Prova escrita de Física Quântica II

Segunda prova

9-1-2017

1. (7 pts.)

   Considere um hamiltoniano H_0 dado por

   $$H_0 = E_0 \sigma_z \tag{1}$$

   onde σ_z é a matriz de Pauli z e E_0 é uma constante positiva. Admita agora que neste sistema actua durante o tempo T uma perturbação da forma

   $$H_1 = \lambda \sigma_x \cos(\omega t) \tag{2}$$

   onde σ_x é a matriz de Pauli x, λ é uma constante positiva e ω é a frequência do campo que actua no sistema.

   (a) Calcule a probabilidade de transição, entre o estado fundamental e o estado excitado, em primeira ordem de teoria de perturbações.

   (b) Resolva a equação de Schrödinger dependente do tempo para o hamiltoniano $H_0 + H_1$ usando a aproximação de fase giratória (*rotating wave approximation*). Sugestão: recorde-se da expressão geral para a função de onda dependente do tempo escrita na base que diagonaliza H_0.

2. (6 pts.)

   Use a primeira aproximação de Born para determinar a secção eficaz diferencial de espalhamento de uma partícula de massa m por um potencial da forma

   $$V(r) = V_0 e^{-r/a}$$

   Verifique se a sua expressão final tem unidades de área.

3. (7 pts.)

   Consideremos o espalhamento unidimensional por uma função delta na origem, descrito pelo potencial $V(x) = g\delta(x)$, onde $g > 0$.

   (a) A função de Green livre a uma dimensão é solução da seguinte equação

   $$(d^2/dx^2 + k^2)G(x) = \delta(x)\,. \tag{3}$$

   Mostre que a função $G(x) = Ce^{ik|x|}$ satisfaz a equação anterior, desde que se escolha a constante C de modo apropriado. Para o efeito mostre que:

   - $d/dx(e^{ik|x|}) = ik\,\mathrm{sign}(x)e^{ik|x|}$
   - $d^2/dx^2(e^{ik|x|}) = -k^2 e^{ik|x|} + 2ik\delta(x)e^{ik|x|}\,.$

   A função sinal, $\mathrm{sign}(x)$, pode ser escrita como $\theta(x) - \theta(-x)$, onde $\theta(x)$ é a função degrau.

(b) A solução integral da equação de Schrödinger a uma dimensão pode ser escrita como

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{2m}{\hbar^2}\int dx' G(x-x')V(x')\psi(x') \,. \tag{4}$$

Encontre o valor exacto de $\psi(0)$. Usando esse resultado mostre que pode escrever a solução geral da equação integral como

$$\psi(x) = e^{ikx} + g\frac{2m}{\hbar^2}\frac{G(x)}{1-2mgG(0)/\hbar^2} \,. \tag{5}$$

(c) Usando o resultado anterior calcule o coeficiente de transmissão através do potencial.

(d) Resolva o mesmo problema usando métodos tradicionais de Física Quântica I e verifique que os dois resultados concordam.