

# Análise Complexa

José Luis Silva  
Departamento de Matemática  
Universidade da Madeira  
9000 Funchal  
Madeira

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Números Complexos</b>	<b>1</b>
1.1	Breve nota histórica . . . . .	1
1.2	Definições e propriedades . . . . .	3
1.3	Complexos conjugados. Valores absolutos . . . . .	9
1.4	Forma polar. Potências e quocientes . . . . .	12
	Exercícios . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Funções Analíticas</b>	<b>20</b>
2.1	Funções Elementares . . . . .	20
2.1.1	Função exponencial . . . . .	20
2.1.2	Funções trigonométricas . . . . .	23
2.1.3	Função logarítmica . . . . .	24
2.1.4	Potências complexas . . . . .	28
2.1.5	Funções trigonométricas e hiperbólicas inversas . . . . .	28
2.2	Transformações . . . . .	30
2.3	Noções topológicas . . . . .	32
2.4	Derivadas . . . . .	36
2.5	Equações de Cauchy-Riemann . . . . .	41
2.6	Funções harmônicas . . . . .	45
2.7	Derivadas de funções elementares . . . . .	47
2.7.1	Função exponencial . . . . .	47
2.7.2	Funções trigonométricas . . . . .	48
2.7.3	Função logarítmica . . . . .	48
2.7.4	Potências complexas . . . . .	51
	Exercícios . . . . .	55

<b>3</b>	<b>Integrais</b>	<b>59</b>
3.1	Integral de caminho . . . . .	59
3.2	O teorema de Cauchy-Goursat . . . . .	67
3.3	Fórmula integral de Cauchy . . . . .	70
3.4	Módulo máximo de funções analíticas . . . . .	76
	Exercícios . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Séries de funções analíticas</b>	<b>83</b>
4.1	Convergência de sucessões e séries . . . . .	83
4.2	Séries de potências e teorema de Taylor . . . . .	90
4.3	Séries de Laurent e Classificação de Singularidades . . . . .	97
	Exercícios . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Cálculo de Resíduos</b>	<b>117</b>
5.1	Técnicas para o cálculo de resíduos . . . . .	117
5.2	O teorema dos resíduos . . . . .	123
5.3	Suplemento ao teorema dos resíduos . . . . .	126
	5.3.1 Ponto no infinito . . . . .	126
	5.3.2 Resíduos e comportamento no infinito . . . . .	128
5.4	Aplicação ao cálculo de integrais reais impróprios . . . . .	130
	5.4.1 Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . . . . .	130
	5.4.2 Integrais impróprios envolvendo funções trigonométricas	135
	5.4.3 Integrais definidos de funções trigonométricas . . . . .	149
	5.4.4 Integrais em torno de um ponto de ramificação . . . . .	151
5.5	Soma de Séries . . . . .	156
	Exercícios . . . . .	162

# Capítulo 1

## Números Complexos

Neste capítulo definimos o conjunto dos números complexos (denotado por  $\mathbb{C}$ ) usando o plano  $xy$  (denotado por  $\mathbb{R}^2$ ) para os representar os números complexos, ideia original de J. R. Argand. Depois de introduzirmos a soma e multiplicação de números complexos vamos provar que o conjunto dos números complexos forma um corpo, ver Teorema 1.2.4 em baixo. Isto é essencialmente o conteúdo da Secção 1.2. Nas Secções 1.3 e 1.4 vamos explorar outras propriedades dos números complexos usando o plano  $xy$  tais como, representação em coordenadas polares, interpretação geométrica da multiplicação de números complexos, resolução de equações envolvendo números complexos etc. Resta dizer que na Secção 1.1 apresentamos uma breve nota sobre o surgimento dos números complexos a qual também serve de motivação para a introdução destes números.

### 1.1 Breve nota histórica

O nascimento dos números complexos pode ser datado do século XVI, quando alguns matemáticos Italianos se envolveram na tarefa de encontrar a fórmula resolvente para as equações do terceiro grau. Parece ter sido Niccolo Fontana (1499-1557) (mais conhecido por Tartágia) o primeiro a apresentar essa fórmula, embora fosse o seu colega Gerolamo Cardano (1501-1576) o primeiro a publicá-la. A fórmula para a equação do terceiro grau na forma

$$x^3 - px + q = 0$$

é dada por

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (1.1)$$

Ao aplicar a fórmula (1.1) à equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad (1.2)$$

obtemos

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (1.3)$$

A equação (1.2), conhecida por equação Bombelli (1526-1573), Cardano dizia que a fórmula não se aplicava. Bombelli pensou na seguinte conjectura.

**Conjectura:** Como os radicandos em (1.3) só diferem de um sinal, o mesmo deverá acontecer com as suas raízes cúbicas.

Assim resolveu o sistema

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + bi \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - bi \end{cases}$$

obtendo as soluções

$$a = 2 \text{ e } b = 1$$

aplicando as regras  $(\sqrt{-b})^2 = -b$  e  $(\sqrt{-b})^3 = -b\sqrt{-b}$ . Portanto a raiz da equação (1.2) é, segundo (1.3)

$$2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Na realidade 4 é uma raiz de (1.2), como se verifica facilmente. Assim se deram os primeiros passos na criação dos números complexos.

## 1.2 Definições e propriedades

**Definição 1.2.1** Designa-se por conjunto dos números complexos, e representa-se por  $\mathbb{C}$ , o conjunto  $\mathbb{R}^2$  dos pares ordenados de números reais com a soma vectorial e multiplicação por um escalar usuais, i.e.,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(x, y) = (ax, ay)$$

e a multiplicação de números complexos definida por

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

**Observação 1.2.2** 1.

2. O par  $(x, 0)$  é identificado com o número real  $x$ , i.e.,

$$(x, 0) \equiv x,$$

por outras palavras, temos que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

3. Ao par  $(0, 1)$  vamos atribuir um símbolo,  $i$ , i.e.,

$$(0, 1) \equiv i.$$

### Consequências

1.  $z \in \mathbb{C}, z = (x, y) = x + yi$ , pois

$$\begin{aligned} x + yi &\equiv (x, 0) + (y, 0)(0, 1) \\ &= (x, 0) + (0, y) = (x, y); \end{aligned}$$

2.  $z = x + yi \rightarrow$  representação na forma algébrica, onde  $x$  é a parte real ( $\Re(z) = x$ ) e  $y$  é a parte imaginária ( $\Im(z) = y$ ) (ver Figura 1.1).

3.  $iy = yi$ , pois  $(0, 1)(y, 0) = (0, y) = (y, 0)(0, 1) = yi$ .

4.  $i^2 = -1$ , pois  $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$ .

5. Dois números complexos dizem-se iguais se e só se tiverem ambos a mesma parte real e a mesma parte imaginária, i.e.,

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d;$$

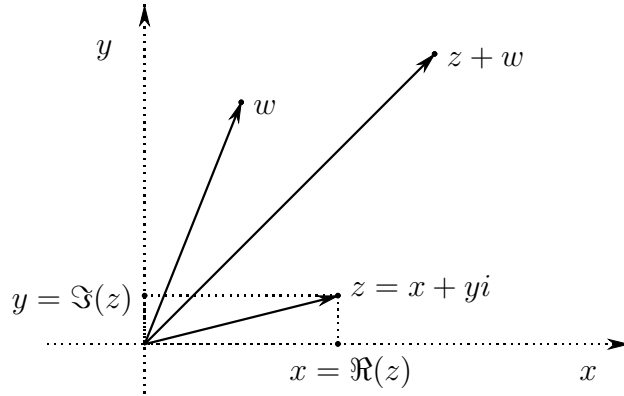


Figura 1.1: Representação geométrica de números complexos na forma algébrica.

6.  $bi$  é um imaginário puro.

7. Se  $z \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ , então  $\exists! z' \in \mathbb{C} : zz' = 1$ .

Unicidade: Suponhamos que existiam  $z', z''$  tais que  $zz' = 1$  e  $zz'' = 1$ . Mas,

$$\begin{aligned} z' &= z'1 = z'(zz'') = (z'z)z'' = 1z'' = z'' \\ &\Rightarrow z' = z'' \end{aligned}$$

logo  $z'$  é único.

Existência: Seja  $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$  e suponhamos  $a \neq 0$ , no caso  $a = 0$  vem  $z' = -\frac{i}{b}$ . Queremos determinar  $z' = a' + b'i$  tal que

$$zz' = 1$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ab' + ba' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{bb'+1}{a} \\ ab' + b\frac{bb'+1}{a} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a' = \frac{bb'+1}{a} \\ a^2b' + b + b^2b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{bb'+1}{a} \\ b' = \frac{-b}{a^2+b^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a' = \frac{a}{a^2+b^2} \\ b' = \frac{-b}{a^2+b^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim

$$z' \equiv z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2};$$

$$8. \frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{x+yi}{a+bi} = \frac{(x+yi)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{xa+yb}{a^2+b^2} + \frac{ya-xb}{a^2+b^2}i.$$

**Exemplo 1.2.3** A partir das fórmulas para o quociente e para o produto mostre que

$$a) \frac{z_1}{z_2} = z_1 \left( \frac{1}{z_2} \right), \quad z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\} \quad 0 \wedge z_1 \in \mathbb{C}.$$

$$b) \frac{1}{z_1 z_2} = \left( \frac{1}{z_1} \right) \left( \frac{1}{z_2} \right), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}.$$

**Resolução** Seja  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$

a) Por um lado tem-se

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i. \quad (1.4)$$

por outro

$$\begin{aligned} z_1 \left( \frac{1}{z_2} \right) &= (a + bi) \left( \frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) \\ &= (a + bi) \left( \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}i \right) \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Como as partes reais e imaginárias de (1.4) e (1.5) são iguais, tem-se que os números são iguais.

b) O processo é análogo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1 z_2} &= \frac{1}{ac - bd + (ad + bc)i} \\ &= \frac{ac - bd}{(ac - bd)^2 + (ad + cb)^2} + \frac{-ad - cb}{(ac - bd)^2 + (ad + cb)^2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{z_1} \right) \left( \frac{1}{z_2} \right) &= \left( \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right) \left( \frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) \\ &= \frac{ac - bd}{(ac - bd)^2 + (ad + cb)^2} + \frac{-ad - cb}{(ad + cb)^2}i \end{aligned}$$

e a igualdade também se verifica. ■

Temos as seguintes propriedades, como consequência das propriedades de  $\mathbb{R}$ :

**Propriedades da adição:**



1.  $z + w = w + z$ .
2.  $z + (w + s) = (z + w) + s$ .
3.  $z + 0 = z$ .
4.  $z + (-z) = 0, \forall z, w, s \in \mathbb{C}$ .

**Propriedades da multiplicação:**

1.  $zw = wz$ .
2.  $z(ws) = (zw)s$ .
3.  $1z = z$ .
4.  $zz^{-1} = 1, z \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \forall w, s \in \mathbb{C}$ .

**Lei distributiva:**

$$z(w + s) = zw + zs, \forall z, w, s \in \mathbb{C}.$$

**Teorema 1.2.4** *O conjunto dos números complexos constitui um corpo (não ordenado).*

**Prova.** Fica demonstrado tendo em conta as seguintes factos.

1. Em  $\mathbb{C}$  não se pode estabelecer uma relação de ordem, pois se assim fosse, para uma certa ordem " $\leq$ " teríamos

$$i \leq 0 \text{ ou } i \geq 0$$

mas se  $i \leq 0 \Rightarrow i^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \geq 0$  absurdo, e o mesmo se  $i \geq 0$ . Assim não podemos ter uma ordem em  $\mathbb{C}$ .

2. Podemos estabelecer as propriedades de corpo do conjunto  $\mathbb{C}$  a partir do seguinte isomorfismo:

$(\mathbb{R}^2, \theta, \phi)$  é um corpo para  $\theta$  e  $\phi$  definidas do seguinte modo

$$(x, y) \theta (u, v) := (x + u, y + v)$$

e

$$(x, y) \phi (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

i.e.,  $(\mathbb{R}^2, \theta)$  e  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \phi)$  são grupos abelianos.

Define-se

$$\mathbb{C} := \{z : z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$

e as seguintes operações em  $\mathbb{C}$  :

$$(a + bi) +_{\mathbb{C}} (c + di) := a + c + i(b + d)$$

$$(a + bi) \cdot_{\mathbb{C}} (c + di) := ac - bd + i(ad + bc)$$

Seja

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x + yi.$$

$f$  é um isomorfismo de  $(\mathbb{R}^2, \theta, \phi)$  sobre  $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$  i.e., uma transformação que transforma a operação  $\theta$  na operação  $+_{\mathbb{C}}$  e a operação  $\phi$  na operação  $\cdot_{\mathbb{C}}$ . Para simplificação da notação, e por abuso de linguagem representa-se  $+_{\mathbb{C}}$  por  $+$  e  $\cdot_{\mathbb{C}}$  por  $\cdot$ .

3. Uma das razões da utilização dos números complexos é permitir extrair raízes quadradas de números negativos.

■

**Proposição 1.2.5** *Seja  $z \in \mathbb{C}$ . Então existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $w^2 = z$ . O corpo  $\mathbb{C}$  é a menor extensão de  $\mathbb{R}$  onde  $w^2 = z$  tem sempre solução. Note que  $-w$  também satisfaz a equação.*

**Prova.** Seja  $z = a + bi$ . Pretendemos encontrar  $w = x + yi$  tal que

$$a + bi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

A existência de soluções pode ser garantida pela análise do gráfico da Figura 1.2.

Temos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \Leftrightarrow -a + x^2 + x^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{2} \left( a + \sqrt{a^2 + b^2} \right) \wedge y^2 = \frac{1}{2} \left( -a + \sqrt{a^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

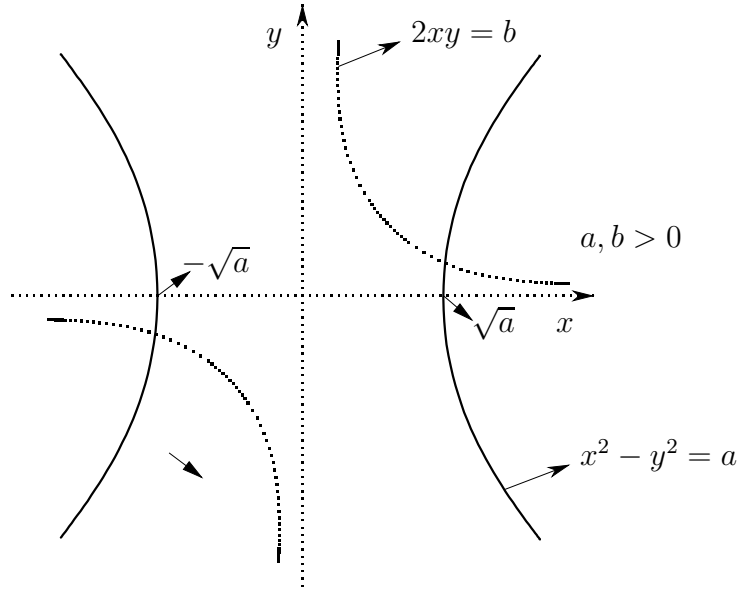


Figura 1.2: Exemplos de curvas de  $x^2 - y^2 = a$  e  $2xy = b$ .

Seja

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \wedge \beta = \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})}$$

1.  $b > 0 : (x = \alpha \wedge y = \beta) \vee (x = -\alpha \wedge y = -\beta)$
2.  $b < 0 : (x = -\alpha \wedge y = \beta) \vee (x = \alpha \wedge y = -\beta)$

Concluimos, pois, que para  $b > 0$ , temos

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ y = \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ y = -\sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \end{array} \right\}$$

e para  $b < 0$ , temos

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ y = \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ y = -\sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \end{array} \right\}$$

■

**Exemplo 1.2.6** Resolva a equação  $z^4 + i = 0$ .

**Resolução** Seja  $z^2 = w$ , então  $w^2 + i = 0$ . Substituindo na fórmula

$$\sqrt{a + bi} = \pm (\alpha + \operatorname{sgn}(b) \beta i)$$

com  $a = 0 \wedge b = -1 \Rightarrow \operatorname{sgn}(b) = -1$ . Assim

$$w = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

Considerando agora a equação  $z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$ , aplicamos novamente a fórmula, pondo  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , obtendo-se

$$\begin{aligned} z &= \pm \left( \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)} - i \sqrt{\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)} \right) \\ &= \pm \left( \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right)} - i \sqrt{\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right)} \right) \\ &= \pm \left( \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right) \end{aligned}$$

Para o outro valor,  $w = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$ , obtemos

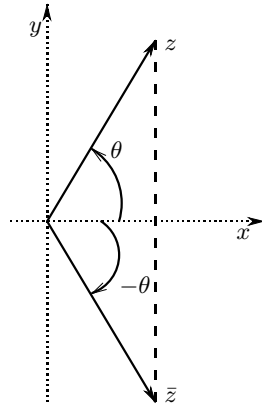
$$z = \pm \left( \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right).$$

■

## 1.3 Complexos conjugados. Valores absolutos

**Definição 1.3.1** Dado  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , designa-se por conjugado de  $z$ , ao número complexo  $\bar{z} = x - yi$ , i.e., é uma simetria do ponto  $z$  em relação ao eixo dos  $x$  (ver Figura 1.3).

**Consequências:**  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Figura 1.3: Representação de  $z$  e  $\bar{z}$ .

1.  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ .
2.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ .
3.  $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ .  $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ .
4.  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ .
5.  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$  e  $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$ .

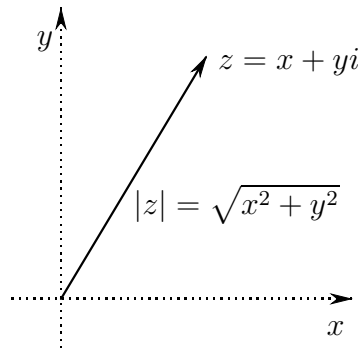
**Definição 1.3.2** Dado  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , chama-se valor absoluto de  $z$ , ao número real não negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geometricamente  $|z|$  é o comprimento do vector  $(x, y)$ , (ver Figura 1.4).

**Proposição 1.3.3** Para quaisquer  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  temos

1.  $|z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$ .
2.  $|z| > |\Re(z)|$  e  $|z| \geq |\Im(z)|$ .
3.  $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ ,  $|\bar{z}| = |z|$ ,  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .
4.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .
5.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $z_2 \neq 0$ .

Figura 1.4: Representação geométrica de  $|z|$ .

6.  $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$  (*desigualdade triangular*);

7.  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .

**Prova.** Faremos a prova só de 7.

$$\text{a) } |z_1| = |z_2 + (z_1 - z_2)| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2| \quad (1.6)$$

b) Mudando o papel de  $z_1$  com  $z_2$  temos:

$$|z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1|$$

$$\Leftrightarrow -|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \quad (1.7)$$

De (1.6) e (1.7) concluimos que

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

■

**Exemplo 1.3.4** Prove que se  $|z| = 1$ , então

$$\left| \frac{az + b}{\overline{bz} + \overline{a}} \right| = 1$$

para quaisquer números complexos  $a$  e  $b$ .

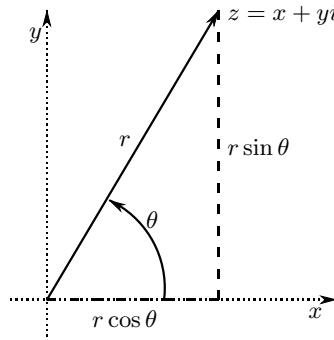


Figura 1.5: Coordenadas polares associadas ao número complexo  $z = x + yi$ .

**Resolução** Como  $|z| = 1$  temos

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} \Leftrightarrow z^{-1} = \bar{z}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right| &= \left| \frac{1}{z} \frac{az + b}{\bar{b} + \bar{z}\bar{a}} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z} \right| \left| \frac{az + b}{\overline{\overline{b}z + \bar{a}}} \right| = \frac{1}{|z|} 1 = 1. \end{aligned}$$

■

## 1.4 Forma polar. Potências e quocientes

Para cada número complexo  $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , podemos associar as suas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , dadas por:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

(ver Figura 1.5).

Assim

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

pelo que podemos escrever  $z = x + yi \Leftrightarrow z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Esta é a representação de  $z$  na forma polar.

**Observação 1.4.1** 1. Para cada  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\arg z$  não é único, na verdade, dado que  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  são funções periódicas de período  $2\pi$ , se  $\theta$  é o argumento de  $z$ , então  $\theta + 2k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ) também o é. No entanto, se fixarmos um intervalo  $\theta_0 \leq \arg z < \theta_0 + 2\pi$  a representação é única;

1. Quando  $z = 0$  tem-se  $|z| = 0$  e  $\theta$  arbitrário;
2.  $\arg z = -\arg \bar{z}$ .

**Teorema 1.4.2** Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  com  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  e  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ , então  $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$ , i.e.,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

e

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

**Prova.** Basta multiplicar os números complexos com a representação na forma polar e usar as fórmulas trigonométricas

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

e

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

■

**Exemplo 1.4.3** Fixemos o intervalo  $[0, 2\pi[$ ,  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = -i$ . Calcule  $z_1 z_2$  usando a forma polar.

**Resolução** As coordenadas polares de  $z_1$  são:

$$|z_1| = 1 \text{ e } \arg z_1 = \pi$$

e para  $z_2$  temos:

$$|z_2| = 1 \text{ e } \arg z_2 = \frac{3}{2}\pi$$

Assim

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 1 \text{ e } \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{5}{2}\pi$$



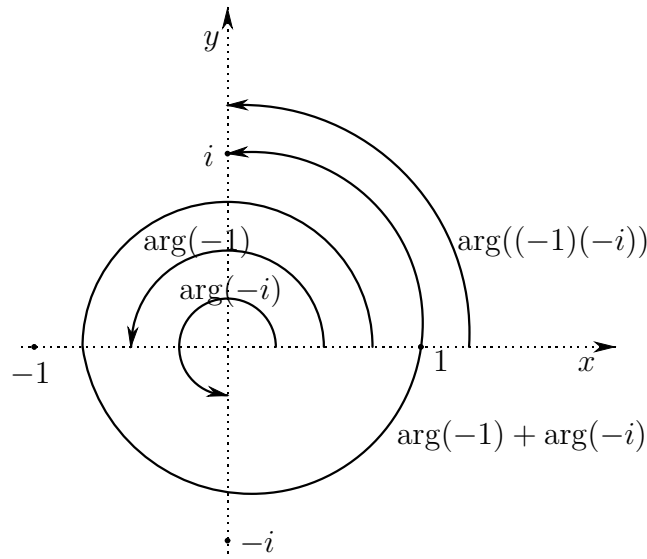


Figura 1.6: Multiplicação do número complexo  $-1$  por  $-i$ .

como  $\frac{5}{2}\pi$  não está no intervalo escolhido,  $[0, 2\pi[$ , devemos subtrair  $2\pi$  para colocar o argumento de  $z_1 z_2$  no intervalo  $[0, 2\pi[$ , (ver Figura 1.6). ■

**Observação 1.4.4** Outra forma de ver a multiplicação de números complexos é a seguinte: seja  $z \in \mathbb{C}$ , define-se

$$\psi_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, w \mapsto zw.$$

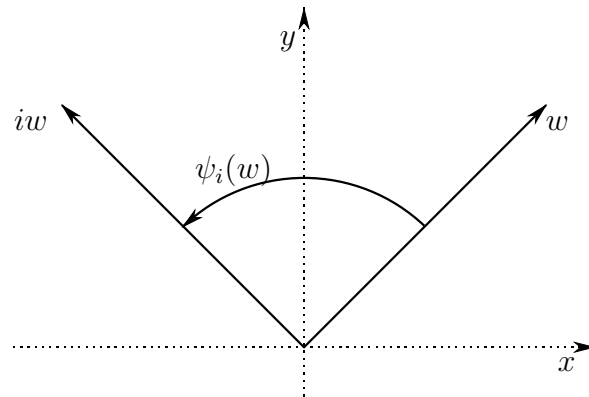
Pelo teorema 1.4.2 sabemos que o efeito de  $\psi_z$  é rodar cada número complexo de um ângulo igual a  $\arg z$  no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e ampliando o comprimento pelo factor  $|z|$ .  $\psi_i$  simplesmente roda cada número complexo de  $\frac{\pi}{2}$ , (ver Figura 1.7).

A aplicação  $\psi_z$  é linear, i.e,

$$\psi_z(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha \psi_z(w_1) + \beta \psi_z(w_2)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ . Assim  $\psi_z$  pode ser representada pela sua matriz. Pondo  $z = a + bi$ , sabemos da álgebra linear que a matriz de  $\psi_z$  é dada por

$$M(\psi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Figura 1.7: Multiplicação por  $i$ .

A base de  $\mathbb{C}$  é  $(1, 0); (0, 1)$ . A imagem de  $w = x + yi$  por meio de  $\psi_z$  é dada por

$$\psi_z(w) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

**Teorema 1.4.5 (Fórmula de De Moivre)** Se  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $n$  é um inteiro positivo, então

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

**Prova.** Pelo teorema 1.4.2

$$z^2 = r^2 (\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))$$

multiplicando novamente

$$z^3 = r^3 (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta))$$

O resultado desejado obtém-se por indução em  $n$ . ■

Seja  $w \in \mathbb{C} (\neq 0)$ . Usando a fórmula de De Moivre, tentemos resolver em ordem a  $z$  a equação

$$z^n = w$$

Suponhamos que  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $z = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Então pela fórmula de De Moivre

$$z^n = \rho^n (\cos(n\psi) + i \sin(n\psi))$$

e pela unicidade da representação polar, temos

$$\begin{aligned}\rho^n &= r \wedge n\psi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \\ \Leftrightarrow \rho &= \sqrt[n]{r} \wedge \psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbf{Z}\end{aligned}$$

Atendendo à periodicidade do seno e do co-seno, temos

$$\psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Assim

$$z = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), k = 1, \dots, n-1.$$

**Exemplo 1.4.6** Resolva a equação  $z^8 = 1$ .

**Resolução** Como  $1 = 1 (\cos 0 + i \sin 0)$ , então

$$1^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{1} \left( \cos \left( \frac{0 + 2k\pi}{8} \right) + i \sin \left( \frac{0 + 2k\pi}{8} \right) \right), k = 1, 2, \dots, 7$$

Que dá as seguintes raízes:

$$\begin{array}{ll} k = 0 : & z_0 = 1 \\ k = 1 : & z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ k = 2 : & z_2 = i \\ k = 3 : & z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ k = 4 : & z_4 = -1 \\ k = 5 : & z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ k = 6 : & z_6 = -i \\ k = 7 : & z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}$$

De um modo geral as raízes  $n$ -ésimas da unidade formam um polígono convexo regular com um vértice em  $z = 1$  (ver Figura 1.8). ■

**Exemplo 1.4.7** Sendo  $w$  uma das raiz  $n$ -ésima da unidade diferente dela própria, mostre que

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$$

**Resolução** Atendendo a que a soma em questão está em progressão geométrica de razão  $w$ , temos:

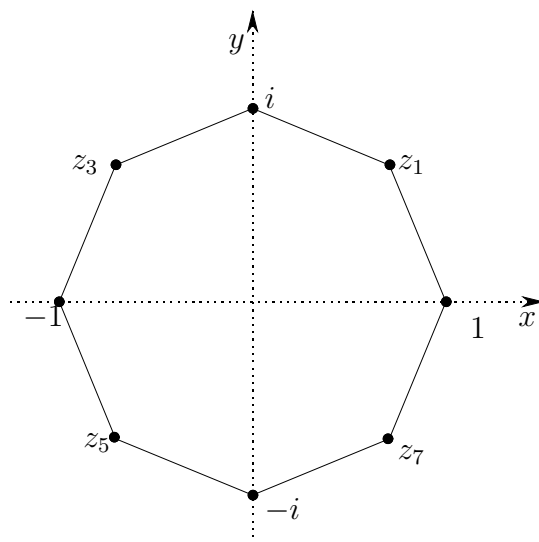
$$\sum_{j=1}^{n-1} w^j = \frac{1 - w^n}{1 - w}.$$

Como  $w$  é uma raiz  $n$ -ésima da unidade, então  $w^n = 1$ , logo

$$\frac{1 - w^n}{1 - w} = \frac{0}{1 - w} = 0.$$

■

Figura 1.8: As oito raízes da unidade.



## Exercícios

**Exercício 1.1** Prove que, para qualquer inteiro  $k$

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i.$$

Mostre como este resultado dá uma fórmula para  $i^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  escrevendo  $n = 4k + j$ ,  $0 \leq j \leq 3$ . Calcule  $i^{2000}$ .

**Exercício 1.2** Determine a parte real e a parte imaginária do número complexo

$$\frac{z+2}{z-1},$$

sabendo que  $z = x + yi$ .

**Exercício 1.3** Prove que  $\Re(iz) = \Im(z)$  e que  $\Im(iz) = \Re(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

**Exercício 1.4** Prove a seguinte igualdade

$$|1 - \bar{z}w|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

**Exercício 1.5** Sendo  $z_k$ ,  $k = 0, \dots, 5$  as raízes sextas de 8, calcule  $S = \sum_{k=0}^5 z_k$ .

**Exercício 1.6** Prove que a hipótese  $x^2 - y^2 = 1$  pode escrever-se como  $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ .

**Exercício 1.7** Prove por indução a forma binomial para os números complexos, i.e.,  $\forall z, w \in \mathbb{C}$  temos

$$(z + w)^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} w + \binom{n}{2} z^{n-2} w^2 + \dots + \binom{n}{n-1} z w^{n-1} + w^n,$$

onde  $\binom{n}{k} = n! / (k!(n-k)!)$ .

**Exercício 1.8** Prove que se  $|a| < 1$ , então

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1.$$

**Exercício 1.9** Assumindo  $|z| < 1$  ou  $|w| = 1$  e que  $\bar{z}w \neq 1$ , prove que

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| = 1.$$

**Exercício 1.10** Resolva as seguintes equações.

1.  $z^5 - 2 = 0$ .
2.  $z^4 + i = 0$ .

**Exercício 1.11** Usando a fórmula de De Moivre deduza as identidades trigonométricas

1.  $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$ .
2.  $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$ .

**Exercício 1.12** Demonstre a desigualdade triangular para números complexos

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Em que condições se obtém a igualdade. Interprete o resultado geometricamente.

**Exercício 1.13** Estabeleça a fórmula

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Use este resultado para deduzir as identidades de Lagrange

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\theta]}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \quad (1.8)$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{1}{2} \cotg \frac{\theta}{2} - \frac{\cos[(n + \frac{1}{2})\theta]}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Sugestão: note que o lado esquerdo de (1.8) é o mesmo que  $\Re(1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta})$ .

**Exercício 1.14** Descreva geometricamente cada uma das seguintes regiões.

1.  $\Im(z) > 1$ .
2.  $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$ .
3.  $\Re(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}$ .
4.  $|z - 4| \geq |z|$ .

# Capítulo 2

## Funções Analíticas

Neste capítulo vamos introduzir os mais importantes conceitos de funções analíticas bem como o cálculo a elas associado. Na Secção 2.1 definimos as funções elementares mais usuais de variável complexa, e.g., exponencial, logaritmo, seno, cosseno, funções hiperbólicas etc. Investigamos algumas propriedades análogas ao cálculo de variável real das funções elementares definidas. Na Secção 2.2 vamos explorar os transformados de conjuntos em  $\mathbb{C}$  por intermédio de funções de variável complexa para podermos tirar algumas conclusões sobre a função. Isto porque, ao contrário das funções de variável real, neste caso não podemos fazer uma representação gráfica, pois precisamos de quatro dimensões. A continuidade e diferenciabilidade de funções de variável complexa são estudadas nas Secções 2.3 e 2.4. Particular destaque é dado às equações de Cauchy-Riemann as quais desempenham um papel importante na teoria das funções analíticas. Finalmente na Secção 2.7 apresentamos as derivadas das funções elementares mais comuns assim como o domínio de validade dessas derivadas.

### 2.1 Funções Elementares

#### 2.1.1 Função exponencial

Pretendemos definir

$$e^z = ?, \text{ com } z \in \mathbb{C}.$$

Sabemos que se  $x \in \mathbb{R}$ , a série de Taylor da exponencial é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Seja  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ . Temos

$$\begin{aligned} e^z &= e^x e^{yi} \\ &= e^x \left( 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \cdots \right) \\ &= e^x \left( \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots \right) + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots \right) \right) \\ &= e^x (\cos y + i \sin y). \end{aligned}$$

**Definição 2.1.1** Se  $z = x + yi$ , então

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

**Observação 2.1.2** Se  $z$  é real, i.e,  $z = x + 0i$ , a definição 2.1.1 corresponde à exponencial usual.

**Proposição 2.1.3** *Propriedades da função exponencial.*

1.  $e^{z+w} = e^z e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$ .
2.  $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ .
3.  $|e^{x+yi}| = e^x$ .
4.  $e^{\frac{\pi}{2}i} = i; e^{\pi i} = -1; e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i; e^{2\pi i} = 1$ .
5.  $e^z$  é uma função periódica de período  $2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , i.e.,  $e^{z+2k\pi i} = e^z, \forall k \in \mathbb{Z}$ .
6.  $e^z = 1$  sse  $z = 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}$ .

**Resolução** As propriedades 1,..., 4 podem ser verificadas directamente por definição. ■



5. Suponhamos que  $e^{z+w} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$ , i.e,  $e^w = 1$ , sendo  $w = s + ti$ , temos

$$\begin{aligned} e^s \cos t + ie^s \sin t &= 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^s \cos t = 1 \\ e^s \sin t = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \sin t = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^s = 1 \\ t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} . \end{aligned}$$

Assim  $w = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ , i.e, o período de  $e^z$  é  $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ .

6. ( $\Leftarrow$ ) Se  $z = 2n\pi i \Rightarrow e^z = 1$  por 4.

( $\Rightarrow$ )  $e^z = 1 \Leftrightarrow e^{z+z'} = e^{z'}, \forall z' \in \mathbb{C} \Rightarrow z = 2k\pi i$ , por 5,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 2.1.4** Para que valores de  $z$  se tem

$$\overline{(e^{iz})} = e^{i\bar{z}}.$$

**Resolução** Seja  $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$ . Temos

$$e^{iz} = e^{-y+xi} = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x$$

logo

$$\overline{(e^{iz})} = e^{-y} \cos x - ie^{-y} \sin x.$$

Por outro lado

$$e^{i\bar{z}} = e^{y+xi} = e^y \cos x + ie^y \sin x.$$

Assim

$$\begin{aligned} \overline{(e^{iz})} &= e^{i\bar{z}} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y \cos x = e^{-y} \cos x \\ e^y \sin x = -e^{-y} \sin x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \sin x (e^y + e^{-y}) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \sin x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = e^{-y} \vee e^y = -e^{-y} \\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (e^y)^2 = 1 \\ \text{---} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} . \end{aligned}$$

Conclusão  $\overline{(e^{iz})} = e^{i\bar{z}}$  sse  $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . ■

**Observação 2.1.5** Dado  $z \in \mathbb{C}$ , a sua representação em coordenadas polares é dada por

$$\begin{aligned} z &= |z| [\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)] \\ &= |z| \exp(i \arg z). \end{aligned}$$

### 2.1.2 Funções trigonométricas

Da representação

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

vem que

$$\sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \quad \wedge \quad \cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}.$$

**Definição 2.1.6** Seja  $z \in \mathbb{C}$ , definimos seno e co-seno por

$$\sin z := \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}.$$

**Observação 2.1.7** Novamente se  $z$  é real estas definições correspondem às definições usuais de seno e co-seno.

**Proposição 2.1.8** As funções trigonométricas de variável complexa verificam propriedades análogas às de variável real.

1.  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ .
2.  $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$ .
3.  $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \forall z, w \in \mathbb{C}$ .

**Prova.** Exercício. ■

**Observação 2.1.9** As restantes funções trigonométricas definem-se pelas relações usuais com à custa do seno e do co-seno.

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \cos z \neq 0 & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \sin z \neq 0 \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ && \text{etc, etc...} \end{aligned}$$

**Exemplo 2.1.10** Mostre que se  $z = x + yi$ , então

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

**Resolução** Temos por definição

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \\ &= \frac{1}{2} [e^{-y} (\cos x + i \sin x) + e^y (\cos x - i \sin x)] \\ &= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 2.1.11** Prove que os únicos zeros de  $\cos z$  são reais.

**Resolução** Pelo exemplo 2.1.10 temos

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \cos x \cosh y = 0 \wedge \sin x \sinh y = 0$$

como  $\cosh y \geq 1$ , então terá de ser

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como para estes valores de  $x$ ,  $\sin x$  não se anula, então de  $\sinh y \sin x = 0$  tira-se que  $\sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ . Assim os zeros de  $\cos z$  são todos reais, da forma

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

■

### 2.1.3 Função logarítmica

Pretende-se estender o conceito de logaritmo a argumentos complexos, i.e,

$$\log z = ?, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Um processo natural de definir o logaritmo usando propriedades reais é pela equação

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = \text{Log} r + i\theta$$

como o argumento de  $z$  não é único,  $\arg z = \Theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , temos  $\log z = \text{Log} r + i(\Theta + 2k\pi)$ , pelo que a "função"  $\log$  é multivalente...

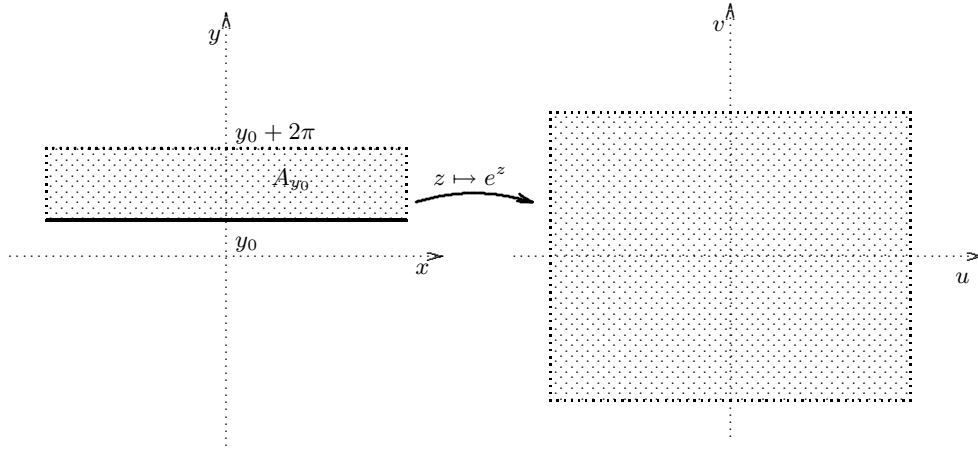


Figura 2.1:  $e^z$  é uma bijecção de  $A_{y_0}$  em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Proposição 2.1.12** *Consideremos o conjunto  $A_{y_0}$  dado por*

$$A_{y_0} = \{x + yi \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}.$$

*Então a aplicação  $e^z : A_{y_0} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  é bijectiva.*

**Prova.** Sejam  $z_1, z_2 \in A_{y_0}$  (ver Figura 2.1).

$$\begin{aligned} e^{z_1} &= e^{z_2} \\ \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} &= 1 \\ \Rightarrow z_1 - z_2 &= 2k\pi i, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \wedge y_1 - y_2 &= 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como  $y_1 - y_2 < 2\pi$ , pois  $z_1, z_2 \in A_{y_0}$  temos que  $y_1 - y_2 = 0$ . Assim  $z_1 = z_2$ . Logo  $e^z$  é injectiva. ■

Seja  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists z (=?) \in A_{y_0} : e^z = w$ . Temos

$$\begin{aligned} e^{x+yi} &= w = |w| e^{i \arg(w)} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = |w| \\ e^{yi} = e^{i \arg(w)} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{Log } |w| \\ y = \arg w \end{cases}. \end{aligned}$$

$\arg w$  é único porque  $w \in A_{y_0}$ . Assim  $e^z$  é sobrejectiva.

**Definição 2.1.13** A função  $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $y_0 \leq \Im(\log z) < y_0 + 2\pi$  é definida por

$$\log z := \operatorname{Log} |z| + i \arg(z)$$

onde  $\arg(z) \in [y_0, y_0 + 2\pi[$ . Esta função é chamada um ramo da função logarítmo.

**Observação 2.1.14** A função  $\log$  só fica bem definida quando se especifica um intervalo de comprimento  $2\pi$  onde  $\arg(z)$  toma os seus valores.

**Exemplo 2.1.15** Calcule  $\log(1+i)$  nos seguintes ramos.

1.  $\arg(1+i) \in [0, 2\pi[$ .
2.  $\arg(1+i) \in [\pi, 3\pi[$ .

**Resolução** 1.  $\log(1+i) = \operatorname{Log}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$ . ■

2.  $\log(1+i) = \operatorname{Log}\sqrt{2} + \frac{9}{4}\pi i$ .

**Notação 2.1.16**  $\operatorname{Log} |z| \rightarrow$  logarítmo usual, onde  $|z| > 0$ .

$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} |z| + i \arg(z)$  com  $-\pi \leq \arg(z) < \pi \rightarrow$  **ramo principal**.

**Proposição 2.1.17** A função  $\log z$  é a inversa de  $e^z$  no seguinte sentido: para qualquer ramo de  $\log z$  temos

$$\exp(\log z) = z$$

e escolhendo a faixa  $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$  então

$$\log(\exp(z)) = z$$

onde  $z = x + yi$  com  $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$ .

**Prova.**  $\log z = \operatorname{Log} |z| + i \arg(z)$ . Logo

$$\exp(\log z) = \exp(\operatorname{Log} |z|) \exp(i \arg(z)) = |z| \exp(i \arg(z)) = z.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \log e^z &= \operatorname{Log} |e^z| + i \arg(e^z) \\ &= \operatorname{Log} e^x + i \arg(e^x e^{yi}) \\ &= x + yi = z. \end{aligned}$$
■

**Proposição 2.1.18** Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , então  $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi}$ .

**Prova.** Temos

$$\log(z_1 z_2) = \text{Log}|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2)$$

onde  $\arg(z_1 z_2) \in [y_0, y_0 + 2\pi[$ . Mas

$$\text{Log}|z_1 z_2| = \text{Log}(|z_1| |z_2|) = \text{Log}|z_1| + \text{Log}|z_2|$$

e

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \text{Log}|z_1| + i \arg(z_1) + \text{Log}|z_2| + i \arg(z_2) \pmod{2\pi} \\ &= \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

■

**Exemplo 2.1.19** Calcule  $\log[(-1-i)(1-i)]$  no ramo  $[0, 2\pi[$ .

**Resolução** Por um lado  $\log[(-1-i)(1-i)] = \log(-2) = \text{Log}2 + i\pi$ . Por outro lado

$$\log(-1-i) = \text{Log}\sqrt{2} + i\frac{5}{4}\pi$$

e

$$\log(1-i) = \text{Log}\sqrt{2} + i\frac{7}{4}\pi.$$

Logo

$$\begin{aligned} \log[(-1-i)(1-i)] &= \text{Log}\sqrt{2} + \text{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi\right) \\ &= \text{Log}2 + i(3\pi) \\ &= \text{Log}2 + i\pi. \end{aligned}$$

■

### 2.1.4 Potências complexas

Pretende-se definir  $z^w = ?$ , quando  $w \in \mathbb{C}$  e  $z \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Definição 2.1.20** *Seja  $z, w \in \mathbb{C}$ , define-se*

$$z^w := \exp(w \log z)$$

com  $\arg z \in [y_0, y_0 + 2\pi[$  (pré-definido).

**Exemplo 2.1.21** Encontre todos os valores de

$$i^i$$

**Resolução**

$$\begin{aligned} i^i &: = \exp(i \log i) \\ &= \exp \left[ i \left( \operatorname{Log} 1 + \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) i \right) \right] \\ &= \exp \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

■

### 2.1.5 Funções trigonométricas e hiperbólicas inversas

Podemos agora definir as funções trigonométricas inversas. Por exemplo, pretende-mos definir

$$\sin^{-1} z = ?, \quad z \in \mathbb{C}$$

Para tal fazemos:

$$\begin{aligned} \sin^{-1} z &= w \Leftrightarrow \sin w = z \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \\ &\Leftrightarrow (e^{iw})^2 - 2iz e^{iw} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}. \end{aligned}$$

Assim

$$w = \sin^{-1} z = -i \log \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Com um procedimento análogo podemos provar que

$$\cos^{-1} z = -i \log \left[ z + \sqrt{z^2 - 1} \right]$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \left( \frac{i+z}{i-z} \right)$$

Para este último, temos

$$\begin{aligned} \tan^{-1} z &= w \Leftrightarrow \tan w = z \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \times \frac{2}{e^{iw} + e^{-iw}} = z \\ &\Leftrightarrow -ie^{iw} + ie^{-iw} = ze^{iw} + ze^{-iw} \\ &\Leftrightarrow -ie^{i2w} + i = ze^{i2w} + z \\ &\Leftrightarrow (e^{iw})^2 (-i - z) = z - i \\ &\Leftrightarrow e^{iw} = \sqrt{\frac{z-i}{-i-z}} \\ &\Leftrightarrow w = -\frac{i}{2} \log \left( \frac{z-i}{-i-z} \right) \\ &\Leftrightarrow w = \frac{i}{2} \log \left( \frac{i+z}{i-z} \right). \end{aligned}$$

A dedução de outras fórmulas, como

$$\sinh^{-1} z = \log \left[ z + \sqrt{z^2 + 1} \right]$$

$$\cosh^{-1} z = \log \left[ z + \sqrt{z^2 - 1} \right]$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \left( \frac{i+z}{i-z} \right)$$

é deixada como exercício...

