

1. Introdução às operações com Laser

→ LASER: Light amplification by simulated emission of Radiation

→ Há 4 elementos fulcrais:

- ^{meio ativo} conjunto de átomos ou outro material capaz de amplificar um feixe de luz quando o atravessa. Normalmente o material amplificador fica entre uma **cavidade altamente refletora** que contém a luz amplificada. (Fabry-Pérot)

- Um ^{ou fonte de excitação} fornecedor externo de energia, isto capaz de substituir a energia que está a ser convertida em luz. (lâmpada)

- **meio para extrair** sob a forma de beam de luz parte da energia amplificada dentro da cavidade.

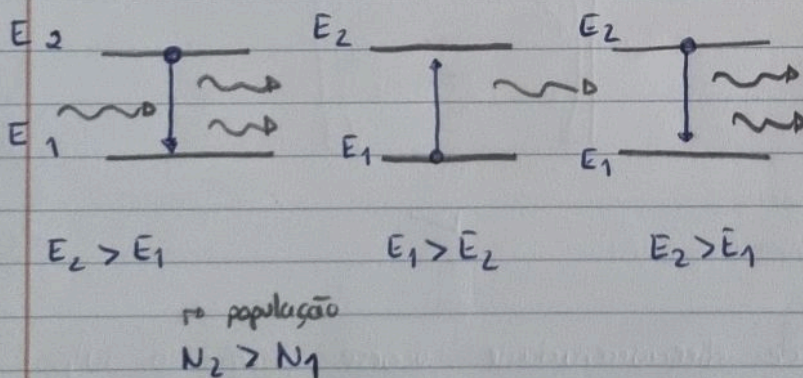
→ Todos os fótons emitidos são quase idênticos.

- Têm a mesma direção o que implica que sofrem uma pequena divergência (difração);

- Têm o mesmo comprimento de onda, ou seja, é luz monocromática;

- Têm a mesma fase, o que implica que é um feixe coerente (temporalmente e espacialmente).

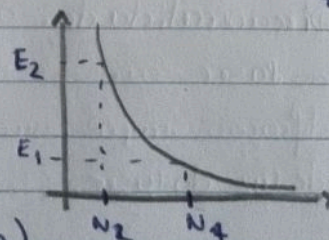
→ Há uma condição necessária para existir amplificação:



$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-E_{21}/k_B T}$$

$$E_2 - E_1 = h\nu$$

Nota: $k_B T = \frac{1}{40} \text{ eV}$



→ No entanto, em equilíbrio termodinâmico quando N_1 diminui a E_1 aumenta. Então tem de existir bombeamento (átomos chocam).

→ Luz laser vs luz convencional: laser possui ~~mais~~ um espalhamento mais uniforme do que filter + aperture.

$$\nu_{\text{opt}} \approx 10^{14} - 10^{15} \text{ Hz}$$

→ Processo de acordo de fase:

- Random: estão todos fora de fase sempre.
- Locked: estão sincronizadas (fases) num ponto (no tempo).

→ Aplicações:

- Arrefecimento dos átomos e moléculas;
- National Ignition Facility;
- Precisão;

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad d = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{\lambda}{hc} = \frac{e^2 \lambda}{2\epsilon E_\lambda}$$

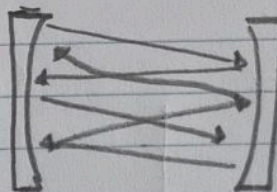
$$\frac{\lambda}{hc} = \frac{1}{E_\lambda}$$

- Relógios atômicos;

→ os espelhos da cavidade não podem ser planos, senão não contém os feixes amplificadas dentro da cavidade. Normalmente, estes são espelhos esféricos.



X



✓

Direcionalidade: o efeito de direcionalidade ocorre porque o output do laser consiste numa onda plana, quase-perfeita. Isto porque a difração impõe um pequeno limite do espalhamento angular do feixe de luz do laser. (limitados pelo efeito da difração)

$$\Delta \Omega \approx \frac{\lambda^2}{A} \approx (\Delta \theta)^2$$

Espalhamento angular: determina a área de propagação

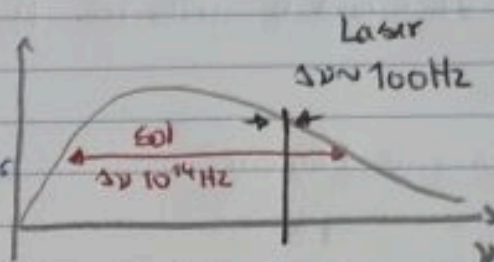
→ Se $\lambda = 500 \text{ nm}$ e $A = (5 \text{ mm})^2$
 $\Delta \Omega \approx 10^8 \text{ sr} \ll 2\pi$

→ Logo, tem uma única direção podemos dizer que tem

Faz bem!

Luz Monocromática

→ Comparativamente ao sd, um laser possui por norma uma menor frequência $\Delta \nu$. O que aumenta o fator de qualidade e implica uma pureza relativa espectral.



$$Q \approx \frac{1}{\frac{\Delta \nu}{\nu}} = \frac{\nu}{\Delta \nu}$$

Se $\Delta \nu \approx 100 \text{ Hz}$ e $\nu \approx 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$:

$$Q = 2 \times 10^{-13}$$

Coerência Temporal

→ A existência de uma largura de banda finita, $\Delta \nu$, implica que as diferentes frequências no feixe de luz podem sair de fase uma das outras. O tempo para que isso ocorra entre 2 oscilações é $1/\Delta \nu$ (1 ciclo). Depois deste tempo haverá interferências destrutivas e por isso uma diminuição / ou perda de coerência.

$$\Delta \tau = \frac{1}{\Delta \nu}$$

Tempo de coerência

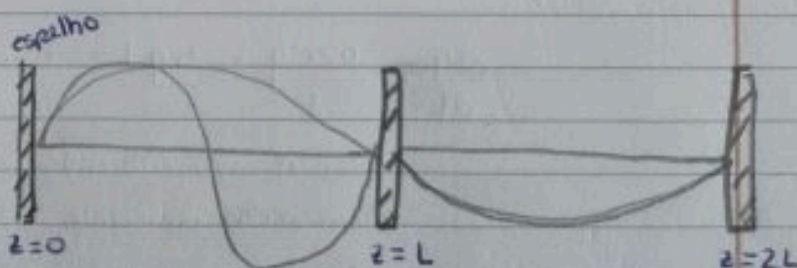
→ Quando mais pequeno, não se pode considerar que a luz seja coerente de todo.

Quanto maior o espectro ($\Delta \nu$) menor o tempo de coerência

Coerência Comprimento

Fourier: $\Delta \nu \Delta z_c \sim 1$

L: comprimento da cavidade



→ A taxa de aumento é proporcional ao n^2 de átomos no nível superior, como também é proporcional ao n^2 de fótons que estão na cavidade. A eficiência de emissão estimulada depende do tipo de átomos utilizados, e isto reflete-se no coeficiente de ganho a .

→ O mesmo pode ser feito para o m , número de átomos no nível superior. Tanto a emissão estimulada como a espontânea diminuem o m , e a taxa de excitação aumenta o m .

$$\frac{dm}{dt} = -amq - fm + p$$

Taxa de excitação dos átomos
↓
↑
Emissão espontânea
↓
Emissão estimulada

→ Vê-se que se m à medida que o número de átomos excitados (m) diminui o número de fótons aumenta (q).

→ Estas equações não são lineares! Avaliemo-las no estado estacionário:

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad \wedge \quad \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow amq = bq \quad \Leftrightarrow m = \frac{b}{a} \quad \wedge \quad -amq - fm + p = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$q_{\text{limiar}} = \frac{-fm}{am} + \frac{p}{am} \quad a \cdot \frac{b}{a}$$

$$m = \frac{b}{a} \quad \wedge \quad q_{\text{limiar}} = -\frac{f}{a} + \frac{p}{b}$$

→ Como o número de fótons, q , não pode ser negativo, tem-se que:

$$q_{\text{limiar}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{p}{b} - \frac{f}{a} \geq 0$$

→ Assim, o mínimo valor de p é encontrado quando $q_{\text{limiar}} = 0$:

$$\frac{p}{b} - \frac{f}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow p_{\text{limiar}} = \frac{fb}{a} = f m_{\text{limiar}}$$

3. Absorção, Emissão e dispersão da luz

30/09/2022

→ Ideias chave:

- Os elétrons vibram durante o seu movimento à volta do núcleo. ($10^{14} - 10^{15}$)

- O núcleo nas moléculas vibram em relação uns aos outros. ($10^{11} - 10^{13}$)

- O núcleo nas moléculas giram.



