Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Complexa

LFis /MIEFis
30/01/2017
Exame de Recurso

Todas as respostas deverão ser convenientemente justificadas. Duração: 2h30m

1. Apresente todos os valores de 2^{1+i} na forma $a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

2. Considere a função $f(z)=z\overline{z}^2$. Determine o conjunto dos pontos para os quais a função f é derivável. Existe algum ponto onde a função f é analítica?

3. Use o Teorema de Cauchy-Riemann para mostrar que $(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$.

4. Determine a série de Taylor de $f(z)=\ln(4+3z-z^2)$ em torno de $z=2$. Indique também o disco de convergência desta série.

5. Determine a série de Laurent da função $f(z)=z^4\mathrm{e}^{1/z}$ em torno de $z=0$, identificando a parte principal e a parte regular desta série. Indique o tipo de singularidade de $z=0$ assim como o resíduo $\mathrm{res}_{z=0}f(z)$.

6. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(iz)}{z^3-4z^2+3z}\,dz$, onde $\gamma=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=2\}$.

7. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{1-z^{20}}\,dz$, onde $\gamma=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=4\}$.

8. Calcule o integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}\,dx$.

9. Determine a série dos senos da função $f(x) = x$, no intervalo $[0, 1]$.

10. Determine uma solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t > 0, \\ u(0, x) = x, \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

11. Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, onde $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, uma função analítica. Mostre que u é uma função harmónica, isto é, satisfaz a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Cotações: Questões 1 e 11: 1 valor;
Questões 2 a 10: 2 valores.