Exame de Recurso de FQII – 2021-2022

5 de Fevereiro de 2022

1. (2 pts) Calcule o seguinte elemento de matriz envolvendo estados e operadores do oscilador harmónico

$$\langle m|aa^\dagger a^\dagger|n\rangle.$$

2. (4 pts) Sabendo que

$$L_+|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle$$
$$L_-|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|l,m-1\rangle$$

construa as matrizes (4×4) para os operadores L_z, L_x e L_y para o momento angular $l = 3/2$. Sugestão: para simplificar a conta calcule primeiro os elementos de matriz $\langle l,m|L_\pm|l,n\rangle$, para n e m arbitrários e só depois especifique que $l = 3/2$.

3. (5 pts) Considere um spin 1/2 ao qual é aplicado um campo magnético $\mathbf{B} = B_0(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. O hamiltoniano do acoplamento Zeeman, do campo magnético ao spin, é dado por

$$H_Z = -\lambda \mathbf{S}\cdot\mathbf{B},$$

onde $\lambda > 0$ e $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_x)$ é o vector formado pelas componente do operador de spin.

(a) Mostre que o hamitoniano comuta com o operador $\mathbf{S}^2$. Sugestão: use a relação seguinte envolvendo comutadores de operadores $[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$.

(b) Determine os valores e vectores próprios deste hamiltoniano.

(c) Suponha que no tempo $t = 0$ o sistema se encontra no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle,$$

onde $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ são estados próprios do operador S_z. Determine $|\psi(t)\rangle$ num tempo arbitrário t.

4. (5 pts) Considere que ao problema anterior se adiciona uma perturbação da forma $V = ig(S_x S_z - S_z S_x)$, onde $g > 0$ e $i = \sqrt{-1}$. O hamiltoniano total é da forma $H = H_Z + V$.

   (a) Avalie o comutador $[S_x, S_z]$ e expresse-o em termos de S_y.

   (b) Calcule, em teoria de perturbações de primeira ordem (independente do tempo), a correção aos valores próprios de H_Z devido à perturbação V.

   (c) Calcule, em segunda ordem de teoria de perturbações (independente do tempo), a correção aos valores próprios de H_Z devido à perturbação V.

   (d) Calcule, em primeira ordem de teoria de perturbações (independente do tempo), os estados próprios de H.

5. (4 pts) Considere um poço radial descrevendo um centro espalhador, de profundidade $-V_0$, com $V_0 > 0$, e de alcance L.

   (a) Faça um esboço da energia potencial.

   (b) Calcule o desvio de fase δ_0 associado ao canal de momento angular $l = 0$, para uma partícula de energia $E > 0$. Poderá útil saber que

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x},$$
$$\eta_0(x) = -\frac{\cos x}{x}.$$

   (c) Calcule o desvio de fase δ_0 no limite em que $E \gg V_0$, onde E é a energia da partícula. (Ao fazer as expansões poderá ter que considerar ordens superiores relativamente à ordem zero.)

   (d) Calcule a secção eficaz diferencial devido a δ_0, no limite do item anterior.