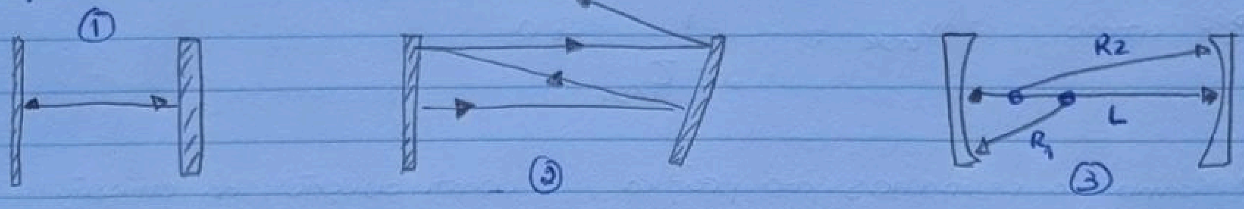
7. Laser Resonators and Gaussian Beams

→ Até agora consideramos sempre que os espelhos do laser era planos. Mas o que acontece é que se estes espelhos não estão perfeitamente alinhados, paralelos, o raio de luz vai sair da cavidade e "desligar" o laser o que não é o ideal (2)

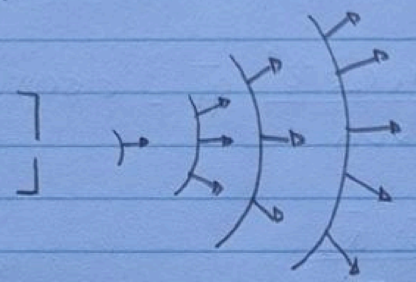
→ Normalmente o que se utiliza para espelhos são superfícies esféricas. (3)



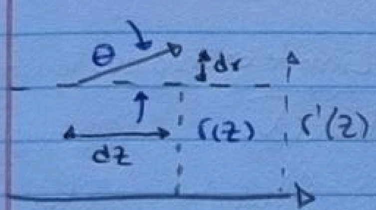
→ Quando o ganho e o índice de refração do meio ativo são aproximadamente uniformes podemos aproximar os modos do laser como sendo os modos da cavidade vazia

7.2. A Matriz do Raio

→ O raio geométrico propaga-se perpendicularmente às frentes de onda. Vamos assumir que a direção do raio é a direção do fluxo de energia.



→ Em situações de interesse prático lidamos com ondas de luz que viajam mais ou menos numa única direção, a z. Os raios geométricos que pensamos são quase paralelos ao eixo do z. E em qualquer ponto, há um raio que possui um deslocamento ~~(temporal)~~ lateral r(z), medido através do eixo do z e do declive.

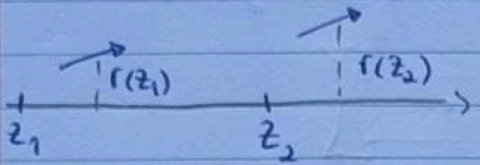


$$r'(z) = \frac{dr}{dz} = \tan\theta \sim \sin\theta \sim \theta$$

$$\theta = \frac{dr}{dz} = r'$$

→ Na aproximação paraxial só precisamos da distância do raio do eixo ótico, r, e a sua inclinação r'. A estes raios chamamos de raios paraxiais. O r' é positivo ou negativo conforme o deslocamento, caso ele aumente ou diminua, respetivamente.

→ Se considerarmos o deslocamento e o declive num ponto z_1 com outro ponto z_2 tem-se que, no vácuo como não há meio para alterar a direção do raio:



$$r(z_2) = r(z_1) + r'(z_1)(z_2 - z_1)$$
$$r'(z_2) = r'(z_1)$$

→ Colocando isto numa matriz: $\begin{bmatrix} r(z_2) \\ r'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (z_2 - z_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(z_1) \\ r'(z_1) \end{bmatrix}$

→ Assim o raio é completamente caracterizado por uma matriz 2×1.

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$

→ Diz-nos como o raio é modificado ao propagar-se em d.

