Física Quântica I / Mecânica Quântica

Ferramentas Matemáticas

Vítor M. Pereira

Departamento de Física | Universidade do Minho

2021/22 — 2º Sem

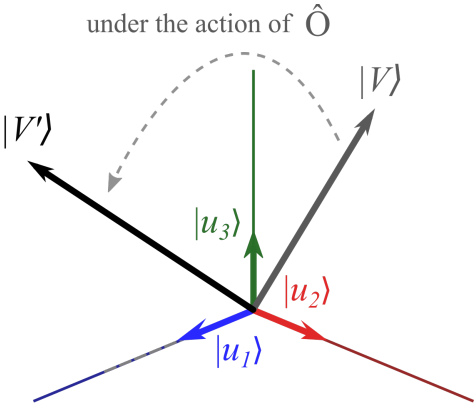
Lição 5
Operadores lineares e sua representação

Operadores lineares

- Definições e propriedades
- Ação nos vetores de base
- Projetores

Representação matricial de operadores

- Operações envolvendo operadores
- Expansão de um operador em ket-bras
- Valores e vetores próprios de operadores
- Caraterísticas dos operadores Hermíticos



Operadores lineares

- Objetos que realizam transformações de um vetor $|V\rangle$ noutro $|V'\rangle$.
- Apenas nos interessam operadores em que $|V'\rangle$ "vive" no mesmo espaço.
- Em MQ, quantidades físicas são descritas por um operador no espaço de estados.

Notação

Operadores são escritos com um símbolo circunflexo. Por exemplo: $\hat{\mathrm{A}}$.
(o "$\wedge$" relembra-nos que se trata de um operador)

Atuando com um operador num ket (ou bra) obtemos um novo ket (ou bra):

$$\hat{\Omega}|V\rangle = |V'\rangle \qquad \text{ou} \qquad \langle V|\hat{\Gamma} = \langle V'|$$

Operadores lineares obedecem às seguintes regras/propriedades:

$$\hat{\Omega}\alpha|V\rangle = \alpha\,\hat{\Omega}|V\rangle \qquad (\alpha \text{ um número } \in \mathbb{C})$$

$$\hat{\Omega}\big(\alpha|V\rangle + \beta|W\rangle\big) = \alpha\,\hat{\Omega}|V\rangle + \beta\,\hat{\Omega}|W\rangle$$

$$\langle V|\alpha\,\hat{\Gamma} = \langle V|\hat{\Gamma}\,\alpha \qquad (\alpha \text{ um número } \in \mathbb{C})$$

$$\Big(\alpha\langle V| + \beta\langle W|\Big)\hat{\Gamma} = \alpha\,\langle V|\hat{\Gamma} + \beta\,\langle W|\hat{\Gamma}$$

Como $\hat{\Omega}|V\rangle$ é um outro ket $|V'\rangle$ no mesmo espaço, o bra correspondente obtém-se facilmente:

$$|V'\rangle = \hat{\Omega}|V\rangle \quad \longrightarrow \quad \langle V'| \stackrel{\text{def}}{\equiv} (|V'\rangle)^\dagger = \Big(\hat{\Omega}|V\rangle\Big)^\dagger = (|V\rangle)^\dagger\,\Big(\hat{\Omega}\Big)^\dagger = \langle V|\hat{\Omega}^\dagger$$

O operador $\hat{\Omega}^\dagger$ é o conjugado Hermítico de $\hat{\Omega}$.

É frequente encontrar (ex., Zetilli) a notação adicional equivalente:

$$|\hat{\Omega}V\rangle \equiv \hat{\Omega}|V\rangle \qquad \text{e} \qquad \langle\hat{\Omega}V| \equiv \langle V|\hat{\Omega}^\dagger \qquad \text{(note-se a diferença entre bra e ket)}$$

Operadores lineares: alguns detalhes práticos importantes

1. A posição de constantes (números) é irrelevante:

$$\left(\alpha\hat{\Omega}\right)|\psi\rangle = \left(\hat{\Omega}\alpha\right)|\psi\rangle = \alpha\left(\hat{\Omega}|\psi\rangle\right) = \alpha\hat{\Omega}|\psi\rangle, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

