Exercícios de Física Computacional

Escola de Ciências da Universidade do Minho

Física e Engenharia Física

ano letivo 2021/22, 1º semestre

Folha 8

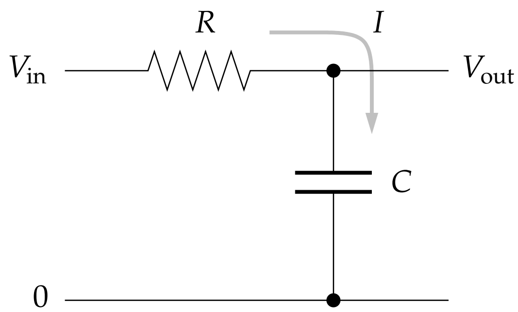
1. Resolva a equação
$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \sin(t)$$
usando o método de Euler sabendo que $x(t = 0) = 0$.

2. Resolva a equação
$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \sin(t)$$
usando os métodos de Runge-Kutta de segunda e quarta ordem, sabendo que $x(t = 0) = 0$. Compare, no mesmo gráfico, $N = 10, 20, 50, 100$. Sugestão: fazer um gráfico para os cada um dos métodos onde se comparem os vários N.

3. O *oscilador de van der Pol*, que aparece em eletrónica e física dos lasers, é descrito pela equação:
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$
Resolva esta equação numericamente entre $t = 0$ to $t = 50$, representando o correspondente diagrama de espaço de fase (*i.e.* dx/dt em função de x) para $\omega = 1$, $\mu = 5$, e condições iniciais $x = 1$ e $dx/dt = 0$. Tenha em atenção que o intervalo de tempo deve ser suficientemente pequeno para que o diagrama obtido seja suficientemente suave e preciso.

4. Considere um circuito RC com uma resistência e um condensador.

   Este circuito atua com um filtro passa baixo, modificando o sinal injetado V_{in} no sinal V_{out}. Se I for a corrente que passa pela resistência R e pelo condensador de capacidade C, mostre que:
$$IR = V_{\mathrm{in}} - V_{\mathrm{out}}\,, \qquad Q = CV_{\mathrm{out}} \qquad I = \frac{dQ}{dt}.$$



Substituindo a segunda equação na terceira e usando o resultado na primeira equação temos que $V_{\text{in}} - V_{\text{out}} = RC\,(dV_{\text{out}}/dt)$ ou, equivalentemente,

$$\frac{dV_{\text{out}}}{dt} = \frac{1}{RC}\big(V_{\text{in}} - V_{\text{out}}\big).$$

(a) Escreva um programa que resolva esta equação para $V_{\text{out}}(t)$ usando o método de Euler. Assuma que o sinal de entrada é uma onda quadrada com frequência 1 e amplitude 1:

$$V_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lfloor 2t \rfloor \text{ é par,} \\ -1 & \text{se } \lfloor 2t \rfloor \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ significa que x é arredondado por baixo para o inteiro mais próximo.

(b) Compare o sinal de entrada e saída para $RC = 0.01$, 0.1, e 1 s, assumindo a condição inicial $V_{\text{out}}(0) = 0$. Considere o intervalo $t = 0$ a $t = 10$ s e discuta a importância do passo considerado na resolução da equação diferencial.

5. As equações de Lotka–Volterra descrevem um modelo de interação entre presas e predadores. Sejam as variáveis x e y proporcionais ao tamanho de população de coelhos (presas) e raposas (predadores).

   No modelo de Lotka–Volterra os coelhos reproduzem-se a uma taxa proporcional à sua população e são comidos pelas raposas a uma taxa proporcional à população de coelhos e raposas:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy,$$

   onde α e β são constantes.

   Ao mesmo tempo as raposas reproduzem-se a uma taxa proporcional à taxa a que comem coelhos – porque precisam de comida para poderem crescer e reproduzir-se – mas também morrem a partir de uma certa idade a uma taxa proporcional à sua própria população:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y,$$

   onde γ e δ também são constantes.

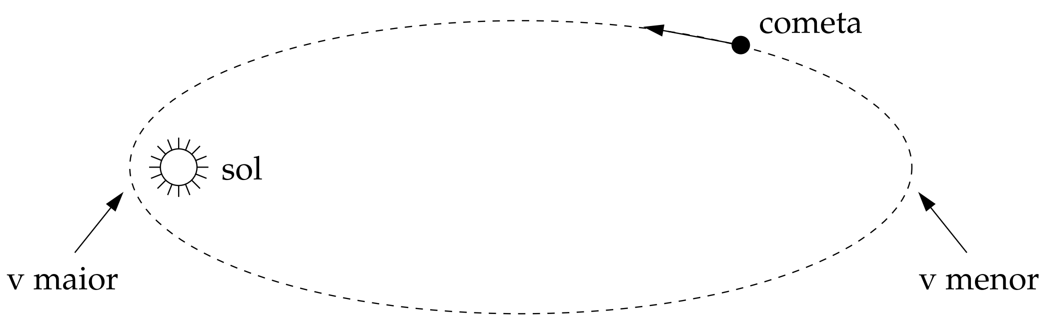
   Resolva estas equações numericamente para $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0.5$ e $\delta = 2$ com a condição inicial $x = y = 2$, fazendo o gráfico de ambas as populações em função do tempo. Assuma que a população quer de raposas quer de coelhos é 100 vezes maior que y e x, respetivamente.Interprete os gráficos obtidos.

6. Escreva um programa para resolver a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x + 5 = 0$$

usando o método do salto de rã (*leapfrog method*). Resolva entre $t = 0$ e $t = 40$ em passos de $h = 0.001$ com as condições iniciais $x = 1$ e $dx/dt = 0$. Represente a solução obtida (x em função de t).

7. É frequente os cometas terem órbitas muito excêntricas à volta do sol. Durante a maior parte do tempo deslocam-se lentamente fora do sistema solar mas quando passam perto do sol deslocam-se com velocidades maiores:



A equação diferencial que define o movimento do cometa pode ser facilmente obtida. A força entre o sol, com massa M, e o cometa com massa m é GMm/r^2, sendo r o vetor posição. De acordo com a segunda lei de Newton temos então que:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\left(\frac{GMm}{r^2}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Como a órbita está definida num plano podemos, sem perda de generalidade, ignorar uma das coordenadas orientando o sistema de eixos de forma a que este plano seja perpendicular a z, ficando então com duas equações diferenciais de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM\frac{x}{r^3}\,, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -GM\frac{y}{r^3}\,,$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Resolva estas equações numericamente, sabendo que $M = 1,989 \times 10^{30}$ kg e $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}. Como condição inicial, assuma que o cometa está inicialmente em $x = 4$ mil milhões de quilómetros e $y = 0$, o que corresponde a uma posição perto da órbita de Neptuno, tendo como velocidade inicial $v_x = 0$ e $v_y = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Represente a trajetória (*i.e.* um gráfico da posição x em função da posição y), bem como o gráfico do módulo da velocidade em função do tempo, escolhento um tempo total suficientemente grande para se visualizarem algumas órbitas completas. Discuta os resultados obtidos.