Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Exercícios

Exercício 18: *Evolução de um spin 1/2 num campo magnético*

Um eletrão cujo spin 1/2 se encontra inicialmente no estado próprio $|+\rangle$ de $\hat{\sigma}_z$ (i.e. $\hat{\sigma}_z |+\rangle = |+\rangle$), viaja a uma velocidade v, suposta constante, através de uma região de comprimento L onde existe um campo magnético $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{e}}_x$.

Sabendo que o Hamiltoniano de interação do momento magnético do eletrão $\boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m}\hat{\boldsymbol{S}}$, em que $\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, com o campo magnético, é dado por

$$\hat{H} = -\boldsymbol{\mu}_e \cdot \boldsymbol{B} = \frac{e\hbar B}{2m}\hat{\sigma}_x \tag{52}$$

mostre que a probabilidade de medir o valor de spin do electrão ao longo de uma direção arbitrária $\hat{\boldsymbol{n}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, em que θ e φ são os ângulos polares que caracterizam a direção do versor $\hat{\boldsymbol{n}}$, igual a $-\hbar/2$, após o eletrão atravessar a dita região, é dada por

$$p_{\hat{\boldsymbol{n}}}(-) \quad = \quad \frac{1}{2}\left[1 - \cos\theta\cos(2\omega_{\mathrm{L}}L/v) + \sin\theta\sin\varphi\sin(2\omega_{\mathrm{L}}L/v)\right], \tag{53}$$

onde $\omega_{\mathrm{L}} = \frac{eB}{2m}$ é a frequência de Larmor do eletrão.

Pista: Expresse o estado inicial do sistema em termos dos estados próprios do Hamiltoniano e determine assim a sua evolução temporal, utilizando os resultados discutidos na aula teórica (note que aqui os estados próprios da energia são conhecidos exatamente). Após o tempo de travessia da região onde o campo magnético é imposto, basta calcular o valor médio do projetor adequado no estado final do sistema.

Exercício 19: *Integral da função* $\frac{\sin^2 u}{u^2}$

Mostre que $\int_0^\infty du\, \frac{\sin^2 u}{u^2} = \frac{\pi}{2}$.

Pista: Escreva $\frac{1}{u^2} = \int_0^\infty dy\, y\, e^{-yu}$, substitua no integral e troque a ordem de integração.

Exercício 20: *Conservação da probabilidade em teoria de perturbações em ordem* λ^2

O objetivo deste exercício é provar que $\sum_j |\gamma_j(t)|^2 = 1$ em segunda ordem em λ^2, em que os coeficientes $\gamma_j(t)$ são os coeficientes de expansão da função de onda $|\psi_t\rangle$ de um sistema descrito por um Hamiltoniano dependente do tempo, $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}_1(t)$, i.e.

$$|\psi_t\rangle = \sum_l \gamma_l(t) e^{-i\frac{E_l}{\hbar}(t-t_0)} |l\rangle \ , \tag{54}$$

em que $|l\rangle$ são os estados próprios de $\hat{H}_0$, supostos conhecidos, com energias próprias associadas iguais a E_l, sendo que $\gamma(0) = a_l^0$, determinando as amplitudes a_l^0, o estado inicial a $t = t_0$, i.e. $|\psi_{t_0}\rangle = \sum_l a_l^0 |l\rangle$.

a) Prove que

$$\gamma_j(t) = a_j^0 - \frac{i\lambda}{\hbar} \sum_l \int_{t_0}^{t} du \, \langle j| \hat{H}_1(u) |l\rangle \, e^{-i\omega_{lj}(u-t_0)} \gamma_l(u) \,, \tag{55}$$

em que $\omega_{lj} = \frac{E_l - E_j}{\hbar}$.

Pista: Resulta de uma simples integração da equação diferencial para $\gamma_j(t)$ obtida na aula teórica.

b) Considere agora que a $t = t_0$, o sistema se encontra num estado definido da energia, $|i\rangle$, isto é $a_l^0 = \delta_{l,i}$. Escrevendo, $\gamma_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{nj}(t)\lambda^n$, numa série de potências em λ, obtenha a correção de primeira ordem

$$\gamma_{1j}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} du \, \langle j| \hat{H}_1(u) |i\rangle \, e^{-i\omega_{ij}(u-t_0)} \,. \tag{56}$$

c*) Mostre que a correção de segunda ordem é dada por

$$\gamma_{2j}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^{t} du \int_{t_0}^{u} dv \, \langle j| \hat{H}_1^{\text{int}}(u) \hat{H}_1^{\text{int}}(v) |i\rangle \, e^{i\omega_{ij} t_0} \,, \tag{57}$$

onde $\hat{H}_1^{\text{int}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} \hat{H}_1(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$ é a perturbação na representação de interação.

d*) Mostre que $\sum_j |\gamma_j(t)|^2 = 1$, em segunda ordem em λ^2.

Pista: Note que para $\gamma_i(t)$ necessita de conservar o termo $\gamma_{2i}(t)$ na sua expansão até à ordem λ^2, dado que $\gamma_{0i}(t) = 1$. Utilize ainda a propriedade do integral duplo $\int_{t_0}^{t} du \int_{t_0}^{u} dv f(u,v) = \int_{t_0}^{t} dv \int_{v}^{t} du f(u,v) = \int_{t_0}^{t} du \int_{u}^{t} dv f(v,u)$, onde $f(u,v)$ é uma função genérica de duas variáveis. Finalmente, considere o que é $\overline{\langle i| \hat{H}_1^{\text{int}}(v) \hat{H}_1^{\text{int}}(u) |i\rangle}$.

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt