Séries

Séries numéricas

Sejam r um número natural e $(a_k)_{k\geq r}$ uma sucessão. A sucessão de termo geral

$$s_n = \sum_{k=r}^{n} a_k = a_r + a_{r+1} + \cdots + a_n \quad (n \geq r)$$

denomina-se *série numérica de termo geral* a_k e indica-se por $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$.

O limite da série, quando existe (finito ou infinito), denomina-se *soma da série* e indica-se, por um abuso de notação, também pelo símbolo $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$.

Se a soma for finita, diremos que a série é *convergente*. Se a soma for infinita ou se o limite da série não existir, diremos que a série é *divergente*.

A soma $\sum_{k=r}^{n} a_k$ é chamada *soma parcial de ordem* n da série.

Exemplo

Tem-se $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Com efeito, o polinómio de Taylor da função e^x de ordem n à volta de 0 é

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Assim, temos a fórmula de Taylor-Lagrange

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c \text{ estritamente entre } 0 \text{ e } x.$$

Para $x = 1$ obtemos

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1.$$

Exemplo

Logo

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - e\right| = \left|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Portanto

$$-\frac{e}{(n+1)!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - e < \frac{e}{(n+1)!}$$

e então

$$e - \frac{e}{(n+1)!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e + \frac{e}{(n+1)!}$$

Como $\lim_{n\to\infty} e - \frac{e}{(n+1)!} = e = \lim_{n\to\infty} e + \frac{e}{(n+1)!}$, pelo Teorema do confronto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Séries harmónicas

A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, onde α é um numéro real dado, denomina-se *série harmónica* de ordem α.

Para $\alpha > 1$, a série harmónica é convergente. Para $\alpha \leq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = +\infty.$$

Séries geométricas

A série $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ $(q \in \mathbb{R})$ denomina-se *série geométrica.*

Temos

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - q^{k+1} \\ &= q^0 - q^1 + q^1 - q^2 + q^2 - q^3 + \ldots + q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

Assim, se $|q| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Se $|q| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Critérios de convergência

Seja $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ uma série numérica e $l > r$. Então a série $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ é convergente se e só se $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ é convergente. Se as somas das séries existirem, então

$$\sum_{k=r}^{\infty} a_k = \sum_{k=r}^{l-1} a_k + \sum_{k=l}^{\infty} a_k.$$

Exemplo

Como a série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é convergente, a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é convergente. Temos

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Critérios de convergência

Uma série numérica é uma sucessão e então uma função especial. Logo cada resultado sobre limites de funções dá origem a um resultado sobre somas de séries. Assim temos por exemplo:

Proposição

Seja $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ uma série de termos não negativos. Se a série (isto é a sucessão das somas parciais) for limitada, então $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ é convergente.

Critérios de convergência

Proposição

Se a série $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ *for convergente, então a sucessão* $(a_k)_{k\geq r}$ *converge para* 0.

Exemplo

Como a sucessão $(k!)_{k\in\mathbb{N}}$ não tende para 0, a série $\sum_{k=0}^{\infty} k!$ é divergente.

Nota

Como mostra o exemplo da série harmónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, uma série $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ pode ser divergente mesmo que $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Critério de comparação

(i) Seja $\sum_{k=r}^{\infty} c_k$ uma série convergente de termos não negativos. Se existir $p \geq r$ tal que, para todo o $k \geq p$, $|a_k| \leq c_k$, então a série $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ é convergente.

(ii) Seja $\sum_{k=r}^{\infty} d_k$ uma série divergente de termos não negativos. Se existir $p \geq r$ tal que, para todo o $k \geq p$, $a_k \geq d_k$, então a série $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$ é divergente.

Critério de comparação

Exemplos

(i) A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k2^k}$ é convergente. Com efeito, $\left|\frac{-1}{k2^k}\right| \leq \frac{1}{2^k}$ e a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é convergente (série geométrica).

