Problema-1

Teste-A:

a) A lei de Ampère correspondente a um regime estacionário é incoerente quando generalizada a situações dinâmicas, nas quais a densidade volúmica de cargas varia no tempo.

Com efeito, $\forall \vec{V}$, (diferenciável), $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{V}) = 0$

$$\{ [\, \partial_x[\partial_y V_z - \partial_z V_y] + \partial_y[\partial_z V_x - \partial_x V_z] + \partial_z[\partial_x V_y - \partial_y V_z] \,] =$$

$$= (\partial_x\partial_y - \partial_y\partial_x) V_z + \cdots = 0 \} \text{. Mas:}$$

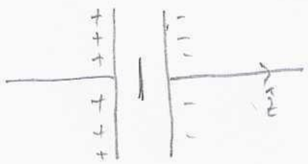
$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\, \nabla\cdot\vec{J} \neq 0$! Evidentemente, a conservação local de carga impõe que $\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\varepsilon\left(\nabla\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

(visto que $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$)

Logo, para que $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = 0$, é necessário que

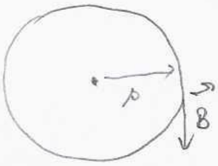
$$\nabla\times\vec{B} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

(correcção de Maxwell à lei de Ampère)

b) 

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} = \frac{Q(t)}{A\,\varepsilon_0}\hat{z}$ (ignorando efeito de bordos)

No espaço entre armaduras há uma densidade de corrente de deslocamento $\vec{J}_d = \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\hat{z} = \varepsilon_0\frac{1}{A\varepsilon_0}\frac{\partial Q(t)}{\partial t}\hat{z} = \frac{1}{A} I \hat{z}$



$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{atravessa}}$ (Lei de Ampère-Maxwell).

$I_{\text{atravessa}}$ é apenas a corrente de deslocamento que atravessa o círculo. $\vec{B}(s)$ é circunferencial e só depende de s (por simetria) ...

- $\cancel{2\pi} \cancel{s}\, B(s) = \mu_0 \frac{1}{A} I \cancel{\pi} s^{\cancel{2}}$; $A = \pi a^2$ (area das armaduras)

$$\vec{B}(s) = \mu_0 \frac{I}{2\pi a^2} s\, \hat{\phi} \quad \text{se } (s < a)$$

Observação!

- $2\pi s\, B(s) = \frac{\mu_0 I}{\cancel{\pi a^2}} \cdot \cancel{\pi a^2} \Rightarrow \vec{B}(s) = \mu_0 \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi}$ se $(s>a)$

(ignorando o efeito de bordos)

$\vec{E} = 0$ se $(s>a)$

Logo: no espaço entre armaduras $\vec{E} = \frac{Q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0} \hat{z} =$

$$= \frac{I \cdot t}{\pi a^2 \varepsilon_0} \hat{z} \quad ; \quad \vec{B}(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s\, \hat{\phi}$$

Teste - B

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{z} = \frac{(Q_0 - It)}{\pi a^2 \varepsilon_0} \hat{z} \qquad (s<a)$$

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$$

$$\cancel{2\pi} \cancel{s}\, B(s) = -\mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \cancel{\pi} s^{\cancel{2}} \Rightarrow \vec{B}(s) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s\, \hat{\phi} \quad (s<a)$$

Problema - 2

Teste A:

Método - 1:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad \vec{P} = \frac{k}{r}\hat{r}$$

$$\rho_b = -\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^{\cancel{2}}\frac{k}{\cancel{r}}\right) = -\frac{k}{r^2} \qquad (a < r < b)$$

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k}{b} & (s = b) \\ -\dfrac{k}{a} & (s = a) \end{cases}$$

Conhecidas as cargas ligadas podemos usar a lei de Gauss (dada a simetria do problema: $\vec{E}$ é radial, isto é $\vec{E} \equiv E(r)\hat{r}$)

$r < a \Rightarrow E(r) = 0$ visto que não há quaisquer cargas.

