# Tensor das deformações

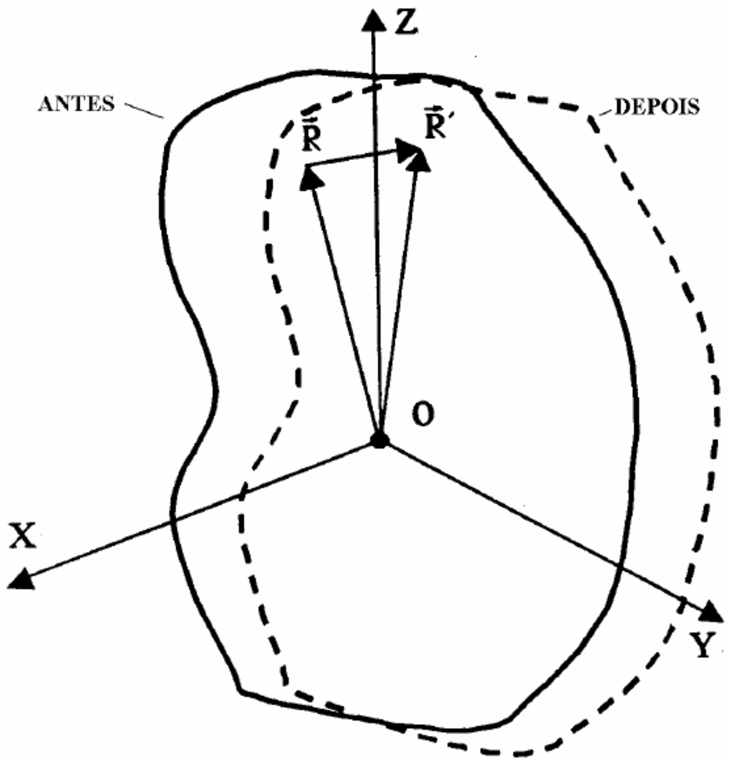
- Os materiais deformam-se quando sujeitos a tensões mecânicas. No entanto, a deformação efetuada depende das propriedades do material que compõe o objeto.
- Quando um corpo é deformado, as partículas deslocam-se me relação à posição inicial.
- As translações e rotações de corpo rígido não são deformações.
- Estas considerações levam à introdução de um tensor das deformações, que caracterizam a deformação local do corpo.
- Nesse sentido é importante definir o vetor posição de cada partícula do corpo:

$$\vec{R}(x_1, x_1, x_1, \text{t})$$

- Normalmente define-se o estado inicial do corpo como referência e o estado final como deformado.
- Considere-se o caso da figura, onde a partícula na posição inicial $\vec{R}$ passou para $\vec{R}'$ após a deformação. O vetor deslocamento $\vec{u}(\vec{R},t)$ definido em relação à situação inicial de referência $\vec{R}$ é dado por:

$$\vec{u} = \vec{R}' - \vec{R} \qquad \text{ou} \qquad u_i = R_i' - R_i$$

- Esta é a formulação de Lagrange, em que $\vec{u}(\vec{R},t)$ depende da posição de referência inicial $\vec{R}$ da partícula. Na formulação de Euler $\vec{u}(\vec{R}',t)$ depende da posição $\vec{R}'$ final. As duas formulações são equivalentes, pois $\vec{u}$ é o mesmo em ambas as situações.
- Aqui iremos usar a formulação de Lagrange e consideramos **deslocamentos infinitesimais**.



