

T4 - Oscilações Amortecidas no Circuito RLC

André Cruz - a92833; Beatriz Demétrio - a92839; Carlos Ferreira - a92846

23 de março de 2021

1 Valores Teóricos

1.1 Demonstração da equação diferencial de 2ª ordem aplicando a lei das malhas

Quando fechamos o circuito em $t = 0$, ficamos com:

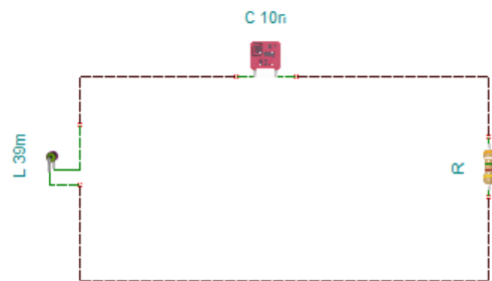


Figure 1: Circuito RLC série fechado

Aplicando a lei das malhas (que diz que a soma algébrica das tensões de cada componente da malha é igual a zero) ao circuito da figura 1, vamos ter que:

$$V_L + V_R + V_C = 0 \quad (1)$$

onde estas tensões de cada componente são dadas por:

- $V_R = R i$
- $V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$
- $V_L = L \frac{di}{dt}$

Substituindo na equação 1 estes valores, temos que:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

Mas como $i = \frac{dq}{dt}$, então a equação característica do circuito apresentado na figura 1 é igual a:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

1.2 Cálculo dos valores das Resistências para os diferentes tipo de Amortecimentos

1.2.1 Amortecimento Crítico

Neste caso, nós temos que:

$$\left[\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC} \right] = 0 \Leftrightarrow R = \frac{2L}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow R = \frac{2 \times 39 \times 10^{-3}}{\sqrt{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R \approx 3,95 k\Omega$$

1.2.2 Amortecimento Forte (regime de sobre-amortecimento)

Neste caso, vamos ter que:

$$\left[\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC} \right] > 0 \Leftrightarrow R > 3,95 k\Omega$$

ou seja, para se verificar este amortecimento forte tem de se considerar um valor de resistência superior a $3,95 k\Omega$ (o valor que foi usado foi de $10 k\Omega$).

1.2.3 Amortecimento Fraco (regime de sub-amortecimento)

Neste caso, vamos ter que:

$$\left[\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC} \right] < 0 \Leftrightarrow R < 3,95 k\Omega$$

ou seja, para se verificar este amortecimento fraco tem de se considerar um valor de resistência inferior a $3,95 k\Omega$ (o valor que foi usado foi de 100Ω).

2 Valores práticos

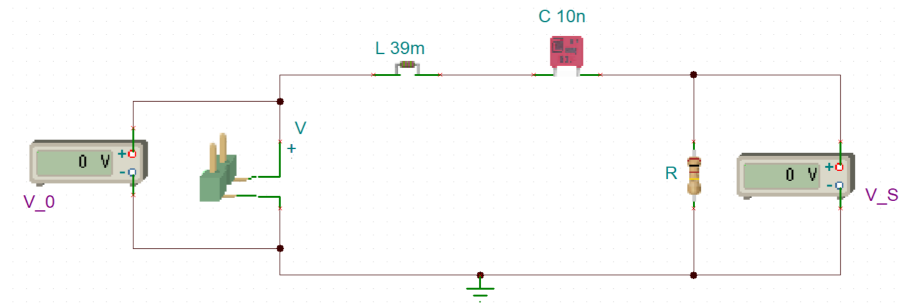


Figure 2: Circuito RLC em série com voltmetros

2.1 Amortecimento Crítico

Pelos valores teóricos, calculamos que a resistência para atingir este tipo de amortecimento seria $R = 3,95\ k\Omega$ e experimentalmente obtivemos o seguinte gráfico:

