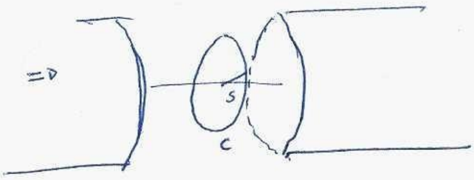
Resoluções exame recurso

Problema - 1

(a) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{I \cdot t}{A} \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{I t}{\pi a^2 \varepsilon_0}$ $\qquad \vec{E} = \frac{I t}{\pi a^2 \varepsilon_0} \hat{z}$

(coordenadas cilíndricas)

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$



$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$$

(por simetria) $\qquad = B(s)\, 2\pi \cancel{s} = \mu_0 \cancel{\varepsilon_0}\, \partial_t \left[\frac{I t}{\cancel{\pi} a^2 \cancel{\varepsilon_0}} \cdot \cancel{\pi} s^{\cancel{2}} \right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{B}(s) = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi a^2} s \hat{\phi}$$

b) $u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \cancel{\varepsilon_0} \frac{I^2 t^2}{\pi^2 a^4 \varepsilon_0^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2 \cancel{\mu_0}} \mu_0^{\cancel{2}} \frac{I^2}{4\pi^2 a^4} s^2$

$$= \frac{1}{2} \frac{I^2}{\pi^2 a^4} \left[\frac{t^2}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{s^2}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{\pi^2 a^4} \left[c^2 t^2 + \frac{s^2}{4} \right] \qquad (\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{I^2 t s}{2\pi^2 a^4 \varepsilon_0} \mu_0 \underbrace{(\hat{z} \times \hat{\rho})}_{-\hat{s}}$$

$$\vec{S} = - \frac{I^2 t s}{2 \varepsilon_0 \pi^2 a^4} \hat{s}$$

//

Problema - 2

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{k}{r}\,\hat{r}$$

Método - 1 : situação estática : $\nabla \times \vec{E} = 0$

$$\nabla \times \vec{D} = \varepsilon_0 (\nabla \times \vec{E}) + (\nabla \times \vec{P}) = \nabla \times \vec{P}$$

Se $\nabla \times \vec{P} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{D}$ é determinado

pelo sua divergência : $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L = 0$.

$\nabla \times \left(\frac{\hat{r}}{r}\right) = 0$; $\rho_L = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \quad \forall\, r$

Como $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$, isto é :

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 & r < a \\ \vec{E} = -\dfrac{k}{r\,\varepsilon_0}\,\hat{r} & a < r < b \\ \vec{E} = 0 & r > b \end{cases}$$

Método - 2

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\,\partial_r \left(r^2 P_r\right) = -\frac{k}{r^2}$$

$$\sigma_b = \hat{n} \cdot \vec{P} \Rightarrow \sigma_b = \begin{cases} \dfrac{k}{b} & r = b \\ -\dfrac{k}{a} & r = a \end{cases}$$

Podemos usar agora a lei de Gauss, obtendo

o mesmo resultado acima.

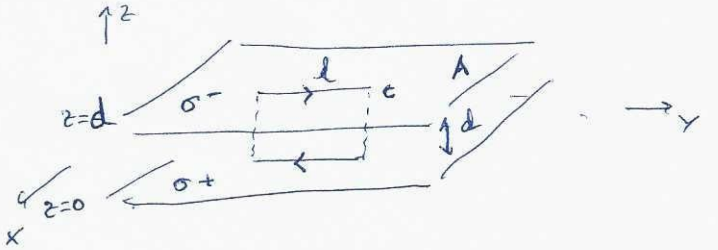
Problema - 3

a) $\vec{E} = E\hat{z}$; $\vec{B} = B\hat{x}$

$$\vec{p}_{em} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 E B (\hat{z} \times \hat{x}) = \varepsilon_0 E B \hat{y}$$

$$\vec{P} = \int \vec{p}_{em} \cdot dV = \varepsilon_0 E B A d \hat{y}$$

b) $$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} -\dot{\vec{B}} \cdot d\vec{\Sigma}$$



$$\Leftrightarrow [E(d) - E(0)]\,\ell = -\dot{B}\,\ell\, d$$

$$\vec{F} = \left[-\sigma A\, E(d) - \sigma A\, E(0)\right] \hat{y} = -\sigma \dot{B} d A \hat{y}$$

$$\vec{I} = \int_0^{\infty} \vec{F}\, dt = -\sigma A d \hat{y} \int \frac{dB}{dt} \cdot dt = \sigma A d B \hat{y}$$

Mas: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow$ $\vec{I} = \varepsilon_0 E A d B \hat{y} = \vec{P}_{em}$ (alínea a)

D

Problema - 4

Esfera metálica uniformemente carregada. O campo electrostático é:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Consideremos uma superfície fechada constituída pelo plano equatorial e pela superfície hemi-esférica superior, que delimita o hemisfério norte.

O campo eléctrico no plano equatorial é nulo, pelo que $\overline{\overline{T}}$ é nulo nesta superfície. Não contribui para a força que queremos calcular.

