Conservação do momento linear

Tensor de Maxwell:

Força electromagnética que actua num elemento de volume V:

$$\vec{F} = \int_V [\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{B})] \rho \, d\vec{r} = \int_V [\rho\vec{E} + (\vec{J} \wedge \vec{B})] \, d\vec{r}$$

Podemos ∴ definir uma densidade volúmica de força $\vec{f}$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}$$

Num meio material, devemos exprimir esta densidade à custa da densidade e da corrente de cargas livres. Então:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad ; \qquad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + \left[\nabla \wedge \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right] \wedge \vec{B}$$

Naturalmente:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \wedge \vec{B}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B} + \vec{D} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B} = \vec{D} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \wedge \vec{B}]$$

Logo:

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} - \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{H}) + \vec{D} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \wedge \vec{B}]$$

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} - \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{H}) - \vec{D} \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \wedge \vec{B}]$$

Como $\nabla\cdot\vec{B}=0$, podemos escrever:

$$\vec{f} = \left[(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E} - \vec{D}\wedge(\nabla\wedge\vec{E})\right] + \left[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{H} - \vec{B}\wedge(\nabla\wedge\vec{H})\right] - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{D}\wedge\vec{B}]$$

Em vez de prosseguir com toda a generalidade, vamos admitir que o meio é neutro e isotrópico. Neste caso

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Então:

$$\vec{f} = \varepsilon\left[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} - \vec{E}\wedge(\nabla\wedge\vec{E})\right] + \frac{1}{\mu}\left[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} - \vec{B}\wedge(\nabla\wedge\vec{B})\right] - $$
$$- \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}[\vec{E}\wedge\vec{B}]$$

Consideremos a identidade:

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\wedge(\nabla\wedge\vec{b}) + \vec{b}\wedge(\nabla\wedge\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}$$

Se $\vec{a}=\vec{b}$ obtemos:

$$\frac{1}{2}\nabla(a^2) = (\vec{a}\wedge\nabla\wedge\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{a}$$

então:

$$\vec{E}\wedge(\nabla\wedge\vec{E}) = \frac{1}{2}\nabla(E^2) - (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}$$

e

$$\vec{B}\wedge(\nabla\wedge\vec{B}) = \frac{1}{2}\nabla(B^2) - (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}$$

Logo

$$\vec{f} = \varepsilon\left[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}\right] - \frac{1}{2}\nabla(\varepsilon E^2) +$$
$$+ \frac{1}{\mu}\left[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}\right] - \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{B^2}{\mu}\right) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}[\vec{E}\wedge\vec{B}]$$

Definamos o seguinte tensor: $\overline{\overline{T}}$:

$$T_{ij} = \varepsilon \left[E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right] + \frac{1}{\mu} \left[B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right]$$

Por exemplo:

$$T_{xx} = \varepsilon \left[E_x^2 - \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \right] + \frac{1}{\mu} \left[B_x^2 - \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \left[E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 \right] + \frac{1}{2\mu} \left[B_x^2 - B_y^2 - B_z^2 \right]$$

$$T_{xy} = \varepsilon E_x E_y + \frac{1}{\mu} B_x B_y$$

Esta entidade pode representar-se (numa certa base) por uma matriz:

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

Consideremos

$$(\nabla \cdot \overline{\overline{T}})_j \equiv \text{a componente } j \text{ do vector } \nabla \cdot \overline{\overline{T}}$$

$$(\nabla \cdot \overline{\overline{T}})_j = \sum_i \nabla_i T_{ij} = \sum_i \varepsilon \left[\frac{\partial E_i}{\partial x_i} \cdot E_j + E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial E^2}{\partial x_i} \right] +$$

$$+ \sum_i \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial B_i}{\partial x_i} B_j + B_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial B^2}{\partial x_i} \right]$$

$$(\nabla\cdot\overline{\overline{T}})_j = \varepsilon\left[(\nabla\cdot\vec{E})E_j + (\vec{E}\cdot\nabla)E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2\right] +$$

$$+\frac{1}{\mu}\left[(\nabla\cdot\overline{B})B_j + (\overline{B}\cdot\nabla)B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right]$$

