Cálculo−EC

Critérios sobre séries de números reais

[Condição necessária de convergência] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim u_n = 0$.

[1.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos não negativos tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.

(a) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Rightarrow$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

(b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

[2.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$.

(a) $\ell \neq 0$ ou $\ell \neq +\infty$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

(b) Se $\ell = 0$

 (i) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

 (ii) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

(c) Se $\ell = +\infty$

 (i) $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

 (ii) $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

[Critério da razão (ou D'Alembert)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos positivos e $\ell = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(a) $\ell < 1$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) $\ell > 1$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) $\ell = 1$ $\Rightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério da raiz (ou de Cauchy)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos não negativos e $\ell = \lim \sqrt[n]{u_n}$.

(a) $\ell < 1$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) $\ell > 1$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) $\ell = 1$ $\Rightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Convergência absoluta] Se $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ é convergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também é convergente.

[Critério de Leibnitz] Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente tal que $\lim a_n = 0$. Então $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ é convergente.

Regras de derivação

($f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo I; omitem-se os domínios das restantes funções)

$(f \circ g)' = g'\, f'(g)$	$(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(f^{-1})}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(f^n)' = n\, f'\, f^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}$
$(x^x)' = x^x\,(1 + \ln x)$	$\log_a' x = \dfrac{1}{x} \log_a e$
$\operatorname{sen}' x = \cos x$	$\cos' x = -\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cotg}' x = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$
$\operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{coth}' x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccos}' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccotg}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argcth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$

Primitivas Imediatas

($u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo I e $\mathcal{C}$ denota uma constante real arbitrária)

$\displaystyle\int a\,dx = ax + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u'\,u^\alpha\,dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C} \ \ (\alpha \neq -1)$
$\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int a^u\,u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + \mathcal{C} \ \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$\displaystyle\int u' \cos u\,dx = \operatorname{sen} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{sen} u\,dx = -\cos u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}\,dx = -\operatorname{cotg} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int u' \operatorname{tg} u\,dx = -\ln\lvert\cos u\rvert + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{cotg} u\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{arccos} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{-u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arccotg} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int u' \operatorname{ch} u\,dx = \operatorname{sh} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{sh} u\,dx = \operatorname{ch} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}\,dx = \operatorname{th} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}\,dx = -\operatorname{coth} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}\,dx = \operatorname{argsh} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\,dx = \operatorname{argch} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \operatorname{argth} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \operatorname{argcth} u + \mathcal{C}$