**Exemplo 2.1.22** Calcule todos os valores de

$$\cosh^{-1} (\sqrt{2})$$

mostrando primeiro que

$$\cosh^{-1} z = \log \left[ z + \sqrt{z^2 - 1} \right]$$



**Resolução** Seja  $\cosh^{-1} z = w$ . Então temos

$$\begin{aligned}
 \cosh w &= z \\
 \Leftrightarrow \frac{e^w + e^{-w}}{2} &= z \\
 \Leftrightarrow (e^w)^2 - 2ze^w + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow e^w &= \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} \\
 \Leftrightarrow e^w &= z + \sqrt{z^2 - 1} \\
 \Leftrightarrow w &= \log \left[ z + \sqrt{z^2 - 1} \right].
 \end{aligned}$$

Assim

$$\cosh^{-1} z = \log \left[ z + \sqrt{z^2 - 1} \right].$$

■

No caso em que  $z = \sqrt{2}$  temos

$$\begin{aligned}
 \cosh^{-1}(\sqrt{2}) &= \log(\sqrt{2} + \sqrt{1}) \\
 &= \log(\sqrt{2} \pm 1) \\
 &= \pm \log(\sqrt{2} + 1) \\
 &= \pm \left[ \text{Log}(\sqrt{2} + 1) + i(2k\pi) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

## 2.2 Transformações

Ao contrário do que acontece com as funções reais de variável real, onde a representação gráfica de uma função permite tirar conclusões sobre o comportamento da função, as funções de variável complexa

$$w = f(z)$$

com  $w, z \in \mathbb{C}$  não permitem uma tal representação, dado que precisaríamos de, pelo menos, 4 dimensões. Para se tirar conclusões sobre uma função complexa, analisamos os conjuntos de pontos correspondentes a  $z$  e  $w$  em dois planos complexos, plano- $z$ ,  $(x, y)$  e plano- $w$ ,  $(u, v)$ .

A correspondência entre pontos dos dois planos diz-se uma aplicação, função ou ainda transformação de pontos do plano- $z$  no plano- $w$ .

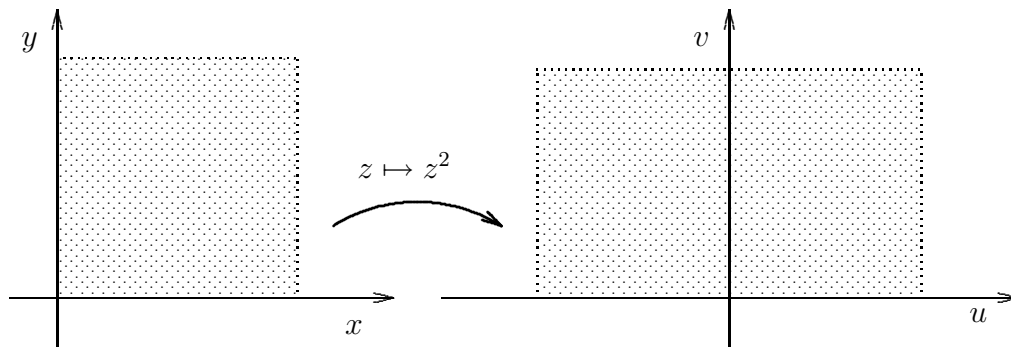


Figura 2.2: Efeito da função quadrado ao primeiro quadrante.

**Exemplo 2.2.1** Mostre que a função  $f(z) = z^2$  transforma o primeiro quadrante do plano- $z$  no semiplano superior do plano- $w$ .

**Resolução** Sabemos que  $|z^2| = |z|^2$  e que  $\arg(z^2) = 2 \arg(z)$ . Como  $z$  pertence ao primeiro quadrante, então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2 \arg(z) \leq \pi \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \arg(z^2) \leq \pi, \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} 0 &\leq |z| < \infty \\ \Leftrightarrow 0 &\leq |z|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Assim temos o resultado pretendido, (ver Figura 2.2). ■

**Exemplo 2.2.2** Calcule os transformados das curvas  $x^2 + y^2 = c^2, c \geq 0$  por meio da função

$$f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - yi.$$

**Resolução** Fazendo

$$f(z) = u + vi = \sqrt{x^2 + y^2} - yi = c + (-y)i$$

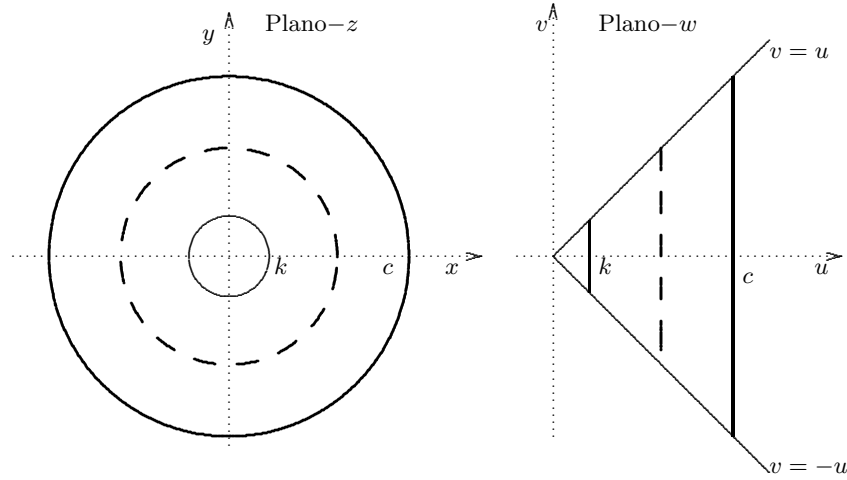


Figura 2.3: Imagens de circunferências por meio de  $f(z) = (x^2 + y^2)^{1/2} - yi$ .

temos

$$\begin{aligned} u = c \wedge v = -y \text{ com } -c \leq y \leq c \\ \Rightarrow u = c \wedge -c \leq v \leq c \\ \Leftrightarrow u = c \wedge -u \leq v \leq u. \end{aligned}$$

Assim a função transforma circunferências em segmentos, (ver Figura 2.3). ■

## 2.3 Noções topológicas

**Definição 2.3.1** *Sejam  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $\epsilon > 0$ . Chama-se vizinhança de  $z_0$  de raio  $\epsilon$  ao conjunto*

$$V_\epsilon(z_0) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}.$$

Geometricamente (ver Figura 2.4).

**Definição 2.3.2** *Um subconjunto  $A \subset \mathbb{C}$  diz-se aberto sse  $\forall z_0 \in A, \exists \epsilon > 0 : V_\epsilon(z_0) \subset A$ .*

Geometricamente (ver Figura 2.5).

Intuitivamente um conjunto aberto é um conjunto que não contém nenhum ponto da sua fronteira ou "lado".

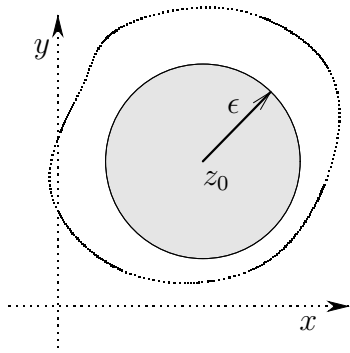
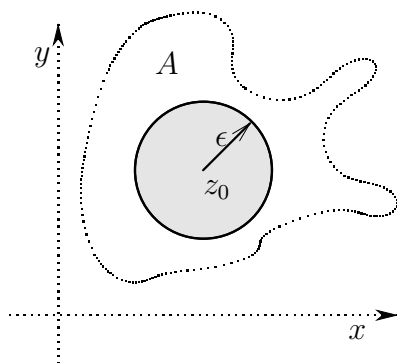
Figura 2.4: Vizinhança de  $z_0$  de raio  $\epsilon$ .

Figura 2.5: Conjunto aberto.

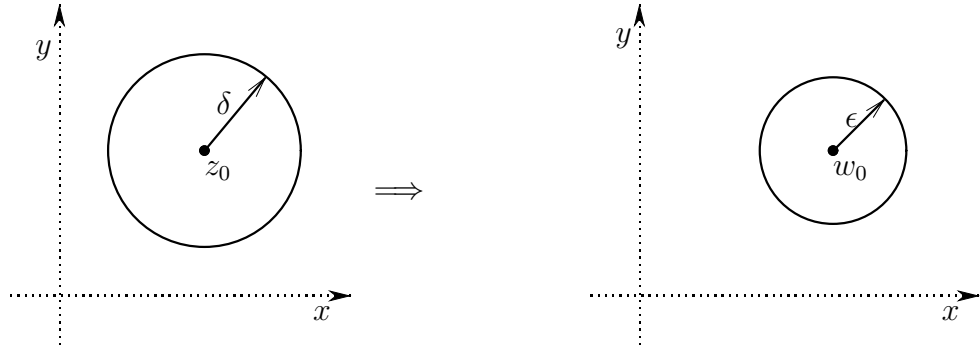


Figura 2.6: Interpretação geométrica de  $z \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z) \rightarrow w_0$ .

**Definição 2.3.3** *Seja  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in A$ . Diz-se que*

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} f(z) &= a \in \mathbb{C} \text{ sse } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \\ &\Rightarrow |f(z) - a| < \epsilon \end{aligned}$$

(ver Figura 2.6).

**Exemplo 2.3.4** Prove que

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \neq 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = 2$$

**Resolução** A função  $f(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$  não está definida em  $z = 1$ . Quando  $z \neq 1$ ,

$$f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} = z+1$$

Assim

$$|f(z) - 2| = |(z+1) - 2| = |z-1|$$

Então dado  $\epsilon > 0$  basta tomar  $\delta = \epsilon$  ou menor. ■

**Observação 2.3.5** 1. Se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a = t + si$ , então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = t \wedge \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = s.$$

2. O símbolo  $z \rightarrow z_0$  significa que  $z$  se aproxima de  $z_0$  de uma forma arbitrária e não numa direcção em particular.

**Proposição 2.3.6** *Sejam  $f$  e  $g$  funções tais que*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = b.$$

*Então temos*

1.  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = a + b.$
2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) g(z)] = ab.$
3.  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a}{b}$  se  $b \neq 0.$

**Prova.** Semelhante ao cálculo de variável real. ■

**Definição 2.3.7** *Seja  $A \subset \mathbb{C}$  aberto. Dizemos que  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua em  $z_0 \in A$  sse*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

*e que  $f$  é contínua em  $A$  sse é contínua em cada ponto de  $z_0 \in A$ .*

**Observação 2.3.8** Outras noções e propriedades, tais como, a de sucessão convergente, sucessão de Cauchy, continuidade por sucessões etc. definem-se do mesmo modo como se definem para funções de variável real.

**Exemplo 2.3.9** Indique os pontos onde a função é contínua

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^3 + 1}.$$

**Resolução** Pela proposição 2.3.6 somas, produtos e quocientes de funções contínuas são contínuas, excepto nos zeros do denominador. Assim  $f$  é contínua em  $\mathbb{C} \setminus \{\exp(\frac{\pi}{3}i), \exp(\frac{5\pi}{3}i), -1\}$ . ■

## 2.4 Derivadas

**Definição 2.4.1** *Seja  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  aberto. Diz-se que  $f$  é diferenciável em  $z_0 \in A$  se o seguinte limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$$

*existe. Alternativamente, pondo  $\Delta z = z - z_0$ ,  $f$  é diferenciável se o limite*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (z \rightarrow z_0 \Rightarrow \Delta z \rightarrow 0)$$

*existe. Este limite é denotado por  $f'(z_0)$  e chama-se derivada de  $f$  em  $z_0$ .  $f$  diz-se analítica ou holomorfa em  $z_0 \in A$  se  $f'(z_0)$  existe e existe derivada em todos os pontos de uma vizinhança de  $z_0$ . Se  $f$  é analítica em todos os pontos de  $A$  diz-se que  $f$  é analítica em  $A$ .*

**Observação 2.4.2** 1. A definição de derivada de uma função de variável complexa, embora muito semelhante à derivada de uma função de variável real, é muito mais "rica".

2. No limite na definição de derivada (Definição 2.4.1) aparece uma divisão pelo número complexo  $z - z_0$ , sendo por isso, necessário ter em conta a natureza especial da divisão de números complexos.
3. O limite  $z \rightarrow z_0$  é tomado para uma aproximação arbitrária de  $z$  a  $z_0$  e não numa direcção em particular.
4. A existência de  $f'(z)$  permite tirar uma maior informação sobre  $f$ , nomeadamente que se  $f'(z)$  existe, então também existem  $f''$ ,  $f'''$ ,  $f^{(iv)}$ ,  $\dots$ , o que não acontece no caso real. (Pense-se, por exemplo, na função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Temos  $f'(x) = 2|x|$ , mas  $f''$  e as restantes derivadas não existem no ponto  $x = 0$ .)

5. Se uma função é analítica em alguns pontos de cada vizinhança de um ponto  $z_0$ , excepto no ponto  $z_0$ , então  $z_0$  é chamado **ponto** singular ou singularidade da função.

**Exemplo 2.4.3** Prove que se  $f(z) = z^2$ , então  $f'(z_0) = 2z_0$ .

**Resolução** Por definição temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &:= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0, \end{aligned}$$

onde a última passagem é justificada pelo facto de os polinómios serem funções contínuas. ■

**Proposição 2.4.4** Se  $f'(z_0)$  existe e é finita, então  $f$  é contínua em  $z_0$ .

**Prova.** Provar que  $f$  é contínua em  $z_0$  é provar que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= f(z_0) \\ \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \times \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow f'(z_0) \times 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0. \end{aligned}$$

O recíproco da proposição anterior não é verdadeiro. Um contra exemplo é dado pela seguinte função:

$$f(z) = |z|^2$$

A função é contínua em  $\mathbb{C}$ , pois

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= |z_0|^2 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \\ \Rightarrow |f(z) - |z_0|^2| &< \epsilon. \end{aligned}$$



Temos

$$\begin{aligned}
 ||z|^2 - |z_0|^2| &= |(|z| - |z_0|)(|z| + |z_0|)| \\
 &= ||z| - |z_0|| |z| + |z_0|| \\
 &\leq |z - z_0| |z| + |z_0| \\
 &\leq \delta (|z| - |z_0| + 2|z_0|) \\
 &\leq \delta (|z - z_0| + 2|z_0|).
 \end{aligned}$$

Supondo  $0 < \delta < 1$  temos

$$\leq \delta (1 + 2|z_0|) = \epsilon \Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|}.$$

■

Cálculo da derivada:

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0 + \Delta z}) - z_0 \overline{z_0}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \overline{z_0} + \overline{\Delta z} + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right).
 \end{aligned}$$

1) Suponhamos que  $z_0 = 0$ , então

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\Delta z} = 0$$

2) Suponhamos que  $z_0 \neq 0$ : Fazendo  $\Delta z \rightarrow 0$  por diferentes direcções:

a)  $\Delta z = \Delta x + 0i \Rightarrow \overline{\Delta z} = \Delta z$ . Logo

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\overline{z_0} + \Delta z + z_0) = \overline{z_0} + z_0.$$

b)  $\Delta z = 0 + \Delta yi \Rightarrow \overline{\Delta z} = -\Delta z$ . Logo

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\overline{z_0} - \Delta z - z_0) = \overline{z_0} - z_0.$$

Como o limite, se existir, é único, tem de ser

$$\overline{z_0} + z_0 = \overline{z_0} - z_0 \Rightarrow z_0 = 0$$

absurdo, pois suposemos que  $z_0 \neq 0$ . Assim a derivada só existe em  $z = 0$ . Por definição esta função não é analítica em nenhum ponto.

**Teorema 2.4.5** *Suponhamos que  $f$  e  $g$  são analíticas em  $A$ , onde  $A \subset \mathbb{C}$  é um aberto. Então*

1.  $af + bg$  é analítica em  $A$  e

$$(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z), \forall z \in A, \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

2.  $fg$  é analítica em  $A$  e

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \forall z \in A.$$

3. Se  $g(z) \neq 0, \forall z \in A$  então  $f/g$  é analítica em  $A$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}, \forall z \in A.$$

**Prova.** Semelhante ao cálculo de funções de variável real. ■

**Observação 2.4.6** Como consequências da proposição anterior temos que.

1. Todo o polinómio  $P_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  é uma função analítica em  $\mathbb{C}$  e

$$P'_n(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}, \forall z, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

2. Toda a função racional

$$\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m}$$

é analítica em  $\mathbb{C}$  excepto nos zeros do denominador.