Como vimos:

$$\vec{f} = \varepsilon\left[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2\right] +$$

$$+\frac{1}{\mu}\left[(\nabla\cdot\overline{B})\overline{B} + (\overline{B}\cdot\nabla)\overline{B} - \frac{1}{2}\nabla B^2\right] - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}[\overline{E}\wedge\overline{B}]$$

$$\vec{f} \equiv \nabla\cdot\overline{\overline{T}} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\mu}(\overline{E}\wedge\overline{B})\right]$$

$$\boxed{\vec{f} = \nabla\cdot\overline{\overline{T}} - \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}}$$ ≡ densidade volúmica de força electromagnética

Consideremos então um volume V delimitado por uma superfície Σ. A força electromagnética total que actua nesse volume é:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}\, d\vec{r} = \int_V (\nabla\cdot\overline{\overline{T}})\, d\vec{r} - \varepsilon\mu\int \frac{\partial\vec{S}}{\partial t}\, d\vec{r}$$

Mas, usando o teorema de Gauss

$$\vec{F} = \int_\Sigma \overline{\overline{T}}\cdot\hat{n}\, d\Sigma - \varepsilon\mu\int\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}\, d\vec{r}$$

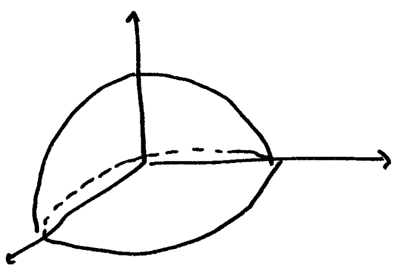
Note que $\overline{\overline{T}}$ tem o significado de uma força por unidade de área que actua na superfície Σ:

$$f_i^{\Sigma} = T_{ij}\, n_j$$

Vejamos como isto pode ser útil:

• Exemplo 8.2 (Griffiths):

Considere uma esfera uniformemente carregada (carga Q). Determine a força que o hemisfério sul exerce sobre o hemisfério norte.



Solução usando o Tensor de Maxwell:

A superfície que delimita o hemisfério norte é constituída pela superfície do hemisfério superior, mais o plano equatorial.

Na superfície do hemisfério, o campo eléctrico é:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R^2}\,\hat{r}$$

Calculemos $\overline{\overline{T}}$ nesta região:

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R^2}\left[\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right]$$

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left[E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2 \right]$$

[T_{ij} ≡ componente segundo i da força (por unidade de área) exercida numa superfície perpendicular a j.] $\left(f_i = T_{ij} n_j \right)$

Por simetria, podemos concluir que a força total vai ter a direcção de zz'. Por esta razão, é suficiente considerar a componente segundo z da força que actua na superfície do hemisfério. Temos ∴ de considerar apenas T_{zx}, T_{zy} e T_{zz}

$$f_z = T_{zx} n_x + T_{zy} n_y + T_{zz} n_z$$

$$T_{zx} = \varepsilon_0 E_x E_z = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\phi \cos\theta$$

$$T_{zy} = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \quad \sin\theta \cos\theta \sin\phi$$

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 \right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \left[\cos^2\theta - \sin^2\theta \right]$$

$$F_z = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \int_{\substack{\bar{z} \\ \text{hemisf.}}} \underbrace{\left[\sin^2\theta \cos^2\phi \cos\theta + \sin^2\theta \cos\theta \sin^2\phi + \frac{1}{2}\cos\theta \left[\cos^2\theta - \sin^2\theta \right] \right]}_{\left(\sin^2\theta \cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta \cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta \cos^2\theta \right) \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$F_z = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2 \frac{1}{2} \iint \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2 \frac{1}{2} \; 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \cancel{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2} \qquad (\text{sup. hemisfera})$$

<u>Disco equatorial:</u>

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r}_{eq.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \left(\cos\phi \, \hat{x} + \sin\phi \, \hat{y}\right)$$

$$T_{zz} = \varepsilon_0 \left[E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right] \frac{1}{2} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r^2$$

$$T_{zz} \, da_z = +\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r^2 \; r \, d\phi \, dr$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r^3 \, dr \, d\phi$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\cancel{2}} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 \cancel{2}\pi \frac{R^4}{4}$$

$$\cancel{\varepsilon_0} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{R}} \frac{1}{16R^2}$$

Logo, a força total é:

$$F_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q^2}{16R^2}$$

Método - 2 : Σ é uma qualquer superfície que delimita o volume ocupado pelo campo no hemisfério superior.

