Exame de **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

Licenciatura em Física e Licenciatura em Química

07/02/2011 Duração: 2h

1. (3,5 valores) Considere o seguinte sistema nas incógnitas x, y e z.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \alpha x+2y+z=3 \\ -x+y+2z=\beta \end{cases}$$

   a) Classifique o sistema quanto ao número de soluções, em função dos valores dos parâmetros reais α e β (em cada caso, indique a característica da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada do sistema).

   b) Diga, justificando, para que valores de α é que a matriz dos coeficientes do sistema é invertível.

2. (8,5 valores) Considere a matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   a) Calcule o determinante de A, usando o método de Laplace.

   b) Indique o valor do determinante da matriz $\frac{1}{4}A^5$.

   c) Calcule a inversa da matriz A, usando o método de Gauss.

   d) Determine os valores próprios da matriz A.

   e) Determine os valores reais k tais que $(k, -1, 2)$ seja vector próprio de A.

3. (2 valores) Determine uma base e a dimensão do seguinte subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=z-t,\ x+2t=y\}$$

4. (3,5 valores) Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definida por:

$$f(x, y, z) = (x+2y+z, x-2y+3z, 2x-y, -3y-2z)$$

   a) Determine uma base e a dimensão de Imf.

   b) A aplicação f é injectiva? Justifique.

5. (2,5 valores) Seja V um espaço vectorial real de dimensão 3. Prove que se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V então $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$ também é uma base de V.