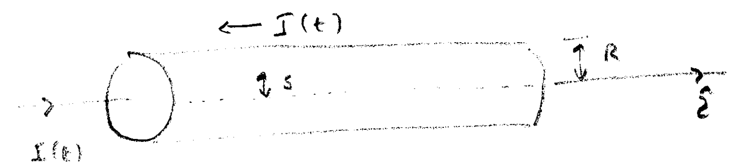
Problema 7.33 (Griffiths): cont.



Vimos que no interior do "cabo" existe um campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln\left(\frac{s}{R}\right)\hat{z}$$

Para uma corrente $I_0\cos(\omega t)$, obtenha a razão entre a corrente total de deslocamento e a corrente $I(t)$.

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0\dot{\vec{E}} = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{2\pi}\frac{d^2I}{dt^2}\ln\left(\frac{s}{R}\right)\hat{z} = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{2\pi}I(t)\,\omega^2\ln\left(\frac{R}{s}\right)\hat{z}$$

Para obter a corrente total temos de integrar esta densidade de corrente sobre a secção transversal do cabo:

$$I_d = \int_{\Sigma}\vec{J}_d\cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 I(t)}{2\pi}\int_0^R \ln\left(\frac{R}{s}\right)2\pi s\,ds =$$

$$= \frac{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 I(t)}{\cancel{2\pi}}\left[\int_0^R \ln R\cdot\cancel{2\pi}s\,ds - \int_0^R \ln s\cdot\cancel{2\pi}s\,ds\right]$$

$$= \mu_0\varepsilon_0\omega^2 I(t)\left[\ln R\cdot\frac{s^2}{2} - \left(\frac{s^2}{2}\ln s - \int\frac{s^{\cancel{2}}}{2}\frac{1}{\cancel{s}}ds\right)\right]_0^R$$

$$= \mu_0\varepsilon_0\omega^2 I(t)\left[\frac{R^2}{2}\cancel{\ln R} - \frac{R^2}{2}\cancel{\ln R} + \frac{R^2}{4}\right] =$$

$$I_d = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 I(t) \frac{R^2}{4}$$

Logo:

$$\frac{I_d}{I(t)} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 R^2}{4} = \frac{\omega^2}{4c^2} R^2$$

Por exemplo: um cabo com $R = 1\ cm$, com $\omega = 2\pi \cdot 10^6$

$$\sim \frac{36 \times 10^{12}}{4 \times (3 \cdot 10^8)^2} \cdot 10^{-4} = \frac{10^8}{10^{16}} = 10^{-8} \quad \square$$

Problema 7.31

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

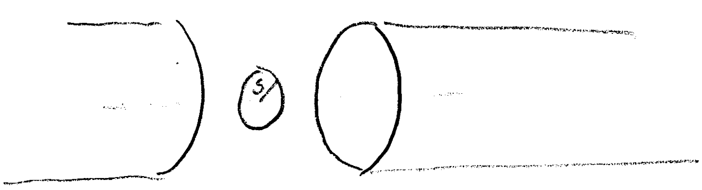
; No "gap" do fio cilíndrico, na aproximação usual $(w \ll a)$,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 \pi a^2} I(t)$$

$$J_d = \frac{I(t)}{\pi a^2}$$

Podemos agora calcular o campo magnético no interior do gap:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi s^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi s\, B(s) = \mu_0 I \frac{s^2}{a^2}$$

$$B(s) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{s}{a^2} \quad \text{(circunferencial)}$$

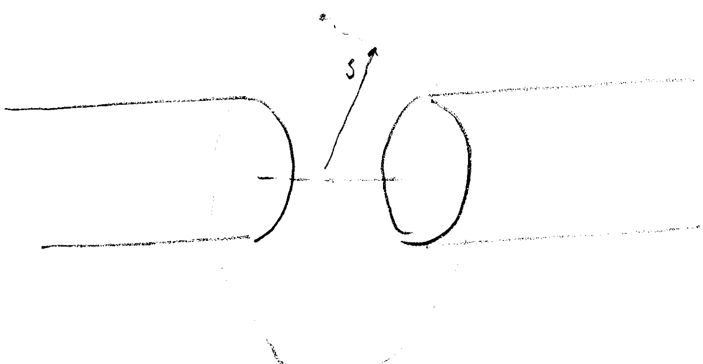
(campo magnético no interior do gap.

$B_\perp$ é cont?

