ELECTROMAGNETISMO - 2010/11

2º Teste - 16/Nov/2011

---

1. Resposta E

O campo eléctrico no interior do condutor (ponto D) e na cavidade (sem cargas) do condutor (ponto E) são nulos.

O campo só é não nulo na região exterior ao condutor. Os pontos A, B e C, que se encontram na vizinhança da superfície externa do condutor, devem ter um campo dado por $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \, \vec{n}$, onde σ é a densidade superficial de carga e $\vec{n}$ é o vector unitário normal à superfície. Como σ é tanto maior quanto menor for o raio de curvatura da superfície, o campo será maior nas regiões mais pontiagudas.

2. Respostas A e D

- Quando se substitui o dieléctrico por outro de constante dieléctrica menor, diminui a capacidade do condensador ($C = \varepsilon \frac{A}{d}$).
Como $V = Q/C$ (onde V é a diferença de potencial entre as placas, e Q é a carga), conclui-se que essa substituição faz aumentar V (pois Q não é alterado depois do condensador ser desligado da bateria).

- Quando se aproximam as placas (diminuir $\underline{d}$), aumenta $\underline{C}$, e consequentemente diminui $\underline{V}$: a afirmação $\underline{B}$ é falsa.

- Quando se ligam as duas placas por um fio condutor, estas ficam ao mesmo potencial: a afirmação C é falsa

- Quando se afastam as placas (aumentar $\underline{d}$), diminui $\underline{C}$ e, consequentemente aumenta $\underline{V}$: a afirmação $\underline{D}$ é verdadeira.

- Quando se liga uma das placas à terra, a sua carga não é alterada, por estar sob influência da outra placa. Logo não há qualquer alteração do campo e da diferença de potencial entre as placas.

3.

a) Quando um condutor é colocado sob acção de um campo eléctrico, as cargas eléctricas no seu interior que têm a mais completa mobilidade (electrões livres) tendem a deslocar-se no sentido contrário ao campo, deixando regiões com deficiência de electrões. Este fenómeno, transitório, faz com que ocorram acumulações de carga em certas regiões da superfície do condutor, que se estabilizam quando se atinge o equilíbrio electrostático (quando o campo no interior do condutor é nulo).

b) No interior do condutor o campo eléctrico, $\vec{E}$, é nulo. Então, como o campo deriva do potencial, V (isto é, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$), conclui-se que V é constante no interior do condutor. Como a função potencial é contínua, mesmo quando se atravessa uma superfície carregada, V deve tomar o mesmo valor constante sobre a superfície.

Sendo a superfície do condutor uma equipotencial e sendo $\vec{E}$ sempre normal a uma superfície equipotencial, conclui-se que $\vec{E}$ (e portanto as linhas do campo) tem que ser normal à superfície limítrofe do condutor.

4.

a) A carga do dieléctrico central obtem-se integrando a carga volúmica no volume. Consideremos uma porção do dieléctrico central (de forma cilíndrica) de comprimento L, e calculemos a carga contida nesse volume:

$$Q = \int_{vol} \rho \, dv \quad , \qquad \text{onde} \quad \rho = kr$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho \, r \, dr \, d\phi \, dz \qquad \text{(utilizando coordenadas cilíndricas)}$$

$$= \int_0^a kr^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz$$

$$= 2\pi k L \, \frac{1}{3} \left[r^3 \right]_0^a$$

Então a carga por unidade de comprimento vale

$$\frac{Q}{L} = \frac{2\pi}{3} k a^3$$

b) Para calcular o campo eléctrico nas diversas regiões poderemos utilizar o teorema de Gauss, considerando superfícies gaussianas de forma cilíndrica coaxiais com os dieléctricos cilíndricos, e de raios $r<a$, $a<r<b$, $b<r<c$ e $r>c$.

Como o vector deslocamento eléctrico, $\vec{D}$, é sempre radial, o fluxo de $\vec{D}$ através das bases da superfície gaussiana é nulo; por outro lado o fluxo através da superfície cilíndrica lateral de altura $\underline{L}$ é dado por

$$\phi = \int_S \vec{D}.\vec{n}\, da = D.2\pi r L$$

pois: $\vec{D} // \vec{n}$ ($\vec{n} \equiv$ normal à superfície)

$|\vec{D}|$ é constante sobre a superfície

Consideremos então as quatro regiões que se pretende estudar

i) $r<a$ (interior do dieléctrico central)

