Análise Complexa LFis / MiEFis
Segundo teste 2015/2016

1. A série proposta é $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ com $a_n = \frac{e^{in}}{3^n}$.

Trata-se de uma série de potências centrada em $z=0$ pelo que o seu disco de convergência é $D(0,R)$ onde $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, pelo critério da raiz.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{in}}{3^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}.$$

Assim, o disco de convergência da série é $D(0,3)$.

2. $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$

a. $z \neq 0 \wedge |z|<1$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1$$

pela fórmula da série geométrica.

Assim, para $z\neq 0$ e $|z|<1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2} = \sum_{k=-2}^{\infty} z^k = z^{-2} + z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

b. $|z|>1$

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\frac{1}{(1/z - 1)} = -\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-1/z}$$

Para $|1/z|<1$ ($\Leftrightarrow |z|>1$), usando novamente a fórmula da série geométrica:

$$f(z) = -\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+3)} =$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{-3} z^k$$

3. Sabemos que $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, para $w\in\mathbb{C}$.

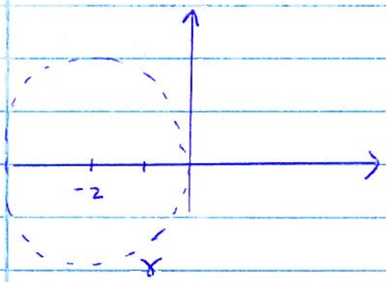
Logo, $f(z) = (z+1)^2 e^{1/z+1} = (z+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{-n}}{n!}$ $z\neq -1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{-n+2}}{n!} = \sum_{k=-\infty}^{2} \frac{(z+1)^{k}}{(-k+2)!} = \qquad \begin{array}{l} k=-n+2 \\ n=-k+2 \end{array}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z+1)^{k}}{(-k+2)!}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\frac{1}{2} + (z+1) + (z+1)^2}_{\text{parte regular}}$$

Como a parte principal da série de Laurent de $f(z)$ em torno de $z=-1$ tem uma infinidade de termos, podemos concluir que $z=-1$ é singularidade essencial.

Consideremos agora a curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| = 2\}$



A única singularidade de $f(z)$ é $z=-1$ e esta encontra-se no interior de γ. Pelo teorema dos resíduos,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f(z)$$

Sabemos que $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = c_{-1}$, onde c_{-1} é o coeficiente do termo $(z+1)^{-1}$ na série de Laurent.

Logo $c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ e $\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{\pi i}{3}$.

4

a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+x}\,dx$. Consideremos a função $f(z) = \frac{z+1}{z^3+z}$.

Singularidades: $z^3+z=0 \Leftrightarrow z(z^2+1)=0 \Leftrightarrow$
$z=0 \vee z=i \vee z=-i$

As singularidades em $\{z \mid \operatorname{Im} \geq 0\}$ são 0 e i sendo que 0 é real.

Por um teorema, sabemos então que:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$$

Sendo esta igualdade no sentido do valor principal.

Temos $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ com $\varphi(z) = z+1$
e $\psi(z) = z^3+z$ $(\Rightarrow \psi'(z) = 3z^2+1)$

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{\varphi(i)}{\psi'(i)} = \frac{i+1}{-2}$$

$\text{Res}_{z=0} f(z) = \dfrac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = 1$

Logo, $I = 2\pi i \left(\dfrac{i+1}{-2} \right) + \pi i = -\pi i(i+1) + \pi i = \pi$

b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{2+x^2}\,dx$

uma vez que $\alpha(x) = \dfrac{\cos x}{2+x^2}$ é uma função par.

Além disso, como $\beta(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2+x^2}$ é uma função ímpar,

$\displaystyle I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{2+x^2}\,dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{2+x^2}\,dx \right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{2+x^2}\,dx$

Consideremos $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{2+z^2}$.

Singularidades: $2+z^2=0 \iff z = \pm\sqrt{2}i$

$\sqrt{2}i$ é a única singularidade em $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$

Logo, $I = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi i \,\text{Res}_{z=\sqrt{2}i} f(z)$

$f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ onde $\varphi(z) = e^{iz}$

$\psi(z) = 2+z^2 \Rightarrow \psi'(z) = 2z$

$\text{Res}_{z=\sqrt{2}i} f(z) = \dfrac{\varphi(\sqrt{2}i)}{\psi'(\sqrt{2}i)} = \dfrac{e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}i}$

Logo, $I = \dfrac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$.

5. $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3+1}$

Zeros de f: $z^2 = 0 \iff z=0$ (com multiplicidade 2)

singularidades de f: $z^3+1=0 \iff z_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i}$

$k = 0, 1, 2$

Temos que $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)}$, pelo que cada uma das singularidades é um pólo simples.

Além disso, $|z_k| = 1$ para $k = 0, 1, 2$

Assim, $z=0$, $z=z_0$, $z=z_1$ e $z=z_2$ encontram-se no interior da curva $\gamma = \{ z \mid |z| = 2 \}$. Assim, o resíduo logarítmico de f em relação a γ é dado por:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2 - (1+1+1) = -1$$