Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Exercícios

Exercício 23: *Problema de Rabi para um sistema de dois níveis*

Considere um sistema a dois níveis, cujo Hamiltoniano é dado, para $t \leq 0$, por $\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\,\hat{\sigma}_z$, sendo o seu estado fundamental $|-\rangle$, com energia $-\frac{\hbar\omega_0}{2}$ e o estado excitado $|+\rangle$, com energia $\frac{\hbar\omega_0}{2}$. Trata-se simplesmente do Hamiltoniano de um spin $1/2$ num campo magnético externo constante.

Para $t > 0$, o sistema é igualmente sujeito à ação do campo de uma onda circularmente polarizada, passando o seu Hamiltoniano a ser dado por

$$\hat{H}_t = \frac{\hbar\omega_0}{2}\,\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Gamma}{2} \cdot \left(\,\hat{\sigma}_x \cos(\omega t) + \hat{\sigma}_y \sin(\omega t)\,\right)\,. \tag{61}$$

As constantes ω_0 e Γ têm as dimensões de uma frequência e determinam as grandezas respetivas dos campos aplicados ao sistema, enquanto ω é a frequência de oscilação do campo variável.

A equação de Schrödinger dependente do tempo para este sistema escreve-se como

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\psi_t\,\rangle = \hat{H}_t\,|\,\psi_t\,\rangle\,. \tag{62}$$

Definindo o operador de evolução, $|\,\psi_t\,\rangle = \hat{U}_t\,|\,\psi_0\,\rangle$, em que $|\,\psi_0\,\rangle$ é o estado do sistema a $t = 0$, podemos escrever esta equação como

$$i\hbar\frac{d\hat{U}_t}{dt} = \hat{H}_t\,\hat{U}_t\,. \tag{63}$$

Não existem normalmente soluções exatas para problemas de Mecânica Quântica dependentes do tempo. Este problema é uma notável exceção. O método de solução é descrito abaixo.

a) Defina um novo operador de evolução através de $\hat{U}_t = e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\hat{V}_t$ e mostre que obedece à equação

$$i\hbar\frac{d\hat{V}_t}{dt} = \hat{H}_\omega\,\hat{V}_t\,, \tag{64}$$

em que $\hat{H}_\omega$ é o pseudo-Hamiltoniano independente do tempo

$$\hat{H}_\omega = -\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z + e^{\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\,\hat{H}_t\,e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z} = \frac{\hbar}{2}\,(\omega_0 - \omega)\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Gamma}{2}\,\hat{\sigma}_x\,. \tag{65}$$

Pista: Substitua a definição de $\hat{U}_t$ em termos de $\hat{V}_t$ em (63), execute a derivada em ordem ao tempo nos diversos termos, tomando em consideração que poderão não comutar, e multiple o resultado à esquerda por $e^{\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}$. Note que para mostrar a segunda igualdade em (65), deve desenvolver as exponenciais em termos de matrizes de Pauli como indicado no exercício 6.

b) Conclua de (65) que $\hat{V}_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_\omega t}$ e mostre daí que $\hat{U}_t$ se pode escrever como

$$\hat{U}_t = e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{\sigma}_z}\left[\hat{\mathbb{1}}\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right], \tag{66}$$

em que $\Omega = \sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}$ e $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\omega_0-\omega}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_z$ é um versor no plano xz (note que nesta última equação os chapéus indicam que os vetores são normados e não que se trata de operadores!).

Pista: Use de novo os resultados do exercício 6.

c) Considere um estado inicial arbitrário, dado por $|\psi_0\rangle = a^0_+\,|+\rangle + a^0_-\,|-\rangle$ e, aplicando-lhe $\hat{U}_t$, tal como escrito em (66), mostre que $|\psi_t\rangle = a_+(t)\,|+\rangle + a_-(t)\,|-\rangle$, em que

$$\begin{aligned} a_+(t) &= e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left\{\left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\hat{n}_z\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]a^0_+ - i\hat{n}_x\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)a^0_-\right\}, & (67)\\ a_-(t) &= e^{\frac{i\omega t}{2}}\left\{-i\hat{n}_x\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)a^0_+ + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\hat{n}_z\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]a^0_-\right\}, & (68)\end{aligned}$$

e em que $\hat{n}_x = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}$ e $\hat{n}_z = \frac{\omega_0-\omega}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}$ são as componentes do versor $\hat{\mathbf{n}}$. As equações (67) e (68) constituem a solução completa do problema de Rabi, para condições iniciais arbitrárias.

Pista: Note que $\hat{\sigma}_z\,|\pm\rangle = \pm\,|\pm\rangle$ e $\hat{\sigma}_x\,|\pm\rangle = |\mp\rangle$.

d) Considere agora que a $t = 0$, o sistema estava no seu estado fundamental, isto é, no estado $|-\rangle$. Mostre que a probabilidade de transição para o estado excitado $|+\rangle$ evolui no tempo de acordo com

$$p(t) = \frac{\Gamma^2}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}\,\sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \tag{69}$$

que é a famosa fórmula de Rabi. Para que valores da frequência do campo da onda circularmente polarizada e para que valores de tempo é que esta probabilidade é máxima? Interprete os seus resultados.

e) Considere agora a alínea anterior do ponto de vista da teoria de perturbações ou seja, trate $\hat{H}_1(t) = \frac{\hbar\Gamma}{2}\cdot(\,\hat{\sigma}_x\cos(\omega t) + \hat{\sigma}_y\sin(\omega t)\,) = \frac{\hbar\Gamma}{2}\cdot(\,\hat{\sigma}_+e^{-i\omega t} + \hat{\sigma}_-e^{i\omega t}\,)$ como perturbação, em que

$$\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Mostre que a equação para amplitude de transição é dada por

$$\gamma_+(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t du\,\langle+|\,\hat{H}_1(u)\,|-\rangle\,e^{i\omega_0 u}. \tag{71}$$

Integre esta equação e calcule a probabilidade de transição, considerando em particular o caso de ressonância, em que $\omega = \omega_0$.

Pista: Note que $\hat{\sigma}_+\,|+\rangle = 0$, $\hat{\sigma}_+\,|-\rangle = |+\rangle$, $\hat{\sigma}_-\,|+\rangle = |-\rangle$ e $\hat{\sigma}_-\,|-\rangle = 0$.

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt