

→ Há soluções tipo: polinômios Hermite, funções de Hermite-Gaussiana (soluções da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico).

Solução de ordem  $n$  tem  $n$  zeros.

Modos de Laguerre Gauss

↳ Considera-se o  $x$  e o  $y$ : simetria cilíndrica.

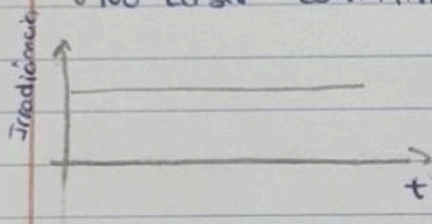
02/12/2022

## 6. Lasers Pulsados de acordo em Fase

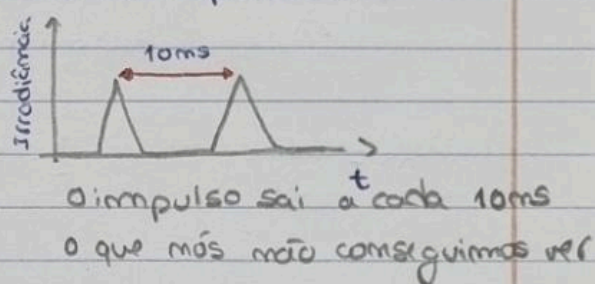
→ Vimos no capítulo 5 que um laser com um meio homogêneo alargado tende a oscilar num único modo longitudinal caso o efeito de ~~to~~ spatial hole é considerado pequeno.

→ No entanto, no geral, a oscilação acontece em muitos modos longitudinais, no alargamento não homogêneo. (+ compli. cab)

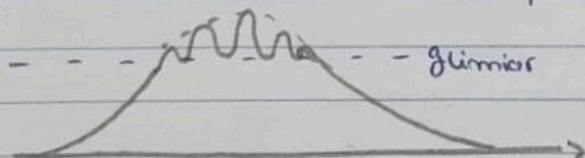
• No laser contínuo:



• No laser pulsado:



→ Num alargamento não homogêneo, considerando um sistema de 4 níveis vários modos podem oscilar simultaneamente.



↳ Há partida, estes modos não precisam de ter uma relação de fase uns com os outros.

→ Se tivermos um laser a oscilar em vários modos longitudinais, se a fase entre os modos for aleatória haverá interferência entre os modos.

→ Uma vez que o processo de amplificação do campo (no estado estacionário) é linear e coerente o padrão na cavidade ficará mais ou menos estável, embora: poderá haver uma pequena varia-



são / contribuição da emissão espontânea ao longo do eixo da cavidade num modo com uma fase aleatória.

! Não não vamos ter em conta esta contribuição!

→ Considere o campo elétrico do feixe laser,  $E(t)$ , que sai durante uma volta na cavidade  $T = \frac{2L}{c}$

→ A frequência base da sinusoidal,  $\omega_c$ , pode ser diferente das frequências dos modos longitudinais,  $\omega_q$ . Se os sinais contêm flutuações rápidas na escala temporal  $T$ , quer na amplitude quer na fase, o espectro do pulso será largo relativamente à separação das frequências:

$$\Delta\omega_{\text{cav}} = \omega_{q+1} - \omega_q$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

→ Depois de 2 voltos na cavidade:

No cavidade

$$E(t) = E(t) + \underbrace{E(t-T)}_{\downarrow}$$

Transformada de Fourier

$$\underbrace{e^{i\omega T}}_{\downarrow} E(\omega)$$

Atraso no tempo é uma mudança de fase em Fourier

→ Então o espectro <sup>resultante</sup> emitido depois de 2 voltos é:

$\bar{E}(\omega)$

$$\bar{E}(\omega) = \frac{1}{2} (1 + e^{i\omega T}) \tilde{E}(\omega)$$

$$= e^{i\omega T/2} \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) \tilde{E}(\omega)$$

$$\left( \frac{1 + e^{i\omega T}}{2} \right) = e^{i\omega T/2} \underbrace{\left( \frac{e^{-i\omega T} + e^{i\omega T}}{2} \right)}_{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

Começa a haver uma modulação do espectro com picos nas frequências dos modos longitudinais.

