T1 - Análise de circuitos corrente contínua

André Cruz - a92833; Beatriz Demétrio - a92839; Carlos Ferreira - a92846

2 de março de 2021

1 Valores teóricos

1.1 Cálculo da tensão nos nós I, II e III

Iremos usar o métodos dos nós no circuito apresentado na figura 1, para encontrar a tensão em três pontos aplicando, claro, a lei dos nós (que diz a soma das correntes a entrar num nó é igual à soma das correntes que dele saem).

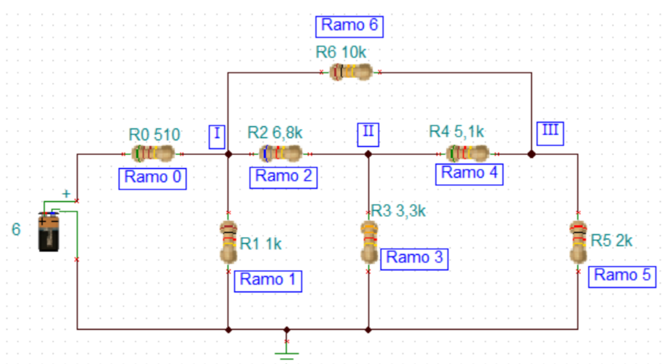

Figure 1: Circuitos com os respetivos nós e ramos

Portanto, aplicando o método dos nós vamos ter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{6-V_{\text{I}}}{R_0} = \frac{V_{\text{I}}}{R_1} + \frac{V_{\text{I}}-V_{\text{II}}}{R_2} + \frac{V_{\text{I}}-V_{\text{III}}}{R_6} \\ \frac{V_{\text{I}}-V_{\text{II}}}{R_2} = \frac{V_{\text{II}}}{R_3} + \frac{V_{\text{II}}-V_{\text{III}}}{R_4} \\ \frac{V_{\text{II}}-V_{\text{III}}}{R_4} + \frac{V_{\text{I}}-V_{\text{III}}}{R_6} = \frac{V_{\text{III}}}{R_5} \end{cases} \tag{1}$$

Ora, substituindo as resistências pelo seu respetivo valor e resolvendo o sistema, vamos ter que:

$$\begin{cases} V_{\text{I}} \approx 3,74V \\ V_{\text{II}} \approx 1,07V \\ V_{\text{III}} \approx 0,7343V = 734,3mV \end{cases}$$

1.2 Cálculo das correntes em cada ramo do circuito apresentado

Usando os valores obtidos anteriormente e os valores das resistências, podemos calcular as correntes que passam em cada ramo da figura 1:

Ramo 0 $\rightarrow I_0 = \frac{6-V_{\mathrm{I}}}{R_0} \approx 4,43mA$
Ramo 1 $\rightarrow I_1 = \frac{V_{\mathrm{I}}}{R_1} \approx 3,74mA$
Ramo 2 $\rightarrow I_2 = \frac{V_{\mathrm{I}}-V_{\mathrm{II}}}{R_2} \approx 0,39mA$
Ramo 3 $\rightarrow I_3 = \frac{V_{\mathrm{II}}}{R_3} \approx 0,32mA$
Ramo 4 $\rightarrow I_4 = \frac{V_{\mathrm{II}}-V_{\mathrm{III}}}{R_4} \approx 0,066mA$
Ramo 5 $\rightarrow I_5 = \frac{V_{\mathrm{III}}}{R_5} \approx 0,37mA$
Ramo 6 $\rightarrow I_6 = \frac{V_{\mathrm{I}}-V_{\mathrm{III}}}{R_6} \approx 0,30mA$

Para confirmar estes valores, basta usarmos a lei dos nós para os três nós da figura 1:

Para o nó I:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_6 \Leftrightarrow I_0 = 3,74 + 0,39 + 0,30 \Leftrightarrow I_0 \approx 4,43mA$$

Este valor é exatamente igual ao que obtivemos em cima.

