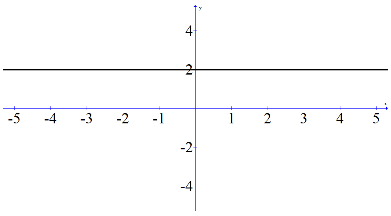

Cálculo EE

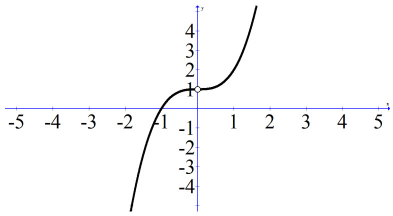
Ficha 3 — Outubro

Limites e continuidade

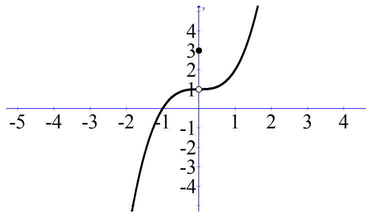
1. Em cada alínea, determina $\lim_{x\to c} f(x)$ para o valor de c indicado:



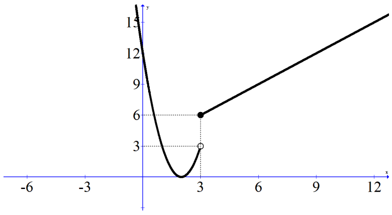
a) $c = 1$



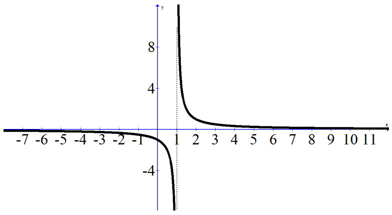
b) $c = 0$



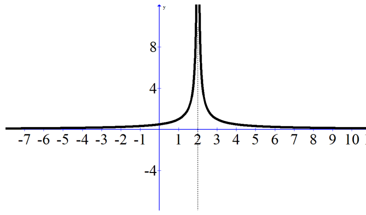
c) $c = 0$



d) $c = 3$

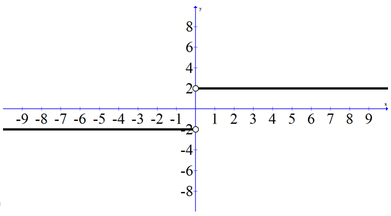


e) $c = 1$

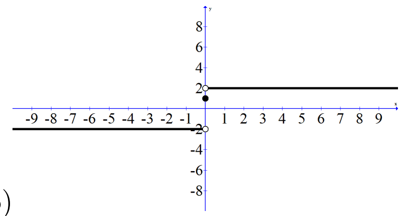


f) $c = 2$

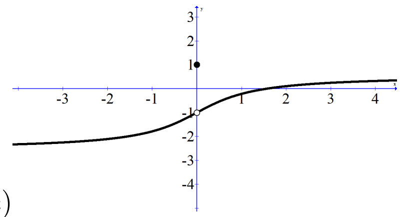
2. Estude a existência de limite na origem, para as seguintes funções:



a)



b)



c)

3. Calcule, se existirem, os seguintes limites (recorde que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$):

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{7}{x+1}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{|x+5|}{x+5}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3) - \operatorname{sen}^3 x}{x^3}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{x}$; (h) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$; (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - \operatorname{sen}^2\sqrt{x}}{x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; (l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$;

(m) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\cos x}$; (n) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x}\cos x$; (o) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x}\cos x$;

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$; (q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$; (r) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + x\cos x)$;

(s) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$; (t) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1/x^3 - 1/8}{x-2}$; (u) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x \cos(1/x))$.

4. Sabendo que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, calcula o limite em $x = 0$ das seguintes funções:

$$\text{(a) } \frac{(x-1)f(x)}{f(x)^3 - 1}\ ; \qquad \text{(b) } (f(x)-2)\cos(\frac{1}{x}).$$

5. Em cada alínea da pergunta 1., estude a continuidade da função no ponto c indicado. Nos casos em que a função não é contínua no ponto, justifique.

6. Determine o domínio de continuidade das seguintes funções

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x > 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases} ; \qquad \text{(b) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} .$$

7. Mostre que a função $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + 1 - x^2$ possui, pelo menos, um zero em $]-\pi, 0[$ e outro em $]0, \pi[$.

8. Mostre que as seguintes equações possuem soluções nos intervalos indicados:

   (a) $x^3 - x + 3 = 0, \quad]-2,-1[$; (b) $x = \cos x, \quad [0, \pi/2]$;

   (c) $x = -\log x, \quad]0,1]$; (d) $2 + x = e^x, \quad \mathbb{R}$;

   (e) $x^5 + x^3 = 2, \quad [0,1]$; (f) $\frac{1}{x} = \operatorname{sen} x, \quad [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

9. Seja f uma função contínua no seu domínio. Dizemos que f tem um ponto fixo se existir um elemento x do domínio tal que $f(x) = x$. Prove que a função f com domínio $[-1,1]$ que satisfaz $f(-1) = 0 = f(1)$ tem um ponto fixo.