

4. AMOSTRAGEM

Os sinais contínuos no tempo são por definição constituídos por um número infinito de pontos, mesmo os de duração finita, pois podem ser descritos por uma função contínua no tempo contendo eventualmente alguns pontos de descontinuidade. A representação destes sinais no domínio das frequências pode ser uma função contínua ou, se o sinal for periódico um número infinito de valores (pontos isolados) igualmente espaçados em frequência. Em ambos os casos são necessários infinitos pontos quer no tempo quer na frequência para representar um sinal contínuo no tempo, o que é incompatível com o processamento computacional caracterizado por recursos de memória limitados.

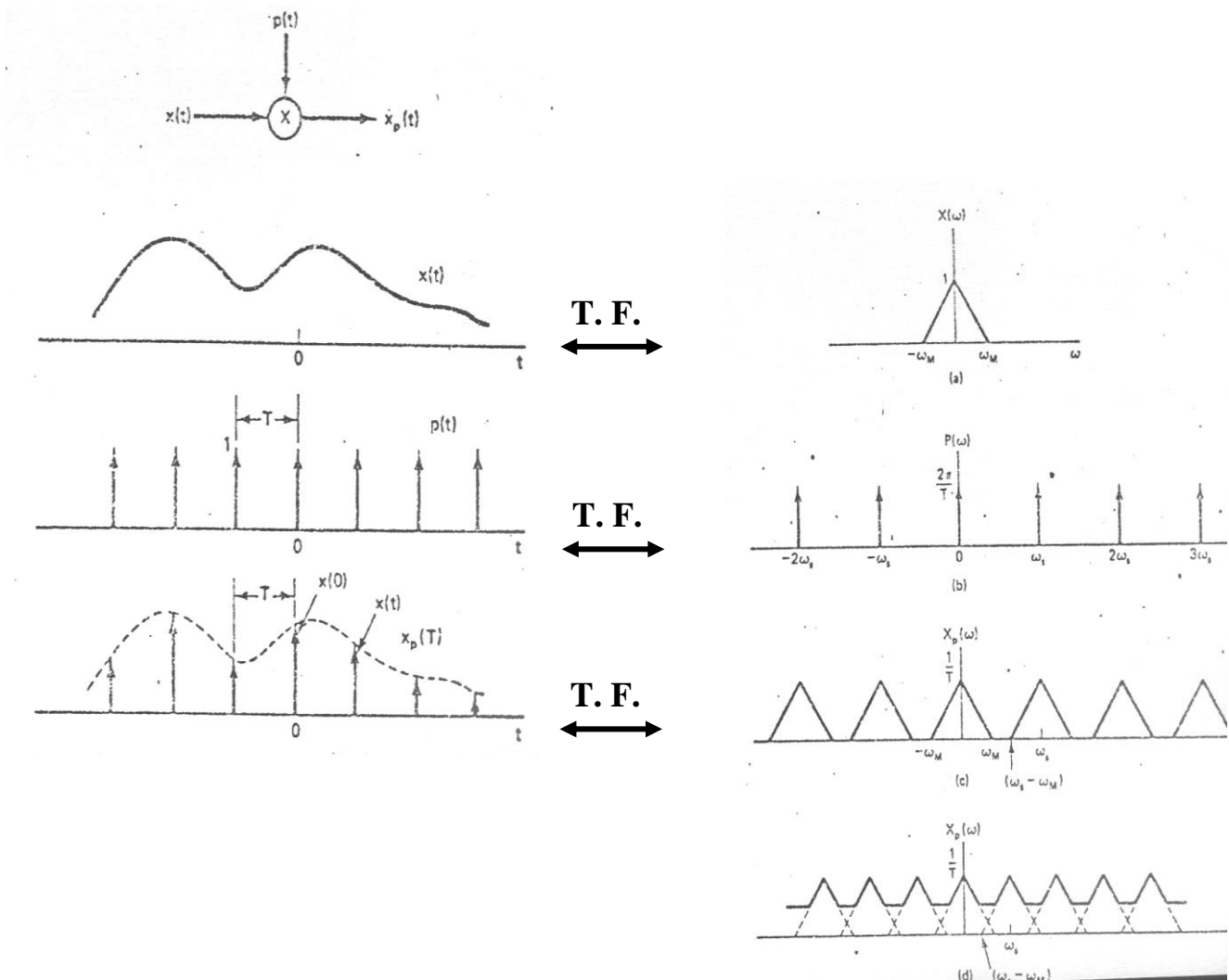
Por outro lado, os sinais discretos no tempo com duração finita e a sua representação espectral em termos de DFT são compatíveis com o processamento computacional por poderem ser representados por um número limitado de pontos quer no tempo quer na frequência.

No entanto os sinais normalmente encontrados na natureza são contínuos. Por exemplo se falarmos para um microfone e registarmos o sinal eléctrico produzido por este verificamos que se trata de um sinal contínuo. Então não será este sinal processável computacionalmente? Certamente que sim, de outro modo não existiriam redes telefónicas de comunicação digital. A ideia é converter um sinal contínuo de duração finita num sinal discreto também de duração finita. Isto pode ser facilmente conseguido tomando valores instantâneos ou amostras igualmente espaçadas do sinal contínuo. A questão que agora se coloca será em que condições estas amostras podem representar completamente o sinal contínuo, ou seja será o sinal contínuo recuperável a partir das suas amostras ? Se sim então não existiu perda de informação na

conversão do sinal contínuo para discreto. Neste capítulo vamos verificar que de facto sob certas condições um sinal contínuo pode ser completamente representado pelas suas amostras, o que é matematicamente provado pelo teorema da amostragem também conhecido como teorema de Nyquist.

4.1 Amostragem por trem de impulsos

A figura seguinte mostra que a multiplicação de um sinal contínuo por um trem de impulsos origina um sinal ainda contínuo constituído pelos valores instantâneos do sinal original nos instantes onde apareceram os impulsos. Como este sinal resultante é nulo entre os valores instantâneos do sinal original pode facilmente converter-se num sinal discreto tomando simplesmente os valores instantâneos ou amostras do sinal original.



O lado direito da figura mostra o processo de amostragem por trem de impulsos no domínio das frequências. Este processo de amostragem requer que o sinal a amostrar $x(t)$ seja um sinal de largura de banda limitada também denominado por vezes sinal do tipo passa baixo, ou se não possuir componentes de baixa frequência sinal do tipo passa-banda. Este sinal a amostrar é, no domínio dos tempos multiplicado por um trem de impulsos, o que pela propriedade da modulação é equivalente a convolver o seu espectro pelo espectro do trem de impulsos. Como o espectro de um trem de impulsos é ainda um trem de impulsos espaçados e de amplitude $2\pi/T$ sendo T o período do trem de impulsos (ver pág. 3.15) o espectro do sinal amostrado pode ser calculado directamente pela propriedade da modulação como segue

$$x_p(t) = p(t)x(t) \xleftrightarrow{\text{T. F.}} X_p(w) = \frac{1}{2\pi} [P(w) * X(w)]$$

$$X_p(w) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(w - k \frac{2\pi}{T} - \Theta\right) X(\Theta) d\Theta \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(w - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

ou seja o espectro do sinal amostrado consiste em repetições sucessivas do espectro do sinal original centradas em $k2\pi/T$, e multiplicadas por $1/T$ como sugere a figura da página anterior (figura do lado direito da página, 3ª figura a contar de cima). Constata-se pela mesma figura que se a frequência de amostragem é grande as repetições espectrais do sinal original não se sobrepõem e o sinal original pode ser recuperado a partir das suas amostras por um filtro passa baixo, ou por outras palavras para que não seja perdida informação do sinal no processo de amostragem é necessário que o número de amostras por período seja suficiente. A figura logo abaixo mostra o caso em que a frequência de amostragem é pequena originando sobreposição espectral

nas várias repetições do espectro do sinal original, fenómeno ao qual se dá o nome de *aliasing*. O espectro do sinal original não é recuperável do espectro do sinal amostrado, o que significa que o processo de amostragem danificou o sinal original de forma irreparável.

Para que não exista *aliasing* é necessário que, como se constata da figura

$$W_M < W_s - W_M$$

onde W_M representa a componente espectral mais elevada do sinal e W_s a velocidade angular de amostragem $2\pi/T$. A equação anterior é mais vulgar na forma $w_s > 2w_M$ e é conhecida como o teorema da amostragem, ou de Nyquist, que pode ser enunciado do seguinte modo:

Teorema da Amostragem:

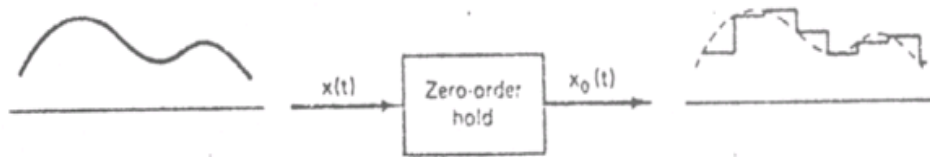
Seja $x(t)$ um sinal de banda limitada com $X(w)=0$ para $|w|>w_M$. Então $x(t)$ é determinado de modo único pelas suas amostras $x(nT)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ se $w_s > 2w_M$ onde $w_s = 2\pi/T$.

Dadas estas amostras, $x(t)$ pode ser reconstruído através da geração de um trem de impulsos periódico de amplitudes iguais às amplitudes das amostras. Este trem de impulsos é então processado por um filtro passa-baixo com ganho T e frequência de corte compreendida entre w_M e $(w_s - w_M)$. O sinal de saída deste sistema é $x(t)$.

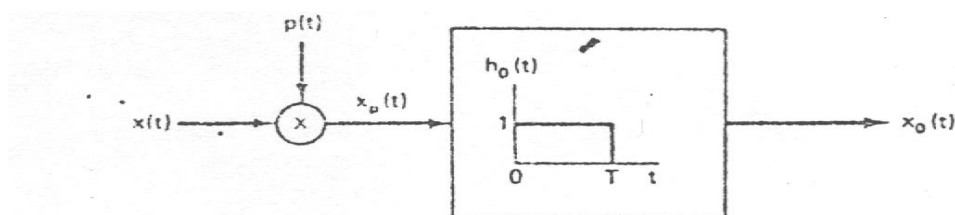
4.2 Amostragem por “Zero-Order Hold”

Os conversores de sinais contínuos para sinais discretos, chamados ADC (Analog Digital Converter) têm o seu principio de funcionamento baseado num método conhecido por amostragem e retenção (sample and hold). Quando um valor é convertido de analógico para digital a saída do conversor é mantida

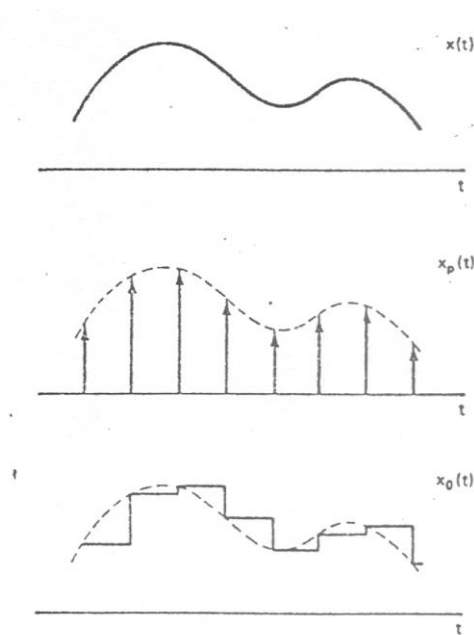
inalterada até que o próximo valor seja convertido como mostra a figura seguinte.



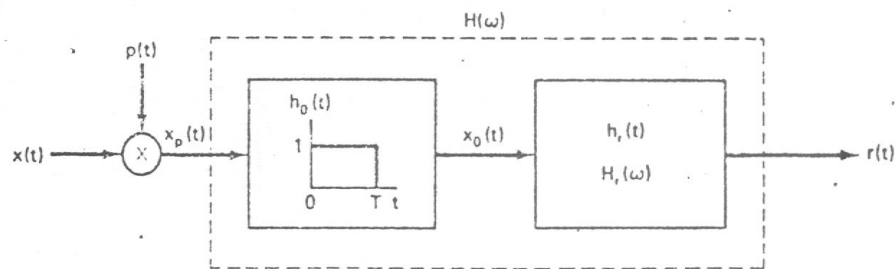
A questão que se coloca agora é saber de que forma o sinal contínuo poderá ser recuperado a partir das suas amostras quando estas são obtidas por amostragem e retenção. Consideremos então o esquema equivalente do sistema de amostragem e retenção que pode ser visto como uma amostragem por trem de impulsos seguida de convolução com um pulso rectangular (compreenda bem este detalhe !!) mostrado na figura seguinte.



A figura seguinte mostra a resposta do sistema anterior a um sinal hipotético $x(t)$.



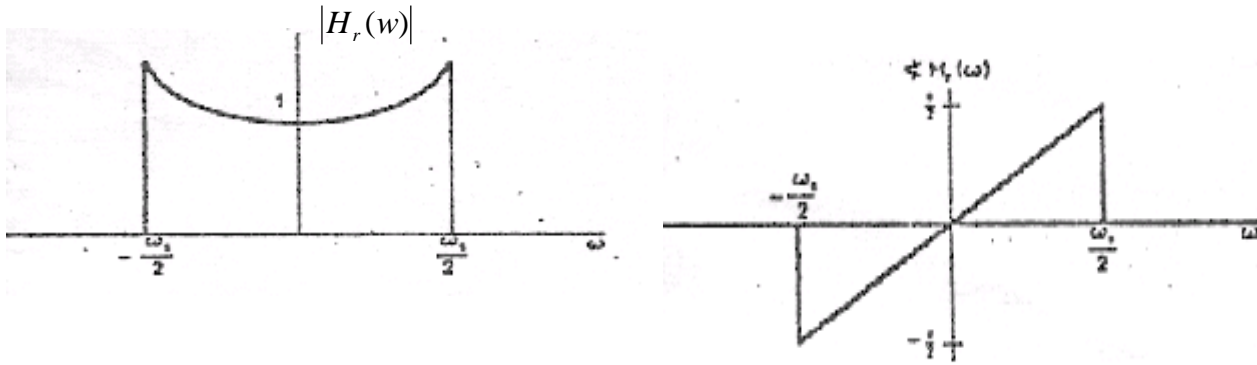
O filtro para recuperar o sinal original h_r é agora mostrado na figura seguinte e pode ser calculado com base no pressuposto de que a cascata de sistemas h_0 e h_r deve ser tal que o seu equivalente seja o filtro passa-baixo ideal que permite recuperar $x(t)$ a partir da sua versão amostrada por trem de impulsos.



Como $H_0(w)$ e $H(w)$ são conhecidos, $H_r(w)$ pode ser facilmente calculado como

$$H_o(w) = e^{-jw\frac{T}{2}} \left[\frac{2\sin(wT/2)}{w} \right] \quad H_r(w) = \frac{e^{jw\frac{T}{2}} H(w)}{\left[\frac{2\sin(wT/2)}{w} \right]}$$

A figura seguinte mostra a resposta em frequência do filtro que permite a reconstrução do sinal a partir das suas amostras obtidas por amostragem e retenção



4.3 Reconstituição de um sinal através das suas amostras

Na secção 4.1 concluímos que a recuperação de um sinal contínuo a partir de uma sua versão amostrada poderia ser efectuada por filtragem passa baixo ideal desde que não tivesse existido *aliasing* no processo de amostragem. Então no domínio dos tempos o sinal recuperado $x_r(t)$ é obtido por convolução do sinal amostrado $x_p(t)$ com a resposta impulsional do filtro passa-baixo ideal com ganho na banda passante de T , ou seja

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

onde por definição de amostragem por trem de impulsos $x_p(t)$ é dado por

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

Então o sinal recuperado $x_r(t)$ é dado por

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau - nT) h(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h(t - nT)$$

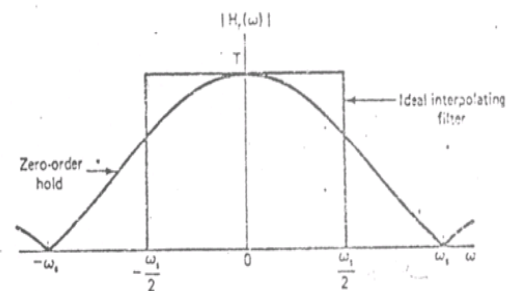
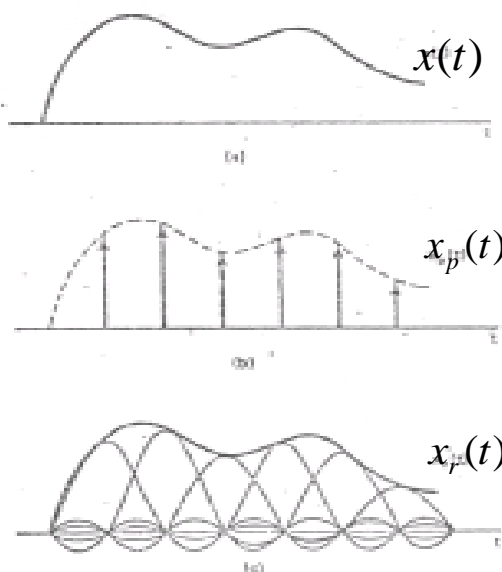
$h(t)$ é a transformada inversa de Fourier de uma função rectangular de amplitude T e de largura $\omega_s/2$ ou seja

$$h(t) = T \frac{\omega_s}{2\pi} \text{sinc} \left(\frac{\omega_s t}{2\pi} \right)$$

Então o sinal recuperado por filtragem passa-baixo ideal $x_r(t)$ pode ser escrito como

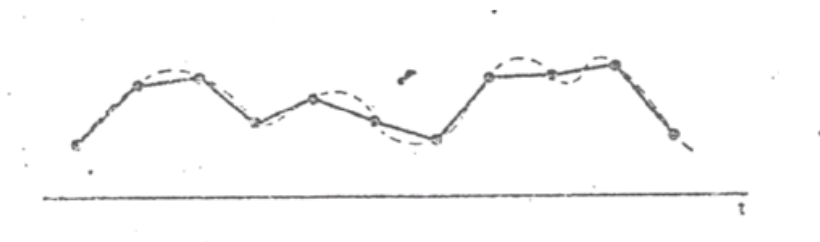
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)T \frac{w_s}{2\pi} \sin c\left(\frac{w_s(t-nT)}{2\pi}\right)$$

A equação anterior não é mais que uma fórmula de interpolação dado que descreve como é que as amostras $x(nT)$ devem ser ligadas para integrarem uma função contínua $x_r(t)$. Repare que no caso da amostragem e retenção a interpolação é feita pela convolução com a função $h_0(t)$, sendo o sinal $x_0(t)$ (ver pág. 4.6) neste caso uma aproximação a $x(t)$. Por outro lado a interpolação com a função sinc implementa a reconstrução exacta de $x(t)$ no caso de não ter sido violado o teorema de Nyquist. A figura seguinte (lado esquerdo) elucida este tipo de interpolação. O lado direito da figura mostra a diferença entre a interpolação com a função sinc (interpolação ideal) e a interpolação efectuada pela amostragem e retenção. Podemos verificar que a aproximação por amostragem e retenção é uma aproximação muito grosseira da interpolação ideal (filtragem passa-baixo ideal), no entanto é suficiente na maioria dos casos, o que significa que o filtro cuja resposta em frequência é mostrada na figura ao cimo da pág. 4.7 não é em geral usado.



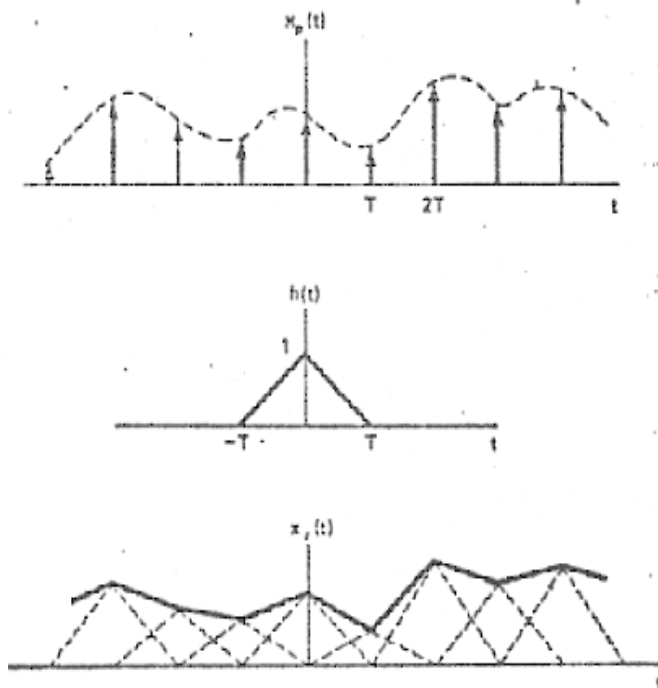
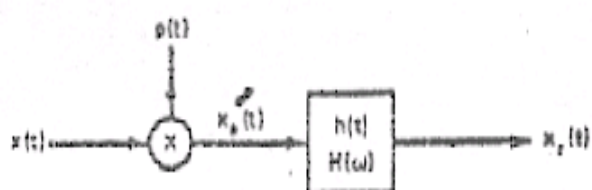
Tipicamente os sinais reais são de largura de banda extensa requerendo por isso filtragem passa-baixo antes de serem amostrados. Esta filtragem melhora o desempenho da interpolação por amostragem e retenção pois diminui o *aliasing* inevitavelmente presente na aproximação de um sinal pela sua versão obtida por amostragem e retenção. Outro factor bastante relevante que normalmente justifica a não necessidade de recuperação ideal do sinal a partir da sua versão obtida por amostragem e retenção está relacionada com as características dos mecanismos de percepção humana (visão, audição, etc) que normalmente são do tipo passa-baixo. Isto significa que para frequências próximas da frequência de amostragem os mecanismos de percepção humana atenuam significativamente os sinais compensando a aproximação por amostragem e retenção uma vez que se diminui o *aliasing*. Isto pode ser constatado por análise da parte direita da figura anterior supondo que o sinal que vai ser visto vai ser bastante atenuado para frequências altas, nomeadamente compreendidas entre $w_s/2$ e w_s . Não deixe de ver o exemplo do livro da disciplina referente a este assunto pois são imagens difíceis de reproduzir neste documento.

Um tipo de aproximação frequentemente usado na prática é a interpolação linear que consiste em ligar as amostras através de segmentos de recta como mostra a figura seguinte.

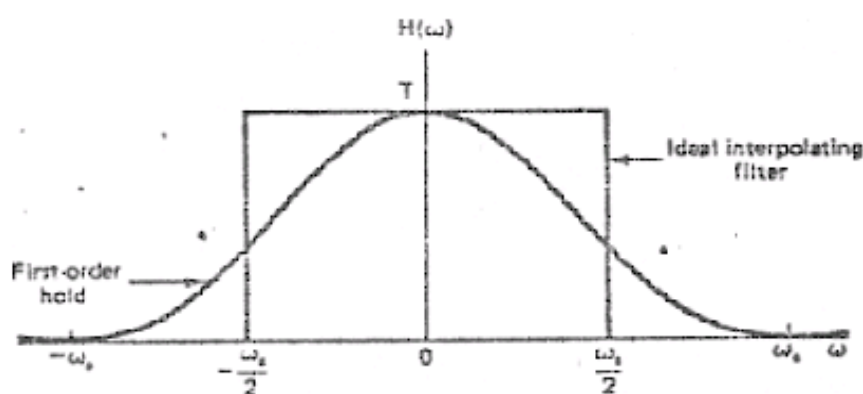


A figura seguinte mostra que este tipo de interpolação é equivalente a uma convolução do sinal amostrado por trem de impulsos com um pulso triangular cuja função de transferência é dada por

$$H(\omega) = T \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$



A figura seguinte mostra as respostas em frequência do filtro de interpolação ideal e do filtro real aplicado ao sinal quando se utiliza a interpolação linear.

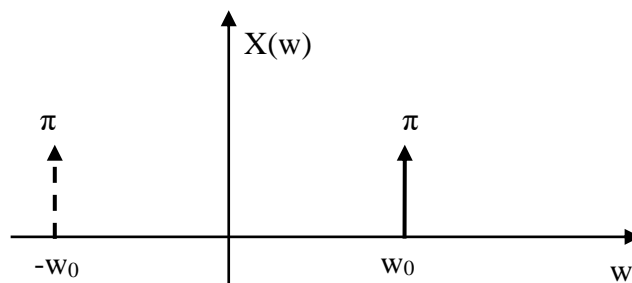


A título comparativo a interpolação linear é teoricamente melhor que a interpolação por amostragem e retenção, uma vez que a função sinc^2 atenua mais as altas frequências (frequências na vizinhança de ω_s) que a função sinc ,

dado o quadrado de um número inferior à unidade ser menor que o próprio número.

4.4 O efeito da sub-amostragem (“Aliasing”)

O teorema da amostragem (páginas 4.2 e 4.3) mostra que um sinal só é recuperável integralmente a partir de uma sua versão amostrada no caso de não ter ocorrido *aliasing* no processo de amostragem, ou seja se a condição $w_s > 2w_m$ foi verificada, apesar de nos instantes de amostragem o sinal reconstruído e o sinal original serem sempre coincidentes, ou seja $x_r(nT) = x(nT)$. Vamos verificar que mesmo com tantos pontos coincidentes o sinal reconstruído pode ser bastante diferente do sinal original. Vamos para este propósito considerar a amostragem de um sinal sinusoidal, cuja transformada de Fourier se encontra apresentada na figura seguinte, onde se distinguiu graficamente o impulso situado em w_0 do impulso situado em $-w_0$. Esta distinção é necessária pois permite detectar oposição de fase entre o sinal reconstruído e o sinal original. Seja $x(t) = \cos(w_0 t)$, cuja transformada de Fourier $X(w) = \pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$ está representada na figura seguinte

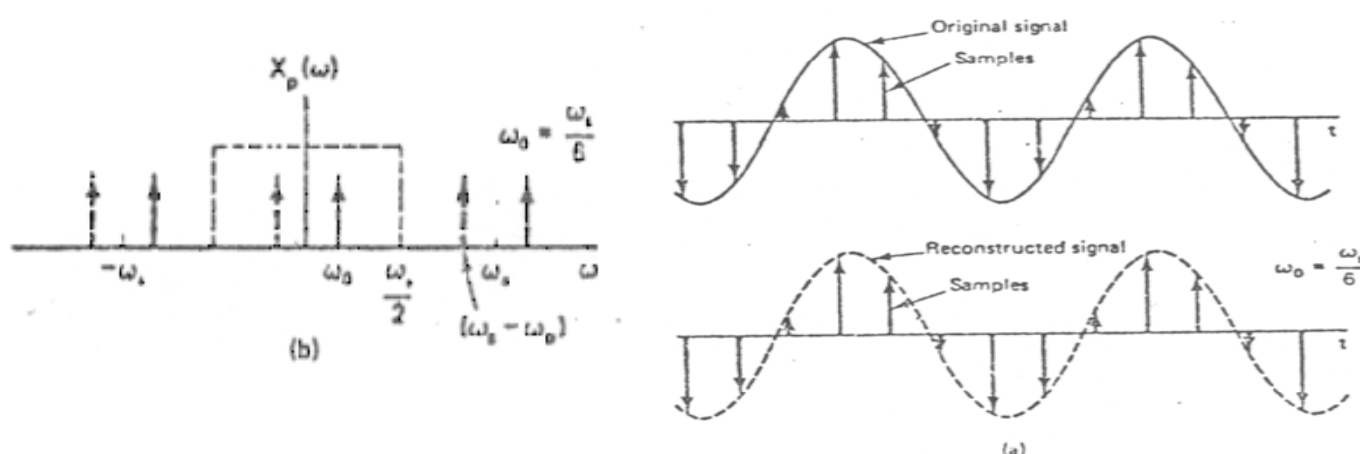


A transformada de Fourier do sinal amostrado será constituída por infinitas repetições de $X(w)$ centradas em kw_s com k inteiro a variar de $-\infty$ até $+\infty$,

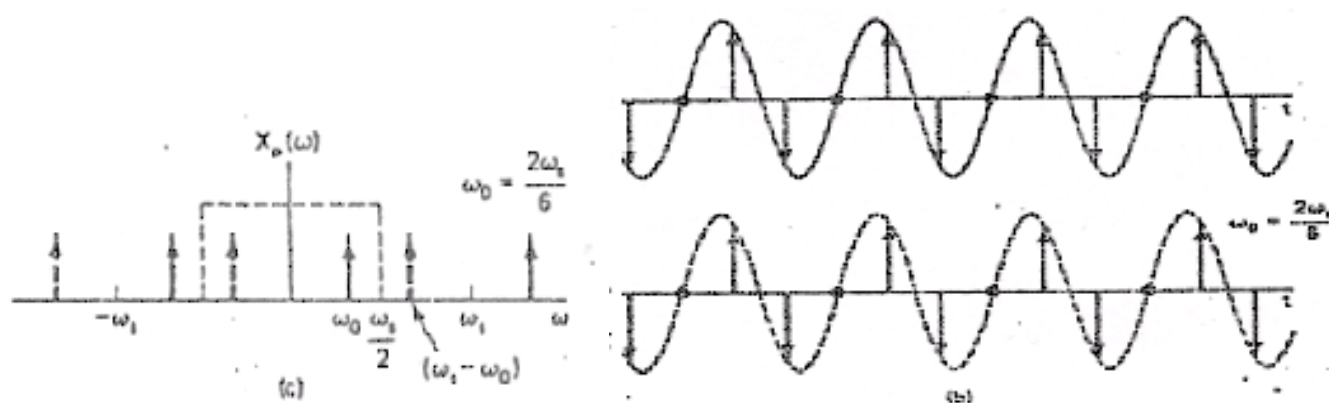
como mostra a equação derivada na página 4.3 e repetida aqui por conveniência

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

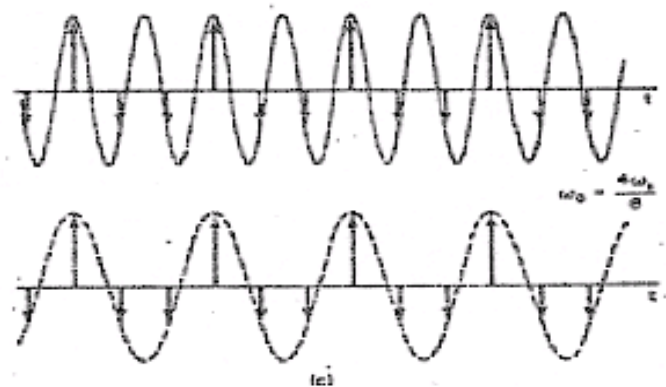
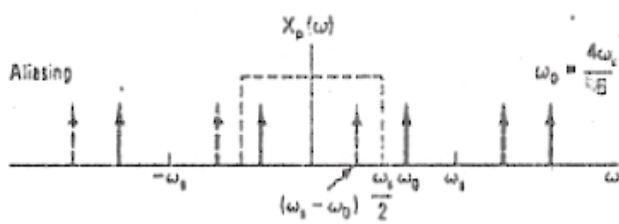
A figura seguinte mostra o caso em que a senoide é amostrada com $W_s = 6W_M$, ou seja onde são retiradas 6 amostras por período. Como se pode constatar da figura o sinal reconstruído é igual ao sinal original pois o filtro passa-baixo consegue isolar o espectro integral do sinal original



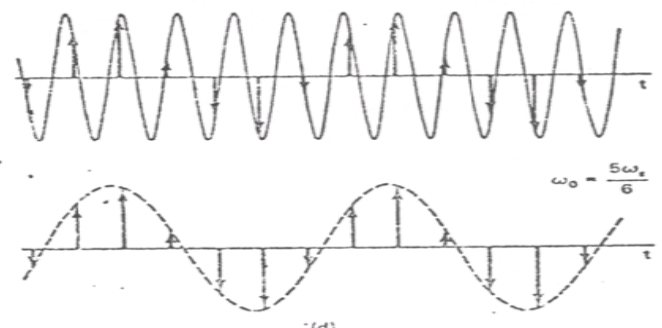
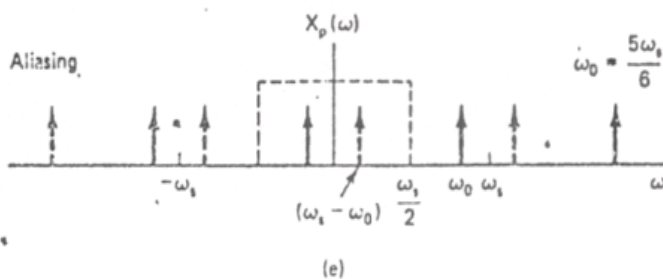
O caso ilustrado na figura seguinte é para $W_s = 3W_M$, correspondendo portanto a outro caso de não violação do teorema de Nyquist onde se mostra que com 3 amostras por período se recupera ainda o sinal original a partir da sua versão amostrada.



A figura seguinte mostra o caso em que $4W_s = 6W_M$, portanto onde existe *aliasing*, o que pode ser confirmado comparando o sinal reconstruído a partir da sua versão amostrada com o sinal original. Repare que o sinal reconstruído está em oposição de fase com o sinal original $x(t)$ dado que os fazores inverteram o seu sentido de rotação de um sinal para o outro. A oposição de fase pode ser constatada verificando que todos os mínimos do sinal reconstruído coincidem temporalmente com máximos do sinal original. O recíproco não é verdadeiro porque entretanto o *aliasing* provocou alteração da frequência do sinal original.



A figura seguinte mostra mais um caso onde existe *aliasing* e onde é maior a diferença entre o sinal reconstruído e o sinal original



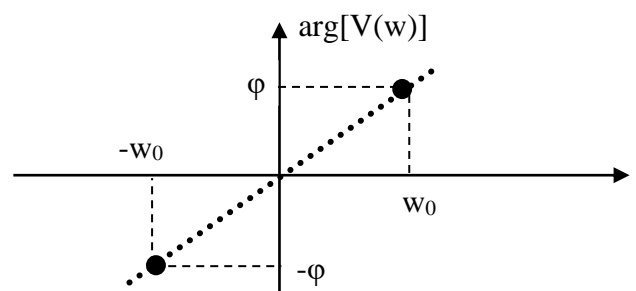
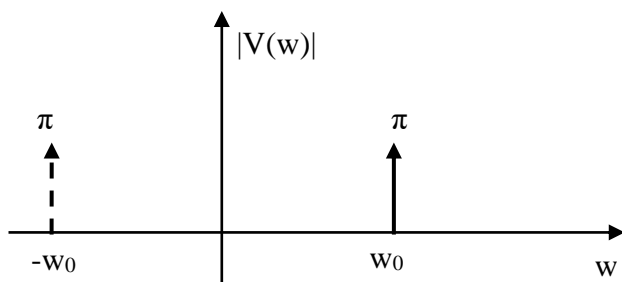
Consideremos agora um exemplo completo envolvendo o teorema da amostragem.

Seja $v(t)=A.\cos(w_0t+\varphi)$ com $A=1$ e $w_0=120\pi$ um sinal que representa a vibração de um ponto material. Imagine que observa esse ponto iluminado por luz estroboscópica, cuja iluminação $i(t)$ pode ser descrita por $i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$ com $1/T$ a frequência da luz estroboscópica. O olho humano pode ser modelado por um filtro passa-baixo ideal de frequência de corte 20 Hz. O sinal observado é do tipo $r(t)=v(t).i(t)$.

- Esboce $V(w)$ indicando o efeito de w_0 e φ .
- Esboce $I(w)$ indicando o efeito de T .
- Esboce $R(w)$ para T um pouco menor que T de Nyquist. Determine T de Nyquist.
- Suponha que $w_s=w_0+20\pi$. Esboce $R(w)$ admitindo que o olho humano funciona como foi descrito. Exprima $v_a(t)$ (posição aparente) na forma $v_a(t)=A.\cos(w_at+\varphi_a)$.
- Repita a alínea anterior para $w_s=w_0-20\pi$.

a) Estamos na presença da transformada de Fourier de um cosseno de fase não nula pelo que usando a propriedade do deslocamento no tempo obtemos

$$v(t) = \cos(w_0t + \varphi) = \cos\left[w_0\left(t + \frac{\varphi}{w_0}\right)\right] \quad \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \quad V(w) = e^{j\frac{\varphi}{w_0}w} \pi[\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0)]$$



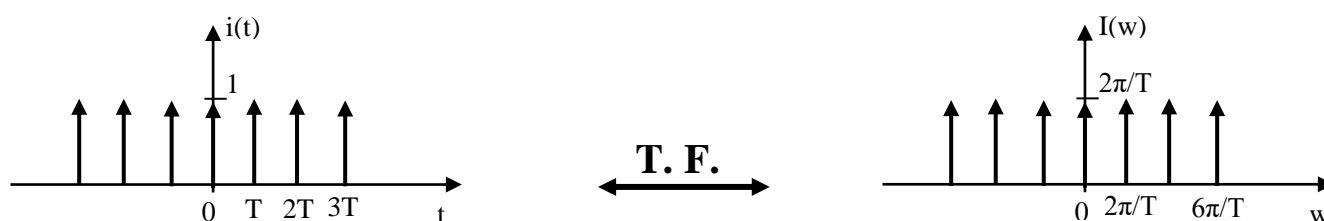
w_0 é a velocidade angular sendo por isso uma medida da velocidade a que se desloca a massa considerando a amplitude do movimento não dependente da

velocidade. Se a amplitude e a velocidade do movimento da massa são dependentes, o que é intuitivo que aconteça na prática, pois quanto mais se puxar a mola maior a força exercida na massa e consequentemente maior a aceleração da mesma então apenas podemos dizer que w_0 é uma medida do tempo que a massa demora a regressar ao mesmo lugar, ou por outras palavras a fazer um ciclo (trajecto) completo.

A fase indica a diferença temporal entre a origem dos tempos e o máximo da função sinusoidal (cosseno). Neste caso ter uma fase não nula significa apenas que quando se começou a medir o tempo a velocidade da massa não era a máxima, ou seja esta não estaria a passar na posição de repouso.

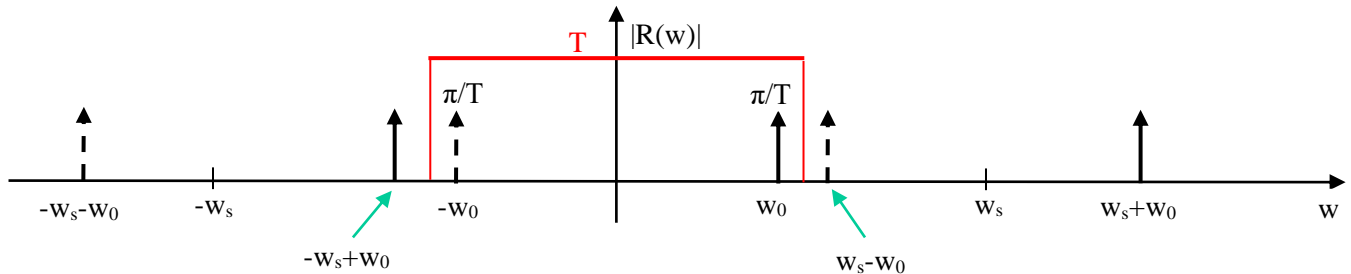
b) $I(w)$ representa a transformada de Fourier de um trem de impulsos. O espectro de um trem de impulsos é ainda um trem de impulsos espaçados e de amplitude $2\pi/T$ sendo T o período do trem de impulsos (ver pág. 3.15)

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \xleftrightarrow{\text{T. F.}} I(w) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w - k \frac{2\pi}{T})$$

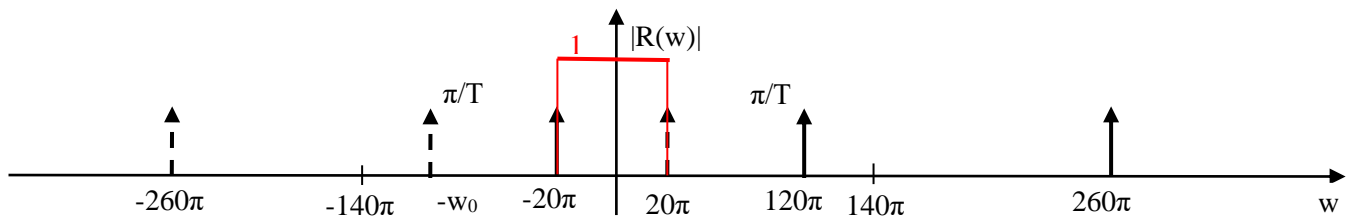


T é o período de amostragem ou seja o intervalo de tempo que decorre entre os instantes em que a massa é iluminada. Isto significa que a posição absoluta da massa é vista de T em T unidades de tempo.

c) Esta é uma situação quase de *aliasing*, ou seja ainda é possível recuperar o sinal original mas não existe muita margem de variação (aumento) para o período de amostragem que permita ainda a recuperação do sinal, ou seja w_0 é pouco menor que $w_s - w_0$.



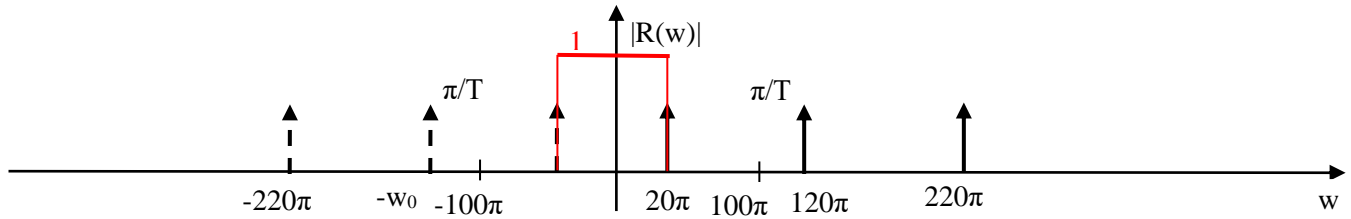
d) Este é um caso onde existe *aliasing* pois $w_s = w_0 + 20\pi \ll 2w_0$



Além disso como se pode verificar da figura a fase está invertida, pois o fador positivo e negativo ficaram com velocidades simétricas da do sinal original. Deste modo aparentemente a massa desloca-se muito mais lentamente e com sentido inverso do movimento real, o que significa que deu menos que uma volta completa durante o tempo de amostragem. Pela figura podemos verificar que a velocidade aparente (provocada por falsificação da velocidade da massa devido a amostragem inadequada) da massa é agora descrita pela seguinte equação

$$v_a(t) = \frac{1}{T} \cos\left(\frac{w_0}{6} t - \varphi\right)$$

e) Este é um caso onde também existe *aliasing* pois $w_s = w_0 - 20\pi \ll 2w_0$



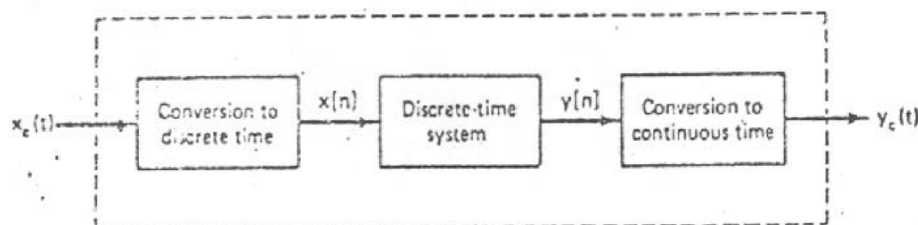
No entanto agora não há inversão de fase pelo que durante o tempo de amostragem a massa deu mais que uma volta completa, pelo que a sua velocidade é dada por aparente

$$v_a(t) = \frac{1}{T} \cos\left(\frac{w_0}{6}t + \varphi\right)$$

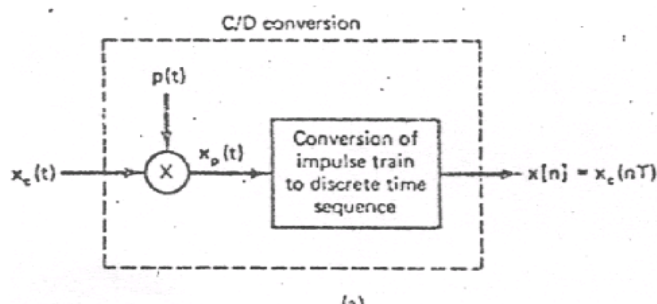
4.5 Processamento digital de sinais contínuos

Foi mencionado na introdução deste capítulo que a maioria dos sinais encontrados na natureza são analógicos. No entanto se estes sinais forem digitalizados sem ocorrência de *aliasing* podem ser integralmente armazenados em unidades de memória de computadores como discos rígidos por exemplo. É também um facto que os níveis de desempenho e flexibilidade dos computadores, microprocessadores e eventualmente circuitos integrados dedicados têm tornado mais atraente o processamento digital daqueles sinais. A vantagem principal do processamento digital está directamente relacionada com a flexibilidade dos computadores no sentido de que a alteração do sistema corresponderá tão somente a uma alteração do algoritmo implementado (programa). Para um processamento analógico alterar o sistema significa projectar e executar um circuito eléctrico completamente novo. Outra vantagem significativa está relacionada com a capacidade de armazenamento

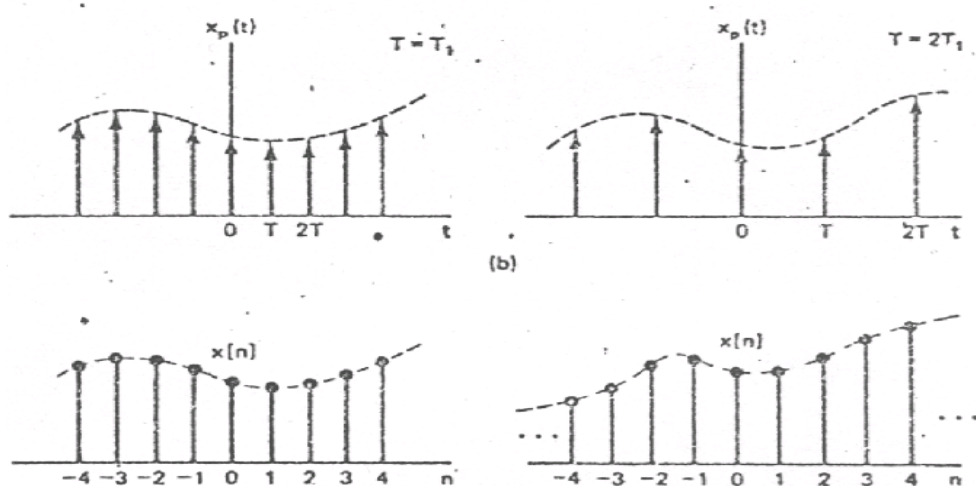
de informação conseguida hoje em dia em sistemas computadorizados. A figura seguinte mostra em diagrama de blocos como é que se pode processar digitalmente um sinal contínuo.



O sistema global é um sistema contínuo visto que tem como entradas e saídas sinais contínuos, no entanto o processamento é digital. O sinal de entrada é convertido para discreto através de um processo de amostragem, é processado pelo sistema discreto e finalmente convertido novamente para contínuo através de um processo de interpolação como por exemplo a filtragem passa-baixo discutida na secção 4.1. A figura seguinte mostra em termos de diagrama de blocos a conversão de um sinal contínuo para um sinal discreto



A figura seguinte mostra duas versões discretas do mesmo sinal $x(t)$ obtidas a diferentes frequências de amostragem



Na prática temos o sinal contínuo e sabemos com que sistema contínuo queremos processá-lo. Imagine o exemplo simples envolvendo modulação DSB apresentado na 3ª aula, transparência 38. Imagine que o sinal analógico modulado em DSB seria agora amostrado (digitalizado) e transmitido numa rede digital. O receptor tem agora 2 possibilidades para tratar o sinal ou seja torná-lo audível. A primeira possibilidade e que envolveria muito mais circuitos seria optar por um tratamento puramente analógico. Neste caso o sinal seria filtrado (interpolado) por um filtro passa-baixo para ficar contínuo e seguidamente seria demodulado analogicamente como mostrado no exemplo. Outra possibilidade seria efectuar todo este processo sem necessidade de tornar analógico o sinal discreto modulado. É fácil verificar que a recuperação do sinal passa por uma filtragem passa-banda em torno da frequência da portadora para não alterar os outros canais eventualmente existentes e seguidamente demodulação. A questão que se coloca agora é como projectar o tal filtro passa-banda? A primeira coisa que necessitamos fazer é relacionar o espectro do sinal digital $x[n]$ com o espectro do sinal contínuo $x(t)$, que é sempre conhecido, pois de outro modo não conseguimos projectar o sistema digital. Por outras palavras sabemos o tipo de transformações que pretendemos que o

sistema digital imponha ao sinal analógico, pelo que se soubermos que sinal digital entra neste sistema digital poderemos projectar este último de forma a transformar o sinal digital (e indirectamente o analógico) do modo pretendido. Verificámos na secção 4.1, por dedução no domínio das frequências, que a transformada de Fourier do sinal amostrado é dada por

$$X_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w - kw_s)$$

No entanto podemos ainda determinar esta transformada recorrendo a cálculos só no domínio dos tempos e depois comparar as transformadas do sinal contínuo e da sua versão amostrada. O sinal contínuo é multiplicado por um trem de impulsos, ou seja

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

Calculando a transformada de Fourier de $x_p(t)$ pela definição obtemos

$$X_p(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt = \dots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT}$$

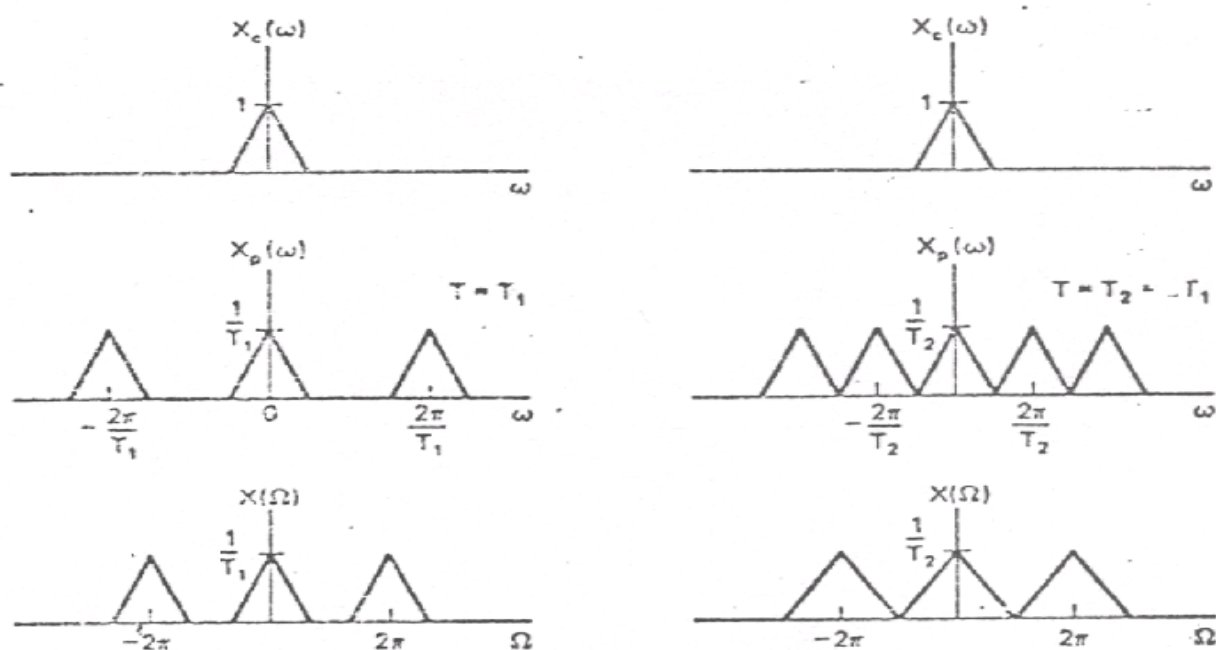
Por definição a transformada de Fourier de $x[n]$ é dada por

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Comparando as duas transformadas anteriores e verificando que nos instantes de amostragem o sinal discreto e amostrado têm o mesmo valor, ou seja $x[n] = x_c(nT)$ verificamos que

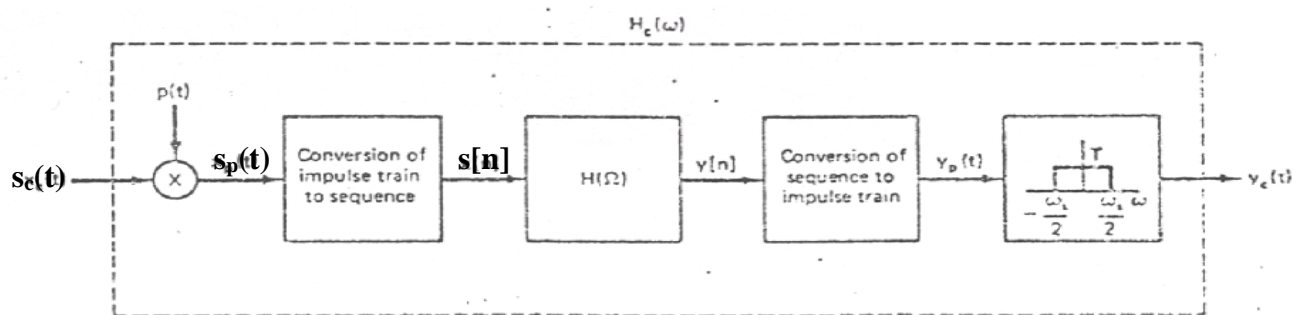
$$X(\Omega) = X_p\left(\frac{\Omega}{T}\right)$$

O que significa que a transformada de Fourier do sinal amostrado e a transformada de Fourier do sinal discreto são iguais a menos de um escalonamento nas frequências como elucidada a figura seguinte.



Como exemplo consideremos o sistema de processamento digital de sinais contínuos mostrado na figura seguinte, com o qual se pretende remover um eco de uma mensagem. O sinal à entrada do sistema é dado por $s_c(t) = x(t) + \alpha x(t - T_0)$ com $|\alpha| < 1$.

NOTA: Antes de ver este exemplo veja o apresentado nas aulas teóricas (pág. 75)



- Suponha que o atraso do eco relativamente à mensagem T_0 é tal que $T_0 < \pi/\omega_M$ onde ω_M é a componente de frequência mais elevada que compõe o sinal. Verifique que se pode tomar como período de amostragem $T=T_0$.
 - Determine a equação de diferenças do filtro digital $h[n]$ tal que $y_e(t)$ seja proporcional a $x(t)$.
 - Suponha que numa aplicação real com fala telefónica amostrada a 8 kHz e $f_M = 4\text{kHz}$ se mediu o atraso do eco $T_0 = 0,55\text{ ms}$. Determine a frequência de amostragem que permite a remoção do eco pelo sistema da figura. Neste caso determine ω_M que minimiza a perda de informação do sinal de fala no processo de amostragem.
- Se $T=T_0$ então $T < \pi/\omega_M$ ou ainda $\omega_M < \pi/T$, ou ainda $2\omega_M < 2\pi/T$ que é o teorema de Nyquist pelo que se $T=T_0$ não haverá *aliasing*.
 - Para projectar o filtro digital temos que conhecer espectralmente $s[n]$. Como vimos nesta secção o espectro de $s[n]$ é o espectro de $s_p(t)$ a menos de um escalonamento nas frequências. Finalmente o espectro de $s_p(t)$ pode ser obtido

através de repetições do espectro de $s_c(t)$ centradas em kw_s . Sabemos que o sinal contínuo à entrada do sistema é dado por

$$s_c(t) = x(t) + \alpha x(t - T_0)$$

Como a transformada de Fourier é um operador linear podemos aplicá-la a ambos os membros da equação anterior e usando ainda a propriedade do deslocamento no tempo obtemos

$$S_c(w) = X(w) + \alpha e^{-jwT_0} X(w) = X(w) [1 + \alpha e^{-jwT_0}]$$

A transformada de Fourier do sinal amostrado é então dada pelo teorema da amostragem

$$S_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_c(w - nw_s)$$

Neste momento já conhecemos espectralmente $S(\Omega)$ pois verifica-se a seguinte igualdade

$$S(\Omega) = S_p\left(\frac{\Omega}{T}\right)$$

Ou seja

$$S(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_c(\Omega - n2\pi)$$

Esta equação representa repetições sucessivas e em número infinito do espectro de $s_c(t)$ escalonado em frequência. De todas estas repetições apenas aquela

centrada em $\Omega=0$ será seleccionada pelo filtro passa-baixo de ganho T que irá recuperar $y_c(t)$. Para simplificar a equação anterior e sem perda de generalidade podemos então designar $S_0(\Omega)$ como a parte do sinal $S(\Omega)$ que apareceria à saída do sistema caso $h[n]$ fosse igual a $\delta[n]$ (o sistema digital não modificasse o sinal de entrada).

$$S_0(\Omega) = X(\Omega)(1 + \alpha e^{-j\Omega})$$

O que se pretende com o nosso filtro digital é que se obtenha uma saída proporcional a $x[n]$, seja $kx[n]$ para a entrada $s[n]$. Então pela equação anterior a resposta em frequência do sistema terá que ser

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{kX(\Omega)}{X(\Omega)(1 + \alpha e^{-j\Omega})} = \frac{k}{1 + \alpha e^{-j\Omega}}$$

A equação de diferenças do filtro digital é agora facilmente determinada a partir da sua resposta em frequência

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{k}{1 + \alpha e^{-j\Omega}}$$

ou seja

$$Y(\Omega)(1 + \alpha e^{-j\Omega}) = kX(\Omega)$$

Aplicando transformada inversa de Fourier a ambos os membros da equação anterior e usando a propriedade do deslocamento no tempo obtém-se a equação diferenças do filtro digital necessário à remoção do eco.

$$y[n] = kx[n] - \alpha y[n-1]$$

A resposta impulsional do filtro digital é a transformada inversa de Fourier da sua resposta em frequência e pode ser determinada com o auxílio das tabelas das transformadas. Verifique que das tabelas temos

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

pelo que

$$h[n] = k(-\alpha)^n u[n]$$

Esta alínea pode também ser resolvida integralmente no domínio dos tempos. Pretende-se que a saída do filtro digital seja proporcional à entrada, ou seja

$$y[n] = kx[n]$$

No entanto o sinal $x[n]$ existe apenas como parte integrante do sinal $s[n]$, cuja forma é

$$s[n] = s_c(nT) = x(nT) + \alpha x(nT - T)$$

ou seja

$$s[n] = x[n] + \alpha x[n-1]$$

Como sabemos qual o sinal desejado à saída do filtro e sabemos ainda que o filtro digital é linear e invariante no tempo (só tratamos sistemas com estas características no âmbito deste curso) podemos relacionar directamente $y[n]$ com $s[n]$ a partir da relação conhecida (desejada) de $y[n]$ com $x[n]$ e da relação conhecida (última equação) de $s[n]$ com $x[n]$. A relação desejada entre a entrada e a saída é

$$y[n] = kx[n]$$

Se o sistema é linear e invariante no tempo então também se verifica a seguinte igualdade

$$\alpha y[n-1] = \alpha kx[n-1]$$

Adicionando membro a membro as duas últimas equações obtemos a equação de diferenças do filtro digital, ou seja

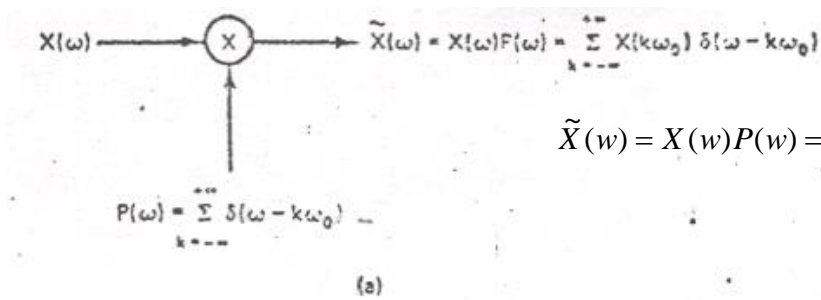
$$y[n] + \alpha y[n-1] = ks[n]$$

Aplicando o operador transformada discreta de Fourier (DTFT) a ambos os membros da equação anterior obtemos a resposta em frequência do filtro digital mostrada ao cimo da página 4.24.