2. Uma sequência de transformações ($\hat{\mathrm{A}}$ seguido de $\hat{\mathrm{B}}$) é descrita pelo produto dos operadores correspondentes na mesma ordem da direita para a esquerda:

$$\hat{\mathrm{B}}\left(\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle\right) = \left(\hat{\mathrm{B}}\hat{\mathrm{A}}\right)|\psi\rangle = \hat{\mathrm{B}}\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle \qquad (A \text{ atua primeiro no ket!})$$

3. Em geral,

$$\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}|\psi\rangle \neq \hat{\mathrm{B}}\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle \qquad \Leftrightarrow \qquad [\hat{\mathrm{A}},\, \hat{\mathrm{B}}] \neq 0$$

(se a ordem for irrelevante, $[\hat{\mathrm{A}},\, \hat{\mathrm{B}}] = 0$, e dizemos que $\hat{\mathrm{A}}$ e $\hat{\mathrm{B}}$ comutam)

4. A conjugação Hermítica de um produto é dada por

$$\left(\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}\ldots\hat{\mathrm{Z}}\right)^\dagger = \hat{\mathrm{Z}}^\dagger\ldots\hat{\mathrm{B}}^\dagger\hat{\mathrm{A}}^\dagger \qquad \text{(ordem invertida!)}$$

Por exemplo, o bra $\langle\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}\psi|$ é dado por

$$\langle\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}\psi| \overset{\text{def}}{\equiv} |\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}\psi\rangle^\dagger \equiv \left(\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}|\psi\rangle\right)^\dagger = \langle\psi|\left(\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}\right)^\dagger = \langle\psi|\hat{\mathrm{B}}^\dagger\hat{\mathrm{A}}^\dagger$$

5. Chama-se valor esperado de um operador no estado ψ ao produto interno

$$\langle\psi|\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle\right) = \left(\langle\psi|\hat{\mathrm{A}}\right)|\psi\rangle \qquad (\text{obviamente um número } \in \mathbb{C})$$

6. Se os dois vetores neste produto interno forem diferentes, designa-se elemento de matrix:

$$\langle\chi|\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle \equiv \langle\chi|\left(\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle\right) = \left(\langle\psi|\hat{\mathrm{A}}^\dagger|\chi\rangle\right)^* \qquad \text{(porquê?)}$$

Ação dos operadores nos vetores da base

Uma vez que os operadores que nos interessam são lineares:

$$|V\rangle = \sum_i v_i |i\rangle \quad \longrightarrow \quad \hat{\Omega}|V\rangle = \sum_i v_i \left(\hat{\Omega}|i\rangle\right) \quad \text{onde} \quad \hat{\Omega}|i\rangle \in \mathbb{V}$$

Definição de um operador através da sua ação na base

Uma forma de definir completamente um operador é especificando a sua ação sobre todos os vetores que definem a base do espaço vetorial de interesse.

Exemplo: recordemos a molécula com 3 átomos

Suponhamos que sabemos que um operador $\hat{\mathrm{O}}$ atua da seguinte forma nos vetores $\{|x_k\rangle\}$:

$$\hat{\mathrm{O}}|x_1\rangle = |x_2\rangle, \qquad \hat{\mathrm{O}}|x_2\rangle = |x_3\rangle, \qquad \hat{\mathrm{O}}|x_3\rangle = |x_1\rangle - 2|x_3\rangle$$

Então, para um vetor arbitrário expresso nesta base:

$$|V\rangle = \sum_{i=1}^{3} v_i |x_i\rangle \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathrm{O}}|V\rangle = \sum_{i=1}^{3} v_i \hat{\mathrm{O}}|x_i\rangle = v_1\hat{\mathrm{O}}|x_1\rangle + v_2\hat{\mathrm{O}}|x_2\rangle + v_3\hat{\mathrm{O}}|x_3\rangle$$

aplicar as “regras” a cada: $= v_1(\,|x_2\rangle\,) + v_2(\,|x_3\rangle\,) + v_3(\,|x_1\rangle - 2|x_3\rangle\,)$

agrupar e simplificar: $= v_3|x_1\rangle + v_1|x_2\rangle + (v_2 - 2v_3)|x_3\rangle$

