ELECTROMAGNETISMO (Lic. Física)
2012/13

Exame de recurso - 11/Fev/2013

Resolução

1. Resposta <u>C</u>

O campo $\vec{F}$ pode ser expresso por

$$\vec{F} = (a + by)\vec{u}_x$$

o cálculo do rotacional deste campo dá

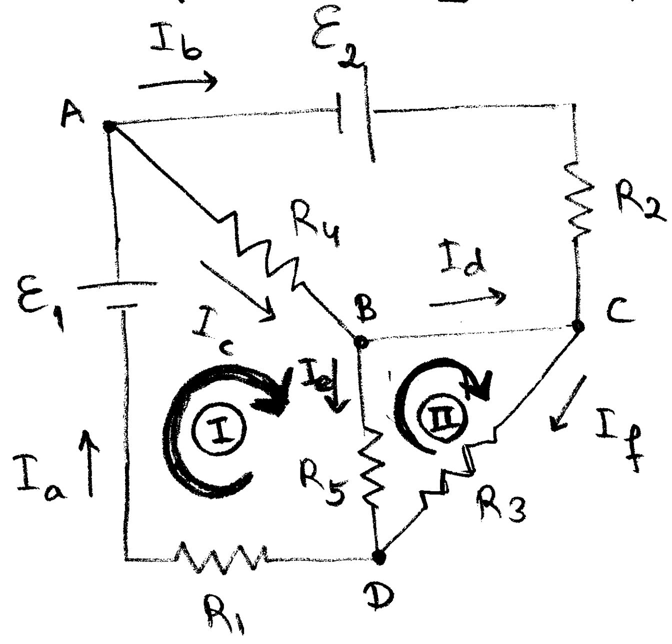
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a+by & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= b\vec{u}_z$$

vemos que $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$, o que significa que o campo não é conservativo e, consequentemente, não pode ser um campo electrostático no vazio nem pode derivar de uma função potencial V através de $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.

A única resposta correcta é a <u>C</u>.

2. Respostas A, B, C e D



A aplicação da 2ª Lei de Kirchhoff ao nó A conduz à equação

$$I_a = I_b + I_c \qquad (1)$$ [Resposta A está correcta]

Aplicando a mesma lei dos nós ao nó B vem

$$I_c = I_d + I_e \qquad (2)$$

Substituindo o valor de I_c dado pela eq. (2) na eq. (1), resulta

$$I_a = I_b + I_d + I_e \qquad (3)$$ [Resposta C está correcta]

A equação da resposta B resulta da aplicação da 1ª lei de Kirchhoff à malha que contem a fonte 1 (malha I na figura):

$$\varepsilon_1 = R_1 I_a + R_4 I_c + R_5 I_e$$

A equação da resposta D resulta da aplicação da Lei das malhas (2ª lei) à malha II assinalada na figura. Uma vez que nesta malha não há fontes de alimentação, a queda de tensão tem que ser igual nas duas resistências

$$R_5 I_e = R_3 I_f$$

Todas as respostas, excepto E, estão correctas.

3. Resposta A

O campo magnético $\vec{B}$ no ponto P pode ser calculado usando o Teorema de Ampère e o princípio de sobreposição. A aplicação do T. Ampère ao fio A conduz a

$$\oint_{[C]} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_A$$

Escolhendo uma circunferência centrada em A para o cálculo da circulação de $\vec{B}$ vem

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

onde $\underline{r}$ é a distância do ponto $\underline{P}$ ao fio, medida no plano do quadrado $\left(r = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2}\right)$

Sabe-se ainda, pela lei de Biot-Savart, que este campo é tangente à curva [C] no ponto P e tem o sentido contrário ao sentido de rotação dos ponteiros do relógio.

O cálculo de $\vec{B}$ devido ao fio $\underline{D}$ conduz exactamente ao mesmo resultado, porque a corrente é igual em intensidade e tem o mesmo sentido e $\underline{P}$ se encontra também à mesma distância.

