Teste de Mecânica Analítica e Ondas

Licenciatura em Física e Licenciatura em Engenharia Física

Universidade do Minho — 19 de Janeiro de 2022

(Leia as questões com muita atenção, pois algumas contêm múltiplas perguntas)

I

$\omega_0 \gg \gamma/2$

1- Considere um oscilador forçado cuja mola da qual está suspensa uma massa m tem massa desprezável. Quando $\gamma/2 \ll \omega_0$ a potência média fornecida ao oscilador pode ser escrita como,

$$\bar{P}(\omega) \;=\; \frac{\gamma F_0^2}{2m}\frac{1}{4(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2}$$

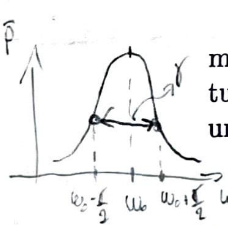
$m \equiv$ massa da massa suspensa
$\gamma \equiv$ constante de amortecimento
$\omega_0 \equiv$ frequência natural do oscilador
$\omega \equiv$ frequência do oscilador
$F_0 \equiv$ Força inicial aplicada no oscilador

(a) Defina as quantidades que aqui aparecem, indique qual a expressão do valor máximo da potência média e diga em que caso é que a potência média é nula e porquê, a justificaçao devendo ser dada em termos da potência instantânea.

$\bar{P}_{max} = \frac{F_0^2}{2m\gamma}$

A potência média é nula quando não há decaimento, porque potência instantânea fornecida do sistema à força é igual à da força fornecida ao sistema

(b) Represente esquematicamente numa figura a dependência em ω da potência média $\bar{P}(\omega)$ fornecida ao oscilador, assinale na figura a largura em ω da semi altura da curva de potência da ressonância e expresse essa largura em termos de uma quantidade física.



(c) Indique qual a relação dessa largura da ressonância do oscilador forçado com o grau de decaimento das oscilações no caso do mesmo oscilador não ser forçado. Forneça a expressão da energia mecânica deste último no presente caso em que $\gamma/2 \ll \omega_0$.

2- Considere uma corda de comprimento L e densidade linear μ, que apresenta uma tensão T ao ser esticada e cujas vibrações em função do tempo t obedecem à equação de movimento,

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{onde } \; x \in [0,L] \; \text{ e } \; |y(x,t)| \ll L$$

(a) Qual é a expressão da velocidade v que aparece nesta equação? $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

(b) Considere vibrações cujas soluções da equação de movimento acima dada são da seguinte forma geral,

$$y_n(x,t) = f_n(x)\cos(\omega_n t) \;\text{ onde }\; n = 1,2,3,...$$

$\nu_m = \frac{mv}{2L} = \frac{m}{2L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$ $\omega_m = 2\pi\nu_m$

$\Rightarrow \omega_m = \frac{\pi m}{L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$ $f_n(x) = A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$

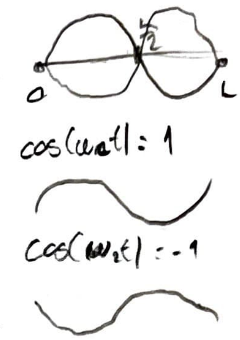
Modos normais ou harmónicos

Forneça as expressões de $f_n(x)$ e de ω_n e indique que tipo de vibrações têm soluções desta forma e qual a designação da que corresponde a $n = 1$.

Modo

(c) Represente numa figura a dependência de $y(x,t)$ em funcção de $x \in [0, L]$ no caso do tipo de vibração da alínea (b) com $n = 2$, incluindo as linhas que limitam as amplitudes de vibração. Indique quais são as expressões analíticas que definem essas linhas e quais os valores de x entre 0 e L para os quais existem nodos e anti-nodos da vibração.

$\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = 0 \ \vee \ \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) = 1$



II

1- Considere um sistema constituido por três pontos materiais P_1 de massa $m_1 = m$, P_2 de massa $m_2 = \frac{3}{2}m$ e P_3 de massa $m_3 = \frac{1}{2}m$ onde $m = 1\,\mathrm{Kg}$, no referencial em que as coordenadas dos vetores posição destes pontos são em metros dadas por $\vec{r}_1 = [2,1,1]$, $\vec{r}_2 = [0,1,0]$ e $\vec{r}_3 = [1,0,3/2]$, respetivamente. Determine os momentos e produtos de inércia do tensor de inércia do sistema.

2- Considere um desvio vibracional da forma,

$\cos(\omega t + \frac{\pi}{12})$ $\quad$ $\frac{1}{3}\cos(4\omega t - \frac{\pi}{9})$

$$x = C\left[2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(4\omega t - \frac{\pi}{9}\right) - \frac{1}{3}\sin\left(4\omega t + \frac{7\pi}{18}\right)\right]$$

onde $C = 1\,\mathrm{mm}$, o qual pode ser escrito como $x = A\cos(\omega t + \alpha)$ com $A > 0$. Determine a fase na origem α com valores entre $-\pi$ e π e a amplitude A em mm desta última expressão.

Dados auxiliares

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(5\pi/12) = \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$
$$\cos(\pi/3) = \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$$
$$\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos(\pi/6) = \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(\pi/12) = \sin(5\pi/12) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$