Processamento de Sinal

3º Ano

Continuous-time Fourier Transform

Resumo

- Transformada de Fourier de Sinais (CTFT) aperiódicos.
- Convergência da CTFT.
- CTFT de Sinais periódicos.
- Propriedades da CTFT.
- Filtros lineares

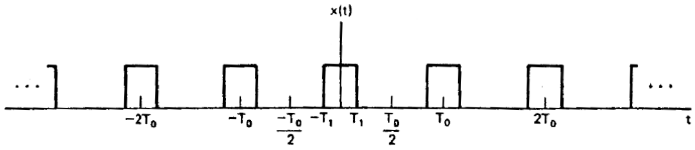
CTFT de Sinais aperiódicos

Motivação

- Sumário:
  - Nos aulas anteriores estudamos:
    - A decomposição de sinais periódicos como uma combinação linear de exponenciais complexas
    - A decomposição de um sinal periódico segundo a série de Fourier
- Problema:
  - Como analisar sinais aperiódicos ?
  - Sugestão:
    - Estudar o que acontece quando o período de um sinal periódico é aumentado.

Motivação

- Consideremos o sinal combinação de pulsos



- A expressão dos coeficientes da Série de Fourier deste sinal é:

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0}$$

Corrigir expr ak (T->To)

Envelope dos a_k

- Façamos a seguinte modificação sobre os coeficientes espectrais, a_k:

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0} \quad \Longrightarrow \quad Ta_k = \left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$$

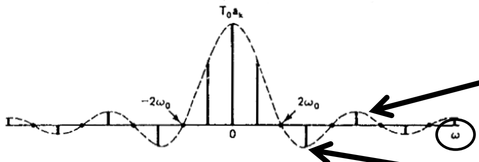
Qual é o significado desta equação ?

Ta_k é interpretado como amostras da função contínua, $f(w)$:

$$f(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

Corrigir expr ak (T->To)

Envelope dos a_k



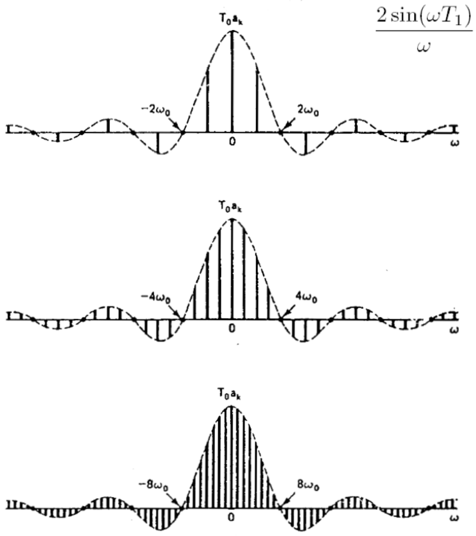
$$f(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

(representa a envolvente de Ta_k)

$$\left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$

(amostras da função envelope)

Envelope dos a_k



$$\left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$

Observações:

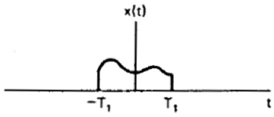
- A medida que o período, ***T***, aumenta o espaçamento entre amostras diminui.

$$\omega_k = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{T}$$

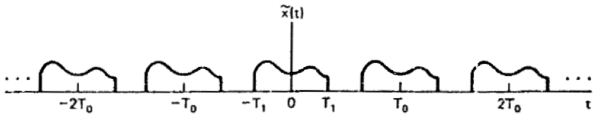
- Quando ***T*** torna-se arbitrariamente grande a onda quadrada torna-se num único pulso.
- De igual modo os coeficientes ***a*** multiplicados por ***T*** aproximam-se e no limite tendem para a função envolvente !

Transformada de Fourier: Sinais Aperiódicos

- Consideremos o seguinte sinal aperiódico.



  – O sinal abaixo pode ser entendido como uma versão periódica de *x(t)*.



Transformada de Fourier: Sinais Aperiódicos

- Qual será a Série de Fourier do sinal periódico ?

