CAPÍTULO 6

TRANSFORMAÇÃO LINEAR

1 Introdução

Muitos problemas de Matemática Aplicada envolvem o estudo de transformações, ou seja, a maneira como certos dados de entrada são transformados em dados de saída.

Em geral, o estudante está familiarizado com funções, tais como funções reais de uma variável real, as quais têm por domínio e contradomínio o conjunto $\Re$ dos números reais (ou subconjuntos de $\Re$), como, por exemplo, a função *f* indicada a seguir:

$$\begin{array}{rcl} f : \Re & \to & \Re \\ x & \mapsto & f(x) = x^3 \end{array}.$$

Essa função transforma um número real *x* qualquer em outro número real, no caso, seu cubo, isto é, x^3.

Estudam-se, ainda, funções com outros domínios e contradomínios, como, por exemplo:

$$\begin{array}{rcl} f : A \subset \Re^2 & \to & \Re \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}.$$

Neste capítulo, serão estudadas funções cujos conjuntos domínio e contradomínio são espaços vetoriais. Como os elementos de um espaço vetorial são chamados, de modo geral, de <u>vetores</u>, essas funções associarão vetores do conjunto domínio com vetores do conjunto contradomínio.

Definição: Dados dois espaços vetoriais *V* e *W*, sendo $V \neq \phi$, uma função ou transformação *T* de *V* para *W* é uma lei que associa a todo vetor *x* de *V* um único vetor em *W*, denotado por $T(x)$.

O vetor $T(x)$ de *W* é chamado imagem de $x \in V$ pela transformação *T*.

Exemplo: considerando-se os espaços vetoriais reais $V = \Re^3$ e $W = \Re^2$ e a transformação definida por:

$$\begin{array}{rcl} T : \Re^3 & \to & \Re^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & T(x, y, z) = (x + y, y - z) \end{array}'$$

vê-se que *T* leva o vetor $(0,1,-1) \in \Re^3$ no vetor:

$T(0,1,-1) = (0 + 1, 1 - (-1)) = (1,2) \in \Re^2$.

2 Transformação Linear

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K. Uma função $T : V \to W$ é uma transformação linear se:

(a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$

(b) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, $\forall v \in V$, $\forall \alpha \in K$

Observações:

1) Na transformação linear $T : V \to W$, V é chamado espaço de saída e W é chamado espaço de chegada da transformação.

2) A transformação linear $T : V \to W$ é também chamada de aplicação linear; ela preserva a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar.

3) A transformação linear $T : V \to V$ (isto é, $W = V$) é chamada de operador linear.

Exemplos:

1) Considere-se a aplicação definida por:

$$\begin{aligned} T : \Re^2 &\to \Re^2 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = (-x, y) \end{aligned}.$$

T é uma transformação linear (ou operador linear), como se mostrará a seguir.

(a) sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ dois vetores do $\Re^2$; tem-se:

$T(v_1 + v_2) = T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = T[(x_1 + x_2, y_1 + y_2)] =$

$(-(x_1 + x_2), y_1 + y_2) = (-x_1 - x_2, y_1 + y_2) = (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) = T(v_1) + T(v_2)$

(b) considerando-se um vetor $v = (x, y) \in \Re^2$ e um número real α , tem-se:

$T(\alpha v) = T[\alpha(x, y)] = T(\alpha x, \alpha y) = (-\alpha x, \alpha y) = \alpha(-x, y) = \alpha T(x, y) = \alpha T(v)$

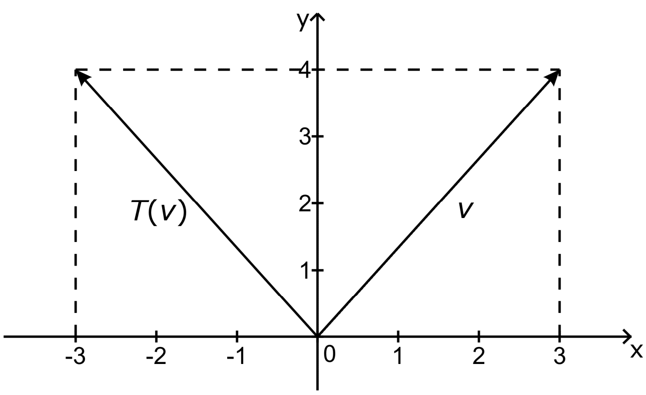

FIGURA 9

É possível visualizar geometricamente a ação da transformação linear T no plano de coordenadas cartesianas ortogonais, que representa geometricamente o espaço vetorial real $\Re^2$. Considerando-se, por exemplo, o vetor $v = (3,4)$, que é o vetor-posição do ponto $(3,4)$, tem-se:

$T(v) = T(3,4) = (-3,4)$.

Vê-se, na Figura 9, que a transformação promove uma rotação do vetor em torno do eixo Oy.

2) Seja $T : \Re^3 \to \Re^2$, definida por $T(x, y, z) = (x + z, 2y - z)$. Mostrar que T é uma transformação linear.

Mostrar-se-á que são satisfeitas as condições da definição:

(a) Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores do $\Re^3$. Então:

$$T(v_1 + v_2) = T[((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2))] = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$$
$$= ((x_1 + x_2) + (z_1 + z_2), 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)) =$$
$$= (x_1 + x_2 + z_1 + z_2, 2y_1 + 2y_2 - z_1 - z_2) =$$
$$= (x_1 + z_1, 2y_1 - z_1) + (x_2 + z_2, 2y_2 - z_2) =$$
$$= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

(b) Sejam $v = (x, y, z) \in \Re^3$ e $\alpha \in \Re$. Tem-se:

$$T(\alpha v) = T[\alpha(x, y, z)] = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + \alpha z, 2\alpha y - \alpha z)$$
$$= \alpha(x + z, 2y - z) = \alpha T(x, y, z) = \alpha T(v).$$

3) Sejam $0 : V \to W$ a aplicação nula, definida por $0(v) = 0$, $\forall v \in V$, e $Id : V \to V$ a aplicação identidade, definida por $Id(v) = v$, $\forall v \in V$. O leitor poderá verificar que essas transformações são lineares.

4) Seja $T : \Re^2 \to \Re^3$, definida por $T(x, y) = (x, y, 2)$. Mostrar que T não é uma transformação linear.

Deve-se mostrar que pelo menos uma das condições da definição não é satisfeita. Tem-se:

(a) Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ dois vetores do $\Re^2$. Tem-se:

$$T(v_1 + v_2) = T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) = (x_1, y_1, 2) + (x_2, y_2, 0) \neq T(v_1) + T(v_2)$$

Conclui-se, assim, que *T* não é transformação linear.

5) As seguintes transformações apresentam uma visão geométrica:

(a) Expansão:

$$\begin{aligned} T : \Re^2 &\to \Re^2 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = \alpha(x, y) \end{aligned}, \text{ sendo } \alpha \in \Re.$$

Na Figura 10, mostram-se, para exemplificar, o vetor $v = (1,2)$ e o vetor $T(v) = 2v$, ou seja, $T(v) = T(1,2) = 2(1,2) = (2,4)$, onde se considerou $\alpha = 2$.

(b) Reflexão em torno do eixo *Ox*:

$T : \Re^2 \to \Re^2$
$(x, y) \mapsto T(x, y) = (x, -y)$.

Considerando-se, por exemplo, o vetor $v = (2,-3)$, tem-se que $T(v) = T(2,-3) = (2,3)$. Esses vetores são mostrados na Figura 11.

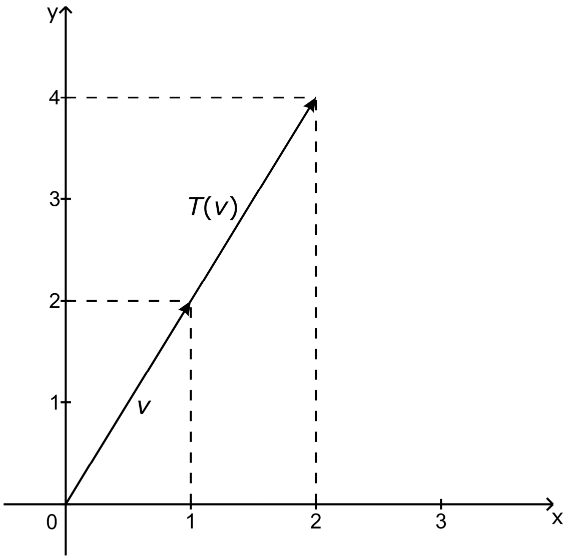

FIGURA 10

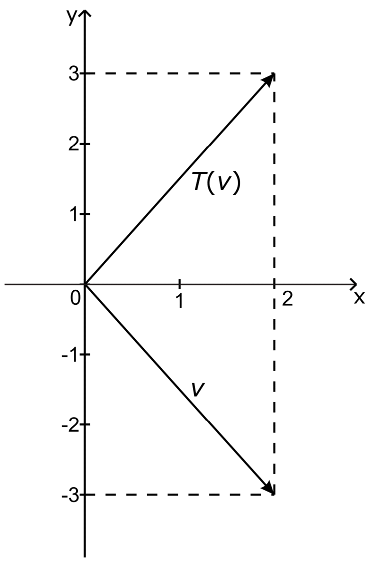

FIGURA 11

(c) Reflexão na origem:

$T : \Re^2 \to \Re^2$
$(x, y) \mapsto T(x, y) = (-x, -y)$.

A imagem do vetor $v = (2,3)$ por essa transformação T é $T(v) = T(2,3) = (-2,-3)$, conforme se vê na Figura 12.

d) Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário:

$T : \Re^2 \to \Re^2$
$(x, y) \mapsto T(x, y) = (x \cos\theta - y sen\theta, y \cos\theta + x sen\theta)$.

Tomando-se, novamente, o vetor $v = (2,3)$ e considerando-se um ângulo de rotação $\theta = 60^0$, tem-se: $T(x,y) = (2\cos(60^0) - 3sen(60^0), 3\cos(60^0) + 2sen(60^0))$, ou seja, tem-se o vetor $T(2,3) = \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$, mostrado na Figura 13.

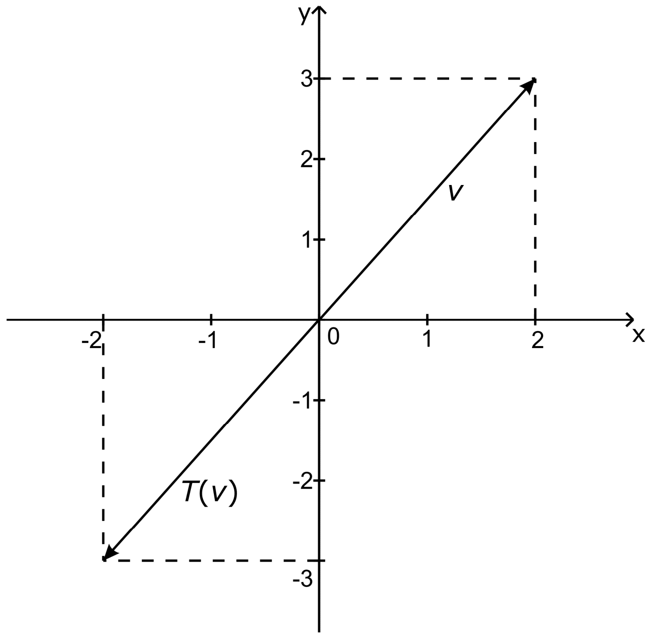

FIGURA 12

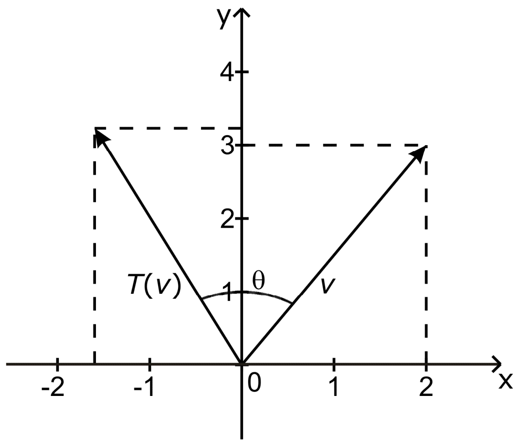

FIGURA 13

(e) Reflexão em torno da reta $y = x$:

$T : \Re^2 \to \Re^2$
$(x,y) \mapsto T(x,y) = (y,x)$.