Usando o mesmo raciocínio para os fios $\underline{B}$ e $\underline{C}$ conclui-se que o campo $\vec{B}$ devido a estes é exactamente igual em módulo, mas de sentido oposto, ao campo devido aos fios $\underline{A}$ e $\underline{D}$. A sobreposição dos campos devido aos quatro fios dá um resultado nulo.

4. Respostas B e C

A resistência (R) a bobina (de indutância L) e o condensador (de capacidade C) estão em série.

A impedância total do circuito é, por isso, igual à soma das impedâncias:

$$\bar{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$
$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

o módulo da impedância vem:

$$|\bar{Z}| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}$$

A resposta B está correcta e a resposta A está incorrecta.

A corrente no circuito é dada por

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}}$$

onde $\bar{V}$ é a tensão fornecida pela fonte.

ou seja

$$\bar{I} = \frac{V_o}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{V_o}{|\bar{Z}|\, e^{j\phi}}$$

onde $\phi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

- A tensão da resistência é dada por

$$\bar{V}_R = R\,\bar{I} = R\,\frac{V_0}{|\bar{Z}|}\,e^{-j\phi}$$

donde se conclui que a corrente e a tensão na resistência estão em fase.

- A tensão na bobina é dada por

$$\bar{V}_L = \bar{Z}_L\,\bar{I} = j\omega L\,\frac{V_0}{|\bar{Z}|}\,e^{-j\phi} = \frac{V_0\omega L}{|\bar{Z}|}\,e^{-j(\phi-\frac{\pi}{2})}$$

donde se conclui que a corrente e a tensão na bobina estão desfasadas.

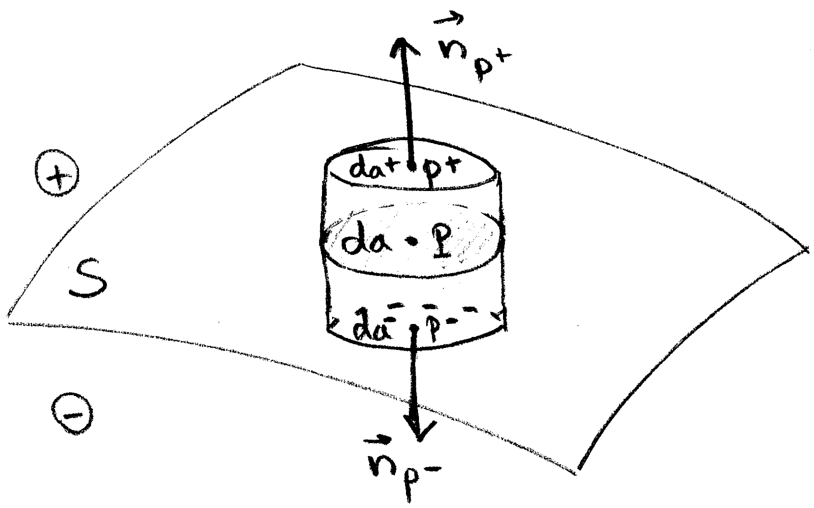
- A tensão no condensador é dada por

$$\bar{V}_C = \bar{Z}_C\,\bar{I} = -j\,\frac{1}{\omega C}\,\frac{V_0}{|\bar{Z}|}\,e^{-j\phi} = \frac{V_0}{|\bar{Z}|\omega C}\,e^{-j(\phi+\frac{\pi}{2})}$$

donde se conclui que a corrente e a tensão no condensador estão desfasadas.

5.

a) Consideremos um elemento de superfície carregada da da circunvizinho do ponto P. Tomando o contorno de da como directriz, consideremos um cilindro elementar de geratrizes paralelas à normal em P e com bases paralelas ao plano tangente (no ponto P), como se mostra na figura



Suponhamos que a altura do cilindro é um infinitésimo de ordem superior relativamente a qualquer dimensão linear das bases, isto é, que a área lateral é muito menor que a área das bases.