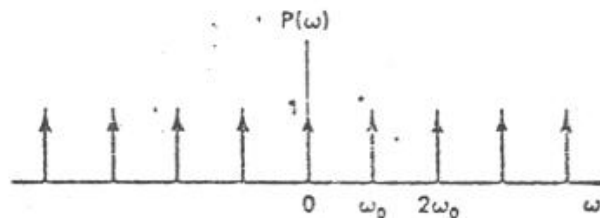
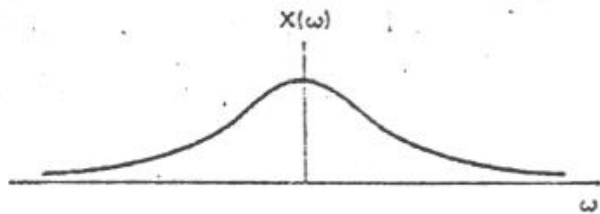
c) O sinal à entrada do sistema é dado por $s_c(t) = x(t) + \alpha x(t - T_0)$ pelo que a sua versão amostrada será dada por $s[n] = s_c(nT) = x(nT) + \alpha x(nT - T_0)$ ou seja $s[n] = x[n] + \alpha x\left[n - \frac{T_0}{T}\right]$. Por definição de sinal discreto T_0/T terá que ser um número inteiro. Por outro lado para que não haja *aliasing* o período de amostragem não poderá exceder os 0,125 ms pois a largura de banda do sinal de fala são 4 kHz, o que é um dado do problema. Além disso temos $T_0 = 0,55$ ms. Temos então que resolver a seguinte equação $0,55 = kT$ sujeita à restrição $T < 0,125$ ms, onde k é uma constante. Verifica-se então que $k = 5$ e $T = 0,11$ ms. Isto significa uma frequência de amostragem de 9,0909 kHz pelo que o sinal de fala pode ser aproveitado em termos de banda até cerca de 4,5 kHz ao que corresponde uma velocidade angular máxima $\omega_M = 2\pi \times 4,5$ k rad/seg.

4.6 Amostragem no domínio das frequências

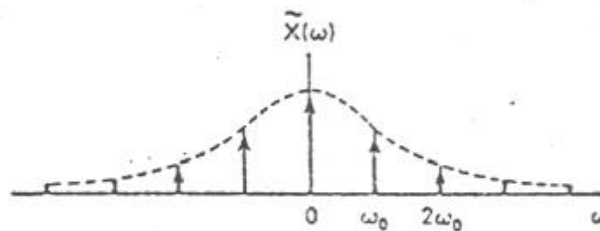
Na secção 4.1 foi apresentado o teorema da amostragem para sinais limitados em frequência ou de banda limitada e contínuos. Sabemos das propriedades da transformada de Fourier que para sinais contínuos existe a dualidade entre os domínios do tempo e da frequência. Deste modo é expectável que um sinal contínuo e limitado no tempo possa, sob certas condições, ser representado por uma versão amostrada da sua transformada de Fourier. Consideremos então a amostragem nas frequências elucidada pela figura seguinte



$$\tilde{X}(\omega) = X(\omega)P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$



$$\text{T. F.} \quad p(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0} k\right)$$



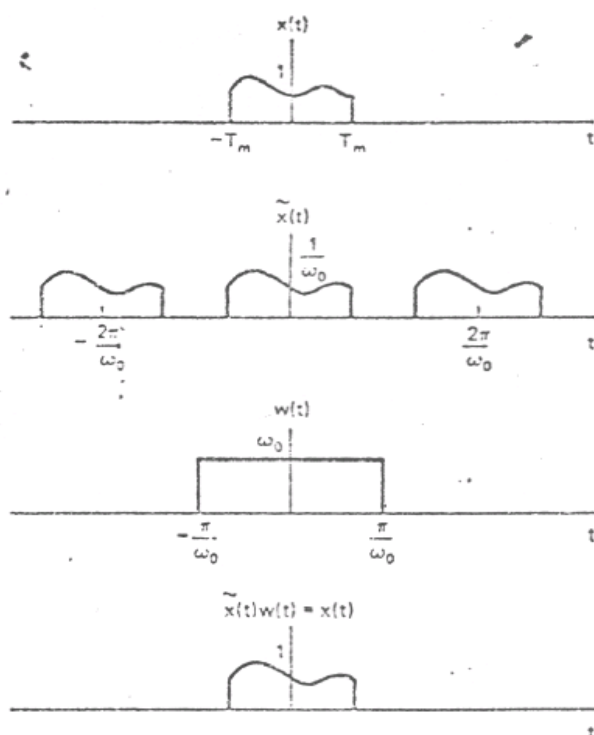
$$\text{T. F.} \quad \tilde{x}(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0} k\right)$$

A transformada inversa de Fourier de um trem de impulsos pode ser derivada usando a propriedade da dualidade e o facto sobejamente conhecido nesta altura que a transformada de Fourier de um trem de impulsos é ainda um trem de impulsos espaçados e de amplitude $2\pi/T$ sendo T o período do trem de impulsos (faça este exercício !!). Multiplicar o espectro do sinal por um trem de impulsos é equivalente no domínio dos tempos a efectuar a convolução do sinal com a transformada inversa de Fourier do trem de impulsos, o que não é mais que a aplicação da propriedade da convolução, ou seja

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \tau - \frac{2\pi}{\omega_0} k\right) d\tau = \dots = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0} k\right)$$

Conclui-se da última equação que amostrar o espectro do sinal corresponde a repetir o sinal indefinidamente no tempo, sendo essas repetições espaçadas de $2\pi/\omega_0$. Verifique que amostrar a transformada de Fourier significa tornar o sinal periódico uma vez que o espectro do sinal amostrado fica reduzido a um trem de impulsos igualmente espaçados sendo por isso a transformada de um sinal periódico. Verifique ainda que a convolução de um sinal limitado no tempo por um trem de impulsos infinito é um sinal periódico. Tendo em mente estas duas verificações confirme agora a coerência do resultado encontrado.

A figura seguinte elucida o processo de amostragem em frequência no domínio dos tempos e mostra que sob a condição $\frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_m$, sendo T_m a duração temporal do sinal, o sinal $x(t)$ pode ser integralmente recuperado por uma janela temporal limitada no tempo de modo a retirar as repetições do sinal causadas pela sua convolução com o trem de impulsos.



$$\begin{array}{c} \text{T. F.} \\ \longleftrightarrow \end{array} \quad W(\omega) = 2\pi \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

O processo de recuperação do sinal mostrado na figura anterior pode ser descrito no domínio das frequências como a convolução da transformada de Fourier do espectro da janela com a transformada de Fourier do sinal periódico $\tilde{x}(t)$, ou seja

$$X(w) = \frac{1}{2\pi} \tilde{X}(w) W(w)$$

Onde

$$\tilde{X}(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kw_0) \delta(w - kw_0)$$

Pelo que a saída do sistema constituído pela janela é dada por

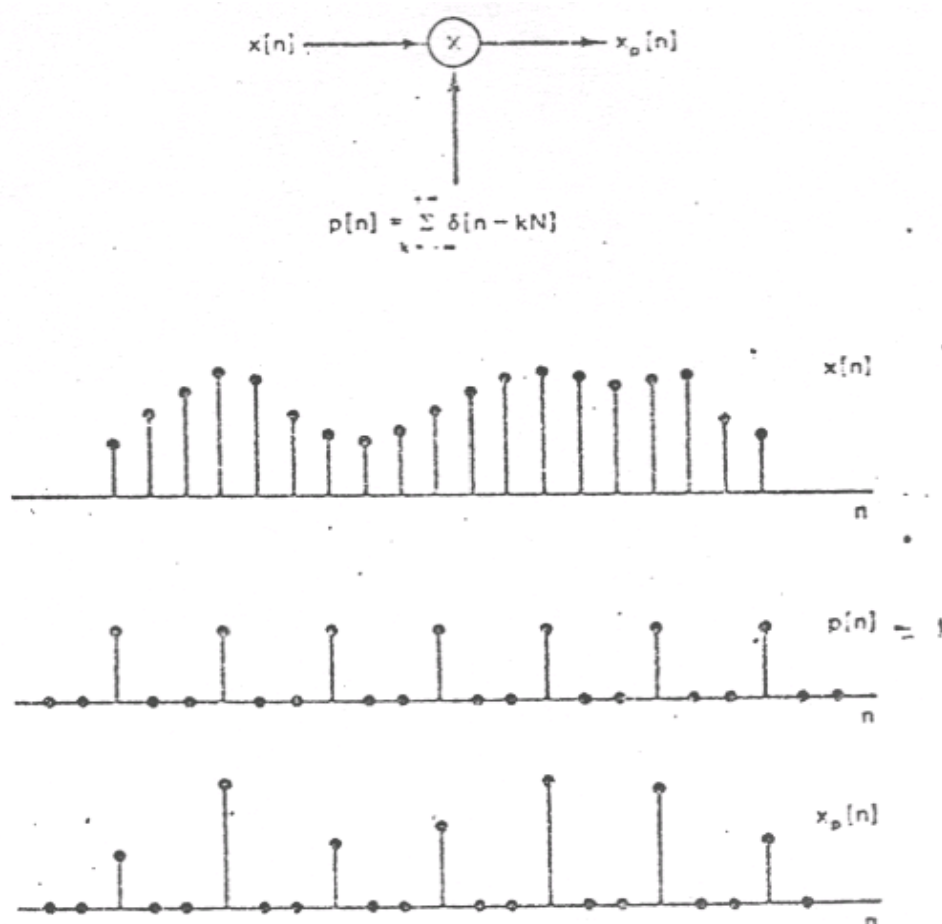
$$X(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kw_0) \operatorname{sinc} \left(\frac{w - kw_0}{w_0} \right)$$

O que significa que mais uma vez a interpolação exacta é uma interpolação com a função sinc, exactamente como acontecia com a recuperação de um sinal no domínio dos tempos a partir das suas amostras. Perceba bem que a equação anterior representa no domínio das frequências a forma como se devem unir as amostras, que neste caso estão no domínio das frequências, para obter o sinal original que foi previamente amostrado no domínio das frequências.

4.7 Amostragem de sequências

De modo semelhante ao que acontece com os sinais contínuos também os sinais discretos podem sob certas condições ter a sua representação temporal mais reduzida, ou seja constituída por um menor número de pontos, podendo posteriormente estes sinais ser recuperados a partir da sua versão amostrada

(reduzida) também por filtragem passa-baixo. Considere-se então o amostrador discreto representado na figura seguinte



A nova sequência $x_p[n]$ que resulta do processo de amostragem é igual à sequência original $x[n]$ em múltiplos inteiros do período de amostragem N , sendo nula nos pontos intermédios o que se pode representar matematicamente por

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{se } n \text{ é múltiplo de } N \\ 0, & \text{noutros casos} \end{cases}$$

A análise do processo no domínio das frequências é muito idêntico ao caso da amostragem de sinais contínuos no tempo descrito na secção 4.1. Pelo uso da propriedade da modulação em tempo discreto temos que

$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n-kN] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\Theta)X(\Omega - \Theta)d\Theta$$

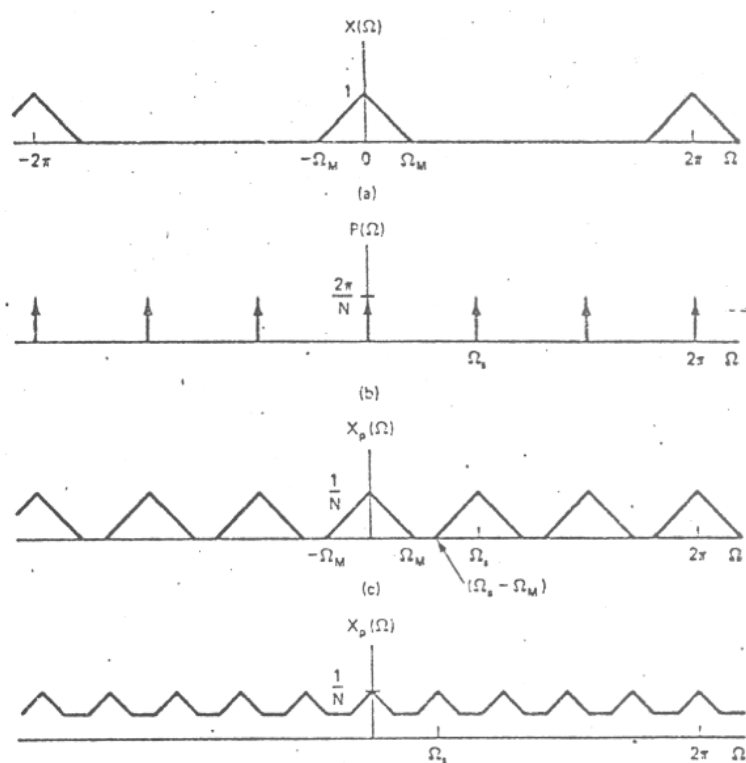
como $P(\Omega)$ é também um trem de impulsos na frequência dado por