Considerando-se, agora, o vetor $v = (3,1)$, obter-se-á, pela transformação *T*, o vetor $T(v) = (1,3)$, os quais são simétricos em relação à reta $y = x$, como mostra a Figura 14.

6) Sejam: $M_n(\Re)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem *n* sobre o corpo $\Re$ e $B \in M_n(\Re)$ uma matriz fixa. Verificar se é linear a transformação

$$\begin{aligned} T : M_n(\Re) &\rightarrow M_n(\Re) \\ A &\mapsto T(A) = AB - BA \end{aligned}.$$

Verificar-se-á se são satisfeitas as condições da definição.

(a) Sejam A e C duas matrizes de $M_n(\Re)$. Tem-se:

$T(A) = AB - BA$ e $T(C) = CB - BC$;

então:

$T(A+C) = (A+C)B - B(A+C) = AB + CB - BA - BC = (AB - BA) + (CB - BC) = T(A) + T(C)$

(b) Sejam $A \in M_n(\Re)$ e $\alpha \in \Re$. Tem-se:

$T(\alpha A) = (\alpha A)B - B(\alpha A) = \alpha(AB) - \alpha(BA) = \alpha(AB - BA) = \alpha T(A)$

Conclui-se, de (a) e (b), que T é uma transformação linear.

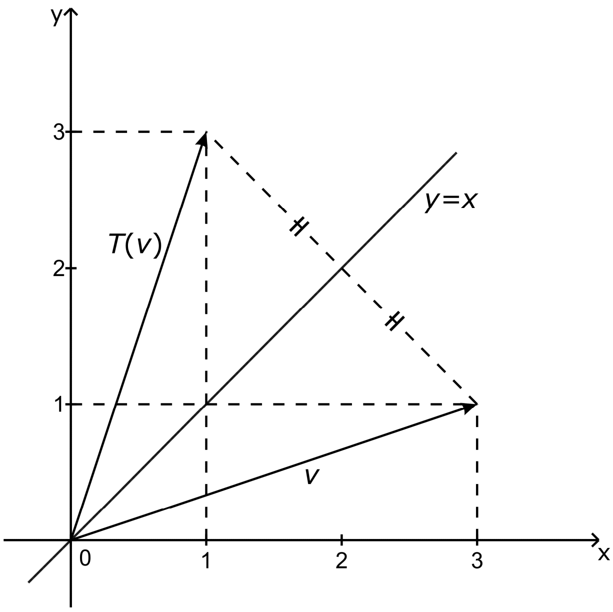

Figura 14

7) Considere-se a aplicação $T : P_2(\Re) \rightarrow M_2(\Re)$, definida por:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que T é uma transformação linear.

Deve-se mostrar que são satisfeitas as condições da definição.

(a) Sejam $p_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $p_2(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ dois elementos de $P_2(\Re)$. Então:

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + b_0 + b_1 t + b_2 t^2\right) = = T\left[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + b_0 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_1 + b_1 & a_1 + b_1 - a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 + b_1 & b_2 \\ b_1 & b_1 - b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= T(p_1(t)) + T(p_2(t))$$

Assim, $T(p_1(t) + p_2(t)) = T(p_1(t)) + T(p_2(t))$

(b) Sejam $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ um elemento de $P_2(\Re)$ e $\alpha \in \Re$. Tem-se:

$$T(\alpha p(t)) = T(\alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2) = \begin{pmatrix} \alpha a_0 + \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_1 & \alpha a_1 - \alpha a_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \alpha T(p(t)).$$

De (a) e (b), conclui-se que T é uma transformação linear.

Teorema: Sejam V e W dois espaços vetoriais reais e $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base ordenada de V. Dados $w_1, w_2, \cdots, w_n$ elementos arbitrários de W, existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, ..., $T(v_n) = w_n$.

Demonstração:

Hipóteses: $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é base de V; $w_1, w_2, \cdots, w_n$ são elementos arbitrários de W

Tese: existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, ..., $T(v_n) = w_n$

(i) Existência

Seja $v \in V$. Então, existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tais que:

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Define-se a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} T : V &\to W \\ v &\mapsto T(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n \end{aligned}.$$

Observe-se que T está bem definida, pois $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são únicos. Além disso, tem-se:

$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$;

conclui-se, assim, que, para $i = 1, 2, \cdots, n$, tem-se $T(v_i) = w_i$.

(ii) Unicidade

Suponha-se que existe uma transformação linear $T' : V \to W$ tal que $T'(v_i) = w_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. Então, vem:

$T'(v) = T'(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T'(v_1) + \alpha_2 T'(v_2) + \cdots + \alpha_n T'(v_n) =$

$= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = T(v)$,

de onde se segue que $T' = T$.

Observação: com este teorema, pode-se afirmar que as transformações lineares são determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base de seu espaço de saída.

3 Propriedades das Transformações Lineares

Para toda transformação linear $T : V \to W$, são válidas as seguintes propriedades:

(P_1) $T(0) = 0$

De fato, tem-se:

$T(0) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0 \,,\; \forall v \in V$.

(P_2) $T(-v) = -T(v)$, $\forall v \in V$

De fato, tem-se:

$T(-v) = T(-1 \cdot v) = -1 \cdot T(v) = -T(v)$

(P_3) $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$

Com efeito, tem-se:

$T(v_1 - v_2) = T(v_1 + (-v_2)) = T(v_1) + T(-v_2) = T(v_1) - T(v_2)$

(P_4) $T\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$, $\forall v_i \in V$, $\forall \alpha_i \in K$; $i = 1,2,\cdots,n$.

De fato, tem-se:

$$T\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right] = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + \cdots + T(\alpha_2 v_2) =$$

$$= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

(P_5) Se $U \subset V$ como subespaço vetorial, então $T(U) \subset W$ como subespaço vetorial.

Sugere-se demonstrar a afirmação.

Observações:

1) Da 1ª propriedade, decorre que, se uma transformação *T* é tal que $T(0) \neq 0$, então *T* não é linear. Ressalte-se, no entanto, que a condição de que $T(0) = 0$ não é suficiente para que *T* seja linear.

2) A 4ª propriedade mostra que a transformação linear preserva combinações lineares. Diz-se, então, que a transformação linear satisfaz o princípio de superposição.

Exemplo: considere-se uma transformação linear $T : \Re^3 \to P_2(\Re)$ satisfazendo as seguintes condições: $T(1,1,1) = 2 - 3t$, $T(1,1,0) = 1 + t - t^2$ e $T(1,0,0) = t + 2t^2$. Determinar a expressão de *T*.

De acordo com os espaços de saída e de chegada de *T*, esta transforma vetores do $\Re^3$ em polinômios de grau menor ou igual a 2, com coeficientes reais. Para que seja possível construir a expressão de *T* aplicada em um vetor $(x, y, z) \in \Re^3$, é preciso conhecê-la aplicada nos vetores de uma base do seu espaço de saída, no caso, o $\Re^3$.

É possível mostrar que o conjunto $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é uma base deste espaço e, portanto, são conhecidas as imagens desses vetores, pela transformação *T*.

Tomando um vetor genérico $(x, y, z) \in \Re^3$, este é uma combinação linear dos vetores da base B e, portanto, pode-se escrever:

$(x, y, z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$,

ou seja,

$(x, y, z) = (a + b + c, a + b, a)$,

de onde se segue que

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = a + b \\ z = a \end{cases},$$

e, portanto,

$$\begin{cases} a = z \\ b = y - z \\ c = x - y \end{cases}.$$

Logo, pode-se escrever:

$(x, y, z) = z(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (x - y)(1,0,0)$.

Aplicando-se a transformação em ambos os lados desta igualdade, vem:

$T(x, y, z) = T(z(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (x - y)(1,0,0))$.

Pela propriedade (P_3), tem-se:

$T(x, y, z) = zT(1,1,1) + (y - z)T(1,1,0) + (x - y)T(1,0,0) =$

$= z(2 - 3t) + (y - z)(1 + t - t^2) + (x - y)(t + 2t^2)$

$= (y + z) + (x - 4z)t + (2x - 3y + z)t^2$.

Assim, para qualquer vetor $(x, y, z) \in \Re^3$, tem-se que

$T(x, y, z) = (y + z) + (x - 4z)t + (2x - 3y + z)t^2$,

que é a expressão procurada da transformação *T*.

4 Núcleo e Imagem

Definição: O conjunto imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ é o conjunto:

$Im(T) = \{w \in W; \exists\ v \in V\ /\ T(v) = w\}$.

Assim, a imagem de *T* é constituída dos vetores de *W* que são imagem de pelo menos um vetor de *V*, através da aplicação *T*. É claro que, de maneira geral, tem-se que $Im(T) \subset W$; pode ocorrer, entretanto, que $Im(T) = W$.

Definição: O núcleo de uma transformação linear $T : V \to W$ é o conjunto:

$Ker(T) = \{v \in V \ / \ T(v) = 0\}$.

Observações:

1) A notação $Ker(T)$ para núcleo de *T* deve-se à palavra inglesa *kernel*, que significa *núcleo*.

2) O núcleo de *T* é um subconjunto de *V*, isto é, $Ker(T) \subset V$.

3) Também se pode fazer referência ao núcleo de *T* como *nulidade de T*, com a notação $Nul(T)$.

4) Quando se consideram funções da forma:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \Re &\to B \subseteq \Re \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned},$$

ou seja, funções reais de uma variável real, o conjunto dos elementos de *A* tais que $f(x) = 0$ é o conjunto dos *zeros* da função *f*, ou seja, das *raízes* reais da equação $f(x) = 0$. Esses são os valores da variável *x* que anulam a função *f*, de onde se origina a expressão *nulidade* da função. No caso de transformações lineares, não se utiliza a expressão *zero da transformação* para um vetor *v* tal que $T(v) = 0$. Diz-se, apenas, que *v* pertence ao núcleo de *T* e, portanto, é levado por ela ao vetor nulo do espaço de chegada.

A Figura 15 mostra a representação gráfica de uma transformação linear $T : V \to W$, com os conjuntos $Ker(T) \subset V$, no qual se mostra um vetor *u* tal que $T(u) = 0$, e $Im(T) \subset W$, no qual se mostram os vetores *w*, imagem de um vetor $v \in V$, e o vetor nulo 0, imagem do vetor $u \in V$.

