Problemas de Física Quântica–II

Espalhamento

Universidade do Minho

31 de Agosto de 2016

Espalhamento de partículas

1. Para o potencial $V(r) = \alpha 1/r^2$, calcule, na primeira aproximação de Born, a secção eficaz diferencial $\sigma_B(\theta)$.

2. Use a aproximação de Born para determinar a secção eficaz diferencial para a energia potencial
$$V(r) = V_0 e^{-r/a}$$
(Townsend, 13.7)

3. Considere o potencial criado por um dipolo constituído por duas cargas de sinal oposto localizadas em $y = \pm a$. O potencial criado por cada uma das cargas é naturalmente o potencial de Coulomb, mas deslocado da origem. Mostre que na primeira aproximação de Born, a secção eficaz diferencial é dada por
$$\sigma_B(\theta) \propto \frac{e^4 m^2}{(\hbar k)^4} \frac{\sin^2(ka\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2}\,. \tag{1}$$

4. Consideremos o espalhamento unidimensional por uma função delta na origem, descrito pelo potencial $V(x) = g\delta(x)$, onde $g > 0$.

   (a) A função de Green livre a uma dimensão é solução da seguinte equação
   $$(d^2/dx^2 + k^2)G(x) = \delta(x)\,. \tag{2}$$
   Mostre que a função $G(x) = Ce^{ik|x|}$ satisfaz a equação anterior, desde que se escolha a constante C de modo apropriado. Para o efeito mostre que:

   - $d/dx(e^{ik|x|}) = ik\mathrm{sign}(x)e^{ik|x|}$
   - $d^2/dx^2(e^{ik|x|}) = -k^2e^{ik|x|} + 2ik\delta(x)e^{ik|x|}\,.$

A função sinal, sign(x), pode ser escrita como $\theta(x) - \theta(-x)$, onde $\theta(x)$ é a função degrau.

(b) A solução integral da equação de Schrödinger a uma dimensão pode ser escrita como

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{2m}{\hbar^2} \int dx' G(x - x')V(x')\psi(x') \,. \tag{3}$$

Encontre o valor exacto de $\psi(0)$. Usando esse resultado mostre que pode escrever a solução geral da equação integral como

$$\psi(x) = e^{ikx} + g\frac{2m}{\hbar^2} \frac{G(x)}{1 - 2mgG(0)/\hbar^2} \,. \tag{4}$$

(c) Usando o resultado anterior calcule o coeficiente de transmissão através do potencial.

(d) Resolva o mesmo problema usando métodos tradicionais de Física Quântica I e verifique que os dois resultados concordam.

5. Uma onda plana da forma $e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta}$ pode ser expandida em funções esféricas de Bessel, como

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta) \,. \tag{5}$$

Pretende-se mostrar com este problema que $C_\ell = (2\ell + 1)i^\ell$. Para o efeito, proceda do seguinte modo:

- Multiplique a expressão anterior por $P_{\ell'}(\cos\theta)\sin\theta$ e integre em θ. Deverá obter

$$C_\ell j_\ell(kr)\frac{2}{2\ell + 1} = \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr\cos\theta} P_\ell(\cos\theta) \,. \tag{6}$$

- Integre por partes o segundo termo da equação anterior, obtendo

$$C_\ell j_\ell(kr)\frac{2}{2\ell + 1} = \frac{1}{ikr}[P_\ell(\cos\theta)e^{ikr\cos\theta}]_0^\pi + \ldots \,. \tag{7}$$

Sabendo que $P_\ell(1) = 1$ e $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$ simplifique a expressão anterior. Argumente que os termos "…" na equação anterior decaem mais rapidamente que $1/r$ para $r \to \infty$. Assim, nesse limite podemos manter apenas o primeiro termo na igualdade, isto é,

$$C_\ell j_\ell(kr)\frac{2}{2\ell + 1} = \frac{1}{ikr}[e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr}] \,. \tag{8}$$

- Considerando agora a expansão das funções de Bessel para $r \to \infty$ vem

$$j_\ell(kr) = \frac{1}{kr}\sin(kr - \ell\pi/2) \,, \tag{9}$$

e usando este resultado mostre que se conclui que C_ℓ tem o valor indicado.