Podemos considerar todo o plano xy, mais a semi-esfera de raio infinito. Esta última superfície não contribui para a força porque o campo é nulo. Fica então a integração sobre todo o plano xy. Vejamos:

Dentro do círculo de raio R, vimos já que $(F_z)_1 =$
$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{16R^2}$. Vejamos agora a contribuição deste plano para $r > R$.

Aqui $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \left[\cos\theta \, \hat{x} + \sin\theta \, \hat{y} \right]$$

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{T_{zx}}} n_x + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{T_{zy}}} n_y + \underset{\downarrow}{T_{zz}} n_z$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon \left[-E_x^2 - E_y^2 \right] = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$(F_z)_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^4} \, r \, d\phi \, dr$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \cancel{2}\pi \left(-\frac{1}{2r^2}\right)\Bigg]_R^\infty$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{8R^2} \quad \square$$

Método - 3 → Integrações directa, ignorando o tensor de Maxwell:

Dentro da esfera, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r}$

A força por unidade de volume é $\rho(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r})\, dV$

$$= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\, \vec{r}\, dV$$

A componente zz' desta força é:

$$dF_z = \varepsilon_0 3 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r\cos\theta \cdot \left(r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\right)$$

$$= \frac{3}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi R^3}\right)^2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{3}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi R^3}\right)^2 \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} \cdot 2\pi = \frac{3\, Q^2}{4\pi\varepsilon \cdot 16 R^2}$$

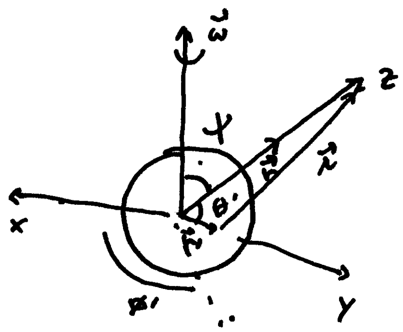
□

Problema 8.3 (Griffiths)(*)

Calcule a força de atracção magnética entre os hemisférios norte e sul de uma superfície esférica uniformemente carregada e em rotação.

Solução:

Campo magnético dentro e fora da esfera oca:



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{r}\, d\Sigma$$

$$r = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'}$$

$$d\Sigma = R^2 \sin\theta'\, d\theta\, d\phi$$

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega\sin\psi & 0 & \omega\cos\psi \\ R\sin\theta'\cos\phi & R\sin\theta'\sin\phi' & R\cos\theta' \end{vmatrix} =$$

$$= R\omega\Big[-(\cos\psi\sin\theta'\sin\phi')\hat{x} + \underset{*}{\underline{(\cos\psi\sin\theta'\cos\phi - \sin\psi\cos\theta')}}\hat{y} + (\sin\psi\sin\theta'\sin\phi')\hat{z}\Big]$$

Só o termo assinalado contribui (dado que $\int_0^{2\pi}\sin\phi'\, d\phi' = \int_0^{2\pi}\cos\phi'\, d\phi' = 0$)

Então,

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\sigma \overbrace{R\omega \sin\psi \cos\theta'}^{(\vec{\omega}\wedge\vec{r})} \,\hat{y}}{r}\, d\Sigma$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{y}\int \sigma R\omega \sin\psi \cos\theta' R^2 \sin\theta' \, d\theta' d\phi'$$

$$= \begin{cases} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 R\sigma}{3}\, \vec{\omega}\wedge\vec{r} & \text{(dentro da esfera)} \\ \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3 r^3}\, \vec{\omega}\wedge\vec{r}) & \text{(fora da esfera)} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0 \sigma R\omega\, \hat{z} & \text{(dentro)} \\ \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\underbrace{\left[\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma\omega R\right]}_{m}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right] & \text{(fora)} \end{cases}$$

