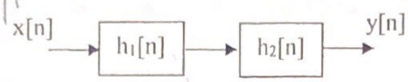
Processamento de Sinal

Teste 1 (2017-2018)

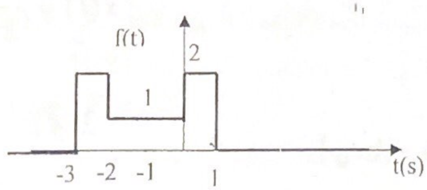
1. Determine e esboce a resposta do conjunto dos 2 sistemas LTI discretos mostrados na figura seguinte ao sinal $x[n]=\sum_{k=-1}^{+1}\delta(n-kN)$, sabendo que as respostas a impulso $h_1[n]=N_1(u[n-2]-u[n-N_1])$ e $h_2[n]=N_2(u[n+2]-u[n-N_2])$.

   1,14/3 a) Considere $N=2(N_1+N_2)$.
   0,75/1 ✓ b) Refira-se à causalidade e estabilidade de cada um dos sistemas. Justifique.



2. Considere o sinal f(t) mostrado na figura seguinte.

   1,7/2 ✓ a) Determine e represente graficamente $x(t)=f(t)*p(t)$ com $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3-6k)$ 10
   1,9/2 ✓ b) Determine $X(w)$.
   2,1/3 ✓ c) Considere o sistema LTI com $h(t)=\frac{21}{6}\mathrm{sinc}\left(\frac{7(t-3)}{6}\right)-\frac{3}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{t-3}{2}\right)$
   Determine a resposta deste sistema a x(t).
   ∅ ✓ d) Utilize a relação de Parseval para caracterizar o sistema em termos de estabilidade.



3. Considere o sistema LTI discreto caracterizado pela seguinte equação de diferenças: $y[n]=\frac{1}{2}y[n-2]-y[n-1]+2x[n]$

   2,1/3 a) Determine a resposta em frequência e a resposta impulsional do sistema.
   b) Determine a resposta do sistema ao sinal

   $$x[n]=\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

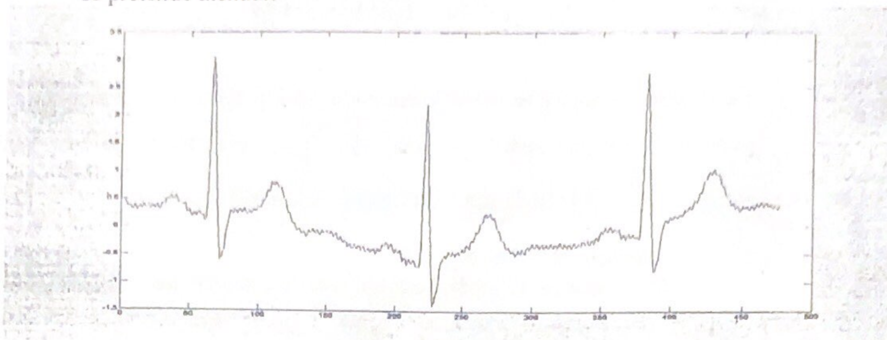
   c) Determine a resposta do sistema ao sinal $y[n]=(-1)^n\,x[n]$

$a^n u[n] = \frac{1}{1-ae^{-jw}}$ $1 \longrightarrow 2\pi\delta(w)$

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$

$x(t-3)$
$= X(w)\,e$

4. A figura seguinte representa um sinal de ECG com flutuação de linha de base que se pretende atenuar.



a) Derive a resposta em frequência de um sistema baseado na primeira diferença da entrada. Explique as limitações deste sistema ao nível da alteração de componentes importantes do ECG.

b) Proponha justificadamente alterações ao sistema derivado na alínea anterior que melhorem o seu desempenho.

