1º teste de Cálculo para Ciências

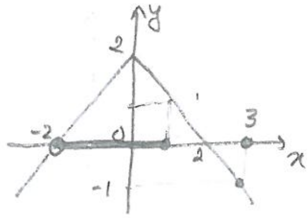
Correção 24/11/2021

1 Teste A

$f^{-1}([-4,1[) = \{x\in\mathbb{R} : -4 \leq 2-|x| < 1\} = [-6,-1[\, \cup\,]1,6]$

C. A. $-4 \leq 2-|x|<1 \Leftrightarrow |x|\leq 6 \wedge |x|>1 \Leftrightarrow x\in[-6,6]\cap(]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[)$

$f(]-2,1]\cup\{3\}) = \{f(x) : x\in\,]-2,1[\,\cup\{3\}\} = [0,2]\cup\{-1\}$, olhando para o esboço do gráfico



Teste B

$f^{-1}([-5,2[) =]-8,-1]\cup[1,8[$

$f(\{-4\}\cup]1,3]) = \{-1\}\cup[0,2[$

2 Teste B

$x^2\geq 4 \Leftrightarrow x\leq -2 \vee x\geq 2$ $\qquad |x|\leq\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$

$A=[2,+\infty[\ \cup\left([-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\right)$

$\{$majorantes de $A\}=\emptyset$, sup A não existe

$\{$minorantes de $A\} =]-\infty,-\sqrt{2}]$, $\inf A = -\sqrt{2}$. Como $-\sqrt{2}\in A$ então $\min A = -\sqrt{2}$

Teste A

$A=([-2,2]\cap\mathbb{Q})\cup[3,+\infty[$

$\{$majorantes de $A\}=\emptyset$, sup A não existe

$\{$minorantes de $A\} =]-\infty,-2]$, $\min A=-2$

3 Teste A

a) $\lim\limits_{x\to0^+}(1-\cos x)^x = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\ln(1-\cos x)^x} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln(1-\cos x)} = e^0 = 1$

C. A. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{+\infty} \underset{R.H}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\operatorname{sen}x}{\cos x-1} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{RH}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\operatorname{sen}x + x^2\cos x}{-\operatorname{sen}x} = \lim\limits_{x\to0^+}\left(-2x+\dfrac{x^2\cos x}{-\operatorname{sen}x}\right)$

$\underset{RH}{=} 0 + \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\cos x - x^2\operatorname{sen}x}{-\cos x} = 0+\dfrac{0}{-1}=0$

(pois $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\cos x}{-\operatorname{sen}x} = \dfrac{0}{0}$) $\to$ RH

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{x-\pi/2}\right)(=\infty-\infty) = \lim\limits_{x\to\pi/2^-}\dfrac{x-\pi/2-\cos x}{(x-\pi/2)\cos x} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{R.H.}{=}\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x-(x-\pi/2)\operatorname{sen}x} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

Teste B

a) $\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x-\pi}\right)=+\infty$ b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\operatorname{sen} x)^{x-\pi/2}=e^0=1$

④ Teste B

a) f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, por ser definida usando funções exponenciais, polinomiais e trigonométricas

f é contínua em $x=0$ porque

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -x=0=f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\cos x$$

Para que f seja contínua em $x=-1$, é necessário (e suficiente) que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} ae^{-3x}=ae^3=f(-1)=1=\lim_{x\to -1^+} -x$$

Então, f é contínua em $\mathbb{R}$ se e só se $ae^3=1$, ou seja, $a=e^{-3}$

b) $f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-0}{\cancel{x}}=1$

$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x}=-1$

Como $f'(0^+)\neq f'(0^-)$, f não é derivável em $x=0$

Teste A a) $a=e^{-2}$

b) $f'(0^+)=1$

$f'(0^-)=0$

c) $x\operatorname{sen} x=0 \wedge x<0$

$\Leftrightarrow x=k\pi,\ -k\in\mathbb{N}$

c) A função $f|_{]0,+\infty[}$ é derivável e

$f(x)=0 \Leftrightarrow x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{N}_0$

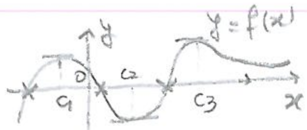
$f|_{[\pi/2+k\pi,\ \pi/2+(k+1)\pi]}:[\pi/2+k\pi,\ \pi/2+(k+1)\pi]$ é contínua no seu domínio e derivável no intervalo aberto. Para além disso, $f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0=f\left(\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$. Então, aplicando o Teorema de Rolle,

$$\exists c_k\in\left]\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[\quad f'(c_k)=0,$$

concluindo-se que f' se anula uma infinidade de vezes

⑤ Teste A

a)



Os zeros de f estão assinalados com x
Os zeros de f' são os pontos c_1, c_2, c_3, onde a tangente ao gráfico de f é horizontal

b) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\geq 0\\ -1 & \text{se } x<0\end{cases}$, $g=f$ são funções descontínuas e $(g-f)(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, é contínua

Teste B

a) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\geq 0\\ -1 & \text{se } x<0\end{cases}$ $g=-f$

b)

(6) Teste A = Teste B

Seja $h: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. A função h é contínua, por ser
$x \longmapsto f(x) - 3x$
a diferença de duas funções contínuas.

Se $f(0) = 0$ então $f(0) = 3 . 0$ e basta tomar $x_0 = 0$

Se $f(1) = 3$ então $f(1) = 3 . 1$ e basta tomar $x_0 = 1$

Se $f(0) > 0$ e $f(3) < 3$, então $h(0) = f(0) > 0$ e $h(3) = f(3) - 3 < 0$.

Então $h(0)h(1) < 0$ e, aplicando o Teorema de Bolzano,

$$\exists x_0 \in]0,1[\quad h(x_0) = 0,$$

ou seja,

$$\exists x_0 \in]0,1[\quad f(x_0) = 3x_0 .$$