2. ANÁLISE DE FOURIER DE SINAIS CONTÍNUOS

2.1. Resposta de um sistema LIT a exponenciais complexas

Função própria de um sistema LIT - sinal que tem como resposta ele próprio, a menos de uma constante multiplicativa.

Valor próprio de uma função própria - é a constante multiplicativa.

Exemplo: a exponencial complexa

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{\text{L I T}} \longrightarrow y(t) = H(s).e^{st}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}.H(s)$$

Interesse das funções próprias e dos valores próprios:

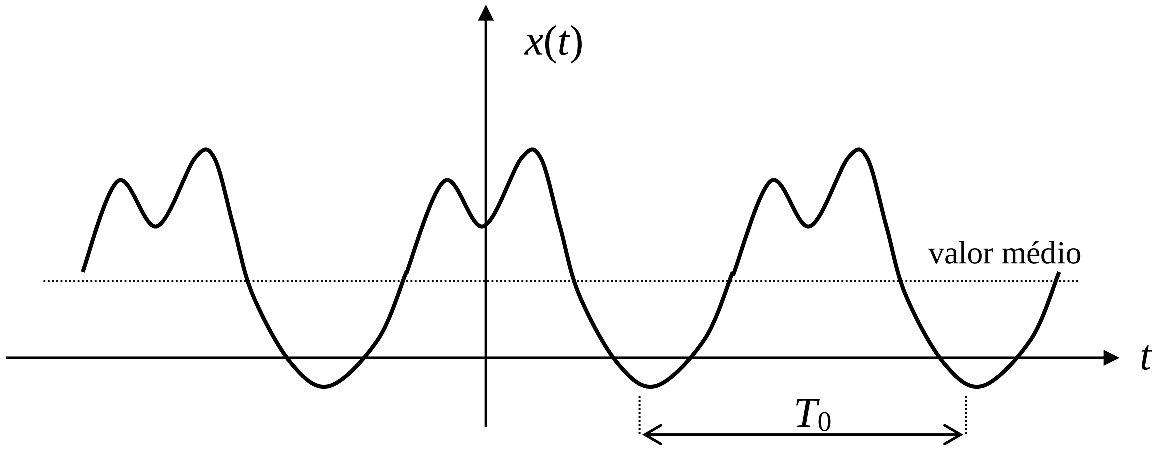
A resposta de um sistema LIT é facilmente determinada quando:

- A entrada é uma função própria
- A entrada é uma combinação linear de funções próprias (existem muitos sinais nestas condições)

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \qquad\qquad y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

2.2. *Representação de um sinal periódico pelas séries de Fourier*

Representação de um sinal periódico $x(t)$ de período T_0 através da combinação linear de exponenciais complexas relacionadas harmonicamente:



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$ é a freq. fundamental do sinal

$x(t)$ pode ser decomposto na forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (k \in Z) \qquad \text{(série de Fourier)}$$

$$x(t) = \underbrace{\cdots + a_{-3}e^{-j3\omega_0 t} + a_{-2}e^{-j2\omega_0 t}}_{\text{harmónicos}} + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \underbrace{a_2 e^{j2\omega_0 t} + a_3 e^{j3\omega_0 t} + \cdots}_{\text{harmónicos}}$$

comp. DC

comp. fundamental

a_k - são os chamados *coeficientes de Fourier* ou *coeficientes espectrais*

Estes coeficientes têm valores bem definidos para cada forma de onda específica.

<u>Exemplo 1:</u> $x(t) = 7 + 8\cos(\omega_0 t)$

$$x(t) = 7 + 8\,\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = 4e^{-j\omega_0 t} + 7 + 4e^{j\omega_0 t}$$

$$\text{Portanto} \quad x(t) = \sum_{k=-1}^{+1} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a_{-1} = 4 \\ a_0 = 7 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

Pode-se provar que os coeficientes a_k são dados pela expressão

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

Vamos confirmar a validade desta expressão, para o exemplo anterior:

$$a_{-1} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \big(7 + 8\cos(\omega_0 t)\big)\cdot e^{j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \big(7 + 8\cos(\omega_0 t)\big)\cdot\big(\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)\big)\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\underbrace{\int_0^{T_0} 7\cancel{\cos(\omega_0 t)}\,dt}_{0} + \underbrace{\int_0^{T_0} 7\cancel{j\sin(\omega_0 t)}\,dt}_{0} + \int_0^{T_0} 8\cos^2(\omega_0 t)\,dt + \int_0^{T_0} 8j\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$\text{Como} \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad \text{e} \quad \cos(\alpha).\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_0} 4 + 4\cos(2\omega_0 t)\,dt + \underbrace{4j\int_0^{T_0} \cancel{\sin(2\omega_0 t)}\,dt}_{0}\right]$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_0} 4\,dt + \underbrace{\int_0^{T_0} \cancel{4\cos(2\omega_0 t)}\,dt}_{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{T_0}\cdot 4T_0 = 4$$