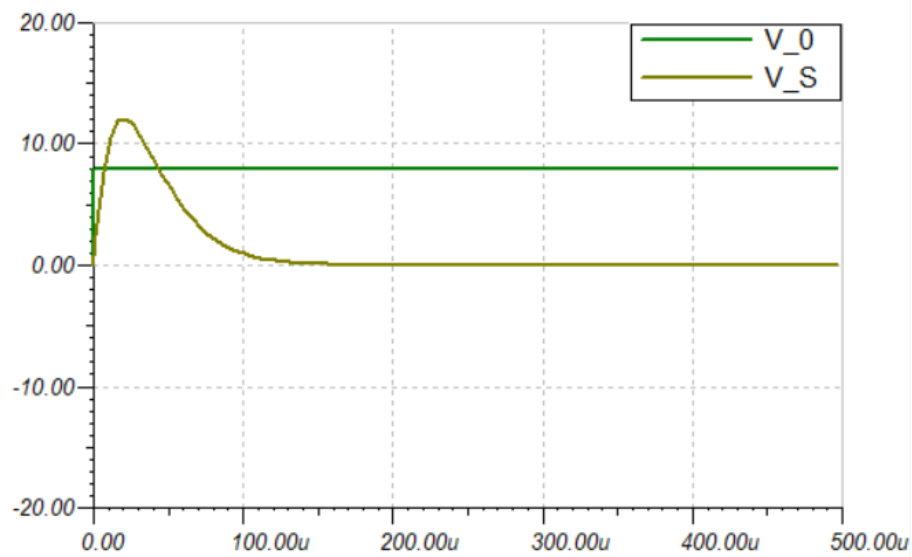


Figure 3: Gráfico do amortecimento crítico

Através da análise deste gráfico, verificamos, na tensão de saída, que não ocorre oscilação e que, após atingir o seu valor máximo, decai rapidamente para os 0V. Este valor máximo é superior ao valor de entrada devido ao condensador

se encontrar carregado no início de cada oscilação, pois a constante de tempo $\tau = RC \approx 39 \mu s$ é muito inferior ao período da onda de entrada ($T = 50 ms$). Assim, será induzida na resistência uma tensão de cerca de $2V_0$, resultante da soma do valor da fonte e do condensador, funcionando os dois como uma só fonte de tensão.

2.2 Amortecimento Forte (regime de sobre-amortecimento)

Neste caso determinamos, teoricamente, que o valor para a resistência seria de $10 k\Omega$.

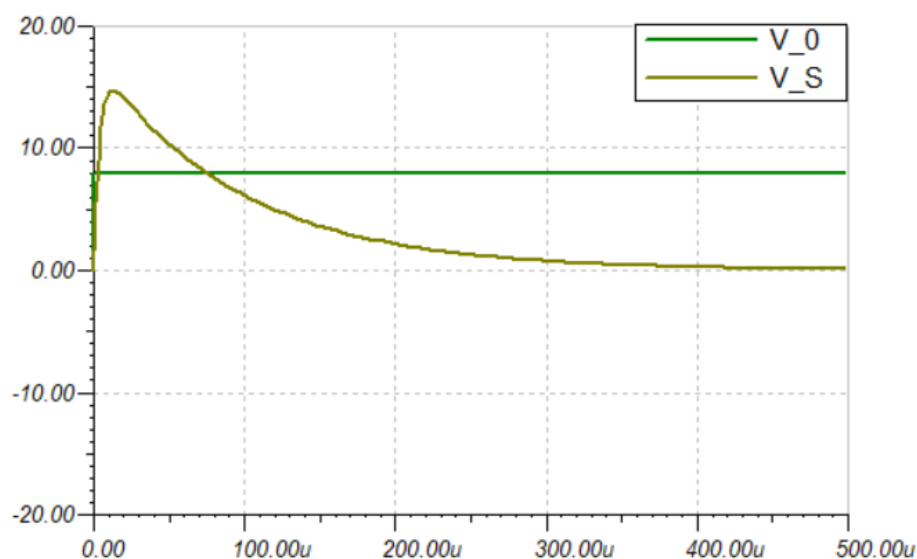


Figure 4: Gráfico do amortecimento forte

Pela análise do gráfico, verificamos que acontece o mesmo que no caso anterior, apesar de que queda tem menos inclinação, tal como antecipado.

2.3 Amortecimento Fraco (regime de sub-amortecimento)

Neste caso, escolhemos uma resistência de 100Ω .