$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$X_p(\Omega)$ pode ser calculado resolvendo o integral na penúltima equação ou seja

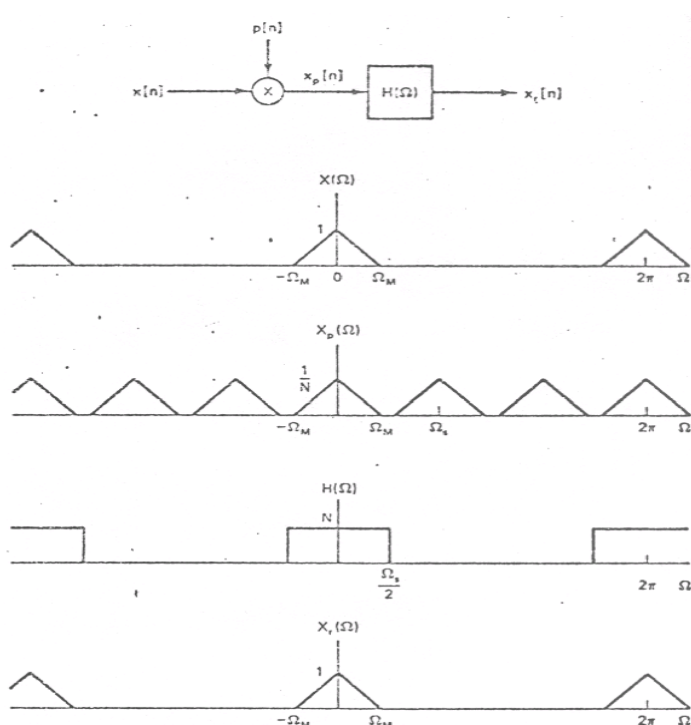
$$X_p(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega - k\Omega_s)$$

A equação anterior mostra que o espectro do sinal amostrado é constituído por repetições do espectro do sinal original tal como acontecia no caso contínuo. Também neste caso o sinal original pode ser recuperado da sua versão amostrada por filtragem passa-baixo desde que não tenha ocorrido *aliasing* ou seja desde que se tenha verificado a condição $\Omega_s > 2\Omega_M$ como pode ser verificado na figura seguinte que descreve todo o processo no domínio das frequências. A parte inferior da figura mostra o caso onde ocorreu *aliasing* e o filtro de recuperação tem ganho N na banda passante e não é mostrado na figura.



4.8 Reconstituição da sequência a partir das suas amostras

A reconstituição da sequência original a partir das suas amostras pode ser efectuada por filtragem passa-baixo, como mostra a figura seguinte, e a forma de interpolação subjacente é também em tudo semelhante ao caso contínuo.



Como para o caso contínuo a forma da interpolação é obtida pela transformada inversa de Fourier do filtro passa-baixo convolvida com o sinal amostrado, ou seja $x_r[n] = x_p[n] * h[n]$, onde a resposta impulsional do filtro passa-baixo é dada por (ver transparência 57 das aulas teóricas)

$$h[n] = \frac{N\Omega_c}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_c n}{\pi}\right)$$

Pela equação no cimo da página 4.32 podemos escrever

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{N\Omega_c}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_c}{\pi}(n - kN)\right)$$

A equação anterior mostra, como para o caso contínuo, que a recuperação exacta do sinal original a partir das suas amostras é efectuada por interpolação com a função sinc desde que não tenha ocorrido *aliasing*. No entanto a interpolação com a função sinc requer a implementação de um filtro passa-baixo ideal que na prática não é possível de obter, sendo apenas possível obter razoáveis aproximações. Deste modo convém reescrever a equação anterior de uma forma mais geral, como função do filtro de reconstrução ou interpolador

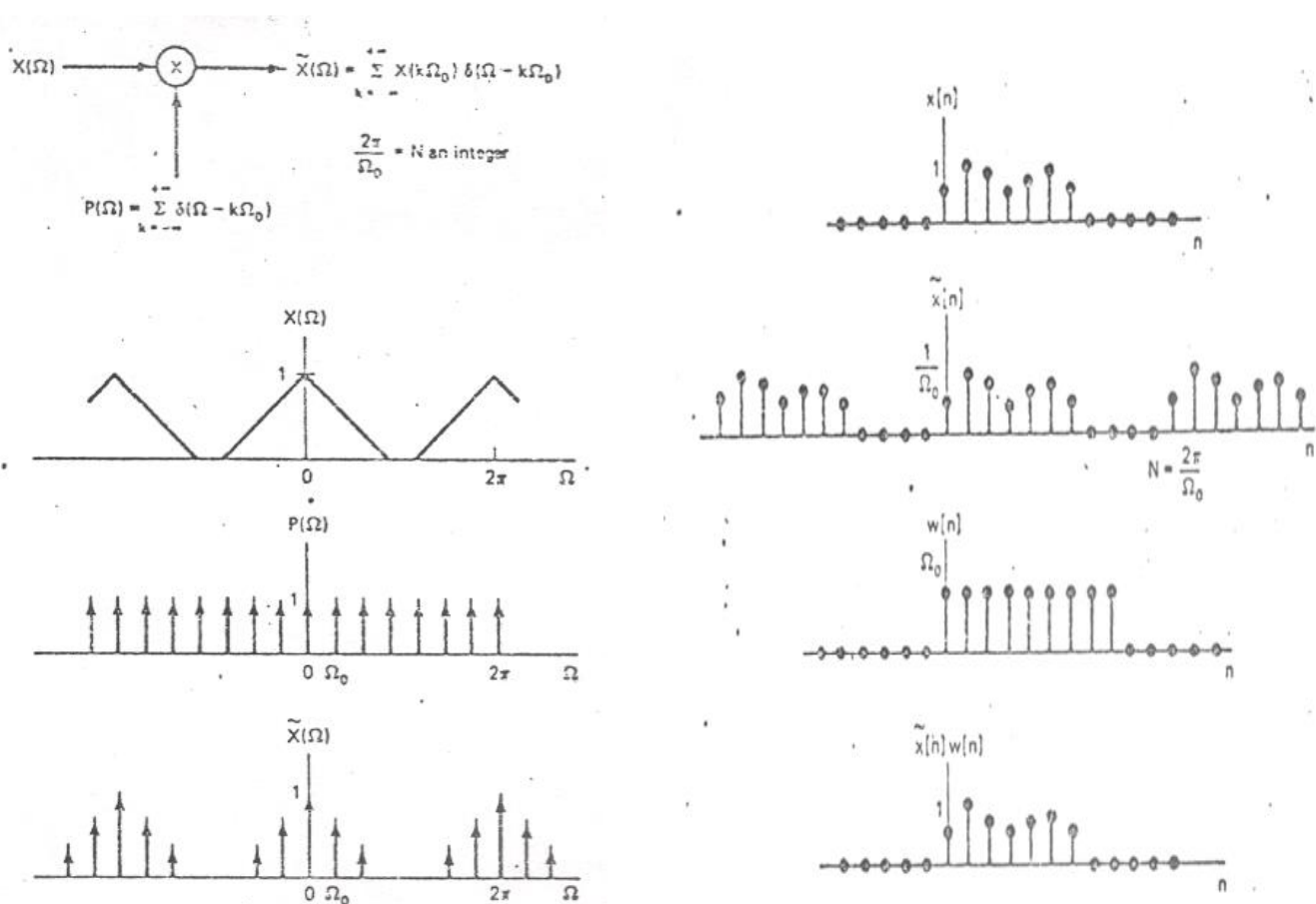
$$x_r[n] = x_p[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] h_r[n - kN]$$

4.9 Amostragem de seqüências nas frequências

Como aconteceu para o caso contínuo (secção 4.6) também no caso discreto se pode colocar a seguinte questão: Em que condições se pode compactar a representação espectral de um sinal discreto e também de que forma este pode

ser integralmente recuperado a partir dessa sua representação mais compacta? Por outras palavras conhecendo espectralmente $x[n]$, ou seja conhecendo $X(\Omega)$ que é uma função contínua, sob que condições amostras de $X(\Omega)$ podem representar integralmente $x[n]$?

A figura seguinte ilustra o processo de amostragem nas frequências de um sinal discreto (lado esquerdo da figura) bem como o seu processo equivalente no domínio dos tempos (lado direito da figura).



A semelhança com o caso contínuo é evidente. A multiplicação do espectro do sinal pelo trem de impulsos $P(\Omega)$, cujo objectivo é reduzir a representação espectral de $x[n]$, tem como equivalente no domínio dos tempos uma periodização do sinal $x[n]$, uma vez que este é convolvido com $p[n]$ dado por

$$p[n] = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left[n - k \frac{2\pi}{\Omega_0} \right]$$

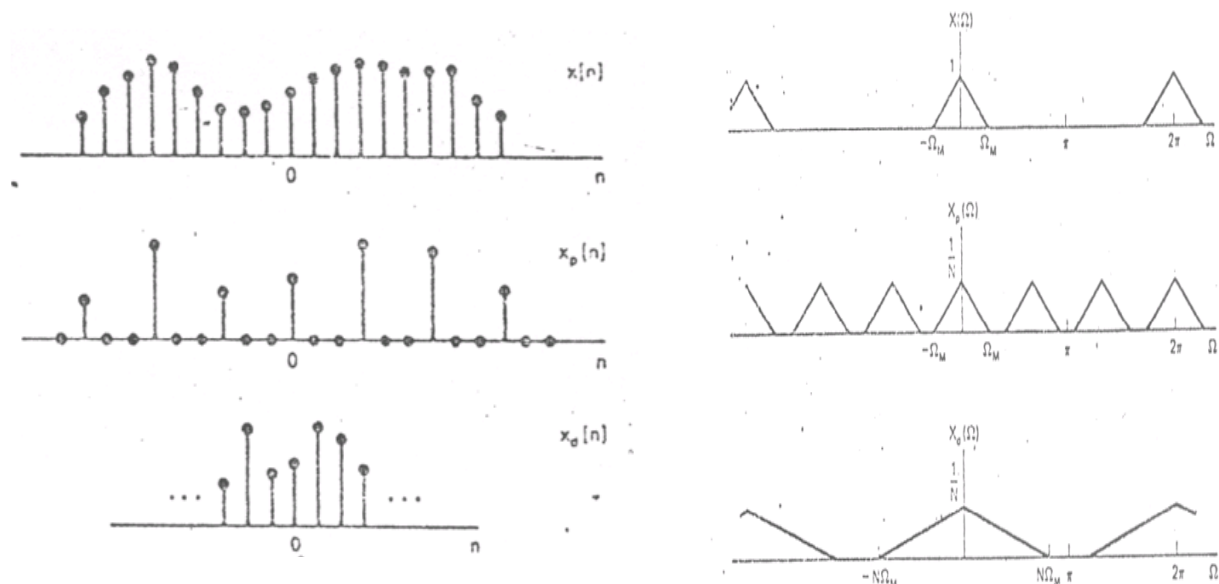
Então o sinal $x[n]$ convolvido com $p[n]$ pode ser calculado como

$$\tilde{x}[n] = x[n] * p[n] = \dots = \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN]$$

Como se pode verificar no lado direito da figura anterior se o sinal discreto no tempo for de duração finita, seja N_1 , é totalmente recuperável por uma janela passa-baixo no tempo com ganho Ω_0 desde que se verifique a seguinte desigualdade $\frac{2\pi}{\Omega_0} > N_1$, ou equivalentemente $\frac{2\pi}{N_1} > \Omega_0$. Portanto, como em todos os processos de amostragem isto significa que é necessário um número mínimo de amostras de modo a permitir efectuar posteriormente a recuperação do sinal original.

4.10 Decimação de sequências

Consideremos a amostragem de sequências tal como foi apresentada na secção 4.7. A sequência amostrada $x_p[n]$ (figura da página 4.31) pode ser representada de modo mais compacto eliminando os pontos anulados pela multiplicação pelo trem de impulsos e retendo a informação que entre cada amostra devem ser colocados $(N-1)$ zeros, sendo N o período do trem de impulsos. A sequência que resulta da eliminação desses pontos nulos é chamada de sequência decimada. A figura seguinte elucida o processo de decimação.



Relacionamos agora espectralmente a sequência $x[n]$ com a sequência decimada $x_d[n]$, atendendo a que

$$x_d[n] = x[nN] = x_p[nN]$$

Por definição de transformada discreta de Fourier

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n}$$

E também

$$X_p(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\Omega n}$$

Substituindo a antepenúltima equação na penúltima obtém-se

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[nN] e^{-j\Omega n}$$

Efectuando agora uma mudança de variável na última equação de n para k com $k=nN$ obtém-se

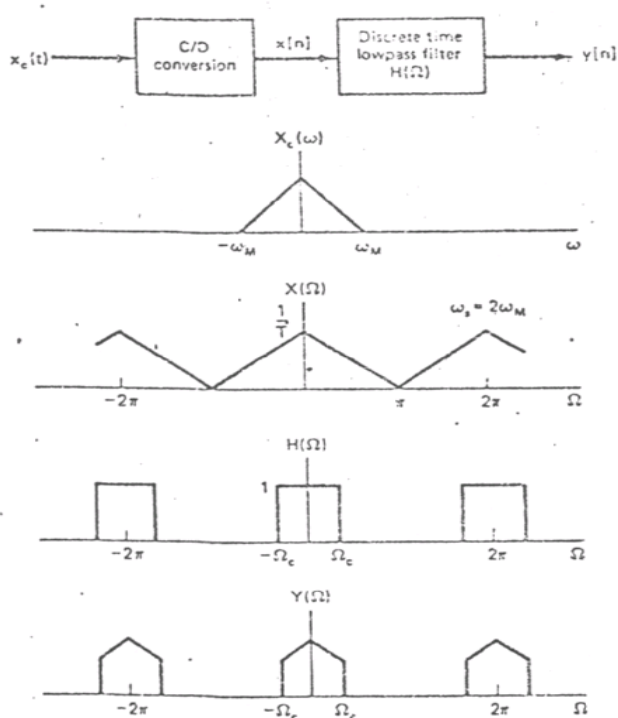
$$X_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[k] e^{-j\Omega \frac{k}{N}}$$

Comparando a última e antepenúltima equação verificamos que

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\Omega \frac{n}{N}} = X_p\left(\frac{\Omega}{N}\right)$$