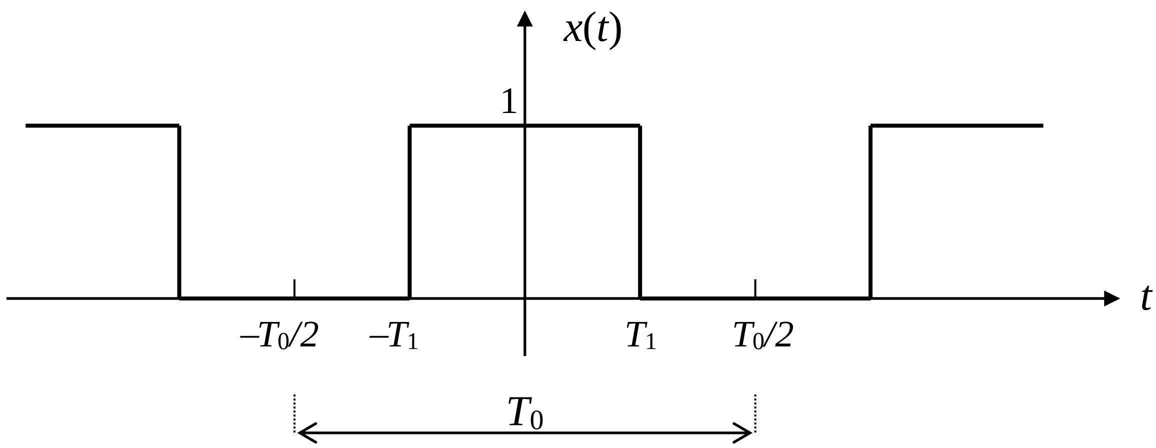
$$= 4$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, dt \quad \rightarrow \underline{\text{ valor médio }} \quad \text{ou} \quad \underline{\text{componente DC}}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} 7 + 8\cos(\omega_0 t)\, dt = 7$$

$$a_1 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left(7 + 8\cos(\omega_0 t)\right)\cdot e^{-j\omega_0 t} dt = \quad \cdots \text{ do mesmo modo } \cdots \quad = 4$$

<u>Exemplo 2:</u> Decomposição da onda quadrada



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad\qquad \text{onda quadrada} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 4.T_1$$

Cálculo dos a_k = ?

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} 1\, dt = \frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \cdots = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0}\cdot 2 = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \qquad \text{pois} \quad \omega_0 T_1 = \pi/2$$

Teremos então:

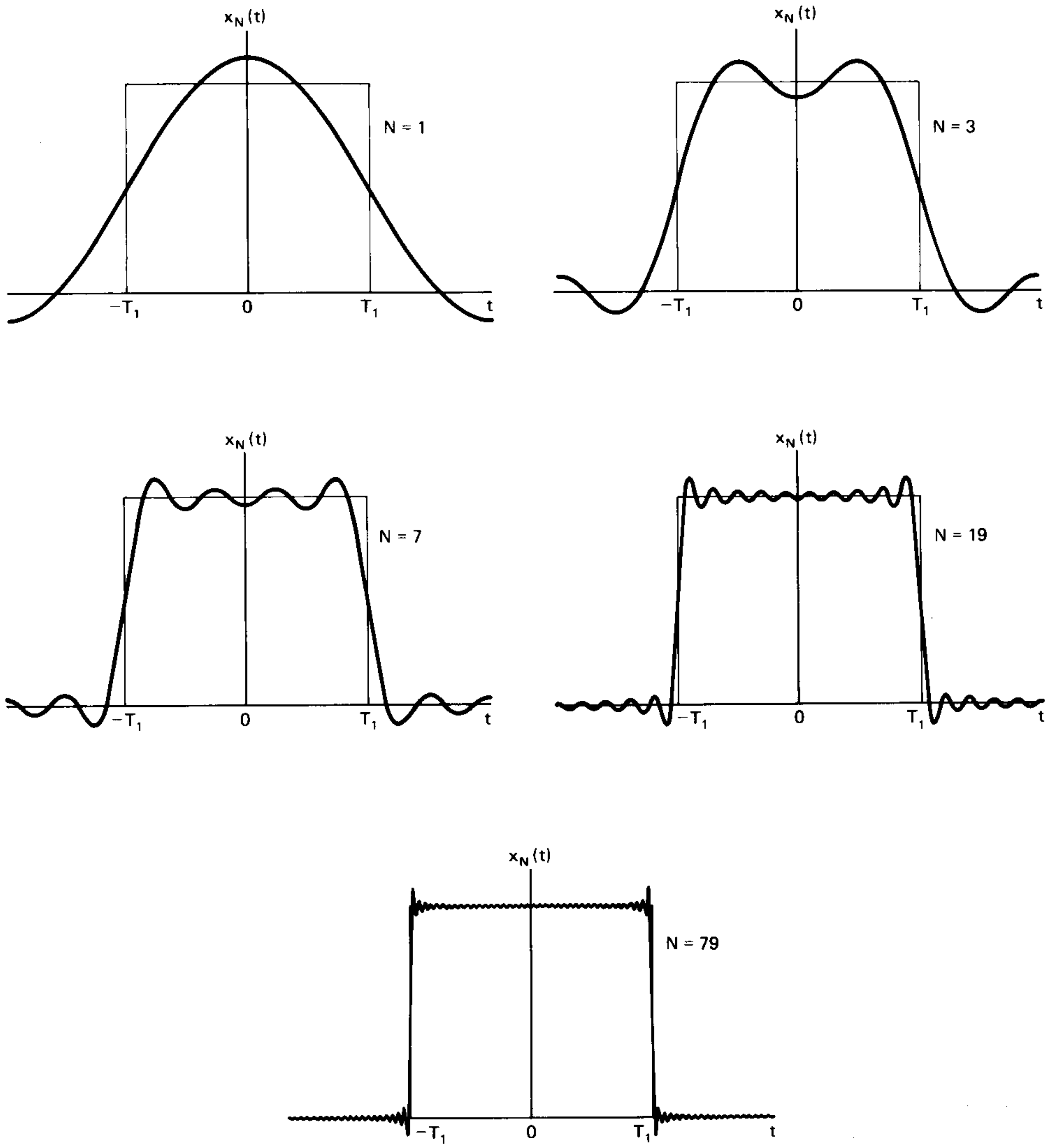
$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_{-3} = a_3 = -\frac{1}{3\pi}$$

$$\vdots$$

$$a_{par} = 0$$



No decorrer do séc. XIX Dirichlet demonstrou que um sinal periódico $x(t)$ que:

1. Seja absolutamente integrável

$$\int_{T_0} |x(t)|\, dt < \infty$$

2. Tenha um nº finito de máximos e mínimos num período

3. Tenha um nº finito de descontinuidades num período

Se pode escrever:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (k \in Z)} \qquad \text{(eq. síntese)}$$

excepto nas descontinuidades de $x(t)$, onde esta série converge para o valor médio dessas descontinuidades.