Série Fourier S. Contínuos Periódicos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jkw_0 t}\,dt$$

T.F. S. Contínuos $\bar{N}$ periódicos

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}\,dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jwt}\,dw$$

TF S. Contínuos Periódicos

$$a_k = \frac{w_0}{2\pi}F(kw_0)$$

$$X(w) = \sum_k 2\pi a_k \delta(w - kw_0)$$

$$2AT \sin c\left(\frac{wT}{\pi}\right) \leftrightarrow$$

$$AT \sin c^2\left(\frac{wT}{2\pi}\right) \leftrightarrow$$

Convolução S. Contínuos atraso

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Convolução S. Discretos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$(t \cdot \tau)$

S. Discretos : tudo igual, mas

$$\begin{cases} t \longrightarrow n \\ \omega_0 \longrightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \\ \omega \longrightarrow \Omega \end{cases}$$

Teste 1 (2017-2018)

①

a) → Representar $h_1[n]$ e $h_2[n]$

→ Convolução: $h[n] = h_2[n] * h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_2[k] . h_1[n-k]$

→ Converter $h_1[n]$ para $h_1[n-k]$

→ Fazer a convolução: "início", durante, "fim" (NOTA: $\sum_{x}^{y} = (y-x+1)$)

b) Como $u[n]$ é uma função conhecida. Por isso, o sist. é causal
Funções finitas ⇒ $\sum$ finito ⇒ sist. estáveis

②

a) $$x(t) = f(t) * p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) . \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3-6k-\tau)\, d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \delta(t-3-6k-\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-3-6k)$$
→ $T = 6\,s$

b) $$(*) \begin{cases} X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ a_k = \frac{\omega_0}{2\pi} F(k\omega_0) \end{cases}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

1° → Decompor $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$
2° → Derivar: $f'(t) = f_1'(t) + f_2'(t)$
3° → Calcular $F'(\omega) = F_1'(\omega) + F_2'(\omega)$ ⇒ Prop. dualidade + Prop. linearidade
4° → Calcular $F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega)$ ⇒ Prop. desfasamento no tempo
5° → Periodizar $F(\omega)^{(*)}$, com $\omega_0 = \pi/3$
6° → Aplicar prop. desfasamento ($e^{-j\omega 3}$) a $F(\omega)$ ⇒ $X(\omega)$

c) 1° → Considerar $h_1(t)$ ($h(t)$ sem atraso no tempo)
2° → Decompor $h_1(t) = h_2(t) - h_3(t)$
3° → Calcular $H_1(\omega) = H_2(\omega) - H_3(\omega)$ ⇒ Prop. dualidade + Prop. linearidade
4° → Calcular $H(\omega) = H_1(\omega) . e^{-j\omega 3}$ ⇒ Prop. desfasamento

5° → Determinar quais são os harmónicos de $x(t)$ que passam por $h(t)$

6° → Construir $y(t)$, tendo em conta os harmónicos que passam

↳ calcular módulo/ganho para cada um

↳ calcular fase " " "

d) Relação de parseval ⇒ representa a energia do sinal

Energia do sistema $h(t)$ finita ⇒ sist. estável

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) * h^*(t) \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega) \, e^{-j\omega t} \, d\omega \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, e^{-j\omega t} dt}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega) . \, H(\omega) \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \, d\omega$$

↓

substituir $H(\omega)$ .... $< \infty$ ⇒ estável

③

Teste 1 - 2017/2018

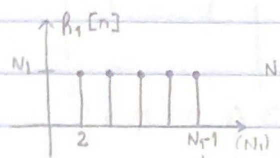
1. $x[n] = \sum_{k=-1}^{+1} \delta(n - kN)$ (comboio de impulsos)

Respostas : $h_1[n] = N_1 (u[n-2] - u[n-N_1])$

$h_2[n] = N_2 (u[n+2] - u[n-N_2])$

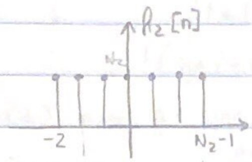
$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \xrightarrow[h_1 * h_2]{} \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$