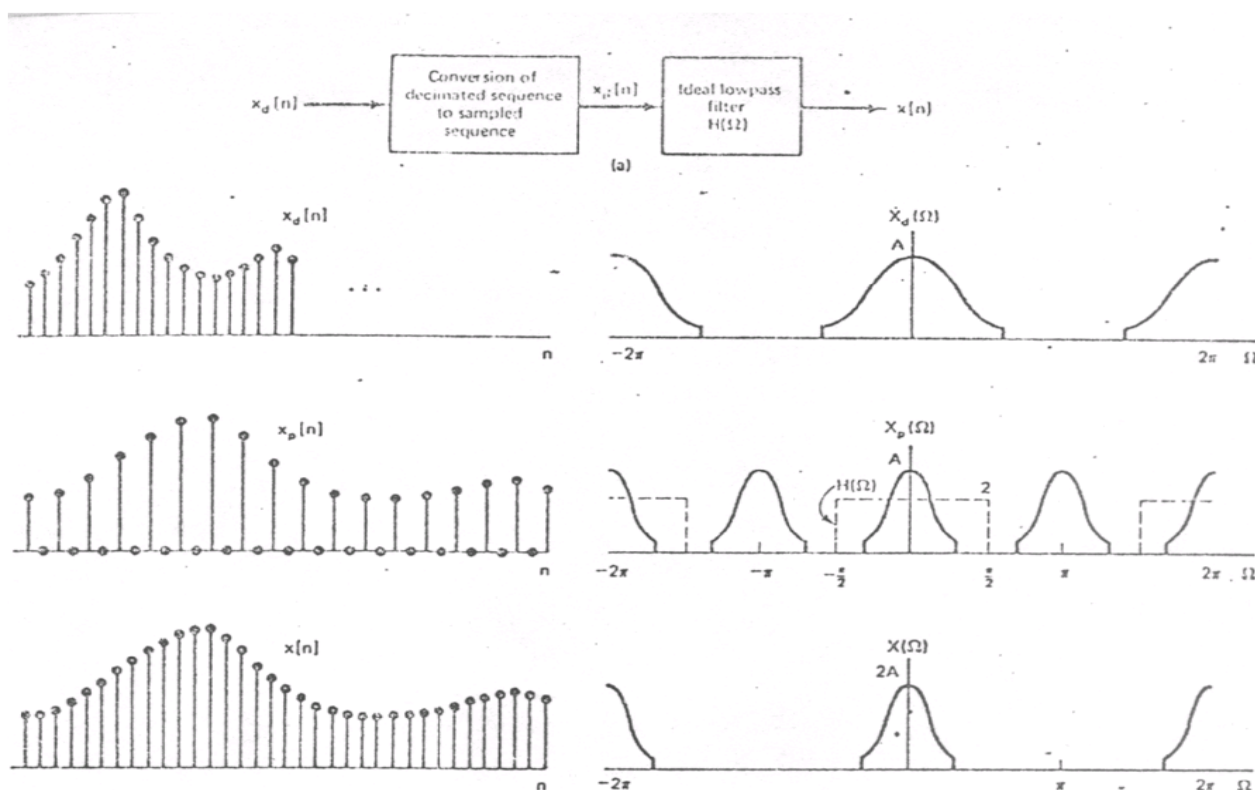
ou seja, a decimação tem como efeito compactar a sequência no tempo mas apresenta o fenómeno inverso na mesma proporção no domínio das frequências. A parte direita da figura anterior elucida o procedimento da decimação e mostra que a sequência decimada apresenta maior variação temporal que a sequência $x[n]$ pelo que terá que apresentar um conteúdo espectral mais largo.

Verifica-se facilmente a partir da figura anterior, que se $x[n]$ for o resultado de um processo de amostragem de um sinal contínuo, então decimar corresponde a diminuir a frequência de amostragem, ou aumentar o período de amostragem (intervalo de tempo entre amostras). Por esta razão este processo é conhecido como *down-sampling*. Repare que aumentar o intervalo de tempo entre amostras corresponde a diminuir o número de amostras, o que é de facto a decimação. No entanto se um sinal contínuo tiver sido amostrado por exemplo à frequência de Nyquist (frequência de amostragem mínima), todo o espectro estará ocupado (ver página 4.1 $X_p(w)$) e não haverá espaço nas frequências para decimar, pois este processo corresponde como acabámos de ver a um alargamento espectral. Neste caso como a decimação necessita de espaço espectral, esta só poderá ser eficientemente efectuada se o sinal for previamente filtrado, no entanto neste caso só é preservada a informação de muito baixa frequência do sinal evitando-se contudo o *aliasing*. A figura seguinte mostra este fenómeno



4.11 Interpolação de sequências

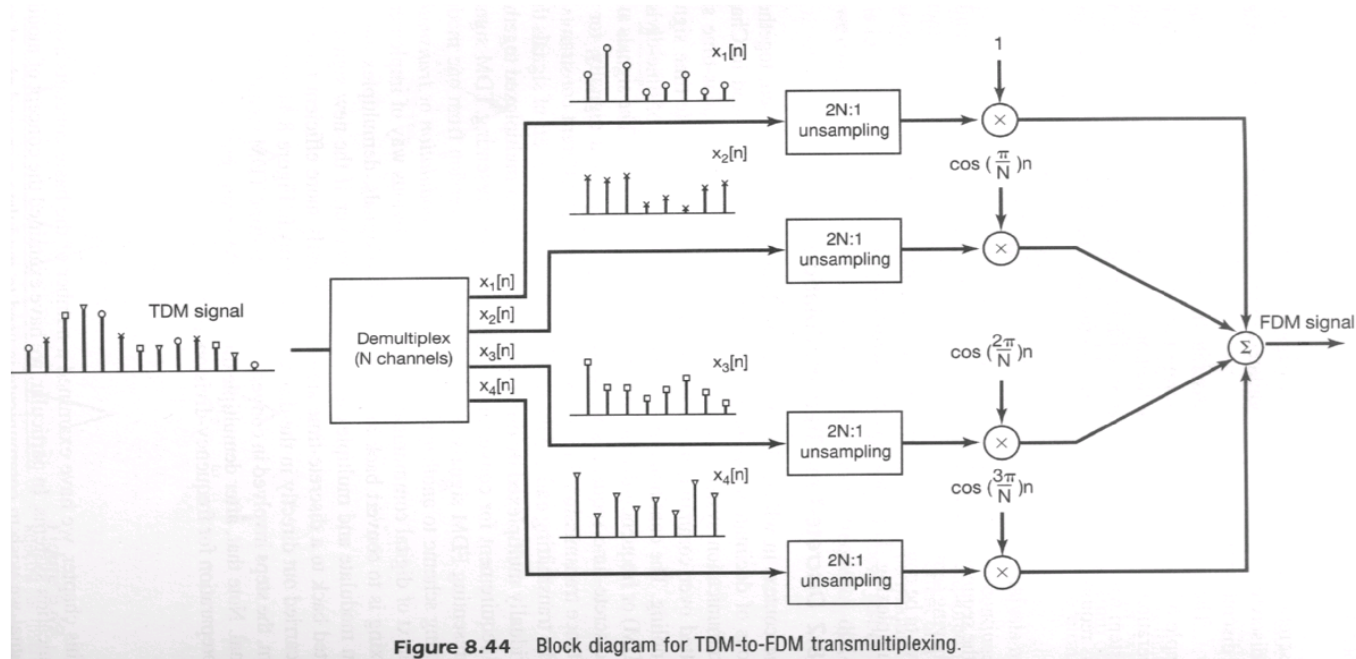
Chama-se interpolação ao processo inverso da decimação, ou seja dada uma sequência introduzimos entre cada amostra $(N-1)$ zeros e passamos o sinal por um filtro passa-baixo para o “alisar”. Deste modo obtemos um sinal que no tempo varia mais lentamente ou seja diminui-se a largura de banda necessária para transmitir o sinal. Este processo é exactamente o inverso da decimação pelo que a sua derivação teórica poderá ser descrita de modo inverso também, ou seja, partindo de $x_d[n]$ e chegando a $x[n]$. A figura seguinte elucida o processo



4.12 Exemplo: Transmodulação digital

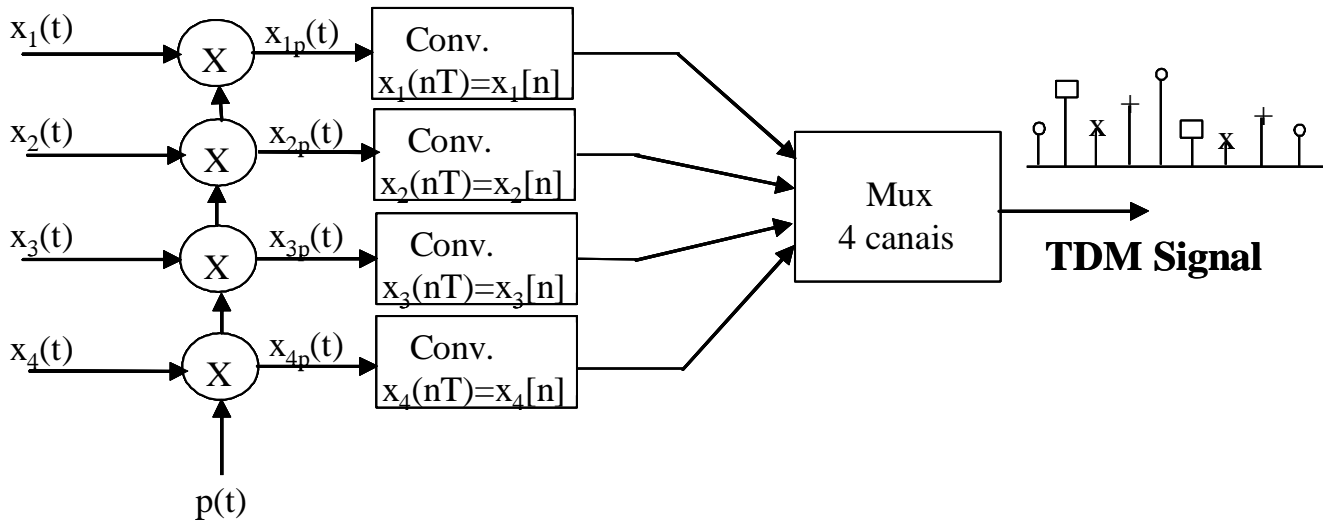
Uma das áreas mais férteis no uso das técnicas de processamento digital de sinal descritas nestas últimas secções é a área das telecomunicações nomeadamente as redes digitais de comunicações. Estas redes transmitem sinais contínuos na forma de sinais discretos utilizando os conceitos de amostragem descritos neste capítulo. A partilha de um canal de comunicação por vários sinais pode ser feita de 2 modos. No modo TDM (Time Division Multiplexing) cada sinal a ser transmitido usa toda a largura de banda do canal e os sinais dividem entre si o canal no tempo, ou seja cada um usa um certo tempo de transmissão dando depois a vez aos outros. O modo alternativo de comunicação tem o nome de FDM (Frequency Division Multiplexing). Neste modo de comunicação todos os canais são transmitidos simultaneamente e cada um usa a sua banda de frequências (ver exemplo no acetato 38 das aulas

teóricas). Os sinais multiplexados num destes modos são seguidamente digitalizados para transmissão digital. A rede digital de comunicações é constituída por troços TDM e troços FDM pelo que se torna necessário fazer a respectiva conversão. A este processo de conversão dá-se frequentemente o nome de transmodulação ou transmultiplexação. A implementação directa deste procedimento requer conversão do sinal discreto para contínuo, desmultiplexação e demodulação para obtenção do sinal original, e seguidamente nova modulação, multiplexação e digitalização. Todo este processo é obviamente mais eficiente se for integralmente feito por meios digitais. A figura seguinte mostra em diagrama de blocos a transmodulação TDM para FDM mostrando-se seguidamente um exemplo completo.



Considere uma rede digital de comunicação de voz com 2 troços, onde no primeiro troço a multiplexação de canais é TDM sendo no 2º troço FDM. Pretendem-se transmitir 4 canais de fala simultaneamente. O sinal de fala é

filtrado passa-baixo a 4 kHz e amostrado a 8 kHz, sendo os canais depois multiplexados como mostra a figura seguinte (troço TDM).

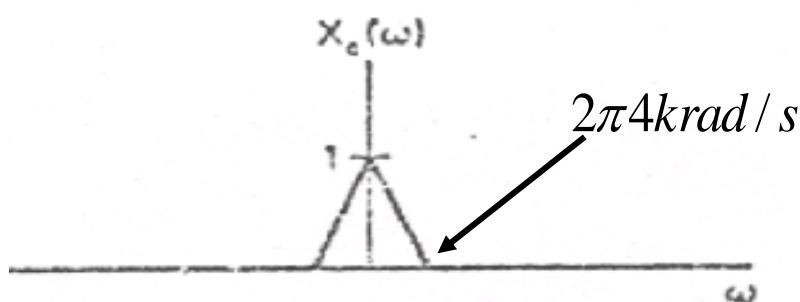


- Esboce o espectro dos sinais amostrados e dos sinais discretos.
- Determine a frequência de amostragem mínima que permitiria a transmissão simultânea dos 4 canais em FDM.
- Considere o sistema de transmodulação TDM para FDM inteiramente digital cujo diagrama de blocos se apresenta na página anterior e represente nos domínios temporal e espectral o fenómeno do “upsampling” (interpolação). Determine o espectro de cada sinal digital depois do bloco de “upsampling”.
- Determine o espectro do sinal FDM.
- Represente em termos de diagrama de blocos um sistema capaz de recuperar os sinais originais a partir da sua versão FDM.
- Represente em termos de diagrama de blocos um sistema que implemente a transmultiplexação mas que faça o “upsampling” directamente no sinal contínuo.

