Matemática das Coisas

Parte 1

Cálculo de distâncias inacessíveis

Aula de 28 de Fevereiro de 2023

José Joaquim Martins Oliveira

Geometria Euclidiana Elementar

1. **Triângulo**

   Classificação dos triângulos e suas propriedades
   Congruência de triângulos
   Semelhança de triângulos
   Razões trigonométricas

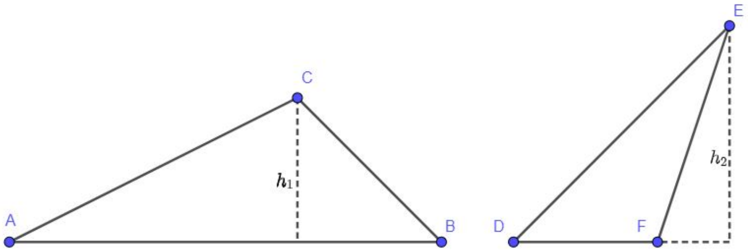
2. **Circunferência**

   Perímetro e área
   Relações entre circunferências e rectas
   Relações entre circunferências e ângulos

3. **Aplicações**

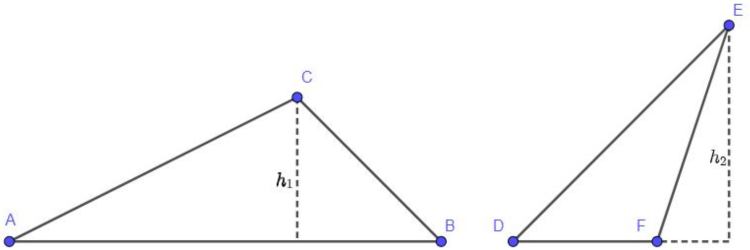
   Cálculo de distâncias inacessíveis

Notações e definições



- Os triângulos denotam-se por $\triangle ABC$ e $\triangle DFE$;
- O comprimentos de lado $[AB]$ denota-se por $\overline{AB}$;
- O ângulo de vértice A e semirrectas $[AC)$ e $[AB)$ denota-se por $\angle BAC$, ou simplesmente por $\angle A$;

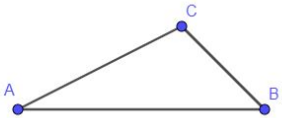
Notações e definições



- A medida do $\angle BAC$ denota-se por $m(\angle BAC)$
  Usaremos o grau como unidade de medida (0°-360°);
- h_1 representa a altura do $\triangle ABC$ em relação ao lado $[AB]$ (*base*);
- h_2 representa a altura do $\triangle DFE$ em relação ao lado $[DF]$ (*base*).

Classificação dos triângulos quanto aos lados

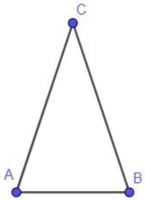
- Triângulo Escaleno



$$\overline{AB} \neq \overline{BC}, \quad \overline{BC} \neq \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{AC} \neq \overline{AB}$$

Classificação dos triângulos quanto aos lados

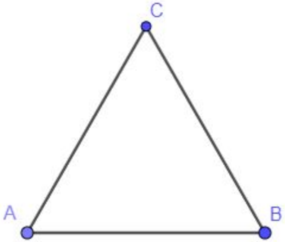
- Triângulo Isósceles



$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

Classificação dos triângulos quanto aos lados

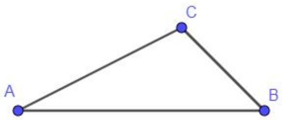
- Triângulo Equilátero



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

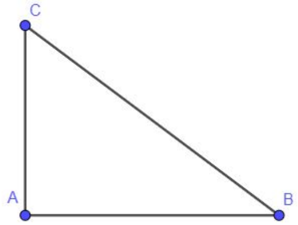
- Triângulo Acutângulo



$$m(\angle BAC) < 90^\circ, \quad m(\angle CBA) < 90^\circ \quad \text{e} \quad m(\angle BCA) < 90^\circ$$

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

- Triângulo Rectângulo (no vértice A)

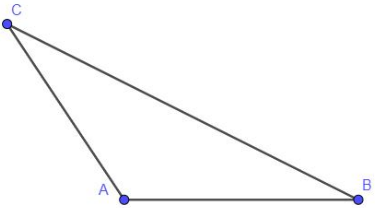


$$m(\angle BAC) = 90^\circ, \quad m(\angle CBA) < 90^\circ \quad \text{e} \quad m(\angle ACB) < 90^\circ$$

O lado $[CB]$ chama-se hipotenusa;
Os lados $[AC]$ e $[AB]$ chamam-se catetos.

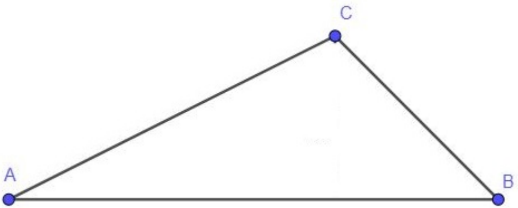
Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

- Triângulo Obtusângulo



$$m(\angle BAC) > 90^\circ, \quad m(\angle CBA) < 90^\circ \quad \text{e} \quad m(\angle ACB) < 90^\circ$$

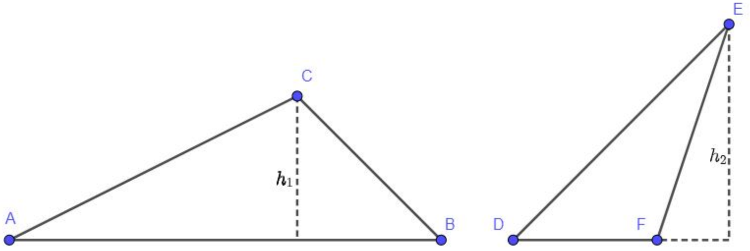
Propriedades elementares do triângulo



- A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual a 180°.

$$m(\angle BAC) + m(\angle ACB) + m(\angle CBA) = 180^\circ$$

Propriedades elementares do triângulo



- A área de um triângulo obtém-se pela fórmula

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

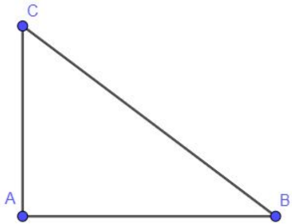
$$\text{Área}_{\triangle ABC} = \frac{\overline{AB} \times h_1}{2}; \quad \text{Área}_{\triangle DFE} = \frac{\overline{DF} \times h_2}{2}.$$

Propriedades elementares do triângulo

- Dado um $\triangle ABC$ tem-se

$$\overline{AC} = \overline{BC} \quad \text{se e só se} \quad m(\angle BAC) = m(\angle CBA)$$

Propriedades elementares do triângulo



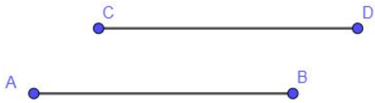
- Teorema de Pitágoras:
  Dado um $\triangle ABC$ rectângulo em A tem-se

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \tag{1}$$

- Reciprocamente, um $\triangle ABC$ que verifique a igualdade (1) é rectângulo em A.

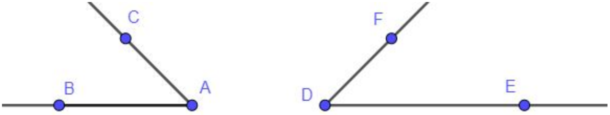
Congruência de triângulos

- Dois segmentos de recta, $[AB]$ e $[CD]$, dizem-se *congruentes* se têm o mesmo comprimentos, i.e. $\overline{AB} = \overline{CD}$.



Representa-se por $[AB] \cong [CD]$.

- Dois ângulos, $\angle CAB$ e $\angle EDF$, dizem-se *congruentes* se têm a mesma medida, i.e. $m(\angle CAB) = m(\angle EDF)$.



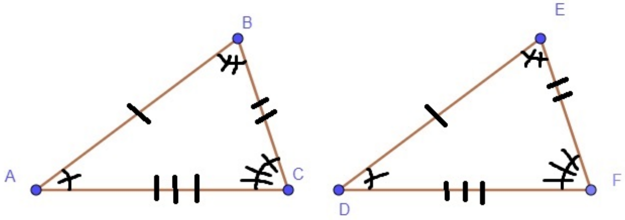
Representa-se por $\angle CAB \cong \angle EDF$.

