1. Determine as curvas de nível, e esboce o gráfico das funções seguintes.

$$a)\ f(x,y)=1-x^2-y^2 \quad b)\ f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$
$$c)\ f(x,y)=y^2\ (x\geq 0) \quad d)\ f(x,y)=x+y$$
$$e)\ f(x,y)=x^2-y^2$$

2. Descreva as superfícies de nível das seguintes funções:

$$a)\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \quad b)\ f(x,y,z)=x^2+y^2$$

3. (a) Seja $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ em $\mathbb{R}^3$ e $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$ a esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 1. Mostre que a imagem de S pela aplicação linear $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $\phi(x,y,z)=(ax,by,cz)$ é o *elipsóide* $E=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3\,|\,\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1\}$.

   (b) Nas seguintes alíneas, descreva e represente graficamente a superfície do nível k dado.

$$a)\ f(x,y,z)=\tfrac{x^2}{4}+y^2+\tfrac{z^2}{9}, \quad k=1$$
$$b)\ f(x,y,z)=4x^2+y^2+2z^2, \quad k=4$$

4. Represente graficamente a superfície de nível 0 da função $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$.

5. Represente graficamente o conjunto A dado e indique o seu interior, o seu fecho, a sua fronteira e o conjunto dos seus pontos de acumulação.

   a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\,0\leq x\leq 1 \quad \text{e} \quad 1\leq y<2\}\cup\{(0,0)\}$.

   b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\,x^2+y^2<4\}\cup\{(x,0)\,|\,3\leq x<4\}$.

   c) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\,x^2+y^2+z^2\leq 1 \quad \text{ou} \quad z=0\}$.

6. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

   (a) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} f(x,y)$.

   (b) Calcule o limite de f em $(0,0)$ na direcção de um vetor $v=(a,b)\neq(0,0)$. Mostre que f não tem limite em $(0,0)$.

7. Calcule os seguintes limites, caso existam:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x+y}{x-y} \quad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y} \quad c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$d)\ \lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{x}{y+1} \quad e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{y} \quad f)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

$$g)\ \lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{y^2}{x-2} \quad h)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \quad h)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} y\operatorname{arctg}\left(\frac{xz}{x^2+z^2}\right)$$

8. Estude a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y-2} & \text{se } y \neq 2 \\ 0 & \text{se } y = 2 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} xy\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$