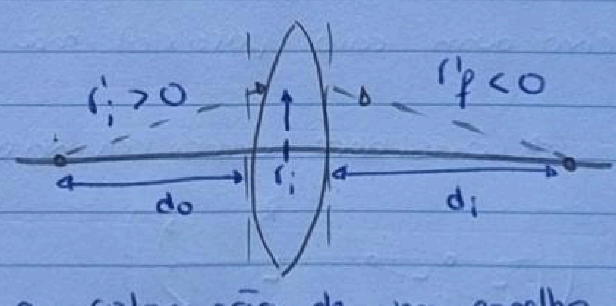
→ Agora se colocarmos o raio a propagar-se por uma lente fina (lente delgada), tem-se que

$r_f = r_i$ (o deslocamento antes e depois 0 é igual)

(O declive / ângulo é que muda)

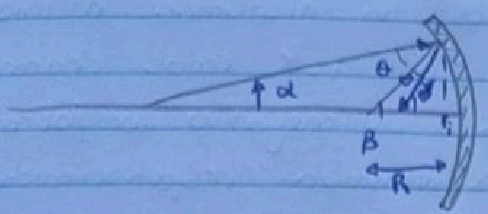
$$r'_f = -\frac{r_i}{d_i} = \frac{r_i}{d_o} - \frac{r_i}{f} = r'_i - \frac{r_i}{f}$$

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$



→ Outra opção interessante é a colocação de um espelho esférico. Novamente, o deslocamento do raio mantém-se mas o ângulo / slope não:

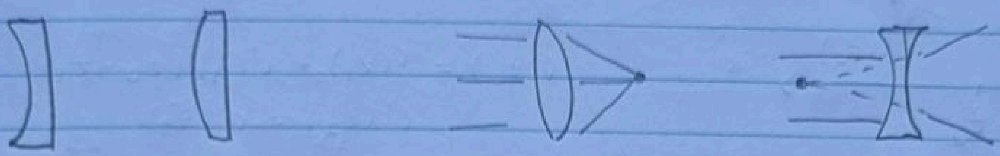
$$r_i = r_f$$
$$r'_f = r'_i - \frac{2r_i}{2R}$$



$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$

Nota

↳ $R>0$ em espelhos concavos; $R<0$ em espelhos convexos.
↳ $f>0$: lentes convergentes ; $f<0$: lentes divergentes



concavo   convexo   convergente   Divergente

→ Em geral: $\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$ → Matriz do Raio Geométrico

Se tivermos várias coisas a multiplicar (espaço^1 - lente^2 - espaço^3) a matriz é

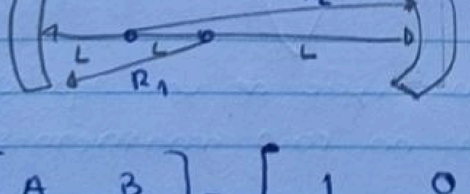
$$[\ ] = [\ ^3\ ][\ ^2\ ][\ ^1\ ][\ ]$$

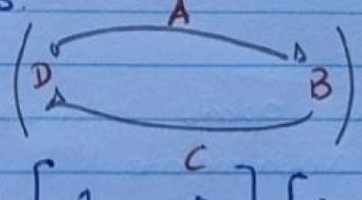
7.3. Condição de estabilidade das cavidades

→ Consideremos um raio a propagar-se dentro da cavidade em loop (⇄). Caso o raio se mantenha dentro da cavidade, esta é estável. Caso contrário, é instável.

→ Uma cavidade é considerada estável se a distância do eixo dum raio paraxial não aumenta sem limite.

→ Considere uma cavidade geral, com 2 espelhos esféricos concavos:





$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$ → 1 volta à cavidade

Nota: um espelho reto é considerado um espelho esférico com raio de curvatura infinito.

→ O determinante da matriz resultante é 1, isto porque o produto dos determinantes das 4 matrizes é 1.

→ Sucessivas voltas à cavidade vão fazer com que, ou o raio escape da cavidade ou fique preso lá.

→ Para encontrar a condição que determina se um raio é estável ou instável tem-se que:

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} \Rightarrow r_{s+1} = A r_s + B r'_s \Rightarrow r'_s = \frac{1}{B}(r_{s+1} - A r_s)$$

$$r'_{s+1} = C r_s + D r'_s = \frac{1}{B}(r_{s+2} - A r_{s+1})$$

$$r'_{s+1} = C r_s + D r'_s = \underbrace{C r_s + D\left[\frac{1}{B}(r_{s+1} - A r_s)\right] = \frac{1}{B}(r_{s+2} - A r_{s+1})}$$

$$\Leftrightarrow CB r_s + D r_{s+1} - AD r_s = r_{s+2} - A r_{s+1}$$

$$r_{s+2} - (A+D) r_{s+1} + \underbrace{(AD - CB)}_{1} r_s = 0$$

Se $r_s = r_{max} e^{is\theta}$ para a cavido ser estável θ tem de ser real.

$$\cancel{r_{max}} e^{i(s+2)\theta} - (A+D)\cancel{r_{max}} e^{i(s+1)\theta} + \cancel{r_{max}} e^{is\theta} = 0$$

$$\underset{\times}{e^{is\theta}}(e^{i2\theta} - (A+D)e^{i\theta} + 1) = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} - (A+D)e^{i\theta} + 1 = 0$$

! não pode ser zero!

$$e^{i\theta} = \left(\frac{A+D}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\right)$$

→ Podemos identificar:

$$\cos\theta = \frac{A+D}{2}$$ → para que θ seja real:

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \end{bmatrix}$$

$$-1 \leq \left(\frac{A+D}{2}\right) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \left(\frac{2 + A + D}{4}\right) \leq 1$$

$$0 \leq \left(\frac{2 + 2 - \frac{4L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} - \frac{4L^2}{R_1 R_2}}{4} \right) \leq 1$$

$$\boxed{0 \leq \left[1 - \frac{L}{R_2} - \frac{L}{R_1} - \frac{L^2}{R_1 R_2} \right] \leq 1}$$ Condição de Estabilidade

depende do raio de curvatura e da distância que os separa (L)

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad ; \quad g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \quad ; \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}$$

Notas

- Lasers HeNe: ~~laser~~ a cavidade hemisférica é comum
- Lasers de alta potência: cavidade confocal (maior tamanho do feixe)
- Raios em cavidades instáveis tem um número limitado de voltas antes de sair da cavida. Pode ser útil para ~~p~~ lasers pulsados de alta potência.

25/11/2022

7.4. A Equação Paraxial

→ Neste capítulo vamos ~~aveg~~ averiguar uma aproximação da solução de Maxwell para a equações das ondas. Sabemos que a equação do campo elétrico no vácuo é dada por:

$$\nabla^2 E(\vec{r},t) - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(\vec{r},t) = 0$$ (equação da onda escalar)

↳ tem em conta interferência

→ Como estamos interessados nas ondas / difração mas não polarização campos monocromáticos então:

$$E(\vec{r},t) = \mathcal{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

→ Substituindo em cima, obtem-se a equação Helmholtz:

$$\nabla^2 E(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0 \quad , \quad k = \frac{n\omega}{c}$$

→ Há algumas soluções para aquela equação
- Onda plana: $E(\vec{r},t) = \mathcal{E}_0\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$
- Onda esférica: $E(\vec{r},t) = \dfrac{\mathcal{E}_0}{r}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

→ Da ótica sabemos que temos soluções do tipo:

$$E(\vec{r}) = \mathcal{E}_0\, u(\vec{r})\, e^{i(kz)}$$

→ Para a variação lenta, assumimos que não há variações no λ ou em Δz. Quando $\Delta E \ll E$, tendo em conta distâncias, então $\Delta z \sim \lambda$.

→ A inclinação dos raios é sempre pequena (variação rápida)

Aproximação Paraxial

$$\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta$$
$$\cos\theta \sim 1$$

$$\nabla^2 \mathcal{E}(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0$$

1ª Derivada:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u(\vec{r})\, e^{ikz}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + ik\right) e^{izk}$$

2ª Derivada

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + ik\right) e^{ikz}\right] = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial u}{\partial z} ik - k^2\right] e^{ikz}$$

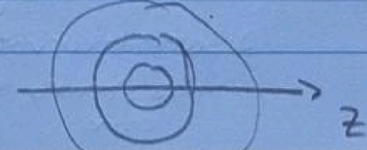
→ Na aproximação de envolvente lenta tem-se que:

$$\lambda\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \ll |u| \quad \text{ou} \quad \lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|$$

$$\boxed{\nabla^2 u(\vec{r}) + 2ik\frac{\partial}{\partial z} u(\vec{r}) = 0}$$ Equação da onda paraxial

$$\frac{4\pi i}{\lambda}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial z}$$

→ Para uma onda esférica tem-se que: $E(r) = \mathcal{E}_0\, r_{ref}\, \dfrac{e^{ik(r-r_0)}}{(r-r_0)}$ onde a onda esférica é emitida em r_0.



