Cap. 2. Espaços vetoriais e Transformações Lineares

1 Definição e Exemplos

Definição. Um **espaço vetorial real** é um conjunto V munido de uma operação *soma* indicada por $+$ e de uma operação *multiplicação escalar* indicada por $\cdot$ tais que

(S_0) Se u e v são elementos de V, a soma $u + v$ também é elemento de V.

(S_1) $\forall u, v \in V \quad u + v = v + u$.

(S_2) $\forall u, v, w \in V \quad u + (v + w) = (u + v) + w$.

(S_3) Existe um elemento $0_V \in V$ tal que, para todo o $u \in V$, $u + 0_V = 0_V + u = u$.

(S_4) Para cada $u \in V$, existe um elemento $\hat{u} \in V$ tal que $u + \hat{u} = 0_V$.

(M_0) Se $u \in V$ e se $\alpha \in \mathbb{R}$, a multiplicação de u por α, $\alpha \cdot u$, pertence a V.

(M_1) $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.

(M_2) $\forall u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

(M_3) $\forall u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$.

(M_4) Para cada $u \in V$, $1 \cdot u = u$.

Observações.

- Os elementos de um espaço vetorial são chamados **vetores**.
- Os axiomas dão regras de bom comportamento das operações. Por exemplo, por $M4$ e $M2$ temos:

$$u + u = 1 \cdot u + 1 \cdot u = (1 + 1) \cdot u = 2 \cdot u$$

- O elemento 0_V do axioma S_3 é único e é chamado **vetor nulo**.

- Para todo o $u \in V$, tem-se $0 \cdot u = 0_V$.

- Dado $u \in V$, o elemento $\hat{u}$ do axioma S_4 é único e é igual a $(-1) \cdot u$ pois

$$u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 - 1) \cdot u = 0 \cdot u = 0_V.$$

  Este elemento é chamado **simétrico** de u e é denotado $-u$.

- A soma $v + (-u)$ é escrita $v - u$.

Exemplos.

- $\mathbb{R}^n$ com a soma e a multiplicação escalar definidas no Cap.I é um espaço vetorial real sendo o seu vetor nulo:

$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

  O simétrico de $u = (x_1, ..., x_n)$ é

$$-u = (-x_1, ..., -x_n)$$

- O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ munido das operações $+$ e $\cdot$ dadas por

$$\begin{array}{rcl} f + g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \alpha \cdot f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha f(x) \end{array} \qquad (f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \alpha \in \mathbb{R})$$

  é um espaço vetorial real.

  O seu vetor nulo é a função nula : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$.

  O simétrico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função

$$-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -f(x).$$

2 Subespaço vetorial (resumo)

Definição. Seja V um espaço vetorial para as operações "+"e "·". Um subconjunto $W \subseteq V$ não vazio é um **subespaço vetorial (s.e.v)** de V se, com as mesmas operações "+"e "·", W é por si mesmo um espaço vetorial.

Proposição. Seja V um espaço vetorial e seja $W \subseteq V$.

$$W \text{ é um s.e.v de } V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (i) & 0_V \in W \\ (ii) & \forall w, w' \in W \ w + w' \in W \\ (iii) & \forall w \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha \cdot w \in W \end{cases}$$

Observação. Se W é um s.e.v e se $w \in W$, o simétrico $-w = (-1) \cdot w$ também deve pertencer a W.

3 Subespaço vetorial gerado por um conjunto de vetores (resumo)

Consideremos um espaço vetorial V e k vetores $v_1, \cdots, v_k \in V$.

- Um vetor $u \in V$ é **combinação linear (CL)** de $v_1, \cdots, v_k$ se existirem $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k$$

- O conjunto de todas as CL de $v_1, \cdots, v_k$ é

$$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k \text{ com } \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

Proposição. $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ é um s.e.v de V. É chamado o **s.e.v gerado** pelos vetores $v_1, \cdots, v_k$ ou ainda gerado pelo conjunto $\{v_1, \cdots, v_k\}$.

Se $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = V$, diz-se que $v_1, \cdots, v_k$ **geram** o espaço vetorial V (ou que são **geradores** de V) e que o conjunto $\{v_1, \cdots, v_k\}$ é um **conjunto gerador** de V.

4 Indepedência/depedêncial linear num espaço vetorial (resumo)

Definição. Consideremos um espaço vetorial V e k vetores $v_1, \cdots, v_k \in V$.

- $v_1, \cdots, v_k$ são ditos **linearmente independentes** se

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots \alpha_k \cdot v_k = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

- $v_1, \cdots, v_k$ são ditos **linearmente dependentes** caso contrário, isto é se existirem $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ <u>não todos nulos</u> tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots \alpha_k \cdot v_k = 0_V.$$

Proposição. Consideremos um espaço vetorial V e k vetores $v_1, \cdots, v_k \in V$.

(a) Se $k = 1$ (apenas um vetor), tem-se

$$v_1 \text{ é linearmente dependente } \Leftrightarrow v_1 = 0_V$$

ou, equivalentemente,

$$v_1 \text{ é linearmente independente } \Leftrightarrow v_1 \neq 0_V$$

(b) Se $k \geq 2$

$$v_1, \cdots, v_k \text{ são linearmente dependentes } \Leftrightarrow \text{ um dos vetores é CL dos outros.}$$

Observações.

- Se um dos vetores é nulo, então $v_1, \cdots, v_k$ são linearmentes dependentes.
- **2** vetores são linearmente dependentes se um for múltiplo do outro. Em particular, em $\mathbb{R}^n$, **2** vetores são linearmentes independentes sse não são nulos nem paralelos.

Proposição. Consideremos um espaço vetorial V e k vetores $v_1, \cdots, v_k \in V$. Se $v_1, \cdots, v_k$ forem linearmente independentes então todo o vetor $u \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ tem uma escrita única como CL de $v_1, \cdots, v_k$.

5 Base de um espaço vetorial (resumo)

Definição. Seja V um espaço vetorial. Dizemos que a família (ordenada) de vetores $v_1, \cdots, v_k$ forma uma **base** (ordenada) de V se

(1) $v_1, \cdots, v_k$ geram V (isto é $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = V$)

(2) $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes.

Neste caso, todo o $u \in V$ escreve-se de maneira única como CL de $v_1, \cdots, v_k$:

$$\exists(\text{únicos})\ \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\ :\ u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Aos reais $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ chamamos **coordenadas** de u na base $v_1, \cdots, v_k$.

6 Dimensão de um espaço vetorial (resumo)

Teorema. Seja V um espaço vetorial. Se V admite uma base formada por n vetores então toda a base de V é constituída por n vetores.

Definição. Seja V um espaço vetorial.

- Se $V = \{0_V\}$, diz-se que V tem **dimensão** 0 e escreve-se $\dim V = 0$.
- Se V admite uma base constituída por n vetores, diz-se que V tem **dimensão** n e escreve-se $\dim V = n$.
- Se V não admite um número finito de geradores, V tem **dimensão infinita** e escreve-se $\dim V = \infty$.

Observação. Se $v_1, \cdots, v_k \in V$ são linearmente independentes então $\dim\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = k$.

Teorema. Consideremos um espaço vetorial V de dimensão n e k vetores $v_1, \cdots, v_k \in V$.

1. Se $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes então $k \leq n$ e podemos encontrar $n - k$ vetores $v_{k+1}, \cdots, v_n \in V$ tais que $v_1, \cdots, v_n$ seja uma base de V.

2. Se $v_1, \cdots, v_k$ geram V (isto é, $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = V$), então $k \geq n$ e podemos retirar de $v_1, \cdots, v_k$ $k-n$ vetores de modo a obter uma base de V.

Corolário. Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Consideremos n vetores $v_1, \cdots, v_n \in V$.

$$\begin{array}{rcl} v_1, \cdots, v_n \text{ formam uma base de } V & \Leftrightarrow & v_1, \cdots, v_n \text{ são lin. independentes} \\ & \Leftrightarrow & v_1, \cdots, v_n \text{ geram } V \end{array}$$

Corolário. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $W \subseteq V$ um s.e.v de V. Tem-se

- $\dim W \leq \dim V$
- $V = W$ sse $\dim W = \dim V$

7 Transformações Lineares

Definição. Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma **transformação linear** (ou **aplicação linear**) é uma funcão $T : V \to W$ tal que

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall u, v \in V,\ T(u+v) = T(u) + T(v) \\ (ii) & \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v) \end{array}$$

Segue da definição que

- $T(0_V) = 0_W$
- $\forall u \in V,\ \ T(-u) = -T(u)$
- $\forall u, v \in V,\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ T(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot T(u) + \beta \cdot T(v)$

Exemplos.

