Cálculo de $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx$**,** $b \neq 0$

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx = \int \frac{1}{b^2\left(\frac{(x-a)^2}{b^2}+1\right)}dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{b\,\frac{1}{b}}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right)+C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Cálculo de $\displaystyle\int \frac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2}dx$**,** $b \neq 0$

Integramos por partes $\displaystyle\int 1\,\frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx$, fazendo $u' = 1$ e $v = \frac{1}{(x-a)^2+b^2}$.

Temos então que $u = x - a$ (eu posso escolher uma primitiva qualquer de 1 e esta escolha simplifica os cálculos) e $v' = -\frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2}$.

Então

$$\int 1\frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + 2\int \frac{(x-a)^2+b^2-b^2}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2}.$$

Se chamarmos $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx$, obtemos

$$I = \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + 2\,I - b^2\int \frac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2}dx$$

de onde concluímos que

$$\int \frac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2}dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}+I\right)$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}+\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$