Trabalho 5 – Estudo do efeito do atrito no movimento oscilatório

Objetivos

- Calcular a constante elástica de uma mola
- Estudar o movimento harmónico amortecido
- Observar o efeito no movimento causado por diferentes forças de atrito.

Fundamento teórico. ***Movimento harmónico simples***

O movimento de um corpo, de massa *m*, sujeito a uma força elástica do tipo $\vec{F} = -k\vec{x}$ pode descrever-se recorrendo à segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \quad \text{mas} \sum \vec{F} = \vec{F}_{elástica} = -k\vec{x} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{então:}$$

$$-k\vec{x} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ com a solução:} \quad x(t) = A sen(\omega_0 \cdot t + \varphi_0), \qquad \textbf{Equação 1}$$

em que A e φ_0 são constantes de integração que se podem determinar a partir das condições iniciais e ω_0 ($\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ é frequência angular do movimento; f_0 (T_0) é frequência (período) natural do movimento, sem amortecimento) depende das características do oscilador, neste caso da constante elástica da mola e da massa do corpo.

A velocidade pode ser calculada derivando a expressão anterior:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

Na ausência de forças dissipativas a energia associada ao oscilador mantém-se constante ao longo do tempo. A energia do oscilador é em cada instante igual à soma da sua energia cinética e potencial nesse instante:

$$E_{oscilador} = E_{cinética} + E_{potencial} \quad \Leftrightarrow \quad E_{oscilador} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{Equação 2}$$

ou, substituindo $k = m\omega^2$, na expressão anterior:

$$E_{oscilador} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Quando a elongação é máxima ($x = A$), a energia cinética é nula. Sendo assim a energia total do oscilador nos pontos em que a sua elongação é máxima, pode ser escrita em função da amplitude (A) do movimento:

$$E_{oscilador} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \textbf{Equação 3}$$

A energia do oscilador pode também ser escrita em função da velocidade máxima: a velocidade máxima é atingida na posição de equilíbrio (*x = 0)*; quando a elongação é nula, é nula a energia potencial. Sendo assim a energia total do oscilador, nesta posição, pode ser escrita apenas em função da velocidade do corpo quando este passa pela posição de equilíbrio (velocidade máxima):

$$E_{oscilador} = \frac{1}{2} m v_{máx}^2 \qquad \textbf{Equação 4}$$

Movimento harmónico, na presença de uma força de atrito

Quando se observa um movimento oscilatório é fácil constatar que a amplitude A do movimento diminui ao longo do tempo contrariando a *equação 1*. Isso acontece porque, na grande maioria das situações, as forças de atrito que estão presentes têm um efeito que não é desprezável e são responsáveis pela diminuição da energia do oscilador e consequentemente pela diminuição da sua amplitude (*equação 3*).

Para estudar um movimento oscilatório numa situação real é então necessário conhecer as forças de atrito existentes, o que nem sempre é muito fácil de fazer diretamente. O método proposto neste trabalho para estudar o atrito é observar o efeito que provoca na energia do oscilador.

Pode-se fazer uma estimativa aproximada da variação da energia média por período, medindo a variação da amplitude do movimento ou da velocidade máxima em períodos sucessivos. Representando a energia do oscilador em função do tempo, pode-se conhecer a energia dissipada por atrito em cada período daí retirar alguma informação sobre a força de atrito que atua no sistema.

Na ausência de outras forças não conservativas, a variação da energia mecânica do sistema entre o instante A e B é igual ao trabalho da força de atrito:

$$W_{AB}^{atrito} = E_B^{mecânica} - E_A^{mecânica}$$

Se não se conhecer a velocidade do oscilador em cada instante, só se consegue calcular a energia do oscilador em instantes em que a velocidade seja nula (pontos em que o oscilador se encontra nas posições extremas).

Não se pode, por isso, analisar a variação instantânea da energia do oscilador. Pode-se, no entanto, calcular a energia em alguns pontos (todos os máximos e mínimos) e usar esses dados para estudar o efeito do atrito nas diferentes situações.

Nota: É importante observar que no oscilador amortecido a velocidade máxima não é atingida exatamente na posição de equilíbrio, devido à existência da força de atrito e por isso o cálculo da energia mecânica do oscilador amortecido através das expressões *(3)* e *(4)* não é exato, no entanto esta é uma aproximação razoável (visto que neste caso uma precisão muito grande do resultado não é fundamental) que simplifica muito o problema.

Na figura 1 mostra-se um gráfico da posição de um oscilador em função do tempo. Nos instantes t_1, t_2 e t_3 o afastamento da posição de equilíbrio é máximo e a energia cinética é nula. A energia do oscilador nos instantes t_1, t_2 e t_3, será então:

$$E_{t1} = \frac{1}{2}kA_1^2 \qquad E_{t2} = \frac{1}{2}kA_2^2$$

$$E_{t3} = \frac{1}{2}kA_3^2$$

O trabalho da força de atrito entre os instantes t_1 e t_2 ou entre t_2 e t_3 será:

$$W_{t1\to t2} == \frac{1}{2}k\,(A_2^2 - A_1^2) \qquad \text{ou}$$

$$W_{t2\to t3} == \frac{1}{2}k\,(A_3^2 - A_2^2)$$

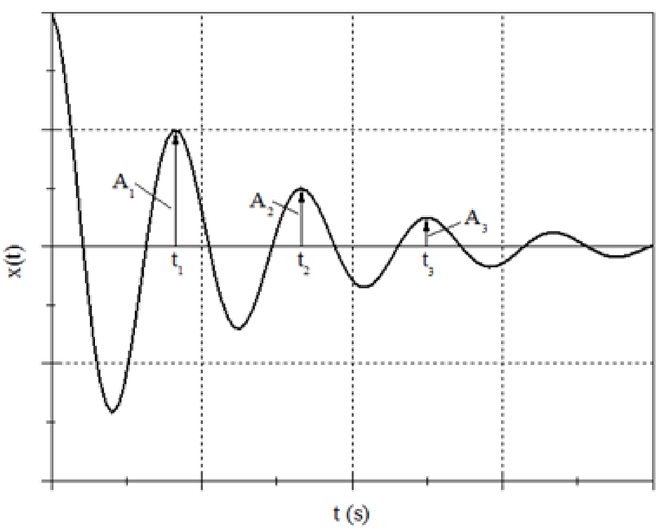


Figura 1: Posição em função do tempo para um oscilador com atrito (amortecimento fraco)

Movimento harmónico dum corpo sujeito a uma força de atrito de escorregamento

Se a força de atrito de escorregamento for constante, o trabalho realizado pela força de atrito durante um período será:

$$W_{atrito} = F_{atrito} \times d\,, \qquad \textbf{equação 5}$$

em que d é o espaço percorrido durante um período. Num período o corpo desloca-se de x_{max} a x_{min} e novamente de x_{min} a x_{max} , ou seja $d \cong 2(A_1 + A_2)$. Substituindo na expressão 5:

$$W_{atrito} \cong F_{atrito} \times 2(A_1 + A_2) \qquad \textbf{equação 6}$$

A variação de energia durante o mesmo período pode ser calculada através das amplitudes A_1 e A_2 (*equação 4*):

$$W_{atrito} = E_2 - E_1 \cong \frac{1}{2}k(A_2^2 - A_1^2)$$

$$F_{atrito} \times 2(A_1 + A_2) \cong \frac{1}{2}k(A_2 - A_1)\times(A_2 + A_1)$$

$$F_{atrito} \cong \frac{1}{4}k(A_2 - A_1)$$

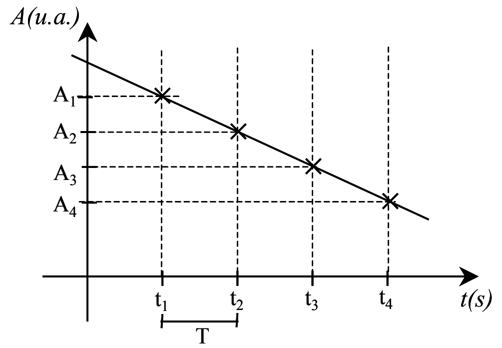


Figura 2: Amplitude em função do tempo.