$$(r-r_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$= (z-z_0)\sqrt{\underbrace{\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(z-z_0)^2}}_{\text{muito pequeno}} + 1} \sim (z-z_0) + \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(z-z_0)}$$

$$E(x,y,z,t) \sim \mathcal{E}_0\, e^{ik(z-z_0)} \underbrace{\frac{r_{ref}\, e^{ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(z-z_0)}}}{(z-z_0) + \cancel{\left(\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(z-z_0)}\right)}}}_{u(r)}$$

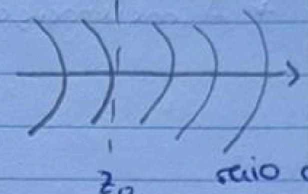
→ mnt pequeno

→ Se $R(z) = (z-z_0)$:

↳ raio de curvatura da frente de onda

$$u(x,y,z) = R_0 \frac{e^{ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2R(z)}}}{R(z)}$$

Raio de curvatura na referência arbitrária no z_0



raio de curvatura aumenta com a distância

→ O que vimos até agora é que temos frentes de onda esféricas e um tamanho do feixe infinito. O que não é ideal para uma descrição de um feixe laser.

→ Uma solução muito simples é introduzir uma parte complexa que irá limitar o tamanho do feixe, isto é, quando x é relativamente grande a parte imaginária vai limitar x.

$$R(z) \rightarrow q(z) = q_0 + z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)} = \frac{1}{R(z)}$$

$x_0 = y_0 = 0$

$$u(r) = \frac{q(0)}{q(z)} \underbrace{\exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)}\right]} \underbrace{\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right]}$$

Esta parte é uma fase (que varia com z)

Esta parte é real e descreve a variação na direção perpendicular à direção da propagação do feixe (x,y)

$$u(r) = \frac{q(0)}{q(z)} \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2}\left\{\underbrace{Re\left[\frac{1}{q(z)}\right]} + \underbrace{i\,Im\left[\frac{1}{q(z)}\right]}\right\}\right]$$

Descreve a curvatura das frentes de onda

↳ Limita o tamanho do feixe tem de ser positivo para confinar o feixe

7.5. Feixes Gaussianos

→ A intensidade de propagação de uma onda, com ~~uma~~ forma de beam, na direção do eixo dos z ~~tem~~ é nula a uma certa distância do eixo z.

→ Uma certa distância, w, define a largura do feixe, isto porque:

$$u(r) = \frac{q(0)}{q(z)} \exp\left[ik \frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right] \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right]$$

↳ Define o confinamento do feixe

→ E agora, o raio de curvatura muda:

$$R(z) = R_0 + (\cancel{z} - z_0) \Rightarrow q(z) = q_0 + z \Rightarrow \frac{1}{R(z)} = Re\left[\frac{1}{q(z)}\right]$$

→ Assim definimos um novo plano de referência, onde q é puramente imaginário (z_0).

$$R_{\text{onda esférica}} = q_0 + z \ , \ a\ z=0 \rightarrow R_{\text{onda esférica}} = q_0 = q(z=0)$$

↓ puramente imaginário

→ ou seja, quando $Im\left[\frac{1}{q(z)}\right] \geq 0$ então:

$$\frac{1}{q}(z=0) = \frac{\lambda}{-i\pi w_0^2} = \boxed{\frac{i\lambda}{\pi w_0^2}} = i z_R$$

→ Distância de Rayleigh

→ No geral tem-se que: $q(z) = -iz_R + z$. Na posição de referência a frente de onda é plana. Quando a frente de onda tem uma curvatura mais apertada é que possível que: $z = z_R$ (mínimo).

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{-iz_R + z} = \frac{z + iz_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} + \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)}$$

$$Re\left[\frac{1}{q(z)}\right] = \frac{z}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} \Rightarrow R(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z}$$

→ Quando $z = 0$, R vai tender para o ∞. Inicialmente ao afastar de z_0, R diminui e depois aumenta. R mínimo encontra-se em $z = z_R$.

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{q(z)}\right] = \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \; * \Rightarrow w(z) = w_0 \sqrt{\frac{z^2}{z_R^2} + 1}$$

→ Em $z=0$, $w = w_0$. Ao afastar de $z=0$, w aumenta sempre. Quando $z = z_R$, $w^2 = 2w_0^2$ isto é a área transversal do feixe aumenta dum fator de 2.