**Teorema 2.4.7 (da função composta)** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  analítica e  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  analítica,  $A, B$  abertos, com  $f(A) \subset B$ . Então  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $(g \circ f)(z) = g(f(z))$  é analítica em  $A$  e*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z).$$

**Prova.** Sejam  $z, z_0 \in A$ , com  $f(z) = w$  e  $f(z_0) = w_0$ . Defina-se

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & \text{se } w \neq w_0 \\ 0 & \text{se } w = w_0 \end{cases}.$$

Provemos que  $h$  é contínua. Para  $w \neq w_0$ ,  $h$  está definida por uma função contínua logo contínua. Para  $w = w_0$  temos:

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow w_0} h(w) &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - \lim_{w \rightarrow w_0} g'(w_0) \\ &= g'(w_0) - g'(w_0) = 0. \end{aligned}$$

Assim  $\lim_{w \rightarrow w_0} h(w) = h(w_0) = 0$ , i.e.,  $h$  é contínua. Calculemos, pois

$$(g \circ f)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.1)$$

Mas

$$\begin{aligned} h(f(z)) &= \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} - g'(f(z_0)) \\ \Leftrightarrow g(f(z)) - g(f(z_0)) &= [h(f(z)) + g'(f(z_0))] [f(z) - f(z_0)] \\ \Leftrightarrow \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \frac{[f(z) - f(z_0)]}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Portanto (2.1) vem

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \frac{[f(z) - f(z_0)]}{z - z_0} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[f(z) - f(z_0)]}{z - z_0} \\ &= [0 + g'(f(z_0))] f'(z_0). \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que se  $z \in A$ , então

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z).$$

■

## 2.5 Equações de Cauchy-Riemann

**Teorema 2.5.1** *Seja  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  aberto e  $z_0 \in A$ . Então  $f'(z_0)$  existe sse  $f = u + iv$  é diferenciável em  $z_0 = (x_0, y_0)$  no sentido de  $\mathbb{R}^2$  (isto é, existem e são contínuas as derivadas parciais de  $u$  e  $v$ ), e  $u$  e  $v$  satisfazem*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \text{equações de Cauchy - Riemann (C - R)}.$$

Se  $f'(z_0)$  existe, então

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

**Prova.** Por definição temos

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

■

1. Seja  $z = x + y_0i$ . Então

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Seja  $z = x_0 + yi$ . Então

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como o limite quando existe é único, temos de (2.2) e (2.3) que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow (\text{C} - \text{R}).$$

Temos ainda que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

**Exercício 2.1** Provar que as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares são dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

e que, se  $f'(z)$  existe, então

$$f'(z) = (\cos \theta - i \sin \theta) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \exp(-i\theta) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

**Resolução** Em coordenadas polares temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{C} - \text{R}).$$

Obtemos, assim a seguinte representação para  $f$

$$f(r, \theta) = u(x(r, \theta), y(r, \theta)) + i v(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

Calculando as derivadas parciais, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\
 &= \frac{\partial v}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial y} (r \cos \theta) \\
 &= r \left( \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta \right) \\
 &= r \frac{\partial u}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Por outro lado

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \cos \theta) \\
 &= r \left( \frac{\partial u}{\partial y} (-\sin \theta) - \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta \right) \\
 &= -r \frac{\partial v}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Temos também que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

onde

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}.$$

Então

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + i \left( \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left( -\frac{1}{r} \sin \theta \right) + i \left[ \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \left( -\frac{1}{r} \sin \theta \right) \right] \\
 &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + i \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta \right) \\
 &= (\cos \theta - i \sin \theta) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\
 &= \exp(-i\theta) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right).
 \end{aligned}$$

■

**Observação 2.5.2** As condições de Cauchy-Riemann são condições necessárias para existir derivada. As condições suficientes para existir derivada são, além de se ter de verificar as condições de Cauchy-Riemann as funções  $u$ ,  $v$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  serem contínuas.

**Exemplo 2.5.3** Calcule a derivada das seguintes funções.

1.  $f(z) = z^2$ .
2.  $f(z) = |z|^2$ .

**Resolução 1.** Neste caso temos que

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \wedge v(x, y) = 2xy$$

■

Dado que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

as condições de Cauchy-Riemann verificam-se. Como  $u$ ,  $v$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  são contínuas em  $\mathbb{C}$ , então  $f'(z)$  existe em  $\mathbb{C}$  e

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z.$$

2. Temos

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \wedge v(x, y) = 0$$

Para se verificar as condições de Cauchy-Riemann, terá de ser:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow y = 0$$

Donde se conclui, dado que  $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ , são contínuas em  $z_0$ , que a derivada só existe em  $z = 0$ , (como já vimos, logo após a Proposição 2.4.4).

**Definição 2.5.4** Uma função analítica em  $\mathbb{C}$  diz-se que é inteira.

## 2.6 Funções harmónicas

**Definição 2.6.1** Seja  $u : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Então  $u$  diz-se **harmónica** se

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ (Laplaciano de } u\text{)}.$$

**Proposição 2.6.2** Seja  $f = u + vi$  analítica em  $A$ , então  $u$  e  $v$  são funções harmónicas.

**Prova.** Por  $f$  ser analítica temos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases} \rightarrow (C - R)$$

Derivando (1) em ordem a  $x$  e (2) em ordem a  $y$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \wedge \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0. \end{aligned}$$

Provaremos (ver Teorema 3.3.4 na pag. 73) que se  $f$  é analítica, então existem todas as derivadas de  $f$ , pelo que, do cálculo de variável real sabemos que se  $v \in C^2(A)$ , então  $v_{xy} = v_{yx}$ . ■



**Definição 2.6.3** *As funções  $u$  e  $v$  dizem-se harmónicas conjugadas sse a função  $f = u + vi$  é analítica.*

Quando uma das funções harmónicas conjugadas é dada, podemos determinar a outra usando as condições de Cauchy-Riemann.

**Exemplo 2.6.4** Verifique se  $u = y^3 - 3x^2y$  é harmónica em algum domínio e determine a sua harmónica conjugada.

**Resolução** Dado que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2, \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

concluimos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Assim,  $u$  é harmónica em  $\mathbb{C}$ . Se  $v$  é a harmónica conjugada de  $u$ , então as condições de (C-R) dizem que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow -6xy = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v(x, y) = -3xy^2 + \phi(x).$$

Mas, pela outra equação de (C-R), vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 3y^2 - 3x^2 = -(-3y^2 + \phi'(x)) \\ \Leftrightarrow -\phi'(x) &= -3x^2 \Rightarrow \phi(x) = x^3 + k. \end{aligned}$$

Logo

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + k.$$

■

A função correspondente é  $f = u + vi$  dada por

$$\begin{aligned} f(z) &= y^3 - 3x^2y + (-3xy^2 + x^3 + k)i \\ &= ((z^3) + k)i. \end{aligned}$$

## 2.7 Derivadas de funções elementares

### 2.7.1 Função exponencial

**Teorema 2.7.1** A aplicação  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^z$  é analítica em  $\mathbb{C}$  e

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$$

**Prova.** Por definição

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

de onde concluímos que

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \wedge \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

que são funções infinitamente diferenciáveis. Para provar que  $e^z$  é analítica temos que verificar as condições de C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Como as derivadas parciais são de classe  $C^\infty$ , então  $e^z$  é analítica em  $\mathbb{C}$ . Temos ainda que

$$\frac{d}{dz}(e^z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

■

**Exemplo 2.7.2** Calcule a derivada da função  $f(z) = e^{e^z}$ .

**Resolução** Dado que a composta de funções inteiras é uma função inteira, pela regra da função composta para a derivada temos

$$f'(z) = e^z e^{e^z}.$$

■

### 2.7.2 Funções trigonométricas

**Teorema 2.7.3** *As funções  $\sin z$  e  $\cos z$  são inteiras com derivadas*

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z \quad \wedge \quad \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z.$$

**Prova.** Basta ter em conta a definição de  $\sin z$

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

e usar a regra da derivada da função composta. O mesmo para o  $\cos z$ . ■

**Observação 2.7.4** As derivadas das restantes funções trigonométricas são obtidas usando as regras de derivação (teorema 2.4.5) e as derivadas do seno, co-seno e da exponencial.

$$\tan' z = \sec^2 z \quad \cot' z = -\csc^2 z$$

$$\sinh' z = \cosh z \quad \cosh' z = \sinh z$$

$$\tanh' z = \operatorname{sech}^2 z \quad \coth' z = -\operatorname{csch}^2 z$$

### 2.7.3 Função logarítmica

**Teorema 2.7.5** *Seja  $A = \mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \leq 0 \wedge y = 0\}$ . Define-se um ramo do logarítmo em  $A$  por*

$$\log z = \operatorname{Log} |z| + i \arg(z), \quad -\pi \leq \arg(z) < \pi$$

*chamado ramo principal do logarítmo. Então  $\log z$  é analítica em  $A$  (ver Figura 2.7) com derivada*

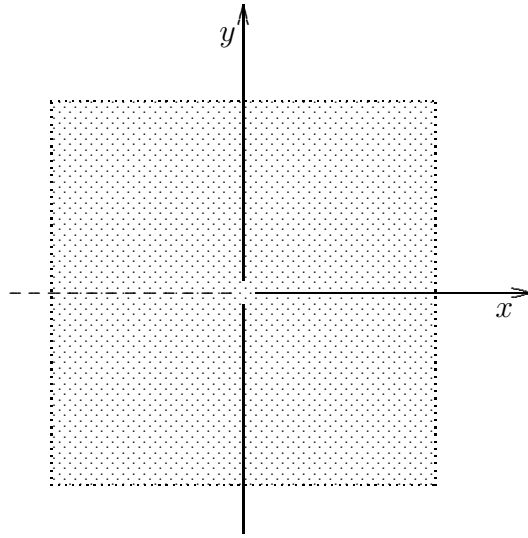
$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}.$$

**Prova.** Seja  $z = re^{i\theta}$  um elemento em  $A$ . Então

$$\log z = \operatorname{Log} r + i\theta$$

e assim obtemos

$$u(r, \theta) = \operatorname{Log} r$$

Figura 2.7: Domínio de analiticidade de  $\log z$ .

e

$$v(r, \theta) = \theta.$$

As condições de (C-R) em coordenadas polares verificam-se, pois

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Como no domínio  $A$   $u, v$ , assim como as suas derivadas, são contínuas, concluímos que  $\log z$  é analítica em  $A$ , e temos, pelo Exercício 2.1 que

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{\exp(i\theta)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{r \exp(i\theta)} = \frac{1}{z}.$$

■

**Observação 2.7.6** 1. A razão da escolha do domínio de analiticidade de logaritmo tem a ver com o facto de o argumento de  $z$  estando no intervalo  $-\pi \leq \arg z < \pi$  não ser uma função contínua sobre o eixo real negativo. De facto, para um número no eixo real negativo o argumento é  $-\pi$ , ao passo que o valor do argumento na parte superior de cada vizinhança desse número é tão próximo de  $\pi$  quanto se queira, ou seja, a função argumento "dá um salto" ao cortar o eixo real negativo.

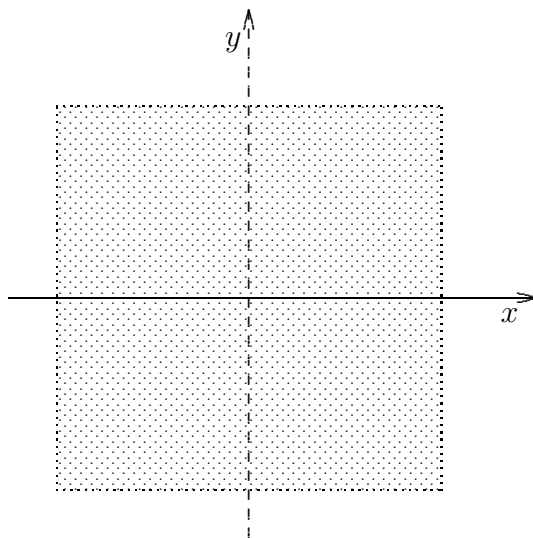


Figura 2.8: Domínio de analiticidade de  $\log z^2$ .

2. Os pontos do eixo real negativo,  $\theta = \pi$ , assim como a origem são pontos singulares (ver Observação 5 na pág. 36).
3. O raio  $\theta = \pi$  chama-se corte do logaritmo, para o ramo principal, i.e., é a recta ou curva de pontos singulares.
4. O ponto singular  $z = 0$  comum a todos os cortes de ramo da função multivalente  $\log z$  é chamado nó de ramos ou ponto de ramificação.

**Exemplo 2.7.7** Calcule a derivada da função  $\log(z^2)$  e indique o domínio de analiticidade.

**Resolução** Podemos derivar a função logaritmo desde que

$$\arg(z^2) \neq \pm\pi.$$

Seja  $\arg(z) = \theta \Rightarrow \arg(z^2) = 2\theta$ . Então

$$2\theta \neq \pm\pi \Rightarrow \theta \neq \pm\frac{\pi}{2}.$$

Assim em  $D = \mathbb{C} \setminus \{x + yi : x = 0, y \in \mathbb{R}\}$ , (ver Figura 2.8)

e neste domínio temos

$$\frac{d}{dz} (\log(z^2)) = \frac{2}{z}.$$

■

## 2.7.4 Potências complexas

Lembremos que

$$z^c := \exp(c \log z)$$

é uma função multivalente.

**Proposição 2.7.8** 1. Para qualquer ramo da função logaritmo, a função  $z \mapsto a^z$  é inteira e tem derivada

$$\frac{d}{dz} (a^z) = \log(a) a^z.$$

2. Fixando um ramo do logaritmo, por exemplo o principal, a função  $z \mapsto z^b$  é analítica no domínio do ramo do logaritmo escolhido e temos

$$\frac{d}{dz} (z^b) = bz^{b-1}$$

3. A função  $z \mapsto z^{1/n}$  é analítica no domínio do logaritmo (ver Figura 2.9) e tem derivada

$$\frac{d}{dz} (z^{1/n}) = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

**Prova.** 1. Atendendo à definição

$$a^z := \exp(z \log a)$$

e pela derivada da função composta obtemos

$$\frac{d}{dz} (a^z) = \frac{d}{dz} [\exp(z \log a)] = \frac{d}{dz} (z \log a) \exp(z \log a) = \log(a) a^z,$$

onde  $\log a$  é uma constante. A derivada é válida em  $\mathbb{C}$ .

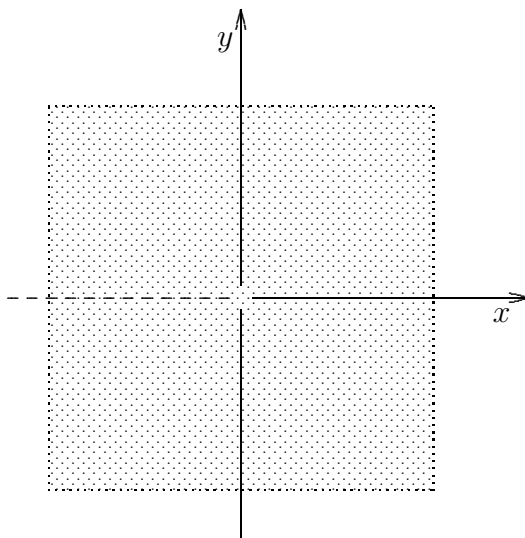


Figura 2.9: Domínio de analiticidade de  $z \mapsto z^b$  e  $z \mapsto z^{1/n}$ .

