Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
2009/2010

Análise Matemática I

12 de Novembro/2009

1 teste

Duração: 90m

Atenção: Todas as respostas devem ser justificadas.

1. [4 valores] Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g \exp(ax)$, em que a é uma constante real
   $g = e^{ax}$
   (a) Diga qual o domínio de cada uma das funções.
   (b) Considere a função definida por $h(x) = g \circ f(x)$. Calcule a derivada da função $h(x)$ usando a **Regra da derivação da função composta.**

2. [4 valores] Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^9 + x^5 + x$. Calcule o valor da derivada da função inversa $f^{-1}(y)$ no ponto $y = 0$

3. [4 valores] Calcule o integral
$$\int x^7 (x^4 + 1)^{2/3} dx,$$
usando o método de integração por partes.

4. [4 valores] Calcule o integral
$$\cancel{\int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx,} \qquad \int x \sqrt{2x - x^2}\, dx$$
usando a mudança de variável constante do verso da folha que se aplica.

5. [4 valores] Uma pedra é deixada cair de uma falésia com uma velocidade inicial de 3 metros por segundo. Dois segundos depois a pedra está a cair a uma velocidade de 22, 6 metros por segundo.
   Supondo que a velocidade v varia proporcionalmente ao tempo t,
   (a) Determine a equação que relaciona v com t.
   (b) Determine a que velocidade a pedra está a cair ao fim de 15 segundos.

$\overline{\text{IV}}$ Funções Racionais em x e $\sqrt{ax^2+bx+c}$

i) $a>0$ fazer a mudança de variável que se obtém a partir da equação

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t.$$

ii $c>0$ fazer a mudança de variável que se obtém a partir da equação

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \underset{①}{\pm} \sqrt{c}$$

① tanto faz usar $xt+\sqrt{c}$ como $xt-\sqrt{c}$.

iii) Se o trinómio tem raízes reais α e β, pode também fazer-se a mudança de variáveis.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$$

ou

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)\,t.$$

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
2008/2009

Análise Matemática I

14 Janeiro/2009

2º teste

Duração: 1h 30 minutos

Atenção: Todas as respostas devem ser justificadas.

1. [4 valores] Esboce a região do plano delimitada pelas equações $x + y = 3$ e $y + x^2 = 3$ e calcule a sua área.

2. [4 valores] Uma esfera de raio r é cortada em três pedaços por ~~três~~ dois planos paralelos à distância $\frac{r}{3}$ de cada lado do centro. Determine o volume de cada um dos três pedaços. Use a determinação do volume para sólidos de revolução.

3. [4 valores] Calcule o integral da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $t \mapsto \frac{t-3}{\sqrt{t}}$ no intervalo $[4, 9]$ usando a mudança de variável adequada aplicando a regra definida no enunciado.

4. [3,5 valores] Calcule o centro de massa de uma região semicircular de raio 1. Desenhe a região e indique o ponto que corresponde ao centro.

5. [1 valor] Considere a série definida por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1}$.

   (a) Escreva o termo geral da série

   (b) Escreva os quatro primeiros termos da série.

   (c) Escreva os quatro primeiros elementos da sucessão dos termos gerais.

   (d) Escreva os quatro primeiros elementos da sucessão das somas parciais da série.

6. [3,5 valores] Considere a série definida por $2 + \frac{2^2}{2^8} + \frac{2^3}{3^8} + \frac{2^4}{4^8} + \ldots$

   (a) Escreva o termo geral da série a_i.

   (b) Compare $\displaystyle\lim_{i \to \infty} \left| \frac{a_i}{a_{i-1}} \right|$ com 1. Sabendo que a série é convergente se este limite for maior que 1 e divergente se for maior que 1, que conclusão pode tirar.

3) A função a integrar inclui funções racionais em $x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{r/s}$ em que $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$.

fazer a mudança de variável $x = t^k$

em que k é o menor múltiplo comum entre os denominadores dos expoentes de x (mmc(n, ..., s))

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
2009/2010

Análise Matemática I

1 de Fevereiro/2010

Repetição do 1 teste

Duração: 90m

Atenção: Todas as respostas devem ser justificadas.

1. [4 valores] Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow [o, 1]$ a função definida por $f(x) = \cos\sqrt{x^2 - 2x}$. Decomponha a função f em duas funções g e h e determine a derivada da função f utilizando a regra da derivação da função composta aplicada às funções g e h.

2. [4 valores] Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = arccosx$. Calcule o valor da derivada da função inversa $f^{-1}(y)$ no ponto $y = \frac{1}{2}$.

3. [4 valores] Calcule o integral
$$\int pe^{-0,1p}dp,$$
usando o método de integração por partes.

