Teste de **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

Licenciatura em Física e Licenciatura em Química

26/01/2011 Duração: 2h

1. (3,5 valores) Considere os seguintes vectores do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (-1,1,0,1) \quad v_2 = (1,3,-2,1) \quad v_3 = (2,-1,3,1)$$

   a) Verifique se os vectores v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

   b) Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que $(1,1,k,1) \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

2. (4 valores) Calcule uma base e a dimensão dos seguintes subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+t,\ 2x = y-t\}$$
$$G = <(1,0,-1,2),(2,-1,3,5),(1,1,-1,2),(0,2,-5,-1)>$$

3. (5 valores) Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por:

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z, 2x-y+t, -3y-2z+t)$$

   a) Indique a matriz da aplicação linear f, relativamente às bases canónicas.

   b) Calcule uma base e a dimensão de Nuc$f$.

   c) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: "Existe uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a dimensão da imagem de $g \circ f$ é 3".

4. (5,5 valores) Considere a matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcule os valores próprios da matriz A.

   b) Calcule os vectores próprios associados ao valor próprio -1.

   c) Indique os valores próprios da matriz $2A^5 + 4I_3$.

5. (2 valores) Calcule uma equação do plano que passa pelos pontos $A(1,0,0)$ e $B(2,-1,3)$ e é paralelo ao vector $u = (1,1,1)$.