Adição de momentos angulares

Suponha-se que dispomos de um sistema composto de dois momentos angulares distintos, p.e o momento angular orbital e o spin de uma partícula quântica e queremos agora determinar os valores próprios e vetores próprios do vector momento angular total:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{L}}_1 + \hat{\vec{L}}_2 \quad \text{onde } [\hat{L}_{1i}, \hat{L}_{2j}] = 0$$

$$\forall_{i,j} = x, y, z$$

Portanto $\hat{L}_z$ e $\hat{L}_{1z}$ e $\hat{L}_{2z}$ comutam e por isso dispõem de vetores próprios comuns. De igual modo:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + 2\hat{L}_{1i}\hat{L}_{2i}$$

Como $[\hat{L}_1^2, \hat{L}_{1i}] = [\hat{L}_2^2, \hat{L}_{2i}] = 0$, é fácil ver que $[\hat{L}^2, \hat{L}_1^2] = [\hat{L}^2, \hat{L}_2^2] = 0$, e de novo existem estados próprios simultaneos de $\hat{L}^2$, $\hat{L}_1^2$ e $\hat{L}_2^2$.

O problema é que $[\hat{L}^2, \hat{L}_{1z}] \neq 0$ → ou q. das componentes $\hat{L}_{1x}, \hat{L}_{1y}$

$[\hat{L}^2, \hat{L}_{2z}] \neq 0$ → ou q. das componentes $\hat{L}_{2x}, \hat{L}_{2y}$

Isto quer dizer que podemos considerar vetores próprios simultâneos de $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{L}_1^2$ e $\hat{L}_2^2$, mas ñ podemos incluir $\hat{L}_{1z}$ e $\hat{L}_{2z}$ neste conjunto de operadores. Daí resulta que as funções próprias $|lm; l_1 l_2\rangle$ se escrevem como sobreposição linear das funções próprias de $\hat{L}_1^2, \hat{L}_{1z}, \hat{L}_2^2, \hat{L}_{2z}$, $|l_1 m_1 l_2 m_2\rangle$.

$$|l m; l_1 l_2\rangle = \sum_{m_1 m_2} a^{l_1 l_2}_{m_1 m_2}(l,m) \underbrace{|l_1 m_1 l_2 m_2\rangle}_{= \left(|l_1 m_1\rangle \otimes |l_2 m_2\rangle\right) \text{ p. tensorial}}$$

Mas $\hat{L}_z |l m; l_1 l_2\rangle = \hbar m |l m; l_1 l_2\rangle$

$$= \sum_{m_1 m_2} a^{l_1 l_2}_{m_1 m_2} \hbar (m_1 + m_2) |l_1 m_1 l_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar m \sum_{m_1 m_2} a^{l_1 l_2}_{m_1 m_2} |l_1 m_1 l_2 m_2\rangle$$

Para que isto seja verdade, temos que ter $m_1 + m_2 = m$ na soma acima, por isso

$$|l m; l_1 l_2\rangle = \sum_{m_1 + m_2 = m} a^{l_1 l_2}_{m_1 m_2} |l_1 m_1 l_2 m_2\rangle$$

Caixa: A prova de que assim é simples

Considere-se o produto escalar

$$\langle l_1 m_1\, l_2 m_2 | \hat{L}_z | l\, m\, ;\, l_1\, l_2 \rangle$$

$$= \hbar m \langle l_1 m_1\, l_2 m_2 | l\, m\, ;\, l_1\, l_2 \rangle$$

$$= \sum_{m_1' m_2'} a^{l_1 l_2}_{m_1' m_2'}\, \hbar\, (m_1' + m_2') \underbrace{\langle l_1 m_1\, l_2 m_2 | l_1 m_1'\, l_2' m_2' \rangle}_{= \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}}$$

$$= a^{l_1 l_2}_{m_1 m_2}\, \hbar\, (m_1 + m_2)$$

mas $\langle l_1 m_1\, l_2 m_2 | l\, m\, ;\, l_1\, l_2 \rangle$

$$= \sum_{m_1' m_2'} a^{l_1 l_2}_{m_1' m_2'} \underbrace{\langle l_1 m_1\, l_2 m_2 | l_1 m_1'\, l_2' m_2' \rangle}_{= \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}}$$

$$= a^{l_1 l_2}_{m_1 m_2}(l, m)\text{, logo}$$

↳ Coeficiente de Clebsch-Gordan

$$\Leftrightarrow \hbar m \langle l_1 m_1\, l_2 m_2 | l\, m\, ;\, l_1\, l_2 \rangle$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) \langle l_1 m_1\, l_2 m_2 | l\, m\, ;\, l_1\, l_2 \rangle\, ,$$

e ou $\langle l_1 m_1\, l_2 m_2 | l\, m; l_1 l_2 \rangle = 0$

$$\forall\ m = m_1 + m_2 .$$

Daqui se retira que o valor máximo de $m = l_1 + l_2$, quando $m_1 = l_1$, $m_2 = l_2$, e há um único ket, a saber

