Teste 2 modelo **Fotónica I 2021**

1. Considere um feixe Gaussiano TEM_{00} que se propaga ao longo do eixo dos zz. Na posição z = 0 a cintura do feixe é elíptica com cinturas diferentes nos eixos xx e yy. A cintura mínima ao longo do eixo dos xx é $w_{0x} = w_0$ enquanto ao longo do eixo dos yy é $w_{0y} = 2w_0$.

(a) Determine o valor de z onde o feixe se torna circular, i.e. onde $w_y(z) = w_x(z)$. Exprima a sua resposta em função de w_0 e do comprimento da onda da radiação laser λ .

Resposta: Define a distância Rayleigh para o feixe no eixo dos xx como $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$; para o componente nos eixos dos yy a distância Rayaleigh correspondente é $\frac{\pi(2w_0)^2}{\lambda} = 4z_R$. Queremos encontrar o plano z para qual:

$$w_x^2(z) = w_y^2(z)$$

$$w_0^2\left(1+(z/z_R)^2\right) = 4w_0^2\left(1+(z/4z_R)^2\right)$$

$$3w_0^2 = \frac{3w_0^2}{4z_R^2}z^2$$

$$z = \pm 2z_R = 2\frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

(b) Uma lente positiva de comprimento focal *f* é colocada no plano onde o feixe é circular. As cinturas mínimas do feixe focado na direção x e y se encontrarão no mesmo plano? Justifique a sua resposta.

Tem propagar os feixes usando as matrizes ABCD. O sistema consiste de propagação da cintura mínima até a lente numa distância de $2z_R$, a passagem por um alente de comprimento focal f e depois uma propagação até a nova cintura mínima criada pela lente, uma distância $L_{x,y}$. Queremos saber se $L_x = L_y$ (Notar que se as leis de ótica geométrica foram válidas a resposta seria sim, pois os “objetos” tanta para o eixo dos xxs como do eixo dos yys são coincidentes (no plano z=0) logo as suas imagens seriam coincidentes.

Ao calcular o matriz ABCD para o sistema temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & L_{x,y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2z_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L_{x,y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2z_R \\ -1/f & 1-\frac{2z_R}{f} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{L_{x,y}}{f} & 2z_R + L_{x,y} - \frac{2L_{x,y}z_R}{f} \\ -1/f & 1-\frac{2z_R}{f} \end{bmatrix}$$

No início o parâmetro q para o eixo dos xxs é $q_x(0) = iz_R$ e paa o eixos dos yys é $q_y(0) = i4z_R$. Depois ao propagar no sistema temos

$$\frac{1}{q'} = \frac{C + D/q(0)}{A + B/q(0)}$$ e no plano focal a parte real de 1/q' é nulo (pois o raio da curvatura no foco é infinito. Então a condição para o foco no eixo dos xxs é

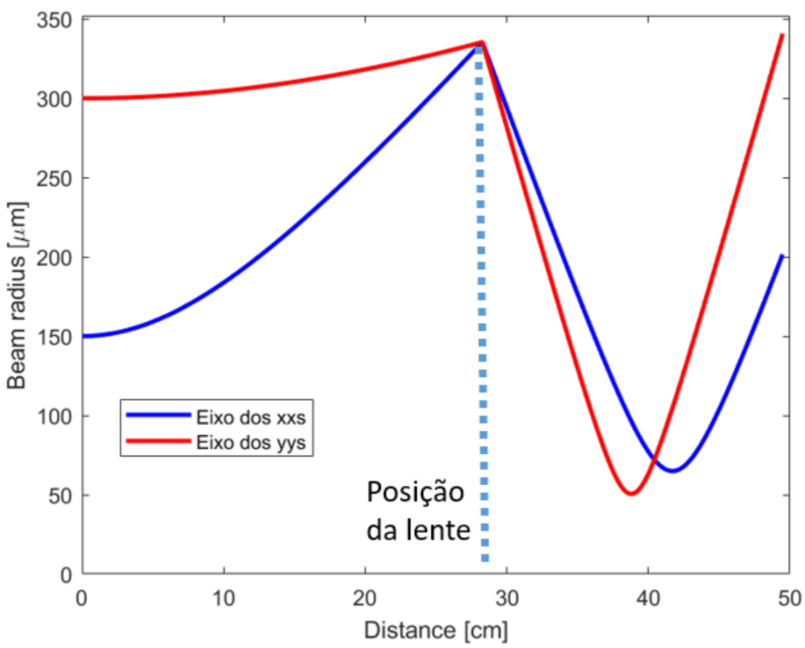
$$\mathrm{Re}\left(\frac{C + D/q_y(0)}{A + B/q_y(0)}\right) = 0 = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{-1}{f} - \frac{i}{z_R}\left(1 - \frac{2z_R}{f}\right)}{1 - \frac{L_x}{f} - \frac{i}{z_R}\left(2z_R + L_x - \frac{2L_x z_R}{f}\right)}\right)$$

E para o eixo dos yys

$$\mathrm{Re}\left(\frac{C + D/q_y(0)}{A + B/q_y(0)}\right) = 0 = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{-1}{f} - \frac{i}{4z_R}\left(1 - \frac{2z_R}{f}\right)}{1 - \frac{L_y}{f} - \frac{i}{4z_R}\left(2z_R + L_y - \frac{2L_y z_R}{f}\right)}\right)$$

Notar que as partes reais dos numeradores e denominadores são iguais para os dois eixos, mas as partes imaginárias do eixo do y são um fator de 4 menor do que na expressão para o eixo dos xxs. Assim em geral os dois focos não vão coincidir. A exceção seria se $f = 2z_R$ ou que faria que $L_x = L_y = f$.