Para o nó II:

$$I_2 = I_3 + I_4 \Leftrightarrow I_2 = 0,32 + 0,066 \Leftrightarrow I_2 \approx 0,39mA$$

Este valor é exatamente igual ao que obtivemos em cima.

Para o nó III:

$$I_5 = I_6 + I_4 \Leftrightarrow I_5 = 0,30 + 0,066 \Leftrightarrow I_5 \approx 0,37mA$$

Este valor é exatamente igual ao que obtivemos em cima.

Portanto, com isto verificamos que os valores das tensões e das correntes obtidas estão em concordância uns com os outros.

1.3 Cálculo do valor de R_5 de modo a obter a máxima transferência de energia

Para calcular este valor de R_5 iremos utilizar o teorema da máxima transferência de potência. Este teorema diz-nos que para haver a máxima potência transferida, R_5 deve assumir o valor da resistência de Thevenin, R_{Th}, do circuito. Por isso, iremos calcular a resistência de Thevenin do circuito apresentado na figura 1.

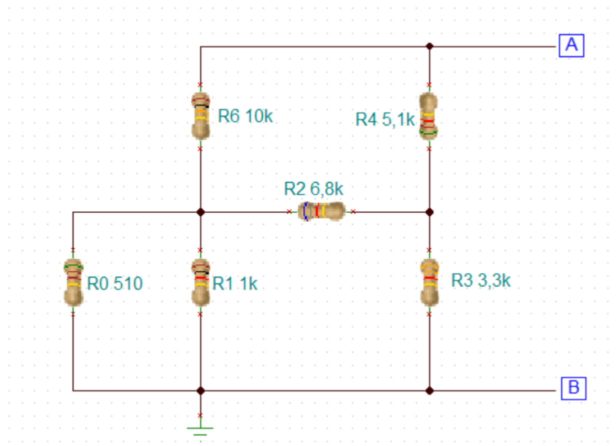

Figure 2: Circuito com as fontes de tensão em curto-circuito, as fontes de correntes em aberto e identificação dos terminais que substituem a resistência 5

Sendo que R_0 e R_1são paralelos entre si, então vamos ter que:

$$R = \frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1} = \frac{510 \times 1 \times 10^3}{510 + 1 \times 10^3} \approx 337,7\Omega$$

Passamos agora a ter uma rede resistiva que não pode ser simplificada usando as combinações série-paralela. Então, para descobrir a resistência de Thevenin iremos utilizar a transformação "Delta-Y". Por isso, passamos a ter os seguintes circuitos:

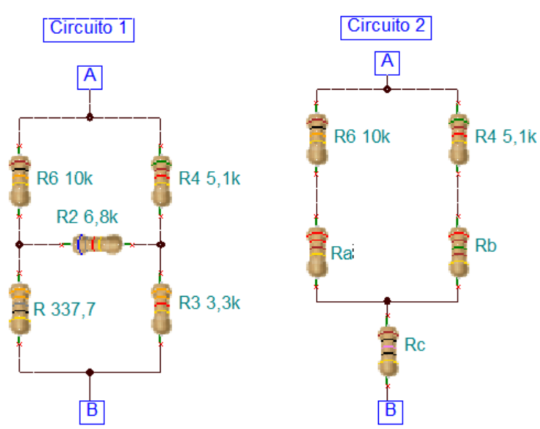

Figure 3: Circuito 1 representa o circuito antes da transformação Delta-Y; circuito 2 representa o circuito depois da transformação Delta-Y