a) $N = 2(N_1 + N_2)$



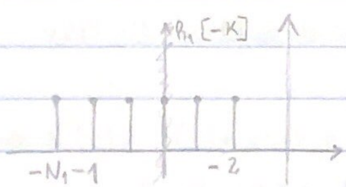
$N_1 > 2$

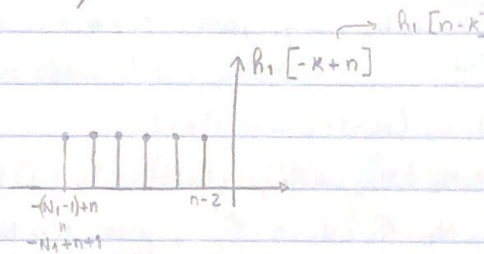
↳ devido ao atraso



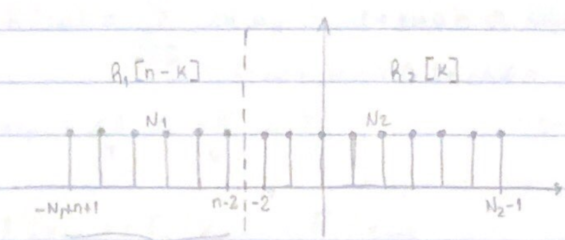
$N_2 > N_1$

$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_2[k] \cdot \underbrace{h_1[n-k]}$ convolução S. Discretos





Logo usa-se a convolução de:



+ pequeno

• Início da sobreposição:

$$R[n] = \sum_{-2}^{n-2} N_1 . N_2 \quad , \text{ para } n-2 \geq -2$$

$$R[n] = N_1 . N_2 \sum_{-2}^{n-2} 1 = N_1 N_2 (n-2-(-2)+1) = N_1 N_2 (n+1) \quad , \text{ para } n \geq 0$$

• Durante a sobreposição:

$$R[n] = \sum_{-N_1+n+1}^{n-2} N_1 . N_2 \quad , \text{ para } 0 \leq n \wedge -N_1+n+1 > -2 \wedge n-2 < N_2-1$$

$$\begin{aligned} R[n] &= N_1 N_2 (n-2-(-N_1+n+1)+1) \\ &= N_1 N_2 (\cancel{n}-2+N_1-\cancel{n}-\cancel{1}+\cancel{1}) \\ &= N_1 N_2 (N_1-2) \quad , \text{ para } \cancel{0 \leq n} \wedge n > N_1-3 \wedge n < N_2+1 \end{aligned}$$

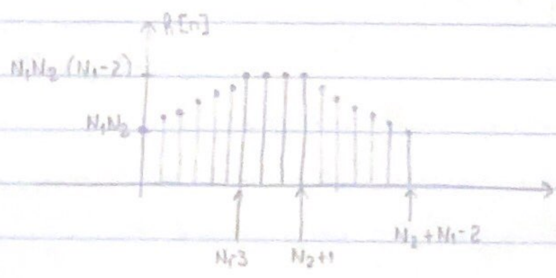
↳ todos ctes, independente do n

• Fim da sobreposição:

$$R[n] = \sum_{-N_1+n+1}^{N_2-1} N_1 . N_2 \quad , \text{ para } n \geq N_2+1 \wedge -N_1+n+1 < N_2-1$$

$$\begin{aligned} R[n] &= N_1 . N_2 (N_2-1-(-N_1+n+1)+1) \\ &= N_1 N_2 (N_2-1+N_1-n-\cancel{1}+\cancel{1}) \\ &= N_1 . N_2 (N_2+N_1-n-1) \quad , \text{ para } n \geq N_2+1 \wedge n < N_2+N_1-2 \end{aligned}$$

$$R[n] = \begin{cases} 0 \quad , & n-2 < -2 \Leftrightarrow n < 0 \\ N_1 N_2 (n+1) \quad , & n \geq 0 \\ N_1 N_2 (N_1-2) \, , & n > N_1-3 \wedge n < N_2+1 \\ N_1 N_2 (N_2+N_1-n-1) \, , & n \geq N_2+1 \wedge n < N_2+N_1-2 \\ 0 \quad , & n \geq N_2+N_1-2 \end{cases}$$

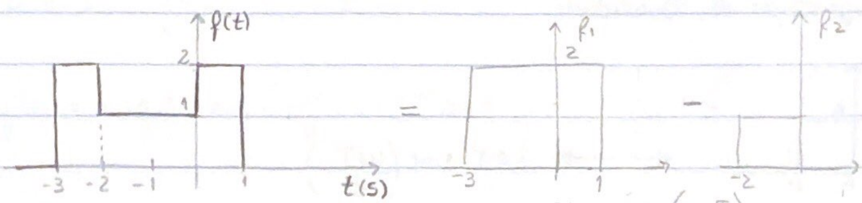


b) Causalidade: $h_1[n]$ e $h_2[n]$ não dependem de entradas futuras, logo são sist. causais.
NOTA: $u[n]$ é uma função conhecida (ñ é entrada). Por isso $u[n+2] \not\Rightarrow h_2[n]$ ñ causal

Estabilidade: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

Como $h_1[n]$ e $h_2[n]$ são finitos, o somatório dos seus pontos também será finito, pelo que ambos os sist. são estáveis.

2.



$2AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$

a) $x(t) = f(t) * p(t)$, com $p(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(\underbrace{t-3}_{\text{desfasamento}} \underbrace{-6K}_{KT \Rightarrow \text{periódico}})$

$x(t)$ são repetições de $f(t)$ com atraso $= +3$ e período 6

$$\Rightarrow x(t) = f(t) * p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3-6K-\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \delta(t-3-6K-\tau)\, d\tau = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} f(t-3-6K)$$

b) $$X(\omega) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_K\, \delta(\omega - K\omega_0) = \cancel{2\pi} \frac{\omega_0}{\cancel{2\pi}} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} F(K\omega_0)\, \delta(\omega - K\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$F'(K\omega_0) = F_1(K\omega_0) - F_2(K\omega_0)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi/3\, K}{\pi}\right) - 2 \times 1 \times 1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi/3\, K}{\pi}\right)$$

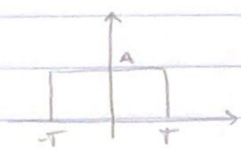
$$= 8 \operatorname{sinc}\left(\frac{2}{3}K\right) - 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{3}K\right)$$

$$X(\omega) = \frac{\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[8 \,\text{sinc}\left(\frac{2k}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{1k}{3}\right)\right] \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}kt} \, \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{3}\right)$$

c) Sistema LTI: $$h(t) = \underbrace{\frac{21}{6}\,\text{sinc}\left(\frac{\overset{T/\pi}{7}(t-3)}{6}\right)}_{①} - \underbrace{\frac{3}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{t-3}{2}\right)}_{②}$$

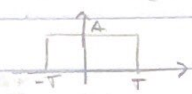
Filtro passa-banda: um retângulo menos o outro

Pela propriedade da Dualidade:



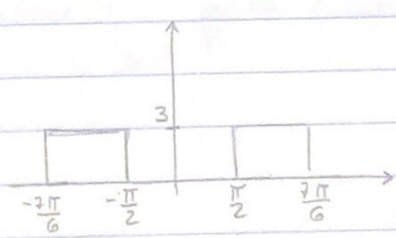
$$\longleftrightarrow \quad 2AT\,\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$

$$\frac{AT}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{tT}{\pi}\right) \longleftrightarrow$$



$$① \begin{cases} \frac{AT}{\pi} = \frac{21}{6} \\ \frac{T}{\pi} = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{21\cancel{\pi}\times\cancel{6}}{7\cancel{\pi}\times\cancel{6}} = 3 \\ T = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \frac{AT}{\pi} = \frac{3}{2} \\ \frac{T}{\pi} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3\cancel{\pi}\times\cancel{2}}{\pi\times 2} = 3 \\ T = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$\omega_0 = \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ X

$$\begin{cases} 2\omega_0 = \frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2} \wedge \frac{2\pi}{3} < \frac{7\pi}{6} \; V \\ 3\omega_0 = \pi > \frac{\pi}{2} \wedge \pi < \frac{7\pi}{6} \; V \end{cases}$$

$y(t) = x(t) * h(t)$

$4\omega_0 = \frac{4\pi}{3} > \frac{\pi}{2} \wedge \frac{4\pi}{3} > \frac{7\pi}{6}$ X

$y(t)$ é composto pelos 2° e 3° harmónicos

$$y(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{3}(t + tA)\right) + B\cos\left(\pi(t + tB)\right)$$

$$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

$$A = \frac{3\,|X(2\omega_0)|}{\pi} = \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}\left[8\sin\left(\frac{2}{3}\times 2\right) - 2\,\text{sinc}\left(\frac{2}{3}\right)\right] = -\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$B = \frac{3\,|X(3\omega_0)|}{\pi} = \ldots = 0$$

$$y(t) = -\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\left(t + {}^{-9\sqrt{3}}/_{2\pi}\, t\right)\right)$$

?