Modelação Matemática

Teoria de Controlo

Licenciatura Engenharia Física - 3º ano

Tuesday, March 3, 2022

Vinícius Silva | Automação Controlo e Robótica | ID7267@alunos.uminho.pt

Função de transferência

- Considere-se a seguinte equação diferencial:

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y$$
$$= b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \qquad (n \geq m)$$

  - Onde x é a entrada e y a saída
- A função de transferência é:

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \left.\frac{\mathcal{L}[\text{salida}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]}\right|_{\text{condiciones iniciales cero}}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

  - A função de transferência permite representar a dinâmica de um sistema em termos de equações algébricas em s.
  - O termo de maior ordem do denominador determina a ordem do sistema

Função de Transferência

- Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

  - X(s) a transformada de Laplace da entrada e Y(s) a da saída, supondo as condições iniciais nula.

- Pode obter-se a saída fazendo:

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

Resposta ao Impulso

- A saída de um sistema para uma entrada de impulso unitário com condições inicias zero, dado que L [impulso unitário]= 1, ou seja X(s):

$$Y(s) = G(s)$$

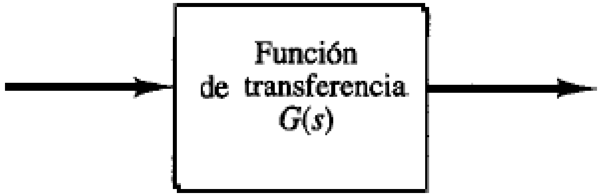
- Cuja transformada inversa é designada de resposta ao impulso e corresponde à função g(t):

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

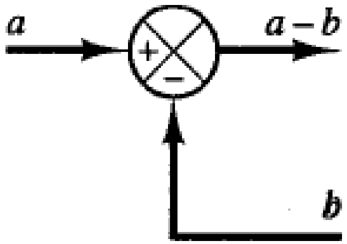
Representação de Sistemas em Diagramas de Blocos

- Diagrama de Blocos: corresponde a uma representação gráfica do sistema em termos de funções de cada componente e fluxo de sinais.

- Representação da função de transferência:

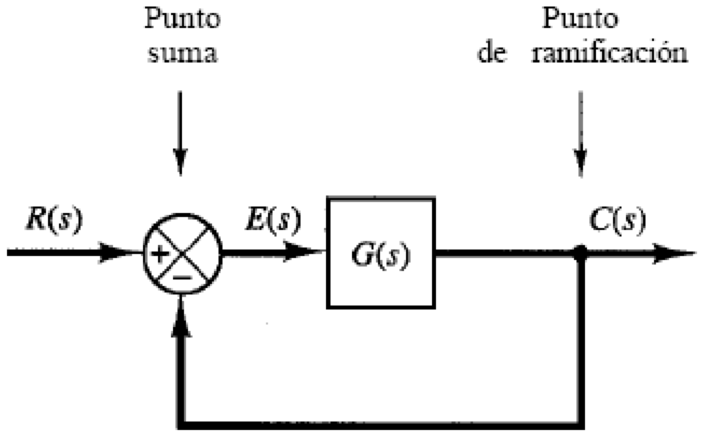


- Representação de um ponto de soma:



Representação de Sistemas em Diagramas de Blocos

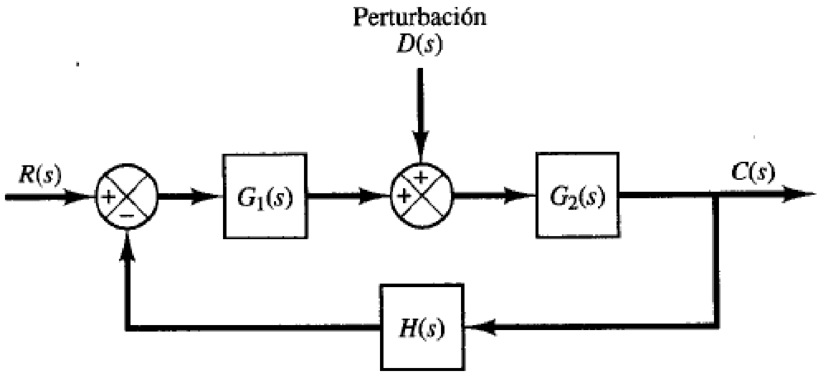
- Diagrama de blocos de um sistema realimentado



  - R(s) corresponde à entrada de referência do sistema
  - C(s) corresponde à saída do sistema, obtida multiplicando E(s).G(s)
  - E(s) corresponde ao erro da saída para a referência

Representação de Sistemas em Diagramas de Blocos

- Sistema Realimentado Sujeito a uma Perturbação



- Resposta de saída para a perturbação considerando erro zero

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- Resposta de saída para a referência, considerando a perturbação nula