→ Assim a potência espectral é:

$$I(\omega) \sim |\bar{E}(\omega)|^2 = \cos^2(\omega T/2) I(\omega)$$

→ Após 3 voltos, os picos ficam cada vez mais finos e melhor definidos.

→ Depois de N voltas tem-se:

$$\varepsilon \quad \varepsilon^{(N)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^{(N)}(t-nT) \xrightarrow{f} \bar{\varepsilon}^{(N)}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega nT} \bar{\varepsilon}(\omega)$$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega nT} = 1 + e^{i\omega T} + \dots + e^{i(N-1)\omega T}$$

$$-e^{i\omega T} S_N = e^{i\omega T} + e^{2i\omega T} + \dots + e^{i(N-1)\omega T} + e^{i\omega T}$$

Somando estas equações

$$S_N (1 - e^{i\omega T}) = 1 - e^{i\omega NT} \quad \Rightarrow \quad S_N = \frac{1 - e^{i\omega NT}}{1 - e^{i\omega T}}$$

$$\bar{\varepsilon}^{(N)}(\omega) = \frac{1 - e^{i\omega NT}}{1 - e^{i\omega T}} \bar{\varepsilon}(\omega)$$

→ Potência Espectral:

$$I^{(N)}(\omega) \sim |\bar{\varepsilon}^{(N)}(\omega)|^2 = \frac{1 - \cos(N\omega T)}{1 - \cos(\omega T)} I(\omega) = \frac{\sin^2(N\omega T/2)}{\sin^2(\omega T/2)} I(\omega)$$

$$I \sim |\bar{\varepsilon}_\omega^N|^2 \sim \frac{(1 - e^{iN\omega T})(1 - e^{-iN\omega T})}{(1 - e^{i\omega T})(1 - e^{-i\omega T})} = \frac{1 - e^{iN\omega T} - e^{-iN\omega T} + 1}{1 - e^{i\omega T} - e^{-i\omega T} + 1}$$

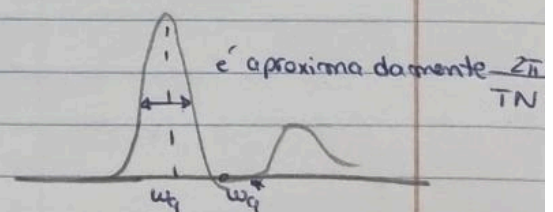
$$= \frac{2\cos(N\omega T)}{2\cos(\omega T)}$$

→ A largura do pico varia com o N, número de voltas. A largura a meia altura (FWHM) dum pico é então:

$$\frac{N\omega^* T}{2} - \frac{N\omega_q T}{2} = \pi$$

$$\Delta\omega = \omega^* - \omega_q = \frac{2\pi}{NT} = \frac{\Delta\omega_{\text{cav}}}{N}$$

$$\omega = \frac{m 2\pi}{NT} = \frac{m}{N} \frac{2\pi}{T} \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{2L} = 2\pi \Delta\nu_{\text{cav}}$$



→ No espaço das frequências a descrição é em termos dos modos longitudinais:



• 1 modo:  $E(t) = \text{Re}[E_0 e^{-i\omega t + \phi}]$

• 2 modos:  $E(t) = \text{Re}[E_1 e^{-i\omega_1 t + \phi_1} + E_2 e^{-i\omega_2 t + \phi_2}]$

$$I(t) = \frac{1}{2} E_0 c |E(t)|^2 = I_1 + I_2 + E_0 c E_1 E_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_2 - \phi_1]$$

• 3 modos:  $\text{Re}[E_0 e^{-i\omega_{q-1} t} + E_0 e^{-i\omega_q t} + E_0 e^{-i\omega_{q+1} t}]$

↳ todos com a mesma fase,  $\phi = 0$ .