Exemplos de operadores simples

1. Identidade (faz nada) e o inverso (desfaz)

$$\hat{\mathbf{1}}|\psi\rangle = |\psi\rangle \qquad\qquad \hat{\mathrm{A}}^{-1}\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle = \hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{A}}^{-1}|\psi\rangle = \hat{\mathbf{1}}|\psi\rangle = |\psi\rangle \qquad \text{(para qualquer } |\psi\rangle\text{)}$$

2. Projetores (utilidade prática de bras/kets):

$$|\psi\rangle = \sum_i^n \psi_i|i\rangle = \sum_i^n \langle i|\psi\rangle|i\rangle = \sum_i^n \Big(|i\rangle\langle i|\Big)|\psi\rangle = \left(\sum_i^n |i\rangle\langle i|\right)|\psi\rangle$$

claramente,

$$\sum_i^n |i\rangle\langle i| = \sum_i^n \hat{\mathrm{P}}_i = \hat{\mathbf{1}} \qquad\qquad \text{(relação de fecho)}$$

e $\hat{\mathrm{P}}_k \equiv |k\rangle\langle k|$ projeta qualquer vetor no ket de base $|k\rangle$:

$$\hat{\mathrm{P}}_k|\psi\rangle = |k\rangle\langle k|\left(\sum_i \psi_i|i\rangle\right) = \sum_i \psi_i|k\rangle\langle k|i\rangle = \sum_i \psi_i|k\rangle\delta_{ki} = \psi_k|k\rangle$$

Em geral, se escolhermos $m \le n$ membros da base que definem um subespaço $\mathbb{V}^m \subseteq \mathbb{V}^n$:

$$\hat{\mathrm{P}}_{\{1,\dots,m\}} = \sum_{i=1}^m |i\rangle\langle i| \qquad \text{é designado o projetor nesse subespaço vetorial}$$

Projetores / operadores de projeção

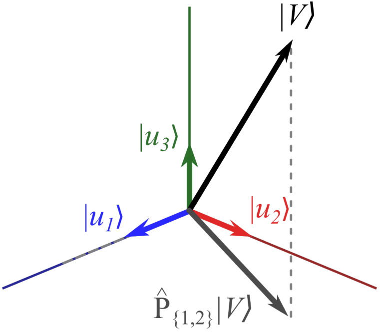
Numa base ortonormal, o operador

$$\hat{\mathrm{P}}_{\{1,\ldots,m\}} = \sum_{i=1}^{m} |i\rangle\langle i|$$

projeta no subespaço coberto pelos vetores

$$|1\rangle, \ldots, |m\rangle$$

(análogo a uma projeção geométrica)



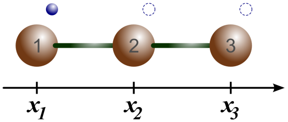
O exemplo mais simples de projeção: extrair uma componente

$$|\psi\rangle = \psi_1|1\rangle + \psi_2|2\rangle + \cdots + \psi_n|n\rangle$$

$$\hat{\mathrm{P}}_k|\psi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big(|k\rangle\langle k|\Big)\,|\psi\rangle$$

$$= \psi_1\,|k\rangle\langle k|1\rangle + \psi_2\,|k\rangle\langle k|2\rangle + \cdots + \psi_n\,|k\rangle\langle k|n\rangle$$

$$= \psi_k\,|k\rangle \qquad [\text{ porque } \langle i|j\rangle = \delta_{ij}\,]$$



$|x_1\rangle$: representa o e$^-$ no átomo 1

$|x_2\rangle$: representa o e$^-$ no átomo 2

Examplo: voltando ao exemplo da molécula acima

Suponhamos que, num dado momento, se sabe que o estado do eletrão é dado por

$$|\psi\rangle = 2|1\rangle + 3i|2\rangle + |3\rangle$$

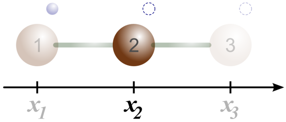
Um projetor simples é, por exemplo,

$$\hat{\mathrm{P}}_2 = |2\rangle\langle 2| \qquad \longrightarrow \qquad \hat{\mathrm{P}}_2|\psi\rangle = \Big(|2\rangle\langle 2|\Big)|\psi\rangle = \Big(\langle 2|\psi\rangle\Big)|2\rangle = 3i|2\rangle$$

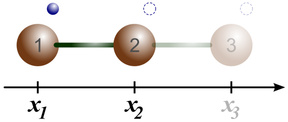
Um projetor mais abrangente poderia ser

$$\hat{\mathrm{P}}_{1,2} = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| \qquad \longrightarrow \qquad \hat{\mathrm{P}}_{\{1,2\}}|\psi\rangle = 2|1\rangle + 3i|2\rangle$$

$\hat{\mathrm{P}}_2$:



$\hat{\mathrm{P}}_{1,2}$:



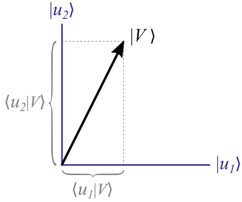
Representação matricial de operadores

$$\hat{\mathrm{O}} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & \cdots \\ o_{21} & o_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Representação matricial da ação de um operador

Recordemos como podemos extrair as componentes de um qualquer ket genérico:

$$|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |u_i\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \psi_i = \langle u_i|\psi\rangle$$



Quais serão então as componentes do (novo) ket $\hat{\Omega}|\psi\rangle$?

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle = \sum_j \psi_j \, \hat{\Omega}|u_j\rangle$$

$$\langle u_i|\hat{\Omega}|\psi\rangle = \sum_j \psi_j \langle u_i|\hat{\Omega}\,|u_j\rangle \qquad \text{(um número } \mathbb{C}\text{, certo?)}$$

$$= \sum_j \Omega_{ij}\, \psi_j$$

Cada número $\Omega_{ij} \equiv \langle u_i|\hat{\Omega}|u_j\rangle$ designa-se elemento de matriz ij de $\hat{\Omega}$ na base $\{\,|u_i\rangle\,\}$.

Mas, por definição

$$\text{se} \qquad \hat{\Omega}|\psi\rangle = |\psi'\rangle, \qquad \text{então} \qquad \psi_i' = \langle u_i|\psi'\rangle = \langle u_i|\hat{\Omega}|\psi\rangle,$$

e, logo, as componentes do ket antes (ψ) e após (ψ') a ação do operador $\hat{\Omega}$ relacionam-se segundo

$$|\psi'\rangle = \hat{\Omega}\,|\psi\rangle \quad \xrightarrow{\text{é representado por}} \quad \begin{bmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \vdots \\ \psi_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \cdots & \Omega_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}$$

Operações envolvendo operadores

Uma vez que podemos representar qualquer operador como uma matriz,

$$\hat{\Omega} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1} & \cdots & \Omega_{nn} \end{bmatrix},$$

então resultam as seguintes propriedades:

- Um produto de operadores é representado pelo produto das matrizes respetivas:

$$\hat{C} = \hat{A}\,\hat{B} \qquad \longmapsto \qquad \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

- Uma função de um operador é representada pela função da matriz que o representa:

$$\text{seja} \qquad \hat{T} = f(\hat{\Omega}) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \hat{T} \overset{\text{matriz}}{\longmapsto} T \\ \hat{\Omega} \overset{\text{matriz}}{\longmapsto} \Omega \end{cases} \qquad \text{então} \qquad T = f(\Omega)$$

- Elementos de matriz e valores esperados correspondem a operações do tipo

$$\langle \psi | \hat{\Omega} | \chi \rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 & \cdots & \psi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1} & \cdots & \Omega_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{bmatrix}$$

Expansão de um operador em ket-bra

Se os elementos de matriz de um operador $\hat{\Omega}$ forem conhecidos numa base

$$\Omega_{ij} = \langle u_i|\hat{\Omega}|u_j\rangle,$$

ele pode ser representado por uma expansão da seguinte forma

$$\hat{\Omega} = \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{ij},$$

Vejamos porquê:

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &= \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{ij}|u_i\rangle\langle u_j| \\
\langle u_p|\hat{\Omega}|u_q\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{ij}\langle u_p|\Big(|u_i\rangle\langle u_j|\Big)|u_q\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{ij}\Big(\langle u_p|u_i\rangle\Big)\Big(\langle u_j|u_q\rangle\Big) \\
\Omega_{pq} &= \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{ij}\delta_{pi}\,\delta_{jq} = \sum_{j}^{n} \Omega_{pj}\,\delta_{jq} = \Omega_{pq} \\
\Omega_{pq} &= \Omega_{pq} \qquad\qquad (\checkmark)
\end{aligned}$$

Qualquer operador pode representar-se em qualquer base ortonormal como

$$\hat{\Omega} = \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{ij}\, |u_i\rangle\langle u_j|$$

Exemplo

Voltemos ao operador $\hat{O}$ definido no exemplo anterior através de:

$$\hat{O}|x_1\rangle = |x_2\rangle, \qquad \hat{O}|x_2\rangle = |x_3\rangle, \qquad \hat{O}|x_3\rangle = |x_1\rangle - 2|x_3\rangle$$

Os seus elementos de matriz são então, de acordo com a definição $\Omega_{ij} \equiv \langle x_i|\hat{\Omega}|x_j\rangle$ os seguintes:

$$\begin{aligned}
O_{11} &= \langle x_1|\hat{O}|x_1\rangle = 0, & O_{21} &= \langle x_2|\hat{O}|x_1\rangle = 1, & O_{31} &= \langle x_3|\hat{O}|x_1\rangle = 0 \\
O_{12} &= \langle x_1|\hat{O}|x_2\rangle = 0, & O_{22} &= \langle x_2|\hat{O}|x_2\rangle = 0, & O_{32} &= \langle x_3|\hat{O}|x_2\rangle = 1 \\
O_{13} &= \langle x_1|\hat{O}|x_3\rangle = 1, & O_{23} &= \langle x_2|\hat{O}|x_3\rangle = 0, & O_{33} &= \langle x_3|\hat{O}|x_3\rangle = -2
\end{aligned}$$

Logo, a matriz que o representa é

$$\hat{O} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \text{na base } \{|x_1\rangle, |x_2\rangle, |x_3\rangle\}$$

A partir daqui, podemos usar os elementos O_{ij} desta matriz para escrever

$$\hat{O} = \sum_{mn=1}^{3} O_{mn}|x_m\rangle\langle x_n|$$

Verifiquemos que funciona. Por exemplo:

$$\hat{O}|x_2\rangle = \sum_{m,n=1}^{3} O_{mn}|x_m\rangle\langle x_n|x_2\rangle = \sum_{mn} O_{mn}\langle x_n|x_2\rangle|x_m\rangle = \sum_{mn} O_{mn}\delta_{n2}\,|x_m\rangle = \sum_{m} O_{m2}|x_m\rangle = |x_3\rangle \quad \checkmark$$

Definição

O ket $|\phi_\lambda\rangle$ é chamado um auto-estado (ou "estado próprio", ou "ket próprio") do operador $\hat{\mathrm{O}}$ se

$$\hat{\mathrm{O}}|\phi^\lambda\rangle = \lambda\,|\phi^\lambda\rangle,$$

e $\lambda \in \mathbb{C}$ é o valor próprio associado a esse auto-estado.

Notação $|\phi^\lambda\rangle$ sublinha tratar-se do ket/estado próprio associado especificamente ao valor próprio λ.