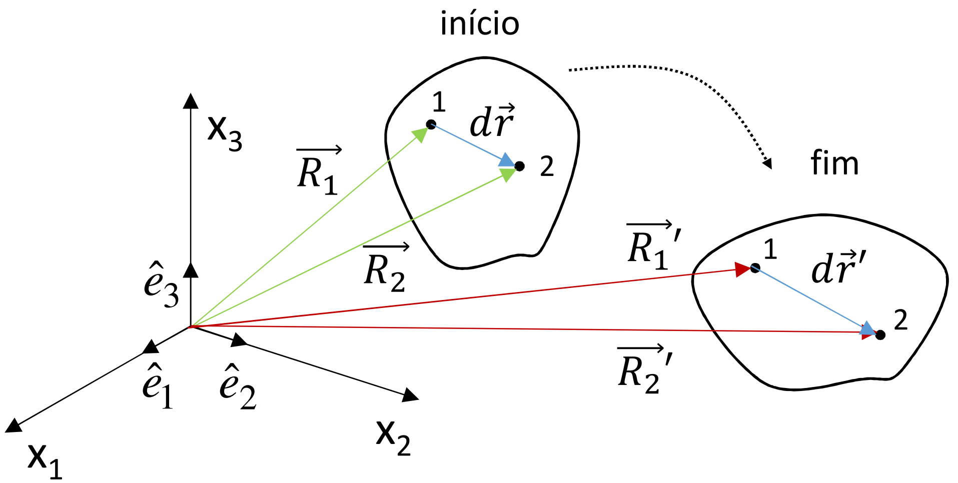
## Tensor das deformações

- Considerem-se dois pontos que estavam inicialmente separados por $\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1}$, como se vê na figura abaixo.
- Depois da deformação passam a estar separados por $\mathrm{d}\vec{r}' = \overrightarrow{R_2}' - \overrightarrow{R_1}'$, tal que:

$$\mathrm{d}\vec{r}' = \vec{R}_2' - \overrightarrow{R_1}' = \underbrace{\vec{R}_2' - \overrightarrow{R_2}}_{\overrightarrow{u_2}} + \overrightarrow{R_2} - \left(\underbrace{\vec{R}_1' - \overrightarrow{R_1}}_{\overrightarrow{u_1}} + \vec{R}_1\right)$$

$$\mathrm{d}\vec{r}' = \underbrace{\overrightarrow{R_2} - \vec{R}_1}_{\overrightarrow{dr}} + \underbrace{\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1}}_{\overrightarrow{du}}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}' = \overrightarrow{dr} + \overrightarrow{du} \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}x_i' = \mathrm{d}\varkappa_i + \mathrm{d}\mu_i$$



# Tensor das deformações

- Nessas condições, os comprimentos inicial e final serão:

$$|\mathrm{d}\vec{r}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \qquad |\mathrm{d}\vec{r}\,'| = \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3}$$

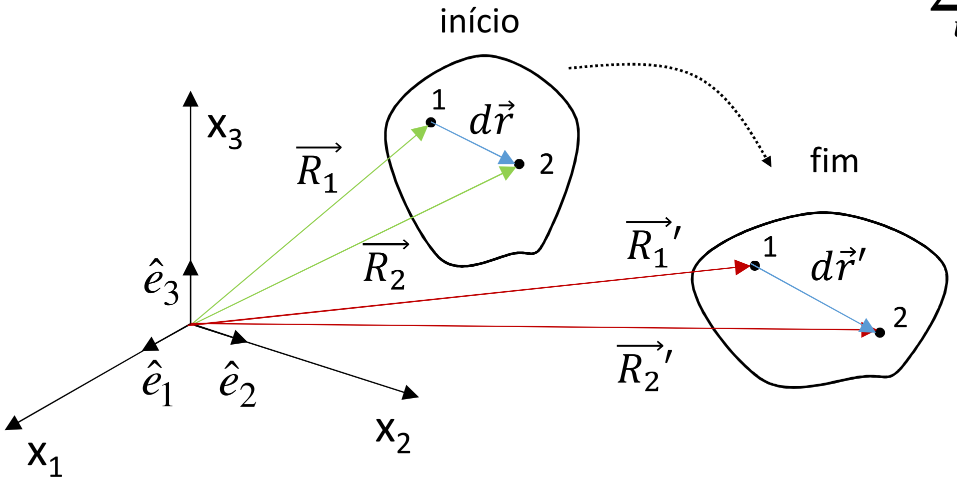
$$|\mathrm{d}\vec{r}|^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i\,\mathrm{d}x_i$$

$$\mathrm{d}x_i' = \mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i$$

$$|\mathrm{d}\vec{r}|^2 = dx_i\,\mathrm{d}x_i$$

De modo semelhante: $|\mathrm{d}\vec{r}\,'|^2 = dx'_i\,\mathrm{d}x'_i$

$$|\mathrm{d}\vec{r}\,'|^2 = \sum_i (dx_i + du_i)(dx_i + du_i) = \sum_i (dx_i + du_i)^2$$




Como os $du_i$ são pequenos:

$$\boxed{\mathrm{d}u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j}$$

Logo as componentes de $d\vec{r}\,'$ são:

$$\boxed{\mathrm{d}x'_i = \mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j}$$

# Tensor das deformações

- Assim:

$$|\mathrm{d}\vec{r}'|^2 = \left(\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)\left(\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\right)$$

