10/11/2022 1º teste	Álgebra Linear e Geometria Analítica para Ciências	FIS ENGFIS

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{a} = (2, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 3)$. Existem escalares t e s tais que $t\mathbf{a} + s\mathbf{b} = (1, 1, 1)$.
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

2. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{a} = (1, 2)$ e $\mathbf{b} = (2, 3)$. Todo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado como $\mathbf{v} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$, com $t, s \in \mathbb{R}$.
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

3. *(1 valor)* Se o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ satisfaz $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = 0$ então é proporcional a $\mathbf{k}$.
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

4. *(1 valor)* Se os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^3$ são ortogonais então $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$.
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

5. *(1 valor)* Se os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$, então os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são independentes.
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

6. *(1 valor)* O conjunto dos vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x - 2y + 3z = 4$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

7. *(1 valor)* A interseção $A \cap B$ de dois subespaços vetoriais A e B de $\mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

8. *(1 valor)* Existe uma transformação linear sobrejetiva $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

9. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 0, -1)$ e $\mathbf{c} = (0, 1, 2)$. Determine, se existirem, escalares s, t, u tais que $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c} = (-3, 4, 9)$.

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = (-3, 4, 9)$$

10. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$. Calcule

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \qquad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ $\quad$ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-1, 2, -1)$ $\quad$ $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 2$ $\quad$ $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (1, 0, 1)$

11. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{v} = (1,1,1)$ e $\mathbf{w} = (2,0,-1)$. Determine um escalar t tal que $\mathbf{w} = t\,\mathbf{v} + \mathbf{a}$ com $\mathbf{a}$ ortogonal a $\mathbf{v}$.

$$t = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} = 1/3\,.$$

12. *(1 valor)* Determine uma equação cartesiana do plano $P \subset \mathbb{R}^3$ passando por $\mathbf{a} = (1,2,3)$ e ortogonal ao vetor $\mathbf{n} = (1,-1,1)$.

$$x - y + z = 2\,.$$

13. *(1 valor)* Determine a interseção entre a reta $R \subset \mathbb{R}^3$ formada pelos vetores proporcionais a $\mathbf{v} = (3,2,1)$ e o plano $P \subset \mathbb{R}^3$ passando por $\mathbf{a} = (1,2,3)$ e ortogonal ao vetor $\mathbf{n} = (1,-1,1)$.

$$R \cap P = \{\mathbf{v}\}\ .$$

14. *(1 valor)* Determine um vetor unitário $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ortogonal aos dois vetores $\mathbf{a} = (1,1,0)$ e $\mathbf{b} = (0,1,-1)$.

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

15. *(1 valor)* Determine o vetor da reta $R \subset \mathbb{R}^2$ de equação cartesiana $2x - 3y = 4$ que tem norma menor possível.

$$(8/13, -12/13)$$

16. *(1 valor)* Calcule a área do triângulo de vértices $\mathbf{a} = (1,1)$ e $\mathbf{b} = (3,2)$ e $\mathbf{c} = (2,3)$.

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 3/2\,.$$

17. *(1 valor)* Calcule o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{j}+\mathbf{k}$.

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \left|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1\,.$$

18. *(1 valor)* Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{i}) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $T(\mathbf{j}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Determine $T^2(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$.

$$T^2(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}) = 9\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

19. *(1 valor)* Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $L(x,y,z) = (z, x-y, -x+y-z)$. Determine o espaço nulo, a imagem, a nulidade e a ordem de L.

O espaço nulo é a reta $\mathbb{R}(1,1,0)$ e a imagem é o plano $x+y+z=0$. A nulidade é 1 e a ordem é 2.

20. *(1 valor)* Seja $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $M(x,y,z) = (z, z-y, z-y+x)$. Diga se M é invertível. Caso afirmativo, determine a transformação inversa.

É invertível, e a inversa é $M^{-1}(u,v,w) = (w-v, u-v, u)$.

Nome ....**N**^{o} ....