(ii) A série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ é divergente. Com efeito, $\frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{k}$ e a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ é divergente (série harmónica).

Critério de Dirichlet

Teorema

Seja $\sum_{k=r}^{\infty} b_k$ *uma série limitada e* $(a_k)_{k\geq r}$ *uma sucessão monótona que tende para* 0. *Então a série* $\sum_{k=r}^{\infty} a_k b_k$ *é convergente.*

Como corolário temos a

Regra de Leibniz

Seja $(a_k)_{k\geq r}$ *uma sucessão monótona que tende para* 0. *Então a série* $\sum_{k=r}^{\infty} (-1)^k a_k$ *é convergente.*

Exemplo

Pela regra de Leibniz, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ é convergente, pois a sucessão $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$ tende para 0 de maneira monótona.

Séries de Taylor

Sejam I um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. Sejam $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Taylor-Lagrange, podemos escrever, para qualquer $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \min\{x, x_0\} \le c_x \le \max\{x, x_0\}.$$

Definição

A *série de Taylor* de f à volta de x_0 no ponto x é a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

13

Séries de Taylor

Teorema

Seja $x \in I$.

(a) *Tem-se*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

se e só se $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

(b) *Se existirem constantes $\alpha, C \in \mathbb{R}$ tais que $|f^{(n)}(t)| \le \alpha C^n$ para todo o $n \ge 1$ e todo o $\min\{x, x_0\} \le t \le \max\{x, x_0\}$, então*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

14

Exemplos

(a) Consideremos a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. A série de Taylor de f a volta de $x_0 = 0$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Para $x \ge 0$, sejam $\alpha = 1$ e $C = e^x$. Tem-se $C \ge 1$ e então $C^n \ge C$. Para $0 \le t \le x$,

$$|f^{(n)}(t)| = e^t \le e^x = C \le C^n = \alpha C^n.$$

Para $x < 0$, sejam $\alpha = 1$ e $C = 1$. Então, para $x \le t \le 0$,

$$|f^{(n)}(t)| = e^t \le 1 = \alpha C^n.$$

Segue-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

15

Exemplos

(b) Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$. A série de Taylor de f à volta de 0 é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Tomando $\alpha = C = 1$ tem-se $|f^{(n)}(t)| \le \alpha C^n$ para todo o t entre x e 0. Logo

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) Do mesmo modo, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

16

Séries de Taylor

Nota

Em geral, uma função não é igual à sua série de Taylor (à volta de um ponto x_0) para todo o x. Por exemplo, a série de Taylor à volta de 0 da função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ é

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Para $-1 < x \leq 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

mas a série é divergente para $x > 1$.

Séries de potências

Uma série da forma $\sum_{k=l}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ diz-se uma *série de potências* centrada em x_0. Por exemplo, as séries de Taylor são séries de potências.

Teorema

(a) Se a série de potências $\sum_{k=l}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ *é convergente para* $x = x_1$, *então ela é convergente para qualquer* x *com* $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

(b) Se a série de potências $\sum_{k=l}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ *é divergente para* $x = x_1$, *então ela é divergente para qualquer* x *com* $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

Raio de convergência

O *raio de convergência* da série de potências $\sum_{k=l}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ é o maior r (eventualmente ∞) tal que a série é convergente para todo o x com $|x-x_0| < r$. Se o raio de convergência r é maior do que 0, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ diz-se o *intervalo de convergência* da série.

Nota

Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=l}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. Então a série é divergente para $|x - x_0| > r$. Para $|x - x_0| = r$, não se pode dizer nada a priori.

Exemplos

(a) O raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ é 1 (série geométrica). A série é divergente para $|x| = 1$.

(b) Consideremos a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. Para $x = 1$, a série é divergente (série harmónica de ordem 1). Para $x = -1$, a série é convergente pelo critério de Leibniz. Logo o raio de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ é 1.