Propagação de incertezas: fundamentação

Suponhamos que se medem as grandezas x e y, com valores médios $\bar{x}$ e $\bar{y}$, respectivamente. Estas grandezas são usadas para determinar a grandeza $G(x,y)$ [ou seja, $G(x,y)$ é resultado de uma medida indirecta].

Pretende-se saber como é que as incertezas de x e y se propagam para dar origem à incerteza de G.

O desenvolvimento em série de Taylor da função $G(x,y)$ na vizinhança do ponto $(\bar{x},\bar{y})$ permite escrever

$$G(x,y) = G(\bar{x},\bar{y}) + \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(x-\bar{x}) + \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(y-\bar{y}) + $$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(x-\bar{x})^2 + 2\left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + \left.\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(y-\bar{y})^2\right] + \cdots$$

Admitindo que $(x-\bar{x})$ e $(y-\bar{y})$ são pequenos (o que acontece desde que as incertezas sejam pequenas), podemos desprezar os termos de ordem superior:

$$G(x,y) \simeq G(\bar{x},\bar{y}) + \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(x-\bar{x}) + \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(y-\bar{y})$$

$$G(x,y) - \underbrace{G(\bar{x},\bar{y})}_{\bar{G}} \simeq \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(x-\bar{x}) + \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(y-\bar{y})$$

seja $\sigma_G^2 = \overline{(G-\bar{G})^2}$ a variância de G

Então:

$$\sigma_G^2 = \overline{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2(x-\bar{x})^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2(y-\bar{y})^2 + 2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(x-\bar{x})(y-\bar{y})}$$

$$= \overline{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2(x-\bar{x})^2} + \overline{\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2(y-\bar{y})^2} + \underbrace{\overline{2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(x-\bar{x})(y-\bar{y})}}_{=\,0}$$

para incertezas em x e y independentes e aleatórias

Depois de muitas medidas os termos positivos e negativos devem compensar-se fazendo com que $\overline{(x-\bar{x})(y-\bar{y})} = 0$ $\Leftarrow$ ($x_i-\bar{x}$ e $y_i-\bar{y}$ são quantidades com igual probabilidade de serem positivas ou negativas)

Tem-se então (para o caso de incertezas independentes e aleatórias)

$$\sigma_G^2 = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2$$

Nota: $\sigma_x^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}$

$\sigma_y^2 = \overline{(y-\bar{y})^2}$

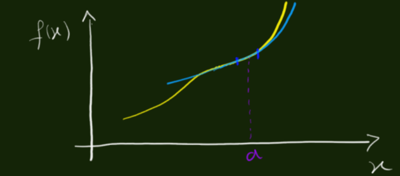
Esta expressão pode ser generalizada para n variáveis (aleatórias e independentes)

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

$$\boxed{\sigma_G^2 = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2}$$

Nota: desenvolvimento em série de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$



A distribuição gaussiana

Verifica-se empiricamente que muitas vezes as medições têm como distribuição limite uma distribuição gaussiana (mas nem sempre assim acontece):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

é um factor multiplicativo que garante que a função está normalizada

- Pode-se verificar que a função está normalizada fazendo o cálculo do seu integral em todo o domínio e verificando que o resultado é igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

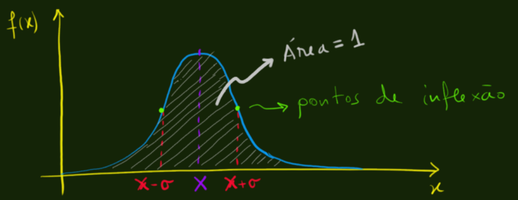
- Pode-se verificar que o desvio padrão é dado por σ

$$\left(\begin{array}{c}\text{desvio}\\ \text{padrão}\end{array}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \dots = \sigma^2$$

- Pode-se verificar que os pontos de inflexão da função gaussiana (que ocorrem quando a derivada de 2ª ordem se anular), estão situados em

$$x = \pm\sigma$$

o que mostra bem que quanto maior for o desvio padrão (σ), mais larga é a curva.



Probabilidade de que uma medição tenha um valor num certo intervalo

No caso de uma distribuição normal (impondo X=0, por facilidade do cálculo) a probabilidade de que uma medida fique situada entre $-y$ e $+y$ é

$$\text{Prob}_{(-y,+y)} = \int_{-y}^{+y} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-y}^{+y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Fazendo a mudança de variável $z = \frac{x}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma dz$

quando $x = y$, $z = y/\sigma$

$$\text{Prob}_{(-y,+y)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-y/\sigma}^{+y/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\sigma\,dz$$

Fazendo $t = y/\sigma$, vem

$$\text{Prob} = \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-z^2/2}\,dz$$

função erro (error function) erf(t)

erf(t) só pode ser calculada por métodos numéricos. Eis alguns valores:

$t = \frac{x}{\sigma}$	$\phi(t)$	Fracção aproximada de medidas fora do intervalo $[-t, t]$
0	0	1 em 1
1	0,683	1 em 3
2	0,954	1 em 20
3	0,9973	1 em 400
4	0,99994	1 em 16000

Vemos que a probabilidade de que uma medida se situe no intervalo

- $X \pm \sigma$ (ou seja $t = 1$) é de 68%.
- $X \pm 2\sigma$ (ou seja $t = 2$) é de 95%.