Universidade do Minho

Problemas de Mecânica Analítica e Ondas

Série 2 – Equações de Lagrange

1- Escreva as equações de Lagrange para os seguintes sistemas:

(a) Uma partícula livre de massa m, isto é, uma partícula que não é actuada por nenhuma força.

(b) O oscilador linear harmónico na horizontal, desprezando a força da gravidade..

(c) O pêndulo simples.

(d) O pêndulo duplo coplanar.

(e) O pêndulo simples cujo ponto de suspensão oscila horizontalmente no seu plano do movimento segundo a lei $x = a\cos\omega t$.

(f) O pêndulo simples de massa m cujo ponto de suspensão se move uniformemente com uma frequência angular constante ω sobre uma circunferência vertical .

2 - A solução das equações diferenciais de Lagrange fornece os valores das correspondentes coordenadas e velocidades em todos os instantes de tempo posteriores ao instante inicial $t = 0$. Isto aplica-se a cada escolha de condições iniciais relativas aos valores em $t = 0$ dessas quantidades. Tal corresponde à solução determinista do problema do movimento, a qual define univocamente as trajetórias de todas as partículas.

Derive a solução do problema do movimento dos seguintes sistemas, que poderiam ser obtidas pela integração das correspondentes equações diferenciais de Lagrange:

(a) Uma partícula livre de massa m, com condições iniciais em $t = 0$ dadas por $[x^0, y^0, z^0]$ e $[v_x^0, v_y^0, v_z^0]$ para as coordenadas da posição $[x(t), y(t), z(t)]$ e da velocidade $[v_x(t), v_y(t), v_z(t)]$, respetivamente, onde x^0, y^0, z^0 e v_x^0, v_y^0, v_z^0 são constantes.

(b) O oscilador linear harmónico, com condições iniciais em $t = 0$ dadas por x^0 e v_x^0 para a posição $x(t) \in [-a, a]$ e a velocidade $v_x(t)$, respetivamente, onde $x^0 \in [-a, a]$ e v_x^0 são constantes.

(c) O pêndulo simples no limite de pequenas oscilações, com condições iniciais em $t = 0$ dadas por θ^0 e $\dot{\theta}^0$ para o ângulo $\theta(t) \ll 1$ e a velocidade angular $\dot{\theta}(t)$, respetivamente, onde $\theta^0 \ll 1$ e $\dot{\theta}^0$ são constantes.

Nota - As integrações das equações e Lagrange dos sistemas da questões 1 (d)-(f) para condições iniciais relativas ao instante inicial $t = 0$ também fornecem as soluções deterministas dos correspondentes problemas do movimento, as quais definem univocamente as trajetórias de todas as partículas. Contudo, no caso desses sistemas tal integração é um problema matemático mais complexo que não se considera nesta unidade curricular.

3- Considere uma partícula de massa m atuada por uma força atrativa central, isto é, associada a um potencial que depende apenas da distância r à origem. Para simplificar, considere que o movimento da partícula ocorre apenas no plano XY.

(a) Determine as equações de Lagrange deste sistema. Expresse um dos termos de uma dessas equações em termos da componente de uma força generalizada do sistema.

(b) Como sabemos da mecânica Newtoniana, a componente L_z segundo o eixo OZ do momento angular de uma partícula de massa m é dada por $L_z = m(x\,\dot{y} - y\,\dot{x})$. O que pode dizer, no que respeita a essa componente do momento angular da partícula, a partir do resultado da integração da equação diferencial de Lagrange, relativa à coordenada generalizada angular?

4- Um ponto material de massa m, sujeito à acção da gravidade, é obrigado a permanecer sobre uma circunferência de plano vertical. Por sua vez, a circunferência roda em torno do eixo vertical, com uma frequência angular constante de módulo ω. Escreva as equações de Lagrange do movimento.

5- Um ponto material de massa m, sujeito à acção da gravidade, é obrigado a permanecer sobre a superfície de um cone de eixo horizontal. Determine as equações de Lagrange do movimento do ponto.

6- Um ponto material de massa m, sujeito à acção da gravidade, é obrigado a permanecer num plano vertical sobre uma parábola de equação $z = a\,r^2$, onde a é uma constante e r a distância do ponto material ao eixo OZ vertical. Escreva as equações de Lagrange no caso em que o plano da parábola roda com velocidade angular ω em torno do eixo OZ.

7- Considere uma haste rectilínea AB de peso desprezável que está ligada, sem atrito, a um eixo vertical OZ. A haste gira em torno deste eixo com uma velocidade angular ω constante e mantém um ângulo α com OZ. Uma partícula de massa m desloca-se sobre a haste e sob a acção da gravidade. Escreva as equações de Lagrange do ponto material.

Dados Auxiliares da Série 2

Na aula teórico-prática serão representadas no quadro figuras esquemáticas de alguns dos sistemas físicos considerados nos problemas.

Outros dados auxiliares

Força associada a um oscilador linear harmónico:

$$\vec{F} = -k\, x\, \vec{e}_x$$

Aqui k é a constante elástica, x é o deslocamento da posição de equilíbrio e $\vec{e}_x$ é o versor do eixo OX em que se processa o movimento.

Tem-se ainda que:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned}$$

E logo:

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$