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

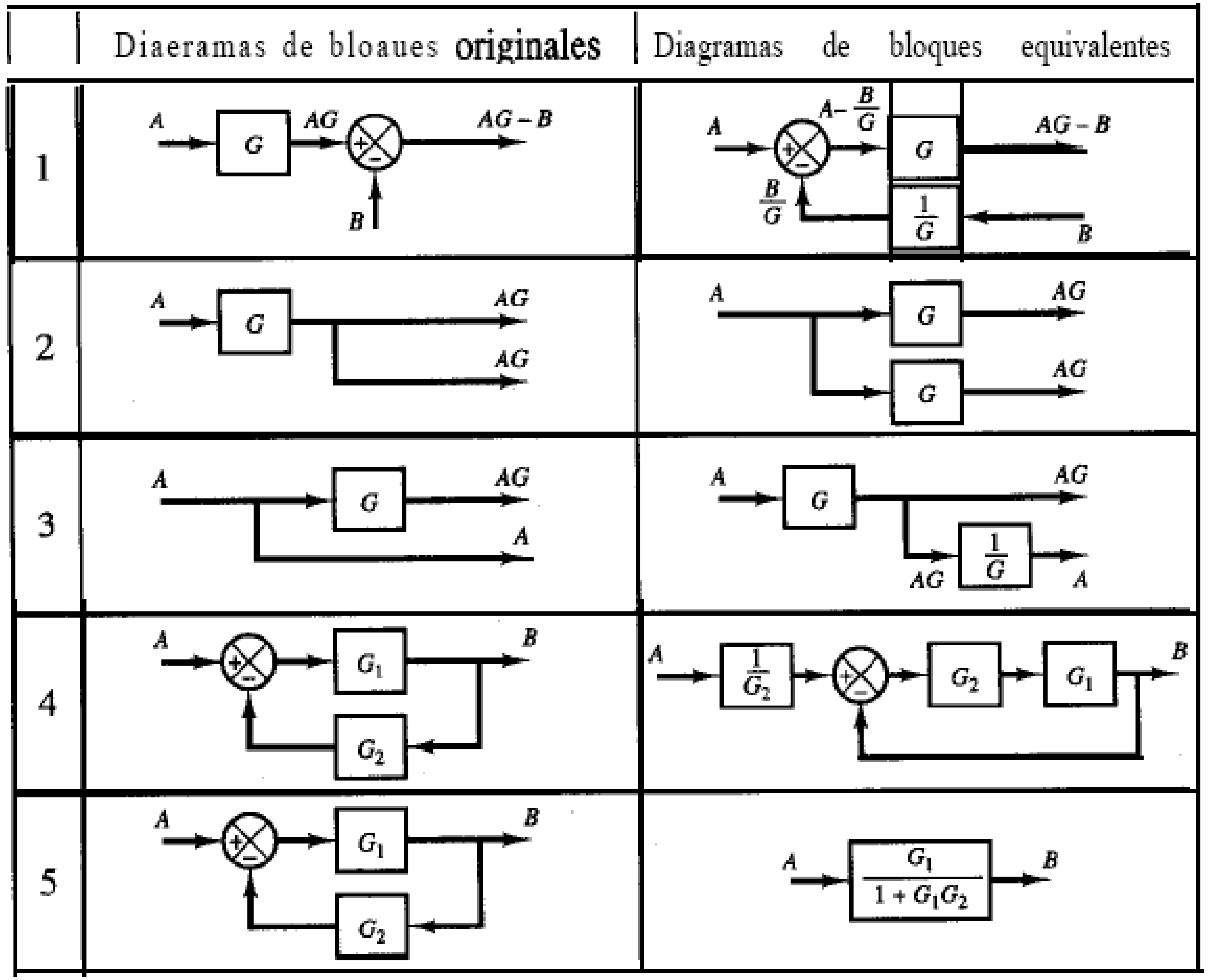
Representação de Sistemas em Diagramas de Blocos

- A resposta total C(s) inclui a soma das respostas anteriores

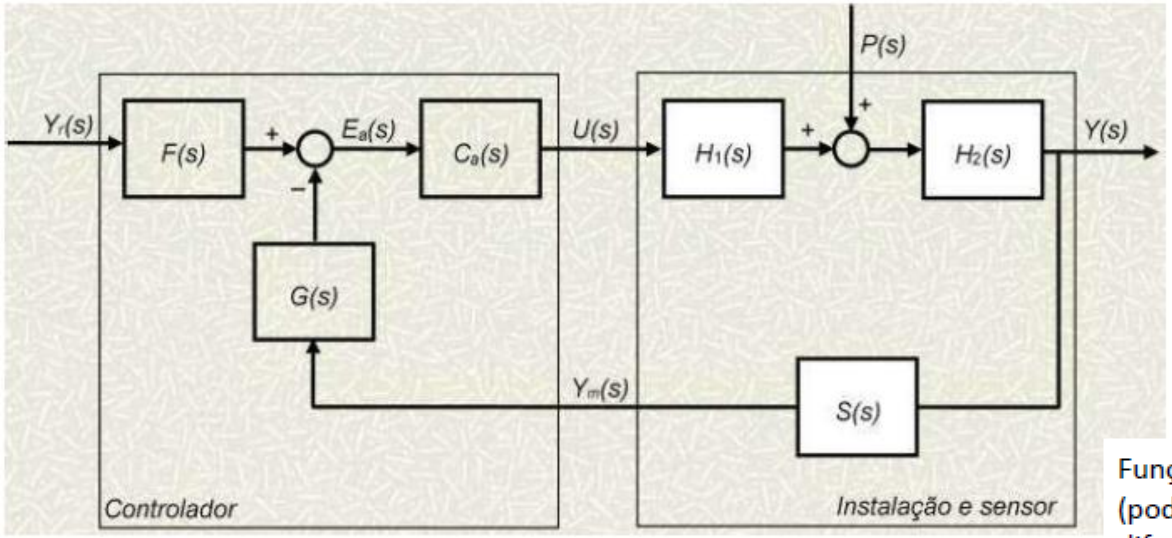
$$C(s) = C_R(s) + C_D(s)$$
$$= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}[G_1(s)R(s) + D(s)]$$

