Exercícios de Física Computacional

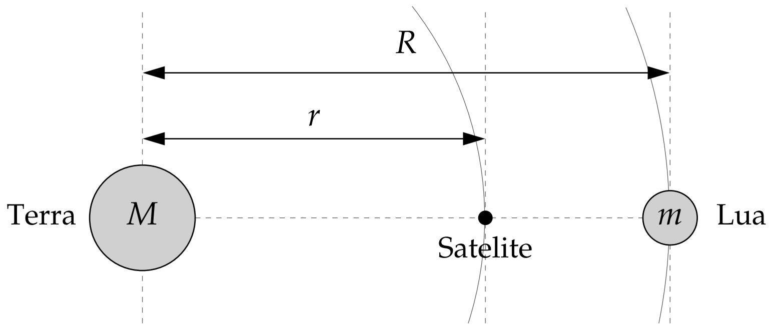
Escola de Ciências da Universidade do Minho

Física e Engenharia Física

ano letivo 2021/22, 1º semestre

Folha 4

1. No ponto de Lagrange L_1 entre a Terra e a Lua um satélite irá orbitar a Terra em perfeita sincronia com a Lua, estando sempre entre os dois planetas. Tal deve-se ao equilíbrio entre as atrações da Terra e da Lua:



   (a) Assumindo órbitas circulares, mostre que a distância r entre o centro da Terra e o ponto L_1 é dada por:

$$\frac{GM}{r^2} - \frac{Gm}{(R-r)^2} = \omega^2 r,$$

   onde M e m são as massas da Terra e da Lua, respetivamente, G é a constante de gravitação universal e ω é a velocidade angular quer do satélite, quer da Lua.

   (b) Determine numericamente a distância r entre o centro da Terra e o ponto L_1 considerando:

$$\begin{aligned} G &= 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}, \\ M &= 5.974 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}, \\ m &= 7.348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}, \\ R &= 3.844 \times 10^{8}\,\mathrm{m}, \\ \omega &= 2.662 \times 10^{-6}\,\mathrm{s^{-1}}. \end{aligned}$$

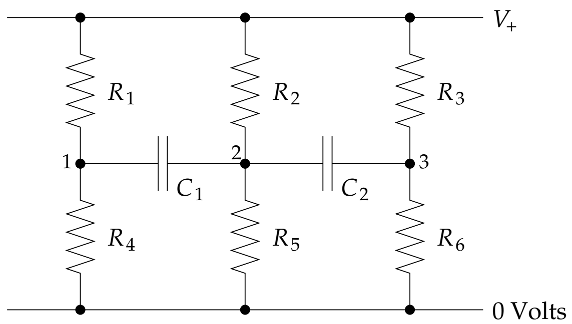
2. Considere a equação $x = e^{1-x^2}$.

   (a) Resolva-a graficamente.

(b) Resolva-a iterativamente (método do relaxamento), tentando incialmente $x = 1/2$, inserindo este valor no lado direito da equação, calculando um novo $x' = e^{1-(1/2)^2}$, usando este novo valor para calcular x'' e assim sucessivamente. O método converge?

(c) Obtenha uma equação equivalente, tomando o logarítmo de ambos os lados da equação e repita o método anterior. O método agora converge?

3. Considere o seguinte circuito:



A diferença de potencial V_+ depende do tempo e tem a forma $V_+ = x_+ e^{i\omega t}$, sendo x_+ uma constante. As resistências do circuito podem ser tratadas com a lei de Ohm, como usualmente. Nos condensadores, a carga Q e a diferença de potencial relacionam-se através da expressão $Q = CV$, onde C é a sua capacitância. Derivando ambos os lados desta equação obtemos a corrente I:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

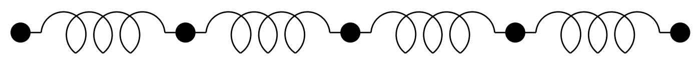
(a) Assumindo que as diferenças de potencial nos pontos 1, 2, and 3 são $V_1 = x_1 e^{i\omega t}$, $V_2 = x_2 e^{i\omega t}$, e $V_3 = x_3 e^{i\omega t}$; e aplicando a lei de Kirchhoff em cada um dos 3 pontos, verifique que as constantes x_1, x_2, e x_3 satisfazem as seguintes equações:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + i\omega C_1\right)x_1 - i\omega C_1 x_2 = \frac{x_+}{R_1},$$
$$-i\omega C_1 x_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + i\omega C_1 + i\omega C_2\right)x_2 - i\omega C_2 x_3 = \frac{x_+}{R_2},$$
$$-i\omega C_2 x_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} + i\omega C_2\right)x_3 = \frac{x_+}{R_3}.$$

(b) Escreva um programa para obter x_1, x_2, e x_3 nas seguintes condições:

$$R_1 = R_3 = R_5 = 1\,\mathrm{k}\Omega,$$
$$R_2 = R_4 = R_6 = 2\,\mathrm{k}\Omega,$$
$$C_1 = 1\,\mu\mathrm{F}, \qquad C_2 = 0.5\,\mu\mathrm{F},$$
$$x_+ = 3\,\mathrm{V}, \qquad \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}.$$

4. Considere um sistema de N massas idênticas, ligadas por molas horizontais, também idênticas. Ignore a gravidade e o atrito.



Seja ξ_i o deslocamento da massa i em relação à sua posição de equilíbrio. As equações de movimento para o sistema são dadas pela segunda lei de Newton:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}t^2} = k(\xi_{i+1} - \xi_i) + k(\xi_{i-1} - \xi_i) + F_i \ ,$$

sendo m a massa e k a (mesma) constante de cada uma das molas e F_i uma força externa aplicada na massa i. As únicas excepções à equação anterior são para as massas das extremidades, que são descritas por:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_1}{\mathrm{d}t^2} = k(\xi_2 - \xi_1) + F_1 \ ,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_N}{\mathrm{d}t^2} = k(\xi_{N-1} - \xi_N) + F_N \ .$$

Considere agora que aplicamos uma única força ao sistema e que esta é aplicada à primeira massa e varia com o tempo da seguinte forma: $F_1 = Ce^{\mathrm{i}\omega t}$, sendo C uma constante. O resultado será que cada massa irá oscilar com frequência ω, sendo a solução geral para a sua posição dada por:

$$\xi_i(t) = x_i e^{\mathrm{i}\omega t} \ .$$

A magnitude de x_i controla a amplitude de vibração da massa i e a sua fase controla a fase da oscilação em relação à força aplicada.

(a) Mostre que o sistema é descrito pelo seguinte sistema de equações:

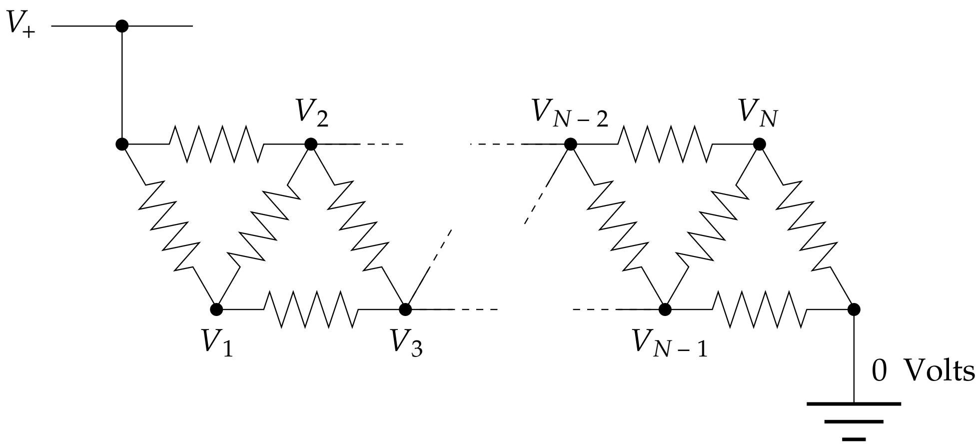
$$\begin{aligned} (\alpha - k)x_1 - kx_2 &= C \\ \alpha x_i - kx_{i-1} - kx_{i+1} &= 0 \\ (\alpha - k)x_N - kx_{N-1} &= 0 \end{aligned}$$

onde $\alpha = 2k - m\omega^2$.

(b) Resolva este problema para $N = 26$, $C = 1$, $m = 1$, $k = 6$ e $\omega = 2$.

(c) Repita a alínea anterior para $N = 1000$ e $N = 100000$. Sugestão: pode usar a função `banded` (disponível em `banded.py`, na blackboard).

5. Considere o seguinte circuito:



Todas as resistências têm a mesma resistência, R. A fonte de tensão introduz uma diferença de potencial de $V_+ = 5$V e pretende-se determinar $V_1 \ldots V_N$ nos pontos internos do circuito.

(a) Usando as leis de Ohm e de Kirchhoff, demonstre que:

$$\begin{aligned}
3V_1 - V_2 - V_3 &= V_+, \\
-V_1 + 4V_2 - V_3 - V_4 &= V_+, \\
&\vdots \\
-V_{i-2} - V_{i-1} + 4V_i - V_{i+1} - V_{i+2} &= 0, \\
&\vdots \\
-V_{N-3} - V_{N-2} + 4V_{N-1} - V_N &= 0, \\
-V_{N-2} - V_{N-1} + 3V_N &= 0.
\end{aligned}$$

Exprima estas equações na forma matricial, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(b) Escreva um programa para determinar os valores de V_i para $N = 6$ junções internas.

(c) Repita o exercício para $N = 10\,000$.

(d) Repita a alínea anterior considerando a estruturas de bandas da matriz **A** e usando a função `banded` (`banded.py`).