Se aplicarmos, então ao circuito 1, a transformação Delta-Y vamos ter que R_a, R_b e R_c vão ser calculados da seguinte maneira e têm os seguintes valores:

$$R_a = \frac{R \times R_2}{R+R_2+R_3} = \frac{337{,}7 \times 6{,}8k}{3{,}3k+337{,}7+6{,}8k} \approx 220,01\Omega$$
$$R_b = \frac{R_3 \times R_2}{R+R_2+R_3} = \frac{3{,}3k \times 6{,}8k}{3{,}3k+337{,}7+6{,}8k} \approx 2149,899\Omega$$
$$R_c = \frac{R_3 \times R}{R+R_2+R_3} = \frac{3{,}3k \times 337{,}7}{3{,}3k+337{,}7+6{,}8k} \approx 106,768\Omega$$

Tendo o circuito mais simplificado (circuito 2) e tendo os valores de R_a, R_b e R_c, já podemos aplicar as combinações série-paralelo. Por isso, vamos ter, tanto no lado esquerdo como no lado direito do circuito 2, que as duas resistências estão em série:

No lado esquerdo:

$$10k + R_a = 10k + 220,01 = 10220,01\Omega$$

No lado direito:

$$5,1k + R_b = 5,1k + 2149,899 = 7249,899\Omega$$

Com isto ficamos com duas resistências equivalentes que estão em paralelo entre si e o conjunto das duas está em série com R_c. Portanto, a resistência de Thevenin vai ter o seguinte valor:

$$R_{Th} = R_c + \frac{10220,01 \times 7249,99}{10220,01 + 7249,99} \approx 4,35k\Omega$$

Em suma, o valor de R_5 de modo a obter a máxima transferência de potência é aproximadamente igual a $4,35k\Omega$.

1.4 Cálculo das matrizes de impedância e admitância pela a análise nodal

Pela análise do circuito presente na figura 1 e aplicando a lei dos nós, retiramos os seguintes sistemas

$$\begin{cases} I_0 = I_2 + I_1 + I_6 \\ I_2 = I_3 + I_4 \\ I_5 = I_4 + I_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_0 = \frac{V_{\mathrm{I}}}{R_1} + \frac{V_{\mathrm{I}} - V_{\mathrm{II}}}{R_2} + \frac{V_{\mathrm{I}} - V_{\mathrm{II}}}{R_6} \\ I_2 = \frac{V_{\mathrm{II}}}{R_3} + \frac{V_{\mathrm{II}} - V_{III}}{R_4} \\ I_5 = \frac{V_{\mathrm{II}} - V_{\mathrm{III}}}{R_4} + \frac{V_{\mathrm{I}} - V_{\mathrm{III}}}{R_6} \end{cases}$$

Na forma matricial iremos ter que:

$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6}) & (-\frac{1}{R_2}) & (-\frac{1}{R_6}) \\ 0 & (\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}) & (-\frac{1}{R_4}) \\ \frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_4} & (-\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_6}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\mathrm{I}} \\ V_{\mathrm{II}} \\ V_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_2 \\ I_5 \end{bmatrix}$$

Esta primeira matriz que aparece nesta equação anterior designa-se por matriz de admitância do circuito apresentado na figura 1. Substituindo pelos valores das resistências respetivas, iremos ter que a matriz de admitància é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0,00125 & (-0,000147) & (-0,0001) \\ 0 & 0,000499 & (-0,000196) \\ 0,0001 & 0,000196 & (-0,000296) \end{bmatrix}$$

Como a matriz da impedância se obtem pelo inverso da matriz da admitância, então temos que a matriz da impedância é dada por:

$$\begin{bmatrix} 848,91 & 490,23 & (-611,41) \\ 152,25 & 2796,36 & (-1903,08) \\ 387,61 & 2017,26 & (-4845,08) \end{bmatrix}$$

2 Valores práticos

2.1 Obtenção dos valores das tensões nodais

De forma a obter os valores das tensões nos nós para posterior comparação com os valores teóricos, e com recurso ao sistema de simulação *Tina-TI* de simulação foram adicionados três voltímetros ao circuito, ilustrado pela imagem seguinte:

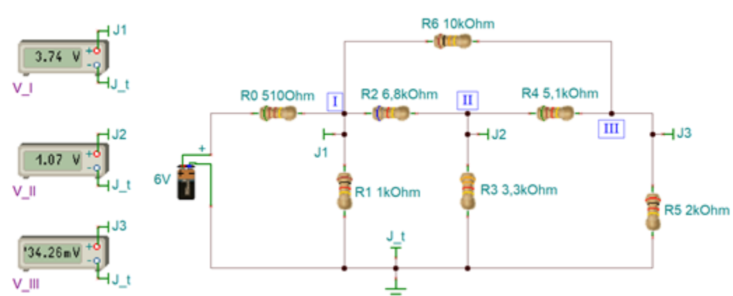

Figure 4: Circuito com voltímetros instalados para a obtenção das tensóes nodais

Foram recolhidos os seguintes valores:

$\boldsymbol{V_{\mathbf{I}}}$	$3,74\ V$
$\boldsymbol{V_{\mathbf{II}}}$	$1,07\ V$
$\boldsymbol{V_{\mathbf{III}}}$	$734,26\ mV$

Table 1: Tensões nos nós

2.2 Determinação das correntes nos ramos e verificação da leis dos nós

Com recurso ao multímetro virtual do sistema de simulação é nos possível recolher os valores das correntes em todos os ramos. Como as resistências não se encontram em série ou em paralelo entre si, a cada ramo do circuito corresponde uma resistência. Os valores obtidos foram os seguintes:

I_0	$4,43\ mA$
I_1	$3,74\ mA$
I_2	$392,02\ \mu A$
I_3	$325,42\ \mu A$
I_4	$66,59\ \mu A$
I_5	$367,13\ \mu A$
I_6	$300,53\ \mu A$

Table 2: Correntes nos ramos do circuito

Comparando estes valores com os obtidos teoricamente, reparou-se que estes são aproximadamente idênticos. Assim sendo, é de se esperar que a lei dos nós se comprove com estes valores:

Para o Nó I:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_6 \Leftrightarrow I_0 \approx 4,43mA$$

Para o Nó II:

$$I_2 = I_3 + I_4 \Leftrightarrow I_2 \approx 392,01\mu A$$

Para o Nó III:

$$I_5 = I_4 + I_6 \Leftrightarrow I_5 \approx 367,12\mu A$$

Confirmou-se a validade da lei dos nós com os valores acima obtidos.

2.3 Cálculo do valor de R_5 para se obter a máxima transferência de potência

Para descobrir o valor de R_5 de modo a se obter a máxima transferência de potência, fez-se variar o valor desta resistência entre 0 e $10k\Omega$, mediu-se a respetiva corrente no *Tina-TI* e calculou-se a potência ($P = RI^2$) . Daqui retiramos a seguinte tabela:

valor de R_5	I_{R_5}	Potência
0,00 Ω	$536,00\ \mu A$	$0\ W$
1,00 $k\Omega$	$435,78\ \mu A$	$1,899 \cdot 10^{-7} W$
2,00 $k\Omega$	$367,13\ \mu A$	$2,696 \cdot 10^{-7} W$
3,00 $k\Omega$	$317,17\ \mu A$	$3,018 \cdot 10^{-7} W$
4,00 $k\Omega$	$279,17\ \mu A$	$3,117 \cdot 10^{-7} W$
4,35 $k\Omega$	$267,94\ \mu A$	$3,123 \cdot 10^{-7} W$
4,50 $k\Omega$	$263,40\ \mu A$	$3,122 \cdot 10^{-7} W$
5,00 $k\Omega$	$249,31\ \mu A$	$3,108 \cdot 10^{-7} W$
6,00 $k\Omega$	$225,22\ \mu A$	$3,043 \cdot 10^{-7} W$
7,00 $k\Omega$	$205,37\ \mu A$	$2,952 \cdot 10^{-7} W$
8,00 $k\Omega$	$188,74\ \mu A$	$2,850 \cdot 10^{-7} W$
9,00 $k\Omega$	$174,60\ \mu A$	$2,744 \cdot 10^{-7} W$
10,00 $k\Omega$	$162,43\ \mu A$	$2,638 \cdot 10^{-7} W$