Podemos agora calcular o tensor de Maxwell. Só a força segundo zz conta. Então:

$$\left(\overline{\overline{T}}\cdot d\vec{\Sigma}\right)_z = T_{zx}\, d\Sigma_x + T_{zy}\, d\Sigma_y + T_{zz}\, d\Sigma_z =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[B_z B_x\, d\Sigma_x + B_z B_y\, d\Sigma_y + B_z B_z\, d\Sigma_z - \frac{1}{2}B^2 d\Sigma_z \right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[B_z (\vec{B}\cdot d\vec{\Sigma}) - \frac{1}{2}B^2 d\Sigma_z \right]$$

$\Sigma = ?$: hemisfério superior + plano equatorial.

i) Hemisfério superior (campo exterior em $r = R$):

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left[2\cos\theta\,\underset{\downarrow\ \cos\theta}{(\hat{r}\cdot\hat{z})} + \sin\theta\,\underbrace{(\hat{\theta}\cdot\hat{z})}_{-\sin\theta}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left[2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right] = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left[3\cos^2\theta - 1\right]$$

$$d\vec{\Sigma} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \; \hat{r}$$

$$\vec{B}\cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\, 2\cos\theta \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\left(\bar{\bar{T}}\cdot d\vec{\Sigma}\right)_z = \frac{1}{\mu_0}\left[B_z\,(\vec{B}\cdot d\vec{\Sigma}) - \frac{1}{2}B^2\, d\Sigma_z\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left\{\left(\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\right)^2\left[3\cos^2\theta - 1\right]\cdot 2\cos\theta\,\sin\theta\, R^2\, d\theta\, d\phi \; - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\right)^2\left[\underbrace{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{(3\cos^2\theta + 1)}\right]\cdot R^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{\sigma\omega R^2}{3}\right)^2\left[9\cos^2\theta - 5\right]\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{\sigma\omega R^2}{3}\right)^2\left[9\cos^2\theta - 5\right]\sin\theta\cos\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{\mu_0\pi}{4}\left(\frac{\sigma\omega R^2}{3}\right)^2$$

Contribuições do plano equatorial:

$$B_z = \frac{2}{3}\mu_0 \sigma R \omega$$

$$d\vec{\Sigma} = -r\, d\theta\, d\phi\, \hat{z}$$

$$\left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{\Sigma}\right)_z = \frac{1}{\mu_0}\left[B_z (\vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}) - \frac{1}{2} B^2 d\Sigma \right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{2}{3}\mu \sigma R\omega\right]^2 \left\{ -r\, d\theta\, d\phi + \frac{1}{2} r\, d\theta\, d\phi \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0}\left[\frac{2}{3}\mu \sigma R\omega\right]^2 r\, dr\, d\phi$$

Integrando:

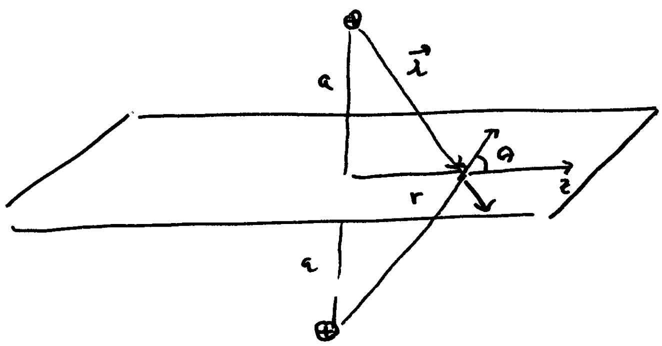
$$-\frac{2\pi}{2\mu_0}\left[\frac{2}{3}\mu \sigma R\omega\right]^2 \int_0^R r\, dr = -2\pi \mu_0 \left(\frac{\sigma \omega R^2}{3}\right)^2$$

Força total:

$$\vec{F} = -\pi \mu_0 \left(\frac{\sigma \omega R^2}{3}\right)^2 \left[\frac{1}{4} + 2\right] \hat{z} = -\pi \mu_0 \left(\frac{\sigma \omega R^2}{3}\right)^2 \hat{z}$$

□

Problema 8.4 (Griffiths) : Considere duas cargas de igual sinal separadas por uma distância $2a$. Considere o plano equidistante destas cargas.



