T6 - Estudo das oscilações forçadas de um pêndulo mecânico

1. Objetivo

Estudo da resposta de um pêndulo mecânico a uma força exterior com uma variação temporal harmónica. Observação da variação da amplitude com a frequência de excitação. Determinação experimental da frequência de ressonância do pêndulo.

2. Preparação do trabalho prático

Antes de realizar o trabalho prático deve ter compreendido o movimento harmónico simples e o movimento oscilatório em regime amortecido e forçado. Sugere-se a leitura do Cap. 15 (Oscilações) do livro "Física" de Resnick e Halliday. Em especial deve compreender a secção 15.10 sobre oscilações forçadas e ressonância (os números do capítulo e secção referem-se à 4ª edição, versão brasileira (vol. 2)).

3. Dispositivo experimental

A figura 1 representa o sistema experimental adotado. Consiste essencialmente em dois pêndulos físicos, constituídos por hastes de metal com $L \approx 1$ m de comprimento, acoplados através de uma pequena massa (m_{ac}) pendurada no meio de um fio inextensível que liga os dois pêndulos (ver figura 1). O pêndulo da **esquerda**, designado por pêndulo de excitação, atuará como fonte de excitação do pêndulo da direita. Para isso, pode ser dotado de uma massa M de valor muito superior às massas das hastes e a m_{ac} (M pode ser variado entre aproximadamente 0.7 kg e 2 kg), que pode ser fixa na haste em diferentes posições. A marcação da posição dos pêndulos em folhas de papel colocadas na base do dispositivo e o recurso a uma régua ou fita métrica permitem a leitura expedita da amplitude de oscilação dos dois pêndulos. Utilizar-se-á um cronómetro para medir os períodos de oscilação dos pêndulos.

o pêndulo de excitação

Comentário adicional relativo às incertezas:

- ao colocar o pêndulo a 15 cm, causamos um erro de paralaxe, que é um erro na observação da medida.
- na medição do tempo, tivemos o tempo de reação da pessa que mediu o tempo no cronómetro
- na medição do afastamento, tivemos várias incertezas como a dificuldade em saber ao certo onde o pêndulo se estabilizava.

$I \rightarrow$ momento de inércia

$r \rightarrow$ distância do centro de massa do corpo rígido ao eixo de rotação

Comentário referente aos valores de f_0, f_1 e f_2:

Fazendo-se variar o centro de massa da haste, o seu I varia, neste caso, quanto menor a dist. ao centro de massa da haste com a massa M até ao eixo de rotação, I diminui quadraticamente:

$$\boxed{I_c = \int_c r^2 \, dm}$$

Quando M se encontra na extrem. inferior da haste, r é o maior das 3 situações.

* Quando M se encontra na extremidade superior da haste, r é a menor das três situações. Pelas expressões $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0}$ e $\boxed{I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \vec{M}}$ concluímos e comprovamos que quanto menor a distância do centro de massa do conj. ao eixo de rotação, maior ω_0, ou seja, maior frequência (e menor período de oscilação).

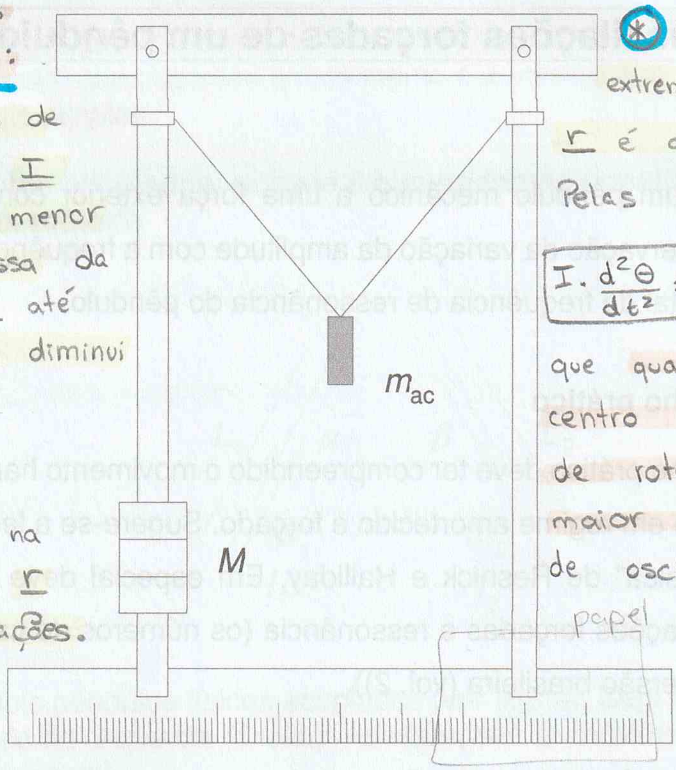


Figura 1: Representação esquemática do sistema experimental adotado.

4. Procedimento experimental

4.1 – Análise do comportamento de cada pêndulo na ausência de acoplamento

i) Retire o fio e a massa que estabelece o acoplamento entre os dois pêndulos

ii) Considere o pêndulo da direita.

Comece por marcar no papel colado na base do equipamento[1] a posição de equilíbrio do pêndulo. Depois coloque o pêndulo em movimento libertando-o do repouso a partir de uma amplitude inicial correspondente a um afastamento de 15 cm da posição de equilíbrio, medidos na régua graduada respetiva. Meça com o cronómetro o seu período de oscilação natural (T_0) e registe o valor obtido. O valor da frequência natural de oscilação corresponde ao inverso deste valor $\left(\nu_0 = \frac{1}{T_0}\right)$. Note que para minorar os erros na medida do período deve medir o tempo correspondente a várias oscilações. Sugere-se que meça o tempo de 10 oscilações e repita o procedimento várias vezes para poder estimar o erro da medida.

$\boxed{T_0 = \frac{T_{10}}{10}}$

iii) Considere agora o pêndulo da esquerda.

[1] Antes de iniciar a experiência deve colar papel limpo na parede junto à base do dispositivo para poder proceder às marcações da amplitude.

Coloque a massa M na extremidade inferior da haste. Coloque o pêndulo em movimento libertando-o do repouso com uma amplitude inicial correspondente a um afastamento de 15 cm da posição de equilíbrio. Registe o período de oscilação (T_1). Coloque depois a massa M na extremidade superior da vareta e repita o procedimento anterior para medir e registar o novo valor do período de oscilação (T_2). Compare os valores de $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ com os valores de $\nu_1 = \frac{1}{T_1}$ e $\nu_2 = \frac{1}{T_2}$, certificando-se que $\nu_1 < \nu_0 < \nu_2$.

são frequências

(ver página anterior !)

4.2 – Observação do efeito de ressonância numa oscilação forçada

iv) Restabeleça o acoplamento entre os dois pêndulos recolocando o fio e a massa m_{ac} na posição representada na figura 1.

v) Coloque a massa M do pêndulo de excitação na extremidade inferior da haste. Certifique-se que os dois pêndulos estão em repouso.

da esquerda!

vi) Coloque em movimento o pêndulo de excitação nas condições anteriormente descritas (a partir do repouso e com uma amplitude inicial equivalente a um afastamento de 15 cm). Aguarde alguns instantes até se certificar que o pêndulo de excitação oscila em regime estacionário. Observe que o pêndulo experimental oscila com uma amplitude modulada; este fenómeno, conhecido por batimento, resulta da sobreposição de dois movimentos harmónicos simples com frequências diferentes. Meça o período do pêndulo de excitação (T_{exc}) assim como o máximo da amplitude angular do movimento induzido no pêndulo experimental[2]. Registe os valores que mediu para estas grandezas.

vii) Repita o procedimento descrito na alínea anterior fazendo variar a altura da massa M do pêndulo de excitação até à sua posição na extremidade superior. Considere cerca de 15 posições desta massa. Deve realizar um maior número de medidas nas posições centrais da massa M (na vizinhança da frequência de ressonância). Registe o valor das suas medições.

onde a amplitude angular será maior!

viii) Esboce gráficos da amplitude em função da frequência de excitação.