Table 3: Valores da Potência e da corrente em R_5 em função do valor de R_5

Fazendo o gráfico da potência em R_5em função do valor de R_5, vamos ter que:

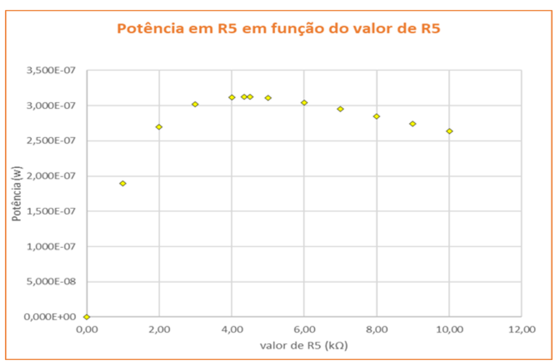

Figure 5: Gráfico da potência em R_5em função do valor de R_5

Tanto do gráfico como da tabela verificamos, assim como na parte teórica, que o valor de R_5 para se obter a máxima transferência de potência é de aproximadamente $4,35k\Omega$.

2.4 Cálculo da matriz de impedância pela análise em biporto

A representação do circuito com 2 portos fica da seguinte forma:

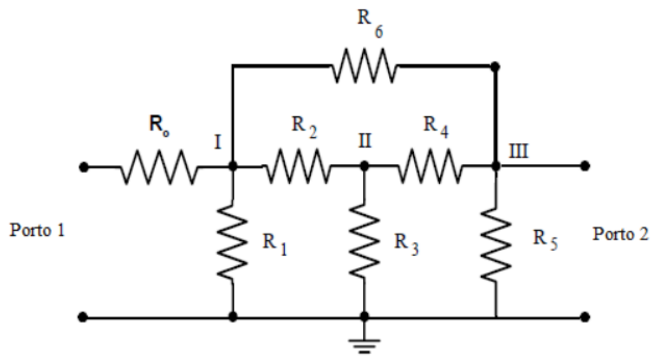

Figure 6: Circuito com a representação dos portos

Primeiro aplicou-se I_1 ao porto 1, com o porto 2 em aberto:

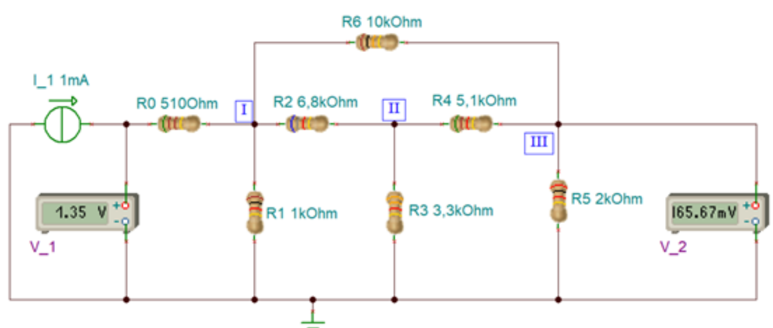

Figure 7: Circuito

Obteve-se os seguintes resultados:

$I_1 = 1mA$
$I_2 = 0mA$
$V_1 = 1.35V$
$V_2 = 165.67mV$

Com estes valores calculou-se z_{11}e z_{21}:

$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 1.35k\Omega$
$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = 165.67$

Depois aplicou-se I_2 ao porto 2, ficando o porto 1 em aberto:

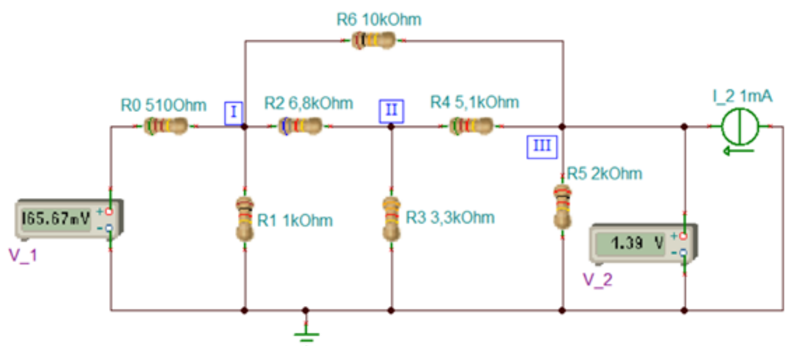

Figure 8: Circuito

Obtendo o seguinte:

$$I_2 = 1mA$$
$$I_1 = 0mA$$
$$V_1 = 165.75mV$$
$$V_2 = 1.39V$$

E calculou-se z_{12}e z_{22}:

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = 162.67\Omega$$
$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 1.39k\Omega$$

Então a matriz de impedância fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1350 & 165.67 \\ 165.67 & 1390 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

2.5 Cálculo da matriz de admitância

Para o cálculo da matriz de admitância realizou-se um processo “inverso” ao anterior. Começou-se por fixar V_1, mantendo o porto 2 em curto-circuito:

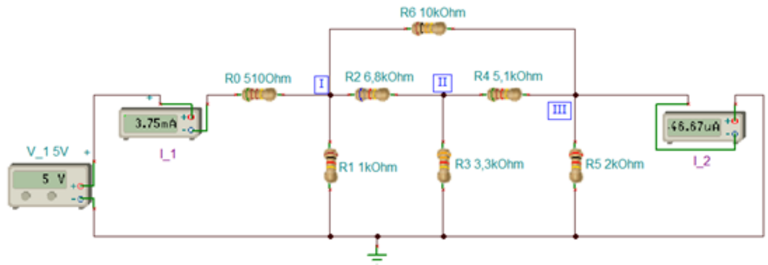

Figure 9: Circuito

E obteve-se o seguinte:

$V_2 = 5V$
$V_1 = 0V$
$I_1 = 3.75mA$
$I_2 = -446.67\mu A$

Com estes valores calculou-se y_{11}e y_{21}:

$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = 750\mu\Omega^{-1}$
$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -89.3\mu\Omega^{-1}$

Depois aplicou-se V_2 ao porto 2, com o porto 1 em curto-circuito:

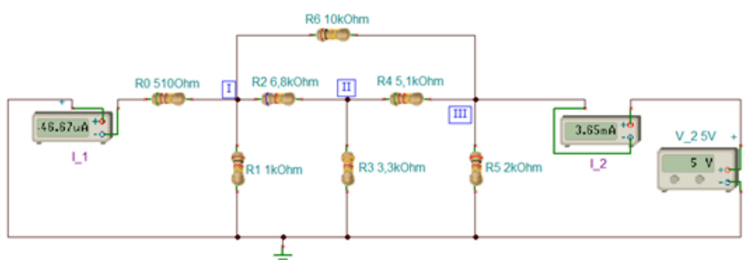

Figure 10: Circuito

Obtendo o seguinte:

$V_2 = 5V$
$V_1 = 0V$
$I_1 = -446.67\mu\Omega^{-1}$

E calculou-se y_{12}e y_{22}:

$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = -89.3\mu\Omega^{-1}$
$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = 730\mu\Omega^{-1}$

Então a matriz de admitância fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750\mu & -89.3\mu \\ -89.3\mu & 730\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Seguindo o mesmo pensamento das matrizes obtidas pela análise nodal, fazendo a inversa da matriz da impedância obtem-se:

$$\begin{bmatrix} 1350 & 165.67 \\ 165.67 & 1390 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 750\mu & -89.3\mu \\ -89.3\mu & 730\mu \end{bmatrix}$$

Resultando na matriz de admitancia, tal como previsto pela teoria.