Universidade do Minho (DMA)
Janeiro 2020

Cálculo
Teste Modelo (90 minutos)

Nome ____________________

Número ____________________ Curso ____________________

1. Calcular os integrais seguintes

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{10}{2x-3}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{5}^{10} \exp(-x/3) - \cos(\pi x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[5]{7x+9}\,dx$

2. Calcular os integrais seguintes usando a técnica de mudança de função.

1. $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{34x^7}{x^8+9}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(1-2x)}{13-x+x^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sqrt[4]{\sin(x)}\cos(x)\,dx$

3. Calcular os integrais seguintes usando a técnica de integração por partes.

1. $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\cos(-\pi x)\,dx$

4. Calcular os integrais seguintes usando a divisão euclidiana ou a decomposição em elementos simples.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x-2}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x-3}{(2+x)(x-3)}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^2-3}{x(2+x^2)}\,dx$

5. Mostrar que para qualquer t, temos a formula $\cosh^2(t) = \dfrac{1+\cosh(2t)}{2}$. Calcular o integral $\displaystyle\int_{0}^{\sinh(1)} \sqrt{1+x^2}\,dx$ usando a mudança de variavel $x = \sinh(t)$.

solução

1.1

$$\int_{-1}^{1} \frac{10}{2x-3}\,dx = \left[\frac{10}{2}\ln|2x-3|\right]_{-1}^{1} = 5\{\ln(1)-\ln(5)\} = -5\ln(5).$$

1.2

$$\int_{5}^{10} \exp(-x/3)-\cos(\pi x)\,dx = \left[-\frac{\exp(-x/3)}{1/3} - \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{5}^{10} = 3\exp(-10/3)(\exp(-1/2)-1).$$

1.3

$$\int_{0}^{1} \sqrt[5]{7x+9}\,dx = \left[\frac{1}{7}\frac{(7x+9)^{1+1/5}}{1+1/5}\right]_{0}^{1} = \frac{(16)^{6/5}-(9)^{6/5}}{42/5}.$$

2.1 Com $u = x^8+9$, temos $u' = 8x^7$ e deduzimos $f(x) = \dfrac{34x^7}{x^8+9} = \dfrac{17}{4}\dfrac{8x^7}{x^8+9} = \dfrac{17}{4}\dfrac{u'}{u}$. Temos a função $g(u) = \dfrac{17}{4u}$ cuja primitiva é $G(u) = \frac{17}{4}\ln(|u|)$. Por consequência, uma primitiva de f é $F(x) = \frac{17}{4}\ln(|x^8+9|)$. Usando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_{-3}^{0} \frac{34x^7}{x^8+9}\,dx = \left[\frac{17}{4}\ln(x^8+9)\right]_{-3}^{0} = \frac{17}{4}(\ln(9)-\ln(3^8+9)).$$

2.2 Com $u = 13-x+x^2$, temos $u' = 2x-1$ e deduzimos $f(x) = \dfrac{(1-2x)}{13-x+x^2} = -\dfrac{u'}{u}$. Temos a função $g(u) = -\dfrac{1}{u}$ cuja primitiva é $G(u) = -\ln(|u|)$. Por consequência, uma primitiva de f é $F(x) = -\ln(|13-x+x^2|)$. Usando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_{0}^{1} \frac{(1-2x)}{13-x+x^2}\,dx = -\left[\ln(13-x+x^2)\right]_0^1 = -\{\ln(13)-\ln(13)\} = 0.$$

2.3 Com $u = \sin(x)$, temos $u' = \cos(x)$ e deduzimos $f(x) = \sqrt[4]{\sin(x)}\cos(x) = u^{1/4}u'$. Temos a função $g(u) = u^{1/4}$ cuja primitiva é $G(u) = \frac{u^{5/4}}{5/4}$. Por consequência, uma primitiva de f é $F(x) = \frac{4}{5}\sin^{5/4}(x)$. Usando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_{0}^{\pi} \sqrt[4]{\sin(x)}\cos(x)\,dx = \left[\frac{4}{5}\sin^{5/4}(x)\right]_{0}^{\pi} = 0.$$

