

# Introdução à Análise Complexa

Luís V. Pessoa

14 de Setembro de 2009

<sup>1</sup>Não obstante o pensamento constitua parte das acções livres, carece de liberdade necessária às suas acções. O autor dedica o decorrente texto aos indivíduos empenhados na protecção dos Direitos do Homem e das Liberdades Fundamentais.



# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>5</b>
<b>1 Números complexos</b>	<b>7</b>
1.1 Estrutura algébrica . . . . .	7
1.2 Coordenadas polares . . . . .	10
1.3 Radiciação e polinômios . . . . .	14
1.4 Métrica e geometria elementares . . . . .	21
1.5 Transformações lineares-fracionárias . . . . .	27
<b>2 Funções analíticas</b>	<b>35</b>
2.1 Séries numéricas . . . . .	35
2.2 Séries de potências . . . . .	53
2.3 Funções trigonométricas e exponencial . . . . .	61
2.4 Funções inversas . . . . .	65
<b>3 Holomorfia</b>	<b>69</b>
3.1 Funções $\mathbb{C}$ -diferenciáveis . . . . .	69
3.2 Regras de derivação . . . . .	78
3.3 Integrais de linha e função Índice . . . . .	87
3.4 Fórmula de Pompeiu . . . . .	97
3.5 Fórmulas integrais de Cauchy e fórmula de Taylor . . . . .	102
3.6 Funções Harmónicas e o núcleo de Poisson . . . . .	116
<b>4 O teorema dos resíduos</b>	<b>123</b>
4.1 Séries de Laurent e teorema dos resíduos . . . . .	123
4.2 Zeros e singularidades . . . . .	130
4.3 Integrais de variável real. Integrais impróprios . . . . .	135
4.4 Transformada de Laplace . . . . .	142
<b>5 Exemplos de Resoluções e Sugestões</b>	<b>149</b>



# Prefácio

O decorrente documento intenta acrescentar valias de ordem diversa ao seu antecessor “Apontamentos em Análise Complexa”, publicado à data de *1 de Maio de 2008*, tanto honrar o interesse no mencionado documento e demonstrado por *P. Girão*.

14 de Setembro de 2009

A preparação do decorrente texto motivou-se na intenção em fornecer apontamentos de apoio aos alunos da disciplina de Análise Complexa e Equações Diferenciais, inclusa nos diversos planos curriculares dos cursos de licenciatura ou mestrado integrado pós-Bolonha do Instituto Superior Técnico e sobre alçada da responsabilidade do autor. Não obstante, optou-se por exposição de forma a prever aditamentos futuros e tão simplesmente o seu actual conteúdo gravita em torno do conteúdo programático de *análise complexa* da disciplina mencionada. O desenvolvimento de esforços na redacção do actual texto, em grande parte reza-se na inabilidade do autor em encontrar textos de análise complexa elementar abrangendo o conteúdo programático acima referido e com discorrer semelhante ao abaixo, tão bem quanto na profunda crença que mantém nas vantagens científico-pedagógicas em apresentar as funções analíticas enquanto elementos com a regularidade induzida da análise real e no núcleo do operador de derivação em ordem a  $\bar{z}$ . Após uma inércia inicial por parte do aluno, com facilidade entende que as regras de derivação dos operadores  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$ , são em todo análogas às que aprendeu a utilizar na análise real. Habitua-se a lidar com as variáveis  $z$  e  $\bar{z}$ , como variáveis independentes. Assim, a holomorfia apresenta-se ao aluno na forma de independência da variável conjugada.

O autor não assume conhecimentos prévios em séries numéricas ou séries de potências. Assume-se o conhecimento das derivadas das funções trigonométricas e função exponencial de variável real, eventualmente introduzidas por intermédio de integrais indefinidos. Em consequência da definição de exponencial de variável complexa, deduz-se tratar-se de generalização da exponencial de variável real e obtêm-se os desenvolvimentos em série de potências das funções de variável real. Excluindo o desenvolvimento de funções de várias variáveis reais em fórmula ou em série de Taylor, assumem-se conhecidas as técnicas de cálculo diferencial e integral de funções dependentes de variáveis reais e normalmente inclusas nos cursos de cálculo em engenharia.

Os exercícios propostos servem a intenção em facilitar ao leitor, o acompanhamento das diversas matérias. Pretende-se distribuir os diversos problemas em diversos graus de dificuldades de resolução.

Da frase anterior não se deve inferir qualquer algoritmo ou habilidade do autor na seriação dos ditos problemas em distintos graus de dificuldade. Em contrário, confessa inabilidade em com seriedade propor alguma possível seriação, tanto profunda crença de que o reconhecimento do grau de dificuldade de determinado problema constitui *per si* um problema que o leitor deverá assumir, com evidentes vantagens pedagógicas, razoam a ausência de sinalização de quaisquer das possíveis ordenações referidas. Tal como qualquer outro problema, certamente que o anterior revelará distintas soluções e em cada uma encontrar-se-á o prezável cunho pessoal.

A notação utilizada é a normalmente aceite no discorrer dos conteúdos comuns às disciplinas de análise elementar. Cumprem no entanto as seguintes observações. Com frequência considerável utilizamos a simbologia “:=” com objectivos em indicar que em sua utilização procede-se a uma definição, precisamente, define-se o lado esquerdo do sinal “:=” através do respectivo lado direito. Incluímos o número real “zero” no conjunto dos números naturais e que denotamos por  $\mathbb{N}$ , i.e.  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ . Para indicar o conjunto dos naturais superior ou iguais a um dado natural fixo  $j$ , usamos o símbolo  $\mathbb{N}_j$ , i.e.  $\mathbb{N}_j = \{j, j + 1, \dots\}$ . Encontrar-se-ão nas secções seguintes, outros comentários acerca questões de notação e considerados necessários ao discorrer objectivo do texto.

1 de Maio de 2008

# Capítulo 1

## Números complexos

### 1.1 Estrutura algébrica

Identificamos o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , com o conjunto dos pares ordenados de números reais  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , munido com a soma vectorial usual e o produto introduzido abaixo, i.e.  $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ , aonde

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2 \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2) \quad , \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2\end{aligned}\tag{1}$$

O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é identificado, por intermédio da aplicação  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$ , com o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Sem dificuldades, das definições em (1) obtém-se

$$x_1 + x_2 \rightarrow (x_1, 0) + (x_2, 0) \quad \text{e} \quad x_1 x_2 \rightarrow (x_1, 0)(x_2, 0), \quad \text{quaisquer que sejam } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Logo, as tabuadas de multiplicação e adição de números reais deduzem-se, por intermédio da aplicação atrás definida, das tabuadas das operações introduzidas em (1). A **unidade** para o produto de números reais é uma unidade para o produto de números complexos, i.e.

$$1 \cdot (x, y) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}.\tag{2}$$

Os elementos do conjunto  $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ , são designados por números complexos **imaginários puros**. Definindo a unidade imaginária  $i := (0, 1)$ , obtemos  $iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Logo, o conjunto dos imaginários puros é dado por  $i\mathbb{R}$  e os números complexos são representados através de

$$x + iy := (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Se  $z \in \mathbb{C}$ , definimos respectivamente  $\operatorname{Re} z$  e  $\operatorname{Im} z$ , a **parte real** e **imaginária** de  $z$ , como os únicos números reais  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , tais que  $z = x + iy$ . As operações em (1) são reescritas na forma

$$\begin{aligned}zw &= (\operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w) + i(\operatorname{Im} z \operatorname{Re} w + \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w) \\ z + w &= (\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w) + i(\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w)\end{aligned}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Como sabemos do estudo elementar de espaços vectoriais, o conjunto  $\mathbb{C}$  munido com a soma de vectores

em  $\mathbb{R}^2$ , têm a estrutura de **grupo comutativo**, i.e.

$$\begin{aligned}
 \forall_{z_j \in \mathbb{C}, j=1,2,3} \quad (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) && \text{associatividade;} \\
 \forall_{z_j \in \mathbb{C}, j=1,2} \quad z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 && \text{comutatividade;} \\
 \exists_{0 \in \mathbb{C}} \forall_{z \in \mathbb{C}} \quad z + 0 &= z && \text{existência de elemento neutro;} \\
 \forall_{z \in \mathbb{C}} \exists_{w \in \mathbb{C}} \quad z + w &= 0 && \text{existência de simétrico.}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Sem dificuldades, da definição (1) conclui-se

$$\begin{aligned}
 \forall_{z_j \in \mathbb{C}, j=1,2,3} \quad (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) && \text{associatividade;} \\
 \forall_{z_j \in \mathbb{C}, j=1,2} \quad z_1 z_2 &= z_2 z_1 && \text{comutatividade;} \\
 \forall_{z_j \in \mathbb{C}, j=1,2,3} \quad (z_1 + z_2) z_3 &= (z_1 z_3) + (z_2 z_3) && \text{distributividade.}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Considerando o grupo comutativo  $\mathbb{C}$ , munido com a multiplicação por escalares

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \ni (x, z) \rightarrow x.z,$$

definida em (1), obtemos que  $\mathbb{C}$  é um espaço vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão 2 e a multiplicação por escalares em  $\mathbb{C}$  coincide com a multiplicação por escalares induzida de  $\mathbb{R}^2$ . É usual representar os espaços vectoriais bi-dimensionais sobre  $\mathbb{R}$ , por intermédio do conjunto dos pontos do plano, munido com as operações usuais de soma de vectores e multiplicação de vectores por escalares. O referido plano é designado por **plano complexo**.

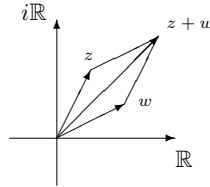


Figura 1.1: Adição de vectores

É portanto legítimo considerar em  $\mathbb{C}$ , a estrutura métrica induzida da norma euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ , i.e. considerar a **distância à origem** de  $z \in \mathbb{C}$ , dada por

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tendo em conta as propriedades (4) e a igualdade

$$i^2 = i.i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

é imediato verificar que

$$(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)(\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z) = (\operatorname{Re} z)^2 - (i \operatorname{Im} z)^2 = |z|^2. \tag{5}$$

O número complexo  $\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ , é designado por **conjugado** de  $z$  e é denotado por  $\bar{z}$ . No plano complexo,  $\bar{z}$  coincide com a reflexão de  $z$  no eixo real e é evidente que  $\bar{\bar{z}} = z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .



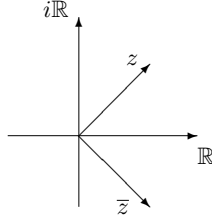


Figura 1.2: Conjugação

Como  $|z|$  é a distância euclidiana do vector  $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$  à origem, então

$$|z| = 0 \quad \text{sse} \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0 \quad \text{sse} \quad z = 0, \quad (6)$$

e tendo em conta (5) segue que

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad \text{e logo} \quad zw = 1, \quad \text{aonde} \quad w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}, z \neq 0.$$

Considerando (2), obtivemos

$$\begin{aligned} \forall_{z \in \mathbb{C}, z \neq 0} \quad z.1 = z & \quad \text{existência de unidade;} \\ \forall_{z \in \mathbb{C}, z \neq 0} \quad \exists_{w \in \mathbb{C}} \quad zw = 1 & \quad \text{existência de inverso.} \end{aligned} \quad (7)$$

Por analogia com a análise real, o inverso multiplicativo dum número complexo  $z$  não nulo é denotado por  $1/z$ . Porque  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  verifica as propriedades (3), (4) e (7), diz-se um **corpo**, usualmente designado por **corpo dos números complexos**.

De seguida resumem-se algumas importantes propriedades da operação de conjugação

$$\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad z\bar{z} = |z|^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

A operação de conjugação é aditiva, i.e.

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

Em relação ao conjugado do produto, é evidente que

$$\overline{xz} = x\bar{z}, \quad x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \overline{iz} = -i \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = -i\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

e, porque o conjugado da soma é a soma dos conjugados, obtém-se

$$\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Da equação anterior infere-se

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

e logo

$$|zw| = |z||w| \quad \text{e} \quad |\bar{z}| = |z|. \quad (8)$$

## 1.1 Problemas

1. Considere números complexos  $z, w \in \mathbb{C}$  nas condições indicadas e demonstre as seguintes igualdades

- |  |  |
|--|--|
| i) $\operatorname{Re}(xz) = x \operatorname{Re} z \quad (x \in \mathbb{R})$ ;  | ii) $\operatorname{Im}(xz) = x \operatorname{Im} z \quad (x \in \mathbb{R})$ ;                             |
| iii) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im}(iz)$ ;   | iv) $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{i}\right)$ ;                                    |
| v) $2z \operatorname{Re} z =  z ^2 + z^2$ ;  | vi) $i 2z \operatorname{Im} z = z^2 -  z ^2$ ;   |
| vii) $\operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1- z ^2}{ z-1 ^2}$ ;   | viii) $\operatorname{Im} \frac{1+z}{1-z} = 2 \frac{\operatorname{Im} z}{ z-1 ^2}$ ;                        |
| ix) $\operatorname{Im} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{ad-bc}{ cz+d ^2} \operatorname{Im} z \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ ; | x) $\operatorname{Im} \frac{z+1}{\bar{z}-1} = 2 \frac{\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z}{ z-1 ^2}$ ; |
| xi) $ z-w ^2 =  z ^2 +  w ^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$ ;  | xii) $2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w = \operatorname{Re}(z\bar{w}) - \operatorname{Re}(zw)$ ;   |
| xiii) $2 \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w = \operatorname{Re}(z\bar{w}) + \operatorname{Re}(zw)$ ;                  | xiv) $2 \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}(zw) + \operatorname{Im}(\bar{z}w)$ ;   |
| xv) $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}w)$ .   |  |

2. Verifique a seguinte igualdade

$$i^n = \frac{1+(-1)^n}{2} (-1)^{\frac{n}{2}} + i \frac{1-(-1)^n}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Considere números complexos  $z, w$  e estabeleça uma prova das seguintes desigualdades:

- |  |   |
|--|---|
| i) $  z  -  w   \leq  z - w $ ;                | ii) $ \operatorname{Re} z  \leq  z  \leq  \operatorname{Re} z  +  \operatorname{Im} z $ ; |
| iii) $ z - w ^2 \leq (1 +  z ^2)(1 +  w ^2)$ ; | iv) $2 \operatorname{Im} z  \leq  1 - z^2 $ ;   |
| v) $2 \operatorname{Re} z  \leq  1 + z^2 $ ;   | vi) $2 z  \leq  1 + z^2  +  1 - z^2 $ .   |

## 1.2 Coordenadas polares

Se  $z$  é um número complexo no círculo unitário, então existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ . Definimos

$$E(i\theta) := \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Das seguintes fórmulas para funções trigonométricas de variável real

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \varphi) &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \\ \sin(\theta + \varphi) &= \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi \end{aligned}, \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R},$$

obtem-se

$$\begin{aligned} E(i\theta) E(i\varphi) &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) \\ &= \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) = E(i(\theta + \varphi)), \end{aligned}$$

i.e.

$$E(i\theta) E(i\varphi) = E(i(\theta + \varphi)), \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Em particular,  $E(ik\theta) = E(i(k-1)\theta) E(i\theta)$ ,  $k \in \mathbb{N}_1$ . Por indução matemática infere-se que

$$E(ik\theta) = E^k(i\theta), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Tendo em linha de conta a identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{i.e.} \quad |E(i\theta)| = 1, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

obtém-se

$$\overline{E(i\theta)} = E^{-1}(i\theta) = E(-i\theta). \quad (3)$$

Segue que (2) é válido para  $k \in \mathbb{Z}$ , i.e. são válidas as **fórmulas de Moivre**

$$E(ik\theta) = E^k(i\theta), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

A função polivalente

$$\text{Arg } z := \{\theta \in \mathbb{R} : E(i\theta) = z/|z|\}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

diz-se a **função argumento**. De (1) e (3) inferem-se sem dificuldades as seguintes propriedades

$$\text{Arg}(zw) = \text{Arg } z + \text{Arg } w, \quad \text{Arg } \frac{1}{z} = -\text{Arg } z, \quad \text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z, \quad z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Da igualdade (1) e de  $|E(i\theta)| = 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  segue que

$$|E(i\theta) - E(i\varphi)| = \left| E\left(i\frac{\theta+\varphi}{2}\right) \left( E\left(i\frac{\theta-\varphi}{2}\right) - E\left(i\frac{\varphi-\theta}{2}\right) \right) \right| = 2 \left| \sin \frac{\theta-\varphi}{2} \right|.$$

Como  $\sin(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  sse  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  então da igualdade anterior deduz-se que as funções trigonométricas de variável real são periódicas de período  $2\pi$  (facto bem conhecido) e que a função  $\theta \rightarrow E(i\theta)$  é injectiva em qualquer intervalo semi-aberto de comprimento inferior ou igual a  $2\pi$ . Se  $\theta, \varphi \in \text{Arg } z$ ,  $z \neq 0$  então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\theta - \varphi = 2k\pi$ . Para qualquer  $\theta \in \text{Arg } z$  obtém-se

$$\text{Arg } z = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Conclui-se que a função **argumento principal**

$$\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow ]-\pi, \pi], \quad \arg z = \theta \quad \text{se} \quad \text{Arg } z \cap ]-\pi, \pi] = \{\theta\},$$

está bem definida e verifica o seguinte

$$\text{Arg } z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad z \neq 0.$$

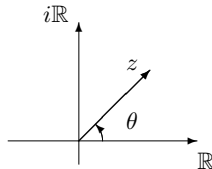


Figura 1.3: Representação polar

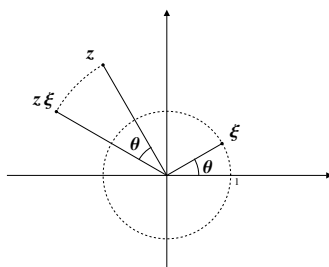


Figura 1.4: *Multiplicação por números complexos unitários*

Cada número complexo não nulo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , tem uma representação polar única, i.e. existem únicos  $r > 0$  e  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  tais que  $z = r E(i\theta)$ , precisamente  $r = |z|$  e  $\theta = \arg z$ . Diz-se que o par ordenado  $(r, \theta)$  são as **coordenadas polares** do número complexo  $z$ . Anotamos a arbitrariedade da escolha do intervalo  $]-\pi, \pi]$ , para definir a função argumento principal e que qualquer outro intervalo de  $\mathbb{R}$  semi-aberto de comprimentos  $2\pi$  serviria à boa definição do argumento principal tanto à unicidade da respectiva representação polar.

As coordenadas polares permitem com facilidade estabelecer uma interpretação geométrica da multiplicação de números complexos. De facto, a multiplicação do número complexo  $z$ , por determinado complexo unitário  $\xi$ , corresponde no plano complexo, à rotação de ângulo  $\arg \xi$ , do vector correspondente ao número complexo  $z$ .

## 1.2 Problemas

1. Considere  $z \in \mathbb{C}$  e  $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ . Verifique as seguintes igualdades:

- i)  $[E(-i\theta) - E(i\theta)]^2 = -|1 - E(i2\theta)|^2$ ;      ii)  $[E(-i\theta) + E(i\theta)]^2 = |1 + E(i2\theta)|^2$ ;
- iii)  $1 + E(i2\theta) = 2 \cos(\theta) E(i\theta)$ ;      iv)  $|1 - E(i2\theta)|^2 = 4 \sin^2(\theta)$ ;
- v)  $E(i\theta) + E(i\varphi) = 2 \cos(\frac{\varphi - \theta}{2}) E(i\frac{\theta + \varphi}{2})$ ;      vi)  $|z - E(i\theta)| = |1 - \bar{z} E(i\theta)|$ .

2. Mostre a seguinte desigualdade

$$\frac{|1 - E(i\theta)|}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}, \quad \theta \in ]0, \pi].$$

Forneça uma interpretação geométrica no plano complexo.

**Sugestão:** Note que a asserção é equivalente a

$$\sin \frac{\theta}{2} \geq \frac{\theta}{\pi}, \quad 0 < \theta \leq \pi,$$

e em seguida estude o sinal de  $f'(\theta)$  aonde  $f(\theta) = \sin(\theta/2) - (\theta/\pi)$ ,  $0 < \theta \leq \pi$ .

3. Tendo em linha de conta que

$$1 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}, \quad z \neq 1, \quad n \in \mathbb{N}_1$$

demonstre as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} i) \quad \sum_{j=0}^n \frac{E(-ij\theta)}{1 - E(i\theta)} + \sum_{j=0}^n \frac{E(ij\theta)}{1 - E(-i\theta)} &= \left[ \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right]^2 ; \\ ii) \quad \sum_{j=-n}^n \frac{E(-ij\theta)}{1 - E(i\theta)} + \sum_{j=-n}^n \frac{E(ij\theta)}{1 - E(-i\theta)} &= \frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} ; \end{aligned}$$

para  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $\theta \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4. Considere as fórmulas de Moivre para demonstrar as seguintes asserções:

- i)  $\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots$   
 ii)  $\sin n\theta = n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots$

5. Dados quaisquer  $n, j \in \mathbb{Z}$  escreva os seguintes números complexos na forma  $x + iy$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} i) (1-i)^3; \quad ii) (1-i)^3(1+i)^2; \quad iii) \frac{1}{(1-i)^2}; \quad iv) \frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}; \\ v) \frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^{11}}; \quad vi) \frac{(1+i)^{n+2j}}{(1-i)^n}; \quad vii) i^n + (-1)^{n+1}i^n; \quad viii) i^n + (-1)^ni^n. \end{aligned}$$

6. Determine os argumentos principais e uma forma polar dos seguintes números complexos:

$$\begin{aligned} i) \sqrt{3} + i; \quad ii) (1+i)^2; \quad iii) (\sqrt{3}+i)^2(1+i); \\ iv) \left(\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}\right)^5; \quad v) (\sqrt{3}+i)^{17}; \quad vi) (1+i)^{12}; \\ vii) (1+i)^{13}; \quad viii) (2-i\sqrt{12})^{31}; \quad ix) -(2i+\sqrt{12})^{31}; \\ x) (i\sqrt{3}-1)^{17}(2-i\sqrt{12})^{31}; \quad xi) \frac{(1+i)^{13}}{(i-1)^{12}}; \quad xii) \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12} (\sqrt{3}+i)^5. \end{aligned}$$

7. Seja  $z = |z|E(i\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  e suponha  $\theta/\pi = p/d$ , aonde  $p, d \in \mathbb{N}_1$  são primos entre si. Se  $q$  e  $r$  são respectivamente o cociente e o resto da divisão de  $p$  por  $d$  i.e.  $p = qd + r$  com  $q, r \in \mathbb{N}$  e  $r = 0, \dots, d-1$  então

$$\arg z = \pi \frac{r}{d} - (1 - (-1)^q) \frac{\pi}{2}, z \neq 0.$$

8.

i) Verifique as seguintes igualdades entre conjuntos

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w, \quad \operatorname{Arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z \quad (z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

ii) Encontre exemplos de números complexos  $z$  e  $w$  tais que

$$\arg(zw) \neq \arg z + \arg w, \quad \arg \frac{1}{z} \neq -\arg z, \quad \arg \bar{z} \neq -\arg z \quad (z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

9. Considere a função sinal  $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$  definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}.$$

Verifique a validade da seguinte igualdade

$$\arg(xz) = \arg z - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\arg z)(1 - \operatorname{sgn} x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+.$$

Finalmente mostre que

$$\arg \bar{z} \neq -\arg z \quad \text{sse} \quad \arg \frac{1}{z} \neq -\arg z \quad \text{sse} \quad z \in \mathbb{R}^-.$$

10. Seja  $\arctan x$  a inversa da restrição da função  $\tan x$  ao intervalo  $] -\pi/2, \pi/2[$ . Verifique que

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{sgn} x) \operatorname{sgn} y, \quad \text{para } z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \quad \text{e } x \neq 0, y \neq 0.$$

### 1.3 Radiciação e polinómios

Inicia-se a secção com o estudo da operação de radiciação, i.e. fixos  $n \in \mathbb{N}_2$  e  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  estudam-se as soluções da equação

$$z^n - w = 0.$$

Tendo em linha de conta as **fórmulas de Moivre**, as representações polares  $z = r E(i\theta)$ ,  $r > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $w = \rho E(i\varphi)$ ,  $\rho > 0$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  obtemos que

$$r^n E(in\theta) = \rho E(i\varphi) \quad \text{é equivalente a} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Em (1) obtivemos, indexadas em  $\mathbb{Z}$ , as **raízes de ordem  $n$**  de  $w$ , precisamente as raízes de ordem  $n \in \mathbb{N}_2$  de  $w = \rho E(i\varphi)$ , são dados por

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} E(i\theta_k), \quad \text{aonde } \theta_k = \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \quad \text{e } k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

De seguida afixa-se a existência de precisamente  $n$  raízes distintas. Da igualdade

$$z_{k+n} = \sqrt[n]{\rho} E(i\theta_{k+n}) = z_k E(i2\pi) = z_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

obtém-se que a sucessão bilateral  $z_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  é **periódica de período  $n$** , i.e.  $z_{k+n} = z_k$ , para qualquer que seja  $k \in \mathbb{Z}$ . Embora de carácter elementar, demonstra-se abaixo que o conjunto dos termos de qualquer sucessão bilateral  $z_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  periódica com período  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é um conjunto finito com no máximo  $n$  elementos.

**Lema 1** *Seja  $z_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  uma sucessão bilateral com período  $n$ . O conjunto dos seus termos verifica*

$$\{z_k : k \in \mathbb{Z}\} = \{z_l, z_{l+1}, \dots, z_{l+n-1}\}, \quad \text{para qualquer que seja } l \in \mathbb{Z}.$$

**Demonstração:** Para  $k \in \mathbb{Z}$  e  $m \in \mathbb{N}_1$ , é sucessivamente evidente que

$$z_{k+mn} = z_{k+(m-1)n} = \dots = z_k \quad \text{e} \quad z_{k-mn} = z_{(k-mn)+mn} = z_k.$$

Com objectivo em aplicar o algoritmo de divisão exclusivamente aos números naturais, consideramos separadamente os casos  $k \geq 0$  e  $k < 0$ , para demonstrar que para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ , o termo  $z_k$  coincide com algum dos números  $z_0, \dots, z_{n-1}$ . Se  $k \in \mathbb{N}$  é tal que  $k \geq n$ , então existem naturais  $m \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq j < n$ , tais que  $k = mn + j$ . Logo  $z_k = z_{mn+j} = z_j$ , aonde  $j \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq j < n$ . Se  $-k \in \mathbb{N}_1$  então  $-k = mn + j = (m+1)n + (j-n)$ , para determinados naturais  $m$  e  $0 \leq j < n$ . Conclui-se que  $z_k = z_{-(m+1)n+(n-j)} = z_{n-j}$  e  $0 < n-j \leq n$ . Se  $j = 0$  então  $z_k = z_n = z_0$ . Em quaisquer dos casos  $z_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  coincide com algum dos números  $z_0, \dots, z_{n-1}$ . De novo considerando a periodicidade da sucessão  $z_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  infere-se que o conjunto dos seus termos coincide com o conjunto de quaisquer  $n$  termos consecutivos. ■

Se  $z_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  é a sucessão bilateral das raízes de ordem  $n$  de  $w$ , dada por (2), então verifica-se que

$$\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} \quad \text{e} \quad \theta_{n-1} - \theta_0 < 2\pi.$$

Tendo em conta a injectividade, em qualquer intervalo semi-aberto de comprimento  $2\pi$ , da função  $\theta \rightarrow E(i\theta)$ , infere-se que a sucessão bilateral periódica  $z_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  possui  $n$  termos consecutivos distintos. Logo, do Lema 1 deduz-se que o conjunto das raízes de ordem  $n$  de  $w$  é um conjunto finito com exactamente  $n$  elementos, e que pode ser enumerado variando o índice  $k$  em (2), num conjunto arbitrário de  $n$  inteiros consecutivos. Escolhendo os  $n$  primeiros naturais, as raízes de ordem  $n \in \mathbb{N}_2$  são representadas por

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} E(i\theta_k), \quad \text{aonde} \quad \theta_k = \frac{\arg w}{n} + k \frac{2\pi}{n} \quad \text{e} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Adiante tornar-se-á evidente que um polinómio de grau  $n$  têm no máximo  $n$  zeros.

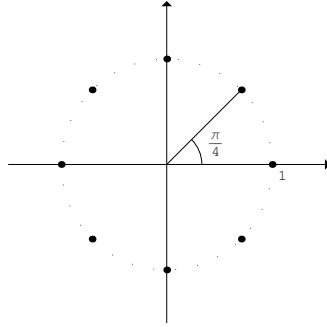


Figura 1.5: Raízes oitavas da unidade

Um **polinómio** na variável  $z$  é uma combinação linear finita de potências de  $z$ , i.e.  $p(z)$  diz-se um polinómio, se existe  $n \in \mathbb{N}$  e coeficientes  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 0, \dots, n$  tais que

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

Se  $a_n \neq 0$ , então  $p(z)$  diz-se um polinómio de **grau**  $n$ , e o número natural  $n$  diz-se o grau de  $p(z)$ .

Os polinómios identificam-se com funções complexas de variável complexa, usualmente designados por funções polinomiais. Desta forma, no conjunto dos polinómios encontram-se definidas as operações de soma e multiplicação por escalares. Tais operações estabelecem uma estrutura de espaço vectorial no conjunto de todos os polinómios. Por igual, sabemos que a multiplicação de polinómios é um polinómio. Abandona-se ao cuidado do leitor, a verificação de que o grau do polinómio soma é inferior ou igual ao maior dos graus das respectivas parcelas aditivas, tanto quanto o grau do polinómio produto iguala a soma dos graus dos polinómios factores.

Dois polinómios  $p(z)$  e  $q(z)$  são idênticos, se para qualquer que seja o número complexo  $z$ , verifica-se

$p(z) = q(z)$ . De seguida demonstramos que  $p(z) = q(z)$  sse os polinómios têm o mesmo grau e os coeficientes das respectivas potências de  $z$  são idênticos, asserção usualmente designada por **princípio de identidade entre polinómios**.

**Proposição 2 (Identidade entre polinómios)** *Considerem-se polinómios  $p(z)$  e  $q(z)$ , respectivamente dados por*

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \quad e \quad q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k, \quad b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C},$$

onde  $n, m \in \mathbb{N}$  e  $a_n, b_m \neq 0$ . Então  $p(z) = q(z)$  sse  $n = m$  e  $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ .

**Demonstração:** Mostramos por indução na variável  $n + m$ , que  $n = m$  e  $a_n = b_n, \dots, a_0 = b_0$ . Se  $n + m = 0$  então  $p(z)$  e  $q(z)$  são polinómios constantes e a asserção é evidente. Supomos como hipótese de indução que se dois polinómios  $c(z)$  e  $d(z)$  verificam  $c(z) = d(z)$ , e a soma dos seus graus é inferior ou igual a  $n + m - 1$  então os graus e os respectivos coeficientes de  $c(z)$  e  $d(z)$  coincidem. Porque  $p(0) = q(0)$  então  $a_0 = b_0$  e consequentemente

$$z(a_n z^{n-1} + \dots + a_1) = z(b_m z^{m-1} + \dots + b_1).$$

Logo  $a_n z^{n-1} + \dots + a_1 = b_m z^{m-1} + \dots + b_1$  e por hipótese de indução  $n-1 = m-1$  e  $a_n = b_n, \dots, a_1 = b_1$ . ■

## Exemplos

1. Para qualquer que seja o número natural  $n$  deduz-se do binómio de Newton o seguinte

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k.$$

Em consequência

$$p(z) := (1+z)^{2n} = (1+z)^n (1+z)^n = \sum_{k,j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} z^{k+j}.$$

O coeficiente da potência  $z^n$  no polinómio  $p(z)$  é dado por

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

De novo o binómio de Newton permite deduzir o seguinte

$$p(z) = (1+z)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k. \quad (3)$$

Considerando (3) infere-se que o coeficiente da potência  $z^n$  no polinómio  $p(z)$  é dado por  $\binom{2n}{n}$ . Do princípio de identidade dos polinómios deduz-se a seguinte igualdade não evidente

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$



□

De seguida estabelece-se a possibilidade da divisão entre polinómios. O leitor deverá atentar a que a demonstração contém um algoritmo de cálculo dos polinómios **cociente** e **resto**.

**Proposição 3 (Divisão de polinómios)** *Sejam  $p(z)$  e  $d(z)$  polinómios, aonde  $d(z)$  é não constante. Existem únicos polinómios  $q(z)$  e  $r(z)$ , tais que  $r(z)$  tem grau estritamente inferior ao grau de  $d(z)$  e*

$$p(z) = q(z)d(z) + r(z).$$

**Demonstração:** Iniciamos mostrando a unicidade dos polinómios cociente e resto. Suponha-se

$$p(z) = q_1(z)d(z) + r_1(z) = q_2(z)d(z) + r_2(z),$$

aonde  $r_1(z)$  e  $r_2(z)$  são polinómios de grau estritamente inferior ao grau de  $d(z)$ . Então

$$r_1(z) - r_2(z) = (q_2(z) - q_1(z))d(z). \quad (4)$$

Se  $q_1 \neq q_2$ , infere-se de (4) que  $r_1(z) - r_2(z)$  é polinómio de grau superior ou igual ao grau de  $d(z)$ , o que é contraditório com as hipóteses. Então  $q_2(z) - q_1(z)$  é o polinómio nulo e em consequência  $r_1(z) = r_2(z)$ , como queríamos demonstrar.

Se o grau de  $d(z)$  é superior ao grau de  $p(z)$  então considere-se  $q(z) = 0$  e  $r(z) = p(z)$ . Logo, sem perda de generalidade supomos

$$p(z) = a_m z^m + \cdots + a_0 \quad \text{e} \quad d(z) = b_n z^n + \cdots + b_0, \quad a_m \neq 0 \neq b_n, \quad m \geq n,$$

e procedemos por indução matemática no grau do polinómio  $p(z)$ . O polinómio

$$p_1(z) = p(z) - \frac{a_m}{b_n} z^{m-n} d(z) = (a_{m-1} - \frac{a_m b_{n-1}}{b_n}) z^{m-1} + \cdots$$

é bem definido e tem grau inferior a  $m$ . Por hipótese de indução existem polinómios  $q_1(z)$  e  $r_1(z)$  tais que

$$p_1(z) = q_1(z)d(z) + r_1(z),$$

e  $r_1(z)$  têm grau inferior ao grau de  $d(z)$ . Logo

$$p(z) = (q_1(z) + \frac{a_m}{b_n} z^{m-n})d(z) + r_1(z).$$

Terminamos a prova anotando a evidência da asserção para o caso em que  $p(z)$  é polinómio de grau 1.

■

Os polinómios  $q(z)$  e  $r(z)$  no enunciado da proposição anterior, dizem-se respectivamente os polinómios **cociente** e **resto** da divisão de  $p(z)$  por  $d(z)$ .

## Exemplos

2. Consideramos a divisão do polinómio  $p(z) = z^4 - 1$  por  $d(z) = z^2 - i$ . É evidente que

$$p(z) = (z^2 + i)(z^2 - i) - 2.$$

Logo  $q(z) = z^2 + i$  e  $r(z) = -2$  são respectivamente o cociente e o resto da divisão de  $p(z)$  por  $d(z)$ . No entanto, exemplificamos de seguida como o algoritmo apresentado na demonstração da proposição anterior, pode ser utilizado para calcular  $q(z)$  e  $r(z)$ . Esquemáticamente obtemos

$$\begin{array}{r}
 z^4 - 1 \quad | \quad z^2 - i \\
 \hline
 -(z^4 - iz^2) \quad \quad z^2 \\
 \hline
 iz^2 - 1
 \end{array}
 \quad \text{e finalmente} \quad
 \begin{array}{r}
 z^4 - 1 \quad | \quad z^2 - i \\
 \hline
 -(z^4 - iz^2) \quad \quad z^2 + i \\
 \hline
 iz^2 - 1 \\
 \hline
 -(iz^2 + 1) \\
 \hline
 -2
 \end{array}$$

□

Se  $p(z)$  é polinómio não constante, então qualquer que seja  $z_1 \in \mathbb{C}$  tem-se

$$p(z) = (z - z_1)p_1(z) + r, \quad \text{aonde } r = p(z_1) \text{ é polinómio constante.}$$

Conclui-se que  $p(z_1) = 0$  sse o polinómio  $p$  factoriza-se na forma  $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ . O número complexo  $z_1$  diz-se um **zero do polinómio**  $p(z)$  com multiplicidade  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}_1$  se

$$p(z) = (z - z_1)^m q(z), \quad \text{aonde } q(z) \text{ é polinómio e } q(z_1) \neq 0.$$

Do princípio de identidade entre polinómios, deduz-se que um polinómio de grau  $n$  têm no máximo  $n$  zeros, contados de acordo com a sua multiplicidade. Defronte demonstraremos o **teorema fundamental da álgebra** (ver corolário [5 sec. 4.1]), de acordo com o qual todo o polinómio não constante admite um zero. Repetindo o argumento para o polinómio  $p_1$  e assim sucessivamente, conclui-se que o teorema fundamental da álgebra é equivalente à existência de números complexos  $z_1, \dots, z_k$  distintos dois a dois e naturais  $n_1, \dots, n_k$  tais que  $n_1 + \dots + n_k = n$  e

$$p(z) = c(z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_k)^{n_k}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

aonde  $n$  é o grau do polinómio não nulo  $p$  e o natural  $n_j$  é a multiplicidade do zero  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . É usual enunciar o teorema fundamental da álgebra dizendo que todo o polinómio de grau  $n \in \mathbb{N}_1$ , tem  $n$  zeros contados de acordo com sua multiplicidade.

Um polinómio com coeficientes complexos  $p(z)$ , diz-se **redutível** se é factorizado no produto de polinómios não constantes, i.e. se existem polinómios não constantes, com coeficientes complexos  $q_1(z)$ ,  $q_2(z)$  tais que  $p(z) = q_1(z)q_2(z)$ . Se  $p(z)$  não é redutível então diz-se **irredutível**. Do teorema fundamental álgebra é evidente que os polinómios irredutíveis são precisamente os polinómios de grau inferior ou igual à unidade. Em analogia, introduzimos o conceito de redutibilidade nos polinómios com coeficientes reais. Um polinómio com coeficientes reais diz-se **irredutível sobre  $\mathbb{R}$**  se não é factorizado em polinómios não constantes com coeficientes reais, i.e.  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ ,  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, \dots, n$  é irredutível sobre  $\mathbb{R}$  se não existem polinómios não constantes com coeficientes reais  $q_1, q_2$  tais que  $p(z) = q_1(z)q_2(z)$ . Mostra-se de seguida que o teorema fundamental da álgebra permitir classificar os polinómios com coeficientes reais e irredutíveis sobre  $\mathbb{R}$ .

Suponha-se que  $p(z)$  é polinómio de coeficientes reais e  $p(z_1) = 0$ ,  $z_1 \in \mathbb{C}$ . Das igualdades

$$0 = \overline{p}(z_1) = \sum_{k=0}^n a_k \overline{z_1}^k = p(\overline{z_1}),$$

conclui-se que o conjunto dos seus zeros é invariante para conjugação, i.e.  $p(z_1) = 0$  sse  $p(\overline{z_1}) = 0$ . Logo, se  $p(z_1) = 0$ ,  $z_1 = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  obtém-se

$$p(z) = (z - z_1)(z - \overline{z_1})q(z) = (z^2 - 2az + a^2 + b^2)q(z) = [(z - a)^2 + b^2]q(z).$$

Como  $q(z)$  é polinómio com coeficientes reais, aplique-se o mesmo procedimento a  $q(z)$ , e assim sucessivamente. Obtém-se a existência de reais  $a_j, b_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  ( $b_j \neq 0$ ) e naturais  $n_1, \dots, n_k$  tais que

$$p(z) = [(z - a_1)^2 + b_1^2]^{n_1} \cdots [(z - a_k)^2 + b_k^2]^{n_k} q_0(z), \quad (5)$$

aonde  $q_0(z)$  é um polinómio só com zeros reais. Em particular, se  $p(z)$  é polinómio de grau  $n$  com coeficientes reais e sem zeros reais então

$$p(z) = [(z - a_1)^2 + b_1^2]^{n_1} \cdots [(z - a_k)^2 + b_k^2]^{n_k}.$$

De (5), é imediato que os polinómios com coeficientes reais e irredutíveis sobre  $\mathbb{R}$ , são os polinómios afins com coeficientes reais e os polinómios do segundo grau da forma

$$(z - a)^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{aonde} \quad b \neq 0.$$

Tanto quanto de (5) infere-se que qualquer polinómio de coeficientes reais não constante, é o produto de potências naturais de polinómios irredutíveis sobre  $\mathbb{R}$ , i.e. se  $p(z)$  é polinómio de coeficientes reais então existem  $a_1, \dots, a_k$ ,  $b_1, \dots, b_k$  e números reais  $x_1, \dots, x_j$  tais que

$$p(z) = c [(z - a_1)^2 + b_1^2]^{n_1} \cdots [(z - a_k)^2 + b_k^2]^{n_k} (x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_j)^{m_j},$$

aonde  $k, j \in \mathbb{N}$ ,  $c \in \mathbb{C}$  e  $b_1 \neq 0, \dots, b_k \neq 0$ .

### 1.3 Problemas

1. Encontre as soluções das seguintes equações e represente-as no plano complexo:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad z^3 &= -i; & \text{ii)} \quad z^4 &= -16; & \text{iii)} \quad z^2 &= 2 + i\sqrt{12}; \\ \text{iv)} \quad 2z^4 &= \sqrt{3}i - 1; & \text{v)} \quad z^4 - (9 + 4i)z^2 + 36i &= 0; & \text{vi)} \quad 1 + iz - z^2 - iz^3 &= 0; \\ \text{vii)} \quad z^6 + iz^3 + 2 &= 0; & \text{viii)} \quad \overline{z}^2 + z^2 - 2\overline{z} + 1 &= 0; & \text{ix)} \quad z^3 \overline{z}^2 - 5z^2 \overline{z} + 6z &= 0. \end{aligned}$$

2. Diz-se que um número complexo  $\xi$  é uma raiz de ordem  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}_1$ ) da unidade se  $\xi^n = 1$ . Denote o conjunto das raízes de ordem  $n$  da unidade por  $\mathbb{T}_n$ , i.e

$$\mathbb{T}_n := \left\{ E\left(ik \frac{2\pi}{n}\right) : k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Verifique que fixo  $w \in \mathbb{C}$ , ( $w \neq 0$ ), o conjunto das raízes de ordem  $n$  de  $w$  é dado por  $\sqrt[n]{|w|} E(i \arg w/n) \mathbb{T}_n$ , i.e. o conjunto das raízes de ordem  $n$  de  $w$  coincide com a dilatação de razão  $\sqrt[n]{|w|}$  da rotação de ângulo  $\arg w/n$  do conjunto  $\mathbb{T}_n$ .

3. Mostre que o polinómio  $1 + z + \cdots + z^n$  não têm raízes reais, caso  $n$  seja par, e  $z = -1$  é a única raiz real (com multiplicidade 1) se  $n$  é ímpar. Ademais, é válida a seguinte factorização

$$1 + z + \cdots + z^n = \left( z^2 - 2z \cos \left( \frac{2\pi}{n+1} \right) + 1 \right) \left( z^2 - 2z \cos \left( 2 \frac{2\pi}{n+1} \right) + 1 \right) \cdots \left( z^2 - 2z \cos \left( n \frac{2\pi}{n+1} \right) + 1 \right).$$

4. Encontre os factores irredutíveis sobre  $\mathbb{R}$  dos seguintes polinómios:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} z^3 - 3z^2 + 4z - 2; & \text{ii)} 4z^4 - 2z^2 - 6; & \text{iii)} 4z^4 + 6z^2 + 3; \\ \text{iv)} z^4 + 16; & \text{v)} z^8 - 1; & \text{vi)} 1 - z^2 + z^4 - z^6. \end{array}$$

5. Considere um polinómio  $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$  de grau  $n \in \mathbb{N}_1$ , com coeficientes complexos tais que  $a_{n-k} = \bar{a}_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Mostre que  $p(0) \neq 0$  e  $\bar{p}(z) = \bar{z}^n p(\frac{1}{\bar{z}})$ . Em particular,  $p(z) = 0$  sse  $p(\frac{1}{\bar{z}}) = 0$ .

6. A função racional  $i \left[ (z-i)^{-k} - (z+i)^{-k} \right]$ ,  $k \in \mathbb{N}_1$  é o cociente de polinómios com coeficientes reais.

7. Em seguida pretende-se indicar procedimento para determinar as soluções de equações polinomiais cúbicas

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0. \quad (6)$$

- i) Faça  $z = w - a_2/3$  e determine coeficientes complexos  $b_1$  e  $b_0$  tais que (6) é equivalente à equação

$$w^3 + b_1 w + b_0 = 0. \quad (7)$$

- ii) Considere a transformação de *Vieta*  $w = \xi - b_1/(3\xi)$  para determinar coeficientes complexos  $c_1$  e  $c_0$  tais as soluções de (7) são soluções de

$$\xi^6 + c_1 \xi^3 + c_0 = 0. \quad (8)$$

- iii) Observe que (8) é uma equação quadrática na variável  $\xi^3$  e aplique a bem conhecida «fórmula resolvente» para determinar as suas soluções.

8. Indicar-se-á de seguida procedimento para determinar as soluções de equações polinomiais de ordem quatro

$$z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0. \quad (9)$$

Algoritmos para calcular as soluções de equações polinomiais de ordem inferior ou igual a quatro eram conhecidas no século XVI e por *Scipio del Ferro* e *Ferrari*.

- i) Aplique a mudança de variável  $z = w - a_3/4$  e verifique que (9) equivale à seguinte equação

$$w^4 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0 = 0. \quad (10)$$

- ii) Verifique que para arbitrários números complexos  $\lambda$  a equação (10) equivale à seguinte

$$\left[ w^4 + \lambda w^2 + \frac{\lambda^2}{4} \right] - \left[ (\lambda - b_2) w^2 + b_1 w + \left( \frac{\lambda^2}{4} - b_0 \right) \right] = 0. \quad (11)$$

- iii) Verifique que se  $u$  é solução da equação polinomial cúbica  $(\lambda^2 - 4b_0)(\lambda - b_2) = b_1^2$  então (11) equivale a

$$\left( w^2 + \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \left( w + \frac{\nu}{2} \right)^2 \quad \text{aonde} \quad \nu = \frac{b_1}{\lambda - b_2}. \quad (12)$$

- iv) Resolva (12) para encontrar as soluções de (10).

## 1.4 Métrica e geometria elementares

A identificação natural das estruturas vectoriais de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$ , permite introduzir a métrica induzida da distância euclidiana no corpo dos números complexos. Se  $\|(x, y)\|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  denota a norma euclidiana do vector  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ , então considera-se a única definição de módulo  $|z|$ , tal que a aplicação

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow x + iy \in \mathbb{C}$$

é linear e isométrica. Necessariamente, tem-se que

$$|z| := \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A distância entre complexos arbitrários  $\mathbb{C} \ni z = x + iy \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C} \ni w = u + iv \equiv (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , é definida como sendo a distância do complexo  $z - w$  à origem, i.e.

$$|z - w| := \|(x, y) - (u, v)\| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Em consequência, deduz-se da teoria elementar dos espaços normados de dimensão finita, subentendida de entre os domínios de conhecimento do leitor, que

- i)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  ,  $z, w \in \mathbb{C}$  ;
- ii)  $|xz| = |x||z|$  ,  $z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$  ;
- iii)  $|z| = 0$  sse  $z = 0$  ,  $z \in \mathbb{C}$  .

No entanto, incitando ao desenvolvimento de técnicas de análise complexa, apresentamos de seguida argumentos distintos dos usuais em espaços de dimensão finita. A propriedade ii) é uma caso particular de [8 **sec.** 1.1] e iii) é [6 **sec.** 1.1]. Quanto a i), tendo em conta a desigualdade  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ,  $z \in \mathbb{C}$  obtém-se

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

e logo é válida a **desigualdade triangular**

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Da desigualdade triangular deduz-se

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w| \quad \text{e} \quad |w| = |(w - z) + z| \leq |z - w| + |z|.$$

Subtraindo ordenadamente as duas desigualdades anteriores, obtemos

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Discutimos de seguida algumas noções geométricas em torno de rectas, semi-planos, círculos e discos. Se  $R_\xi$  é a recta que passa por a origem e por o ponto  $\xi = |\xi| E(i\theta)$ , então rodada de  $-\theta$  irá coincidir com o eixo real, i.e.  $E(-i\theta) R_\xi = \mathbb{R}$ . De forma equivalente

$$R_\xi = \xi \mathbb{R} = \left\{ z : \bar{\xi} z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z : \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\xi}\right) = 0 \right\}.$$

Se  $R_{\xi,\eta}$  denota a recta euclidiana que passa por os números complexos distintos  $\xi$  e  $\eta$ , então  $z \in R_{\xi,\eta}$  sse  $z - \eta \in R_{\xi-\eta}$ , i.e

$$R_{\xi,\eta} = \left\{ z : \operatorname{Im}\left(\frac{z-\eta}{\xi-\eta}\right) = 0 \right\}. \quad (1)$$

Uma recta demarca  $\mathbb{C}$  em dois semi-planos disjuntos. Define-se o **semi-plano superior** através de

$$\Pi := \{z : \operatorname{Im} z > 0\},$$

e em geral o **semi-plano superior** definido por números complexos  $\xi$  e  $\eta$  aonde  $\xi \neq \eta$ , é o conjunto

$$\Pi_{\xi,\eta} := \left\{ z : \operatorname{Im}\left(\frac{z-\eta}{\xi-\eta}\right) < 0 \right\}. \quad (2)$$

Se  $w := (z - \eta)/(\xi - \eta)$  então  $w \in \Pi$  sse  $z \in e^{i\theta}\Pi + \eta$ , aonde  $\theta := \arg(\xi - \eta)$ . Assim, a recta  $R_{\xi,\eta}$  divide o plano em duas partes, sendo o semi-plano  $\Pi_{\xi,\eta}$  a parte à esquerda da recta orientada com o sentido de  $\xi$  a  $\eta$ . De acordo com (2), verifica-se  $\Pi = \Pi_{0,1}$ .

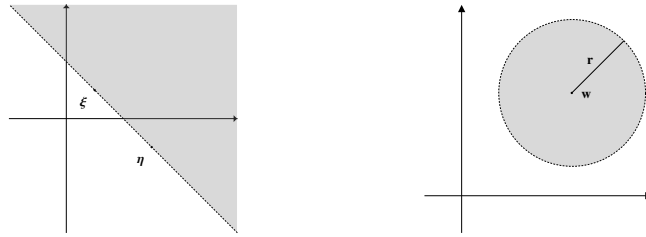


Figura 1.6: O semi-plano  $\Pi_{\xi,\eta}$  e o disco aberto  $D(w,r)$

O **disco aberto** centrado em  $w \in \mathbb{C}$  e de raio  $r > 0$  é definido como o conjunto dos números complexos cuja distância a  $w$  é inferior a  $r$ , i.e.

$$D(w,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}, \quad 0 < r < +\infty.$$

O conceito de disco é essencial para introduzir as definições topológicas elementares do corpo dos números complexos. Tais definições coincidem com as induzidas de  $\mathbb{R}^2$ , i.e. um subconjunto  $U \subset \mathbb{C}$ , diz-se **aberto**, **fechado**, **compacto** e **conexo** sse a sua natural identificação com o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  correspondente é respectivamente aberto, fechado, compacto e conexo. Assume-se que o leitor domina as técnicas necessárias ao manejo rudimentar da noção de convergência em espaços vectoriais de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ , tanto as definições topológicas elementares. No entanto, não se evita introduzir as respectivas definições e notação. Precisamente,  $U \subset \mathbb{C}$  diz-se **aberto** se coincide com uma união, possivelmente vazia, de discos abertos; diz-se **fechado** se o seu conjunto complementar é um conjunto aberto. Se  $U \subset \mathbb{C}$  é um subconjunto de algum disco, então  $U$  diz-se um conjunto **limitado**. Os conjuntos **compactos** são precisamente os conjuntos limitados e fechados. O subconjunto  $U \subset \mathbb{C}$  diz-se desconexo se existem conjuntos abertos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , tais que  $\Omega_1 \cap U \neq \emptyset \neq \Omega_2 \cap U$  e

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad U = (\Omega_1 \cap U) \cup (\Omega_2 \cap U).$$

Diz-se que  $U \subset \mathbb{C}$  é **conexo** se não é desconexo.

Os conjuntos **interior**, **exterior** e **fronteira** de  $U$ , respectivamente denotados por  $\text{int } U$ ,  $\text{ext } U$  e  $\partial U$  são definidos de forma semelhante, i.e. as definições conhecidas em espaços vectoriais de dimensão finita aplicam-se ao subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  identificado com  $U$ . Resulta que  $\text{int } U$  é a união de todos os conjuntos abertos contidos em  $U$ ,  $\text{ext } U = \text{int } (U^c)$  e  $\partial U = (\text{int } U \cup \text{ext } U)^c$ . O **fecho** dum conjunto  $U \subset \mathbb{C}$  coincide com a união  $U \cup \partial U$  e é denotado por  $\text{cl } U$ . Assim, a circunferência centrada em  $w$  de raio  $r > 0$  é definida por

$$\partial D(w, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}, \quad 0 < r < +\infty,$$

e o disco fechado por

$$\text{cl } D(w, r) := D(w, r) \cup \partial D(w, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}, \quad 0 < r < +\infty.$$

Tal como as definições topológicas elementares, as **sucessões convergentes** de termos complexos definem-se em correspondência com as sucessões convergentes de termos em  $\mathbb{R}^2$ , i.e. diz-se que a sucessão  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é convergente ao número complexo  $z$  sse a sucessão  $(\text{Re } z_n, \text{Im } z_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é convergente em  $\mathbb{R}^2$  ao par ordenado  $(\text{Re } z, \text{Im } z) \in \mathbb{R}^2$ , i.e. a sucessão de termos complexos  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é convergente sse

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad (n \geq p) \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon.$$

Evitando menção directa á noção de distância, a sucessão de termos complexos  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é convergente ao complexo  $z$  sse para qualquer que seja o disco aberto (não vazio) centrado no ponto  $z$ , então todos os termos da sucessão com ordens superiores a determinado natural, incluem-se no disco fornecido.

Em diversas situações é útil considerar a convergência ao usualmente designado ponto infinito  $\infty$ . Em rigor, diz-se que a sucessão de termos complexos  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é convergente ao ponto  $\infty$  sse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty \quad \text{i.e.} \quad \forall C > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad (n \geq p) \Rightarrow |z_n| > C.$$

Introduzimos a notação  $\dot{\mathbb{C}}$  para designar o conjunto  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , aonde o elemento  $\infty$  não coincide com qualquer número complexo. Introduzem-se por igual os discos abertos centrados no ponto infinito, i.e.

$$D(\infty, r) := \mathbb{C} \setminus \text{cl } D(0, 1/r) \cup \{\infty\}, \quad r > 0.$$

Desta forma, a sucessão  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (de termos em  $\dot{\mathbb{C}}$ ) diz-se convergente ao ponto  $z \in \dot{\mathbb{C}}$  sse para qualquer que seja o número positivo  $r > 0$ , então todos os termos de  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  com ordens superiores a determinado natural, são elementos de  $D(z, r)$ . O conjunto  $\dot{\mathbb{C}}$  munido com a noção de convergência acima é usualmente designado por **plano complexo compactificado** a um ponto. As definições topológicas elementares resultam do conceito de conjunto aberto. Por seu turno, os abertos do plano compactificados são os conjuntos união de discos abertos, eventualmente discos centrado no ponto infinito. As operações algébricas naturais no plano complexo compactificado  $\dot{\mathbb{C}}$  estendem as operações entre números complexos por intermédio das seguintes definições

$$1/0 = \infty \quad ; \quad z\infty = \infty z = \infty \quad (z \neq 0, z \in \dot{\mathbb{C}}) \quad ; \quad z/\infty = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \quad \text{e} \quad z+\infty = \infty+z = \infty \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Funções complexas de variável complexa são identificadas com funções de duas variáveis reais e com imagens em  $\mathbb{R}^2$ , i.e. fixa uma função  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  identificamos  $U$  com um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e

a função  $f(z)$  com  $f(x, y) := f(x + iy)$ , aonde  $f(x + iy)$  é identificado com um par ordenado em  $\mathbb{R}^2$ . Em diversas situações consideraremos sem menção as observações atrás. A definição de continuidade para funções de variável complexa decorre da forma habitual. Assim, a identificação entre funções de variável complexa e funções dependentes de duas variáveis reais, preserva a noção de continuidade i.e.  $f(z)$  é contínua sse  $f(x, y)$ ,  $z = x + iy$  é contínua. Por exemplo, as funções racionais  $R(z, \bar{z})$  na variável complexa e complexa conjugada, são funções contínuas no seu domínio. De facto, as partes reais e imaginárias são funções racionais nas variáveis  $x, y \in \mathbb{R}$ .

A respeito de funções  $g : D \subset \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$ , a noção de continuidade poder-se-á introduzir da forma usual e recorrendo à definição de *Heine*. Assim porque acima introduziu-se a noção de convergência a qualquer ponto do plano compactificado. Em resumo,  $g$  diz-se contínua à *Heine* no ponto  $w \in \dot{\mathbb{C}}$  se para qualquer sucessão  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  convergente a  $w$  verifica-se  $\lim g(z_n) = g(w)$ . A noção de continuidade de *Cauchy* no ponto  $w$ , por igual introduz-se de forma semelhante ao caso real, eventualmente considerando discos centrados no ponto infinito. Diz-se que  $g$  é contínua à *Cauchy* no ponto  $w \in \dot{\mathbb{C}}$  se para qualquer disco  $D(g(w), \delta)$ ,  $\delta > 0$  existe  $\epsilon > 0$  verificando  $f(D(w, \epsilon)) \subset D(g(w), \delta)$ . A noção de continuidade à *Heine* equivale à noção de continuidade de *Cauchy*.

## Exemplos

1. Considerem-se funções racionais  $R(z) := P(z)/Q(z)$ , aonde  $P(z) = \sum_k p_k z^k$  e  $Q(z) = \sum_k q_k z^k$  são polinómios não identicamente nulos com graus respectivamente dados por  $n$  e  $m$ . Então  $R(z)$  admite limite no ponto infinito dado por

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \begin{cases} \frac{p_n}{q_n} & \text{se } n = m \\ \infty & \text{se } n > m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}.$$

Sem perda de generalidade supõe-se a não existência de zeros comuns ao numerador e denominador. Logo  $R(z)$  admite limite infinito em qualquer complexo anulando o denominador. Defina-se  $R(z)$  nos zeros do denominador ou no ponto infinito por intermédio do valor do seu limite, para concluir-se que qualquer função racional é contínua em  $\dot{\mathbb{C}}$ . No entanto, nem todas as funções racionais  $R(z, \bar{z})$  são contínuas no plano complexo compactificado, e.g.  $R(z, \bar{z}) = \bar{z}/z$ .

□

O plano complexo identifica-se canonicamente com um subespaço do espaço euclidiano de dimensão três. Observe que o segmento de recta entre o complexo  $z = x + iy$  e o “pólo norte”  $p = (0, 0, 1)$ , intercepta  $S^2$  (a esfera de raio unitário no espaço  $\mathbb{R}^3$ ) num e só num ponto  $\phi(z)$ . Ademais, o pólo norte é o único ponto da esfera que não é imagem de nenhum complexo, tanto  $p = \lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z)$ . Definindo

$$\phi : \dot{\mathbb{C}} \rightarrow S^2, \quad \text{aonde} \quad \phi(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \quad \text{e} \quad \phi(\infty) = p$$

deduz-se que  $\phi$  é função contínua com inversa contínua. A função  $\phi^{-1}$  é usualmente designada por projecção estereográfica. Poder-se-ia dizer que o plano complexo compactificado identifica-se continuamente com esfera de Riemann  $S^2$  e assim sendo detêm a mesma estrutura topológica.



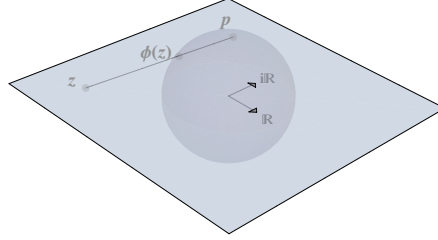


Figura 1.7: A esfera de Riemann  $S^2$  e o plano complexo compactificado

Terminamos a secção observando que tanto discos quanto circunferências poderiam ter sido introduzidos de forma semelhante às definições de recta e semi-plano, respectivamente em (1) e (2). De facto, considerando o círculo centrado na origem de raio  $|a|$ ,  $a \in \mathbb{C}$  e tendo em linha de conta a evidente igualdade  $\operatorname{Re}[(z-a)(\bar{z}+\bar{a})] = \operatorname{Re}[|z|^2 - |a|^2 + 2i \operatorname{Im}(z\bar{a})] = |z|^2 - |a|^2$ , obtém-se sucessivamente que

$$|z| = |a| \quad \text{sse} \quad \operatorname{Re}[(z-a)(\bar{z}+\bar{a})] = 0 \quad \text{sse} \quad \operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0 \quad \text{ou} \quad z = -a, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Se  $z \in \partial D(w, r)$  então  $z - w \in \partial D(0, r)$ . Se  $a, b \in \partial D(w, r)$  são tais que o segmento de recta de  $a$  a  $b$  é um diâmetro de  $\partial D(w, r)$  então  $w = (a+b)/2$ ,  $r = |a-b|/2$ . De (3) verifica-se sem dificuldades que

$$\partial D(w, r) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{z-a}{z-b} = 0 \right\} \cup \{b\}, \quad \text{aonde} \quad a = w + re^{i\theta}, \quad b = w - re^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}). \quad (4)$$

O círculo  $\partial D(w, r)$ ,  $w \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  divide o plano complexo em duas componentes conexas disjuntas, precisamente o disco  $D(w, r)$  e o complementar do seu fecho. A função  $\varphi(z) = \operatorname{Re}[(z-a)/(z-b)]$  é sobrejectiva e continua no plano complexo compactificado. Porque funções contínuas transformam conexos em conexos então  $\varphi$  tem sinal constante em  $D(w, r)$ . É óbvio que  $T(\infty) = 1$  e consequentemente

$$D(w, r) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{z-a}{z-b} < 0 \right\}, \quad \text{aonde} \quad a = w + re^{i\theta}, \quad b = w - re^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

## 1.4 Problemas

1. Represente as seguintes regiões no plano complexo:

- i)  $\{z : \operatorname{Re} z \operatorname{Re}(1/z) > 0\}$  ;
- ii)  $\{z : |\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2z| > 2\}$  ;
- iii)  $\{z : (|z| - 1)(|\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2z| - 2) < 0\}$  ;
- iv)  $\{z : \operatorname{Re}[(\sqrt{3} + i)z] \geq 0\}$  ;
- v)  $\{z : |z| \operatorname{Re}(iz) \geq \operatorname{Re}(iz^2)\}$  ;
- vi)  $\{z : |z| \operatorname{Re}(iz^2) \geq \operatorname{Re}(iz^2)\}$  ;
- vii)  $\{z : \operatorname{Im}[(\sqrt{3} + i)z] \operatorname{Im}[(i - \sqrt{3})z] > 0\}$  ;
- viii)  $\{z : \operatorname{Re}[(iz + i)(1 - z)^{-1}] > 0\}$  ;
- ix)  $\{z : \operatorname{Im}[(1 - i)z^3] + |z|^2 \operatorname{Im}[(1 + i)z] < 0\}$  ;
- x)  $\{z : |z - i| > |z + i|\}$  ;
- xi)  $\{z : |z - 1| + |z + 1| = 4\}$  ;
- xii)  $\{z : |z| - |z - 2| > 2\}$  .

