Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Complexa

LFis /MIEFis
19/07/2017
Época Especial

Todas as respostas deverão ser convenientemente justificadas. Duração: 2h30m

1. Seja $z \in \mathbb{C}$. Determine todas as raízes e respetivas multiplicidades da equação $z^4 - iz^2 = 0$.

2. Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $\mathrm{Re} f(z)$ é constante. Mostre que $f(z)$ é constante.

3. Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $f(z) = \bar{z}\mathrm{Im} z$. Determine, caso existam, os pontos onde f é diferenciável. Existem pontos onde f é analítica?

4. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$, onde $f(z) = z\bar{z}$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

5. Determine o raio de convergência e a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

6. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$, onde $f(z) = \dfrac{\cosh z}{z^3 + z}$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = \frac{3}{2}\}$.

7. Determine a série de Laurent da função $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 + 1}$ no anel $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z + i| < 2\}$.

8. Calcule o integral real $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + 1)} dx$.

9. Determine a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

10. Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, onde $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, uma função analítica. Mostre que u é uma função harmónica, isto é, satisfaz a equação de Laplace:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Cotações: Todas as questões estão cotadas para dois valores.