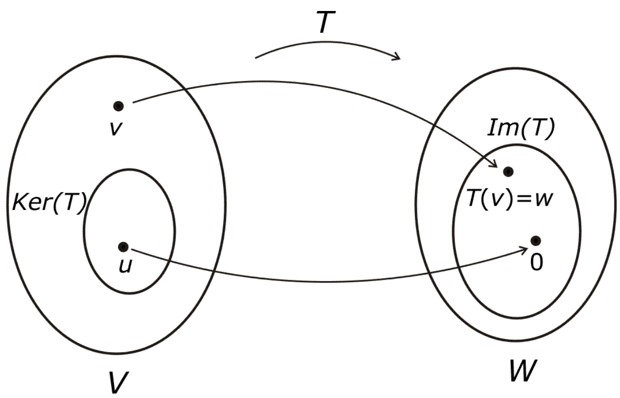

FIGURA 15

Exemplos:

1) Considere-se a transformação linear *T*, definida por:

$$\begin{aligned} T : \Re^2 &\to \Re^3 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = (2x - y, 2x - y, 0) \end{aligned}.$$

Determinar os conjuntos $Ker(T) \subset \Re^2$ e $Im(T) \subset \Re^3$.

Para que um vetor $v = (x, y)$ pertença ao núcleo de *T*, é preciso que $T(v) = 0$, ou seja, deve-se ter: $T(x, y) = (0,0,0)$. Assim, vem:

$(2x - y, 2x - y, 0) = (0,0,0)$,

de onde se segue que $y = 2x$. Portanto, o núcleo de *T* é o conjunto:

$Ker(T) = \{(x, y) \in \Re^2 \ / \ y = 2x\}$,

isto é, são os pares ordenados $(x, y) \in \Re^2$ que pertencem à reta de equação $y = 2x$.

O conjunto imagem de *T* é:

$Im(T) = \{w \in \Re^3 ; \exists \ v \in \Re^2 \ / \ T(v) = w\}$,

ou seja, são as ternas $(x, y, z) \in \Re^3$ do tipo $(2x - y, 2x - y, 0)$.

Um sistema de geradores para o conjunto imagem é $[(2,2,0), (-1,-1,0)]$. Como esses dois vetores são LD, pois são múltiplos um do outro, pode-se retirar um deles, por exemplo, $(-1,-1,0)$.

Então, conclui-se que $Im(T) = [(2,2,0)]$, ou seja, $Im(T) = \{(x, y, z) \in \Re^3 \ / \ y = x \ e \ z = 0\}$. A imagem geométrica desse conjunto é a reta do $\Re^3$ de equação:

$$\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Da análise efetuada, têm-se as seguintes conclusões:

(1) os pares ordenados do $\Re^2$ que pertencem à reta $y = 2x$ pertencem ao núcleo de *T*, isto é, são levados, por esta transformação, a elemento $(0,0,0) \in \Re^3$;

(2) os demais elementos do $\Re^2$ são levados, por *T*, à reta do $\Re^3$ de equação $\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$.

Essas conclusões são mostradas na Figura 16.

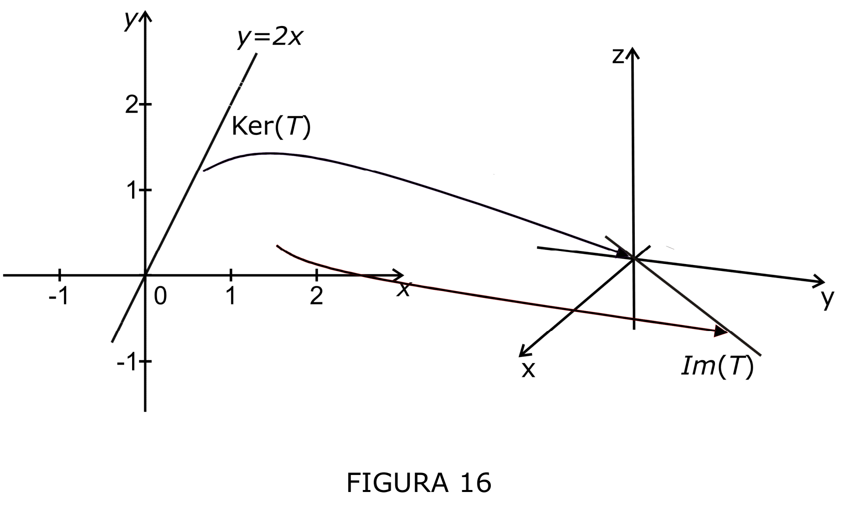

FIGURA 16

2) Considere-se a transformação linear

$$\begin{array}{l} T : \Re^3 \to \Re^3 \\ (x, y, z) \mapsto T(x, y, z) = (x, y, 0) \end{array}.$$

Para que um vetor $v = (x, y, z)$ pertença ao núcleo de *T*, é preciso que $T(v) = 0$, ou seja, deve-se ter: $T(x, y, z) = (0,0,0)$. Assim, vem:

$(x, y, 0) = (0,0,0)$,

de onde se conclui que $x = y = 0$ e *z* pode ser qualquer número real. Portanto, o núcleo de *T* é o conjunto:

$Ker(T) = \{(0,0,z) / z \in \Re\}$.

O conjunto imagem de *T* é:

$Im(T) = \{w \in \Re^3 ; \exists\, v \in \Re^3 \,/\, T(v) = w\}$,

ou seja, são as ternas $(x, y, z) \in \Re^3$ do tipo $(x, y, 0)$.

Portanto, $Im(T) = \{(x, y, 0) / x, y \in \Re\}$.

Teorema: Sejam *V* e *W* espaços vetoriais sobre um corpo *K* e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então:

(a) $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de *V*.

(b) $Im(T)$ é um subespaço vetorial de *W*.

Demonstração:

Hipótese: $T : V \to W$ uma transformação linear

Teses: (a) $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de *V*

(b) $Im(T)$ é um subespaço vetorial de *W*

(a) Para provar que $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de *V*, devem-se mostrar que são verdadeiros os três axiomas da definição de espaço vetorial. De fato, tem-se:

(1) como $T(0) = 0$, segue-se que $0 \in Ker(T)$.

(2) sejam *u* e *u'* dois elementos de $Ker(T)$. Então, $T(u) = 0$ e $T(u') = 0$. Assim, sendo *T* uma transformação linear, vem:

$T(u + u') = T(u) + T(u') = 0 + 0 = 0$

e, portanto, $u + u' \in Ker(T)$.