Congruência de triângulos

- Dois triângulos, $\triangle ACB$ e $\triangle DFE$, dizem-se *congruentes* se existe uma correspondência entre os vértices

$$\text{(Na figura} \quad A \mapsto D, \quad C \mapsto F \quad \text{e} \quad B \mapsto E)$$

tal que ângulos e lados correspondentes são congruentes.



Na figura $[AB] \cong [DE]$, $[BC] \cong [EF]$, $[CA] \cong [FD]$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$.
Representa-se por $\triangle ACB \cong \triangle DFE$.

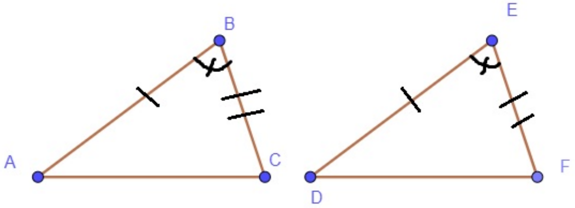
Critérios de congruência de triângulos

- **Critério LAL**

  Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

  tal que $[AB] \cong [DE]$, $\angle B \cong \angle E$ e $[BC] \cong [EF]$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



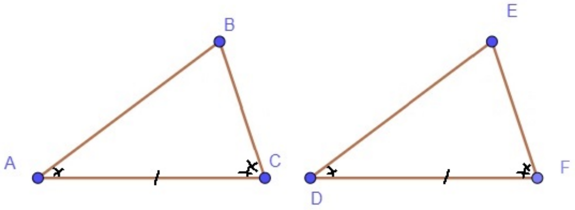
Critérios de congruência de triângulos

- **Critério ALA**

  Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

  tal que $\angle A \cong \angle D$, $[AC] \cong [DF]$, e $\angle C \cong \angle F$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



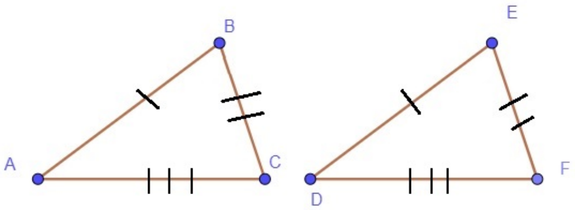
Critérios de congruência de triângulos

- **Critério LLL**

  Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

tal que $[AB] \cong [DE]$, $[AB] \cong [CD]$ e $[BC] \cong [EF]$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

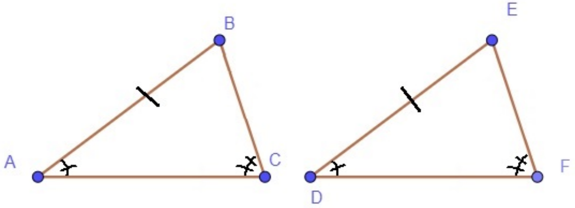


Critérios de congruência de triângulos

- **Critério LAA**
  Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

  tal que $[AB] \cong [DE]$, $\angle A \cong \angle D$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



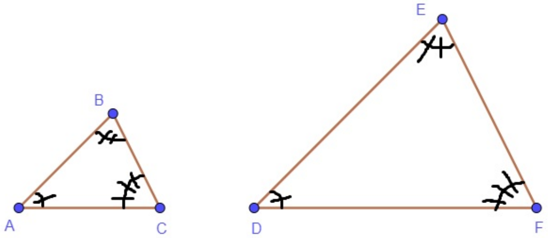
- Verifique que **ALL** e **AAA** não são critérios de congruência de triângulos.

Semelhança de triângulos

- Dois triângulos, $\triangle ACB$ e $\triangle DFE$, dizem-se <u>*semelhantes*</u> se existe uma correspondência entre os vértices

$$\text{(Na figura} \quad A \mapsto D, \quad C \mapsto F \quad \text{e} \quad B \mapsto E\text{)}$$

tal que ângulos correspondentes são congruentes e ângulos correspondentes são proporcionais.



