5. Ondas electromagnéticas no vazio:

Como vimos, os campos eléctrico e magnético são entidades físicas: transportam momento, energia. São capazes de interagir com outras entidades físicas (partículas) e propagam interacções entre estas entidades. Esta actividade física é descrita pela existência de ondas electromagnéticas. Vejamos o que se passa na situação mais simples:

5.1- Ondas electromagnéticas no vazio:

As densidades de carga e corrente são nulas. As equações de Maxwell vêm então:

i) $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ iii) $\nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

ii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ iv) $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Vejamos então:

- $$\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E})}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \wedge \dot{\vec{B}} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

- $$\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \wedge \dot{\vec{E}} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Estas ondas harmónicas que se propagam no vazio <u>devem</u> ser transversais.

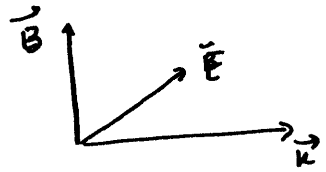
Por outro lado:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\,\vec{k} \wedge \tilde{\vec{E}}_0 = i\omega\,\tilde{\vec{B}}$$

$$\vec{k} \wedge \tilde{\vec{E}}_0 = \omega\,\tilde{\vec{B}} \Rightarrow \tilde{\vec{B}} \perp \tilde{\vec{E}}_0 \text{ e } \tilde{\vec{B}} \perp \vec{k}$$

$\tilde{\vec{E}}$ e $\tilde{\vec{B}}$ são necessariamente mutuamente perpendiculares e $\vec{k}$ é perpendicular a ambos:



Mas, então:

$$|\vec{k} \wedge \tilde{\vec{E}}_0| = \omega|\tilde{\vec{B}}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\tilde{\vec{E}}_0| = \frac{\omega}{k}|\tilde{\vec{B}}_0|$$

As suas amplitudes estão relacionadas (apesar de estarem desacoplados) e oscilam em fase (ω e k são reais).

Por exemplo, se $\vec{k} \parallel zz'$ e $\vec{E} \parallel \vec{x} \Rightarrow \vec{B} \parallel \hat{y}$

$$\tilde{\vec{E}}(z,t) = \tilde{E}_0\,\hat{x}\,e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\tilde{\vec{B}}(z,t) = \tilde{B}_0\,\hat{y}\,e^{i(kz-\omega t)}$$

são soluções possíveis das eq. de onda <u>e</u> das equações de Maxwell.

Estas funções complexas são obviamente soluções da equação de onda. Isto pode ser verificado substituindo. Por exemplo:

$$\nabla^2\left(\tilde{\vec{E}}_0\, e^{i(kz-\omega t)}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\tilde{\vec{E}}_0\, e^{i(kz-\omega t)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\tilde{\vec{E}}_0\,(ik)^2\, e^{i(kz-\omega t)} - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2\,\tilde{\vec{E}}_0\, e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{k} = \pm c$$

Logo: $\tilde{\vec{E}}_0\, e^{i(kz-\omega t)} = \tilde{\vec{E}}_0\, e^{ik(z\pm ct)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \cos[k(z \pm ct)] \equiv$ onda harmónica que se propaga no espaço com velocidade $\pm c$.

Mas, estes campos que se propagam no espaço devem obedecer às equações de Maxwell. E este facto restringe fortemente as soluções possíveis:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\tilde{\vec{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i\,\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}_0 = 0$$

Se $\vec{k} \parallel z \Rightarrow \vec{E}\cdot\hat{z} = 0$

Claro que: $\vec{B}\cdot\hat{z} = 0 \qquad (\nabla\cdot\vec{B} = 0)$

Os campos eléctrico e magnético obedecem a equações de onda. Separadamente: no vazio, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não estão acoplados e devem obedecer a equações de onda de 2º ordem.

Repare-se que $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} = 0$.

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3\ 10^8\ ms^{-1} \quad !$$

As equações de Maxwell impõem que o vazio "suporta" a propagação de ondas electromagnéticas e que estas ondas se propagam com a velocidade da luz.

Como procurar soluções destas equações? Usando a técnica de Fourier e a "magia" das funções complexas, é possível explorar convenientemente o facto de as equações de onda serem lineares.

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ são campos reais. Mas podemos admitir, por conveniência, que são grandezas complexas, para fazermos contas, e considerar apenas a parte real das soluções.