N modos longitudinais

→ No caso em que as amplitudes são todas iguais:

$$E^{(N)}(t) = E_0 \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i(\omega_0 + m \Delta\omega_{\text{cav}})t - i\phi_m}$$

• Se tivermos fases aleatórias:

$$I(t) = I_0 \left[ \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i(\omega_0 + m \Delta\omega_{\text{cav}})t - i\phi_m} \right] \left[ \sum_{m=0}^{N-1} e^{i(\omega_0 + m \Delta\omega_{\text{cav}})t + i\phi_m} \right]$$

$$= I_0 \sum_{m=n} 1 + I_0 \sum_{m \neq n} e^{-i(m-n)\Delta\omega_{\text{cav}} t - i(\phi_m - \phi_n)}$$

$$\langle I(t) \rangle = N I_0$$

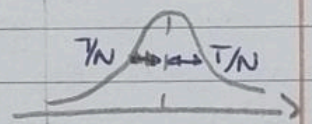
→ Se tivermos um acordo de fase:

$$E^{(N)}(t) = E_0 \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i(\omega_0 + m \Delta\omega_{\text{cav}})t} = E_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{1 - e^{-iN \Delta\omega_{\text{cav}} t}}{1 - e^{-i \Delta\omega_{\text{cav}} t}}$$

$$I(t) = I_0 \frac{1 - \cos(N \Delta\omega_{\text{cav}} t)}{1 - \cos(\Delta\omega_{\text{cav}} t)} = I_0 \frac{\text{sim}^2(N \Delta\omega_{\text{cav}} t/2)}{\text{sim}^2(\Delta\omega_{\text{cav}} t/2)}$$

• Depois um tempo  $\Delta t = \pm T/N$  o ~~volt~~ volta de cada pico os fasores são distribuídos uniformemente, ou seja, a largura dos picos é

$$\frac{T}{N} \sim \text{FWHM}$$



Resumo: Acordo de Fase

$$I = \frac{I_0 \text{sim}^2(N \Delta\omega_{\text{cav}} t/2)}{\text{sim}^2(\Delta\omega_{\text{cav}} t/2)}$$

$$I_{\text{pico}} = N^2 I_0$$

$$t_{\text{rep}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{\text{cav}}} = \frac{1}{\Delta\nu_{\text{cav}}} = \frac{\text{dvolta}}{\Delta\nu_{\text{cav}} c} = t_{\text{volta}}$$

$$\Delta t_{\text{pico}} = \frac{2\pi}{N \Delta\omega_{\text{cav}}} = \frac{1}{N \Delta\nu_{\text{cav}}} = \frac{1}{N} \frac{\text{dvolta}}{c}$$



→ Como provocar o acordo de fase?

↳ Modulação ativa: inserir algo na cavidade que provoque uma modulação nas perdas (modulador acústico-ótico)

• Cada modo é acoplado às bandas laterais provocadas pela modulação

• Depois de algum tempo todos os modos são acoplados e têm/estão em acordo de fase.

↳ Modulação passiva: inserir algo na cavidade que favorece intensidades altas (Absorção saturada)

• Os picos fortes crescem à custa dos picos mais fracos. No final o pico mais forte ganha.

Modulador acústico ótico (ativo)

↳ Este método baseia-se na difração da luz através de ondas sonoras.

→ Uma onda sonora é basicamente uma onda de onde a densidade varia, e, como consequência, o índice de refração varia. Assim, uma onda sonora pode atuar como um "meio" de difração.

→ Uma onda sonora com comprimento de onda  $\lambda_s$  difrata luz de  $\lambda$  com um ângulo de difração  $\theta$ :

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2m \lambda_s} \rightarrow \text{o que vai ser difratado (luz)}$$

→ Se um bloco de material, que contém uma onda acústica, estiver dentro da cavidade, as perdas por difração vão oscilar entre com frequência  $2\omega_s$ . Se  $\Delta = 2\omega_s = \frac{\pi}{L}$ , as perdas da cavidade são moduladas no modo de separação de frequências, como gostaríamos com o mode locking.

