Análise Matemática I

Exercícios

1. Entre as seguintes relações, indique as que são verdadeiras e as que são falsas. Dê um contra-exemplo quando a relação é falsa.
   (a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; $\qquad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
   (b) $(x+y)^n = x^n + y^n$; $\qquad (xy)^n = x^n y^n$;
   (c) $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; $\qquad \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}$;
   (d) $(x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{1}{mn}}$; $\qquad (x^m)^n = x^{m+n}$;
   (e) $|x+y| = |x| + |y|$; $\qquad |xy| = |x||y|$;
   (f) $\sqrt{x^2} = x$; $\qquad \sqrt{x^2} = |x|$.

2. Resolva a desigualdade e exprima a solução em termos de intervalos:

$$\text{(a) } 2x+5 < 3x-7; \quad \text{(b) } 3 \leq \frac{3x-3}{2} < 4; \quad \text{(c) } x^2 - 3x + 2 < 0.$$

3. Exprima os seguintes conjuntos em termos de intervalos:
   (a) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 \leq 4\}$ $\qquad$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 > 9\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \leq a\}$ $(a \geq 0)$ $\qquad$ (d) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-1| \geq b \ (b \geq 0)\}$

4. Estudo o sinal do polinómio P (i.e. determine os zeros de P, os intervalos em que $P(x)$ é positivo e os intervalos em que $P(x)$ é negativo).
   (a) $P(x) = x^2 + x + 1$;
   (b) $P(x) = x^2 - x - 2$;
   (c) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;
   (d) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

5. Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Verifique se as seguintes relações são verdadeiras ou falsas:

(a) $x^2 < y^2$; (b) $x^3 < y^3$;

(c) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$ $(x, y \neq 0)$; (d) $\dfrac{1}{x^3} > \dfrac{1}{y^3}$ $(x, y \neq 0)$.

6. Resolva a desigualdade e exprima a solução em termos de intervalos:

(a) $|x + 3| < 0.01$; (b) $|x - 4| \geq 0.03$;
(c) $|\dfrac{x+1}{x}| < 6$; (d) $|x - 1| < |x + 1|$;

7. Indique em extensão os seguintes conjuntos:

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \left(x^2 - 5\right)^2 = 0\right\}$; (b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 = 0\}$;
(c) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 4x - 6 = 0\}$.

8. Encontrar, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo, o mínimo do conjunto D.

(a) $D = [0, 3[$; (b) $D = \{x \in \mathbb{Q} \; : \; x^2 < 7\}$;
(c) $D = \{1/n \; : n \in \mathbb{N}, \; n \neq 0\}$; (d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \; : \; x^2 < \dfrac{16}{25}\}$;
(e) $D =]-1, \infty[$; (f) $D = [-\sqrt{2}, \infty[$.

9. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Exprima as seguintes propriedades com quantificadores:

   (a) 10 é um majorante de A, 5 é um minorante de A;

   (b) m é um minorante de A;

   (c) A não pode ser majorado.

10. Determine o maior domínio possível das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; (b) $f(x) = \sqrt{2 - 3x} + \sqrt{x}$; (c) $f(x) = \sqrt{1 - \cos\left(3x^3 + x\right)}$.

11. (a) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = \cos x - 2x^2 + 5x$ e $g(x) = \sqrt{x} + 1$. Descreva a função $f \circ g$.

(b) Para a função h dada indique duas funções f e g (diferentes da identidade) tais que $h = f \circ g$:

$$(i)\ h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2-3}\right);$$
$$(ii)\ h(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1};$$
$$(iii)\ h(x) = \sqrt{2x-2} - 4x + 4.$$

12. Determine a imagem das seguintes funções:

$$(a)\ f : [-1, 3] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2 - 3x;$$
$$(b)\ f :]-4, 2[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |2x - 1|.$$

13. Estude a paridade das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

$(a)\ f(x) = 3x - x^3$; $(b)\ g(x) = |x+1| + |x-1|$; $(c)\ h(x) = x^3 - x^2$;
$(d)\ u(x) = \cos(3x - x^3)$; $(e)\ v(x) = \operatorname{sen}(3x - x^3)$.

14. Se f e g são funções pares, que sabe dizer de $f \circ g$? Se forem ímpares? Se uma for par e outra ímpar?

15. Seja $f(x) = |x|$. Esboce o gráfico de $g(x)$:

(a) $g(x) = f(x) + c$, para $c = -1$ e $c = 2$;

(b) $g(x) = f(x + c)$, para $c = -1$ e $c = 2$;

(c) $g(x) = cf(x)$, para $c = -1$, $c = 2$ e $c = 0$;

(d) $g(x) = f(cx)$, para $c = -1$, $c = 2$ e $c = 0$;

(e) $g(x) = \max\{f(x), c\}$, $c = 1$ e $c = 2$.

16. Em cada um dos casos seguintes, esboce o gráfico da função dada e diga se a afirmação é verdadeira ou falsa apresentando uma justificação da sua resposta.

(a) A função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é crescente.

(b) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ é crescente.

(c) A função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -4x + 3$ é estritamente decrescente.

(d) A função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2-2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

é estritamente crescente.

(e) A função dada por $g(x) = \cos(4x)$ para $x \in \mathbb{R}$ é periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

17. Calcule os números reais:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ sabendo que $\cos\alpha = -3/5$ e $-\pi < \alpha < -\pi/2$;

(b) $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ sabendo que $\operatorname{tg}\alpha = -2$ e $-\pi < \alpha < 0$.

18. Resolva as equações seguintes:

$$(a) \quad \operatorname{sen}(2x) = 1/2; \quad (b) \quad \sqrt{3}\operatorname{sen}(3x) + \cos(3x) = 2.$$

19. Mostre que $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ e que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

20. Exprima $\cos(3x)$ em função de $\cos^3 x$ e $\cos x$. Resolva a equação $4\cos^3 x - 3\cos x = 1/2$.

21. Calcule, caso existam, os limites seguintes:

(a) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ (c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{sen} 2x}$

(d) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x}$ (e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|}$ (f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{|x|}$

(g) $\lim\limits_{x\to0} \frac{-3x^4+2x^3-x}{x^3-x}$ (h) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$ (i) $\lim\limits_{x\to0} \pi x\cos(\frac{1}{3\pi x})$

22. Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|\frac{f(x)}{x}| \leq 2000$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Calcule $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

23. Determine os valores dos parâmetros a e b para que a função $f(x) = ax + b$ satisfaça $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 5$ e $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(x-1)\operatorname{sen}(\dfrac{1}{x-1})$.

24. Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = 2a$; (ii) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(a+h)^3-a^3}{h} = 3a^2$.

25. (i) Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

(ii) Usando que $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ e $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ mostre que

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

(iii) Utilizando as duas alíneas anteriores, mostre que a função sen é contínua em cada ponto de $\mathbb{R}$.

26. Estude os limites laterais das seguintes funções no ponto a. Indique se é possível prolongar f por continuidade em a.

$$(a)\ f(x) = \frac{x^2-16}{|x-4|},\quad a = 4;\quad (b)\ f(x) = \frac{x^3+27}{x+3},\quad a = -3.$$

27. Mostre que o polinómio $P(x) = x^5+4x^3+x^2+3x+1$ tem uma raiz no intervalo $[-1;0]$.

28. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique a sua resposta.

(a) A equação $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\cos x = 0$ admite pelo menos uma solução em $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Existe uma função contínua em $\mathbb{R}$ cuja imagem é o conjunto $\{1;2\}$.

29. (a) Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo $[a,b]$ tais que $f(a) \geq g(a)$ e $f(b) \leq g(b)$. Aplique o teorema de Bolzano à função $f(x) - g(x)$ para demonstrar que os gráficos de f e g se intersectam pelo menos num ponto.

