

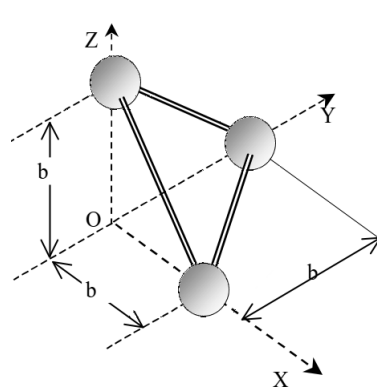
Problemas de corpo rígido

Ricardo Mendes Ribeiro

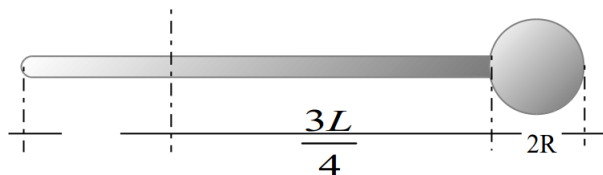
2 de Abril de 2019

1 Momento de inércia

1. Mostre que o momento de inércia do corpo rígido formado pelas três bolas idênticas de massa m e raio r ligadas por hastes finas de massa desprezável, de comprimento dado na figura, tem o mesmo valor em relação a cada um dos eixos cartesianos.

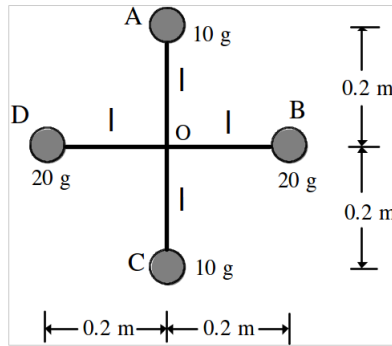


2. Um corpo rígido constituído por uma haste fina de massa $m = 0.10$ kg e comprimento $L = 0.40$ m e uma esfera com massa $M = 3.0$ kg e raio $R = 0.10$ m, roda em torno de um eixo perpendicular à haste como é mostrado na figura. Assumindo que o corpo é homogêneo e com uma distribuição uniforme de massa, calcule o momento de inércia do corpo rígido em relação ao eixo considerado.

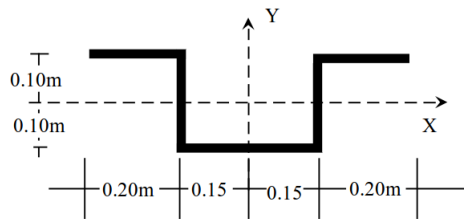


R: ¹

3. A figura seguinte representa quatro esferas ligadas por tubos muito leves, podendo a estrutura rodar em torno do ponto O . Considere $l = 20$ cm, $m_A = m_C = 10$ g e $m_B = m_D = 20$ g. Calcule o momento de inércia da estrutura em relação aos eixos BD e AC .



4. Calcule o momento de inércia da barra representada na figura em relação ao eixo xx e yy , sabendo que a densidade da barra é de 0.2 kg/m .



R: ²

5. Uma bola de ténis tem a massa de 57 g e o diâmetro de 7 cm . Achar o momento de inércia da bola em torno de um diâmetro. Admitir que a bola é uma superfície esférica delgada.
6. Um cilindro de massa M , altura L e raio R tem uma densidade dada por $\rho = \alpha r$ (α é uma constante e $0 < r < R$). Determine o momento de inércia do cilindro em relação ao seu eixo de simetria.

R: ³

7. Sobre uma barra, com 1 m de comprimento e de massa desprezável, estão colocados cinco corpos, cada um com uma massa de 1 kg , situados a 0 cm , 25 cm , 50 cm , 75 cm e 100 cm de um dos extremos.

(a) Calcule o momento de inércia do sistema relativamente a um eixo perpendicular à barra e que passe:

- Por um dos extremos.
- Pela 2ª massa.
- Pelo centro de massa.

(b) Verifique o teorema de Steiner.

