Ficha 3 Métodos numéricos

1. Inverta a seguinte matriz e verifique o resultado obtido:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Faça a decomposição LU da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

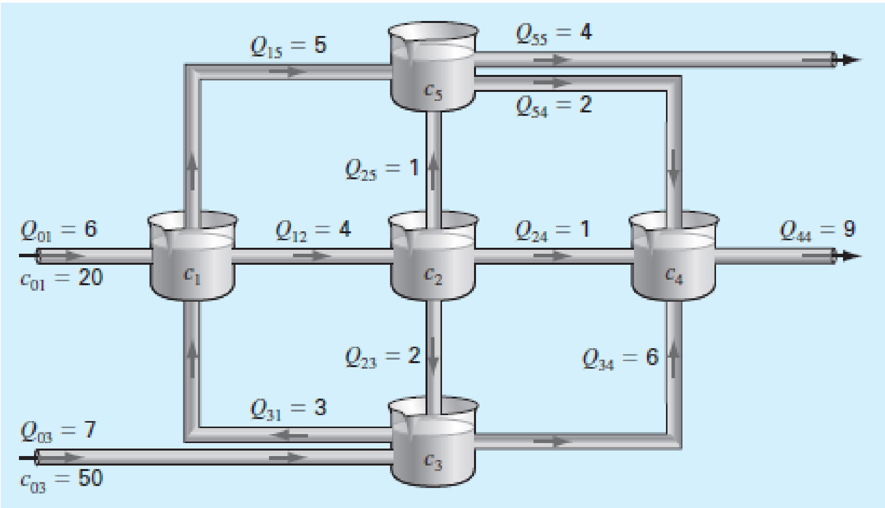
3. Implemente um código geral para resolver sistemas lineares de equações usando o método de eliminação de Gauss.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

4. Cinco reatores estão ligados por tubos tal como mostrado na figura seguinte. O débito de cada tubo é dado pelo produto do fluxo pela concentração de reagente. No estado estacionário, a massa que entra num reator é igual à que sai, assim o balanço de massa para o 1º reator é:

$$Q_{01}c_{01} + Q_{31}c_3 = Q_{15}c_1 + Q_{12}c_1$$

Escreva os balaço de massa para os restantes reatores e obtenha as concentrações em cada reator resolvendo o sistema de equações.



5. Determine a solução do seguinte Sistema de equações sobredeterminado usando o comando solve() , a decompoisção QR e a pseudo-inversa.

$$\begin{bmatrix} 2.0 & -3.0 & 2.0 \\ 1.9 & -3.0 & 2.2 \\ 2.1 & -2.9 & 2.0 \\ 6.1 & 2.1 & -3.0 \\ -3.0 & 5.0 & 2.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1.01 \\ 0.98 \\ 4.94 \\ 4.10 \end{bmatrix}$$

6. A transformada discreta de Fourier X de um sinal x(t) com N amostras pode ser calculada da seguinte forma:

X=A*x

$$x = [x(0) \quad x(1) \quad \cdots \quad x(N-1)]^T,\ X = [X(0) \quad X(1) \quad \cdots \quad X(N-1)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ W_N^0 & W_N^{N-2} & W_N^{2(N-2)} & \cdots & W_N^{(N-2)(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

onde $W_N^k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$.

A transformada inversa de Fourier: x=A^{-1}*X=A^T*X*(1/N)

a) Gerar N = 128 amostras do seguinte sinal:

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{15\pi}{64}n\right) + 3\sin\left(\frac{17\pi}{64}n\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N -$$

b) Calcule o espectro deste sinal.
c) Calcule a autocorrelação de x(t).
d) Calcule a potência total do sinal.

7. Considere o seguinte objeto bidimensional definido por:

x^2+0.25*y^2=1

Faça uma transformação que amplie o objeto de 0.4 e 0.6 em x e y e rode de 45° no sentido dos ponteiros do relógio.

2-d transformations

Transformation Type	Transformation Matrix
Translation	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rotation by θ	$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Scaling	$A = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Uma imagem pode ser representada por uma matriz simétrica A ∈ $IR^{n\times n}$. A matriz A pode-se decompor: A = V*L*V^T

Onde V é matriz ortogonal dos vetores próprios e a matriz contendo os valores próprios.
Usando apenas os W valores próprios maiores e respetivos vetores próprios de A podemos obter uma matriz aproximada: $\tilde{A} = \tilde{V} * \tilde{L} * \tilde{L}^T$

Esta factorização implica uma compressão da informação, pois apenas é necessário guardar W+W*N números.

a) *Faça um plot da curva* x^2+y^2=1 e guarde a imagem usando a função savefig().
b) *Determine os valores e vetores próprios da matriz imagem.*
c) *Determine o nº mínimo de valores próprios a usar para reconstruir a imagem.*