**Sugestão:** Para a alínea ix) poder-lhe-á ser útil considerar a igualdade  $2 \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}(zw) + \operatorname{Im}(\bar{z}w)$ .

2. Considere números complexos distintos dois a dois  $z_j, j = 1, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ). Justifique que

$$\operatorname{Im} \frac{z_j - z_2}{z_1 - z_2} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad \text{sse} \quad \text{os complexos } z_j, j = 1, \dots, n \text{ são colineares.}$$

3. Demonstre sucessivamente as seguintes asserções:

- i) se  $R_\xi$  é a recta que passa por a origem e por o ponto  $\xi$  então

$$R_\xi = \{z : \bar{\xi}z - \xi\bar{z} = 0\};$$

- ii) se  $R_{\xi, \eta}$  é a recta que passa por os números complexos distintos  $\xi$  e  $\eta$  então

$$R_{\xi, \eta} = \{z : (\bar{\xi} - \bar{\eta})z - (\xi - \eta)\bar{z} = 2i \operatorname{Im}(\eta\bar{\xi})\};$$

- iii) se  $a$  e  $b$  são complexos verificando  $a \neq 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ , então o conjunto das soluções da equação  $az + \bar{a}\bar{z} = 2b$  define uma recta no plano complexo.

4. Se  $A \subset \mathbb{C}$  é conjunto não vazio e  $z \in \mathbb{C}$ , então  $\operatorname{dist}(A, z)$  denota a distância de  $A$  ao ponto  $z$ , i.e.

$$\operatorname{dist}(A, z) := \inf\{|z - w| : w \in A\}.$$

Considere números complexos  $\xi$  e  $\eta$ , tais que  $\xi \neq \eta$ . Demonstre sucessivamente as seguintes asserções:

- i) Existe um único numero real  $t$  verificando a condição  $i(\xi - \eta)t \in R_{\xi, \eta}$ ;

- ii) É válida a seguinte igualdade

$$\operatorname{dist}(R_{\xi, \eta}, 0) = \left| \frac{\operatorname{Im}(\eta\bar{\xi})}{\xi - \eta} \right|;$$

- iii) A recta  $R_{\xi, \eta}$  passa por a origem sse  $\operatorname{Im}(\eta\bar{\xi}) = 0$ .

5. Pode dizer-se que  $\operatorname{Re}(az) = 1, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  é a equação geral das rectas que não passam na origem. De facto:

- i) Considere  $a \neq 0$  fixo. Mostre que o conjunto  $\{z : \operatorname{Re}(az) = 1\}$ , é uma recta que não passa por a origem. Em função de  $a$ , determine complexos  $\xi$  e  $\eta$  tais que  $R_{\xi, \eta} = \{z : \operatorname{Re}(az) = 1\}$ ;
- ii) Suponham-se fornecidos complexos distintos  $\xi$  e  $\eta$ , tais que  $0 \notin R_{\xi, \eta}$ . Em função de  $\xi$  e  $\eta$ , determine um complexo  $a$  tal que  $R_{\xi, \eta} = \{z : \operatorname{Re}(az) = 1\}$ .

6. Suponha fornecida uma recta  $R := \{z : \operatorname{Re}(az) = 1\}$ , aonde  $a \neq 0$ . Verifique que  $1/a$  é o ponto de  $R$  “mais próximo” da origem (poder-lhe-á ser útil considerar o problema 4).

7. Considere a reflexão  $\alpha_\xi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , relativa à recta  $R_\xi$  que passa pela origem e intercepta a circunferência unitária no ponto  $\xi$ . Diz-se que  $\alpha_\xi(z)$  é a **imagem simétrica** de  $z$ , relativa à recta  $R_\xi$ .

- i) Mostre que  $\alpha_\xi(z) = \xi^2 \bar{z}$ .

- ii) Se  $R_\xi = \{xz_m : x \in \mathbb{R}\}$ , aonde  $z_m = (1 + im)$  e  $m \in \mathbb{R}$  então

$$\alpha_\xi(z) = \frac{z_m}{\bar{z}_m} \bar{z} = \frac{(1 - m^2) + i2m}{1 + m^2} \bar{z}.$$

8. Considere a reflexão  $\alpha_{\xi, \eta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  relativa à recta  $R_{\xi, \eta}$  ( $\xi, \eta \in \mathbb{C}, \xi \neq \eta$ ). Justifique a seguinte igualdade

$$\alpha_{\xi, \eta}(z) = \frac{\xi(\bar{z} - \bar{\eta}) - \eta(\bar{z} - \bar{\xi})}{\bar{\xi} - \bar{\eta}}.$$

9. Considere números complexos  $\xi, \eta, w$  tais que  $\xi \neq \eta$ . Justifique a evidência das seguintes igualdades

$$\Pi_{\xi, \eta} = \mathbb{C} \setminus \operatorname{cl} \Pi_{\eta, \xi} \quad , \quad \Pi_{w+\xi, w+\eta} = w + \Pi_{\xi, \eta} \quad \text{e} \quad \Pi_{w\xi, w\eta} = w\Pi_{\xi, \eta}.$$

10. Considere um número natural  $k$  e uma sucessão complexa  $a_n, n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\lim_n (a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}) \quad \text{existe em } \mathbb{C}.$$

- i) Mostre que  $\lim_n (a_{n+k} - a_n) = 0$ ;
- ii) Fixo  $k \in \mathbb{N}_1$ , considere  $\theta_k = 2\pi/k$  e  $a_n = E^n(i\theta_k), n \in \mathbb{N}$ . Mostre que a sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  verifica as condições do enunciado e  $\lim_n a_n$  não existe.

11. Considere um número complexo  $z$ . A sucessão  $z_n, n \in \mathbb{N}$  diz-se a sucessão geométrica de razão  $z$ . Mostre sucessivamente as seguintes asserções:

- i) Se  $|z| > 1$  então  $\lim_n z^n = \infty$ ;
- ii) Se  $|z| < 1$  então  $\lim_n z^n = 0$ ;
- iii) Se  $|z| = 1$  e  $z \neq 1$  então  $\lim_n z^n$  não existe.

12. Considere uma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  de termos reais positivos. De acordo com as convenções usuais  $1/0^+ = +\infty$  e  $1/+ \infty = 0$  verifique a seguinte igualdade

$$\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}.$$

13. Determine os únicos números reais  $t$  e  $\tau$ , respectivamente tais que

$$z(1-t) + pt \in S^2, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad p(1-\tau) + \phi(z)\tau \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(z) \in S^2 \setminus \{p\}.$$

Deduzo o seguinte

$$\phi(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \phi^{-1}(\eta) = \frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3}, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in S^2 \setminus \{p\}.$$

14. Demonstre que rectas que passam na origem e círculos centrados na origem são respectivamente transformados por a projecção estereográfica em círculos meridianos e círculos paralelos.

## 1.5 Transformações lineares-fracionárias

Designam-se por **transformações lineares-fracionárias**, as funções racionais cujos denominador e numerador são funções afins, i.e. são as funções  $T(z)$  definidas no plano complexo compactificado por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{aonde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (z \in \dot{\mathbb{C}}).$$

É usual designar as transformações lineares-fracionárias por transformações de **Möbius**. Se  $c = 0$ , a boa definição de  $T(z)$  requer  $d \neq 0$ . Caso em que  $T(z)$  é a função linear afim  $T(z) = (a/c)z + (b/c)$ . As funções lineares afins  $z \rightarrow Az + B, A, B \in \mathbb{C}$  são a composição da **dilatação**  $z \rightarrow |A|z$ , com a **rotação**  $z \rightarrow e^{i \arg A} z$  e finalmente com a **translação**  $z \rightarrow z + B$ . Tanto dilatações quanto rotações e translações são caracterizadas por significados geométricos elementares e bem conhecidos. Se  $c \neq 0$  então

$$T(z) = \frac{1}{c} \frac{(az + ad/c) + (b - ad/c)}{z + d/c} = \frac{a}{c} + \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}, \quad z \in \dot{\mathbb{C}} \quad (c \neq 0). \quad (1)$$

Em quaisquer dos casos, a transformação  $T(z)$  é não constante sse  $ad - bc \neq 0$ , condição adiante assumida. De (1) deduz-se que as transformações lineares-fracionárias resultam da composição de translações, rotações, dilatações e da função  $z \mapsto 1/z$ . A linear-fraccionária  $S(z) = 1/z$  é usualmente

designada por transformação de **inversão**. A inversão é bijectiva de  $\dot{\mathbb{C}}$  em  $\dot{\mathbb{C}}$ , admite inversa contínua (diz-se um homeomorfismo) e actua de forma notável em circunferências ou em rectas.

Iniciamos por considerar o lugar geométrico da imagem de círculos por intermédio da transformação de inversão. Considerem-se números complexos  $a$  e  $b$ , tais que o segmento de recta de  $a$  a  $b$  é um diâmetro do círculo  $C$ . Subdividimos o estudo em dois casos distintos. Se  $0 \notin C$ , então é possível escolher  $a$  e  $b$  tais que  $a = \lambda b$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então, para qualquer  $z \in C$  e  $w = 1/z$ , verifica-se

$$0 = \operatorname{Re} \left( \frac{w^{-1} - a}{w^{-1} - b} \right) = \lambda \operatorname{Re} \left( \frac{a^{-1} - w}{b^{-1} - w} \right), \quad z \neq b. \quad (2)$$

Logo,  $w$  varia na circunferência cujo diâmetro é o segmento de recta entre  $1/a$  e  $1/b$ . Se  $0 \in C$ , então é possível escolher  $b = 0$ . Argumentos semelhantes aos anteriores estabelecem

$$0 = \operatorname{Re} \left( \frac{w^{-1} - a}{w^{-1}} \right) = 1 - \operatorname{Re}(aw), \quad z \neq 0. \quad (3)$$

Logo,  $w$  varia na única recta na qual incluem-se os complexos  $1/a$  e  $(1+i)/a$  (ver problema [5 sec.1.4]). De seguida consideramos o lugar geométrico da imagem de rectas por intermédio da função de inversão. Diremos que  $L$  é uma **recta no plano complexo compactificado** se  $L \cap \mathbb{C}$  é uma recta no plano complexo e  $\infty \in L$ . Se  $L$  é uma recta em  $\dot{\mathbb{C}}$  que passa por a origem então é evidente que sua imagem por  $z \mapsto 1/z$  é uma recta que passa por a origem. Suponha-se que a recta  $L$  não passa por a origem,  $z \in L$  e  $w = 1/z$ . Então, o problema [5 sec.1.4] assegura-nos a existência dum complexo não nulo  $a$  verificando

$$0 = \operatorname{Re}(1 - aw^{-1}) = \operatorname{Re} \frac{w - a}{w}, \quad z \neq \infty. \quad (4)$$

Logo,  $w$  varia na circunferência cujo diâmetro é dado por o segmento de recta entre a origem e  $a$ .

Em diante designamos por **círculo no plano complexo compactificado**, quaisquer rectas em  $\dot{\mathbb{C}}$  ou círculos no plano complexo.

**Proposição 1** *Transformações linear-fraccionárias são bijectivas de  $\dot{\mathbb{C}}$  em  $\dot{\mathbb{C}}$ , continuas e admitem inversa contínua. Transformam círculos do plano complexo compactificado em círculos de  $\dot{\mathbb{C}}$ .*

**Demonstração:** Considere-se a transformação linear-fracionária  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ , aonde  $ad - bc \neq 0$ . Resta mostrar que  $T$  é um homeomorfismo no plano complexo compactificado. Resolvendo a equação  $T(z) = w$ , sem dificuldades obtém-se o seguinte

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}, \quad z \in \dot{\mathbb{C}}. \quad (5)$$

Logo  $T^{-1}$  é linear-fraccionaria e em consequência contínua em  $\dot{\mathbb{C}}$ . ■

## Exemplos

1. A demonstração da proposição anterior estabelece critérios efectivos para determinar funções lineares-fracionárias transformando determinado círculo ou recta em determinada recta ou círculo.

Por exemplo, se  $\dot{\mathbb{R}}$  designa o eixo real compactificado a um ponto, i.e.  $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  então procure-se uma linear fraccionária cuja imagem do eixo real corresponde ao círculo unitário. A recta  $\mathbb{R} + i$  não passa na origem. Como  $\mathbb{R} + i = \{z : \operatorname{Re}(z/i) = 1\}$  então a inversão de  $\mathbb{R} + i$  corresponde ao círculo com diâmetro dado por o segmento de recta entre  $-i$  e a origem. Assim, a transformação linear fraccionária

$$\mathbb{R} \ni z \xrightarrow{z \rightarrow z+i} z+i \xrightarrow{z \rightarrow 1/z} \frac{1}{z+i} \xrightarrow{z \rightarrow 2z} \frac{2}{z+i} \xrightarrow{z \rightarrow z+i} \frac{2}{z+i} + i \in \partial D(0,1) \quad \text{i.e.} \quad T(z) = i \frac{z-i}{z+i},$$

transforma o eixo real compactificado a um ponto, bijectivamente no círculo unitário  $\partial D(0,1)$ .

2. Do exemplo anterior sabemos que qualquer linear-fracionaria da forma  $M(z) = \xi T(z)$ ,  $|\xi| = 1$  transforma o eixo real no círculo unitário. Se  $M(z) = -iT(z)$  então com  $S(z) = M^{-1}(z)$  obtemos que  $S(z)$  transforma o círculo unitário no eixo real compactificado a um ponto. Argumentos de continuidade tanto de conexidade estabelecem que  $S(D(0,1))$  coincide com o semi-plano inferior ou superior. Como  $S(0) = i \in \Pi$  então  $S(D(0,1)) = \Pi$ .

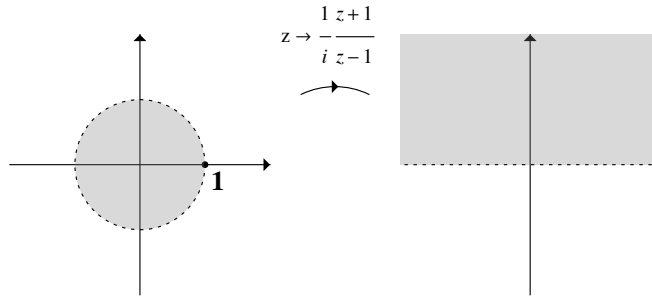


Figura 1.8: Transformação de Möbius  $S(z)$

□

Poder-se-á revelar fastidioso seguir a demonstração da proposição 1 para determinar uma função linear-fracionária que transforme um dado círculo no plano complexo compactificado num outro. Expõe-se de seguida um procedimento alternativo.

Um círculo no plano complexo compactificado é determinado por três dos seus elementos. De facto, para cada triplo de pontos distintos dois a dois no plano complexo compactificado  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , existe um único círculo em  $\dot{\mathbb{C}}$  que inclui os três pontos, respectivamente uma recta no plano complexo compactificado ou um círculo em  $\mathbb{C}$ , se os elementos  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  são colinares ou não. Na frase anterior deve entender-se que se algum dos pontos  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  coincide com  $\infty$  então os elementos  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  dizem-se colinares.

Suponha-se que  $C_1$  e  $C_2$  são círculos no plano compactificado. Escolham-se triplos de elementos distintos dois a dois e tais que  $z_j \in C_1$ ,  $j = 1, 2, 3$  e  $w_j \in C_2$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Por igual suponham-se conhecidas transformações lineares-fracionárias  $T$  e  $S$  verificando as seguintes condições

$$T(z_1) = S(w_1) = 0 \quad , \quad T(z_2) = S(w_2) = 1 \quad \text{e} \quad T(z_3) = S(w_3) = \infty.$$

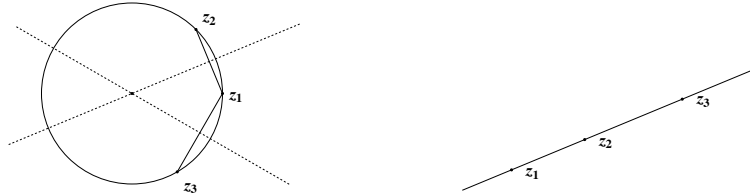


Figura 1.9: Os complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  determinam um círculo no plano complexo compactificado

Então  $S^{-1}T$  é uma transformação linear fraccionária cuja imagem de  $C_1$  é um círculo em  $\hat{\mathbb{C}}$  e inclui  $w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Logo a imagem de  $C_1$  por  $S^{-1}T$  é  $C_2$ . Fixos pontos  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  no plano complexo compactificado, distintos dois a dois, então a linear fraccionária  $z \rightarrow (z; z_1, z_2, z_3)$ , definida por

$$(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad z_j \neq \infty, \quad j = 1, 2, 3$$

ou, se respectivamente  $z_1 = \infty$ ,  $z_2 = \infty$  ou  $z_3 = \infty$ , dada por

$$\frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \quad \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad \text{ou} \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

transforma respectivamente  $z_1, z_2, z_3$  em  $0, 1, \infty$ . Desta forma estabeleceu-se um algoritmo para determinar uma transformação linear-fraccionária cuja imagem de determinado círculo seja um outro previamente fixado.

**Proposição 2** Fornecidos pontos  $z_1, z_2, z_3$  no plano complexo compactificado, distintos dois a dois, então existe uma única transformação linear-fraccionária  $T(z)$  tal que  $T(z_j) = w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . A função  $T(z)$  pode ser obtida resolvendo a equação

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3) \quad \text{aonde} \quad w = T(z). \quad (6)$$

**Demonstração:** A existência da linear-fraccionária  $T(z)$  encontra-se demonstrada nos parágrafos anteriores. A unicidade afixa-se de seguida. De facto, se existem lineares fraccionárias  $T(z)$  e  $S(z)$  tais que  $T(z_j) = S(z_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , então  $S^{-1}T$  é linear fraccionária admitindo três pontos fixos distintos. Suponha-se que  $S^{-1}T(z) = (az + b)/(cz + d)$  e que  $z_j \neq \infty$ ,  $j = 1, 2, 3$ . A igualdade  $S^{-1}T(z_j) = z_j$  significa que  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  é solução da equação quadrática  $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ . Logo  $c = b = 0$  e  $d = a$ . Em consequência  $S^{-1}T$  é a função identidade, i.e.  $S = T$ . Se algum  $z_j$  coincide com  $\infty$  então  $c = 0$  e a equação  $z(a/d) + (b/d) = 0$  admite duas soluções distintas. Logo  $a = b = 0$ , e deduz-se o absurdo  $S^{-1}T = 0$ . Para terminar defina-se  $M(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ . A linear-fraccionária  $MT^{-1}$  transforma  $T(z_1)$ ,  $T(z_2)$  e  $T(z_3)$  respectivamente em  $0, 1, \infty$ . Por unicidade obtém-se

$$MT^{-1}(z) = (z, T(z_1), T(z_2), T(z_3)) \quad \text{i.e.} \quad M(z) = (T(z), w_1, w_2, w_3).$$

■

Dado um triplo de números complexos distintos  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  então o conjunto dos elementos no plano complexo compactificado que verifica a seguinte condição <sup>1</sup>

$$\text{Im}(z; z_1, z_2, z_3) = 0 \quad \text{ou} \quad z = z_3 \quad (7)$$

<sup>1</sup>O leitor deverá ter presente que não se definiu parte real tanto parte imaginária do ponto  $\infty$ .

coincide com a imagem inversa do eixo real compactificado por intermédio da transformação linear-fraccionária  $T(z) := (z; z_1, z_2, z_3)$ . Logo coincide com a imagem do eixo real compactificado por intermédio duma linear-fraccionária. Deduz-se que o conjunto dos pontos que verifica (7) é uma recta no plano complexo compactificado ou um círculo, respectivamente se os pontos  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  são colineares ou não. Também qualquer círculo no plano complexo compactificado pode ser descrito da forma (7). Para tal é suficiente considerar quaisquer triplo de complexos distintos nele incluídos. Assim (7) poder-se-ia designar como a equação geral dos círculos no plano complexo compactificado.

Seja  $C$  um círculo no plano compactificado e pontos  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3 \in C$  distintos dois a dois. Se  $\varphi(z) := \text{Im}(z; z_1, z_2, z_3)$  então  $\varphi$  é função contínua no plano compactificado. O conjunto  $C$  divide o plano complexo em dois conjuntos abertos e conexos disjuntos. Como  $\varphi$  é contínua então tem sinal constante em cada uma das componentes conexas do complementar de  $C$ . Assim, o sinal de  $\varphi$  permite distinguir as componentes conexas. Qualquer triplo ordenado de pontos  $(z_1, z_2, z_3)$ ,  $z_1, z_2, z_3 \in C$  diz-se uma orientação de  $C$ . A **esquerda** e a **direita** do círculo no plano complexo compactificado  $C$ , orientado por  $(z_1, z_2, z_3)$ , são respectivamente os subconjuntos

$$\left\{ z \in \dot{\mathbb{C}} : \text{Im}(z; z_1, z_2, z_3) > 0 \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ z \in \dot{\mathbb{C}} : \text{Im}(z; z_1, z_2, z_3) < 0 \right\}.$$

**Proposição 3** *Suponha  $C$  círculo no plano complexo compactificado, orientado por o triplo ordenado  $(z_1, z_2, z_3)$  e  $T$  uma transformação linear-fraccionária. Se o círculo  $T(C)$  é orientado por o triplo ordenado  $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$  então a direita e esquerda de  $C$  são respectivamente transformados na direita e esquerda de  $T(C)$ .*

**Demonstração:** A demonstração termina se demonstrada a seguinte igualdade

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)), \quad z \in \dot{\mathbb{C}}. \quad (8)$$

Se  $z = z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  então (8) é evidente. Sabemos da proposição 2 que lineares-fraccionárias estão determinadas por os valores que assumem em três pontos distintos dois a dois. Deduz-se (8). ■

Justificamos de seguida o significado geométrico do conceito de orientação dum dado círculo no plano compactificado. Seja  $C$  um círculo em  $\mathbb{C}$  orientado por o triplo  $(z_1, z_2, z_3)$ ,  $z_j \in C$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Considerando coordenadas polares com origem no centro de  $C$ , então existem números reais  $r > 0$  e  $0 \leq \theta_j < 2\pi$  tais que  $z_j = re^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Como nenhum  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  iguala o ponto infinito então

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \text{Im}(z; z_1, z_2, z_3) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \text{Im} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3} = \text{Im} \frac{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}} = \frac{\sin[(\theta_2 - \theta_3)/2]}{\sin[(\theta_2 - \theta_1)/2]} \text{Im} e^{i(\theta_3 - \theta_1)/2} \\ &= \frac{\sin[(\theta_2 - \theta_3)/2] \sin[(\theta_3 - \theta_1)/2]}{\sin[(\theta_2 - \theta_1)/2]}. \end{aligned}$$

Considerando as desigualdades  $-\pi < (\theta_j - \theta_k)/2 < \pi$ ,  $j = 1, 2, 3$  deduz-se que o sinal de  $(z; z_1, z_2, z_3)$  na componente conexa ilimitada do complementar de  $C$  coincide com o sinal de

$$(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)(\theta_2 - \theta_1). \quad (9)$$

Se definirmos as **orientações positivas** como o conjunto dos triplos ordenados  $(z_1, z_2, z_3)$  tais que  $\text{Im}(z; z_1, z_2, z_3) < 0$ , para  $z$  na componente conexa ilimitada do complementar de  $C$ , então a orientação  $(z_1, z_2, z_3)$  é positiva em um dos dois seguintes casos: um dos factores em (9) é negativo e os restantes positivos ou então todos os factores em (9) são negativos, i.e.

$$\theta_2 < \theta_3 < \theta_1 \quad , \quad \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \quad \text{ou} \quad \theta_3 < \theta_1 < \theta_2 .$$

Assim, se o círculo é percorrido sem intercepções de  $z_1$  a  $z_2$  e por sua vez a  $z_3$ , então a orientação positiva corresponde a percorrer o círculo por formas a deixar o disco à esquerda. Orientação essa também designada por orientação contrária ao **sentido dos ponteiros do relógio**. Abandonam-se ao cuidado do leitor, eventuais dissertações acerca significados geométricos de orientação de rectas no plano complexo.

## 1.5 Problemas

1. Identifique a transformação linear-fracionária  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$  com a matriz  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  dada por

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Demonstre sucessivamente as seguintes asserções:

- i) Se  $S$  é linear-fracionária identificada com a matriz  $B$  então a composição de lineares-fracionárias  $T \circ S$  é uma transformação linear-fracionária e identifica-se com o produto de matrizes  $AB$ ;
  - ii) A transformação linear fracionária  $T^{-1}$  identifica-se com a matriz  $(\text{cof } A)^t$ ;
  - iii) Forneça exemplos de lineares-fracionárias  $S$  e  $T$  tais que a função  $z \rightarrow S(z) + T(z)$  não é uma transformação linear-fracionária. Finalmente, demonstre que a linear-fracionária  $\lambda T$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  ( $\lambda \neq 0$ ) não se identifica com a matriz  $\lambda A$ .
2. Seja  $T(z) = 1/z$ ,  $z \in \dot{\mathbb{C}}$  e suponha que  $T$  transforma círculos do plano complexo compactificado em círculos do plano complexo compactificado. Sem utilizar os passos da demonstração da proposição 1, demonstre sucessivamente as seguintes asserções:
- a) Se  $C = \partial D(z, r)$ , aonde  $z \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$  então
    - i) Se  $0 \in C$  então  $T(C) = R_{\mu, \nu}$ , aonde  $\mu = (1 + i)/(2z)$  e  $\nu = (1 - i)/(2z)$ ;
    - ii) Se  $0 \notin C$  então  $T(C) = \partial D(w, \delta)$ , aonde  $w = \bar{z}/(|z|^2 + r^2)$  e  $\delta = r/(|z|^2 + r^2)$ .
  - b) Se  $C = R_{\xi, \eta}$ , aonde  $\xi, \eta \in \mathbb{C}$  e  $\eta \neq \xi$ , então
    - i) Se  $0 \in C$  então  $T(C) = R_{\mu, \nu}$ , aonde  $\mu = \bar{\xi}$  e  $\nu = \bar{\eta}$ ;
    - ii) Se  $0 \notin C$  então  $T(C) = \partial D(w, \delta)$ , aonde  $w = i(\bar{\eta} - \bar{\xi})/\text{Im}(2\eta\bar{\xi})$  e  $\delta = |\bar{\eta} - \bar{\xi}|/|\text{Im}(2\eta\bar{\xi})|$ .
3. Esboce no plano complexo os conjuntos  $\Omega$  indicados nas seguintes alíneas:
- a) O conjunto  $\Omega$  consiste no conjunto das imagem, por intermédio da transformação linear fracionária  $z \rightarrow 1/(z - i)$ , das regiões indicadas nas seguintes alíneas:
    - i)  $\Omega := \left\{ z \in \dot{\mathbb{C}} : \text{Im } z > 0 \right\}$  ;
    - ii)  $\Omega := \left\{ z \in \dot{\mathbb{C}} : \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0 \right\}$  ;
    - iii)  $\Omega := \left\{ z \in \dot{\mathbb{C}} : \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0, |z| < 1 \right\}$  ;
    - iv)  $\Omega := \left\{ z \in \dot{\mathbb{C}} : 0 < \text{Re } z < 1, 0 < \text{Im } z < 1 \right\}$  .



b) O conjunto  $\Omega$  é definido por  $\Omega := f(\Pi)$ , aonde as funções  $f(z)$  são indicadas nas seguintes alíneas:

$$\text{i) } f(z) := \frac{1}{z+i} ; \quad \text{ii) } f(z) := \frac{z}{z+i} ; \quad \text{iii) } f(z) := \frac{z-1}{iz-1} ; \quad \text{iv) } f(z) := \frac{1}{z^2} .$$

4. Seja  $T(z)$  a transformação de inversão. Represente  $T(\Omega)$  no plano complexo, aonde  $\Omega$  é a região definida por

$$\Omega := \{x + iy : |x| + |y| < 1, x, y \in \mathbb{R}\} .$$

5. Seja  $T(z)$  uma transformação linear-fraccionária. Demonstre sucessivamente o seguinte:

i)  $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  sse existem  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{aonde} \quad ad - bc \neq 0 .$$

ii)  $T(\Pi) = \Pi$  sse verifica-se i) e  $ad - bc > 0$ .

6. Considere pontos  $z_j \in \dot{\mathbb{C}}$ ,  $j = 1, 2, 3$  distintos dois a dois. Justifique as seguintes asserções:

i)  $(z; z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$  sse  $z$  é elemento do círculo (no plano compactificado) definido por  $z_1, z_2$  e  $z_3$ ;

ii)  $(z; z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$  sse  $z_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

7. Considere  $C$  um círculo no plano complexo compactificado e uma transformação linear-fraccionária  $T(z)$  tal que  $T(C) = \mathbb{R}$ . Definimos  $\alpha_C(z)$ , a **imagem simétrica** de  $z$ , relativa ao círculo  $C$  por intermédio  $\alpha_C(z) = T^{-1}(\overline{T(z)})$ . Demonstre sucessivamente as seguintes asserções:

i) A imagem simétrica  $\alpha_C$  está bem definida, i.e. se  $S(z)$  é linear-fraccionária tal que  $S(C) = \mathbb{R}$  então

$$S^{-1}(\overline{S(z)}) = T^{-1}(\overline{T(z)}), \quad z \in \dot{\mathbb{C}};$$

ii) Se existem complexos  $\xi$  e  $\eta$  tais que  $\xi \neq \eta$  e  $C = R_{\xi, \eta}$ , então  $\alpha_C(z) = \alpha_{\xi, \eta}$ , aonde a aplicação  $\alpha_{\xi, \eta}$  encontra-se definida no problema [8 **sec.1.4**];

iii) Suponha  $C = \partial D(0, r)$ ,  $r > 0$  e verifique as seguintes propriedades

$$\alpha_C(z) = \frac{r^2}{\bar{z}} \quad , \quad |z\alpha_C(z)| = r^2 \quad \text{e} \quad \arg \alpha_C(z) = \arg z, \quad z \in \mathbb{C} .$$

8. Suponha fornecida uma recta  $L$  com orientação  $(z_1, z_2, \infty)$ ,  $z_j \in L$ ,  $z_1 \neq z_2$  ( $j = 1, 2$ ). Verifique que o lado esquerdo da recta orientada  $L$  coincide com o semi-plano  $\Pi_{z_1, z_2}$ . Assim,  $\Pi_{z_1, z_2}$  é o lado esquerdo da recta  $L$  orientada por  $(z_1, z_2, \infty)$ . Justifique a evidência da igualdade  $T(\Pi_{z_1, z_2}) = \Pi_{T(z_1), T(z_2)}$ , para qualquer que seja a linear-fraccionária  $T$ .

9. Defina as orientações positivas do eixo real  $\mathbb{R}$ , como aquelas cujo lado esquerdo de  $\dot{\mathbb{R}}$  corresponde ao semi-plano superior. Caracterize geometricamente as orientações positivas do eixo real.



## Capítulo 2

# Funções analíticas

### 2.1 Séries numéricas

Dada uma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  de termos complexos, definimos a **sucessão das somas parciais**  $S_n, n \in \mathbb{N}_1$ , cujo termo de ordem  $n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos da sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , i.e.

$$S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

#### Exemplos

1. **[Série telescópica]** Considere-se a sucessão telescópica  $a_n = c_n - c_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ , aonde  $c_n, n \in \mathbb{N}$  é uma sucessão de termos complexos. Tendo em conta que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k - \sum_{k=1}^n c_k = c_0 - c_n, \quad n \in \mathbb{N}_1,$$

obtemos

$$S_n = c_0 - c_n, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

De forma semelhante, fixo um natural  $j \in \mathbb{N}_2$ , considere-se  $b_n = c_n - c_{n+j}, n \in \mathbb{N}$ . Então

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - c_{k+j}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k - \sum_{k=j}^{n+j-1} c_k = \sum_{k=0}^{j-1} c_k - \sum_{k=n}^{n+j-1} c_k, \quad n \geq j.$$

2. **[Série geométrica]** Seja  $a_n, n \in \mathbb{N}$  a progressão geométrica de razão  $z \in \mathbb{C}$ , i.e.  $a_n = z^n, n \in \mathbb{N}$ . Tendo em linha de conta as seguintes igualdades

$$(1 - z)(1 + z + \cdots + z^{n-1}) = (1 + z + \cdots + z^{n-1}) - (z + \cdots + z^n) = 1 - z^n,$$

deduz-se

$$S_n = \begin{cases} \frac{1 - z^n}{1 - z}, & z \neq 1 \\ n, & z = 1 \end{cases}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_1.$$

**3.** Fixa um sucessão de termos complexos  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e um numero natural positivo  $k$ , consideramos a sucessão das somas parciais

$$S_n(j) = \sum_{k=1}^n k^j (a_k - a_{k+1}), \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Pretendemos obter uma fórmula de recorrência em  $j$  para as somas  $S_n(j)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Tendo em linha de conta o binómio de *Newton*, obtém-se

$$\begin{aligned} S_n(j) &= \sum_{k=1}^n k^j (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n [k^j a_k - (k+1)^j a_{k+1}] + \sum_{k=1}^n [(k+1)^j - k^j] a_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n [k^j a_k - (k+1)^j a_{k+1}] + \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j}{l} \sum_{k=1}^n k^l a_{k+1} = a_1 - (n+1)^j a_{n+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j}{l} \sum_{k=1}^n k^l a_{k+1}. \end{aligned}$$

Em particular, é válida a seguinte fórmula

$$S_n(j) = a_1 - (n+1)^j a_{n+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j}{l} \sum_{k=1}^n k^l a_{k+1}. \quad (1)$$

Suponha-se que a sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é uma progressão geométrica, i.e.  $a_n = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $j \in \mathbb{N}$  fixo, denote-se por  $T_n(j)$ , o termo de ordem  $n$  da sucessão das somas parciais

$$z + 2^j z^2 + \cdots + n^j z^n, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Para quaisquer que sejam  $j \in \mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{N}_1$ , verifica-se

$$S_n(j) = \sum_{k=1}^n k^j (z^k - z^{k+1}) = (1-z) \sum_{k=1}^n k^j z^k = (1-z) T_n(j).$$

Consequentemente, de (1) infere-se

$$\begin{aligned} T_n(j) &= \frac{1}{1-z} S_n(j) = \frac{z - (n+1)^j z^{n+1}}{1-z} + \frac{z}{1-z} \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j}{l} \sum_{k=1}^n k^l z^k \\ &= \frac{z - (n+1)^j z^{n+1}}{1-z} + \frac{z}{1-z} \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j}{l} T_n(l). \end{aligned}$$

Mostrámos que é possível calcular as somas parciais  $T_n(j)$  por intermédio de combinações lineares das somas parciais  $T_n(l)$ ,  $l = 0, \dots, j-1$ , i.e. é válida a seguinte **fórmula de recorrência**

$$T_n(j) = \frac{z - (n+1)^j z^{n+1}}{1-z} + \frac{z}{1-z} \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j}{l} T_n(l), \quad j \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}_1. \quad (2)$$

Determinamos  $T_n(1)$  por intermédio de aplicação da fórmula (2). Como  $T_n(0)$  é a sucessão das somas parciais da progressão geométrica, obtemos sucessivamente

$$T_n(1) = z + 2z^2 + \cdots + nz^n = \frac{z - (n+1)z^{n+1}}{1-z} + \frac{z^2 - z^{n+2}}{(1-z)^2} = \frac{z - (n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{(1-z)^2}, \quad z \neq 1.$$

□

**Definição 1** Fixa uma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  de termos complexos, diz-se que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é convergente se a sucessão das somas parciais tem limite finito, i.e. se

$$\lim_n S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \text{ existe em } \mathbb{C}.$$

A série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diz-se divergente no caso contrário. Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge, a sua soma é o número complexo  $s := \lim_n S_n$  e denotamo-lo por  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

## Exemplos

4. Suponha-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  são duas séries convergentes. Mostraremos de seguida que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$  é convergente. Se  $S_n, T_n$  e  $U_n$  denotam respectivamente os termos de ordem  $n$  das sucessões das somas parciais das séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$  então

$$U_n = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1}) = (a_0 + \cdots + a_{n-1}) + (b_0 + \cdots + b_{n-1}) = S_n + T_n, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Como as sucessões de termo geral  $S_n$  e  $T_n$  são sucessões convergentes então  $U_n, n \in \mathbb{N}_1$  é uma sucessão convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_n U_n = \lim_n (S_n + T_n) = \lim_n S_n + \lim_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

De forma semelhante mostra-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n, \alpha \in \mathbb{C}$  é convergente e é válida a seguinte igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

5. Considere-se a sucessão  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$  e  $S_n$  o termo geral da sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Tendo em conta que

$$S_{2n} = (a_0 + a_1) + \cdots + (a_{2n-2} + a_{2n-1}) = 0 \quad \text{e} \quad S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n} = 1,$$

conclui-se que as sub-sucessões dos termos pares e dos termos ímpares de  $S_n, n \in \mathbb{N}_1$  convergem a limites distintos. Logo, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  diverge.

□

Em alternativa à notação  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , utilizamos  $\sum_n a_n$  ou  $\sum a_n$ , de acordo com critérios de simplicidade e consoante a adequação gráfica. A simbologia  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  denota a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}$ . A omissão do índice inferior no símbolo  $\sum a_n$ , não deverá causar confusão, e em consideração das seguintes observações. Mostramos abaixo que a convergência ou divergência duma série não depende do índice aonde se inicia a “soma”. Ao que respeita à soma de séries convergentes, facilmente se obtêm a igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = (a_0 + \cdots + a_{k-1}) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Frequentemente confundem-se séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  convergentes com a sua soma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . A imprecisão mencionada não ofende os objectivos do decorrente texto.

**Proposição 2** *A natureza duma série não depende dum número finito de termos, i.e. se  $a_n, n \in \mathbb{N}$  e  $b_n, n \in \mathbb{N}$  são duas sucessões tais que o conjunto  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$  é finito, então as séries  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  tem a mesma natureza.*

**Demonstração:** Como  $a_n = b_n, n \in \mathbb{N}$  excepto num número finito de termos, então está bem definido o número natural  $m := \max\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$ . Se  $S_n$  e  $T_n$  denotam respectivamente as sucessões das somas parciais das séries  $\sum_{n=0} a_n$  e  $\sum_{n=0} b_n$ , então

$$S_n = (a_0 + \cdots + a_m) + (a_{m+1} + \cdots + a_n) = T_n + S_{m+1} - T_{m+1}, \quad n \geq m.$$

Considerando que  $S_{m+1} - T_{m+1}$  é uma constante independente de  $n$ , da igualdade anterior é imediato que  $\lim_n S_n$  existe sse  $\lim_n T_n$  existe. ■

**Proposição 3 (Condição necessária)** *Seja  $a_n, n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos. Se a série  $\sum a_n$  é convergente então  $\lim_n a_n = 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $S_n$  a sucessão das somas parciais  $S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1}, n \in \mathbb{N}_1$ . A convergência da série  $\sum a_n$  equivale à existência em  $\mathbb{C}$  do limite da sucessão  $S_n, n \in \mathbb{N}_1$ . Tendo em conta que subsucessões de sucessões convergentes convergem ao mesmo limite, obtém-se

$$a_n = S_{n+1} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_n S_n - \lim_n S_n = 0.$$

■

## Exemplos

6. [Série telescópica] No exemplo 1 obteve-se

$$\sum_{k=0}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) = c_0 - c_n, \quad n \geq 1.$$

Consequentemente a série  $\sum (c_k - c_{k+1})$  converge sse  $\lim_n c_n$  existe. Em caso afirmativo verifica-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) = c_0 - \lim_n c_n.$$

De novo do exemplo 1 infere-se que a série  $\sum (c_k - c_{k+j}), j \in \mathbb{N}_2$  converge sse  $\lim_n (c_n + \cdots + c_{n+j-1})$  existe em  $\mathbb{R}$  e em caso afirmativo obtém-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_k - c_{k+j}) = \sum_{k=0}^{j-1} c_k - \lim_n \sum_{k=n}^{n+j-1} c_k.$$

Anote que a existência de limite finito da sucessão  $c_n, n \in \mathbb{N}$  não é condição necessária à convergência da série  $\sum (c_k - c_{k+j}), j \in \mathbb{N}_2$ . Como exemplo considere  $\theta_j = 2\pi/j, j \in \mathbb{N}_2$  e  $c_n = E^n(i\theta_j), n \in \mathbb{N}$ . De  $c_{n+j} = E(in\theta_j) E(ij\theta_j) = E(in\theta_j)$ , é evidente que a série  $\sum (c_k - c_{k+j}) = \sum 0$  converge. No entanto, a sucessão  $c_n, n \in \mathbb{N}$  é periódica com período  $j$  e têm  $j$  termos distintos, precisamente as raízes de ordem  $j$  da unidade. Consequentemente  $c_n, n \in \mathbb{N}$  não é convergente.

7. [Série geométrica] No exemplo 2 obteve-se

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \begin{cases} \frac{1-z^n}{1-z} & , z \neq 1 \\ n & , z = 1 \end{cases}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_1.$$

Se  $|z| \geq 1$  então  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  não é infinitésimo e consequentemente a série  $\sum z^n$  diverge. Caso  $|z| < 1$  então  $\lim_n |z|^n = 0$  e logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

8. No exemplo 3 obteve-se uma fórmula de recorrência em  $j$  para a sucessão das somas parciais da série  $\sum n^j z^n$ . Se  $|z| \geq 1$  então o termo geral não é um infinitésimo e consequentemente a série diverge. Tendo em conta que  $\lim_n n^j z^n = 0$ ,  $|z| < 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$  e (2), deixamos ao ligeiro cuidado do leitor mostrar por indução matemática que a série  $\sum n^j z^n$ ,  $|z| < 1$  é convergente, qualquer que seja  $j \in \mathbb{N}$ . Definindo

$$T(j) = \sum_{n=1}^{\infty} n^j z^n, \quad |z| < 1$$

de (2) obtêm-se a relação de recorrência

$$T(j) = \frac{z}{1-z} + \frac{z}{1-z} \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j}{l} T(l), \quad j \in \mathbb{N}_1, |z| < 1.$$

Em particular

$$T(1) = z + 2z^2 + \cdots + nz^n + \cdots = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1.$$

9. Suponha convergentes as séries de termos complexos  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  e considere a sucessão  $c_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  cujos termos pares são dados por  $c_{2n} = a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e os termos ímpares definidos por  $c_{2n+1} = b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Se os termos gerais das sucessões das somas parciais das séries  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  e  $\sum c_n$  são respectivamente denotados por  $S_n$ ,  $T_n$  e  $U_n$  então

$$U_{2n} = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1}) = (a_0 + \cdots + a_{n-1}) + (b_0 + \cdots + b_{n-1}) = S_n + T_n$$

$$U_{2n+1} = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1}) + a_n = (a_0 + \cdots + a_{n-1}) + (b_0 + \cdots + b_{n-1}) + a_n = S_n + T_n + a_n.$$

Porque as séries  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  são convergentes então  $\lim_n S_n$ ,  $\lim_n T_n$  existem e  $\lim_n a_n = 0$ . Logo  $\lim_n U_{2n} = \lim_n U_{2n+1}$  e em consequência  $\lim_n U_n$  existe e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_n U_n = \lim_n (S_n + T_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n).$$

□

**Proposição 4** *Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos reais não negativos. Então a série  $\sum a_n$  é convergente sse a sucessão das somas parciais  $S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é majorada.*

**Demonstração:** De  $a_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  obtêm-se  $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ , i.e. a sucessão  $S_n$  é monótona crescente. Conclui-se que  $\lim_n S_n$  é finito sse  $S_n$  é majorada. ■

## Exemplos

**10.** Considere  $a_n, n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos reais não negativos e suponha a existência duma constante  $C > 0$  verificando

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \leq C, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_1 \quad \text{e} \quad 0 \leq r < 1. \quad (3)$$

Da proposição 4 deduz-se a convergência da série  $\sum a_n r^n$ , qualquer que seja  $r \in [0, 1[$  e de (3) infere-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \leq C, \quad 0 \leq r < 1.$$

Se  $r_n = \sqrt[n]{1/2}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  então

$$0 < r_n < 1 \quad \text{e} \quad r_n^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k/n} \geq \frac{1}{2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Consequentemente

$$0 \leq a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} \leq 2(a_0 + a_1 r_n + \dots + a_{n-1} r_n^{n-1}) \leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j r_n^j \leq 2C.$$

De novo a proposição 4 permite afirmar que a série  $\sum a_n$  é convergente. É evidente que se  $\sum a_n$  é uma série convergente de termos reais não negativos então a condição (3) é verificada. Portanto, uma série  $\sum a_n$ , de termos não negativos, converge sse verifica a condição (3), usualmente designada por **condição de Abel**.

**11.** Seja  $a_n, n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos reais não negativos e  $S_n, n \in \mathbb{N}_1$  a sucessão das somas parciais  $S_n = a_0 + \dots + a_{n-1}$ . Considere a média aritmética dos  $n$  primeiros termos da sucessão de termo geral  $S_n$ , i.e.

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} = a_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)a_2 + \dots + \frac{1}{n}a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Suponha a convergência (em  $\mathbb{C}$ ) da sucessão  $\sigma_n, n \in \mathbb{N}_1$ . Então

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left[ a_0 + \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)a_1 + \dots + \left(1 - \frac{n}{n^3}\right)a_n \right] + \left[ \frac{1}{n^3}a_1 + \dots + \frac{n}{n^3}a_n \right] \\ &\leq \sigma_{n^3} + \frac{1}{n}S_{n+1}. \end{aligned}$$

Logo, para ordens superiores a determinado natural verifica-se

$$0 \leq S_{n+1} \leq \frac{n}{n-1} \sigma_{n^3}.$$

Segue a majoração da sucessão das somas parciais  $S_n, n \in \mathbb{N}_1$  e em consequência a sua convergência.

A sucessão  $\sigma_n, n \in \mathbb{N}_1$  encontra-se bem definida, caso os termos da sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  incluam-se no plano complexo, não necessariamente não negativos. Mostra-se de seguida que se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é



convergente então a sucessão  $\sigma_n, n \in \mathbb{N}_1$  converge e verifica-se  $\lim_n \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Denote a soma da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  por  $s$ . Dado  $\epsilon > 0$  considere uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $(j > p) \Rightarrow |S_j - s| \leq \epsilon$ . Então

$$\begin{aligned} 0 \leq |\sigma_n - s| &= \frac{|(S_1 - s) + \cdots + (S_p - s) + \cdots + (S_n - s)|}{n} \\ &\leq \frac{|S_1 - s|}{n} + \cdots + \frac{|S_p - s|}{n} + \frac{n-p}{n} \epsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \epsilon. \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de  $\epsilon > 0$  deduz-se a igualdade  $\lim_n \sigma_n = s$ . Em resumo, conclui-se que uma série de termos reais não negativos é convergente sse a sucessão  $\sigma_n, n \in \mathbb{N}_1$  é convergente e em caso afirmativo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_n \sigma_n.$$

Terminamos o exemplo anotando a importância em se considerar sucessões de termos reais não negativos. De facto, considerando  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$  e o exemplo 5, o leitor sem dificuldades deduz

$$\sigma_{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Logo a sucessão  $\sigma_n, n \in \mathbb{N}_1$  é convergente e no entanto a série  $\sum (-1)^n$  é divergente. É usual dizer que a **soma de Cesàro** da série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  é  $1/2$ .

**12. [Série Harmónica]** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  é usualmente designada por série harmónica. Demonstre-se a divergência da série harmónica, não obstante o termo geral  $1/n, n \in \mathbb{N}_1$  ser um infinitésimo. Considere  $S_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$  a sucessão das somas parciais da série harmónica. Em conta de

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

obtemos

$$S_{2^n} - 1 = \sum_{j=0}^{n-1} (S_{2^{j+1}} - S_{2^j}) \geq n \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Assim, a sucessão  $S_n, n \in \mathbb{N}_1$  não é majorada e logo não converge em  $\mathbb{R}$ . A série harmónica diverge.

□

Uma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  diz-se uma **sucessão de Cauchy** se verifica a seguinte condição

$$\forall \epsilon > 0 \exists j \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n \geq j) \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Da análise real elementar em espaços euclidianos de dimensão finita sabe-se que as sucessões de Cauchy são precisamente as sucessões convergente. Anota-se que os argumentos na demonstração da divergência da série harmónica, exposta no exemplo 12, poder-se-iam resumir à observação de que de (4) infere-se que a sucessão  $S_n, n \in \mathbb{N}$  não é sucessão de Cauchy e por tão pouco diverge. No seguinte resultado expõe-se genericamente os argumentos em questão.

**Proposição 5 (Cauchy)** *Seja  $a_n, n \in \mathbb{N}$  uma sucessão complexa. Então  $\sum a_n$  converge sse*

$$\forall \epsilon > 0 \exists j \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m \geq n \geq j) \Rightarrow |a_n + \cdots + a_{m-1}| < \epsilon.$$

**Demonstração:** A demonstração resume-se à observação de que as sucessões convergentes são precisamente as sucessões de Cauchy. Por definição, a série  $\sum a_n$  é convergente sse a sucessão das somas parciais  $S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é convergente. Porque as sucessões convergentes são precisamente as sucessões de Cauchy então  $\sum a_n$  é convergente sse para qualquer que seja  $\epsilon > 0$  existe uma ordem  $j \in \mathbb{N}$  tal que a condição  $|S_m - S_n| < \epsilon$  é verificada para quaisquer  $n, m \geq j$ . Para verificar  $|S_m - S_n| < \epsilon$ , supomos  $m > n$ . Terminamos a prova considerando que

$$|S_m - S_n| = |(a_0 + \cdots + a_{m-1}) - (a_0 + \cdots + a_{n-1})| = |a_n + \cdots + a_{m-1}|, \quad m > n.$$

■

Uma série  $\sum a_n$  de termos complexos diz-se **absolutamente convergente** se a série dos módulos  $\sum |a_n|$  é convergente.

**Proposição 6** *Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos. Suponha-se que a série  $\sum a_n$  é absolutamente convergente. Então a série  $\sum a_n$  é convergente e verifica-se a seguinte desigualdade*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

**Demonstração:** Sejam  $S_n, M_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  respectivamente as sucessões das somas parciais das séries  $\sum a_n$  e  $\sum |a_n|$ . Por hipótese, a sucessão  $M_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é uma sucessão de Cauchy. Logo, dado  $\epsilon > 0$  existe uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $m \geq n \geq p \Rightarrow |M_{m+1} - M_n| < \epsilon$ . Tendo em conta a seguinte desigualdade

$$|S_{m+1} - S_n| = |a_n + \cdots + a_m| \leq |a_n| + \cdots + |a_m| = |M_{m+1} - M_n|, \quad m \geq n,$$

conclui-se que  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é sucessão de Cauchy e consequentemente converge. Para demonstrar a desigualdade entre somas das respectivas séries, é suficiente considerar o seguinte

$$0 \leq |S_n| = |a_0 + \cdots + a_{n-1}| \leq |a_0| + \cdots + |a_{n-1}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

■

Uma série de termos complexos  $\sum a_n$  diz-se **simplesmente convergente** se é convergente e não é absolutamente convergente.

## Exemplos

**13.** Seja  $\gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  um infinitésimo de termos complexos e considere a série  $\sum \gamma_n \xi^n$ ,  $|\xi| = 1$ . Claramente  $\sum \gamma_n \xi^n$  é absolutamente convergente sse  $\sum |\gamma_n|$  converge. De seguida procuramos condições mais gerais assegurando a convergência da série  $\sum \gamma_n \xi^n$ , caso  $|\xi| = 1$  e  $\xi \notin \mathbb{R}$ . Precisamente, mostramos que se  $\sum |\gamma_{n+2} - \gamma_n|$  converge, então a série  $\sum \gamma_n \xi^n$ ,  $\xi \notin \mathbb{R}$  converge. Como  $\xi \notin \mathbb{R}$ , a natureza da série é inalterada multiplicando todos os termos por  $(\xi - \bar{\xi})$ . Designando por  $S_n$  a sucessão das somas parciais da série  $(\xi - \bar{\xi}) \sum \gamma_n \xi^n$ , obtemos

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k (\xi - \bar{\xi}) \xi^k = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k (\xi^{k+1} - \xi^{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\gamma_{k+2} \xi^{k+1} - \gamma_k \xi^{k-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{k+1} (\gamma_k - \gamma_{k+2}).$$

Porque  $\lim \gamma_n \xi^{n+1} = 0$ , então a série telescópica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{n+2} \xi^{n+1} - \gamma_n \xi^{n-1})$$

é convergente e em consequência  $\sum \gamma_n \xi^n$  converge sse converge a seguinte série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^{n+1} (\gamma_n - \gamma_{n+2}). \quad (5)$$

Como por hipótese a série  $\sum |\gamma_n - \gamma_{n+2}|$  é convergente então a série em (5) é absolutamente convergente e a prova da asserção inicial está terminada, i.e.  $\sum \gamma_n \xi^n$  é absolutamente convergente sse  $\sum |\gamma_n|$  converge e  $\sum \gamma_n \xi^n$  é simplesmente convergente sempre que as séries  $\sum |\gamma_n - \gamma_{n+2}|$  e  $\sum |\gamma_n|$  são respectivamente convergentes e divergentes. Como exemplo concreto da convergência simples da série  $\sum \gamma_n \xi^n$ ,  $|\xi| = 1$ ,  $\xi \notin \mathbb{R}$  considere-se a sucessão

$$\gamma_n = \frac{1}{n + (-1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Porque  $\gamma_n \geq 1/(n-1)$  e a sucessão das somas parciais da série harmónica converge a  $+\infty$ , então  $\sum \gamma_n$  diverge. No entanto  $\gamma_n - \gamma_{n+2} \geq 0$  e logo a série  $\sum |\gamma_n - \gamma_{n+2}| = \sum (\gamma_n - \gamma_{n+2})$  é uma série telescópica. De  $\lim \gamma_n = 0$  segue  $\lim (\gamma_n + \gamma_{n+1}) = 0$  e consequentemente a série telescópica  $\sum (\gamma_n - \gamma_{n+2})$  é convergente. No caso (6) acima, é óbvia a importância da condição  $|\xi| = 1$ ,  $\xi \notin \mathbb{R}$ . De facto, verificou-se que a série  $\sum \gamma_n \xi^n$  diverge, se  $\xi = 1$ . Não obstante, no caso  $\xi = -1$  a série converge. Tal facto é eventualmente sem dificuldades averiguado, e.g. considerando que determinada série converge sse o termo geral é infinitésimo e a sucessão das somas parciais de ordem par é convergente [ver **pro.9**]. É evidente no exemplo 21 adiante, que a condição  $\xi \neq -1$  não pode ser levantada.

□

**Proposição 7 (Critério geral de comparação)** *Sejam  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  séries de termos reais não negativos, tais que a partir de certa ordem verifica-se  $a_n \leq b_n$ . Se  $\sum b_n$  converge então a série  $\sum a_n$  é necessariamente convergente.*

**Demonstração:** A proposição 2 permite supor, sem perda de generalidade, que  $a_n \leq b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Denotem-se respectivamente as sucessões das somas parciais das séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  por  $S_n$  e  $T_n$ . Segue sem dificuldade que

$$S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1} \leq b_0 + \cdots + b_{n-1} = T_n, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Como a sucessão  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é convergente então é majorada e consequentemente também  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é majorada. O termino da demonstração segue da proposição 4. ■

**Corolário 8** *Considerem-se sucessões  $a_n, b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  de termos reais não negativos. Para ordens superiores a determinado natural, suponha-se*

$$b_n > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1 b_n \leq a_n \leq \lambda_2 b_n,$$

onde  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ . Então as séries  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  são da mesma natureza.

**Demonstração:** Supondo a convergência da série  $\sum b_n$ , infere-se a convergência de  $\sum \lambda_2 b_n$ . Do critério geral de comparação, deduz-se a convergência da série  $\sum a_n$ . Reciprocamente, se  $\sum a_n$  converge então  $\sum \lambda_1^{-1} a_n$  converge. De novo, a convergência da série  $\sum b_n$ , segue do critério geral de comparação. ■

**Corolário 9** *Considerem-se sucessões  $a_n, b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  de termos não negativos e suponha-se que o limite  $l := \lim a_n/b_n$  existe. São válidas as seguintes asserções:*

- i) se  $l \in \mathbb{R}^+$  então as séries  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  são da mesma natureza;
- ii) se  $l = 0$  então da convergência de  $\sum b_n$  infere-se a convergência de  $\sum a_n$ ;
- iii) se  $l = +\infty$  então da convergência de  $\sum a_n$  infere-se a convergência de  $\sum b_n$ .

## Exemplos

14. Para qualquer que seja  $\alpha < 1$ , é evidente a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Logo, considerando a divergência da série harmônica, conclui-se a divergência das seguintes séries

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha < 1.$$

15. Tendo em conta que a série

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

é uma série telescópica convergente, segue do critério geral de comparação e das desigualdades

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

que a seguinte série

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0} \frac{1}{(n+1)^2}$$

é absolutamente convergente. Em consequência, deduz-se do critério geral de comparação, a convergência das séries

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 2.$$

Se  $p(z) = c_k z^k + \dots + c_0$  e  $q(z) = d_j z^j + \dots + d_0$  são polinómios em  $z$ , respectivamente de graus  $k \in \mathbb{N}$  e  $j \in \mathbb{N}$ , mostramos de seguida que a série  $\sum p(n)/q(n)$  converge absolutamente sse  $j - k \geq 2$ . O leitor poderá confirmar sem dificuldades que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{p(n)}{q(n)n^{k-j}} \right| = \left| \frac{c_k}{d_j} \right| \neq 0.$$

Do corolário 9 infere-se que as séries  $\sum |p(n)/q(n)|$  e  $\sum 1/n^{j-k}$  têm a mesma natureza. A prova da asserção termina considerando o critério geral de comparação, as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} \frac{1}{n^{j-k}} \leq \frac{1}{n^2} & , \quad j-k \geq 2 \\ \frac{1}{n^{j-k}} \geq \frac{1}{n} & , \quad j-k \leq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_1,$$

a convergência de  $\sum 1/n^2$  e a divergência da série harmónica.

**16.** Considere a sucessão de termos positivos dada por

$$a_n = \frac{2n-1}{2n} \left[ \frac{2n+1}{2n+2} \right]^2 \cdots \left[ \frac{4n-3}{4n-2} \right]^n, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

É evidente que

$$a_n = \left[ 1 - \frac{1}{2n} \right] \left[ 1 - \frac{1}{2n+2} \right]^2 \cdots \left[ 1 - \frac{1}{4n-2} \right]^n \leq \left[ 1 - \frac{1}{4n-2} \right]^{\sum_{j=1}^n j} = \left[ 1 - \frac{1}{4n-2} \right]^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Fixe-se um número real  $r$  nas condições  $1/\sqrt[n]{e} < r < 1$ . Porque

$$\lim_n \left( 1 - \frac{1}{4n-2} \right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e}},$$

então, para ordens superiores a determinado natural, verifica-se

$$0 \leq a_n \leq \left[ 1 - \frac{1}{4n-2} \right]^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq r^{n+1}.$$

A série  $\sum r^{n+1}$  é convergente. Do critério geral de comparação conclui-se a convergência da série  $\sum a_n$ .

□

O seguinte resultado é usualmente designado por **critério da raiz**.

**Proposição 10** *Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos e considere-se  $\gamma := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ .*

*i) Se  $\gamma < 1$  então  $\sum a_n$  é absolutamente converge.*

*ii) Se  $\gamma > 1$  então  $\sum a_n$  diverge.*

**Demonstração:** Inicia-se demonstrando a alínea i). Suponha-se  $\gamma < 1$  e determine-se  $\epsilon > 0$  tal que  $\gamma + \epsilon < 1$ . Da definição de limite superior, retira-se a existência duma ordem  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $\sqrt[k]{|a_k|} < (\gamma + \epsilon) < 1$ , para  $k \geq j$ . Consequentemente

$$k \geq j \Rightarrow |a_k| \leq (\gamma + \epsilon)^k.$$

Como  $r := \gamma + \epsilon < 1$  então a série  $\sum_k r^k$  é convergente e do critério geral de comparação conclui-se que  $\sum_k |a_k|$  é convergente, i.e.  $\sum a_k$  é absolutamente convergente. De seguida demonstramos ii). Se  $\gamma > 1$  então existe  $r > 1$  e uma subsucessão  $a_{n_k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  verificando

$$|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \geq r > 1 \quad \text{e logo} \quad |a_{n_k}| \geq r^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Porque  $|a_n|$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tem subsucessões infinitamente grandes então  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  não é infinitésimo. Logo a série  $\sum a_n$  diverge. ■

Para determinadas sucessões  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é laborioso lidar com o limite  $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ . O seguinte resultado oferece-se alternativas a tal proceder.