---

[2] Note que, devido ao acoplamento entre os dois pêndulos, a posição de equilíbrio pode ser ligeiramente alterada em relação à situação dos pêndulos não acoplados. Para determinar a amplitude angular meça o comprimento do pêndulo, L, e o seu afastamento A (em relação à posição de equilíbrio) segundo a direção horizontal; o ângulo pode ser determinado tendo em conta que $\text{tg}\theta = A/L$. $\rightarrow \theta = \tan^{-1}[A/L]$

da direita

ix) Identifique a frequência correspondente à amplitude máxima de oscilação do pêndulo (frequência de ressonância) e compare-a com o valor da frequência natural determinada em 4.1. (As frequências vão ser próximas!) do pêndulo da direita!

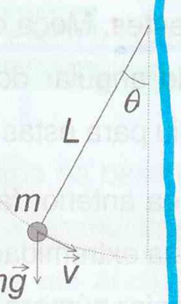
5. Resultados

- Execute todos os cálculos pedidos e/ou necessários à concretização dos objetivos e tarefas propostos.
- Descreva a variação da frequência de um pêndulo quando atuamos sobre o seu comprimento.
- Descreva a variação da amplitude e da fase de um pêndulo forçado, com a frequência de excitação.
- Comente criticamente todos os resultados que obtiver.

Anexo 1: Pêndulo físico e pêndulo simples

O pêndulo que usará na realização deste trabalho é constituído por uma haste de aço (homogénea) e não por uma massa de pequenas dimensões suspensa num fio (inextensível e de massa desprezável). Como se compara a dinâmica destes dois sistemas?

i) Pêndulo simples (ñ usado)



Conclusão 1:

- O pêndulo de excitação funciona como um motor para colocar o pêndulo experimental em movimento a partir do repouso, visto que as suas oscilações correspondem a uma força periódica que cria neste último um movimento harmónico forçado

As equações da velocidade e aceleração tangencial do pêndulo são, respetivamente

$$\vec{v} = L\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_t$$

$$\vec{a}_t = L\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{e}_t$$

onde $\hat{e}_t$ é o versor tangente à trajetória. Então a 2ª lei de Newton permite escrever para a força tangencial → (F_t)

$$F_t = m\vec{a}_t = L\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{e}_t$$

Mas:

$\vec{F}_t = mg\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\hat{e}_t = -mg\sin(\theta)\hat{e}_t$, onde g é a aceleração da gravidade.

Logo, a 2ª lei de Newton conduz a

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$

O sistema é linear apenas no limite dos pequenos ângulos, isto é:

$$\theta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) \approx \theta$$

Neste caso, obtemos a equação do movimento de um pêndulo simples (linear)

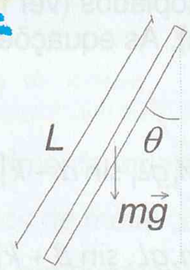
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0, \quad \text{onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

A frequência angular de oscilação, ω_0, depende da aceleração da gravidade e do comprimento do pêndulo.

Conclusão 2:

- A frequência do pêndulo ñ acoplado depende inversamente da posição do seu centro de massa em rel. ao eixo de rot.
- O pêndulo experimental (forçado) realiza um movimento designado por "batimentos" e que a sua amplitude varia consoante a freq., sendo máxima para a freq. de ressonância.

ii) Pêndulo físico (haste homogénea)



As equações do movimento deste sistema escrevem-se:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

onde:

$\hat{k}$ é o versor perpendicular ao plano do pêndulo

I é o momento de inércia da haste em relação ao eixo de rotação

$\vec{L}$ é o momento cinético (ou momento angular) da haste

$\vec{M}$ é o momento das forças aplicadas

Então, admitindo que a vareta é homogénea

distância do centro de massa ao eixo de rotação

$$\vec{M} = -mg\sin(\theta)\frac{L}{2}\hat{k}$$

equação do movimento do pêndulo de excitação (esquerda)

e

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2} = \vec{M}}$$

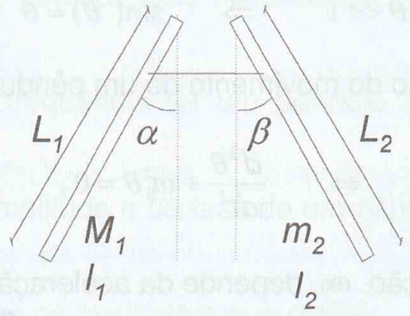
Naturalmente, no limite dos pequenos ângulos ($\sin(\theta) \approx \theta$) obtemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{2I}\theta = 0 \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0, \quad \text{onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{2I}}$$

Com isto, a equação do pêndulo de excitação trata-se da equação do oscilador harmónico linear!

A frequência de oscilação depende agora também do momento de inércia da haste, mas a equação diferencial que descreve o movimento é a mesma que aquela que foi obtida na análise do pêndulo simples.

Anexo 2: Pêndulos acoplados: porque é que podemos considerar o pêndulo de maior inércia um motor?



Consideremos dois pêndulos físicos acoplados (ver figura). Seja I_1 (I_2) o momento de inércia do pêndulo da esquerda (direita). As equações do movimento dos dois pêndulos escrevem-se (ver figura):

massa do pêndulo 1

$$I_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{2} M_1 g L_1 \sin\alpha - k[\sin\alpha - \sin\beta]$$
$$I_2 \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin\beta + k[\sin\alpha - \sin\beta]$$

massa do pêndulo 2

ou, no limite dos pequenos ângulos (α, β <<1) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{sen}(\alpha) \simeq \alpha}$

$$I_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{2} M_1 g L_1 \alpha - k[\alpha - \beta]$$
$$I_2 \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{1}{2} m_2 g L_2 \beta + k[\alpha - \beta]$$

Consideremos agora que o acoplamento entre os pêndulos é fraco, isto é, que $k << 1$. Além disso, consideremos que o pêndulo da esquerda tem uma massa (e uma inércia) muito maior que o pêndulo da direita: $M_1 >> m_2$; $I_1 >> I_2$. Então, $M_1 g L_1 >> k$ e a equação de cima pode simplesmente escrever-se como um oscilador independente:

$$\boxed{I_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2} \cong -\frac{1}{2} M_1 g L_1 \alpha}$$

Quanto à segunda equação, podemos reescrevê-la como:

corresponde à equação do movimento oscilatório forçado, em que $\boxed{K.\alpha(t)}$ é a força externa

$$I_2 \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\left[\frac{1}{2} m_2 g L_2 \beta + k\beta\right] \underbrace{+ k\alpha}_{\text{força externa}} \qquad \text{i.e.: } \boxed{I_2 \frac{d^2\beta}{dt^2} + (\omega_0')^2 \beta = k\alpha(t)}$$

(*1) onde $\boxed{(\omega_0')^2 = \frac{1}{2} m_2 g L_2 + k}$ aparece devido ao acoplamento (constante elástica do fio)

O segundo pêndulo é atuado por um momento exterior com uma variação temporal harmónica. O pêndulo da esquerda funciona como um motor do pêndulo da direita (que pode ver o valor da sua “frequência natural” ligeiramente alterada pelo acoplamento).

Por isso, quando a frequência de excitação ($\underline{\omega}$) é igual à frequência natural de oscilação do pêndulo de direita (experimental), $\underline{\omega_e}$, $\underline{\beta}$ seria automaticamente $\underline{\infty}$, que na prática corresponde ao seu valor máximo. $\underline{\omega}$ é a frequência de ressonância, que no nosso caso experimental não é igual exatamente a $\underline{\omega_0}$ (dito em cima) → (*1)