# Problemas de revisão da matéria de FQ I

N. M. R. Peres

September 19, 2016

## 1 Momento angular

1. Partindo de

$$L_+|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle\,, \tag{1}$$
$$L_-|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|l,m-1\rangle\,, \tag{2}$$

obtenha a representação matricial para os operadores $L_x$ e $L_y$ considerando o caso $l = 1$.

2. Escreva a representação matricial do operador $L_z$ considerando o caso $l = 1$. Obtenha, a partir das matrizes do item anterior, a representação matricial do operador $L^2$.

3. Partindo de

$$L_+|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle\,, \tag{3}$$
$$L_-|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|l,m-1\rangle\,, \tag{4}$$

obtenha a representação matricial para os operadores $L_x$ e $L_y$ considerando o caso $l = 3/2$. Verifique a sua resposta sabendo que para este caso temos

$$L_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{5}$$

$$L_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{6}$$

4. A partir da representação no espaço real (em coordenadas esféricas) dos operadores $L_x$, $L_y$ e $L_z$, obtenha a representação no espaço real do operador $L^2$, nas mesmas coordenadas.

5. Considere uma partícula de spin 1/2 representada pelo estado normalizado

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\beta}\sin\alpha \end{pmatrix}\,. \tag{7}$$

   (a) Calcule a probabilidade de uma medida de $S_y$ originar o valor $-\hbar/2$.

   (b) Escreva a evolução temporal do estado $\chi(0)$, admitindo que a partícula é descrita por um Hamiltoniano da forma $H = g\sigma_z$.

6. A representação matricial de $L_y$ para o caso $l = 1$ é

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{8}$$

(a) Verifique se o estado

$$|1,1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

está normalizado e se é estado próprio de $L_y$.

(b) Calcule todos os valores e vectores próprios de $L_y$.

7. Use a representação matricial, para o caso $l = 1/2$, dos operadores $S_x$, $S_y$ e $S_z$ para verificar que

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z\,. \tag{10}$$

8. Se representarmos os estados próprios de $S_z$ pelos kets $|m = 1/2\rangle$ e $|m = -1/2\rangle$, verifique que os operadores $S_z$, $S_+$ e $S_-$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{\hbar}{2}|m = 1/2\rangle\langle m = 1/2| - \frac{\hbar}{2}|m = -1/2\rangle\langle m = -1/2|\,, && (11) \\ S_+ &= \hbar|m = 1/2\rangle\langle m = -1/2|\,, && (12) \\ S_- &= \hbar|m = -1/2\rangle\langle m = 1/2|\,. && (13) \end{aligned}$$

9. Uma partícula de spin 1 encontra-se no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix}. \tag{14}$$

(a) Verifique se o estado está normalizado

(b) Calcule as probabilidades de numa medida de $L_z$ obtermos os valores $-\hbar, 0, \hbar$.

(c) Sem usar multiplicação de matrizes, calcule o valor expectável de $L_z$.

(d) Calcule o valor expectável de $L_x$.

10. Demonstre que a seguinte igualdade

$$e^{-iS_y\theta/\hbar} = \cos\frac{\theta}{2} - \frac{2i}{\hbar}S_y \sin\frac{\theta}{2}\,. \tag{15}$$

para partículas de spin $1/2$.

# 2 Hamiltonianos dependentes do momento angular

1. Mostre que a função de onda (normalizada)

$$\langle\theta,\phi|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi \tag{16}$$

é função de onda do hamiltoniano

$$H = \frac{L^2}{2I}$$

(Sugestão: escreva a função de onda usando harmónicos esféricos.)

2. Um rotor rígido, quando colocado num campo magnético $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{u}_z$, é descrito pelo hamiltoniano

$$H = \frac{L^2}{2I} + \omega_0 L_z\,. \tag{17}$$

(a) Se o sistema se encontrar no estado

$$\langle\theta,\phi|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi \tag{18}$$

calcule a forma da função de onda no tempo $t$, $\langle\theta,\phi|\psi(t)\rangle$.

(b) Também podemos escrever a função de onda $\langle\theta,\phi|\psi(0)\rangle$ na representação de Dirac, como

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle)\,. \tag{19}$$

Indique o significado dos termos dentro dos parêntesis curvos.

(c) Calcule o valor expectável de $L_x$ no tempo $t$. (Sugestão: expresse o operador $L_x$ em termos dos operadores $L_+$ e $L_-$.)

3. O hamiltoniano que descreve a rotação da molécula de $NH_3$ é dado por

$$H = \frac{L_z^2}{2I_1} + \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_2}\,. \tag{20}$$

(a) Mostre que o hamitoniano comuta com $L_z$.

(b) Determine os valores e os vectores próprios deste hamiltoniano.

(c) Suponha que no tempo $t = 0$ o sistema se encontra no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle. \tag{21}$$

Determine $|\psi(t)\rangle$.