Representação de Sistemas em Diagramas de Blocos

Regras de álgebra dos diagramas de blocos



Exemplo



Funções de transferência genéricas (podem ser constantes, iguais ou diferentes de 1, ou razões de polinómios):

- H1(s)
- H2(s)
- Ca(s)
- F(s)
- G(s)
- S(s)

Variáveis genéricas:

- Y(s) - saída, variável a controlar
- P(s) - entrada, perturbação
- Yr(s) - entrada, referência
- Ym(s) - medida
- U(s) - comando
- Ea(s) - erro

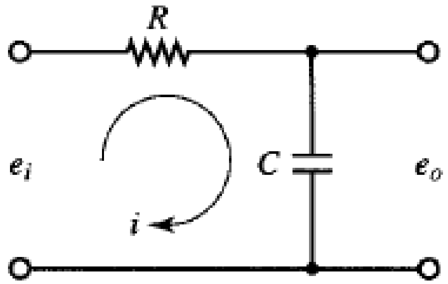
Exemplo (solução)

Obter a equação geral Y(s) = f(P(s), Yr(s)):

$$Y(s) = \underbrace{\frac{H_2(s)}{1 + H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot C_a(s) \cdot G(s) \cdot S(s)}}_{\boxed{\text{FT1}}} \cdot P(s) + \underbrace{\frac{H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot C_a(s) \cdot F(s)}{1 + H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot C_a(s) \cdot G(s) \cdot S(s)} \cdot Y_r(s)}_{\boxed{\text{FT2}}}$$

Exemplo

- Considere o circuito RC:

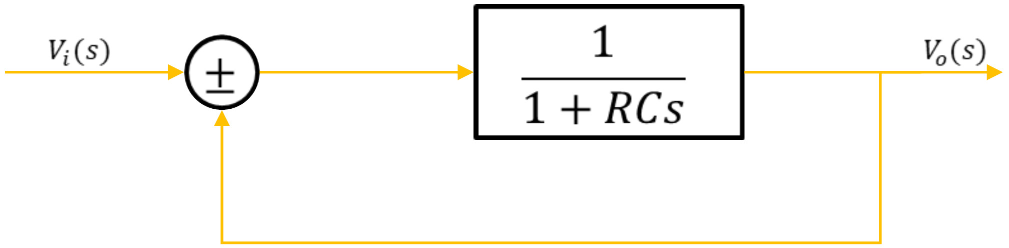


- As equações do circuito são:

$$v_r = R.i \qquad i_c = C.\frac{dv_c}{dt} \qquad v_c = v_o$$

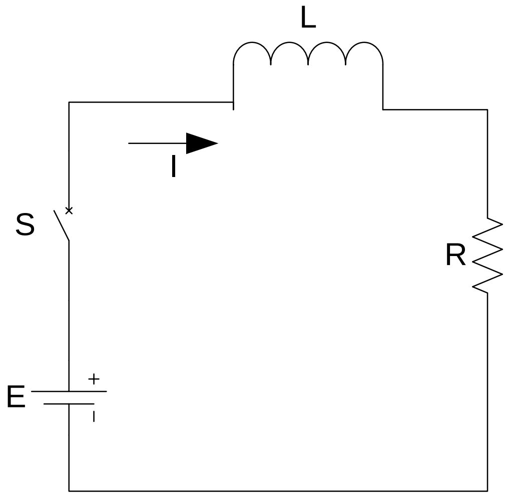
$$\Rightarrow \begin{cases} v_i = v_c + v_r \\ i_c = C.\dfrac{dv_o}{dt} = i \end{cases} \Rightarrow \left\{ v_i = v_o + R.C.\frac{dv_o}{dt} \right.$$

- A que corresponde o diagrama:



Exemplo 2

- Considere o seguinte circuito RL série e determine a corrente i(t), considerando que s está fechado para t=0 e i(0)=0, ui(t) = E:



Pela lei das malhas: $u_i(t) = L\frac{di_l(t)}{dt} + Ri(t)$, como $i_l(t) = i(t)$, temos que: $u_i(t) = L\frac{di_l(t)}{dt} + Ri_l(t)$

Resolvendo a equação pela transformada de Laplace obtém-se:

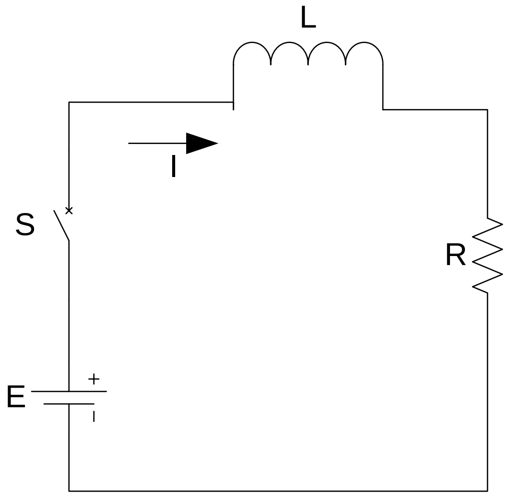
$$L\big(sI_l(s) - i_l(0)\big) + RI_l(s) = U_i(s)$$

$$I_l(s) = \frac{1}{Ls+R}U_i(s)(=)I_l(s) = \frac{1}{Ls+R}\frac{E}{s}(=)I_l(s) = \frac{1}{L(s+\frac{R}{L})}\frac{E}{s}$$

$$I_l(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\frac{R}{L}}$$

Exemplo 2

- Considere o seguinte circuito RL série e determine a corrente i(t), considerando que s está fechado para t=0 e i(0)=0, ui(t) = E:



$$I_l(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \frac{R}{L}}$$

$$A_1 = \lim_{s \to 0} \frac{E}{L(s + \frac{R}{L})} = \frac{E}{R}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -\frac{R}{L}} \frac{E}{Ls} = -\frac{E}{R}$$