Determine a força repulsiva entre as duas cargas integrando o tensor de Maxwell sobre este plano:

Solução:

$$\left(\overline{\overline{T}}\cdot d\vec{\Sigma}\right)_z = T_{zz}\, d\Sigma_z = \varepsilon_0\left[E_z^2 - \frac{1}{2}E^2\right](-r\,dr\,d\phi)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, 2\,\frac{q}{\imath^2}\cos\theta\,\hat{r} \qquad ;\left(\cos\theta = \frac{r}{\imath}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$E_z = 0 \quad ; \quad E^2 = \left[\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{(r^2+a^2)}\,\frac{r}{(r^2+a^2)^{1/2}}\right]^2$$

$$= \left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{r^2}{(r^2+a^2)^3}$$

$$F_z = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_0^\infty \frac{r^2}{(r^2+a^2)^3}(-2\pi\, r\, dr)$$

$$= \frac{1}{2}\,2\pi\,\varepsilon_0\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_0^\infty \frac{r^3}{(r^2+a^2)^3}\,dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(u+a^2)^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{(2a)^2} \quad !!! \qquad \begin{cases} u = r^2 \\ du = 2r\,dr \end{cases}$$

Conservação do momento linear:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} = -\varepsilon\mu \frac{d}{dt}\int_V \vec{S}\cdot d^3r + \int_\Sigma \overline{\overline{T}}\cdot d\vec{\Sigma}$$

Momento mecanico total das particulas

– Momento total associado ao campo!

Momento/tempo que entra através da superficie Σ.

$\therefore$ $\boxed{\vec{p} \quad \varepsilon\mu\,\vec{S}}$ $\equiv$ densidade volúmica de momento associado ao campo electromagnético.

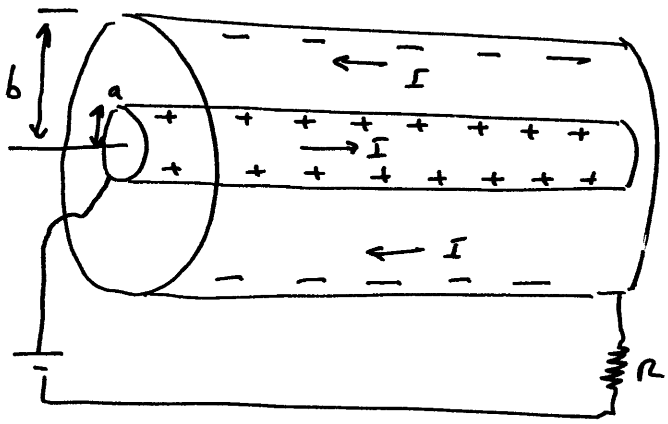
A equação anterior pôde escrever-se como:

$$\boxed{\frac{\partial \underline{p}_{mec}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{p}_{em}}{\partial t} = \nabla\cdot\overline{\overline{T}}}$$

Esta equação exprime a conservação (local) do momento linear; $-\overline{\overline{T}} \equiv$ fluxo da densidade de momento linear.

Exemplo 8.3 (Griffiths):

Exemplo 8.3 (Griffiths):



Cabo coaxial longo. Condutor central tem carga $+\lambda$ por unidade de comprimento e transporta uma corrente I uniforme. (ver fig.) O condutor exterior transporta cargas e correntes opostas. Qual é o momento linear associado ao campo electromagnético?

Os campos são não nulos no espaço entre condutores. Aí, temos:

$$E\, 2\pi s \cdot l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{s} \hat{s}$$

$$B\, 2\pi s = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \wedge \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{s} \frac{\mu_0 I}{2\pi s} (\hat{s} \wedge \hat{\phi})$$

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0} \frac{\lambda I}{s^2} \hat{z}$$

(Como vimos:

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} \quad \frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{s^2}\, 2\pi s\, ds = \frac{\lambda I}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a} = VI$$)

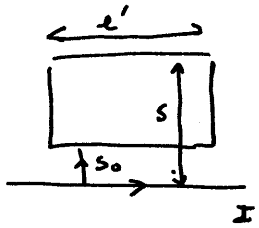
O momento acumulado nos campos vem:

$$\vec{P}_{em} = \hat{z}\, \varepsilon_0 \mu_0 \int \vec{S}\, d\tau = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{4\pi^2\varepsilon_0} \hat{z} \lambda I \int \frac{1}{s^2}\, l\, 2\pi s\, ds$$

$$= \frac{\mu_0 \lambda I l}{\;} \hat{z} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

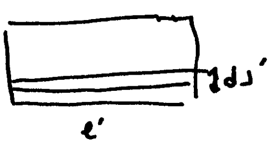
<u>Observação</u>: Como o cabo axial não se move, o momento linear total deve ser nulo. Não obstante, o momento armazenado no campo electromagnético é diferente de zero. Isso implica que deve haver um momento mecânico também não nulo e que compensa. De onde virá este momento mecânico?