→ A luz provém da vibração da carga.

$$P = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) 2 \frac{\ddot{d}^2}{3c^3} = - \frac{dW}{dt} \quad \text{Energia}, \quad \ddot{d} \text{ é o momento do dipolo}$$

$$\vec{d} = e \vec{x}_0$$

→ A potência irradiada depende do \vec{E}

→ Os espectros atômicos dependem do átomo, da sua estrutura. Os níveis são separados de forma quantificada, são discretos.

→ Não há corpos negros perfeitos, mas há boas aproximações como por exemplo o sol. Ele tem a sua própria atmosfera o que faz dele uma boa aproximação para os corpos negros.

Nota

↳ As partes negras do espectro contínuo são as partes que foram absorvidas.

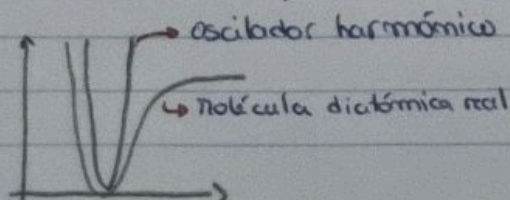
→ Sabemos que:

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

→ Vamos contudo ignorar o campo magnético devido à sua insignificância. Para calcular a energia temos que:

$$E \approx \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k (x - x_{eq})^2$$

→ Podemos basicamente considerar um átomo como um oscilador harmónico, não perfeito mas contudo um oscilador harmónico.



Em dois pontos simétricos não é igual

$$E_m \sim \hbar \omega \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad e \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \rightarrow \text{A energia cinética vai variar}$$

$$E \sim \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{L^2}{2I} \rightarrow \text{Momento angular}$$

$$\rightarrow \text{Momento de inércia}$$

Nota

↳ A água a luz é pouco absorvida.

Efeito de estufa

↳ O sol emite fótons na zona do visível e infra-vermelho. A Terra como tem atmosfera vai absorver, refletir e ~~enq~~ encerrar radiações de forma a aumentar a temperatura da Terra.

Interação da luz com um átomo - Modelo de Lorentz

→ Einstein fez duas aproximações cruciais:

1ª O núcleo é bastante pesado o que nos permite considerar que o núcleo é fixa na posição da origem ($r=0$);

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ Kg} \quad m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$$

2ª Numma primeira abordagem podemos desprezar os efeitos do campo magnético.

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{|\vec{F}_B|}{|\vec{F}_E|} \leq \frac{v |\vec{B}|}{|\vec{E}|} \approx \frac{v}{c}$$

$$|c\vec{B}| = |\vec{E}|$$

→ Podemos então descrever o movimento do núcleo e do eletrão da seguinte forma:

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = e \vec{E}(\vec{r}_e, t) + \vec{F}_{em}(\vec{r}_{em})$$

$$m_m \frac{d^2 \vec{r}_m}{dt^2} = -e \vec{E}(\vec{r}_m, t) + \vec{F}_{me}(\vec{r}_{em})$$

→ Como $m_m \gg m_e$, a posição de núvem vai oscilar (pequenas oscilações) porque há pequenas oscilações do \vec{E} .

$$\vec{E}(\vec{r}_e, t) = \vec{E}(\vec{r}_m, t)$$

→ Podemos criar um centro de massa e descrever o seu movimento de acordo com a seguinte equação:

$$\vec{R} = \frac{m_e \vec{r}_e + m_m \vec{r}_m}{M} \approx \vec{r}_m \quad ; \quad \vec{x} = \vec{r}_e - \vec{r}_m \quad ; \quad \vec{d} = e \vec{x}$$

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = e \vec{E}(\vec{R}, t) + \vec{F}_{em}(\vec{x})$$

→ De acordo com o modelo de Lorentz o campo eletromagnético oscila com frequências altas tal que o núcleo fica num estado quase estacionário.

→ A deslocação do núcleo leva à criação de uma carga de restituição, $\vec{F}_{em}(\vec{x})$. (Tipo mola)

→ Fazendo uma expansão de Taylor, para as pequenas oscilações obtem-se que estas são proporcionais ao deslocamento:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = e \vec{E}(\vec{r}, t) - K \vec{x}$$

→ A força de amortecimento surge para eventualmente parar as oscilações para que a massa

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \frac{K}{m} \vec{x} = \frac{e}{m} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{e}{m} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

volte para a sua posição de equilíbrio. O átomo oscila tanto que o e^- acaba por ser emitido para um nível mais baixo - Emissão Espontânea

3.3. Emissão Espontânea

→ Aqui vamos averiguar a emissão de radiação por um átomo num estado excitado. Assim vamos considerar a ausência de um campo elétrico.

