1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e diga se se trata de uma matriz invertível
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Considere as seguintes matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
e calcule:
   (a) $\det(A)$;
   (b) $\det(B)$;
   (c) $\det(C)$;
   (d) $\det(-2A^t)$;
   (e) $\det(ABC)$;
   (f) $\det(A^3)$;
   (g) $\det(C^n),\ \ n \in \mathbb{N}$;
   (h) $\det(C^{-1})$.

3. Calcule o determinante das seguintes matrizes usando o Teorema de Laplace e/ou operações elementares:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Para $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz $A_k = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix}$.

   Recorrendo a um cálculo de determinante, determine para que valores de k a matriz A_k é invertível.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculando o determinante de A, justifique que A é invertível.

   (b) O que pode dizer dos sistemas de equações em $\mathbb{R}^3$ dados por $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$? Resolva estes sistemas usando as fórmulas de Cramer.

   (c) Determine a sua inversa usando a matriz adjunta.

6. Usando a matriz adjunta, determine a inversa das matrizes invertíveis do Exercício 1.

7. Represente graficamente o paralelogramo de $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vetores $u = (2, 0)$ e $v = (-1, -1)$ e calcule a sua área.

8. Justifique que os vectores $u = (-1, 3, 0)$, $v = (1, 2, 2)$ e $w = (0, 0, -2)$ são linearmente independentes e determine o volume do paralelepípedo gerado por esses três vetores.

9. Calcule a área do paralelogramo de $\mathbb{R}^3$ gerado por $u = (-1, 3, 0)$ e $v = (1, 2, 2)$.

10. Em cada alínea, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) associada à matriz A dada e determine, caso existam, os seus valores próprios e os vetores próprios associados.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

    (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

    (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

    (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

    (e) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $(\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

    (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $(\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

    (g) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ $(\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$