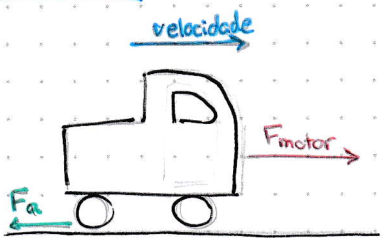
Ficha 1



- massa : $m = 1000\ kg$
- $F_a \rightarrow \beta = 50\ Ns/m$
- $F_{motor} = 250\ N$
- $V_{cruzeiro} = 10\ m/s$

O veículo começa em repouso e acelera durante 5 s até atingir velocidade de cruzeiro (vai ser aplicada Fmotor de forma a manter "constante" a velocidade)

↳ regime estacionário : ñ varia com o tempo

↳ erro máximo tolerável par ΔV em regime estacionário : 2%

1.

variáveis :

- velocidade → variável controlada
- tempo } variáveis de
- deslocamento } medida
- F_{motor} → responsável por tentar "manter" velocidade de cruzeiro } variável de manipulação
- aceleração ↳ Tbm queremos manter a acelaração ≃ 0 em regime estacionário
- velocidade de cruzeiro → "Set Point"

parámetros :

- massa do sistema, m
- coeficiente de amortecimento, β

2. e **3.** Utilizando a segunda Lei de Newton, conseguimos descrever o movimento do sistema :

↳ $\sum F = m \cdot a$

$$F_{motor} - F_a = m \times a \Leftrightarrow$$

colocar em relação à velocidade

$$\Leftrightarrow F_{motor} - \beta \cdot V(t) = m \cdot \frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv(t)}{dt} = \frac{250}{m} - \frac{\beta}{m} \cdot v(t)$$

Obtemos, assim, uma equação diferenciais de 1º ordem! Para encontrar a solução analítica desta equação diferencial, procedemos ao uso da Transformada de Laplace :

$$\underbrace{s \cdot V(s)}_{} = \frac{250}{m} \cdot \frac{1}{s} - \frac{\beta}{m} \cdot V(s) \Leftrightarrow s \cdot V(s) + \frac{\beta}{m} \cdot V(s) = \frac{250}{m} \cdot \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

isto considerando que parte do repouso

(continuação)

$$(=) \; V(s) = \frac{250}{m} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{\beta}{m}} \; (=)$$

$$(=) \; \frac{m\,V(s)}{250} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{\beta}{m}} \; (=) \; \frac{m\,V(s)}{250} = \frac{A_1}{s + \frac{\beta}{m}} + \frac{A_2}{s}$$

Calculando os valores de A_1 e A_2:

- $A_1 = \lim_{s \to -\frac{\beta}{m}} \frac{1}{s} = \frac{1}{-\frac{\beta}{m}} = -\frac{m}{\beta}$

- $A_2 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + \frac{\beta}{m}} = \frac{1}{0 + \frac{\beta}{m}} = \frac{m}{\beta}$

Logo, vamos ter que:

$$\frac{m\,V(s)}{250} = \frac{-m/\beta}{s + \frac{\beta}{m}} + \frac{m/\beta}{s} \; (=)$$

$$(=) \; \frac{\cancel{m}\,V(s)}{250} = \frac{-\cancel{m}}{\beta\left(s + \frac{\beta}{m}\right)} + \frac{\cancel{m}}{\beta s} \; (=)$$

$$(=) \; V(s) = \frac{-250/\beta}{s + \frac{\beta}{m}} + \frac{250/\beta}{s}$$

$\downarrow$

Por isso, utilizando a transformada inversa de Laplace, ou seja, a função que descreve a evolução temporal da velocidade do veículo:

$$v(t) = -\frac{250}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{250}{\beta} \; (=)$$

$$(=) \; v(t) = \frac{250}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \; (=) \; v(t) = 5\left(1 - e^{-0,05t}\right)$$

(4)

4.1.-

velocidade do veículo em regime estacionário = ?

$\downarrow$

basicamente, queremos calcular a velocidade do veículo para $t \to \infty$!

Logo, vamos ter que:

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = 5\left(1 - e^{-0,05 \cdot \infty}\right) = 5(1 - 0) = 5$$

Portanto, a velocidade do veículo em regime estacionário é igual a 5 m/s.

4.2.-

tempo que o veículo demora a acelerar desde $\underbrace{10\%}_{t_1}$ até $\underbrace{90\%}_{t_2}$ do valor final da sua velocidade = ? $\Rightarrow t_2 - t_1$

Calculando os valores de t_1 e t_2:

- $t_1 = ?$

$10\% \cdot 5 = 5(1 - e^{-0,05t}) \Leftrightarrow 0,10 \cdot 5 = 5(1 - e^{-0,05t}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0,5 = 5(1 - e^{-0,05t}) \Leftrightarrow 0,1 = 1 - e^{-0,05t} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -0,9 = -e^{-0,05t} \Leftrightarrow e^{-0,05t} = 0,9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t \simeq 2,107 \text{ s}$

Logo, $t_1 \simeq 2,107 \text{ s}$

- $t_2 = ?$

$90\% \cdot \cancel{5} = \cancel{5}(1 - e^{-0,05t}) \Leftrightarrow 0,90 = 1 - e^{-0,05t} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -0,10 = -e^{-0,05t} \Leftrightarrow e^{-0,05t} = 0,1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t \simeq 46,052 \text{ s}$

Logo, $t_2 \simeq 46,052 \text{ s}$

Portanto, $t_2 - t_1 \simeq 46,052 - 2,107 \simeq 43,945 \text{ s}$

__/__/__

4.3. (???)

De acordo com o $\boxed{\text{enunciado}}$ → $\underbrace{v_{cruzeiro}}_{\text{regime estacionário}} = 10\,m/s \pm \underbrace{2\%}_{\text{erro máximo tolerável}}$

No entanto, de acordo com as alíneas anteriores, não alcançamos $v_{cruzeiro}$:

$$\text{erro}(\%) = \left| \frac{V_{alcançado} - V_{pretendido}}{V_{pretendido}} \right| \times 100 = \left| \frac{5 - 10}{10} \right| \times 100 = \underline{50\%} \quad !!!$$

Poderíamos diminuir este erro ao diminuir a carga do sistema $\boxed{\text{OU}}$ ao aumentar a força aplicada pelo motor, dos quais conseguiríamos alcançar a velocidade pretendida mais rapidamente.

5. (???)

$$\text{erro} = 2\% \Rightarrow \left| \frac{V_{nec.} - 10}{10} \right| \times 100 = 2\% \xrightarrow{V_{nec} < 10} \frac{10 - V_{nec}}{10} = 0{,}02 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - V_{nec} = 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{nec} = 10 - 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_{nec.} = 9{,}8\ m/s}$$

Como a variável a alterar é a força aplicada pelo motor:

$$9{,}8 = \frac{F_{motor}}{\beta} \Rightarrow F_{motor} = 9{,}8 \times 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F_{motor} = 490\ N}$$

6. (???)

- De acordo com as teóricas, a constante de tempo (τ) corresponde ao tempo necessário para o sistema atingir 63,2% da resposta à entrada.

Temos então que:

$$v(\tau) = 63{,}2\% \times 5 \Leftrightarrow \cancel{5}\left(1 - e^{-0{,}05\tau}\right) = 0{,}632 \times \cancel{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}05\tau} = 0{,}632 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e^{-0{,}05\tau} = -0{,}368 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau \simeq 19{,}993\ s}$$