Cap 4-Sec 5. Determinantes e Valores próprios

Definição. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, $T : V \to V$ uma transformação linear e seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

- λ é dito **valor próprio** de T se existir um vetor $v \in V$ <u>não nulo</u> tal que $T(v) = \lambda v$.

- Um vetor $v \in V$ <u>não nulo</u> tal que $T(v) = \lambda v$ é dito **vetor próprio** associado ao valor próprio λ.

Nota. Se v for um vetor próprio associado ao valor próprio λ tem-se, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $T(\alpha v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$ e

$$T(\langle v \rangle) = \begin{cases} \langle v \rangle & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \{0_V\} & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

Exemplos.

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, 2y)$ e seja $v = (1, 1)$. Tem-se $T(v) = 2v$. Logo 2 é valor próprio e $v = (1, 1)$ é um vetor próprio associado.

- Seja $T : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dado por $T(f) = f'$.

  Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de T sse existir uma função f não nula tal que $f' = \lambda f$, isto é, uma solução não nula da equação diferencial $y' - \lambda y = 0$. Como tal solução existe (por exemplo, $y(x) = e^{\lambda x}$), podemos dizer que todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio.

Nota. O exemplo anterior mostra que uma transformação linear pode, em geral, admitir uma infinidade de valores próprios. Isto já não é verdade quando o espaço vetorial V tem dimensão finita. Recorde que, se $\dim V$ for finita e se $S : V \to V$ for uma transformação linear, tem-se

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(S) + \dim \operatorname{Im}(S)$$

Em particular, nestas condições, tem-se

$$\begin{aligned} S \text{ bijetiva} \;&\Leftrightarrow\; S \text{ injetiva } (\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(S) = 0) \\ &\Leftrightarrow\; S \text{ sobrejetiva } (\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(S) = \dim V) \end{aligned}$$

Determinação dos valores próprios de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de matriz canónica A.

Proposição. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, A a matriz canónica de T e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\lambda \text{ é valor próprio de } T \Leftrightarrow \det(A - \lambda\, I_n) = 0.$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valor próprio de } T &\Leftrightarrow \text{ existir } v \neq \vec{0} \text{ tal que } T(v) = \lambda v \\
&\Leftrightarrow \text{ existir } v \neq \vec{0} \text{ tal que } (T - \lambda\,\mathrm{Id})(v) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow T - \lambda\,\mathrm{Id} \text{ não é injetiva} \\
&\Leftrightarrow T - \lambda\,\mathrm{Id} \text{ não é bijetiva} \\
&\Leftrightarrow \det(A - \lambda\, I_n) = 0. \ \square
\end{aligned}$$

Nota. Como $P(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n)$ é um polinómio de grau n em λ e como, por esta proposição, os valores próprios de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são as raizes reais deste polinómio P, vem que T tem no máximo n valores próprios.

Determinação dos vetores próprios de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de matriz canónica A.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ for um valor próprio de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ então

$v \in \mathbb{R}^n$ é vetor próprio associado a $\lambda \Leftrightarrow v \neq \vec{0}$ e $T(v) = \lambda v \Leftrightarrow v \neq \vec{0}$ e $Av = \lambda v$.

Escrevendo $v = (x_1, \cdots, x_n)$, os vetores próprios associados a λ são as soluções não nulas do sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemplo [Ficha5-Ex. 10] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associada à matriz A dada e determine, caso existam, os seus valores próprios e os vetores próprios associados.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T(x, y) = (x - y, -4x + y)$.

Se existirem, os valores próprios de T são os $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação $\det(A - \lambda I_2) = 0$. Tem-se

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

Resolvendo a equação $(1-\lambda)^2 - 4 = 0$ vem $\lambda = -1$ ou $\lambda = 3$. Assim os valores próprios de T são -1 e 3.
Vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$: são os vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ não nulos tais que $T(v) = -v$ (ou, equivalentemente os vetores não nulos de $\mathrm{Ker}(T + Id)$). Tem-se

$$\begin{cases} x - y = -x \\ -4x + y = -y \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x$$

pelo que os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são os vetores $x(1, 2)$ com $x \neq 0$.
Vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 3$: são os vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ não nulos tais que $T(v) = 3v$ (ou, equivalentemente os vetores não nulos de $\mathrm{Ker}(T - 3Id)$). Tem-se

$$\begin{cases} x - y = 3x \\ -4x + y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x$$

pelo que os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 3$ são os vetores $x(1, -2)$ com $x \neq 0$.

Nota. Como os 2 vetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (1, -2)$ são linearmente independentes, eles formam uma base de $\mathbb{R}^2$ (pois $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$). Temos então uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por vetores próprios de T. Seja agora um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ qualquer. Decompondo u na base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ vem

$$u = \alpha v_1 + \beta v_2 \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{o que podemos escrever } u_{/\mathcal{B}} = (\alpha, \beta)$$

Como

$$T(u) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = -\alpha v_1 + 3\beta v_2$$

temos $(T(u))_{/\mathcal{B}} = (-\alpha, 3\beta)$ e, escrevendo em colunas,

$$(T(u))_{/\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot u_{/\mathcal{B}}$$

A matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (cujas colunas são as coordenadas de $T(v_1)$, $T(v_2)$ na base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$) é chamada matriz de T na base $\mathcal{B}$.