Então:

$$i_l(t) = \frac{E}{R}(u(t) - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Representação em Espaço de Estados

- Considere as seguintes equações:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

- Sendo a equação de saída:

$$Y = x_1$$

- Na forma matricial pode escrever-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Representação em Espaço de Estados

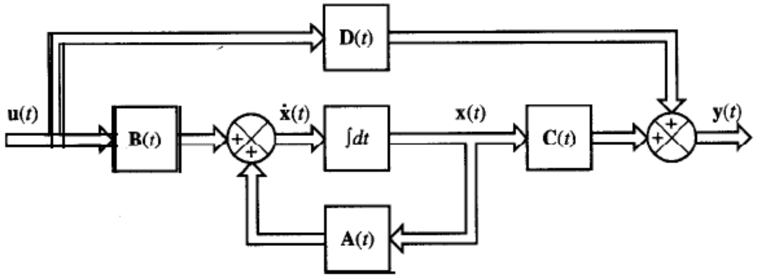
- As equações devem obedecer à forma standard:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{c}\mathrm{x} + Du$$

- Onde: A- matriz de estado, B- matriz de entrada

  C- matriz de saída,   D- matriz directa



Representação em Espaço de Estados

- Para o exemplo anterior:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C}=[1 \quad 0], \quad D = 0$$

- Correlação entre função de transferência e equações em espaço de estados

$$\mathrm{G(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

Sistemas Elétricos

- Representação em Espaço de Estados
  - Considerando o circuito anterior, pode obter-se a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

  - Pode definir-se as variáveis de estado e as variáveis de entrada e saída:

$$x_1 = v_o \qquad u = v_i$$

$$x_2 = \dot{v}_o \quad y = v_o = x_1$$

- Obtendo-se:

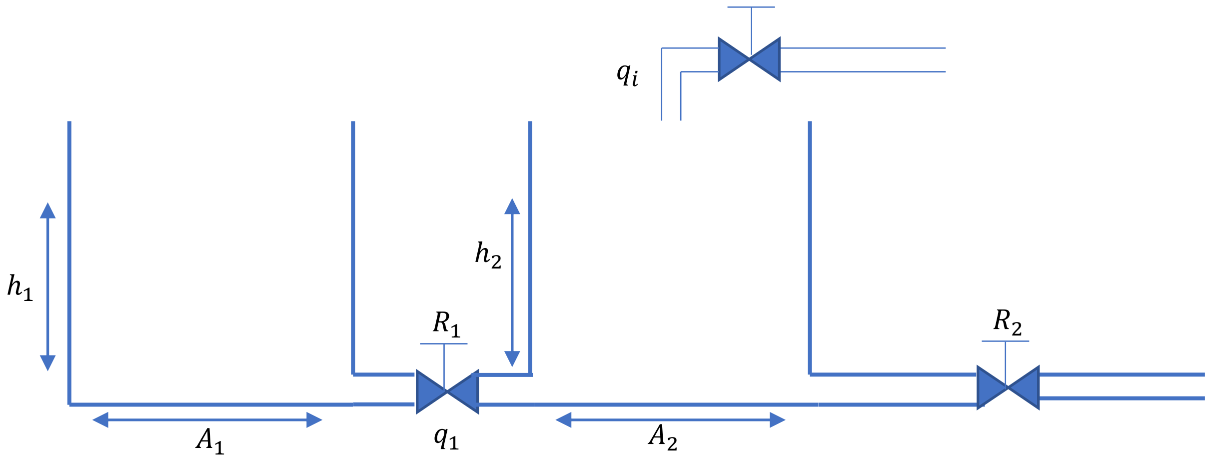
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Outros sistemas

Exercício

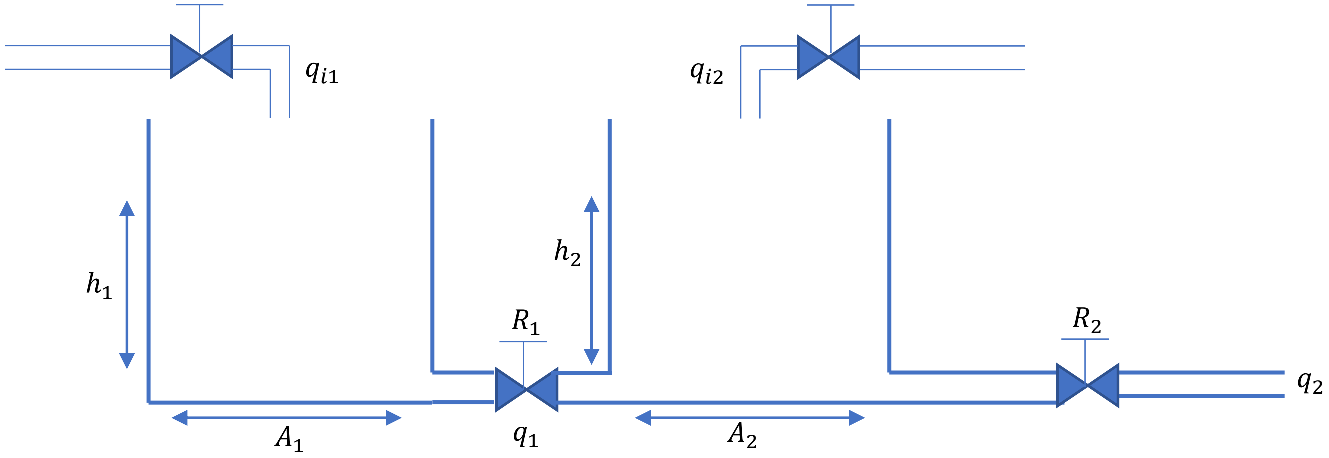
- q_i is the input and h_1 is the output
- q_i is the input and h_2 is the output
- Representation Space of States



- Control system toolbox
- Matlab
- Simulink
- Instrument Control Toolbox
- Robust Control Toolbox

2 Tanques – Exercício

- Model the following system using state space notation:



Sistemas Hidráulicos – Grandezas

Símbolo	Grandeza	Unidade
H	Nível	m
V	Volume	m^3
A	Área	m^2
R	Resistência da Válvula	m/(Kg/s)
F	Caudal Mássico	Kg/s

F ou Q

Sistemas Mecânicos – Grandezas

Translação			Rotação		
Símbolo	**Grandeza**	**Unidade**	**Símbolo**	**Grandeza**	**Unidade**
F	Força	N	T	Binário	Nm
x	Deslocamento	m	θ	Ângulo	rad
v	Velocidade	m/s	ω	Velocidade Angular	rad/s
a	Aceleração	m/s^2	α	Aceleração Angular	rad/s^2
M	Massa	Kg	J	Momento de Inércia	$Kg\ m^2$
K	Coeficiente de Elasticidade	N/m	K	Coeficiente de Elasticidade	Nm/rad
B	Coeficiente de Amortecimento	N/m/s	B	Coeficiente de Amortecimento	Nm/rad/s

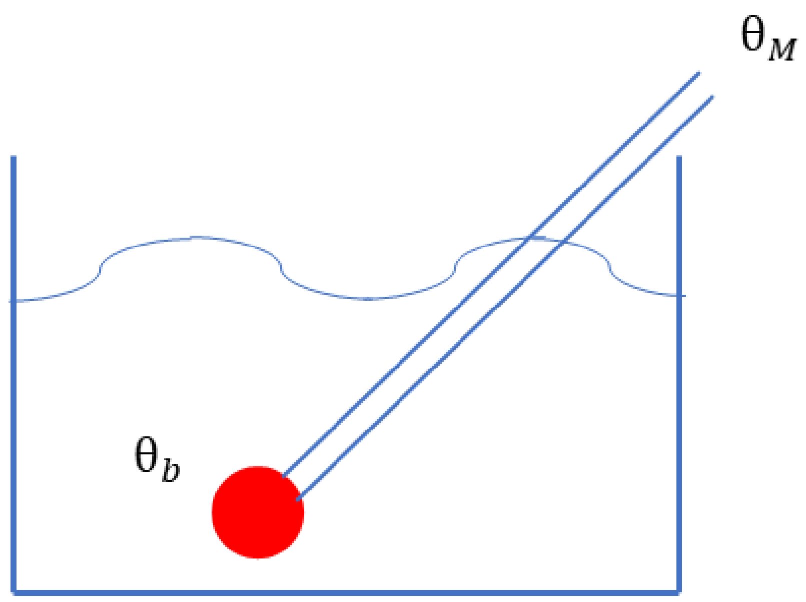
Sistemas térmicos

Grandeza	Descrição
Fluxo de Calor	Calor transferido por unidade de tempo
Capacidade Calorífica	Quociente entre a quantidade de calor fornecida a um corpo e a correspondente variação de temperatura
Capacidade Térmica	Capacidade que um corpo possui para armazenar calor
Resistência Térmica	Resistência que um corpo oferece à passagem do calor
Caudal Mássico	Massa que atravessa uma área por unidade de tempo

Sistemas térmicos

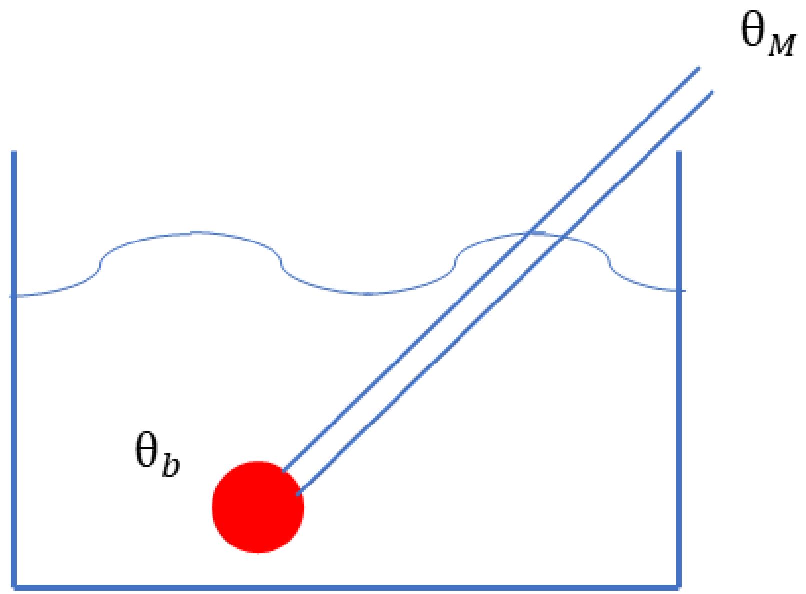
Símbolo	Grandeza	Unidade
$\boldsymbol{\theta}$	Temperatura	ºC
$\boldsymbol{q}$	Fluxo de Calor	J/s
$\boldsymbol{C_p}$	Capacidade Calorífica	J/ ºC.Kg
$\boldsymbol{C_t}$	Capacidade Térmica	J/ ºC
$\boldsymbol{R_t}$	Resistência Térmica	ºC/(J/s)
$\boldsymbol{F}$	Caudal Mássico	Kg/s