= 0 (pequenas deformações)

$$|\mathrm{d}\vec{r}'|^2 = \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i + \cancel{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_k$$

$$|\mathrm{d}\vec{r}'|^2 = \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_i + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i = |\mathrm{d}\vec{r}|^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i$$

Como: $$2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$$ (índices repetidos são mudos)

Então: $$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = \varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$$

Obtendo-se o comprimento final após a deformação: $|\mathrm{d}\vec{r}'|^2 = |\mathrm{d}\vec{r}|^2 + 2\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

Tensor das deformações

# Tensor das deformações

- Note-se que uma translação do objeto não envolve uma deformação, pois como uma translação envolve um vetor $\vec{u}$ constante, igual para todos os pontos do corpo, as suas derivadas dão zero e $\varepsilon_{ij}$ = 0.

Tensor das deformações

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

- Significado Físico do tensor das deformações:

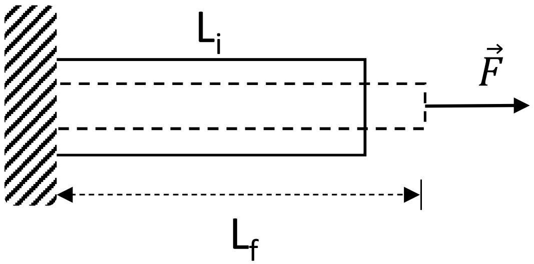
Variação relativa de volume:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

- Temos diagonais:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \quad => \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\Delta x' - \Delta x = \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x$$




$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{11}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_{11}$$

O mesmo para $\varepsilon_{22}$ e $\varepsilon_{33}$

- Temos diagonais são variações relativas de comprimentos, na direção dos eixos das coordenadas

# Tensor das deformações

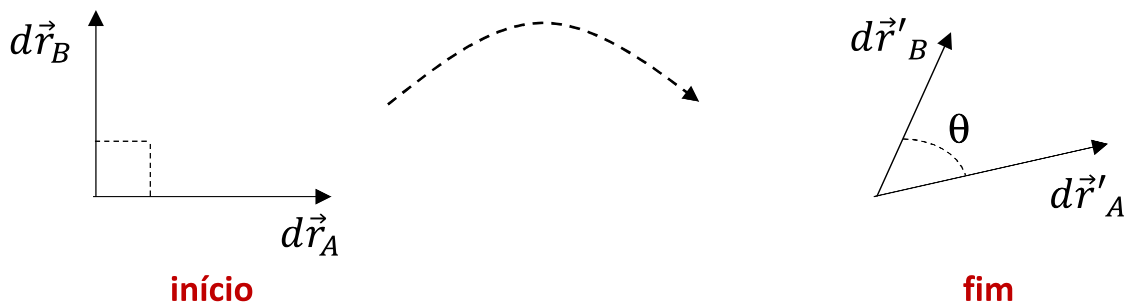
- Para direções gerais, com versor $\hat{n}$, que não são necessariamente coincidentes com os eixos os eixos coordenados, a variação relativa de comprimento é:

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_{ij}\hat{n}_i\hat{n}_j$$

Tensor das deformações

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

- Significado Físico do tensor das deformações.
- Termos não-diagonais ($i \neq j$) do tensor das deformações.
- Vetores inicialmente perpendiculares entre si.




Produto escalar

$$d\vec{r}_A \cdot d\vec{r}_B = |d\vec{r}_A||d\vec{r}_B|\cos(90º) = 0$$

$$d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = |d\vec{r}'_A||d\vec{r}'_B|\cos\theta$$

$$d\vec{r}_A \cdot d\vec{r}_B = dr_i^A \ dr_i^B = 0$$

$$d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = dx'^A_i \ dr'^B_i$$

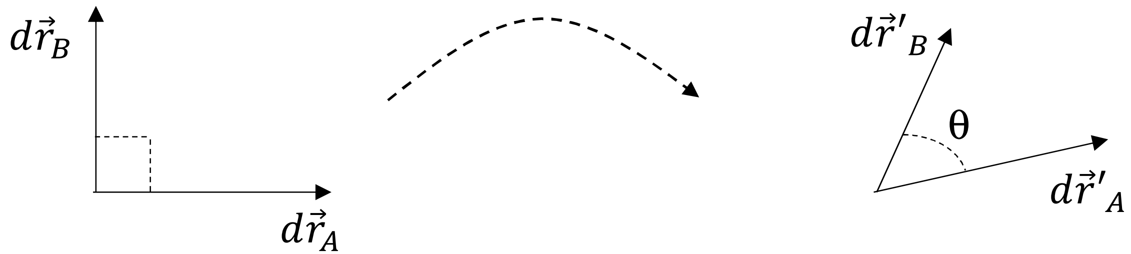
$$d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = dx'^A_i \ dr'^B_i = \left(dr_i^A + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dr_j^A\right)\left(dr_i^B + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dr_k^B\right)$$