(b) Prove que existe pelo menos um ponto $x \in]0, \pi/2[$ tal que:

$$x(\operatorname{sen} x)^{17} = (\cos x)^{13}$$

30. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+3}{2x-7} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^3+7x^2+2x-1} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\operatorname{sen}x} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x\cos x$$

$$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x+\cos x \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^2+x\cos x)$$

31. Mostre que a função seguinte é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x\leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}x}{x} & x>0\end{cases}$$

32. Determine o valor do parâmetro a para que a seguinte função seja contínua:

$$f(x)=\begin{cases} 2a\ln|\frac{xe}{2}| & x\leq 2 \\ \ln(x^2-4)-\ln(x-2) & x>2\end{cases}$$

33. Determine os valores dos parâmetros a e b para que a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 5 & x<-1 \\ ax+b & -1\leq x\leq 1 \\ \ln(x) & x>1\end{cases}$$

seja contínua.

34. Escreva sob a forma $a+b\ln(3)+c\ln(5)$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$ a seguinte expressão: $\ln[(15\sqrt{5})^3]-\ln(1/5)$

35. Dadas as funções hiperbólicas

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

mostre as relações seguintes:

(a) $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$;

(b) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y$;

(c) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$.

36. Resolva as seguintes equações:

(a) $e^x = e^{1-x}$

(b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

(c) $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}$

(c) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$

(d) $\ln(x^2 - 1) + 2\ln 2 = \ln(4x - 1)$

37. Calcule as derivadas $f'(x)$ das funções (no maior domínio possível):

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (d) $f(x) = \cos(\ln(x))$

(e) $f(x) = x^x$ (f) $f(x) = \operatorname{sh}(e^{x^2})$

(g) $f(x) = \ln\sqrt{1 + \cos^2 x}$ (h) $f(x) = \sqrt{x^x + \cos^2\sqrt{x}}$

38. Estude a derivabilidade em 0 das seguintes funções

$$f(x) = x - |x| \qquad f(x) = (x - |x|)x$$

39. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Demonstre que f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule o valor da derivada nesse ponto. Calcule a derivada em todo $\mathbb{R}$. Esta derivada é contínua?

40. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ ax + b & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Indique os coeficientes a e b necessários para que f seja contínua e derivável em 1.

41. Seja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

(a) Calcule as derivadas das funções f e g dadas por $f(x) = \cos(u(x))$ e $g(x) = e^{u(x)} + (u(x))^4$.

(b) Sabendo que $u(1) = 0$ e $u'(1) = 1$, determine a equação da recta tangente em 1 ao gráfico de f, e ao gráfico de g.

42. Determine duas funções f e g deriváveis tais que a derivada da função composta $f \circ g$ seja dada por

$$(a)\ h(x) = 2xe^{x^2+1} \quad (b)\ h(x) = -3\operatorname{sen} x(\cos x)^2$$

43. Determine os intervalos de monotonia da função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$

44. Estude as seguintes funções (i.e. indique o domínio, os intervalos de monotonia, as assímptota, os extremos locais, o sentido da concavidade por intervalos, os pontos de inflexão e esboce o gráfico):

$$(a)\ f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (b)\ f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$
$$(c)\ f(x) = \frac{x^3}{1+x^2} \qquad (d)\ f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

45. a) Aplicando o teorema de Lagrange à função $f : [0; 0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \ln(1+t)$, mostre que $0 < \ln(1,1) < 0,1$.

b) Mostre que, para todo o $x > 0$, $\ln(1 + x) < x$.

46. Recorrendo ao teorema de Lagrange, mostre que para todo o $x \neq 0$, $e^x > 1 + x$.

47. Determine as dimensões do rectângulo de perímetro 4 cuja área seja máxima.

48. Determine o ponto do gráfico de $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{2}{x}$ que está mais próximo da origem $(0, 0)$.

49. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{ch}2x}{\operatorname{tg}x} \qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x} \qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{cotg}x\right) \qquad (e)\ \lim_{x\to 0}x\ln x \qquad (f)\ \lim_{x\to 0}x^x$$

$$(g)\ \lim_{x\to+\infty}xe^{-x^2+1} \qquad (h)\ \lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1) \qquad (i)\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{x^2-1}$$

50. Considere a função $f :]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}\quad\text{se}\quad x\neq 0\quad\text{e}\quad f(0)=0.$$

Mostre que f é contínua, derivável em 0 e que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

51. a) Mostre que a função $f(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{x}-x$ é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$.

b) Mostre que a equação $x=\ln|x|+\dfrac{1}{x}$ admite exactamente uma solução no intervalo $]-\infty,0[$.

52. Calcule:

(a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-1/2))$; (b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(7\pi/6))$;

(c) $\cos(\arccos(\sqrt{3}/2))$; (d) $\arccos(\cos(-\pi/3))$;

(e) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\pi/4))$; (f) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1))$.

53. Demonstre as seguintes relações, indicando os domínios das funções consideradas:

$$\begin{cases}\operatorname{sen}(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2}\\ \operatorname{tg}(\arccos x) &= \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\operatorname{arcsen}x) &= \sqrt{1-x^2}\\ \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}x) &= \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}x) &= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\ \cos(\operatorname{arctg}x) &= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$$

54. Considere a função secante

$$\begin{array}{rccl} \sec: & [0, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \mapsto & \sec(x) = \frac{1}{\cos x} \end{array}$$

a) Calcule a derivada de sec e justifique que sec é bijectiva.

b) Seja arcsec a função inversa de sec. Determine a expressão da derivada de arcsec.

55. Sabendo que $\operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ e que $\operatorname{argsh}(0) = 0$, mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

56. Mostre que, para todo o $x > 0$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.

57. Determine as primitivas seguintes :

$$1) \int (x^2 - 4x + \frac{5}{x})\, dx \quad 2) \int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\, dx \quad 3) \int \frac{3}{2x-1}\, dx$$

$$4) \int \frac{1}{x} \operatorname{ch}(\ln x)\, dx \qquad 5) \int \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x}\, dx \quad 6) \int \operatorname{sen} x \cos^4 x\, dx$$

58. Recorrendo à primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

$$1) \int x \operatorname{sen} 2x\, dx \quad 2) \int (2x^2 - 1)e^x\, dx \quad 3) \int \operatorname{arctg} x\, dx$$

59. Recorde que $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ e determine as seguintes primitivas:

$$\int \cos^2 dx \qquad \int \cos^4 dx$$

60. Determine as primitivas seguintes :

$$1)\int \ln x\,dx \qquad 2)\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx \qquad 3)\int \frac{-3dx}{x(\ln x)^3}\,dx$$

$$4)\int -3x^3 \operatorname{ch} x\,dx \quad 5)\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx \quad 6)\int \operatorname{arcsen} x\,dx$$

61. a) Usando a substituição $x=\operatorname{sen} t$, calcule $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ em $]-1,1[$.

b) Usando a substituição $x=\dfrac{t+1}{2}$, calcule $\displaystyle\int (x^2+2)\sqrt{2x-1}\,dx$.

62. Calcule os integrais seguintes :

$$1)\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad 2)\int_0^{\pi}(x+2)\cos x\,dx$$

$$3)\int_1^2 x2^x\,dx \qquad 4)\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

63. a) Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

b) Determine todas as primitivas de $f(x)=e^x\cos x$.

64. Usando uma substituição, calcule os seguintes integrais

$$1)\int_{-1}^{1} e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx \quad 2)\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$3)\int_0^{3/2} 2^{\sqrt{2x+1}}\,dx \quad 4)\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

65. a) Mostre que a n-ésima soma de Riemann da função $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é $s_n = \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{1}{n+i}$.

b) Recorrendo ao teorema fundamental, calcule $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{1}{n+i}$.

