Formulação da electrodinâmica em termos de potenciais

1. Definições:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad \nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_f + \dot{\vec{D}} \qquad \underbrace{\vec{B} = \mu \vec{H}}_{\text{Meio isotrópico e neutral.}}$$

Em electrostática $\nabla \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi$. Mas, em geral,

$\nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \neq 0$ e $\therefore$ $\vec{E} \neq -\nabla \phi$. Contudo, $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$

Consequentemente:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -(\nabla \wedge \dot{\vec{A}}) \Rightarrow \nabla \wedge (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0 \quad \text{e}$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

Logo:

$$(1) \quad \begin{cases} \vec{E} = -\nabla \phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \end{cases}$$

Isto é, podemos representar os campos em termos de um campo escalar e um campo vectorial $(\phi, \vec{A})$.

Estas definições resultam de duas das quatro equações de Maxwell ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$ e $\nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$). Vejamos as outras duas:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \longrightarrow \nabla \cdot \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \nabla \wedge \vec{B} \frac{1}{\mu} = \vec{J}_f + \varepsilon \dot{\vec{E}} \longrightarrow$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{A} = \mu \vec{J}_f + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left[-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J}_f - \varepsilon\mu\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \iff$$

$$\iff \nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left[\nabla\cdot\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] = -\mu\vec{J}_f$$

Isto é, as outras duas equações de Maxwell relacionam os potenciais com as fontes:

(2) $$\nabla\cdot\left[-\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right] = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

(3) $$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left[\nabla\cdot\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] = -\mu\vec{J}_f$$

Isto é, dada uma distribuição de cargas e correntes, podemos calcular os potenciais via (2) e (3) e depois os campos via (1).

<u>Problema 10.1</u>: Podemos verificar que (2) e (3) se podem escrever de uma forma simétrica:

(2') $$\Box^2\phi + \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

(3') $$\Box^2\vec{A} - \nabla L = -\mu\vec{J}$$

Se definirmos:

$$L = \nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t}$$

Vejamos:

$$\cdot \quad \Box^2 \phi + \frac{\partial L}{\partial t} = \left[\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]$$

$$= \nabla^2\phi - \cancel{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) + \cancel{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}}$$

$$= \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) \equiv -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad [\text{via } (2)]$$

$$\cdot \quad \Box^2\vec{A} - \nabla L = \left[\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{A} - \nabla\left[\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]$$

$$= \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left[\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] \equiv -\mu\vec{J}_f$$

$$[\text{via } (3)] .$$

As equações (2') e (3') são portanto equivalentes a (2) e (3).

2. Padrão dos potenciais (Gauge):

As equações (1) (2) e (3) não definem $\vec{A}$ e ϕ univocamente. Podemos modificar $\vec{A}$ e ϕ como quisermos desde que as versões modificadas A' e ϕ' produzam os mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Seja
$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha} \\ \phi' = \phi + \beta \end{cases}$$

$\vec{\alpha}$ e β podem ser quaisquer desde que conduzam aos mesmos campos.

Isto é:

$$\nabla \wedge \vec{A}' \equiv \nabla \wedge \vec{A} \Rightarrow \boxed{\nabla \wedge \vec{\alpha} = 0} \qquad (4)$$

$$-\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi - \nabla\beta - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} \equiv -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\beta + \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = 0} \qquad (5)$$

Mas $(4) \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \nabla\lambda$

e $(5) \Rightarrow \nabla\left[\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right] = 0 \Rightarrow \beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t} = k(t)$

(funçao do tempo)
apenas

Entaõ:

$$\beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + k(t) \equiv -\frac{\partial\lambda'}{\partial t}$$

$$c/ \quad \lambda' = \lambda - \int_0^t k(t')\,dt'$$

Isto é:

$$\begin{cases} \vec{A}' \equiv \vec{A} + \nabla\lambda' & (6) \\ \phi' \equiv \phi - \dfrac{\partial\lambda'}{\partial t} & (7) \end{cases}$$

(Note que $\nabla\lambda \equiv \nabla\lambda'$)

Existe uma grande arbitrariedade na escolha dos potenciais:
Dado um campo escalar λ', podemos sempre somar $\nabla\lambda'$ a $\vec{A}$ e subtrair $\frac{\partial\lambda'}{\partial t}$ a ϕ sem alterar a Física.
Esta liberdade de alterar os potenciais designa-se por liberdade de padrão (Gauge)