# Tensor das deformações

- Significado Físico do tensor das deformações.
- Termos não-diagonais ($i \neq j$) do tensor das deformações.
- Vetores inicialmente perpendiculares entre si.

Tensor das deformações

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$




**início** **fim**

$$d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = dx'^A_i \; dr'^B_i = \underbrace{dr_i^A \; dr_i^B}_{=0} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dr_i^A \; dr_k^B + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dr_j^A \; dr_i^B + \cancel{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dr_j^A \; dr_k^B}$$

= 0 (pequenas deformações)

$$d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dr_i^A \; dr_k^B + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dr_j^A \; dr_i^B$$

$$d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dr_i^A \; dr_j^B + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dr_i^A \; dr_j^B$$

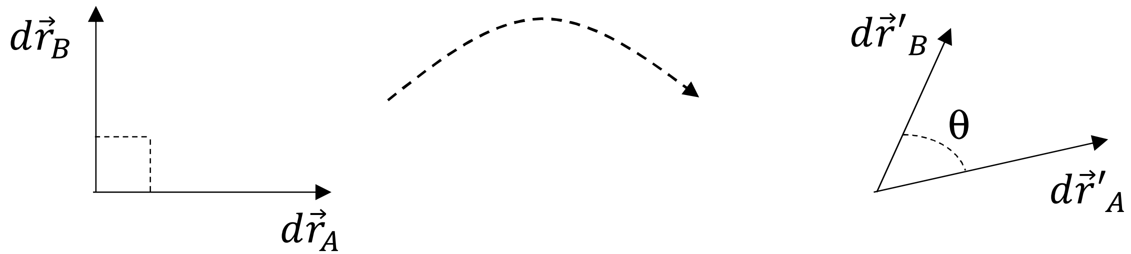
Índices <u>repetidos</u> são mudos e podem tomar quaisquer índices

# Tensor das deformações

- Significado Físico do tensor das deformações.
- Termos não-diagonais ($i \neq j$) do tensor das deformações.
- Vetores inicialmente perpendiculares entre si.

Tensor das deformações

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$




**início** **fim**

$$d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dr_i^A\ dr_j^B + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dr_i^A\ dr_j^B \longrightarrow d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dr_i^A\ dr_j^B$$

$$d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = |d\vec{r}'_A||d\vec{r}'_B| \cos\theta \qquad d\vec{r}'_A \cdot d\vec{r}'_B = 2\varepsilon_{ij}\ dr_i^A\ dr_j^B$$

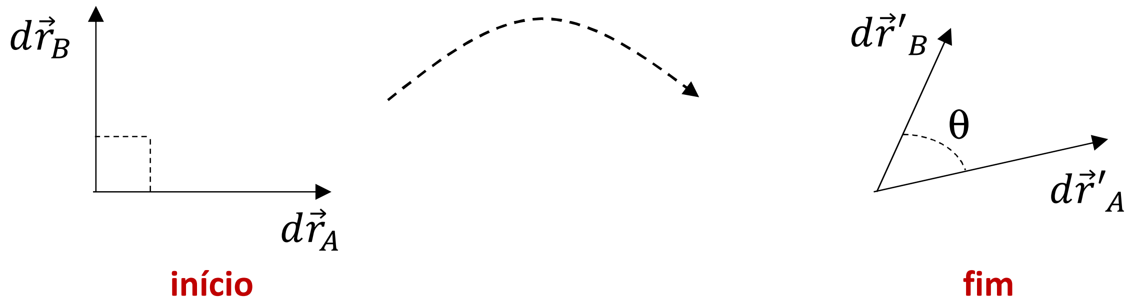
$$\cos\theta = 2\varepsilon_{ij} \frac{dr_i^A}{\underbrace{|d\vec{r}'_A|}_{\approx |d\vec{r}_A|}} \frac{dr_j^B}{\underbrace{|d\vec{r}'_B|}_{\approx |d\vec{r}_B|}} = 2\varepsilon_{ij} \frac{dr_i^A}{|d\vec{r}_A|} \frac{dr_j^B}{|d\vec{r}_B|}$$

# Tensor das deformações

- Significado Físico do tensor das deformações.
- Termos não-diagonais ($i \neq j$) do tensor das deformações.
- Vetores inicialmente perpendiculares entre si.