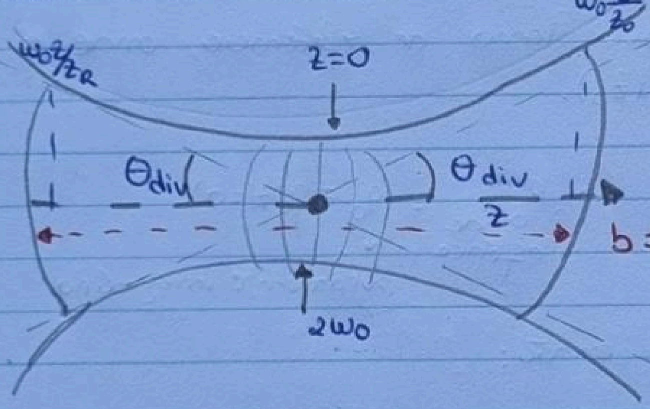
*

$$\frac{\lambda}{\pi w^2(z)} = \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} \therefore w^2(z) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{z^2 + z_R^2}{z_R} = \frac{\lambda z_R}{\pi}\left(\frac{z^2}{z_R^2} + 1\right)$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{2\lambda} \qquad = w_0^2\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)$$

→ Na divergência e convergência, as frentes de onda ganham uma certa curvatura

Para $z > z_R \Rightarrow w = w_0 \frac{z}{z_R}$



$b = 2z_R$ Parâmetro confocal, onde a área do feixe é ≤ 2

* Quanto menor a largura da curvatura mínima w_0, menor a distância de Rayleigh é assim sendo maior a taxa de crescimento de w com a distância em z.

Isto é parecido a quando uma onda plana é difratada por uma abertura circular ~~num~~ num visor opaco. Quanto menor a abertura D, maior a difração. Isto acontece aqui quanto menor w_0 maior $w(z)$. Pode-se então definir um ângulo de divergência:

$$\theta_{div} = \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0 \frac{z}{z_R}}{z} = \frac{w_0}{z_R} = \underbrace{1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}}_{\text{abertura circular}}$$

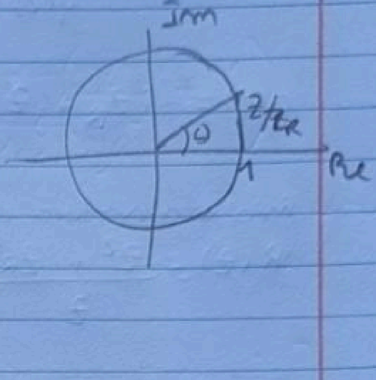
o que temos na realidade

$$\theta_{div} = w_0 \frac{\lambda}{\pi w_0^2} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

→ Se voltarmos a $u(r)$, vermos que $\frac{q_0}{q(z)}$ é complexo e como tal irá induzir um fase, Fase de Guoy

$$u(r) = \frac{q_0}{q(z)} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$$

$$\frac{q_0}{q(z)} = \frac{-iz_R}{-iz_R + z} = \frac{1}{1+i\,z/z_R}$$



$$\left(1 + i\frac{z}{z_R}\right) = \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}\; e^{i\theta} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\theta$$

$$\tan\theta = \frac{z}{z_R}$$

$$\frac{q_0}{q(z)} = \frac{w_0}{w(z)} \underbrace{e^{-i\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)}}_{\text{Fase de Guoy}}$$

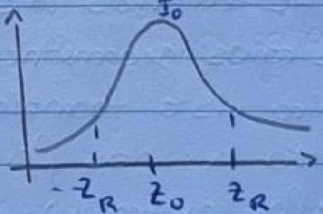
→ Ao passar pelo foco há uma adição de fase extra.

→ Se olharmos agora para a irradiância ao longo do eixo ótico temos que:

$$I(r,z) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\,n\,|E(r,z,t)|^2 = I_0\left[\frac{w_0}{w(z)}\right]^2 \exp\left[-2\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2\right]$$

$$I(0,z) = \frac{I_0}{1+(z/z_R)^2}$$

→ Ao longo da distância a intensidade vai diminuir:



→ Quando $r = w(z)$:

$$I(w(z), z) = I_{máx}\, e^{-2} = 0{,}135\; I_{máx}$$

→ Para se obter a potência calcula-se o integral da irradiância:

$$P = 2\pi\int_0^\infty r\,dr\, I(r,z) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r\,dr\; I(z,r)$$