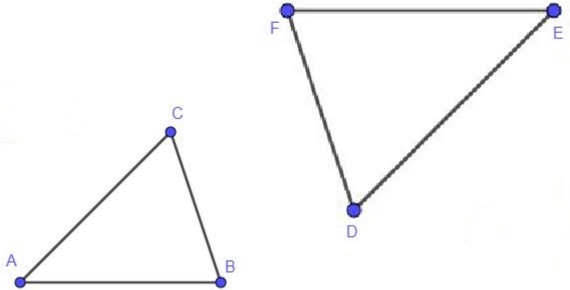
Na figura $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \qquad \left(\underline{\text{razão de semelhança:}} \;\; r = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\right).$$

Representa-se por $\triangle ACB \sim \triangle DFE$.

Semelhança de triângulos

- Exemplo: Considere-se os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle DFE$,



Onde $\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle D$ e

$$\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 3, \overline{AC} = 3.42, \overline{EF} = 5.2, \overline{DE} = 4.446, \overline{DF} = 3.9$$

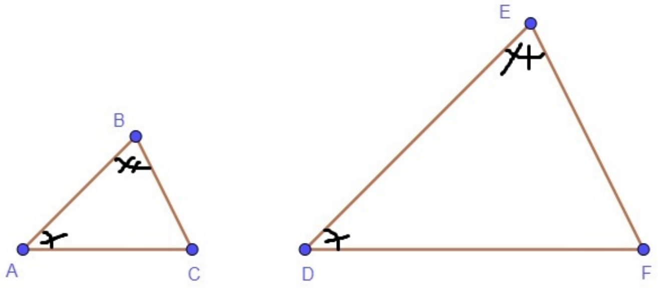
Verifique que os triângulos são semelhantes, identificando a razão de semelhança.

Critérios de semelhança de triângulos

- **Critério AA**
  Se dois triângulos têm, de um para o outro, dois ângulos congruentes, então são semelhantes.
- **Exemplo** Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, em que

$$\angle A \cong \angle D \quad \text{e} \quad \angle B \cong \angle E$$

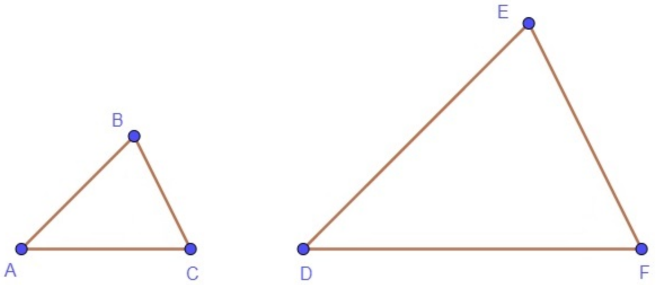
então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



- Razão de semelhança de $\triangle ABC$ para $\triangle DEF$: $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$.

Critérios de semelhança de triângulos

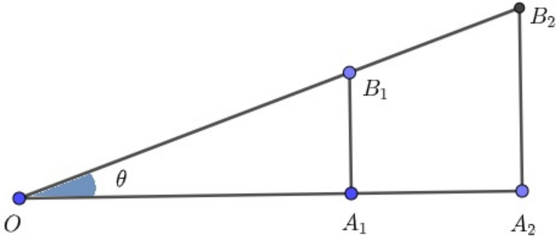
- **Critério LAL**
  Se dois triângulos têm, de um para o outro, um ângulo congruente e os correspondentes lados adjacentes proporcionais, então são semelhantes.
- **Critério LLL**
  Se dois triângulos têm, de um par ao outro, todos os lados proporcionais, então são semelhantes.



Razões trigonométricas

- Considere os $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ em que

$$m(\angle OA_2B_2) = m(\angle OA_1B_1) = 90^\circ \quad \text{e} \quad \theta = m(\angle A_2OB_2) \in]0^\circ, 90^\circ[.$$

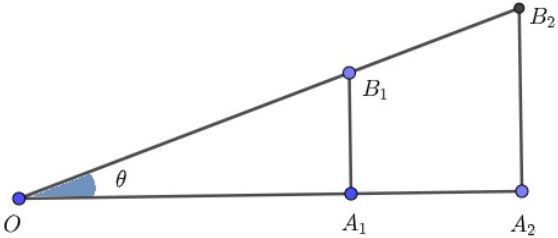


- Pelo critério **AA** da semelhança de triângulos

$$\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$$

Razões trigonométricas

- Tendo-se $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$, então

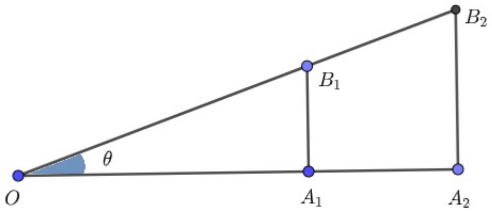


$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}$$

- Assim obtêm-se as razões trigonométricas
  - $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$;
  - $\dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$;
  - $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$;
  - $\dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{A_2B_2}} = \dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
  - $\dfrac{\overline{OB_2}}{\overline{A_2B_2}} = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
  - $\dfrac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$.

Razões trigonométricas

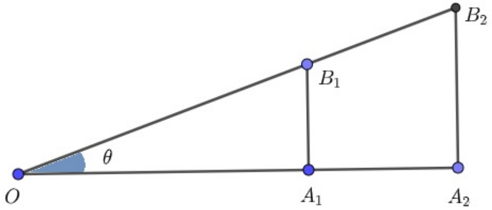
- Para $\theta \in]0°, 90°[$, define-se:
  1. <u>Seno de θ</u> como sendo a razão $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$, denotando-se por $\mathrm{sen}(\theta)$;
  2. <u>Cosseno de θ</u> como sendo a razão $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$, denotando-se por $\cos(\theta)$;
  3. <u>Tangente de θ</u> como sendo a razão $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$, denotando-se por $\mathrm{tg}(\theta)$;



Razões trigonométricas

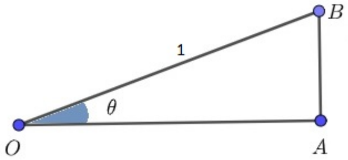
- Para $\theta \in]0°, 90°[$, define-se:

4. Cotangente de θ como sendo a razão $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$, denotando-se por $\operatorname{cotg}(\theta)$;
5. Secante de θ como sendo a razão $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$, denotando-se por $\sec(\theta)$;
6. Cossecante de θ como sendo a razão $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$, denotando-se por $\operatorname{cosec}(\theta)$.



Fórmula fundamental da trigonometria

- Considere-se um triângulo rectângulo $\triangle OAB$ com a hipotenusa medindo uma unidade, $\overline{OB} = 1$:



1. Assim tem-se

$$\cos(\theta) = \overline{OA} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta) = \overline{AB}.$$

2. Pelo teorema de Pitágoras, tem-se

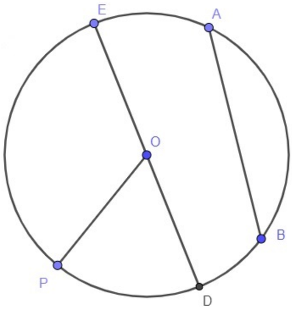
$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$$

3. Donde se obtém a chamada fórmula fundamental da trigonometria:

$$1 = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta), \qquad \theta \in]0°, 90°[$$

Circunferência

- Sejam O um ponto e $r > 0$, um número positivo.
  Chama-se circunferência de centro O e raio r à figura geométrica constituída pelos pontos do plano que estão à distância r do ponto O.



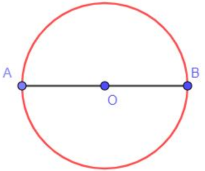
- Diâmetro: Segmento de recta de extremos na circunferência e que contém o centro. Exemplo $[ED]$;
- Corda: Segmento de recta de extremos na circunferência. Exemplo $[AB]$;
- Raio: Segmento de recta que liga um ponto da circunferência ao centro. Exemplo $[OP]$.

Circunferência

- O número pi

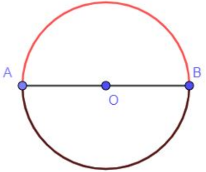
$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939 9\ldots$$

- Corresponde ao perímetro de uma circunferência de diâmetro igual à unidade, 1.