$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow$ Esta equação tem como solução um oscilador harmônico simples:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

\rightarrow O movimento inicia-se com uma oscilação, ou seja, fora do equilíbrio o que indica que x_0 e v_0 são diferentes de zero. Isto provoca um momento dipolar:

$$\vec{d}(t) = e \vec{x}(t)$$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 = W$$

$$\frac{dW}{dt} = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{2e^2}{3c^3} \left[\underbrace{\omega_0^4 x_0^2 \cos^2 \omega_0 t}_{\parallel \frac{1}{2}} + \underbrace{\omega_0^3 x_0 \cdot v_0 \sin(2\omega_0 t)}_{\parallel 0} + \underbrace{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \omega_0 t}_{\parallel \frac{1}{2}} \right]$$

$$= - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3} E \rightarrow \text{energia do oscilador}$$

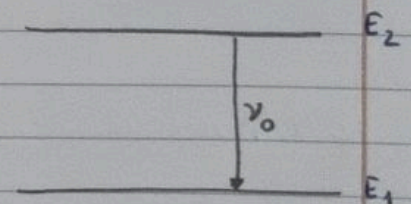
taxa com que a energia
está a ser irradiada

"
A

taxa de emissão espontânea

A é proporcional às frequências

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3}$$



\rightarrow É conveniente introduzir um fator de ajuste $3f$

$$A_{21} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{2e^2 \omega_0^2}{mc^3} f \right)$$

força do oscilador: é relativa a cada transição

\rightarrow A soma sob todos os f é aproximadamente 1.

$\rightarrow A_{21}$ corresponde à taxa média de decaimento dos átomos no estado excitado (por unidade de tempo)

→ As equações que descrevem as transições são:

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21} N_2 \quad \text{e} \quad \frac{dN_1}{dt} = A_{21} N_2$$

$$\frac{d(N_1 + N_2)}{dt} = 0 \quad ; \quad N_2(t) = N_2(0) e^{-A_{21}t}$$

$$\tau_{\text{esp}} = \frac{1}{A_{21}}$$

↓
Tempo médio
de vida (dos estados atômicos)

Nota:

$$\psi_2 \text{ ————— } |2\rangle$$

$$f_{21} = \frac{2\pi m \omega_0}{3\hbar} |\langle \psi_1 | \vec{x} | \psi_2 \rangle|^2$$

$$\psi_1 \text{ ————— } |1\rangle$$

→ Para transições múltiplas, a taxa de decaimento é a soma das taxas individuais.

$$\frac{dN_m}{dt} = - \underbrace{A_{m3} N_m - A_{m2} N_m - A_{m1} N_m}_{\text{por exemplo}} = - \left(\sum_m A_{mm} \right) N_m$$

$$A_m = \sum_m A_{mm}$$

$$; \quad \tau_m = \frac{1}{A_m}$$

3.4. Absorção

→ A energia radiada por um dipolo oscilante é uma forma de energia perdida. Faz sentido introduzir na equação de Lorentz uma espécie de amortecimento.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \vec{E}(\vec{R}, t) - K_s x + \vec{F}_{\text{fric}} \quad \rightarrow \beta = \frac{b}{2m}$$

$$\vec{F}_{\text{fric}} = -b \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

→ No estado estacionário temos que:

$$\frac{d^2 \vec{x}_h}{dt^2} + 2\beta \frac{d\vec{x}_h}{dt} + \omega_0^2 \vec{x}_h = 0 \Rightarrow \vec{x}_h = e^{-\beta t} e^{\pm i(\omega_0^2 - \beta^2)} \quad \omega_m$$

↳ o ω_0 é absorvido e depois oscila com ω_m

→ como solução estacionária temos que:

$$x(t) = \text{Re} \left[\frac{\hat{E} (e/m) E_0 e^{-i(\omega t - kz)}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega} \right]$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{e^2}{m} E_0^2 \frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \right]$$

→ se $\beta \ll \omega_0, \omega$ e $\omega \approx \omega_0$:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \approx 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{e^2}{m} E_0^2 \frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta^2 \omega^2}{4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 + 4\beta^2 \omega_0^2} \right]$$

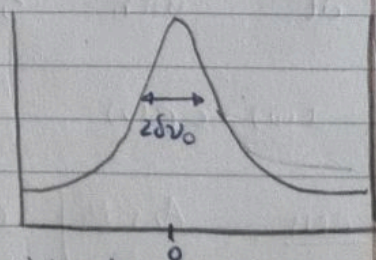
$$= \frac{e^2}{m} \frac{E_0^2}{4} \frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} = \frac{\pi e^2}{4m} E_0^2 \left[\frac{\beta/\pi}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} \right]$$

