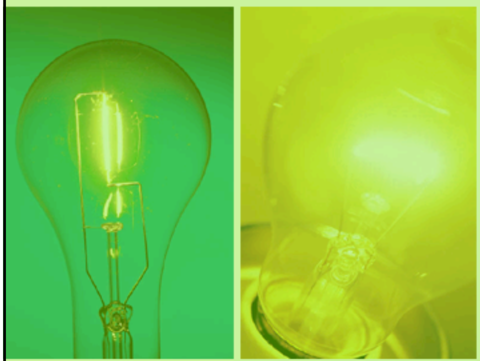
Processamento de Sinal

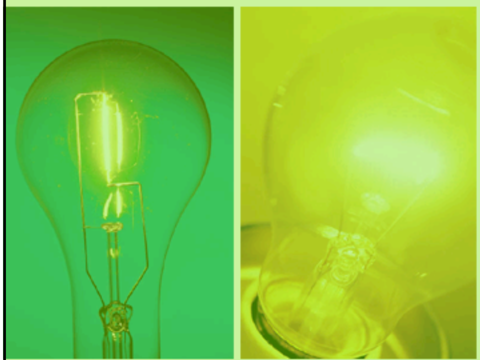


2º Ano
Discrete Fourier Series

Resumo

- Série de Fourier de sinais discretos
- Propriedades da série de Fourier discreta

Série de Fourier Discreta



Representação de sinais discretos

- Sinal discreto periódico:
  - Um sinal discreto diz-se periódico *sse*:

    $$x[n] = x[n+N]$$

    onde N será o período do sinal e Ω a sua frequência angular fundamental.

- Sinais harmónicos.
  - Analogamente ao caso contínuo, podemos definir uma família de sinais que são harmónicos de um sinal fundamental

    $$\Phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, N-1.$$

Sinais harmónicos discretos

$$\Phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, N-1.$$

- Considerações:
  - Qual é a frequência do harmónico fundamental ?
    - A frequência fundamental será $\Omega_0=2\pi/N$.
  - Qual será o efeito de escolher um número de harmónicos maior que N ?

Sinais harmónicos discretos

$$\Phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, N-1.$$

- Qual será o efeito de escolher um número de harmónicos maior que N ?

$$e^{jk(2\pi/N)n} \wedge k > N \qquad \Rightarrow e^{jk(2\pi/N)n} = e^{j(rN+m)(2\pi/N)n}$$
$$= e^{jrN(2\pi/N)n + jm(2\pi/N)n}$$
$$= e^{jrN(2\pi/N)n} e^{jm(2\pi/N)n}$$
$$= e^{j2\pi rn} e^{jm(2\pi/N)n}$$
$$= e^{jm(2\pi/N)n}$$

  - Quando k > N, a frequência do harmónico será igual a um dos harmónicos de ordem inferior.
  - Este efeito deve-se ao comportamento cíclico das funções seno/coseno discretas.

logo teremos $\Phi_k[n] = \Phi_{k+rN}[n]$

Decomposição de um sinal discreto

- Decomposição:
  - Como no caso contínuo, um sinal discreto periódico pode ser representado como:

$$x[n] = \sum_k a_k \Phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

  - Como apenas existem N harmónicos distintos podemos simplificar a equação anterior:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \Phi_k[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

  A esta equação chamaremos de *série de Fourier para sinais discretos* ou *Série de Fourier Discreta*.

Determinação de a_k

- Qual será a expressão dos coeficientes a_k ?
  - Consideremos a equação de *x[n]*:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

  se multiplicarmos ambos os lados da equação por: $e^{-jr(2\pi/N)n}$

  teremos

$$x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} e^{-jr(2\pi/N)n}$$

Determinação de a_k

Se somarmos num período em ordem a n:

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=<N>}\sum_{k=<N>} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

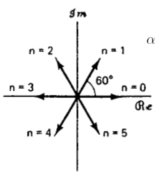
invertendo a ordem dos somatórios

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=<N>} a_k \underbrace{\sum_{n=<N>} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}}_{\text{Qual é valor deste somatório ?}}$$

Determinação de a_k

Representação das exponenciais para diferentes valores de (k-r) quando N= 6: $e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$

$e^{j(k-r)(2\pi/6)n}$, onde $k-r=1$



$\alpha = 60°$

O que acontecerá quando (k-r) > N ?

$$\begin{aligned} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} &\Rightarrow e^{j(rN+m)(2\pi/N)n} \\ &= e^{jrN(2\pi/N)n+jm(2\pi/N)n} \\ &= e^{jrN(2\pi/N)n}e^{jm(2\pi/N)n} \\ &= e^{j2\pi rn}e^{jm(2\pi/N)n} \\ &= e^{jm(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

Determinação de a_k

$$\sum_{n=<N>} e^{\jmath(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & , \quad (k-r)=0,\ \pm N,\ \pm 2N,\ \ldots \\ 0 & , \quad \text{outros valores} \end{cases}$$

O valor do somatório será nulo a não ser que (k-r) seja 0.

– Substituindo na expressão anterior teremos:

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-\jmath r(2\pi/N)n} = a_k N$$

portanto teremos

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-\jmath r(2\pi/N)n}$$

Série de Fourier Discreta

- Ao par de equações

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{\jmath k(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-\jmath r(2\pi/N)n}$$

chamamos de equação de síntese e de análise da série de Fourier discreta.

Propriedades da Série de Fourier

Periodic signal	Fourier series coefficients
$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ periodic with period N	$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\}$ periodic with period N
$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
$e^{jM(2\pi/N)n}x[n]$	a_{k-M}
$x^*[n]$	a^*_{-k}
$x[-n]$	a_{-k}
$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0 & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\frac{1}{m}a_k$ (viewed as periodic with period mN)
$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (finite-valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}}\right)a_k$
$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \mathcal{R}e\{a_k\} = \mathcal{R}e\{a_{-k}\} \\ \mathcal{I}m\{a_k\} = -\mathcal{I}m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ [$x[n]$ real]	$\mathcal{R}e\{a_k\}$
$x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}$ [$x[n]$ real]	$j\,\mathcal{I}m\{a_k\}$

Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$