3. Exemplos de padrões usuais (convenientes):

3.1 ; Coulomb

$\forall\ \nabla\cdot\vec{A}$, podemos escolher λ' : $\nabla\cdot\vec{A}' = 0$

$$\left(\nabla\cdot\vec{A} = -\nabla^2\lambda' \right)$$

Então, no novo Gauge (dito de Coulomb):

$$(2) \quad \equiv \quad \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

(como em electrostática: mas ϕ não determina $\vec{E}$)

$$(3) \quad \nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}_f + \varepsilon\mu\, \nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

<u>Observação:</u> A equação (2) faz lembrar uma misteriosa acção à distância: ϕ reflecte as mudanças de ρ <u>instantaneamente</u>. Isto parece violar o princípio da propagação da informação com velocidade finita. Mas não! Com efeito, os campos não variam instantaneamente. Por exemplo: $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

3.2 - Lorentz :

Escolhamos $L = 0$ $\left(\nabla \cdot \vec{A} = - \varepsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$

Então :

$$(3) \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu \vec{J}_f$$

$$(2) \rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = - \frac{\rho}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 \phi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Repare que, neste gauge, as equações (2) e (3) ficam perfeitamente simétricas

$$\begin{cases} \square^2 \vec{A} = - \mu \vec{J}_f \\ \square^2 \phi = - \frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

Podemos portanto definir os potenciais de forma a simplificarem as eq. (2) e (3) nos casos concretos em análise. Esta liberdade, designa-se por liberdade de Gauge.

4. Os potenciais e a formulação Lagrangiana e Hamiltoniana da electrodinâmica.

4.1 - Formulação Lagrangiana para potenciais dependentes da velocidade.

Consideremos uma força $\vec{F}$ que actua numa partícula. $\vec{F}$ pode ter uma componente conservativa e outra não conservativa:

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + Q_k \qquad (7)$$

Se definirmos $L = T - U$ (o Lagrangiano), então, o princípio de acção mínima implica que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \qquad (8)$$

Consequentemente:

$$\sum_k \left\{ \dot{q}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \right\} = \sum_k \dot{q}_k Q_k \qquad (9)$$

Mas:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Admitimos que L não depende explicitamente do tempo $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Então:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \cdot \frac{d\dot q_k}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\, \dot q_k$$

Logo:

$$(9) \iff \sum_k \left\{ \dot q_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{d\dot q_k}{dt} \right\} - \frac{dL}{dt} = \sum_k \dot q_k Q_k$$

$$\iff \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\sum_k \dot q_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) - L \right]}_{H} = \sum_k \dot q_k Q_k$$

$$\frac{d}{dt} H = \sum_k \dot q_k Q_k$$

(o Hamiltoniano varia no tempo devido à força dissipativa)

A força de Lorentz depende da posição e velocidade da partícula. Se quisermos exprimir essa força a partir de um potencial, então, esse potencial deverá depender da posição e velocidade da partícula:

$$U(q_k, \dot q_k)$$

Claro que a relação entre U e F_k deve ser:

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_k}\right)$$

• $\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_k}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}(T-U) = 0 \right]$

• Verifique dimensionalmente:

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right)}$$

$F_k \to MLT^{-2}$

$\frac{\partial U}{\partial q_k} \to ML^2T^{-2}.L^{-1}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) \to T^{-1}\, ML^2T^{-2}\, L^{-1}\, T \to ML^2T^{-2}L^{-1}$ o.k.

Vejamos então:

$$\vec{F} = q\left[\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right]$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A}$$

$$\vec{F} = q\left[-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\wedge\nabla\wedge\vec{A}\right]$$

Podemos associar a esta força um potencial? De acordo com as considerações anteriores

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) \quad (*)$$

Então:

$$F_x = q\left[-\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y\,[\nabla\wedge\vec{A}]_z - v_z\,[\nabla\wedge\vec{A}]_y\right]$$

$$= q\left[-\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\right]$$

$$F_x = q\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - V_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - V_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - V_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right]$$

$$= q\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\nabla)A_x \right]$$

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)A_x \right]$$

Note que $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{r},t)$ não depende da velocidade. Isto significa que:

$$\frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{v}\cdot\vec{A}) = A_x$$

claro que: $\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)$

Então:

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)\right]$$

Mas $\phi(\vec{r},t)$ também não depende de $\vec{v}$. Então podemos escrever

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A})\right]\right]$$

Comparando com (*) concluímos que

$$U_{em} = q[\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}]$$

e pue $$F_x = -\frac{\partial U_{em}}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_{em}}{\partial v_x}\right)$$

O Lagrangeano da partícula é:

$$L(\vec{r},\vec{v}) = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\,\vec{v}\cdot\vec{A}$$

As equações de movimento (Euler-Lagrange) são:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

O momento conjugado

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} = m v_k + q A_k$$

i.e.:

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$ (não é a quantidade de movimento).