8. Determine os momentos de inércia dos seguintes objectos:

- Um anel de massa M e raio R , relativamente a um eixo que passa pelo centro do anel e é perpendicular a ele;
- Um anel de massa M e raio R , relativamente a um eixo que passa pelo centro do anel e é no mesmo plano do anel;

- (c) Um disco de massa M e raio R , relativamente a um eixo que passa pelo centro do disco e é perpendicular a ele;
- (d) Um disco de massa M e raio R , relativamente a um eixo que passa pelo centro do disco e é no mesmo plano do disco;
- (e) Uma barra fina e uniforme de massa M e comprimento L , relativamente a um eixo que passa pelo centro da barra e é perpendicular a ela;
- (f) Uma barra fina e uniforme de massa M e comprimento L , relativamente a um eixo que passa pela ponta da barra e é perpendicular a ela;
- (g) Uma superfície esférica de massa M e raio R , relativamente a um eixo que passa pelo centro da esfera;
- (h) Uma esfera sólida de massa M e raio R , relativamente a um eixo que passa pelo centro da esfera;

R: ⁴

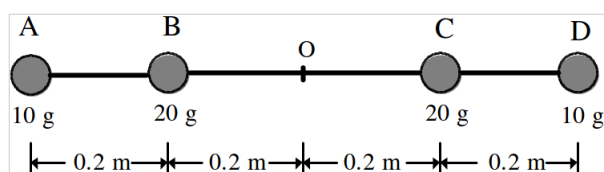
2 Dinâmica do corpo rígido

9. Deduza a seguinte equação:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

onde, \vec{L} representa o momento angular de uma partícula material em relação a um ponto e \vec{M} o momento das forças que sobre ela actuam.

10. Indique, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: *Se o momento angular de uma partícula material, em relação a um ponto é constante, então a resultante das forças que sobre ela actuam é necessariamente nula.*
11. Os corpos A , B , C e D estão ligadas a um eixo que passa em O , por um tubo muito leve com as dimensões indicadas. Uma força de 0.02 N é aplicada no ponto D , perpendicularmente ao plano da figura. Calcule, após 4 s do início do movimento:



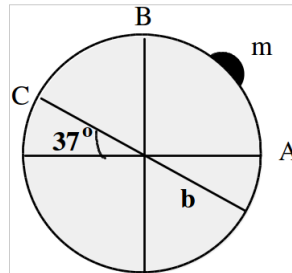
- (a) o valor da velocidade angular de cada corpo.
- (b) o valor da velocidade linear de cada corpo.

R: ⁵

12. Uma barra de massa desprezável está fixa numa das extremidades podendo mover-se livremente como um pêndulo. Dois corpos de massas m e $2m$ são ligados à barra às distâncias b e $3b$ do ponto fixo, respectivamente. A barra é levada à posição horizontal e depois libertada. Calcule a aceleração angular da barra no instante em que é solta.

R: ⁶

13. O disco homogêneo de raio b , colocado na posição vertical conforme representado na figura, pode rodar em torno de um eixo horizontal que passa através do seu centro, perpendicularmente ao plano da figura. Fixa-se um pequeno corpo de massa m à borda do disco. Designando por I o momento de inércia do conjunto, calcule a aceleração do disco sob a ação da gravidade quando o corpo se encontra:



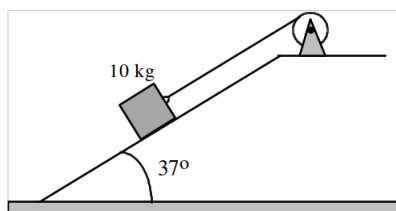
- (a) no ponto A .
- (b) no ponto B .
- (c) no ponto C .

R: 7

14. Se pretendermos acelerar um disco do repouso até atingir uma velocidade angular de valor 10 rad/s em 4 s , é necessário aplicar-lhe um momento de valor 4 Nm . Calcule o momento de inércia do disco.

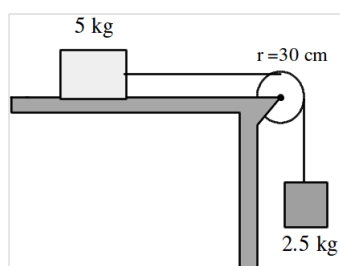
R: 8

15. O momento de inércia da roldana da figura é 8 kg.m^2 e o seu raio é de 40 cm . Calcule o valor da aceleração angular da roldana causada pelo bloco de 10 kg , se a força de atrito entre a superfície e o bloco for de 30 N .



R: 9

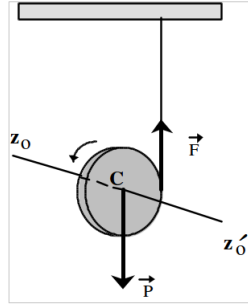
16. Na figura, a força de atrito entre o bloco e a mesa é de 20 N . Sabendo que o momento de inércia da roldana é de 4 kg.m^2 , calcule o tempo que demora o bloco de 5 kg a percorrer 60 cm , desde que é libertado.



R: ¹⁰

17. O disco representado na figura tem 0.5 m de raio e 20 kg de massa. Determine:

- (a) a aceleração angular do disco.
- (b) a aceleração tangencial do seu centro de massa.



R: ¹¹

18. Uma roda de raio 0.6 m e de massa 100 kg está a girar em torno do seu eixo. Num determinado instante a sua velocidade angular é de 175 rad/s. Sabendo que, devido ao atrito, a roda está sujeita a um momento de 10 Nm no seu eixo, calcule:

- (a) o tempo que demora a parar.
- (b) o número de voltas que dá antes de parar.

R: ¹²

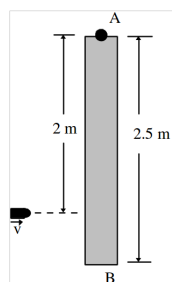
19. Um camião com 9072 kg de massa desloca-se à velocidade de 6.6 m/s. O raio de cada roda é de 0.45 m, a massa é de 100 kg e o raio de giração é de 0.3 m. O raio de giração é a distância a que se deveria colocar toda a massa do sistema para produzir o mesmo momento de inércia:

$$R = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

Calcule a energia cinética total do camião.

R: ¹³

20. Uma barra de comprimento 2.5 m e massa 3 kg pode girar livremente em torno de um pino colocado em A. Um projectil de massa 0.1 kg e velocidade de 500 m/s atinge a barra a 2 m de A, de acordo com a figura, alojando-se nela. (O momento de inércia da barra relativamente a um eixo que lhe é perpendicular e que passa pelo seu centro de massa é $ML^2/12$).



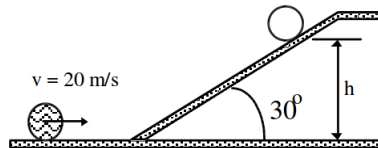
- (a) Determine o momento angular do sistema imediatamente antes e após o projectil atingir a barra.
- (b) Qual é a variação da energia cinética do sistema?

R: ¹⁴

21. Uma molécula de azoto pode ser imaginada como duas partículas pontuais de massa $m = 23.38 \times 10^{-27}$ kg separadas por uma distância de 1.3×10^{-10} m. Sabendo que no ar à temperatura ambiente a sua energia cinética rotacional é aproximadamente 4×10^{-21} J, calcule o momento de inércia de cada molécula em relação ao centro de massa e a sua velocidade em rev/s.

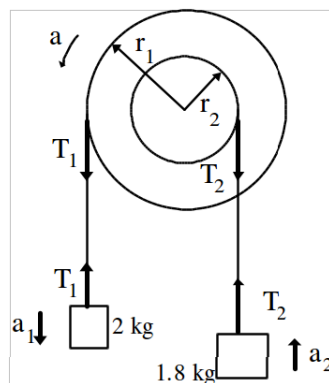
R: ¹⁵

22. Uma esfera maciça e uniforme rola sobre uma superfície horizontal a 20 m/s subindo então um plano inclinado. Calcule a altura máxima alcançada pela esfera no caso de o atrito ser desprezável.



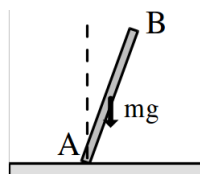
R: ¹⁶

23. O momento de inércia do sistema de roldanas da figura é $I = 1.70$ kg.m², sendo $r_1 = 50$ cm e $r_2 = 20$ cm. Calcule a aceleração angular do sistema e as tensões T_1 e T_2 .



R: ¹⁷

24. A barra fina e uniforme AB representada na figura tem massa m e comprimento l e é articulada na extremidade A ao nível do solo. Se, a partir da posição vertical, se deixar cair a barra, com que velocidade angular atingirá o solo?



R: ¹⁸

25. Uma esfera, um cilindro e um anel todos com a mesma massa e com raios iguais descem rolando um plano inclinado, partindo de uma altura h com velocidade inicial nula. Determine a velocidade com que cada um deles chega à base do plano.

R: ¹⁹

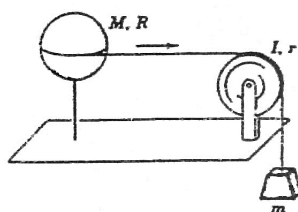
26. Um menino está em pé sobre uma plataforma giratória. Quando os seus braços estão estendidos tem uma velocidade angular de 0.25 rot/s. Mas, quando dobra os braços a velocidade passa para 0.80 rot/s. Calcule a razão entre os seus momentos de inércia na primeira e na segunda situações.

R: ²⁰

27. Um carrossel consiste essencialmente num disco uniforme de massa 200 kg, rodando em torno do seu eixo vertical. O raio do disco é 6 m. Um homem ($m = 100$ kg) está de pé sobre a borda exterior quando o carrossel gira com velocidade de 0.20 rot/s. Qual seria a velocidade do carrossel se o homem se deslocasse para uma nova posição a 3 m do centro do disco? O que aconteceria à velocidade do carrossel se o homem caísse para fora do carrossel?

R: ²¹

28. Uma esfera uniforme de $I = \frac{2}{5}MR^2$ de raio $R = 20$ cm com uma massa $M = 4$ kg, gira em torno de um eixo vertical desprovido de atrito (ver figura). Uma corda de massa desprezável que passa em torno do equador da esfera e por uma roldana, tem pendente na outra extremidade um objecto de massa $m = 2$ kg. Sabendo que a roldana ($I = 0.3 \text{ kg.m}^2$) tem de raio $r = 10$ cm, determine:



- (a) As acelerações angulares da esfera e da roldana.
(b) A velocidade do objecto, inicialmente em repouso, após ter descido 20 cm.

R: ²²

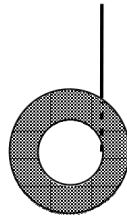
29. Considere um carrossel de massa $M = 180$ kg, a girar em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. O momento de inércia deste carrossel em relação ao referido eixo de rotação é $I = 100 \text{ kg.m}^2$. Verifica-se que, se um número n de crianças, cada uma com massa $m = 32$ kg, se sentarem em cima do carrossel, a uma distância de 1.25 m do seu eixo de rotação e rodarem solidárias com ele, o momento de inércia do sistema passa a ser o triplo do momento de inércia do carrossel vazio. Nestas condições, determine:

- (a) o número n de crianças que estão a rodar em cima do carrossel.

- (b) a energia cinética do sistema no momento em que se atinge a velocidade de 2.5 rad/s .
- (c) o momento das forças de atrito, sabendo que, se as crianças não aplicarem nenhuma força ao carrossel e este estiver a rodar com uma velocidade de 2.5 rad/s , vai parar ao fim de 5 s (admita que a força de atrito é constante no tempo).

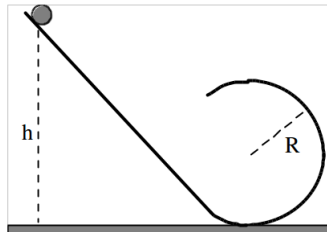
R: ²³

30. No yo-yo representado na figura o fio está preso num disco interior de raio b e desenrola-se quando o yo-yo cai. Sabendo que o momento de inércia do yo-yo é $0.7mb^2$, calcule qual será a velocidade de rotação do yo-yo depois de cair uma altura h a partir do repouso.



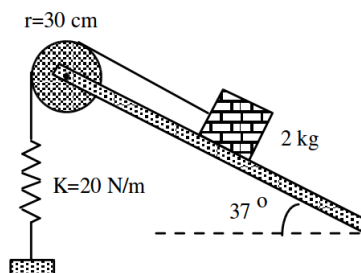
R: ²⁴

31. Um cilindro uniforme de raio b rola ao longo de uma calha, como se vê na figura. Qual a altura mínima h , da qual deverá ser solto para que rode ao longo de toda a calha circular de raio R ? (considere $R \gg b$).



R: ²⁵

32. O sistema da figura é solto quando a mola elástica, de constante $k = 20 \text{ N/m}$, está indeformada. A roldana de raio 30 cm tem momento de inércia $I = 0.5 \text{ kg.m}^2$. Admitindo que o atrito é desprezável, calcule:

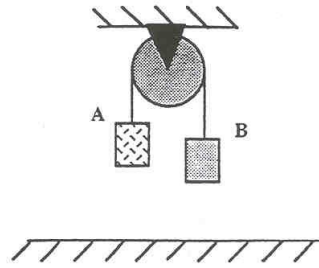


- (a) O espaço percorrido pelo bloco.