Imaginemos agora que aumentamos R (R é um reóstato variável) continuamente. Em consequência, a corrente I diminui. A diminuição da corrente I induz um campo eléctrico:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E(s_0)\,l - E(s)\,l = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{\Sigma}$$

$$= -\cancel{\frac{\mu_0}{2\pi}}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{s_0}^{s}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I(t)}{s'}\,l\,ds'$$



$$\left(\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\hat{\phi}\right) \rightarrow$$

$$= -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln s + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln s + C\right]\hat{z}$$

Este campo exerce uma força (por unidade de comprimento) nos condutores carregados:

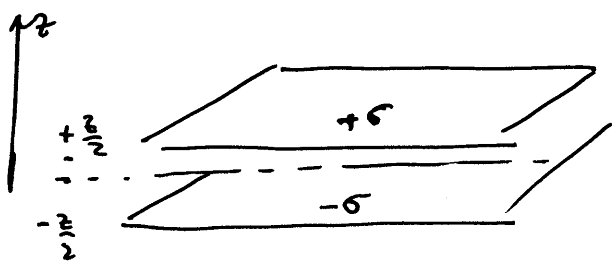
$$\vec{F} = -\lambda l\left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]\hat{z}$$

A variação da corrente produz um impulso mecânico no cabo:

$$I = \int_{I(t)}^{I(0)} F\, dt = \frac{\mu_0 \lambda I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\, \hat{z}$$

Este impulso corresponde à variação do momento linear armazenado no campo!! Mas o cabo não se move. Porquê (Ver adiante: efeito relativista).

Problema 8.5 (Griffiths):



a) Determinar os elementos do tensor de Maxwell no espaço entre armaduras.

b) Calcule a força total por unidade de área que actua na armadura superior.

c) Calcule o momento por unidade de área, por unidade de tempo que atravessa o plano xy

d) Obtenha a força por unidade de área que a armadura superior sente

Soluções:

a) $\vec{B} = 0$; $\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$

T_{ij} só tem elementos diagonais;

$$T_{xx} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = T_{yy} \quad ; \quad T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

b)

$$F_z = \int \overline{\overline{T}}_{zz}\, \hat{n}_z\, d\Sigma = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} A \longrightarrow \text{área da armadura superior}$$

$$\left(\hat{n} = -\hat{z} \; ; \; d\Sigma = dx\, dy\right)$$

$$\vec{f} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

c) $-T_{zz} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ ≡ momento que atravessa a unidade de área (xy) por unidade de tempo.

d) A força por unidade que a armadura superior sente é igual ao ~~variação do~~ momento que a atravessa por unidade de tempo. (e área) ; $f = -\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$!

Conservação do momento angular:

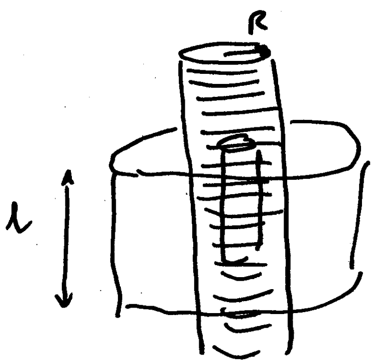
$$\vec{\wp}_{em} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{S} \equiv$$ densidade de volume de momento linear electromagnético.

Evidentemente que podemos também definir uma densidade volúmica de momento angular:

$$\vec{\ell}_{em} = \vec{r} \wedge \vec{p}_{em} = \varepsilon_0 \mu_0 \left[\vec{r} \wedge \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \right]$$

Vejamos um exemplo que ilustra este facto:

Exemplo 8.4 (Griffiths)



Um solenoide (n espiras/comprimento) muito longo transporta uma corrente I. Coaxialmente, existem 2 superfícies cilíndricas de altura l, uma dentro (raio a) carga $+Q$ uniformemente distribuída, outro externo (raio b), carga $-Q$.

