Problemas de Física Quântica–II

Perturbações dependentes do tempo
Universidade do Minho

8 de dezembro de 2020

Teoria de perturbações dependente do tempo

1. Um átomo de hidrogénio é colocado num campo eléctrico dependente do tempo $E(t)$ apontando na direcção z, dado por

$$E(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_0 e^{-\gamma t} & t > 0 \end{cases}$$

   Qual é a probabilidade de, quando $t \to \infty$, o átomo de hidrogénio fazer uma transição para o estado $2p$ a partir do estado fundamental?

   (Gasiorowicz, 15.1)

2. Considere uma partícula num poço infinito, com $V(x) = 0$ para $0 \leq x \leq a$ e $V(x) = \infty$ noutros lados. O potencial em $0 \leq x \leq a$ e $V(x) = \infty$ é alterado por um termo adicional:

$$V_1(x) = \lambda \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin(\omega t) \theta(t) e^{-\gamma t}$$

   (a) Calcule a probabilidade de a partícula, partindo do estado fundamental ($n = 1$), fazer uma transição para o primeiro estado excitado ($n = 2$).

   (b) Qual é a a probabilidade da partícula efectuar uma transição para o segundo estado excitado ($n = 3$)?

   (c) O que acontece a esses resultados quando $\omega \to 0$?

   (Gasiorowicz, 15.2)

3. Repita o cálculo anterior com $\sin \omega t$ substituído por e^{-r^2/τ^2}. Na alínea (c) considere $\tau \to \infty$. Note que em ambos os casos, a alínea (c) mostra que as transições são suprimidas para transições que variam muito devagar.

   (Gasiorowicz, 15.3)

4. Considere uma partícula no estado n de um oscilador harmónico unidimensional, cujo espectro é $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Suponha que o sistema é perturbado por

$$V(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda x \cos(\omega_1 t) e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}$$

Calcule a probabilidade de transição para o estado m. Para que valores de m as transições são permitidas? (Sugestão: use o método dos operadores de criação e aniquilação para calcular os elementos de matriz.)

(Gasiorowicz, 15.4)

5. Considere um sistema que está num estado não perturnado $|n\rangle$, em $t = 0$. Durante um tempo $t > 0$ actua uma perturbação H_1, constante no tempo a partir desse momento. Mostre que a probabilidade de encontrar o sistema num estado $|k\rangle$ é dada por

$$P_{nk} = \frac{4}{\hbar^2} \frac{|\langle k|H_1|n\rangle|^2}{\omega_{kn}^2} \sin^2(\omega_{kn} t/2)\,, \tag{1}$$

com $\omega_{kn} = (E_k - E_n)/\hbar$.

6. Um oscilador harmónico no estado fundamental $|0\rangle$ é sujeito a uma pertubação da forma

$$H_1 = -x e^{-t^2/t_0^2}\,, \tag{2}$$

que actua para $t > -\infty$. Calcular a probabilidade the encontar o sistema nos estados excitados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ para tempos muito longos. Mostre primeiro a seguinte identidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\alpha t^2 + i\omega t} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\omega^2/(4\alpha)}\,. \tag{3}$$

O resultado para a probabilidade deverá ser:

$$P_{01} = \frac{\pi t_0^2}{2m\hbar\omega} e^{-\omega^2 t_0^2/2}\,. \tag{4}$$

7. Um átomo de hidrogénio, no estado fundamental ($1s$), é colocado entre as placas de um condensador. Para $t > 0$ é aplicado um campo que varia no tempo de acordo com a lei $E(t) = E_0 e^{-t/\tau}$, sendo nulo para tempos inferiores. O hamiltoniano de perturbação é o de uma carga num campo constante, dado por

$$H_1 = eE_0 z e^{-t/\tau}\,. \tag{5}$$

Calcule a probabilidade, após um tempo longo, de um electrão transitar para os estados $2s$ e $2p$ (com $m = 0$). Para o efeito necessita de

$$\psi_{1,0,0} = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \tag{6}$$

$$\psi_{2,1,0} = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos\theta. \tag{7}$$

e do elemento de matriz (calcule-o; sugestão: expresse z como $z = r\cos\theta$)

$$\int d^3r \psi_{2,1,0} z \psi_{1,0,0} = \frac{4!}{2^{3/2}}(2/3)^6 a_0 \,. \tag{8}$$