Os a_k são determinados por:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt} \qquad \text{(eq. análise)}$$

Pode demonstrar-se que sendo $x(t)$ real, então $a_k = a_{-k}^*$ e a série exp. complexa dá origem à série trigonométrica:

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|a_k| \cos\left(k\omega_0 t + \arg(a_k)\right)}$$

Demonstra-se ainda que se:

$$x(-t) = x(t) \quad \text{(sinal par)} \quad \Rightarrow \quad a_k \text{ são reais}$$

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{(sinal impar)} \quad \Rightarrow \quad a_k \text{ são imaginários}$$

<u>Problema:</u>

Determinar os coef. a_k do sinal $x(t) = \sin(\omega_0 t)$

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = -\frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t}$$

$$\text{Temos assim :} \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}; \quad a_1 = \frac{1}{2j}; \quad a_k = 0 \quad k \neq \pm 1;$$

$x(t)$ é real e portanto $a_1 = a_{-1}^*$

$x(t)$ é impar e portanto a_1 e a_{-1} são imaginários puros.

A série trigonométrica terá neste caso apenas um termo:

$$|a_1| = \left|\frac{1}{2j}\right| = \frac{1}{2}; \quad \arg(a_1) = -90^{\text{o}}; \quad a_0 = 0;$$

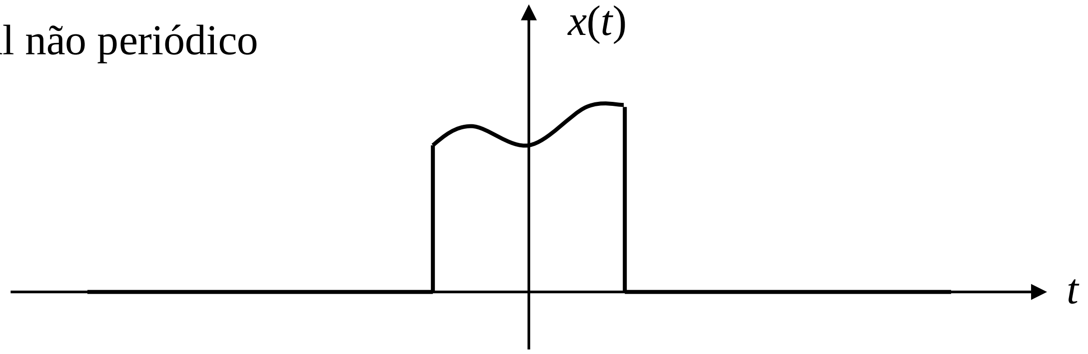
$$x(t) = 0 + 2|a_1|\cos\left(1\omega_0 t + \arg(a_1)\right) = 2\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0 t - 90^{\text{o}}\right) = \sin(\omega_0 t)$$

<u>Problema:</u>

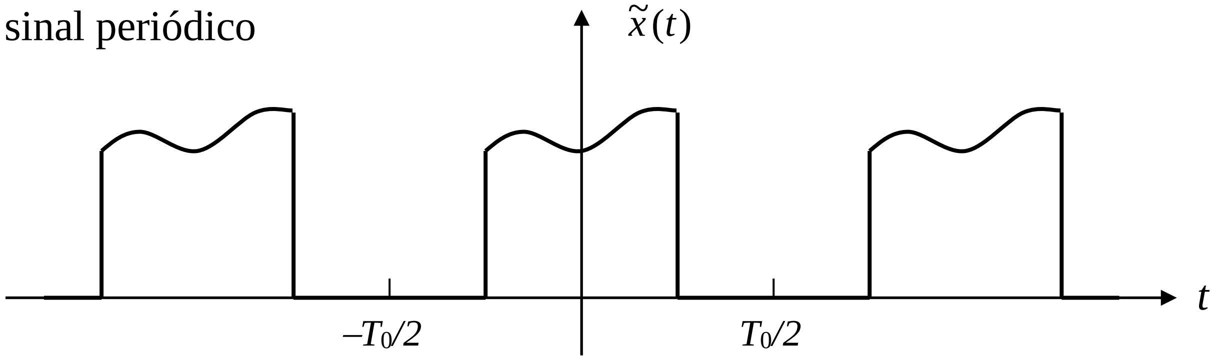
Repetir o problema anterior para o sinal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

2.3. Representação de um sinal não periódico pelo integral de Fourier

$x(t)$ - sinal não periódico



$\tilde{x}(t)$ - sinal periódico



$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (k \in Z)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Definindo $\quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad$ então $\quad \boxed{a_k = \frac{1}{T_0} \cdot X(k\omega_0)}$

Logo:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

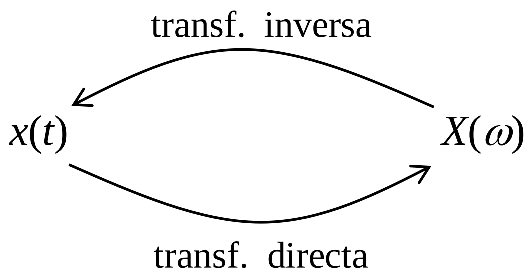
$$\text{Se} \quad T_0 \to \infty \;\Rightarrow\; \begin{cases} \tilde{x}(t) \to x(t) \\ \omega_0 \to 0 \\ \sum \to \int \end{cases}$$

E portanto teremos assim:

Eq. síntese: $$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$ <u>T. Fourier inversa</u>