☐ **ENGFIS**
☐ **FIS**

`Instruções:  responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Existe uma matriz quadrada 3×3 real A tal que $A^2 = -I$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

2. *(1 valor)* Sejam A e B duas matrizes quadradas $n \times n$ reais. Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

3. *(1 valor)* Sejam A e B duas matrizes quadradas $n \times n$ reais. Se Ae B são invertíveis, então também $A + B$ é invertível.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

4. *(1 valor)* Se A e B são matrizes quadradas $n \times n$ então $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

5. *(1 valor)* Todo operador $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ admite pelo menos um valor próprio.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

6. *(1 valor)* Se 4 é um valor próprio do operador L^2, então 2 é um valor próprio do operador L.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

7. *(1 valor)* A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   é diagonalizável.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

   .

8. *(1 valor)* As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   são semelhantes.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

9. *(1 valor)* Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{i}) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $T(\mathbf{j}) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Determine a matriz que representa T relativamente às bases canónicas e o valor de $T(5, 4)$.

   A matriz que representa T é

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

   e $T(5, 4) = (11, -2, -7)$.

10. *(1 valor)* Sejam $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares definidas por $M(x, y, z) = (2x + y + 3z, y - z)$ e $L(x, y) = (-5x + y, 3x - 2y, x + y)$. Calcule as matrizes das composições $S = LM$ e $T = ML$ relativamente às bases canónicas.

A matriz que representa $S = LM$ é

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -16 \\ 6 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e a matriz que representa $T = ML$ é

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

11. *(1 valor)* Dê um exemplo, se existir, de uma matriz quadrada 2×2 real E tal que $E^3 = -I$, ou prove que não existe.

$$E = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$$

12. *(1 valor)* Diga se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é invertível e, caso afirmativo, calcule a inversa.

A matriz A é invertível e a sua inversa é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. *(1 valor)* Calcule os determinantes das matrizes B^2 e B^{-1}, se

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Det}\,(B^2) = (4!)^2 \qquad \text{e} \qquad \text{Det}\,(B^{-1}) = \frac{1}{4!}$$

14. *(1 valor)* Determine um sistema linear definido por uma matriz em escada de linhas que seja equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} 3x - y + 2z &= 9 \\ 2x + 2y - 3z &= -1 \\ x + 3y + 4z &= 3 \end{cases}.$$

e calcule as suas soluções.

Um sistema equivalente é

$$\begin{cases} x \; +3y \; +4z &= 3 \\ \qquad y \; +z &= 0 \\ \qquad\qquad z &= 1 \end{cases}.$$

e a única solução é $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

15. *(1 valor)* Determine o espaço das soluções do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w &= 5 \\ 6x + 7y + 8z + 9w &= 10 \\ 11x + 12y + 13z + 14w &= 15 \end{cases}$$

O espaço das soluções é o plano afim

$$\{(-3 + t + 2s, 4 - 2t - 3s, t, s) \quad \text{com } t, s \in \mathbb{R}\}$$

ou seja, o plano passando por $\mathbf{a} = (-3, 4, 0, 0)$ e gerado pelos vetores $\mathbf{v} = (1, -2, 1, 0)$ e $\mathbf{w} = (2, -3, 0, 1)$.

16. *(1 valor)* Determine valores e vetores próprios da reflexão $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto do plano euclidiano no seu simétrico em relação à reta $y = 3x$.

Os valores próprios são ± 1, e uns vetores próprios são $\mathbf{v}_+ = (1, 3)$ e $\mathbf{v}_- = (-3, 1)$, respetivamente.

17. *(1 valor)* Determine a matriz 2×2 que define, relativamente à base canónica, a reflexão $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto do plano euclidiano no seu simétrico em relação à reta $y = 3x$.

$$\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

18. *(1 valor)* Seja B uma matriz real 3×3 com valores próprios $1, 2$ e -2. Calcule o determinante e o traço da matriz $-2B$.

O determinante é $\mathrm{Det}(-2B) = 32$ e o traço é $\mathrm{Tr}(-2B) = -2$.

19. *(1 valor)* Determine os valores próprios e os vetores próprios da matriz

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são 5 e 5, e os vetores próprios são proporcionais a $\mathbf{v}_4 = (1, 2)$ e $\mathbf{v}_5 = (1, 1)$, respetivamente.

20. *(1 valor)* Diagonalize, se possível, a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ou seja, determine uma matriz invertível U e uma matriz diagonal Λ tais que $\Lambda = U^{-1}CU$.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$