Ficha3-Ex. 8 | Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma transformação linear e seja

$$\mathcal{C} = A + \langle v_1, \cdots, v_k \rangle \qquad (A, v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n)$$

um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a imagem de $\mathcal{C}$ pela transformação T é o subespaço afim de $\mathbb{R}^p$ dado por

$$T(\mathcal{C}) = T(A) + \langle T(v_1), \cdots, T(v_k) \rangle.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
T(\mathcal{C}) &= \{T(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in \mathcal{C}\} \\
&= \{T(A + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) \colon \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \\
&= \{T(A) + \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) \colon \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \quad \text{(por linearidade)} \\
&= T(A) + \langle T(v_1), \cdots, T(v_k) \rangle.
\end{aligned}$$

Ficha3-Ex. 9 | Usando o exercício anterior, determine e represente graficamente a imagem das seguintes retas de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{R}_1 = \langle (1, 2) \rangle \qquad \mathcal{R}_2 = (0, 1) + \langle (1, 2) \rangle$$

por cada uma das seguintes transformações lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x, -y)$

$$T(\mathcal{R}_1) = \langle T(1, 2) \rangle = \langle (1, -2) \rangle \qquad T(\mathcal{R}_2) = T(0, 1) + \langle T(1, 2) \rangle = (0, -1) + \langle (1, -2) \rangle$$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (2x - y, 0)$

$$T(\mathcal{R}_1) = \{(0, 0)\} \qquad T(\mathcal{R}_2) = \{(-1, 0)\}$$

Ficha3-Ex. 10 | Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e sejam $v_1, \cdots, v_k \in V$ vetores linearmente independentes. Mostre que, se T é injetiva, então $T(v_1), \cdots, T(v_k)$ são linearmente independentes.

Sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = 0_W.$$

Como T é linear, isto implica que

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = 0_W = T(0_V).$$

Como T é injetiva, isto implica que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_V.$$

Como $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes, podemos concluir que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

o que significa que $T(v_1), \cdots, T(v_k)$ são linearmente independentes.

Observação. Uma transformação linear e bijetiva $T : V \to W$ diz-se **isomorfismo linear**. Neste caso, temos $\dim V = \dim W$ e T envia uma base de V sobre uma base de W. Por exemplo:

- A transformação $\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 2y) \end{array}$ do Ex. 5 é um isomorfismo linear.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, a transformação

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{P}ol_n(\mathbb{R}) \\ & (a_0, a_1, \cdots, a_n) & \longmapsto & P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \end{array}$$

  é um isomorfismo linear.

  Note que T envia a base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre a base de $\mathcal{P}ol_n(\mathbb{R})$ dada por

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, \cdots, P_n(x) = x^n.$$

- Se V é um espaço vetorial de dimensão n com base $v_1, \cdots, v_n$, então a transformação linear definida por

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & V \\ & e_i & \longmapsto & v_i \end{array}$$

  ($e_1, \cdots, e_n$ base canónica de $\mathbb{R}^n$) é um isomorfismo linear.