2. Como  $z^b := \exp(b \log z)$ , então

$$\frac{d}{dz}(z^b) = \frac{d}{dz}[\exp(b \log z)] = \frac{d}{dz}(b \log z) \exp(b \log z) = z^b b \frac{1}{z} = bz^{b-1}$$

a qual é válida no domínio do logaritmo.

3. Análogo a 2. ■

Note que se  $b \in \mathbb{N}$ , então  $z^b$  é analítica em  $\mathbb{C}$ , mas em geral  $z^b$  é analítica no domínio do logaritmo.

**Exemplo 2.7.9** Explique o que está mal no seguinte raciocínio. Sabemos que

$$a^z := \exp(z \log a)$$

portanto

$$\frac{d}{dz}(a^z) = a^z \log a$$

Por outro lado

$$\frac{d}{dz}(a^z) = za^{z-1} \tag{2.4}$$

Assim

$$za^{z-1} = a^z \log a \Leftrightarrow z = a \log a$$

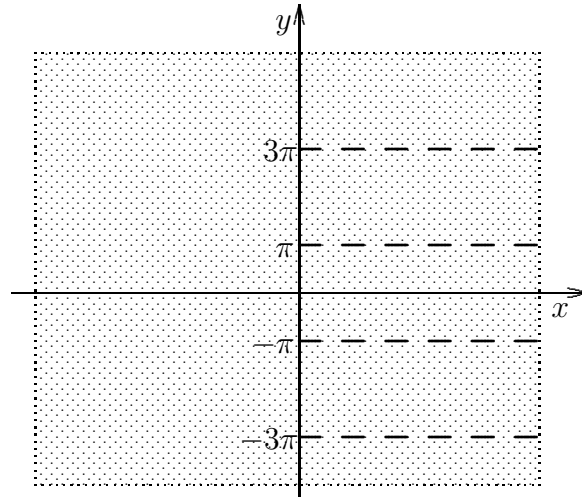


Figura 2.10: Domínio de analiticidade de  $(e^z + 1)^{1/2}$ .

**Resolução** O que está mal é a igualdade (2.4), pois

$$\frac{d}{dz}(a^z) \neq za^{z-1}$$

dado que a derivada de  $a^z$  é  $a^z \log a$  para qualquer ramo do logaritmo. ■

**Exemplo 2.7.10** Diferencie a função  $z \mapsto \sqrt{e^z + 1}$  indicando a região onde a função é analítica.

**Resolução** Pela proposição anterior a função é analítica no domínio do logaritmo. Escolhendo o ramo principal do logaritmo que é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \leq 0 \wedge y = 0\}$ . A região de holomorfia de  $\sqrt{e^z + 1}$ ,  $\mathcal{A}$ , é tal que se  $z \in \mathcal{A}$  então  $e^z + 1$  não pode ser real negativo (ver Figura 2.10). ■

Procuramos  $z$  tal que  $e^z + 1 \in \mathbb{R}_0^-$ , i.e,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} e^x \cos y + 1 \leq 0 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (e^x + 1 \leq 0 \wedge y = 2k\pi) \vee (-e^x + 1 \leq 0 \wedge y = (2k+1)\pi) \\ y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 0 \\ y = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$



Assim o domínio de analiticidade de  $\sqrt{e^z + 1}$  é

$$\mathcal{A} = \mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \geq 0 \wedge y = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

e temos para  $\forall z \in \mathcal{A}$

$$\frac{d}{dz} \left( \sqrt{e^z + 1} \right) = \frac{e^z}{2\sqrt{e^z + 1}}.$$

**Exercícios**

**Exercício 2.2** Encontre a parte real e a parte imaginária de  $\exp(e^z)$ .

**Exercício 2.3** Simplifique  $|\exp(2z + i)|$  e  $|\exp(iz^2)|$ , e mostre que

$$|\exp(2z + i) + \exp(iz^2)| \leq \exp(2x) + \exp(-2yx).$$

**Exercício 2.4** Atendendo à definição de  $\sinh z$  e  $\cosh z$ , prove que

1.  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ .
2.  $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$ .
3.  $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$ .
4.  $\sinh(x + yi) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$ .
5.  $\cosh(x + yi) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$ .

**Exercício 2.5** Use a equação  $\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x$  onde  $z = x + yi$  para provar que  $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq |\cosh y|$ .

**Exercício 2.6** Mostre que  $|\sin z| \geq |\sin x|$  e  $|\cos z| \geq |\cos x|$ .

**Exercício 2.7** Encontre todas as raízes da equação  $\exp(z) = -3$ .

**Exercício 2.8** Calcule todas as raízes das equações

1.  $\cos z = 2$ .
2.  $\sinh z = i$ .

**Exercício 2.9** Prove que  $\log(z/w) = \log(z) - \log(w) \pmod{2\pi}$ ,  $\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Exercício 2.10** Calcule todos os valores de  $\log|(1 + i)^i|$ .

**Exercício 2.11** Calcule todos os valores de  $\exp(\log|\cosh^{-1}(1)|)$  começando por demonstrar que

$$\cosh^{-1}(z) = \log \left[ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right].$$

**Exercício 2.12** Calcule todos os valores de  $\left|(1+i)^{1+i}\right|$ .

**Exercício 2.13** Determine a imagem das faixas semi-infinitas

1.  $x \geq 0 \wedge 0 \leq y \leq \pi$ .

2.  $x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq \pi$ .

por meio de  $f(z) = \exp(z)$ , exibindo os transformados das fronteiras.

**Exercício 2.14** Considere a função  $f(z) = z^2$ . Determine o conjunto de todos os pontos do plano- $z$  que são transformados nas rectas

1.  $u = c_1$ .

2.  $v = c_2$ .

no plano- $w$ . Faça  $c_1, c_2 = 2, 4, -2, -4$ .

**Exercício 2.15** Prove que a função  $f(z) = \bar{z}$  é contínua e não tem derivada em nenhum ponto. E a função  $\Im(z)$ ?

**Exercício 2.16** Prove que o seguinte limite não existe  $\lim_{z \rightarrow 0} \lim_{\bar{z}} \frac{\bar{z}}{z}$ .

**Exercício 2.17** Prove formalmente, por mudança de variáveis, as equações de Cauchy<sup>1</sup>-Riemann<sup>2</sup> em coordenadas polares

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$$

e que a derivada de uma função em coordenadas polares é dada por

$$f'(z) = \exp(-i\theta) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

---

<sup>1</sup>Augustin Louis CAUCHY (1789-1857), engenheiro e matemático francês com enorme contribuição para o desenvolvimento da matemática e outras ciências, em especial a física, através de cerca de 8 centenas de trabalhos publicados, foi um dos fundadores da análise matemática moderna, e o seu nome está ligado a numerosos teoremas.

<sup>2</sup>Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826-1866), matemático alemão que sucedeu a Dirichlet como professor em Göttingen e se tornou notável pelos seus trabalhos sobre a teoria das funções analíticas (de que foi um dos fundadores), geometrias não euclidianas, teoria dos números e física matemática.

**Exercício 2.18** Considere a função,  $f$ , definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}.$$

Prove que as condições de Cauchy-Riemann se verificam em  $z = 0$  mas que a derivada de  $f$  não existe nesse ponto.

**Exercício 2.19** Considere a função  $f(z) = z\Im(z)$ . Mostre que  $f'(0) = 0$ . Será  $f(z)$  analítica em  $z = 0$ ? Justifique.

**Exercício 2.20** Prove que se  $f$  é analítica num domínio,  $\mathcal{D}$ , então

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

**Exercício 2.21** Mostre que o módulo e o argumento da função analítica,  $f(z) = R(x, y) \exp(i\phi(x, y))$ ,  $R, \phi$  funções reais, verificam as seguintes relações

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

**Exercício 2.22** Seja  $f$  uma função analítica num domínio  $\mathcal{D}$  que não contém o ponto  $z = 0$ . Sendo  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ , use as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares, para mostrar que, em  $\mathcal{D}$ , tanto  $u$  como  $v$  satisfazem a equação de Laplace<sup>3</sup> em coordenadas polares, admitindo que  $u, v \in C^2(\mathcal{D})$ ,

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

**Exercício 2.23** Verifique que se  $f$  é analítica em  $A$  e  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  em  $A$ , então  $f'$  é constante em  $A$ .

**Exercício 2.24** Seja  $f$  uma função analítica em  $A$  e  $|f(z)|$  constante em  $A$ . Mostre que  $f$  é constante em  $A$ .

**Exercício 2.25** Seja  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  uma função analítica em  $A$ , tal que  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , em  $A$ . Mostre que  $f(z) = -icz + d$ , onde  $c \in \mathbb{R}$  e  $d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

---

<sup>3</sup>Pierre Simon de LAPLACE (1749-1827), astrónomo, matemático e físico francês com importantes contribuições para a mecânica celeste e teoria das probabilidades.

**Exercício 2.26** Seja  $u$  uma função tal que  $u \in C^2(A)$  tal que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ . Prove que  $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$  é analítica em  $A$ .

**Exercício 2.27** Verifique que  $u$  é harmônica em algum domínio e determine as suas harmônicas conjugadas.

1.  $u(x, y) = 2x(1 - y)$ .
2.  $u(x, y) = \sinh(x) \sin y$ .

**Exercício 2.28** Derive e indique a região de analiticidade de cada uma das seguintes funções.

1.  $\log(e^z + 1)$ .
2.  $z^z$ .
3.  $\frac{1}{e^z - 1}$ .
4.  $\frac{e^{az}}{a^2 - z^2}, a \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 2.29** Calcule a derivada da função  $\sqrt{z^2 - 2}$  e indique o domínio onde essa derivada é válida.

# Capítulo 3

## Integrais

Este capítulo é dedicado ao estudo dos integrais de funções complexas. Neste contexto, o teorema de Cauchy desempenha um papel fundamental na teoria das funções analíticas, nomeadamente permite-nos provar que se  $f$  é analítica então existem todas as derivadas da função  $f$ . Muitos dos resultados deste capítulo dependem deste teorema. Não menos importante são os resultados da Secção 3.3 que trata da fórmula integral de Cauchy. Esta fórmula é tão importante que muito dos resultados obtidos posteriormente podem ser considerados consequência da fórmula integral de Cauchy para as derivadas. Em particular destacamos os teoremas de Louville e de Morera. Finalmente neste capítulo vamos abordar o módulo máximo de funções analíticas em domínios limitados, ver Secção 3.4 para mais pormenores.

### 3.1 Integral de caminho

Seja  $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função dada por  $h(t) = u(t) + iv(t)$ , com  $u, v$  funções contínuas em  $[a, b]$ . Definimos o integral definido por

$$\int_a^b h(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt \in \mathbb{C},$$

onde

$$\int_a^b u(t) dt \quad \text{e} \quad \int_a^b v(t) dt$$

são integrais de uma variável real.

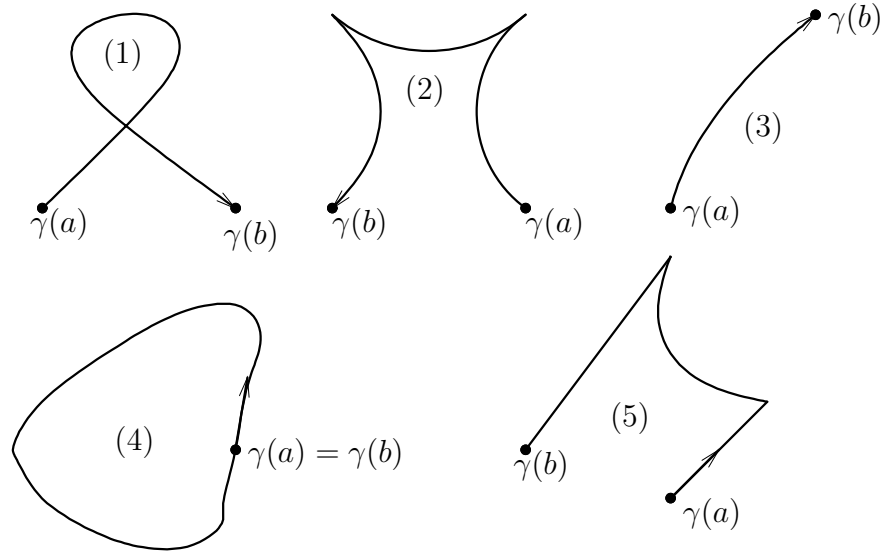


Figura 3.1: Curvas em  $\mathbb{C}$ . (1) classe  $C^1$ ; (2) seccional/ classe  $C^1$ ; (3) suave; (4) simples fechada; (5) caminho.

**Definição 3.1.1** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva em  $\mathbb{C}$ .*

1.  $\gamma$  diz-se de classe  $C^1$  se  $\gamma'(t)$  existe em  $]a, b[$  e é contínua em  $[a, b]$ .
2.  $\gamma$  diz-se seccionalmente de classe  $C^1$  se  $\gamma'(t)$  existe em  $]a_{i-1}, a_i[$  e é contínua em  $[a_{i-1}, a_i]$ , onde  $[a, b] = \bigcup_{j=1}^n [a_{j-1}, a_j]$ .
3.  $\gamma$  diz-se uma curva suave se  $\gamma'(t)$  existe e  $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ .
4.  $\gamma$  diz-se uma curva fechada de Jordan ou curva simples fechada se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e  $\gamma(t) \neq \gamma(t') \forall t, t' \in [a, b] \setminus \{a, b\}$  com  $\gamma(t)$  contínua.
5.  $\gamma$  diz-se um caminho se  $\gamma$  é seccionalmente suave. (Ver Fig. 3.1).

**Definição 3.1.2** *Seja  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho tal que  $\gamma([a, b]) \subset A$ . Define-se o integral de  $f$  ao longo de  $\gamma$  por*

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

**Proposição 3.1.3** Se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\gamma} [u(x, y) dy + v(x, y) dx].$$

**Prova.** Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t) \Rightarrow \gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ .  
Temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)] dt \end{aligned}$$

que, em termos de integrais de caminho reais não é mais do que

$$\int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} u(x, y) dy + v(x, y) dx.$$

■

Este resultado pode ser obtido formalmente, calculando

$$f(z) dz = [u(x, y) + iv(x, y)] (dx + idy).$$

**Proposição 3.1.4** Sejam  $f, g$  funções complexas contínuas,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  e  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  cami-nhos em  $\mathbb{C}$ . Então

1.  $\int_{\gamma} c_1 f + c_2 g = c_1 \int_{\gamma} f + c_2 \int_{\gamma} g.$
2.  $\int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f.$
3.  $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$

**Prova.** Exercício.

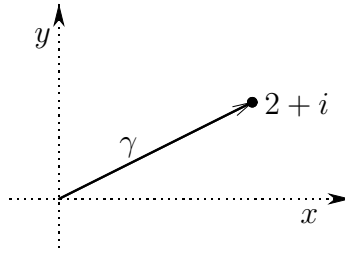
■

**Exemplo 3.1.5** Calcule o valor do integral

$$\int_{\gamma} z^2 dz,$$

onde  $\gamma$  é o segmento de recta que une  $z = 0$  a  $z = 2 + i$ , (ver Fig. 3.2).



Figura 3.2: Curva de 0 a  $2 + i$ .