4. [4 valores] Calcule o integral
$$\int \frac{3}{\sqrt{2x - x^2}}dx,$$
usando a mudança de variável constante do verso da folha que se aplica.

5. [4 valores] A velocidade de uma partícula que se desloca segundo uma linha recta é dada por $v(t) = 37 + 10e^{-0,07t}$ metros por segundo.

   (a) Se a partícula se encontra no ponto $x = 0$ no instante $t = 0$, diga qual a distância percorrida depois de 10 segundos.

   (b) Qual é a importância do factor $e^{-0,07t}$ nos primeiros 10 segundos do movimento?

   (c) E nos seguintes 10 segundos?

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
2009/2010

Análise Matemática I

17 de Fevereiro /2010

Exame de Recurso

Duração: 120m

Atenção: Todas as respostas devem ser justificadas.

1. [3 valores] Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=\operatorname{sen}\sqrt[3]{3x^2}$
   (a) Decomponha a função dada em duas funções. Diga qual o domínio de cada uma das novas funções.
   (b) Use as funções definidas na alínea anterior para calcular a derivada da função f num ponto em que a derivada da função f exista. Lembre-se de justificar bem a resposta.

2. [3.5 valores] Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=x^9+\ln x+x$. Calcule o valor da derivada da função inversa $f^{-1}(y)$ no ponto $y=2$

3. [3 valores] Seja C um círculo de raio r Determine a taxa de crescimento da área em relação ao raio $r=5$. Interprete a sua resposta geometricamente

4. [3.5 valores] Considere o integral
$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$$
   (a) Transforme a função numa soma de quadrados em que no denominador aparece uma expressão $(x+k)^2+\gamma^2$ com k e γ constantes.
   (b) Depois de realizada a alínea anterior faça a mudança de variável $t=x+k$ e determine o integral.

5. [3,5 valores] Determine o volume do sólido gerado pela rotação da curva definida por
$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$
   em torno do eixo do xx' e delimitada pelos planos $x=0$ e $x=b$. a e b são constantes reais

6. [3,5 valores] Determine o centro de gravidade de uma placa homogénea delimitada pela parábola de equação $y^2=ax$ e a recta $x=a$, com a constante.

Licenciatura em Física 1 ano

Análise Matemática I

1 Teste. 13 de Novembro. Duração 2 horas

Justifique todas as respostas

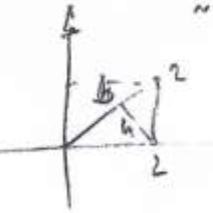
Os alunos em avaliação contínua devem responder às perguntas 4, 7 8 e 9 como complemento.
Cotação do teste:
Pergunta **1** a) 0, 5 valor, b)1, 5 valores.
Perguntas **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8b)** e **9a)** 2 valores as restantes duas perguntas 1 valor.

1. Considere a função $f(x) = \frac{(x^2+3)^5}{1+(x^2+3)^8}$.
   (a) Determine o domínio da função.
   (b) Calcule a sua derivada.(Não simplifique)
2. Calcule por definição a derivada da função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por a $x \mapsto \frac{1}{x}$.
3. Decomponha a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por a $x \mapsto (x^2 - 6x + 1)^3$ em duas funções e determine a sua derivada usando a regra da função composta.
4. Considere a parábola definida por $y = x^2 - 16x + 12$. Diga justificando qual é o ponto da parábola cuja recta tangente é paralela ao eixo dos x's.
5. Calcule $\int(\tan x)dx$.
6. Usando a fórmula de integração por partes, calcule $\int e^x(\sin x + \cos x)dx$.
7. Calcule $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$. Use a seguinte fórmula para a substituição: Se o integral contiver uma expressão $\sqrt{b^2 - a^2x^2}$, faça a substituição $x = \frac{b}{a}\sin t$.
8. Um carro de corrida percorre uma pista de 400 metros em 6 segundos, a distância percorrida desde o início da corrida em metros depois de t segundos é dada por $f(t) = 44t^2/3 + 132t$.
   (a) Qual a sua velocidade e a sua aceleração quando cruzar a linha de chegada?
   (b) Qual era a sua velocidade a meio do percurso?
9. Um objecto move-se segundo uma linha recta com velocidade expressa pela função $v(t) = 6t^4 + 3t^2$ em função do tempo t expresso em segundos.
   (a) Qual a função que determina a distância percorrida no instante t?
   (b) Qual a distância percorrida entre $t = 2$ e $t = 3$. (Não simplifique a expressão).