Ao titulo dum exemplo tracei "os raios" (o valor de w) para um sistema em que $w_0 = 150\mu m, \lambda = 500nm$ $(z_R \approx 14cm)$ e $f = 10cm.$



2. Uma caviade laser consiste de dois espelhos, um espelho plano $R_1 = \infty$ e um espelho esférico $R_2 = +2L$ onde $L = 15cm$ é o comprimento da cavidade.

(a) Verfique se a caviade é estável.

Repsosta: $g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} = 1;\ g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} = \frac{1}{2} \quad 0 \le g_1 g_2 = \frac{1}{2} \le 1$

(b) Determine o tamanho dos feixes nos dois espelhos do modo TEM00 da cavidade quando o comprimento de onda da radiação é λ = 633nm.

Reposta: Como as frentes de onda tem ser planos no espelho plano a cintura mínima (z=0) vai ser centrado no primeiro espelho. O raio da curvatura das frentes de onda do feixe Gaussiano incidentes no segundo espelho tem ser igual ao raio da curvatura do segundo espelho:

$$R_2 = 2L = R(L) = L + \frac{z_R^2}{L}$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = L$$

Logo $w_0 = \sqrt{L\lambda / \pi} \approx 174 \mu m$ é o tamanho do feixe no espelho plano. No espelho esférica:

$$w(L) = w_0 \sqrt{1 + \left(L / z_R\right)^2} = w_0 \sqrt{2} \approx 246 \mu m\ .$$

3. Considere um meio ativo que amplifica luz com um comprimento de onda λ = 1 μm. O meio tem uma forma cilindrica com um diâmetro de 5 mm e um comprimento de 10 cm. A densidade dos átomos ativos é $N_T = 5x10^{18}$ cm^{-3}. O tempo da vida do estado superior da transição laser é $\tau_2 \approx 1\,ms$. O meio ativo é colocado numa cavidade de dois espelhos com refletividades $R_1 \approx 1$ e $R_2 = R$ separados por 30 cm. Dentro da cavidade existe um dispoitivo mecânico que permite que o feixe se propague dentro da cavidade quando estiver aberto e proíbe se estiver fechado.

(a) Com aproximadamente qual periodicidade deve abrir o dispositivo mecânico se pretende obter um laser pulsado pelo efeito da comutação da cavidade?

O parte que demora mais é o intervalo de excitação $\Delta N(t) \approx R_p \tau_2 \left\{1 - \exp\left[-t / \tau_2\right]\right\}$

Para atingir o valor máximo de ΔN convêm deixar a fase de excitação correr para cerca de $3\tau_2$ durante qual a ΔN atingirá cera de 95% do seu valor máximo. Assim o tempo entre aberturas do comutador deveria ser aproximadamente 3ms.

(b) Estime a energia máxima que pode ser obtido num pulso pela técnica de comutação da cavidade. Assuma que o modo laser preenche o meio ativo.

No limite em que o process de excitação for eficaz $\Delta N \rightarrow N_T \geq 3\Delta N_{\text{limiar}}$ quase todos os átomos ativos serão excitados e induzidos emitir um pulso atravéz da emissão estimulada. A energia do pulso resultante se aproximava

$$E_{pulso} \approx N_T \left(V_{\text{meio ativo}}\right)\frac{hc}{\lambda} \approx 1.95J$$

(c) Com aproximadamente qual periodicidade deve abrir o dispositivo mecânico se pretende obter um laser pulsado pelo efeito de acordo da fase?

Para haver acordo da fase o comutador deverá abrir cada vez que o pulso incide no comutador. O tempo da volta na cavidade é

$\tau_{volta} = \dfrac{2L}{c} \approx 2ns$ (assumindo que o indice de refração do meio ativo é ≈1).

(d) Assuma que a lagura de banda onde o coeficiente do ganho pequeno é superior ao coeficiente do ganho limiar é $\Delta\nu \approx 10^{12}\,Hz$. Estime a menor duração do pulso que pode ser emitida. Qual é a taxa de repetição?

Na aproximação em que todos os modos têm a mesma amplitude

$t_{pulso} \approx \dfrac{\tau_{volta}}{N}$ onde N é o número de modos a oscilar. N é dado pela razão

$N \approx \dfrac{\Delta\nu_{\text{ganho>ganho limiar}}}{\Delta\nu_{cav}} = \dfrac{10^{12}\,Hz}{\left(c/2L\right)} = \left(10^{12}\,Hz\right)\tau_{volta}$ e $t_{pulso} \approx \dfrac{1}{10^{12}\,Hz} = 1ps$