$a < r < b)$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[4\pi a^2 \sigma_b(a) + \int_a^r \left(-\frac{k}{\cancel{r^2}}\right)4\pi \cancel{r^2}\,dr\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[-4\pi a^{\cancel{2}}\frac{k}{\cancel{a}} - 4\pi k(r-a)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}4\pi k r$$

Logo:

$$\vec{E}(r) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{k}{r}\hat{r} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$r > b$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[-4\pi a^{\cancel{2}}\frac{k}{\cancel{a}} + 4\pi b^2\frac{k}{b} - 4\pi k(b-a)\right] =$$

$$= 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

Logo: $\vec{E}(r) = 0 \qquad r < a$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \qquad a < r < b$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad r > b$$

Método - 2 : Aplicação da "pseudo - lei de Gauss"

$$\rho_L = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \nabla \times \vec{D} = \varepsilon_0 \underbrace{(\nabla \times \vec{E})}_{0} + \nabla \times \vec{P}$$

$$\vec{P} = \frac{k}{r}\hat{r} \; : \; \nabla \times \vec{P} = 0 \; ; \text{ Logo } \; \nabla \times \vec{D} = 0$$

$\vec{D}$ = campo constante, nulo no ∞ $\Rightarrow$ nulo em todo o lado.

$$\vec{D} = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 \vec{E} = -\vec{P} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Logo: $$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < a \\ -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} & \text{se } a < r < b \\ 0 & \text{se } r > b \end{cases}$$ (como antes)

Condições de fronteira:

$D_\perp^1 - D_\perp^2 = \sigma_L = 0 \Rightarrow D_\perp$ deve variar continuamente

Mas $\vec{D} = 0$; cond. garantida trivial/.

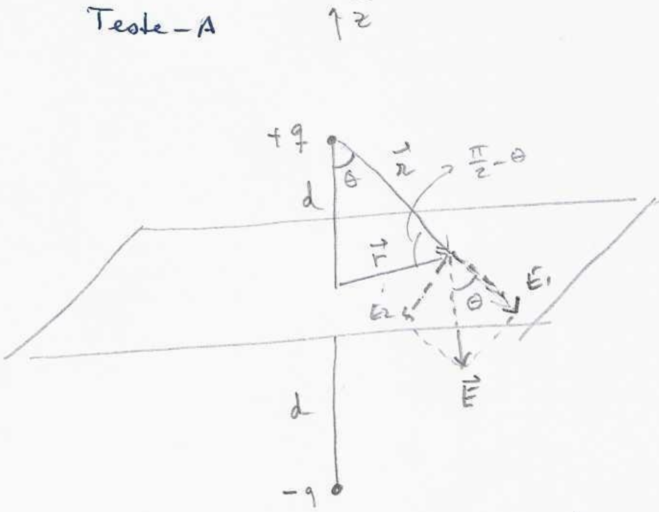
$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0 \rightarrow \vec{E} \parallel \hat{r} \Rightarrow E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} = 0$ o.k.

[Teste-B: tudo igual mas $\vec{P} = -\frac{k}{r}\hat{r}$]

v

Problema - 3

Teste - A



$$\vec{E}(\vec{r}) = -\hat{z}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,2\,\frac{1}{\mathfrak{r}^2}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{d}{\mathfrak{r}} = \frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

$$\mathfrak{r}^2 = r^2 + d^2$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\hat{z}\,\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$f_i = T_{ij}\, n_j$$

$\hat{n} = -\hat{z}$ $\qquad f_z \neq 0$ (por simetria, é o único componente da força)

$f_z = -T_{zz} \equiv$ densidade superficial de força no plano.

$$F_z = \int f_z\, d\Sigma_z = -\int_0^\infty T_{zz}\cdot 2\pi r\, dr$$

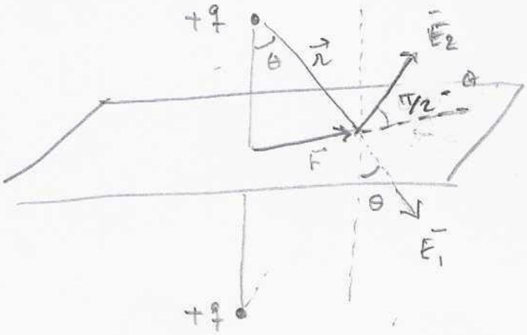
$$T_{zz} = +\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{d^2}{(r^2+d^2)^3} = \frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{d^2}{(r^2+d^2)^3}$$

$$F_z = -\frac{d^2 q^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{2\pi r\, dr}{(r^2+d^2)^3} = -\frac{d^2}{4\pi\varepsilon_0}\,q^2\int_0^\infty\frac{r\,dr}{(r^2+d^2)^3} =$$

$$= -\frac{d^2}{4\pi\varepsilon_0}\,q^2\left(\frac{1}{2d^2}\right)^2$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{4d^2} \qquad \square$$