66. Sejam f e g duas funções contínuas em $[a,b]$.

a) Recorrendo à definição do integral, mostre que, se para todo o $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, então $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

b) Mostre que, se existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que para todo o $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

67. Determine as seguintes primitivas de fracções simples:

$$1) \int \frac{1}{(x+3)}\,dx \qquad 2) \int \frac{1}{(x+3)^4}\,dx \qquad 3) \int \frac{x+1}{x^2+9}\,dx$$

$$4) \int \frac{x+10}{x^2+2x+2}\,dx \quad 5) \int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx \quad 6) \int \frac{x+2}{(x^2+4)^2}\,dx$$

68. Determine as primitivas das seguintes fracções racionais:

$$1)\ F(x) = \frac{1}{x^2-4} \qquad 2)\ F(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x}$$
$$3)\ F(x) = \frac{2x^2+4}{x^3-8} \qquad 4)\ F(x) = \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}$$
$$5)\ F(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2} \qquad 6)\ F(x) = \frac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$$

69. 1) Mostre que, se $x = 2\operatorname{arctg} t$, então $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

2) Usando a substituição $x = 2\operatorname{arctg} t$, calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$.

70. Represente graficamente o conjunto A dado e calcule a sua área.

a) A é o conjunto do plano limitado pelas rectas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pela curva de $f(x) = \sqrt{x}$.

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{x} \leq y \leq -x + 2\}$.

c) A é o conjunto do plano limitado superiormente pela parábola de equação $y = -x^2 + \dfrac{7}{2}$ e inferiormente pela parábola de equação $y = x^2 - 1$.

d) A é o conjunto de todos os pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 - 1 \leq y \leq x + 1$.

e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| \leq 1\}$.

f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ onde r é um número positivo.

71. Seja $a > 0$ e $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que

a) se f é ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

b) se f é par, então $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$.

72. Para cada função $f(x)$, determine o polinómio de Taylor e escreve as fórmulas de Taylor-Young e de Taylor-Lagrange à ordem dada e em volta do ponto x_0 dado.

$$\begin{array}{lll}
a)\ f(x) = \cos x, & \text{ordem } 2, & x_0 = 0 \\
b)\ f(x) = \sqrt{x}, & \text{ordem } 1, & x_0 = 4 \\
c)\ f(x) = x^4 + x + 2, & \text{ordem } 3, & x_0 = 0 \\
d)\ f(x) = \operatorname{sen} x, & \text{ordem } 3, & x_0 = 0 \\
e)\ f(x) = \operatorname{tg} x, & \text{ordem } 3, & x_0 = 0 \\
f)\ f(x) = \ln(1 + x^2), & \text{ordem } 2, & x_0 = 0
\end{array}$$

73. Utilizando as fórmulas de Taylor-Lagrange obtidas no Ex.1 a) e b), mostre que

    a) $0,98$ é um valor arredondado de $\cos(0,2)$, isto é $0,975 \leq \cos(0,2) < 0,985$.

    b) $2,025$ é um valor arredondado de $\sqrt{4,1}$, isto é $2,0245 \leq \sqrt{0,1} < 2,0255$.

74. Utilizando fórmulas de Taylor-Young à ordem 2 em volta de 0, calcule os seguintes limites.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\operatorname{sen} x}{x^3+2x^2} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$$

75. Calcule

$$a)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\, dx \qquad b)\ \int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}\, dx \qquad c)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\, dx$$

76. É convergente ou divergente? Justifique.

$$a)\ \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x}\, dx \qquad b)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx \qquad c)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}}\, dx$$

77. Calcule

$$a)\ \int_0^1 \ln x\, dx \qquad b)\ \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx \qquad c)\ \int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\, dx$$