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_o t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_o t} dt$$

  – Comparando o sinal periódico e o aperiódico temos que:
    - Os dois sinais são iguais para $|t| < T_0/2$,
    - x(t)= 0 fora desse intervalo

  então podemos rescrever a equação de a_k como

Transformada de Fourier: Sinais Aperiódicos

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jk\omega_o t}dt$$

Portanto estou a expressar os coeficientes a_k em função do sinal aperiódico.

– Se multiplicar a expressão de a_k por T, podemos definir a equação da função envelope em termos de a_k.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

A esta equação chamamos Transformada de Fourier do sinal x(t).

Transformada de Fourier: Sinais Aperiódicos

– Os coeficientes a_k podem ser obtidos pela função envelope:

$$a_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0)$$

– Se substituirmos a nova expressão de a_k na equação de síntese teremos

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_o t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_o t}$$

Transformada de Fourier: Sinais Aperiódicos

– Sabemos que $2\pi/T = \omega_0$, então podemos rescrever a equação anterior como:

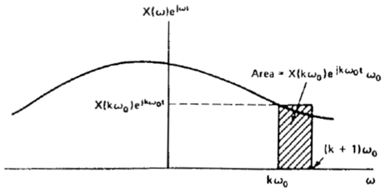
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_o t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_o t} \omega_0$$

– Observações:

- A medida que $T \to +\infty$
  – o sinal periódico tende para o sinal aperiódico.
  – E $\omega_0 \to 0$, logo a série torna-se num integral

No limite, quando $T \to +\infty$ teremos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



Transformada de Fourier: Sinais Aperiódicos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{(equação de síntese)}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{(equação de análise)}$$

- A segunda equação é chamada de *Transformada de Fourier* ou *Integral de Fourier* de sinais aperiódicos, enquanto a primeira é chamada de *Transformada Inversa de Fourier*.
- Esta equação representa um sinal como uma combinação linear de exponenciais complexas, só que neste caso as frequências têm um espaçamento infinitesimal.
- O sinal $X(j\omega)$ é chamado de ***espectro*** (*spectrum*) do sinal $x(t)$.

Convergência da CTFT

Convergência da Transformada de Fourier

- Prova-se que um sinal será representado segundo a Transformada de Fourier se (condições de *Dirichlet*):
  - ***x(t)*** for absolutamente integrável,

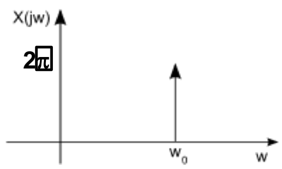
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt \quad < \quad \infty$$

  - ***x(t)*** tem um número finito de máximos e mínimos num intervalo finito qualquer.
  - ***x(t)*** tem um número finito de descontinuidades num intervalo finito qualquer. Para além disso, essas descontinuidades têm que ser finitas.

CTFT de Sinais periódicos

Impulso na frequência

- Consideremos o seguinte espectro:



$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

  - A que sinal corresponde este espectro ?

Impulso na frequência

– O sinal x(t) é obtido através da Transformada inversa de Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\jmath\omega)e^{\jmath\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{\jmath\omega t}d\omega$$

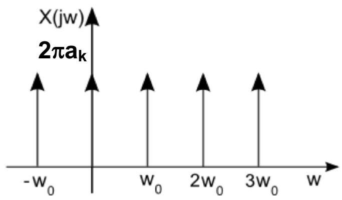
que resulta em

$$x(t) = e^{\jmath\omega_0 t}$$

Portanto um impulso na frequência centrado em ω_0 resulta numa exponencial complexa no tempo.

Trem de impulsos na frequência

- Consideremos o caso geral em que X(jω) é uma combinação linear de impulsos espaçados uniformemente na frequência:



$$X(\jmath\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

A que sinal corresponde este espectro ?

