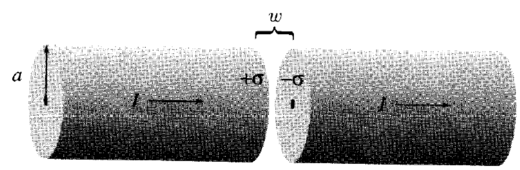
Complementos/Tópicos Avançados de Electromagnetismo

Exame de recurso 4 de Fevereiro de 2023

Os alunos que quiserem fazer exame de recurso global deverão responder apenas a duas perguntas de cada parte. Os alunos que desejem fazer recurso a apenas uma das partes deverão responder às três perguntas que são formuladas na respectiva parte. A duração do exame é de 2h para os primeiros e 1h e 30´para os segundos.

Parte-1

1. Considere um fio cilíndrico espesso (raio *a*) e infinito, percorrido por uma corrente de intensidade *I* e com um estreito hiato de largura ω, como se ilustra na figura.



   Admita que a carga acumulada nas paredes do hiato é nula a *t*=0, instante em que a corrente é ligada e que $\omega \ll a$. Calcule, para o hiato:

   a) Os campos eléctrico e magnético como funções da distância ao eixo de simetria do fio (*s*) e do tempo (*t>0*).
   b) A densidade de energia e o vector de Poynting.
   c) A energia electromagnética total acumulada.

2. Uma esfera de raio R possui uma polarização uniforme $\vec{P} = P(-\hat{y} + \hat{z})$ e uma magnetização $\vec{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}M(\hat{z} + \hat{x})$.
   a) Calcule o momento electromagnético armazenado no interior da esfera.
   Observação: como vimos, para $r \ll R$, $\vec{E} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$ e $\vec{B} = -\frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$.
   b) O que espera que aconteça se a esfera se desmagnetizar lentamente? Justifique.

3. Considere uma esfera metálica uniformemente carregada (raio *R* e carga *Q*). Usando o tensor de Maxwell, calcule a força que o hemisfério sul da esfera exerce sobre o hemisfério norte. Justifique os seus cálculos.
   ($T_{ij} = \varepsilon_0\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right]$)

Parte-2

4. Considere uma onda electromagnética a propagar-se num meio condutor (condutividade eléctrica σ e constante dieléctrica ε), linear e isotrópico. As equações de Maxwell dão origem a equações de onda que admitem soluções de tipo onda plana: $\tilde{\vec{E}}(z,t) = \widetilde{\overrightarrow{E_0}}\, e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$ e $\tilde{\vec{B}}(z,t) = \widetilde{\overrightarrow{B_0}}\, e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$, com amplitudes vectoriais e números de onda complexos ($\tilde{k} = k + i\eta$), de tal forma que $k = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1}$ e $\eta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1}$.
   a) Mostre então que os campos eléctrico e magnético são mutuamente perpendiculares mas não oscilam em fase.
   b) Mostre que, se o meio for bom condutor, $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right) \gg 1$, então o campo magnético oscila com um atraso de fase de $\frac{\pi}{4}$ relativamente ao campo eléctrico.
   c) Admita que $\sigma = 6\times\ 10^7[\Omega.m]^{-1}$ e $\omega = 2\pi\times\ 10^6\,\frac{rad}{s}$. Estime o comprimento de onda e a velocidade de fase fase da onda no metal.

5. a) Calcule os campos eléctrico e magnético associados aos seguintes potenciais:

$$\varphi = 0$$
$$\vec{A} = \frac{k\,\mu_0}{4\,c}[ct-|x|]^2\,\hat{z} \quad se\ [x] < ct$$
$$\vec{A} = 0 \qquad\qquad se\ [x] > ct$$

   b) Identifique possiveis distribuicões de cargas e correntes que lhes possam dar origem.

6. Uma corrente $I(t) = kt$ é injectada num fio rectilíneo de comprimento infinito (orientado segundo zz´) no instante $t = 0$ (isto é: $I(t) = kt$ se $t > 0$ e $I = 0$ se $t \leq 0$). O fio permanece electricamente neutro.
   a) Calcule o potencial vector magnético (retardado) $\vec{A}(r,t)$ num ponto a uma distância r do fio. Explique convenientemente o seu raciocínio.

   (Nota: $\int \frac{dz}{\sqrt{s^2+z^2}} = ln\left[z+\sqrt{s^2+z^2}\right]+C$).

   b) Calcule o campo eléctrico gerado no mesmo ponto.