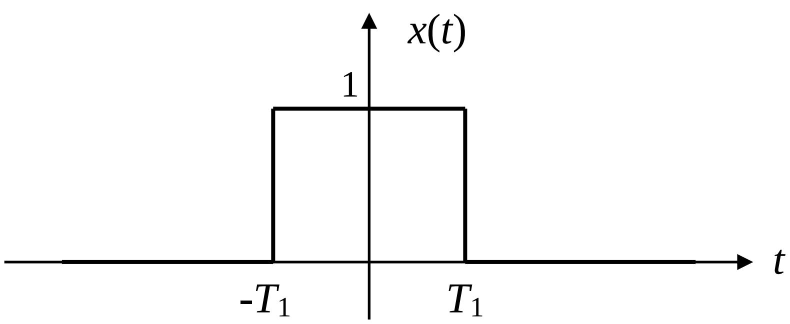
Eq. análise: $$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$ <u>T. Fourier directa</u>

$X(\omega)$ = <u>espectro de $x(t)$</u> (distribuição de x no domínio da frequência)



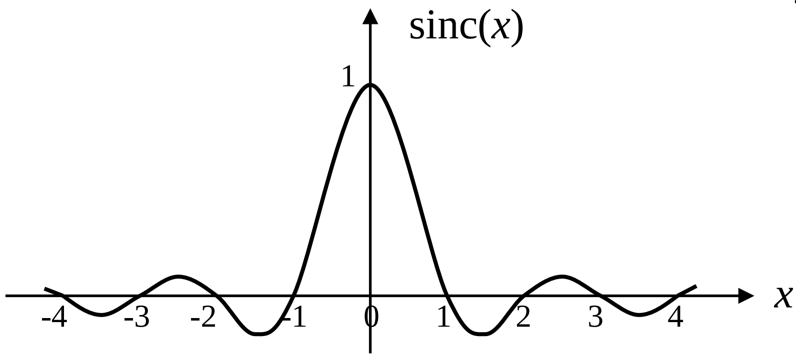
<u>Exemplo:</u>

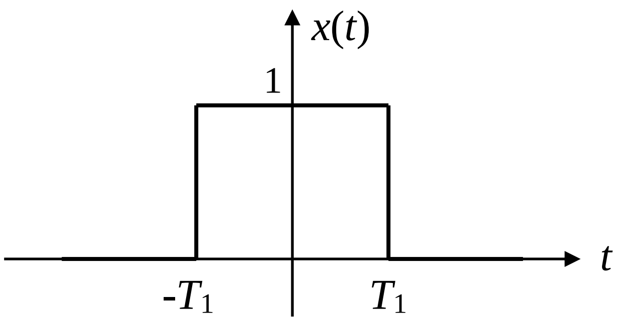
Determinar a transformada de Fourier do sinal $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$

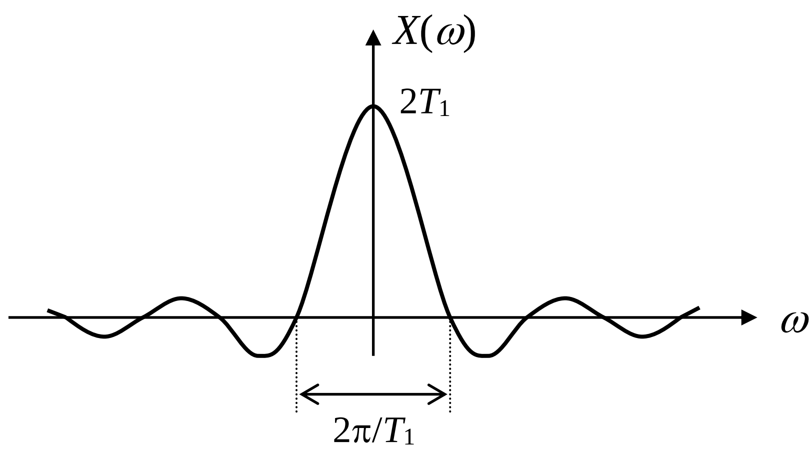


$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = 2T_1 \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1} = 2T_1 \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\boxed{\text{Nota :}\quad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}$$



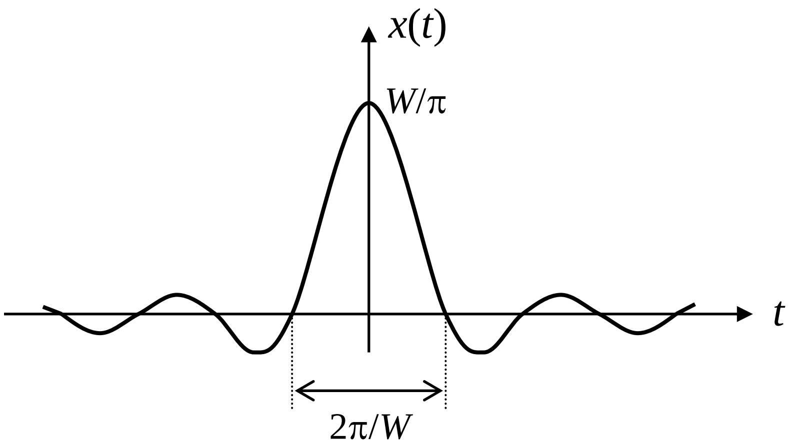




Problema:

Qual será o sinal $x(t)$ que tem como espectro $X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$?

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{W}{\pi} \cdot \frac{\sin Wt}{Wt} = \frac{W}{\pi}\ \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



Como vimos:

Pulso no tempo $\longleftrightarrow$ sinc na freq.

Pulso na freq. $\longleftrightarrow$ sinc no tempo

Trata-se da **Dualidade** (propriedade que veremos mais adiante)

Questão: qualquer sinal $x(t)$ tem representação através do integral de Fourier ?

Tem que obedecer às condições de Dirichlet:

1. $x(t)$ é absolutamente integrável;

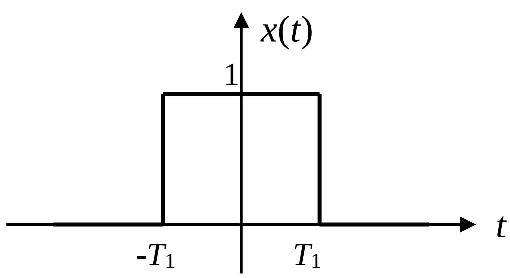
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

2. $x(t)$ tem um nº finito de extremos relativos em qualquer intervalo finito;

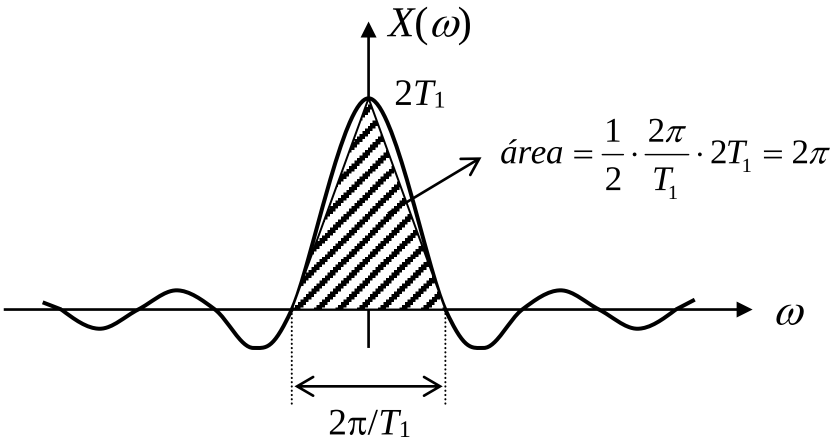
3. $x(t)$ tem um nº finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito.

Exemplo:

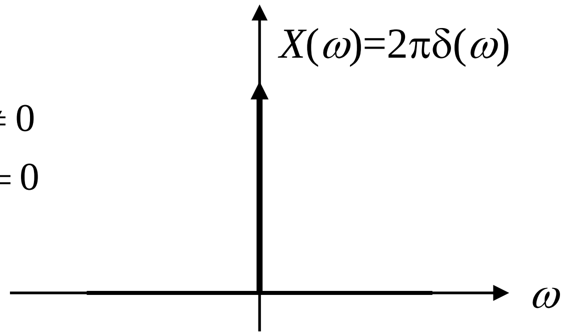
O sinal $x(t) = 1$ "não tem" transf. Fourier, pois não obedece à 1ª condição de Dirichlet. No entanto, esta questão pode ser ultrapassada recorrendo ao conceito de impulso:



- Considere-se a função pulso anterior
- Faça-se $T_1 \rightarrow \infty$
- Repare-se que $2T_1 \operatorname{sinc}\left(\dfrac{\omega T_1}{\pi}\right) \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$



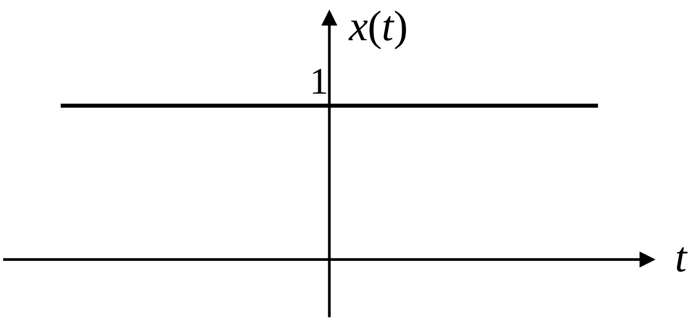
$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega = 2\pi$$

(área sob o impulso)

Trata-se pois do espectro do sinal constante $x(t) = 1$



$X(\omega)$ indica-nos que toda a sua energia está concentrada em $\omega = 0$

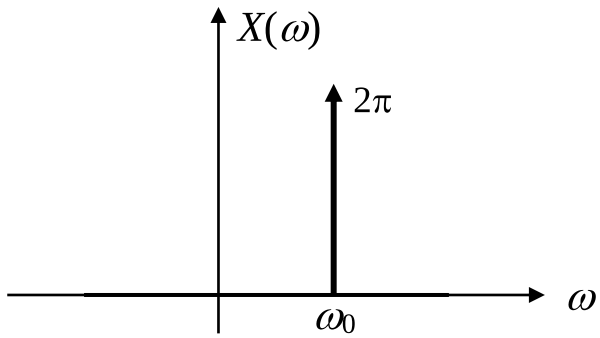
(o sinal não tem quaisquer oscilações)

2.4. Transformada de Fourier de sinais periódicos

Tal como no exemplo anterior, as funções periódicas não obedecem à 1ª condição de Dirichlet e, como tal, só têm transformada de Fourier se recorrermos ao conceito de impulso.

<u>Exemplo 1:</u>

Qual o sinal que tem como espectro $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$?