Se:

$$s = \frac{2r^2}{w^2(z)} \;\; e \;\; ds = \frac{4r\,dr}{w^2(z)} \Rightarrow \quad = 2\pi \cdot \frac{1}{4}\int_0^\infty ds\, e^{-s}\, I(z,r) = 2\pi\, I(z,r)$$

$$P = 2\pi I_0 w_0^2 \int_0^\infty \frac{r\,dr}{w^2(z)} e^{-2\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2} = \frac{\pi}{2} I_0 w_0^2 \text{ (é independente de } z)$$

Resumo

$$E(r, z, t) = \frac{1}{q(z)} e^{ik\frac{r^2}{2q(z)}} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$q(z) = -iz_R + z \quad ; \quad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad ; \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)}$$

Raio de curvatura das frentes de onda

$$R(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z}$$

Tamanho transversal do feixe

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

$$\theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

Só é preciso saber a posição da "cintura mínima" ($z=0$), w_0 e λ

7.6. The ABCD law for Gaussian Beams

→ Descobrimos então que um feixe gaussiano se mantém à medida que se propaga no vácuo. A largura do feixe ~~era~~ muda tal como o raio de curvatura, mas a onda e a sua forma mantém-se.

→ As matrizes ABCD são convenientes para seguir a propagação dos raios geométricos. Embora possa parecer estranho, à primeira vista também se pode descrever a variação do parâmetro q dos feixes Gaussianos.

→ Por exemplo, calcular a transformação de q_2 num feixe Gaussiano:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D/q_1}{A + B/q_1}$$

→ Vejamos alguns casos simples: Para a propagação no espaço livre tem-se em conta a seguinte matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

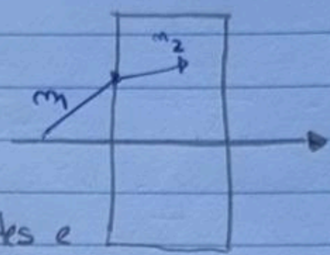
→ Para q_2:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \Rightarrow q(z+d) = \frac{q(z) + d}{0 + 1}$$

$q(z+d) = q(z) + d = iz_R + z + d$ (a parte imaginária mantém-se)

→ Se tivermos um meio com índice de refração n:

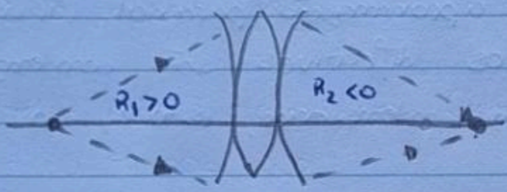
$$M = \begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$



Para mudanças de meio/interface

Temos isto antes e depois do bloco

→ Numa lente delgada



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

→ A frente de onda incidente é equivalente a uma fonte pontual colocada à distância $d_o = R_1$.
Há saída da lente do feixe, o raio de curvatura da frente de onda é equivalente a uma onda esférica que converge a uma distância $d_i = -R_2$.
→ E então:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

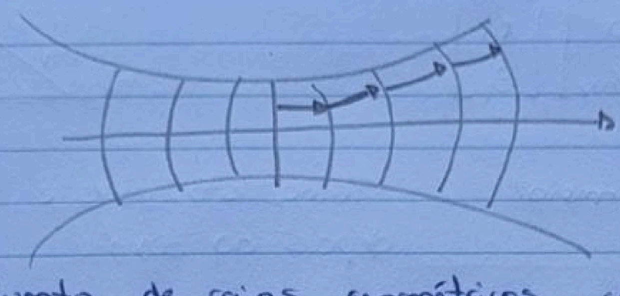
→ Como a lente é muito fina $w_1^2 = w_2^2$ (o tamanho a entrar é igual ao tamanho a sair. Como $R_1 > 0$ e $R_2 < 0$:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} + i\frac{\lambda}{\pi w_2^2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} + i\frac{\lambda}{\underset{\underset{w_1^2}{\parallel}}{\pi w_2^2}} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix}$$

