Problemas de movimento oscilatório

Ricardo Mendes Ribeiro

9 de Abril de 2019

1 Movimento Oscilatório

1. Um pêndulo simples com a massa de 1 kg tem um período de 2 segundos e uma amplitude de 5 cm. Oscilando livremente no ar a amplitude cai para 3.75 cm no final de 10 períodos. Calcular a potência que é necessário aplicar para manter a amplitude constante.

   R: [1]

2. O pêndulo de Foucault da Universidade de Clemson, é um pêndulo simples colocado numa torre que se estende desde o topo do edifício da Física até ao piso térreo, quatro andares mais abaixo. A um estudante é dado um cronómetro e pede-se-lhe que determine a altura do edifício. Como deveria proceder para tal?

3. Uma mola sofre um alongamento de 7.5 cm do seu estado de equilíbrio quando se lhe aplica uma força de 1.5 N. Liga-se uma massa de 1 kg à sua extremidade que, sendo afastada de 10 cm da sua posição de equilíbrio, ao longo de um plano horizontal, sem atrito, e então solta, executa um movimento harmónico linear.

   (a) Calcule a constante elástica da mola.
   (b) Qual é a força exercida pela mola sobre a massa, no momento em que é solta?
   (c) Qual é o período de oscilação do corpo?
   (d) Qual é a amplitude do movimento?
   (e) Qual é a equação de movimento do corpo?
   (f) Qual é a velocidade e qual a aceleração máxima do corpo vibrante?
   (g) Qual é a velocidade, aceleração, energia cinética e potencial quando o corpo se encontra a meio caminho entre a sua posição inicial e a posição de equilíbrio.
   (h) Calcular a energia total do sistema oscilante.

   R: [2]

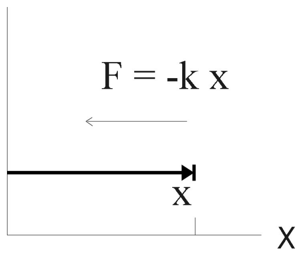
4. Um corpo vibra com movimento harmónico simples com uma amplitude de 12 cm e frequência de 4 vibrações por segundo. Calcular:

   (a) A aceleração e velocidade máximas.
   (b) A aceleração e velocidade quando o deslocamento é de 6 cm.

(c) O tempo necessário para se afastar do equilíbrio até um ponto situado a 8 cm dessa distância.

R: [3]

5. Uma partícula de massa igual a 2 kg move-se ao longo do eixo dos xx atraída para a origem por uma força cuja intensidade é numericamente igual a $8x$. Se ela está inicialmente em repouso, a uma distância de $x = 20$ m, determine:



(a) A equação diferencial e condições iniciais que descrevem o movimento.

(b) A posição da partícula em qualquer instante.

(c) A amplitude, o período e a frequência de vibração.

R: [4]

6. Considere as vibrações $x_1 = A_1 \cos(\omega t)$ e $x_2 = 2A_1 \cos(\omega t + \varphi)$. Determinar o valor de φ para o qual a vibração resultante ($x = x_1 + x_2$) tem uma amplitude $A = 2A_1$. Nestas condições qual a diferença de fase entre x e x_1?

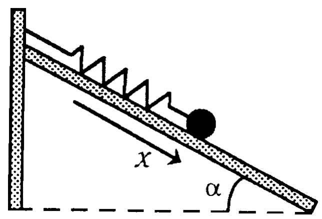
R: [5]

7. Faça a composição gráfica das seguintes funções sinusoidais, e determine a equação da sua trajectória:

(a) $x(t) = A\cos(\omega t)$, $y(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$
[Considere as situações: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$, $\varphi = 3\pi/2$]

(b) $x(t) = \cos(2t)$, $y(t) = \cos(4t)$

8. A partícula de massa m oscila num plano inclinado (ver figura) sujeita à acção de uma força elástica ($F = -kx$; $k > 0$) e do seu próprio peso.

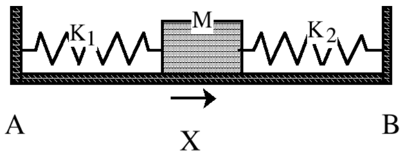


(a) Verifique que a posição de equilíbrio da partícula é $x_0 = \dfrac{mg}{k}\sin(\alpha)$.

(b) Determine a frequência angular do movimento da partícula.

R: [6]

9. Um corpo de massa M executa oscilações longitudinais sem atrito sobre o plano AB e sob a acção de duas molas elásticas. Sabendo que $M = 2$ kg, e que, se for aplicada a cada uma das molas de constantes k_1 e k_2, uma força de 2 N, estas sofrem alongamentos de 5 e 10 cm, respectivamente, determine a equação do movimento da massa M e a frequência do movimento. [Condições iniciais: M foi afastada 10 cm da sua posição de equilíbrio no sentido positivo do eixo dos xx (ver figura), e o sistema foi então solto, no instante $t = 0$ s].



R: [7]

10. Uma partícula de 100 g de massa, ligada a uma mola, executa um movimento oscilatório num plano horizontal, sem atrito e possui uma energia potencial $E_p = 20x^2$ (J).

    (a) Deduza a equação diferencial do movimento.

    (b) Calcule o período do movimento.

    (c) Sabendo que a partícula parte do repouso do ponto $x = 10$ cm, determine a posição da partícula em qualquer instante.

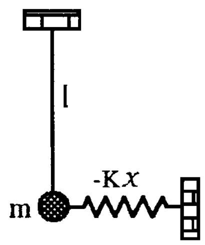
    (d) Calcule a velocidade e a aceleração da partícula quando se encontra a meio caminho entre a sua posição inicial e a posição de equilíbrio.

    (e) Suponha agora que o movimento passa a fazer-se num meio viscoso e que existe uma força de atrito proporcional à velocidade ($F_a = -b.v$). Sabendo que após três oscilações a amplitude se reduz a 1/10 do seu valor inicial, determine o coeficiente de amortecimento do meio.

R: [8]

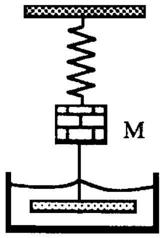
11. Uma massa está assente numa plataforma que vibra verticalmente com um movimento harmónico simples de frequência angular 10π rad/s. Mostre que a massa deixa de estar em contacto com a plataforma quando o elongamento desta é superior a 0.01 m.

12. Um pêndulo está acoplado a uma mola de constante elástica k. Determine a frequência e a equação do movimento do pêndulo, para oscilações iniciais arbitrárias, considerando a aproximação $\sin\theta \approx \theta$.



R: [9]

13. Considere o sistema oscilatório representado na figura. O corpo M tem massa 1.5 kg e mola tem constante elástica $k = 6$ N/m. O sistema é abandonado após a mola sofrer um alongamento de 12 cm. Sabendo que o coeficiente de amortecimento é igual a 0.2096 kg/s, obtenha:



   (a) A equação diferencial do movimento.
   (b) O número de oscilações executadas pelo sistema durante o intervalo de tempo necessário para que a amplitude se reduza a um terço do seu valor inicial.

R: [10]

14. Uma partícula de 5 kg de massa move-se ao longo do eixo xx sob a influência de duas forças:

   - uma força de atracção para a origem O que, em Newtons, é numericamente igual a 40 vezes a distancia de O a P (P é o ponto onde a partícula está em cada instante);
   - uma força de amortecimento proporcional à velocidade, tal que, quando a velocidade é de 10 m/s a força é de 200 N.

   Supondo que a partícula parte do repouso à distância de 20 m de O:

   (a) escreva a equação diferencial e as equações que descrevem o movimento;
   (b) determine a posição da partícula em qualquer instante t;
   (c) determine a frequência natural e o período natural para o movimento da partícula;
   (d) determine a amplitude e o período das oscilações amortecidas;

R: [11]

15. Suspende-se uma massa de 1 kg de uma mola com uma constante de força $k = 10^3$ N/m e um coeficiente de atrito $b = 5 \times 10^{-2}$ N s m^{-1} . A mola é actuada por uma força exterior
$$F = F_0 \cos(\omega_1 t)$$
em que $F_0 = 2.5$ N e ω_1 é duas vezes a frequência angular ω_0 do sistema. Qual é a amplitude do movimento resultante?