**Proposição 11** *Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tal que para  $n$  suficientemente grande verifica-se  $a_n \neq 0$ . Então*

$$\liminf |a_{n+1}/a_n| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup |a_{n+1}/a_n|.$$

**Demonstração:** Seja  $r := \limsup |a_{n+1}/a_n|$  e  $\epsilon > 0$ . Para  $n$  superior a determinado natural, verifica-se  $|a_{n+1}/a_n| < r + \epsilon$ . Em consequência e sem dificuldades obtém-se

$$\left| \frac{a_n}{a_j} \right| = \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| \times \cdots \times \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \right| \times \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq (r + \epsilon)^{n-j}, \quad n \geq j.$$

Atentando à monotonia da função  $\mathbb{R}_0^+ \ni x \rightarrow \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  deduz-se que

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_j|} (r + \epsilon)^{1-j/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r + \epsilon.$$

Da arbitrariedade de  $\epsilon > 0$  conclui-se que

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup |a_{n+1}/a_n|.$$

Resta demonstrar a desigualdade  $\liminf |a_{n+1}/a_n| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|}$ . Se  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é uma sucessão nas condições do enunciado, e de acordo com as convenções usuais  $1/0^+ = +\infty$  e  $1/(+\infty) = 0$ , abandona-se ao cuidado do leitor a prova da seguinte asserção

$$\limsup \frac{1}{|a_n|} = \frac{1}{\liminf |a_n|}.$$

Considerando a sucessão  $b_n = a_n^{-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , bem definida para ordens superiores a determinado natural, obtemos da primeira parte da prova que

$$\frac{1}{\liminf \sqrt[n]{|a_n|}} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \leq \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\liminf |a_{n+1}/a_n|}.$$

Assim terminamos a demonstração. ■

**Corolário 12 (Critério da razão)** *Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos não nulos.*

- i) *Se  $\limsup |a_{n+1}/a_n| < 1$  então  $\sum a_n$  é absolutamente converge;*
- ii) *Se  $\liminf |a_{n+1}/a_n| > 1$  então  $\sum a_n$  diverge.*

**Demonstração:** Da proposição 11 deduz-se que se  $\limsup |a_{n+1}/a_n| < 1$  ou  $\liminf |a_{n+1}/a_n| > 1$  então respectivamente  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  e  $\liminf \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ . As conclusões são por tão pouco consequências imediatas da proposição 10. ■

## Exemplos

**17.** Considere uma sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  nas condições do corolário 12 e suponha a existência do limite  $\gamma := \lim |a_{n+1}/a_n|$ . Logo  $\limsup |a_{n+1}/a_n| = \liminf |a_{n+1}/a_n| = \lim |a_{n+1}/a_n| = \gamma$ . Conclui-se:

- i) se  $\gamma < 1$  então  $\sum a_n$  é absolutamente converge;
- ii) se  $\gamma > 1$  então  $\sum a_n$  diverge.

**18.** Com propósito em comentar o corolário 12, anota-se a existência de sucessões  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $c_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , verificando as condições  $\liminf a_{n+1}/a_n < 1$ ,  $\limsup c_{n+1}/c_n > 1$ , e não obstante, tais que as séries  $\sum a_n$  e  $\sum c_n$  respectivamente divergem e convergem. Como exemplos considerem-se

$$a_n = 2 + (-1)^{n+1} \quad \text{e} \quad c_n = 2^{-na_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De facto, de  $a_{2n}/a_{2n-1} = 1/3$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  deduz-se  $\liminf a_{n+1}/a_n \leq 1/3 < 1$ . Da desigualdade  $a_n \geq 1$ , segue que a série  $\sum a_n$  diverge. Finalmente, se  $b_n = na_n - (n+1)a_{n+1}$ , então

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 2^{b_n} = \frac{1}{4} 2^{[(-1)^{n+1}(2n+1)]}.$$

Logo  $\limsup c_{n+1}/c_n = +\infty$ . No entanto, como  $0 < c_n \leq 2^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  segue do critério geral de comparação que a série  $\sum c_n$  converge.

□

**Proposição 13 (Critério integral)** *Seja  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função decrescente. Então a série  $\sum f(n)$  é convergente sse o limite  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r f(x) dx$  existe e é finito. Se  $\sum f(n)$  diverge então*

$$\sum_{k=0}^n f(k) \sim \int_0^n f(x) dx, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

**Demonstração:** Tendo em linha de conta que a função  $f$  é monótona decrescente, conclui-se

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(j+1) \leq \int_0^n f(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} f(x) dx \leq \sum_{j=0}^{n-1} f(j). \quad (8)$$

Como  $f(x) \geq 0$ ,  $x \geq 0$  então as sucessões  $\sum_{j=0}^{n-1} f(j)$  e  $\int_0^n f(x) dx$  são monótonas crescentes e logo convergem para limite finito sse são majoradas. Portanto de (8) resulta que a série  $\sum f(n)$  converge sse  $\lim_n \int_0^n f(x) dx$  é finito. Porque a função de variável real  $\mathbb{R}_0^+ \ni r \rightarrow \int_0^r f(x) dx$  é crescente então  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r f(x) dx$  ( $r \in \mathbb{R}^+$ ) é finito sse  $\lim_n \int_0^n f(x) dx$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) é finito. Para terminar, suponha-se que a série  $\sum f(n)$  é divergente. Dado tratar-se duma série de termos positivos então  $\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = +\infty$ . Em particular, a partir de certa ordem  $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) > 0$ , o que permite dividir os membros das inequações (8) para obter

$$1 + \frac{f(n) - f(0)}{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)} \leq \frac{\int_0^n f(x) dx}{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)} \leq 1.$$

Como

$$\lim_n \frac{f(n) - f(0)}{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)} = 0,$$

do teorema das sucessões enquadradas deduz-se (7). ■

## Exemplos

**19. [Séries de Dirichlet]** A função  $f_\alpha : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f_\alpha(x) = (x+1)^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$  encontra-se nas condições da proposição 13. Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \text{ converge sse } \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \frac{1}{(x+1)^\alpha} dx \text{ é finito.}$$

Porque

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \frac{1}{(x+1)^\alpha} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} [(r+1)^{1-\alpha} - 1] & , \alpha \neq 1 \\ \ln(r+1) & , \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & , \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & , \alpha > 1 \end{cases},$$

conclui-se o seguinte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \text{ converge sse } \alpha > 1.$$

Se  $0 < \alpha \leq 1$  então

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \sim \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{1-\alpha} - 1] & , \alpha < 1 \\ \ln(n+1) & , \alpha = 1 \end{cases}.$$

□

Abaixo introduz-se uma técnica de soma elementar, por semelhança com a primitivação por partes do cálculo integral, usualmente designada de **soma por partes**. A soma por partes será ferramenta essencial à demonstração dos resultados finais da secção, em si as únicas proposições apresentadas no decorrente texto e adequadas ao estudo de séries simplesmente convergentes.

Se  $u_n, v_n, n \in \mathbb{N}$  são sucessões de termos complexos e  $U_n, n \in \mathbb{N}_1$  é a sucessão das somas parciais  $U_n = u_0 + \dots + u_{n-1}$  então é válida a seguinte fórmula

$$\sum_{j=0}^n u_j v_j = U_{n+1} v_{n+1} + \sum_{j=0}^n U_{j+1} (v_j - v_{j+1}).$$

Embora a fórmula anterior seja de natureza elementar, apresentamos de seguida uma prova baseada em manipulações algébricas do símbolo de somatório:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n U_{j+1} (v_j - v_{j+1}) &= \sum_{j=0}^n U_{j+1} v_j - \sum_{j=0}^n U_{j+1} v_{j+1} = \sum_{j=0}^n U_{j+1} v_j - \sum_{j=1}^{n+1} U_j v_j \\ &= U_1 v_0 - U_{n+1} v_{n+1} + \sum_{j=1}^n (U_{j+1} - U_j) v_j = \left( \sum_{j=0}^n u_j v_j \right) - U_{n+1} v_{n+1}. \end{aligned}$$

**Proposição 14 (Critério de Dirichlet)** *Considerem-se sucessões  $u_n, v_n, n \in \mathbb{N}$  de termos complexos e  $U_n, n \in \mathbb{N}_1$  a sucessão das somas parciais  $U_n = u_0 + \dots + u_{n-1}$ . Se a sucessão  $v_n, n \in \mathbb{N}$  é decrescente a zero e  $U_n$  é limitada então a série  $\sum u_n v_n$  é convergente.*



**Demonstração:** Seja  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ . Da soma por partes, para  $m \geq n$ ;  $n, m \in \mathbb{N}$  verifica-se

$$\begin{aligned} |S_{m+1} - S_n| &= \left| \sum_{j=n}^m u_j v_j \right| \leq |U_{m+1} v_{m+1}| + |U_n v_n| + \sum_{j=n}^m |U_{j+1}|(v_j - v_{j+1}) \\ &\leq M(v_{m+1} + v_n + \sum_{j=n}^m (v_j - v_{j+1})) = 2Mv_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Porque  $\lim_n v_n = 0$ , dado  $\epsilon > 0$  existe uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq p$  então  $0 < v_n < \epsilon/(2M)$ . Tendo em conta (9) obtemos

$$m \geq n \geq p \Rightarrow |S_{m+1} - S_n| < \epsilon$$

e portanto  $S_n$  é sucessão de Cauchy. ■

**Corolário 15 (Critério de Abel)** *Sejam  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $v_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sucessões respectivamente de termos complexos e de termos reais, tais que a sucessão das somas parciais  $U_n = u_0 + \dots + u_{n-1}$  é convergente e a sucessão  $v_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente e limitada. Então a série  $\sum u_n v_n$  é convergente.*

**Demonstração:** Como a sucessão  $v_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente e limitada então é convergente em  $\mathbb{R}$ . Seja  $v := \lim v_n$  e considere-se a sucessão  $\tilde{v}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  aonde  $\tilde{v}_n = v_n - v$ . Então  $\tilde{v}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é uma sucessão decrescente a zero e do critério de Dirichlet infere-se que  $\sum_n (v_n - v)u_n$  é uma série convergente. Se  $\tilde{S}_n$  e  $S_n$  designam respectivamente as sucessões das somas parciais das série  $\sum \tilde{v}_n u_n$  e  $\sum v_n u_n$ , então

$$S_n = \tilde{S}_n + vU_n,$$

e logo  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é convergente. ■

## Exemplos

**20.** Considere-se a sucessão das somas parciais da progressão geométrica de razão  $\xi \in \mathbb{C}$

$$U_n = 1 + \xi + \dots + \xi^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Supondo  $|\xi| = 1$  e  $\xi \neq 1$ , do exemplo 2 obtém-se

$$|U_n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k \right| = \left| \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi} \right| \leq \frac{1}{|\sin \theta/2|},$$

aonde  $\xi = E(i\theta)$ ,  $\theta \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Porque a sucessão  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é limitada, em conta do Critério de Dirichlet, conclui-se que se  $\gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é uma sucessão de termos positivos decrescentes a zero, então a série  $\sum \gamma_n \xi^n$  é convergente. No entanto  $\sum \gamma_n \xi^n$  não é necessariamente absolutamente convergente. Por exemplo, considerando  $\gamma_n = n^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\xi^n}{n^\alpha} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad \text{diverge.}$$

**21.** Considera-se de seguida a sucessão

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

É evidente que  $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$  é uma sucessão de termos positivos. Porque a sucessão  $1/n, n \in \mathbb{N}_1$  é decrescente a zero então do exemplo 20 deduz-se a convergência da série  $\sum (-1)^n / \sqrt{n}$ . Como  $\sum 1/n$  diverge então a série  $\sum \gamma_n$  é a soma duma série divergente com outra convergente. Logo  $\sum \gamma_n$  é divergente. De forma semelhante, do critério de Dirichlet deduz-se a convergência (simples) das séries  $\sum \xi^n / n, |\xi| = 1, \xi \neq 1$  e de  $\sum (-\xi)^n / \sqrt{n}, |\xi| = 1, -\xi \neq 1$ . Logo, as séries  $\sum \gamma_n \xi^n, |\xi| = 1, \xi \neq \pm 1$  convergem simplesmente. Assim, duas aplicações sucessivas do critério de Dirichlet permitiram ultrapassar a dificuldade constituída no facto da sucessão  $\gamma_n, n \in \mathbb{N}_1$  não ser monótona. Anota-se que a técnica exposta no exemplo 13 serviria os mesmos efeitos. Terminamos afixando a divergência nos casos  $\xi = \pm 1$ . A hipótese  $\xi = 1$  foi estudada acima, e se  $\xi = -1$  então a série

$$\sum (-1)^n \gamma_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum \frac{1}{n},$$

é a soma duma série convergente com outra divergente. Logo é uma série divergente.

□

## 2.1 Problemas

1. Averigue se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| i) $\sum_n 2^{(-1)^n n}$ ;                                      | ii) $\sum_n e^{-\sqrt{n}}$ ;   | iii) $\sum_n (\sqrt{n^j + 1} - \sqrt{n^j}), j \in \mathbb{N}_1$ ;              |
| iv) $\sum_n \frac{1}{(\ln n)^j}, j \in \mathbb{N}_1$ ;          | v) $\sum_n \ln \left(1 + \frac{1}{n^j}\right), j \in \mathbb{N}_1$ ; | vi) $\sum_n \sin \left(n\pi + \frac{(-1)^n}{n^j}\right), j \in \mathbb{N}_1$ ; |
| vii) $\sum_n \frac{n^3 2^n + n}{n^2 3^n + 1}$ ;                 | viii) $\sum_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ ;                      | ix) $\sum_n \left(1 + \frac{2(-1)^n - 3}{n}\right)^{n^2}$ ;                    |
| x) $\sum_n \frac{1 + \sqrt{n} \xi^n}{n^2 + 1},  \xi  = 1$ ;     | xi) $\sum_n \frac{1 + \sqrt{n} \xi^n}{n - 1},  \xi  = 1$ ;           | xii) $\sum_n \frac{1 + n \xi^n}{n^2 - 1},  \xi  = 1$ ;                         |
| xiii) $\sum_n \sin \left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$ ,           | xiv) $\sum_n E \left(i(n\pi + \frac{1}{n})\right)$ ;                 | xv) $\sum_n \frac{1}{n(\ln n)^j}, j \in \mathbb{N}_1$ ;                        |
| xvi) $\sum_n \frac{1}{\ln n!}$ ;                                | xvii) $\sum_n \frac{1}{\ln(jn)!}, j \in \mathbb{N}_1$ ;              | xviii) $\sum_n \frac{1}{2^n \sqrt[n]{n+2}} \xi^n,  \xi  = 1$ ;                 |
| xix) $\sum_n \frac{1}{n + (-1)^n n^\alpha} \xi^n, \alpha < 1$ ; | xx) $\sum_n \frac{1}{n + (-1)^n}$ ;                                  | xxi) $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n + (-1)^n}$ .                                    |

2. Calcule a soma das seguintes séries ou justifique a sua divergência:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| i) $\sum_{n=k}^{\infty} z^n, z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ ;       | ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^{n+1}}{(1+z)^{n-1}}, z \in \mathbb{C}$ ; | iii) $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n, z \in \mathbb{C}$ ; |
| iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}, p \in \mathbb{N}_1$ ;         | v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots (n+j)}, j \in \mathbb{N}_2$ ;   | vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ ;         |
| vii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n \ln(n+1)}$ ; | viii) $\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{2n+1}{(n^2-1)(n^2+2n)}$ .                  |  |

3. Calcule os limites superior e inferior das sucessões de termo geral  $a_{n+1}/a_n$  e  $\sqrt[n]{a_n}$  e averigue da convergência da série  $\sum a_n$ , nos diferentes casos em que os termos da sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  são definidos por:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \frac{n^p}{n!}, p \in \mathbb{N}; & \text{ii)} \frac{a^n}{n^p}, a > 0, p \in \mathbb{N}; & \text{iii)} \frac{n^n}{n!}; & \text{iv)} \frac{n^n}{(2n)!}; \\ \text{v)} \frac{a^n b^n}{a^n + b^n}, a, b \in \mathbb{R}^+; & \text{vi)} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n; & \text{vii)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n!}; & \text{viii)} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}; \\ \text{ix)} n^2 e^{-\sqrt{n}}; & \text{x)} n^r r^n, r > 0; & \text{xi)} r^{(-1)^n n^2}, r > 0; & \text{xii)} r^{(n^n)}, r > 0; \\ \text{xiii)} 2 + (-1)^n; & \text{xiv)} 2^{-n(2+(-1)^n)}; & \text{xv)} \frac{1}{1 + (-1)^n n}. \end{array}$$

4. Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão decrescente tal que a série  $\sum a_n$  converge. Mostre que  $a_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Considere uma sucessão de termos positivos  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e a sucessão das somas parciais

$$S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Suponha que  $\sum_n a_n$  converge e mostre que a série  $\sum_n S_n z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$  converge sse  $|z| < 1$ .

6. Considere  $\delta > 0$  fixo e mostre que a série  $\sum r_n$  diverge, para qualquer que seja a sucessão  $r_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  cujo conjunto dos termos verifica

$$\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \supset \mathbb{Q} \cap [-\delta, \delta].$$

7. Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos e defina-se a sucessão de termo geral

$$\alpha_n = a_n + \cdots + a_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

- i) Mostre que se a série convergente  $\sum a_n$  converge então  $\lim_n \alpha_n = 0$ .
  - ii) Forneça exemplo duma sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tal que a série  $\sum a_n$  diverge e  $\lim_n \alpha_n = 0$ .
8. Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão decrescente de termos positivos.
- i) Mostre que se a série  $\sum a_n < \infty$  converge então  $\lim_n n a_n = 0$ .
  - ii) Forneça exemplo duma sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  decrescente de termos positivos tal que a série  $\sum a_n$  diverge e  $\lim_n n a_n = 0$ .
9. Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos e  $S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1}$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum a_n$ . Demonstre que:
- i) a série  $\sum a_n$  converge sse a sucessão  $S_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é convergente e  $\lim a_n = 0$ ;
  - ii) se  $a_n = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  então  $S_{2n}$  é convergente e  $\sum a_n$  diverge.
10. Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos.
- i) Mostre que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a_n + a_{n+1})$  converge sse  $\lim a_n = 0$ , e em caso afirmativo a sua soma verifica  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a_n + a_{n+1}) = a_0$ .
  - ii) Mostre através de exemplo que é possível as séries  $\sum (-1)^n a_n$  e  $\sum (-1)^n (a_n + a_{n+1})$  serem respectivamente divergente e convergente.
  - iii) Suponha que a sucessão de termos complexos  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é limitada e mostre que a seguinte série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (a_n + a_{n+1})$$

converge.

11. Seja  $a_n, n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos. Mostre sucessivamente que:
- se as séries  $\sum a_{2n}$  e  $\sum a_{2n+1}$  são convergentes então  $\sum a_n$  converge;
  - Dê um exemplo duma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  de termos complexos tal que a série  $\sum a_n$  converge e no entanto  $\sum a_{2n}$  e  $\sum a_{2n+1}$  divergem.
12. Considere uma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  de termos não negativos.
- Mostre que se  $\sum a_n$  converge então  $\sum a_n^2$  converge.
  - Encontre um exemplo duma sucessão nas condições do enunciado tal que  $\sum a_n^2$  converge e  $\sum a_n$  diverge.
  - Justifique que retirando a hipótese  $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ , a asserção em i) não é válida.
13. Considere uma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  de termos não negativos.
- Mostre que se a série  $\sum a_n^2$  converge então  $\sum a_{2n}a_{2n+1}$  converge.
- Sugestão:** Considere a desigualdade  $(a - b)^2 \geq 0, a, b \in \mathbb{R}$ .
- Dê exemplo duma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  nas condições do enunciado, tal que  $\sum a_{2n}a_{2n+1}$  converge e  $\sum a_n^2$  diverge.
  - Suponha adicionalmente que a sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  é monótona. Mostre que se a série  $\sum a_{2n}a_{2n+1}$  converge então  $\sum a_n^2$  também converge.
14. Considere uma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  de termos não negativos.
- Mostre que se a série  $\sum a_n^2$  converge então  $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$  converge para  $\alpha > \frac{1}{2}$ .
  - Dê exemplo duma sucessão  $a_n, n \in \mathbb{N}$  de termos não negativos tal que  $\sum a_n^2$  converge e  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  diverge.
- Sugestão:** Para a alínea i) considere a desigualdade  $(a_n - \frac{1}{n^\alpha})^2 \geq 0, n \in \mathbb{N}_1$ .
15. Uma sucessão  $\alpha_j, j \in \mathbb{N}$  diz-se convexa se a sucessão  $a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}, n \in \mathbb{N}$  é decrescente.
- Verifique a seguinte igualdade
- $$\alpha_n - \alpha_m = \sum_{j=n}^{m-1} a_j, m > n,$$
- e conclua que se existe  $a_n < 0$  então  $\lim_n \alpha_n = +\infty$ .
- Suponha que  $\alpha_j, j \in \mathbb{N}$  é convexa e limitada e conclua que  $\alpha_j, j \in \mathbb{N}$  é decrescente e  $\lim na_n = 0$ .
- Sugestão:** A monotonia é consequência imediata de i). Para mostrar que  $\lim na_n = 0$  tenha em conta que  $\sum a_n$  converge e o problema 8.
- Nas condições da alínea ii) conclua que  $\sum_{n=0}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \alpha_1 - \lim_n \alpha_n$ .
16. Considere uma sucessão de termos complexos  $a_n, n \in \mathbb{N}$ . Demonstre sucessivamente que:
- se o limite  $\lim_n n^2 a_n$  existe, então as séries  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  e  $\sum a_n$  são convergentes e as suas somas verificam
- $$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}.$$
- se o limite  $\lim_n n^{k+1} a_n$  existe, então as séries  $\sum_n n^k(a_n - a_{n+1})$  e  $\sum_n n^j a_{n+1}, j = 0, \dots, k-1$  são convergentes e as suas somas verificam
- $$\sum_{n=1}^{\infty} n^k(a_n - a_{n+1}) = a_1 + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \sum_{n=1}^{\infty} n^j a_{n+1}.$$

iii) Fixos  $j \in \mathbb{N}$  e  $p \in \mathbb{N}_2$ , considere a sucessão de termo geral

$$a_n = \frac{1}{(n+j)(n+j+1)\cdots(n+j+p)}$$

e aplique as asserções em *i)* e *ii)* para calcular a soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n - a_{n+1}).$$

17. Seja  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função decrescente e  $\sum f(n)$  uma série convergente. Mostre que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \leq f(0) + \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r f(x) dx.$$

18. Fixo  $0 \leq \alpha \leq 1$ , considere as sucessões de termos gerais  $a_n = n^{-1}(\ln n)^{-\alpha}$ ,  $n \in \mathbb{N}_2$  e  $s_n = a_2 + \cdots + a_n$ . Mostre que

$$s_n \sim \begin{cases} \frac{\ln^{1-\alpha} n}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \ln \ln n & \alpha = 1 \end{cases}.$$

19. Considere uma sucessão infinitésima  $\gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que se existe  $j \in \mathbb{N}_1$  tal que  $\gamma_n - \gamma_{n+2j}$  é uma sucessão de termos reais decrescentes então a série  $\sum \xi^n \gamma_n$  é convergente para  $\xi = E(i\theta)$ ,  $\theta \neq k\pi/j$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

20. Considere uma sucessão infinitésima  $\gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que se existe  $j \in \mathbb{N}_1$  tal que  $\sum_n |\gamma_n - \gamma_{n+2j}|$  é convergente então a série  $\sum \xi^n \gamma_n$  é convergente para  $\xi = E(i\theta)$ ,  $\theta \neq k\pi/j$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 2.2 Séries de potências

Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos. Uma **série de potências** de  $z$  é uma série indexada no parâmetro complexo  $z$ , da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (1)$$

O termo  $a_n$  diz-se o **coeficiente** da potência  $z^n$ . As **regiões de convergência** e de convergência absoluta da série de potências (1) são respectivamente os subconjuntos de  $\mathbb{C}$  definidos por

$$\{z \in \mathbb{C} : \sum a_n z^n \text{ converge}\} \quad \text{e} \quad \{z \in \mathbb{C} : \sum a_n z^n \text{ converge absolutamente}\}.$$

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função definida no conjunto aberto não vazio  $U \subset \mathbb{C}$ , então  $f$  diz-se **analítica** em  $U$  se para qualquer  $w \in U$  existe  $\epsilon > 0$  e uma sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  de termos complexos, tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n, \quad \text{para qualquer } z \in D(w, \epsilon), \quad (2)$$

i.e. se numa vizinhança de  $w$ , a função  $f$  coincide com a soma duma série de potências. Nas condições de (2), diz-se que no disco  $D(w, \epsilon)$ , a função  $f$  é **representada** por a série de potências  $\sum a_n (z-w)^n$ . A função  $f$  diz-se **analítica no ponto**  $w \in \mathbb{C}$ , se é analítica numa vizinhança de  $w$  e diz-se uma **função inteira**, se é representada por uma série de potências convergente no plano complexo.

**Proposição 1** *Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos e  $w \in \mathbb{C}$ . De acordo com as usuais convenções  $1/0^+ = +\infty$  e  $1/(+\infty) = 0$ , considere-se*

$$r := \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]. \quad (3)$$

*Se  $0 < r < +\infty$ , então a série de potências  $\sum a_n(z-w)^n$  converge absolutamente no disco aberto  $D(w, r)$  e diverge em  $\mathbb{C} \setminus \text{cl } D(w, r)$ . Se  $r = 0$  ou  $r = +\infty$ , então  $\sum a_n(z-w)^n$  converge absolutamente no conjunto  $\{w\}$  ou  $\mathbb{C}$ , respectivamente, e diverge no complementar.*

**Demonstração:** Suponha-se inicialmente que  $0 < r < +\infty$ . Atentando a

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n(z-w)^n|} = |z-w| \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}, \quad (4)$$

sabemos da proposição [10 **sec.** 2.1] que a série  $\sum a_n(z-w)^n$  converge absolutamente se  $|z-w| < r$ , e diverge se  $|z-w| > r$ . Se  $r = 0^+$  ou  $r = +\infty$  então respectivamente  $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$  e  $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ . Consequentemente, de (4) e novamente da proposição [10 **sec.** 2.1], conclui-se que a série  $\sum a_n(z-w)^n$  diverge para todo o  $z \in \mathbb{C} \setminus \{w\}$  ou converge absolutamente para todo  $z \in \mathbb{C}$ , respectivamente. Resta observar que a série de potências  $\sum a_n(z-w)^n$ , em quaisquer dos casos é absolutamente convergente para  $z = w$ . ■

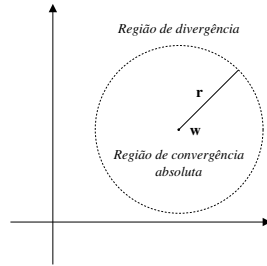


Figura 2.1: Região de convergência

O valor do limite em (3) é designado por **raio de convergência** da série  $\sum a_n(z-w)^n$ . Suponha-se de seguida que os coeficientes  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  não são nulos, para ordens superiores a determinado natural. Da proposição [11 **sec.** 2.1], conclui-se que se o seguinte limite

$$r := \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

existe, então coincide o raio de convergência. Porque

$$r = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

da proposição [11 **sec.** 2.1], infere-se a validade das seguintes desigualdades

$$\liminf_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq r \leq \limsup_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (5)$$

## Exemplos

1. **[Polinómios]** Se  $p(z)$  é um polinómio de grau  $n \in \mathbb{N}$  então existem  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 0, \dots, n$  tais que  $a_n \neq 0$  e  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ . Como qualquer soma finita está bem definida, o raio de convergência associado ao polinómio  $p$  é infinito. Logo os polinómios são funções inteiras.

2. **[Função exponencial]** Define-se a **função exponencial** na região de convergência da série

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (6)$$

De

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_n (n+1) = \infty$$

conclui-se que a função exponencial  $z \rightarrow e^z$  está bem definida para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ . Consequentemente, a função exponencial é uma função inteira. O numero complexo  $e^1$  é adiante designado por o símbolo  $e$  (sem indicação de expoente).

3. Seja  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de termos complexos, não nulos para ordens suficientemente grandes. Fixo  $w \in \mathbb{C}$ , considere-se a série de potências  $\sum a_n(z-w)^n$ . Anotamos que é possível as desigualdades em (5) serem estritas. De facto, considerando a sucessão no exemplo [18sec.2.1], i.e. a sucessão de termo geral  $a_n = 2 + (-1)^{n+1}$ , então

$$\liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 3 \quad , \quad \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad r = 1.$$

Tão bem quanto as referidas desigualdades poderão ser o “mais estritas possíveis”. Para tal exemplificar, é suficiente considerar a sucessão  $b_n = 2^{-na_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e verificar que

$$\liminf \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = 0 \quad , \quad \limsup \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = +\infty \quad \text{e} \quad \gamma = 1,$$

aonde  $\gamma$  designa o raio de convergência da série de potências  $\sum b_n(z-w)^n$ .

□

Fixo  $w \in \mathbb{C}$ , da proposição 1 sabemos que a região de convergência simples duma série de potências  $\sum a_n(z-w)^n$ , com raio de convergência  $r \in ]0, +\infty[$ , é um subconjunto de  $\partial D(w, r)$ . Dada a dificuldade do problema, está fora dos objectivos do decorrente texto apresentar resultados de escopo genérico acerca de caracterizações das referidas regiões. Apresentam-se no entanto alguns exemplos.

## Exemplos

4. A série geométrica  $\sum z^n$  converge absolutamente no disco unitário aberto. Se  $|z| = 1$  então  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  não é um infinitésimo. Logo  $\sum z^n$  diverge em quaisquer pontos do círculo unitário.

5. A série de potências  $\sum z^n/n^2$  têm raio de convergência  $r = 1$ . Tendo em linha de conta a convergência da série numérica  $\sum 1/n^2$ , conclui-se que  $\sum z^n/n^2$  converge absolutamente no disco unitário fechado.

6. A série de potências  $\sum z^n/n$  converge absolutamente no disco unitário aberto. Considerando o critério de Dirichlet, infere-se a convergência simples em quaisquer pontos do círculo unitário, exceptuando o ponto de divergência  $z = 1$ .

7. Fixo um número complexo unitário  $\xi$ , deduz-se do exemplo anterior que a série de potências  $\sum \bar{\xi}^n z^n/n$  converge simplesmente no círculo unitário, exceptuando o ponto  $z = \xi$ . Como a soma de séries convergentes é uma série convergente, tanto quanto a soma duma série convergente com outra divergente é uma série divergente, conclui-se sem dificuldades que a seguinte série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_1^n + \cdots + \bar{\xi}_k^n}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_1^n}{n} z^n + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k^n}{n} z^n, \quad \text{aonde } |\xi_j| = 1, j = 1, \dots, k$$

converge simplesmente no círculo unitário com excepção do conjunto finito de pontos  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ .

8. Seja  $\sum a_n z^n$  uma série de potências com raio de convergência  $r = 1$  e  $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ . Suponha-se que a função  $f(z) = \sum a_n z^n$  é limitada para  $z \in D(0, 1)$ . Do exemplo [10 **sec.** 2.1] conclui-se que a série  $\sum a_n$  é convergente, e logo  $\sum a_n z^n$  é absolutamente convergente no disco unitário fechado.

□

Diz-se que a função  $R(z)$  de variável complexa é uma **função racional**, se existem polinómios  $p(z)$  e  $q(z)$ , tais que  $q(z)$  é um polinómio não nulo e  $R(z) = p(z)/q(z)$ . Logo, a função racional  $R(z)$  está definida em  $\mathbb{C}$ , excepto possivelmente num número finito de pontos, precisamente em  $\mathbb{C}$  excepto o conjunto dos zeros de  $q(z)$ .

**Lema 2** Se  $a_n, n \in \mathbb{N}$  é uma sucessão de termos complexos e  $R(z)$  uma função racional, então as séries de potências  $\sum R(n)a_n z^n$  e  $\sum a_n z^n$  têm o mesmo raio de convergência.

**Demonstração:** Considerem-se polinómios  $p(z)$  e  $q(z)$ , tais que  $q(z)$  é polinómio não nulo e  $R(z) = p(z)/q(z)$ . A asserção obtém-se tendo em conta que

$$\lim_n \left| \frac{R(n)}{R(n+1)} \right| = \lim_n \left| \frac{p(n)}{p(n+1)} \frac{q(n)}{q(n+1)} \right| = 1,$$

e consequentemente

$$\limsup \sqrt[n]{|R(n)a_n|} = \lim \sqrt[n]{|R(n)|} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

■

Em semelhança com a análise real, se  $f$  é uma função complexa definida no disco  $D(z, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$  então a aplicação

$$D(z, \epsilon) \setminus \{0\} \ni h \rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

diz-se a **razão incremental** no ponto  $z$  da função  $f$ . No seguinte resultado demonstraremos que a razão incremental de funções analíticas no ponto  $z$ , é prolongável por continuidade à origem.



**Proposição 3** *Seja  $f$  uma função analítica na origem e suponha-se que  $f$  é representada por a série de potências  $\sum a_n z^n$ , com raio de convergência  $0 < r \leq +\infty$ . Então  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  converge absolutamente em  $D(0, r)$  e representa uma função analítica  $g(z)$  que verifica a propriedade*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z), \quad \text{para qualquer } z \in D(0, r).$$

**Demonstração:** Sem perda de generalidade suponha-se que  $r \neq +\infty$ . Do lema 2 infere-se que as séries  $\sum a_n z^n$  e  $\sum n a_n z^{n-1}$  têm o mesmo raio de convergência. Fixo  $z \in D(0, r)$ , considerem-se  $\rho := (r + |z|)/2$  e números complexos  $h \in \mathbb{C}$  tais que  $|h| < \rho - |z|$ . Como  $|z+h| \leq |z| + |h| < \rho < r$  então  $z$  e  $z+h$  pertencem à região de convergência das séries de potências que representam as funções  $f$  e  $g$ . Consequentemente

$$\left| g(z) - \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| = \left| g(z) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{z^n + n h z^{n-1} - (z+h)^n}{h} \right|. \quad (7)$$

Tendo em linha de conta o binómio de *Newton* e a evidente igualdade

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2}, \quad k = 2, \dots, n,$$

para  $|h| < \rho - |z|$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^n + n h z^{n-1} - (z+h)^n}{h} \right| &= \left| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} \right| \leq |h| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^{k-2} |z|^{n-k} \\ &\leq \frac{n(n-1)}{2} |h| \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} |h|^{k-2} |z|^{n-k} = \frac{n(n-1)}{2} |h| (|z| + |h|)^{n-2}. \end{aligned}$$

De novo o lema 2 assegura que o raio de convergência da série de potências  $\sum n(n-1) a_n z^{n-2}$  coincide com  $r$ . Consequentemente, a série  $\sum n(n-1) |a_n| \rho^{n-2}$  é convergente. Logo, inserindo a desigualdade anterior em (7), obtém-se

$$0 \leq \left| g(z) - \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|z| + |h|)^{n-2} \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| \rho^{n-2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

o que termina a demonstração. ■

As funções analíticas constituem uma generalização natural das funções polinomiais, cujos valores em determinado ponto calculam-se efectuando um número finito de somas e multiplicações entre números complexos. Os polinómios são funções regulares, se a regularidade for definida por intermédio das noções de diferenciabilidade real em espaços de dimensão finita, induzidas em funções de variável complexa. Em generalidade, dada uma função  $f$  definida num subconjunto  $U$  aberto e não vazio de  $\mathbb{C}$ , poder-se-á proceder ao estudo da diferenciabilidade real, às questões de existência das derivadas parciais de ordem arbitrária, etc. Em todo o texto diz-se que  $f \in C^n(U)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sse

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^j \partial y^k} \in C(U) \quad \text{para todo } j, k = 0, \dots, n \quad \text{tais que } j + k \leq n,$$

aonde

$$\frac{\partial^0 f}{\partial x^0} = \frac{\partial^0 f}{\partial y^0} = f.$$

Diz-se igualmente que  $f \in C^\infty(U)$  se  $f \in C^n(U)$ , para qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ . Os polinómios na variável complexa  $z$ , são funções cujas funções coordenadas são polinómios nas variáveis  $x$  e  $y$ , aonde  $z = x + iy$ . Logo são funções da classe  $C^\infty(U)$ . No próximo resultados mostra-se que as funções analíticas no subconjunto  $U \subset \mathbb{C}$ , aberto e não vazio, são também elementos da classe  $C^\infty(U)$ . No capítulo seguinte será evidente que a classe das funções analíticas é uma subclasse estrita de  $C^\infty(U)$ .

**Corolário 4** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto. Se  $f$  é uma função analítica em  $U$  então  $f \in C^\infty(U)$ .*

**Demonstração:** Seja  $w \in U$  e considere-se  $\epsilon > 0$  tal que  $f$  é representada em  $D(w, \epsilon)$  por uma série de potências  $\sum a_n(z - w)^n$ . A proposição 3 assegura a existência do seguinte limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} := g(z), \quad \text{para qualquer que seja } z \in D(w, \epsilon).$$

Em particular, deduz-se que existe  $\delta > 0$  tal que para  $|h| < \delta$  verifica-se

$$0 \leq |f(z+h) - f(z)| \leq (|g(z)| + 1)|h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Em consequência, a continuidade da função  $f$  no ponto  $z$  segue sem dificuldades. Relativamente à existência de derivadas parciais, temos em conta a proposição 3 para obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f((x+iy)+t) - f(x+iy)}{t} = g(z), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t} = i \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f((x+iy)+it) - f(x+iy)}{it} = ig(z). \end{aligned} \quad (8)$$

De novo da proposição 3, infere-se que a função  $g$  é analítica em  $U$ , e da parte inicial da decorrente demonstração conclui-se que  $g$  é contínua. Logo  $f \in C^1(U)$ . Terminamos a prova indicando a possibilidade em proceder por indução matemática. De facto, de (8) deduz-se que as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$ , são funções analíticas e portanto têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Logo  $f \in C^2(U)$  e assim sucessivamente. ■

Se  $f$  é uma função analítica no ponto  $z = x + iy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  então de (8) é evidente a igualdade

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \quad (9)$$

A equação anterior será adiante designada por equação de **Cauchy-Riemann**.

**Corolário 5** *Considere-se um complexo fixo  $w$  e  $\sum_{n=0} a_n(z - w)^n$  uma série de potências com raio de convergência  $0 < r \leq +\infty$ . Para qualquer que seja  $z \in D(w, r)$  são válidas as seguintes igualdades*

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0} a_n(z - w)^n = \sum_{n=0} a_n \frac{\partial}{\partial x} (z - w)^n \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=0} a_n(z - w)^n = \sum_{n=0} a_n \frac{\partial}{\partial y} (z - w)^n. \quad (10)$$

**Demonstração:** Defina as seguintes funções

$$f(z) := \sum_{n=0} a_n(z - w)^n, \quad z \in D(w, r) \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=1} a_n n (z - w)^{n-1}, \quad z \in D(w, r).$$

Porque qualquer polinómio é uma função analítica então considerando (8) sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = g(z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} (z - w)^n = n(z - w)^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}_1).$$

e assim obtém-se o lado esquerdo de (10). Argumentos análogos conduzem a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = ig(z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}(z-w)^n = in(z-w)^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}_1).$$

Simples substituições conduzem ao lado direito de (10). ■

## Exemplos

**9. [Generalização da exponencial real]** Tendo em conta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z,$$

da proposição 3, deduz-se a seguinte igualdade

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Em particular, considerando a função de duas variáveis reais

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi(x, y) = e^{x+iy}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

as fórmulas (8) permitem calcular as derivadas parciais da função exponencial, i.e.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = e^z \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = ie^z, \quad \text{aonde} \quad z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (11)$$

Denote-se momentaneamente a função exponencial conhecida da análise real por  $\exp(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . De (11) e das bem conhecidas regras de derivação da análise real, deduz-se o seguinte

$$\frac{d}{dx}(\exp(-x)e^x) = \exp(-x) \frac{d}{dx} e^x + e^x \frac{d}{dx} \exp(-x) = \exp(-x)e^x - e^x \exp(-x) = 0.$$

Logo, a função  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow \exp(-x)e^x$  é constante. Sabemos que  $\exp(0) = 1$  e da definição de exponencial complexa (6) também é obvio que  $e^0 = 1$ . Consequentemente

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se que a função exponencial complexa é uma generalização da exponencial de variável real.

**10. [Conjugação de funções analíticas]** Da proposição 3, sabemos que funções analíticas são contínuas. A aplicação de conjugação  $\mathbb{C} \ni z \rightarrow \bar{z} \in \mathbb{C}$  é isométrica e logo é continua. Se  $f$  é representada no disco  $D(x, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  por a série de potências  $\sum a_n(z-x)^n$  e  $S_n(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}(z-x)^{n-1}$ , então

$$\bar{f}(z) = \overline{\lim_k S_k(z)} = \lim_k \bar{S}_k(z) = \lim_k \sum_{n=0}^{k-1} \bar{a}_n(\bar{z} - \bar{x})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n(\bar{z} - \bar{x})^n, \quad z \in D(x, \epsilon).$$

Se  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  então conclui-se que  $\bar{f}(z) = f(\bar{z})$ , para qualquer  $z \in D(x, \epsilon)$ . A função exponencial é inteira e representada por uma série de potências com coeficientes reais. Logo  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

□

## 2.2 Problemas

1. Determine o raio de convergência das séries de potências  $\sum a_n z^n$ , aonde o termo geral da sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é indicado nas diferentes alíneas do problema [3 sec. 2.1].
2. Verifique que a série de potências  $\sum a_n z^n$  converge absolutamente no disco fechado  $\text{cl} D(0, r)$ ,  $r > 0$  sse converge absolutamente em algum ponto da fronteira  $\partial D(0, r)$ .

3. Determine a região de convergência absoluta das seguintes séries de potências:

$$\begin{array}{llll}
 \text{i)} \sum_n n^3 z^n; & \text{ii)} \sum_n \frac{1}{n^2 + (-1)^n n^3} z^n; & \text{iii)} \sum_n n^{(-1)^n} z^n; & \text{iv)} \sum_n n^{(-1)^n n} z^n; \\
 \text{v)} \sum_n \frac{1}{1 + n^{(-1)^n n}} z^n; & \text{vi)} \sum_n \frac{n!}{n^n} z^n; & \text{vii)} \sum_n \frac{n^n}{n!} z^n; & \text{viii)} \sum_n \frac{(2n)!}{(3n)!} z^n; \\
 \text{ix)} \sum_n 2^n z^{n^2}; & \text{x)} \sum_n \frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} 2^n z^{n^2}; & \text{xi)} \sum_n 2^{(-1)^n n^2} z^n; & \text{xii)} \sum_n 2^{(-1)^n n} z^{n^2}; \\
 \text{xiii)} \sum_n \frac{1}{n!} z^{n!}; & \text{xiv)} \sum_n \frac{n^n}{e^{n!}} z^n, \epsilon > 0; & \text{xv)} \sum_n n^n z^{n!}; & \text{xvi)} \sum_n \frac{n^n}{n!} z^{n!}; \\
 \text{xvii)} \sum_n \cos(n\theta) z^n, \theta \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

4. Determine a região de convergência simples das seguintes séries de potências:

$$\begin{array}{lll}
 \text{i)} \sum_n \frac{1}{n} z^n; & \text{ii)} \sum_n \frac{(n+1)^n}{n^n} z^n; & \text{iii)} \sum_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} z^n; \\
 \text{iv)} \sum_n \frac{n!}{n^n} z^n; & \text{v)} \sum_n \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} z^n; & \text{vi)} \sum_n \cos(n\theta) z^n, \theta \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

5. Considere uma sucessão de termos complexos  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $\sum a_n z^n$  é uma série de potências com raio de convergência  $r \in [0, +\infty]$ , mostre sucessivamente que:

- i) para  $k \in \mathbb{N}_1$  fixo, a série de potências  $\sum_n a_n z^{kn}$  tem raio de convergência  $\sqrt[k]{r}$ ;
- ii) se  $b, c \in \mathbb{C}$  e  $b \neq 0$  então a série de potências  $\sum_n a_n (bz + c)^n$  têm raio de convergência  $r/|b|$ ;
- iii) se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n > k \Rightarrow a_n \neq 0$ , então a série  $\sum_n a_n^{-1} z^n$  tem raio de convergência  $r^{-1}$ .

- 6.

- a) Determine o raio de convergência da série de potências  $\sum a_n z^n$ , aonde  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  denota uma sucessão complexa, tal que, para ordens suficientemente grandes, o termo geral verifica as condições indicadas nas seguintes alíneas:

- i) existem constantes positivas  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$  tais que  $\lambda_1 \leq |a_n| \leq \lambda_2$ ;
- ii) existem constantes positivas  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$  tais que  $\lambda_1 n^2 \leq |a_n| \leq \lambda_2 n^3$ ;
- iii) existem constantes positivas  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$  tais que  $\lambda_1 (3^n - n^2) \leq a_n \leq \lambda_2 (3^n + n^3)$ ;
- iv) existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < a_n \leq n^p$  e  $a_n + a_m \leq a_{nm}$ , para  $n, m$  superiores a determinado natural.

- b) Verifique que para cada  $j \in \mathbb{N}$ , as sucessões  $\ln^j n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  estão nas condições da alínea a) iv).

7. Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^k \frac{z^n}{n!}, \quad \text{aonde } k \in \mathbb{N} \text{ está fixo.} \quad (12)$$

Mostre sucessivamente que:

- i) a série de potência (12) tem raio de convergência  $r = +\infty$ ;
- ii) denote a soma da série de potências (12) por  $S(z, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e obtenha a fórmula de recorrência

$$S(z, k) = e^z + z \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j+1} S(z, j).$$

- iii) Determine a soma  $S(z, 1)$ ,  $S(z, 2)$  e  $S(z, 3)$ , para qualquer que seja  $z \in \mathbb{C}$ .

8. Considere uma função analítica em  $D(0, 1)$  e representada (em  $D(0, 1)$ ) por uma série de potências  $\sum a_n z^n$  com coeficientes positivos, i.e. tal que  $a_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que se  $f$  é uma função limitada em  $D(0, 1)$  então  $\sum a_n z^n$  converge absolutamente em  $\text{cl } D(0, 1)$ .
9. Considere  $w \in \mathbb{C}$  fixo e a função  $g(z) = e^{w\bar{z}}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Mostre que  $\lim_{h \rightarrow 0} [g(z+h) - g(z)]/h$ , existe para algum  $z \in \mathbb{C}$  sse  $w = 0$ .

## 2.3 Funções trigonométricas e exponencial

Considere a função de variável real definida por intermédio de

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \varphi(x) = e^{ix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

De [11 **sec.** 2.2], obtém-se que  $\varphi$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e  $\varphi'(x) = ie^{ix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Do conhecimento das derivadas das funções trigonométricas de variável real segue que

$$E'(ix) = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = i E(ix). \quad (1)$$

Da regra de derivação do produto de funções de variável real e de simples manipulações algébricas, segue a sua aplicabilidade para o produto de funções de variável real com valores complexos, i.e. se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  são diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  então é válida a regra de derivação

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx}.$$

O leitor poderá consultar a demonstração da proposição [1 **sec.** 3.1] defronte, e aonde encontrará justificação da asserção anterior. Em conta de  $\varphi'(x) = ie^{ix}$  e de (1), a regra de derivação do produto de funções de variável real estabelece

$$\frac{d}{dx}(E(-ix) e^{ix}) = i E(-ix) e^{ix} - i E(-ix) e^{ix} = 0.$$

Logo a função  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow E(-ix) e^{ix}$  é constante. É evidente que  $E(i0) = 1$ . Da definição de exponencial complexa [6 **sec.** 2.2], também é obvio que  $e^0 = 1$ . Em consequência  $E(-ix) e^{ix} = 1$ , para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Tendo em atenção a igualdade  $E(-ix) E(ix) = 1$ , obtém-se

$$e^{ix} = E(ix) = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

A fórmula (2) é designada por **fórmula de Euler**. Definimos a função

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \psi(x, y) = e^{-x} e^{-iy} e^z \quad \text{aonde} \quad z = x + iy.$$

Considerando [11 **sec.** 2.2] e a regra da derivação da composta de funções de variáveis reais, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= e^{-x} e^{-iy} e^z - e^{-x} e^{-iy} e^z = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= i e^{-x} e^{-iy} e^z - i e^{-x} e^{-iy} e^z = 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Infere-se que a função  $\psi$  é constante em  $\mathbb{R}^2$ . É evidente que  $\psi(0,0) = 1$ , e logo  $e^{-x} e^{-iy} e^z = 1$ , para qualquer  $z = x + iy$ . Considerando a propriedade da exponencial real  $e^{x+y} = e^x e^y$  tanto quanto a fórmula de Euler, obtemos

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy,$$

i.e.

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y, \quad \text{aonde} \quad z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Da igualdade  $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  obtida acima, segue sem dificuldades de maior a asserção

$$e^{z+w} = e^z e^w, \quad \text{quaisquer que sejam} \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Fixos números reais  $a < b$ , consideramos a **faixa horizontal** semi-aberta (à esquerda), definida por

$$Y_{[a,b]} = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z \leq b\}.$$

Diz-se que  $Y_{[a,b]}$  tem largura  $b-a$ . Na seguinte proposição resumimos os resultados obtidos e mostramos a injectividade da exponencial restrita a qualquer faixa horizontal semi-aberta de largura  $2\pi$ .

**Proposição 1** *A função exponencial complexa é uma função periódica com período  $2\pi i$ , é injectiva em qualquer faixa horizontal semi-aberta de largura  $2\pi$  e verifica as seguintes propriedades*

$$\begin{aligned}e^0 &= 1 & e^{z+w} &= e^z e^w, \\ \operatorname{Re} e^z &= e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) & \operatorname{Im} e^z &= e^{\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z),\end{aligned}$$

para quaisquer que sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ .

**Demonstração:** Resta mostrar que a função exponencial é periódica e injectiva em faixas horizontais semi-abertas de largura  $2\pi$ . A periodicidade da função exponencial obtém-se de

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Suponha-se  $z, w \in Y_{[a,b]}$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  verificando  $b - a = 2\pi$ . Se  $\operatorname{Re} z \neq \operatorname{Re} w$  então

$$|e^z - e^w| \geq ||e^z| - |e^w|| = |e^{\operatorname{Re} z} - e^{\operatorname{Re} w}| > 0.$$

Se  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w = x$  e  $z \neq w$  então  $e^z \neq e^w$  é consequência da injectividade da função  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow e^{ix}$ , em qualquer intervalo semi-aberto de comprimento  $2\pi$ . Note-se que a asserção anterior foi demonstrada na secção 2.1. Por motivos de clareza, transcrevemos os argumentos então expostos. Segue das hipóteses  $\operatorname{Im} z = y_1$ ,  $\operatorname{Im} w = y_2$  e  $0 < |y_1 - y_2| < 2\pi$  o seguinte

$$|e^z - e^w| = e^x |e^{iy_1} - e^{iy_2}| = e^x \left| e^{i \frac{y_1 - y_2}{2}} - e^{i \frac{y_2 - y_1}{2}} \right| = 2e^x \left| \sin \left( \frac{y_1 - y_2}{2} \right) \right| \neq 0.$$

■

Da fórmula de Euler (2), obtemos

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \text{aonde } x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Considerando a definição de exponencial complexa, infere-se que para qualquer  $y \in \mathbb{R}$  verifica-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{i^n y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} y^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n}, \\ \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}) &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{i^n y^n}{n!} = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Consequentemente, as funções trigonométricas reais coincidem com a soma das seguintes séries

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A generalização das funções trigonométricas reais encontra motivos em (4) e efectua-se por intermédio das seguintes definições

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

As computações em (5) permitem estabelecer representações em série de potências das funções **trigonométricas complexas**, precisamente

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Em particular, as funções  $\cos z$  e  $\sin z$  são funções inteiras. Tendo em linha de conta que a exponencial é uma função periódica com período  $2\pi i$ , das definições (6), conclui-se que as funções trigonométricas complexas são periódicas com período  $2\pi$ .

Demonstra-se de seguida que o conjunto dos zeros das funções trigonométricas complexas coincide com o conjunto dos zeros das trigonométricas reais, i.e. todos zeros das funções trigonométricas complexas são números reais. Multiplicando por  $e^{iz}$  ambos os membros da igualdade definindo a função coseno em (6), obtém-se que as soluções da equação  $\sin z = 0, z \in \mathbb{C}$  coincidem com as soluções de  $e^{2iz} = 1$ . Se  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) então

$$e^z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^k e^x = 1, k \in \mathbb{Z} \\ y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

i.e.  $e^z = 1$  sse  $z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ . Consequentemente

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Na secção seguinte ir-se-á obter as soluções da equação  $e^z = w, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  usando ideias distintas. No entanto, as computações acima poder-se-iam resumir à simples observação de que da injectividade da

função exponencial em faixas horizontais semi-abertas, da sua periodicidade e da evidente igualdade  $e^0 = 1$ , deduz-se que o conjunto das soluções da equação  $e^{2iz} = 1$  é dado por  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Com intuíto em obter os zeros da função  $\cos z$ , note-se que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-z)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}}{2i} = \frac{ie^{-iz} + ie^{iz}}{2i} = \cos z, \quad (8)$$

e consequentemente

$$\cos z = 0 \iff z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Simples operações algébricas nas igualdades (6), permitem obter as fórmulas trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(z \pm w) &= \cos(z)\cos(w) \mp \sin(z)\sin(w); \\ \sin(z \pm w) &= \sin(z)\cos(w) \pm \cos(z)\sin(w). \end{aligned} \quad (9)$$

Em particular, se  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) então

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y); \\ \sin(z) &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y); \end{aligned}$$

aonde  $\cosh$  e  $\sinh$  designam as funções **trigonométricas hiperbólicas reais**, i.e.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \cos(z) &= \cos(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z) & \operatorname{Im} \cos(z) &= -\sin(\operatorname{Re} z) \sinh(\operatorname{Im} z) \\ \operatorname{Re} \sin(z) &= \sin(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z) & \operatorname{Im} \sin(z) &= \cos(\operatorname{Re} z) \sinh(\operatorname{Im} z) \end{aligned} \quad \text{e}$$

As funções **trigonométricas hiperbólicas complexas** são definidas por

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Da definição de função exponencial, infere-se que as funções trigonométricas hiperbólicas são funções inteiras representadas por os seguintes desenvolvimentos em séries de potências

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tendo em linha de conta as seguintes igualdades

$$\cosh z = \cos(iz) \quad \text{e} \quad \sinh z = i \sin(iz),$$

obtém-se sem dificuldades que as trigonométricas hiperbólicas são periódicas com período  $2\pi i$  e

$$\begin{aligned} \sinh z = 0 &\iff z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cosh z = 0 &\iff z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



## 2.3 Problemas

1. Tenha em consideração a fórmula de Euler (2), para reduzir o calculo das seguintes primitivas de funções de variável real ao cálculo de primitivas imediatas::

$$\text{i)} \int e^t \cos t \, dt; \quad \text{ii)} \int \cos^3 t \, dt; \quad \text{iii)} \int e^t \sin^3 t \, dt; \quad \text{iv)} \int \frac{1}{1 - \cos t} \, dt.$$

2. Determine a região de convergência absoluta das seguintes séries:

$$\text{i)} \sum_n e^{nz}; \quad \text{ii)} \sum_n e^{nz^2}; \quad \text{iii)} \sum_n (e^{nz} + e^{n\bar{z}}); \quad \text{iv)} \sum_n \cos^n(z - \bar{z}).$$

3. Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ . Demonstre as seguintes igualdades:

$$\text{i)} \cos(z \pm w) = \cos(z) \cos(w) \mp \sin(z) \sin(w); \quad \text{ii)} \sin(z \pm w) = \sin(z) \cos(w) \pm \cos(z) \sin(w);$$

$$\text{iii)} \cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z); \quad \text{iv)} \sin(2z) = 2 \sin z \cos z;$$

$$\text{v)} \cos z - \cos w = 2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{w-z}{2}; \quad \text{vi)} \sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2};$$

$$\text{vii)} \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1; \quad \text{viii)} |\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2 \operatorname{Im} z);$$

$$\text{ix)} |\cos z|^2 - |\sin z|^2 = \cos(2 \operatorname{Re} z); \quad \text{x)} |\cos z|^2 = \sinh^2(\operatorname{Im} z) + \cos^2(\operatorname{Re} z);$$

$$\text{xi)} |\sin z|^2 = \cosh^2(\operatorname{Im} z) - \cos^2(\operatorname{Re} z).$$

4. Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ . Demonstre as seguintes igualdades:

$$\text{i)} \cosh(z \pm w) = \cosh(z) \cosh(w) \pm \sinh(z) \sinh(w); \quad \text{ii)} \sinh(z \pm w) = \sinh(z) \cosh(w) \pm \cosh(z) \sinh(w);$$

$$\text{iii)} \cosh(2z) = \cosh^2(z) + \sinh^2(z); \quad \text{iv)} \sinh(2z) = 2 \sinh(z) \cosh(z);$$

$$\text{v)} \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1; \quad \text{vi)} |\cosh z|^2 + |\sinh z|^2 = \cosh(2 \operatorname{Re} z);$$

$$\text{vii)} |\cosh z|^2 - |\sinh z|^2 = \cosh(2 \operatorname{Im} z); \quad \text{viii)} |\cosh z|^2 = \sinh^2(\operatorname{Re} z) + \cosh^2(\operatorname{Im} z);$$

$$\text{ix)} |\sinh z|^2 = \sinh^2(\operatorname{Re} z) + \sin^2(\operatorname{Im} z); \quad \text{x)} \sinh\left(z - i\frac{\pi}{2}\right) = -i \cosh z.$$

5. Mostre que se  $w \in \mathbb{C}$  é um período da função exponencial, i.e.  $e^{z+w} = e^z$ , para qualquer complexo  $z \in \mathbb{C}$ , então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $w = 2k\pi i$ .

6. Mostre que as funções trigonométricas complexas são ilimitadas em qualquer recta não paralela ao eixo real.

7. Mostre que as funções trigonométricas hiperbólicas complexas são ilimitadas em quaisquer rectas não paralelas ao eixo imaginário.

## 2.4 Funções inversas

Da asserção  $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w} \neq 0$ , deduz-se que a equação  $e^w = 0$  não têm soluções complexas. Suponha-se  $|z| \neq 0$  e determinem-se as solução da equação  $e^w = z$ . Considerando coordenadas polares, obtém-se

$$e^w = z \Leftrightarrow \begin{cases} |e^w| &= |z| \\ \arg(e^w) &= \arg z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} w &= \ln |z| \\ \operatorname{Im} w &\in \operatorname{Arg} z \end{cases}, \quad (1)$$

aonde  $\ln |z|$  designa a função logarítmica real calculada no número positivo  $|z| > 0$ . O **logaritmo polivalente** do número complexo não nulo  $z$ , é definido como o conjunto de todas as soluções da equação  $e^w = z$ , i.e.

$$\operatorname{Ln} z := \{ \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \},$$

e relaciona-se com a função argumento polivalente através da seguinte fórmula

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad z \neq 0.$$

Como para qualquer número complexo  $z$  não nulo, verifica-se  $\operatorname{Ln} z \neq \emptyset$ , então o contradomínio da função exponencial é  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Na proposição [1 **sec.** 2.3] consta que a função exponencial tem período  $2\pi i$  e é injectiva em faixas horizontais semi-abertas  $Y_{[a,b]}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  de largura  $2\pi = b - a$ . Conclui-se que a função

$$\begin{aligned} Y_{[a,b]} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\rightarrow e^z \end{aligned}$$

é injectiva e sobrejectiva, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $b - a = 2\pi$ . Em consequência, admite função inversa, usualmente designada por **ramo** da função logaritmo polivalente. Denota-se por  $\ln_{[a,b]}$ , o ramo do logaritmo que é a função inversa da exponencial restrita à faixa horizontal semi-aberta  $Y_{[a,b]}$ , com  $0 < b - a = 2\pi$ , i.e.

$$\ln_{[a,b]} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow Y_{[a,b]} \quad , \quad \ln_{[a,b]} z = \ln |z| + i \arg_{[a,b]}(z)$$

aonde

$$\arg_{[a,b]}(z) = \theta \quad \text{sse} \quad \operatorname{Arg} z \cap ]a, b] = \{\theta\}.$$

O conjunto dos pontos de descontinuidade da função  $\arg_{[a,b]}$ , coincide com a semi-recta  $e^{ib}\mathbb{R}^+$ . De facto, considerando  $z = re^{ib} \in e^{ib}\mathbb{R}^+$ , então definindo as sucessões  $z_n^\pm = re^{i(b \pm \frac{1}{n})}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  tem-se que  $\lim z_n^\pm = z$ . No entanto

$$\lim_n \arg_{[a,b]}(z_n^\pm) = b - \pi [1 + \operatorname{sgn}(\pm 1)].$$

Consequentemente, o ramo da função logaritmo dado por  $\ln_{[a,b]}$ , apresenta descontinuidades na semi-recta  $z = e^{ib}\mathbb{R}^+$ , usualmente designada por **linha de ramificação** da função logarítmica.

A função **logaritmo principal** define-se como a função inversa da restrição da função exponencial à faixa horizontal  $Y_{[-\pi, \pi]}$  e é denotada por  $\ln z$ , para  $z \neq 0$ . Logo

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow Y_{[-\pi, \pi]} \quad \text{aonde} \quad \ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad z \neq 0. \quad (2)$$

Anotar-se que o logaritmo principal restrito ao eixo real positivo coincide com a função logaritmo introduzida na análise real e que a linha de ramificação do logaritmo principal é  $\mathbb{R}^+$ . Considerando a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, obtém-se

$$\arg z = \arg(re^{i\theta}) = \theta, \quad \text{para} \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Consequentemente a função  $\mathbb{C} \ni z \rightarrow \arg z$  é elemento da classe  $C^\infty(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-)$ . Logo, da conhecida regularidade da função logarítmica de variável real, conclui-se que a função logaritmo principal pertence à classe  $C^\infty(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-)$ .