$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega_0 t}d\omega = e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - \omega_0)\,d\omega$$

$$= e^{j\omega_0 t}$$

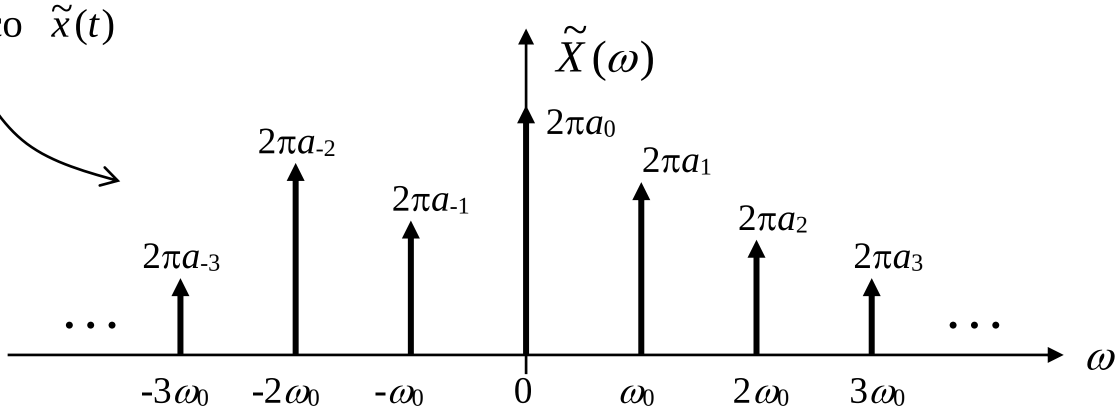
<u>Exemplo 2:</u>

Qual a transf. Fourier do sinal periódico genérico $\tilde{x}(t) = \sum_{k} a_k e^{jk\omega_0 t}$?

Pela linearidade $\boxed{\tilde{X}(\omega) = \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - k.\omega_0)}$

<u>Conclusão:</u> a transformada de Fourier de um sinal periódico pode ser interpretada como um trem de impulsos de magnitude $2\pi a_k$ espaçados de ω_0 em ω_0.

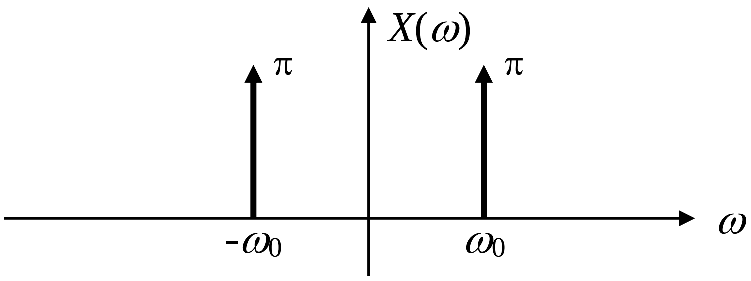
sinal periódico $\tilde{x}(t)$



<u>Exemplo 3:</u>

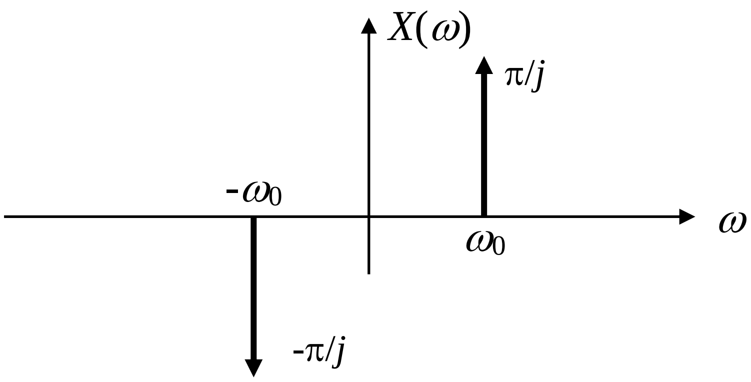
$x(t) = \cos(\omega_0 t) \qquad X(\omega) = ?$

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \quad \text{pelo que} \quad \begin{cases} a_{-1} = a_1 = 1/2 \\ a_k = 0 \quad k \neq \pm 1 \end{cases}$$



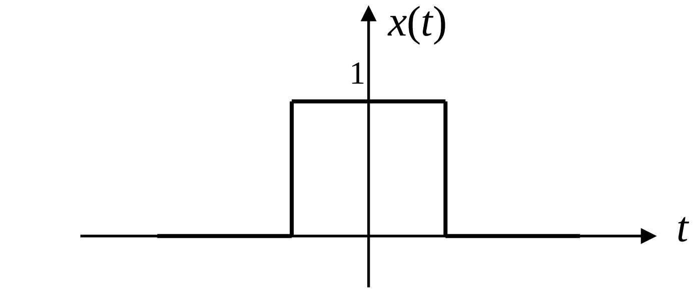
<u>Exemplo 4:</u>

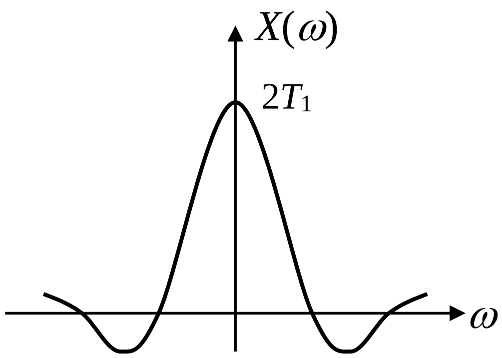
$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \quad \text{pelo que} \quad \begin{cases} a_1 = a_{-1}{}^* = 1/2j \\ a_k = 0 \quad k \neq \pm 1 \end{cases}$$

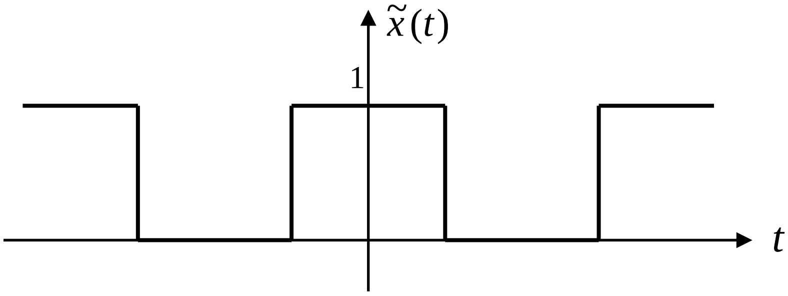


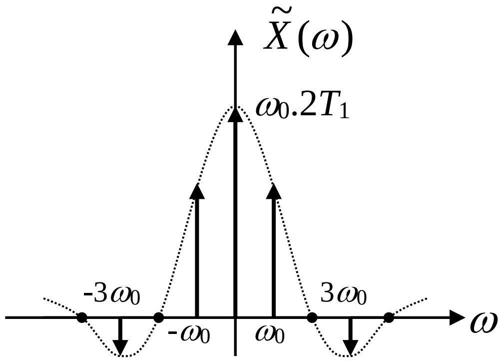
Exemplo 5:

Onda quadrada !







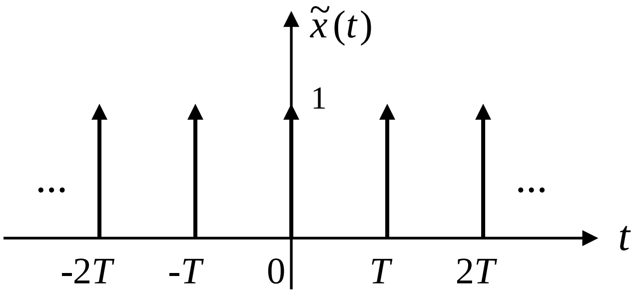


Tínhamos visto atrás que $a_k = \dfrac{\omega_0}{2\pi} X(k\omega_0)$

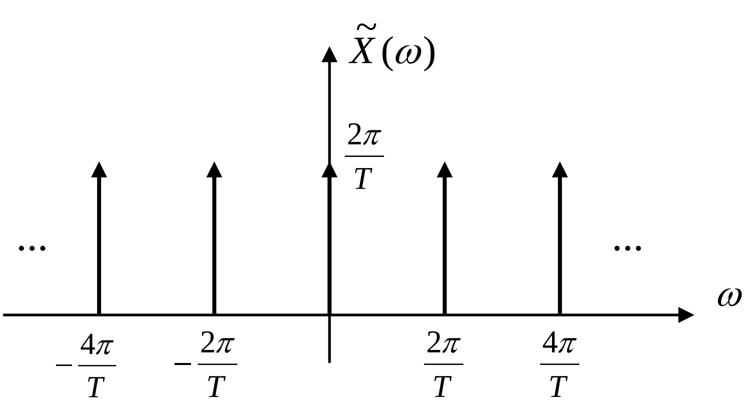
$\tilde{X}(\omega)$ será um trem de impulsos de magnitude $2\pi\, a_k = \omega_0 \cdot X(k\omega_0)$

Exemplo 6:

$\tilde{x}(t) = \sum_k \delta(t - k.T)$ trem de impulsos no tempo



$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \cdots = \frac{1}{T}$$



Portanto:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

2.5. Propriedades da transformada de Fourier

- ***Linearidade***

Sendo $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$

$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$

Então $\boxed{a.x_1(t) + b.x_2(t) \longleftrightarrow a.X_1(\omega) + b.X_2(\omega)}$

- ***Simetria***

Se $x(t)$ é um sinal real, então teremos:

$$\boxed{X(-\omega) = X^*(\omega)}$$

isto é:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{X(\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-\omega)\} \\ \operatorname{Im}\{X(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-\omega)\} \end{cases} \qquad \begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)| \\ \arg(X(\omega)) = -\arg(X(-\omega)) \end{cases}$$

Demonstração:

$$X^*(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega t}dt \quad \text{pois} \quad x^*(t) = x(t)$$

$$= X(-\omega)$$

- ***Atraso no tempo***

Sendo $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

Então $\boxed{x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} \cdot X(\omega)}$

Vejamos:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt \qquad \text{fazendo} \quad \sigma = t - t_0$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma) e^{-j\omega(\sigma+t_0)} d\sigma = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma) e^{-j\omega\sigma} d\sigma$$

$$= e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

- ***Diferenciação e integração no tempo***

Sabemos que $x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ (eq. análise)

Derivando ambos os membros : $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\, X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Ou seja: $\boxed{\dfrac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega\, X(\omega)}$

Poderíamos igualmente demonstrar que para a integração no tempo se tem:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)}$$

- ***Mudança de escala temporal***

Sendo $\quad x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

Então $\quad \boxed{x(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{|a|} \cdot X\left(\dfrac{\omega}{a}\right)}$

Demonstração:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \qquad \text{fazendo} \quad \sigma = at$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma) e^{-j\frac{\omega}{a}\sigma} d\sigma \quad (a > 0) \\ \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} x(\sigma) e^{-j\frac{\omega}{a}\sigma} d\sigma = -\dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma) e^{-j\frac{\omega}{a}\sigma} d\sigma \quad (a < 0) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- ***Dualidade***

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \\ \\ X(t) \longleftrightarrow 2\pi\, x(-\omega) \end{array}}$$

Exemplo:

Já tínhamos visto atrás que

pulso no tempo $\longleftrightarrow$ sinc na freq.

sinc no tempo $\longleftrightarrow$ pulso na freq.