1. a função identidade $T = \mathrm{Id}_V : V \to V$, $T(v) = v$ é uma transformação linear.
2. a função nula $T : V \to W$, $T(v) = 0_W$ é uma transformação linear.
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + y + 1$

   Não é uma transformação linear pois $T(0,0) = 1 \neq 0$.

4. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + y$

   É linear pois para todos os $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{array}{rcl} T(u+v) & = & T(x+x', y+y') \\ & = & 2(x+x') + (y+y') \\ & = & (2x+y) + (2x'+y') \\ & = & T(u) + T(v) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} T(\alpha \cdot u) & = & T(\alpha x, \alpha y) \\ & = & 2(\alpha x) + \alpha y \\ & = & \alpha(2x+y) \\ & = & \alpha \cdot T(u) \end{array}$$

5. Em geral, se $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \mapsto & (\mathbf{a}|\mathbf{x}) \end{array}$$

   é uma transformação linear (exercício).

6. Para uma função

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ u & \mapsto & (T_1(u), \cdots, T_p(u)) \end{array}$$

   verifica-se que

$$T \text{ é linear} \Leftrightarrow \text{ cada componente } T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ é linear.}$$

   Por exemplo: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (2x + y, -3x, 0)$ é linear.

7. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor <u>não nulo</u>. A translação

$$\begin{array}{rcl} t_v : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & u+v \end{array}$$

   não é linear pois $t_v(\vec{0}) = v \neq \vec{0}$.

8. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

   Não é linear, pois, para $u = (1, 0)$ tem-se $T(u) = 1$ mas $T(2 \cdot u) = 4 \neq 2 \cdot T(u)$.

9. O conjunto $Der(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ derivável}\}$ é um s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e podemos considerar:

$$T : Der(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad T(f) = f'$$

T é linear pois, para todas as f, g deriváveis e para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se

$$T(f+g) = (f+g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$$

$$T(\alpha \cdot f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha \cdot T(f)$$

Proposição. A composta de duas transformações lineares é uma transformação linear.

Prova: Sejam $S : U \to V$ e $T : V \to W$ duas transformações lineares e sejam $u, u' \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} T \circ S(u+u') &= T(S(u+u')) = T(S(u) + S(u')) \\ &= T(S(u)) + T(S(u')) = T \circ S(u) + T \circ S(u') \end{aligned}$$

$$T \circ S(\alpha \cdot u) = T(S(\alpha \cdot u)) = T(\alpha S(u)) = \alpha T(S(u)) = \alpha \cdot T \circ S(u).$$

Núcleo e Imagem de uma transformação linear

Definição. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

- O **núcleo** (Kernel) de T é o subconjunto de V dado por

$$\mathrm{Ker}(T) := \{v \in V \,:\, T(v) = 0_W\}$$

- A **imagem** de T é o subconjunto de W dado por

$$\mathrm{Im}(T) := \{T(v) \,:\, v \in V\}$$

Nota. O conceito de imagem define-se para qualquer função $f : A \to B$ onde A e B são conjuntos:

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(a) \,:\, a \in A\}$$

Proposição. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

(a) $\mathrm{Ker}(T)$ é um s.e.v de V.

(b) $\mathrm{Im}(T)$ é um s.e.v de W.

Prova. (a) Primeiro, tem-se $0_V \in \mathrm{Ker}(T)$ pois $T(0_V) = 0_W$.

Sejam agora $u, v \in \mathrm{Ker}(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0_W + 0_W = 0_W$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u) = \alpha \cdot 0_W = 0_W$$

Logo $u + v \in \mathrm{Ker}(T)$ e $\alpha \cdot u \in \mathrm{Ker}(T)$ e podemos concluir que $\mathrm{Ker}(T)$ é um s.e.v de V.

(b) Primeiro, tem-se $0_W \in \mathrm{Im}(T)$ pois $0_W = T(0_V)$.

Sejam agora $w, w' \in \mathrm{Im}(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Existem $v, v' \in V$ tais que $w = T(v)$ e $w' = T(v')$ e tem-se

$$w + w' = T(v) + T(v') = T(v + v')$$

$$\alpha \cdot w = \alpha T(v) = T(\alpha \cdot v)$$

Logo $w + w' \in \mathrm{Im}(T)$ e $\alpha \cdot w \in \mathrm{Im}(T)$ e podemos concluir que $\mathrm{Im}(T)$ é um s.e.v de W. $\square$

Proposição. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Suponha que $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$. Então

- $\mathrm{Im}(T) = \langle T(v_1), \cdots, T(v_n) \rangle$
- A dimensão de $\mathrm{Im}(T)$ corresponde ao maior número de vetores independentes entre os vetores $T(v_1), \cdots, T(v_n)$.

