Trabalho 5

Estudo do efeito do atrito no movimento oscilatório

Objectivos

- Estudar o movimento harmónico amortecido
- Observar o efeito de diferentes tipos de forças de atrito no movimento oscilatório
- Estimar o coeficiente de atrito da parafina

Introdução

Movimento harmónico simples

Considere um corpo de massa m suspenso em equilíbrio numa mola de comprimento l e constante elástica k. Nestas condições a posição de equilíbrio do corpo vale $x_{eq} = l + mg/k$, onde g é a aceleração da gravidade. Quando o corpo é afastado da posição de equilíbrio descreve um movimento regido pela equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k(x - x_{eq}) = 0 \ , \tag{5.1}$$

que tem como solução

$$x = x_{eq} + A\sin(\omega t) \tag{5.2}$$

A velocidade pode ser calculada derivando a expressão anterior:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{5.3}$$

Na ausência de forças dissipativas a energia associada ao oscilador mantém-se constante ao longo do tempo. A energia do oscilador é em cada instante igual à soma da sua energia cinética e potencial nesse instante:

$$E_{oscilador} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{5.4}$$

Quando a elongação é máxima ($x = A$), a energia cinética é nula. Sendo assim a energia total do oscilador nos pontos em que a sua elongação é máxima, pode ser escrita em função da amplitude (A) do movimento:

$$E_{oscilador} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \tag{5.5}$$

A energia do oscilador pode também ser escrita em função da velocidade máxima: a velocidade máxima é atingida na posição de equilíbrio (x = 0); quando a elongação é nula, é nula a energia potencial. Sendo assim a energia total do oscilador, nesta posição, pode ser escrita apenas em função da velocidade do corpo quando este passa pela posição de equilíbrio (velocidade máxima):

$$E_{oscilador} = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 \tag{5.6}$$

Movimento harmónico amortecido

Quando se observa um movimento oscilatório real constata-se que a amplitude do movimento diminui ao longo do tempo. Isso acontece porque, na grande maioria das situações, as forças de atrito que estão presentes têm um efeito que não é desprezável e são responsáveis pela diminuição da energia do oscilador e consequentemente pela diminuição da sua amplitude. Muitas vezes a força de atrito pode exprimir-se em função de um coeficiente de atrito e de uma potência da velocidade

$$F = cv^n \tag{5.7}$$

É costume classificar os tipos de atrito de acordo com a dependência da velocidade:

- $n = 0$, atrito seco
- $n = 0.5$, atrito de "Reynolds" (película lubrificante)
- $n = 1$, atrito de "Stokes" (velocidade moderada)
- $n = 2$, atrito de "Newton" (velocidade alta)

Nas situações reais a força de atrito que surge é geralmente bastante complexa. Quando nenhum dos tipos de atrito descreve a realidade com suficiente rigor, é sempre possível admitir a existência de dois ou mais tipos de atrito simultâneos e descrever a força de atrito como uma combinação linear de várias potências de velocidade. Só uma análise cuidada dos resultados experimentais permite perceber qual, ou quais os efeitos de atrito mais importante em cada um dos casos. Para o trabalho experimental que vamos realizar interessa-nos estudar os casos $n = 0$ e $n = 1$.

Efeito do atrito seco no movimento oscilatório.

O método proposto neste trabalho para estudar o atrito é observar o efeito que provoca na energia do oscilador. Se a força de atrito de escorregamento for constante, o trabalho realizado pela força de atrito durante meio período, isto é, desde que o corpo vai da posição de distensão máxima da mola (A_1) até à posição de compressão máxima da mola ($A_{1'}$), será:

$$W_{\text{atrito}} = F_{\text{atrito}} d \tag{5.8}$$

em que $d = A_1 + A_{1'}$ é o espaço percorrido durante meio período. Neste percurso a variação de energia cinética é nula (nas posições extremas o corpo atinge o repouso), logo o teorema da energia cinética permite escrever

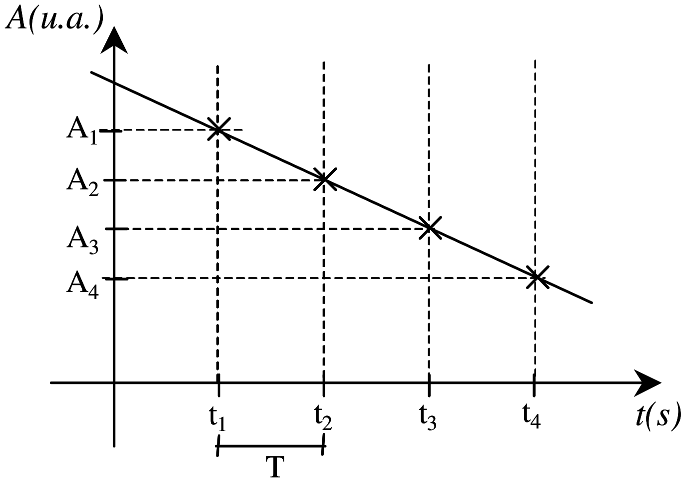
$$W_{\text{atrito}} + W_{\text{força elástica}} = \Delta E_{\text{cinética}} = 0 \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
-F_{\text{atrito}}\left(A_1 + A_{1'}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 A_1^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 A_{1'}^2 &= 0 \qquad (5.10)\\
-F_{\text{atrito}}\left(A_1 + A_{1'}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(A_1^2 - A_{1'}^2\right) &= 0\\
F_{\text{atrito}}\left(A_1 + A_{1'}\right) &= \frac{1}{2}m\omega^2\left(A_1 + A_{1'}\right)\left(A_1 - A_{1'}\right)\\
A_1 - A_{1'} &= \frac{2F_{\text{atrito}}}{m\omega^2}
\end{aligned}$$

Vemos assim que a variação da amplitude entre os dois extremos do movimento oscilatório é uma constante, uma vez que a força de atrito é constante. Num período a variação de amplitude será então dada por

$$A_1 - A_2 = \frac{4F_{\text{atrito}}}{m\omega^2} \tag{5.11}$$

Consequentemente, no movimento harmónico amortecido por uma força de atrito seco a amplitude varia linearmente com o tempo, como se ilustra na figura em baixo.



Exprimindo a amplitude em função do tempo $A = \alpha t + A_0$, onde α é o declive e A_0 é a ordenada na origem (amplitude no instante inicial), vemos que a força de atrito pode ser escrita em função do declive da recta de ajuste e do período do movimento. Como o módulo do declive é dado por $\alpha = (A_1 - A_2)/T$, resulta da equação 5.11

$$F_{\text{atrito}} = \frac{1}{4} m\omega^2 \alpha \tag{5.12}$$

Tendo em conta a variação linear da amplitude podemos agora adaptar a expressão 5.2 para o caso do movimento amortecido por uma força de atrito seco:

$$x = x_{eq} + (A_0 + \alpha t)\sin(\omega t) \tag{5.13}$$

Efeito do atrito de Stokes no movimento oscilatório

Considere agora a situação em que o corpo de massa m suspenso em equilíbrio numa mola de comprimento l e constante elástica k está submetido a uma força de atrito proporcional à velocidade, do tipo $\vec{F}_{\text{atrito}} = -b\vec{v}$. Nestas condições, quando o corpo é afastado da posição de equilíbrio, sem velocidade inicial, o seu movimento é regido pela equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0 \ , \tag{5.14}$$

Quando amortecimento é fraco esta equação tem como solução

$$x = x_{eq} + Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t) \tag{5.15}$$

em que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{5.16}$$

A amplitude em função do tempo é pois dado por:

$$A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \tag{5.17}$$

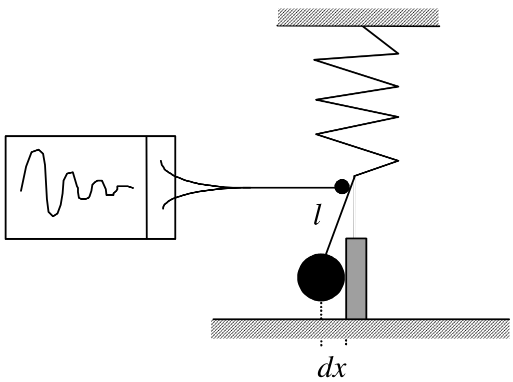
Se a representação da amplitude em função do tempo corresponder a uma função deste tipo, significa que a força de atrito presente é proporcional à velocidade e o coeficiente de proporcionalidade pode ser calculado através da função ajustada aos pontos experimentais.

