08/11/2012 | MECÂNICA ANALÍTICA E ONDAS

PARTE I

1

a) O Lagrangeano L de um tal sistema é a diferença entre a energia cinética do tal sistema (T) e a energia potencial do tal sistema (V), ambos expressos em coordenadas e velocidades generalizadas.

b) Sendo que o sistema é formado por N partículas, então temos 3N equações, pois cada partícula é constituída por 3 componentes. Mas como o sistema apresenta l equações de ligação e as coordenadas generalizadas têm de ser independentes umas das outras, então o sistema tem 3N-l graus de liberdade, e por isso, 3N-l coordenadas e velocidades generalizadas.

c)

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Bigg\} ??$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

2

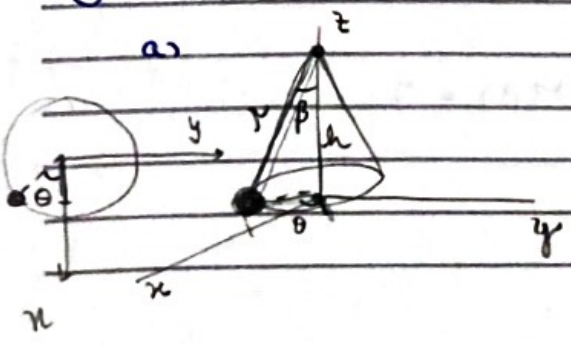
a) Uma coordenada generalizada cíclica é uma coordenada na qual o Lagrangeano L não depende, ~~mas poderá depender da sua velocidade~~.

b) A quantidade física é o momento angular que aponta no eixo OX pois como L ñ depende dele, então ele ñ vai variar no tempo e por isso vai se conservar.

PARTE II

1

a)



$$\{q_j\} = \{r, \theta\}$$

$$x = r \sin(\beta)\cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\beta)\sin(\theta)$$

$$z = h - r\cos(\beta)$$

$$\dot{x} = \dot{r}\sin(\beta)\cos(\theta) - \dot{\theta}\, r\sin(\beta)\sin(\theta)$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin(\beta)\sin(\theta) + \dot{\theta}\, r\sin(\beta)\cos(\theta)$$
$$\dot{z} = -\dot{r}\cos(\beta)$$

$$T = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{2} m\left[\sin^2(\beta)\left(\dot{r}^2\cos^2(\theta) + \dot{\theta}\, r^2\sin^2(\theta) - \cancel{2\dot{r}r\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta)}\right) + \right.$$
$$\sin^2(\beta)\left(\dot{r}^2\sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 r^2\cos^2(\theta) + \cancel{2\dot{r}r\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)}\right) +$$
$$\left. + \dot{r}^2\cos^2(\beta)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{m}{2}\left[\sin^2(\beta)\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2\right) + \dot{r}^2\cos^2(\beta)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow T = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + \sin^2(\beta)\,\dot{\theta}^2 r^2\right]$$
$$V = mgz = mg\left[h - r\cos(\beta)\right]$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + \sin^2(\beta)\dot{\theta}^2 r^2 - 2gh + 2gr\cos(\beta)\right]$$

b)

r

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) - \left(\sin^2(\beta)\dot{\theta}^2 m r + 2g\cos(\beta)\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{r} - m r\dot{\theta}^2\sin^2(\beta) + 2g\cos(\beta) = 0$$

θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{\theta}\sin^2(\beta) r^2\right) - 0 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{m}\ddot{\theta}\cancel{\sin^2}(\beta)\, r^2 + 2\cancel{m}\dot{\theta}\, r\cancel{\sin^2}(\beta) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} r^2 + 2\dot{\theta} r = 0$$

②

a)

$$H = \sum_{i=1}^{2} \dot{q}_i P_i - L \Leftrightarrow$$

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}\sin^2(\beta) r^2$$

$$\Leftrightarrow H = \dot{r} P_r + \dot{\theta} P_\theta - L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H = m\dot{r}^2 + m\dot{\theta}^2\sin^2(\beta) r^2 - \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 r^2 \sin^2(\beta) + mgh - mgr\cos(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{P_r^2}{m} + \frac{P_\theta^2}{m\sin^2(\beta) r^2} - \frac{1}{2}\frac{P_r^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{m\sin^2(\beta) r^2} + mgh - mgr\cos(\beta)$$

b) θ

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Leftrightarrow \dot{P}_\theta = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{P_\theta}{m\sin^2(\beta) r^2} = \dot{\theta}$$

r

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \Leftrightarrow \dot{P}_r = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial P_r} = \dot{r} \Leftrightarrow \frac{P_r}{m} = \dot{r}$$