3. Determinantes

Twinkle, twinkle, little bat!
How I wonder what you're at!
Lewis Carroll's, Alice's Adventures in Wonderland.

Definição

Seja $A = (a_{ij})$, com $i, j = 1 \dots n$ uma matriz.
Chama-se determinante de A de A e representa-se por $det\, A$ ou $|A|$, ao número definido por:

- se $n = 1$, isto é $A = (a_{11})$ então $det\, A = a_{11}$,
- se $n > 1$, então

$$det\, A = a_{11} det\, M_{11} - a_{12} det\, M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} det\, M_{1n}$$

onde M_{1j} denota a matriz de ordem $(n-1)$ obtida de A retirando-lhe a linha 1 e a coluna j.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det\ A = |A| &= 2 \times det(3) - 1 \times det(-4) \\ &= 2 \times 3 - 1 \times (-4) \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B| &= 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (36 - 0) - 3 \times (-18 - 0) + 2 \times (-12 - 0) \\ &= 36 + 54 - 24 \\ &= 66 \end{aligned}$$

Determinante de uma matriz de ordem 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} det\ A = |A| &= a_{11}\ det\ M_{11} - a_{12}\ det\ M_{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{11} \end{aligned}$$

Determinante de uma matriz de ordem 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \dots$$

Definição

Seja A uma matriz de ordem n.
Chama-se:

- menor principal do elemento a_{ij} de A ao número $\det M_{ij}$;
- complemento algébrico do elemento a_{ij} de A e representa-se por A_{ij} ao número

$$(-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

onde M_{ij} é a matriz de ordem $n-1$ que se obtém de A retirando-lhe a linha i e a coluna j.

Exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

- menor do elemento a_{33}:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \times 4 - (-2) \times 3 = 10$$

- complemento algébrico do elemento a_{33}:

$$(-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 10$$

Note-se que o determinante de uma matriz é calculado por um desenvolvimento que envolve elementos da 1ª linha e os seus complementos algébricos.

Prova-se que o valor do determinante de uma matriz pode ser obtido considerando o **desenvolvimento segundo qualquer linha ou coluna da matriz.**

Teorema de Laplace

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. Então

$$det\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(k+j)} a_{kj} \det\, M_{kj}, \qquad (1 \leq k \leq n)$$

linha k

ou

$$det\, A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i+l)} a_{il} \det\, M_{il}, \qquad (1 \leq l \leq n)$$

coluna l

Relativamente à primeira expressão do teorema de Laplace, dizemos que estamos a desenvolver o determinante ao longo da linha k de A e, relativamente à segunda expressão, dizemos que estamos a desenvolver o determinante ao longo da coluna l de A.

Teorema de Laplace

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

considerando a primeira coluna:

$$det\, A = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-1)^{4+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\cdots = 2 + 2 = 4$$

considerando a segunda linha

$$det\, A = 0 + (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\cdots = -1 + 5 = 4$$

Propriedades dos Determinantes

Propriedade 1: Se A tem uma linha (ou coluna) nula, então

$$\det A = 0.$$

Propriedade 2: Se $A = (A_{ij})$ é uma matriz triangular, então

$$\det A = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}.$$

Observação:

- $\det I_n = ?$
- E se D for uma matriz diagonal $\det D = ?$

Propriedade 3: $det\ A^T = det\ A$.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64$$

Observação (consequência da prop. 3): Todas as propriedades válidas para linhas são também válidas para colunas.

Propriedades dos Determinantes

Propriedade 4: Seja B resulta de A por multiplicação dos elementos de uma linha ou coluna de A por um número α, então $\det B = \alpha \det A$.

Propriedade 5: Se A é uma matriz de ordem n, então

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \times 2 \times 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 64$$

Propriedades dos Determinantes

Propriedade 6:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1}+\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{kn}+\beta_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ A propriedade **NÃO** significa que $det(A+B) = det\,A + det\,B$.

Propriedades dos Determinantes

Propriedade 7: Se A tiver duas linhas (ou colunas) iguais, então

$$det\, A = 0.$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Propriedade 8: O determinante de uma matriz não se altera quando se adiciona a uma linha (coluna) outra linha (coluna) multiplicada por um escalar.

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_j + \alpha L_k \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ \alpha L_k \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$$

(aplicando as propriedades 6, 4 e 7, respectivamente)

Propriedades dos Determinantes

Propriedade 9: O determinante de A muda de sinal quando se trocam entre si duas linhas (colunas).

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_j + L_k \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_k + L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k + L_j \\ \vdots \\ L_k + L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = 0$$

(aplicando as propriedades 8 e 6, respectivamente)

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Método de eliminação de Gauss para o cálculo de determinantes

O método de eliminação de Gauss permite transformar uma matriz A numa matriz em forma de escada. Se matriz A for quadrada, origina uma matriz triangular superior, o determinante resulta da multiplicação dos elementos da sua diagonal.

1. Converter A na forma em escada de linhas (triangular superior) E, usando operações elementares.
2. Obter a relação entre $det\, A$ e $det\, E$, considerando a aplicação das propriedades dos determinantes.
3. Calcular o determinante da matriz triangular resultante.

Método de eliminação de Gauss para o cálculo de determinantes

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e calcule-se $|A|$ usando o método de Gauss.

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -4L_1 + L_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -7L_1 + L_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -14 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -2L_2 + L_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1.(-3).(-2) = -6$$

Propriedade 10:

Se A e B são matrizes de ordem n então

$$\det AB = \det A . \det B.$$

Propriedade 11:

Sejam A é uma matriz de ordem n.

A matriz A é invertível se e só se $\det A \neq 0$.

Tem-se:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Demonstração

Como $AA^{-1} = I_n$, e usando o teorema anterior, tem-se que:

$$\begin{array}{rclcrcl} det\,(AA^{-1}) & = & det\, I_n & \Leftrightarrow & det\, A\, det\, A^{-1} & = & 1 \\ & & & \Leftrightarrow & det\, A^{-1} & = & \frac{1}{\det A} \end{array}$$

Observação: $\det A = 0$ se e só se $car(A) < n$.

Definição

Seja A uma matriz de ordem n. Seja A_{ij} o complemento algébrico do elemento a_{ij} de A. A transposta da matriz quadrada, de ordem n, cujo elemento na posição (i,j) é A_{ij} chama-se matriz adjunta de A e representa-se por $Adj\,A$, isto é:

$$Adj\,A = (A_{ij})^T$$

A matriz adjunta é a matriz transposta da matriz dos complementos algébricos.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad Adj\,A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}$

sendo

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$; $\quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$; $\quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1$;

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $\quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $\quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -9$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$

um novo modo de calcular a inversa de uma matriz

Teorema

Se A uma matriz de ordem n invertível então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\, A} Adj\, A$$

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, tem-se $|A| = 9$

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & -1/9 \\ 1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & -1 & -2/9 \end{pmatrix}$$

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Um sistema de n equações em n incógnitas, $Ax = b$, diz-se um **sistema de Cramer** se $\det A \neq 0$.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$ um sistema de n equações em n incógnitas.

1. Se $\det A \neq 0$ então o sistema $Ax = b$ tem solução única.
2. Se $\det A \neq 0$ a solução é dada por $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, com

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde $A^{(i)}$ é a matriz quadrada de ordem n obtida de A substituindo a coluna correspondente à variável x_i pela coluna b.

Demonstração

1. Um sistema de Cramer (com uma matriz A de ordem n) tem solução única, já que, sendo $det(A) \neq 0$, será $car(A) = n$, o que sabemos ser condição suficiente para garantir que o sistema é possível e determinado. Além disso, como $det(A) \neq 0$, a matriz A é invertível e, portanto, tem-se:

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

2. Seja $A = [a_{ij}]_n$ uma matriz tal que $\det A \neq 0$. Então, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Adj}A$ e, portanto,

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Longrightarrow \quad x = A^{-1}b \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + \cdots + A_{1n}b_1 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_2 \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, para cada $i = 1, 2, ..., n$

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det A}\left(A_{i1}b_1 + A_{i2}b_2 + \cdots + A_{in}b_n\right) \\ &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \text{ e tendo-se}$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = -15,$$

o sistema é possível determinado e a solução é

$$x_1 = \frac{1}{-15} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{1}{-15} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-15}{-15} = 1,$$

$$x_3 = \frac{1}{-15} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-20}{-15} = \frac{4}{3}.$$