T. Gauss: $\oint_S \vec{D}.\vec{n}\, da = q_{int}$

onde q_{int} é a carga (verdadeira) interior à superfície gaussiana vem então

$$D \cdot 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k r^3 L$$

pois, como vimos na alínea a)

$$\frac{q_{int}}{L} = \frac{2\pi}{3} k r^3 .$$

Tendo em conta que $\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}$
$= \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \vec{E}$

vem

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E \cdot 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k r^3 L$$

$$\boxed{E = \frac{k}{3\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} r^2}$$, sendo E radial

ii) $a < r < b$ (vácuo)

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, da = q_{int} = Q$$

$\varepsilon_0 E \, 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k a^3 L$, pois no vácuo $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\boxed{E = \frac{k}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r}}$$

iii) $b < r < c$ (interior do dieléctrico externo)

$$\oint_S \vec{D}.\vec{n}\, da = q_{int}$$
$$= Q$$

A carga interior à superfície continua a ser a carga do cilindro central, pois o dieléctrico exterior não tem cargas verdadeiras.

Tem-se então

$$\varepsilon_2 E . 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k a^3 L \quad , \quad \text{pois } \vec{D} = \varepsilon_2 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} \vec{E}$$

$$\boxed{E = \frac{k}{3\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} \frac{a^3}{r}}$$

iv) $r > c$ (vácuo)

$$\oint_S \vec{D}.\vec{n}\, da = q_{int}$$
$$= Q$$

como no vácuo $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, vem

$$\varepsilon_0 E\, 2\pi r L = \frac{2\pi}{3} k a^3 L$$

$$\boxed{E = \frac{k}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r}}$$

O campo tem direcção radial em todas as regiões.

c) seja $\vec{P}_1$ a polarização do dielectrico central:

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_1 \vec{E}$$ (χ_1=susceptibilidade do dieléctrico 1)

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_{r_1} - 1) \vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_{r_1} - 1) \frac{k}{3\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} r^2 \vec{u}_r$$

A densidade de carga de polarização superficial é

$$\sigma_1 = \left(\vec{P}_1 \cdot \vec{n}\right)_{r=a}$$

$$= \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{3\varepsilon_{r_1}} k a^2$$ $(\vec{P}_1 \,//\, \vec{n})$

A densidade de carga de polarização em volume é

$$\rho_1 = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_1)$$, pois as componentes em coordenadas cilíndricas segundo ϕ e z de $\vec{P}_1$ são nulas

$$\rho_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \right) k r^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} k \cdot 3r^2$$

$$= -3 \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} k r$$

seja $\vec{P}_2$ a polarização do dieléctrico mais exterior:

$$\vec{P}_2 = \varepsilon_0 \chi_2 \vec{E} \qquad (\chi_2 \equiv \text{susceptibilidade do dieléctrico 2})$$

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_{r_2} - 1) \vec{E}$$

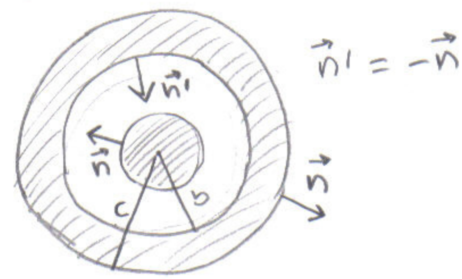
$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_{r_2} - 1) \frac{k}{3 \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} \frac{a^3}{r} \vec{u}_r$$

sejam σ_2 e ρ_2 as cargas de polarização superficial e em volume, respectivamente.

Analogamente ao cálculo efectuado para o dieléctrico interior, tem-se:

$$\sigma_2 = (\vec{P}_2 \cdot \vec{n}')_{r=c} \quad \text{na superfície exterior do dieléctrico } r=c$$

$$= \frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{3 \varepsilon_{r_2}} k \frac{a^3}{c}$$



$$\sigma_2' = (\vec{P}_2 \cdot \vec{n}')_{r=b} \quad \text{na superfície interior do dieléctrico } r=b$$

$$= - \frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{3 \varepsilon_{r_2}} k \frac{a^3}{b}$$

$$\rho_2 = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2$$

$$= - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_2)$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \, \frac{\varepsilon_{r_2}-1}{3\varepsilon_{r_2}} \, \kappa \, \frac{a^3}{r}\right)$$

$$= 0$$

Nota: este último resultado deve-se ao facto do dieléctrico ser linear e sem cargas verdadeiras.

De facto, para um dieléctrico linear

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \;;$$

logo $\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

Mas $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, de modo que se o dieléctrico não estiver electrizado (sem cargas verdadeiras), vem $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ e, consequentemente $\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$ (não há neste caso cargas de polarização em volume).