TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA IB

CORRECÇÃO – 30.01.07

Exercício 1

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\operatorname{sen}(x^3)}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{\text{converge para zero}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3} = 0 \cdot 1 = 0$

b) $f(x)=0 \iff \operatorname{sen}(x^3)=0 \iff x^3 = k\pi,\ k\in\mathbb{N}$

$\iff x = \sqrt[3]{k\pi},\ k\in\mathbb{N}$

$f|_{[\sqrt[3]{k\pi},\, \sqrt[3]{(k+1)\pi}]} : [\sqrt[3]{k\pi},\, \sqrt[3]{(k+1)\pi}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^2}$

é contínua, derivável no intervalo aberto e

$f(\sqrt[3]{k\pi}) = f(\sqrt[3]{(k+1)\pi}) = 0$. Logo, pelo T. Rolle,

$\exists\, c_k \in]\sqrt[3]{k\pi},\, \sqrt[3]{(k+1)\pi}[\ :\ f'(c_k)=0$

Então f' anula-se numa infinidade de pontos

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2\cos(x^3)\cdot x^2 - 2x\operatorname{sen}(x^3)}{x^4}$

$= 3\cos(x^3) - \dfrac{2}{x^3}\operatorname{sen}(x^3)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ não existe. De facto,

$$a_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{1/3} \xrightarrow[n]{} +\infty \quad e$$

$$f'(a_n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \frac{2}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) =$$

$$= -\frac{2}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \xrightarrow[n]{} 0$$

$$b_n = (2n\pi)^{1/3} \xrightarrow[n]{} +\infty \quad e$$

$$f'(b_n) = 3\cos(2n\pi) - \frac{2}{2n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi) = 3 \xrightarrow[n]{} 3$$

<u>Exercício 2</u>

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot e^x - x}{4x^2} \underset{R.H.}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x e^x + \operatorname{sen} x e^x - 1}{8x}$$

$$\underset{R.H.}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{-\operatorname{sen} x e^x} + \cos x e^x + \cos x e^x + \cancel{\operatorname{sen} x e^x}}{8}$$

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

b) $$f^{-1}\left(\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{1+|x+1|} \in \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{1+|x+1|} > \frac{1}{4}\right\}$$

$$\frac{1}{1+|x+1|} > \frac{1}{4} \iff 4 > 1 + |x+1| \iff |x+1| < 3$$

$$\iff -3 < x+1 < 3 \iff -4 < x < 2$$

Então $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\right) =]-4, 2[$

c) $th^2 x + sech^2 x = \frac{sh^2 x}{ch^2 x} + \frac{1}{ch^2 x} = \frac{sh^2 x + 1}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x}{ch^2 x} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

EXERCÍCIO 3

a) (Foi anulado)

$$\int sen x . \cos^2(\cos x) dx = \int sen x . \frac{1+\cos(2\cos x)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int sen x \, dx + \frac{-1}{4}\int (-2 sen x)\cos(2\cos x) dx$$

[nota: $(-2 sen x)\cos(2\cos x) = (sen(2\cos x))'$]

$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4} sen(2\cos x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) $\int \underset{u}{x} . \underset{v'}{ch x} = x sh x - \int sh x \, dx = x sh x - ch x + C, \; C \in \mathbb{R}$

$u = x \qquad u' = 1 \qquad v' = ch x \qquad v = sh x$

c) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{1+x^2}} dx = \int \frac{2u^3 du}{\sqrt[4]{u^4}} = 2\int u^2 du = \frac{2u^3}{3} + C$

$= \frac{2}{3}\sqrt[4]{(1+x^2)^3} + C, \; C \in \mathbb{R}$

$1 + x^2 = u^4$

$2x dx = 4u^3 du$

EXERCÍCIO 4

a) FALSA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto e^x$ é crescente, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \to -x$ é decrescent

$f+g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto e^x - x$ não é crescente nem decrescente

$(f+g)(-1) = \frac{1}{e} + 1 > (f+g)(0) = 1$

$(f+g)(0) = 1 < (f+g)(3) = e^3 - 3$

b) f é contínua logo $f(\mathbb{R})$ é um intervalo

$\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 = f(x_0) \leq f(x)$

Por outro lado, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Então $f(\mathbb{R})$ tem de ser o intervalo $[0, +\infty[$.

Exercícios

a) Como $a > 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$

b) Como P é contínua, $P(\mathbb{R})$ é um intervalo.
Uma vez que $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$,
esse intervalo tem de ser $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

c) Como P é um polinómio de grau 3, P tem 1 ou 3 zeros.

Como $P(0) = d > 0$

$P(1) = a + b + c + d < 0$

$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$

o Teorema de Bolzano - Cauchy garante-nos a existência de um zero de P em cada um dos seguintes intervalos disjuntos:
$]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$, uma vez que a função contínua P tem sinais diferentes nos "extremos" de cada um desses intervalos.