Tensor das deformações

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$




$$\cos\theta = 2\varepsilon_{ij}\frac{dr_i^A}{|d\vec{r}_A|}\frac{dr_j^B}{|d\vec{r}_B|} = 2\varepsilon_{ij}\hat{n}_i^A\,\hat{n}_i^B$$

onde

$$\hat{n}_i^A = \frac{dr_i^A}{|d\vec{r}_A|}$$

$$\hat{n}_i^B = \frac{dr_j^B}{|d\vec{r}_B|}$$

Vetores unitários das direções de $d\vec{r}_A$ e $d\vec{r}_B$.

$$\cos\theta_{AB} = 2\varepsilon_{ij}\hat{n}_i^A\,\hat{n}_i^B$$

$$\cos\theta_{AB} = \cos(90º - \gamma_{AB}) = sen(\gamma_{AB}) \approx \gamma_{AB}$$

$$\boxed{\gamma_{AB} = 2\varepsilon_{ij}\hat{n}_i^A\,\hat{n}_i^B}$$

$\gamma_{AB}$ em radianos

Angulo complementar ao angulo final entre os vetores

# Tensor das deformações

- Significado Físico do tensor das deformações.
- Termos não-diagonais ($i \neq j$) do tensor das deformações.
- Vetores inicialmente perpendiculares entre si.

Tensor das deformações

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

- **Exemplo**. Para $\vec{n}_A = (1{,}0{,}0)$ (eixo *xx*) e $\vec{n}_B = (0{,}1{,}0)$ (eixo *yy*):

$$\gamma_{12} =$$
$$= 2\varepsilon_{11} \times 1 \times 0 + 2\varepsilon_{12} \times 1 \times 1 + 2\varepsilon_{13} \times 1 \times 0 + 2\varepsilon_{21} \times 0 \times 0 + 2\varepsilon_{22} \times 0 \times 1 + 2\varepsilon_{23} \times 0 \times 0$$
$$+ 2\varepsilon_{31} \times 0 \times 0 + 2\varepsilon_{32} \times 0 \times 1 + 2\varepsilon_{33} \times 0 \times 0 = 2\varepsilon_{12}$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \longrightarrow \boxed{\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}}$$

$$\theta_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}$$

ângulos em radianos

- Termos não-diagonais ($i \neq j$) do tensor das deformações relacionados com ângulos de deformação

Tensor das deformações na forma matricial, com o significado Físico dos seus componentes

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} & \frac{\gamma_{23}}{2} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

# Tensor das deformações

Tensor das distorções

$$\boxed{e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

- Decomposição do tensor das distorções
- É tensor de 2ª ordem
- Pode ser decomposto na soma de um tensor simétrico com um tensor antissimétrico

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = e_{ij} dx_j = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{simétrico} dx_j + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{antissimétrico} dx_j$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

onde

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Simétrico. Deformações.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Antissimétrico. Ângulos de rotação.

- A parte simétrica corresponde ao tensor das deformações.
- A parte antissimétrica envolve rotações de corpo rígido (alteração da direção do vetor de deslocamento $\vec{u}$, mas não do seu módulo).

# Tensor das deformações

- **Equações de compatibilidade (Saint-Venant)**.
- As funções que representam grandezas Físicas têm que ser "bem comportadas", para representarem quantidades observáveis na natureza.
- Por exemplo, as componentes do vetor de deslocamento têm que ser funções contínuas e com um só valor em cada ponto, no interior de meio deformado.

Tensor das deformações

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

- Da mesma forma, as componentes do tensor das deformações têm que ser também contínuas e de valor único no corpo.
- Numa função $g(x_1,x_2,x_3)$ que verifique estas condições, as segundas derivadas cruzadas são iguais. Ou seja, as componentes do vetor deslocamento verificam:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_m} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_k}$$

- Aplicando esta propriedade, obtém-se a condição de compatibilidade para o tensor deformação:

$$\boxed{\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0}$$

Nota: Representa $3^4 = 81$ equações, embora as restrições impostas pelas propriedades de simetria do tensor das deformações reduzam a um número substancialmente menor de equações independentes