Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações Lic. Física

Análise Matemática I

folha 2 — 2011'12

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$; (c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x}$; (e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$;

(b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$; (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{-3x^4+2x^3-x}{x^3-x}$; (f) $\lim_{x\to 0} \pi x \cos\left(\dfrac{1}{3\pi x}\right)$.

2. Determine os valores dos parâmetros a e b para que a função $f(x) = ax+b$ satisfaça

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\,\text{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right].$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|/x$. Estude a existência do limite de f quando $x \longrightarrow 0$.

4. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$; (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{3x+1}$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^5-1)/(x-1)$. Construa um prolongamento g de f a $\mathbb{R}$ que verifique

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1).$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}+a & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 1-ax & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Determine o valor de a de modo que f seja contínua em 1.

7. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

e $f(x) = x+1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Verifique que $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x) \neq (g\circ f)(0)$.

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

8. Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas:

(a) f contínua, g descontínua, $g\circ f$ contínua;

(b) f descontínua, g contínua, $g\circ f$ contínua;

(c) f e g descontínuas, $g\circ f$ e $f\circ g$ contínuas.

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

9. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

(b) Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

10. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2-x & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Verifique se f é derivável em $x = 1$.

11. Calcule y', sendo:

(a) $y = 2x^3 - x^2 + 7$;

(b) $y = \sqrt[3]{x^2} + x^\pi$;

(c) $y = x \ln x$;

(d) $y = \dfrac{1}{x^2}$;

(e) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;

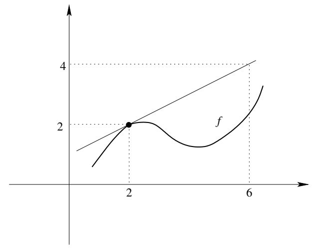
(f) $y = x \ln(x^2 + x + 1)$;

(g) $y = \operatorname{tg} x$;

(h) $y = e^{\operatorname{sen} x}$;

(i) $y = \operatorname{sen}(\cos(x^2))$;

12. A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da recta tangente a esse gráfico no ponto $(x, y) = (2, 2)$. Sendo $g(x) = f(x^2 - 2)$, qual o valor da derivada $g'(2)$?



13. A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da recta perpendicular a esse gráfico no ponto $(x, y) = (4, 2)$. Sendo $g(x) = f(5x - x^2)$, qual o valor da derivada $g'(1)$?