Montagem experimental

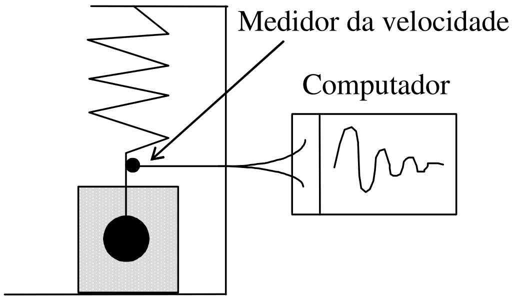
Nesta experiência pretende-se observar a variação de energia de um corpo oscilante ao longo do tempo, sujeito a diferentes forças de atrito.

O sistema oscilante é constituído por uma mola elástica de constante k na qual se suspende, com um fio, um corpo de massa m. O fio encontra-se encostado a um pequeno dínamo, que permite converter a velocidade de oscilação do corpo numa diferença de potencial. Utilizando uma interface a variação de potencial aos terminais do dínamo (proporcional à velocidade) pode ser visualizada no computador, em função do tempo. O sistema pode ser posto a oscilar em vários meios distintos, com diferentes amortecedores. Nesta experiência propõe-se o estudo da oscilação no ar, na parafina e numa situação de atrito seco, em que a esfera oscila encostada a um bloco de madeira. Os coeficientes de viscosidade do ar e da parafina são, respectivamente, $\eta_{ar} = 0.0000174$ Nsm^{-2} e $\eta_{parafina} = 0{,}9$ Nsm^{-2} ($T = 20^o$C). A montagem da experiência encontra-se esquematizada nas figuras em baixo.

Na primeira figura ilustra-se a situação emque o bloco de madeira é colocado de modo a que a esfera exerça uma força F_N sobre o bloco. F_N depende do desvio dx e do comprimento do fio, l, quando a esfera está em repouso. (Repare que a força pode ser calculada em função das distâncias dx e l.)



Na segunda figura, ilustra-se a oscilação do corpo dentro de um copo com parafina. É importante que durante a experiência o corpo se movimente sempre completamente mergulhado na parafina.



Sugestões de procedimento

1. Determine o valor da constante da mola

2. Meça a massa da mola e a massa da esfera. Meça o diâmetro da esfera.

3. Meça, utilizando um cronómetro, o tempo correspondente a 20 oscilações da esfera no ar (afastando o dínamo medidor de velocidades).

4. Coloque o dínamo encostado ao fio. Observe e registe a velocidade do sistema no computador. Meça o tempo correspondente a 20 oscilações. Registe os valores máximos e mínimos de velocidade assim como os tempos correspondentes.

5. Encoste um bloco de madeira ao corpo. Registe os valores de l e dx. Coloque o corpo a oscilar, de forma que durante todo o movimento a esfera se encontre encostada ao bloco de madeira. Repita o procedimento seguido no ponto 4.

6. Desloque o bloco de madeira, de forma a aumentar a força de atrito. Registe o novo afastamento dx do corpo em relação ao bloco de madeira. Repita o procedimento seguido no ponto 4.

7. Mergulhe o corpo no copo com parafina. Repita o procedimento seguido no ponto 4. Assegure-se que a esfera permanece inteiramente mergulhada no líquido durante todo o movimento.

Nota: quando a oscilação se faz com o corpo encostado ao bloco de madeira ou dentro da parafina é provável que só consiga observar 4 ou 5 oscilações.

8. Calcule a frequência natural e o período natural do oscilador a partir da massa da esfera e da constante da mola.

9. Determine o período da oscilação nos movimentos observados nos pontos 3, 4, 5, 6 e 7. Compare e comente os valores obtidos.

10. Utilizando a expressão 5.16, estime o valor do coeficiente de atrito, b, e o coeficiente de viscosidade da parafina. Compare com os valores tabelados.

11. Ajuste funções apropriadas aos resultados experimentais registados nos pontos 4, 5 6 e 7 (note que os dados registados são proporcionais à velocidade, pelo que deve ajustar funções que resultam da derivação das expressões 5.13 e 5.15; deve considerar o atrito seco dentro do medidor de velocidade). A partir dos coeficientes de ajuste determine o valor dos coeficientes de atrito nos diversos casos e o coeficiente de viscosidade da parafina.