Trem de impulsos na frequência

- Resolvendo a Transformada inversa de Fourier virá:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k e^{jk\omega_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Trem de impulsos na frequência

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}$$

- A equação final corresponde exactamente a equação da Série de Fourier.
  - Observando a equação podemos concluir que a transformada de Fourier de um sinal periódico cujos coeficientes da Série de Fourier sejam $\{a_k\}$:
    - pode ser interpretada como uma combinação linear de impulsos
    - estes ocorrem em frequências harmonicamente relacionadas
    - e a área do impulso na frequência harmónica $k\omega_0$ será 2π vezes o coeficiente de ordem k da série de Fourier.

Trem de impulsos na frequência

- Como diferirá o espectro de um sinal aperiódico e de um sinal periódico que resulta da periodização do anterior, assumindo que a operação de periodização não causa sobreposição das réplicas temporais ?

Propriedades da CTFT

Propriedades

- Notação
  - Par Transformada de Fourier: $x(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\jmath\omega)$
  - Transformada de Fourier: $\dfrac{1}{a+\jmath\omega} = \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\}$
  - Transformada inversa de Fourier: $e^{-at}u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{a+\jmath\omega}\right\}$
  - Exemplo de um par Transformada de Fourier: $e^{-at}u(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \dfrac{1}{a+\jmath\omega}$

Propriedades

- Derivada
  - Consideremos o sinal x(t)

    Se derivarmos o sinal x(t) expresso pela transformada inversa de Fourier teremos:

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad = \quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\jmath\omega)e^{\jmath\omega t}d\omega\right\}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \jmath\omega X(\jmath\omega)$$

Propriedades

– Determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{L}\right), & |t| \le L \\ 0, & |t| > L \end{cases}$$

Propriedades

- Integração
  – Se

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\jmath\omega)$$

então

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\jmath\omega}X(\jmath\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- Determine a T. F. do sinal *u(t)*.

Propriedades

- Dualidade
  - Se compararmos as equações da transformada directa e inversa de Fourier verificamos que são semelhantes, mas não iguais

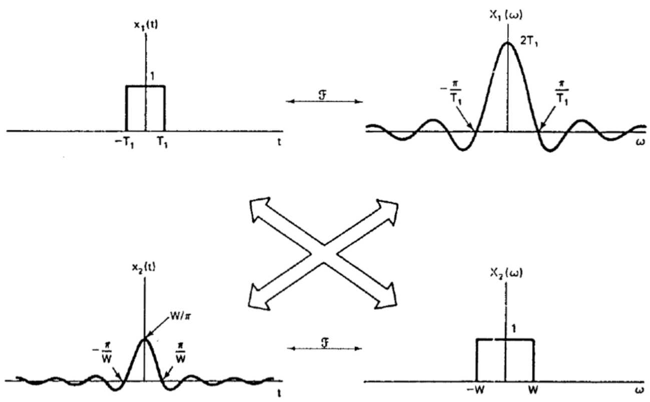
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Estas semelhanças levam à propriedade da dualidade.

Propriedades

- Por exemplo,



Propriedades

– TPC: Determine a transformada inversa de Fourier do espectro abaixo pela definição e pela propriedade da dualidade.

$$X(\jmath\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Propriedades

- Convolução
  – Sabemos que a resposta de um sistema com resposta impulsional h(t) ao sinal de entrada x(t) será:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

  – A transformada de Fourier de y(t) será:

$$\begin{aligned} Y(\jmath\omega) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-\jmath\omega t}dt \end{aligned}$$

Propriedades

– Se trocarmos a ordem de integração e notarmos que x(τ) não depende da variável de integração:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

– Qual é o significado da expressão entre colchetes ?

Pela propriedade do deslocamento temos que o integral anterior pode ser simplificado em

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} H(j\omega) d\tau \\ &= H(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= H(j\omega) X(j\omega) \end{aligned}$$

Propriedades

– Temos então que:

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

– Este resultado é de importância capital na análise de sistemas, pois diz-nos que:

- Temos outra forma de calcular a resposta do sistema que é pelo cálculo da transformada inversa de Fourier do produto das transformadas de Fourier do sinal de entrada e da resposta impulsional.

Propriedades

- Multiplicação
  - A propriedade da convolução afirma que convoluir no tempo significa multiplicar os espectros na frequência.
  - Se aplicarmos a propriedade da dualidade à convolução temporal, obtemos uma relação para o produto no tempo de dois sinais

$$y(t) = x(t)h(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\theta)H(j(\omega-\theta))d\theta$$

  - Proponha a estrutura de um modulador e de um desmodulador AM.

Propriedades

Aperiodic signal	Fourier transform
$x(t)$	$X(\omega)$
$y(t)$	$Y(\omega)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$
$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$
$x(t)$ real	$\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-\omega)\} \\ \lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(\omega) = -\sphericalangle X(-\omega) \end{cases}$
$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{X(\omega)\}$
$x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$j\mathcal{I}m\{X(\omega)\}$

Duality

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)e^{-juv}\,dv$$

$$g(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} f(\omega)$$

$$f(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi g(-\omega)$$

Parseval's Relation for Aperiodic Signals

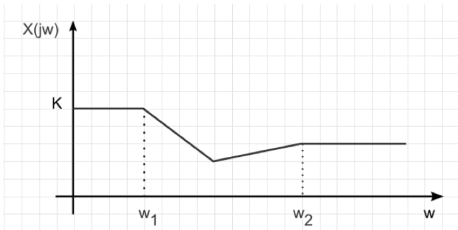
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2\,d\omega$$

Filtros Lineares

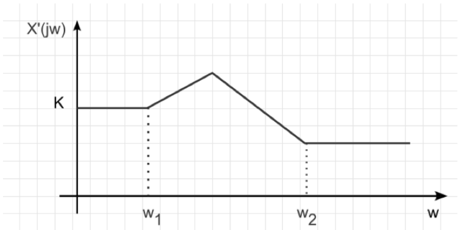
Tipos de Filtros

- *Frequency-shaping filter*
  - Este filtro permite realçar uma gama de frequências sem afectar as restantes.
- *Frequency-selective filter*
  - Este filtro permite seleccionar uma gama de frequências rejeitando as restantes.
  - Nota:
    - Dos dois tipos de filtros, os filtros selectivos na frequência são os mais usados.

Frequency-shaping filter

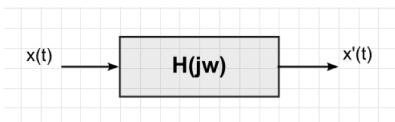


Sinal antes da filtragem

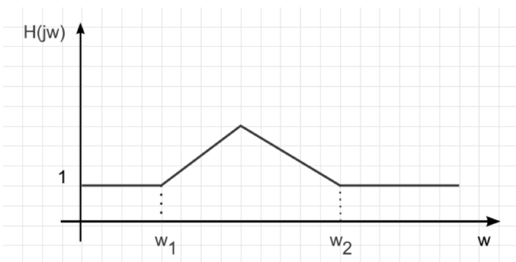


Sinal depois da filtragem

Frequency-shaping filter

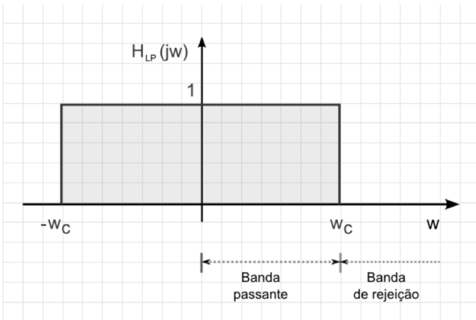


Frequency-shaping filter



Frequency-selective filter

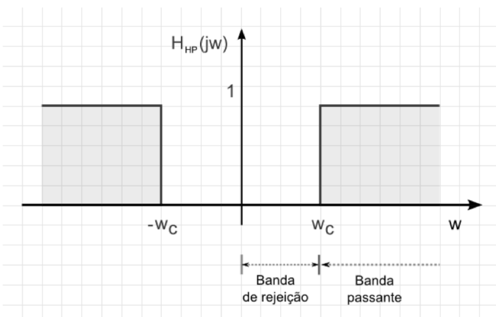
- Filtro passa-baixo
  - Trata-se de um filtro que deixa passar as componentes de baixa frequência, rejeitando as frequências superiores a w_c.