(3) sejam $u \in Ker(T)$ e $\alpha \in K$. Sendo *u* um elemento de $Ker(T)$, segue-se que $T(u) = 0$. Então, como *T* é uma transformação linear, vem:

$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha 0 = 0$,

de onde se conclui que $\alpha u \in Ker(T)$.

De (1), (2) e (3), conclui-se que $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de *V*. Escreve-se: $Ker(T) \underset{se}{\subset} V$.

(b) Mostrar-se-á, agora, que $Im(T)$ é um subespaço vetorial de *W*.

(1) Como $T(0) = 0$, segue-se que $0 \in Im(T)$.

(2) Sejam *w* e *w'* dois elementos de $Im(T)$. Então, existem elementos *u* e *u'* em *V* tais que $T(u) = w$ e $T(u') = w'$. Assim, sendo *T* uma transformação linear, vem:

$T(u + u') = T(u) + T(u') = w + w'$

e, portanto, $w + w' \in Im(T)$.

(3) Sejam $w \in Im(T)$ e $\alpha \in K$. Se $w \in Im(T)$, segue-se existe um elemento $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Por hipótese, *T* é transformação linear; então:

$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha w$,

de onde se conclui que $\alpha w \in Im(T)$.

De (1), (2) e (3), conclui-se que $Im(T)$ é um subespaço vetorial de *W*. Escreve-se: $Im(T) \underset{se}{\subset} W$.

Definição: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Define-se:

- $dim\, Im(T) =$ posto de *T*;
- $dim\, Ker(T) =$ nulidade de *T*.

Exemplos:

1) Considere-se a transformação linear $T : M_2(\Re) \to \Re^3$, definida por:

$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - 5b - 3c, a + c, b + d)$.

Determinar $Ker(T)$ e $Im(T)$, assim como as dimensões desses espaços.

Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Ker(T)$. Por definição do núcleo de *T*, tem-se:

$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0,0,0)$,

ou seja,

$(2a - 5b - 3c, a + c, b + d) = (0,0,0)$,

de onde vem que:

$$\begin{cases} 2a - 5b - 3c = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo-se esse sistema linear, obtêm-se:

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = d \end{cases}.$$

Assim:

$$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re) / a = b = -d \ e \ c = d, \forall d \in \Re \right\},$$

ou, equivalentemente,

$$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -d & -d \\ d & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re) / d \in \Re \right\}.$$

Encontrar-se-á uma base para esse espaço.

Tomando-se um elemento $\begin{pmatrix} -d & -d \\ d & d \end{pmatrix} \in Ker(T)$, pode-se escrever:

$\begin{pmatrix} -d & -d \\ d & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Então, $B = \left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ é base de $Ker(T)$ e, portanto, $dim\,Ker(T) = 1$.

Os elementos $(x, y, z) \in \Re^3$ que pertencem ao conjunto $Im(T)$, pela própria definição de *T*, são do tipo $(2a - 5b - 3c, a + c, b + d)$, onde *a*, *b*, *c* e *d* são os elementos da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Para encontrar uma base para $Im(T)$, escreve-se:

$(2a - 5b - 3c, a + c, b + d) = a(2,1,0) + b(-5,0,1) + c(-3,1,0) + d(0,0,1)$.

Assim, $S = \{(2,1,0), (-5,0,1), (-3,1,0), (0,0,1)\}$ é um sistema de geradores para $Im(T)$. Para encontrar uma base desse espaço, a partir desse sistema de geradores, conforme se viu anteriormente, constrói-se uma matriz com os vetores do conjunto de geradores e escalona-se a matriz. As linhas não nulas da matriz resultante do escalonamento serão vetores LI, os quais formarão a base procurada. Então:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3L_1+2L_3]{5L_1+2L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3+L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então $B' = \{(2,1,0), (0,5,2), (0,0,2)\}$ é base de $Im(T)$ e, portanto, $dim\,Im(T) = 3$.

2) Determinar um operador linear $T : \Re^3 \to \Re^3$ tal que $Im(T) = [(2,1,1), (1,-1,2)]$.

Observe-se que os vetores $(2,1,1)$ e $(1,-1,2)$ são LI. Considere-se a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do $\Re^3$ e seja $T : \Re^3 \to \Re^3$ tal que $T(e_1) = (2,1,1)$, $T(e_2) = (1,-1,2)$ e $T(e_3) = (0,0,0)$. Logo, tomando $(x, y, z) \in \Re^3$, tem-se:

$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Então:

$T(x, y, z) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3) = T(xe_1) + T(ye_2) + T(ze_3) = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) =$

$x(2,1,1) + y(1,-1,2) + z(0,0,0) = (2x + y, x - y, x + 2y)$.

Assim,

$T(x, y, z) = (2x + y, x - y, x + 2y)$.

3) Seja $T : \Re^3 \to \Re^2$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$.

(a) Determinar uma base e a dimensão de $Ker(T)$.

Por definição, tem-se:

$Ker(T) = \{(x, y, z) \in \Re^3 \ / \ T(x, y, z) = (0,0)\}$.

Assim, $Ker(T)$ é constituído dos vetores do $\Re^3$ da seguinte forma:

$T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z) = (0,0)$,

ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases},$$

de onde se conclui que $y = -x$ e $z = -3x$. Portanto, os vetores do $\Re^3$ que pertencem ao núcleo de T são da forma $(x, -x, -3x)$, $\forall x \in \Re$, isto é,

$Ker(T) = \{(x, -x, -3x) / x \in \Re\} = \{x(1, -1, -3) / x \in \Re\} = [(1, -1, -3)]$.

Logo, $\{(1, -1, -3)\}$ é uma base de $Ker(T)$ e $dim\, Ker(T) = 1$.

(b) Determinar uma base e a dimensão de $Im(T)$.