Implicações

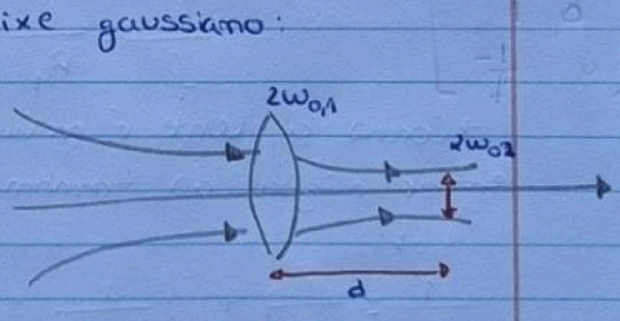
→ É talvez inesperado que a solução da equação de onda possa ser propagada usando regras de ótica geométrica. Mas acontece, o feixe gaussiano ao propagar-se tem diferentes frentes de onda, onde os ângulos seguem uma onda ~~og~~ gaussiana. Isto é, o feixe mantém-se com a forma gaussiana quando se propaga num sistema ótico com a aproximação paraxial.



→ Um conjunto de raios geométricos com uma distribuição de intensidade gaussiana segue a propagação do feixe gaussiano perfeitamente dentro da aproximação paraxial. (Transformações de Wigner) Todos os efeitos difrativos são contemplados na distribuição Gaussiana da intensidade, isto é, no valor $q(z=0) = -iz_R$.

→ Para a equação de Schrödinger apenas 2 condições iniciais bastam para descrever a evolução da onda. A equação da onda paraxial é formalmente igual à equação de Schrödinger em 2 dimensões.

→ Consideremos o caso particular onde uma lente fina é colocada na cintura mínima do feixe gaussiano:



$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{i\lambda}{\pi w^2} = \frac{i\lambda}{\pi w_{0,1}^2} = \frac{i}{z_{R,1}}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D/q_1}{A + B/q_1} = -\frac{1}{f} - \frac{i\lambda}{\pi w_{0,1}^2}$$

Nota: se $f > 0$ o feixe tem um novo foco onde vai convergir

Se d for a distância entre as cinturas mínimas então:

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{dist.}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}}_{\text{lente fina}} = \begin{bmatrix} 1-\frac{d}{f} & d \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 1-\frac{d}{f};\ B = d;\ C = -\frac{1}{f};\ D = 1$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-1/f + 1/q_1}{1 - d/f + d/q_1} = \frac{-1 + i f/z_{R,1}}{f - d + i f d/z_{R,1}}$$

$$= \underbrace{\frac{-(f-d) + d(f/z_{R,1})^2}{(f-d)^2 + (fd/z_{R1})^2}}_{\frac{1}{R_2} \to \text{ desde a lente até ao foco}} + \underbrace{\frac{i\, fd/z_{R1} + (f-d)(f/z_{R,1})}{(f-d)^2 + (fd/z_{R1})^2}}_{\frac{\lambda}{\pi w_2^2}}$$

→ No foco, onde $R_2 \to \infty$:

$$(f-d) = d\left(\frac{f}{z_{R1}}\right)^2 \qquad d = \frac{f}{1 + (f/z_{R1})^2}$$

d é ligeiramente menor que f

→ quando $d \sim f$ ou $f/z_{R1} \ll 1$, $1/q_2$ é unicamente imaginário:

$$\frac{1}{q_2} = i\frac{z_{R1}}{f^2} = \frac{i}{z_{R2}} \Leftrightarrow \frac{i\lambda}{\pi w_{01}^2 f^2} = \frac{i\pi w_{02}^2}{\lambda}$$

$$\frac{\pi w_{02}^2}{\lambda} = \frac{f^2 \lambda}{\pi w_{01}^2} \Leftrightarrow w_{02} = \sqrt{\frac{f^2 \lambda^2}{\pi^2 w_{01}^2}} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}} \; *$$

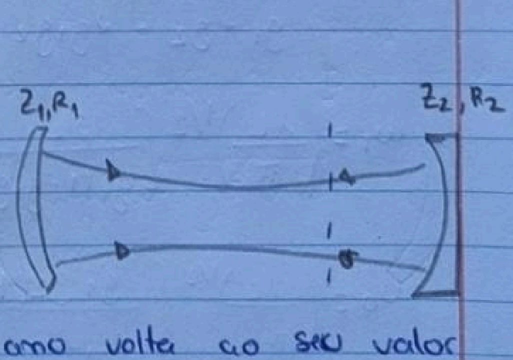
$* \Rightarrow d_f \approx \dfrac{4\lambda f}{\pi\, d_{in}}$ → Limite de difração

Para concentrar o feixe, → ele vai ser mt + divergido

→ Isto indica que o feixe Gaussiano pode ser concentrado num ponto muito pequeno. Temos então o limite de Rayleigh na onda plana:

$$d_f = 2{,}44 \frac{\lambda f}{d_{in}}$$

7.7. Modos do feixe Gaussiano



→ Um modo é um "campo próprio" da cavidade, isto é, depois de uma volta à cavidade o parâmetro q do feixe Gaussiano volta ao seu valor inicial.