$|l_1\, l_1\, l_2\, l_2\rangle$ com este valor próprio. Ou seja $l_{max} = m_{max}$

$$= l_1 + l_2$$

e temos:

$$|\underset{l=}{l_1+l_2}\ \underset{m=}{l_1+l_2}; l_1\, l_2\rangle = |l_1\, \overset{m_1=l_1}{l_1}\, l_2\, \overset{m_2=l_2}{l_2}\rangle$$

Aplicando o operador $\hat{L}_-$ podemos obter os $2(l_1+l_2)+1$ vectores deste multipleto ou seja

$|l_1+l_2\ m; l_1\, l_2\rangle$ $\qquad |m| \leq l_1 + l_2$.

Repare-se que neste multipleto há um estado com $m = l_1 + l_2 - 1$,

$$|l_1+l_2 \; l_1+l_2-1, \; l_1 \; l_2\rangle$$

mas há dois estados $|l_1 \; m_1 \; l_2 \; m_2\rangle$ com $m_1 + m_2 = l_1 + l_2 - 1$, a saber $m_1 = l_1 - 1$, $m_2 = l_2$ ou

$m_1 = l_1$, $m_2 = l_2 - 1$

ou seja, temos:

$$|l_1+l_2 \; l_1+l_2-1, \; l_1 \; l_2\rangle = a^{l_1 \, l_2}_{l_1-1 \; l_2} (l_1+l_2, l_1+l_2-1) |l_1 \, l_1-1 \, l_2 \, l_2\rangle + a^{l_1 \, l_2}_{l_1 \; l_2-1} (l_1+l_2, l_1+l_2-1) |l_1 \, l_1 \, l_2 \, l_2-1\rangle$$

e $$|l_1+l_2-1 \; l_1+l_2-1, \; l_1 \; l_2\rangle = a^{l_1 \, l_2}_{l_1-1 \; l_2} (l_1+l_2-1, l_1+l_2-1) |l_1 \, l_1-1 \, l_2 \, l_2\rangle + a^{l_1 \, l_2}_{l_1 \; l_2-1} (l_1+l_2-1, l_1+l_2-1) |l_1 \, l_1 \, l_2 \, l_2-1\rangle$$

Sendo que o primeiro estado é determinado por aplicação de $\hat{L}_-$ a $|l_1+l_2 \; l_1+l_2, \; l_1 \; l_2\rangle$

$= |l_1 \; l_1 \; l_2 \; l_2\rangle$

e o segundo é determinado por ser ortogonal ao primeiro. De $|l_1+l_2-1 \; l_1+l_2-1, \; l_1 \; l_2\rangle$ determina todo o multipleto por aplicação de $\hat{L}_-$.

Para $m = l_1 + l_2 - 2$

há um estado em cada um destes multipletos com m igual a este valor mas dos estados $|l_1 m_1 l_2 m_2\rangle$ há 3 em que $m_1 + m_2 = l_1 + l_2 - 2$, a saber

$m_1 = l_1 \quad m_2 = l_2 - 2$

$m_1 = l_1 - 1 \quad m_2 = l_2 - 1$

$m_1 = l_1 - 2 \quad m_2 = l_2$

por isso o estado $|l_1 + l_2 - 2\ l_1 + l_2 - 2, l_1\ l_2\rangle$ é determinado de modo a que seja ortogonal a $|l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 2, l_1\ l_2\rangle$ e a $|l_1 + l_2 - 1, l_1 + l_2 - 2, l_1\ l_2\rangle$.

Podemos continuar este processo e fazer a pergunta quando ele para. Suponha-se sem perda de generalidade $l_1 \geq l_2$ (se for ao contrário troca-se as etiquetas, $l_1 \leftrightarrow l_2$)

Seja $m = l_1 + l_2 - k$. Temos

$m_1 = l_1 - k \ ; \ m_2 = l_2$

$\vdots$

$m_1 = l_1 \ ; \ m_2 = l_2 - k$. Mas $|m_2| \leq l_2$

ou seja

$$-l_2 \leq m_2 \leq l_2 \ , \text{ portanto}$$

$$l_2 - k \geq -l_2$$

$2l_2 \geq k$ ou seja o valor máximo de $k = 2l_2$, nesse caso (com $m_1 = l_1$, $m_2 = -l_2$)

é $m = l_1 - l_2$ e $l = l_1 + l_2 - 2l_2$
$= l_1 - l_2$,

ou seja

$$l_1 - l_2 \leq l \leq l_1 + l_2$$

Note-se que há $(2l_1+1)\cdot(2l_2+1)$ estados $|l_1 m_1 \, l_2 m_2\rangle$. O número de estados $|l m, l_1 l_2\rangle$ com $l_1 - l_2 \leq l \leq l_1 + l_2$ é

$$\sum_{l_1-l_2}^{l_1+l_2} (2l+1)$$

$$= \sum_{l=l_1-l_2}^{l=l_1+l_2} \left[(l+1)^2 - l^2 \right]$$

$$= \sum_{l=l_1-l_2+1}^{l=l_1+l_2+1} l^2 - \sum_{l=l_1-l_2}^{l=l_1+l_2} l^2$$

$$= (\ell_1+\ell_2+1)^2 - (\ell_1-\ell_2)^2$$

$$= (\ell_1+\cancel{\ell_2}+1+\ell_1-\cancel{\ell_2})(\cancel{\ell_1}+\ell_2+1-\cancel{\ell_1}+\ell_2)$$

$$= (2\ell_1+1)(2\ell_2+1)$$ logo o número de estados coincide.

Podemos genericamente escrever

$$|\ell_1-\ell_2| \leq \ell \leq \ell_1+\ell_2$$

Com $|m| \leq \ell$ em cada multipleto.

Vamos ver como isto funciona no caso mais simples

$$\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$$

operadores de spin $\frac{1}{2}$

$$\hat{S}_{1i} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_{1i} \quad , \quad \hat{S}_{2i} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_{2i}$$

Temos portanto que

$$m_{1max} = \frac{1}{2} \quad , \quad m_{2max} = \frac{1}{2}$$

Os valores de S $\rightarrow$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$

Há por isso um multipleto com $S=1$ $(2\cdot 1+1 = 3$ estados$)$ e um singleto com $S=0$ $(2\cdot 0+1 = 1$ estado$)$

Como vimos $|S=1\ m_S=1, \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle$

$$= |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= |++\rangle$$

$$|S=1\ m_S=0, \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}}\hat{S}_-|++\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}[\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}]|++\rangle$$

Como $\hat{S}_{1-}|++\rangle = \hbar|-+\rangle$, obtemos
$\hat{S}_{2-}|++\rangle = \hbar|+-\rangle$

$$|s=1\ m_s=0,\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$$

$$|s=1\ m_s=-1,\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{\hat{S}_-}{\hbar\sqrt{1(1+1)-0(0-1)}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)\right\}$$

$$= \frac{(\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-})}{2\hbar}\left[|+-\rangle + |-+\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|--\rangle + |--\rangle\right] = |--\rangle$$

O estado $|s=0\ m_s=0,\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle$

tem que ter $m_s = m_{1s} + m_{1s} = 0$, logo

temos que ter

$$|s=0\ m_s=0,\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \alpha|+-\rangle + \beta|-+\rangle$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

e $\langle s=1\ m_s=0,\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}|\ s=0\ m_s=0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} = 0$$ ou seja

$$\alpha = -\beta$$

Podemos escolher (a fase global é arbitrária)

$$\alpha = 1/\sqrt{2},\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e logo:

$$|s=0\ m_s=0;\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

o único membro do singleto. Assim (daí o nome!)
temos:

$$S=1\ \begin{cases} |s=1\ m_s=1;\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = |++\rangle \\ |s=1\ m_s=0;\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) \\ |s=1\ m_s=-1;\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = |--\rangle \end{cases}$$

Tripleto

Estes dois estados são estados de Bell → estados entrelaçados ou emaranhados

$$S=0\quad |s=0\ m_s=0;\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

A utilização dos estados entrelaçados para verificar experimentalmente a violação das desigualdades de Bell previstas pela MQ (mas obedecidas por qualquer teoria dita realista e local) foi recompensada pelo Prémio Nobel da Física de 2022 (Clauser, Aspect e Zeilinger).

Nos exercícios da próxima semana iremos considerar a adição de um momento angular l com um spin $1/2$.