A operação de **potenciação** complexa é a função polivalente definida por  $z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ . Se o expoente é real, deduz-se

$$z^x = \{ |z|^x e^{ix \arg z} e^{ix 2k\pi} : k \in \mathbb{Z} \}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

De (3) é evidente que no caso de expoente inteiro, o conjunto  $z^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) têm um único elemento, determinado por recorrência da seguinte forma

$$\begin{cases} z^k &= z z^{k-1} \\ z^0 &= 1 \end{cases} \quad \text{se } k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad z^{-k} = \frac{1}{z^k}.$$

No caso de expoente racional  $x = p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$  aonde  $p$  e  $q$  não têm divisores naturais comuns e  $q \in \mathbb{N}_1$ , então o conjunto  $z^{p/q}$  é dado por

$$z^{p/q} = \left\{ \sqrt[q]{|z|^p} e^{i(p \arg z)/q} e^{ikp(2\pi/q)} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Considerando a igualdade  $|z|^p e^{i(p \arg z)} = z^p$ , de [2 **sec.** 1.3] obtém-se sem dificuldades que  $z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}$ .

Com intuídos em definir a inversa da função coseno, pretendemos calcular as soluções da equação  $\cos w = z$ , aonde  $w$  é um número complexo fixo. Multiplicando por  $e^{iw}$ , ambos os membros da equação definindo a função coseno em [6 **sec.** 2.3], obtemos sem dificuldade que

$$\cos w = z \Leftrightarrow e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{iw} - z)^2 = z^2 - 1 \Leftrightarrow w \in -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

A função **arco coseno polivalente** do número complexo  $z$  é definida como o conjunto de todas as soluções da equação  $\cos w = z$ , i.e.

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Dado que para qualquer número complexo tem-se que  $0 \notin z + \sqrt{z^2 - 1}$ , deduz-se a sobrejectividade da função coseno. Se  $\sqrt{z^2 - 1} = \{z_1, -z_1\}$  então  $(z - z_1)(z + z_1) = 1$ , e da igualdade

$$\operatorname{Ln}(zw) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} w$$

infere-se sem dificuldade que  $-i \operatorname{Ln}(z - z_1) = i \operatorname{Ln}(z + z_1)$ . Logo

$$\operatorname{Arccos} z = \{\mp i \ln |z + z_1| \pm \arg(z + z_1) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \quad (4)$$

É possível resolver a equação  $\sin w = z$  de forma semelhança ou simplesmente considerar [8 **sec.** 2.3] para obter

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} z.$$

## 2.4 Problemas

1. Considere quaisquer números  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$  no domínio das seguintes expressões e demonstre-as:

- i)  $\operatorname{Ln}(zw) = \ln z + \operatorname{Ln} w$ ;      ii)  $\operatorname{Ln}(zw) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} w$ ;      iii)  $n \operatorname{Ln} z \subset \operatorname{Ln} z^n$ ;
- iv)  $\operatorname{Ln} \bar{z} = \overline{\operatorname{Ln} z}$ ;      v)  $\operatorname{Ln} \frac{1}{z} = -\operatorname{Ln} z$ ;      vi)  $\operatorname{Ln} e^z = z + i \operatorname{Arg} 1$ ;
- vii)  $\ln(-1)^n = i \frac{\pi}{2} [(-1)^{n+1} + 1]$ ;      viii)  $\ln(x) = \ln|x| + i \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x)$ ;      ix)  $\ln(ix) = \ln|x| + \operatorname{sgn} x \ln i$ ;
- x)  $\ln \bar{z} = \overline{\ln z}$ ,  $z \notin \mathbb{R}$ ;      xi)  $\ln \frac{1}{z} = -\ln z$ ,  $z \notin \mathbb{R}$ ;      xii)  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x + i\pi(1 - \operatorname{sgn} x)$ .

2. Considere complexos não nulos  $x$  e  $z$ . Mostre a seguinte fórmula

$$\ln(xz) = \ln z + \ln x - i \frac{\pi}{2} [1 + \operatorname{sgn}(\arg z)] [1 - \operatorname{sgn} x], z \notin \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}.$$

**Sugestão:** Poder-lhe-á ser útil considerar o problema [9 sec. 1.2] e a alínea *viii*) do problema 1.

3. Calcule

$$\begin{array}{llll} \text{i)} i^{4i}; & \text{ii)} 1^i; & \text{iii)} \ln i^{2ni}, n \in \mathbb{N}; & \text{iv)} |i^x|, x \in \mathbb{R}; \quad \text{v)} (ei)^i; \\ \text{vi)} \ln e^{\pi - i\pi}; & \text{vii)} i^{1-i}; & \text{viii)} i^i; & \text{ix)} i^{1-i} i^i; \quad \text{x)} \ln i^2; \\ \text{xi)} 2 \ln i; & \text{xii)} \ln i^3; & \text{xiii)} 3 \ln i; & \text{xiv)} (e^\pi)^i; \quad \text{xv)} (e^i)^\pi. \end{array}$$

4. Considere quaisquer números  $z, w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$  no domínio das seguintes expressões e demonstre-as:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \ln z^w = w \ln z + i \operatorname{Arg} z; & \text{ii)} |z^{ix}| = e^{-x \operatorname{Arg} z}; & \text{iii)} (zw)^\xi = z^\xi w^\xi; \\ \text{iv)} \ln e^{\pi + in\pi} = \pi + i \frac{\pi}{2} [(-1)^{n+1} + 1]; & \text{v)} |(e^z)^x| = |e^{xz}|; & \text{vi)} \left| (e^z)^i \right| = \{e^{iz} e^{-2k\pi} : k \in \mathbb{Z}\}. \end{array}$$

5. Demonstre a seguinte igualdade  $\operatorname{Arcsin} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$ .

6. Considere um número real  $x \in [-1, 1]$ . Mostre que o conjunto das soluções das equações na variável complexa  $\sin z = x, z \in \mathbb{C}$  e  $\cos z = x, z \in \mathbb{C}$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

7. Determine as soluções das seguintes equações:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} e^{iz^2} = i; & \text{ii)} e^{iz}(\sqrt{3} + i) + e^{-iz}(\sqrt{3} - i) = 0; & \text{iii)} \cos z = \sin z; \\ \text{iv)} e^{iz} - 4e^{-iz} = 2i; & \text{v)} e^{-2z} + ie^{-z} - ie^z + 1 = 0. \end{array}$$

8. Considere um complexo não nulo  $z \in \mathbb{C}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Mostre que o conjunto  $z^x$  é finito sse  $x \in \mathbb{Q}$ .

## Capítulo 3

# Holomorfia

### 3.1 Funções $\mathbb{C}$ -diferenciáveis

Diz-se que a derivada duma função de variável real existe no ponto  $x \in \mathbb{R}$ , se existe o limite da razão incremental em  $x$ , quando os acréscimos reais tendem a zero. Na proposição [3 **sec.** 2.2], validou-se asserção análoga para a classe das funções analíticas de variável complexa, i.e. existe o limite da razão incremental de determinada função  $f$ , em qualquer ponto aonde  $f$  é analítica, e quando os acréscimos complexos convergem à origem. Motivos de tal ordem compelem a seguinte definição:

**Definição 1** Uma função  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z \in \text{int } U$ , se existe o seguinte limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}. \quad (1)$$

Se  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z \in \text{int } U$ , então a derivada  $f'(z)$  é definida como sendo o valor do limite em (1).

A função dada no seu domínio de definição por  $z \rightarrow f'(z)$ , diz-se a **função derivada** de  $f$ . Se a função  $f'$  está bem definida numa vizinhança do ponto  $z \in U$ , então o número complexo  $f''(z)$  é definido por intermédio da definição 1 aplicada à função  $f'$ . Em geral, definimos recursivamente as **derivadas complexas de ordem superior**  $f^{(n)}(z)$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ . Se a função  $f^{(n-1)}$  está bem definida numa vizinhança do ponto  $z$ , então  $f^{(n)}(z)$  é o valor do limite (1) aplicado à função  $f^{(n-1)}$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}_1$  e aonde  $f^{(0)} = f$ .

### Exemplos

1. [Derivadas de funções analíticas] Seja  $f$  uma função analítica no disco  $D(w, r)$ ,  $r > 0$ . Suponha-se que  $f$  é representada por a série de potências  $\sum a_n(z-w)^n$ ,  $z \in D(w, r)$ . Da proposição [3 **sec.** 2.2] sabemos que  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em todos os pontos de  $D(w, r)$ ,  $r > 0$ , tão bem quanto a série de potências  $\sum_{n=1} na_n(z-w)^{n-1}$  é absolutamente convergente em  $D(w, r)$  e representa a função  $f'(z)$ , para  $z \in D(w, r)$ ,  $r > 0$ . Em particular  $f'$  é analítica em  $D(w, r)$  e consequentemente  $\mathbb{C}$ -diferenciável em todos os pontos de  $D(w, r)$ ,  $r > 0$ . Sem dificuldade, conclui-se por indução matemática que está

bem definida a função  $f^{(k)}(z)$ , para qualquer  $k \in \mathbb{N}_1$  e  $z \in D(w, r)$ . Ademais, a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (z-w)^n$$

converge absolutamente em  $D(w, r)$  e

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (z-w)^n, \quad z \in D(w, r). \quad (2)$$

Suponha-se que a função analítica  $f$  é representada por uma outra série de potências  $\sum b_n (z-w)^n$ , convergente em algum disco aberto centrado em  $w$ . Então, de (2) obtém-se

$$k! a_k = f^{(k)}(w) = k! b_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

e logo  $a_k = b_k$ , para qualquer que seja  $k \in \mathbb{N}$ , i.e. existe uma única série de potências que representa a função  $f$  numa vizinhança de  $w$ . A asserção anterior é uma generalização do princípio de identidade dos polinómios. Defronte será evidente que tal princípio corresponde à unicidade da série de Taylor.

**2. [Derivadas de funções elementares]** Se  $f(z) = e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , em conta do exemplo [9 **sec.** 2.2] e da definição 1, conclui-se  $f'(z) = f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Logo  $f^{(n)}(z) = e^z$ , para quaisquer que sejam  $z \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Do conhecimento da regra de derivação da função exponencial, seguem-se sem dificuldades as regras de **derivação das funções trigonométricas** e das **trigonométricas hiperbólicas**, precisamente

$$\sin' z = \cos z, \quad \cos' z = -\sin z, \quad \sinh' z = \cosh z \quad \text{e} \quad \cosh' z = \sinh z.$$

De facto, porque as funções trigonométricas são combinações lineares (complexas) de funções exponenciais, é suficiente calcular a derivada da função  $f(z) = e^{\xi z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , aonde  $\xi$  denota uma constante complexa não nula. O leitor poderá proceder por intermédio da proposição [3 **sec.** 2.2] ou simplesmente consider o limite da razão incremental como se segue

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\xi(z+h)} - e^{\xi z}}{h} = \xi \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\xi z + \xi h} - e^{\xi z}}{\xi h} = \xi e^{\xi z}.$$

**3.** Considere-se a função  $f(z) = \bar{z}$ . Claramente o limite da razão incremental

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{z+h}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = e^{-2i\theta}, \quad h = re^{i\theta}$$

não existe, caso  $h \rightarrow 0$ , uma vez que existem limites direccionais distintos. Assim deduz-se a não  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade da função  $f(z) = \bar{z}$ , em qualquer ponto do plano complexo.

**4.** Considere-se a função  $f(z) = \bar{z}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_2$ . Tendo em conta o **binómio de Newton**, obtemos

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(\bar{z} + \bar{h})^n - \bar{z}^n}{h} = \frac{\left( \sum_{k=0}^n C_k^n \bar{z}^k \bar{h}^{n-k} \right) - \bar{z}^n}{h} = \frac{\bar{h}}{h} \sum_{k=0}^{n-1} C_k^n \bar{z}^k \bar{h}^{n-k-1},$$

aonde  $C_k^n$  designa o número de **combinações** de  $k$  em  $n$ , i.e.

$$C_k^n := \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! k!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n.$$

Considerando o limite direccional  $r \rightarrow 0$ ,  $h = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$  e  $\theta$  um número real fixo, obtemos

$$\frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} C_k^n \bar{z}^k \bar{h}^{n-k-1} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} ne^{-2i\theta} \bar{z}^{n-1}.$$

Logo, se  $z \neq 0$  infere-se a existência de limites direccionais distintos. Consequentemente a função  $f$  não é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$ ,  $z \neq 0$ . Caso  $z = 0$

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \left| \frac{\bar{h}^n}{h} \right| = |h|^{n-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad n \geq 2$$

e logo  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável na origem.

□

Se  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$ , então o limite em (1) independe da direcção de convergência à origem, do acréscimo  $h$ . Em particular, se  $h \rightarrow 0$ ,  $h \in \mathbb{R}$  ou  $h \rightarrow 0$ ,  $h \in i\mathbb{R}$ , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = -i \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{h} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Definindo os **operadores de derivação**  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$  por intermédio de

$$\partial_{\bar{z}} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \partial_z f := \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (3)$$

obtém-se que se  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z \in \text{int } U$  então

$$\partial_{\bar{z}} f(z) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_z f(z) = f'(z). \quad (4)$$

A equação  $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$  é designada por equação de **Cauchy-Riemann**. Recorde que, para a classe das funções analíticas, a validade da equação de Cauchy-Riemann encontra-se afixada em [9 **sec.** 2.2]. É possível reescrevê-la usando derivadas parciais ao invés do operador  $\partial_{\bar{z}}$ , tanto quanto funções com valores reais ao invés de funções com valores complexos. De facto, se  $u = \text{Re } f$  e  $v = \text{Im } f$ , então

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} f(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(z) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + i \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) \right], \quad z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Infere-se que a equação de **Cauchy-Riemann** equivale ao sistema de equações às derivadas parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases}. \quad (5)$$

Se  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z \in \text{int } U$ , também a derivada  $f'(z)$  exprime-se por intermédio das derivadas parciais das suas partes real e imaginária, e.g.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

## Exemplos

5. Considere-se a função  $f(z) = e^{\bar{z}}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . As funções

$$\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f(z) = -e^x \sin y, \quad \text{aonde} \quad z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

admitem em  $\mathbb{C}$  derivadas parciais contínuas de todas as ordens, i.e.  $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ . Se  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  então  $f$  verifica as equações de Cauchy-Riemann no ponto  $z$ , i.e.  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) é solução do sistema de equações às derivadas parciais (5), no caso particular do decorrente exemplo, dado por

$$\begin{cases} e^x \cos y &= -e^x \cos y \\ -e^x \sin y &= e^x \sin y \end{cases} \quad \text{que é equivalente ao sistema} \quad \begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}.$$

Como as funções trigonométricas reais não têm zeros comuns, conclui-se que  $f(z) = e^{\bar{z}}$  não é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em nenhum ponto do plano complexo.

6. Considere-se a função  $f(z) := z^2 \bar{z} + \bar{z}^3/3$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . As regras de derivação dos operadores  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$  são em todo análogas às regras de derivação parcial. Na seguinte secção tentar-se-á atribuir rigor à asserção anterior. Em particular, são válidos os cálculos

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} f(z) &= \partial_{\bar{z}} (z^2 \bar{z} + \bar{z}^3/3) = z^2 + \bar{z}^2 \\ \partial_z f(z) &= \partial_z (z^2 \bar{z} + \bar{z}^3/3) = 2|z|^2 \end{aligned}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Em consequência,  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) sse  $y = \pm x$ . Determinam-se as derivadas parciais da função  $f$ , por intermédio dos operadores de derivação  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$ , precisamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z) &= (\partial_{\bar{z}} + \partial_z) f(z) = [(z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z}] + 2|z|^2 = 4x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(z) &= i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) f(z) = i2|z|^2 - i[(z - \bar{z})^2 + 2z\bar{z}] = 4iy^2 \end{aligned}, \quad z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

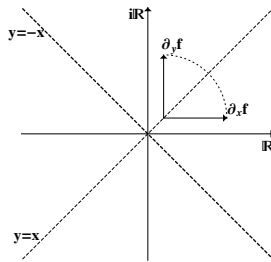


Figura 3.1:  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade da função de variável complexa  $f(z) = z|z|^2 + \bar{z}^3/3$

Observe a ortogonalidade das derivadas parciais em ordem a  $x$  e  $y$ , nos pontos aonde não nulas.

□



Recorde-se a noção de **diferenciabilidade à Frechet** no espaço vectorial  $\mathbb{R}^2$ . Uma função

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad U \ni (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

é  **$\mathbb{R}$ -diferenciável** no ponto  $z = x + iy \in \text{int } U$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  se está bem definida a **matriz Jacobiana**

$$J_f(z) := \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

e verifica

$$f(z + v) - f(z) = J_f(z)v + o(v), \quad v \rightarrow 0^1$$

aonde  $v = (v_1, v_2)$ ,  $v_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$  e  $J_f(z)v$  designa o vector resultante da multiplicação da matriz  $J_f(z)$  por a matriz coluna  $[v_1, v_2]^T$ , associada ao vector  $v = (v_1, v_2)$ , i.e.

$$J_f(z)v = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)v_2, \quad z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Em conta das igualdades

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_z + \partial_{\bar{z}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \quad (6)$$

facilmente obtém-se que

$$J_f(z)v = \partial_z f(z)v + \partial_{\bar{z}} f(z)\bar{v}, \quad (7)$$

aonde o vector  $v = (v_1, v_2)$  é identificado com o número complexo  $v_1 + iv_2$  e os produtos em  $\partial_z f(z)v$  e em  $\partial_{\bar{z}} f(z)\bar{v}$ , são produtos de números complexos.

Intenta-se no decorrente parágrafo convencer o leitor da semelhança entre as noções de diferenciabilidade real e complexa. Diz-se que uma aplicação  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é  $\mathbb{R}$ -linear se

$$L(\lambda v + \mu w) = \lambda L(v) + \mu L(w), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v, w \in \mathbb{C}.$$

Como bem deverá ser conhecido, a condição de  $\mathbb{R}$ -diferenciabilidade da função  $f$  equivale à existência duma transformação  $\mathbb{R}$ -linear  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$f(z + v) - f(z) = L(v) + o(v), \quad v \rightarrow 0. \quad (8)$$

Diz-se que uma aplicação  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é  $\mathbb{C}$ -linear se

$$L(\lambda v + \mu w) = \lambda L(v) + \mu L(w), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad v, w \in \mathbb{C}.$$

Se  $L$  é aplicação  $\mathbb{C}$ -linear então existe  $\xi \in \mathbb{C}$  tal que  $L(v) = v\xi$ ,  $v \in \mathbb{C}$ . O leitor deverá verificar que uma função  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  sse é possível considerar em (8) uma aplicação  $\mathbb{C}$ -linear  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

No seguinte resultado estabelece-se que a classe das funções  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis é uma subclasse estrita da classe das funções  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis, classes essas distinguidas por a equação de **Cauchy-Riemann**.

<sup>1</sup>Considerem-se funções  $g$  e  $h$  de variável complexa e com valores complexos. Diz-se que  $g(v)$ , é um ó pequeno da função  $h(v)$ , quando  $v \rightarrow 0$  i.e.  $g(v) = o(h(v))$ ,  $v \rightarrow 0$  se  $\lim_{v \rightarrow 0} g(v)/h(v) = 0$ .

**Proposição 2** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto não vazio,  $z = x + iy \in \text{int } U$  e  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . A função  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  sse  $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável no ponto  $(x, y)$  e é válida a equação de Cauchy-Riemann no ponto  $z$ .*

**Demonstração:** Suponha-se inicialmente que  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$ . Tal como em (4) demonstramos a validade das equações de *Cauchy-Riemann*. Resta provar que  $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável no ponto  $(x, y)$ . Tendo em conta (4) e (7), é necessário mostrar que

$$f(z+v) - f(z) - f'(z)v = o(v), \quad \mathbb{C} \ni v \rightarrow 0.$$

Tendo em linha de conta o seguinte

$$0 \leq \frac{|f(z+v) - f(z) - f'(z)v|}{|v|} = \left| \frac{f(z+v) - f(z) - f'(z)v}{v} \right| = \left| \frac{f(z+v) - f(z)}{v} - f'(z) \right| \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0,$$

termina a primeira parte da demonstração. Inversamente, suponha-se que  $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável no ponto  $(x, y)$  e que são válidas as equações de Cauchy-Riemann. Então  $\partial_z f(z)$  está bem definida e

$$\left| \frac{f(z+v) - f(z)}{v} - \partial_z f(z) \right| = \left| \frac{f(z+v) - f(z) - \partial_z f(z)v}{v} \right| = \frac{|f(z+v) - f(z) - J_f(z)v|}{|v|} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0.$$

Consequentemente  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  e  $f'(z) = \partial_z f(z)$ . ■

**Corolário 3** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto não vazio,  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z \in \text{int } U$ . Se  $f$  é elemento da classe  $C^1(D(z, \epsilon))$ , para algum  $\epsilon > 0$ , então  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  sse satisfaz as equações de Cauchy-Riemann no ponto  $z$ .*

**Demonstração:** De acordo com a proposição 2, é suficiente ter em conta que da existência das derivadas parciais de  $f$  numa vizinhança de  $z \in \text{int } U$  e da sua continuidade no ponto  $z$ , deduz-se que  $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z$ . ■

Tratamos abaixo com caminhos definidos em intervalos abertos  $I$ , aonde inclui-se a origem. Uma função contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se um **caminho**. Caso  $\alpha'(0) \neq 0$  então  $\alpha'(0)$  é um vector tangente ao caminho  $\alpha$  no ponto  $\alpha(0)$ . Consideram-se caminhos  $\alpha$  admitindo derivada na origem e tais que

$$\alpha(0) = z \quad \text{e} \quad \alpha'(0) \neq 0. \quad (9)$$

Suponha-se fornecida  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z \in \text{int } U$ , cujo determinante da matriz Jacobiana é não nulo. Se  $\alpha : I \rightarrow U$  é caminho diferenciável na origem e nas condições (9) então  $\alpha_f(t) = f(\alpha(t))$ ,  $t \in I$  define um caminho diferenciável na origem, verificando a condição  $\alpha_f(0) = f(z)$ . Se o determinante da matriz  $J_f(z)$  é não nulo então  $\alpha'_f(0) \neq 0$ . Caso em que  $\alpha'_f(0)$  é vector tangente ao caminho  $\alpha_f$  no ponto  $f(z)$ . O **determinante da matriz Jacobiana**  $J_f(z)$  denota-se por  $|J_f(z)|$  e supõe-se  $|J_f(z)| \neq 0$ . Diz-se que  $f$  é **conforme** no ponto  $z$  ou que preserva ângulos no ponto  $z$ , se para quaisquer caminhos  $\alpha$  e  $\beta$  diferenciáveis na origem e nas condições (9) então o ângulo entre  $\alpha'(0)$  e  $\beta'(0)$ , respectivamente tangentes a  $\alpha$  e  $\beta$  no ponto  $z$ , coincide com o ângulo entre os vectores  $\alpha'_f(0)$  e  $\beta'_f(0)$  respectivamente tangentes aos caminhos  $\alpha_f$  e  $\beta_f$ , no ponto  $f(z)$ .

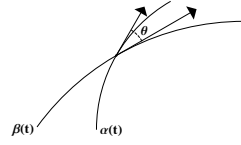


Figura 3.2: Ângulo da intercepção de duas curvas regulares

É evidente que  $f$  preserva ângulos no ponto  $z$  sse o conjunto  $\text{Arg } \alpha'_f(0) - \text{Arg } \alpha'(0)$  não depende de  $\alpha$ . A derivação da função composta para funções  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis junto com (6), permitem estabelecer

$$\alpha'_f(0) = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' = (\partial_z f + \partial_{\bar{z}} f) x' + (\partial_z f - \partial_{\bar{z}} f) i y' = \alpha'(0) \partial_z f(z) + \overline{\alpha'(0)} \partial_{\bar{z}} f(z), \quad (10)$$

aonde  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ . Se  $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$  então de (7) conclui-se  $\partial_z f(z) \neq 0$ . De (10) deduz-se

$$\text{Arg } \alpha'_f(0) - \text{Arg } \alpha'(0) = \text{Arg } \partial_z f(z).$$

Em consequência  $f$  é conforme em  $z$ . Se  $\partial_{\bar{z}} f(z) \neq 0$  então

$$\begin{aligned} \text{Arg } \alpha'_f(0) - \text{Arg } \alpha'(0) &= \text{Arg } \partial_z f(z) + \text{Arg } \left[ \partial_{\bar{z}} f(z) \frac{\overline{\alpha'(0)}}{\alpha'(0)} \right], \quad \partial_z f(z) \neq 0 \\ \text{Arg } \alpha'_f(0) - \text{Arg } \alpha'(0) &= \text{Arg } \left[ \partial_{\bar{z}} f(z) \frac{\overline{\alpha'(0)}}{\alpha'(0)} \right], \quad \partial_z f(z) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Considerando caminhos  $\alpha$  arbitrários (e.g.  $\alpha(t) = z + \xi t$ ,  $|\xi| = 1$ ), obtém-se que  $\partial_{\bar{z}} f(z) \overline{\alpha'(0)} / \alpha'(0)$  varia no círculo de raio  $|\partial_{\bar{z}} f(z)|$  e centrado na origem. Logo  $f$  não é conforme em  $z$ . Demonstrou-se:

**Proposição 4** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z \in \text{int } U$ . Suponha-se que  $|J_f(z)| \neq 0$ . Então  $f$  é conforme no ponto  $z$  sse  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  e  $f'(z) \neq 0$ .*

Como corolário do resultado anterior, em latas condições ir-se-á demonstrar que as curvas de níveis da parte real e imaginária duma função  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z_0$ , interceptam-se ortogonalmente. Considere-se um conjunto aberto não vazio  $U \subset \mathbb{C}$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função admitindo derivadas parciais contínuas em  $U$ . Definam-se as funções  $u := \text{Re } f$  e  $v := \text{Im } f$  e os conjuntos de nível

$$U_{z_0} := \{z : u(z) = u(z_0)\} \quad \text{e} \quad V_{z_0} := \{z : v(z) = v(z_0)\}.$$

Suponha-se que  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z_0$  e  $f'(z_0) \neq 0$ . Deduz-se da condição  $f'(z_0) \neq 0$  conjuntamente com as equações de *Cauchy-Riemann*, que  $\partial u / \partial x(z_0) \neq 0$  ou  $\partial u / \partial y(z_0) \neq 0$ , tanto  $\partial v / \partial x(z_0) \neq 0$  ou  $\partial v / \partial y(z_0) \neq 0$ . O teorema da **função implícita** permite afirmar a existência de  $\Omega$ , uma vizinhança de  $z_0$  aonde os conjuntos  $U_{z_0}$  e  $V_{z_0}$  são conjuntos de chegada de caminhos continuamente diferenciáveis, admitindo derivada não nula (é usual dizer-se que  $U_{z_0}$  e  $V_{z_0}$  admitem parametrizações uni-dimensionais). A imagem de  $U_{z_0} \cap \Omega$  e de  $V_{z_0} \cap \Omega$  por intermédio da função  $f$ , são segmentos de recta respectivamente verticais e horizontais interceptando-se no ponto  $f(z_0)$ . Como  $f$  é conforme em  $z_0$  então  $U_{z_0}$  e  $V_{z_0}$  interceptam-se no ponto  $z_0$  ortogonalmente, i.e. os seus respectivos vectores tangentes são ortogonais.

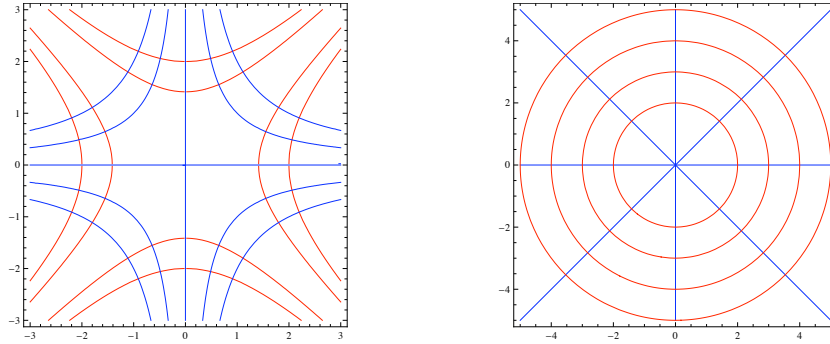


Figura 3.3: Curvas de nível das partes reais e imaginárias respectivamente das funções  $z \mapsto z^2$  e  $z \mapsto \ln z$ .

Se determinada função  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  então é por demais evidente o seguinte

$$\lim_{w \rightarrow z} \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \right| = |f'(z)|. \quad (12)$$

Em (12) avalia-se no limite, o cociente entre o comprimento do segmento de recta entre  $z$  e  $w$  e o comprimento do segmento entre as imagens dos pontos  $z$  e  $w$  por intermédio da função  $f$ . Abaixo será evidente que a existência do limite em (12) não é suficiente para garantir a diferenciabilidade complexa. Suponha-se fornecida  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , determinada função  $\mathbb{R}$ -diferenciável no ponto  $z \in \text{int } U$ . A definição de  $\mathbb{R}$ -diferenciabilidade junto de (7) estabelecem

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \left[ \partial_z f(z) + \frac{\bar{w} - \bar{z}}{w - z} \partial_{\bar{z}} f(z) \right] + o(1), \quad w \rightarrow z. \quad (13)$$

Tão simplesmente considerando em (13) limites direccionais  $w - z = t\xi$  ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\xi| = 1$ ), deduz-se que se  $\lim_{w \rightarrow z} |f(w) - f(z)|/|w - z|$  existe então  $|\partial_z f(z) + \xi \partial_{\bar{z}} f(z)|$  deverá ser constante para  $|\xi| = 1$ . Como  $\partial_z f(z) + \xi \partial_{\bar{z}} f(z)$ ,  $|\xi| = 1$  é a equação do círculo de centro em  $\partial_z f(z)$  e raio  $|\partial_{\bar{z}} f(z)|$  então necessariamente  $\partial_z f(z) = 0$  ou  $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$ . Reciprocamente é evidente que a condição  $\partial_z f(z) \partial_{\bar{z}} f(z) = 0$  é suficiente para garantir a existência do limite  $\lim_{w \rightarrow z} |f(w) - f(z)|/|w - z|$ .

As funções  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis no ponto  $z$  na condição  $\partial_z f(z) = 0$ , dizem-se  **$\mathbb{C}$ -anti-diferenciáveis** em  $z$ . Com respeito à questão geométrica de preservação de ângulos, abandona-se ao cuidado do leitor verificar que a existência do limite em (12) equivale à função  $f$  transformar caminhos ortogonais em  $z$  em caminhos ortogonais em  $f(z)$  i.e. à propriedade de preservação de ângulos rectos. Entendendo-se que dois caminhos  $\alpha$  e  $\beta$  nas condições (9) dizem-se ortogonais em  $z$  se  $\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle = 0$ . No parágrafo anterior demonstrámos a seguinte proposição:

**Proposição 5** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z \in \text{int } U$ . O seguinte limite*

$$\lim_{w \rightarrow z} \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \right| \quad (14)$$

*existe e é finito sse  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável ou  $\mathbb{C}$ -anti-diferenciável em  $z$ . Em caso afirmativo, o limite em (14) vale  $|\partial_z f(z)|$  ou  $|\partial_{\bar{z}} f(z)|$ , respectivamente se  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável ou  $\mathbb{C}$ -anti-diferenciável em  $z$ .*

### 3.1 Problemas

1. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . A derivada direccional de  $f$  em ordem ao vector  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(z + tv) - f(z)}{t}.$$

Como sabemos, se  $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável no ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(z) = J_f(z)v = \partial_z f(z)v + \partial_{\bar{z}} f(z)\bar{v}, \quad \text{aonde } z = x + iy.$$

Considere, nas diferentes alíneas abaixo, funções  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis no ponto  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

- a) Seja  $z \in \mathbb{C}$  fixo. Mostre que não existe  $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(z) = \partial_z f(z), \quad \text{para qualquer que seja a função } f.$$

- b) Demonstre a seguinte igualdade  $\overline{\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]}(z) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}}(z)$  e conclua de **a)** que não existe  $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(z) = \partial_{\bar{z}} f(z), \quad \text{para qualquer que seja a função } f.$$

- c) Prove adicionalmente que:

$$\text{i)} \quad \partial_{\bar{z}} f(z) = \frac{v}{2|v|^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial v}(z) + i \frac{\partial f}{\partial(iv)}(z) \right]; \quad \text{ii)} \quad \partial_z f(z) = \frac{\bar{v}}{2|v|^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial v}(z) - i \frac{\partial f}{\partial(iv)}(z) \right].$$

2. Se  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é função admitindo derivadas de primeira ordem em  $z \in \text{int } U$ , então é válido o seguinte

$$|J_f(z)| = |\partial_z f(z)|^2 - |\partial_{\bar{z}} f(z)|^2.$$

3. Considere uma função  $\varphi$  definida numa vizinhança do ponto  $z \in \mathbb{C}$  e  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Demonstre sucessivamente que se  $\varphi$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  então:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z) &= \varphi'(z); & \text{ii)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z) &= i \varphi'(z); & \text{iii)} \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(z) &= \overline{\varphi'(z)}; \\ \text{iv)} \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}(z) &= -i \overline{\varphi'(z)}; & \text{v)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(z) &= v \varphi'(z); & \text{vi)} \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial v}(z) &= \bar{v} \overline{\varphi'(z)}. \end{aligned}$$

4. Determine o domínio de  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade das seguintes funções na variável complexa e calcule as suas respectivas derivadas

$$\text{i)} \quad |z|, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \text{ii)} \quad z|z|, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \text{iii)} \quad z/\bar{z}, \quad z \neq 0;$$

$$\text{iv)} \quad \text{Re}(z/\bar{z}), \quad z \neq 0; \quad \text{v)} \quad \text{Im}(z/\bar{z}), \quad z \neq 0; \quad \text{vi)} \quad \text{Re}(z^2/\bar{z}^2), \quad z \neq 0.$$

5. Determine o domínio de  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade das seguintes funções na variável  $z := x + iy$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$  e calcule as suas derivadas nos pontos aonde definidas

$$\text{i)} \quad e^{ix}; \quad \text{ii)} \quad e^{ix|x|}; \quad \text{iii)} \quad (x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2);$$

$$\text{iv)} \quad z + 4ixy; \quad \text{v)} \quad \bar{z} + 4ixy; \quad \text{vi)} \quad \bar{z}^3 + 2(x^2 - y^2);$$

$$\text{vii)} \quad \arg z + \bar{z}^2; \quad \text{viii)} \quad x + i \arg z; \quad \text{ix)} \quad |z|^2 + i \arg z.$$

6. Considere a função  $f(z) = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $f(0) = 0$ .
- i) Mostre que  $f$  verifica as equações de Cauchy-Riemann na origem.
  - ii) Mostre que  $|f(z)| \leq 2|z|$ ,  $z \neq 0$  e conclua que  $f$  é contínua em  $\mathbb{C}$ .
  - iii) A função  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável na origem?
7. Sejam  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funções  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis em  $\mathbb{C}$  e considere a função composta  $\varphi = f \circ g$ . Mostre que para qualquer vector  $v \in \mathbb{R}^2$  verifica-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(z) = \partial_z f(w) \frac{\partial g}{\partial v}(z) + \partial_{\bar{z}} f(w) \frac{\partial \bar{g}}{\partial v}(z) \quad \text{aonde } w = g(z). \quad (15)$$

Deduz a [10 sec. 3.1] da igualdade (15) anterior.

8. Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z \in \text{int } U$ . Demonstre a equivalência entre as asserções:
- i)  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável ou  $\mathbb{C}$ -anti-diferenciável no ponto  $z$ ;
  - ii) O módulo da derivada direccional  $|J_f(z)e^{i\theta}|$  não depende de  $\theta \in \mathbb{R}$ ;
  - iii) O limite  $\lim_{w \rightarrow z} |[f(w) - f(z)]/(w - z)|$  existe e é finito.
- Suponha  $|J_f(z)| \neq 0$ . Verifique a equivalência de quaisquer das asserções nas alíneas anteriores com a seguinte:
- iv) Caminhos ortogonais em  $z$  são transformados por  $f$  em caminhos ortogonais em  $f(z)$ .

## 3.2 Regras de derivação

Os operadores de derivação  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$  são combinações lineares (complexas) dos operadores de derivação parcial. Consequentemente, a sua linearidade é imediata, i.e.

$$\partial_{\bar{z}}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(z) = \lambda_1 \partial_{\bar{z}} f(z) + \lambda_2 \partial_{\bar{z}} g(z) \quad \text{e} \quad \partial_z(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(z) = \lambda_1 \partial_z f(z) + \lambda_2 \partial_z g(z), \lambda_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2$$

aonde  $f$  e  $g$  são funções admitindo derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $z$ . É igualmente imediato formular a dependência da ordem de aplicação dos operadores de derivação e da operação de conjugação de funções complexas. Senão vejamos. Se  $f$  é uma função complexa de variável complexa e admitindo derivadas parciais de primeira ordem, então sem dificuldades verificam-se as igualdades

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Em consequência das definições dos operadores  $\partial_z$  e  $\partial_{\bar{z}}$  [3 sec. 3.1] infere-se

$$\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}}(\bar{f}). \quad (1)$$

Abaixo expõem-se outras regras de derivação dos operadores  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$ , relativas a operações entre funções complexas de variável complexa.

**Proposição 1 (Derivação do produto)** *Considerem-se funções  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  com derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $z \in \text{int}(U \cap V)$ . São válidas as regras de derivação*

$$\partial_{\bar{z}}(fg)(z) = g(z) \partial_{\bar{z}} f(z) + f(z) \partial_{\bar{z}} g(z), \quad (2)$$

$$\partial_z(fg)(z) = g(z) \partial_z f(z) + f(z) \partial_z g(z). \quad (3)$$

**Demonstração:** A prova consiste num conjunto elementar de manipulações algébricas. Conjugando ambos os membros de (3), e tendo em atenção (1) obtém-se

$$\partial_{\bar{z}}(\bar{f}g)(z) = [\partial_{\bar{z}}\bar{f}(z)]\bar{g}(z) + \bar{f}(z)[\partial_{\bar{z}}\bar{g}(z)]$$

i.e. obteve-se (2) substituídas as funções  $f$  e  $g$  respectivamente por  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ . Conclui-se que é suficiente mostrar (2). De seguida demonstra-se a regra de derivação parcial do produto de duas funções complexas com variável complexa. Da regra de derivação parcial do produto de duas funções reais de variável complexa, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re}(fg)}{\partial x} &= \frac{\partial (\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g - \operatorname{Im} f \operatorname{Im} g)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} \operatorname{Re} g - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \operatorname{Im} g \right] + \left[ \operatorname{Re} f \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x} - \operatorname{Im} f \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{\partial f}{\partial x} g \right) + \operatorname{Re} \left( f \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

e da equação anterior deduz-se

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(fg)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Re}(-ifg)}{\partial x} = -\operatorname{Re} i \left( \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \right).$$

Consequentemente

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (4)$$

Por analogia (ou considerando a composição com a mudança de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (y, x)$ ) segue

$$\frac{\partial(fg)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (5)$$

Tendo em linha de conta (4) e (5), conclui-se

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}(fg) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(fg)}{\partial x} + i \frac{\partial(fg)}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} + i \left( \frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right] \\ &= g \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right) = g \partial_{\bar{z}} f + f \partial_{\bar{z}} g. \end{aligned}$$

■

**Corolário 2** Considerem-se funções  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , admitindo derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $z \in \operatorname{int}(U \cap V)$ . Suponha-se que  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$ . Então

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}(fg)(z) &= f(z) \partial_{\bar{z}} g(z), \\ \partial_z(fg)(z) &= f'(z)g(z) + f(z) \partial_z g(z). \end{aligned}$$

Em particular,  $fg$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  sse  $g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  ou  $f(z) = 0$ .

## Exemplos

**1. [Operadores de derivação e polinómios]** Seja  $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$  um polinómio com coeficientes complexos. Sabe-se da proposição [3 sec. 2.2] que  $p(z)$  é uma função inteira. Considerando conjuntamente [4 sec. 3.1] obtém-se

$$\partial_{\bar{z}} p(z) = p'(z) = a_1 + \dots + n a_n z^{n-1} \quad \text{e} \quad \partial_z p(z) = 0.$$

Seja  $q(z)$  é o polinómio na variável complexa conjugada  $\bar{z}$  dado por  $q(z) = p(\bar{z})$ . Considerando a linearidade dos operadores  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$ , conjuntamente com (1), obtemos o seguinte

$$\partial_{\bar{z}}q(z) = \overline{\partial_z \sum \bar{a}_j z^j(z)} = \overline{p'(\bar{z})} \quad \text{e} \quad \partial_z q(z) = 0.$$

Inferese-se que o conjunto de  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade de  $q$  é o conjunto finito constituído por os conjugados dos zeros do polinómio  $p'(z)$ , i.e.  $q$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  sse  $p'(\bar{z}) = 0$ , caso em que  $q'(z) = 0$ .

Casos particulares dos dois parágrafos anteriores evidenciam-se nas seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \partial_z z^n &= n z^{n-1} & , & \quad \partial_z \bar{z}^n = 0 \\ \partial_{\bar{z}} z^n &= 0 & , & \quad \partial_{\bar{z}} \bar{z}^n = n \bar{z}^{n-1} \end{aligned} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (6)$$

Poder-lhe-á ser útil observar que quaisquer das afirmações constando nos parágrafos anteriores do decorrente exemplo, poderiam estabelecer-se afixando as evidentes igualdades

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i, \quad (7)$$

com intuítos de em consequência das definições 3 obter  $\partial_{\bar{z}}z = 0$  e  $\partial_z z = 1$ . Seguir-se-ia uma elementar demonstração por indução matemática das igualdades em (6). Por sua vez, a linearidade dos operadores de derivação permitiria estabelecer os restantes resultados.

2. Considere-se a função no exemplo [5 **sec.** 3.1], i.e.  $f(z) = e^{\bar{z}}$ . Em conta de (1) e (6) obtém-se

$$\partial_{\bar{z}}e^{\bar{z}} = \overline{\partial_z e^z} = \overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}. \quad (8)$$

Porque a função exponencial não se anula ( $|e^z| = e^{\text{Re } z} \neq 0$ ), conclui-se que  $\partial_{\bar{z}}e^{\bar{z}} \neq 0$ . Logo  $e^{\bar{z}}$  não é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em nenhum ponto. Se  $f$  é uma função  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z \in \mathbb{C}$  e  $g(z) = f(z)e^{\bar{z}}$  então  $\partial_{\bar{z}}g(z) = f(z)e^{\bar{z}}$ . Em consequência,  $g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z \in \mathbb{C}$  sse  $f(z) = 0$ . Em particular, fixado um conjunto finito  $\mathcal{F}_n = \{z_1, \dots, z_n\}$  e o polinómio  $p_n(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$ , aonde  $z_j, j = 1, \dots, n$  são números complexos distintos dois a dois, então a função

$$g_n(z) = p_n(z)e^{\bar{z}}, \quad z \in \mathbb{C}$$

é exemplo duma função cujo conjunto de  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade coincide com  $\mathcal{F}_n$ . Tendo em conta que  $\partial_z e^{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} e^z = 0$ , é possível calcular as derivadas  $g'_n(z_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$  da seguinte forma

$$g'_n(z_j) = \partial_z g_n(z_j) = e^{\bar{z}_j} \partial_z p_n(z_j) + p_n(z_j) \partial_z e^{\bar{z}}(z_j) = e^{\bar{z}_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z_j - z_k).$$

□

**Corolário 3 (Derivação do cociente)** *Considerem-se funções  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  admitindo derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $z \in \text{int}(U \cap V)$ . Se  $g(z) \neq 0$ , então são válidas as seguintes regras de derivação do cociente*

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{g(z)\partial_{\bar{z}}f(z) - f(z)\partial_{\bar{z}}g(z)}{g^2(z)}, \quad (9)$$

$$\partial_z\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{g(z)\partial_z f(z) - f(z)\partial_z g(z)}{g^2(z)}. \quad (10)$$



**Demonstração:** Sem exceção, todas as derivadas parciais na decorrente demonstração são calculadas no ponto  $z$ . Omitisse-o por razões de clareza gráfica. Suponha-se inicialmente que  $g$  assume valores reais. De acordo com as regra de derivação parcial do cociente de função escalares, obtêm-se

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g}\right) + i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{g}\right) \right] = -\frac{1}{2g^2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right) = -\frac{\partial_{\bar{z}}g}{g^2}.$$

Se  $g$  é uma função com valores complexos, tendo em conta a proposição 1 conclui-se

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{f}{g}\right) = \partial_{\bar{z}}\left(\frac{f\bar{g}}{|g|^2}\right) = \frac{1}{|g|^2}(\bar{g}\partial_{\bar{z}}f + f\partial_{\bar{z}}\bar{g}) - f\bar{g}\frac{\partial_{\bar{z}}g + g\partial_{\bar{z}}\bar{g}}{|g|^4} = \frac{\partial_{\bar{z}}f}{g} - \frac{f\partial_{\bar{z}}g}{g^2} = \frac{g\partial_{\bar{z}}f - f\partial_{\bar{z}}g}{g^2}.$$

■

**Proposição 4 (Derivação da composta)** *Considerem-se funções  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $g(V) \subset U$ . Se  $f$  e  $g$  são respectivamente  $\mathbb{R}$ -diferenciais nos pontos  $w = g(z) \in \text{int } U$  e  $z \in \text{int } V$ , então são válidas as seguintes regras de derivação*

$$\partial_{\bar{z}}\varphi(z) = \partial_{\bar{z}}f(w)\partial_{\bar{z}}\bar{g}(z) + \partial_zf(w)\partial_{\bar{z}}g(z), \quad (11)$$

$$\partial_z\varphi(z) = \partial_zf(w)\partial_zg(z) + \partial_{\bar{z}}f(w)\partial_z\bar{g}(z), \quad (12)$$

aonde  $\varphi$  designa a função composta  $\varphi = f \circ g$ .

**Demonstração:** Atentando a (1) e em analogia com a demonstração da proposição 1, conclui-se que é suficiente demonstrar (11). Considerando a linearidade dos operadores  $\partial_z$  e  $\partial_{\bar{z}}$ , sem perda de generalidade e objectivando facilitar o entendimento, supõe-se que a função  $f$  assume valores reais. Se  $g_1 = \text{Re } g$  e  $g_2 = \text{Im } g$ , da regra da cadeia para funções escalares, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(w) \frac{\partial g_1}{\partial x}(z) + \frac{\partial f}{\partial y}(w) \frac{\partial g_2}{\partial x}(z) = 2 \text{Re} \left( \partial_z f(w) \frac{\partial g}{\partial x}(z) \right) = \partial_z f(w) \frac{\partial g}{\partial x}(z) + \partial_{\bar{z}} f(w) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(z), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(w) \frac{\partial g_1}{\partial y}(z) + \frac{\partial f}{\partial y}(w) \frac{\partial g_2}{\partial y}(z) = 2 \text{Re} \left( \partial_z f(w) \frac{\partial g}{\partial y}(z) \right) = \partial_z f(w) \frac{\partial g}{\partial y}(z) + \partial_{\bar{z}} f(w) \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(z). \end{aligned} \quad (13)$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}\varphi(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z) + i \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z) \right) = \partial_{\bar{z}}f(w) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x}(z) + i \frac{\partial g}{\partial y}(z) \right) + \partial_zf(w) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(z) + i \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(z) \right) \\ &= \partial_{\bar{z}}f(w)\partial_{\bar{z}}\bar{g}(z) + \partial_zf(w)\partial_{\bar{z}}g(z). \end{aligned}$$

■

**Corolário 5** *Considerem-se funções  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $g(V) \subset U$ . Suponha-se que  $f$  e  $g$  admitem respectivamente derivadas de primeira ordem no ponto  $g(z) \in \text{int } U$  e  $z \in \text{int } V$ . Se  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $w = g(z)$  ou  $g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$ , então*

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}\varphi(z) &= f'(w)\partial_{\bar{z}}\bar{g}(z) & \text{respectivamente} & & \partial_{\bar{z}}\varphi(z) &= \partial_{\bar{z}}f(w)\overline{g'(z)} \\ \partial_z\varphi(z) &= f'(w)\partial_zg(z) & & & \partial_z\varphi(z) &= \partial_zf(w)g'(z) \end{aligned},$$

aonde  $\varphi$  designa a função composta  $\varphi = f \circ g$ .

**Corolário 6 (Função inversa)** *Sejam  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funções tais que  $g(V) \subset U$ .*

- i) Suponha-se que  $f$  e  $g$  são funções  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis respectivamente no ponto  $w = g(z) \in \text{int } U$  e  $z \in \text{int } V$ , tanto a função composta  $f \circ g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z \in \text{int } V$ . Se  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $w$  e  $f'(w) \neq 0$  então  $g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$ ;*
- ii) Suponha-se que  $f$  e  $g$  são respectivamente  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $U$  e  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $V$ . Se  $f \circ g(z) = z$ ,  $z \in V$  então  $f'(g(z)) \neq 0$ ,  $z \in V$ . A função  $g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável e*

$$g'(z) = \frac{1}{f'(w)}, \quad z \in V \quad \text{aonde} \quad w = g(z).$$

**Demonstração:** Demonstre-se inicialmente *i*). Do corolário 5 infere-se  $0 = \partial_{\bar{z}}(f \circ g)(z) = f'(w) \partial_{\bar{z}}g(z)$  e logo  $\partial_{\bar{z}}g(z) = 0$ , i.e. a função  $g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$ . Para demonstrar *ii*), considere-se a derivação da composta  $f \circ g$  para obter

$$1 = \partial_z(f \circ g) = f'(w) \partial_zg(z). \quad (14)$$

Logo  $f'(g(z)) \neq 0$ , para qualquer  $z \in U$  e de *i*) infere-se que  $g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $U$ . De (14) segue a igualdade  $g'(z) = 1/f'(g(z))$ ,  $z \in V$ . ■

## Exemplos

**3.** Considere-se a função  $\varphi(z) = e^{p(\bar{z})}$ , aonde  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  é polinómio de grau  $n$ . A exponencial é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $\mathbb{C}$ . Do exemplo 1 sabe-se  $\partial_{\bar{z}}q(z) = p'(\bar{z})$ , aonde  $q(z) = p(\bar{z})$ . Então

$$\partial_{\bar{z}}\varphi(z) = p'(\bar{z})e^{p(\bar{z})}.$$

Conclui-se que  $\varphi$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  sse  $p'(\bar{z}) = 0$ . Se  $\varphi$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$ , do corolário 5 e do exemplo 1 obtém-se  $\varphi'(z) = e^{p(\bar{z})} \partial_zq(z) = 0$ .

**4.** Seja  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $\mathbb{C}$ . Considere-se  $g(z) = h(\bar{z}) = h \circ c(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ; aonde  $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é a função de conjugação  $c(z) = \bar{z}$ . Do corolário 5 e do exemplo 1 obtém-se

$$\partial_{\bar{z}}g(z) = h'(\bar{z}) \partial_{\bar{z}}c(z) = h'(\bar{z}) \quad \text{e} \quad \partial_zg(z) = h'(\bar{z}) \partial_zc(z) = 0.$$

Logo  $g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z \in \mathbb{C}$  sse  $h'(\bar{z}) = 0$ , e em caso afirmativo  $g'(z) = 0$ . Por exemplo, o conjunto dos pontos de  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade das funções  $g_1(z) = \cos(\bar{z})$  e  $g_2(z) = \sin(\bar{z})$  coincidem respectivamente com  $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  e  $\{(1+2k)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ . Nos pontos de  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade, são nulas as derivadas das funções  $g_j$ ,  $j = 1, 2$ .

**5.** Se  $f(z) = e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$  e  $g(z) = \ln z$ ,  $z \neq 0$  então  $f \circ g(z) = z$ . Logo, a função logaritmo principal é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em qualquer ponto  $z \neq 0$  aonde admite derivadas parciais de primeira ordem. Da secção 2.4 sabemos que  $g \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-)$  e logo  $z \mapsto \ln z$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_0^-\}$  e

$$\ln'(z) = \frac{1}{e^{\ln z}} = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Argumentos semelhantes conduzem às regras de derivação dos diversos ramos da função logaritmo polivalente, i.e. se  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b - a = 2\pi$  então

$$\ln'_{[a,b]}(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus e^{ib}\mathbb{R}_0^+.$$

□

Denotando os operadores  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$  respectivamente por  $\partial/\partial\bar{z}$  e  $\partial/\partial z$ , então as regras de derivação (11) e (12) são reescritas na forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(z) &= \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(w)\frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(w)\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}(z), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z) &= \frac{\partial f}{\partial z}(w)\frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(w)\frac{\partial\bar{g}}{\partial z}(z).\end{aligned}$$

A notação anterior inspira semelhanças mais profundas com a **regra da cadeia** clássica. No entanto poderá com mais facilidade sugerir a proposição errónea de que os operadores  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$  são operadores de derivação direccionais [3.1 **pro.1**].

No seguinte teorema expomos **regras de derivação** para funções  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis. Anote-se a possibilidade de assumir técnicas de demonstrações análogas às normalmente utilizadas para demonstrar os resultados transcritos para a análise real, i.e. usando a definição de diferenciabilidade (1) e estimando os erros de aproximação da razão incremental. No entanto, considera-se de importância para o decorrente texto, o estudo dos operadores  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$  e em particular as regras de derivação acima expostas. Assim estabelecem-se provas imediatas das regras de derivação para funções  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis. Ademais, evita-se repetir ou direccionar o leitor para técnicas que deverá dominar.

**Teorema 7 (Regras de derivação para funções  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis)** *Sejam  $U, V \subset \mathbb{C}$  abertos não vazios e  $z = x + iy \in \text{int}(U \cap V)$ . Suponha-se que  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  são funções  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$ . São válidas as seguintes asserções:*

i)  $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  e

$$(\lambda_1 f + \lambda_2 g)'(z) = \lambda_1 f'(z) + \lambda_2 g'(z), \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2;$$

ii)  $fg$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  e

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$$

iii) se  $g(z) \neq 0$  então  $f/g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

Finalmente, se  $g(V) \subset U$  e as funções  $f$  e  $g$  são respectivamente  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis nos pontos  $z \in \text{int } V$  e  $g(z) \in \text{int } U$  então a função composta  $\varphi = f \circ g$  é diferenciável em  $z$  e é válida a fórmula de derivação

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

**Demonstração:** Iniciamos demonstrando as asserções de i) a iii). Por hipótese as funções  $f, g$  são  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis no ponto  $z$ , o que equivale à  $\mathbb{R}$ -diferenciabilidade das suas funções coordenadas. Das regras de derivação para funções  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis escalares, conclui-se sem dificuldades que as

funções  $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ ,  $fg$  e  $f/g$  são  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis. Resta mostrar a validade das equações de Cauchy-Riemann. Porque  $\partial_{\bar{z}} f(z) = \partial_{\bar{z}} g(z) = 0$  então de (9), (2) e da linearidade do operador  $\partial_{\bar{z}}$ , infere-se respectivamente que  $\partial_{\bar{z}}(f/g)(z) = \partial_{\bar{z}}(fg)(z) = \partial_{\bar{z}}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(z) = 0$ . De (4) sabemos que se  $\psi$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável então  $\psi'(z) = \partial_z \psi(z)$  e logo de (10), (3) e da linearidade de  $\partial_z$  mostram-se respectivamente as regras de derivação em *iii*), *ii*) e *i*).

Em essência, os argumentos acima servem para demonstrar a regra da derivação complexa da função composta. Dado que  $f$  e  $g$  são  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis, sabemos da análise real que a função composta  $f \circ g$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável. Porque  $\partial_{\bar{z}} f(g(z)) = \partial_{\bar{z}} g(z) = 0$ , de (11) deduz-se  $\partial_{\bar{z}} \varphi(z) = 0$  e em consequência a  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade de  $\varphi = f \circ g$  no ponto  $z$ . A fórmula de calculo da derivada da composta é consequência imediata de (12). ■

**Corolário 8** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  aberto não vazio e  $z = x + iy \in \text{int } U$ . Se  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  então  $f^n(z)$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  e é válida da regra de derivação*

$$(f^n)'(z) = n f'(z) f^{n-1}(z), \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Considere-se um conjunto  $U \subset \mathbb{C}$  aberto e não vazio. Suponha-se que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função da classe  $C^1(U)$  e  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z \in U$ . Considerando [6 **sec.** 3.1] deduz-se

$$|J_f(z)| = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(z), -i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right\rangle = \langle f'(z), -i^2 f'(z) \rangle = |f'(z)|^2, \quad (15)$$

aonde  $|J_f(z)|$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  designam respectivamente o **determinante da matriz Jacobiana**  $J_f(z)$  e o **produto interno** euclidiano em  $\mathbb{R}^2$ . Logo, se  $f'(z) \neq 0$  então o teorema da **função inversa** garante que  $f$  é localmente invertível, i.e. existe uma vizinhança  $V$  de  $z$  tal que  $W := f(V)$  é uma vizinhança de  $f(z)$ , a função  $f : V \rightarrow W$  é invertível e  $f|_V^{-1} \in C^1(W)$ . Do corolário 6, deduz-se que  $f|_V^{-1}$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $w := f(z) \in W$  e

$$\frac{d}{dz} f|_V^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Obtivemos o seguinte resultado:

**Proposição 9** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto e não vazio. Suponha-se que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função com derivadas parciais de primeira ordem continuas numa vizinhança do ponto  $z \in U$ . Se  $f'(z)$  está bem definida e  $f'(z) \neq 0$  então existem vizinhanças  $V$  e  $W$  respectivamente dos pontos  $z$  e  $w := f(z)$  tais  $f : V \rightarrow W$  é invertível. A função  $f|_V^{-1}$  pertence à classe  $C^1(W)$ , é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $w$  e*

$$\frac{d}{dz} f|_V^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Considere-se de novo a derivação da função composta  $f(z)$ ,  $z = z(u + iv)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ . No caso em que  $f$  é uma função real, estabeleceu-se em (13) uma fórmula de cálculo das derivadas parciais de  $f$  em ordem a  $u$  e  $v$ , envolvendo as derivadas parciais de  $z = z(u + iv)$  e os operadores  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$  aplicados à função  $f$ . Se  $f$  não é necessariamente real, aplicamos o procedimento referido às suas partes reais e imaginárias

para obter a validade de (13) para função complexa de variável complexa. Simbolicamente escrevemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial u} \partial_z + \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \partial_{\bar{z}}, \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial v} \partial_z + \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} \partial_{\bar{z}}.\end{aligned}$$

Em particular, mudando a variável da função  $f$  para coordenadas polares, i.e  $f(z) = f(re^{i\theta})$  obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial r} \partial_z + \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} \partial_{\bar{z}} = e^{i\theta} \partial_z + e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} \partial_z + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} \partial_{\bar{z}} = ir [e^{i\theta} \partial_z - e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}}].\end{aligned}\tag{16}$$

Resolvendo (16) em ordem a  $\partial_{\bar{z}}$  e  $\partial_z$  obtém-se os operadores de derivação em coordenadas polares

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}} &= \frac{e^{i\theta}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\ \partial_z &= \frac{e^{-i\theta}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\tag{17}$$

Se  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável no ponto  $z = x + iy \in \text{int } U$ , distinto da origem, então  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z = re^{i\theta}$  sse

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = -\frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta).\tag{18}$$

Caso  $f$  seja  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z = re^{i\theta} \neq 0$  então

$$f'(r, \theta) = \frac{e^{-i\theta}}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) - \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) \right)$$

A equação (18) é designada por equação de *Cauchy-Riemann* em coordenadas polares. Se  $u = \text{Re } f$  e  $v = \text{Im } f$  então (18) é equivalente ao sistema de equações às derivadas parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) \end{cases}.$$

Defronte, qualquer referência a diferenciabilidade será respeitante a  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade. Para mencionar questões relativas a diferenciabilidade à Frechet usaremos os termos  $\mathbb{R}$ -diferenciável, etc. A secção termina introduzindo a definição central do decorrente texto. Precisamente, diz-se que uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , definida no conjunto  $U \subset \mathbb{C}$  aberto não vazio, é **holomorfa** em  $U$  se  $f$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em todos os pontos de  $U$ . A classe das funções holomorfas em  $U$  é denotada por  $\mathcal{H}(U)$ .

### 3.2 Problemas

1. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  aberto não vazio. Suponha definidos operadores lineares  $D_z, D_{\bar{z}} : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  verificando

$$\begin{aligned}D_z z &= 1 & , & & D_z \bar{z} &= 0 \\ D_{\bar{z}} z &= 0 & , & & D_{\bar{z}} \bar{z} &= 1\end{aligned}.$$

Mostre que se  $D_z$  e  $D_{\bar{z}}$  verificam a regra de derivação do produto [2 sec. 3.2] e [3 sec. 3.2] então

$$D_z p = \partial_z p \quad \text{e} \quad D_{\bar{z}} p = \partial_{\bar{z}} p,$$

para qualquer que seja a função polinomial  $p(z, \bar{z})$ , nas variáveis complexa e complexa conjugada.