Como determiná-los? Expressando a definição numa base ortonormal $\{|u_1\rangle, \ldots |u_n\rangle\}$:

expandimos o auto-estado: $$|\phi^\lambda\rangle = \sum_k \phi_k^\lambda |u_k\rangle$$

substituímos na def. de auto-estado: $$\hat{\mathrm{O}}|\phi^\lambda\rangle = \lambda|\phi^\lambda\rangle \quad\longrightarrow\quad \sum_k \phi_k^\lambda\, \hat{\mathrm{O}}|u_k\rangle = \lambda \sum_k \phi_k^\lambda |u_k\rangle$$

projetamos nos vetores da base $\langle u_i|$: $$\sum_k \phi_k^\lambda \langle u_i|\hat{\mathrm{O}}|u_k\rangle = \lambda \sum_k \phi_k^\lambda \langle u_i|u_k\rangle = \lambda \sum_k \phi_k^\lambda \delta_{ik} = \lambda\,\phi_i^\lambda$$

ou seja: $$\sum_k O_{ik}\,\phi_k^\lambda = \lambda\,\phi_i^\lambda$$

Reduz-se portanto a calcular os valores e vetores próprios da matriz O_{ij} que representa $\hat{\mathrm{O}}$:

$$\hat{\mathrm{O}}|\phi^\lambda\rangle = \lambda|\phi^\lambda\rangle \xrightarrow{\text{na prática reduz-se ao problema}} \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & \cdots \\ O_{21} & O_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^\lambda \\ \phi_2^\lambda \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \phi_1^\lambda \\ \phi_2^\lambda \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Definição

Um operador Hermítico $\hat{\mathrm{H}}$ é todo aquele com a propriedade

$$\hat{\mathrm{H}}^\dagger = \hat{\mathrm{H}}.$$

Operadores Hermíticos são geralmente designados como "observáveis" no contexto de MQ.

Notemos que, dado um qualquer operador Hermítico e quaisquer kets de uma base $|u_i\rangle$ e $|u_j\rangle$:

$$\underbrace{\langle u_i|\hat{\mathrm{H}}|u_j\rangle}_{H_{ij}} = \langle u_i|\hat{\mathrm{H}}^\dagger|u_j\rangle = \left[\,\langle u_j|\hat{\mathrm{H}}|u_i\rangle\,\right]^\dagger = \left[\,\underbrace{\langle u_j|\hat{\mathrm{H}}|u_i\rangle}_{H_{ji}}\,\right]^* \qquad \longrightarrow \qquad H_{ij} = H_{ji}^*$$

Operadores Hermíticos são representados por matrizes Hermíticas

Isto implica imediatamente que

1. Os valores próprios $\{\lambda_\alpha\}$ de operadores Hermíticos são sempre números reais.
2. Se $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ os auto-estados correspondentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são orthogonais.
3. O conjunto completo dos auto-estados $\{|\phi^{\lambda_1}\rangle, |\phi^{\lambda_2}\rangle \ldots\}$ definem uma base completa e ortonormal para o espaço de estados do sistema físico.

Notas importantes: bras, kets, bra-kets, e ket-bras

Para gravar permanentemente na memória ;-)

- Objetos da forma $\langle\chi|\psi\rangle$ representam produtos internos: ie., números $\in \mathbb{C}$.
- Objetos da forma $\langle\chi|\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle$ são casos particulares de produto interno: elementos de matriz.
- Objetos da forma $\langle\psi|\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle$ chamam-se valores esperados.
- $\langle\psi|\chi\rangle = \langle\chi|\psi\rangle^*$ (a ordem é relevante).
- Objetos da forma $|\chi\rangle\langle\psi|$ são operadores.
- $\big(|\chi\rangle\langle\psi|\big)^\dagger = |\psi\rangle\langle\chi|$
- Excetuando números, a ordem dos objetos é relevante e tem significado diferente!

$$(2+3i)\,\langle A|\,\hat{U}\,\hat{S}\,|V\rangle\langle V|\,\hat{H}^\dagger\,\hat{U}\,\hat{S}^\dagger\,|B\rangle\langle C|\,e^{3i}$$

Para obter o conjugado Hermítico de uma expressão genérica em notação de Dirac:

1. substituir as constantes pelo seu complexo conjugado;
2. trocar kets pelos bras correspondentes, e vice-versa;
3. substituir operadores pelos seus conjugados Hermíticos;
4. inverter a ordem de todos os objetos (a posição das constantes é indiferente).