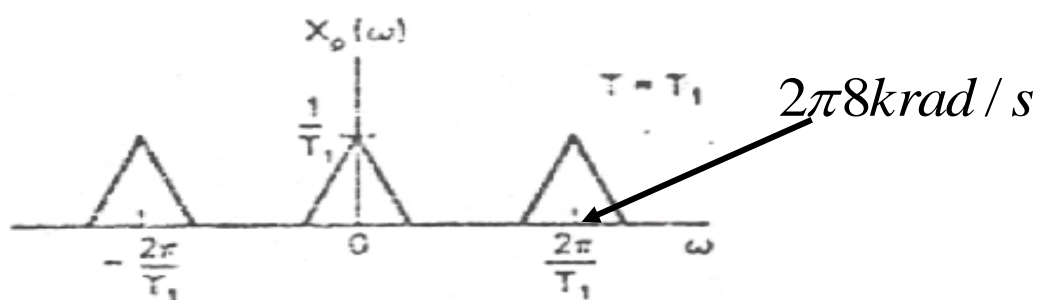
a) Sabemos do teorema da amostragem que o espectro do sinal amostrado é constituído por repetições do espectro do sinal original centradas em $k\omega_s$ sendo ω_s a velocidade angular de amostragem, ou seja

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

Sabemos ainda que o sinal analógico a transmitir, sinal de fala, é previamente filtrado a 4kHz para poder ser amostrado a 8 kHz sem ocorrência de *aliasing*. Consideremos então que o espectro do sinal a amostrar seja do tipo (A forma do espectro para sinais de fala depende do tempo, ou seja do que está a ser dito no momento e não tem a forma apresentada, no entanto a forma do espectro é para nós irrelevante, o que se impõe é que se evite o *aliasing*)



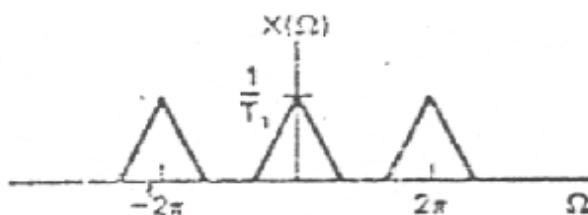
Pela equação anterior, deduzida na secção 4.1, podemos construir o espectro do sinal amostrado repetindo indefinidamente o espectro do sinal analógico a amostrar (figura anterior) em $k\omega_s$ com $\omega_s = 2\pi/T$. A figura seguinte mostra este espectro supondo $T=T_1$



Finalmente o espectro do sinal digital constituído pelas amostras do sinal de fala pode, como demonstrado na secção 4.5, ser obtido a partir do espectro do sinal amostrado escalonando o eixo das frequências como

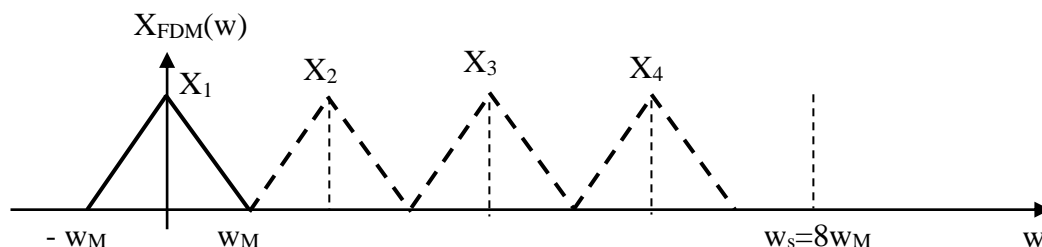
$$X(\Omega) = X_p\left(\frac{\Omega}{T}\right)$$

Deste modo o espectro do sinal digital é mostrado na figura seguinte



b) Se os 4 canais são transmitidos em FDM então significa que são transmitidos simultaneamente cada um ocupando a sua banda de frequências. A figura seguinte mostra, só para frequências positivas, os 4 canais analógicos multiplexados em FDM. O sinal repete-se para as frequências negativas. Portanto um canal multiplexado em FDM ocupa o dobro da banda. Na verdade existem 2 tipos de modulação para o qual isto não acontece que são as modulações SSB e VSB, no entanto estamos a assumir a modulação DSB apresentada como exemplo na transparência 38 das aulas teóricas. Assumindo então que cada canal multiplexado ocupa o dobro da banda a frequência de amostragem mínima terá que ser neste caso 8 vezes superior à frequência de

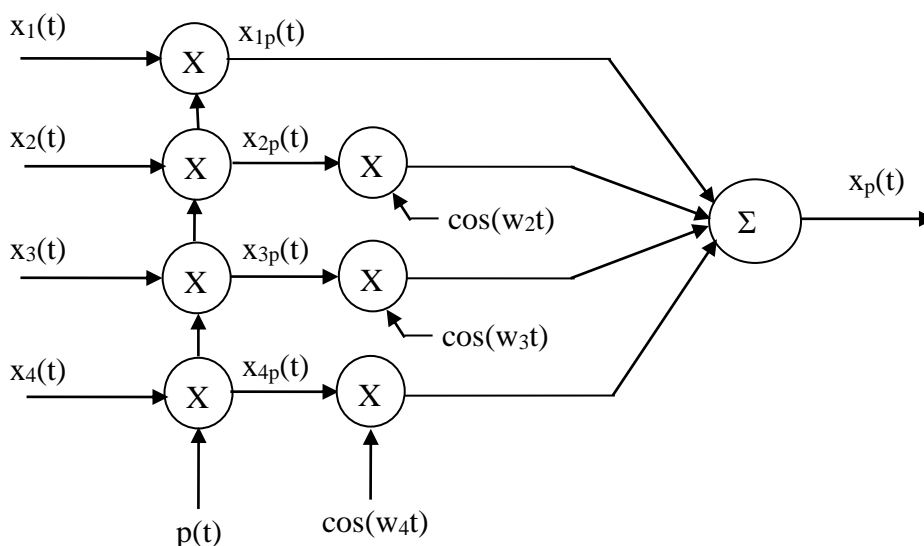
Nyquist, ou seja 64 kHz. Como o canal 1 segue em banda base a frequência de Nyquist para o sinal apresentado na figura seguinte será de $2(24+4)=56$ kHz . A figura seguinte elucida o procedimento.



A expressão temporal do sinal em FDM será

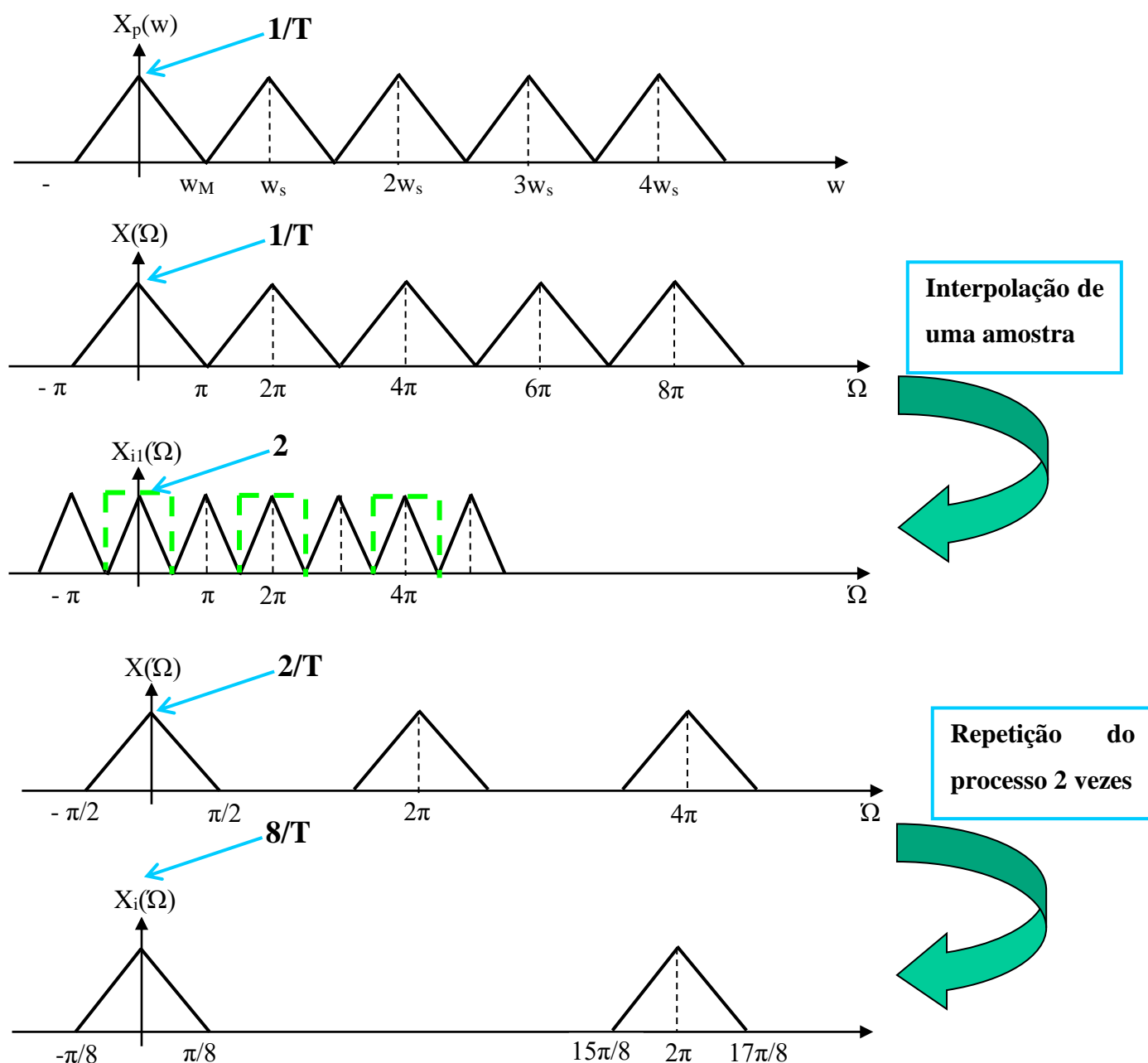
$$x_{FDM}(t) = x_1(t) + x_2(t) \cos(2\pi 8000t) + x_3(t) \cos(2\pi 16000t) + x_4(t) \cos(2\pi 24000t)$$

E o diagrama de blocos do multiplexador será

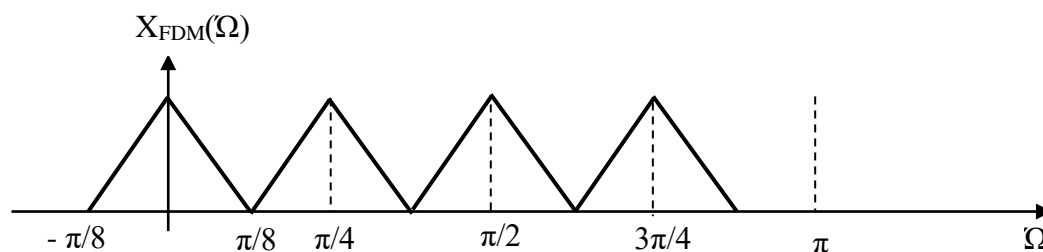


c) Neste momento sabemos que os canais foram amostrados a 8 kHz, foram seguidamente multiplexados em TDM e deveriam ter sido amostrados a 64 kHz (na verdade são apenas 56 kHz pois um dos canais vai em banda base, mas

generalizemos para o caso de todos os canais irem multiplexados em FDM) devido a requisitos relacionados com o modo de transmissão FDM. É necessário fazer então o up-sampling de 8 ($2N$ sendo N o número de canais), o que pode ser efectuado usando apenas processamento digital de sinal. O up-sampling está descrito na secção 4.11. A figura seguinte elucida o processo no domínio das frequências. As duas figuras da parte superior mostram a transformada de Fourier do sinal amostrado a 8 kHz e a transformada de Fourier da sequência (sinal discreto).



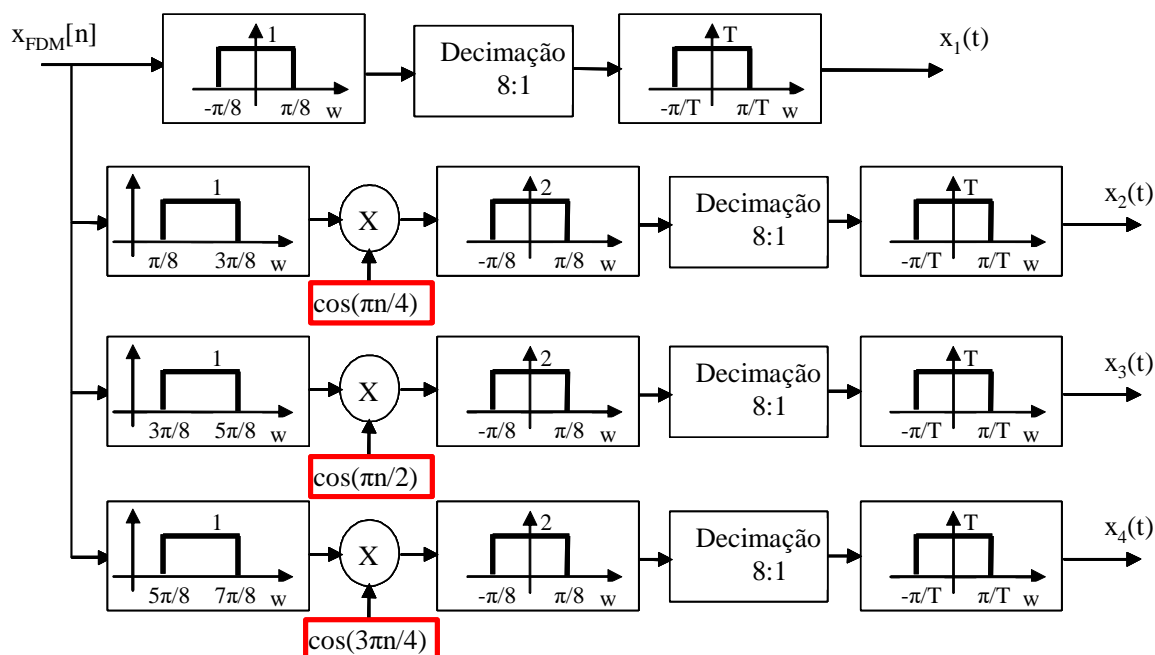
- d) O espectro FDM digital será o resultado da convolução do espectro de cada sinal digital com a transformada de Fourier dos cossenos mostrados no diagrama de blocos da página 4.41, ou seja



- e) A recuperação dos sinais contínuos a partir do espectro da figura anterior é feita do seguinte modo:

O canal transmitido em banda base precisa apenas ser filtrado passa-baixo para o separar dos outros, seguidamente precisa de ser restabelecida a frequência de amostragem por *down-sampling* (decimação 8:1) para compensar o *up-sampling* (interpolação 1:8) efectuado antes da modulação FDM digital. Agora que o sinal está na sua versão amostrada necessita apenas de filtragem passa-baixo para ser recuperado.

Para os restantes canais o processo tem que ser complementado com os passos necessários à passagem de cada canal para a banda base, ou seja filtragem passa-banda para separação dos outros canais, desmodulação FDM que consiste em nova modulação seguida de filtragem passa-baixo. Neste momento com o canal em banda base e separado dos outros canais é necessário restabelecer a frequência de amostragem e recuperar o sinal contínuo a partir das suas amostras. A figura seguinte elucida o processo.



f) Fazer o up-sampling no sinal contínuo implica desmultiplexar os sinais multiplexados em TDM, passá-los para contínuos e voltar a amostrar agora a 64 kHz. Depois seria necessário multiplexá-los em FDM. Este processo requer processamento contínuo no tempo. Nas 2 alíneas anteriores usou-se apenas recursos digitais. A figura seguinte elucida o que seria necessário efectuar caso não se conhecesse o processamento digital de sinais contínuos.