2. Considere  $U$  aberto conexo não vazio e  $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Demonstre que se o contradomínio de  $u$  inclui-se numa variedade uni-dimensional então a função  $u$  é constante. Deduza que se  $\operatorname{Re} u$ ,  $\operatorname{Im} u$ ,  $|u|$  ou  $\arg u$  são holomorfas em  $U$  então  $u$  é constante.
3. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto, conexo não vazio e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função admitindo derivadas de primeira ordem. Demonstre que se  $\partial_{\bar{z}} f(z) = \partial_z f(z) = 0$ ,  $z \in U$  então  $f$  é constante em  $U$ .
4. Sejam  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funções admitindo derivadas de primeira ordem em  $\mathbb{C}$ . Suponha-se que  $f$  e  $\bar{g}$  são  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis respectivamente em  $w = g(z)$  e em  $z \in \mathbb{C}$ . Mostre que a função composta  $\varphi = f \circ g$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  sse  $f'(w) = 0$  ou  $\bar{g}'(z) = 0$ , e se  $\varphi$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável no ponto  $z$  então  $\varphi'(z) = 0$ .
5. Considere  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  e a função de conjugação  $c(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Defina  $\varphi(z) := c \circ f \circ c(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Verifique que  $\varphi$  é função inteira e a validade da igualdade  $\varphi'(z) := \bar{f}'(\bar{z})$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .
6. Determine o domínio de  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade das funções definidas por as seguintes expressões e calcule as respectivas derivadas:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| i) $\bar{z}^2 + 2\bar{z} + z$ , $z \in \mathbb{C}$ ;                       | ii) $\bar{z}^3 - 3i\bar{z}^2 - 6\bar{z} + 3$ , $z \in \mathbb{C}$ ; | iii) $\bar{z}^5 + 5\bar{z} + z^3$ , $z \in \mathbb{C}$ ; |
| iv) $3\bar{z}^5 - 5\bar{z}^3 + 15\bar{z} + z^3$ , $z \in \mathbb{C}$ ;     | v) $e^{\bar{z}^5 + 5\bar{z} + z^3}$ , $z \in \mathbb{C}$ ;          | vi) $\cos z e^{\bar{z}}$ , $z \in \mathbb{C}$ ;          |
| vii) $\cos \frac{1}{z} e^{\bar{z}}$ , $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; | viii) $\cos(e^{\bar{z}})$ , $z \in \mathbb{C}$ ;                    | ix) $\cos(e^{\bar{z} + z^2})$ , $z \in \mathbb{C}$ ;     |
| x) $\cos  z $ , $z \in \mathbb{C}$ ;                                       | xi) $z^2 \bar{z}^2 - 2z\bar{z} + z^2$ , $z \in \mathbb{C}$ ;        | xii) $\bar{z}^2 + 2 z ^2$ , $z \in \mathbb{C}$ ;         |
| xiii) $3 z ^2 z - \bar{z}^3$ , $z \in \mathbb{C}$ ;                        | xiv) $ \sin z ^2$ , $z \in \mathbb{C}$ ;                            | xv) $\ln  z $ , $0 \neq z \in \mathbb{C}$ .              |

7. Considere  $n \in \mathbb{N}_1$  e o polinómio em  $z$  e  $\bar{z}$  dado por  $\psi_n(z) = (n+1)|z|^2 z^{n-1} - \bar{z}^{n+1}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Mostre que o conjunto de  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade da função  $\psi$  coincide com o conjunto das rectas que passam por a origem e por as raízes de ordem  $2n$  da unidade.
8. Fornecidos  $n, k = 1, \dots$  considere as funções  $\varphi_{n,k}(z) = z^{n+k}/\bar{z}^n$ ,  $z \neq 0$  e  $\varphi_{n,k}(0) = 0$ . Verifique sucessivamente as seguintes asserções:
  - i) As funções  $\varphi_{n,k}$  são contínuas em  $\mathbb{C}$ ;
  - ii) As funções  $\varphi_{n,1}$  não são  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis em qualquer número complexo  $z$ ;
  - iii) As funções  $\varphi_{n,1}$  verificam a condição de Cauchy-Riemann na origem sse  $n$  é par;
  - iv) As funções  $\varphi_{n,k}$ ,  $k = 2, \dots$  são  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis em  $z$  sse  $z = 0$ . Ademais  $\varphi'_{n,k}(0) = 0$ .
9. Fornecido  $n = 1, \dots$  considere as funções  $\psi_n(z) = z^n/\bar{z}^n$ ,  $z \neq 0$ . Denote por  $\mathbb{T}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_1$  o conjunto das raízes de ordem  $k$  da unidade e verifique sucessivamente as seguintes asserções:
  - i) As funções  $\psi_n$  não são  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis em qualquer  $z \neq 0$ ;
  - ii) As funções  $\operatorname{Re} \psi_n$  são  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis no conjunto  $\mathbb{T}_{4n}$ ;
  - ii) As funções  $\operatorname{Im} \psi_n$  são  $\mathbb{C}$ -diferenciáveis no conjunto  $e^{i\pi/(4n)} \mathbb{T}_{4n}$ .

10. Seja  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$  uma função diferenciável.

i) Considere a função módulo  $m(z) = |z|$ ,  $z \in \mathbb{C}$  e mostre que

$$\partial_{\bar{z}} m(z) = \frac{z}{2|z|} \quad \text{e} \quad \partial_z m(z) = \frac{\bar{z}}{2|z|}, \quad \text{aonde } z \neq 0.$$

ii) Se  $\varphi(z) = f(|z|)$ ,  $z \neq 0$  então

$$\partial_{\bar{z}} \varphi(z) = f'(|z|) \frac{z}{2|z|} \quad \text{e} \quad \partial_z \varphi(z) = f'(|z|) \frac{\bar{z}}{2|z|}, \quad \text{aonde } z \neq 0.$$

iii) Se  $\varphi$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $\mathbb{C}$  então  $\varphi$  é a função constante.

iv) Seja  $z \in \mathbb{C}$ . A função  $\varphi$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  sse  $\bar{\varphi}$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$ .

### 3.3 Integrais de linha e função Índice

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $a < b$ . Diz-se que uma função  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um **caminho** se  $\gamma$  é contínua. Um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se **de classe  $C^1$**  se  $\gamma \in C^1([a, b])$ , i.e. se  $\gamma \in C^1(]a, b[)$  e a função  $\gamma'$  é prolongável por continuidade ao intervalo  $[a, b]$ . Anota-se que sem dificuldades o leitor demonstrará [ver **pro.1**] que a asserção anterior equivale a  $\gamma \in C^1(]a, b[)$  e à existência de derivadas laterais  $\gamma'_d(a)$  e  $\gamma'_e(b)$  tais que  $\lim_{t \rightarrow a^+} \gamma'(t) = \gamma'_d(a)$  e  $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma'(t) = \gamma'_e(b)$ . Uma **curva de classe  $C^1$**  é o contradomínio dum caminho de classe  $C^1$ . Um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se **seccionalmente de classe  $C^1$** , se existem números reais  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$  tais que  $\gamma : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho de classe  $C^1$ , qualquer que seja  $j = 0, \dots, n$ . Uma **curva seccionalmente de classe  $C^1$**  é o contradomínio dum caminho seccionalmente de classe  $C^1$ , o qual se diz uma **parametrização** da curva. Designa-se por **caminho seccionalmente regular** ou **curva seccionalmente regular** respectivamente um caminho ou uma curva seccionalmente de classe  $C^1$ . O decorrente texto ocupar-se-á exclusivamente de caminhos e curvas seccionalmente regulares.

#### Exemplos

1. **[Segmento de recta]** O segmento de recta de  $z$  a  $w$  é uma curva  $C^1$  parametrizada por

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \gamma(t) = tw + (1-t)z, \quad \text{aonde } z, w \in \mathbb{C},$$

e é denotado por  $[z, w]$ . Se  $z_1, z_2, \dots, z_n$  são números complexos, então o caminho

$$\gamma : [0, n-1] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \gamma(t) = (t-j)z_{j+1} + (1+j-t)z_j, \quad \text{se } j \leq t \leq j+1, \quad j = 1, \dots, n-1$$

diz-se uma parametrização da **linha poligonal** unindo  $z_1$  a  $z_2$ ,  $z_2$  a  $z_3$ ,  $\dots$ ,  $z_{n-1}$  a  $z_n$ . A linha poligonal é denotada por  $[z_1, z_2, \dots, z_n]$ . É evidente que a linha poligonal é um caminho seccionalmente regular. Sem dificuldades conclui-se que  $[z_1, z_2, \dots, z_n]$  é um caminho de classe  $C^1$  sse os números complexos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  incluem-se numa mesma recta, i.e. sse  $z_1, z_2, \dots, z_n$  são colineares.

2. **[Círculo]** O círculo  $\partial D(w, r)$  de raio  $r > 0$  e centrado no complexo  $w$  é uma curva de classe  $C^1$  parametrizada por o caminho

$$\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \gamma(t) = w + re^{it}.$$

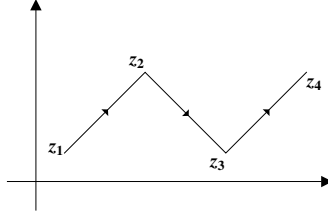


Figura 3.4: Linha poligonal  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$

□

Um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se **fechado** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e diz-se **simples** se  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  é injectiva. Um **caminho de Jordan** é um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  fechado e simples. Uma **curva de Jordan** é o contradomínio dum caminho de Jordan. Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho, denotamos por  $\mathcal{C}^\gamma$  a curva  $\gamma([a, b])$ . Se  $\gamma$  é um caminho definido no intervalo não vazio  $[a, b]$  então  $\mathcal{C}^\gamma$  é compacto e em particular está contido num disco  $D(0, r)$ ,  $r > 0$ . Porque  $\mathbb{C} \setminus D(0, r)$  é um conjunto conexo, então qualquer componente conexa ilimitada de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^\gamma$ , contém  $\mathbb{C} \setminus D(0, r)$ . Consequentemente uma única componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^\gamma$  é ilimitada e as restantes são limitadas. É conhecido que se  $\mathcal{C}^\gamma$  é uma curva de Jordan, então  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^\gamma$  têm precisamente duas componentes conexas, asserção usualmente parafraseada no dizer de que uma curva de Jordan «separa o plano complexo em duas partes», i.e. o complementar duma curva de Jordan é a união de dois conjuntos abertos e conexos disjuntos. A proposição anterior é usualmente nomeada de **teorema da curva de Jordan**, cuja demonstração encontrasse fora do escopo da decorrente comunicação. Diz-se que a componente conexa limitada do complementar da curva de Jordan  $\mathcal{C}^\gamma$  é o **interior de  $\gamma$** . O **exterior de  $\gamma$**  é a componente conexa ilimitada. Interior e exterior de  $\gamma$  são respectivamente denotados por  $\text{ins } \gamma$  e  $\text{out } \gamma$ .

Relembre-se o leitor de que uma função limitada  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *Riemann* integrável [4, V§1], se para qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $\mathcal{P}$  uma partição do intervalo  $[a, b]$ , i.e.

$$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b\} \quad (1)$$

verificando a seguinte condição

$$\sum_{j=0}^n (M_j - m_j)(t_{j+1} - t_j) < \epsilon, \quad \text{aonde } M_j = \sup_{t \in [t_j, t_{j+1}]} u(t) \quad \text{e} \quad m_j = \inf_{t \in [t_j, t_{j+1}]} u(t).$$

As **somas superior e inferior** associadas à partição  $\mathcal{P}$  são respectivamente definidas por

$$S(f, \mathcal{P}) := \sum_{j=0}^n M_j(t_{j+1} - t_j) \quad \text{e} \quad s(f, \mathcal{P}) := \sum_{j=0}^n m_j(t_{j+1} - t_j).$$

Dada uma partição (1), define-se o seu comprimento da seguinte forma

$$|\mathcal{P}| := \sum_{j=0}^n (t_{j+1} - t_j).$$



As somas de *Riemann* da função  $u$  associadas à partição  $\mathcal{P}$  são quaisquer somatório

$$\sum_{j=0}^n u(\xi_j)(t_{j+1} - t_j) \quad \text{aonde} \quad \xi_j \in [t_j, t_{j+1}] , \quad j = 0, \dots, n .$$

A função  $u$  é *Riemann* integrável sse existe  $I \in \mathbb{R}$ , tal que para um arbitrário  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que qualquer soma de *Riemann* associada a partições de comprimento inferior a  $\delta$  verifica

$$\left| \sum_{j=0}^n u(\xi_j)(t_{j+1} - t_j) - I \right| < \epsilon . \quad (2)$$

Se  $u$  é *Riemann* integrável, então o número real  $I$  em (2), diz-se o valor do seu integral e denota-se por

$$\int_a^b u(t) dt := I .$$

É usual simbolizar a asserção em (2) por intermédio da seguinte simbologia

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0^+} \sum_{j=0}^n u(\xi_j)(t_{j+1} - t_j) = \int_a^b u(t) dt .$$

Na teoria de integrais de linha de funções de variável complexa que exposta, não revelar-se-á necessário considerar integrais de *Riemann* outros que não de funções reais seccionalmente contínuas. No entanto, em escassas situações não se evita apresentar enunciados mais gerais do que os necessários aos objectivos da teoria de holomorfia inclusa no documento. Ao empreendimento será útil o resultado de seguida sem demonstração enunciado, por intermédio do qual caracteriza-se a classe das funções *Riemann* integráveis. Assim é necessário o conceito de conjunto de medida nula. Diz-se que  $M \subset \mathbb{R}$  têm **medida nula**, se para arbitrário  $\epsilon > 0$  existem intervalos de números reais  $I_1, I_2, \dots$  tais que

$$M \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \epsilon , \quad \text{aonde } |I_n| \text{ designa o comprimento do intervalo } I_n .$$

**Proposição 1 (Lebesgue)** [7, IX§6 Teo. 20] *Considerem-se números reais  $a < b$  e suponha-se que  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada. Então  $u \in \mathcal{R}([a, b])$  sse o conjunto dos pontos de descontinuidade da função  $u$  tem medida nula.*

Uma função com valores complexos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se **Riemann integrável** em  $[a, b]$ , se  $\text{Re } f$  e  $\text{Im } f$  são *Riemann* integráveis no intervalo  $[a, b]$ , aonde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ . A classe das funções com valores complexos e *Riemann* integráveis em  $[a, b]$  é denotada por  $\mathcal{R}([a, b])$ . Se  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  então o seu integral define-se por intermédio de

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \text{Re } f(t) dt + i \int_a^b \text{Im } f(t) dt .$$

É evidente que

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b \text{Re} [\lambda f(t)] dt + i \int_a^b \text{Im} [\lambda f(t)] dt = \int_a^b \lambda f(t) dt , \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ i \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b \text{Re} [if(t)] dt + i \int_a^b \text{Im} [if(t)] dt = \int_a^b if(t) dt , \quad \lambda \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Em consequência, obtém-se a linearidade do integral

$$(\xi_1 + \xi_2) \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \xi_1 f(t) dt + \int_a^b \xi_2 f(t) dt, \quad \xi_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2.$$

**Lema 2** Se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é Riemann integrável então  $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Demonstração:** Por definição  $f$  é Riemann integrável sse  $u := \operatorname{Re} f$  e  $v := \operatorname{Im} f$  são Riemann integráveis. É evidente que se  $u$  e  $v$  são funções contínuas no ponto  $t \in [a, b]$  então  $|f|$  é contínua em  $t$ . De forma equivalente, o conjunto dos pontos de descontinuidades da função  $|f|$  é um subconjunto da união dos conjuntos de descontinuidades de  $u$  e  $v$ . Consequentemente têm medida nula. ■

**Proposição 3** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $a < b$ . Para qualquer que seja  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  verifica-se

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

**Demonstração:** Considere-se o número complexo  $I := \int_a^b f(t) dt$ . Se  $I = 0$  então a proposição é evidente. Caso  $I \neq 0$ , então é possível escolher  $\theta \in \operatorname{Arg} I$ . Tendo em conta a linearidade do integral, sem dificuldades obtém-se

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} f(t)] dt \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

■

Considere-se um caminho seccionalmente regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Diz-se que uma função  $f : \mathcal{C}^\gamma \rightarrow \mathbb{C}$  é integrável ao longo do caminho  $\mathcal{C}^\gamma$  se  $(f \circ \gamma)\gamma' \in \mathcal{R}([a, b])$ . O conjunto das funções Riemann integráveis ao longo do caminho  $\gamma$  é denotado por  $\mathcal{R}(\gamma)$ . Definimos os **integrais de linha** na variável complexa

$$\int_\gamma f(w) dw = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt \quad \text{e} \quad \int_\gamma f(w) d\bar{w} = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \bar{\gamma}'(t) dt, \quad \text{para } f \in \mathcal{R}(\gamma). \quad (3)$$

Diz-se que uma função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é **seccionalmente contínua** se é contínua excepto possivelmente num número finito de pontos, aonde os limites laterais existem. Denota-se a classe das funções seccionalmente contínuas por  $PC([a, b])$ . Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho seccionalmente regular e  $f \in PC(\mathcal{C}^\gamma)$ , então a função  $(f \circ \gamma)\gamma'$  é seccionalmente contínua. Segue em consequência que os integrais de linha em (3) encontram-se bem definidos para funções seccionalmente contínuas em curvas parametrizadas por caminhos seccionalmente regulares.

Tendo em conta as evidentes igualdades

$$\operatorname{Re}[(\bar{f} \circ \gamma)\bar{\gamma}'] = [\operatorname{Re}(f \circ \gamma)\gamma'] \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}[(\bar{f} \circ \gamma)\bar{\gamma}'] = -\operatorname{Im}[(f \circ \gamma)\gamma']$$

obtém-se

$$\int_\gamma \bar{f}(w) d\bar{w} = \overline{\int_\gamma f(w) dw}.$$

**Proposição 4 (Mudança de parâmetro)** *Sejam  $[a, b]$  e  $[c, d]$  intervalos não vazios de números reais e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho seccionalmente regular. Suponha-se que  $s : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é uma função estritamente crescente e sobrejectiva. Se  $s$  é diferenciável, excepto possivelmente num número finito de pontos, então*

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\sigma} f(w) dw ,$$

aonde  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  é o caminho  $\sigma(t) = \gamma(s(t))$ ,  $t \in [c, d]$ .

**Demonstração:** Não se perde generalidade supondo que a mudança de parâmetro  $s(t)$ ,  $t \in [c, d]$  é diferenciável em  $[c, d]$ . Do teorema de mudança de variável para integrais de funções reais de variável real, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f(w) dw &= \int_c^d (f \circ \sigma)(t) \sigma'(t) dt = \int_c^d (f \circ \gamma)(s(t)) \gamma'(s(t)) s'(t) ds \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)(s) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f(w) dw . \end{aligned}$$

■

Se na proposição 4 considerarmos a função  $s : [c, d] \rightarrow [a, b]$  estritamente decrescente, os caminhos  $\gamma$  e  $\sigma$  dizem-se percorridos em **sentidos opostos**. Tendo em conta a demonstração do referido resultado, é evidente que se  $\gamma$  e  $\sigma$  são percorridos em sentidos opostos então

$$\int_{\gamma} f(w) dw = - \int_{\sigma} f(w) dw .$$

Nas condições anteriores, o caminho  $\sigma$  obtém-se de uma mudança de parâmetro seccionalmente diferenciável e estritamente crescente do **caminho inverso** de  $\gamma$ , denotado por  $\gamma^-$  e definido por

$$\gamma^- : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^{\gamma} \quad \text{e} \quad \gamma^-(t) = \gamma(at + (1-t)b) , \quad t \in [0, 1] .$$

Considera-se por igual o integral de linha em ordem ao **comprimento de arco**

$$\int_{\gamma} f(w) |dw| = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) |\gamma'(t)| dt .$$

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho seccionalmente regular e  $s$  uma mudança de parâmetro estritamente monótona e seccionalmente diferenciável. De acordo com argumentos semelhantes aos que conduziram à proposição 4, demonstra-se que

$$\int_{\gamma} f(w) |dw| = \int_{\sigma} f(w) |dw| ,$$

aonde  $\sigma$  é o caminho definido por  $\sigma = \gamma \circ s$ . Sabemos que o integral de linha em ordem ao comprimento de arco permite calcular comprimentos de caminhos seccionalmente regulares, precisamente

$$\int_{\gamma} 1 |dw| = |\gamma| ,$$

aonde  $|\gamma|$  denota o **comprimento do caminho**  $\gamma$ , definido por intermédio do seguinte

$$|\gamma| := \sup \left\{ \sum_{j=0}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j+1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b \right\} .$$

**Proposição 5** Considere-se o intervalo não vazio de números reais  $[a, b]$  e um caminho seccionalmente regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Então

$$\left| \int_{\gamma} f(w) dw \right| \leq \int_{\gamma} |f(w)| |dw|,$$

para qualquer que seja  $f \in \mathcal{R}(\gamma)$ .

**Demonstração:** Da proposição 3 obtém-se

$$\left| \int_{\gamma} f(w) dw \right| = \left| \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f \circ \gamma(t)| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(w)| |dw|.$$

■

**Teorema 6 (Teorema fundamental)** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho seccionalmente regular e  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto tal que  $\mathcal{C}^{\gamma} \subset U$ . Se  $f$  é diferenciável em  $U$  então é válida a seguinte igualdade

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

**Demonstração:** De [7 sec. 3.1] infere-se sem dificuldades que

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = J_f(\gamma(t))\gamma'(t) = \partial_z f(\gamma(t))\gamma'(t) + \partial_{\bar{z}} f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)} = (f' \circ \gamma)(t)\gamma'(t).$$

Da conhecida regra de Barrow para funções de variável real, obtém-se

$$\int_{\gamma} f'(w) dw = \int_a^b (f' \circ \gamma)(t)\gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

■

Em particular, da proposição anterior deduz-se que se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho seccionalmente regular fechado e  $f$  é diferenciável num conjunto aberto que contém a curva  $\mathcal{C}^{\gamma}$ , então infere-se

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = 0.$$

Diz-se que uma função  $f$  admite **primitiva** no conjunto aberto  $U \subset \mathbb{C}$ , se  $U$  é subconjunto do domínio de  $f$  e existe uma função diferenciável  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z)$ , para qualquer  $z \in U$ . Se  $F_1$  e  $F_2$  são duas primitivas em  $U$  da função  $f$ , considerando  $F = F_1 - F_2$  obtemos [ver 3.2 pro.3]

$$\partial_z F(z) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_{\bar{z}} F(z) = 0, \quad \text{para qualquer que seja } z \in U.$$

Supondo  $U$  conexo conclui-se  $F_1(z) = F_2(z) + C$ ,  $z \in U$  aonde  $C \in \mathbb{C}$  é uma constante complexa.

## Exemplos

**3. [Primitivas de funções analíticas]** Seja  $f$  uma função analítica em  $w \in \mathbb{C}$ , representada por a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$  convergente em  $\mathbb{C}$ . Do lema [2 sec. 2.2] sabemos que as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-w)^{n+1} \quad \text{têm o mesmo raio de convergência.}$$

Da proposição [3 **sec.** 2.2] conclui-se que as primitivas de  $f$  em  $D(w, r)$  são funções analíticas e

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-w)^{n+1} \quad \text{é uma primitiva de } f \text{ em } D(w, r).$$

4. Considere-se o caminho  $\gamma_r : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_r(t) = z + re^{it}$ ,  $r > 0$  e os integrais

$$\int_{\gamma_r} (w-z)^n dw, \quad \text{se } n \in \mathbb{Z}.$$

O caminho  $\gamma_r$  parametriza a curva fechada  $\partial D(z, r)$ . Se  $n \neq -1$  então a função  $w \rightarrow (z-w)^n$  admite primitiva no conjunto aberto  $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ . Como  $\partial D(z, r) \subset \mathbb{C} \setminus \{z\}$ , da proposição anterior infere-se

$$\int_{\gamma_r} (w-z)^n dw = 0, \quad \text{se } n \neq -1.$$

Para estudar o caso  $n = -1$ , considere-se o caminho  $\gamma_{r,\epsilon} : [\epsilon - \pi, \pi - \epsilon] \rightarrow \mathbb{C}$ , aonde  $\gamma_{r,\epsilon}(t) = \gamma_r(t)$ .

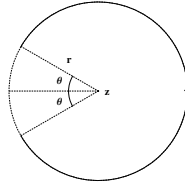


Figura 3.5: O caminho  $\gamma_{r,\epsilon}$

Do Teorema Fundamental sem dificuldades obtém-se o seguinte

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{w-z} dw = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{r,\epsilon}} \frac{1}{w-z} dw = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \ln(re^{i(\pi-\epsilon)}) - \ln(re^{i(\epsilon-\pi)}) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2\pi i - 2i\epsilon) = 2\pi i.$$

Deduz-se que a função  $w \rightarrow 1/(w-z)$  não admite primitiva em qualquer conjunto aberto que contenha  $\partial D(z, r)$ . No entanto, a função  $w \rightarrow \ln(w-z)$  é uma primitiva no conjunto  $\mathbb{C} \setminus (z + \mathbb{R}_0^-)$ .

□

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho seccionalmente regular fechado. Define-se a função **índice**

$$I(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw, \quad \text{para } z \notin \mathcal{C}^\gamma.$$

Em termos geométricos  $I(\gamma, z)$  indica o número de rotações (contabilizadas de acordo com a sua orientação) do caminho  $\gamma$  em torno do ponto  $z \notin \mathcal{C}^\gamma$ .

**Proposição 7** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho seccionalmente regular fechado. Então*

$$I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}, \quad \text{para qualquer } z \notin \mathcal{C}^\gamma.$$

**Demonstração:** Fixo  $z \notin \mathcal{C}^\gamma$  considere-se a função

$$\varphi(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt, \quad a \leq s \leq b.$$

Como a função  $[a, b] \ni t \rightarrow \gamma'(t)/(\gamma(t) - z)$  é seccionalmente contínua então  $\varphi$  é contínua e diferenciável, excepto possivelmente num número finito de pontos. Se  $\varphi'(s)$  está definida então

$$\varphi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}, \quad a \leq s \leq b.$$

Logo

$$\frac{d}{ds} \left( (\gamma(s) - z) e^{-\varphi(s)} \right) = \gamma'(s) e^{-\varphi(s)} - (\gamma(s) - z) \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} e^{-\varphi(s)} = 0.$$

Porque a função  $[a, b] \ni s \rightarrow (\gamma(s) - z) e^{-\varphi(s)}$  é contínua e admite derivada nula, excepto possivelmente num número finito de ponto, então é constante. Tendo em conta que  $\varphi(a) = 0$ , obtém-se

$$e^{-\varphi(s)} = \frac{\gamma(a) - z}{\gamma(s) - z} \quad \text{e em particular} \quad e^{\varphi(b)} = 1, \quad \text{i.e.} \quad I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}.$$

■

Considere-se  $z \in \mathbb{C}$  fixo e seja  $d_z$  a distância de  $z$  à curva  $\mathcal{C}^\gamma$ , i.e.

$$d_z := \text{dist}(z, \mathcal{C}^\gamma) := \inf \{|z - w| : w \in \mathcal{C}^\gamma\},$$

aonde  $\gamma$  é um caminho seccionalmente regular. Porque o conjunto  $\mathcal{C}^\gamma$  é compacto, então de  $z \notin \mathcal{C}^\gamma$  infere-se  $d_z > 0$ . Supondo  $|z - \xi| < d_z/2$  obtém-se

$$\left| \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - \xi} \right| = \left| \frac{z - \xi}{(w - z)(w - \xi)} \right| \leq \frac{2}{d_z^2} |z - \xi|, \quad \text{para } w \in \mathcal{C}^\gamma.$$

Logo, para quaisquer  $z, \xi \notin \mathcal{C}^\gamma$  é válida a desigualdade

$$|I(\gamma, z) - I(\gamma, \xi)| \leq \frac{|\gamma|}{\pi d_z^2} |z - \xi|, \quad \text{se } |z - \xi| < \frac{d_z}{2}.$$

Em consequência deduz-se a continuidade da função índice. Como o índice  $I(\gamma, z)$  é um número inteiro, então é necessariamente constante em cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^\gamma$ . Se  $z$  é elemento da componente conexa ilimitada de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^\gamma$ , então

$$|I(\gamma, z)| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi d_z} \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0.$$

Conclui-se que  $I(\gamma, z) = 0$ , para qualquer elemento  $z$  da componente conexa ilimitada de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^\gamma$ . Demonstrou-se o seguinte resultado:

**Proposição 8** *Seja  $\gamma$  um caminho seccionalmente regular fechado. A função índice  $I(\gamma, z)$  verifica:*

- i)  $I(\gamma, z)$  é constante em qualquer componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^\gamma$ ;
- ii)  $I(\gamma, z)$  é identicamente nula na componente conexa ilimitada de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^\gamma$ .

Diz-se que um caminho de *Jordan*  $\gamma$  é percorrido no **sentido positivo**, se para qualquer  $z$  no interior da curva  $\mathcal{C}^\gamma$  verifica-se que  $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}_+$ . Diz-se percorrido no sentido negativo se  $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}_-$ . Em termos geométricos, o caminho  $\gamma$  é percorrido no sentido positivo, se  $\text{ins } \gamma$  encontra-se à esquerda do caminho  $\gamma$ . O sentido positivo é também usualmente designado de sentido **anti-horário**. Defronte demonstra-se que se  $z \in \text{ins } \gamma$  então  $I(\gamma, z) = \pm 1$ .

### 3.3 Problemas

1. Considere sucessivamente os problemas nas seguintes alíneas:

- a) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f' \in C([a, b])$ .
- i) Demonstre que se  $f'$  é prolongável por continuidade ao intervalo  $[a, b]$  sse as derivadas laterais  $f'_d(a)$  e  $f'_e(b)$  existem e respectivamente igualam  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ .

**Sugestão:** Considere o teorema de Lagrange.

- ii) Se  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = t^2 \sin 1/t$  e  $f(0) = 0$  então  $f'_d(0)$  existe mas  $f'(t)$  não é prolongável por continuidade à origem.
- b) Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma' \in C([a, b])$  então  $\gamma'$  é prolongável por continuidade ao intervalo  $[a, b]$  sse  $\gamma'_d(a)$  e  $\gamma'_e(b)$  existem e verifica-se  $\lim_{x \rightarrow a^+} \gamma'(t) = \gamma'_d(a)$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} \gamma'(t) = \gamma'_e(b)$ .

2. Considere  $r > 0$  e aplique a definição de integral de linha para calcular:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_{[0, 2i]} \arg z \, dz ; \quad \text{ii)} \quad \int_{[0, 1+i]} \arg z \, dz ; \quad \text{iii)} \quad \int_{|z|=r} \arg z \, dz ; \\ \text{iv)} \quad & \int_{|z|=r} \arg z \, d\bar{z} ; \quad \text{v)} \quad \int_{|z|=r} \arg z \, |dz| ; \quad \text{vi)} \quad \int_{\gamma} \arg z \, dz ; \end{aligned}$$

aonde

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \gamma(x) = x + ix^2.$$

3. Considere o caminho  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(x) = xe^{ix}$  e calcule os seguintes integrais de linha:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_{\gamma} z \, dz ; \quad \text{ii)} \quad \int_{\gamma} \bar{z} \, dz ; \quad \text{iii)} \quad \int_{\gamma} \arg z \, dz ; \\ \text{iv)} \quad & \int_{\gamma} \operatorname{Re} z \, dz ; \quad \text{v)} \quad \int_{\gamma} \operatorname{Im} z \, dz ; \quad \text{vi)} \quad \int_{\gamma} \frac{e^{|z|}}{i - |z|} \, dz . \end{aligned}$$

4. Considere uma caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^1$ , verificando as seguintes condições:

$$\operatorname{Re} \gamma(0) = \operatorname{Im} \gamma(1) > 0, \operatorname{Im} \gamma(0) = \operatorname{Re} \gamma(1) = 0 \quad ; \quad \operatorname{Re} \gamma(t) > 0, \operatorname{Im} \gamma(t) > 0 \quad (0 < t < 1).$$

Defina os caminhos  $\gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  da seguinte forma  $\gamma_k(t) = i^{k-1} \gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Aplicando a definição de integral de linha verifique que se  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$  é função integrável em intervalos compactos então

$$\int_{\alpha} f(|z|) \, dz = \int_{\alpha} f(|z|) \, d\bar{z} = 0,$$

aonde  $\alpha$  é o caminho fechado seccionalmente regular definido por as seguintes condições

$$\alpha : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \alpha(t) = \gamma_k(t - k + 1), \quad k - 1 \leq t \leq k \quad (k = 1, \dots, 4).$$

5. Considere a definição de integral de linha tanto a proposição 8 para calcular  $I(\gamma, z)$ ,  $z \notin \mathcal{C}^\gamma$  aonde o caminho  $\gamma$  encontra-se indicado nas seguintes alíneas:

$$\text{i)} \quad \gamma(t) = e^{i2n\pi t}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}_1) \quad ; \quad \text{ii)} \quad \gamma(t) = \operatorname{sgn} t - e^{i2\pi t} \operatorname{sgn} t, \quad -n \leq t \leq m \quad (n, m \in \mathbb{N}_1) .$$

Na alínea ii) o símbolo  $\operatorname{sgn} t$  designa o sinal de  $t \in \mathbb{R}$ . No problema assume-se  $\operatorname{sgn} 0 = 0$ . Esboce as curvas  $\mathcal{C}^\gamma$  no plano complexo.

6. Considere os caminhos  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  respectivamente definidos por  $[0, e^{-i\pi/4}]$ ,  $[e^{i\pi/4}, 0]$  e

$$\gamma_3 : [-\pi/4, \pi/4] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \gamma_3(t) = e^{it}.$$

- i) Represente no plano complexo as curvas  $\mathcal{C}^{\gamma_j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , aonde  $\gamma_4$  é uma parametrização seccionalmente regular da curva fechada  $\mathcal{C}^{\gamma_1} \cup \mathcal{C}^{\gamma_2} \cup \mathcal{C}^{\gamma_3}$ , percorrida no sentido positivo;
- ii) Calcule os integrais indicados nas seguintes alíneas:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \quad \int_{\gamma_3} \cos(\sqrt{2}\pi z) dz; & \text{ii)} \quad \int_{\gamma_4} \cos z dz; & \text{iii)} \quad \int_{\gamma_1} \cos(\sqrt{2}\pi \bar{z}) dz; \\ \text{iv)} \quad \int_{\gamma_3} \frac{1}{z^2} \sin(\pi \bar{z}/\sqrt{2}) dz; & \text{v)} \quad \int_{\gamma_2} \sin(\sqrt{2}\pi \operatorname{Re} z) dz; & \text{vi)} \quad \int_{\gamma_3} e^{|z|^2} dz; \\ \text{vii)} \quad \int_{\gamma_4} z e^{\pi|z|^2} dz; & \text{viii)} \quad \int_{\epsilon\gamma_3} z \ln z dz \quad (\epsilon > 0); & \text{ix)} \quad \int_{\gamma_4} z \ln z dz. \end{array}$$

7. Considere os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_4$  referidos no problema 6. Demonstre que

$$\left| \int_{r\gamma_1} e^{z^2} dz \right| \leq r \quad \text{e} \quad \left| \int_{r\gamma_4} e^{z^2} |dz| \right| \leq 2r(1 + e^{r^2}) \quad , \quad (r > 0).$$

8. Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho seccionalmente regular e  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto tal que  $\mathcal{C}^\gamma \subset U$ . Se  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  é diferenciável e  $F'(z) = \bar{f}(z)$ ,  $z \in U$  então

$$\int_{\gamma} f(z) d\bar{z} = \bar{F}(\gamma(b)) - \bar{F}(\gamma(a)).$$

9. Seja  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$  e  $[-z, z]$  o segmento de recta de  $-z$  a  $z$ . Justifique que o integral de linha

$$\int_{[-z, z]} w \ln w dw,$$

está bem definido e calcule-o.

10. Considere  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função inteira, representada por uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  convergente no plano complexo. Suponha que  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é uma sucessão de termos reais e justifique que

$$\int_{[z_1, z_2]} \bar{f}(w) dw = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} [F(\bar{z}_2) - F(\bar{z}_1)],$$

aonde  $F$  é a função inteira representada por a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ .

11. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto não vazio e  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável no ponto  $\xi \in \operatorname{int} U$ . Demonstre que

$$\partial_{\bar{z}} f(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i \epsilon^2} \int_{|w-\xi|=\epsilon} f(\xi) d\xi \quad \text{e} \quad \partial_z f(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i \epsilon^2} \int_{|w-\xi|=\epsilon} f(\xi) d\bar{\xi}.$$

**Sugestão:** Considere que  $f(w+v) - f(w) = v \partial_w f(w) + \bar{v} \partial_{\bar{w}} f(w) + o(v)$ ,  $v \rightarrow 0$ .



### 3.4 Fórmula de Pompeiu

Considere-se um caminho seccionalmente regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e um campo vectorial  $f : \mathcal{C}^\gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  na classe  $\mathcal{C}(\mathcal{C}^\gamma)$ . O **trabalho** realizado por o campo vectorial  $f$  ao longo do caminho  $\gamma$  é o integral de linha definido através de

$$\int_{\gamma} f(w) d\gamma(w) := \int_a^b \langle f \circ \gamma, \gamma' \rangle(t) dt,$$

aonde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  designa o **produto interno euclidiano** no espaço vectorial  $\mathbb{R}^2$ . Nas condições anteriores, verificamos que o trabalho relaciona-se com o integral de linha [3 sec. 3.3] na variável complexa. De facto, se  $f_1 = \operatorname{Re} f$  e  $f_2 = \operatorname{Im} f$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(w) dw &= \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \int_a^b [(f_1 \circ \gamma) \gamma'_1 - (f_2 \circ \gamma) \gamma'_2] dt + i \int_a^b [(f_1 \circ \gamma) \gamma'_2 + (f_2 \circ \gamma) \gamma'_1] dt \\ &= \int_a^b \langle \bar{f} \circ \gamma, \gamma' \rangle(t) dt + i \int_a^b \langle i \bar{f} \circ \gamma, \gamma' \rangle(t) dt = \int_{\gamma} \bar{f}(w) d\gamma(w) + i \int_{\gamma} i \bar{f}(w) d\gamma(w), \end{aligned}$$

i.e.

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} \bar{f}(w) d\gamma(w) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} i \bar{f}(w) d\gamma(w).$$

Considerem-se caminhos seccionalmente regulares  $\gamma_0, \dots, \gamma_n, n \in \mathbb{N}$ . Define-se o **sistema de caminhos**  $\gamma := \gamma_0 + \dots + \gamma_n$ , o **sistema de curvas**  $\mathcal{C}^\gamma := \mathcal{C}^{\gamma_0} \cup \dots \cup \mathcal{C}^{\gamma_n}$  e o integral em  $\gamma$

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j} f(w) dw.$$

Suponha os caminhos  $\gamma_k, k = 0, \dots, n$  caminhos de *Jordan* verificando as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\gamma_j} \cap \mathcal{C}^{\gamma_k} &= \emptyset \quad ; \quad k \neq j; k, j = 0, \dots, n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{N} \\ \mathcal{C}^{\gamma_k} &\subset \operatorname{ins} \gamma_0 \quad ; \quad k = 1, \dots, n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{N}_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Então o sistema de caminhos  $\gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$  diz-se **orientado positivamente** se  $\gamma_0$  é percorrido no sentido anti-horário e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  são percorridos no sentido horário.

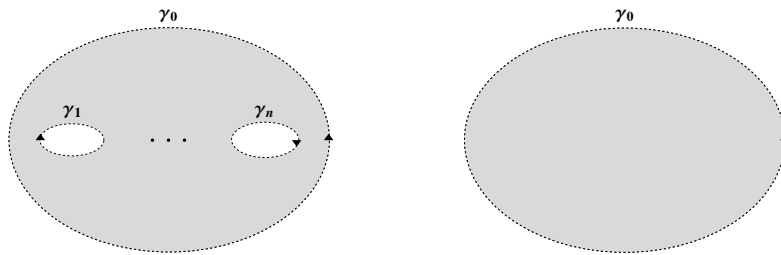


Figura 3.6: Conjunto  $n$ -multi conexo respectivamente nos caso  $n \in \mathbb{N}_1$  e  $n = 0$ .

O teorema de *Green* da análise real elementar é usualmente enunciado para conjuntos abertos com fronteira constituída por um número finito de curvas de *Jordan* seccionalmente regulares verificando

as condições (1). Precisamente, se

$$U = \text{ins } \gamma_0 \cap \text{out } \gamma_1 \cap \cdots \cap \text{out } \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}_1 \quad \text{ou} \quad U = \text{ins } \gamma_0, \quad n = 0 \quad (2)$$

e se  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é um campo vectorial na classe  $C^1(\text{cl } U)$ , com funções coordenadas dadas por  $f_1 := \text{Re } f$  e  $f_2 := \text{Im } f$ , então são válidas as **fórmulas de Green**

$$\int_{\gamma} f(w) d\gamma(w) = \iint_U \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x}(w) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(w) \right] dA(w), \quad w = x + iy, \quad (3)$$

aonde  $\iint dA(w)$  designa o integral de *Riemann* bi-dimensional e o sistema de caminhos de *Jordan*  $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n$  é orientado positivamente, i.e. o sistema  $\gamma$  é percorrido por forma a que o domínio  $U$  se encontre à sua esquerda. Os conjuntos  $U$  verificando as condições do teorema de *Green* dizem-se conjuntos **n-multi conexos**, com fronteira orientada positivamente. É usual designar os conjuntos  $U$  acima como o interior duma curva de *Jordan* seccionalmente regular com “ $n$  buracos”, constituídos por os interiores de  $n$  curvas de *Jordan* seccionalmente regulares. De seguida reescrevemos (3) em notação mais adequada à análise complexa. Nas condições do teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_U \partial_{\bar{w}} f(w) dA(w) &= \frac{1}{2} \left[ \iint_U \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dA(w) + i \iint_U \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA(w) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\gamma} i \bar{f}(w) d\gamma(w) - i \int_{\gamma} \bar{f}(w) d\gamma(w) \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \int_{\gamma} \bar{f}(w) d\gamma(w) + i \int_{\gamma} i \bar{f}(w) d\gamma(w) \right] \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(w) dw. \end{aligned}$$

Considerando conjuntamente as seguintes igualdades

$$\iint_U \partial_w f(w) dA(w) = \overline{\iint_U \partial_{\bar{w}} \bar{f}(w) dA(w)} = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \overline{\bar{f}(w) dw} = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(w) d\bar{w},$$

termina-se a demonstração da validade do seguinte enunciado do teorema de *Green*:

**Teorema 1 (Green)** *Seja  $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  um sistema de caminhos de Jordan seccionalmente regulares nas condições (1) e considere-se o conjunto aberto  $n$ -multi conexo*

$$U = \text{ins } \gamma_0 \cap \text{out } \gamma_1 \cap \cdots \cap \text{out } \gamma_n \quad (\text{se } n \in \mathbb{N}_1) \quad \text{ou} \quad U = \text{ins } \gamma_0 \quad (\text{se } n = 0).$$

*Se  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um campo vectorial que admite derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $U \cup \partial U$ , então são válidas as seguintes fórmulas de Green*

$$\begin{aligned} \iint_U \partial_{\bar{w}} f(w) dA(w) &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(w) dw; \\ \iint_U \partial_w f(w) dA(w) &= -\frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(w) d\bar{w}; \end{aligned} \quad (4)$$

aonde o sistema de caminhos de *Jordan*  $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n$  é orientado positivamente.

## Exemplos

1. [Área de  $\text{ins } \gamma$ .] Se  $\gamma$  é curva de *Jordan* seccionalmente regular percorrida no sentido positivo, então do teorema de *Green* é evidente que

$$|\text{ins } \gamma| = \iint_U 1 \, dA(w) = \iint_U \partial_{\bar{w}} \bar{w} \, dA(w) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{w} \, dw,$$

aonde  $|\text{ins } \gamma|$  designa a área bi-dimensional do interior da curva de *Jordan*  $C^\gamma$ .

□

Se  $U \subset \mathbb{C}$  é um conjunto aberto não vazio e  $z \in U$ , então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $D(z, \epsilon) \subset U$ . Defronte e para números  $\epsilon > 0$  suficientemente pequenos, o símbolo  $U_{z, \epsilon}$  denota o conjunto  $U \setminus D(z, \epsilon)$ . Para enunciar o seguinte resultado é necessário considerar integrais de funções não necessariamente limitadas. Uma das restrições mais incômodas do integral de *Riemann* consiste estar definido para uma subclasse das funções limitadas e definidas em conjuntos limitados. É no entanto possível considerar integrais de funções não *Riemann* integráveis, e.g. considerando os usualmente conhecidos por **integrais impróprios de Riemann**. Considere-se um conjunto  $U \subset \mathbb{C}$  aberto, limitado e não vazio. Se para qualquer  $\epsilon > 0$ , a função  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  é *Riemann* integrável no conjunto  $U \setminus D(z, \epsilon)$ , então  $g$  diz-se **impropriamente Riemann integrável** em  $U$ , se existe o seguinte limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{U_{z, \epsilon}} g(z) \, dA(z). \quad (5)$$

Caso  $g$  seja impropriamente *Riemann* integrável em  $U$ , então o valor do limite em (5) diz-se o valor do integral impróprio de *Riemann*, e é denotado por

$$\iint_U g(z) \, dA(z).$$

**Teorema 2 (Fórmula de Pompeiu)** *Seja  $\gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  um sistema de caminhos de Jordan seccionalmente regulares nas condições (1) e considere-se o conjunto aberto  $n$ -multi conexo*

$$U = \text{ins } \gamma_0 \cap \text{out } \gamma_1 \cap \dots \cap \text{out } \gamma_n \quad (\text{se } n \in \mathbb{N}_1) \quad \text{ou} \quad U = \text{ins } \gamma_0 \quad (\text{se } n = 0).$$

*Se  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  admite derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $U \cup \partial U$ , então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} \, dw - \frac{1}{\pi} \iint_U \frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w - z} \, dA(w), \quad z \in U, \quad (6)$$

*aonde o sistema de caminhos de Jordan  $\gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$  é orientado positivamente e o integral bi-dimensional em (6) entende-se no sentido do integral impróprio de Riemann.*

**Demonstração:** A função  $w \rightarrow f(w)/(z - w)$  tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas no fecho do conjunto  $U_{z, \epsilon} := U \setminus D(z, \epsilon)$ . Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tem-se que  $U_{z, \epsilon}$  está nas condições do teorema de *Green*. Logo, de (4) obtemos

$$\iint_{U_{z, \epsilon}} \partial_{\bar{w}} \left[ \frac{f(w)}{w - z} \right] \, dA(w) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} \, dw - \frac{1}{2i} \int_{|z-w|=\epsilon} \frac{f(w)}{w - z} \, dw, \quad (7)$$

aonde o círculo  $|z - w| = \epsilon$  é percorrido no sentido positivo. Deduz-se da definição de integral de linha [3 **sec.** 3.3] e da continuidade de  $f$  no ponto  $z$ , que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{|z-w|=\epsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \right| = \left| i \int_{-\pi}^{\pi} [f(z + \epsilon e^{i\theta}) - f(z)] d\theta \right| \\ &\leq 2\pi \max_{\theta \in ]-\pi, \pi]} |f(z + \epsilon e^{i\theta}) - f(z)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Por outro lado, anotamos que a função  $U \ni w \rightarrow \partial_{\bar{w}} f(w)/(w - z)$  é impropriamente *Riemann* integrável em  $U$ . De facto, considerem-se números positivos  $0 < \delta < \epsilon$  e a **coroa circular**

$$D(z, \delta, \epsilon) := D(z, \epsilon) \setminus D(z, \delta).$$

Usando coordenadas polares  $w - z = r e^{i\theta}$  na integração, sabemos que o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas é  $|J_{r,\theta}| = r$ . Logo

$$\frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w - z} |J_{r,\theta}| = e^{-i\theta} \partial_{\bar{w}} f(r e^{i\theta}),$$

e tendo em linha de conta a continuidade no ponto  $z$  da função  $w \rightarrow \partial_{\bar{w}} f(w)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left| \iint_{U_{z,\epsilon}} - \iint_{U_{z,\delta}} \frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w - z} dA(w) \right| &= \left| \iint_{D(z,\delta,\epsilon)} \frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w - z} dA(w) \right| \leq \int_{\delta}^{\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |\partial_{\bar{w}} f(r, \theta)| dr d\theta \\ &\leq \max_{w \in D(z,\epsilon,\delta)} |\partial_{\bar{w}} f(w)| (\epsilon - \delta) \pi \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Da desigualdade anterior infere-se a existência do limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{U_{z,\epsilon}} \frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w - z} dA(w) := \iint_U \frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w - z} dA(w),$$

o que conjuntamente com (8) e (7), termina a demonstração. No entanto, o leitor mais céptico poderá considerar os seguintes argumentos para deduzir que das desigualdades (9) conclui-se a existência do integral impróprio em (6). Para qualquer sucessão  $\epsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\lim_n \epsilon_n = 0^+$  deduz-se de (9) que

$$I_{\epsilon_n} := \iint_{U_{z,\epsilon_n}} \frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w - z} dA(w)$$

é uma sucessão de Cauchy, e em consequência é convergente. Se  $\delta_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é outra sucessão tal que  $\lim_n \delta_n = 0^+$ , então os argumentos acima aplicam-se à sucessão  $\epsilon_1, \delta_1, \epsilon_2, \delta_2, \dots$  para concluir que o limite de  $I_{\epsilon_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é independente da sucessão infinitésima  $\epsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . ■

## Exemplos

**2. [Índice de curvas de Jordan]** Se  $\gamma$  é uma curva de *Jordan* seccionalmente regular, da fórmula de Pompeiu infere-se de imediato que

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dz = 1, \quad z \in \text{int } \gamma.$$

Como sabemos  $I(\gamma, z) = 0$ , se  $z$  pertence à componente conexa ilimitada de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^{\gamma}$ , i.e. se  $z \in \text{out } \gamma$ .

3. Nas condições do teorema 2 observamos que é evidente que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{\pi} \iint_U \frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w-z} dA(w), \quad z \notin (U \cup \partial U).$$

Senão vejamos. A função  $\mathbb{C} \setminus \{z\} \ni w \rightarrow 1/(w-z)$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável, e se  $z \notin (U \cup \partial U)$  então  $(U \cup \partial U) \subset \mathbb{C} \setminus \{z\}$ . Logo, do teorema de *Green* obtemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{\pi} \iint_U \partial_{\bar{w}} \left[ \frac{f(w)}{w-z} \right] dA(w) = \frac{1}{\pi} \iint_U \frac{\partial_{\bar{w}} f(w)}{w-z} dA(w), \quad z \notin (U \cup \partial U).$$

□

### 3.4 Problemas

1. Considere conjuntos  $U \subset \mathbb{C}$  e  $\mathcal{C}^\gamma = \partial U$ , nas condições do teorema de *Green*. Demonstre que se  $f \in \mathcal{H}(U) \cap C^1(\text{cl } U)$  e  $g \in C^1(\text{cl } U)$ , aonde  $\text{cl } U$  designa a aderência do conjunto  $U$ , então

$$\iint_U f(z) \partial_{\bar{z}} \bar{g}(z) dA(z) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(z) \bar{g}(z) dz.$$

2. Seja  $\gamma$  um caminho de *Jordan* seccionalmente regular,  $U = \text{ins } \gamma$  e  $f \in C^2(\text{cl } U)$ . O Laplaciano da função  $f$  é definido através de  $\Delta f = 4 \partial_{\bar{z}} \partial_z f$ . Demonstre sucessivamente que:

- i) se para qualquer que seja  $z \in U$  verifica-se  $\Delta f(z) \in \mathbb{R}$ , então

$$\text{Re} \int_{\gamma} \partial_z f(z) dz = 0;$$

- ii) se para qualquer que seja  $z \in U$  verifica-se  $\Delta f(z) \geq 0$ , então

$$\text{Im} \int_{\gamma} \partial_z f(z) dz \geq 0;$$

- iii) considere  $g \in \mathcal{H}(U) \cap C^2(\text{cl } U)$  e  $f(z) = |g(z)|^2$ . Supondo a função  $g$  é injectiva então

$$\int_{\gamma} g'(z) \bar{g}(z) dz = 2i |g^{-1}(\text{ins } \gamma)|,$$

aonde  $|g^{-1}(\text{ins } \gamma)|$  denota a área do conjunto  $g^{-1}(\text{ins } \gamma)$ .

- iv) considere  $g(z) = z$ ,  $z \in U$  e verifique que a asserção na alínea anterior corresponde ao exemplo 1.

3. Considere um conjunto  $U \subset \mathbb{C}$  e  $\mathcal{C}^\gamma = \partial U$  nas condições do teorema de *Green*. Suponha fornecida uma função  $f \in C(\text{cl } U) \cap \mathcal{H}(U)$  e que para determinado  $z \in U$  verifica-se  $f(w) = o((z-w)^{n-1})$ ,  $w \rightarrow z$ . Demonstre que a função  $U \ni w \rightarrow f(w)/(w-z)^n$  é integrável em  $U$  e verifica-se

$$\int_U \frac{f(w)}{(w-z)^n} dA(w) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{\bar{w} - \bar{z}}{(w-z)^n} f(w) dw.$$

- 4.[Generalização da fórmula de *Pompiou*] Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto  $n$ -multi conexo com fronteira regular. Suponha que  $u \in C^n(\text{cl } U)$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  e demonstre a seguinte generalização da fórmula de *Pompiou*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\partial U} \frac{(\bar{\xi} - \bar{z})^k}{\xi - z} \frac{\partial^k u}{\partial \bar{z}^k}(\xi) d\xi + \frac{(-1)^n}{\pi(n-1)!} \int_U \frac{(\bar{\xi} - \bar{z})^{n-1}}{\xi - z} \frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n}(\xi) dA(\xi), \quad z \in U.$$

5. Suponha fornecida uma função  $u \in C^n(\text{cl } D(0, 1))$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  e verifique a seguinte igualdade

$$u(0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{|z|=1} \frac{1}{\xi^{k+1}} \frac{\partial^k u}{\partial \bar{z}^k}(\xi) d\xi + \frac{(-1)^n}{\pi(n-1)!} \int_{|z| \leq 1} \frac{1}{\xi^n} \frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n}(\xi) dA(\xi).$$

### 3.5 Fórmulas integrais de Cauchy e fórmula de Taylor

Fixos números complexos distintos  $z$  e  $w$ , considera-se a linha poligonal  $l_w^z := [w, w + \operatorname{Re}(z - w), z]$ . Suponha-se que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua, admitindo integrais de linha nulos ao longo de rectângulos contidos em  $U$ , i.e

$$\int_{\mathcal{R}} f(z) dz = 0 \quad \text{para qualquer rectângulo } \mathcal{R} \subset U. \quad (1)$$

Se os rectângulos com diagonais  $[w, z]$  e  $[w, \xi]$  são inclusos no domínio de  $f$ , então de (1) deduz-se

$$\int_{l_w^\xi} - \int_{l_w^z} f(\xi) d\xi = \int_{l_\xi^z} f(\xi) d\xi. \quad (2)$$

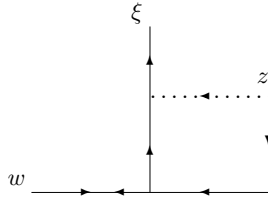


Figura 3.7: As linhas poligonais  $l_w^z$  e  $l_w^\xi$

**Proposição 1** *Seja  $w \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ . Suponha-se fornecida uma função contínua  $f : D(w, r) \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que para qualquer rectângulo  $\mathcal{R}$  contido em  $D(w, r)$  verifica-se*

$$\int_{\mathcal{R}} f(z) dz = 0.$$

*Então existe uma função holomorfa  $F : D(w, r) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z)$ ,  $z \in D(w, r)$ .*

**Demonstração:** Seja  $z \in D(w, r)$  e  $l_w^z$  a linha poligonal definida acima. O disco  $D(w, r)$  contém o fecho do rectângulo com diagonal  $[w, z]$ . Logo, encontra-se bem definida a seguinte função

$$F : D(w, r) \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad F(z) = \int_{l_w^z} f(\xi) d\xi.$$

Se  $h \in \mathbb{C}$  é tal que  $z + h \in D(w, r)$ , de acordo com (2), obtemos que

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_{l_{w+h}^{z+h}} - \int_{l_w^z} f(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{h} \int_{l_{z+h}^z} f(\xi) d\xi.$$

Consequentemente

$$\left| \frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{l_{z+h}^z} [f(\xi) - f(z)] d\xi \right| \leq \sqrt{2} \sup_{\xi \in D(z, |h|)} |f(\xi) - f(z)| \xrightarrow{|h| \rightarrow 0^+} 0.$$

Logo, a função  $F$  é diferenciável e  $F'(z) = f(z)$ ,  $z \in D(w, r)$ . ■

A fórmula de *Pompeiu* [3.4 sec. 6] contém em essência a fórmula integral de *Cauchy*. No entanto, a fórmula integral de *Cauchy* será enunciada para elementos na classe das funções holomorfas e a fórmula

de *Pompiou*, exposta na secção anterior, foi enunciada para funções continuamente diferenciáveis. O objectivo primordial da decorrente secção consiste em verificar que a existência de derivadas parciais de ordem arbitrária é consequência da condição de holomorfia. Em vista do referido empreendimento, o teorema de *Goursat* têm desempenho fundamental.

**Teorema 2 (Goursat)** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um subconjunto aberto, conexo e não vazio. Se  $f \in \mathcal{H}(U)$  então*

$$\int_{\mathcal{R}} f(w) dw = 0 ,$$

*para qualquer que seja o rectângulo  $\mathcal{R}$  que verifique a condição  $(\text{ins } \mathcal{R} \cup \mathcal{R}) \subset U$ .*

**Demonstração:** Pretende-se definir uma sucessão de rectângulos  $\mathcal{R}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ . Para primeiro termo considere-se  $\mathcal{R}_1 := \mathcal{R}$  e defina-se o número real não negativo

$$I := \left| \int_{\mathcal{R}_1} f(w) dw \right| ,$$

e os rectângulos  $\mathcal{R}_{1,1}, \mathcal{R}_{1,2}, \mathcal{R}_{1,3}$  e  $\mathcal{R}_{1,4}$ , com vértices nos pontos intermédios dos lados de  $\mathcal{R}_1$  tal como no centro geométrico de  $\mathcal{R}_1$ . Tendo em conta que

$$\int_{\mathcal{R}_1} f(w) dw = \int_{\mathcal{R}_{1,1}} + \int_{\mathcal{R}_{1,2}} + \int_{\mathcal{R}_{1,3}} + \int_{\mathcal{R}_{1,4}} f(w) dw ,$$

infere-se a existência de  $j = 1, \dots, 4$  tal que o integral de linha ao longo do rectângulo  $\mathcal{R}_{1,j}$  verifica

$$\left| \int_{\mathcal{R}_{1,j}} f(w) dw \right| \geq \frac{I}{4} \quad \text{e} \quad \text{diam}(\mathcal{R}_{1,j}) = \frac{\text{diam}(\mathcal{R}_1)}{2} , \quad (3)$$

aonde  $\text{diam}(A)$  designa o diâmetro do conjunto  $A \subset \mathbb{C}$ , i.e.

$$\text{diam}(A) := \sup \{ |z - w| : z, w \in A \} .$$

Define-se  $\mathcal{R}_2 := \mathcal{R}_{1,j}$ , aonde  $\mathcal{R}_{1,j}$  verifica a condição (3). Aplica-se sucessivamente o processo acima, i.e. no passo  $k$  supomos fornecido um rectângulo  $\mathcal{R}_k$  tal que

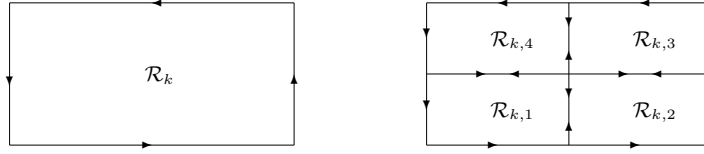
$$\left| \int_{\mathcal{R}_k} f(w) dw \right| \geq \frac{I}{4^{k-1}} .$$

Se  $\mathcal{R}_{k,1}, \mathcal{R}_{k,2}, \mathcal{R}_{k,3}$  e  $\mathcal{R}_{k,4}$  são os rectângulos com vértices nos pontos intermédios dos lados de  $\mathcal{R}_k$  tal como no centro geométrico de  $\mathcal{R}_k$ , então é necessário que um dos  $\mathcal{R}_{k,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$  verifique

$$\left| \int_{\mathcal{R}_{k,j}} f(w) dw \right| \geq \frac{I}{4^k} ,$$

e denota-se por  $\mathcal{R}_{k+1}$ . Obtém-se desta forma uma sucessão de rectângulos  $\mathcal{R}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_1$ , tais que

$$\left| \int_{\mathcal{R}_k} f(w) dw \right| \geq \frac{I}{4^{k-1}} \quad , \quad \text{ins } \mathcal{R}_{k+1} \subset \text{ins } \mathcal{R}_k \quad \text{e} \quad \text{diam}(\mathcal{R}_k) = \frac{\text{diam}(\mathcal{R})}{2^{k-1}} , \quad \text{para } k \in \mathbb{N}_1. \quad (4)$$

Figura 3.8: Os rectângulos  $\mathcal{R}_k$ 

Anota-se que existe  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_1} F_k$ , aonde  $F_k := (\text{ins } \mathcal{R}_k \cup \mathcal{R}_k)$ . De facto, escolhendo um número complexo  $z_k \in F_k$ , da igualdade  $\lim_k \text{diam}(F_k) = 0$  obtém-se sem dificuldades que a sucessão  $z_k, k \in \mathbb{N}_1$  é de *Cauchy*. Logo  $z_k, k \in \mathbb{N}_1$  é convergente. Se  $k \geq n$  então  $z_k \in F_n$ , e porque  $F_n$  é fechado, então  $z := \lim z_k \in F_n$ . Da arbitrariedade de  $n$  obtém-se que  $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} F_n$  (sugere-se ao leitor a verificação da igualdade  $\{z\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} F_n$ ). Considerando a diferenciabilidade da função  $f$  no ponto  $z$ , então fixado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , deduz-se a existência de  $\delta > 0$  verificando o seguinte

$$|z - w| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) \right| \leq \epsilon.$$

Em consequência infere-se

$$|z - w| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z) - f'(z)(w - z)| \leq \epsilon |w - z|. \quad (5)$$

Se  $|\mathcal{R}_k|$  designa o comprimento do rectângulo  $\mathcal{R}_k$  então  $|\mathcal{R}_k| = |\mathcal{R}_{k-1}|/2$  e logo  $|\mathcal{R}_k| = |\mathcal{R}|/2^{k-1}$ . Em conta de (5) e (4) obtém-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{R}_k} f(w) dw \right| &= \left| \int_{\mathcal{R}_k} [f(w) - f(z) - f'(z)(z - w)] dw \right| \leq \epsilon \int_{\mathcal{R}_k} |z - w| |dw| \\ &\leq \epsilon \text{diam}(\mathcal{R}_k) \int_{\mathcal{R}_k} 1 |dw| \leq \epsilon \frac{M}{4^k}, \end{aligned}$$

aonde  $M > 0$  é uma constante positiva. De (4) deduz-se que

$$\frac{I}{4^{k-1}} \leq \epsilon \frac{M}{4^k} \quad \text{e logo} \quad 0 \leq I \leq \epsilon M \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

■

O disco  $D(w, r)$ ,  $r > 0$  contém o fecho do interior de qualquer rectângulo  $\mathcal{R}$  verificando a condição  $\mathcal{R} \subset D(w, r)$ . Em particular, se  $f$  é holomorfa no disco  $D(w, r)$ ,  $r > 0$  então da proposição 1 e do teorema de *Goursat*, infere-se de imediato o seguinte resultado:

**Corolário 3** *Seja  $w \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ . Se  $f \in \mathcal{H}(D(w, r))$  então  $f$  admite primitiva em  $D(w, r)$ .*

O teorema de *Goursat* permitiu demonstrar que funções holomorfas em discos admitem primitivas, i.e. estabeleceu o corolário 3. De tal asserção inferir-se-á na demonstração do teorema 6, a analiticidade em cada ponto. Antecede-se o referido resultado com dois lemas, os quais serão usados em diversas situações. No primeiro dos quais compilamos as noções de convergência uniforme necessárias a uma abordagem elementar da análise complexa. Procedemos sem referências à definição de convergência uniforme, resultados sobre a qual resguardamos a desenvolvimentos de escopo não tão elementar.



