Prova escrita de Física Quântica I

Segunda prova

25-06-2013

1. (4 pts)

   Considere o Hamiltoniano do oscilador harmónico, dado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

   Considere agora a função de onda

$$\psi(x) = Ae^{-\beta x^2} . \tag{2}$$

   Determine A e β de modo a $\psi(x)$ ser uma função própria normalizada do oscilador harmónico. Encontre o valor próprio associado a $\psi(x)$.

2. (4 pts)

   Prove que para um operador hermítico A se tem a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\phi^*(x)A\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx[A\phi(x)]^*\psi(x) , \tag{3}$$

   onde $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são duas funções de onda.

3. (4 pts)

   Considere a identidade

$$e^{\alpha a+\beta a^\dagger = e^{\beta a^\dagger} e^{\alpha a}} e^{\alpha\beta/2} , \tag{4}$$

   onde os operadores a e $a^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação do oscilador harmónico, definidos como

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}} , \tag{5}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}} . \tag{6}$$

   (a) Calcule o comutador $[a, a^\dagger]$.

   (b) Calcule o elemento de matriz $\langle 0|e^{kx}|0\rangle$, onde $|0\rangle$ é o estado fundamental do oscilador harmónico e k é um dado número de onda.

4. (4 pts)

   Considere as relações

$$L_\pm|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|l, m \pm 1\rangle , \tag{7}$$

   onde L_+ é o operador escada de subida e L_- é o operador escada de descida.

   (a) Encontre a representação matricial de L_x e L_y para $l = 1/2$.

   (b) Considere uma partícula no estado de momento angular descrito pelo spinor

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{8}$$

   Calcule a probabilidade de encontrar a partícula no estado de próprio de $L_y = \hbar/2$.

(c) Se a partícula for descrita pelo Hamiltoniano $H = \hbar\omega L_z$, determine a evolução temporal do estado $|\psi\rangle$.

(d) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula nos estados de próprios de $L_y = \pm\hbar/2$ no tempo t.

5. (4 pts) Considere que um electrão no átomo de hidrogénio se encontra no estado

$$\psi(r,\theta,\phi) = aR_{1,0}(r)Y_{0,0}(\theta,\phi) + bR_{2,1}(r)Y_{1,0}(\theta,\phi)\,, \tag{9}$$

onde a e b são constantes, $R_{n,l}(r)$ representa a função de onda radial do estado (n,l) e $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ representa o harmónico esférico (l,m).

(a) Normalize o estado $\psi(r,\theta,\phi)$.

(b) Calcule o valor médio da energia.

(c) Calcule o valor médio de L^2.

(d) Calcule o valor médio de L_x.

(e) Diga se o estado próprio $\phi(r,\theta,\phi) = R_{3,3}(r)Y_{3,-2}$ de um electrão no átomo de hidrogénio pode existir. Justifique a resposta.