Tem-se, por definição:

$Im(T) = \{(x + y, 2x - y + z) / x, y, z \in \Re\} = \{x(1,2) + y(1,-1) + z(0,1) / x, y, z \in \Re\}$.

Assim, $S = [(1,2), (1,-1), (0,1)]$ é um sistema de geradores para $Im(T)$. Para encontrar uma base desse espaço, a partir desse sistema de geradores, constrói-se uma matriz com os vetores do conjunto de geradores e escalona-se a matriz. As linhas não nulas da matriz resultante do escalonamento serão vetores LI, os quais formarão a base procurada. Então:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então $B' = \{(1,2), (0,1)\}$ é base de $Im(T)$ e, portanto, $dim\, Im(T) = 2$.

5 Operações com Transformações Lineares

1) _Adição_

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F : V \to W$ e $G : V \to W$ transformações lineares. Chama-se adição de F com G a aplicação $F + G : V \to W$ tal que $(F + G)(v) = F(v) + G(v), \forall v \in V$.

Propriedades: dadas as transformações lineares $F : V \to W$, $G : V \to W$ e $H : V \to W$, a operação de adição satisfaz as propriedades:

a) Comutativa: $F + G = G + F$

b) Associativa: $F + (G + H) = (F + G) + H$

c) Elemento Neutro: é a transformação linear nula $N : V \to W$, definida por $N(v) = 0, \forall v \in V$, satisfazendo: $F + N = N + F = F$.

d) Elemento Oposto: considerada a transformação linear $F : V \to W$, o elemento oposto da operação de adição é a transformação $(-F) : V \to W$, definida por $(-F)(v) = -v, \forall v \in V$, que satisfaz: $F+(-F)=(-F)+F=N$.

Proposição: Sejam: V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \to W$ e $G: V \to W$ duas transformações lineares. Então $F+G$ é uma transformação linear.

Demonstração:

<u>Hipótese</u>: F e G são transformações lineares

<u>Tese</u>: $F+G$ é transformação linear

(a) Sejam u e v dois elementos de V. Tem-se, por definição, que:

$$(F+G)(u+v)=F(u+v)+G(u+v)$$

Como, por hipótese, F e G são transformações lineares, pode-se escrever:

$$(F+G)(u+v)=F(u+v)+G(u+v)=[F(u)+F(v)]+[G(u)+G(v)]=$$

$$=[F(u)+G(u)]+[F(v)+G(v)]=(F+G)(u)+(F+G)(v)$$

Assim, $(F+G)(u+v)=(F+G)(u)+(F+G)(v)$.

(b) Sejam $u \in V$ e $\alpha \in K$; tem-se:

$$(F+G)(\alpha u)=F(\alpha u)+G(\alpha u)=\alpha F(u)+\alpha G(u)=\alpha[F(u)+G(u)]=\alpha[(F+G)(u)].$$

De (a) e (b), conclui-se que $F+G$ é uma transformação linear.

2) <u>*Subtração*</u>

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \to W$ e $G: V \to W$ transformações lineares. Chama-se subtração das transformações F e G a aplicação $F-G: V \to W$ tal que $(F-G)(v)=F(v)-G(v), \forall v \in V$.

A subtração de F e G é a adição de F com a transformação oposta de G, ou seja, com $-G$; assim, a subtração de F e G é obtida fazendo-se:

$$F-G=F+(-G)$$

É claro que esta operação satisfaz as mesmas propriedades da adição de transformações. Também é possível demonstrar que é verdadeira a proposição enunciada a seguir.

Proposição: Sejam: V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \to W$ e $G: V \to W$ duas transformações lineares. Então $F-G$ é uma transformação linear.

3) <u>*Multiplicação de uma transformação linear por um escalar*</u>

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K, $F: V \to W$ uma transformação linear e $\alpha \in K$. Chama-se multiplicação da transformação F pelo número α a aplicação $(\alpha F): V \to W$ tal que $(\alpha F)(v)=\alpha F(v), \ \forall v \in V$.

<u>Propriedades</u>: dadas as transformações lineares $F: V \to W$ e $G: V \to W$ e os escalares α e β, a operação de multiplicação por escalar satisfaz as propriedades:

a) $\alpha(\beta F) = \beta(\alpha F) = (\alpha\beta)F$

b) $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$

c) $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$

d) $1 \cdot F = F$

É possível demonstrar que é verdadeiro o resultado seguinte.

Proposição: Sejam: V e W espaços vetoriais sobre um corpo K, $F : V \to W$ e $\alpha \in K$. Então αF é uma transformação linear.

4) <u>*Composição de Transformações Lineares*</u>

Sejam: V, U e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F : V \to U$ e $G : U \to W$ transformações lineares. Chama-se transformação composta de G com F, denotada por $G \circ F$, a aplicação $G \circ F : V \to W$, definida por: $(G \circ F)(v) = G(F(v))$, $\forall v \in V$.

A representação gráfica é mostrada na Figura 17.

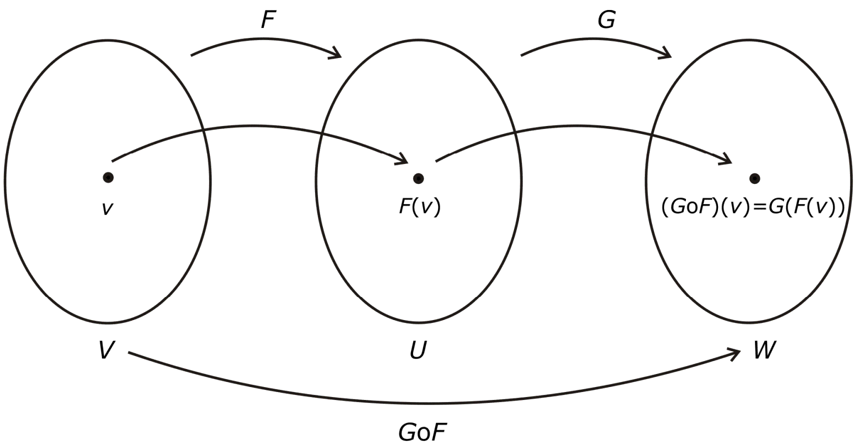

FIGURA 17

Assim, tem-se:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & U \arrow[r, "G"] & W \\ v \arrow[rr, bend right, "GoF"'] & F(v) & G(F(v)) \end{tikzcd}$$

