Teste de Mecânica Analítica e Ondas

Licenciatura em Física
e
Licenciatura em Engenharia Física

Universidade do Minho — 17 de Novembro de 2021
(Leia as questões com muita atenção, pois algumas contêm múltiplas perguntas)

I

1- Considere um sistema dinâmico formado por N partículas pontuais e tal que existem $l < 3N$ equações de ligação.

(a) Escreva uma equação em termos das forças $\vec{F}_i$ aplicadas a cada uma das $i = 1, ..., N$ partículas e de correspondentes quantidades adequadas $\delta\vec{r}_i$ que traduza o princípio de d' Alembert para este sistema. Diga como se denominam e defina as quantidades $\delta\vec{r}_i$ e explique as suas propriedades. $\sum_{n=1}^{N} \left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{P}_i}{dt}\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

$\delta\vec{r}_i$ corresponde a um deslocamento virtual (infinitesimal) que é fictício por isso é definido por $\delta\vec{r}$ e não por $\frac{d\vec{r}}{dt}$

(b) Será que no presente caso as $1, ..., 3N$ componentes das $i = 1, ..., N$ quantidades vetoriais $\delta\vec{r}_i$ são independentes? Justifique a sua resposta.

Não, tendo em conta que há ligações

2 - Considere um corpo rígido formado por N partículas pontuais e um referencial cuja origem se mantém em repouso e coincide com o centro de massa do corpo.

(a) Expresse a energia cinética de tal corpo rígido em termos das grandezas físicas $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ e indique de que grandezas físicas se trata. $T = \frac{\vec{L} \cdot \vec{\omega}}{2}$

(b) Relacione a grandeza física $\vec{L}$ com a grandeza $\vec{\omega}$ através de uma matriz cujas expressões dos seus nove elementos deve indicar. Diga como se denomina essa matriz, os seus elementos diagonais, e os seus elementos não diagonais. Qual a razão da denominação da matriz? $\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \vec{\omega}$ Produtos de inércia

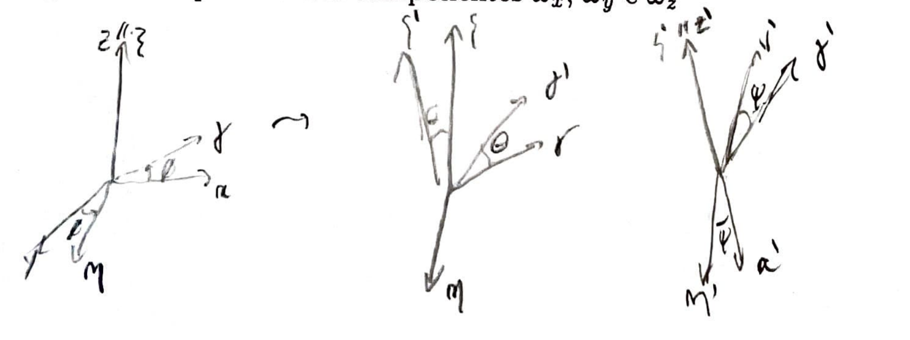
Momentos de inércia — Tensor de inércia

(c)- No caso do corpo rígido estar a sofrer rotações, expresse a grandeza $\vec{\omega}$ em termos das velocidades generalizadas associadas aos ângulos de Euler ϕ, θ e ψ e de versores apontando em direções do espaço, as quais deve definir. (Não necessita de fornecer de forma explícita a expressão das componentes ω_x, ω_y e ω_z em termos de ϕ, θ e ψ).

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi$

$= \dot{\phi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{m} + \dot{\psi}\,\hat{z}'$

$\Rightarrow \vec{\omega} = \omega\,\hat{?}$



9

$t=0 \Rightarrow y=0$

$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

$a = 1/m$

II

$r_0 = m$

1- Um ponto material de massa m, sujeito à ação da gravidade, é obrigado a permanecer num plano vertical sobre uma linha de equação $z = a\,(2r_0\,r + r^2)$, onde a e r_0 são constantes com dimensões de inverso de comprimento e comprimento, respetivamente, e $r \geq 0$ é a distância do ponto material ao eixo OZ vertical tomada na horizontal. O plano da linha roda com velocidade angular ω em torno do eixo OZ, começando por estar no instante inicial $t = 0$ contido no plano XZ.

(a) Quantos graus de liberdade tem este sistema? Justifique a sua resposta.

Apenas 1 grau de liberdade tendo em conta que se movimenta numa linha

(b) Expresse as coordenadas Cartesianas x, y, z e as componentes da velocidade $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ do ponto material em termos de $\omega\,t$ e da coordenada generalizada ou coordenadas generalizadas que deve escolher adequadamente. coordenada generalizada: $\{q_i\} = \{r\}$

$x = r\cos(\omega t)$ $\quad \dot{x} = \dot{r}\cos(\omega t) - r\omega\sin(\omega t)$

$y = r\sin(\omega t)$ $\quad \dot{y} = \dot{r}\sin(\omega t) + r\omega\cos(\omega t)$

$z = a(2r_0 r)$ $\quad \dot{z} = a(2 r_0 \dot{r})$

2 - Considere ainda o sistema da pergunta 1.

(a) Calcule o Lagrangeano do sistema em termos de ω e da coordenada generalizada ou coordenadas generalizadas que escolheu. $T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + (r\omega)^2 + (a(2r_0\dot{r}))^2\right)$

$V(r) = mgy = mg a r_0$

(b) Escreva a equação ou equações de Lagrange para $z > 0$.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} + m(a 2 r_0)^2\ddot{r} - m\omega^2 r + mgar_0 = 0$

(c) A partir do resultado da alínea anterior, derive a segunda derivada em relação ao tempo $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$ da coordenada r quando o ponto material de massa m passa na origem do sistema de referência na qual $x, y, z = 0, 0, 0$. Confirme que essa derivada é negativa, constante e tem dimensões de aceleração.

$\ddot{r}(1 + 4a^2 r_0^2) = \frac{-mgar_0}{(1 + 4a^2 r_0^2)}$

Teste de Mecânica Analítica e Ondas

Licenciatura em Física
e
Licenciatura em Engenharia Física

Universidade do Minho — 17 de Novembro de 2021
(Emenda)

I

No grupo **II** a quantidade $z = a\,(2r_0\,r + r^2)$ deve ser substituída por $z = a\,r_0\,r$