w_c é chamada de frequência de corte do filtro

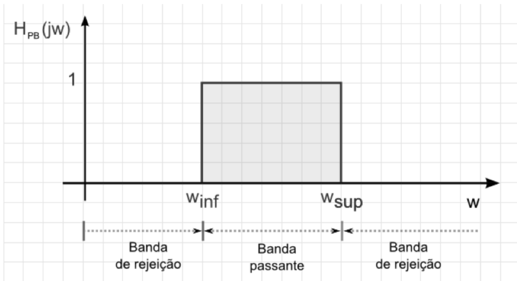
Frequency-selective filter

- Filtro passa-alto
  - Trata-se de um filtro que deixa passar as componentes de alta frequência, rejeitando as frequências inferiores a w_c.



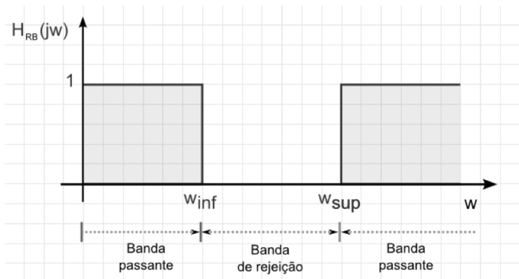
Frequency-selective filter

- Filtro passa-banda
  - Trata-se de um filtro que deixa passar as componentes cujas frequências estejam numa determinada banda, rejeitando as componentes noutras frequências.



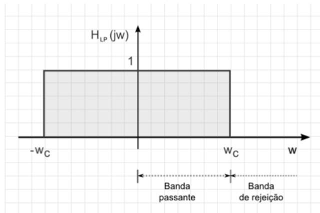
Frequency-selective filter

- Filtro rejeita-banda
  - Trata-se de um filtro que deixa passar todas componentes, excepto numa determinada banda de frequência, onde são rejeitadas.



Filtro ideal

- Considerações gerais.
  - Visto tratar-se de sinais físicos, o espectro será simétrico relativamente as ordenadas, como consequência as frequências de corte serão simétricas.
  - Os exemplos apresentadas referem-se a filtros ideais. Seria possível sintetizar tais filtros ?
    - Consideremos o caso do filtro passa baixo. Seria possível sintetizá-lo ?
    - Qual será a resposta impulsional do filtro passa-baixo ideal ?
      - Pode ser sintetizado ?



Filtros selectivos na frequência

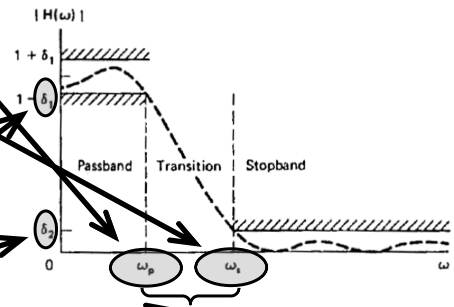
- Filtros sintetizáveis

ω_p – frequência limite da banda passante

ω_s – frequência limite da banda de rejeição.

δ_1 – *Ripple* máximo permitido na banda passante.

δ_2 – *Ripple* máximo permitido na banda de rejeição.

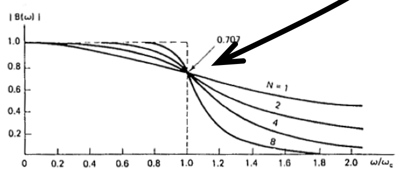


$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ – Largura da banda de transição.

Filtros selectivos na frequência

- Frequência de corte
  - A frequência de corte é definida como sendo a frequência para a qual a resposta do filtro desce para

$$H(\jmath\omega_c) = \frac{1}{\sqrt(2)}H(\jmath 0)$$



Na frequência de corte a potência transmitida será igual a metade da potência para ω= 0.