Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Exercícios

Exercício 3: *Operadores de criação e destruição para o momento angular*

a) Mostre, da definição do operador módulo quadrado do momento angular $\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$, que se pode escrever este operador como

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+) + \hat{L}_z^2 . \tag{17}$$

Pista: Utilizando as definições $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, expresse $\hat{L}_x$ e $\hat{L}_y$ em termos de $\hat{L}_\pm$ e substitua na definição de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$.

b) Na aula teórica, mostramos que

$$\hat{L}_\pm \mid l\, m \,\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \mid l\, m \pm 1 \,\rangle . \tag{18}$$

Utilize esta fórmula para demonstrar que no multipleto em que o módulo quadrado do momento angular é igual a $l(l+1)$ (com l inteiro ou semi-inteiro) e $|m| \leq l$ podemos escrever todos os estados $\mid l\, m \,\rangle$ à custa de $\mid l\, l \,\rangle$ como

$$\mid l\, m \,\rangle = \hbar^{m-l}\sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}}\hat{L}_-^{l-m} \mid l\, l \,\rangle . \tag{19}$$

Pista: Aplique indução, também funciona num espaço de dimensão finita.

c) Sejam $\hat{A}$ e $\hat{B}$ operadores lineares, com $\hat{B}$ um operador hermítico. Suponha que $[\hat{B}, \hat{A}] = -c\hat{A}$ em que c é um número real. Mostre que se $\mid b \,\rangle$ é um autoestado de $\hat{B}$ com valor próprio b então $\hat{A} \mid b \,\rangle$ é também um autoestado de $\hat{B}$, com valor próprio $b - c$.

d) Inversamente, mostre que o operador adjunto (ou conjugado) de $\hat{A}$, $\hat{A}^\dagger$, quando aplicado a $\mid b \,\rangle$ produz um autoestado de $\hat{B}$ com valor próprio $b + c$.

Estes operadores são conhecidos como operadores *escada* ou operadores de destruição e criação.

Pista: Considere a aplicação dos comutadores $[\hat{B}, \hat{A}]$ e $[\hat{B}, \hat{A}^\dagger]$ a $\mid b \,\rangle$, levando em conta que para operadores lineares genéricos, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, se tem $(\hat{C}\hat{D})^\dagger = \hat{D}^\dagger\hat{C}^\dagger$.

e) Suponha agora que $\hat{B} = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ (não é este o caso no exemplo do momento angular).

Mostre que $\hat{B}$ é hermítico. Mostre ainda que, com um rescaling adequado, $\hat{A} = \alpha\hat{a}$, $\hat{A}^\dagger = \overline{\alpha}\hat{a}^\dagger$, em que α é um dado número complexo e $\overline{\alpha}$ é o seu conjugado, é sempre possível escrever $\hat{B} = |\alpha|^2\hat{n}$, com $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, e $[\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}$. Mostre que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$. Em que contexto passado já encontrou tais operadores?

f) Mostre que existe um autoestado de $\hat{n}$ com valor próprio mínimo, maior ou igual a zero. Mostre que esse valor próprio é de facto igual a 0. Prove, utilizando indução, que o estado normalizado, com valor próprio de $\hat{n}$ igual a $n \geq 0$, em que n é um inteiro, se pode escrever $\mid n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n \mid 0 \rangle$, em que $\mid 0 \rangle$ é o estado próprio com valor próprio 0.

Exercício 4: *Operador quadrado do módulo do momento angular orbital em coordenadas esféricas*

a) Utilizando as fórmulas (13) e (14) da folha de problemas anterior, e a fórmula (17) acima, mostre que se obtém a seguinte expressão para $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ enquanto operador diferencial

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] . \tag{20}$$

Pista: Não se esqueça que funções da variável θ (resp. φ) não comutam com o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial\theta}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial\varphi}$).

b) Na última folha de problemas, afirmamos que $Y_{ll}(\theta,\varphi) = c_l(\sin\theta)^l \, e^{il\varphi}$ é função própria de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ com valor próprio $\hbar^2 l(l+1)$ e de $\hat{L}_z$ com valor próprio $\hbar l$ (e em que c_l é uma constante de normalização , cujo valor determinamos).

Utilizando a expressão (13) para $\hat{L}_z$, e a expressão (20) para $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, mostre explicitamente que assim é.

c) Mostre que $\overline{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$, a função complexa conjugada de $Y_{lm}(\theta,\varphi)$, é função própria de $\hat{L}_z$ com valor próprio $-\hbar m$. Como é evidentemente função própria de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e está normalizada, concluímos que, a menos de um factor de fase irrelevante, $Y_{l-m}(\theta,\varphi) = \overline{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$.

Pista: Considere o complexo conjugado de $\hat{L}_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = -i\hbar\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}$.

d) Temos, do exercício 2, para $l = 2$, que $Y_{22}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(\sin\theta)^2 \, e^{2i\varphi}$. Por aplicação sucessiva de $\hat{L}_-$ a esta expressão, e com recurso à fórmula (18), determine os restantes harmónicos esféricos deste multipleto $Y_{21}(\theta,\varphi)$, $Y_{20}(\theta,\varphi)$, $Y_{2-1}(\theta,\varphi)$ e $Y_{2-2}(\theta,\varphi)$.

Pista: Note que, usando a alínea anterior, só precisa de percorrer metade do caminho ;-)...

e) Mostre que $Y_{20}(\theta,\varphi)$ está devidamente normalizado.

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt