

## PARTE I

①

$$T = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{2}$$

a)  $\vec{\omega} \rightarrow$  velocidade angular  
 $\vec{L} \rightarrow$  momento angular

b) A velocidade angular  $\vec{\omega}$  define o sentido e direção do eixo no qual o corpo rígido faz a rotação num certo instante de tempo.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\psi \} ??$$

c) Quando estamos a falar em rotações infinitesimais num certo instante de tempo

d) velocidades generalizadas

e)

$$|\vec{\omega}_\theta| = \dot{\theta} \quad |\vec{\omega}_\phi| = \dot{\phi} \quad |\vec{\omega}_\psi| = \dot{\psi}$$

$\vec{\omega}_\theta \rightarrow$  direção do eixo dos  $z$  do sistema fixo

$\vec{\omega}_\phi \rightarrow$  direção da linha dos nodos

$\vec{\omega}_\psi \rightarrow$  direção do eixo dos  $z'$  do sistema móvel

f) Ângulos de Euler

? ?  $\left\{ \begin{array}{l} \theta \rightarrow \text{rotação de } \angle \theta \text{ em torno do eixo dos } z \text{ do SF} \\ \phi \rightarrow \text{rotação de } \angle \phi \text{ em torno da linha dos nodos} \\ \psi \rightarrow \text{rotação de } \angle \psi \text{ em torno do eixo dos } z' \text{ do SM} \end{array} \right.$

## PARTE II

①  $S=S'$  em  $t=0$ .

a)

Diagrama de rotação 1: Um sistema de eixos  $(x, y, z)$  é rotacionado em torno do eixo  $z$  por um ângulo de  $75^\circ$  para obter um novo sistema  $(x', y', z')$ . O eixo  $z'$  coincide com o eixo  $z$ . O eixo  $x'$  está no plano  $xz$  e o eixo  $y'$  está no plano  $yz$ . O ângulo entre  $x$  e  $x'$  é  $75^\circ$ . O eixo  $z$  é rotacionado em torno de  $x'$  por um ângulo de  $90^\circ$  para obter o eixo  $y'$ . O eixo  $y$  é rotacionado em torno de  $x'$  por um ângulo de  $90^\circ + 75^\circ = 165^\circ$  para obter o eixo  $z'$ .

Matriz de rotação  $R_{x'}(75^\circ)$ :

$\cos(x, x')$	$\cos(x, y')$	$\cos(x, z')$
$\cos(y, x')$	$\cos(y, y')$	$\cos(y, z')$
$\cos(z, x')$	$\cos(z, y')$	$\cos(z, z')$

Matriz de rotação  $R_{x'}(75^\circ)$ :

$\cos(0)$	$\cos(90^\circ)$	$\cos(90^\circ)$
$\cos(90^\circ)$	$\cos(75^\circ)$	$\cos(25^\circ)$
$\cos(90^\circ)$	$\cos(90^\circ + 75^\circ)$	$\cos(75^\circ)$

→

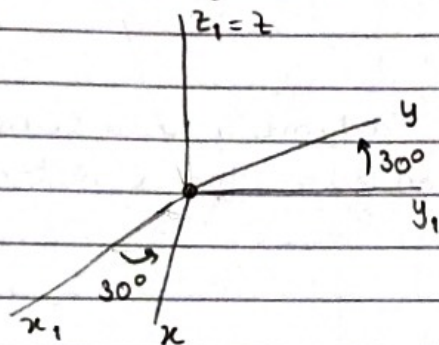


$$75^\circ = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$$

$$25^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

### ROTAÇÃO 2



$$R_{z_1}(30^\circ) = \begin{bmatrix} \cos(x, x_1) & \cos(x, y_1) & \cos(x, z_1) \\ \cos(y, x_1) & \cos(y, y_1) & \cos(y, z_1) \\ \cos(z, x_1) & \cos(z, y_1) & \cos(z, z_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & \cos(90^\circ-30^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ+30^\circ) & \cos(30^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(0^\circ) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### ROTAÇÃO TOTAL

$$R(\text{TOTAL}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

2-)

$$R'(\text{TOTAL}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$