FICHA 10

Aplicações do integral definido:

áreas em coordenadas polares, comprimentos de arcos de curvas,
áreas e volumes de sólidos de revolução

1. Use coordenadas polares para determinar a área da região

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\le\frac{1}{4}\ \wedge\ x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\right\}.$$

2. Determine a área da região que é simultaneamente interior à circunferência $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ e à lemniscata $\rho^2=\sin 2\theta$.

3. Seja $\mathcal{A}$ a região limitada pelas curvas de equação $y=\cosh x$ e $y=\cosh 2$. Determine a medida da área de $\mathcal{A}$ e o comprimento do arco de curva que contorna $\mathcal{A}$.

4. Calcule o comprimento do arco de curva definido na alínea seguinte:

a) $y=\arcsin e^{-x}$, para $\frac{1}{2}\le x\le 1$;

5. Determine o volume do sólido que se obtém pela rotação em torno de OX da região limitada pelas curvas $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$, para $0\le x\le 1$.

6. Resolva um problema idêntico ao anterior no caso da região plana ser limitada pelas curvas $y=x$ e $x=4y-y^2$.

7. Indique o integral que permite calcular a área das superfícies de revolução obtidas pela rotação em torno de OX das seguintes curvas:

(a) $y=x^3,\quad x\in[0,1]$;

(b) $y=\cos x,\quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$;

(c) $y=\sqrt{r^2-x^2},\quad -r\le x\le r$.