Sistemas Térmicos – Exemplo 1



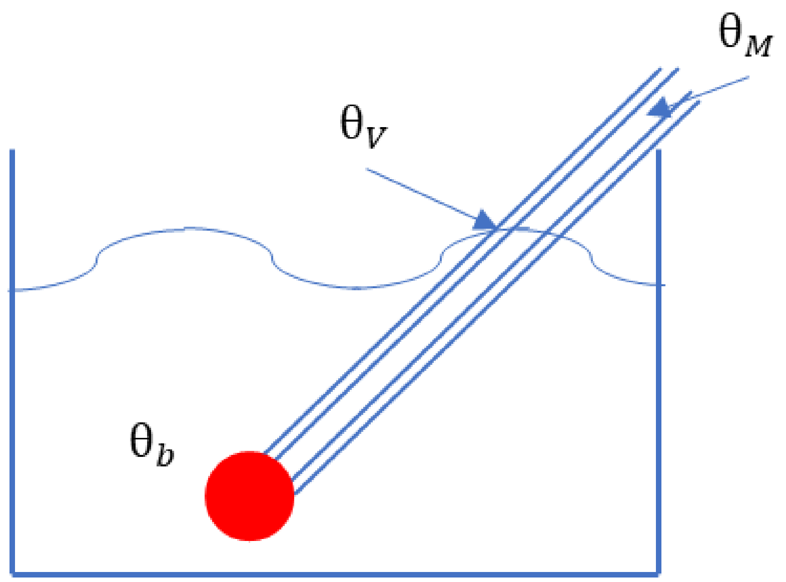
Grandeza	Significado	Descrição
$\boldsymbol{\theta_b}$	Temperatura do Banho	Variável de Entrada
$\boldsymbol{\theta_M}$	Temperatura do Mercúrio	Variável a Controlar
$\boldsymbol{q_{BM}}$	Calor Transferido Banho-Mercúrio	Variável Interna
$\boldsymbol{q_{ACM}}$	Calor Acumulado Mercúrio	Variável Interna
$\boldsymbol{R_{TBM}}$	Resistência Térmica Banho-Vidro	Parâmetro do Sistema
$\boldsymbol{C_{TM}}$	Capacidade Térmica do Mercúrio	Parâmetro do Sistema

Sistemas Térmicos – Exemplo 1



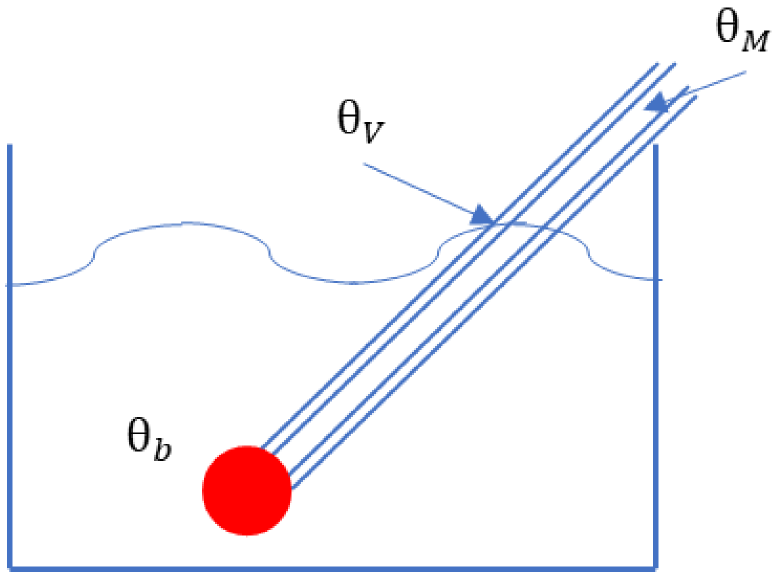
- $entra = sai + acumula$
- $q_{entra} = 0 + q_{acumula}$
- $q_{entra} = q_{BM}\ |q_{sai} = 0\ |\ q_{acumula} = q_{ACM}$
- Assim a equação de balanço de calor é:
- $q_{BM} = q_{ACM}$
- $q_{transferido} = \frac{\theta_{quente} - \theta_{frio}}{R_t}\ |q_{acumulado} = C_T \frac{d\theta(t)}{dt}$
- Então: $\frac{\theta_b - \theta_M}{R_{TBM}} = C_{TM} \frac{d\theta_M(t)}{dt} (=) \frac{d\theta_M(t)}{dt} = \frac{\theta_b - \theta_M}{R_{TBM} \times C_{TM}}$
- Laplace:
- $R_{TBM}C_{TM}\left(s\Theta(s) - \theta_M(0)\right) = \Theta_b(s) - \Theta_M(s)(=)\Theta_M(s) = \frac{1}{R_{TBM}C_{TM}s+1}\Theta_b(s) + \frac{R_{TBM}C_{TM}}{R_{TBM}C_{TM}s+1}\theta(0)$

Sistemas Térmicos – Exemplo 2



- Neste Segundo exemplo o vidro que compõe o termómetro é mais espesso, logo vai haver calor acumulado no vidro, fazendo com que exista transferência de calor do banho para o vidro e posteriormente do vidro para o mercúrio. Assim, há dois fenómenos de transferência de calor distintos.