Observação: Como se comporta $B(s)$ fora do gap? $(s > a)$

$\boxed{\text{Sim } B_\perp = 0}$

Nesse caso



$$B(s)\, 2\pi s = \mu_0 I_d = \mu_0 \pi a^2 \cdot \frac{I(t)}{\pi a^2} = \mu_0 I(t)$$

$$B(s) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi s}$$

Logo: $\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s & (s < a) \\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s} & (s > a) \end{cases}$ cont. $\left(\begin{array}{c}\text{Como } \mu_1 = \mu_2 \\ \Downarrow \\ B^1_{\parallel} = B^2_{\parallel}\end{array}\right)$

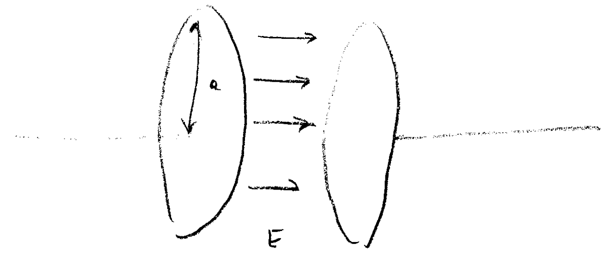
Para $s = a$ $\quad \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$ $\quad s = a^-$ ou $s = a^+$

B varia continuamente (note que não há descontinuidade do meio: $\mu = \mu_0$).

§V)

Problema 7.32

a) Como a carga flui nas placas de forma que a densidade de carga é constante, o problema permanece igual ao anterior.



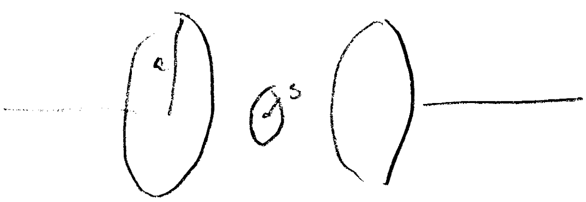
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi a^2} = \frac{I t}{\varepsilon_0 \pi a^2}$$

$\downarrow$

(a corrente é constante)!

b) $B(s)$ no interior do gap.

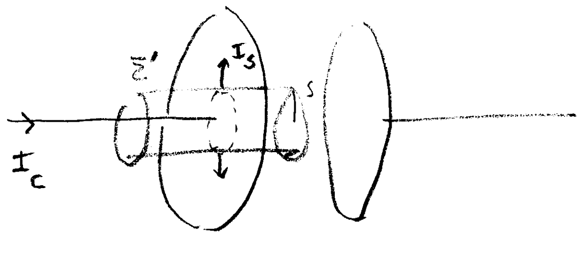
$$j_d = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{\cancel{\varepsilon_0} I}{\cancel{\varepsilon_0} \pi a^2}$$



$$B(s)\, 2\pi \cancel{s} = \mu_0 \frac{I}{\cancel{\pi} a^2} \cdot \cancel{\pi} s^{\cancel{2}}$$

$$B(s) = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}$$

c) Campo magnético nos mesmos pontos mas escolhendo a superfície cilíndrica que termina fora das placas:



Fluxo de corrente através de Σ' tem 2 componentes:

i) a corrente que entra "no campo"

ii) a corrente que sai na superfície do electrodo (ver figura).

i) $I = I_c$ ii) $I = I(s)_{out}$

Então: $$\sigma(t) = \frac{[I_c - I_0(s)]\, t}{\pi s^2}$$

. Como σ é uniforme, é independente de s

$$I_c - I_0(s) \equiv \beta s^2$$

. Para além disso, $I_0(a) = 0 \Rightarrow I_c = \beta a^2 \Rightarrow \beta = \frac{I_c}{a^2}$

Logo $$I_c - I_0(s) = \frac{I_c}{a^2} \cdot s^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_0(s) = I_c \left[1 - \frac{s^2}{a^2} \right]$$

Podemos finalmente fazer as contas:

$$B(s)\, 2\pi s = \mu_0 \left[I_c - I_0(s) \right] = \mu_0 \; I_c \frac{s^2}{a^2}$$

$$B(s) = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2} \qquad \text{(como antes)}.$$

7.34 (*) (skip this at first reading)

$$E(\vec{r},t) = - \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \theta(vt - r)\, \hat{r}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

- As equações de Maxwell são satisfeitas?
- $\vec{J}$ e ρ?

Vejamos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \cdot \left[\underbrace{\frac{\hat{r}}{r^2}}_{\vec{A}} \underbrace{\theta(vt - r)}_{f} \right]$$

Mas,

$$\nabla \cdot (f \vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \nabla f \cdot \vec{A} \qquad \text{(check this)}$$

Então:

$$\nabla \cdot \vec{E} = - \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \theta(vt - r) + \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \nabla \left[\theta(vt - r) \right] \right]$$

(*)

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

Admito que $r \neq 0$; então $\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \Rightarrow$

$$\rightarrow \nabla\cdot\left[\frac{x\,\hat{x} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] +$$

$$+ \dots + \dots = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\,\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot\cancel{2}x}{(x^2+y^2+z^2)^3} +$$

$$+ \dots + \dots = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\Big[\left[x^2+y^2+z^2-3x^2\right] + \left[x^2+y^2+z^2-3y^2\right] + \left[x^2+y^2+z^2-3z^2\right]\Big] = 0$$

<u>MAS</u> $\frac{\hat{r}}{r^2}$ é singular em $r=0$!