$y = x + 0$

$A = \int_0^2 x - 0 \, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$



$b = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$

$h = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2^2}$

$= \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}$

$\frac{b \times h}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{1}$

Licenciatura em Física 1 ano

Análise Matemática I

2 teste 15 de Janeiro de 2008 Duração 2 horas

1. Considere a função $g(x)$ definida do seguinte modo: se $-3 \leq x \leq -2$, $g(x) = -3$, se $-2 < x \leq -1$, $g(x) = -2$ e se $-1 < x \leq 0$, $g(x) = -1$ Calcule o integral entre -2 e 0 da função $g(x)$
2. Calcule a área da região do plano limitada pelas curvas
   (a) $y = x^2$, $y = x^3$, $x = 0$ e $x = 1$.
   (b) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.
3. Calcule $\int_1^5 \frac{x}{x^4+10x^2+25} dx$ fazendo a mudança de variável $u = x^2$.
4. **Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da curva definida por $f(x) = x^2 + 4x$ em torno do eixo dos xx' com x a variar entre 0 e 4.**
5. Calcule o seguinte integral : $\int_{\log 1}^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$. $\int_{\log 1}^{\log 2} e^x \cdot (1+e^x)^{-1/2} dx$?
6. **Calcule o seguinte integral: $\int_0^1 xe^{-x} dx$, usando o método de integração por partes.**
7. **Calcule o seguinte integral usando o método de integração por partes depois de efectuar a mudança de variável indicada: $\int_{e^2}^{e^4} 2x \sin(\log x^2) dx$, mudança de variável $t = x^2$.**
8. **A água corre para dentro de um tanque a uma taxa de $2t + 3$ litros por minuto, em que t é o tempo medido em horas depois do meio dia, Se o tanque estiver vazio ao meio dia e tiver capacidade de 1000 litros a que horas vai estar cheio?**
9. Determine $\int_0^{2\pi} x \sin(ax) dx$ usando integração por partes, obtendo uma função de a. Que acontece quando a tende para infinito?

3

$\int_1^5 \frac{x}{x^4 + 10x^2 + 25} dx$

$\frac{1}{2}\int_1^{25} \frac{1}{u^2 + 10u + 25} du$

$\frac{1}{2}\int_1^{25} \frac{1}{(u+5)^2} du$

$\frac{1}{2}\int_6^{30} \frac{1}{v^2} dv \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{v}\right)\right]_6^{30} = -\frac{1}{60} + \frac{1}{12} = \frac{1}{15}$

$u = x^2$

$du = 2x \, dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$v = u + 5$

$\frac{dv}{du} = 1$

$dv = du$

$x = 1 \to u = 1$

$x = 5 \to u = 25$

$u = 1 \to v = 6$

$u = 25 \to v = 30$

$u^2 + 10u + 25 = (u-5)^2$

Licenciatura em Física 1 ano

Análise Matemática I

Exame de Recurso. 9 de Fevereiro. Duração 2 horas

Justifique todas as respostas

1. Considere a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$.
   (a) Determine o domínio da função.
   (b) Calcule a sua derivada indicando o domínio da nova função.(Não simplifique)
2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, definida por $f(x) = 2\sqrt{x}$. Calcule a sua derivada no ponto $x = 2$, usando o limite da razão incremental.
3. Decomponha a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por a $x \mapsto \frac{1}{e^{2x}+e^{x^2}}$ em duas funções e determine a sua derivada usando a regra da função composta.
4. Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+\ln x}{3x^4+2x^2+1}$.
5. Calcule o integral da função s^2e^{3s} no intervalo $[0, 1]$. Use integração por partes.
6. Calcule $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Use a seguinte fórmula para a substituição: Se o integral contiver uma expressão $\sqrt{c+bx+ax^2}$, faça a substituição $\sqrt{a}x + t = \sqrt{c+bx+ax^2}$. Depois de fazer a mudança de variável simplifique o integral obtido o mais possivel e explique sem fazer calculos como podia terminar o exercicio.
7. Calcule a área da região do plano definida pela função $y + x = 4$, $x = y$, $y = 0$.
8. Utilize integração para resolver o seguinte problema. Um objecto move-se segundo uma linha recta graduada com velocidade expressa pela função $v(t) = 2t + t^2$ em função do tempo t expresso em segundos.
   (a) A posição inicial do objecto corresponde á posição -1 na recta. Onde está o objecto no instante $t = 3$?.
   (b) Qual a distância percorrida. (Não simplifique a expressão).
9. Calcule o volume de do sólido que se obtém por rotação da função $x^4 + x^3$ em torno do eixo dos xxentre o ponto 0 e 2. Não simplifique

$\dot{x}(t) \Rightarrow v(t) \Rightarrow v'(t) = a(t)$