Aplicando o Teorema de Gauss a este cilindro elementar, vem

$$\vec{E}(P^+)\cdot\vec{n}_{P^+}\cdot da^+ + \vec{E}(P^-)\cdot\vec{n}_{P^-}\cdot da^- = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(P)\,da$$

(o fluxo do campo através da superfície lateral é desprezável) onde: $\vec{E}(P^+)$ e $\vec{E}(P^-)$ são os campos eléctricos nos pontos P^+ e P^-, respectivamente

$\sigma(P)$ é a densidade de carga no ponto P.

$\vec{n}_{P^+}$ e $\vec{n}_{P^-}$ são os vectores unitários normais às superfícies da^+ e da^-, respectivamente.

Como $da^+ = da^- = da$ e $\vec{n}_P = \vec{n}_{P^+} = -\vec{n}_{P^-}$,

vem

$$\left[\vec{E}(P^+) - \vec{E}(P^-)\right] \cdot \vec{n}_P = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(P)$$

No limite em que o cilindro se contrai sobre o ponto P, $\vec{E}(P^+) \to \vec{E}_P^+$ e $\vec{E}(P^-) \to \vec{E}_P^-$,

vem

$$\left(\vec{E}_P^+ - \vec{E}_P^-\right) \cdot \vec{n}_P = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(P)$$

Concluímos, assim, que a componente normal do campo eléctrico sofre uma descontinuidade quando o observador atravessa a superfície <u>S</u> carregada e que o valor local dessa descontinuidade vale σ/ε_0.

b) Sabe-se que o campo eléctrico no interior da superfície esférica é nulo.

Sabemos também que, ao atravessar a superfície esférica uniformemente carregada, a componente normal do campo sofre uma descontinuidade que vale

$$\Delta E_{\perp} = \sigma/\varepsilon_0$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

e a componente paralela do campo é contínua

$$\Delta E_{\parallel} = 0$$

Resulta daqui que no exterior da esfera o campo só pode ser normal à superfície (pois $\vec{E}^- = 0$ no interior) e é tal que

$$E^+ - E^- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}^+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

c) No vazio, onde está estabelecido o campo eléctrico $\vec{E}$, a energia electrostática é dada por

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\Omega} E^2 \, dv$$

sendo o integral de volume estendido a todo o espaço.

Neste caso que estamos a estudar tem-se

$$E = 0 \,, \qquad r < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \,, \qquad r > R$$

vem então

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E^2 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

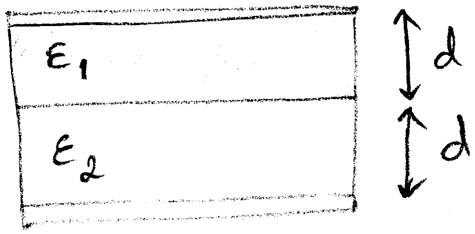
(uma vez que $E = 0$ para $r < R$)

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{4\pi}{r^2}\, dr$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty$$

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

6. a)



A capacidade de um condensador de placas paralelas, preenchido com um dieléctrico de constante dieléctrica relativa ε_r, é dada por

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

onde <u>A</u> é a área de cada uma das placas e <u>d</u> a distância entre elas.

No caso apresentado o condensador está preenchido com dois dieléctricos em série. A capacidade do condensador é igual à capacidade equivalente de dois condensadores de placas paralelas em série, um de capacidade

$$C_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

e outro de capacidade

$$C_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

vem então

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$= \frac{d}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 A} + \frac{d}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 A}$$

$$= \frac{d(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 A}$$

$$C = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Utilizando os valores $\varepsilon_1 = 3{,}0$, $\varepsilon_2 = 6{,}0$, $A = 10 \text{ cm}^2 = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $d = 2{,}5 \text{ mm} = 2{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}$, vem

$$C = \frac{3{,}0 \times 6{,}0}{3{,}0 + 6{,}0} \varepsilon_0 \frac{1 \times 10^{-3}}{2{,}5 \times 10^{-3}}$$

