ELECTROMAGNETISMO
2011/2012

4º Teste - 30/Janeiro/2012

Resolução

1. Respostas C e E

- Y tem que ser positiva pois é uma "fonte" de linhas de campo
- Z tem que ser negativa pois é um "sumidoiro" de linhas de campo
- A intensidade do campo eléctrico de cada uma das cargas varia inversamente com o quadrado da distância; a sobreposição dos dois campos nunca poderá originar um campo de igual valor em todos os pontos
- A meia distância entre as duas cargas o potencial devido a cada uma das cargas é igual em módulo, mas de sinal oposto:

$$V_Y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d} \quad , \quad V_Z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}$$

onde q é o módulo de cada uma das cargas e d é metade da separação entre as cargas.

A soma dos dois potencial dá um potencial resultante nulo.

2. Resposta $\underline{c}$

Na situação I as fontes do campo eléctrico são as cargas distribuidas sobre as placas do condensador, enquanto que na situação II o campo eléctrico é induzido por um campo magnético variável no tempo.

A equação de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que se escreve na forma integral

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, da\right] \quad \left(\begin{array}{c}\text{Lei de} \\ \text{Faraday}\end{array}\right)$$

permite concluir que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$ na situação I, porque $\vec{B} = 0$ neste caso

e

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$ na situação II, porque $d\vec{B}/dt \neq 0$

Então:

caso I: $W_I = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (o campo é conservativo)

caso II: $W_{II} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ (o campo não é conservativo)

$q \equiv$ carga de prova

3. Resposta D

Quando uma carga q com velocidade $\vec{v}$ fica sob acção de um campo magnético $\vec{B}$, actua sobre ela uma força magnética dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (\underline{A} \text{ é falsa})$$

$\vec{F}$ é, pois, perpendicular ao plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$ e tem como efeito alterar a direcção do vector $\vec{v}$ ($\underline{B}$ é falsa) e, consequentemente, alterar a direcção do momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ ($\underline{C}$ é falsa) e a trajectória da partícula ($\underline{E}$ é falsa). Mas $\vec{F}$ é sempre perpendicular à trajectória, o que significa que não realiza trabalho. Por isso, a carga que penetra no campo magnético modifica a sua trajectória sem perda nem ganho de energia: a sua energia cinética não é alterada ($\underline{D}$ é verdadeira).

4. Resposta B

Neste caso a Lei de indução de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

onde $\phi = \int_S \vec{B}.\vec{n}\,da$ e $\mathcal{E} = \oint \vec{E}.d\vec{l}$ é a FEM,

escreve-se

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(BA)$$

$$= -A\frac{dB}{dt}$$

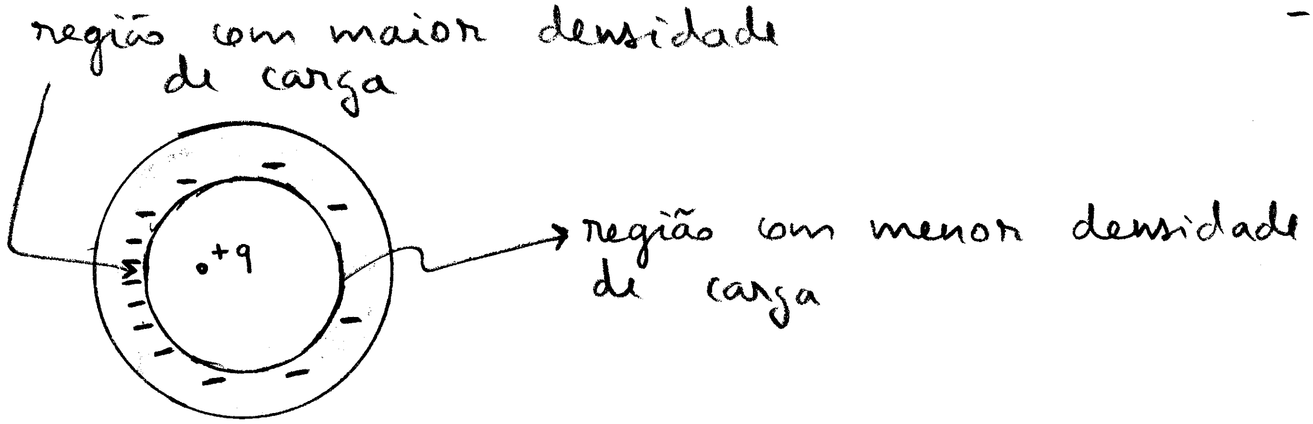
, $A \equiv$ área da espira
$\vec{B} \perp \vec{n}$
$\vec{n} \equiv$ vector unitário perpendicular à espira

Em módulo, a FEM é proporcional à derivada de B em ordem ao tempo.
Observando a figura vemos que B varia linearmente com o tempo e que, consequentemente, o módulo de $\mathcal{E}$ é tanto maior quanto maior for o declive das rectas.
Vemos que

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{(2)} < \left(\frac{dB}{dt}\right)_{(4)} < \left(\frac{dB}{dt}\right)_{(3)} < \left(\frac{dB}{dt}\right)_{(1)}$$

5.
a) Num condutor a carga distribui-se sobre as superfícies. Se existir uma cavidade, a carga na superfície interior tem que ser igual em módulo e de sinal oposto à carga que existe no interior da cavidade (como resulta do facto de $\vec{E} = 0$ no interior do condutor e da aplicação do T. Gauss).
Neste caso, não havendo cargas na cavidade, tem que ser nula a carga na superfície interior e, consequentemente, a carga total da esfera $(-q)$ tem que se distribuir uniformemente na superfície exterior.

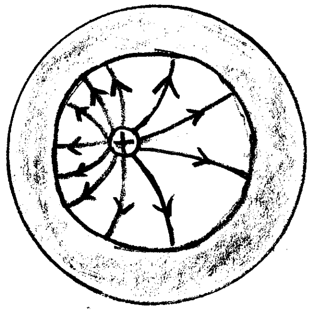
b) Agora, existindo uma carga $+q$ na cavidade, tem que existir uma carga $-q$ na superfície interior da esfera. Então, terá que ser nula a carga na superfície exterior para que a carga total da esfera permaneça igual a $-q$. No entanto, a carga não se distribui uniformemente sobre a superfície interior, uma vez que a carga na cavidade esférica não está centrada e, por isso, induz uma maior concentração de carga nas regiões que lhe estão mais próximas, como se ilustra na figura seguinte.



O campo eléctrico $\vec{E}$ em pontos vizinhos das regiões da superfície com maior densidade de carga terá que ser mais intenso (porque $E = \sigma/\varepsilon_0$, onde σ é a densidade de carga).

Por outro lado o vector campo eléctrico é normal à superfície do condutor.

As linhas de força do campo eléctrico têm pois que ter maior densidade nas regiões da superfície interior mais próximas da carga +q e têm que chegar perpendicularmente a essa superfície, como se ilustra de forma aproximada na figura seguinte:



c) Quando se move a carga $+q$ no interior da cavidade apenas se altera a densidade local de carga na superfície interior. Mas a carga total da esfera não poderá ser alterada. Por isso a carga na superfície exterior deverá permanecer nula.

d) A energia associada ao campo electrostático é dada por

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_\Omega E^2 dv$$

onde a integração é feita sobre todo o espaço.

No caso em estudo o campo é nulo em todo o espaço, excepto na região da cavidade entre a pequena esfera central e a superfície interior da esfera maior.

Como a pequena esfera está centrada na cavidade esférica, o campo eléctrico é radial e vale em módulo

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Tem-se então

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\Omega'} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 dv \quad , \quad \Omega' \equiv \text{volume da cavidade entre } r=a \text{ e } r=b$$

$$= \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{q^2}{r^4} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$W = \frac{4\pi q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^4} r^2 \, dr$$

$$W = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b$$

$$W = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

6. a) Consideramos que a esfera dieléctrica uniformemente polarizada é equivalente à justaposição de duas distribuições esféricas de carga de densidades $+\rho$ e $-\rho$ separadas pelo vector $\vec{d}$.

O campo eléctrico é igual à soma dos campos devidos às duas distribuições. Apliquemos o Teorema de Gauss à distribuição de carga positiva. Para isso consideramos uma superfície gaussiana centrada na esfera (em O_+) e de raio r_+ (menor que o raio R da esfera). Vem então

$$\oint_S \vec{E}_+ \cdot \vec{n}\, da = \left(\frac{4}{3}\pi r_+^3 \rho\right) / \varepsilon_0$$

Como existe simetria esférica, $\vec{E}_+$ é radial e constante sobre a superfície gaussiana. Então, o fluxo do campo eléctrico através dessa superfície vale $E_+ . 4\pi r_+^2$. Substituindo na expressão de cima vem

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi r_+^3 \rho}{r_+^2} .$$

vectorialmente, vem $\quad \vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_+$

Fazendo um raciocínio análogo para a distribuição de carga negativa, obtem-se

$$\vec{E}_- = - \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_-$$

o campo resultante é

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$$

Podemos exprimir este resultado em termos do vector polarização $\vec{P}$, como se segue.
Por definição $\vec{P}$ é igual ao momento dipolar por unidade de volume:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv} = \frac{d}{dv}(q\vec{d}) = \vec{d}\,\frac{dq}{dv} = \vec{d}\rho$$

$$\Rightarrow \quad \vec{d} = \vec{P}/\rho$$

Então

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{P}}{\rho}$$

$$= -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$$

b) As densidades de carga de polarização em volume e em superfície são dadas, respectivamente, por

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n} \qquad (\vec{n} \equiv \text{vector unitário normal à sup.})$$

Como $\vec{P}$ é uniforme conclui-se que $\rho_p = 0$.