**Resolução 1º** Processo. Seja

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto 2t + it$$

com  $\gamma'(t) = 2 + i$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &:= \int_0^1 (2t + ti)^2 (2 + i) dt = (2 + i) \int_0^1 (3t^2 + 4t^2 i) dt \\ &= (2 + i) (3 + 4i) \int_0^1 t^2 dt = (2 + i) (3 + 4i) \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

2º Processo.  $y = \frac{1}{2}x$  com  $0 \leq x \leq 2$ ,  $z = x + \frac{1}{2}xi \Rightarrow dz = (1 + \frac{1}{2}i)dx$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^2 \left( \frac{3}{4}x^2 + x^2 i \right) \left( 1 + \frac{1}{2}i \right) dx \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2}i \right) \left( \frac{3}{4} + i \right) \int_0^2 x^2 dx = \left( 1 + \frac{1}{2}i \right) \left( \frac{3}{4} + i \right) \frac{8}{3} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

■

Vamos resolver o mesmo exercício percorrendo um caminho diferente. O caminho que une  $z = 0$  a  $z = 2$  mais o de  $z = 2$  a  $z = 2 + i$ , (ver Figura 3.3.)

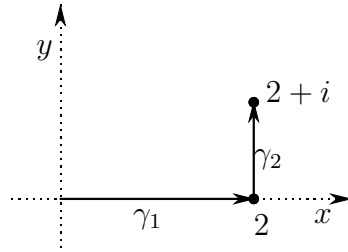


Figura 3.3: Caminho alternativo ligando  $z = 0$  a  $z = 2 + i$ .

Temos  $y = 0 \wedge (0 \leq x \leq 2) \Rightarrow dz = dx$  e  $x = 2 \wedge (0 \leq y \leq 1) \Rightarrow dz = idy$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^2 x^2 dx + i \int_0^1 (2 + yi)^2 idy \\ &= \frac{8}{3} + i \int_0^1 (4 + 4yi - y^2) dy \\ &= \frac{8}{3} + i \left( 4 + 2i - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

Concluimos, pois, que o integral dá o mesmo valor, calculando por um ou por outro caminho.

**Exemplo 3.1.6** Calcule o valor do integral sobre a circunferência unitária, percorrida no sentido positivo (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio)

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz$$

**Resolução** Podemos parametrizar a circunferência do seguinte modo

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \mapsto e^{i\theta}$$

com  $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$ , obtendo-se, então

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = 2\pi i.$$

■

**Teorema 3.1.7** *Seja  $f$  uma função contínua em  $A \subset \mathbb{C}$  e  $\gamma$  um caminho. Se  $f$  for limitada sobre  $\gamma$ , i.e.,  $\exists M \geq 0$  tal que  $|f(z)| \leq M \forall z = \gamma(t)$ , então*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M l(\gamma),$$

onde  $l(\gamma)$  designa o comprimento de  $\gamma$ . Mais geralmente temos

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

**Prova.** 1. Dada

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

temos que

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

2. Seja  $f$  uma função complexa de variável real,  $f(t) = u(t) + iv(t)$ . Prove-mos que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Seja

$$\int_a^b f(t) dt = r e^{i\theta}$$

para  $r$  e  $\theta$  estão fixos. Logo

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt$$

Como

$$r = \Re(r) = \Re \left( \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt \right) = \int_a^b \Re(e^{-i\theta} f(t)) dt$$

e sabemos que  $\Re(e^{-i\theta} f(t)) \leq |e^{-i\theta} f(t)| = |f(t)|$ , pois  $|e^{-i\theta}| = 1$ . Obtemos

$$r = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

3.

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\
&\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\
&\leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = Ml(\gamma).
\end{aligned}$$

■

**Exemplo 3.1.8** Sendo  $\gamma$  um círculo  $|z| = R$ , onde  $R > 1$ , mostre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\log z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi \frac{\text{Log} R + \pi}{R}.$$

**Resolução** Pela desigualdade triangular e tendo em conta que  $|z| = R$  e  $\theta$  é tal que  $-\pi \leq \theta < \pi$  temos

$$\left| \frac{\log z}{z^2} \right| = \frac{|\text{Log} |z| + i\theta|}{|z^2|} \leq \frac{\text{Log} R + \pi}{R^2}$$

Assim

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\log z}{z^2} dz \right| \leq \frac{\text{Log} R + \pi}{R^2} \cdot 2\pi R = 2\pi \frac{\text{Log} R + \pi}{R}.$$

■

**Teorema 3.1.9** Seja  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f = F'$  para alguma função analítica  $F : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho unindo os pontos  $z_1$ , e  $z_2$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_2),$$

em particular, se  $z_1 = z_2$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Prova.** Usando a definição e as propriedades simples do cálculo integral obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^1 F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) \\
 &= (F \circ \gamma)(1) - (F \circ \gamma)(0) \\
 &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) \\
 &= F(z_1) - F(z_2).
 \end{aligned}$$

Isto prova a proposição. ■

**Exemplo 3.1.10** Calcule o valor do integral

$$\int_{\gamma} z^3 dz,$$

onde  $\gamma$  é a porção de elipse que une  $z = 1$  a  $z = \frac{i}{2}$ .

**Resolução** Visto que

$$z^3 = \frac{1}{4} (z^4)'$$

temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} z^3 dz &= \frac{1}{4} \int_{\gamma} (z^4)' dz \\
 &= \frac{1}{4} \left( \left( \frac{i}{2} \right)^4 - 1^4 \right) \\
 &= -\frac{15}{64}.
 \end{aligned}$$
■

**Exemplo 3.1.11** Calcule o valor do integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz,$$

onde  $\gamma$  é:

1. O semi-círculo superior unindo  $z = 1$  a  $z = -1$ .
2. O semi-círculo inferior unindo os mesmos pontos.

**Resolução** 1.  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , com  $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$ . Logo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = \pi i.$$

■

2.  $\gamma(\theta) = e^{-i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e  $\gamma'(\theta) = -ie^{i\theta}$ . Logo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi} -\frac{1}{e^{-i\theta}} ie^{-i\theta} d\theta = -\pi i.$$

Neste caso o integral não é independente do caminho. Mais à frente, na Secção 3.2, que condições terá de verificar  $f$  para que o integral não dependa do caminho.

## 3.2 O teorema de Cauchy-Goursat

**Teorema 3.2.1 (de Green)** *Sejam  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  funções contínuas assim como as derivadas parciais de primeira ordem, num conjunto  $R$  com fronteira  $C$  (caminho simples fechado). Então*

$$\int_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Prova.** Ver por exemplo [Rud76].

■

**Teorema 3.2.2 (de Cauchy)** *Seja  $f$  analítica e  $f'$  contínua sobre e no interior da curva simples fechada  $\gamma$ , então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Prova.** Seja  $f = u + vi$ , então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx) \\ &= \iint_A \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_A \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

como se verificam as condições de Cauchy-Riemann, vem

$$= 0 + 0 = 0.$$

■

**Teorema 3.2.3 (de Cauchy-Goursat)** *Seja  $f$  analítica sobre e no interior de um caminho fechado  $\gamma$ , então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Prova.** Ver por exemplo ???

■

**Exemplo 3.2.4** Seja  $\gamma$  a circunferência de raio  $r$  e centro em  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Calcule

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$$

para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**Prova.** 1.  $n \geq 0$ . Pelo teorema de Cauchy-Goursat

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0$$

ou pelo teorema 3.1.9 com  $F(z) = \frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ , e, dado que a curva é fechada temos

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0.$$

2.  $n = -1$ :  $\gamma(\theta) = re^{i\theta} + z_0$  com  $0 \leq \theta < 2\pi$  e  $\gamma'(\theta) = rie^{i\theta}$ . Logo

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = 2\pi i.$$

3.  $n \leq -2$ . Novamente pelo teorema 3.1.9 tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} ire^{i\theta} d\theta \\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n+1)} d\theta \\ &= i \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i\theta(n+1)} \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n \neq -1 \end{cases}.$$

■

**Exemplo 3.2.5** Prove que não existe uma função analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f$  tal que  $f'(z) = \frac{1}{z}$ .

**Resolução** Suponhamos com vista a um absurdo que tal função existe. Então

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$$

pelo Teorema 3.1.9 com  $\gamma$  a circunferência unitária. Por outro lado o exemplo 3.2.4 diz que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

com  $z_0 = 0$  e  $\gamma$  igual à anterior, logo é absurdo, pelo que a função  $f'$  não existe. ■

**Observação 3.2.6**  $(\log z)' = \frac{1}{z}$ , mesmo assim isto não contraria o exemplo anterior, pois  $\log z$  não é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , mas sim em

$$\mathbb{C} \setminus \{x + yi : y = 0 \wedge x \leq 0\}.$$

**Teorema 3.2.7 (da Deformação)** *Seja  $f$  analítica em  $A$  e  $\gamma$  uma curva simples fechada em  $A$ . Suponhamos que  $\gamma$  pode ser continuamente deformada noutra curva  $\tilde{\gamma}$  sem sair da região  $A$  (diz-se que  $\gamma$  é homotópica a  $\tilde{\gamma}$  em  $A$ ). Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

**Prova.** Seja  $\hat{\gamma} = \gamma + \gamma_0 - \tilde{\gamma} - \gamma_0$ , (ver Figura 3.4.)

Sobre e no interior de  $\hat{\gamma}$  o teorema de Cauchy é válido, logo

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\gamma}} f(z) dz = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz. \end{aligned}$$



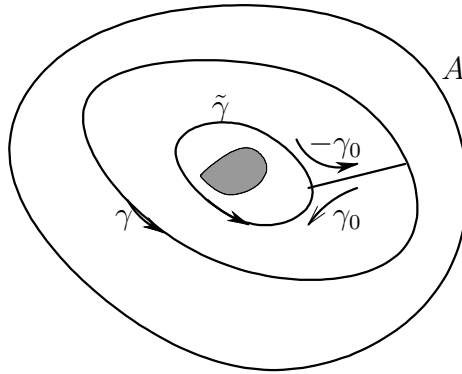


Figura 3.4: Teorema da deformação.

■

**Observação 3.2.8** Este teorema pode ser generalizado para o caso em que existem  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n$ . (ver Figura 3.5).

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz - \dots - \int_{\tilde{\gamma}_n} f(z) dz = 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz + \dots + \int_{\tilde{\gamma}_n} f(z) dz. \end{aligned}$$

### 3.3 Fórmula integral de Cauchy

**Teorema 3.3.1 (fórmula integral de Cauchy)** *Seja  $f$  analítica sobre e no interior de um caminho fechado  $\gamma$ . Se  $z_0$  é um ponto no interior de  $\gamma$ , então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.1)$$

**Prova.** Usando o teorema de Cauchy-Goursat e o teorema da deformação, temos, (ver Fig. 3.6).

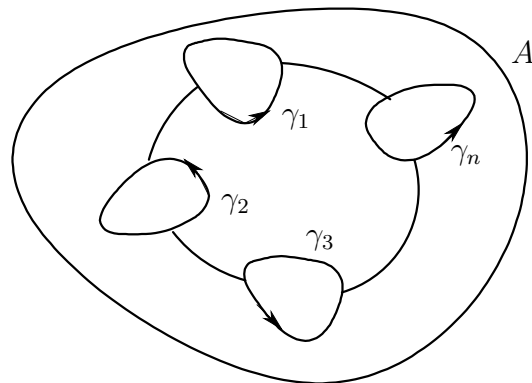
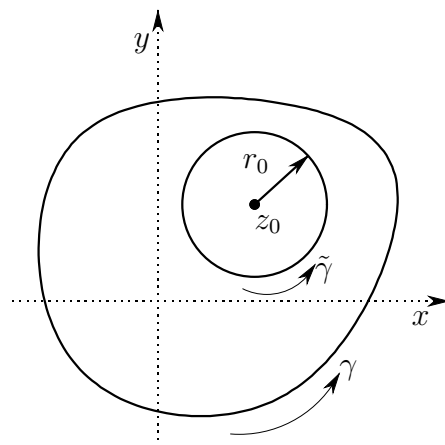


Figura 3.5: Teorema da deformação generalizado.

Figura 3.6: Curva usada na prova da fórmula integral de Cauchy.



$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\
\Leftrightarrow & \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\
\Leftrightarrow & \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) 2\pi i + \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \tag{3.2}
\end{aligned}$$

dado que  $f$  é contínua, i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

Tomemos  $r_0 \equiv \delta$ , (ver Fig. 3.6). Tem-se

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| & \leq \int_{\tilde{\gamma}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| \\
& \leq \frac{\epsilon}{\delta} (2\pi\delta) = 2\pi\epsilon
\end{aligned}$$

Então, o valor absoluto do integral pode se tornar tão pequeno quanto se queira, para isso, toma-se  $r_0$  cada vez mais pequeno, como as outras duas partes de (3.2) não dependem de  $r_0$ , terá de ser a última também independente de  $r_0$ , isto é, tem de ser zero. Assim

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) 2\pi i \\
\Leftrightarrow & f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.
\end{aligned}$$

■

**Observação 3.3.2** A fórmula diz-nos que os valores da função  $f$  são determinados pelos valores que a função toma sobre a fronteira.

**Exemplo 3.3.3** 1. Calcular o integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz,$$

onde  $\gamma$  é a circunferência unitária.

2.  $\int_{\gamma} \frac{e^z - z}{z-2} dz$  com  $\gamma$  a circunferência unitária;
3.  $\int_{\gamma} \frac{e^z - z}{z-2} dz$  com  $\gamma$  a circunferência com centro na origem e raio 3.

**Resolução 1.** Tomando  $f(z) = e^z$  que é inteira e  $z_0 = 0$ , pela fórmula integral de Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i.$$

2. Dá zero pelo teorema de Cauchy-Goursat.
3. Seja  $f(z) = e^z - z, z_0 = 2$ . Então

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - z}{z-2} dz = 2\pi i (e^2 - 2).$$

■

**Teorema 3.3.4 (F. I. Cauchy para derivadas)** *Seja  $f$  uma função analítica num domínio  $A$ . Então existem todas as derivadas de  $f$  em  $A$ , além disso para  $z_0 \in A$  e para qualquer caminho fechado contido em  $A$  tal que  $z_0 \notin \gamma([a, b])$  tem-se*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Prova.** O resultado é verdadeiro para  $n = 0$ , por ser a fórmula integral de Cauchy.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

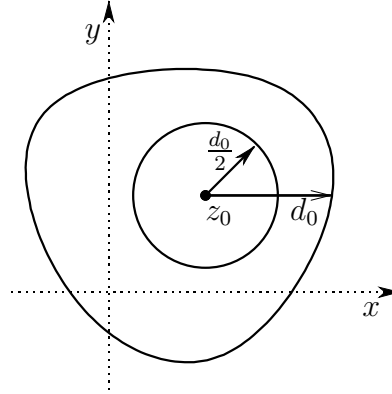
Para calcular  $f'(z_0)$  procedemos do seguinte modo

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)}{\Delta z_0} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z_0} \int_{\gamma} \left( \frac{1}{z - z_0 - \Delta z_0} - \frac{1}{z - z_0} \right) f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z_0)} dz. \end{aligned}$$

Vejamos que quando  $\Delta z_0 \rightarrow 0$  temos

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z_0)} dz \longrightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Figura 3.7: Contorno usado para a fórmula integral de Cauchy para derivadas.



e

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z_0)} dz - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \\ &= \Delta z_0 \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z_0)} dz. \end{aligned}$$

Seja  $M : |f(z)| \leq M$ ,  $L = l(\gamma)$ ,  $d_0 = d(z_0, \gamma)$ . ver Fig.3.7.