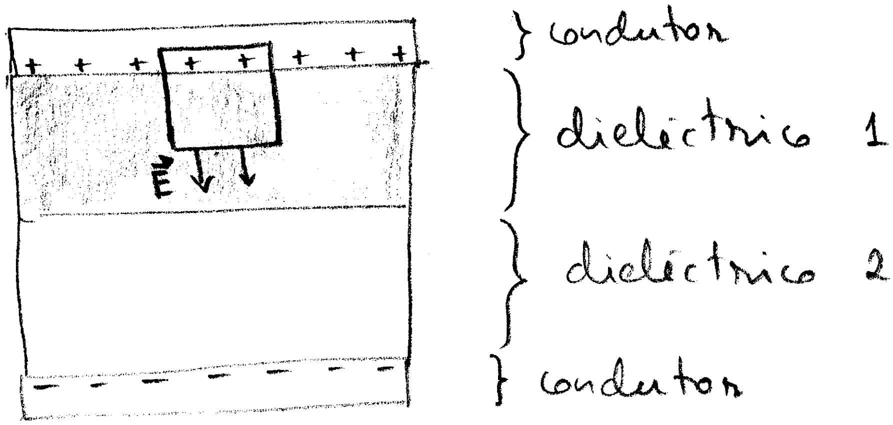
$$= 2{,}0\, \varepsilon_0 \times 0{,}4$$

$$= 0{,}8\, \varepsilon_0$$

$$= 0{,}8 \times 8{,}85 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$\simeq 6{,}5 \times 10^{-11} \text{ F}$$

b)



As cargas nas placas condutoras acumulam-se nas superfícies viradas para o interior do condensador.
O campo no interior das placas é necessariamente nulo, pois estas são feitas de um material condutor.

O campo no interior de cada um dos dieléctricos pode ser determinado recorrendo ao Teorema de Gauss da electrostática.
Consideremos como superfície fechada gaussiana um cilindro com bases paralelas às placas, estando uma das bases no interior da placa condutora e a outra no interio do dieléctrico 1, como se mostra na figura acima.
O fluxo do vector deslocamento eléctrico ($\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$) através desta superfície fechada $\underline{S}$ é, pelo T. Gauss

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,da = q$$

onde q é a carga (verdadeira) que se encontra no interior de S.

Neste caso tem-se

$\vec{D} = 0$ na base superior
(por ser $\vec{E} = 0$ no interior
do condutor)

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}$ na base inferior

Por outro lado $\vec{D}$ é sempre normal à superfície lateral da superfície cilíndrica (porque $\vec{E}$ é um campo uniforme normal às placas do condensador).

Resulta então que o fluxo de $\vec{D}$ através de S é simplesmente igual ao fluxo de $\vec{D}$ através da base inferior. Como $\vec{D}$ toma o mesmo valor sobre todos os pontos da base (porque $\vec{E}$ é uniforme), vem

$$D \cdot a = q$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E a = \sigma a$$

onde $\underline{a}$ é a área da base e $\sigma = \frac{Q}{A}$ é a densidade de carga superficial na placa.

O campo eléctrico na região onde se encontra o dieléctrico 1 é, então, dado por

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 A}$$

$$= \frac{1 \times 10^{-5}}{\varepsilon_0 \times 3{,}0 \times 10 \times 10^{-4}}$$

$$= \frac{10^{-2}}{3\varepsilon_0} = 3{,}8 \times 10^{8} \text{ V/m}$$

Fazendo um raciocínio análogo em relação aos pontos interiores ao dieléctrico 2, resulta

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 A}$$

$$= \frac{1 \times 10^{-5}}{\varepsilon_0 \times 6{,}0 \times 10 \times 10^{-4}}$$

$$= \frac{10^{-2}}{6\varepsilon_0} = 1{,}9 \times 10^{8} \text{ V/m}$$

c) Estando a tensão aplicada às placas do condensador a variar no tempo a uma taxa constante de 3,0 V/s, então o campo eléctrico no interior do condensador varia no tempo a uma taxa de

