Universidade do Minho

Departamento de Física
Escola de Ciências da Universidade do Minho

ano letivo 2020/2021

- Este teste é de consulta, não sendo permitido sair da sala até ao final do tempo previsto
- Não é permitido o uso de telemóveis ou de qualquer outro modo de comunicação
- O teste deve ser resolvido num único *notebook jupyter*, que deve conter o seu nome, número de aluno e curso na primeira célula
- Deve comentar o código produzido, podendo usar células em formato *markdown* para todos os comentários e discussões que considere pertinentes
- No final do teste deve fazer o upload do *notebook* na página `http://wminho.lip.pt/uploader/` usando o seguinte formato para o nome do ficheiro: **NúmeroAluno_Nome.ipynb**

Teste de Física Computacional

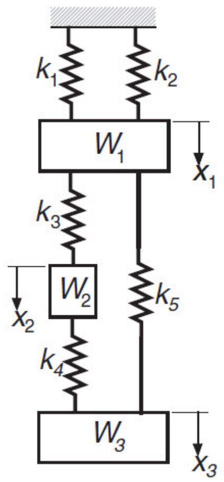
18 de janeiro de 2021

duração: 2h00

1. *[4 val.]* O sistema de molas e pesos representado na figura está em repouso.

   Se $x_{1,2,3}$ forem os deslocamentos correspondentes a cada peso W_i e k_i as constantes de cada mola, o sistema de equações que descreve esta situação de equilibrio é dado por:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3+k_5 & -k_3 & -k_5 \\ -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ -k_5 & -k_4 & k_4+k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$$

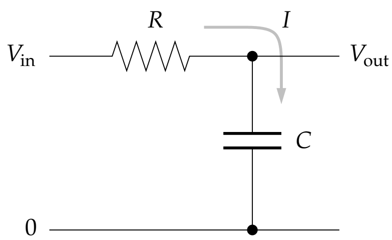


   Escreva um programa que resolva este sistema de equações. Use este programa para calcular os deslocamentos $x_{1,2,3}$ dados os seguintes valores:

$$k_1 = k_3 = k_4 = k = 10\,\text{N/m} \quad k_2 = k_5 = 2k$$
$$W_1 = W_3 = 2W \quad W_2 = W = 50\,\text{N/m}$$

2. *[6 val.]* Considere um circuito RC com uma resistência e um condensador.

   Este circuito atua com um filtro passa baixo, modificando o sinal injetado V_{in} no sinal V_{out}. Se I for a corrente que passa pela resistência R e pelo condensador de capacidade C, mostre que:



$$IR = V_{\text{in}} - V_{\text{out}}\,, \qquad Q = CV_{\text{out}} \qquad I = \frac{dQ}{dt}.$$

   Substituindo a segunda equação na terceira e usando o resultado na primeira equação temos que $V_{\text{in}} - V_{\text{out}} = RC\,(dV_{\text{out}}/dt)$ ou, equivalentemente,

$$\frac{dV_{\text{out}}}{dt} = \frac{1}{RC}(V_{\text{in}} - V_{\text{out}}).$$

(a) Escreva um programa que resolva esta equação para $V_{\text{out}}(t)$ usando o método de Euler. Assuma que o sinal de entrada é uma onda quadrada com frequência 1 e amplitude 1:

$$V_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lfloor 2t \rfloor \text{ é par,} \\ -1 & \text{se } \lfloor 2t \rfloor \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ significa que x é arredondado por baixo para o inteiro mais próximo.

(b) Compare o sinal de entrada e saída para $RC = 0.01$, 0.1, e 1 s, assumindo a condição inicial $V_{\text{out}}(0) = 0$. Considere o intervalo $t = 0$ a $t = 10$ s e discuta a importância do passo considerado na resolução da equação diferencial.

(c) Explique os resultados obtidos analisando os coeficientes de Fourier de cada um dois sinais.

3. *[5 val.]* As equações de Lotka–Volterra descrevem um modelo de interação entre presas e predadores. Sejam as variáveis x e y proporcionais ao tamanho de população de coelhos (presas) e raposas (predadores).

No modelo de Lotka–Volterra os coelhos reproduzem-se a uma taxa proporcional à sua população e são comidos pelas raposas a uma taxa proporcional à população de coelhos e raposas:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x y,$$

onde α e β são constantes.

Ao mesmo tempo as raposas reproduzem-se a uma taxa proporcional à taxa a que comem coelhos – porque precisam de comida para poderem crescer e reproduzir-se – mas também morrem a partir de uma certa idade a uma taxa proporcional à sua própria população:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x y - \delta y,$$

onde γ e δ também são constantes.

Resolva estas equações numericamente para $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0.5$ e $\delta = 2$ com a condição inicial $x = y = 2$, fazendo o gráfico de ambas as populações em função do tempo. Assuma que a população quer de raposas quer de coelhos é 100 vezes maior que y e x, respetivamente.Interprete os gráficos obtidos.

4. *[5 val.]* Considere o sistema a duas dimensões, representado na figura.

Cada lado do quadrado, de comprimento 1 m, está ligado à terra estando, portanto, a 0 V. Duas cargas quadradas são colocadas como representado na figura, tendo cada uma delas uma densidade de carga correspondente a $\rho = \pm 1$ Cm^2. Resolva a equação de Poisson para este sistema:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Resolva numericamente a equação de Poisson para este sistema num sistema de unidades em que $\varepsilon_0 = 1$. Como critério de convergência use uma variação do potencial elétrico por iteração inferior a 10^{-6} V.