Quando a corrente no solenoide começa a diminuir, os cilindros começam a rodar. Porquê?
($l \gg b$)

Solução:

No espaço entre cilindros existe um campo eléctrico radial que podemos facilmente calcular:

$$E(s)\, 2\pi s \cdot l = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(s) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l} \frac{1}{s} \hat{s} \qquad (a < s < b)$$

e um campo magnético:

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z} \qquad s < R$$

Isto dá origem a uma densidade volúmica de momento linear:

$$\vec{p}_{em} = \varepsilon_0 \left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \cancel{\varepsilon_0} \frac{Q}{2\pi \cancel{\varepsilon_0} l} \frac{1}{s} \mu_0 n I \underbrace{(\hat{s} \wedge \hat{z})}_{-\hat{\phi}}$$

$$\vec{p}_{em} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s} \hat{\phi} \qquad (a < s < R)$$

$$\vec{p}_{em} = 0 \quad (\text{noutros pontos})$$

$$\vec{l}_{em} = \vec{r} \wedge \vec{p}_{em} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \underbrace{\hat{r} \wedge \hat{\phi}}_{\hat{z}}$$

O momento angular total armazenado nos campos é

$$\vec{L}_{em} = \vec{l}_{em} \cdot \pi (R^2 - a^2) \cdot l \; \hat{z}$$

$$= -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi \cancel{l}} \pi (R^2 - a^2) \cancel{l} \; \hat{z}$$

$$\vec{L}_{em} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2} (R^2 - a^2) \hat{z}$$

Quando I começa a diminuir, a variação de fluxo magnético gera um campo eléctrico (circunferencial), de acordo com a lei de Faraday:

$$2\cancel{\pi}\cancel{s}\, E(s) = -\frac{d\phi}{dt} = -\cancel{\pi} s^{\cancel{2}} \cdot \mu_0 n \frac{dI}{dt} \qquad (s < R)$$

- $$\vec{E}(s) = -\frac{\mu_0 n}{2}\frac{dI}{dt}\, s\, \hat{\phi}$$

e

$$2\cancel{\pi} s\, E(s) = -\cancel{\pi} R^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt} \qquad (s > R)$$

- $$\vec{E}(s) = -\frac{1}{2}\frac{\mu_0 n R^2}{s}\frac{dI}{dt}\,\hat{\phi} \qquad s > R$$

Este campo dá origem a momentos mecânicos nas folhas cilíndricas:

Folha externa:

$$\vec{M}_b = \vec{R} \times (-Q)\vec{E} = \frac{Q}{2}\frac{\mu_0 n R^2}{\cancel{b}}\frac{dI}{dt}\cdot \cancel{b}\,\hat{z}$$

Folha interna:

$$\vec{M}_a = -a\,(+Q)\,\frac{\mu_0 n}{2}\frac{dI}{dt}\, a\,(\hat{r}\times\hat{\phi})$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_0 n\, Q\, a^2 \frac{dI}{dt}\,\hat{z}$$

Quando I diminui para zero, o impulso angular nos cilindros dá origem a um momento angular:

$$\vec{L}_a = \int M_a(t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_0 n Q a^2 \underbrace{\int_I \frac{dI}{dt}\, dt}_{(-I)}$$

$$\vec{L}_a = \frac{1}{2}\mu_0 n Q a^2 I\, \hat{z}$$

$$\vec{L}_b = \int M_b(t)\, dt$$

$$= \frac{Q}{2}\mu_0 n R^2 \int \frac{dI}{dt}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} Q \mu_0 n I R^2\, \hat{z}$$

Neste instante o momento angular armazenado nos campos foi destruído e o momento mecânico da rotação do cilindro é:

$$\vec{L}_{mec} = \vec{L}_a + \vec{L}_b = -\frac{1}{2}\mu_0 n I Q \left(R^2 - a^2\right) \equiv$$

$\equiv \vec{L}_{em}$ inicialmente armazenado nos campos.