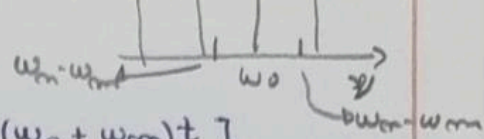
→ Como as ondas audíveis têm frequências do tipo 20 Hz até  $2 \times 10^4$  Hz, e as separações dos modos num laser são muito maiores, é visível que é necessário ultrasonic acoustic modulation para mode locking.

→ Isto é feito ao passar um bloco de <sup>quartzo</sup> cristal com um cristal piezoelétrico.

→ Para induzir o acordo de fase, há um ajuste de  $\omega_m = 2\pi c/2L$ . Cada modo compete com os modos vizinhos.



$$e^{-i\omega_0 t} \cos(\omega_m t) = \frac{1}{2} \left[ e^{-i(\omega_0 - \omega_m)t} + e^{-i(\omega_0 + \omega_m)t} \right]$$



### Absorção Saturada (Passiva)

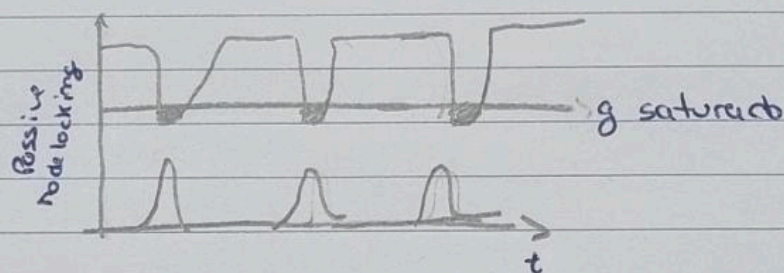
→ Se uma material absorsor é colocado dentro da cavidade, assumindo/de acordo com a equação a baixo:

coeficiente de absorção  $\rightarrow a = \frac{a_0}{1 + I/I^{sat}}$

$$I_{sat} \gg I$$

→ Isto resulta em perdas na cavidade moduladas nos modos de separação de frequência, e assim o absorvor age como um mode locking.

→ A absorção satura durante a passagem (pode saturar) do pulso. A parte inicial do pulso sofre maiores perdas, só a parte central é que "vê" ganho líquido.



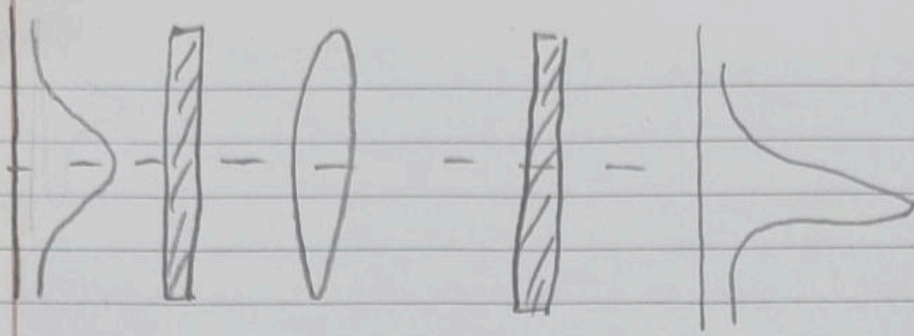
### Kerr Lens Mode Locking (KLM)

→ Esta técnica baseia-se no efeito da ótica não linear, também conhecido por Efeito de Kerr, que causa a alteração no índice de refração do material em resposta à intensidade do campo elétrico.

$$n = n_0 + n_2 I$$

→ Uma lente de Kerr é inserida dentro da cavidade e é utilizada para modular a intensidade do laser. Ao se ajustar a intensidade do feixe e as propriedades da lente, é possível gerar pulsos de  $\omega_2$  muito pequenos, na ordem dos nano ou femto-segundos.

→ A abertura da lente é muito pequena, a velocidade é baixa, e assim não causa perdas.



### • Vantagens

- Muito rápido  $\Rightarrow$  pulsos pequenos
- Muito alargado  $\Rightarrow$  Tunabilidade alargada

### • Desvantagens

- Não inicia sozinho (precisa de fonte de luz)
- Ajustes de cavidade de críticos (operam perto do limite de estabilidade)