→ Passando de frequências angulares para frequências circulares e usando a expressão da irradiância (intensidade) do campo incidente:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{e^2}{8\pi m} E_0^2 \left[\frac{(1/\pi) \delta\nu_0}{(\nu - \nu_0)^2 + \delta\nu_0^2} \right] \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}; \delta\nu_0 = \frac{\beta}{2\pi}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi m c E_0} I_\nu \underbrace{L(\nu)}_{\downarrow}$$

Perfil Lorentziano



→ A área deste perfil é de 1.

→ Neste caso, as frequências negativas que não têm qualquer significado físico, podem ser consideradas.

→ É possível ter um perfil de absorção diferente:

• Efeito de colisões

↳ Gaussiana; Lorentziana; Voigt

• Efeito de Doppler

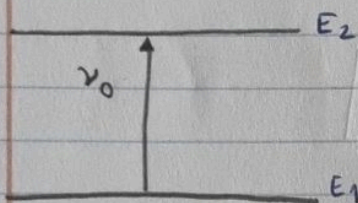
$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} I_\nu S(\nu) ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu S(\nu) = 1 \quad \text{Generalização}$$

→ Há no entanto dois ajustes necessários:

• Incluir fator f

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2 f}{4\pi\epsilon_0} I_\nu S(\nu)$$

• No modelo de sistema de 2 níveis apenas os átomos no estado fundamental podem absorver:



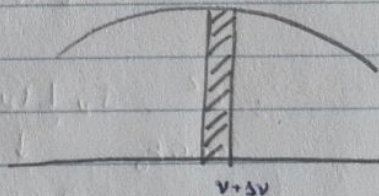
$$\frac{dW}{dt} = - \frac{d}{dt} (\hbar\omega_0 N_1) ; \quad \frac{dN_1}{dt} = - \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{\pi e^2 f}{m c \hbar \omega} \right) N_1 I_\nu S(\nu)}_{A_{21}}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = - \frac{1}{h\nu} \left[\frac{\lambda^2 A_{21}}{8\pi} \right] N_1 I_\nu S(\nu) = - \frac{dN_2}{dt}$$

3.5. Absorção da banda larga

→ Até agora assumimos que o campo incidente era luz monocromática ($E_0 \cos(\omega t - kx)$). O que acontece se a radiação incidente tiver um espectro largo?

$$\frac{dN_1}{dt} = - \frac{A_{21}}{8\pi h} N_1 \int_0^\infty \frac{c^2}{\nu^3} I(\nu) S(\nu) d\nu$$



$$I(\nu) = c \rho(\nu)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = - \frac{A_{21} N_1}{8\pi h} \int_0^\infty \frac{c^3}{\nu^3} \rho(\nu) S(\nu) d\nu$$

O espectro do campo incidente é largo quando $e(\nu) \sim e(\nu_0)$.
Sobre a gama das frequências para quais $S(\nu)$ tem uma amplitude desprezível.

$$\int_0^{\infty} \frac{c^3}{\nu^3} e(\nu_0) S(\nu) d\nu = \frac{c^3}{\nu^3} e(\nu_0) \int_0^{\infty} S(\nu) d\nu = \frac{c^3}{\nu^3} e(\nu_0)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = - \frac{A_{21} c^3}{8\pi h \nu_0^3} N_1 e(\nu_0) = - \frac{dN_2}{dt}$$

