \pi/4) + \sin(12\pi t)$.

(b) $x = -\cos(\pi t) + \sin(3t)$.

Como anteriormente, 13π, 12π, π e 3 são dados em unidades de s^{-1} (por segundo).

Nota: O seguinte problema 5 não será resolvido na sala de aula, pois o correspondente tipo de problema não será alvo de avaliação. A sua resolução é pois facultativa.

5- Os desvios de duas vibrações ao longo de linhas perpendiculares são descritos pelas equações:

$x = 10\cos(5\pi t)$,

$y = 10\cos(10\pi t + \pi/3)$.

Aqui 5π e 10π são dados em unidades de s^{-1} (por segundo).

Construa a figura de Lissajous do movimento combinado dessas vibrações.

Sugestão: O número mínimo de pontos $[x, y]$ necessários para obter alguma informação sobre a forma da figura de Lissajous é de 24. Estes pontos estão associados a 25 instantes de tempo (o primeiro e último dos quais correspondem ao mesmo ponto) e correspondentes valores sucessivos dos argumentos das funções cos nas expressões de x e y, dados por $(5\pi t) = j\pi/12$ e $(10\pi t + \pi/3) = \pi/3 + j\pi/6$, respetivamente, onde $j = 0, 1, 2, ..., 24$. Contudo, devido à periodicidade da função cos, basta calcular os 13 primeiros pontos, correspondentes a $j = 0, 1, 2, ..., 12$. Os restantes 11 pontos são calculados diretamente na figura, por simetria.

Dados auxiliares

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = 0.5 \\
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \\
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866 \\
\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) &\approx 0.1872\,\pi
\end{aligned}$$