Universidade do Minho

Problemas de Mecânica Analítica e Ondas

Série 4 – Transformações Ortogonais

1- Dois referenciais S e S' estão coincidentes no instante $t = 0$. O sistema S' roda de 30 gaus em torno do eixo do x. Qual a matriz que representa a transformação?

2- Um referencial S' inicialmente coincidente com um referencial S roda 30 graus em torno do eixo do z e roda em seguida em torno deste mesmo eixo de um ângulo de 45 graus.

(a) Obtenha a matriz da transformação correspondente à rotação total.

(b) Obtenha a matriz correspondente à transformação que se efectua por ordem inversa.

3- Considere dois referenciais S e S' inicialmente coincidentes. O referencial S' roda 45 graus em torno do eixo do y e roda em seguida em torno do novo eixo do z obtido pela primeira rotação de um ângulo de 30 graus.

(a) Obtenha a matriz da transformação correspondente à rotação total.

(b) Obtenha a matriz da transformação correspondente à rotação total por ordem inversa.

4- Considere a seguinte matriz A correspondente a uma transformação linear,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule os valores próprios e os vetores próprios desta matriz e no caso destes últimos forneça as suas componentes cartesianas depois de normalizados (módulo um).

(b) Representa esta matriz uma rotação?

5- Considere a transformação linear que transforma cada ponto de coordenadas (x, y, z) num ponto de coordenadas $(y, x, -z)$.

(a) Qual a matriz correspondente a esta transformação?

(b) Quais as retas que se mantêm invariantes sob esta transformação linear?

Dados auxiliares

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = 0.5\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707\\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866\end{aligned}$$

Expressão do determinante de uma matriz de 3×3 em termos de determinantes de matrizes de 2×2:

$$\det\begin{bmatrix} A_{1\,1} & A_{1\,2} & A_{1\,3}\\ A_{2\,1} & A_{2\,2} & A_{2\,3}\\ A_{3\,1} & A_{3\,2} & A_{3\,3}\end{bmatrix} =$$

$$A_{1\,1}\times\det\begin{bmatrix} A_{2\,2} & A_{2\,3}\\ A_{3\,2} & A_{3\,3}\end{bmatrix} - A_{1\,2}\times\det\begin{bmatrix} A_{2\,1} & A_{2\,3}\\ A_{3\,1} & A_{3\,3}\end{bmatrix} + A_{1\,3}\times\det\begin{bmatrix} A_{2\,1} & A_{2\,2}\\ A_{3\,1} & A_{3\,2}\end{bmatrix}$$

Os valores próprios λ de uma matriz de 3×3 obedecem à relação:

$$\det\left(\begin{bmatrix} A_{1\,1} & A_{1\,2} & A_{1\,3}\\ A_{2\,1} & A_{2\,2} & A_{2\,3}\\ A_{3\,1} & A_{3\,2} & A_{3\,3}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\right) = 0$$

As componentes cartesianas do vetor próprio de uma matriz de 3×3 de valor próprio λ obedecem à relação:

$$\begin{bmatrix} A_{1\,1} & A_{1\,2} & A_{1\,3}\\ A_{2\,1} & A_{2\,2} & A_{2\,3}\\ A_{3\,1} & A_{3\,2} & A_{3\,3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$