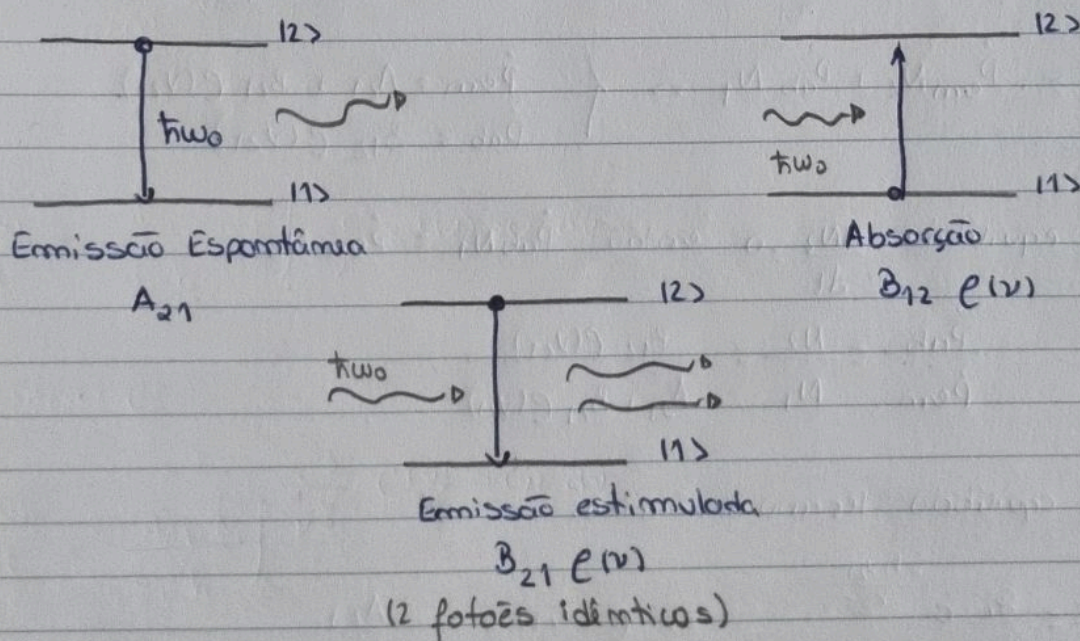
→ Onde a taxa de absorção da energia fica:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi e^2}{m} e(\nu_0)$$

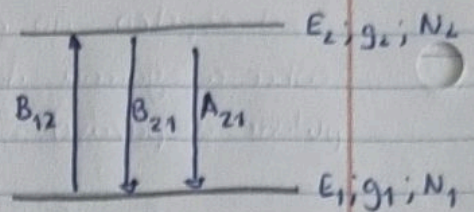
→ Não depende do perfil de linha. O espectro é tão largo que quase não varia então não é considerado.

3.6. Interação da luz (de espectro largo) com um corpo negro

→ As possíveis interações entre um átomo e um campo eletromagnético com $\nu \sim \nu_0$ são:



→ Considere uma caixa com N átomos de 2 níveis em equilíbrio termodinâmico com a radiação corpo negro na caixa.



→ A variação da população do nível 2 é:

$$\frac{dN_2}{dt} = \underbrace{-A_{21} N_2}_{\text{Emissão Espontânea}} + \underbrace{B_{12} \rho(\nu) N_1}_{\text{Absorção}} - \underbrace{B_{21} \rho(\nu) N_2}_{\text{Emissão Estimulada}} = - \frac{dN_1}{dt}$$

→ Se $\rho = 0 \Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = -A_{21} N_2$

→ Temos como solução: $N_2(t) = N_2(0) e^{-A_{21}t}$. É o tempo de vida médio $\tau = 1/A_{21}$.

→ Considere um conjunto $N_2(0)$ de átomos excitados no $t=0$. A probabilidade de um átomo sobreviver no estado excitado até um tempo t é:

$$P(t) = C e^{-A_{21}t} \Rightarrow \text{Normalização} \rightarrow A_{21} e^{-A_{21}t}$$

→ Temos então que as probabilidades são dadas por:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\dot{P}_{em} N_2 + \dot{P}_{ab} N_1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{P}_{em} = A_{21} + B_{21} \rho(\nu_{21}) \\ \dot{P}_{ab} = B_{12} \rho(\nu_{21}) \end{cases}$$

→ No equilíbrio $\frac{dN_2}{dt} = 0$ então $\dot{P}_{ab} N_1 = \dot{P}_{em} N_2$:

$$\frac{\dot{P}_{ab}}{\dot{P}_{em}} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} \rho(\nu_{21})}{A_{21} + B_{21} \rho(\nu_{21})}$$

→ No equilíbrio termodinâmico:

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1} &= \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{21}}{k_B T}} \Rightarrow \rho(\nu_{21}) = \frac{A_{21}}{e^{-\frac{h\nu_{21}}{k_B T}} \frac{g_1}{g_2} (B_{12} - B_{21})} \\ &= \frac{8\pi \nu_{21}^2}{c^3} h \nu_{21} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{21}}{k_B T}} - 1} \\ \langle n(\nu_{21}) \rangle &= \text{n.º média de fótons / modo} \end{aligned}$$

→ Logo existe apenas um coeficiente independente:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad ; \quad A_{21} = \frac{8\pi\nu_{21}}{c^3} h\nu_{21} B_{21}$$

Nº de

Estados no
estado fundamental