FIGURA 18

Observação: a composição de G com F, denotada por $G \circ F$, é lida *G composta com F* ou, então, *G bola F*. Não se trata, evidentemente, do produto de G por F, denotado por $G \cdot F$. Além disso, tem-se, em geral, que $(G \circ F)(v) \neq (F \circ G)(v)$, ou seja, *G composta com F* é diferente, em geral, de *F composta com G*. Portanto, a composição de transformações lineares não é comutativa.

Proposição: Sejam: V, U e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F : V \to U$ e $G : U \to W$ transformações lineares. Então, $G \circ F : V \to W$ é uma transformação linear.

Demonstração:

<u>Hipótese</u>: F e G são transformações lineares

<u>Tese</u>: $G \circ F$ é transformação linear

(a) Sejam u e v dois elementos de V. Tem-se, por definição, que:

$(G \circ F)(u+v) = G(F(u+v))$.

Como, por hipótese, F é uma transformação linear, pode-se escrever:

$(G \circ F)(u+v) = G(F(u+v)) = G(F(u)+F(v))$.

Por sua vez, G é uma transformação linear; então:

$G(F(u)+F(v)) = G(F(u)) + G(F(v)) = (G \circ F)(u) + (G \circ F)(v)$

Assim, $(G \circ F)(u+v) = (G \circ F)(u) + (G \circ F)(v)$.

(b) Sejam $u \in V$ e $\alpha \in K$; tem-se:

$(G \circ F)(\alpha u) = G(F(\alpha u)) = G(\alpha F(u)) = \alpha G(F(u)) = \alpha (G \circ F)(u)$

De (a) e (b), conclui-se que $G \circ F$ é uma transformação linear.

Para o caso dos operadores lineares, são válidas as propriedades que se seguem.

<u>Propriedades</u>:

Sejam: V, um espaço vetorial sobre um corpo K; $F : V \to V$, $G : V \to V$ e $H : V \to V$ operadores lineares. Então, são válidas as propriedades:

a) Associativa: $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$

b) Elemento Neutro: é o operador linear identidade $Id : V \to V$, definido por $Id(v) = v$, $\forall v \in V$, satisfazendo: $F \circ Id = Id \circ F = F$.

c) Distributiva:

- à esquerda: $F \circ (G + H) = F \circ G + F \circ H$
- à direita: $(G + H) \circ F = G \circ F + H \circ F$

d) Elemento Inverso: considerado o operador linear inversível $F : V \to V$, o elemento inverso da composição de transformações é o operador $F^{-1} : V \to V$ tal que $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = Id$.

Observação: as transformações lineares inversíveis serão estudadas no Capítulo 7.

Exemplo: dadas as transformações lineares: $F : \Re^2 \to \Re^3$, $G : \Re^3 \to \Re^2$ e $H : \Re^2 \to \Re^3$, definidas por:

$F(x,y) = (x+y, x-y, x)$, $G(x,y,z) = (x-y, x+z)$ e $H(x,y) = (2x-y, y, x+2y)$, determinar:

(a) $R = 3F + 2H$

Tem-se:

$R(x,y) = 3F(x,y) + 2h(x,y) = 3(x+y, x-y, x) + 2(2x-y, y, x+2y)$

$= (7x+y, 3x-y, 5x+4y)$

(b) $G \circ F$

$(G \circ F)(x,y) = G(F(x,y)) = G(x+y, x-y, x) = (x+y-x+y, x+y+x) = (2y, 2x+y)$

(c) $F^2 = F \circ F$

$F^2(x,y) = (F \circ F)(x,y) = F(F(x,y)) = F(x+y, x-y, x) =$

$= (x+y+x-y, x+y-x+y, x+y) = (2x, 2y, x+y)$

Exercícios Propostos

1) Seja $M_n(\Re)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n e B uma matriz fixa deste espaço. Mostrar que a aplicação $F: M_n(\Re) \to M_n(\Re)$, definida por: $F(X) = BX$, $\forall X \in M_n(\Re)$ é um operador linear.

2) Sabendo que T é um operador linear do $\Re^2$ tal que $T(1,2) = (3,-1)$ e $T(0,1) = (1,2)$, determinar a expressão de $T(x,y)$. R: $T(x,y) = (x+y, -5x+2y)$

3) Considere-se a transformação linear definida por:

$T(x,y,z,t) = (x+y-z, 2x-y+2z-t, 3x+z-t)$.

Determinar uma base e a dimensão para $Im(T)$ e $Ker(T)$.

R: Base de $Im(T)$: $\{(1,2,3), (0,1,1)\}$; $\dim Im(T) = 2$

Base de $Ker(T)$: $\{(-1,1,0,-3), (1,0,1,4)\}$; $\dim Ker(T) = 2$

4) Determinar um operador do $\Re^3$ cujo núcleo é constituído pelos pontos da reta de equação

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

e cuja imagem é constituída pelos pontos do plano de equação $x + 2y + z = 0$.

R: $T(x,y,z) = (4x-2y-z, -2x+y, z)$

5) Sendo $T(x,y) = (3x-2y, x+y, x-y)$ e $G(x,y,z) = (x-y+z, 2x-z)$ duas transformações lineares, determine a dimensão de $Ker(G \circ T)$ e de $Im(G \circ T)$.

R: $\dim Ker(G \circ T) = 0$ e $\dim Im(G \circ T) = 2$