O Hamiltoniano é:

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_k \dot{q}_k)$$

$$= \vec{v}\cdot\vec{p} - L(\vec{r},\vec{v})$$

$$= m\,\vec{v}\cdot\vec{v} + \cancel{q(\vec{v}\cdot\vec{A})} - \frac{1}{2}mv^2 + q\phi - \cancel{q(\vec{v}\cdot\vec{A})}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi} \Rightarrow H = \sum_k \left(\frac{p_k - qA_k}{m}\right)^2 \frac{m}{2} + q\phi$$

Notas à margem:

- A quantização do campo electromagnético faz-se naturalmente a partir da sua formulação Lagrangeana (ou Hamiltoniana) e envolve então os potenciais e não os campos directamente.
- Além disso, os campos são derivados a partir de um único 4-vector $(\phi, \vec{A})$ que tem origem nas cargas e correntes que também formam um 4-vector $(\rho, \vec{J})$. Isto significa que a formulação do campo electromagnético se deverá poder fazer de forma mais eficiente no contexto de um espaço de Minkowski. Ou, de outra forma, que o campo electromagnético de Maxwell é um campo conforme aos princípios da Relatividade Restrita. (Veremos seguramente mais coisas sobre isto adiante).
- A liberdade de Gauge $A'_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ pode ser abordada no contexto das álgebras de Lie. Este é o ponto mais profundo que poderemos eventualmente abordar mais tarde. (veremos). Em todo o caso, a transformação de Gauge está associada a uma invariância sob um grupo contínuo $U(1)$ $[\psi' \to e^{i\delta}\psi]$. Consequentemente, de acordo com o teorema de Noether, existe uma corrente que é conservada. No caso, essa corrente é $j_\mu = (\vec{J}, \rho)$ a carga eléctrica. Mas, a discussão deste muito importante ponto está fora do âmbito destas notas.

o

Problemas

1. Considere os seguintes potenciais

$$\phi = 0 \ ; \qquad \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \kappa}{4c} \left[ct - |x| \right]^2 \hat{z} & \text{se } |x| < ct \\ 0 & \text{se } |x| > ct \end{cases}$$

Encontre ~~a~~ uma distribuição de cargas e correntes que lhes correspondam.

Solução:

$$|x| < ct \qquad \begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\dfrac{\mu_0 \kappa}{2} \left[ct - |x| \right] \hat{z} \\ \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \hat{y} = \pm \dfrac{\mu_0 \kappa}{2c} \left[ct - |x| \right] \hat{y} \end{cases}$$

$$\left(\begin{matrix} + , & x > 0 \\ - & x < 0 \end{matrix} \right)$$

$$|x| > ct \qquad \vec{E} = \vec{B} = 0$$

$$(**) \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{y} = \mp \frac{\mu_0 \kappa}{2} \hat{y}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = -\frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{z} = -\frac{\mu_0 \kappa}{2c} \hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{c \kappa \mu_0}{2} \hat{z} \quad , \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \pm \frac{\mu_0 \kappa}{2} \hat{y}$$

$$\therefore \text{Assim:} \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \dot{\vec{D}} \ (*)$$

(as eq. de Maxwell são verificadas se (*) $\vec{J} = 0$ e (**) $\rho = 0$)

$\vec{B}$ varia descontinuamente em $x=0$ (i.e., no plano YZ).

$$\bar{B}_+ - \bar{B}_- = 2 \cdot \frac{\mu_0 k t}{2}\,\hat{y}\ \Big|_{x=0}$$

$\Rightarrow$ existência de uma densidade superficial de corrente num plano

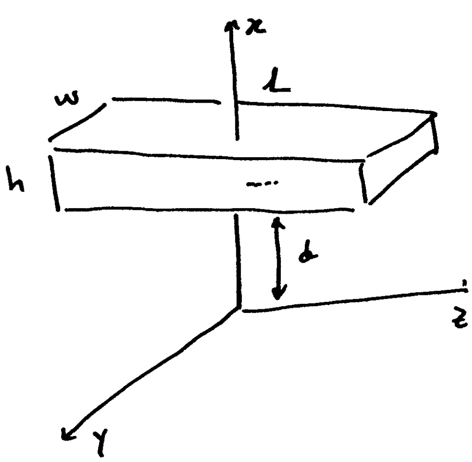
$$\frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel} = \vec{K} \wedge \hat{x} \qquad (\mu_1 = \mu_2 = \mu_0)$$