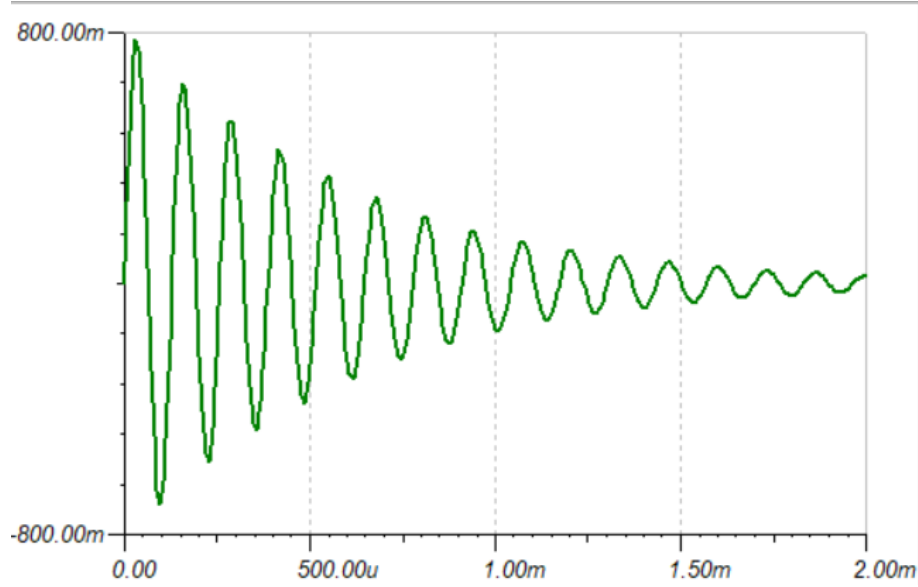


Figure 5: Gráfico do amortecimento fraco

Ao analisar este gráfico, verificamos que, tal como previsto, a tensão aos terminais da resistência apresenta uma forma oscilatória, de período $T \approx 130 \mu s$, cuja amplitude decai exponencialmente. A frequência neste caso é $\omega_n = \frac{2\pi}{T} = 48332 \text{ rad/s}$, inferior à frequência de ressonância, $\omega_0 = 50637 \text{ rad/s}$, devido ao amortecimento provocado pela resistência escolhida.

2.4 Cálculo das frequências do sistema e do fator de amortecimento

2.4.1 Amortecimento Crítico

Para uma situação de **amortecimento crítico** temos que $\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right) = 0$, de onde se conclui que $\omega_0 = \gamma$ e $\omega_n = 0$. Tendo em conta as configurações do sistema (admitindo $R = 3,95 \text{ k}\Omega$) tem-se:

- $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{39 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}} \approx 50636,97 \text{ rad/s}$

- $\gamma = \frac{R}{2L} = \frac{3,95 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}} \approx 50641,02 \text{ rad/s}$

Sendo valor de R é aproximado, pode-se considerar que $\omega_0 \approx \gamma$ e, portanto, $\omega_n \approx 0 \text{ rad/s}$.

Observa-se que, para $R = 3,95 \text{ k}\Omega$, o sistema se encontra em regime crítico.

2.4.2 Amortecimento Forte (regime de sobre-amortecimento)

Para uma situação de **amortecimento forte** temos que $\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right) > 0$, de onde se conclui que $\omega_0 < \gamma$ e ω_n é imaginário, sendo este último reescrito na forma $\omega_n = j\alpha$, com $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$. Tendo em conta as configurações do sistema (admitindo $R = 10\text{ k}\Omega$ pois este terá que ser superior ao valor utilizado numa situação de amortecimento crítico) tem-se:

- $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 50636,97\text{ rad/s}$
- $\gamma = \frac{R}{2L} = \frac{10 \times 10^3}{2 \times 39 \times 10^{-3}} \approx 128205,13\text{ rad/s}$
- $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \approx 117781,38\text{ rad/s} \Rightarrow \omega_n \approx j\,117781,38\text{ rad/s}$

Observando os valores acima obtidos, comprova-se que, para $R = 10\text{ k}\Omega$, estes correspondem aos característicos de um sistema em regime de sobre-amortecimento.

2.4.3 Amortecimento Fraco (regime de sub-amortecimento)

Para uma situação de **amortecimento fraco** temos que $\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right) < 0$, de onde se conclui que $\omega_0 > \gamma$ e $\omega_n = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$, levando a querer que a frequência desta oscilação amortecida é menor do que ω_0 . Tendo em conta as configurações do sistema (admitindo $R = 100\text{ }\Omega$ pois neste caso este terá que ser pequeno) tem-se:

- $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 50636,97\text{ rad/s}$
- $\gamma = \frac{R}{2L} = \frac{100}{2 \times 39 \times 10^{-3}} \approx 1282,05\text{ rad/s}$
- $\omega_n = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \approx 50620,74\text{ rad/s}$

Observando os valores acima obtidos, comprova-se que, para $R = 100\text{ }\Omega$, estes correspondem aos característicos de um sistema em regime de sub-amortecimento.