(b) A velocidade do bloco quando a deformação da mola é de 0.5 m.

R: ²⁶

33. Considere o sistema representado na figura. Os corpos A e B de massas, respectivamente, 3 e 5 kg, estão presos nas duas extremidades de um fio enrolado em torno de uma roldana de raio $r = 20$ cm. Sabendo que o sistema é libertado a partir do repouso e que o bloco B atinge o solo 10 segundos depois, com a velocidade de 5 m/s, determine:



- (a) o momento de inércia da roldana.
- (b) as acelerações lineares dos corpos A e B .
- (c) as tensões no fio.

R: ²⁷

34. Dois rapazes, cada um com uma massa de 25 kg, estão sentados em extremos opostos de uma barra horizontal com um comprimento de 2.6 m e uma massa de 10 kg. A barra roda em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro, com uma frequência de 5 rpm. Qual será a sua velocidade angular se cada um dos rapazes se deslocar 60 cm em direção ao centro sem tocar no chão? Qual será a variação da energia cinética de rotação de todo o sistema ?

Soluções

Notes

$$^1 0.494 \text{ kgm}^2$$

$$^2 1.67 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2; 7.52 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$^3 3MR^2/5$$

$$^4 \text{a) } MR^2; \text{ b) } \frac{1}{2}MR^2; \text{ c) } \frac{1}{2}MR^2; \text{ d) } \frac{1}{4}MR^2; \text{ e) } \frac{1}{12}ML^2; \text{ f) } \frac{1}{3}ML^2; \text{ g) } \frac{2}{3}MR^2; \text{ h) } \frac{2}{5}MR^2$$

$$^5 \text{a) } 6.67 \text{ rad/s}; \text{ b) } v_A = v_D = 2.67 \text{ m/s}, v_B = v_C = 1.33 \text{ m/s}$$

$$^6 \frac{7}{19} \frac{g}{b}$$

$$^7 \text{a) } mgb/I; \text{ b) } 0; \text{ c) } 0.8mgb/I$$

$$^8 1.6 \text{ kg.m}^2$$

$$^9 1.2 \text{ rad/s}^2$$

$$^{10} 3.72 \text{ s}$$

$$^{11} \text{a) } 13.1 \text{ rad/s}^2; \text{ b) } 6.53 \text{ m/s}^2$$

$$^{12} \text{a) } 315 \text{ s}; \text{ b) } 4387 \text{ voltas}$$

$$^{13} 201 \text{ kJ}$$

$$^{14} \text{a) } L_{antes} = L_{depois} = 100 \text{ kg.m}^2/\text{s}; \text{ b) } -11.7 \text{ kJ}$$

$$^{15} 1.98 \times 10^{-46} \text{ kg.m}^2; 6.3 \times 10^{12} \text{ rev/s}$$

$$^{16} h = 28.6 \text{ m}$$

$$^{17} \alpha = 2.76 \text{ rad/s}^2; T_1 = 16.8 \text{ N}; T_2 = 18.6 \text{ N}$$

$$^{18} \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

$$^{19} v_{esfera} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}; v_{cilindro} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}; v_{anel} = \sqrt{gh}$$

$$^{20} \frac{I_1}{I_2} = 3.2$$

$$^{21} \omega = 0.32 \text{ rot/s}$$

$$^{22} \text{a) } \alpha_{esfera} = 2.92 \text{ rad/s}^2; \alpha_{roldana} = 5.83 \text{ rad/s}^2; \text{ b) } v = 0.48 \text{ m/s}$$

$$^{23} \text{a) } 4; \text{ b) } 937.5 \text{ kJ}; \text{ c) } 150 \text{ Nm}$$

$$^{24} 1.08 \sqrt{\frac{gh}{b^2}}$$

$$^{25} h_{min} = 11 \frac{R}{4}$$

$$^{26} \text{a) } 1.18 \text{ m}; \text{ b) } 0.95 \text{ m/s}$$

$$^{27} \text{a) } 1.25 \text{ kg.m}^2; \text{ b) } 0.5 \text{ m/s}^2; \text{ c) } T_A = 30.9 \text{ N}, T_B = 46.5 \text{ N}$$