Se a variação da amplitude com o tempo for linear e a equação da reta de ajuste $Y=ax+b$ na expressão anterior a diferença $(A_2\text{-}A_1)$ pode ser escrita em função do declive da reta de ajuste e do período do movimento:

$$a = \frac{A_2 - A_1}{T} \Rightarrow F_{atrito} = \frac{1}{4} k \times aT = \frac{1}{4} m\omega^2 \times aT,$$

em que a é o declive da reta experimental. Repare que nesta expressão não é importante em que unidades se exprime a amplitude.

Movimento harmónico dum corpo sujeito a uma força de atrito do tipo $\vec{F}_{atrito} = -b\vec{v}$

A aceleração dum sistema que é sujeito a uma força restauradora ($\vec{F}_{restaurdoura} = -k\vec{x}$) e a uma força de atrito proporcional à velocidade, $\vec{F}_{atrito} = -b\vec{v}$, pode descrever-se segundo a 2ª lei de Newton por:

$$\vec{F}_{resultante} = m \times \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad -k\vec{x} - b\vec{v} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad m\vec{a} + k\vec{x} + b\vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Soltando o sistema, sem velocidade inicial, este faz um movimento oscilatório amortecido. A posição em função do tempo, admitindo uma situação de amortecimento fraco, será dada por:

$$x(t) = Ae^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)} sen(\omega t) \qquad \textbf{equação 7}$$

em que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad \textbf{equação 8}$$

A amplitude em função do tempo vem então:

$$A(t) = Ae^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)} \qquad \textbf{equação 9}$$

em que b é o coeficiente de atrito que se pretende calcular. Se a representação da amplitude em função do tempo, corresponder a uma função deste tipo, significa que a força de atrito presente é proporcional à velocidade e o coeficiente de proporcionalidade pode ser calculado através do função ajustada aos pontos experimentais.

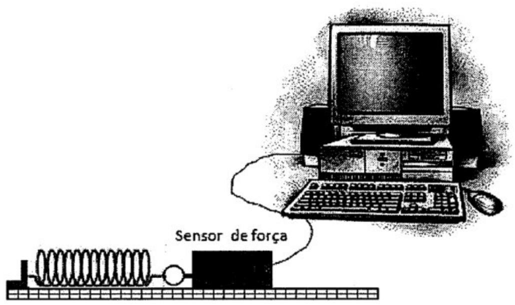
Procedimento experimental

Nesta experiência pretende-se observar a variação de energia de um corpo oscilante ao longo do tempo, sujeito a diferentes forças de atrito. A montagem da experiência encontra-se esquematizada nas figuras.

O sistema oscilante é constituído por uma mola elástica de constante *k*, na qual se suspende, com um fio, um corpo de massa *m*. A mola encontra-se ligada a um sensor de força, que é lida num computador.

1 - Cálculo da constante elástica da mola

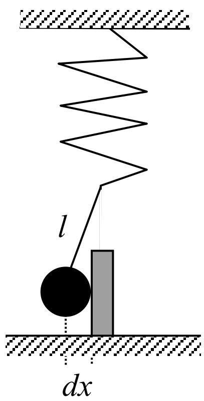
- Medir a massa da mola e a massa da esfera.
- Medir o diâmetro da esfera
- Fixar uma das extremidades da mola ao suporte da prancha e a outra extremidade ao sensor de força
- Afastar o sensor de força, esticando a mola.
- Registar o valor da força e a posição do sensor.
- Repetir para 6 ou 8 valores de força.



2 -Análise de um movimento harmónico com atrito de escorregamento

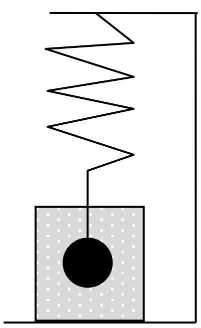
Considere-se agora a introdução de uma força de atrito de escorregamento e observe-se o efeito que tem no movimento. Nesta fase utilizar-se-á o sensor de força (o deslocamento pode ser facilmente calculado a partir da força medida pelo sensor e da constante da mola)

- Colocar o bloco de madeira, de forma que durante a oscilação a esfera permaneça encostada ao bloco (ver figura)
- Segurar o bloco para que este não deslize. Medir e registar a distância *dx*. Dar início à oscilação. Iniciar a aquisição de dados.
- Copiar os valores da tabela para a folha Excel
- Aumentar a distância *dx*, e repetir o passo anterior.