Usámos algures na demonstração o resultado

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,m} \,. \tag{10}$$

6. Avalie a corrente de probabilidade para a onda espalhada

$$\psi_{sc} \xrightarrow[r\to\infty]{} A f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

e mostre que

$$\boldsymbol{j}_{sc} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\hbar k}{\mu r^2}|A|^2|f|^2 \boldsymbol{u}_r$$

em que $\boldsymbol{u}_r$ é o vector unitário na direcção do raio.

(Townsend, 13.2)

7. Usando a aproximação de Born para determinar o coeficiente de reflexão unidimensional R para um potencial $V(x)$ que é nulo em todas as partes excepto próximo da origem:

(a) Mostre que podemos escrever a solução da equação de Schrödinger a uma dimensão na forma:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + \int dx' G(x,x') \frac{2m}{\hbar^2} V(x')\psi(x')$$

em que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,x') + k^2 G(x,x') = \delta(x-x')$$

(b) Uma vez que G satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem, G tem de ser uma função contínua e, em particular, deve ser contínua em $x = x'$. Integrando a equação diferencial para G de imediatamente antes a imediatamente depois de $x = x'$, mostre que a primeira derivada de G é descontínua em $x = x'$ e que satisfaz:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=x'_+} - \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=x'_-} = 1$$

Depois mostre que uma solução para G é dada por:

$$G = \begin{cases} \dfrac{1}{2ik} e^{ik[x-x')} & x > x' \\ \dfrac{1}{2ik} e^{-ik[x-x')} & x < x' \end{cases}$$

(c) Substitua esta expressão para G na equação de ψ da alínea (a). Mostre que na aproximação de Born

$$\psi \xrightarrow[r\to -\infty]{} = Ae^{ikx} + Ae^{-ikx}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{e^{2ikx'}}{2ik}\frac{2m}{\hbar^2} V(x')$$

e consequentemente

$$R = \left| \frac{m}{ik\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{2ikx'} V(x') \right|^2$$

(d) Para uma barreira de potencial

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < a \\ 0 & noutraspartes \end{cases}$$

o coeficiente exacto é dada por $R = 1 - T$, com

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}a}$$

Mostre que o resultado exacto para R no limite em que $V_0/E \ll 1$ concorda com o resultado da aproximação de Born.

(Townsend, 13.4)

8. Uma partícula é espalhada por um potencial simétrico a suficientemente baixa energia para que o desvio de fase $\delta_l = 0$ para $l > 1$ (ou seja, somente δ_0 e δ_1 são diferentes de zero. Mostre que a secção eficaz diferencial tem a forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B\cos\theta + C\cos^2\theta$$

e determine A, B e C em termos de desvios de fase. Determine a secção eficaz total σ em termos de A, B e C.

(Townsend, 13.9)

9. Avalie o desvio de fase δ_1 da onda P do espalhamento por uma esfera rígida, para a qual a energia potencial é

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Exprima o resultado em termos de $j_1(ka)$ e $\eta_1(ka)$. Use o primeiro termo de $j_1(\rho)$ e $\eta_1(\rho)$ para pequeno ρ para mostrar que $\delta_1 \to -(ka)^3/3$ quando $ka \to 0$, e portanto δ_1 pode realmente ser desprezada em comparação com δ_0 a suficientemente baixa energia.

(Townsend, 13.10)

10. Considere a energia potencial esfericamente simétrica

$$\frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} = \gamma\delta(r - a)$$

em que γ é uma constante e $\delta(r - a)$ é a função Delta de Dirac.

(a) Mostre que o desvio de fase δ_0 da onda S para o espalhamento por este potencial satisfaz a equação

$$\tan(ka + \delta_0) = \frac{\tan ka}{1 + \frac{\gamma}{k}\tan ka}$$

(b) Avalie o desvio de fase no limite de baixa energia e mostre que a secção eficaz total para o espalhamento S é

$$\sigma \cong 4\pi a^2 \left(\frac{\gamma a}{1 + \gamma a} \right)^2$$

(Townsend, 13.12)