<u>E</u> o fluxo de $\frac{\vec{r}}{r^3}$ através de uma superfície esférica de raio R é diferente de zero:

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\hat{r}}{\cancel{r^2}}\,\cancel{r^2}\sin\theta\,d\theta\,d\phi\right)\cdot\hat{r}) = 4\pi \neq 0$$

Logo $\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$ é zero em todo o lado mas o fluxo de $\frac{\hat{r}}{r^2}$ através de uma qualquer superfície fechada que englobe a origem é $\neq 0$. Que significa isto?

Usando o teorema de Gauss

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)\cdot\hat{r}\ r^2\sin\theta\, d\phi = 4\pi = \iiint \nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta(\vec{r})}$$

Então:
de (*)

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[4\pi\,\delta(\vec{r})\,\theta(vt-r) + \frac{(\hat{r}\cdot\hat{r})}{r^2}\underbrace{\partial_r\left(\theta(vt-r)\right)}_{-\delta(vt-r)}\right]$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r})\,\theta(vt) + \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\delta(vt-r)}_{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}}$$

- $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ o.k
- $\nabla\times\vec{E} = 0$ (campo radial)
- $\nabla\times\vec{B} = 0 = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = -\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}v\,\delta(vt-\vec{r})\,\hat{r}}$

Problema 7.60 (modificado)

Heaviside Duality:

M.E. no vácuo

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} = 0$$

transformam-se uns nos outros se

$$\vec{E} \to \vec{B}$$

$$\vec{B} \to -\frac{\vec{E}}{c^2}$$

ou, alternativamente:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}' &\to -c\vec{B}' \\ \vec{B}' &= \frac{\vec{E}}{c} \end{aligned}} \qquad (**)$$

Podemos definir uma transformação contínua (Larmor):

$$\begin{bmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\eta & \sin\eta \\ -\sin\eta & \cos\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E}\cos\eta + c\vec{B}\sin\eta \\ c\vec{B}' = -\sin\eta\,\vec{E} + c\vec{B}\cos\eta \end{cases} \qquad \left((**) \Leftrightarrow \eta = -\frac{\pi}{2} \right)$$

x)

a) Mostre que as equações de Maxwell no vazio são invariantes sob esta transformação (Heaviside-Larmor)

$$(1) \quad \nabla \times \vec{E}' = -\dot{\vec{B}}' \qquad \nabla \cdot \vec{E}' = 0$$

$$(2) \quad \nabla \times \vec{B}' = + \frac{\dot{\vec{E}}'}{c^2} \qquad \nabla \cdot \vec{B}' = 0$$

$\downarrow$

(obviamente verificadas)

$$\nabla \times \vec{E}' = (\nabla \times \vec{E}) \cos\eta + c(\nabla \times \vec{B}) \sin\eta \overset{?}{\equiv} -\dot{\vec{B}}' \ ?$$

$$c\, \nabla \times \vec{B}' = -\sin\eta\, (\nabla \times \vec{E}) + c \cos\eta\, (\nabla \times \vec{B}) \overset{?}{\equiv} \frac{1}{c} \dot{\vec{E}}' \ ?$$

$$-\dot{\vec{B}}' = + \sin\eta\, \frac{\dot{\vec{E}}}{c} - \dot{\vec{B}} \cos\eta$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \\ c\,(\nabla \times \vec{B}) = \dfrac{\dot{\vec{E}}}{c} \end{cases} \qquad \text{o.k.}$$

b) Considere as equações de Maxwell generalizadas para incluir cargas magnéticas. Mostre que estas equações permanecem invariantes sob a transformação de H-L., se as cargas se transformarem convenientemente:

Isto é:

$$\left|\begin{array}{l} \vec{E}' = \vec{E}\cos\eta + c\vec{B}\sin\eta \\ c\vec{B}' = c\vec{B}\cos\eta - E\sin\eta \\ c q_e' = c q_e \cos\eta + q_m \sin\eta \\ q_m' = q_m \cos\eta - c q_e \sin\alpha \end{array}\right.$$

c) Mostre que a força de Lorentz "generalizada" é tb invariante sob esta transformação contínua

$$\vec{F} = q_e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) + q_m\left(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right)$$

As eq. Maxwell generalizadas:

i) $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e$ iii) $\nabla\times\vec{E} = -\mu_0 \vec{j}_m - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

ii) $\nabla\cdot\vec{B} = \mu_0 \rho_{mag}$ iv) $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_e + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\nabla\cdot\vec{E}' = \nabla\cdot\vec{E}\cos\eta + c\,\nabla\cdot\vec{B}\sin\eta = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e\cos\eta + c\mu_0\rho_{mag}\sin\eta \overset{?}{\equiv}$$

$$\overset{?}{\equiv} \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e' = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e\cos\eta + \frac{\rho_m}{\varepsilon_0 c}\sin\eta \qquad \text{O.K}$$

etc