3 - Análise de um movimento harmónico dentro da parafina

Considere-se agora o movimento dentro de um fluido com viscosidade bastante elevada - a parafina.



- Retirar o bloco de madeira. Colocar o copo de parafina de forma que a esfera fique mergulhada na parafina. É importante que durante a experiência O corpo se movimente sempre completamente mergulhado na parafina.

- Colocar a esfera a oscilar e verificar se durante a oscilação a esfera não sai da parafina nem bate no fundo.

- Fazer a aquisição de dados e gravar os resultados. Repita duas ou três vezes.

NOTA: QUANDO A OSCILAÇÃO SE FAZ ENCOSTADA AO BLOCO DE MADEIRA OU DENTRO DA PARAFINA É PROVÁVEL QUE SÓ CONSIGA OBSERVAR 4 OU 5 OSCILAÇÕES.

Análise dos resultados

1 - Cálculo da constante elástica da mola

- Representar a força em função da posição do sensor.

- Calcular a equação da reta que melhor se ajusta aos resultados experimentais

- Calcular a constante da mola.

- Calcular a frequência natural e o período natural do oscilador a partir da massa da esfera e da constante da mola.

2 -Análise de um movimento harmónico com atrito

Para cada um dos movimentos com atrito:

- Na tabela Excel, a partir dos dados registados pelo sensor, calcular a força resultante que atua no corpo para cada instante. Corrigir o gráfico para que, na posição de equilíbrio, a força seja nula.

- Usando o valor da constante da mola e a força resultante que atua no corpo, calcular a posição do corpo em cada instante.

- Traçar o gráfico da posição do corpo em função do tempo.

- Calcular o período e a frequência angular do movimento. Comparar com o valor obtido sem amortecimento (frequência natural)

- Registar numa tabela os valores máximos e mínimos de amplitude e os instantes em que ocorrem. Calcular a energia do oscilador nesses instantes.

- Representar graficamente os valores da energia do oscilador em função do tempo.

- Comparar a frequência de oscilação nas várias experiências com a frequência natural do oscilador. Comentar o resultado.

- Comparar a variação da energia do oscilador em função do tempo nas várias experiências.

Anexo: forças de atrito

A força de atrito:

Quando um corpo se move num fluido verifica-se em algumas situações que a força de atrito é proporcional à velocidade do corpo – diz-se neste caso que o corpo está sujeito ao chamado **atrito de Stokes**.

Atrito de "Stokes": $F_a = -bv$

O coeficiente de atrito b depende da viscosidade η do meio e da forma e dimensões do corpo em movimento. Se o corpo em movimento é uma esfera, o coeficiente de atrito é dado por: $b = 6\pi\eta r$, em que r é o raio da esfera e η viscosidade do meio.

Muitas vezes, embora a força de atrito não seja proporcional à velocidade, pode exprimir-se em função de um coeficiente de atrito e de uma potência da velocidade. É costume classificar os tipos de atrito de acordo com a dependência da velocidade, assim:

$F_a = c\, v^n$	n = 0 atrito seco	$(c = \mu\, m\, g\, \text{sen}\alpha)$
	n = 0.5 atrito de "Reynolds"	(película lubrificante)
	n = 1 atrito de "Stokes"	(velocidade moderada)
	n = 2 atrito de "Newton"	(velocidade alta)

Nas situações reais a força de atrito que surge é geralmente bastante complexa. Quando nenhum dos tipos de atrito descreve a realidade com suficiente rigor é sempre possível admitir a existência de dois ou mais tipos de atrito simultâneos e descrever a força de atrito como uma combinação linear de várias potências de velocidade.

Só uma análise cuidada dos resultados experimentais permite perceber qual, ou quais os efeitos de atrito mais importante em cada um dos casos.

Nota: $\eta_{ar} = 0.0000174$ Nsm^{-2}, $\eta_{parafina} = 0{,}9$ Nsm^{-2} (T=20ºC).