Exame Escrito de Época de Recurso de Física Quântica I e Mecânica Quântica

17-Junho-2021

1. (2pts) Normalize o seguinte estado
$$|\psi\rangle = |a\rangle + e^{\alpha}|b\rangle,$$
onde α é um número real, $\langle a|b\rangle = 0$ e $\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = \beta$.

2. (2pts) Calcule o comutador do operador x^2 com o operador momento linear $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ sabendo que $[x, p] = i\hbar$.

3. (5pts) Considere o estado de spin
$$|\psi\rangle = 2|+\rangle + \frac{i}{2}|-\rangle,$$
onde os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são os estados próprios da matriz de Pauli σ_x associados, respectivamente, aos valores próprios $+1$ e -1.
   (a) Calcule a probabilidade de numa medida do spin segundo o eixo dos x's sobre o estado $|\psi\rangle$ sair o estado $|-\rangle$.
   (b) Calcule a probabilidade de numa medida do spin segundo o eixo dos z's sobre o estado $|\psi\rangle$ sair o estado $|\uparrow\rangle$, onde este último estado é o estado próprio da matriz de Pauli σ_z com valor próprio $+1$.
   (c) Se o estado do sistema evoluir de acordo com o hamiltoniano $\hat{H} = E_0\sigma_x$, onde E_0 é uma constante positiva, encontre o estado $|\psi(t)\rangle$, onde t representa o tempo.
   (d) Coloque o estado $|\psi\rangle$ na representação da esfera de Bloch.

4. (4pts) Considere uma partícula num estado ligado (energia E negativa) sujeito à seguinte energia potencial
$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -g\delta(x-a) & x > 0 \end{cases},$$
onde $g > 0$ e $a > 0$.

(a) Resolvendo a equação de Schrodinger, encontre a equação transcentende associada à determinação da energia do estado ligado.

(b) Encontre a condição para a qual há sempre um estado ligado.

5. (5pts) Considere o oscilador harmônico unidimensional, cujo hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega(a^{\dagger}a + 1/2),$$

onde ω é a frequência natural do oscilador e $a^{\dagger}$ e a são os operadores de subida (criação) e descida (destruição), respectivamente.

(a) Calcule o valor médio de x^2 no **segundo** estado excitado do oscilador.

(b) Calcule a incerteza na posição, Δx, associada ao **segundo** estado excitado do oscilador.

(c) Calcule o valor médio da energia cinética no **estado fundamental** do oscilador.

(d) Sabendo que a energia do estado fundamental do oscilador harmônico é $\hbar\omega/2$, use o resultado do item anterior para determinar o valor médio da energia potencial nessse mesmo estado. Diga se o seu resultado satisfaz o teorema da equipartição da energia.

6. (2pts) O operador L_z do momento angular no espaço real e em coordenadas esféricas é dado por

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

(a) Encontre as funções próprias de L_z, ou seja, resolva a equação aos valores próprios $L_z f(\phi) = \Lambda f(\phi)$.

(b) Determine os valores próprios Λ.