Teoh - B



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\imath^2} 2 \cdot \sin\theta \; \hat{r}$$

$$\imath^2 = r^2 + d^2$$

$$\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}} \hat{r}$$

$$T_{zz} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{r^2}{(r^2+d^2)^3}$$

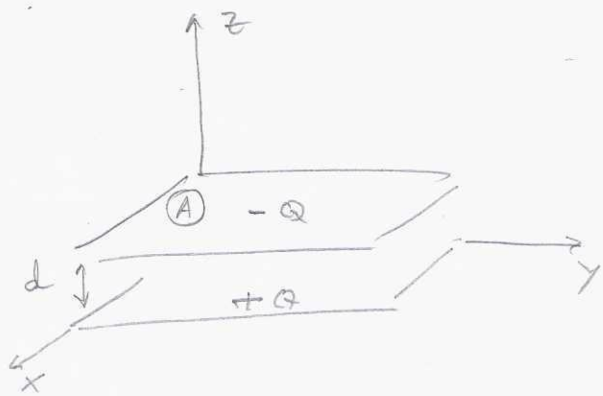
$$F_z = -\int T_{zz}\, 2\pi r\, dr = \frac{1}{\cancel{2}}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_0^\infty \frac{r^2\, \cancel{2}\pi r\, dr}{(r^2+d^2)^3}$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{r^3\, dr}{(r^2+d^2)^3}$$

$$= + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2d)^2}$$

□

Problema 4



Teste-A: a) $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$

$\vec{B} = B\,\hat{x}$

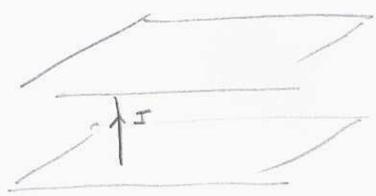
$$\vec{p}_{em} = \varepsilon_0 (\vec{E}\times\vec{B}) = \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} B (\hat{z}\times\hat{x}) = \frac{Q}{A} B\,\hat{y}$$

(densidade volúmica de momento linear.

$$\vec{P}_{em} = \frac{QB}{A}\cdot A\cdot d\;\hat{y} = QBd\,\hat{y}$$

(momento electromagnético total.)

b)



$$d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B} = I\,dl\,B(\hat{z}\times\hat{x})$$

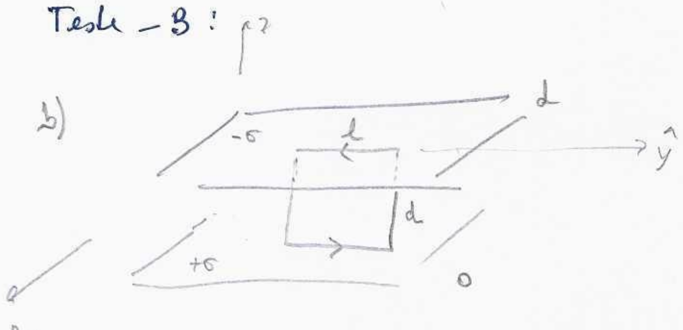
$$\vec{F}(t) = I\,d\,B\,\hat{y}$$

$$\text{impulso} = \vec{J} = \int_0^\infty \vec{F}(t)\,dt = \hat{y}\int_0^\infty I(t)\,d\,B\,dt$$

$I(t) = -\frac{dQ}{dt}$ $\qquad \vec{J} = \hat{y}\int_Q^0 -dQ\;d\,B = QBd\,\hat{y}$

Teste-B:

b)



$$B(t)\,d\cdot l = \phi_{Mag}(t) =$$

$$-d\,l\,\frac{dB(t)}{dt} = -\frac{\partial\phi_{mag}}{\partial t} = [E(0)-E(d)]\,l$$

$$\vec{F}(t) = [+Q\,E(0) - Q\,E(d)]\,\hat{y} = -d\,Q\,\frac{dB}{dt}$$

$$\vec{J} = \hat{y}\int_B^0 -d\,Q\,\frac{dB}{dt} = QBd\,\hat{y} \quad \text{(como antes)}$$