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2d}\frac{dV}{dt} \qquad (\text{pois } \vec{E} = -\vec{\nabla}V)$$

$$= \frac{1}{5\times10^{-3}} \times 3{,}0 = \frac{3}{5}\times10^{3} \ \mathrm{Vm^{-1}s^{-1}}$$

Utilizando a lei de Maxwell (na forma integral)

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = i + \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, da\right]$$

podemos calcular o campo magnético induzido pelo campo eléctrico variável.

Comecemos por fazer o cálculo relativamente à região onde se encontra o dieléctrico 1.

Tem-se

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0\varepsilon_1\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, da\right]$$

Nesta região não existe corrente de condução ($\mu_0 i = 0$), resultando

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0\varepsilon_1\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, da\right]$$

Consideremos para o cálculo da circulação de $\vec{B}$ uma circunferência centrada no eixo que une os centros das duas armaduras circulares e de raio $r = 1$ cm.

Para o cálculo do fluxo do campo eléctrico através de uma superfície assente sobre a referida circunferência, consideremos a superfície plana circular de raio $r = 1$ cm.

A simetria do problema, que advém das linhas de campo eléctrico preencherem uma região cilíndrica entre as placas, permite concluir que $\vec{B}$ é tangente em cada ponto a circunferências centradas no eixo que une as placas do condensador e é constante em módulo sobre cada uma dessas circunferências $(\vec{B} = B\vec{u}_\phi)$.

A equação de Maxwell anteriormente escrita toma então a forma

$$2\pi r B = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[E \cdot \pi r^2\right]$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \pi r^2 \frac{1}{2d} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$B = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 r}{4d} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$= \frac{\varepsilon_0\, 3{,}0 \cdot \mu_0 \times 1\times 10^{-2}}{10\times 10^{-3}} \times 3{,}0 = 9\,\varepsilon_0 \mu_0$$

$$= 1\times 10^{-16}\ \mathrm{T}$$

Fazendo um raciocínio análogo relativamente a um ponto, à mesma distância do eixo central, mas na região do dieléctrico 2, resulta

$$B = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \mu_0 r}{4d} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \times 6{,}0 \times \mu_0 \times 1 \times 10^{-2}}{10 \times 10^{-3}} \times 3$$

$$= 18\, \varepsilon_0 \mu_0$$

$$= 2 \times 10^{-16} \ \mathrm{T}$$

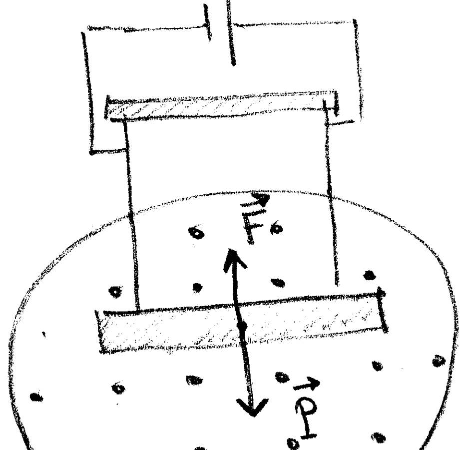
7. a) Para que a tensão mecânica nos fios verticais seja nula é necessário que a força magnética

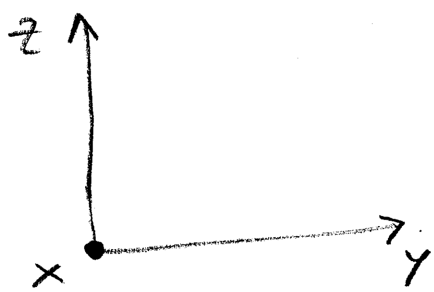
$$\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}$$

, I = intensidade de corrente que percorre a barra

seja igual e de sinal oposto ao peso da barra ($\vec{P}$)

$\vec{F}$ tem pois que apontar para cima, como se ilustra na figura.





consideremos o sistema de eixos mostrado na figura acima (o eixo dos xx é normal à folha de papel e aponta para fora).