Sistemas Térmicos – Exemplo 2

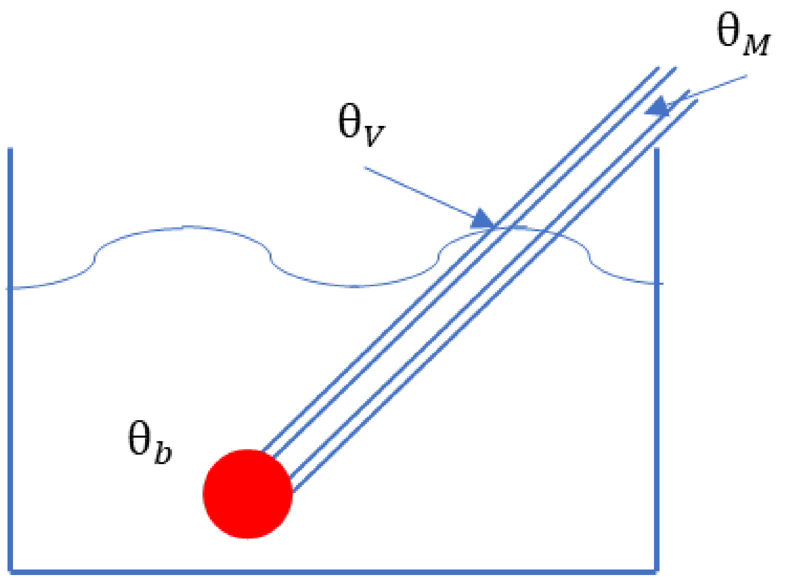


- $entra = sai + acumula$
- $q_{BV} = q_{VM} + q_{ACV}$
- $\frac{\theta_b(t)-\theta_V(t)}{R_{TBV}} = \frac{\theta_V(t)-\theta_M(t)}{R_{TVM}} + C_{TV}\frac{d\theta_V(t)}{dt}$
- $\frac{d\theta_V(t)}{dt} = \frac{\theta_b(t)}{R_{TBV}\times C_{TV}} + \frac{\theta_M(t)}{R_{TVM}\times C_{TV}} - \left(\frac{1}{R_{TBV}\times C_{TV}} + \frac{1}{R_{RTVM}\times C_{TV}}\right)\theta_V(t)$
- Após obter a primeira equação diferencial, agora analisamos a transferência de calor do vidro para o mercúrio:
- $\frac{d\theta_M(t)}{dt} = \frac{\theta_V(t)-\theta_M(t)}{R_{TVM}\times C_{TM}}$

Relacionar $\theta_b(t)$ e $\theta_M(t)$:

$$R_{TVM}\times C_{TM}\frac{d^2\theta_M(t)}{dt^2} + \frac{d\theta_M(t)}{dt} = \frac{\theta_b(t)}{R_{TBV}\times C_{TV}} + \frac{\theta_M(t)}{R_{TVM}\times C_{TV}} - \left(\frac{1}{R_{TBV}\times C_{TV}} + \frac{1}{R_{RTVM}\times C_{TV}}\right)\times R_{TVM}\times C_{TM}\frac{d\theta_M(t)}{dt} + \theta_M(t)$$

Sistemas Térmicos – Exemplo 2

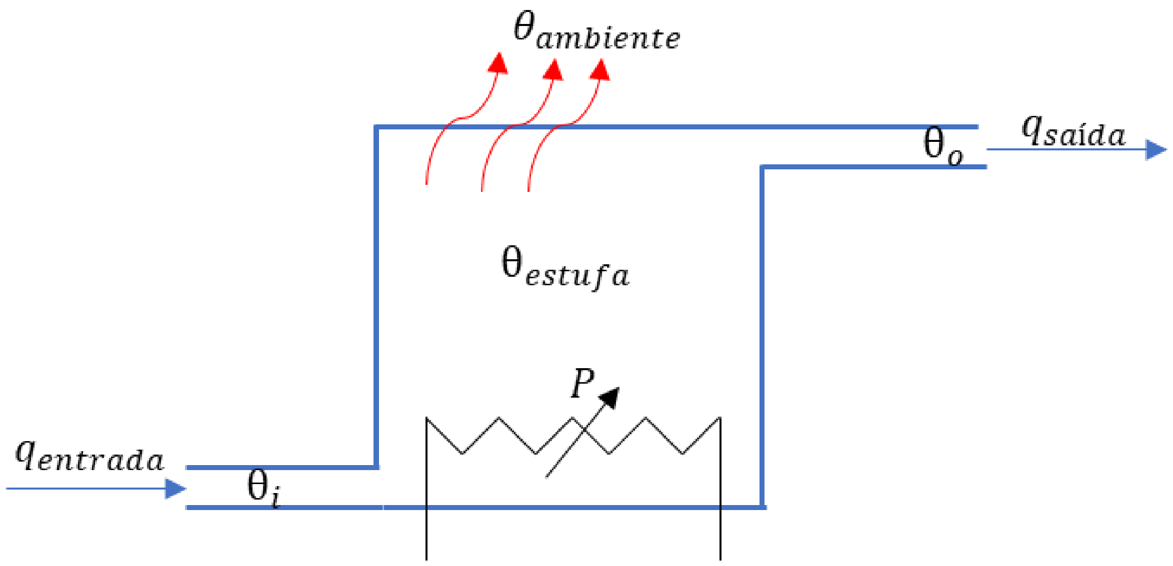


- Espaço de Estados:
- $$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_V(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_M(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_{TBV}\times C_{TV}} + \frac{1}{R_{RTVM}\times C_{TV}}\right) & \frac{1}{R_{TVM}\times C_{TV}} \\ \frac{1}{R_{TVM}\times C_{TM}} & \frac{-1}{R_{TVM}\times C_{TM}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_V(t) \\ \theta_M(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{TBV}\times C_{TV}} \\ 0 \end{bmatrix} [\theta_b]$$

Sistemas Térmicos – Exemplo 2

Grandeza	Significado	Descrição
θ_b	Temperatura do Banho	Variável de Entrada
θ_V	Temperatura do Vidro	Variável a Controlar
θ_M	Temperatura do Mercúrio	Variável a Controlar
q_{BV}	Calor Transferido Banho-Vidro	Variável Interna
q_{VM}	Calor Transferido Vidro-Mercúrio	Variável Interna
q_{ACV}	Calor Acumulado Vidro	Variável Interna
q_{ACM}	Calor Acumulado Mercúrio	Variável Interna
R_{TBV}	Resistência Térmica Banho-Vidro	Parâmetro do Sistema
R_{TVM}	Resistência Térmica Vidro-Mercúrio	Parâmetro do Sistema
C_{TV}	Capacidade Térmica do Vidro	Parâmetro do Sistema
C_{TM}	Capacidade Térmica do Mercúrio	Parâmetro do Sistema

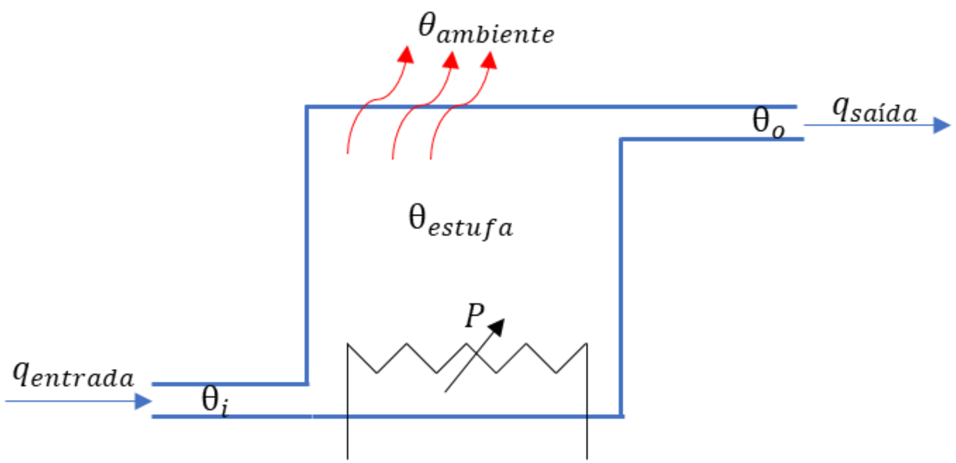
Sistema Térmico – Exemplo 3



Sistema Térmico – Exemplo 3

Grandeza	Significado	Descrição
θ_i	Temperatura de Entrada	Variável de Entrada
θ_o	Temperatura de Saída	Variável de Saída
θ_{estufa}	Temperatura da Estufa	Variável a Controlar
$\theta_{ambiente}$	Temperatura Ambiente	Variável Externa
P	Potência Calorífica	Variável de Entrada
$q_{entrada}$	Fluxo de Calor de Entrada	Variável de Entrada
$q_{saída}$	Fluxo de Calor de Saída	Variável de Saída
q_{perdas}	Calor Transferido Estufa Para o Exterior	Variável de Saída
q_{ACE}	Calor Acumulado na Estufa	Variável Interna
$F_{entrada}$	Caudal Mássico de Entrada	Variável de Entrada
$F_{saída}$	Caudal Mássico de Saída	Variável de Saída
C_p	Capacidade Calorífica	Parâmetro do Sistema
R_{TEA}	Resistência Térmica Estufa Ambiente	Parâmetro do Sistema
C_{TE}	Capacidade Térmica da Estufa	Parâmetro do Sistema

Sistema Térmico – Exemplo 3



- $entra = sai + acumula$
- $q_{entrada} + P = (q_{saída} + q_{perdas}) + q_{ACE}$
- Neste exemplo o fluxo de calor de entrada e saída é calculado através da seguinte equação, devido ao facto de não existir nenhum corpo ou massa entra a transferência de calor (ar):
- $q_{fornecido} = F \times \theta \times C_p$
- Ao aplicar tal equação o sistema fica:
- $F_{entrada} \times \theta_i \times C_p + P = F_{saída} \times \theta_o \times C_p + \frac{(\theta_o - \theta_{ambiente})}{R_{TEA}} + C_{TE}\frac{d\theta_{estufa}}{dt}$
- $\frac{d\theta_{estufa}}{dt} = \frac{F_{entrada}\times\theta_i\times C_p + P - F_{saída}\times\theta_o\times C_p}{C_{TE}} + \frac{(\theta_o - \theta_{ambiente})}{R_{TEA}\times C_{TE}}$