Consideremos a superfície hemi-esférica. Aqui

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{r}$$

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\left[\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right]$$

Por simetria, a força resultante tem apenas uma componente não nula (paralela a zz'). É esta que precisamos de calcular

$$f_z = \left(\overline{\overline{T}}\cdot d\vec{\Sigma}\right)_z = T_{zx}\,d\Sigma_x + T_{zy}\,d\Sigma_y + T_{zz}\,d\Sigma_z$$

✓

Usando a definição de $T_{ij} = \varepsilon_0 \left[E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2 \right]$

obtemos:

$$T_{zx} = \varepsilon_0 E_z E_x = \varepsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right]^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi$$

$$T_{zy} = \varepsilon_0 E_z E_y = \varepsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right]^2 \sin\theta \cos\theta \sin\phi$$

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 \right] = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right]^2 \left[\cos^2\theta - \sin^2\theta \right]$$

Por outro lado:

$$d\vec{\Sigma} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

$$= R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \left[\sin\theta \cos\phi \, \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \, \hat{y} + \cos\theta \, \hat{z} \right]$$

Logo se verifica que

$$\left(\overline{\overline{T}} \cdot d\vec{\Sigma} \right)_z = f_z = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \right]^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

pelo que:

$$F_z = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \, \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \right]^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\boxed{F_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2}}$$

D

Problema - 5

a) $$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ (conservação local de carga)

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$ (condutor ohmico)

L. Gauss $\left\{ \begin{array}{l} \sigma (\nabla \cdot \vec{E}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \sigma \dfrac{\rho}{\varepsilon} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\rho} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon} dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho(t) = \rho(0)\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

O tempo característico de decaimento de ρ é $\therefore \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

Substituindo os valores dados

$$\tau \sim \frac{1,2 \cdot 8,854 \times 10^{-12}\ F/m}{10^{-12}\ [\Omega m]^{-1}} \simeq 10\ s$$

b) $$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad ; \quad k = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 10^6 \qquad \sigma = 10^{-12} \qquad \varepsilon \sim 10^{-11}\ \frac{F}{m}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} = \frac{10^{-12}}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 10^{-11}} \sim \frac{1}{2\pi} 10^{-7} \ll 1$$

$$k \sim \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \Big[1 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2}_{\ll 1} + \dots + 1 \Big]^{1/2} \simeq \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0}$$

$$k \sim \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \varepsilon_r^{1/2}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \varepsilon_r^{1/2} \rightarrow \text{substituir valores.}$$

$$\frac{\omega}{k} = v_f = \frac{c}{\varepsilon_r^{1/2}} \rightarrow \text{Substituir valores.}$$

□

Problema _ 6

Modos TEM são impossíveis num tubo condutor oco.

$$\text{TEM} \Rightarrow E_z = B_z = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad (E_z = 0)$$

↓

(Não há cargas no interior do tubo)

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow (\nabla \times \vec{E})_z = -\dot{B}_z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Consequentemente, as equações de Maxwell impõem que o campo eléctrico associado a um modo TEM tenha divergência e rotacional nulos. Isto significa que $\vec{E} = -\nabla \phi$, e que $\nabla^2 \phi = 0$. Como a fronteira condutora é equipotencial, então $\phi = \text{Const.} \Rightarrow \vec{E} = 0$ □

Problema - 7 $\qquad \phi = 0 \qquad \vec{A} = A\hat{y}\sin(kx-\omega t)$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = +\omega A\hat{y}\cos(kx-\omega t)$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{z} = A k\cos(kx-\omega t)\,\hat{z}$$

Vejamos agora se as eq. de Maxwell são verificadas

Obviamente: $\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \rho = 0$ são cumpridas

$$\nabla\times\vec{E} \overset{?}{=} -\dot{\vec{B}}$$

$$+\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z} = -A\omega k\sin(kx-\omega t)$$

$$\dot{\vec{B}} = +A\omega k\sin(kx-\omega t) \Rightarrow \underline{\underline{\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}}}$$

$$\nabla\times\vec{B} \overset{?}{=} \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{y} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\omega^2 A\sin(kx-\omega t)\,\hat{y}$$

$$\downarrow$$

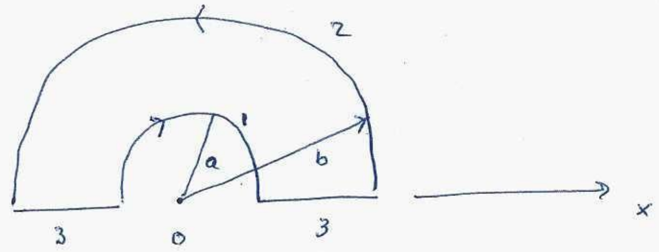
$$+A k^2\sin(kx-\omega t)\,\hat{y}$$

A equação é verificada se $\vec{J} = 0$ e $\frac{\omega}{k} = c$

$\square$

Problema - 8

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d\vec{r}'$$



$$\vec{A}(0,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I(t_r)}{r}\, d\vec{\ell} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{K(t-\frac{r}{c})}{r}\, d\vec{\ell}$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi}\left[\oint \frac{t}{r}\, d\vec{\ell} - \frac{1}{c}\underbrace{\oint d\vec{\ell}}_{0}\right]$$

$$\vec{A}(0,t) = \frac{\mu_0 K t}{4\pi}\left\{ \frac{1}{a}\int_1 d\vec{\ell}_1 + \frac{1}{b}\int d\vec{\ell}_2 + 2\,\hat{x}\int_a^b \frac{dx}{x} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 K t}{4\pi}\left[\frac{1}{a}\pi a - \frac{1}{b}\pi b + 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]\hat{x}$$

$$\vec{A}(0,t) = \frac{\mu_0 K t}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 K}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$$

□