Exercício: considere a seguinte transformação linear:

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2y + z, y + 3z) \end{array}$$

Determine o núcleo, a imagem de T e a sua dimensão.

- $\mathrm{Ker}(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0 \text{ e } y + 3z = 0\}$

  Resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z &=& 0 \\ y + 3z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z &=& 0 \\ y &=& -3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -7z \\ y &=& -3z \end{array}\right.$$

  obtemos que $\mathrm{Ker}(T) = \{(-7z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle(-7,-3,1)\rangle$. Como $(-7,-3,1)$ é linearmente independente e gerador de $\mathrm{Ker}(T)$, este vetor forma uma base de $\mathrm{Ker}(T)$ e $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$.

- Sabemos que $\dim \mathrm{Im}(T) \leq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ pois $\mathrm{Im}(T) \subset \mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ (onde e_1, e_2, e_3 são os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$) temos

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3)\rangle = \langle(1,0), (-2,1), (1,3)\rangle$$

  Como $(1,0)$ e $(-2,1)$ são linearmente independentes (são não nulos nem paralelos) podemos afirmar que

$$\dim \mathrm{Im}(T) = 2 \text{ e } \mathrm{Im}(T) = \langle(1,0), (-2,1)\rangle = \mathbb{R}^2.$$

Teorema. (Teorema da dimensão) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se V tiver dimensão finita então

$$\dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim(V).$$

Prova. Suponhamos que $\dim V = n$ e $\dim \mathrm{Ker}(T) = k$. Queremos ver que $\dim \mathrm{Im}(T) = n - k$.

Seja $v_1, \cdots, v_k$ uma base de $\mathrm{Ker}(T)$. São linearmente independentes em V. Logo existem $v_{k+1}, \cdots, v_n \in V$ tais que $v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n$ seja uma base de V.

Para provar que $\dim \mathrm{Im}(T) = n - k$ basta provar que $T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)$ formam uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

- São geradores pois

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \langle T(v_1), \cdots, T(v_k), T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\rangle \\ &= \langle 0_W, \cdots, 0_W, T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\rangle \\ &= \langle T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\rangle \end{aligned}$$

- São linearmente independentes pois, sendo $\alpha_{k+1}, \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{array}{rl} & \alpha_{k+1}T(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0_W \\ \Leftrightarrow & T(\alpha_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0_W \\ \Leftrightarrow & \alpha_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in \mathrm{Ker}(T) = \langle v_1, \cdots, v_k \rangle \end{array}$$

  Como $v_1, \cdots, v_n$ são linearmente independentes isto implica que $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. □

Exemplo Seja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ não nulo. Considere a transformação linear:

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \mapsto & (\mathbf{a}|\mathbf{x}) \end{array}$$

O núcleo de T é o chamado *hiperplano de* $\mathbb{R}^n$ *perpendicular ao vetor* $\mathbf{a}$ *que passa pela origem*:

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \; : \; (\mathbf{a}|\mathbf{x}) = 0\}$$

Pelo Teorema da dimensão temos

$$n = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

Tem-se $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}$. Como $\mathbf{a} \neq 0$ tem-se $\mathrm{Im}(T) \neq \{0\}$ logo $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$. Em consequência

$$\dim \mathcal{H} = n - 1.$$

Transformações sobrejetivas, injetivas e bijetivas

Seja $T : V \to W$ uma função. Recorde que

- T é **sobrejetiva** se todo o elemento de W é uma imagem, isto é se

$$\mathrm{Im}(T) = W$$

- T é **injetiva** se, para todos os $v_1, v_2 \in V$,

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$

- T é **bijetiva** se for sobrejetiva e injetiva.

Proposição. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

$$T \text{ é injetiva} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(T) = \{0_V\}$$

Prova. Suponhamos que T é injetiva. Seja $v \in \operatorname{Ker}(T)$. Tem-se $T(v) = T(0_V)$. Logo $v = 0_V$ e $\operatorname{Ker}(T) = \{0_V\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\operatorname{Ker}(T) = \{0_V\}$. Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Como T é linear vem $T(v_1 - v_2) = 0_W$. Logo $v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker}(T)$. Como $\operatorname{Ker}(T) = \{0_V\}$ obtemos $v_1 - v_2 = 0_V$, isto é $v_1 = v_2$. $\square$

Exemplo. A transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2y + z, y + 3z) \end{array}$$

é sobrejetiva pois $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ mas não é injetiva pois $\operatorname{Ker}(T) = \langle(-7, -3, 1)\rangle$ (ver cálculo anterior).

Teorema. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear onde V e W têm dimensão finita.

- T é sobrejetiva $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim W$
- se T é bijetiva então $\dim V = \dim W$.
- Se $\dim V = \dim W$ então tem-se

$$T \text{ é bijetiva} \Leftrightarrow T \text{ é injetiva} \Leftrightarrow T \text{ é sobrejetiva}$$

Exemplo (geral). Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma transformação linear. Como $\dim \mathbb{R}^n = n$, sabemos que

$$n = \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$$

e sabemos também que $\dim \operatorname{Im}(T) \leq p$. Assim podemos dizer que

- Se T for sobrejetiva então $p \leq n$

  Equivalentemente, se $p > n$, então T não é sobrejetiva.

- Se T for injetiva então $n \leq p$

  Equivalentemente, se $n > p$, então T não é injetiva.

- Se T é bijetiva então $n = p$.
- Se $n = p$, então

$$T \text{ é bijetiva} \Leftrightarrow T \text{ é injetiva} \Leftrightarrow T \text{ é sobrejetiva.}$$

Exemplo. Considere a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - 2y, y) \end{array}$$

Como os espaços de partida e de chegada têm mesma dimensão, T é bijetiva sse T é injetiva, ou seja, sse $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0)\}$. Calculando o núcleo de T obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Isto é $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0)\}$ e T é injetiva e bijetiva.

Inversa

Se $T : V \to W$ for bijetiva então, para todo o $w \in W$, existe um único $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Chamamos **inversa** de T à função

$$\begin{array}{rcl} T^{-1} : W & \to & V \\ w & \mapsto & \text{único } v \text{ tal que } T(v) = w \end{array}$$

Observações.

- Se T for bijetiva, a sua inversa T^{-1} também é bijetiva e $(T^{-1})^{-1} = T$.
- Tem-se $T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V$ e $T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_W$.

- Se existir uma função $S : W \to V$ tal que $S \circ T = \mathrm{Id}_V$ e $T \circ S = \mathrm{Id}_W$ então T é bijetiva e $T^{-1} = S$.

Exemplo. Considere a transformação linear (bijetiva)

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - 2y, y) \end{array}$$

e seja $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. Resolvendo a equação $T(x, y) = (x', y')$ (de incógnita (x, y) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & x' \\ y & = & y' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x' + 2y' \\ y & = & y' \end{array} \right.$$

Isto significa que a inversa de T é

$$\begin{array}{rcl} T^{-1} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x', y') & \mapsto & (x' + 2y', y') \end{array}$$

Proposição. Se $T : V \to W$ for linear e bijetiva então a sua inversa também é linear.

8 Subespaços afins de um espaço vetorial

Definição. Seja V um espaço vetorial e $\mathcal{C} \subseteq V$ um subconjunto de V não vazio. Diz-se que $\mathcal{C}$ é um **subespaço afim** (s.e.a) de V se existirem um elemento $v_0 \in V$ e um subespaço vetorial $W \subseteq V$ tais que

$$\mathcal{C} = \{v_0 + w \ : \ w \in W\}$$

Escrevemos $\mathcal{C} = v_0 + W$.

Observação. Em outras palavras, $\mathcal{C}$ é a imagem do subespaço vetorial W pela translação $t_{v_0} : V \to V$, $v \mapsto v_0 + v$. Pode-se provar que o espaço vetorial W é único. Diz-se que $\mathcal{C} = v_0 + W$ é o subespço afim de V que passa por v_0 e que é dirigido pelo subespaço vetorial W. Por outro lado, se $v_0' \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ pode ser também descrito como $\mathcal{C} = v_0' + W$.

Exemplos.

- Sendo $A, v \in \mathbb{R}^n$ com $v \neq \vec{0}$, a reta de $\mathbb{R}^n$ que passa por A e dirigida pelo vetor v, isto é o conjunto

$$\mathcal{R} = A + \langle v \rangle$$

  é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$.

- Sendo $A, u, v \in \mathbb{R}^n$ com u, v linearmente independentes, o plano de $\mathbb{R}^n$ que passa por A e dirigido pelos vetores u e v, isto é o conjunto

$$\mathcal{P} = A + \langle u, v \rangle$$

  é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$.

