1.a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+5}$

Estuda-se a natureza da série dos módulos correspondente $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n n}{n^3+5}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^3+5}$.

Utilizando o 2º critério da comparação, compara-se a série dos módulos dada com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$;

$$\lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n^3+5}} = 1.$$

Como deu um valor finito diferente de zero, significa que as séries $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{n}{n^3+5}$ são da mesma natureza.

Como a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente então a série $\sum \frac{n}{n^3+5}$ também é convergente.

Logo, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+5}$ é absolutamente convergente.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$

Como não existe $\lim (-1)^n$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ é divergente.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n^2}$

Estuda-se a natureza da série dos módulos correspondente $\sum_{n=1}^{n} \left|\frac{(-1)^n}{3^n n^2}\right| = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{3^n n^2}$.

Utiliza-se o critério da razão:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}}{\frac{1}{3^n n^2}} = \lim \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n n^2}$ é convergente, logo a série $\sum \frac{(-1)^n}{3^n n^2}$ é absolutamente convergente.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{e^n}$

A série dos módulos correspondente é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{n \operatorname{sen} n}{e^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,|\operatorname{sen} n|}{e^n}.$$

Como $|\operatorname{sen} n| < 1$,

tem-se $n \cdot |\operatorname{sen} n| < n$

$$\frac{n\,|\operatorname{sen} n|}{e^n} < \frac{n}{e^n} \qquad (1).$$

Vamos estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$, utilizando o critério D'Alembert:

$$\lim \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{e^n}{e^{n+1}} = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

Significa que a série $\sum \frac{n}{e^n}$ é convergente.

Como a série $\sum \frac{n}{e^n}$ é convergente, a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,|\operatorname{sen} n|}{e^n}$ é convergente, pela comparação dos termos em (1)

Assim, a série dada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{e^n}$ é absolutamente convergente.

e) $\sum \frac{n^2 \cos(n\pi)}{1+n^3}$

A série dos módulos correspondente é $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{n^2 \cos(n\pi)}{1+n^3} \right| =$
$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 |\cos(n\pi)|}{1+n^3}$.

Com um estudo análogo ao exercício anterior:

$$|\cos(n\pi)| < 1$$

$$\frac{n^2 |\cos(n\pi)|}{1+n^3} < \frac{n^2}{1+n^3}$$

Mas a série dos termos maiores $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^3}$ é divergente (comparando com a série $\sum \frac{1}{n}$). Assim, nada se pode concluir sobre a convergência da série dos termos menores $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 |\cos(n\pi)|}{1+n^3}$.

No entanto, $\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ par} \\ -1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$. Isto é,

$\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim a série dada $\sum \frac{n^2 \cos(n\pi)}{1+n^3} = \sum \frac{n^2 (-1)^n}{1+n^3}$.

A série respectiva dos módulos $\sum \frac{n^2}{1+n^3}$ é da mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n}$, isto é, divergente.

Se a série dos módulos não é convergente, nada se pode concluir sobre a série dada $\sum \frac{(-1)^n n^2}{1+n^3}$

Como a sucessão $u_n = \frac{n^2}{1+n^3}$ é decrescente e

$\lim \frac{n^2}{1+n^3} = 0$, pelo critério de Leibniz, a série $\sum \frac{(-1)^n n^2}{1+n^3}$ é

convergente. Simplesmente convergente.

f) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{4+\cos n}{n^3}$

A série dos módulos correspondente é

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|4+\cos n|}{n^3}$$

e tem-se que $\quad |4+\cos n| \leq |4| + |\cos n| \leq 4+1 = 5$

$$\frac{|4+\cos n|}{n^3} \leq \frac{5}{n^3}$$

Como a série dos termos maiores $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{n^3}$ é convergente

(série de Riemann com $\alpha = 3 > 1$), a série dos módulos é convergente

e a série dada é absolutamente convergente.

2\. a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^2$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/4}}$, pois $\lim \frac{1}{n^{1/4}} = 0$, $\frac{1}{n^{1/4}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$ é divergente

pois é uma série de Riemann com $\alpha = \frac{3}{4} < 1$.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, pois $\lim \frac{1}{n^{1/3}} = 0$

$\frac{1}{n^{1/3}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ é divergente

pois é uma série de Riemann com $\alpha = \frac{2}{3} < 1$.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$. A série é convergente pelo critério de Leibniz $\left(u_n = \frac{1}{n^{1/2}} \text{ é decrescente e } \lim \frac{1}{n^{1/2}} = 0 \right)$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.