Consideremos então as soluções harmonicas:

$$\tilde{E}(z,t) = \tilde{E}_0\, e^{i(kz-\omega t)} \; ; \quad \tilde{B}(z,t) = \tilde{B}_0\, e^{i(kz-\omega t)}$$

Os correspondentes campos são então a parte real:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t + \delta)$$

$$\vec{B}(z,t) = B_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t + \delta)$$

Para uma direcção geral de propagação

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_0 \hat{n} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \frac{\tilde{\vec{E}}_0}{c} (\hat{k} \wedge \hat{n}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \frac{1}{c} \hat{k} \wedge \tilde{\vec{E}}$$

Evidentemente, estes campos harmónicos que se propagam no vazio transportam, como vimos, energia e momento (linear).

5.2- Energia e momento de uma onda plana electromagnética:

- $$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$$ é a densidade de energia que lhe está associada.

Mas, como vimos, $B = \frac{E}{c} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0 c^2} E^2\right) = \varepsilon_0 E^2$$

A densidade de energia eléctrica é igual à densidade de energia magnética.

Podemos assim exprimir a densidade de energia da onda apenas à custa da amplitude de um dos campos. (por exemplo, o campo eléctrico:

$$u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)$$

A energia da onda propaga-se com a mesma velocidade $c = \frac{\omega}{k}$

- A densidade de fluxo de energia é dado pelo vector de Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$

Para uma onda plana que se propaga segundo z:

$$\vec{S} = \hat{z} \frac{1}{c\mu_0} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) = c\, u\, \hat{z}$$

O vector de Poynting é igual à densidade de energia vezes a velocidade de propagação da onda.

- A densidade volúmica de momento linear:

$$\vec{p}_{em} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{S}$$

para uma onda plana é:

$$\vec{p}_{em} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{1}{c\mu_0} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \cdot \hat{z}$$

$$= \frac{u}{c} \hat{z} \implies \boxed{p_{em}\, c = u}$$

<u>Nota</u>

O momento linear (por unidade de volume) é aqui definido sem se invocar o conceito de massa m.

No entanto, é possível imaginar que este fluxo de energia e momento (que se propaga à velocidade da luz) se deve a um gás de partículas (a visão de Newton, em todo o caso). Pode uma "partícula" viajar à velocidade da luz e transportar um momento e energia finitos?

Em Relatividade Restrita, o momento linear de uma partícula é definido como:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$|\vec{p}|$ só pode ser finito para $v = c$ se $m = 0$!

As partículas de luz de Newton têm massa nula.

Com maior generalidade: uma partícula que se propaga à velocidade da luz tem necessariamente massa nula!

5.3 – Valores médios da energia e momento de uma onda plana: pressão de Radiação:

Como vimos, para uma onda plana:

$$u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi)$$

$$\vec{S} = c\,\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi)\,\hat{z} = c\,u\,\hat{z}$$

$$\vec{p}_{em} = \frac{1}{c}\,\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi)\,\hat{z} = \frac{u}{c}\,\hat{z}$$

Em média, $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$. Podemos assim definir valores médios destas grandezas:

$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$ → densidade média de energia

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c\,\varepsilon_0 E_0^2\,\hat{z}$ → densidade média de fluxo de energia $\equiv I$ (intensidade da onda)

$\langle \vec{p}_{em} \rangle = \frac{1}{2c}\varepsilon_0 E_0^2$ → densidade média de momento linear.

Podemos assim definir a <u>pressão de radiação</u> electromagnética como o momento linear transferido por unidade de tempo através de uma superfície de área A:

$$\boxed{\Delta \vec{p} = \langle \vec{p} \rangle \cdot c\,\Delta t \cdot A}$$

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t \cdot A} = \text{pressão de radiação} \equiv \text{força / Área}$$

pressão radiação = $\langle \vec{P}_{em} \rangle c = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}$

Problema 9.10 (Griffiths):

A intensidade da luz solar na Terra é aproximadamente $1300\, W/m^2$. Se esta luz atingisse um perfeito absorvedor de luz, qual a pressão que esta sentiria? E se fosse um perfeito reflector?

Resposta: $P = \frac{I}{c}$ = força/area

$$\frac{I}{c} = P = \frac{1{,}3 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 4{,}3 \cdot 10^{-6}\ N/m^2$$

para um perfeito absorvedor.

Para um perfeito Reflector: $= 2 \times 4{,}3 \times 10^{-6}$.

Problema 9.12: Obtenha o tensor de Maxwell para uma onda monocromática que se desloca segundo z.

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right]$$

$$\vec{\tilde{E}} = E_0 \hat{x}\, e^{i(kz - wt + \delta)}$$

$$\vec{\tilde{B}} = B_0 \hat{y}\, e^{i(kx - wt + \delta}$$

$\Rightarrow T_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E_x^2 - \frac{1}{\mu_0 c^2} E_x^2\right) \equiv 0$$

$$T_{yy} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \cancel{E_y}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \cancel{B_y}^2 \equiv 0$$

$$T_{zz} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 = -u$$

$$T_{zz} = -\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)$$

$\square$