Exercícios de Física Computacional

Escola de Ciências da Universidade do Minho

Física e Engenharia Física

ano letivo 2020/2021, 1º semestre

Folha 7

1. Resolva a equação
$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \sin(t)$$
usando o método de Euler sabendo que $x(t=0) = 0$.

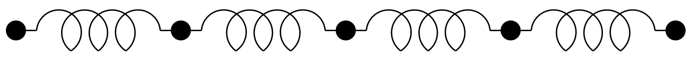
2. Resolva a equação
$$\frac{dy}{dx} = 3(1+x) - y$$
usando o método de Euler sabendo que para $x = 1$ temos $y = 4$. Compare a solução numérica obtida com a solução analítica ($y = 3x + e^{1-x}$), testando vários números de iterações na solução numérica.

3. Resolva a equação
$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \sin(t)$$
usando os métodos de Runge-Kutta de segunda e quarta ordem, sabendo que $x(t=0) = 0$. Compare, no mesmo gráfico, $N = 10, 20, 50, 100$. Sugestão: fazer um gráfico para os cada um dos métodos onde se comparem os vários N.

4. Em 1963 Edward Lorenz obteve as seguintes equações diferenciais no âmbito de um modelo atmosférico simples:
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y-x), \qquad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \qquad \frac{dz}{dt} = xy - bz,$$
sendo σ, r, e b constantes. Estas equações são consideradas um dos primeiros exemplos de caos determinista, tendo um papel importante na historia da Física.

   Escreva um programa *python* para resolver estas equações para $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$ no intervalo $t \in [0, 50]$ s e com as condições iniciais $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. Represente num gráfico z em função de x para obter a famosa curva em forma de borboleta que nunca se repete.

5. Considere o seguinte sistema de N massas idênticas, juntas por molas lineares idênticas e na ausência de gravidade e atrito:



Os deslocamentos horizontais ξ_i das massas $i = 1, \ldots, N$ satisfazem as seguintes equações de movimento:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_1}{\mathrm{d}t^2} = k(\xi_2 - \xi_1) + F_1,$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}t^2} = k(\xi_{i+1} - \xi_i) + k(\xi_{i-1} - \xi_i) + F_i\,,$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_N}{\mathrm{d}t^2} = k(\xi_{N-1} - \xi_N) + F_N.$$

onde m é a massa de cada massa, k é a constante de cada mola e F_i é a norma da força externa na massa i.

Escreva um programa para resolver estas equações de movimento usando o método de Runge–Kutta de quarta ordem para $m = 1$ kg, $k = 6$ N/m e todas as forças externas são zero com exceção de $F_1 = \cos\omega t$, com $\omega = 2$ s^{-1}. Represente as soluções para os deslocamentos ξ_i de $N = 5$ massas em função do tempo, entre $t = 0$ s e $t = 20$ s.

6. Escreva um programa para resolver a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x + 5 = 0$$

usando o método do salto de rã (*leapfrog method*). Resolva entre $t = 0$ e $t = 40$ em passos de $h = 0.001$ com as condições iniciais $x = 1$ e $dx/dt = 0$. Represente a solução obtida (x em função de t).

7. Use o método de Verlet para calcular a posição da terra em torno do sol sabendo que as equações de movimento para a posição $\mathbf{r} = (x, y)$ de um planeta no seu plano orbital são:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,,$$

onde $G = 6.6738 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ é a constante gravitacional de Newton e $M = 1.9891 \times 10^{30}$ kg é a massa do sol. A órbita da terra não é perfeitamente circular, estando o planeta umas vezes mais próximo do sol e outras mais afastado. No ponto de maior aproximação ao sol (periélio) a terra move-se tangencialmente (*i.e.* perpendicular à linha entre a terra e o sol), estando a uma distância de 1.4710×10^{11} m do sol e uma velocidade linear de $3.0287 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

   (a) Calcule numericamente a órbita da terra usando o método de Verlet com um passo de uma hora. Represente a órbita mostrando que não é perfeitamente circular.

(b) Considere a energia potencial gravítica, $-GMm/r$, onde $m = 5.9722\times 10^{24}$ kg, e a energia cinética, $\frac{1}{2}mv^2$. Calcule estas duas quantidades em cada passo, mostrando a respetiva variação, bem como a energia total.

(c) Discuta os resultados obtidos.

8. Considere um bala de canhão esférica disparada a partir do chão. A bala sofre uma resistência no ar correspondente a uma força dissipativa na direção ao movimento e sentido oposto, sendo a sua magnitude dada por

$$F = \tfrac{1}{2}\pi R^2 \rho C v^2,$$

onde R é o raio da esfera, ρ é a densidade do ar, v é a velocidade e C é uma constante.

(a) Considerando a segunda lei de Newton, mostre que as equações de movimento para a posição (x, y) da bala são dadas por:

$$\ddot{x} = -\frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\,\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \qquad \ddot{y} = -g - \frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\,\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2},$$

onde m é a massa da bala, g é a constante de aceleração gravítica e $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ são a primeira e segunda derivadas de x em relação ao tempo.

(b) Transforme estas duas equações diferenciais de segunda ordem em quatro equações diferenciais de primeira ordem e escreva um programa que as resolva numericamente para uma bala de massa 1 kg e raio 8 cm, disparada com um ângulo de $30°$ com a horizontal e com velocidade inicial de $100\,\mathrm{m s^{-1}}$. A densidade do ar é $\rho = 1.22\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ e $C = 0.47$.

(c) Obtenha o gráfico de y em função de x e estime a distância horizontal atingida.

(d) Discuta como varia a distância atingida em função de m e de C.