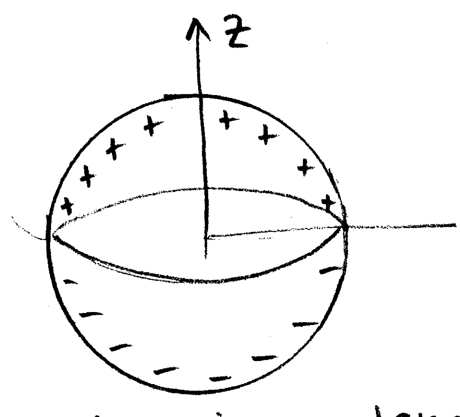
Existem pois apenas cargas de polarização na superfície da esfera. A sua densidade é dada por

$$\sigma_p = P\cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{P}$ e $\vec{n}$.

σ_p toma valores positivos para $0 < \theta < \pi$ e toma valores negativos para $-\pi < \theta < 0$

Na figura abaixo mostra-se como se distribuem as cargas de polarização na superfície da esfera



O hemisfério de cima tem carga positiva.
O hemisfério de baixo tem carga negativa.

7. $$\vec{B}^+ - \vec{B}^- = \mu_0 (\vec{K} \times \vec{n})$$

Esta relação exprime que $\vec{B}^+ - \vec{B}^-$ é um vector perpendicular ao plano definido por $\vec{K}$ e $\vec{n}$. Como a densidade de corrente superficial é sempre ortogonal a $\vec{n}$, então $\vec{B}^+ - \vec{B}^-$ é um vector paralelo em cada ponto à superfície percorrida por corrente e perpendicular à corrente.
Vemos assim que a única componente de $\vec{B}$ que sofre descontinuidade ao atravessar S ($\vec{B}^+ - \vec{B}^-$ não nulo) é aquela que é referida em i). Para as outras duas componentes, isto é,

ii) $\vec{B} \perp$ corrente
$\vec{B} \perp S$

e

iii) $\vec{B}$ paralela à corrente,

o campo magnético é contínuo ao atravessar a superfície S.

8.

a) Uma vez que $d \ll a$, o campo eléctrico na região I é aproximadamente uniforme e tem a direcção do eixo z.
Tendo em conta que este campo, criado pelas placas carregadas do condensador, é conservativo, podemos escrever

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (1)$$

Tem-se então,

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \cos\omega t \, \vec{u}_z \qquad (2)$$

O campo magnético induzido pela variação temporal deste campo eléctrico pode ser calculado recorrendo à equação de Maxwell (na forma integral)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, da\right] \qquad (3)$$

Na região I não existe qualquer corrente de condução, subsistindo apenas o termo associado à corrente de deslocamento:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, da\right] \qquad (4)$$

Para realizar o cálculo da circulação de $\vec{B}$ vamos considerar uma circunferência, centrada no eixo que une os centros das placas circulares, e de raio $\underline{r}$.

Para o cálculo do fluxo (membro da equação à direita) vamos considerar uma superfície plana de área πr^2 assente sobre aquela circunferência.

Devido à simetria do problema (linhas de campo eléctrico preenchendo uma região cilíndrica entre as placas), podemos concluir que $\vec{B}$ é paralelo em cada ponto a circunferências centradas no eixo que une as placas e é constante em módulo sobre cada uma dessas circunferências ($\vec{B}^{(I)} = B^{(I)} \vec{u}_\phi$)

Então a equação (4) vem

$$2\pi r B^{(I)} = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$= \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{V_0 \omega}{d} \sin \omega t$$

$$B^{(I)} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0 \omega}{2d} r \sin \omega t \qquad (5)$$

b) A densidade superficial de carga em cada uma das placas do condensador é, em módulo, dada por

$$\sigma = \varepsilon_0 E$$

$$= \frac{\varepsilon_0 V_0}{d} \cos \omega t$$

Então a carga do condensador vale

$$Q = \pi a^2 \sigma$$

$$= \frac{\pi a^2 \varepsilon_0 V_0}{d} \cos \omega t \qquad (6)$$

Então, a intensidade de corrente que flui nos fios é dada por

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$= -\frac{\pi a^2 \varepsilon_0 V_0 \omega}{d} \sin \omega t \qquad (7)$$

A corrente é, como seria de esperar, alternada.