- ***Relação de Parseval***

Relaciona-nos a energia de um sinal entre os domínios do tempo e da frequência.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}$$

$$\text{Portanto : energia de } x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega)\, d\omega$$

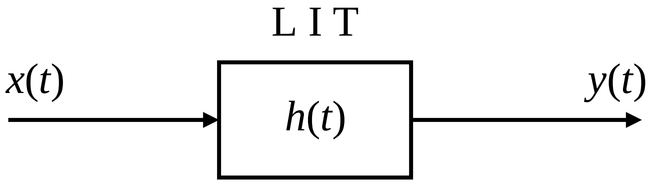
$E(\omega)$ é a <u>*densidade espectral de energia*</u>

Para sinais periódicos, temos a sua energia por período dada por:

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2}$$

$$|a_k|^2 = \text{energia por período do harmónico de ordem k}$$

- ***Convolução***



$$\text{Sabemos que } \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x(\tau)h(t-\tau)d\tau]e^{-j\omega t}dt = \quad \text{invertendo a ordem de integração}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, e^{-j\omega t}dt\right] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[e^{-j\omega\tau} H(\omega)\right] d\tau =$$

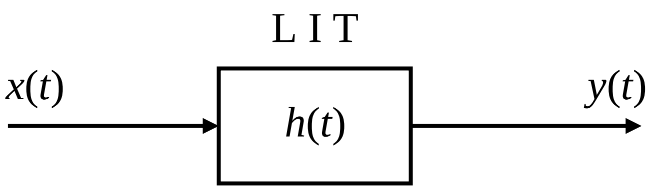
$$= H(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\, d\tau = H(\omega)\cdot X(\omega)$$

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega)}$$

$H(\omega)$ é a <u>*resposta em frequência do sistema*</u>

<u>Exemplo (sinais periódicos):</u>

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



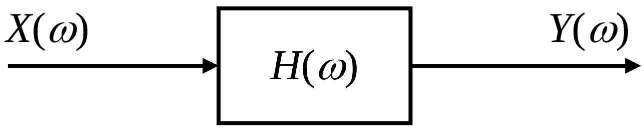
$y(t) = ?$

$$Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega) = H(\omega)\cdot\sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi\sum_k H(k\omega_0)a_k\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k\omega_0)a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Conclusão: se $x(t)$ for um sinal periódico de coefs. a_k, então $y(t)$ também é um sinal periódico de coefs. b_k, com

$$\boxed{b_k = a_k H(k\omega_0)}$$

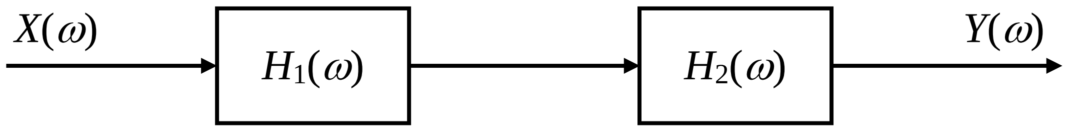


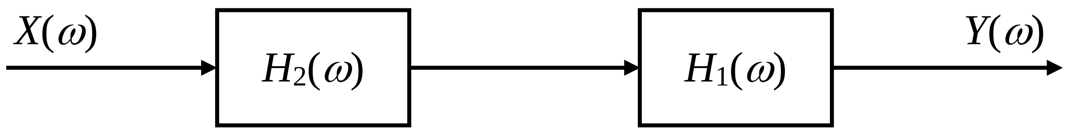
$$Y(\omega) = X(\omega).H(\omega)$$

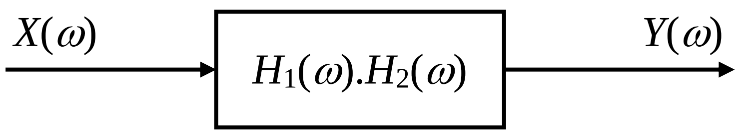
Toda a álgebra de diagrama de blocos se mantém !

Exemplo:

Os 3 sistemas a seguir são equivalentes, pois a relação de espectros é a mesma em todos os casos.







$$Y(\omega) = H_1(\omega).H_2(\omega).X(\omega)$$

- ***Convolução periódica (convolução circular)***

Sejam $\tilde{x}_1(t)$ e $\tilde{x}_2(t)$ periódicos do mesmo período T_0

Define-se convolução circular:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}_1(t) * \tilde{x}_2(t) = \int_{T_0} \tilde{x}_1(\tau)\tilde{x}_2(t-\tau)d\tau$$

obtendo-se:

$$c_k = T_0 \, a_k \, b_k$$

coefs de $\tilde{y}(t)$ coefs de $\tilde{x}_1(t)$ coefs de $\tilde{x}_2(t)$

- ***Modulação***

$$\boxed{x(t) \cdot y(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * Y(\omega)\right]}$$

Mais uma vez ressalta aqui o aspecto da <u>dualidade</u> entre os domínios do tempo e da frequência:

Convolução no tempo $\longleftrightarrow$ produto na frequência

Produto no tempo $\longleftrightarrow$ convolução na frequência

A modulação está intimamente ligada com o "deslocamento na frequência". Exemplo:

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \cdot x(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(\omega - \omega_0)}$$

2.6. Relação entre as transformadas de Fourier e de Laplace

Recordemos algumas definições:

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt}$$

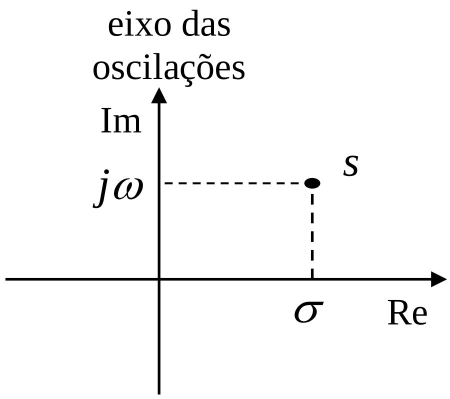
T. Laplace bilateral

(não estudada)

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

T. Fourier

Facilmente concluímos que a segunda expressão é um caso particular da primeira, quando $s = j\omega$.



$$\boxed{X(\omega) = \left[X(s)\right]_{s=j\omega}}$$

Para sinais cuja transformada de Fourier exista (obedeçam às condições de Dirichlet), esta pode ser obtida a partir da transformada de Laplace no eixo imaginário.