- Sendo $\mathbf{p}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ com $\mathbf{a} \neq \vec{0}$, o hiperplano de $\mathbb{R}^n$ perpendicular ao vetor $\mathbf{a}$ que passa por $\mathbf{p}$, isto é o conjunto

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, (\mathbf{a}|\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0\}$$

  é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ pois

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} + \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, (\mathbf{a}|\mathbf{x}) = 0\}$$

  e o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, (\mathbf{a}|\mathbf{x}) = 0\}$ é um s.e.v de $\mathbb{R}^n$.

- Qualquer s.e.v W de V é um subespaço afim de V pois $W = 0_V + W$.

- Se $v \in V$ então $\{v\}$ é um subespaço afim de V de espaço vetorial diretor $W = \{0_V\}$.

Em geral, chamamos **dimensão** do s.e.a $\mathcal{C} = v_0 + W$ à dimensão do espaço vetorial W ($\dim \mathcal{C} = \dim W$) e, generalizando a terminologia dada em $\mathbb{R}^n$, chamamos

- **reta** de V a um subespço afim de V de dimensão 1,

- **plano** de V a um subespço afim de V de dimensão 2,

- **hiperplano** de V a um subespço afim de V de dimensão $\dim V - 1$.

Proposição. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e seja $w_0 \in W$. Se existir $v_0 \in V$ tal que $T(v_0) = w_0$ então o conjunto

$$\{v \in V \ : \ T(v) = w_0\}$$

é o subespaço afim $v_0 + \ker(T)$ cuja dimensão é igual a $\dim \ker(T)$.

Exercício: Considere a seguinte transformação linear:

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2y + z, y + 3z) \end{array}$$

Determine $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ T(x, y, z) = (1, 0)\}$.

Isto corresponde a resolver a equação $T(x, y, z) = (1, 0)$, isto é o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 1 \\ y + 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Geometricamente, $\mathcal{C}$ é a interseção de dois planos de $\mathbb{R}^3$.

Obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 1 \\ y + 3z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 1 \\ y & = & -3z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - 7z \\ y & = & -3z \end{array} \right.$$

Assim temos

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & = & \{(1 - 7z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(1, 0, 0) + z(-7, -3, 1) : z \in \mathbb{R}\} \\ & = & (1, 0, 0) + \langle(-7, -3, 1)\rangle \end{array}$$

Podemos assim concluir que $\mathcal{C}$ é a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1, 0, 0)$ e que é dirigida pelo vetor $(-7, -3, 1)$. Note que $\langle(-7, -3, 1)\rangle$ é exactamente $\mathrm{Ker}(T)$ tal como visto num cálculo anterior.

Exemplo geral (sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^n$). Consideremos p vetores $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p \in \mathbb{R}^n$ não nulos e a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} & \mapsto & ((\mathbf{a}_1|\mathbf{x}), \cdots, (\mathbf{a}_p|\mathbf{x})) \end{array}$$

Seja $\mathbf{b} = (b_1, \cdots b_p) \in \mathbb{R}^p$. Escrevendo $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ e

$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}),\ \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \quad \cdots \quad \mathbf{a}_p = (a_{p1}, a_{p2}, \cdots, a_{pn})$

a equação $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ corresponde ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

chamado **sistema de p equações lineares em** $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de soluções deste sistema, isto é

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}.$$

Geometricamente, $\mathcal{S}$ é a interseção de p hiperplanos de $\mathbb{R}^n$.

O sistema é dito

- **impossível** se não tiver soluções ($\mathcal{S} = \emptyset$)
- **possível** se admitir soluções ($\mathcal{S} \neq \emptyset$)

Se o sistema for possível, o conjunto $\mathcal{S}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ (mais precisamente, $\mathcal{S} = \mathbf{x}_0 + \mathrm{Ker}(T)$ onde $\mathbf{x}_0$ é uma solução do sistema, isto é, $T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}$) e diz-se que o sistema é

- **determinado** se tiver uma única solução.

  Observe que o sistema é determinado sse

  $$\dim \mathcal{S} = \dim \mathrm{Ker}(T) = 0 \text{ ou, equivalentemente, sse } T \text{ é injetiva.}$$

- **indeterminado** se tiver mais do que uma solução.

  Neste caso,
  $$\dim \mathcal{S} = \dim \mathrm{Ker}(T) \geq 1$$
  e $\mathcal{S}$ não é um conjunto finito.

  Em particular, se $p < n$, o sistema é necessariamente indeterminado (se for possível) pois, neste caso, T não pode ser injetiva.