2. Breves notas sobre as relações constitutivas do meio

2.1 Como vimos;

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B} - \vec{M}$$

As equações de Maxwell nada dizem sobre como $\vec{P}$ e $\vec{M}$ respondem aos campos eléctricos e magnéticos. Essa informação tem que ser adicionada sob a forma das chamadas relações constitutivas do meio material.

Para pequenos campos, é sempre plausível admitir que a dependência de $\vec{P}$ e $\vec{M}$ é linear. Esta aproximação (de resposta linear) é muito satisfatória na generalidade dos casos. Mas as relações constitutivas dependem do meio material e, em particular, da sua simetria.

Vamos começar pelo caso mais simples que corresponde ao meio neutral isotrópico (mais sobre isto adiante). Neste caso, podemos admitir que

$$\vec{P} \propto \vec{E} \qquad (\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}) \quad \text{(meio isotrópico)}$$

$$\vec{M} \propto \vec{H} \qquad (\vec{M} = \chi_m \vec{H})$$

Se isto for verdade, então:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 [\vec{E} + \chi_e \vec{E}] = \varepsilon_0 [1 + \chi_E] \vec{E} \; ; \quad \vec{B} = \mu_0 [\vec{H} + \vec{M}] =$$

$$= \mu_0 [1 + \chi_m] \vec{H}$$

Neste caso muito simples

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (\mu = \mu_0 [1 + \chi_m])$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad (\varepsilon = \varepsilon_0 [1 + \chi_e])$$

$\vec{B}$ e $\vec{D}$ são simplesmente proporcionais a $\vec{E}$ e $\vec{H}$

ε e μ são a constante dieléctrica do meio e a permeabilidade magnética do meio.

<u>Observação</u>: $(\vec{B}$ e $\vec{H})$ e $(\vec{D}$ e $\vec{E})$ não têm que ser paralelos

Num meio anisotrópico a relação de proporcionalidade envolve uma matriz (tensor de 2º ordem):

$$B_i = \mu_{ij} \cdot H_j \qquad D_i = \varepsilon_{ij} \cdot E_j$$

com

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 [1 + \chi_{ij}^{(e)}]$$

$$\mu_{ij} = \mu_0 [1 + \chi_{ij}^{m}]$$

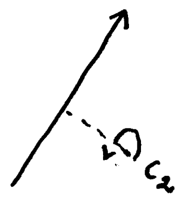
A estrutura dos tensores χ_{ij} é determinada pela simetria do meio (mais sobre isto adiante).

<u>Problema</u>: Mostre que a dualidade de Heaviside-Larmor é preservada num meio isotrópico neutro livre de cargas e correntes.

Como identificar as relações constitutivas adequadas para um dado meio material?

2.2. Quantos tipos de vectores há?

Um vector é uma grandeza que define uma grandeza uma orientação e um sentido. Como se podem



transformar este tipo de quantidades? Sob inversão espacial, inversão temporal e Rotação de π em torno de eixo $\perp$: $(C_2^{\perp})$

$\bar{1}$	$1'$	$C_2^{\perp}$
1	1	-1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1

↳ Por definição: eixo orientado.

Vejamos se podemos identificar estes diferentes tipos de vectores no electromagnetismo:

		$1'$	$\bar{1}$	
$\vec{P}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$	$\equiv$	+1	-1	(vector polar, temporalmente par)
$\vec{B}$, $\vec{M}$, $\vec{H}$	$\equiv$	-1	+1	(vector axial, temporalmente ímpar)
$\nabla\wedge\vec{E}$, etc.	$\equiv$	+1	+1	(vector axial, temporalmente par)
$\nabla\wedge\vec{H}$ etc	$\equiv$	-1	-1	(vector polar, temporalmente ímpar)

Existem portanto 4 tipos de campos vectoriais com simetrias distintas entre si.

Definamos os campos de excitação como sendo $\vec{E}$ e $\vec{H}$ (o campo eléctrico e o campo de excitação magnético)
Note que estes campos definem grandezas intensivas, por oposição aos campos $\vec{B}$, $\vec{D}$ ($\vec{P}$, $\vec{M}$) que definem grandezas extensivas.

Como se pode gerar uma polarização e uma magnetização sob acção destes campos? (Consideraremos por simplicidade um meio isotrópico)? Em princípio teríamos:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \alpha^d \vec{H}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \alpha^b \vec{E}$$

Mas, $\nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ e $\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$ também geram respostas semelhantes (e têm, como vimos, simetrias distintas)
Devemos por isso considerá-los como excitações separadas:
Então:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \beta^d (\nabla \wedge \vec{E}) + \alpha^d \vec{H} + \gamma^d (\nabla \wedge \vec{H})$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \beta^b (\nabla \wedge \vec{H}) + \alpha^b \vec{E} + \gamma^b (\nabla \wedge \vec{E})$$

(Procure interpretar fisicamente os diferentes termos)

Evidentemente, estas relações têm que ser tensorialmente homogéneas. Vejamos, por exemplo

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$\vec{D}$: polar, t-par

ε: $1'$-par, $\bar{1}$-par

$\vec{E}$: polar, t-par

$$\vec{D} = \beta^d (\nabla \wedge \vec{E})$$

$\vec{D}$: polar, t-par

β^d: $\bar{1}$-ímpar, $1'$-par

$(\nabla \wedge \vec{E})$: axial, t-par

É fácil convencer-se que:

	$\bar{1}$	$1'$	$C_2^{\perp}$
ε, μ	1	1	1
β^d, β^b	-1	1	1
$\alpha^d\, \alpha^b$	-1	-1	1
γ^d, γ^b	1	-1	1

2.3 - O princípio de Neumann:

Uma propriedade física descrita por um tensor ξ só pode existir se a simetria intrínseca deste tensor for igual ou superior à simetria do meio.

Apliquemos este princípio ao quadro acima:

ε, μ = estas respostas são universais: existem sempre em qualquer meio material, independentemente da sua simetria; são respostas neutrais

β^d e β^b – só podem existir em meios não centrosimétricos.

α^d e α^b – só podem existir em meios não centrosimétricos e que quebram a simetria de inversão temporal

γ^d, γ^b – só podem existir em meios que não possuam simetria de inversão temporal.

Podemos assim classificar os meios materiais (do ponto de vista da sua resposta electromagnética) em 4 tipos fundamentais:

- neutral (ε, μ)
- space-odd ($\varepsilon, \mu, \beta^d, \beta^b$) → inclui meios chirais.
- time-odd ($\varepsilon, \mu, \gamma^d, \gamma^b$) → alguma ordem magnética
- Magnetoelectric ($\varepsilon, \mu, \alpha^d, \alpha^b$) →

Evidentemente, estas respostas podem coexistir em meios de simetria reduzida.

Para meios anisotrópicos, a observação da simetria magnética (grupo pontual magnético) permite identificar as respostas possíveis para um dado meio

(ver, quadro anexo).