**Proposição 4** (*Teste de Weierstrass*) Seja  $X \subset \mathbb{C}$  e  $f_n, n \in \mathbb{N}$  uma sucessão de funções  $f_n : X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  contínuas. Suponha-se que existe uma sucessão de números reais não negativos  $c_n, n \in \mathbb{N}$ , tais que  $|f_n(z)| \leq c_n, z \in X$  e  $\sum_n c_n$  é uma série convergente. Então

- i) A série  $\sum_n f_n(z)$  converge para cada ponto  $z \in X$ . Se  $f(z) = \sum_n f_n(z), z \in X$  então  $f \in C(X)$ ;
- ii) Suponha-se adicionalmente que  $X = [a, b], a < b$ . Então verifica-se a seguinte igualdade

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

**Demonstração:** Considerando o critério geral de comparação, nas condições das hipóteses verifica-se a convergência absoluta da série  $\sum_k f_k(z)$ . Denota-se a sua soma por  $f(z), z \in X$ . Ter-se-á que demonstrar a continuidade da função  $X \ni z \rightarrow f(z)$ . Fixo  $\epsilon > 0$  existem  $p \in \mathbb{N}$  e  $\delta > 0$  tais que

$$\sum_{n=p}^{\infty} c_n \leq \epsilon/4 \quad \text{e} \quad |z - w| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(w)| \leq \frac{\epsilon}{2p}, \quad n = 0, \dots, p-1.$$

Em consequência, para  $|z - w| < \delta$  obtém-se

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \left| \sum_n [f_n(z) - f_n(w)] \right| \leq \sum_{n=0}^{p-1} |f_n(z) - f_n(w)| + \sum_{n=p}^{\infty} |f_n(z) - f_n(w)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{p-1} |f_n(z) - f_n(w)| + 2 \sum_{n=p}^{\infty} c_n \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Tendo em linha de conta a arbitrariedade de  $\epsilon > 0$ , é finda a demonstração da alínea i). Segue a verificação da alínea ii). Como  $f \in C([a, b])$  então  $f$  é *Riemann* integrável e verifica-se

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{n=0}^{m-1} \int_a^b f_n(t) dt \right| \leq \int_a^b \left| f(t) - \sum_{n=0}^{m-1} f_n(t) \right| dt = \int_a^b \left| \sum_{n=m}^{\infty} f_n(t) \right| dt \leq (b-a) \sum_{n=m}^{\infty} c_n \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

■

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho seccionalmente regular e  $f_n : \mathcal{C}^\gamma \rightarrow \mathbb{C}$  uma sucessão de funções nas condições do teste de *Weierstrass*, i.e. a sucessão de funções  $f_n, n \in \mathbb{N}$  é tal que  $f_n \in C(\mathcal{C}^\gamma), n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(z)| \leq c_n, \quad z \in \mathcal{C}^\gamma \quad \text{e} \quad \sum_n c_n < +\infty.$$

A função  $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é seccionalmente contínua, i.e. existe uma partição  $\mathcal{P} = \{t_j : j = 0, \dots, k\}$ , aonde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , tal que  $\gamma'$  é contínua no intervalo  $[t_j, t_{j+1}[$  e existem os limites laterais nos pontos  $t_j, j = 0, \dots, k-1$ . Sem dificuldades, conclui-se que no intervalo  $[t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, k-1$  a sucessão de funções  $(f_n \circ \gamma) \gamma', n \in \mathbb{N}$  encontra-se nas condições da alínea ii) do teste de *Weierstrass*. De onde infere-se o seguinte

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_{n=0}^{\infty} [f_n \circ \gamma](t) \gamma'(t) dt = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [f_n \circ \gamma](t) \gamma'(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z) dz,$$

i.e. é possível alterar a ordem das operações de integração e soma da série, para obter

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z) dz. \quad (6)$$

**Lema 5** Suponha-se fornecida  $f : \partial D(w, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  uma função na classe  $C(\mathcal{C}^{\gamma_r})$  e considere-se

$$h : D(w, r) \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad h(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D(w, r)$$

onde  $\gamma_r$  denota uma parametrização da circunferência  $\partial D(w, r)$  positivamente orientada. Então  $h$  é analítica em  $D(w, r)$  e coincide com a soma da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n \quad \text{aonde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{n+1}} d\xi = \frac{h^{(n)}(w)}{n!}. \quad (7)$$

**Demonstração:** Seja  $\rho$  um real verificando  $0 < \rho < r$ . Da soma da série geométrica obtém-se

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - w} \left( \frac{1}{1 - \frac{z - w}{\xi - w}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{n+1}} (z - w)^n. \quad (8)$$

Tendo em conta a limitação da função  $f$ , conclui-se sem dificuldades que se  $z \in D(w, \rho)$  então

$$\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{n+1}} (z - w)^n \right| \leq M \left( \frac{\rho}{r} \right)^n, \quad \xi \in \partial D(w, r) \quad \text{e} \quad \sum_n \left( \frac{\rho}{r} \right)^n \quad \text{converge}.$$

Do teste de *Weierstrass*, deduz-se que a integração na variável complexa  $d\xi$ , no membro direito da igualdade (8) e em  $\partial D(0, r)$ , comuta com o símbolo de série, i.e. para  $z \in D(w, \rho)$  infere-se

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n \quad \text{aonde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{n+1}} d\xi.$$

Logo  $h$  é analítica tanto em qualquer disco  $D(w, \rho)$ ,  $0 < \rho < r$  é representada por a série de potências em (7). Segue a sua convergência no disco aberto  $D(w, r)$  para a função  $h$ . De [2sec. 3.1] obtém-se

$$h^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (z - w)^{n-k} \quad \text{para} \quad z \in D(w, r).$$

Consequentemente  $h^{(k)}(w) = k! a_k$  e assim é finda a demonstração. ■

De seguida afixa-se que a condição de analiticidade é necessária à condição de holomorfia.

**Teorema 6** Suponha-se  $U \subset \mathbb{C}$  aberto não vazio e  $f \in \mathcal{H}(U)$ . Então  $f$  é analítica em  $U$ .

**Demonstração:** Fixe-se  $w \in U$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $D(w, \epsilon) \subset U$ . O corolário 3 assegura a existência duma função holomorfa  $F : D(w, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z)$ ,  $z \in D(w, \epsilon)$ . Tendo em linha de conta que  $f \in \mathcal{H}(U) \subset C(D(w, \epsilon))$  conclui-se  $F \in \mathcal{H}(D(w, \epsilon)) \cap C^1(D(w, \epsilon))$ . Considere-se um real  $\delta$  verificando  $0 < \delta < \epsilon$  e aplique-se a fórmula de Pompeiu [2sec. 3.4] no disco  $D(w, \delta)$  para obter

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-\xi|=\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Do lema 5 deduz-se a analiticidade de  $F$  em  $w$ . Segue em consequência a analiticidade de  $f$  em  $w$ . ■

A proposição anterior assegura que funções holomorfas num conjunto aberto não vazio  $U \subset \mathbb{C}$ , são funções analíticas em  $U$ . Na proposição [3 **sec.** 2.2] demonstrou-se que funções analíticas em  $U$  são holomorfas. Portanto, a classe das funções analíticas coincide com a classe das funções holomorfas. Em particular, do exemplo [1 **sec.** 3.1] retira-se que qualquer função holomorfa num conjunto aberto não vazio  $U$ , admite derivadas complexas de todas as ordens e do corolário [4 **sec.** 2.2] que  $\mathcal{H}(U) \subset C^\infty(U)$ .

Parte considerável dos resultados incluídos na decorrente secção enunciam-se para conjuntos abertos  $n$ -multi conexos com fronteira seccionalmente regular tal como acima os enunciados do teorema de *Green* [1 **sec.** 3.4] e da fórmula de *Pompiou* [2 **sec.** 3.4]. Intentando clareza no discorrer textual, de novo introduz-se a definição. Um conjunto aberto não vazio  $U \subset \mathbb{C}$  diz-se  $n$ -multi conexo seccionalmente regular se a fronteira  $\partial U$  é parametrizada por um sistema de curvas de *Jordan* seccionalmente regulares  $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n$  nas seguintes condições

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\gamma_j} \cap \mathcal{C}^{\gamma_k} &= \emptyset \quad ; \quad k \neq j; \quad k, j = 0, \dots, n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{N} \\ \mathcal{C}^{\gamma_k} &\subset \text{ins } \gamma_0 \quad ; \quad k = 1, \dots, n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{N}_1 \end{aligned} \quad (9)$$

tanto o conjunto  $U$  é em seguida definido

$$U = \text{ins } \gamma_0 \cap \text{out } \gamma_1 \cap \cdots \cap \text{out } \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}_1 \quad \text{ou} \quad U = \text{ins } \gamma_0, \quad n = 0. \quad (10)$$

**Proposição 7** *Considere-se  $U$  um conjunto  $n$ -multi conexo com fronteira parametrizada por um sistema de caminhos de *Jordan*  $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  positivamente orientado e respectivamente nas condições (9) e (10). Se  $W$  é um aberto tal que  $U \subset W$  e  $f \in \mathcal{H}(W)$  então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Demonstração:** Das observações precedendo o decorrente resultado, deduz-se a seguinte asserção  $f \in \mathcal{H}(W) \cap C^\infty(W)$ . Logo, do teorema de *Green* [1 **sec.** 3.4] obtém-se

$$0 = \iint_U \partial_{\bar{z}} f dA(z) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

■

Nas condições da proposição 7 e tendo em linha de conta a definição de orientação positiva para o sistema de caminhos  $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n$ , as conclusões do resultado anterior são equivalentes a

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz \quad (\text{se } n \in \mathbb{N}_1) \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma_0} f(z) dz = 0 \quad (\text{se } n = 0),$$

aonde os caminhos de *Jordan*  $\gamma_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  são percorridos no sentido positivo. Em particular, considere-se  $\gamma_0$  uma curva de *Jordan* seccionalmente regular e suponha-se  $f$  holomorfa num conjunto aberto  $W$  contendo  $\gamma_0 \cup \text{ins } \gamma_0$ , com excepção dum conjunto finito de pontos. Então o integral na variável complexa ao longo da curva  $\gamma_0$  pode ser obtido somando os integrais ao longo de curvas  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  incluídas no interior de  $\gamma_0$  e contornando os pontos no interior de  $\gamma_0$  aonde  $f$  não é holomorfa, i.e.  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  são curvas de *Jordan* seccionalmente regulares incluídas em  $\text{ins } \gamma_0$  e incluindo no seu interior um único ponto aonde  $f$  não é holomorfa.

**Teorema 8 (Morera)** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto não vazio e  $f \in C(U)$ . As asserções são equivalentes:*

i)  $f \in \mathcal{H}(U)$ ;

ii) *para qualquer que seja  $\gamma$  um caminho de Jordan seccionalmente regular verifica-se*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0; \quad (11)$$

iii) *a igualdade (11) verifica-se para qualquer que seja o rectângulo  $\mathcal{R} = \mathcal{C}^{\gamma}$  tal que  $(\text{ins } \mathcal{R}) \cup \mathcal{R} \subset U$ .*

**Demonstração:**  $i) \Rightarrow ii)$ . Suponha-se  $\gamma$  uma curva de *Jordan* seccionalmente regular tal que  $(\mathcal{C}^{\gamma} \cup \text{ins } \gamma) \subset U$ . Porque  $\text{ins } \gamma$  é um conjunto aberto então dado  $z \in \text{ins } \gamma$  existe  $\mathcal{R}$  um rectângulo centrado em  $z$  tal que  $\mathcal{R} \subset \text{ins } \gamma$ . Definindo  $V = \text{ins } \gamma \cap \text{out } \mathcal{R}$  obtém-se da proposição 7 que

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\mathcal{R}} f(z) dz = 0.$$

Porque  $\text{ins } \gamma \subset U$  então  $(\mathcal{R} \cup \text{ins } \mathcal{R}) \subset U$ . Como  $f \in \mathcal{H}(U)$  então deduz-se do teorema de *Goursat* que

$$\int_{\mathcal{R}} f(z) dz = 0 \quad \text{e em consequência} \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

A implicação  $ii) \Rightarrow iii)$  é óbvia. Para terminar é suficiente demonstrar  $iii) \Rightarrow i)$ . Considera-se um complexo  $w \in U$  e demonstra-se que  $f$  é diferenciável em  $w$ . Da proposição 1 deduz-se que existe uma função  $F$ , diferenciável em  $D(w, \epsilon)$  e tal que  $F'(z) = f(z)$ ,  $z \in D(w, \epsilon)$ , aonde  $\epsilon > 0$  é tal que  $D(w, \epsilon) \subset U$ . Como a derivada duma função analítica é analítica, então  $f$  é analítica em  $D(w, \epsilon)$ . Da arbitrariedade de  $w \in U$  conclui-se  $f \in \mathcal{H}(U)$ . ■

O seguinte resultado é consequência imediata da **fórmula de Pompieu** [sec. 3.4] e do teorema 6.

**Proposição 9 (Fórmulas integrais de Cauchy)** *Considere-se  $U$  um conjunto  $n$ -multi conexo com fronteira parametrizada por um sistema de caminhos de *Jordan*  $\gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  positivamente orientado e respectivamente nas condições (9) e (10). Se  $W$  é um conjunto aberto tal que  $U \subset W$  e  $f \in \mathcal{H}(W)$ , então é válida a fórmula integral de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in U.$$

O leitor deve anotar que nas condições da proposição 9, deduz-se da proposição 7 o seguinte

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0, \quad \text{se } z \notin (U \cup \partial U).$$

**Proposição 10 (Princípio do máximo)** *Considere-se  $U$  aberto conexo não vazio e  $f \in \mathcal{H}(U)$ . Se a função  $|f|$  assume valor máximo num ponto de  $U$  então  $f$  é constante.*

**Demonstração:** Suponha-se a existência dum complexo  $z \in U$  verificando  $|f(w)| \leq |f(z)|$ ,  $w \in U$ . Para  $\epsilon > 0$  tal que  $\text{cl } D(z, \epsilon) \subset U$ , considere-se  $g(\theta) = |f(z + \epsilon e^{i\theta})| - |f(z)|$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Então

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z + \epsilon e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta + |f(z)| \leq |f(z)|. \quad (12)$$

De (12) deduz-se que o integral da função  $g$  é nulo. Porque  $g$  é contínua então  $g(\theta) = 0$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Logo a função  $U \ni z \rightarrow |f(z)|$  é constante num disco centrado em  $z$ . Assim, o seguinte conjunto

$$\Omega := \{w : |f(w)| = |f(z)|\}$$

é um conjunto aberto. Da continuidade de  $f$  deduz-se que  $\Omega$  é fechado. Como  $U$  é conexo e por hipótese  $\Omega \neq \emptyset$  então  $\Omega = U$ . ■

Se  $f$  é holomorfa então é suficiente considerar a função  $1/f$  para concluir que se  $|f|$  assume mínimo não nulo em ponto interior ao seu domínio (conexo) então  $f$  é necessariamente constante.

Estuda-se de seguida a existência de primitiva de determinada função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , aonde  $U \subset \mathbb{C}$  é aberto, conexo e não vazio. Se existe uma caminho de *Jordan*  $\gamma$  tal que  $\mathcal{C}^\gamma \subset U$  e

$$\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0,$$

então, do teorema fundamental [6 **sec.** 3.3] conclui-se que  $f$  não admite primitiva em nenhum conjunto aberto que contém a curva  $\mathcal{C}^\gamma$ . Do teorema de *Morera* deduz-se que ins  $\gamma$  não está contido no domínio de holomorfia da função  $f$ . Por seu turno a holomorfia em  $U$  não é condição suficiente para garantir a existência de primitiva, e.g. a função  $f(z) = 1/z$  é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e do exemplo [4 **sec.** 3.3] infere-se a não existência de primitiva em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

## Exemplos

1. Considere-se uma função de variável complexa  $f$ , analítica no ponto  $w$ . Suponha-se que  $f$  é representada por a série de potências  $\sum a_n(z-w)^n$  com raio de convergência  $0 < r \leq +\infty$ , i.e.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n, \quad \text{para } z \in D(w, r).$$

Do exemplo [3 **sec.** 3.3] sabemos que  $f$  admite primitiva em  $D(w, r)$ . Uma primitiva obtém-se calculando primitivas termo a termo (que se anulam em  $w$ ) da série de potências representando a função  $f$ , i.e.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-w)^{n+1}, \quad \text{é uma primitiva de } f \text{ em } D(w, r).$$

Se  $l_w^z$  é caminho regular por secções em  $D(w, r)$ , com pontos inicial e final respectivamente  $w$  e  $z$ , então

$$\int_{l_w^z} f(\xi) d\xi = \int_{l_w^z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-w)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{l_w^z} (\xi-w)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-w)^{n+1} = F(z)$$

i.e. a expressão geral das primitivas da função  $f$  obtém-se por intermédio do integral de linha

$$F(z) = \int_{l_w^z} f(\xi) d\xi + C,$$

aonde  $l_w^z$  é um qualquer caminho seccionalmente regular em  $D(w, r)$  e unindo  $w$  a  $z$ .

□

**Definição 11** Um conjunto  $U \subset \mathbb{C}$  conexo e não vazio diz-se **simplesmente conexo** se qualquer curva de Jordan  $\mathcal{C}^\gamma$  contida em  $U$  verifica-se  $\text{ins } \gamma \subset U$ .

Mostra-se de seguida que funções holomorfas em conjuntos simplesmente conexos admitem primitiva. Ao empreendimento é necessário o conceito de concatenação de caminhos. Se  $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}, j = 1, 2$  são caminhos tais que o ponto final de  $\gamma_1$  coincide com o ponto inicial de  $\gamma_2$  então definimos o **caminho concatenação** de  $\gamma_2$  com  $\gamma_1$  por intermédio

$$\gamma_2\gamma_1 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \gamma_2\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(b_1t + a_1(1-t)) & , \quad t \in [0, 1] \\ \gamma_2(b_2(t-1) + a_2(2-t)) & , \quad t \in [1, 2] \end{cases} .$$

O caminho  $\gamma_2\gamma_1$  é fechado sse o ponto inicial de  $\gamma_1$  coincide com o ponto final de  $\gamma_2$ .

**Corolário 12** Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto, simplesmente conexo e não vazio. Então qualquer função holomorfa  $f \in \mathcal{H}(U)$  admite primitiva em  $U$ , i.e. existe  $F \in \mathcal{H}(U)$  tal que  $F'(z) = f(z)$ ,  $z \in U$ .

**Demonstração:** Sabe-se que conjuntos abertos, conexos e não vazios são conexos por caminhos poligonais. Em particular dados quaisquer pontos  $w, z \in U$  existe um caminho seccionalmente regular  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $\gamma_1(a) = w$  e  $\gamma_1(b) = z$ . De seguida verifica-se que o integral de linha

$$\int_{\gamma_1} f(\xi) d\xi \tag{13}$$

não depende do caminho seccionalmente regular com ponto inicial  $w$  e ponto final  $z$ . Se  $\gamma_2$  é um outro caminho nas condições mencionadas, então a concatenação  $\gamma = \gamma_2^- \gamma_1$  é um caminho fechado seccionalmente regular tal que  $\mathcal{C}^\gamma \subset U$ . A curva  $\mathcal{C}^\gamma$  está contida no interior duma curva de Jordan  $\mathcal{C}^\varphi$  contida em  $U$ . Tendo em conta que  $\mathcal{C}^\gamma \subset \text{ins } \varphi$  (e logo  $\mathcal{C}^\varphi \subset \text{out } \gamma$ ), da proposição [8sec. 3.3] obtém-se

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - \xi} dz d\xi = \int_{\varphi} f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{z - \xi} d\xi dz = 0 .$$

A troca da ordem de integração na equação anterior é justificada porque a função integrada é contínua nas variáveis  $z$  e  $\xi$ . Conclui-se

$$\int_{\gamma_1} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_2^-} f(\xi) d\xi = 0 \quad \text{i.e.} \quad \int_{\gamma_1} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma_2} f(\xi) d\xi .$$

Consequentemente, fixo  $w \in U$ , encontra-se bem definida a função

$$F(z) = \int_{\gamma_w^z} f(\xi) d\xi ,$$

aonde  $\gamma_w^z$  é qualquer caminho seccionalmente regular de  $w$  a  $z$ . Em particular, se  $D(z, \epsilon) \subset U$  e  $h \in \mathbb{C}$  é tal que  $|h| < \epsilon$  então

$$F(z+h) - F(z) = \int_{l_w^z} f(\xi) d\xi ,$$

aonde  $l_w^z$  é a linha poligonal  $[w, w + \text{Re}(z-w), z]$ . Imitando a demonstração do teorema 6 conclui-se que  $F$  é uma primitiva de  $f$ . ■

**Proposição 13 (Série de Taylor)** *Considere-se um conjunto aberto não vazio  $U \subset \mathbb{C}$  e  $f \in \mathcal{H}(U)$ . Então  $f$  é uma função analítica em qualquer ponto  $w \in U$ . Se  $d_w := \text{dist}(w, \partial U)$  então a função  $f$  é representada por a série de Taylor centrada em  $w \in U$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z - w)^n, \quad \text{para qualquer que seja } z \in D(w, d_w).$$

A série de Taylor centrada em  $w$  é absolutamente convergente em discos fechados contidos em  $D(w, d_w)$  e são válidas as seguintes fórmulas

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\xi-w|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-w)^{n+1}} d\xi \quad \text{qualquer que seja } 0 < \rho < d_w.$$

**Demonstração:** Considere-se  $w \in U$ . Se  $0 < \rho < d_w$ , da fórmula integral de Cauchy obtém-se

$$f(z) = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D(w, \rho)$$

aonde  $\gamma_\rho$  denota uma parametrização de  $\partial D(w, \rho)$ . Logo, do lema 5 infere-se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n, \quad z \in D(w, \rho) \quad \text{aonde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-w|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-w)^{n+1}} d\xi, \quad (14)$$

e  $f^{(k)}(w) = k!a_k$ , para qualquer  $0 < \rho < d_w$ . Terminamos a demonstração observando que qualquer série de potências converge absolutamente no interior da região de convergência. ■

Do teorema anterior conclui-se que se  $f \in \mathcal{H}(D(w, r))$ ,  $r > 0$  então existe uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n$  que representa a função  $f$  no disco  $D(w, r)$ , precisamente a série de Taylor. No exemplo [1 sec. 3.1] demonstrou-se a unicidade da representação de funções por intermédio de séries de potências. As asserções anteriores são usualmente parafraseadas no dizer que a série de Taylor é única.

**Corolário 14 (Fórmulas integrais de Cauchy generalizadas)** *Seja  $U$  um  $n$ -multi conexo com fronteira parametrizada por um sistema de caminhos de Jordan  $\gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  positivamente orientado e respectivamente nas condições (9) e (10). Se  $W$  aberto tal que  $U \subset W$  e  $f \in \mathcal{H}(W)$ , então*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad z \in U, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

**Demonstração:** Demonstra-se o resultado por intermédio do método de indução matemática. Supõe-se como hipótese de indução que para  $n \in \mathbb{N}$  fixo e qualquer função  $f \in \mathcal{H}(W)$  verifica-se

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \text{qualquer que seja } z \in U.$$

Se  $f \in \mathcal{H}(W)$  então  $f' \in \mathcal{H}(W)$  e logo da hipótese de indução obtém-se

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \partial_w \left( \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \right) + (n+1) \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} \right] dw. \quad (16)$$

Tendo em conta que para  $z \in U$ , a função  $w \rightarrow f(w)/(w-z)^{n+1}$  é diferenciável num aberto contendo as curvas  $\mathcal{C}^{\gamma_0}, \dots, \mathcal{C}^{\gamma_n}$ , então da proposição [6 sec. 3.3] deduz-se que

$$\int_{\gamma} \partial_w \left[ \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \right] dw = \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j} \frac{d}{dw} \left[ \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \right] dw = 0.$$

Logo, de (16) é evidente que

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw, \quad \text{qualquer que seja } z \in U.$$

A demonstração é finda observando que o caso  $n = 0$  coincide com as asserções na proposição 9. ■

## Exemplos

2. Considere-se um caminho de *Jordan*  $\gamma_0$  seccionalmente regular e uma função  $f \in \mathcal{H}(W)$ , aonde  $W$  é um conjunto aberto tal que  $(\text{ins } \gamma_0 \cup \mathcal{C}^{\gamma_0}) \subset W$ . Pretende-se calcular o integral

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{(w-z_1)^{n_1} \cdots (w-z_k)^{n_k}} dw$$

aonde  $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_1$  e  $z_1, \dots, z_k \in \text{ins } \gamma_0$ . Como  $\text{ins } \gamma_0$  é um conjunto aberto, então para cada  $z_j$  existe um número real positivo  $\epsilon_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, k$  tal que

$$D(z_j, \epsilon_j) \subset \text{ins } \gamma_0 \quad (j = 1, \dots, k) \quad \text{e} \quad D(z_j, 2\epsilon_j) \cap D(z_l, 2\epsilon_l) = \emptyset \quad (j \neq l; j, l = 1, \dots, k).$$

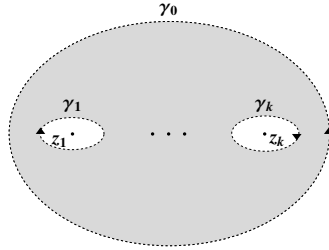


Figura 3.9: O conjunto  $\text{ins } \gamma_0 \cap \text{out } \gamma_1 \cdots \cap \text{out } \gamma_k$

O conjunto  $U = \text{ins } \gamma_0 \cap \text{out } \gamma_1 \cdots \cap \text{out } \gamma_k$  encontra-se nas condições da proposição 7, aonde  $\gamma_j$  é parametrização seccionalmente regular da curva de *Jordan*  $\partial D(z_j, \epsilon_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Em consequência

$$0 = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{(w-z_1)^{n_1} \cdots (w-z_k)^{n_k}} dw - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{(w-z_1)^{n_1} \cdots (w-z_k)^{n_k}} dw.$$

Tendo em linha de conta que

$$\int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{(w-z_1)^{n_1} \cdots (w-z_k)^{n_k}} dw = \int_{\gamma_j} \frac{g_j(w)}{(w-z_j)^{n_j}} dw \quad \text{aonde} \quad g_j(w) = \frac{f(w)(w-z_j)^{n_j}}{(w-z_1)^{n_1} \cdots (w-z_k)^{n_k}}$$

tanto que a função  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  é holomorfa num aberto que contém  $(\text{ins } \gamma_j \cup \mathcal{C}^{\gamma_j})$ , obtém-se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{(w-z_1)^{n_1} \cdots (w-z_k)^{n_k}} dw = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(n_j)!} \frac{d^{(n_j-1)}}{dw^{n_j-1}} \left[ \frac{f(w)(w-z_j)^{n_j}}{(w-z_1)^{n_1} \cdots (w-z_k)^{n_k}} \right]_{|w=z_j}.$$

A fórmula anterior ir-se-á reencontrar no próximo capítulo e a propósito do teorema dos resíduos.

□



Finalmente, iremos estabelecer as fórmulas integrais de Cauchy para conjuntos  $n$ -multi conexos com fronteira constituída por um número finito de curvas de *Jordan*, parametrizadas não necessariamente por caminhos de Jordan. Antecedemos a asserção com um lema e as seguintes definições. Dado um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{C}$  define-se o conjunto  $U$  **pontuado em**  $w \in U$  através de  $U_w := U \setminus \{w\}$ . Se  $w \in \mathbb{C}$ , a **coroa circular**  $D(w, \delta, \epsilon)$  é dada por

$$D(w, \delta, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \delta < |w - z| < \epsilon\}, \quad \text{para } 0 < \delta < \epsilon. \quad (17)$$

**Proposição 15** *Considere-se uma função holomorfa  $f \in \mathcal{H}(U_w)$ , e suponha-se que  $f$  é uma função limitada em algum disco  $D(w, 2\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ . Então  $\lim_{z \rightarrow w} f(z)$  existe. Denotando por  $\tilde{f}$  o prolongamento por continuidade de  $f$  ao conjunto  $U$  então  $\tilde{f} \in \mathcal{H}(U)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\gamma_r$  uma parametrização seccionalmente regular da curva  $\partial D(w, r)$ ,  $r > 0$ . Considerem-se  $\epsilon, \delta$  tais que  $0 < \delta < \epsilon$  e aplique-se a fórmula integral de Cauchy à função  $f$  e à coroa circular  $(\text{ins } \gamma_\epsilon) \cap (\text{out } \gamma_\delta)$ . Obtém-se

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D(w, \delta, \epsilon).$$

Tendo em conta a limitação de  $f$  em  $D(w, \epsilon)$ , para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno segue que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\delta} \left| \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right| |d\xi| \leq \delta \frac{2M}{|z - w|} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0.$$

Logo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \text{para } z \in D(w, \epsilon) \setminus \{w\}.$$

Do lema 5 conclui-se que considerando o prolongamento de  $f$  ao ponto  $w$  definido por

$$\tilde{f}(z) = f(z), z \neq w \quad \text{e} \quad \tilde{f}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - w} d\xi,$$

conclui-se que  $\tilde{f}$  é analítica em  $D(w, \epsilon)$ . Em particular  $\lim_{z \rightarrow w} f(z)$  existe e iguala  $\tilde{f}(w)$ . ■

Nas condições da proposição 15 diz-se que a função  $f$  tem em  $w$  uma **singularidade removível**.

**Proposição 16** *Considere-se  $U$  um conjunto  $n$ -multi conexo com fronteira parametrizada por um sistema de caminhos de Jordan  $\gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e respectivamente nas condições (9) e (10). Se  $W$  é um conjunto aberto tal que  $U \subset W$  e  $f \in \mathcal{H}(W)$ , então é válida a seguinte igualdade*

$$I(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \text{para } z \notin C^\gamma, n \in \mathbb{N}.$$

**Demonstração:** Considere-se  $z \notin C^\gamma$  fixo e a função

$$h : W \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Se  $z \notin U$  então é evidente que  $h$  é holomorfa num aberto que contém  $U$ . Se  $z \in U$  então  $h$  é holomorfa em  $W_z$  e tendo em conta que

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z),$$

conclui-se que  $h$  é limitada numa vizinhança do ponto  $z$ . Logo, da proposição 15 infere-se que  $h$  é prolongável por analiticidade ao ponto  $z$ . Em qualquer dos casos obtém-se

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z)I(\gamma, z)$$

■

### 3.5 Problemas

1. Considere as curvas

$$C_1 = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z > 0\} \quad , \quad C_2 = \{iy : -1 < y < 1\} \quad \text{e} \quad C_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2.$$

Suponha que  $C_3$  é percorrida no sentido positivo, e que  $C_1$  e  $C_2$  são percorridas no sentido induzido de  $C_3$ . Calcule os integrais

$$\int_{C_j} z^n \bar{z}^{n+1} dz \quad \text{e} \quad \int_{C_j} z^n \bar{z}^{n+1} d\gamma_j(z), \quad \text{aonde} \quad n \in \mathbb{N},$$

e  $\gamma_j$  são parametrizações regulares das curvas  $C_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

2. Considere uma função  $f$  com valores complexos e na classe  $C^1(U)$ , aonde  $U$  designa um conjunto aberto verificando a condição  $U \supset \operatorname{cl} D(0, 1)$ .

- i) Verifique as seguintes igualdades:

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = - \int_{|z|=1} f(z) z^2 d\bar{z} = i \int_{|z|=1} f(z) z |dz|.$$

- ii) Suponha que  $\bar{f} \in \mathcal{H}(U)$ ,  $f(0) = 0$  e demonstre que

$$\operatorname{Re} \int_{|z|=1} f(z) |dz| = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz \quad \text{e} \quad \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz \quad \text{é imaginário puro.}$$

3. Seja  $f$  uma função na classe  $\mathcal{H}(D(0, 2))$ . Encontre os erros nas seguintes igualdades

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(w)}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \bar{w} f(w) + w \bar{w} f'(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \partial_w [w \bar{w} f(w)] dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \partial_w f(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} f'(w) dw = 0. \end{aligned}$$

4. Considere um conjunto finito  $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$  e uma função  $f \in \mathcal{H}(U)$ , aonde  $U := \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}$ . Defina a seguinte função

$$\varphi(r) := \int_{\gamma_r} f(z) dz \quad \text{aonde} \quad \gamma_r(t) = r e^{it}, \quad -\pi < t \leq \pi, \quad r > 0.$$

Suponha  $M(r) = o(1/r)$ ,  $r \rightarrow +\infty$ , aonde  $M_r := \sup_{|z|=r} |f(z)|$ . Justifique sucessivamente as asserções:

- i) a função  $\varphi(r)$  está bem definida tanto  $\varphi(r)$  é constante, para  $r$  superior a determinado real;  
 ii)  $\varphi(r) = 0$  para  $r$  superior a determinado real.

5. Calcule os integrais indicados em cada uma das seguintes alíneas

- i)  $\int_{\gamma} \frac{z}{(2z+1)^3} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(0, 1)$ ; ii)  $\int_{\gamma} \frac{z^3}{z+1} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(0, 2)$ ;  
 iii)  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^4} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(0, 1)$ ; iv)  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z^2 + \pi)(z^2 - \pi)} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(i\pi, \pi)$ ;  
 v)  $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z^2 + 1)} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(0, 2)$ ; vi)  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z^2 + 1)e^{\pi z}} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(0, 2)$ ;  
 vii)  $\int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{(z^2 + 1)\cos z} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(0, 2)$ ; viii)  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)(z^2 - \pi^2)} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(i\pi, 1)$ ;  
 ix)  $\int_{\gamma} \frac{\cos(i\pi \bar{z})}{(z^2 + 1)} dz$ ,  $C^{\gamma} = \partial D(0, 2)$ ; x)  $\int_{\gamma} \frac{z}{1 - z^n} dz$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $C^{\gamma} = \partial D(0, 2)$ ;  
 xi)  $\int_{\gamma} \frac{z}{(1 - z^n)^2} dz$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $C^{\gamma} = \partial D(0, 2)$ ; xii)  $\int_{\gamma} \frac{z^j}{(1 - z^n)^j} dz$  ( $n, j \in \mathbb{N}$ ),  $C^{\gamma} = \partial D(0, 2)$ .

onde  $\gamma$  designa uma parametrização no sentido positivo das curvas de *Jordan*  $C^{\gamma}$  acima indicadas.

6. Desenvolva em série de potências de  $z - a$ , as funções indicadas nas seguintes alíneas, e indique a região de convergência absoluta dos desenvolvimentos obtidos:

- i)  $\frac{1}{z}$ ,  $a = 1$ ; ii)  $\frac{1}{z(z+2)}$ ,  $a = 1$ ; iii)  $\frac{1}{z^2(2z+2)}$ ,  $a = 1$ ;  
 iv)  $\sin z$ ,  $a = \pi$ ; v)  $\sin^2 z$ ,  $a = 0$ ; vi)  $z \ln z$ ,  $a = 1$ ;  
 vii)  $e^z$ ,  $a = \pi$ ; viii)  $\cos z e^z$ ,  $a = \pi$ ; ix)  $(z^3 - z^2 + z - 1)^{-1}$ ,  $a = 0$ .

7. Fixo um número complexo  $\alpha$  na condição  $|\alpha| \neq 1$ , considere a função racional

$$f(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

- i) Desenvolva a função  $f$  em série de Mac-Laurin e indique o raio de convergência da série obtida;  
 ii) Verifique a seguinte igualdade

$$f^{(n)}(z) = n! \frac{(|\alpha|^2 - 1)\bar{\alpha}^{n-1}}{(1 - \bar{\alpha}z)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}_1;$$

- iii) Sem utilizar a soma da série geométrica, desenvolva a função  $f$  em série de potências de  $z - \alpha$  e indique o raio de convergência da série obtida.

8. Considere  $n \in \mathbb{N}_1$  e funções  $f_j \in \mathcal{H}(D(0, 2))$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ .

- i) Calcule

$$\int_{|z|=1} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j f_j(z) dz.$$

- ii) Utilize a alínea i) para calcular

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{nz}}{z^{n-1}(z - e^z)} dz.$$

**Sugestão:** Considere  $f_j(z) = e^{jz}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  e verifique que  $\sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j f_j(z) = \frac{z^n - e^{nz}}{z^{n-1}(z - e^z)}$ , se  $|z| = 1$ .

9. Considere uma função  $f \in \mathcal{H}(D(0, 2))$  e demonstre as igualdades nas seguintes alíneas:

- i)  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(w)}{(\bar{w} - z)^n} dw = 0$ , para quaisquer que sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z| < 1$ ;
- ii)  $\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{1 - \xi z} |d\xi| = f(0)$ , para qualquer que seja  $|z| < 1$ .

**Sugestão:** Tenha em consideração que ao que respeita à integração no círculo unitário é válido  $|d\xi| = -i\bar{\xi} d\xi$ .

10. Justifique as seguintes asserções:

- i)  $\frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{(1 - wz)^{n+1}}{(w - z)^{n+1}} dw = (n+1)z^n(1 - z^2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z| < 1$ ;
- ii)  $\frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{(1 - \bar{w}z)^{n+1}}{(\bar{w} - z)^{n+1}} dw = (n+1)\frac{z^2 - 1}{z^{n+2}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z| > 1$ .

11. (Desigualdades de *Cauchy*) Considere  $U \subset \mathbb{C}$  aberto não vazio e uma função  $f \in \mathcal{H}(U)$ . Se  $r > 0$  é tal que  $D(z, r) \subset U$  então defina  $M(z, r) := \sup_{|w-z|=r} |f(w)|$ . Baseado em (15) demonstre sucessivamente o seguinte:

i) Para qualquer natural  $n$  verifica-se a seguinte desigualdade de *Cauchy*

$$|f^{(n)}(z)| \leq n! \frac{M(z, r)}{r^n} \quad \text{aonde } r > 0 \text{ é tal que } D(z, r) \subset U;$$

ii) Se  $U = \mathbb{C}$  e a função  $z \rightarrow f^{(n)}(z)$  é limitada, então  $f$  é um polinómio de ordem inferior ou igual a  $n$ .

## 3.6 Funções Harmónicas e o núcleo de Poisson

Considere-se  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aberto e o operador *Laplaciano*  $\Delta := 4\partial_{\bar{z}}\partial_z$ . Determinada função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se harmónica em  $\Omega$  se admite derivadas parciais  $\mathbb{R}$ -diferenciáveis em  $\Omega$  e

$$\Delta f(z) = 0, \quad z \in \Omega.$$

O conjunto das funções harmónicas em  $\Omega$  é denotado por  $h(\Omega)$ . Considerando que o operador diferencial Laplaciano  $\Delta$  é um operador linear então  $h(\Omega)$  é um espaço vectorial.

**Proposição 1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aberto simplesmente conexo e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmónica. Então existe  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $u = \operatorname{Re} f$ . Funções harmónicas não necessariamente reais verificam*

$$h(\Omega) = \{f + \bar{g} : f, g \in \mathcal{H}(\Omega)\} = \mathcal{H}(\Omega) + \overline{\mathcal{H}(\Omega)}.$$

**Demonstração:** Considere uma função harmónica  $u$  com valores reais. A função  $g := \partial_z u$  é analítica e  $\partial_{\bar{z}} u = \overline{\partial_z u} = \bar{g}$ . Porque  $\Omega$  é simplesmente conexo, então o corolário [12 sec. 3.5] garante a existência duma função analítica  $f$  verificando  $f' = g$ . Considerando as evidentes igualdades

$$\begin{aligned} \partial_z(f + \bar{f}) &= g = \partial_z u \\ \partial_{\bar{z}}(f + \bar{f}) &= \bar{g} = \partial_{\bar{z}} u, \end{aligned}$$

obtem-se que são nulas as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f + \bar{f} - u$ . Da conexidade de  $\Omega$  deduz-se a existência duma constante complexa  $C$  verificando  $u = f + \bar{f} + C = 2\operatorname{Re} f + C$ .

Inicia-se a demonstração do restante observando que se  $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$  então  $f + \bar{g} \in h(\Omega)$ . De facto

$$\partial_z \partial_{\bar{z}}(f + \bar{g}) = \partial_z \partial_{\bar{z}} f + \partial_{\bar{z}} \partial_z \bar{g} = 0.$$

Se  $U = u + iv$  é função harmónica não necessariamente com valores reais então  $u$  e  $v$  são funções harmónicas reais. Sabe-se da existência de funções analíticas  $f$  e  $g$  tais que  $u = f + \bar{f}$  e  $v = g + \bar{g}$ . Assim é evidente  $U = (f + ig) + \overline{(f - ig)}$  tanto as funções  $f + ig$  e  $f - ig$  são analíticas. ■

Suponha fornecido um conjunto aberto  $\Omega$  e uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  harmónica. Cada ponto de  $\Omega$  admite uma vizinhança simplesmente conexa. Assim, deduz-se da proposição anterior que se  $z \in \Omega$  e  $D(z, r) \subset \Omega$ ,  $r > 0$  então existem funções analíticas  $f$  e  $g$  tais que  $u(z) = f(z) + \bar{g}(z)$ ,  $z \in D(z, r)$ . Sabe-se que funções analíticas admitem derivadas parciais de todas as ordens. Assim, da proposição 1 deduz-se  $h(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ . Em particular, os diferentes operadores de derivação parcial comutam e

$$\Delta = 4 \partial_{\bar{z}} \partial_z = \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Sem dificuldades conclui-se que determinada função  $u$  é harmónica sse  $\operatorname{Re} u$  e  $\operatorname{Im} u$  são harmónicas. Em particular  $h(\Omega)$  é espaço vectorial fechado para a conjugação, i.e.  $u \in h(\Omega)$  sse  $\bar{u} \in h(\Omega)$ .

## Exemplos

1. Na proposição 1, a hipótese em considerar funções harmónicas definidas em conjuntos simplesmente conexos é relevante. De facto, a função  $u(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$ ,  $x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) é claramente harmónica. Não obstante  $u$  não coincide com a parte real duma função holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

□

**Corolário 2 (Valor médio)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aberto não vazio. Se  $u \in h(\Omega)$  e  $z \in \Omega$  então verifica-se*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r < d_z.$$

**Demonstração:** Se  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  então da fórmula integral de Cauchy obtém-se o seguinte

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\xi|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r < d_z.$$

A proposição 1 assegura a existência de funções analíticas  $f$  e  $g$  tais que  $u(z) = f(z) + \bar{g}(z)$ ,  $z \in D(z, d_z)$ .

Em consequência obtém-se o seguinte

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(z + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r < d_z.$$

■

A demonstração do seguinte **princípio de máximo** decorre de forma semelhante à demonstração da proposição [10 sec. 3.5]

**Corolário 3 (Princípio do máximo)** *Considere-se  $\Omega$  aberto conexo não vazio e  $u \in h(\Omega)$ . Se a função  $|u|$  assume valor máximo num ponto de  $\Omega$  então  $u$  é constante. Se  $u$  é harmónica real e assume valor máximo ou mínimo num ponto de  $\Omega$  então  $u$  é constante.*

Em analogia com o desenvolvimento em serie de *Taylor* das funções analíticas, também as funções harmónicas coincidem com a soma de séries de potências. As funções  $\bar{z}^n$  or  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  são harmónicas e representam localmente em somas possivelmente infinitas, os de elementos de  $h(\Omega)$ . Precisamente:

**Corolário 4** *Considere-se  $\Omega$  aberto não vazio e  $u \in h(\Omega)$ . O seguinte desenvolvimento é válido*

$$u(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u}{\partial z^j}(w)(z-w)^j + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u}{\partial \bar{z}^j}(w)(\bar{z}-\bar{w})^j, \quad z \in D(w, d_w). \quad (1)$$

Quaisquer das séries em (1) é absolutamente convergente em conjuntos com fecho incluso em  $D(w, d_w)$ .

**Demonstração:** Considerando a proposição 1 deduz-se a existência de funções analíticas  $f$  and  $g$  tais que  $u = f + \bar{g}$ . Inserindo as séries *Taylor* das funções  $f$  e  $g$  na igualdade  $u = f + \bar{g}$  obtém-se

$$u(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (z-w)^j + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\overline{g^{(j)}(0)}}{j!} (\bar{z}-\bar{w})^j, \quad z \in D(w, d_w).$$

A demonstração finda no seguimento das seguintes observações

$$\begin{aligned} f^{(j)}(w) &= \frac{\partial^j f}{\partial z^j}(w) = \frac{\partial^j (f + \bar{g})}{\partial z^j}(w) = \frac{\partial^j u}{\partial z^j}(w) \\ \overline{g^{(j)}(w)} &= \frac{\partial^j \bar{g}}{\partial \bar{z}^j}(w) = \frac{\partial^j (f + \bar{g})}{\partial \bar{z}^j}(w) = \frac{\partial^j u}{\partial \bar{z}^j}(w). \end{aligned}$$

■

**Corolário 5** *Considere-se  $\Omega$  aberto simplesmente conexo não vazio e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmónica real. Então existe uma função harmónica real  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Se  $v_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$  são funções harmónicas tais que  $u + iv_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2$  então  $v_1 - v_2$  é constante.*

**Demonstração:** Considerando a proposição 1 sabe-se da existência duma função  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $u = \operatorname{Re} f$ . Definindo a função  $v = \operatorname{Im} f$  é evidente que  $u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Ademais  $v = (f - \bar{f})/(2i)$  e de novo segue da proposição 1 que  $v$  é harmónica. Suponha-se que  $v_j$ ,  $j = 1, 2$  são funções harmónicas reais tais que  $f_j = u + iv_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2$ . Então  $v_1 - v_2 = -i(f_1 - f_2)$  é função analítica com valores reais e em consequência é uma função constante. ■

Se  $u \in h(\Omega)$  é harmónica não necessariamente real, então considerando separadamente a parte real e imaginária de  $u$  garante-se do resultado anterior a existência duma função harmónica  $v$  não necessariamente real tal que  $u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ . A função  $v$  diz-se uma **harmónica conjugada** de  $u$ .

Adiante na secção o disco unitário  $D(0, 1)$  designam-se por  $\mathbb{D}$ . Se  $u \in h(\mathbb{D})$  então  $\tilde{u}$  denota a harmónica conjugada de  $u$  verificando a condição  $\tilde{u}(0) = 0$ . Se  $u$  assume valores reais então é evidente o seguinte

$$h(\mathbb{D}) \ni u = \frac{f + \bar{f}}{2} \longmapsto \tilde{u} = \frac{f - \bar{f}}{2i} - \frac{f(0) - \bar{f}(0)}{2i} \in h(\mathbb{D}), \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

tanto se  $u := u_1 + iu_2$  não é necessariamente real então  $u_j \in h(\mathbb{D})$ ,  $j = 1, 2$  e  $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$ . Assim é por tão pouco claro que a aplicação  $h(\mathbb{D}) \ni u \rightarrow \tilde{u}$  é linear, a qual adiante designar-se-á por **operador de**

**conjugação.** Da linearidade do operador de conjugação conjuntamente com as evidentes propriedades

$$\widetilde{\widetilde{u}} = \widetilde{u}, \quad u \in h(\mathbb{D}) \quad \text{e} \quad \widetilde{\widetilde{u}} = -iu + iu(0), \quad u \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

conclui-se que a sua acção no desenvolvimento em série de potências caracteriza-se da seguinte forma

$$\widetilde{u}(z) = -i \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j z^j + i \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_{-j} \bar{z}^j \quad \text{aonde} \quad u(z) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j z^j + \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_{-j} \bar{z}^j, \quad (2)$$

Em seguida e assumindo hipóteses necessárias ao decorrer elementar do texto, ver-se-á que os valores na fronteira de funções harmónicas reproduzem os seus valores em pontos interiores tantos os valores das suas harmónicas conjugadas. Desde já introduz-se a definição de convolução e a notação associada. Fornecidas  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções periódicas com período  $2\pi$  e *Riemann* integráveis em intervalos limitados, define-se a função produto convolução

$$f * g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(t - \theta) d\theta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suponha-se  $F \in \mathcal{H}(r\mathbb{D})$ ,  $r > 1$ . Da fórmula integral de Cauchy obtém-se

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{F(\xi) \xi}{\xi - z} |d\xi| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{F(\xi)}{1 - \bar{\xi}z} |d\xi| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta)}{1 - re^{i(t-\theta)}} d\theta = (f * C_r)(t), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}, \end{aligned} \quad (3)$$

aonde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  denota a função  $f(t) = F(e^{it})$  e  $C_r$ ,  $0 < r < 1$  denota o núcleo de *Cauchy* dado por

$$C_r(t) = \frac{1}{1 - re^{it}}, \quad 0 < r < 1.$$

Se  $U = F + \bar{F}$ ,  $F \in \mathcal{H}(r\mathbb{D})$ ,  $r > 1$  então considerando a seguinte igualdade

$$2 \operatorname{Re} \frac{F(\xi)}{1 - \bar{\xi}z} = U(\xi) \left( \frac{1}{1 - \bar{\xi}z} + \frac{1}{1 - \xi\bar{z}} \right) - \left( F(\xi) \frac{1}{1 - \xi\bar{z}} + \bar{F}(\xi) \frac{1}{1 - \bar{\xi}z} \right)$$

e a primeira parte de (3), obtém-se que

$$U(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{2F(\xi)}{1 - \bar{\xi}z} |d\xi| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} U(\xi) \operatorname{Re} \frac{2}{1 - \bar{\xi}z} |d\xi| - 2 \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} F(\xi) \frac{1}{1 - \xi\bar{z}} |d\xi|. \quad (4)$$

Com o auxílio das fórmulas integrais de *Cauchy* estabelece-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} F(\xi) \frac{1}{1 - \xi\bar{z}} |d\xi| = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} F(\xi) \frac{1}{(1 - \xi\bar{z})\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} F(\xi) \left[ \frac{\bar{z}}{(1 - \xi\bar{z})} + \frac{1}{\xi} \right] d\xi = F(0),$$

o que conjuntamente com o corolário 2 e (4) permite concluir o seguinte

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) \left[ \operatorname{Re} \frac{2}{1 - re^{i(t-\theta)}} - 1 \right] d\theta = (u * P_r)(t), \quad z = re^{it} \quad (5)$$

aonde  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  denota a função  $u(t) = U(e^{it})$  e  $P_r$ ,  $0 < r < 1$  denota o núcleo de *Poisson* dado por

$$P_r(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{1 - re^{it}} - 1 \right] = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}, \quad z = re^{it} \in \mathbb{D} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

O núcleo de *Poisson*  $P_r$ ,  $0 < r < 1$  verifica as seguintes propriedades

$$i) \quad P_r(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}; \quad ii) \quad \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1; \quad iii) \quad \int_{\epsilon \leq |t| \leq \pi} P_r(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0, \quad (\epsilon > 0).$$

Se  $U \in h(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$  então a família de funções

$$U_\lambda(z) = U(\lambda z), \quad z \in \mathbb{D} \quad (0 < \lambda < 1)$$

é tal que  $U_\lambda$  coincide com a parte real duma função em  $\mathcal{H}(r\mathbb{D})$ ,  $r > 1$ . Sabe-se que funções contínuas em conjuntos compactos são uniformemente contínuas. Se  $u_\lambda(\theta) := U_\lambda(e^{i\theta})$ ,  $-\pi < \theta < \pi$  segue que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} u_\lambda(\theta) P_r(t - \theta) d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) P_r(t - \theta) d\theta \right| \leq \max_{\theta} |u_\lambda(\theta) - u(\theta)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1^-} 0,$$

o que conjuntamente com (5) permite estabelecer o seguinte

$$\begin{aligned} U(z) &= \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} U_\lambda(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_\lambda(\theta) P_r(t - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) P_r(t - \theta) d\theta = (u * P_r)(t), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}. \end{aligned} \quad (6)$$

Acima demonstrámos o seguinte resultado:

**Proposição 6** *Seja  $U \in h(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$  uma função harmónica com valores reais. O seguinte é válido*

$$U(z) = (u * P_r)(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{1 + \bar{\xi}z}{1 - \bar{\xi}z} |d\xi| \quad \text{aonde} \quad z = re^{it}, \quad -\pi < t \leq \pi.$$

Caso  $U$  seja função harmónica não necessariamente com valores reais então  $U = U_1 + iU_2$ , aonde  $U_j \in h(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ ,  $j = 1, 2$  são funções harmónicas com valores reais. Considerando a linearidade do produto convolução deduz-se a validade de (6) para funções harmónicas não necessariamente reais.

Considere  $U \in h(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$  uma função harmónica com valores reais e defina-se  $u(\theta) = U(e^{i\theta})$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Sem dificuldades deduz-se do teste de *Weierstrass* [4sec. 3.5], a analiticidade em  $\mathbb{D}$  da seguinte função

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{1 + \bar{\xi}z}{1 - \bar{\xi}z} |d\xi|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Da proposição 6 sabe-se que  $U = \operatorname{Re} F$  tanto é óbvio que  $\operatorname{Im} F(0) = 0$ . Consequentemente verifica-se

$$\tilde{U}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} u(\xi) \operatorname{Im} \frac{1 + \bar{\xi}z}{1 - \bar{\xi}z} |d\xi| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) \operatorname{Im} \frac{1 + re^{i(t-\theta)}}{1 - re^{i(t-\theta)}} d\theta = (u * Q_r)(t), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D} \quad (7)$$

aonde  $Q_r$ ,  $0 < r < 1$  designa o **núcleo Poisson conjugado** dado por

$$Q_r(t) := \operatorname{Im} \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} = \frac{2r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2}, \quad z = re^{it} \in \mathbb{D} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

**Proposição 7** *Seja  $U \in h(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$  uma função harmónica com valores reais. Então a função harmónica conjugada  $\tilde{U}$  verifica as seguintes igualdades*

$$\tilde{U}(z) = (u * Q_r)(t) = \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{1 + \bar{\xi}z}{1 - \bar{\xi}z} |d\xi| \quad \text{aonde} \quad z = re^{it}, \quad -\pi < t \leq \pi.$$

Considerando a linearidade do operador de conjugação linear obtém-se que (7) mantém-se válido para funções  $U \in h(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$  não necessariamente assumindo valores reais.



### 3.6 Problemas

1. Seja  $\Omega$  aberto conexo não vazio. Demonstre que se  $u = f + \bar{g}$ , aonde  $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$  e  $u$  assume valores reais então a função  $f - g$  é constante.
2. Considere  $\Omega$  simplesmente conexo e  $u \in h(\Omega)$ . Demonstre que se o contradomínio de  $u$  inclui-se numa variedade uni-dimensional então a função  $u$  é constante.
3. Verifique as seguintes propriedades do operador de conjugação definido em  $h(\mathbb{D})$ :
  - i)  $\widetilde{\widetilde{F}} = F$ ;
  - ii)  $\widetilde{F} = -iF + iF(0)$ ,  $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ;
  - iii)  $\widetilde{F} = -i(G_1 - \overline{G_2}) + i(G_1(0) - \overline{G_2(0)})$ , se  $F = G_1 + \overline{G_2}$ ,  $G_j \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ,  $j = 1, 2$ .
 Demonstre que existe um único operador linear definido em  $h(\mathbb{D})$  e verificando i) e ii).

4. Seja  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $\mathbb{C}$ .

- i) A função  $\bar{g}$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z \in \mathbb{C}$  sse  $\partial_z g(z) = 0$ . Se  $\bar{g}$  é  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z$  então  $\partial_{\bar{z}} g(z) = \overline{g'(z)}$ .
- ii) Seja  $g$  uma função  $\mathbb{C}$ -diferenciável em  $z \in \mathbb{C}$ . Suponha que numa vizinhança do ponto  $z$  a função  $g$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Demonstre que  $\partial_{\bar{z}} \partial_z |g|^2(z) = |g'(z)|^2$ .
- iii) Nas condições da alínea ii) verifica-se  $4\partial_{\bar{z}} \partial_z |g| = \Delta |g| = 4|g'|^2(z)$

5. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto não vazio e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Verifique as asserções seguintes:

- i) Se  $u := \operatorname{Re} f$  e  $\Delta$  designa o operador Laplaciano  $4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ , então

$$\Delta u^n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 1 \\ 2|f'|^2 & , \quad n = 2 \\ n(n-1)|f'|^2 u^{n-2} & , \quad n = 3, 4, \dots \end{cases} ;$$

- ii) Nas condições da alínea anterior verifica-se

$$\Delta |f|^n = \begin{cases} 4|f'|^2 & , \quad n = 2 \\ n^2 |f'|^2 |f|^{n-2} & , \quad n \in \mathbb{N}_1, n \neq 2 \end{cases} ;$$

- iii) Se  $V \subset \mathbb{C}$  é conjunto aberto,  $f(U) \subset V$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  admite derivadas de primeira ordem então

$$\Delta(g \circ f)(z) = \Delta g(w) |f'(z)|^2, \quad \text{aonde } w = f(z).$$

- iv) Se  $V \subset \mathbb{C}$  é conjunto aberto não vazio e a função  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  admite derivadas de primeira ordem então

$$\Delta(f \circ g)(z) = \Delta g(z) f'(w) + 4f''(w) \partial_z g(z) \partial_{\bar{z}} g(z), \quad \text{aonde } w = g(z).$$

6. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um subconjunto aberto, conexo e não vazio. Diz-se que uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é harmónica em  $U$  se  $f$  admite derivadas de segunda ordem em  $U$  e  $\partial_{\bar{z}} \partial_z f = 0$ . Suponha que  $f$  admite derivadas parciais de segunda ordem contínuas em  $U$ . Demonstre que:

- i) Se  $f$  é harmónica em  $U$  e não se anula então  $f^2$  é harmónica sse  $1/f$  é harmónica.
- ii) Se  $f \in \mathcal{H}(U)$  e  $|f|^2$  é harmónica então  $f$  é constante em  $U$ .

7. Considere [17 sec. 3.2] para verificar que o operador Laplaciano  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , actuando em funções admitindo derivadas de segunda ordem contínuas, escreve-se em coordenadas polares da seguinte forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

8. Considere o exercício 7 para demonstrar que se  $u(x, y)$  é harmónica em  $\mathbb{C}$  então a seguinte função  $v(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$  é harmónica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , aonde  $\xi = x/(x^2 + y^2)$  e  $\eta = y/(x^2 + y^2)$ .
9. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  aberto, conexo não vazio e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmónica. Demostre as seguintes asserções:
- i) a função  $e^u$  é harmónica em  $U$  sse  $u$  é constante;
  - ii) se  $v$  é harmónica conjugada de  $u$  então as funções  $e^u \cos v$  e  $e^u \sin v$  são harmónicas em  $U$ .

## Capítulo 4

# O teorema dos resíduos

### 4.1 Séries de Laurent e teorema dos resíduos

Em [3.5 **sec.** 17] definiram-se as coroas circulares  $D(w, r_1, r_2)$  centradas em  $w \in \mathbb{C}$  e de raios finitos  $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ . Se  $r_2 = +\infty$  ou  $w = \infty$  definimos

$$D(w, r, \infty) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| > r\} \quad \text{e} \quad D(\infty, r) := \mathbb{C} \setminus \text{cl } D(0, 1/r).$$

Os conjuntos  $D(w, r, \infty)$ ,  $w \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  dizem-se **vizinhanças do ponto**  $\infty$  e  $D(\infty, r)$ ,  $r > 0$  dizem-se os **discos centrados no ponto**  $\infty$ . Considere-se uma função de variável complexa  $f$  verificando

$$f \in \mathcal{H}(D(w, \rho, r)), \quad \text{aonde} \quad 0 < \rho < r < \infty \quad \text{e} \quad w \in \mathbb{C}.$$

Denota-se por  $\gamma_R$  uma parametrização seccionalmente regular da curva de *Jordan*  $\partial D(w, R)$ ,  $R > 0$  percorrida no sentido positivo. Fornecido  $\epsilon > 0$  considerem-se os seguintes reais positivos

$$\rho_\epsilon^+ = \rho + \epsilon \quad \text{e} \quad r_\epsilon^- = r - \epsilon.$$

Se  $z \in D(w, \rho, r)$  então para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno verifica-se  $\rho_\epsilon^+ < |z - w| < r_\epsilon^-$ . Aplique-se

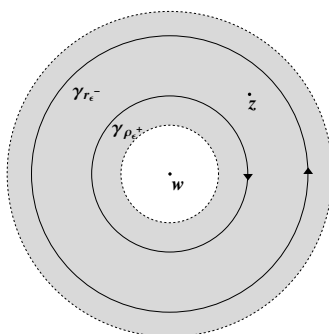


Figura 4.1: As curvas  $\gamma_{r_\epsilon^-}$  e  $\gamma_{\rho_\epsilon^+}$

a fórmula integral de Cauchy à função  $f$  e à coroa circular  $D(z, \rho_\epsilon^+, r_\epsilon^-)$ , para obter

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_\epsilon^+}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \text{se } \rho_\epsilon^+ < |z - w| < r_\epsilon^-. \quad (1)$$

Considerando a holomorfia da função  $f$  e a proposição [7 **sec.** 3.5], deduz-se que os integrais em (1) não dependem da escolha de  $\epsilon > 0$  tal que  $\rho_\epsilon^+ < |z - w| < r_\epsilon^-$ . Logo, encontram-se bem definidas as funções

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D(w, r) \quad \text{e} \quad f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_\epsilon^+}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D(w, \rho, \infty) \quad (2)$$

aonde as circunferências  $\gamma_{r_\epsilon^-}$  e  $\gamma_{\rho_\epsilon^+}$  são percorridas no sentido positivo e os raios  $r_\epsilon^-$  e  $\rho_\epsilon^+$  verificam as desigualdades em (1). É evidente que se  $\gamma$  é uma curva de Jordan, então as funções definidas por intermédio de integrais paramétricos do género integrais de Cauchy

$$z \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

estão bem definidas para  $z \in (\text{ins } \gamma \cup \text{out } \gamma)$ , na única hipótese  $f \in \mathcal{R}(\gamma)$ . No entanto, acima considera-se a função  $f_1$  definida em  $D(w, r)$  e  $f_2$  em  $D(w, \rho, \infty)$ . Se  $z \in \text{ins } \gamma_{r_\epsilon^-}$ , sabemos do lema [5 **sec.** 3.5] que  $f_1 \in \mathcal{H}(D(w, r))$ . Do seguinte resultado deduz-se a holomorfia da função  $f_2$  em  $\text{out } \gamma_\rho$ .