A probabilidade calculada deverá ser

$$P_{1s\to 2p} = \frac{2^{15}}{3^{10}} \frac{a_0^2 e^2 E_0^2}{\hbar^2(\omega^2 + 1/\tau^2)} \,. \tag{9}$$

Para as contas anteriores é útil o resultado

$$\int_0^\infty r^4 e^{-\beta r} dr = 4!/\beta^5 \,. \tag{10}$$

8. Considere uma partícula de massa m e carga q confinada numa caixa unidimensional de comprimento L. Inicialmente a partícula está no estado fundamental da caixa. Em $t = 0$ é aplicado um campo eléctrico da forma $E = E_0 e^{-t/\tau}$, o qual dá origem a um hamiltoniano de perturbação dado por $H_1 = -qxE$. Mostre que a probabilidade de encontar o sistema no primeiro estado excitado da caixa é dada, no limite $t \gg \tau$, por:

$$P_{12} \approx \frac{5^2}{9^2} \frac{64 L^2 q^2 E_0^2}{\hbar^2 \pi^4} \frac{\tau^2}{1 + [3\hbar\pi^2/(2mL^2)]^2 \tau^2} \,. \tag{11}$$

Mostre que P_{12} é efectivamente um número sem unidades.

9. Considere um oscilador harmónico anisotrópico, cujo hamiltoniano é dado por

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m(\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2 + \omega_3 z^2) \,, \tag{12}$$

possuindo carga $-e$. No intervalo $0 \le t \le \tau$ o oscilador é iluminado por um laser, cujo campo eléctrico tem a forma

$$\vec{E}(t) = [E_0 \sin(\omega t), 0, 0] \,. \tag{13}$$

Para $t < 0$ o oscilador encontra-se no estado fundamental $|0,0,0\rangle$.

(a) Escreva a função de onda do estado fundamental e do estado excitado $|1,0,0\rangle$ do oscilador harmónico

(b) Considerando a aproximação dipolar, calcule a probabilidade de ao fim do tempo t o oscilador se encontrar no estado excitado $|1,0,0\rangle$.

10. Um sistema tridimensional possui um estado fundamental ligado, de energia E_0, e um contínuo de estados de energia, $|E\rangle$, tais que $E_1 - \Delta/2 \le E \le E_1 + \Delta/2$, os quais são não-degenerados e normalizados de acordo com $\langle E'|E''\rangle = \delta(E' - E'')$. O sistema é sujeito, para $t > 0$, a um campo eléctrico da forma

$$\vec{E}(t) = [\mathcal{E}_0 \sin(\omega t), 0, 0] \,, \tag{14}$$

com ω a frequência da radiação. Para $t < 0$ o sistema está no estado fundamental $|E_0\rangle$.

(a) Qual a unidade do estado $|E_0\rangle$

(b) Quais as unidade dos estados $|E\rangle$?

(c) Mostre que a probabilidade total de transição do estado fundamental para o contínuo de estados é dada por

$$P(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_{E_1-\Delta/2}^{E_1+\Delta/2} \rho(E) dE \left| \int_0^t \langle E|H_1(t')|E_0\rangle e^{i(E-E_0)t'/\hbar} dt' \right|^2 , \tag{15}$$

onde $H_1(t)$ é o hamiltoniano de perturbação e $\rho(E)$ é a densidade de estados por unidade de volume. Verifique as unidade de $P(t)$.

(d) Calcule $P(t)$ na aproximação dipolar e mostre que para $t \gg \hbar/\Delta E$ é possível definir uma taxa de transição, Γ, que é independente do tempo.