Para que $\vec{F}$ aponte para cima ($\vec{F} = F\vec{u}_z$) é necessário que a corrente se dirija para a esquerda ($I\vec{l} = -Il\,\vec{u}_y$).

vem então

$$\vec{F} = -I\,l\,\vec{u}_y \times B\,\vec{u}_x$$
$$= I\,l\,B\,\vec{u}_z$$

No equilíbrio, como vimos atrás $(F = P)$

$$I\,l\,B = P$$

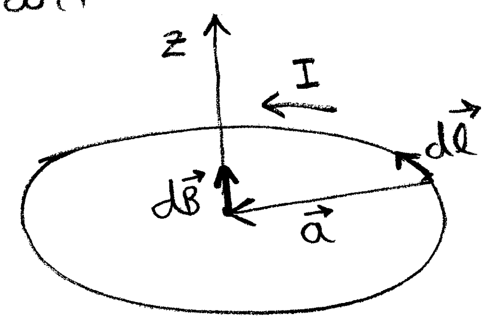
$$I = \frac{P}{l\,B}$$

b) Quando se faz descer a barra e todo o circuito com velocidade constante não há qualquer força de inércia a actuar sobre a barra (porque a velocidade é constante), mas aparece uma f.e.m. adicional no circuito devido à variação no tempo do fluxo de $\vec{B}$ através do circuito. De facto, apesar de $\vec{B}$ permanecer constante, varia a área (A) através do qual existe fluxo de $\vec{B}$, resultando uma f.e.m. ($\mathcal{E}$) induzida que é dada pela Lei de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -B\frac{dA}{dt}$$

Aparece, assim, uma corrente induzida, que se sobrepõe com a corrente pré-existente I. Consequentemente a força magnética $\vec{F}$ altera-se, deixando de se verificar a condição de equilíbrio $F = P$. A tensão mecânica nos fios deixará de ser nula.

8\. a) Consideremos uma espira circular de raio $\underline{a}$ percorrida por uma corrente contínua de intensidade I.
O campo magnético $\underline{d\vec{B}}$, no centro da espira, devido ao elemento de fio $\underline{d\vec{l}}$ é, pela lei de Biot-Savart



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{a}}{a^3}$$

Como $d\vec{l}$ é, para qualquer ponto sobre a espira, perpendicular a $\underline{\vec{a}}$, tem-se que em módulo

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\, dl}{a^3}$$

e $\underline{dB}$ é normal à espira e aponta para cima (pela regra da mão direita).
Integrando sobre toda a espira

$$B = \int_0^{2\pi a} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{a^2} dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi a}{4\pi a^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{u}_z$$

b) Uma vez que se trata de uma bobina muito comprida, o campo magnético no seu interior é aproximadamente uniforme, paralelo ao eixo da bobina e vale

$$B = \mu_0 n i \quad , \quad n \equiv \text{densidade de espiras}$$

O fluxo de $\vec{B}$ através da espira está relacionado com a corrente na bobina $\underline{i}$ através do coeficiente de indutância mútua, M :

$$\phi = M i$$

A f.e.m. induzida na espira é dada pela lei de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -M\frac{di}{dt} \qquad (1)$$

Por outro lado $\phi = B \cdot A$, onde $A = \pi a^2$ é a área da espira; logo

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(B\pi a^2)$$

$$= -\pi a^2 \frac{dB}{dt} = -\pi a^2 \frac{d}{dt}(\mu_0 n i)$$

$$= -\pi a^2 \mu_0 n \frac{di}{dt} \qquad (2)$$

combinando as expressões (1) e (2) vem

$$-M\frac{di}{dt} = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{di}{dt}$$

$$M = \mu_0 n \pi a^2$$