Ficha 4

1. Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Efectue, caso sejam definidas, as seguintes operações:

$$B + D \qquad 2B - D \qquad 2C + 3D \qquad AB \qquad A(2B) \qquad AC$$

$$AB + DC \qquad ABC \qquad C^2 \qquad C^3 \qquad I_3B \qquad I_2B$$

   (b) Determine uma matriz X tal que $B + X = D$.

2. Em cada alínea, calcule, caso sejam definidos, os produtos AB e BA:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

3. Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Simplifique a expressão

$$(A - B)(A + B) - (A + B)^2 + 2B^2.$$

4. Escreva as matrizes A, B e C de ordem $p \times n$ tais que

   (a) $p = 3$, $n = 4$ e $a_{ij} = i + j$.

   (b) $p = 4$, $n = 2$ e $b_{ij} = (-1)^{i+j}$.

   (c) $p = n = 3$ e $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$

5. Escreva a transposta das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

e, efectue, se possível, as seguintes operações:

$$A^t \cdot B \quad A^t \cdot D \quad A^t \cdot \mathbf{c}^t \quad \mathbf{c}^t \cdot A^t \quad \mathbf{c}^t \cdot \mathbf{c} \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^t$$

6. Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é dita *simétrica* se $A^t = A$ e *anti-simétrica* se $A^t = -A$.

   (a) Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 2×2 e de uma matriz anti-simétrica de ordem 2×2.

   (b) Mostre que o conjunto das matrizes simétricas de ordem 2×2 é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a sua dimensão.

   (c) Mostre que o conjunto das matrizes anti-simétricas de ordem 2×2 é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a sua dimensão.

7. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é dita *diagonal* se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.

   (a) Escreva uma matriz diagonal de ordem 3×3.

   (b) Mostre que o conjunto de todas as matrizes diagonais de ordem $n \times n$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e determine a sua dimensão.

8. Considere a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associada à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine explicitamente T_A.

   (b) Calcule $T_A(1,2,3)$, $T_A(1,0,0)$, $T_A(0,1,0)$ e $T_A(0,0,1)$.

   (c) Determine a característica e a nulidade de A.

9. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associada à matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   Verifique que, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $T(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = (\cos(\alpha+\theta), \operatorname{sen}(\alpha+\theta))$. A transformação T é chamada *rotação* de centro $(0,0)$ e de ângulo θ.

10. Determine a característica e a nulidade das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Considere as seguintes transformações lineares:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x, 2x+y) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2y). \end{array}$$

   (a) Escreva as matrizes canónicas[1] A_T e A_S das transformações T e S.
   (b) Verifique que a matriz canónica da transformação $S \circ T$ é dada por $A_{S\circ T} = A_S A_T$.
   (c) Verifique que a matriz canónica da transformação $T \circ S$ é dada por $A_{T\circ S} = A_T A_S$.
   (d) Verifique que T é bijectiva e que a matriz canónica associada à T^{-1} é a inversa de A_T.

12. (a) Verifique que a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   (b) Verifique que a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

13. Considere as seguintes matrizes reais: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

   Determine, caso exista, uma matriz X tal que

   (a) $AX = I_2$. O que pode concluir?
   (b) $BX = I_2$. O que pode concluir?

14. Escreva a matriz ampliada associada aos seguintes sistemas de equações em $\mathbb{R}^3$. Quais são em escadas?

$$(a) \begin{cases} x+y=4 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x-y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x+y=4 \\ y=0 \\ -z=-4 \end{cases}$$

   Para cada sistema, análisando a característica da matriz simples e da matriz ampliada, justifique que se o sistema é possível e indique a natureza (subespaço vectorial/subespaço afim não vectorial e dimensão) do conjunto de soluções.

[1] Chama-se *matriz canónica* de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ à matriz de T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$.

15. Recorrendo eventualmente a uma mudança da ordem das equações, transforme os seguintes sistemas em sistemas em escada e resolva-os por substituição inversa.

   (a) (em $\mathbb{R}^3$) $\begin{cases} \quad\;\; y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$

   (b) (em $\mathbb{R}^4$) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\quad -7x_4 = -7 \\ \quad -x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$

16. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz de ordem 3×4. Em cada alínea mostre que as matrizes E e F dadas são inversas uma da outra e efectue o produto EA.

   (a) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde λ é um número real não nulo.

   (b) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $F = E$.

   (c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde λ é um número real.

17. Use o algoritmo de Gauss para determinar o conjunto de soluções dos sistemas de equações lineares apresentados a seguir.

   (a) (em $\mathbb{R}^3$) $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

   (b) (em $\mathbb{R}^3$) $\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0 \\ 6x - 6y + 9z = -3 \\ 4x - 4y + 8z = 0 \end{cases}$

   (c) (em $\mathbb{R}^3$) $\begin{cases} \quad\; 5y + 2z = 5 \\ x + y = 2 \\ 2x + 3y = 2 \\ 3x - 2z = 2 \end{cases}$

   (d) (em $\mathbb{R}^4$) $\begin{cases} x - y + z - w = -2 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + y - w = 1 \\ -2x + 3y - 3z + 3w = 3 \end{cases}$

(e) (em $\mathbb{R}^4$) $\begin{cases} x + 2y - 2z - 2t &= 1 \\ x + y + 2z - t &= -1 \\ 2y - 8z - 3t &= 3 \end{cases}$

18. Considere o sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^4$ de forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule a característica de A e indique a natureza (subespaço vectorial/subespaço afim não vectorial e dimensão) do conjunto de soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ caso o sistema seja possível.

(b) Determine o núcleo de A.

(c) Verifique que $(-1, 1, 1, 2)$ é solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e, usando a alinea anterior, escreva o conjunto de soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

19. Determine, em função dos parâmetros reais apresentados, se os sistemas de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seguintes são possíveis ou não e, se forem possíveis, indique a natureza (subespaço vectorial ou subespaço afim não vectorial) do conjunto de soluções e a sua dimensão.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix};$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & \alpha+2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix};$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{bmatrix};$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & k \\ 2 & k & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$

20. Usando a noção de característica, averigue se as seguintes matrizes são invertíveis e, caso afirmativo, determine a matriz inversa usando o algoritmo de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$