2ª Prova Escrita de Física Quântica II

15 de Janeiro de 2021

1 Regras para a realização da prova escrita

- O material de consulta permitido é exclusivamente o seguinte: notas disponíveis na blackboard. Não é permitida a consulta da internet nem de qualquer outro material escrito ou em vídeo, que não o material acima indicado.
- A prova é individual, pelo que é realizada sem troca de informação com e sem a ajuda de terceiros.
- A prova tem a duração máxima de 3 horas, sendo realizada das 9h às 12h. O resto do tempo é destinado a produzir o ficheiro de entrega. Os formatos permitidos para o ficheiro são: PDF (preferencialmente) ou LyX. O ficheiro em PDF pode ser produzido a partir do LyX ou de LaTeX.
- O ficheiro com a resolução do teste deve ser remetido à delegada de curso. Inês Espada, até às 20:00. Ficheiros remetidos depois dessa hora não serão aceites.
- A delegada remete-me um ficheiro zip/rar até às 20:30 com todas as provas recebidas dentro do tempo regulamentar.
- A declaração abaixo deve ser assinada por cada estudante individualmente e remetida como a última folha do PDF.
- O formato do nome do ficheiro é "primeiro e ultimo nome do aluno_nº do aluno_FQ_II_prova_2.pdf".

2 Minuta para a declaração de compromisso

Eu,(nome do aluno)____,
aluno Nº_________, do curso_______________________________,
declaro ter cumprido todas as regras acima indicadas. Braga, 15 de Janeiro de 2021, (Assinatura)_______________________________________

3 Enunciado da prova escrita

1. (6 pts) Considere o movimento harmónico de uma partícula sujeita a movimentar-se num plano bidimensional. O hamiltoniano do sistema é

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2). \tag{1}$$

   (a) (0.5 pts) Diga qual o espectro (valores próprios) deste hamiltoniano (note que o hamiltoniano é separável).

   (b) (0.5 pts) Considerando que para o movimento ao longo de x se define o operador de aniquilação a_x e que segundo y se define o operador de aniquilação b_y, e ainda que o vácuo é $|0_x, 0_y\rangle = |0_x\rangle|0_y\rangle$, escreva um estado geral do sistema em termos dos respectivos operadores de criação. Note o valor dos seguintes comutadores $[a_x, b_y^\dagger] = [a_x, b_y] = 0$.

   (c) (1 pts) Calcule a correcção à energia do estado fundamental do sistema, devido à perturbação $V = 2\lambda xy$, em primeira ordem de teoria de perturbações.

   (d) (2 pts) Calcule a correcção à energia do estado fundamental do sistema, devido à perturbação V dada acima, em segunda ordem de teoria de perturbações.

   (e) (2 pts) Diga quantos e quais os estados excitados de H com energia $2\hbar\omega$. Para esses estados, calcule a correcção à energia dos mesmos, em primeira ordem de teoria de perturbações, devido à perturbação V dada acima. O seu resultado deverá ser $E^{(1)} = \pm\lambda\hbar/(m\omega)$.

2. (5 pts) Considere uma partícula numa caixa de comprimento L e paredes infinitas. Admita que o sistema está inicialmente no estado fundamental.

   (a) (1,5 pts) Resolva a equação de Schrödinger encontrando os níveis de energia e as correspondentes funções de onda normalizadas para a partícula na caixa.

   (b) (0,5 pts) Considere agora que em $t = 0$ na primeira metade da caixa o potencial passa de $V = 0$ para $V = -V_0$, com V_0 uma constante positiva. Faça um esboço do novo potencial.

   (c) (3 pts) Se a perturbação anterior actuar durante um tempo finito T, calcule a probabilidade de encontrar a partícula num estado n arbitrário da caixa inicial. Poderá querer usar o resultado:

$$\int dx \sin(ax)\sin(bx) = \frac{b\cos(bx)\sin(ax) - a\cos(ax)\sin(bx)}{a^2 - b^2}, \tag{2}$$

   bem como a aproximação da onda giratória (rotating wave approximation).

3. (3 pts) O potencial de Yukawa tem a forma

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}. \tag{3}$$

Considere uma partícula que movimentando-se, inicialmente, segundo o eixo dos z's é sujeita ao potencial de Yukawa. Calcule a secção eficaz diferencial na primeira aproximação de Born. O seu resultado deverá ser da forma

$$\frac{d\sigma_B(\theta)}{d\Omega} = \frac{A}{[B + C\sin^2(\theta/2)]^2}, \tag{4}$$

onde A, B, e C são constantes reais a determinar.

4. (6 pts) Considere uma partícula confinada numa caixa unidimensional de paredes infinitas, localizadas em $x = \pm L$. Pretendemos calcular a energia do estado fundamental do problema na caixa usando o teorema variacional. Para o efeito considere a seguinte função de onda variacional

$$\psi(x, \alpha) = |x|^\alpha - L^\alpha, \tag{5}$$

onde $\alpha > 0$ é o parâmetro variacional.

   (a) (1 pts) Normalize a função de onda variacional $\psi(x, \alpha)$.

   (b) (2 pts) Calcule a média do hamiltoniano (note que este só tem o termo de energia cinética) usando a função variacional $\psi(x, \alpha)$.

   (c) (1 pts) Minimizando média obtida no item anterior em ordem a α, mostre que $\alpha = (1 + \sqrt{6})/2$.

   (d) (2 pts) Mostre que o valor da energia variacional tem a forma

   $$E^{\text{var}} = A^{\text{var}} \frac{\hbar^2}{mL^2}, \tag{6}$$

   onde A^{var} é uma constante positiva que deverá determinar. Compare o valor de A^{var} com o valor da constante A que decorre da solução exacta do problema, dizendo se A^{var} é menor ou maior que o valor da constante exacta A (note que pode responder a esta última parte da questão sem fazer qualquer conta).