**Lema 1** *Seja  $f : \partial D(w, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  uma função Riemann integrável em  $\partial D(w, \rho)$  e considere-se a função*

$$h : D(w, \rho, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad h(z) = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

aonde  $\gamma_\rho$  denota uma parametrização de  $\partial D(w, \rho)$ , percorrida no sentido positivo. Então  $h$  é analítica em  $D(w, \rho, \infty)$ ,  $h(\infty) = 0$  e  $h$  é representada em  $D(w, \rho, \infty)$  por a soma da série de potências negativas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - w)^n} \quad \text{aonde} \quad a_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(\xi) (\xi - w)^{n-1} d\xi. \quad (3)$$

A série em (3) converge absolutamente em qualquer coroa  $D(w, \rho_\epsilon^+, \infty)$ ,  $\epsilon > 0$ .

**Demonstração:** Suponha-se que para  $\xi \in \partial D(w, \rho)$  verifica-se  $|f(\xi)| \leq M$ , aonde  $M$  é uma constante positiva. Então

$$0 \leq |h(z)| \leq \int_{\gamma_\rho} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|} |d\xi| \leq 2\rho\pi M \frac{1}{|z - w| - \rho} \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0,$$

e consequentemente  $h(\infty) = 0$ . Seja  $z \in D(w, \rho, \infty)$ . Da soma da série geométrica infere-se o seguinte

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{w - z} \left( \frac{1}{1 - \frac{\xi - w}{z - w}} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} f(\xi) (\xi - w)^n \frac{1}{(z - w)^{n+1}}, \quad \text{se } |z - w| > |\xi - w|. \quad (4)$$

Se  $|z - w| = r > \rho$  e  $|\xi - w| = \rho$  então

$$\left| \frac{f(\xi) (\xi - w)^n}{(z - w)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considerando a convergência da série geométrica e o teste de Weierstrass, i.e. proposições [4 **sec.** 3.5] e [6 **sec.** 3.5], deduz-se a possibilidade em comutar a integração em  $\partial D(w, \rho)$  na variável complexa  $d\xi$  e do membro direito das igualdade (4), com o símbolo de série. Logo, para  $z \in D(w, \rho, \infty)$  obtém-se

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-w)^n} \quad \text{aonde} \quad a_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho} f(\xi)(\xi-w)^{n-1} d\xi.$$

Assim sendo, a série de potências  $\phi(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \eta^n$  converge para  $|\eta| < 1/\rho$  e define uma função holomorfa no disco  $D(0, 1/\rho)$ . Como  $z \rightarrow 1/(z-w)$  é diferenciável em  $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ , então  $h(z) = \phi(1/(z-w))$  é diferenciável em  $D(w, \rho, \infty)$ . ■

Do resultado anterior infere-se a holomorfia na vizinhança  $D(w, \rho, \infty)$ , da função  $f_2$  definida em (2) tanto que  $f_2(\infty) = 0$ . Introduzindo uma noção de diferenciabilidade adequada, é possível estabelecer um resultado semelhante à proposição [15 **sec.** 3.5], i.e. estabelecer que funções limitadas em vizinhanças de infinito têm singularidade removível em  $\infty$ . Considerando funções holomorfas no exterior de curvas de *Jordan*, é por igual possível demonstrar fórmulas análogas às fórmulas integrais de Cauchy.

**Definição 2 (diferenciabilidade em  $\infty$ )** Uma função  $g$  diz-se **diferenciável no ponto  $\infty$**  se está definida num disco  $D(\infty, r)$ ,  $r > 0$  e a função

$$\varphi : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \varphi(z) = g\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \neq 0$$

é prolongável por diferenciabilidade à origem. Se  $g$  é diferenciável no ponto infinito define-se a derivada

$$g'(\infty) := \varphi'(0).$$

Na seguinte proposição estabelecem-se os resultados acima anunciados.

**Proposição 3** Seja  $g \in \mathcal{H}(D(w, \rho, \infty))$  uma função limitada. Então  $g$  é diferenciável no ponto  $\infty$

$$g(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \text{ins } \gamma \quad \text{e} \quad g'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\xi) d\xi, \quad (5)$$

aonde  $\gamma$  é caminho de *Jordan* seccionalmente regular, orientado positivamente e tal que  $\text{out } \gamma \subset D(w, \rho, \infty)$ . Adicionalmente, verificam-se as seguintes fórmulas integrais

$$g(z) - g(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \text{out } \gamma.$$

**Demonstração:** Como  $g$  é holomorfa e limitada numa vizinhança do ponto  $\infty$  então a função  $\varphi(z) = g(1/z)$ ,  $z \neq 0$  é holomorfa e limitada num disco pontuado de centro na origem. Da proposição [15 **sec.** 3.5] deduz-se que  $\varphi$  tem uma singularidade removível na origem. Em particular  $g(\infty)$  está bem definido. Denote-se por  $\gamma_R$  uma parametrização da curva  $\partial D(w, R)$ ,  $R > 0$  percorrida no sentido positivo. Suponha-se  $z \in \text{ins } \gamma$  e considere-se  $R > 0$  superior a determinado real positivo tal que  $\mathcal{C}^\gamma \subset \text{ins } \gamma_R$ . Tendo em linha de conta que a função  $w \rightarrow g(w)/(w-z)$  é holomorfa num aberto que contém o conjunto 1-multi conexo definido da seguinte forma

$$U := \text{ins } \gamma_R \cap \text{out } \gamma,$$

e notando que se  $z \in D(w, R)$  então  $I(\gamma_R, z) = 1$ , obtém-se de imediato da proposição [7 sec. 3.5] que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi = g(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(\xi) - g(\infty)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \text{ins } \gamma. \quad (6)$$

Considerando

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(\xi) - g(\infty)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \sup_{|\xi - w| = R} |g(\xi) - g(\infty)| \frac{2\pi R}{R - |z - w|} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0, \quad (7)$$

infere-se de (6) o seguinte

$$g(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Suponha-se  $z \in \text{out } \gamma \cap D(w, \rho, \infty)$  e  $R > 0$  suficientemente grande tal que  $\{z\} \cup \mathcal{C}^\gamma \subset \text{ins } \gamma_R$ . Aplicando a fórmula integral de Cauchy ao conjunto 1-multi conexo  $U$ , deduz-se

$$g(z) - g(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(\xi) - g(\infty)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (8)$$

Considerando (7) termina-se a demonstração de (3) i.e. obtém-se

$$g(z) - g(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \text{out } \gamma. \quad (9)$$

Finalmente, a função  $g$  é diferenciável em  $\infty$  sse o limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(1/z) - g(\infty)}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} z [g(z) - g(\infty)] \quad \text{existe}.$$

Se  $|z|$  é superior a determinado real positivo então  $z \in \text{out } \gamma$ . Logo, de (9) obtém-se

$$\left| z [g(z) - g(\infty)] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\xi) d\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{z g(\xi)}{\xi - z} + g(\xi) d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{\xi g(\xi)}{\xi - z} \right| |d\xi| \leq \frac{M |\gamma|}{\text{dist}(z, \mathcal{C}^\gamma)} \xrightarrow{|z| \rightarrow 0} 0,$$

e assim é finda a demonstração. ■

**Corolário 4 (Liouville)** Se  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  e  $f$  é limitada então  $f$  é constante.

**Demonstração:** Da proposição anterior deduz-se a existência de  $f(\infty)$ . Considerando conjuntamente a fórmula integral de Cauchy conclui-se o seguinte

$$f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z), \quad z \in \text{ins } \gamma$$

aonde  $\gamma$  é qualquer caminho de Jordan seccionalmente regular e positivamente orientado. ■

**Corolário 5 (Teorema fundamental da álgebra)** Seja  $p(z)$  um polinómio na variável complexa de grau superior ou igual à unidade. Então  $p(z)$  admite um zero.

**Demonstração:** Considere-se a função  $f(z) = 1/p(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Se por absurdo admitir-se que  $p(z) \neq 0$ , para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ , então a função  $f$  é inteira e limitada. Do teorema de Liouville conclui-se que  $f(z)$  é constante e logo  $p(z)$  é polinómio de grau zero, contrariamente às hipóteses. ■

**Teorema 6 (Laurent)** *Considerem-se  $r$  e  $\rho$  reais positivos tais que  $0 < \rho < r < \infty$ . Se  $f$  é uma função holomorfa em  $D(w, \rho, r)$ , então  $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ , aonde as funções  $f_j$ ,  $j = 1, 2$  verificam:*

i)  $f_1$  e  $f_2$  são funções respectivamente holomorfas em  $D(w, r)$  e  $D(w, \rho, \infty)$  dadas por

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n, \quad z \in D(w, r) \\ f_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-w)^{-n}, \quad z \in D(w, \rho, \infty) \end{aligned} \quad e \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\tau} \frac{f(\xi)}{(\xi-w)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

aonde  $\tau$  verifica  $\rho < \tau < r$  e  $\gamma_\tau$  é uma parametrização seccionalmente regular da circunferência positivamente orientada  $\partial D(w, \tau)$ . As séries de potências representando as funções  $f_1$  e  $f_2$  são respectivamente absolutamente convergentes em  $D(w, r_\epsilon^-)$  e  $D(w, \rho_\epsilon^+, \infty)$ ,  $\epsilon > 0$ .

ii) se  $f = g_1 + g_2$ , aonde  $g_1 \in \mathcal{H}(D(w, r))$ ,  $g_2 \in \mathcal{H}(D(w, \rho, \infty))$  e  $g_2(\infty) = 0$  então  $f_1 = g_1$  e  $f_2 = g_2$ .

**Demonstração:** Em (2) verificou-se  $f = f_1 + f_2$  aonde as funções  $f_j$ ,  $j = 1, 2$  são definidas por

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi, \quad z \in D(w, r) \quad e \quad f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_\epsilon^+}} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi, \quad z \in D(w, \rho, \infty).$$

Do lema [5 sec. 3.5] sabe-se que  $f_1 \in \mathcal{H}(D(w, r_\epsilon^-))$ , qualquer que seja  $\epsilon > 0$ . Logo  $f_1 \in \mathcal{H}(D(w, r))$ . Também do lema [5 sec. 3.5] infere-se que  $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$ ,  $z \in D(w, r_\epsilon^-)$  aonde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{f(\xi)}{(\xi-w)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Da proposição [7 sec. 3.5] deduz-se que (10) não depende de  $\epsilon > 0$  tal que  $0 < \rho < r_\epsilon^- < r$ . Logo, da arbitrariedade de  $\epsilon > 0$  infere-se a validade do desenvolvimento em série de potências da função  $f_1$  no disco aberto  $D(w, r)$ . Do lema 1 sabe-se  $f_2 \in \mathcal{H}(D(w, \rho_\epsilon^+, \infty))$ , qualquer que seja  $\epsilon > 0$ . Logo  $f_2 \in \mathcal{H}(D(w, \rho, \infty))$ . De novo do lema 1 retira-se a asserção

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-w)^n}, \quad z \in D(w, \rho_\epsilon^+, \infty) \quad \text{aonde} \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_\epsilon^+}} f(\xi) (\xi-w)^{n-1} d\xi. \quad (11)$$

De novo da proposição [7 sec. 3.5] deduz-se que a definição do coeficiente  $a_{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  não depende de  $\epsilon > 0$  tal que  $0 < \rho < \rho_\epsilon^+ < r$ . Da arbitrariedade de  $\epsilon > 0$  deduz-se a validade do desenvolvimento em série de potências da função  $f_2$  na coroa aberta  $D(w, \rho, \infty)$ . As funções integradas em  $d\xi$  nas igualdades (10), (11) e definindo respectivamente os coeficientes  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  são holomorfas na coroa  $D(w, \rho, r)$ . Logo os integrais podem ser substituídos por integrais em qualquer curva de Jordan positivamente orientada  $\gamma_\tau$ , com  $0 < \rho < \tau < r$ .

Para demonstrar ii) considere-se  $z \in D(w, \rho, r)$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $|z-w| < r_\epsilon^-$ . Tendo em linha de conta que  $f_1, g_1 \in \mathcal{H}(D(w, r))$ ,  $f_2(\infty) = g_2(\infty) = 0$ , a fórmula integral de Cauchy e o lema 3, obtém-se que

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{g_2(\xi)}{\xi-z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{f_1(\xi)}{\xi-z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_\epsilon^-}} \frac{f_2(\xi)}{\xi-z} d\xi = f_1(z), \quad z \in D(\epsilon, \rho, r). \end{aligned}$$

Consequentemente  $g_2(z) = f_2(z)$ , para  $z \in D(w, \rho, r)$ . Se  $\epsilon > 0$  é inferior a determinado real positivo, então considerando as igualdades  $f_2(\infty) = g_2(\infty) = 0$ , infere-se da proposição 3 o seguinte

$$g_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_\epsilon^+} \frac{g_2(\xi)}{\xi - z} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_\epsilon^+} \frac{f_2(\xi)}{\xi - z} d\xi = f_2(z), \quad z \in \text{out } \partial D(w, \rho).$$

■

Se  $f$  é uma função holomorfa em  $D(w, \rho, r)$ ,  $0 < \rho < r$  então do teorema anterior deduz-se que  $f$  coincide com a soma duma série de potências inteiras absolutamente convergente, i.e.

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - w)^n \quad \text{aonde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\tau} \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{n+1}} d\xi, \quad \rho < \tau < r, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

O desenvolvimento (12) é dito o desenvolvimento em **série de Laurent** da função  $f$ .

Na sequência consideram-se funções holomorfas em discos pontuados. Se  $f \in \mathcal{H}(D_w(w, r))$ ,  $r > 0$  então a série de *Laurent* de  $f$  é convergente em  $D_w(w, r)$ . O **resíduo** da função  $f$ , holomorfa num disco pontuado de centro em  $w$ , é o coeficiente  $a_{-1}$  do seu desenvolvimento em série de *Laurent*, i.e.

$$\text{Res}(f; w) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\tau} f(\xi) d\xi, \quad (13)$$

aonde  $\gamma_\tau$  percorre a circunferência  $|\xi - w| = \tau$ ,  $0 < \tau < r$  no sentido positivo. O teorema 6 assegura a decomposição  $f = f_1 + f_2$ , aonde  $f_1$  é uma função holomorfa numa vizinhança de  $w$  e  $f_2$  é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ , tal que  $f_2(\infty)$  e  $f_2'(\infty)$  existem. Segue da holomorfia de  $f_1$  e da proposição 3 que

$$f_2'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f_2(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} [f_1(\xi) + f_2(\xi)] d\xi = \text{Res}(f; w),$$

aonde  $\gamma$  é qualquer caminho de *Jordan* seccionalmente regular positivamente orientado e tal que  $w \in \text{ins } \gamma$ . Em particular conclui-se a possibilidade em considerar na definição de resíduos a integração em qualquer caminho nas condições acima.

**Definição 7** Um número complexo  $w$  diz-se uma **singularidade isolada** da função complexa  $f$  de variável complexa, se  $f$  é holomorfa em algum disco pontuado  $D_w(w, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ .

Considere-se uma curva de *Jordan*  $\mathcal{C}^{\gamma_0}$  e  $f$  uma função holomorfa num conjunto aberto contendo  $\text{ins } \gamma_0 \cup \mathcal{C}^{\gamma_0}$ , excepto num número finito de singularidades isoladas. Suponha-se adicionalmente que  $\mathcal{C}^{\gamma_0}$  não intercepta o conjunto das singularidades de  $f$  e enumerem-se as singularidade no interior de  $\gamma_0$  por  $z_j, j = 1, \dots, n$ . Para cada  $z_j$  existe  $\epsilon_j > 0$  tal que

$$D(z_j, \epsilon_j) \subset \text{ins } \gamma_0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad \text{e} \quad D(z_j, 2\epsilon_j) \cap D(z_l, 2\epsilon_l) = \emptyset \quad (j \neq l; j, l = 1, \dots, n).$$

Se  $\gamma_j$  é uma parametrização seccionalmente regular da curva de *Jordan*  $\partial D(z_j, \epsilon_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , então considerando o conjunto  $n$ -multi conexo

$$U = \text{ins } \gamma_0 \cap \text{out } \gamma_1 \cdots \cap \text{out } \gamma_n$$



obtém-se a holomorfia de  $f$  num conjunto aberto contendo  $U$ . Logo, da proposição [7 **sec.** 3.5] deduz-se

$$\int_{\gamma_0} f(w) dw = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(w) dw,$$

aonde  $\gamma_j, j = 0, \dots, n$  é percorrido no sentido positivo. Considerando o desenvolvimento em série de *Laurent* da função  $f$  em torno de  $z_j$  e a definição 13 de resíduo nos pontos  $z_j, j = 1, \dots, n$  obtém-se

$$\int_{\gamma_0} f(w) dw = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(w) dw = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j).$$

As asserções demonstrados são usualmente designadas por teorema dos resíduos, de seguida enunciado.

**Teorema 8 (Resíduos)** *Seja  $\gamma$  um caminho de Jordan seccionalmente regular e positivamente orientado. Se  $f$  é uma função holomorfa num conjunto aberto que contém  $\text{ins } \gamma \cup \mathcal{C}^\gamma$ , excepto num número finito de singularidades isoladas contidas em  $\text{ins } \gamma$ , então*

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i \sum_{j \in I} \text{Res}(f; z_j),$$

aonde  $\{z_j : j \in I\}$  denota o conjunto das singularidades de  $f$  no interior do caminho  $\gamma$ .

O teorema das resíduos aplica-se a uma importante classe de funções, as funções meromorfas.

**Definição 9** *Uma função complexa  $f$  de variável complexa, diz-se **meromorfa** se é holomorfa excepto possivelmente num conjunto de singularidades isoladas.*

Suponha-se fornecido  $\gamma$  um caminho de *Jordan* seccionalmente regular positivamente orientado e uma função meromorfa  $f$ , cujas singularidades não interceptam  $\mathcal{C}^\gamma$ . Porque o conjunto  $\text{ins } \gamma \cup \mathcal{C}^\gamma$  é compacto, então somente um número finito de singularidades de  $f$  inclui-se no interior de  $\gamma$ . Doutra forma, o teorema de **Bolzano-Weierstrass** garantia a existência no interior de  $\gamma$  dum ponto de acumulação do conjunto das singularidades de  $f$ , contradizendo a hipótese de as singularidades de  $f$  serem isoladas. Por tão pouco o teorema dos resíduos aplica-se ao cálculo de integrais de funções meromorfas em caminhos de *Jordan* seccionalmente regulares não interceptando as suas singularidades.

## 4.1 Problemas

1. Para as funções meromorfas indicadas nas seguintes alíneas, determine os desenvolvimentos em série de *Laurent* centrada no ponto indicado e os respectivos resíduos:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} & \frac{1}{1-z^2}, z=1 & ; & \text{ii)} \quad \frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}, z=-1 & ; & \text{iii)} \quad \frac{z^2}{(1-z^2)^2}, z=-1 & ; \\ \text{iv)} & \frac{e^{1/z}}{z^2}, z=0 & ; & \text{v)} \quad \frac{e^{\pi z}(z+i)}{z-i}, z=i & ; & \text{vi)} \quad \frac{\ln(z+1)}{z}, z=0 & . \end{array}$$

2. Para as funções indicadas nas seguintes alíneas, determine os desenvolvimentos em série de *Laurent* convergente nas coroas circulares respectivamente indicadas:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad , \quad 1 < |z| < 2 \quad ; \quad \text{ii)} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad , \quad |z| > 2 \quad ; \\ \text{iii)} \quad & \frac{1}{(z^2+4)(z-1)} \quad , \quad 1 < |z| < 2 \quad ; \quad \text{iv)} \quad \frac{1}{(z^2+4)(z-1)} \quad , \quad 0 < |z-1| < \sqrt{5} \quad . \end{aligned}$$

3. Calcule os integrais indicados em cada uma das alíneas abaixo:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_{\gamma_r} \frac{z}{e^z - 1} dz \quad , \quad r = 3\pi \quad ; \quad \text{ii)} \quad \int_{\gamma_r} \frac{z}{e^{1/z}} dz \quad , \quad r = 1 \quad ; \\ \text{iii)} \quad & \int_{\gamma_r} \frac{1+z^2}{\sin(i\pi z)} dz \quad , \quad r = e \quad ; \quad \text{iv)} \quad \int_{\gamma_r} \sin \frac{1}{z} dz \quad , \quad r = 1 \quad ; \\ \text{v)} \quad & \int_{\gamma_r} \frac{\cos \frac{1}{z}}{z} dz \quad , \quad r = 1 \quad ; \quad \text{vi)} \quad \int_{\gamma_r} (z^3 + z^4) \sin \frac{1}{z} dz \quad , \quad r = 1 \quad . \end{aligned}$$

aonde  $\gamma_r$  denota uma parametrização seccionalmente regular positivamente orientada de  $\partial D(0, r)$ ,  $r > 0$ .

4. Considere o círculo unitário percorrido no sentido positivo e calcule os integrais indicados nas alíneas abaixo

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_{|w|=1} \frac{e^{1/w}}{1+zw} dw \quad , \quad |z| \neq 1 \quad ; \quad \text{ii)} \quad \int_{|w|=1} \frac{e^{1/w}}{1+z^2w^2} dw \quad , \quad |z| \neq 1 \quad ; \\ \text{iii)} \quad & \int_{|w|=1} \frac{e^{1/w}}{w(1+z^2w^2)} dw \quad , \quad |z| \neq 1 \quad ; \quad \text{iv)} \quad \int_{|w|=2} \frac{e^{1/w}}{(1-w)^2} dw \quad . \end{aligned}$$

## 4.2 Zeros e singularidades

**Proposição 1** Considere-se um conjunto  $U \subset \mathbb{C}$  aberto, conexo não vazio,  $w \in U$  e  $f \in \mathcal{H}(U)$ .

- i) Se todas as derivadas de  $f$  anulam-se em  $w$  então  $f$  é a função identicamente nula.  
 ii) Se  $w$  é ponto de acumulação do conjunto dos zeros de  $f$  então  $f$  é identicamente nula.

**Demonstração:** Considere  $\xi \in U$  tal que  $f(\xi) = 0$ . Se para qualquer que seja  $k \in \mathbb{N}$  verifica-se  $f^{(k)}(\xi) = 0$ , então o desenvolvimento em série de *Taylor* da função  $f$  em torno de  $\xi$  coincide com a série de potências identicamente nula. Conclui-se que se  $z \in D(\xi, d_\xi)$  então  $f(z) = 0$ , aonde  $d_\xi = \text{dist}(\xi, \partial U) > 0$ . Em particular, qualquer elemento do conjunto de seguida definido

$$Z := \left\{ \xi \in U : \forall_{k \in \mathbb{N}} f^{(k)}(\xi) = 0 \right\}$$

é um ponto interior e em consequência  $Z$  é um conjunto aberto. Segue a demonstração de que  $U \setminus Z$  é também um conjunto aberto. Se  $\xi \in U \setminus Z$  então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{(k)}(\xi) \neq 0$ . Da continuidade da função  $f^{(k)}$  infere-se que em algum disco  $D(\xi, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$  verifica-se  $f^{(k)}(z) \neq 0$ ,  $z \in D(\xi, \epsilon)$ . Logo  $D(\xi, \epsilon) \subset U \setminus Z$ . Por hipótese o conjunto  $U$  é conexo e em consequência  $Z = \emptyset$  ou  $Z = U$ . É suposto  $w \in U$ . Logo  $Z = U$  e assim é finda a demonstração da alínea i).

Para ii) procedemos por indução matemática, com intuítos em demonstrar que qualquer função  $f$

analítica em  $w$ , cujo conjunto dos zeros têm um ponto de acumulação em  $w$  verifica  $f^{(k)}(w) = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Suponha a existência duma sucessão  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  de termos complexos distintos dois a dois, tais que  $f(z_n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim z_n = w \in U$ . Da continuidade da função  $f$  infere-se  $f(w) = \lim f(z_n) = 0$ . Se  $f(0) = f'(w) = \dots = f^{(k)}(w) = 0$  então

$$f(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n(z-w)^n = (z-w)^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n(z-w)^{n-k-1} = (z-w)^{k+1} g(z).$$

A função  $g$  é representada por uma série de potência com raio de convergência  $d_w$ . Logo  $g$  é analítica em  $w$ . Porque  $f(z_n) = 0$  e  $z_n \neq w$  então  $g(z_n) = 0$ . Deduz-se  $g(w) = 0$  e em consequência  $f^{(k+1)}(w) = (k+1)! a_{k+1} = 0$ . Assim termina a demonstração indutiva. Da alínea *i*) conclui-se a demonstração. ■

Considere-se  $U \subset \mathbb{C}$  aberto não vazio,  $w \in U$  e  $f \in \mathcal{H}(U)$ . Suponha-se  $f(w) = 0$  tanto  $f$  não é identicamente nula na componente conexa de  $U$  contendo  $w$ . Da proposição 1 deduz-se a boa definição do seguinte número natural

$$k := \min \left\{ j \in \mathbb{N}_1 : f^{(j)}(w) \neq 0 \right\}.$$

Diz-se que  $w$  é um **zero de ordem  $k$**  da função  $f$ , tanto que  $f$  tem um zero de multiplicidade  $k$  no complexo  $w$ . Se  $\sum a_n(z-w)^n$  é o desenvolvimento da função  $f$  em série de *Taylor* centrada em  $w$ , então  $w$  é um zero de ordem  $k$  de  $f$  sse  $0 = a_0 = \dots = a_{k-1}$  e  $a_k \neq 0$ , i.e a série de *Taylor* de  $f$  verifica

$$f(z) = (z-w)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}(z-w)^n \quad \text{e} \quad a_k \neq 0, \quad \text{para} \quad z \in D(w, d_w).$$

**Proposição 2** *Seja  $f \in \mathcal{H}(U)$ , aonde  $U$  é aberto não vazio. Então  $w \in U$  é zero de ordem  $k \in \mathbb{N}_1$  da função  $f$  sse existe uma função  $g \in \mathcal{H}(U)$  tal que  $g(w) \neq 0$  e*

$$f(z) = (z-w)^k g(z), \quad \text{para qualquer} \quad z \in U.$$

**Demonstração:** Considere-se a função  $g(z) = f(z)/(z-w)^k$ ,  $z \in U_w$  definida no conjunto  $U$  pontuado em  $w$ . A asserção  $g \in \mathcal{H}(U_w)$ , é evidente. Logo a demonstração é finda mostrando que  $f$  tem um zero de ordem  $k$  no ponto  $w$  sse  $w$  é uma singularidade removível da função  $g$  e  $g(w) \neq 0$ . Supondo  $w$  um zero de ordem  $k$  de  $f$  então o seguinte é válido

$$f(z) = (z-w)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-w)^n, \quad a_k \neq 0 \quad \text{e logo} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-w)^n, \quad z \in D_w(w, d_w).$$

Consequentemente a função  $g$  é analítica em  $w$  e  $g(w) = a_k \neq 0$ . Se  $g$  é analítica em  $w$  e  $g(w) \neq 0$  então para qualquer  $z$  em algum disco  $D(w, \delta)$ ,  $\delta > 0$  verifica-se

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-w)^n, \quad b_0 \neq 0 \quad \text{e logo} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-w)^{n+k},$$

donde infere-se  $f^{(j)}(w) = 0$ ,  $j = 0, \dots, k-1$  e  $f^{(k)}(w) = k! b_k \neq 0$ . ■

Considere  $f \in \mathcal{H}(D_w(w, r))$ ,  $r > 0$ . A série de *Laurent* de  $f$  no disco pontuado  $D_w(w, r)$  tem a forma

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-w)^n, \quad z \in D_w(w, r) \quad \text{aonde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-w|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-w)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

O círculo  $|z - w| = \tau$ ,  $0 < \tau < d_w$  é percorrido no sentido positivo. Classificam-se as singularidades isoladas com base na série de *Laurent*. A singularidade isolada  $w$  diz-se um **pólo de ordem**  $k \in \mathbb{N}_1$  se  $a_{-j} = 0$ , para  $j > k$  e  $a_{-k} \neq 0$ , i.e. se a série de *Laurent* no disco pontuado  $D_w(w, d_w)$  verifica

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-w)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n, \quad z \in D_w(w, d_w) \quad \text{aonde} \quad a_{-k} \neq 0. \quad (1)$$

**Proposição 3** *Seja  $U$  aberto e  $w \in U$ . Se  $f \in \mathcal{H}(U_w)$  e  $k \in \mathbb{N}_1$ , então as asserções são equivalentes:*

- i) *O número complexo  $w$  é um pólo de ordem  $k$  da função  $f$ ;*
- ii) *O seguinte limite  $\lim_{z \rightarrow w} (z-w)^k f(z)$  existe, é finito e não nulo;*
- iii)  *$h(z) := 1/f(z)$  está definida em algum  $D_w(w, \delta)$ ,  $\delta > 0$  e tem um zero de ordem  $k$  em  $w$ ;*
- iv) *Existe  $g \in \mathcal{H}(U)$  tal que  $g(w) \neq 0$  e  $f(z) = g(z)/(z-w)^k$ , para  $z \in U_w$ .*

Se  $w$  é um pólo de ordem  $k \in \mathbb{N}_1$  da função  $f$ , então é válida a seguinte fórmula

$$\text{Res}(f; w) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow w} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-w)^k f(z)].$$

**Demonstração:**  $[i] \Rightarrow [ii]$  Seja  $w$  um pólo de ordem  $k \in \mathbb{N}_1$  da função  $f$ . Considerando (1) tanto a continuidade de funções representadas por séries de potências deduz-se o seguinte

$$\lim_{z \rightarrow w} (z-w)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow w} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-w)^n = a_{-k} \neq 0.$$

$[ii] \Rightarrow [iii]$  A função  $g(z) = (z-w)^k f(z)$  é analítica em  $U$  e  $g(w) = \lim_{z \rightarrow w} (z-w)^k f(z) \neq 0$ . Logo  $f$  não se anula numa vizinhança do ponto  $w$  e assim a função  $1/g$  é holomorfa numa vizinhança do ponto  $w$ . Em particular  $h$  está definida numa vizinhança de  $w$ . Considerando as evidentes igualdades

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-w)^k \frac{1}{g(z)},$$

deduz-se da proposição 2 que  $w$  é um zero de ordem  $k$  da função  $h$ .

$[iii] \Rightarrow [iv]$  Nas condições das hipóteses verifica-se o seguinte

$$\frac{1}{f(z)} = (z-w)^k c(z) \quad \text{aonde} \quad c \in \mathcal{H}(D(w, \delta)), \quad \delta > 0 \quad \text{e} \quad c(w) \neq 0.$$

Logo, a função  $g(z) = 1/c(z)$  é holomorfa num disco  $D(w, \epsilon)$ ,  $\delta > \epsilon > 0$  e para  $z \in D(w, \epsilon)$  tem-se

$$f(z) = \frac{1}{(z-w)^k} g(z) \quad \text{e} \quad g(w) \neq 0.$$

É evidente que a função  $g(z) = f(z)(z-w)^k$  é holomorfa em  $U$ .

$[iv] \Rightarrow [i]$  Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$  a série de *Taylor* centrada em  $w$  da função  $g$ . Porque  $g(w) \neq 0$  então

$$f(z) = \frac{1}{(z-w)^k} g(z) = \frac{1}{(z-w)^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n = \frac{a_0}{(z-w)^k} + \frac{a_1}{(z-w)^{k-1}} + \cdots \quad \text{aonde} \quad a_0 \neq 0$$

i.e. a função  $f$  tem um pólo de ordem  $k$  em  $w$ , o que termina a demonstração da equivalência entre as asserções de  $i)$  a  $iv)$ .

Finalmente, se  $f$  tem pólo de ordem  $k \in \mathbb{N}_1$  em  $w$ , então a série de *Laurent* de  $f$  é da forma

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-w)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n, \quad z \in D_w(w, d_w) \quad \text{aonde} \quad a_{-k} \neq 0.$$

Assim, a função  $(z-w)^k f(z)$  coincide com a soma duma série de potências, série essa que no interior da sua região de convergência pode ser diferenciada termo a termo. Logo

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-w)^k f(z)] = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_{-k+n}(z-w)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} \frac{(n+k-1)!}{n!} (z-w)^n \xrightarrow{z \rightarrow w} (k-1)! a_{-1}.$$

■

A singularidade isolada  $w \in \mathbb{C}$  de determinada função  $f$  diz-se **singularidade essencial**, caso  $w$  não seja singularidade removível ou pólo de ordem  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}_1$ . Se a série de *Laurent* de  $f$  é dado por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-w)^n, \quad z \in D_w(w, d_w)$$

então  $w$  é singularidade essencial de  $f$  sse para qualquer que seja  $k \in \mathbb{N}$  existe  $j > k$  tal que  $a_{-j} \neq 0$ .

**Proposição 4 (Singularidades essenciais)** *Suponha-se  $U \subset \mathbb{C}$  aberto,  $w \in U$  e  $f \in \mathcal{H}(U_w)$ . Então a singularidade  $w$  é um pólo sse*

$$\lim_{z \rightarrow w} |f(z)| = +\infty.$$

**Demonstração:** Suponha-se que  $w$  é um pólo de ordem  $k \in \mathbb{N}_1$  da função  $f$ . A proposição (3) assegura a existência de  $g \in \mathcal{H}(U)$  tal que  $g(w) \neq 0$  e  $f(z) = g(z)/(z-w)^k$ ,  $z \neq w$ . Assim é evidente que  $\lim_{z \rightarrow w} |f(z)| = +\infty$ . Reciprocamente, suponha-se  $\lim_{z \rightarrow w} |f(z)| = +\infty$ . A função  $h := 1/f$  está bem definida e é limitada em algum disco  $D(w, \delta)$ ,  $\delta > 0$ . Da proposição [15 **sec.** 3.5] deduz-se que  $w$  é singularidade removível de  $h$ . Como  $h(w) = 0$  então existe  $k \in \mathbb{N}_1$  e  $g$  analítica em  $w$  verificando

$$h(z) = (z-w)^k g(z) \quad \text{e} \quad g(w) \neq 0.$$

Em algum disco  $D(w, \epsilon)$ ,  $0 < \epsilon < \delta$  a função  $g$  não se anula e  $1/g$  é analítica em  $w$ . Finalmente

$$f(z) = \frac{1}{(z-w)^k} \frac{1}{g(z)}$$

e logo  $f$  tem um pólo de ordem  $k$  em  $w$ . ■

## Exemplos

1. A função  $f(z) = e^{1/\sin z}$  tem singularidades isoladas nos pontos  $w_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Cada uma das singularidades isoladas de  $f$  é essencial. De facto,

$$z_n = f(k\pi + (-1)^n \frac{1}{n}), \quad n \in \mathbb{N}_1 \quad \text{tem sublimites} \quad 0 \text{ e } +\infty \quad \text{e logo} \quad \lim_{z \rightarrow k\pi} |f(z)| \neq \infty.$$

□

## 4.2 Problemas

1.

a) Classifique as singularidades da função meromorfa  $f$  indicada nas seguintes alíneas:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & f(z) = \frac{1}{1+z^2} ; \quad \text{ii)} & f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} ; \\ \text{iii)} & f(z) = \frac{\sin(i\pi z)}{(1+z^2)^2} ; \quad \text{iv)} & f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2} ; \\ \text{v)} & f(z) = \frac{1}{z^3} \sin z^2 ; \quad \text{vi)} & f(z) = \frac{1}{1-z^n} \quad (n \in \mathbb{N}_1) ; \\ \text{vii)} & f(z) = \frac{1}{(1-z^n)^2} \quad (n \in \mathbb{N}_1) ; \quad \text{viii)} & f(z) = \frac{z^{n-1}}{1-z^n} \quad (n \in \mathbb{N}_1) . \end{array}$$

b) Considere  $\gamma$  um qualquer caminho de *Jordan* seccionalmente regular, positivamente orientado e tal que  $\text{cl } D(0,1) \subset \text{ins } \gamma$ . Calcule o integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz .$$

2. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto não vazio,  $w \in U$  e  $f \in \mathcal{H}(U)$ . Mostre sucessivamente que:

- i) a função  $f$  tem zero de ordem  $k \in \mathbb{N}_1$  sse  $f(w) = f'(w) = \dots = f^{(k-1)}(w) = 0$  e  $f^{(k)}(w) \neq 0$ ;
- ii) se  $p(z)$  é um polinómio então  $p(z) = (z-w)^k q(z)$ , aonde  $q(z)$  é polinómio tal que  $q(w) \neq 0$  sse  $p(w) = p'(w) = \dots = p^{(k-1)}(w) = 0$  e  $p^{(k)}(w) \neq 0$ .

3. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto não vazio e  $w \in U$ . Suponha que  $f \in \mathcal{H}(U_w)$  e justifique que:

- i) se existe  $k \in \mathbb{N}_1$  tal que

$$\lim_{z \rightarrow w} (z-w)^k f(z) = 0 ,$$

então  $w$  é um pólo da função  $f$  de ordem estritamente inferior a  $k$  ou  $w$  é uma singularidade removível;

- ii) se existe  $k \in \mathbb{N}_1$  tal que

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{1}{(z-w)^k} f(z) = 0$$

então  $w$  é um zero da função  $f$  com multiplicidade estritamente superior a  $k$ ;

4. Considere funções  $f$  e  $g$  analíticas em  $w \in \mathbb{C}$ . Mostre sucessivamente que:

- i) se  $f(w) \neq 0$  e  $w$  é um zero simples da função  $g$  então  $f/g$  tem um pólo simples em  $w$  e verifica-se

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}; w\right) = \frac{f(w)}{g'(w)} .$$

- ii) se  $f$  e  $g$  têm respectivamente zeros em  $w$  com multiplicidade  $k$  e  $k+1$  então  $f/g$  tem um pólo simples em  $w$  e verifica-se

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}; w\right) = (k+1) \frac{f^{(k)}(w)}{g^{(k+1)}(w)} .$$

5. Considere funções  $f$  e  $g$  analíticas em  $w \in \mathbb{C}$ . Mostre sucessivamente que:

- i) se  $f$  e  $g$  têm respectivamente um zero de ordem  $k+j$  e de ordem  $k$  em  $w$  então  $f/g$  tem um zero de ordem  $j$  em  $w$ , aonde  $k, j \in \mathbb{N}_1$ ;
- ii) se  $g$  e  $f$  têm respectivamente um zero de ordem  $k+j$  e de ordem  $k$  em  $w$  então  $f/g$  tem um pólo de ordem  $j$  em  $w$ , aonde  $k, j \in \mathbb{N}_1$ ;
- iii) se  $f$  e  $g$  têm zeros de ordem  $k$  em  $w$  então  $f/g$  têm uma singularidade removível em  $w$ , aonde  $k \in \mathbb{N}_1$ .

### 4.3 Integrais de variável real. Integrais impróprios

Na decorrente secção ir-se-á fornecer algumas aplicações do teorema dos resíduos ao cálculo de integrais impróprios de *Riemann*. Se  $I$  é um intervalo ilimitado de números reais da forma  $[a, +\infty[$  ou  $]-\infty, a]$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  é *Riemann* integrável em intervalos limitados contidos em  $I$ , então o integral impróprio de *Riemann* define-se respectivamente por intermédio do seguinte

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx := \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^a f(x) dx.$$

Ademais, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é *Riemann* integrável em intervalos limitados então  $f$  diz-se *Riemann* impropriamente integrável em  $\mathbb{R}$  sse  $f$  é *Riemann* impropriamente integrável em  $[0, +\infty[$  e em  $]-\infty, 0]$ . No caso anterior define-se o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

A linearidade do integral impróprio é evidente, i.e. sem dificuldades demonstra-se o seguinte resultado:

**Proposição 1** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo ilimitado fechado e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  funções integráveis em intervalos limitados de  $I$ . Então*

- i)  *$f$  é impropriamente integrável em  $I$  sse  $\lambda f$  é impropriamente integrável em  $I$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .*
- ii) *Se  $f$  e  $g$  são impropriamente integráveis em  $I$  então  $\lambda_1 f + \lambda_2 g$  é impropriamente integrável e*

$$\int_I \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) dx = \lambda_1 \int_I f(x) dx + \lambda_2 \int_I g(x) dx, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2.$$

É usual dizer que os integrais impróprios anteriores são integrais impróprios de 1.<sup>a</sup> espécie. Se  $f$  é impropriamente integrável em  $\mathbb{R}$  então é evidente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_r^{-r} f(x) dx. \quad (1)$$

No entanto, a existência do limite em (1) não garante a existência do integral impróprio de  $f$  em  $\mathbb{R}$ , e.g. seja  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Se o limite em (1) existe diz-se que é o **valor principal** de  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

Fixo  $I$  um intervalo ilimitado fechado e  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  *Riemann* integrável em intervalos limitados contidos em  $I$  então  $f$  diz-se **absolutamente integrável** em  $I$  se  $|f|$  é impropriamente integrável em  $I$ . Evitando demoras, menciona-se a possibilidade em enunciar resultados acerca integrais impróprios (absolutamente) convergentes análogos aos acerca de séries (absolutamente) convergentes. Exemplifica-se a asserção anterior por intermédio do seguinte resultado:

**Proposição 2** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo ilimitado fechado e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  funções integráveis em intervalos limitados inclusos em  $I$ . Então*

- i) *Se  $f$  é absolutamente integrável em  $I$  então  $f$  é impropriamente integrável em  $I$ ;*
- ii) *Suponha-se que existe  $R > 0$  tal que  $|x| > R$ ,  $x \in I \Rightarrow |f(x)| \leq |g(x)|$ . Se  $g$  é absolutamente integrável em  $I$  então necessariamente  $f$  é absolutamente integrável em  $I$ .*

**Demonstração:** Sem perder generalidade supomos  $I = [0, +\infty[$ . Sabemos que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r f(x) dx \text{ existe} \quad \text{sse} \quad \forall_{\delta > 0} \exists_{M > 0} r, s > M \Rightarrow \left| \int_s^r f(x) dx \right| < \delta. \quad (2)$$

Logo, tendo em linha de conta a desigualdade

$$\left| \int_s^r f(x) dx \right| \leq \int_s^r |f(x)| dx,$$

sem dificuldades terminamos a demonstração de *i*). Para *ii*) é suficiente considerar (2) e que

$$r > s > R \Rightarrow \int_s^r |f(x)| dx \leq \int_s^r |g(x)| dx.$$

■

**Proposição 3** *Sejam  $p(z)$  e  $q(z)$  polinómios e suponham-se verificadas as seguintes condições:*

- i)* o polinómio  $q(z)$  não tem zeros reais;
- ii)* grau  $q \geq$  grau  $p + 2$ .

Então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res} \left( \frac{p(z)}{q(z)}; z_j \right),$$

aonde  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  denota os zeros de  $q(z)$  no semi-plano superior.

**Demonstração:** Da condição *ii*) deduz-se sem dificuldades que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{p(z)z^2}{q(z)} \right| \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{e logo} \quad \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq M \frac{1}{1 + |z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

aonde  $M$  é uma constante positiva. Como  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow 1/(1+x^2)$  é impropriamente integrável em  $\mathbb{R}$  então também a função  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow p(x)/q(x)$  é impropriamente integrável em  $\mathbb{R}$ .

Considere-se o caminho de Jordan  $\Gamma_r$ ,  $r > 0$  percorrido no sentido positivo e resulto da concatenação do segmento de recta  $[-r, r]$  com o arco de circunferência  $\gamma_r$  dado por

$$\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \gamma_r(t) = re^{it}.$$

Trivialmente

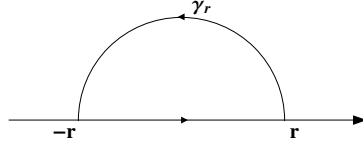
$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \int_{\gamma_r} \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| |dz| \leq \pi M \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

Para  $r > 0$  suficientemente grande verifica-se

$$2\pi i \sum_j \text{Res} \left( \frac{p(z)}{q(z)}; z_j \right) = \int_{\Gamma_r} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-r}^r \frac{p(x)}{q(x)} dx + \int_{\gamma_r} \frac{p(z)}{q(z)} dz \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

■



Figura 4.2: A curva  $\Gamma_r$ ,  $r > 0$  na demonstração da proposição 3

### Exemplos

1. A função racional  $f_n(z) = 1/(1 + z^{2n})$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  encontra-se nas condições da proposição 3. As singularidades de  $f_n$  são as soluções da equação  $z^{2n} = -1$ , i.e. são os seguintes números complexos

$$z_k = e^{i\pi(1+2k)/(2n)}, \quad k = 0, \dots, 2n-1.$$

Cada  $z_k$  é zero simples do polinómio  $z^{2n} + 1$ . Logo as singularidades de  $f_n$  são pólos simples e

$$\text{Res}(f_n; z_k) = \frac{1}{f'_n(z_k)} = \frac{1}{2nz_k^{2n-1}} = -\frac{z_k}{2n}, \quad k = 0, \dots, 2n-1 \quad (n \in \mathbb{N}_1).$$

É evidente que as singularidades de  $f_n$  no semi-plano superior são  $z_k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Deduz-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/(2n)} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n} = -\frac{\pi i}{n} \frac{1 - e^{i\pi}}{(e^{-i\pi/(2n)} - e^{i\pi/(2n)})} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}}.$$

□

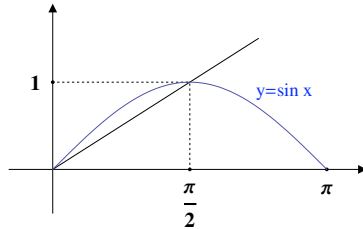
**Lema 4 (Jordan)** *Seja  $\gamma_r$ ,  $r > 0$  uma parametrização seccionalmente regular e simples do semi-arco de círculo  $\{z : |z| = r, \text{Im } z \geq 0\}$ . Então a seguinte desigualdade é válida*

$$\int_{\gamma_r} |e^{iaz}| |dz| \leq \frac{\pi}{a}, \quad (a > 0).$$

**Demonstração:** De acordo com a definição de integral e tendo em linha de conta a paridade da função seno relativamente ao eixo vertical  $\theta = \pi/2$ , i.e.  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$  obtém-se que

$$\int_{\gamma_r} |e^{iaz}| |dz| = \int_0^\pi e^{-ra \sin \theta} r d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ra \sin \theta} r d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2ra\theta/\pi} r d\theta = \frac{\pi}{a} (1 - e^{-ra}) \leq \frac{\pi}{a}.$$

■

Figura 4.3: A desigualdade  $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$

**Proposição 5** *Sejam  $p(z)$  e  $q(z)$  polinómios e suponham-se verificadas as seguintes condições:*

- i) o polinómios  $q(z)$  não tem zeros reais;*
- ii) grau  $q$  = grau  $p$  + 1;*

Então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res} \left( \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz}; z_j \right),$$

aonde  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  denota os zeros de  $q(z)$  no semi-plano superior.

**Demonstração:** Suponham-se fornecidos números positivos  $r$  e  $s$  verificando  $r > s > 0$ . Considere a concatenação  $\Gamma_{r,s} = [-s, r] \alpha_r [ir, is] \beta_s$ ,  $r > 0$  aonde

$$\begin{aligned} \alpha_r : [0, \pi/2] &\rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \alpha_r(t) = re^{it} \\ \beta_s : [\pi/2, \pi] &\rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \beta_s(t) = se^{it} \end{aligned}.$$

A condição ii) tanto considerações semelhantes às integrantes da demonstração da proposição 3, permitem inferir a existência de constantes  $M, R > 0$  verificando a seguinte asserção

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|}, \quad |z| > R. \quad (3)$$

O lema de *Jordan* e (3) permitem estabelecer que

$$\left| \int_{\alpha_r} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz \right| \leq \int_{\alpha_r} \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| |e^{iz}| |dz| \leq \pi \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{tanto} \quad \left| \int_{\beta_s} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz \right| \leq \pi \frac{M}{s} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0.$$

Acerca do integral em  $[ir, is]$ , para  $r$  e  $s$  superiores a determinado real positivo obtém-se o seguinte

$$\left| \int_{[ir, is]} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz \right| = \left| \int_s^r \frac{p(ix)}{q(ix)} e^{-x} dx \right| \leq M \int_s^r e^{-x} dx \xrightarrow{s, r \rightarrow +\infty} 0.$$

Consideram-se  $r$  e  $s$  superiores a determinado real positivo para das asserções anteriores deduzir que

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_j \operatorname{Res} \left( \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz}; z_j \right) &= \int_{\Gamma_{r,s}} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz = \int_{-s}^r \frac{p(x)}{q(x)} e^{ix} dx + \int_{\alpha_r} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz \\ &+ \int_{ir}^{is} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz + \int_{\beta_s} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz \xrightarrow{s, r \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ix} dx. \end{aligned}$$

■

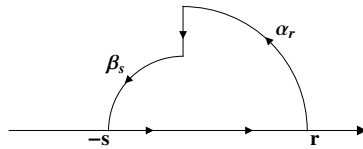


Figura 4.4: A curva  $\Gamma_{r,s}$ ,  $r, s > 0$  na demonstração da proposição 5

Demonstrar a existência do valor principal dos integrais na proposição anterior é consideravelmente mais simples do que assegurar a existência dos respectivos integrais impróprios.

## Exemplos

2. Tendo em linha de conta a paridade da função  $x \rightarrow \sin x/x$  justifica-se o seguinte

$$\lim_{r \rightarrow +\infty, \epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^r \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \text{existe sse existe} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty, \epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^r + \int_{-r}^{-\epsilon} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Porque

$$\int_{\epsilon}^r \frac{\sin(x)}{x} dx = \operatorname{Im} \int_{\epsilon}^r \frac{e^{ix}}{x} dx, \quad \epsilon, r > 0$$

então é suficiente analisar os integrais da função com valores complexos  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow e^{ix}/x$ . Considere-se a curva de *Jordan*  $\Gamma_{r,\epsilon} = [-r, -\epsilon] \gamma_{\epsilon}^{-} [\epsilon, r] \gamma_r$ ,  $r, \epsilon > 0$  percorrida no sentido positivo, aonde

$$\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \gamma_r(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (r > 0).$$

Da holomorfia da função  $z \rightarrow e^{iz}/z$  no semi-plano superior deduz-se que

$$\int_{\Gamma_{r,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0, \quad r, \epsilon > 0. \quad (4)$$

Em relação ao integral de linha na curva  $\gamma_{\epsilon}$  obtemos

$$\left| \int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz - i\pi \right| = \left| \int_0^{\pi} (e^{i\gamma_{\epsilon}(\theta)} - 1) d\theta \right| \leq \pi \sup_{|\xi|=\epsilon} |e^{i\xi} - 1| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0. \quad (5)$$

Do lema de *Jordan* deduz-se que

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{1}{r} \int_{\gamma_r} |e^{iz}| |dz| \leq \frac{\pi}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0. \quad (6)$$

De (4), (5) e (6) obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \operatorname{Im} \lim_{r \rightarrow +\infty, \epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^r + \int_{-r}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi \quad \text{e logo} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

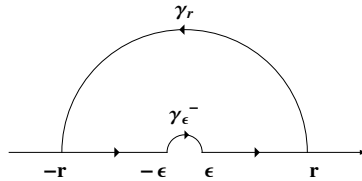


Figura 4.5: A curva  $\Gamma_{r,\epsilon}$ ,  $\epsilon, r > 0$

3. [Fresnel] A seguinte igualdade é evidente

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^n) dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{ix^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}_2. \quad (7)$$

Considere-se a curva de *Jordan*  $\Gamma_r = [0, r] \gamma_r [re^{i\epsilon}, 0]$  percorrida no sentido positivo, aonde

$$\gamma_r : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \gamma_r(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \epsilon \quad (r > 0) \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{\pi}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}_2).$$

O caminho  $\alpha(t) = tre^{i\epsilon}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  parametriza o segmento  $[0, re^{i\epsilon}]$  e verifica  $\alpha^n(t) = i(tr)^n$ . Logo

$$\int_0^{re^{i\epsilon}} e^{iz^n} dz = re^{i\epsilon} \int_0^1 e^{-(tr)^n} dt = e^{i\epsilon} \int_0^r e^{-x^n} dx \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} e^{i\epsilon} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}_2.$$

O caminho  $\gamma_r^n(t) = r^n e^{int}$ ,  $0 \leq t \leq \epsilon$  parametriza a intercepção do círculo de raio  $r^n$  com o primeiro quadrante. Assim, considerando o lema de *Jordan* deduz-se o seguinte

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{iz^n} dz \right| = \left| \int_0^\epsilon e^{i\gamma_r^n(t)} r e^{it} dt \right| \leq \frac{1}{nr^{n-1}} \int_{\gamma_r^n} |e^{iz}| |dz| \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0, \quad n \in \mathbb{N}_2.$$

Consequentemente, para  $n \in \mathbb{N}_2$  obtemos

$$0 = \int_{\Gamma_r} e^{iz} dz = \int_0^r e^{ix^n} dx + \int_{\gamma_r} e^{iz^n} dz - \int_0^{re^{i\epsilon}} e^{iz^n} dz \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{ix^n} dx - e^{i\pi/(2n)} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx.$$

Em particular

$$\int_0^{+\infty} \sin x^n dx = \sin \frac{\pi}{2n} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

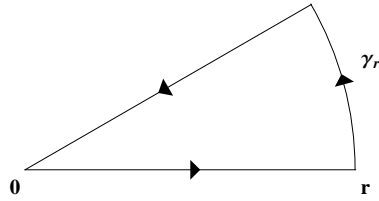


Figura 4.6: A curva  $\Gamma_r$ ,  $r > 0$

□

O teorema dos resíduos também pode ser utilizado para calcular integrais de variável real. Por exemplo, se  $f$  é uma função meromorfa então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) d\theta = -i \int_{|z|=1} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{z} dz.$$

## Exemplos

4. Pretendemos calcular os integrais

$$\int_0^{\pi} \cos^n(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da paridade das funções trigonométricas deduz-se que

$$\int_0^{\pi} \cos^n(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(\theta) d\theta = 0, \quad \text{se } n \text{ é ímpar.}$$

Para determinar os integrais das potências pares de  $\cos \theta$  considerem-se as seguintes igualdades

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{1}{4^n} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{2n} d\theta = \frac{1}{i4^n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{i2\theta} + 1)^{2n}}{e^{i(2n+1)\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{i4^n} \int_{|z|=1} \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz.$$

Em consequência, do teorema dos resíduos deduz-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{4^n} \operatorname{Res} \left( \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}}; 0 \right) = \frac{2\pi}{4^n (2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} [z^2 + 1]_{z=0}^{2n}.$$

O binómio de Newton permite estabelecer sem dificuldades que

$$(z^2 + 1)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} z^{2j} \quad \text{e logo} \quad \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} [z^2 + 1]_{z=0}^{2n} = \binom{2n}{n} (2n)!,$$

de onde terminamos da seguinte forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

### 4.3 Problemas

1.

a) Calcule os seguintes integrais impróprios de Riemann:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4i} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx; \quad \text{iii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 16} dx; \\ \text{iv)} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx; \quad \text{v)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)^2} dx; \quad \text{vi)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)(1 + x^2)} dx; \\ \text{vii)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx; \quad \text{viii)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx. \end{aligned}$$

b) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

2. Aplique uma mudança de variável adequada para verificar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3.

a) Aplique o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{2 + \cos x} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx; \quad \text{iii)} \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin(2x)}{2 + \cos x} dx; \\ \text{iv)} \quad & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + e^{-ix}z}{1 - e^{-ix}z} dx, \quad |z| < 1; \quad \text{v)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + e^{-ix}z}{(1 - e^{-ix}z)^2} dx, \quad |z| < 1; \quad \text{vi)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

b) Mostre que

$$\text{i)} \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha + \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad \alpha > 1; \quad \text{ii)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + e^{-ix}z}{(1 - e^{-ix}z)^{n+1}} dx = 2\pi, \quad |z| < 1, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

## 4.4 Transformada de Laplace

Para cada real  $\alpha$  define-se a classe  $\mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$  de funções  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$  verificando a seguinte condição

$$f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+) \quad \text{sse} \quad \forall_{\epsilon > 0} \exists_{M > 0} \left| e^{-(\alpha+\epsilon)t} f(t) \right| \leq M \quad (t \geq 0).$$

Considera-se evidente a seguinte asserção

$$f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+) \quad \Rightarrow \quad \forall_{\epsilon > 0} f(t)e^{-(\alpha+\epsilon)t} \quad \text{é absolutamente integrável em } [0, +\infty]. \quad (1)$$

O leitor poderá sem dificuldades demonstrar a proposição abaixo:

**Proposição 1** *Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  a classe de funções  $\mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$  é um espaço vectorial verificando as seguintes propriedades:*

- i)  $\alpha < \beta \Rightarrow \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+) \subset \mathcal{E}(\beta; \mathbb{R}^+)$ ;
- ii)  $\mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)\mathcal{E}(\beta; \mathbb{R}^+) = \mathcal{E}(\alpha + \beta; \mathbb{R}^+)$ ;
- iii) Se  $p(t)$  é polinómio então  $p \in \mathcal{E}(0; \mathbb{R}^+)$ .

Fixada uma função  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  define-se a **transformada de Laplace**

$$\mathcal{L}[f](z) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt, \quad (2)$$

para  $z \in \mathbb{C}$  tal que o integral impróprio em (2) é convergente. Se  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  então

$$|f(t) e^{-zt}| = |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} \leq |f(t) e^{-(\alpha+\epsilon)t}|, \quad \operatorname{Re} z > \alpha + \epsilon.$$

Logo, da arbitrariedade de  $\epsilon > 0$  em (1) deduz-se a boa definição de  $\mathcal{L}[f](z)$  no semi-plano direito

$$X_\alpha := \{z : \operatorname{Re} z > \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

### Exemplos

1. A função  $f(t) = e^{\xi t}$ ,  $t \in \mathbb{R}_0^+$  é elemento da classe  $\mathcal{E}(\operatorname{Re} \xi; \mathbb{R}^+)$ . A sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{(\xi-z)t} dt = \frac{1}{z - \xi}, \quad \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \xi.$$

Logo

$$\mathcal{L}[\cos](z) = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{it}](z) + \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-it}](z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

tanto

$$\mathcal{L}[\sin](z) = \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{it}](z) - \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{-it}](z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

□

Na seguinte proposição demonstra-se a possibilidade em comutar as operações de derivação e integração na definição de transformada de *Laplace*. Poder-se-ia assumir uma perspectiva de demonstração genérica e baseada na derivação de integrais impróprios paramétricos. Não obstante opta-se por fazer uso de técnicas ‘mais próximas’ dos resultados de análise complexa acima introduzidos.

**Proposição 2** Se  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  então  $\mathcal{L}[f] \in \mathcal{H}(X_\alpha)$  e verifica-se a seguinte regra de derivação

$$\frac{d}{dz} \mathcal{L}[f](z) = -\mathcal{L}[tf](z), \quad \operatorname{Re} z > \alpha.$$

**Demonstração:** Seja  $\epsilon > 0$  e considere-se  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re} z > \alpha + 2\epsilon$ . Como  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$  então  $|f(t)e^{-zt}| \leq Me^{-\epsilon t}$ ,  $t \geq 0$  e em consequência

$$\left| \int_r^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt \right| \leq M \int_r^{+\infty} e^{-\epsilon t} dt = M \frac{e^{-\epsilon r}}{\epsilon} \quad \text{se } \operatorname{Re} z > \alpha + 2\epsilon.$$

Assim fixado arbitrariamente  $\delta > 0$  deduz-se a existência de  $r > 0$  verificando

$$\left| \mathcal{L}[f](z) - \int_0^r f(t)e^{-zt} dt \right| < \delta \quad \text{para qualquer } \operatorname{Re} z > \alpha + 2\epsilon.$$

Sejam  $z, \xi \in \mathbb{C}$  tais que  $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} \xi > \alpha + 2\epsilon$ . Tendo em linha de contas as seguintes desigualdades

$$|\mathcal{L}[f](\xi) - \mathcal{L}[f](z)| \leq \left| \int_0^r f(t)[e^{-\xi t} - e^{-zt}] dt \right| + 2\delta \leq M \int_0^r |e^{-\xi t} - e^{-zt}| dt + 2\delta \xrightarrow{\xi \rightarrow z} 2\delta,$$

e a arbitrariedade de  $\delta > 0$  e de  $\epsilon > 0$ , obtém-se a continuidade da transformada de *Laplace* em  $X_\alpha$ . Segue a verificação de  $\mathcal{L}[f] \in \mathcal{H}(X_{\alpha+2\epsilon})$ . Seja  $\gamma$  uma curva de Jordan seccionalmente regular tal que  $C^\gamma \subset X_{\alpha+2\epsilon}$ . Considerando o teorema de *Fubini* para integrais de *Riemann* infere-se

$$\left| \int_\gamma \mathcal{L}[f](\xi) d\xi \right| \leq \left| \int_\gamma \int_0^r f(t)e^{-\xi t} dt d\xi \right| + \delta|\gamma| = \left| \int_0^r f(t) \int_\gamma e^{-\xi t} d\xi dt \right| + \delta|\gamma| = \delta|\gamma| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0.$$

Logo são nulos os integrais de  $\mathcal{L}[f]$  em caminhos de *Jordan* seccionalmente regulares. Do teorema de *Morera* conclui-se que  $\mathcal{L}[f] \in \mathcal{H}(X_{\alpha+2\epsilon})$  e da arbitrariedade de  $\epsilon > 0$  conclui-se  $\mathcal{L}[f] \in \mathcal{H}(X_\alpha)$ . Se  $f(t) \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$  então  $tf(t) \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ . Logo existe  $r > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}[tf](z) - \int_0^r tf(t)e^{-zt} dt \right| &\leq \delta \\ \left| \mathcal{L}[f](z) - \int_0^r f(t)e^{-zt} dt \right| &\leq \delta \end{aligned} \quad \text{para qualquer } \operatorname{Re} z \geq \alpha + 2\epsilon.$$

Fixe-se  $z$  tal que  $\operatorname{Re} z > \alpha + 2\epsilon$  e  $\gamma$  um caminho de *Jordan* tal que  $z \in \operatorname{ins} \gamma \subset X_{\alpha+2\epsilon}$ . Então

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}[tf](z) + \frac{d}{dz} \mathcal{L}[f](z) \right| &= \left| \mathcal{L}[tf](z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathcal{L}[f](\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &\leq \left| \mathcal{L}[tf](z) + \int_0^r f(t) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-\xi t}}{(\xi - z)^2} d\xi dt \right| + \delta C \\ &= \left| \mathcal{L}[tf](z) - \int_0^r tf(t)e^{-zt} dt \right| + \delta C \\ &\leq \delta(C + 1) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0, \end{aligned}$$

aonde  $C = |\gamma|/(2\pi \operatorname{dist}^2(z, \gamma))$ . ■

## Exemplos

2. Define-se a função de *Heaviside*  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por intermédio do seguinte

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

Então

$$\mathcal{L}[H](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Considere-se um conjunto não vazio  $\Omega \subset \mathbb{C}$  e uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . *Identificamos* a função  $f$  com a sua extensão por zero ao plano complexo, i.e

$$f(x) \equiv \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \Omega \\ 0 & , \quad c.c. \end{cases}.$$

Desta forma é possível definir a translação de  $f$  por intermédio do seguinte

$$f_\tau(x) = f(x - \tau) = \begin{cases} f(x - \tau) & , \quad x - \tau \in \Omega \\ 0 & , \quad c.c. \end{cases} \quad \text{aonde } \tau \in \mathbb{C}.$$

Então

$$\mathcal{L}[H_\tau](z) = \begin{cases} \int_\tau^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{e^{-z\tau}}{z} & , \quad \tau \geq 0 \\ \mathcal{L}[H](z) = \frac{1}{z} & , \quad \tau < 0 \end{cases} \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

3. De acordo com a proposição 2 obtemos

$$\mathcal{L}[t^n](z) = -\frac{d}{dz} \mathcal{L}[t^{n-1}](z) = \dots = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{L}[H](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Da mesma forma

$$\mathcal{L}[t^n e^{\xi t}](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{L}[e^{\xi t}](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{z - \xi} = \frac{n!}{(z - \xi)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \xi.$$

□

**Proposição 3** *A transformada de Laplace verifica as seguintes propriedades:*

- i)  $\mathcal{L}[f_\tau](z) = e^{-\tau z} \mathcal{L}[H_{-\tau} f](z)$ , aonde  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $\mathcal{L}[e^{\tau t} f](z) = \mathcal{L}[f](z - \tau)$ , aonde  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $\mathcal{L}[f'](z) = z \mathcal{L}[f](z) - f(0)$ , aonde  $f' \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ ;
- iv)  $\mathcal{L}[g](z) = \lambda^{-1} \mathcal{L}[f](z/\lambda)$ , aonde  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$  e  $g(t) = f(\lambda t)$ ,  $t \geq 0$ .