Então:

$$\frac{kt}{\cancel{2}}\,\hat{y} = \vec{K} \wedge \hat{x} \Rightarrow \underline{\vec{K} = kt\,\hat{z}}$$

□

2. (Problema 10.2): Para o exemplo anterior (ex. 1), considere uma caixa rectangular de comprimento L, largura w e altura h localizada a uma distância d acima do plano YZ:



a) Calcule a energia electromagnética na caixa para $t = t_1 = \frac{d}{c}$ e $t_2 = \frac{d+h}{c}$

b) Obtenha o vector de Poynting e determine o fluxo de energia para a caixa entre t_1 e t_2.

c) Compare b) e a).

Soluções:

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) \qquad \vec{E} = -\frac{\mu_0 K}{2}\left[ct - |x|\right]\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2c}\left[ct - |x|\right]\hat{y}$$

$$t_1 = \frac{d}{c} \rightarrow \vec{E} = \vec{B} = 0 \Rightarrow u = 0$$ (não há energia em na caixa.)

$$t_2 = \frac{d+h}{c} \rightarrow \vec{E} = -\frac{\mu_0 K}{2}\left[d+h - |x|\right]\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2c}\left[d+h - |x|\right]\hat{y}$$

$$\frac{E}{c} = B$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) = \varepsilon_0 E^2$$

$$U(t_2) = \int_V u \, d\vec{r} = Lw\,\varepsilon_0 \int \left(\frac{\mu_0 K}{2}\right)^2 (d+h-x)^2 \, dx =$$

$$= Lw\,\varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 K^2}{4} \int_d^{d+h} (d+h-x)^2 \, dx =$$

$$= Lw\,\varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 K^2}{4}\left(-\frac{1}{3}(d+h-x)^3\right)\Bigg|_d^{d+h} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 K^2 Lw\, h^3}{12}$$

b) $$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = +\frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_0^2 K^2}{4c}\left[ct - |x|\right]^2 \hat{x}$$

A energia que entra na caixa entre t_1 e t_2 é:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{\cancel{\mu_0}}\frac{\mu_0^{\cancel{2}} K^2}{4c}\left[ct - d\right]^2 \cdot Lw \Bigg|_{t_1}^{t_2} = \text{Resultado da (a).}$$

Problema-3: Encontre os campos, cargas e correntes que correspondem os potenciais:

$$\phi = 0 \quad ; \quad \vec{A} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qt}{r^2} \hat{r}$$

Solução:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{J} = 0 \quad e \quad \rho = q\,\delta(\vec{r})$$

Problema 4: Use a transformação de Gauge $\lambda = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qt}{r}$ para transformar os potenciais do problema anterior:

Solução:

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \qquad \vec{A}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qt}{r^2} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qt}{r^2} \hat{r} = 0$$

Problema-5: Seja $\phi = 0$; $\vec{A} = A_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t)$

Calcule $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

Solução:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -A_0\,\omega\,\hat{y}\,\cos(kx-\omega t)$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x}\,\hat{z} = A_0\,k\,\cos(kx-\omega t)\,\hat{z}$$

(verifique que as eq. de Maxwell são verificadas)

Problema - 6 : Verifique se os potenciais dos exercícios 1, 3 e 5 estão no Gauge de Lorentz ou de Coulomb.

Solução:

(1) $\phi = 0$ $\quad \vec{A} = \frac{\mu_0 k}{4c}\left[ct - |x|\right]^2$ $\quad$ se $|x| < ct$

$$\vec{A} = 0 \quad (|x| > ct)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \nabla\cdot\vec{A} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Gauge de Coulomb $\qquad$ Gauge de Lorentz.

(ambos)

(3) $\phi = 0$; $\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qt}{r^2}\,\hat{r}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \nabla\cdot\vec{A} \neq 0$$ (Nem Coulomb nem Lorentz)

(5) $\phi = 0$; $A = A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{y}$

$\nabla \cdot \vec{A} = 0$ $\quad \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (ambas as Gauss.