ELECTROMAGNETISMO
(Lic. Física) 2011/12

1º Teste - 20/outubro/2011

---

1. Resposta A

Apenas na região I existe um ponto onde o campo resultante das cargas q_1 e q_2 é nulo. Consequentemente, a força sobre a carga +1 C aí colocada será nula.

De facto:

- na região II o campo resultante ($\vec{E}$) nunca pode ser nulo, porque os campos devidos a q_1 ($\vec{E}_1$) e q_2 ($\vec{E}_2$) têm o mesmo sentido.
- na região III o campo resultante, $\vec{E}$, nunca pode ser nulo porque, apesar de $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ terem sentidos opostos, $\vec{E}_2$ é sempre maior que $\vec{E}_1$ (porque a carga com maior valor absoluto (q_2) se encontra sempre mais próxima dessa região)

- na região I os campos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ têm sentidos opostos e deverá existir um ponto onde $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$, porque a carga de menor valor absoluto (q_1) se encontra mais próxima dessa região

2. Resposta B.

$$V = -7{,}5\,x^2 + 3x$$

O campo é dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$
$$= (+15x - 3)\,\vec{u}_x$$

Como as superfícies equipotenciais são perpendiculares ao campo eléctrico em cada ponto, conclui-se que as superfícies equipotenciais têm que ser planos paralelos ao plano yz.

3. $$\vec{E} = A\,\frac{1+\lambda r}{r^2}\,e^{-\lambda r}\,\vec{\mu}_r$$

a) O campo é conservativo se $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

calculemos então o rotacional de $\vec{E}$ em coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,E_\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right)\right]\vec{\mu}_r +$$

$$+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial E_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r E_\phi\right)\right]\vec{\mu}_\theta +$$

$$+\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r E_\theta\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]\vec{\mu}_\phi$$

Neste caso

$$E_r = A\,\frac{1+\lambda r}{r^2}\,e^{-\lambda r}$$

$$E_\theta = 0$$

$$E_\phi = 0$$

O facto da componente E_r ser só função de r e as componentes E_θ e E_ϕ serem nulas torna todos os termos na expressão do rotacional nulos. Conclui-se que o campo é conservativo.

b) Podemos calcular a densidade volúmica de carga, ρ, recorrendo à forma diferencial do teorema de Gauss

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

Recorrendo à expressão da divergência em coordenadas esféricas, vem

$$\rho = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} \right]$$

Como a única componente não nula de $\vec{E}$ é a componente E_r, resulta

$$\rho = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2} A \frac{1+\lambda r}{\cancel{r^2}} e^{-\lambda r} \right) \right]$$

$$= \varepsilon_0 \frac{A}{r^2}\left(\lambda e^{-\lambda r} + (1+\lambda r)(-\lambda) e^{-\lambda r} \right)$$

$$= \varepsilon_0 \frac{A}{r^2}\lambda e^{-\lambda r}\left(1 - 1 - \lambda r \right)$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{A\lambda^2}{r} e^{-\lambda r}$$

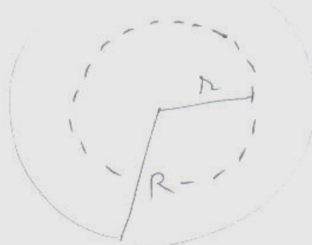
4. $N = \frac{n}{v}$ nº de átomos por unidade de volume

$e_p = (1+y)e$ carga do protão

$e \equiv$ módulo da carga do electrão

a) Consideremos uma esfera de raio R com uma distribuição de carga (que vamos considerar contínua) devida aos átomos não neutros de hidrogénio

Para calcular o campo eléctrico num ponto genérico à distância r do centro, podemos recorrer ao teorema de Gauss.
Consideremos como superfície gaussiana uma superfície esférica (concêntrica com a esfera carregada) de raio r.



$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}\, da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \text{T. Gauss}$$

A carga interior à superfície gaussiana é dada por
$$q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \quad , \quad \rho \equiv \text{densidade volúmica de carga}$$

O fluxo do campo através da superfície gaussiana vale
$$E . 4\pi r^3$$
Uma vez que E é constante sobre a superfície e tem direcção radial

Resulta então

$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3/\varepsilon_0$$

$$E = \frac{1}{3}\rho r/\varepsilon_0$$

Exprimindo ρ em termos da carga total da esfera Q:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

vem

$$E = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

Por outro lado, tendo em conta que cada átomo tem uma carga positiva ye, a carga total da esfera é dada por

$$Q = Nye v \quad , \quad v \equiv \text{volume da esfera}$$

$$= Nye \frac{4}{3}\pi R^3$$

substituindo na expressão de cima para o campo vem

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} Ney \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{Nyer}{3\varepsilon_0}$$

A lei da gravitação universal

$$\vec{F}_g = G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r \quad , \quad G = 6,67 \times 10^{-11}$$

tem uma estrutura idêntica à Lei de Coulomb da Electrostática

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r$$

Por analogia com a electrostática pode escrever-se o Teorema de Gauss aplicado ao campo gravítico

$$\oint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{n} \, da = -4\pi G m \quad (*)$$

$m \equiv$ massa interior à sup. gaussiana

Fazendo um raciocínio idêntico àquele que foi feito em relação ao campo eléctrico, obtem-se para o módulo do campo gravítico a uma distância $\underline{r}$ do centro da esfera

$$\mathcal{G}\, 4\pi r^2 = 4\pi G m$$

A massa interior à superfície esférica gaussiana é dada por

$$m = N v m_H \quad ,$$

$m_H \equiv$ massa de um átomo de H

$v \equiv$ volume interior à sup. gaussiana

Logo

$$\mathcal{G} = G \frac{N v m_H}{r^2}$$

$$= G \frac{N \frac{4}{3}\pi r^3 m_H}{r^2}$$

$$= \frac{4\pi}{3} G N m_H r$$

(*) Nota: o sinal menos resulta do campo gravítico ser sempre atractivo e as massas sempre positivas b)

Existe equilíbrio se a força de repulsão eléctrica igualar a força de atracção gravítica sobre um átomo de hidrogénio

$$ye \cdot E = m_H g$$

$$ye \frac{N y e r}{3\varepsilon_0} = m_H 4\pi G N m_H r$$

$$\frac{(ye)^2}{3\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{3} G m_H^2$$

$$ye = (4\pi\varepsilon_0 G)^{1/2} m_H$$

$$y = (4\pi\varepsilon_0 G)^{1/2} \frac{m_H}{e}$$

Tendo em conta que a massa de 1 átomo de H

é $1\times10^{-3}/6{,}02\times10^{23}$

e $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$

$G = 6{,}67\times10^{-11}$

vem

$$y = \frac{(4\pi \cdot 8{,}85\times10^{-12} \times 6{,}67\times10^{-11})^{1/2}}{1\times10^{3} \times 6{,}02\times10^{23} \times 1{,}602\times10^{-19}}$$

$$\simeq \frac{(4\pi \times 63\times10^{-23})^{1/2}}{9{,}6\times10^{7}} \simeq \frac{(12 \times 63 \times 10^{-23})^{1/2}}{9{,}6\times10^{7}} \simeq \frac{(756\times10^{-23})^{1/2}}{9{,}6\times10^{7}}$$

$$\simeq \frac{(75{,}6\times10^{-22})^{1/2}}{9{,}6\times10^{7}} \simeq \frac{8{,}6\times10^{-11}}{9{,}6\times10^{7}} \simeq \underline{1\times10^{-18}}$$