→ Vamos examinar isto com a lei de ABCD:

$$q(z) = \frac{A q(z) + B}{C q(z) + D}$$, para qualquer posição z dentro da cavidade

→ Ao ser refletido, pelos espelhos, a forma do feixe não pode alterar, pelo que o raio de curvatura da frente de onda tem de ser igual ao raio de curvatura do espelho, para que a reflexão não altere a frente de onda.

$$R(z_1) = z_1 + \frac{z_0^2}{z_1} \quad ; \quad R(z_2) = z_2 + \frac{z_0^2}{z_2} = R_2 \quad ; \quad z_2 - z_1 = L$$

→ Usando estas 3 equações cria-se um sistema de modo a encontrar as 3 incógnitas, z_1, z_2 e z_0:

$$z_1 = \frac{-L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L} \quad ; \quad z_2 = \frac{L(R_1 - L)}{R_1 + R_2 - 2L} \quad ; \quad z_0^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}$$

→ como $z_0^2 = \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right) \Rightarrow w_0 = (\lambda/\pi)^{1/2} \frac{\left[L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)\right]^{1/4}}{(R_1 + R_2 - 2L)^{1/2}}$

→ Relembrando a condição de estabilidade, para o feixe poder oscilar na cavidade, tem de ter parâmetros adequados.

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$

→ Assim pode-se representar os w em termos de g:

$$g_1 = \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \qquad R_1 - L = R_1\left(1 - \frac{L}{R_1}\right) = R_1 g_1$$

$$g_2 = \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \qquad R_2 - L = R_2 g_2$$

$$z_1 = \frac{-L g_2 (1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2 g_1 g_2} \quad ; \quad z_2 = z_1 + L$$

$$w_1 = \left(\frac{\lambda L}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 g_2)}\right]^{1/4} \quad ; \quad w_2 = \left(\frac{\lambda L}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{g_1}{g_2(1 - g_1 g_2)}\right]^{1/4}$$

$$w_0 = \left(\frac{\lambda L}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2 g_1 g_2)^2}\right]^{1/4} = \text{Spot size at beam waist}$$

Condição de ressonância

→ A forma de onda gerada no espelho da esquerda e da direita pelo feixe gaussiano que se propagam de um lado para o outro formam um modo de ressonância. Como eles não mudam apesar de sucessivas reflexões, o padrão da onda mantém-se constante.

→ A fase do feixe gaussiano ao longo do eixo ótico ($r=0$) é dada por:

$$\theta(z) = kz - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

→ Se o modo é ressonante, depois de uma volta à cavidade a fase adquirida é múltiplo de 2π. Então ao fim de meia volta será π:

$$\theta(z_2) - \theta(z_1) = k(z_2 - z_1) - \left[\tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right] = m\pi, \quad m = 1,2,3\ldots$$

$\Rightarrow \nu = \frac{kc}{2\pi}$ → Frequências de Ressonância

$$\nu_m = \frac{c}{2L}\left(m + \frac{1}{\pi}\cos^{-1}\sqrt{g_1 g_2}\right)$$ → Modos de ressonância

→ O espaçamento entre modos é dado por:

$$\Delta\nu = \nu_m - \nu_{m-1} = \frac{c}{2L}$$

→ Em comparação com os espelhos planos:

$$g_j = 1 - \frac{L}{R_j} \to 1 \qquad \nu_m = m\frac{c}{2L}$$

7.8. Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian Beams

↳ Prof diz que não é mt relevante

→ Na realidade, o mundo é ainda mais complexo do que o que tratamos até agora: é possível termos modos transversais maiores do que os fundamentais, a partir da equação de onda paraxial.

→ Há soluções tipo: polinómios Hermite, funções de Hermite-Gaussiana (soluções da equação de Schrödinger para o oscilador harmónico).
Solução de ordem m tem m zeros.

Modos de Laguerre Gauss
↳ Considera-se o x e o y: simetria cilíndrica.