

Física Quântica II

Soluções

Exercício 27: *Comportamento do factor de transmissão para um potencial duplo-delta de Dirac*

No exercício 27, obtivemos para o fator de transmissão de um potencial duplo-delta de Dirac $V(x) = \frac{V_0}{2} [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$, o resultado

$$|t(k)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \left(\cos(2ka) + \frac{m V_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka) \right)^2}. \quad (140)$$

Para k pequeno, multiplicamos o numerador e o denominador de $|t(k)|^2$ por k^2 e utilizamos as propriedades, $\cos(2ka) \approx 1$, $\frac{\sin(2ka)}{2ka} \approx 1$. Obtemos

$$|t(k)|^2 \approx \frac{\hbar^4 k^2}{m^2 V_0^2} \left(1 + \frac{m V_0 a}{\hbar^2} \right)^{-2},$$

que tende para zero quadraticamente, quando $k \rightarrow 0$, o que é muito semelhante ao resultado obtido para um potencial delta de Dirac, obtido na aula teórica.

Para k grande, utilizamos a propriedade, $\frac{\sin(2ka)}{k} \rightarrow 0$, e expandimos o denominador em primeira ordem em $1/k^2$, usando $1/(1+x) \approx 1-x+\dots$, para x pequeno. Obtemos

$$|t(k)|^2 \approx 1 - \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 k^2} \cos^2(2ka) + \dots,$$

que tende para 1 de forma oscilatória, como seria de esperar, dado o processo de interferência entre ondas difractadas pelos dois potenciais.

Abaixo, apresentamos um gráfico de $|t(k)|^2$ para uma escolha de parâmetros $a = 1$, $\frac{m V_0}{2\hbar^2} = -1$, ou seja, os mesmos valores utilizados no exercício 27.

Da equação (138), é fácil de ver que $|t(k)|^2 = 1$, se $\cos(2ka) + \frac{m V_0}{2\hbar^2 k} \sin(2ka) = 0$. Esta igualdade dá origem à seguinte equação transcendente para k

$$\tan(2ka) = -\frac{2\hbar^2 k}{m V_0},$$

que pode ser resolvida graficamente, determinando a interseção de uma função tangente com a reta de inclinação $-\frac{2\hbar^2}{m V_0 a}$ (optamos por representar a função em termos da variável adimensional $x = ka$, e tomamos $V_0 < 0$).

Com as escolhas feitas acima, $a = 1$ e $\frac{m V_0}{2\hbar^2} = -1$, obtém-se o gráfico abaixo. O intervalo traçado é $k \in]\pi/4, 3\pi/4[$, onde as funções se cruzam uma vez.

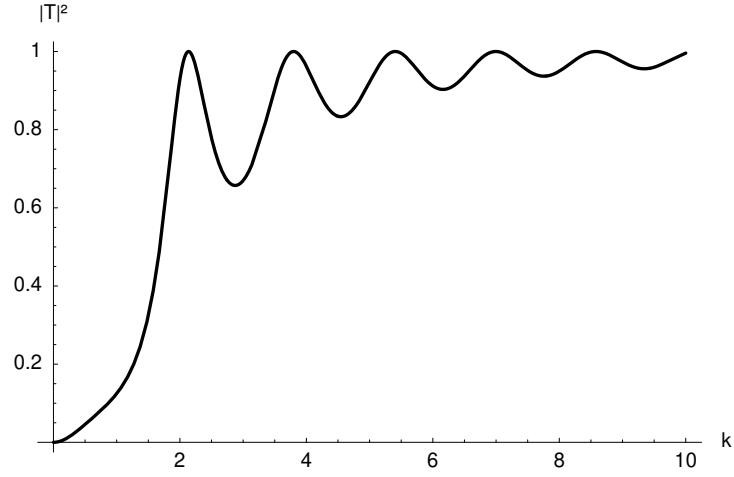


Figure 4: $|t(k)|^2$ para a escolha de parâmetros $a = 1$ e $\frac{mV_0}{2\hbar^2} = -1$.

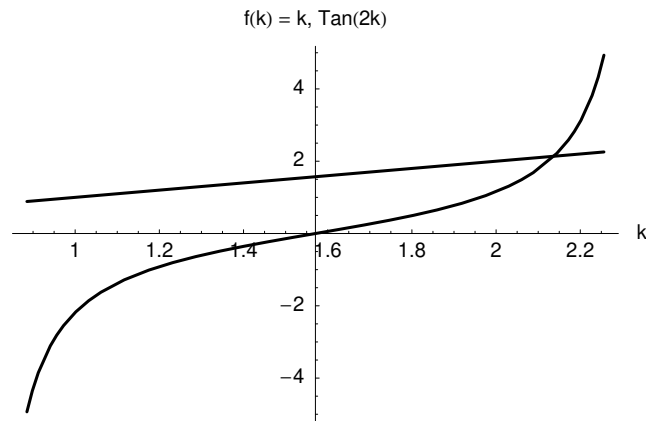


Figure 5: Funções k e $\tan(2k)$, cujas interseções determinam o máximo de $|t(k)|^2$ (para uma escolha de parâmetros $a = 1$ e $\frac{mV_0}{2\hbar^2} = -1$). O intervalo traçado é $k \in]\pi/4, 3\pi/4[$, onde as funções se cruzam uma vez.

Exercício 28: *Integral no espaço de momentos como limite de uma soma*

É trivial demonstrar que somatório definido sobre os momentos de uma partícula numa linha de comprimento L , com condições de fronteira periódicas, $k_n = \frac{2\pi n}{L}$, onde $n \in \mathbb{Z}$, pode ser aproximado por

$$\begin{aligned}\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(k_n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(k_n) \frac{2\pi}{L} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(k_n) \Delta k_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} f(k),\end{aligned}\tag{141}$$

quando L tende para infinito, onde $\Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L}$. A expressão na segunda linha é simplesmente a soma de Riemann que, como se sabe, tende para o valor do integral de $f(k)$ quando $\Delta k_n \rightarrow 0$, se este existir.

De igual modo, em três dimensões, numa caixa rectangular com dimensões L_x , L_y e L_z e condições fronteira periódicas, temos $\mathbf{k}_{n_x, n_y, n_z} = \frac{2\pi}{L_x} n_x \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{2\pi}{L_y} n_y \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{2\pi}{L_z} n_z \hat{\mathbf{e}}_z$, $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$, sendo o elemento de volume entre um dado vetor \mathbf{k} e os seus vizinhos igual a $\Delta V_k = \frac{(2\pi)^3}{L_x L_y L_z} = \frac{(2\pi)^3}{V}$, em que $V = L_x L_y L_z$ é o volume da caixa, pelo que

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}),\tag{142}$$

um resultado já usado na aula teórica.