$\overline{AB} = 1$

- Equivalentemente, corresponde a metade do perímetro de uma circunferência de raio igual à unidade



$\overline{AO} = 1$

Propriedades da Circunferência

- A conversão de graus para radianos é dada pela igualdade

$$180^\circ = \pi$$

- Perímetro de uma circunferência de raio $r > 0$:

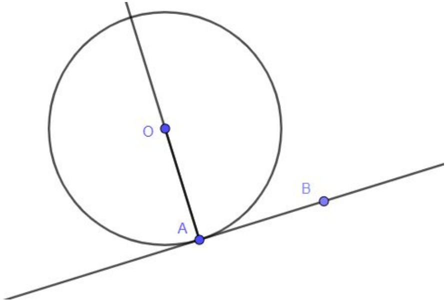
$$\text{Perímetro} \; = 2\pi r$$

- Área de uma circunferência de raio $r > 0$:

$$\text{Área} \; = \pi r^2$$

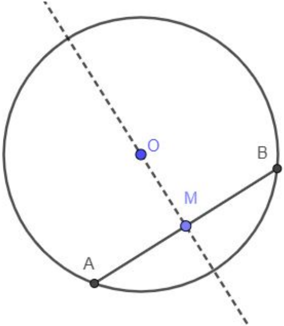
Propriedades da Circunferência

- Se uma recta (AB) é tangente a uma circunferência de centro O no ponto A, então as rectas (AO) e (AB) são perpendiculares.
  Ou seja
  $$m(\angle BAO) = 90^\circ.$$



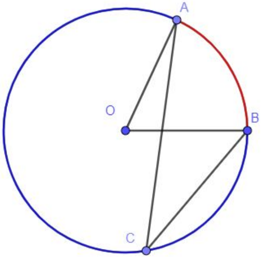
Propriedades da Circunferência

- Numa circunferência, a recta perpendicular a uma sua corda no ponto médio contém o centro da circunferência.
  Ou seja, $\overline{AM} = \overline{MB}$ e
  $$m(\angle BAO) = 90°.$$



Propriedades da Circunferência

- Chama-se ângulo ao centro de uma circunferência a qualquer ângulo cujo vértice coincide com o centro.
- Chama-se ângulo inscrito numa circunferência a qualquer ângulo cujo vértice pertence à circunferência e os lados intersectam-na.

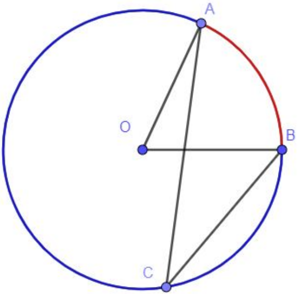


- $\angle BOA$ é ângulo ao centro;
- $\angle BCA$ é ângulo inscrito;
- O arco $\widehat{BA}$ chama-se interno a $\angle BCA$;
- O arco $\widehat{ACB}$ chama-se externo a $\angle BCA$;

- Chama-se amplitude do arco $\widehat{BA}$ à medida do $\angle BOA$.

Propriedades da Circunferência

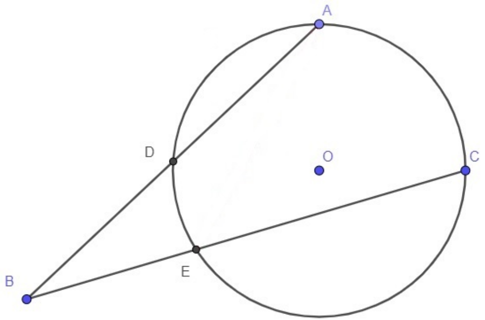
- Num circunferência, a medida de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco interno.
  Concretamente:
  $$m(\angle BCA) = \frac{1}{2} m(\angle BOA).$$



Propriedades da Circunferência

- A medida do $\angle CBA$, apresentado da figura, pode ser calculada da seguinte forma.

$$m(\angle CBA) = \frac{1}{2}\Big(m(\angle COA) - m(\angle DOE)\Big).$$



Propriedades da Circunferência

- A medida do $\angle CBA$, apresentado da figura, pode ser calculada da seguinte forma.

$$m(\angle CBA) = \frac{1}{2}\Big(m(\angle COA) + m(\angle DOE)\Big).$$