**Demonstração:** *iii)* Supomos  $\alpha \geq 0$  e abandonamos o caso  $\alpha < 0$  ao cuidado do leitor. Se  $f' \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$  então

$$\begin{aligned} \left| f(t)e^{-(\alpha+2\epsilon)t} \right| &= \left| \int_0^t f'(s) ds + f(0) \right| e^{-(\alpha+2\epsilon)t} \leq M \left| \int_0^t f'(s)e^{-(\alpha+\epsilon)s} ds \right| e^{-(\alpha+\epsilon)t} \\ &\leq Mte^{-(\alpha+\epsilon)t} \leq M, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, da arbitrariedade de  $\epsilon > 0$  deduz-se que  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ . Ademais

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](z) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r f'(t)e^{-zt} dt = \lim_{r \rightarrow +\infty} [f(r)e^{-rt} - f(0)] + z \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r f(t)e^{-zt} dt \\ &= z\mathcal{L}[f](z) - f(0). \end{aligned}$$

As demonstrações de *i)*, *ii)* e *iv)* envolvem manipulações elementares do conceito de integral e são abandonamos ao cuidado do leitor. ■

**Proposição 4 (Inversão)** *Suponha-se fixa uma função  $F$  analítica em  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e com um número finito de singularidades em  $\mathbb{C}$ . Suponha-se adicionalmente que para alguma constante  $c > 0$  verifica-se*

$$\exists_{r>0} |z| > r \Rightarrow |F(z)| \leq |z|^{-c}, \quad (c > 0).$$

Então, em algum semi-plano direito verifica-se

$$\mathcal{L}[f](z) = F(z) \quad \text{aonde} \quad f(t) = \sum_j \text{Res}(F(z)e^{zt}; z_j).$$

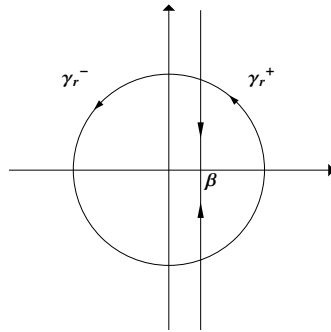


Figura 4.7: As curvas  $\gamma_r^\pm$ ,  $r > 0$

**Demonstração:** Fixo um número real  $\beta$  tal que  $\beta > \alpha$ , considerem-se parametrizações das curvas

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\gamma_r^+} &= \left( \partial D(0, r) \cap X_\beta \right) \cup \left( \text{cl } D(0, r) \cap [\beta + ir, \beta - ir] \right), \\ \mathcal{C}^{\gamma_r^-} &= \left( \partial D(0, r) \setminus X_\beta \right) \cup \left( \text{cl } D(0, r) \cap [\beta + ir, \beta - ir] \right). \end{aligned}$$

Caso  $r$  seja superior a determinado número real positivo  $\nu$ , então as singularidades de  $F$  são elementos do conjunto  $\text{ins } \gamma_r^-$ . Desta forma, a função  $f(t)$  definida no enunciado é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^-} F(z) e^{zt} dz, \quad r \geq \nu.$$

Verifica-se de seguida que  $f \in \mathcal{E}(\nu; \mathbb{R}^+)$ . Porque a função  $z \rightarrow F(z)e^{zt}$  é holomorfa em  $X_\alpha$  então

$$|f(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\nu^-} F(z) e^{zt} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\nu^-} + \int_{\gamma_\nu^+} F(z) e^{zt} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=\nu} F(z) e^{zt} dz \right| \leq \frac{e^{t\nu}}{\nu^{c-1}}.$$

De novo, a holomorfia da função  $z \rightarrow F(z)e^{zt}$  em  $X_\alpha$  permite estabelecer que

$$\int_{\gamma_r^-} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{|z|=r} - \int_{\gamma_r^+} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{|z|=r} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2\pi i F(z). \quad (3)$$

O decaimento da função  $F$  e propriedades da função exponencial estabelecem as desigualdades

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=r} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| &\leq \int_{|z|=r} \left| \frac{F(\xi)}{\xi - z} \right| |d\xi| \leq \frac{2\pi r}{r^c(r - |z|)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \\ &\quad , \quad z \in X_\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\left| \int_{\gamma_r^-} \frac{F(\xi) e^{(\xi-z)\rho}}{\xi - z} d\xi \right| \leq e^{(\alpha - \text{Re } z)\rho} \int_{\gamma_r^-} \left| \frac{F(\xi)}{\xi - z} \right| |d\xi| \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0$$

Finalmente, de (3) e (4) deduz-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](z) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_0^\rho e^{-zt} \int_{\gamma_r^-} F(\xi) e^{\xi t} d\xi dt = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r^-} F(\xi) \int_0^\rho e^{(\xi-z)t} dt d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\gamma_r^-} \frac{F(\xi) e^{(\xi-z)\rho}}{\xi - z} d\xi \right] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^-} \frac{F(\xi)}{\xi - z} dt d\xi \\ &= F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{F(\xi)}{\xi - z} dt d\xi \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} F(z), \quad z \in X_\nu. \end{aligned}$$

■

## 4.4 Problemas

1. Demonstre a proposição 1.

2. Seja  $g \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ ,  $\alpha > 0$  e considere a função  $f(t) = \int_0^t g(s) ds$ . Mostre que:

$$f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[f](z) = \frac{\mathcal{L}[g](z)}{z}, \quad \text{Re } z > \alpha.$$

3. Considere  $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ ,  $\alpha > 0$  e demonstre que:

- i)  $\mathcal{L}[\overline{f}](z) = \overline{\mathcal{L}[f](\bar{z})}$ ,  $\text{Re } z > \alpha$ ;
- ii)  $\mathcal{L}[\text{Re } f] = \text{Re } \mathcal{L}[f]$  ou  $\mathcal{L}[\text{Im } f] = \text{Im } \mathcal{L}[f]$  sse  $\mathcal{L}[f] = 0$ .

4. Verifique que se  $p(t)$  é um polinómio então  $\mathcal{L}[p]$  é uma função racional.

5. Calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} & \cosh t; & \text{ii)} & \sinh t; \quad \text{iii)} \quad t \sin t; \quad \text{iv)} \quad t \cosh t; \\ \text{v)} & e^t \cos t; & \text{vi)} & \cos^2 t; \quad \text{vii)} \quad t^2 \cos^2 t; \quad \text{viii)} \quad t^2 + 1. \end{array}$$

6. Encontre funções de variável real  $f$  tais que  $\mathcal{L}[f] = F$ , aonde  $F(z)$  são as funções meromorfas indicadas em cada uma das seguintes alíneas:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{z^2 + 4}; \quad \text{ii)} \quad \frac{e^{-z}}{z^2 + 4}; \quad \text{iii)} \quad \frac{1}{1 + z + z^2 + z^3}; \quad \text{iv)} \quad \frac{e^{2z}}{z^2 - 5z + 6}.$$

7. Encontre funções regulares de variável real  $f$  que verificam as seguintes condições:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & f'(t) - f(t) = \sin t \quad ; \quad f(0) = 0; \\ \text{ii)} & f''(t) - f(t) = 0 \quad ; \quad f(0) = e^2 + 1, \quad f'(0) = 1 - e^2; \\ \text{iii)} & f''(t) - f(t) = e^t \quad ; \quad f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \\ \text{iv)} & f''(t) - f'(t) - 2f(t) = 0 \quad ; \quad f(0) = 0; \quad f'(0) = 1. \end{array}$$



## Capítulo 5

# Exemplos de Resoluções e Sugestões

[sec. 1.1]

1.vii), viii) Sem dificuldades obtém-se

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2+z-\bar{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + 2i \frac{z-\bar{z}}{2i} \frac{1}{|1-z|^2}.$$

Porque  $1-|z|^2$ ,  $|1-z|^2$  e  $(z-\bar{z})/(2i)$  são números reais, então infere-se

$$\operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \frac{1+z}{1-z} = 2 \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}, \quad z \neq 1.$$

3.iv) Do problema 1.viii) obtém-se

$$2|\operatorname{Im} z| = |1-z|^2 \left| \operatorname{Im} \frac{1+z}{1-z} \right| \leq |1-z|^2 \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = |1-z^2|.$$

3.v) Da alínea anterior, deduz-se de imediato que

$$2|\operatorname{Re} z| = 2|\operatorname{Im} iz| \leq |1-(iz)^2| = |1+z^2|.$$

3.vi) Das duas alíneas imediatamente anteriores infere-se

$$2|z| \leq 2|\operatorname{Re} z| + 2|\operatorname{Im} z| \leq |1-z^2| + |1+z^2|.$$

[sec. 1.2]

1.v) Tendo em conta as fórmulas de Euler e  $E(ix) E(iy) = E(i(x+y))$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  obtém-se

$$2 \cos\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) E\left(i\frac{\theta+\varphi}{2}\right) = \left[ E\left(i\frac{\varphi-\theta}{2}\right) + E\left(i\frac{\theta-\varphi}{2}\right) \right] E\left(i\frac{\theta+\varphi}{2}\right) = E(i\varphi) + E(i\theta).$$

1.vi) Sem dificuldades obtém-se

$$|z - E(i\theta)| = |E(i\theta)(E(-i\theta)z - 1)| = |E(-i\theta)z - 1| = |1 - \bar{z}E(i\theta)|.$$

3.i) É obvio que

$$\sum_{j=0}^n \frac{E(-ij\theta)}{1 - E(i\theta)} + \sum_{j=0}^n \frac{E(ij\theta)}{1 - E(-i\theta)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=0}^n \frac{E(-ij\theta)}{1 - E(i\theta)}.$$

Computações elementares estabelecem

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \frac{E(-ij\theta)}{1 - E(i\theta)} &= \frac{1}{1 - E(i\theta)} \sum_{j=0}^n E(-ij\theta) = \frac{1}{1 - E(i\theta)} \sum_{j=0}^n E^j(-i\theta) = \frac{1}{1 - E(i\theta)} \frac{1 - E(-(n+1)\theta)}{1 - E(-i\theta)} \\ &= E(i\frac{n+1}{2}\theta) \frac{E(-i\frac{n+1}{2}\theta) - E(i\frac{n+1}{2}\theta)}{|1 - E(-i\theta)|^2} = -i E(i\frac{n+1}{2}\theta) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{2 \sin^2(\frac{\theta}{2})}. \end{aligned}$$

Logo

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=0}^n \frac{E(-ij\theta)}{1 - E(i\theta)} = \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} = \left[ \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right]^2.$$

5.iv) É suficiente considerar as seguintes computações

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^{n+2j}}{(1-i)^n} &= \frac{(1+i)^{2(n+2j)}}{|1+i|^{n+2j}} (1-i)^{2j} = \frac{2^{n+2j} i^{n+2j}}{|1+i|^{n+2j}} (1-i)^{2j} = 2^{(n+2j)/2} i^{n+2j} (1-i)^{2j} \\ &= (-1)^j 2^{n/2+2j} i^{n+3j}, \quad n, j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

[sec. 1.3]

3. Defina-se  $p_n(z) = 1 + z \cdots + z^n$ . Da igualdade

$$(1-z)(1+z \cdots + z^n) = 1 - z^{n+1}, \quad z \neq 1,$$

deduz-se que os zeros do polinómio  $p_n(z)$ , são raízes de ordem  $n+1$  da unidade. Sabemos que as raízes da unidade de ordem  $n+1$  constituem um subconjunto de  $\mathbb{T} := \partial D(0, 1)$ . Como  $\mathbb{T} \cap \mathbb{R} = \{1, -1\}$  e  $p_n(1) = n \neq 0$ , então  $z = -1$  é a única possível raiz real de  $p_n$ , e os zeros de  $p_n$  são as raízes da unidade de ordem  $n+1$ , exceptuando  $z = 1$ . Em particular todos os zeros são simples. Poder-se-á verificar directamente que  $z = -1$  é raiz de  $p_n$  sse  $n$  é ímpar. Alternativamente, como  $p_n$  têm coeficientes reais então existe um número par de raízes não reais. Se  $n$  é par e existem raízes reais, então necessariamente são em número par. Logo, se  $n$  é par não existem raízes reais. Se  $n$  é ímpar, então as raízes reais são em número ímpar e logo  $z = -1$  é a única raiz real. Finalmente, os zeros de  $p_n$  são dados por

$$p_n(z) = 0 \quad \text{sse} \quad z = E(ik2\pi/(n+1)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Defina-se  $z_k = E(i2\pi k/(n+1))$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Como o polinómio  $p_n(z)$  tem coeficientes reais, então  $\bar{z}_k$  é raiz de  $p_n$ . Terminamos a resolução considerando sucessivamente que

$$z_k = \cos\left(k \frac{2\pi}{n+1}\right) + i \sin\left(k \frac{2\pi}{n+1}\right)$$

e que

$$(z - z_k)(z - \bar{z}_k) = \left[ z - \cos\left(k \frac{2\pi}{n+1}\right) \right]^2 + \sin^2\left(k \frac{2\pi}{n+1}\right) = z^2 - 2 \cos\left(k \frac{2\pi}{n+1}\right) + 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

6. Reduza ao mesmo denominador e aplique o bem conhecido binómio de *Newton*.

#### [sec. 1.4]

1.vii) Poder-lhe-á ser útil considerar a alínea xii) do problema [1 sec.1.1].

4.i), ii), iii) O vector  $\xi - \eta$  inclui-se na recta  $R_{\xi, \eta}$  transladada para a origem. Se  $0 \neq t \in \mathbb{R}$  então  $\xi - \eta$  e  $i(\xi - \eta)t$  são vectores perpendiculares. Assim, se  $i(\xi - \eta)t \in R_{\xi, \eta}$  então  $\text{dist}(R_{\xi, \eta}, 0) = |i(\xi - \eta)t|$ . Considerando que

$$\text{Im} \left[ \frac{i(\xi - \eta)t - \eta}{\xi - \eta} \right] = t - \text{Im} \frac{\eta}{\xi - \eta} \quad \text{e} \quad i(\xi - \eta) \text{Im} \frac{\eta}{\xi - \eta} = i \frac{\text{Im}(\eta \bar{\xi})}{\bar{\xi} - \bar{\eta}},$$

o leitor não encontrará dificuldades em terminar a resolução.

5.i), ii) Considere a evidente proposição  $\text{Re}(az) = 1 \Leftrightarrow \text{Im}[ia(z - 1/a)] = 0$ . Resolva  $\eta = 1/a$  e  $\xi - \eta = i/a$ . Para a alínea ii) considere a alínea ii) do problema [3 sec.1.4] e sem dificuldades obtenha que  $z \in R_{\xi, \eta}$  sse

$$\text{Im}[(\bar{\xi} - \bar{\eta})z] = \text{Im}(\eta \bar{\xi}) \Leftrightarrow \text{Re} \left[ \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{i \text{Im}(\eta \bar{\xi})} z \right] = 1.$$

Observe que a desigualdade  $\text{Im}(\eta \bar{\xi}) \neq 0$  é consequência de  $0 \notin R_{\xi, \eta}$ .

8. É evidente a seguinte igualdade  $\alpha_{\xi, \eta}(z) = \alpha_{\xi - \eta}(z - \eta) + \eta$ . Termine considerando o problema [7 sec.1.4].

11.iii) Suponha que  $\lim_n z^n = a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) e  $z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Das hipóteses deduz-se que  $\theta \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Das formulas trigonométricas do dobro deduz-se  $b = 2ba$  e  $2a^2 - a - 1 = 0$ . Então  $b = 0$ . No entanto, se  $\lim \sin(n\theta) = 0$  então aplique a igualdade  $\sin(n\theta) = \sin(n-1)\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta \sin \theta$  para concluir que  $\lim \cos(n\theta) = 0$ . Da fórmula fundamental da trigonometria deduza um absurdo. Também é possível mostrar que se  $z = E(i\theta)$ ,  $\theta/\pi = p/q$  aonde  $p, q$  são naturais positivos irredutíveis entre si, então a sucessão  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  têm  $2q$  sublimites distintos. Mais exigente é verificar que se  $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$  então qualquer complexo unitário é sublimite da sucessão  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

#### [sec. 1.5]

2. a)i). Sabemos  $T(0) = \infty$ . Como  $T(C)$  é círculo no plano compactificado e inclui o ponto infinito então  $T(C)$  é uma recta no plano compactificado. Os complexos  $z + iz$  e  $z - iz$  incluem-se em  $C$ . Logo  $T(C)$  é a recta que inclui os pontos  $T((1+i)z) = (1-i)/(2z)$  e  $T((1-i)z) = (1+i)/(2z)$ .

a)ii) Como  $0 \notin C$  então  $\infty \notin T(C)$ . Logo  $T(C)$  é um círculo em  $\mathbb{C}$ . O segmento de recta entre os complexos  $\xi_1 := z(1 + ir/|z|)$  e  $\xi_2 := z(1 - ir/|z|)$  é um diâmetro de  $C$ . Logo  $[T(\xi_1), T(\xi_2)]$  é um diâmetro de  $T(C)$ . Assim  $T(C) = \partial D(w, \delta)$  aonde

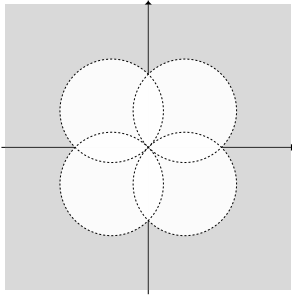
$$w = \frac{T(\xi_1) + T(\xi_2)}{2} \quad \text{e} \quad \delta = \left| \frac{T(\xi_1) - T(\xi_2)}{2} \right|.$$

b)i) De  $0 \in C$  deduz-se  $\infty \in T(C)$ . Em consequência  $T(C)$  é uma recta em  $\mathbb{C}$ , aonde são inclusos os pontos

$1/\xi = \bar{\xi}/|\xi|^2$ ,  $1/\eta = \bar{\eta}/|\eta|^2$  e a origem. O resultado deduz-se de imediato.

b)ii) Como  $0 \notin C$  então  $\infty \notin T(C)$  e  $T(C)$  é um círculo em  $\mathbb{C}$ . Do problema 4 sabemos que o ponto de  $R_{\xi,\eta}$  a distância mínima da origem é  $\xi := i\text{Im}(\eta\bar{\xi})/(\bar{\xi} - \bar{\eta})$ . Logo  $T(C)$  é um círculo em  $\mathbb{C}$ , cujo ponto com distância máxima à origem é  $1/\xi$ . Conclui-se  $T(C) = \partial D(w, \delta)$  aonde  $w = 1/(2\xi)$  e  $\delta = |w|$ .

4.



Considere-se a região  $A = \{x + iy : y < x + 1; x, y \in \mathbb{R}\}$ . O conjunto  $\Omega$  consiste na intercepção de  $A$  com as regiões obtidas da rotação de  $A$  por  $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ , i.e.  $\Omega = A \cap (iA) \cap (-A) \cap (-iA)$ . Em conta de  $T(i) = -i$  deduz-se  $T(\Omega) = T(A) \cap [iT(A)] \cap [-T(A)] \cap [-iT(A)]$ . Desta forma é suficiente considerar  $T(A)$ . O complexo  $\xi := (1+i)/2$  é o ponto da recta de equação Euclidiana  $y = x + 1$  “mais próximo” da origem. Logo, a imagem da recta  $y = x + 1$  por  $T(z)$  é a circunferência de centro em  $T(\xi)/2 = (1-i)/2$  e raio  $|T(\xi)/2| = \sqrt{2}/2$ . Como  $T(0) = \infty$  então  $T(A)$  corresponde ao “exterior” de  $\partial D((1-i)/2, \sqrt{2}/2)$ . Logo  $T(\Omega)$  coincide com a região  $T(A)$  interceptada com as suas rotações sucessivas de ângulo  $\pi/2$ .

5. Se  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$  aonde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  então é evidente que  $T(\dot{\mathbb{R}}) = \dot{\mathbb{R}}$ . Da seguinte igualdade

$$\text{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \text{Im} z \quad (1)$$

deduz-se que  $T(\Pi) = \Pi$  sse  $ad - bc > 0$ . Inversamente, suponha-se fornecida uma transformação linear fraccionária  $T(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$  tal que  $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Então necessariamente  $T(\dot{\mathbb{R}}) = \dot{\mathbb{R}}$ . O caso  $\gamma = 0$  é elementar. Supõe-se  $\gamma \neq 0$ . Então  $T(-\delta/\gamma) = \infty, T(\infty) = \alpha/\gamma$  e  $T(0) = \beta/\gamma$ . Logo  $\delta/\gamma, \alpha/\gamma, \beta/\gamma \in \mathbb{R}$  e

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{aonde} \quad a := \alpha/\gamma, \quad b := \beta/\gamma, \quad c := 1 \quad \text{e} \quad d := \delta/\gamma.$$

Considerando (1) a resolução termina sem dificuldades.

7.i), ii), iii) A linear fraccionária  $ST^{-1}$  transforma o eixo real compactificado a um ponto em si próprio. Considerando o problema 5 deduz-se  $ST^{-1}(\bar{w}) = \overline{ST^{-1}(w)}$ . Substituindo na igualdade anterior  $w = T(z)$  e multiplicando ambos os membros por  $S^{-1}$  obtém-se  $T^{-1}(\overline{T(z)}) = S^{-1}(\overline{S(z)})$ . Para a alínea ii) é suficiente considerar  $T(z) = (z - \eta)/(\xi - \eta)$  e aplicar a definição em i). Para a alínea iii) considere o exemplo [2 sec. 1.5].

## [sec. 2.1]

1.ii) Poder-lhe-á ser útil considerar o critério da razão.

1.iii) A seguinte igualdade  $\sqrt{n^j + 1} - \sqrt{n^j} = 1/(\sqrt{n^j + 1} + \sqrt{n^j})$  poder-lhe-á facilitar a resolução.

1.iv) Poder-lhe-á ser útil considerar a regra de *Cauchy* para verificar indutivamente que  $\lim n/(\ln n)^j = +\infty$ .

1.vi) Atente às evidentes igualdades

$$\sin \left( n\pi + \frac{(-1)^n}{n^j} \right) = (-1)^n \sin \left[ \frac{(-1)^n}{n^j} \right] = \sin \left( \frac{1}{n^j} \right) \quad \text{e ao limite} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

1.ix) Considerando separadamente a sucessão dos termos pares e dos termos ímpares, não encontrará dificuldades em verificar que se  $a_n, n \in \mathbb{N}_1$  designa o termo geral da série, então  $0 \leq a_n \leq (2/e)^n$ , para ordens superiores a determinado natural.



1.xi) Definindo a função de variável real positiva  $f(x) = x/(x^2 - 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ , obtém-se

$$f(x) = \frac{(x-1)+1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1}.$$

Segue que a sucessão  $a_n := \sqrt{n}/(n-1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente. Do critério de Dirichlet, conjuntamente com a divergência da série  $\sum 1/\sqrt{n}$  conclui-se

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n-1} \xi^n \quad \text{converge sse} \quad |\xi| = 1, \xi \neq 1.$$

Como a série  $\sum 1/(n-1)$  é divergente então a série parametrizada em  $\xi$

$$\sum \frac{1 + \sqrt{n}\xi^n}{n-1} \quad \text{diverge se} \quad |\xi| = 1, \xi \neq 1. \quad (2)$$

Caso  $\xi = 1$ , então a série em (2) tem a natureza da série  $\sum 1/\sqrt{n}$  e logo é também divergente.

1.xiv) Verifique que o termo geral da série não é infinitésimo.

1.xv), xvi), xvii) Tenha em consideração o critério integral para sem dificuldades concluir que a série na alínea xv) converge sse  $j = 2, \dots$ . Para as alíneas xvi) e xvii), estabeleça a evidente desigualdade  $\ln n! \leq n \ln n$ .

1.xix) Proceda como no exemplo [13 sec.2.1].

1.xx), xxi) Verifique que ambas as alíneas encontram-se resolvidas no exemplo [13 sec.2.1]. Deverá tão simplesmente resolver o problema [9 sec.2.1].

2.v) Alega-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots (n+j)} = \frac{1}{(j-1)(j-1)!}, \quad j \in \mathbb{N}_2.$$

De facto, considerando a evidente igualdade

$$\frac{1}{(n+1) \cdots (n+j)} = \frac{1}{j-1} \left( \frac{1}{(n+1) \cdots (n+j-1)} - \frac{1}{(n+2) \cdots (n+j)} \right),$$

deduz-se tratar-se duma série telescópica. O resultado segue sem dificuldades.

2.viii) Considere a seguinte definição e igualdades

$$a_n := n \frac{2n+1}{(n^2-1)(n^2+2n)} = n \left( \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2+2n} \right) = n \left( \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{(n+1)^2-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Se  $b_n = 1/(n^2-1)$  então ser-lhe-á suficiente atentar a que

$$\sum_{n=1} a_n = \sum_{n=1} [nb_n - (n+1)b_{n+1}] + \sum_{n=1} b_{n+1} = \sum_{n=1} [nb_n - (n+1)b_{n+1}] + \frac{1}{2} \sum_{n=2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

6. Verifique que o termo geral da série não é infinitésimo.

7.i), ii) Defina a sucessão das somas parciais  $S_n := a_0 + \dots + a_{n-1}$ . Tão simplesmente verifique que  $\alpha_n = S_{2n} - S_n$ .

Em relação à alínea ii), deverá considerar que quaisquer dos exemplos pedidos encontram-se de entre as diversas alíneas do problema [1 sec.2.1]. No caso particular, e.g. considere a alínea xv).

8.i), ii) Evitamos na decorrente resolução, conceitos semelhantes ao parafraseado por “o menor natural maior do que”. Defina-se a sucessão das somas parciais  $S_n = a_0 + \dots + a_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ . Considerando a monotonia do termo geral da série, verifica-se

$$0 \leq na_{2n} \leq na_{2n-1} \leq a_n + \dots + a_{2n-1} = S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Logo, tanto a sucessão  $2na_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  quanto  $(2n-1)a_{2n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  são infinitésimas. Em relação a *ii)* poder-lhe-á ser útil ter em linha de conta sugestões semelhantes às lavradas para a alínea *ii)* do problema [7 **sec.2.1**].

10. O problema [9 **sec.2.1**] revela-se útil. De facto, se  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  designa a sucessão das somas parciais, então

$$S_{2n} = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ (-1)^j (a_j + a_{j+1}) + (-1)^{j+1} (a_{j+1} + a_{j+2}) \right] = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_j - (-1)^{j+2} a_{j+2}.$$

Assim, se a sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é infinitésima então  $S_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é convergente. Para a alínea *iii)*, conjuntamente com a alínea *i)*, considere a seguinte igualdade

$$\frac{1}{n} (a_n + a_{n+1}) = \left( \frac{a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} \right) + \frac{a_{n+1}}{n(n+1)}.$$

11. A alínea *i)* envolve simples manipulações algébricas das sucessões das somas parciais das diferentes séries envolvidas. Em relação ao item *ii)* poderá considerar a série de termo geral  $(-1)^n/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

13. Se  $S_n := a_0^2 + \dots + a_{n-1}^2$  e  $T_n = a_0 a_1 + \dots + a_{2n-2} a_{2n-1}$ , então da evidente desigualdade

$$0 \leq T_n = a_0 a_1 + \dots + a_{2n-2} a_{2n-1} \leq \frac{1}{2} (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{2n-2}^2 + a_{2n-1}^2) = \frac{S_{2n}}{2}$$

infere-se a resolução da alínea *i)*. Para *ii)* poder-se-á considerar  $a_n = 1 + (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ . Para *iii)* considere

$$0 \leq S_n = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 \leq a_0^2 + (a_0 a_1 + \dots + a_{n-2} a_{n-1}) \leq a_0^2 + T_n.$$

14. Na seguinte desigualdade o leitor poderá sem dificuldades encontrar a solução da alínea *i)*

$$a_1 + \frac{a_2}{2^\alpha} + \dots + \frac{a_n}{n^\alpha} \leq a_1 + \frac{1}{2} \left( a_2^2 + \dots + a_n^2 + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{2\alpha}} \right), \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Para *ii)*, considere e.g.  $a_n = 1/(\sqrt{n} \ln n)$  e o problema [1 **sec.2.1**], alínea *xv)*.

15. Suponha fixa uma ordem  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n < 0$ . Então, porque a sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente, obtém-se

$$\alpha_n - \alpha_m = \sum_{j=n}^{m-1} a_j \leq (m-n)a_n \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Se  $\alpha_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  é convexa limitada, então infere-se de *i)* que a sucessão  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente de termos não negativos. Logo  $\alpha_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente. Deduz-se a convergência da série telescópica  $\sum a_n$ . Como  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente, do problema [8 **sec.2.1**], segue que  $\lim na_n = 0$ . Para *iii)*, é suficiente considerar as igualdades

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} [na_n - (n+1)a_{n+1}] + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} = \alpha_1 - \lim_n \alpha_n.$$

16. Considere as seguintes igualdades

$$n^k (a_n - a_{n+1}) = \left[ n^k a_n - (n+1)^k a_{n+1} \right] + \left[ (n+1)^k - n^k \right] a_{n+1} = \left[ n^k a_n - (n+1)^k a_{n+1} \right] + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} n^j a_{n+1}.$$

18. Poderá obter uma simples resolução por intermédio de aplicação imediata da proposição [13 **sec.2.1**].

19. O caso  $j = 1$  está incluso no exemplo [13 **sec.** 2.1] e poder-lhe-á ser útil. Considere por igual o seguinte

$$(\xi^j - \bar{\xi}^j) \sum_n \gamma_n \xi^n = \sum_n (\gamma_n \xi^{n+j} - \gamma_{n-2j} \xi^{n-j}) + \sum_n \xi^{n-j} (\gamma_{n-2j} - \gamma_n). \quad (3)$$

20. A resolução é em todo semelhante à sugerida para o problema [19 **sec.** 2.1]. Considere (3).

### [**sec.** 2.2]

3.xiv) Defina-se  $a_n := n^n / \epsilon^{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ . Então  $b_n := \sqrt[n]{a_n} := n / \epsilon^{(n-1)!}$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ . Se  $0 < \epsilon \leq 1$ , é evidente que  $\lim b_n = +\infty$ . Se  $\epsilon > 1$  então encontramos uma indeterminação no cálculo do limite da sucessão  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ . No entanto, são óbvias as seguintes computações

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n} \epsilon^{-(n-1)(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Logo  $\lim b_n = 0$ . A região de convergência absoluta é  $\mathbb{C}$  e  $\{0\}$ , respectivamente se  $0 < \epsilon \leq 1$  e  $\epsilon > 1$ .

3.xv) Considerando o lema [2 **sec.** 2.2], o raio de convergência pode ser calculado da seguinte forma

$$\limsup \sqrt[n]{n^n} = \limsup \left( n^{1/(n-1)} \right)^{1/(n-2)!} = 1^0 = 1.$$

Se  $|z| = 1$  então o termo geral da série não é infinitésimo. Logo, a região de convergência absoluta é  $D(0, 1)$ .

3.xvi) Sem dificuldades, deduz-se da alínea anterior que o raio de convergência da série é  $r = 1$ . Como

$$\frac{n^n}{n!} = n \frac{n^{n-1}}{n!} \geq n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

segue sem dificuldades que a região de convergência absoluta é  $D(0, 1)$ .

3.xvii) Da desigualdade

$$\cos(n\theta) = \cos[(n-1)\theta] \cos(\theta) - \sin[(n-1)\theta] \sin \theta$$

segue que se  $\cos(n\theta)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é sucessão infinitésima então também  $\sin(n\theta)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é infinitésima. Da relação fundamental da trigonometria deduz-se um absurdo. Logo, a região de convergência absoluta é  $D(0, 1)$ .

4.iv) Defina-se a sucessão  $b_n = n! / n^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ . Então

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

Se  $r$  designa o raio de convergência então  $r = e$ . Considere-se a sucessão  $c_n := e^n b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  e compute-se

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = e \frac{b_{n+1}}{b_n} = e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Porque a sucessão  $(1 + 1/n)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  é crescente então a sucessão de termo geral  $c_{n+1}/c_n$  é decrescente ao valor 1. Logo  $c_{n+1} \geq c_n$ . Em consequência a sucessão  $c_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$  não é infinitésima e a série

$$\sum_n \frac{n!}{n^n} z^n = \sum_n c_n \xi^n \quad \text{é divergente,} \quad (|z| = e, |\xi| = 1).$$

4.v) Sem dificuldades conclui que o raio de convergência é  $r = 1$ . Para determinar a região de convergência simples considere a alínea xix) do problema [1 **sec.** 2.1].

6.a.i) Se  $r$  designa o raio de convergência, então  $r = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Deduz-se o seguinte

$$1 = \lim \sqrt[n]{\lambda_1} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim \sqrt[n]{\lambda_2} = 1.$$

6.a.iv) De  $0 < a_n < n^p$  infere-se  $r := \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{n^p} = 1$ . Ademais  $a_{2^n} \geq na_2$ . Logo considerando que  $na_2 > 1$  para ordens superiores a determinado natural obtém-se o seguinte

$$r \geq \limsup \sqrt[2^n]{a_{2^n}} \geq \limsup \sqrt[2^n]{na_2} \geq 1.$$

7. Do lema [2sec.2.2], sem dificuldades o leitor deduz-se a solução de i). Para a alínea ii) aplique o binómio de Newton á parcela  $(n+1)^k$  e comute a soma finita com o símbolo de série.

### [sec. 2.3]

1.i), iv) Para a alínea i) considere as seguintes computações

$$\int \cos(t) e^t dt = \frac{1}{2} \int \left( e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} \right) dt = \frac{1}{2+2i} e^{(1+i)t} + \frac{1}{2-2i} e^{(1-i)t} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1-i}{2} e^{(1+i)t} \right] = \frac{e^t}{2} (\cos t + \sin t).$$

Com respeito à alínea iv) é suficiente o seguinte

$$\int \frac{1}{1-\cos t} dt = - \int \frac{e^{it}}{(e^{it}-1)^2} dt = \frac{-i}{e^{it}-1} = e^{-it/2} \frac{-i}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = -\frac{1}{2\sin(t/2)} e^{-it/2} = -\frac{1}{2\tan(t/2)} + \frac{i}{2}.$$

6. Eventualmente a resolução ser-lhe-á evidente, se considerar as alíneas x) e xi) do problema [3sec.2.3].

### [sec. 2.4]

6. Seja  $x$  um número real tal que  $|x| \leq 1$ . De acordo com [4sec.2.4], as soluções de  $\cos z = x$  são dadas por

$$\operatorname{Arccos} x = \{ \mp i \ln |x + x_1| \pm \arg(x + x_1) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}, \quad \text{aonde } x_1 = i\sqrt{1-x^2}.$$

Considere que  $\ln |x + x_1| = 0$  para concluir

$$\operatorname{Arccos} x = \left\{ \pm \arg(x + i\sqrt{1-x^2}) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

### [sec. 3.1]

2. O leitor não encontrará dificuldades caso considera as igualdades abaixo

$$|J_f(z)| = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(z), -i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right\rangle = \langle \partial_z f + \partial_{\bar{z}} f, \partial_z f - \partial_{\bar{z}} f \rangle.$$

7. Ser-lhe-á suficiente justificar as seguintes computações

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial v}(z) &= J_{f \circ g}(z)v = J_f(w)J_g(z)v = J_f(w)\eta = \partial_z f(w)\eta + \partial_{\bar{z}} f(w)\bar{\eta} \\ &= \partial_z f(w)\frac{\partial g}{\partial v}(z) + \partial_{\bar{z}} f(w)\frac{\partial g}{\partial \bar{v}}(z),\end{aligned}\quad \text{aonde } \eta = \frac{\partial g}{\partial v}(z).$$

8. Para a equivalência  $i) \Leftrightarrow ii)$  considere a seguinte igualdade

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(z) \right| = |J_f(z)e^{i\theta}| = |\partial_z f(z) + \partial_{\bar{z}} f(z)e^{-i2\theta}| \quad \text{aonde } v = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Para a equivalência  $i) \Leftrightarrow iv)$  considere que nas condições das hipóteses, a alínea  $iv)$  pode ser substituída por a condição de ortogonalidade entre as derivadas direccionais em ordem a vectores ortogonais. Assim ser-lhe-á útil considerar as seguintes computações

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(z), \frac{\partial f}{\partial w}(z) \right\rangle &= \left\langle e^{i\theta} \partial_z f(z) + e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} f(z), \pm i e^{i\theta} \partial_z f(z) \mp i e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} f(z) \right\rangle \\ &= \pm \left\langle e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} f(z), i e^{i\theta} \partial_z f(z) \right\rangle \mp \left\langle e^{i\theta} \partial_z f(z), i e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} f(z) \right\rangle \quad \text{aonde } v = e^{i\theta}, w = \pm i e^{i\theta}. \\ &= \pm 2 \operatorname{Re} \left( i e^{i2\theta} \partial_z \bar{f}(z) \partial_z f(z) \right)\end{aligned}$$

Na última igualdade acima considerou-se que  $\langle \xi, \eta \rangle = \operatorname{Re}(\bar{\xi}\eta)$ . Sem dificuldades conclui-se que  $iv)$  verifica-se sse  $\partial_z \bar{f}(z) \partial_z f(z) = 0$ .

### [sec. 3.2]

2.  $ii)$  Demonstra-se a primeira parte do problema. Para determinado  $\epsilon > 0$  e para cada  $\theta \in \mathbb{R}$  os caminhos  $[-\epsilon, \epsilon] \mapsto \varphi(t) = u(z + te^{i\theta})$  estão bem definidos. Suponha-se o contradomínio de  $u$  incluso na variedade uni-dimensional  $C$ . Para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$  os vectores

$$\varphi'(0) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(z) = e^{i\theta} \partial_z u(z) + e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} u(z) = e^{i\theta} u'(z) \quad \text{aonde } \eta = e^{i\theta}$$

são vectores tangente a  $C$ , eventualmente nulos. Se  $u'(z) \neq 0$  então o espaço tangente a  $C$  no ponto  $u(z)$  é bi-dimensional, o que é absurdo. Logo  $u'(z) = 0$  e necessariamente  $u$  é constante.  $ii)$  Considera-se o caso  $\arg u \in \mathcal{H}(U)$ . Porque o contradomínio de  $\arg u$  inclui-se numa variedade uni-dimensional então deduz-se da alínea  $i)$  que  $U \ni z \mapsto \arg u(z)$  é constante. Logo a função  $u(z) = |u(z)|e^{i \arg u(z)}$  tem contradomínio incluído em determinada recta passando por a origem. De  $i)$  conclui-se que  $u$  é constante.

### [sec. 3.3]

10. Considere a parametrização  $\gamma(t) = z_2 t + z_1(1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Eventualmente a resolução ser-lhe-á evidente se considerar que  $\gamma'(t) = z_2 - z_1$  e as seguintes igualdades

$$\int_{[z_1, z_2]} \bar{f}(w) dw = \int_0^1 \bar{f}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \int_0^1 \overline{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \int_{[z_1, z_2]} \overline{f(w)} dw.$$

11. Considerando a sugestão, sabemos que  $f(w+\xi) = f(w) + \xi \partial_w f(w) + \bar{\xi} \partial_{\bar{w}} f(w) + r(\xi)$  aonde  $\lim_{\xi \rightarrow 0} r(\xi)/\xi = 0$ . Considerando o exemplo [4sec. 3.3] tanto a igualdade  $\bar{\xi} = \epsilon^2/\xi$ ,  $|\xi| = \epsilon$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i \epsilon^2} \int_{|w-\xi|=\epsilon} f(\xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi i \epsilon^2} \int_{|\xi|=\epsilon} f(w+\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i \epsilon^2} \left[ \partial_{\bar{w}} f(w) \int_{|\xi|=\epsilon} \frac{\epsilon^2}{\xi} d\xi + \int_{|\xi|=\epsilon} r(\xi) d\xi \right] \\ &= \partial_{\bar{w}} f(w) + \frac{1}{2\pi i \epsilon^2} \int_{|\xi|=\epsilon} r(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Sem dificuldades o leitor cuidará de mostrar que o resultado deduz-se das computações anteriores.

[sec. 3.4]

- 2.i), ii), iii) Do teorema de *Green* infere-se

$$\mathbb{R} \ni \iint_U \partial_{\bar{z}} \partial_z f(z) dA(z) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \partial_z f(z) dz.$$

Assim termina-se a demonstração de i). A alínea ii) segue os mesmos argumentos. Em relação à alínea iii), é evidente que a função  $f$  encontrasse nas condições da alínea ii). Em consequência, a mudança de variável de integração e o problema [1sec. 3.4] estabelecem

$$\int_{\gamma} g'(z) \bar{g}(z) dz = 2i \int_U g'(z) \partial_{\bar{z}} \bar{g}(z) dA(z) = 2i \int_U |g'(z)|^2 dA(z) = 2i |g^{-1}(U)|, \quad \text{aonde } U = \text{ins } \gamma.$$

4. Considere aplicações sucessivas da formula de *Pompiou* e do teorema de *Green* para esquematicamente obter

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{1}{\xi - z} \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}}(\xi) dA(\xi) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left[ \frac{\bar{\xi} - \bar{z}}{\xi - z} \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}}(\xi) \right] dA(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\xi} - \bar{z}}{\xi - z} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi}^2}(\xi) dA(\xi) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\partial U} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\partial U} \frac{\bar{\xi} - \bar{z}}{\xi - z} \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}}(\xi) d\xi \right] + \frac{1}{2\pi} \left[ \int_U \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left[ \frac{(\bar{\xi} - \bar{z})^2}{\xi - z} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi}^2}(\xi) \right] dA(\xi) - \int_U \frac{(\bar{\xi} - \bar{z})^2}{\xi - z} \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{\xi}^3}(\xi) dA(\xi) \right] \\ &= \dots = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\partial U} \frac{(\bar{\xi} - \bar{z})^k}{\xi - z} \frac{\partial^k u}{\partial \bar{\xi}^k}(\xi) d\xi + \frac{(-1)^n}{\pi(n-1)!} \int_U \frac{(\bar{\xi} - \bar{z})^{n-1}}{\xi - z} \frac{\partial^n u}{\partial \bar{\xi}^n}(\xi) dA(\xi), \quad z \in U. \end{aligned}$$

5. Verifique que a resolução é uma aplicação imediata da *Generalização da fórmula de Pompiou*.

[sec. 3.5]

1. Calcule o integral do lado esquerdo, considerando as evidentes proposições  $\bar{z} = 1/z$ ,  $z \in C_1$  e  $\bar{z} = -z$ ,  $z \in C_2$ , conjuntamente com o Teorema fundamental [6sec. 3.3]. Para determinar o restante integral, poder-lhe-á ser útil considerar a igualdade

$$\text{Re} \int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} \bar{f}(w) d\gamma(w),$$

estabelecida no início da secção [sec. 3.4].

2.i), ii) A alínea i) é consequência imediata das diferentes definições de integral de linha, envolvidas. Para a alínea ii), considere i) e o seguinte

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{|z|=1} f(z) |dz| &= \int_{|z|=1} \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2} |dz| = \int_{|z|=1} \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2z} z |dz| = -i \int_{|z|=1} \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2z} dz \\ &= \pi \bar{f}(0) + \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz. \end{aligned}$$

5.x), xi), xii) Considere o problema [4 sec.3.5].

8.i), ii) Para a alínea i) considere o seguinte

$$\int_{|z|=1} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j f_j(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{|z|=1} \frac{f_j(z)}{z^j} dz = 2\pi i \sum_{j=0}^{n-2} \frac{f_{j+1}^{(j)}(0)}{j!}.$$

A sugestão permite estabelecer a alínea ii), precisamente

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{e^{nz}}{z^{n-1}(z - e^z)} dz &= \int_{|z|=1} \frac{z}{z - e^z} dz - \int_{|z|=1} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j e^{jz} dz = \int_{|z|=1} \frac{z}{z - e^z} dz - 2\pi i \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(j+1)^j}{j!} \\ &= -2\pi i \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(j+1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

A última igualdade considerada pode ser justificada observando que  $e^z \neq z$ ,  $|z| \leq 1$ . De facto, se existe uma solução complexa da equação  $z = e^z$  então  $|z| = e^x$ ,  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Logo  $-1 \leq x \leq 0$ . Tendo em linha de conta que  $\cos y > 0$ ,  $|y| \leq 1$  então, se  $x \neq 0$  obtemos uma contradição com a igualdade  $x = e^x \cos y$ . Finalmente, é óbvio que não existem soluções verificando  $x = 0$ ,  $|y| \leq 1$ .

9. Do problema [2 sec.3.5], resulta sem dificuldades de maior o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{1 - \xi z} |d\xi| &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{(1 - \xi z)\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} f(\xi) \left[ \frac{z}{(1 - \xi z)} + \frac{1}{\xi} \right] d\xi \\ &= \frac{z}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{(1 - \xi z)} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

O integral do lado esquerdo é nulo, porque a função integranda é holomorfa em  $\mathbb{C}$ , com excepção dum ponto singular situado no exterior do círculo unitário. O segundo integral calcula-se por intermédio da fórmula integral de Cauchy.

### [sec. 3.6]

1. Considere as seguintes computações

$$0 = \partial_{\bar{z}} f = \partial_{\bar{z}} u - \bar{g}' = \overline{\partial_z u} - \bar{g}' = \overline{f'} - \bar{g}'.$$

2. Sabe-se da existência de funções  $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$  tais que  $u = f + \bar{g}$ . Para determinado  $\epsilon > 0$  e para cada  $\theta \in \mathbb{R}$  os caminhos  $[-\epsilon, \epsilon] \mapsto \varphi(t) = u(z + te^{i\theta})$  estão bem definidos. Suponha-se o contradomínio de  $u$  incluso na variedade uni-dimensional  $C$ . Então, para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$  os vectores

$$\varphi'(0) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(z) = e^{i\theta} \partial_z u(z) + e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} u(z) = f'(z) e^{i\theta} + \overline{g'(z)} e^{-i\theta} \quad \text{aonde} \quad \eta = e^{i\theta}$$

são vectores tangente a  $C$ , eventualmente nulos. Não obstante, a equação

$$\left| f'(z)e^{i\theta} + \overline{g'(z)}e^{-i\theta} \right| = \left| f'(z) + \overline{g'(z)}e^{-i2\theta} \right|, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

é a equação da circunferência centrada em  $f'(z)$  e com raio  $|g'(z)|$ . Logo  $f'(z) = g'(z) = 0$ .

5. *i)*, *ii)* Para a alínea *i)* considere  $u = (f + \bar{f})/2$ . Para *ii)* tenha em consideração  $|f|^n = f^{n/2}(\bar{f})^{n/2}$ , para os ramos da potência bem desejados.

6. Supondo que  $f$  é função harmónica sem zeros, então a alínea *i)* resulta das seguintes computações elementares

$$\partial_{\bar{z}} \partial_z \frac{1}{f} = -\partial_{\bar{z}} \frac{\partial_z f}{f^2} = \frac{\partial_z f \partial_{\bar{z}} f^2 - f^2 \partial_{\bar{z}} \partial_z f}{f^4} = \frac{2f \partial_z f \partial_{\bar{z}} f - f^2 \partial_{\bar{z}} \partial_z f}{f^4} = \frac{\partial_z \partial_{\bar{z}} f^2}{f^3}.$$

A alínea *ii)* resulta da seguinte observação  $\partial_{\bar{z}} \partial_z |f|^2 = \partial_{\bar{z}} \partial_z f \bar{f} = f' \bar{f}' = |f'|^2$ .

#### [sec. 4.1]

4. *iv)* Os desenvolvimentos em série de *Laurent* podem ser obtidas considerando o seguinte

$$\frac{e^{1/w}}{(1-w)^2} = e^{1/w} \frac{d}{dw} \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^{-n} \frac{d}{dw} \sum_{k=0}^{\infty} w^k = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{n!} w^{k-n}.$$

Na série dupla anterior as potências  $1/w$  obtêm-se caso  $n = k + 1$ . Logo

$$\text{Res} \left( \frac{e^{1/w}}{(1-w)^2}; 0 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

O valor do integral obtém-se dos seguintes cálculos

$$\int_{|w|=2} \frac{e^{1/w}}{(1-w)^2} dw = 2\pi e i + 2\pi i \left[ \frac{d}{dw} e^{1/w} \right]_{|w|=1} = 0.$$

#### [sec. 4.2]

4. *i)*, *ii)* Suponha que os seguintes desenvolvimentos  $f(z) = a_0 + a_1(z-w) + \dots$ ,  $a_0 \neq 0$  e  $g(z) = b_1(z-w) + b_2(z-w)^2 + \dots$ ,  $b_1 \neq 0$  são válidos numa vizinhança do ponto  $w$ . Então, a alínea *i)* resulta de

$$\lim_{z \rightarrow w} (z-w) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow w} \frac{a_0 + a_1(z-w) + \dots}{b_1 + b_2(z-w) + \dots} = \frac{a_0}{b_1}.$$

A solução de *ii)* obtém-se de forma semelhante.

#### [sec. 4.3]

1. *a) vii)* Da proposição 5 deduz-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} e^{ix} dx = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{z}{1+z^2} e^{iz}; i \right) = \frac{i\pi}{e}.$$

Logo, da igualdade

$$\frac{x}{1+x^2} \sin x = \text{Im} \left[ \frac{x}{1+x^2} e^{ix} \right], \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{obtém-se} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin x dx = \text{Im} \left[ \frac{i\pi}{e} \right] = \frac{\pi}{e}.$$



Porque a função  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow x \sin x / (1 + x^2)$  é par então

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2e}.$$

[sec. 4.4]

3. Para a alínea *i*) justifique as computações

$$\overline{\mathcal{L}[f](z)} = \overline{\int_0^\infty f(t)e^{-zt} \, dt} = \int_0^\infty \overline{f(t)}e^{-\bar{z}t} \, dt = \mathcal{L}[\bar{f}](\bar{z}).$$

Para a alínea *ii*) suponha que  $\mathcal{L}[\operatorname{Re} f] = \operatorname{Re} \mathcal{L}[f]$ . Então da alínea anterior deduz-se  $\mathcal{L}[f](\bar{z}) = \mathcal{L}[f](z)$ . Assim  $\partial_{\bar{z}} \mathcal{L}[f] = \partial_z \mathcal{L}[f] = 0$  e logo  $\partial_{\bar{z}} \mathcal{L}[f]$  é constante. Necessariamente  $\mathcal{L}[f] = 0$ .



# Bibliografia

- [1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed. McGraw Hill, 1979.
- [2] Carlos A. Berenstein and Roger Gay, *Complex Variables - An Introduction*, 1991 Springer-Verlag New York, Inc..
- [3] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe. Tome I - Fonctions d'une variable*, traduction française, Editions Mir, 1990.
- [4] J. Campos Ferreira, *Introdução à análise matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 3ª Edição.
- [5] J. Campos Ferreira, *Introdução à análise em  $\mathbb{R}^n$* , DMIST, 2004.
- [6] Theodore W. Gamelin, *Complex Analysis*, 2001 Springer-Verlag New York, Inc..
- [7] Elon Lages de Lima, *Curso de análise, Vol. 1*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1985.
- [8] Elon Lages de Lima, *Curso de análise, Vol. 2*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1985.
- [9] Zeev Nehari, *Conformal Mapping*, Dover Publications, Inc., New York.

# Índice

- ℂ-anti-diferenciáveis, 74
- ℂ-diferenciável, 67
- ℂ-linear, 71
- ℝ-diferenciável, 71
- ℝ-linear, 71
- $n$ -multi conexo, 105
- Cauchy-Riemann*, 69, 83
- Riemann* integrável, 86
  
- núcleo *Poisson* conjugado, 144
  
- Abel, 38
- Aberto, 21
- Absolutamente convergente, 40
- Arco coseno polivalente, 65
  
- Binómio de Newton, 68
- Binómio de *Newton*, 34
  
- Caminho, 85
- Caminho concatenação, 108
- Caminho fechado, 86
- Caminho seccionalmente regular, 85
- Caminho simples, 86
- Cauchy-Riemann, 56
- Cesàro, 39
- Círculo em  $\dot{\mathbb{C}}$ , 27
- Cociente, 17
- Compacto, 21
- Comprimento do caminho, 90
- Conexo, 21
- Conforme, 72
- Coordenadas polares, 82
- Coroa circular, 111
- Critério da raiz, 43
- Critério da razão, 44
  
- Critério de Abel, 47
- Critério de Dirichlet, 46, 47
- Critério geral de comparação, 41
- Critério integral, 45
- Curva de *Jordan*, 86
- Curva seccionalmente regular, 85
  
- Derivação da composta, 78
- Derivação do cociente, 76, 78
- Diferenciabilidade em  $\infty$ , 117
- Diferenciabilidade à Frechet, 71
- Dilatação, 26
- Divisão de polinómios, 16
  
- Esquerda do círculo orientado, 29
- Exterior, 21
  
- Faixa horizontal, 60
- Fechado, 21
- Fronteira, 21
- Função analítica, 51
- Função argumento, 11
- Função de *Heaviside*, 136
- Função derivada, 67
- Função implícita, 73
- Função inteira, 51
- Função meromorfa, 121
- Função racional, 54
- Função sinal, 13
- Fórmula de Euler, 59, 60
- Fórmula de *Pompiou*, 97
- fórmula integral de Cauchy, 106
- fórmula integral de Cauchy generalizadas, 109
- Fórmulas de Green, 96
- Fórmulas de Moivre, 11
- Fórmulas integrais de Cauchy, 106

- Grau, 15  
 Harmónica conjugada, 142  
 Holomorfia, 83  
 Identidade entre polinómios, 15  
 Imagem simétrica, 25, 32  
 Integral impróprio, 97, 127  
 Interior, 21  
 Inversão, 26  
 Irredutível, 18  
 Irredutível sobre  $\mathbb{R}$ , 18  
 Laplaciano, 140  
 Lineares-fracionárias, 26  
 Linha de ramificação, 64  
 Linha poligonal, 86  
 Logaritmo polivalente, 63  
 Logaritmo principal, 64  
 Möbius, 26  
 Matriz Jacobiana, 71  
 Medida nula, 87  
 Multiplicidade, 17  
 n-multi conexo, 96  
 Núcleo de *Cauchy*, 142  
 Núcleo de *Poisson*, 143  
 Operador de conjugação, 142  
 Operadores de derivação, 69  
 Orientação, 29  
 Orientação positiva, 30  
 Parametrização, 85  
 Plano complexo, 8  
 Plano complexo compactificado, 22  
 Polinómio, 15  
 Potenciação, 64  
 Produto convolução, 142  
 Pólo de ordem  $k$ , 124  
 Raio de convergência, 52  
 Razão incremental, 54  
 Recta no plano complexo compactificado, 27  
 Redutível, 18  
 Região de convergência, 51  
 Regras de derivação, 76, 81  
 Resto, 17  
 Resíduo, 120  
 Rotação, 26  
 Seccionalmente contínua, 88  
 Segmento de recta, 85  
 Semi-plano, 20  
 Semi-plano direito, 134  
 Sentido positivo, 93  
 Simplesmente conexo, 108  
 Simplesmente convergente, 40  
 Singularidade essencial, 125  
 Singularidade isolada, 120  
 Singularidade removível, 111  
 Sistema de caminhos, 95  
 Soma da série, 35  
 Soma de Cesàro, 39  
 Soma por partes, 46  
 Somas de *Riemann*, 87  
 Somas superior, 87  
 Sucessão das somas parciais, 33  
 Sucessão de Cauchy, 39  
 Série, 35  
 Série de Laurent, 120  
 Série de potências, 51  
 Série de Taylor, 109  
 Série geométrica, 33  
 Série harmónica, 39  
 Série telescópica, 33  
 Séries de Dirichlet, 46  
 Teorema da curva de Jordan, 86  
 Teorema de Green, 95  
 Teorema de Laurent, 119  
 Teorema de Liouville, 118  
 Teorema de *Goursat*, 101  
 Teorema de *Morera*, 106  
 Teorema dos resíduos, 121  
 Teorema fundamental, 90  
 Teste de *Weierstrass*, 103  
 Trabalho, 95  
 Transformada de Laplace, 134

Translação, 26

Trigonométricas hiperbólicas complexas, 62

Zero de multiplicidade  $k$ , 123

Zero de ordem  $k$ , 123

Zero do polinómio, 17

Índice, 92

# Índice de Simbolos

- $C^\infty(U)$ , 56
- $C^n(U)$ , 55
- $C_r(t)$ , 142
- $D(\infty, r)$ , 22, 115
- $D(w, \delta, \epsilon)$ , 111
- $D(w, \rho, r)$ , 115
- $D(w, r)$ , 21
- $D(w, r, \infty)$ , 115
- $D_w(w, \epsilon)$ , 120
- $I(\gamma, z)$ , 92
- $J_f(x, y)$ , 71
- $PC$ , 88
- $P_r(t)$ , 143
- $Q_r$ ,  $0 < r < 1$ , 144
- $R_\xi$ , 20
- $R_{\xi, \eta}$ , 20
- $S_n$ , 33
- $U_w$ , 111
- $U_{z, \epsilon}$ , 97
- $X_\alpha$ , 134
- $Y_{]a, b]}$ , 60
- $[z_1, z_2, \dots, z_n]$ , 86
- $\exp(x)$ , 57
- $\Delta$ , 140
- $\operatorname{Im} z$ , 7
- $\Pi$ , 20
- $\Pi_{\xi, \eta}$ , 20
- $\operatorname{Re} z$ , 7
- $\operatorname{cl} D(w, r)$ , 21
- $\operatorname{cl} U$ , 21
- $\mathcal{C}^\gamma$ , 86
- $\mathcal{H}(U)$ , 83
- $\mathcal{R}(\gamma)$ , 88
- $\mathcal{R}([a, b])$ , 88
- $\cos z$ , 61
- $\cosh z$ , 62
- $\partial_{\bar{z}}, \partial_z$ , 69
- $d\bar{w}$ , 88
- $dz$ , 88
- $\mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ , 134
- $\operatorname{ext} U$ , 21
- $\gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$ , 95
- $\gamma^-$ , 89
- $\iint dA(w)$ , 96
- $\infty$ , 22
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , 95
- $\operatorname{int} U$ , 21
- $\operatorname{ins} \gamma$ , 86
- $\int_a^b f(t) dt$ , 88
- $\int_\gamma f(w) d\gamma(w)$ , 95
- $\operatorname{Ln} z$ , 63
- $\ln ]a, b[$ , 63
- $\ln z$ , 64
- $\mathbb{C}$ , 7
- $\dot{\mathbb{C}}$ , 22
- $\mathbb{D}$ , 142
- $\dot{\mathbb{R}}$ , 27
- $|dw|$ , 89
- $\operatorname{out} \gamma$ , 86
- $\partial D(w, r)$ , 21
- $\partial U$ , 21
- $\operatorname{Res}(f; w)$ , 120
- $\sin z$ , 61
- $\sinh z$ , 62
- $\mathcal{L}[f](z)$ , 134
- $\tilde{u}$ , 142
- $e$ , 53
- $e^z$ , 53

$e^{ix}$ , 59  
 $f'(z)$ , 67  
 $f * g$ , 142  
 $f^{(n)}(z)$ , 67  
 $g'(\infty)$ , 117  
 $i$ , 7  
 $i\mathbb{R}$ , 7  
 $l_w^z$ , 100  
 $p(z)$ , 15  
  
 $(z; z_1, z_2, z_3)$ , 28  
 $z^\alpha$ , 64