R: [12]

16. Um automóvel, do ponto de vista de oscilações verticais, pode considerar-se como montado sobre uma mola com uma frequência de vibração de $10/(2\pi)$ Hz.

(a) Qual é constante da força elástica sabendo que o carro pesa 800 Kg?

(b) Qual será a frequência de vibração do carro se 5 passageiros, pesando em média 80 Kg cada um, aí viajarem?

(c) Calcule o coeficiente de atrito de uns amortecedores a adaptar ao carro, de tal modo que a amplitude de oscilação do carro, que é de 10 cm no início da sua marcha, passe a ser somente de 2 cm na oscilação seguinte (considerando os valores da alínea a)).

R: [13]

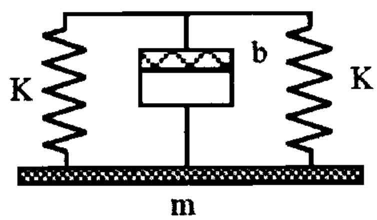
17. É necessário uma força de 7 N para alongar 2.5 m uma mola vertical. Coloca-se uma massa de 10 kg na sua extremidade e, depois de atingida a posição de equilíbrio, desloca-se a massa de 10 m.

(a) desprezando quaisquer forças de atrito, determine a posição da massa em qualquer instante.

(b) Considere que o movimento se executa num meio em que existe uma força de amortecimento numericamente igual a 10 vezes a velocidade instantânea da massa. Suponha que se sobrepõe às forças de atrito uma força exterior de $F(t) = 20\cos(\sqrt{2}t)$. Calcule, em regime estacionário, a nova amplitude do movimento resultante.

R: [14]

18. À massa $m = 200$ g indicada na figura, inicialmente em repouso, comunica-se num dado instante uma velocidade de 10 cm/s. Considerando as duas molas com a mesma constante $k = 5\times10^{-3}$ N/m, e um coeficiente de atrito no êmbolo de $b = 10^{-2}$ Ns/m:



(a) determine a sua posição ao fim de um intervalo de tempo t =2 s.

(b) calcule a amplitude e a correspondente equação do movimento do estado estacionário, quando se aplica ao sistema uma força de excitação dada por:

$$F(t) = 10^{-4}\cos(0.15t)$$

R: [15]

Soluções

Notes

[1] 2.7×10^{-4} W

[2] a) 20 N/m; b) 2 N; c) 1.4 s; d) 0.1 m; e) $x(t) = 0.1\sin(4.5t + \pi/2)$ m; f) 0.45m/s, 2.0m/s^2; g) 0.39 m/s, 1.01 m/s^2, 0.076 J, 0.025 J; h) 0.100 J

[3] a) 75.8 m/s^2, 3.01 m/s; b) 37.9 m/s^2; 2.6 m/s; c) 0.03 s

[4] a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$, $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 20$ m; b) $x(t) = 20\sin(2t + \pi/2)$ m c) $A = 20$ m, $T = \pi$ s; $f = 1/\pi$ s^{-1}

[5] $\pm 104.5°$, $\pm 75.5°$

[6] b) $\omega^2 = K/m$

[7] $x(t) = 0.1\sin(\sqrt{30}t + \pi/2)$ m

[8] b) $\pi/10$ s; c) $x(t) = 0.1\sin(20t + \pi/2)$ m; d) $v = -1.73$ m/s, $a = 20$ m/s^2 e) $\gamma = 0.4886$ s^{-1}

[9] $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}}$

[10] b) 5

[11] a) $x(t) = 28.3e^{-2t}\cos(2t - \pi/4)$; b) 0.45 Hz; 2.2 s; c) $28.3e^{-2t}$; π s

[12] 8.3×10^{-4} m

[13] a) 80000 N/m; b) 8,16 rad/s; c)4862.5 kg/s

[14] a) $x(t) = 10\cos(0.53t)$; b) 0.9 m

[15] a) 0.184 m; b) 1.754×10^{-2} m; $x(t) = 1.754 \times 10^{-2}\cos(0.15t - 0.27)$; $A = 0.48$ m