3.1 Escolhemos $u = \ln(x)$ e $v' = x^{-1/2}$. Deduzimos $u' = \frac{1}{x}$ e $v = 2x^{1/2}$. A fórmula de integração por partes dá

$$\int_{1}^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\ln(x)x^{1/2}\right]_{1}^{e^2} - \int_{1}^{e^2} \frac{2x^{1/2}}{x}\,dx = \{4e\} - 4\left[x^{1/2}\right]_{1}^{e^2} = 4.$$

3.2 Escolhemos $u = x$ e $v' = \cos(-\pi x) = \cos(\pi x)$. Deduzimos $u' = 1$ e $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$. A fórmula de integração por partes dá

$$\int_{-1}^{1} x\cos(-\pi x)\,dx = \left[x\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin(\pi x)\,dx = 0 + \frac{1}{\pi^2}\left[\cos(\pi x)\right]_{-1}^{1} = 0.$$

4.1 Usando a divisão euclidiana, obtemos $\dfrac{x^2}{x-2} = x+2+\dfrac{4}{x-2}$ e deduzimos

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x-2}\,dx = \int_{-1}^{1} x+2+\frac{4}{x-2}\,dx = \left[\frac{(x+2)^2}{2} + 4\ln(|x-2|)\right]_{-1}^{1} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 4\ln(3).$$

4.2 A fração racional $\dfrac{2x-5}{(2+x)(x-3)} = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ é irredutível porque $\deg(N) < \deg(D)$ e os polinómios não têm raizes em comum. Temos a decomposição em elementos simples $\dfrac{2x-5}{(2+x)(x-3)} = \dfrac{9/5}{x+2} + \dfrac{1/5}{x-3}$. Deduzimos então

$$\int_0^1 \frac{2x-5}{(2+x)(x-3)}\,dx = \int_0^1 \frac{9/5}{x+2} + \frac{1/5}{x-3}\,dx = \Big[9/5\ln(|x+2|) + 1/5\ln(|x-3|)\Big]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{2x-5}{(2+x)(x-3)}\,dx = 9/5\ln(3/2) + 1/5\ln(2/3) = 8/5\ln(3/2).$$

4.3 A fração racional $\dfrac{x^2-3}{x(2+x^2)} = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ é irredutível porque $\deg(N) < \deg(D)$ e os polinomios não têm raizes em comum. Temos a decomposição em elementos simples $\dfrac{x^2-3}{x(2+x^2)} = \dfrac{5/2x}{x^2+2} - \dfrac{3/2}{x}$. Deduzimos então

$$\int_1^2 \frac{x^2-3}{x(2+x^2)}\,dx = \int_1^2 \frac{5/2x}{x^2+2} - \frac{3/2}{x}\,dx = \Big[\frac{5}{4}\ln(x^2+2) - \frac{3}{2}\ln(x)\Big]_1^2$$

$$\int_1^2 \frac{x^2-3}{x(2+x^2)}\,dx = \frac{5}{4}\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(2) = -\frac{\ln(2)}{4}.$$

5 Temos

$$\cosh^2(t) = \frac{(e^t+e^{-t})^2}{4} = \frac{(e^t)^2 + 2e^te^{-t} + (e^{-t})^2}{4} = \frac{1+\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}{2} = \frac{1+\cosh(2t)}{2}.$$

Efectuamos as três etapas da mudança de variável: (1) se $x=0$, $t=0$ e se $x=\sinh(1)$, $t=1$. (2) $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \cosh(t)$. (3) $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \cosh(t)$ então $dx = \cosh(t)dt$. Juntamos as informações, determinamos o novo integral em função de t:

$$\int_0^{\sinh(1)} \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \cosh^2(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1+\cosh(2t)}{2}\,dt = \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sinh(2t)}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\sinh(2)}{4}.$$