Como  $\forall z \in \gamma$ ,  $|\Delta z_0| > d_0$ , então

$$\left| \Delta z_0 \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z_0)} dz \right| \leq \frac{|\Delta z_0| ML}{d_0^2(d_0 - |\Delta z_0|)} \longrightarrow 0, \quad \Delta z_0 \rightarrow 0.$$

O resultado obtém-se por indução. ■

**Exemplo 3.3.5** Calcule o integral

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz,$$

onde  $\gamma = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Resolução** Usando a fórmula integral de Cauchy para derivadas com  $k = 1$  e  $z_0 = 0$  temos

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \sin'(0) = 2\pi i.$$

■

**Teorema 3.3.6 (de Morera)** *Se  $f$  é contínua num domínio simplesmente conexo  $A$  e se, para qualquer caminho fechado  $\gamma$  em  $A$ ,*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

*então  $f$  é analítica em  $A$ .*

**Prova.** Como o domínio é **simplesmente conexo** (além de ser conexo não tem buracos), prova-se que existe primitiva,  $F$ , que é analítica, por  $F' = f$  (cont.), pela fórmula integral de Cauchy  $\exists F'' = f'$ ,  $\exists F''' = f''$ ,  $\dots$ . Assim  $f$  é analítica. ■

**Teorema 3.3.7 (Desigualdade de Cauchy)** *Seja  $f$  analítica em  $A$  e seja  $\gamma$  a circunferência de raio  $R$  centrada em  $z_0 \in A$ . Suponhamos que  $|f(z)| \leq M, \forall z \in A$ . Então*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!M}{R^k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

**Prova.** Pela fórmula integral de Cauchy para derivadas

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z_0) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \\ \Rightarrow |f^{(k)}(z_0)| &= \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{k+1}} |dz| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}} 2\pi R \\ &= \frac{k!M}{R^k}, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.3.8 (de Liouville)** *Se  $f$  é inteira e limitada, então  $f$  é constante.*

**Prova.** Pela desigualdade de Cauchy  $\forall z_0 \in D_f$  temos

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \longrightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

como  $f'(z_0)$  é um número fixo que não depende de  $R$  segue-se que  $f'(z_0) = 0$ ,  $\forall z_0 \in D_f \Rightarrow f$  é constante. ■

**Exemplo 3.3.9** Seja  $f$  inteira e  $|f(z)| \geq 1, \forall z \in \mathbb{C}$ . Prove que  $f$  é constante em  $\mathbb{C}$ .

**Resolução** Temos que  $|\frac{1}{f(z)}| \leq 1$ , i.e.,  $\frac{1}{f}$  é limitada, então pelo Teorema 3.3.8  $f$  é constante. ■

### 3.4 Módulo máximo de funções analíticas

Seja  $\gamma = \{z : |z - z_0| = r_0\}$ . Se  $f$  é analítica sobre e no interior de  $\gamma$  então pela fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ \Rightarrow |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi r_0} \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \\ &= \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| r_0 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| d\theta \equiv K. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$K$  é chamado o valor médio de  $|f|$  sobre  $\gamma$ . Diz-nos também que o valor de  $|f|$  no centro não excede o valor médio.

Seja  $M_0$  o máximo de  $|f|$  em  $\{z : |z - z_0| \leq r_0\}$ . Portanto

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq M_0 \text{ e } |f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| \leq M_0 \\ \Rightarrow K &\leq M_0 \end{aligned}$$

Se  $f$  for tal que  $|f(z_0)| = M_0$ , então por (3.3)  $M_0 \leq K$ . Logo

$$M_0 = K.$$

Suponhamos que  $|f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| < M_0$  para algum valor de  $\theta$ , então, como  $|f|$  é uma função contínua de  $\theta$ , existiria um intervalo onde a função teria valores menores que  $M_0$ , e o valor médio seria inferior a  $M_0$ . Assim sobre  $\gamma$  a função  $|f|$  é sempre igual a  $M_0$ .

Considerando agora

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})| d\theta, \quad r_1 < r_0$$

Do mesmo modo tem-se que

$$|f(z)| \leq M_0, \forall z \in \gamma_1$$

e como antes

$$K_1 = M_0 \Rightarrow |f(z)| = M_0, \forall z \in \gamma_1$$

Assim  $|f(z)| = M_0, \forall z \in \{z : |z - z_0| \leq r_0\}$ , i.e., sempre que  $|f(z_0)| = M_0$ , tem-se  $|f|$  constante o que implica  $f$  constante. Assim temos o seguinte

**Teorema 3.4.1 (Princípio módulo máximo)** *Seja  $A$  um domínio limitado e*

$$f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{C}$$

*analítica em  $A$  e contínua em  $\bar{A}$ . Seja  $M$  o máximo de  $|f(z)|$  em  $\partial(A)$ , i.e.,  $M \geq |f(z)|, \forall z \in \partial(A)$ . Então*

1.  $|f(z)| \leq M, \forall z \in A$ .
2. Se  $|f(z)| = M$  para algum  $z \in A$ , então  $f$  é constante em  $A$ .

**Exemplo 3.4.2** Encontre o máximo de  $|e^z|$  em  $|z| \leq 1$ .

**Resolução**  $|e^z| = e^x$ , como  $x \in [-1, 1]$ , então o máximo ocorre em  $x = 1$  e vale  $e$ . ■

**Teorema 3.4.3 (Fundamental da álgebra)** *Consideremos números complexos  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, a_n \neq 0$ . Seja  $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Então existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P_n(z_0) = 0$ .*



**Prova.** Suponhamos que  $P_n(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ . Então

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$$

é inteira e  $f(z)$  não é constante por  $a_n \neq 0, n \geq 1$ . Se provarmos que  $f$  é limitada, então pelo teorema de Liouville concluímos que  $f$  é constante o que é absurdo. Mostremos que  $f(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ , i.e.,

$$\forall M > 0, \exists K > 0 : |z| > K \Rightarrow |P_n(z)| > M$$

Tem-se que

$$|P_n(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_0| - |a_1||z| - \dots - |a_{n-1}||z|^{n-1}$$

pondo

$$a_n z^n = P_n(z) - a_0 - a_1 z - \dots - a_{n-1} z^{n-1}$$

e aplicando a desigualdade triangular.

Seja  $a = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|$ . Se  $|z| > 1$ , então

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &\geq |z|^{n-1} \left( |a_n||z| - \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} - \dots - \frac{|a_{n-1}|}{1} \right) \\ &\geq |z|^{n-1} \left( |a_n||z| - \frac{|a_0|}{1} - \frac{|a_1|}{1} - \dots - \frac{|a_{n-1}|}{1} \right) \\ &\geq |z|^{n-1} (|a_n||z| - a). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Seja

$$K = \max \left( 1, \frac{M+a}{|a_n|} \right).$$

Se  $K = 1, |z| > 1$

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &\geq |z|^{n-1} (|a_n||z| - a) \\ &\geq (|a_n||z| - a) \\ &\geq \left( |a_n| \frac{M+a}{|a_n|} - a \right) \\ &= M. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |P_n(z)| \geq M.$$

Se  $K = \frac{M+a}{|a_n|}$ ,  $|z| > \frac{M+a}{|a_n|}$

$$|P_n(z)| \geq \left( |a_n| \frac{M+a}{|a_n|} - a \right) = M$$

$$|P_n(z)| \geq M$$

Assim se  $|z| > K$ , tem-se que

$$\left| \frac{1}{P_n(z)} \right| \leq \frac{1}{M}$$

mas no conjunto  $|z| \leq K$ ,  $\left| \frac{1}{P_n(z)} \right|$  é limitada, digamos por  $L$ . Portanto

$$\left| \frac{1}{P_n(z)} \right| \leq \max \left( \frac{1}{M}, L \right)$$

em  $\mathbb{C}$ , i.e.,

$$|f(z)| \leq \max \left( \frac{1}{M}, L \right), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

ou seja  $f(z)$  é limitada em  $\mathbb{C}$ , como era uma função inteira, concluímos pelo teorema de Liouville que  $f$  é constante o que é um absurdo, pois vimos que  $f$  não era constante pelo facto de  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ . O absurdo veio do facto de supormos que  $P_n(z)$  não tinha nenhuma raiz em  $\mathbb{C}$ .



### Exercícios

**Exercício 3.1** Se  $\gamma$  a fronteira do quadrado com vértices nos pontos  $z = 0, z = 1, z = 1 + i$  e  $z = i$ . Mostre que

1.  $\int_{\gamma} (3z + 1) dz = 0.$
2.  $\int_{\gamma} \pi \exp(\pi \bar{z}) dz = 4(e^{\pi} - 1).$

**Exercício 3.2** Calcule os seguintes integrais.

1.  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}.$
2.  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|}.$
3.  $\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}.$
4.  $\int_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right|.$

**Exercício 3.3** Sendo  $\gamma$  o arco de circunferência  $|z| = 2$  que se situa no primeiro quadrante mostre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

**Exercício 3.4** Sendo  $\gamma$  o caminho do triângulo com vértices nos pontos  $z = 0, z = -4$  e  $z = 3i$ , mostre que

$$\left| \int_{\gamma} (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60.$$

**Exercício 3.5** Calcule o seguinte integral

$$\int_{\gamma} z^2 dz,$$

onde  $\gamma$  é a curva dada por  $\gamma(t) = e^{it} \sin^3 t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Exercício 3.6** Prove que  $\int_0^\pi \exp(\cos \theta) \cos(\sin \theta) d\theta = \pi$  considerando

$$\int_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z} dz.$$

**Exercício 3.7** Verifique se o teorema de Cauchy é válido para a parte real e parte imaginária de  $f$ , onde  $f$  está nas condições de aplicação do teorema de Cauchy. Se não for verdade, dê um contra exemplo.

**Exercício 3.8** Calcule

$$\int_{\gamma} \sqrt{z^2 - 1} dz,$$

onde  $\gamma$  é a circunferência com centro em 0 e raio  $\frac{1}{2}$ .

**Exercício 3.9** Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz,$$

onde  $\gamma$  é o quadrado com vértices sucessivos em  $1+i$ ,  $-1+i$ ,  $-1-i$ ,  $1-i$ , percorrido no sentido positivo.

**Exercício 3.10** Seja  $f$  analítica sobre e no interior de  $\gamma$ . Prove que se  $z, w, \nu$  estão no interior de  $\gamma$ , então

$$\frac{f(w) - f(\nu)}{w - \nu} - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{1}{(\tau - w)(\tau - \nu)} - \frac{1}{(\tau - z)^2} \right) f(\tau) d\tau.$$

**Exercício 3.11** Se  $\gamma$  é um caminho fechado orientado no sentido positivo e se

$$g(z_0) = \int_{\gamma} \frac{z^3 + 2z}{(z - z_0)^3} dz$$

mostre que  $g(z_0) = 6z_0\pi i$  quando  $z_0$  está no interior de  $\gamma$  e  $g(z_0) = 0$  quando  $z_0$  está no exterior de  $\gamma$ .

**Exercício 3.12** Calcule os seguintes integrais.

1.  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ , onde  $\gamma(t) = \cos t + 2i \sin t, 0 \leq t < 2\pi$ .
2.  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ , onde  $\gamma$  é igual à de a).
3.  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$ , onde  $\gamma(t) = 2 + e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$ .
4.  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz$ , onde  $\gamma = \{z : |z - 1| = 1\}$ .

**Exercício 3.13** Seja  $f$  analítica numa região  $A$  e seja  $\gamma$  uma curva fechada em  $A$ . Mostre que para qualquer  $z_0 \in A \setminus \gamma$

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Pense numa generalização deste resultado.

**Exercício 3.14** Utilize o princípio do módulo máximo para encontrar o máximo das seguintes funções.

1.  $|\sin z|$  em  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .
2.  $|\cos z|$  em  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

**Exercício 3.15** Seja  $f$  analítica numa região  $A$  e  $f \neq 0$ . Seja  $\gamma$  uma curva simples fechada seccionalmente suave. Mostre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

## Capítulo 4

# Representação em Série de Funções Analíticas

Uma alternativa à teoria das funções analíticas é definir uma função como sendo analítica se localmente é representada por uma em série de potências convergente. Neste capítulo vamos rever alguns resultados relativamente à convergência de séries numéricas, os quais vamos enunciar sem demonstração, pois os mesmos, pertencem às cadeiras de análise. Os resultados mais importantes deste capítulo estão contidos nas Secções 4.2 e 4.3. Com estes resultados podemos desenvolver qualquer função em série (de Taylor ou de Laurent!) em domínios apropriados. É de notar que os desenvolvimentos de Laurent são mais gerais do que os de Taylor, sendo que, se a função é analítica numa determinada região, então eles coincidem. Uma aplicação directa do desenvolvimento em série de Laurent é o estudo das singularidades das funções. No próximo capítulo vamos estudar o teorema dos resíduos o qual faz use das séries de Lauernt.

### 4.1 Convergência de sucessões e séries

**Definição 4.1.1** 1. Uma sucessão de números complexos,  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , diz-se convergente para  $z_0$  sse

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow |z_n - z_0| < \epsilon.$$

A convergência de  $z_n$ , para  $z_0$  nota-se por  $z_n \longrightarrow z_0$ .

2.  $(z_n)$  diz-se de Cauchy sse

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon.$$

3. Uma série infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k$$

diz-se convergente para  $Z$  e representa-se por

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = Z$$

sse a sucessão das somas parciais, definidas por

$$Z_n = \sum_{k=0}^n z_k$$

converge para  $Z$ .

**Teorema 4.1.2 (Critérios de convergência)** 1. Consideremos a série geométrica  $\sum_{n \geq 0} r^n$ . Então se  $0 < |r| < 1$  a série converge e temos

$$\sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Se  $|r| \geq 1$  a série diverge.

2. Dadas as séries

$$\sum_{n \geq 0} a_n, \quad \sum_{n \geq 0} b_n$$

com  $0 \leq |a_n| \leq |b_n|$ ,  $\forall n$ , se  $\sum_{n \geq 0} b_n$  converge,  $\sum_{n \geq 0} a_n$  também converge. Se a série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  diverge a série  $\sum_{n \geq 0} b_n$  também diverge.

3. Critério da razão:

(a) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$  a série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  é absolutamente convergente;

(b) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$  a série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  é divergente;

(c) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  nada se pode concluir.

4. Critério da raiz:

(a) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  a série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge;

(b) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  a série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  diverge;

(c) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  nada se pode concluir.

**Prova.** Ver por exemplo [Rud76]. ■

**Definição 4.1.3** Seja  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma sucessão de funções definidas em  $A$ .

1.  $f_n \longrightarrow f$  pontualmente em  $A$  sse  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  para cada  $z \in A$ , i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \forall z \in A \exists p : n \geq p \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

2.  $f_n \longrightarrow f$  uniformemente em  $A$  sse

$$\forall \epsilon > 0 \exists p : n \geq p \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in A$$

3. A série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge pontualmente para  $f$  (resp. uniformemente) sse a correspondente sucessão das somas parciais converge pontualmente (resp. uniformemente) para  $f$ .

**Teorema 4.1.4 (Critério de Cauchy)** 1.  $f_n \longrightarrow f$  uniformemente em  $A$  sse

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \epsilon, \forall z \in A, \forall p \in \mathbb{N}.$$

2.  $\sum_{n \geq 0} f_n(z)$  converge uniformemente em  $A$  sse

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \epsilon, \forall z \in A, p = 1, 2, \dots$$



**Prova.** 1. ( $\Leftarrow$ ) Por hipótese tem-se que  $f_n(z)$  é uma sucessão de Cauchy, como o espaço é completo  $f_n(z)$  converge. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \forall z \in A.$$

Seja  $\epsilon > 0, \forall z \in A \exists p :$

$$|f_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}, n = 1, 2, \dots$$

Seja  $N$  tal que se  $n \geq N$ , então

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Então

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(z) - f(z)| &= |f_n(z) - f_{n+p}(z) + f_{n+p}(z) - f(z)| \\ &\leq |f_n(z) - f_{n+p}(z)| + |f_{n+p}(z) - f(z)| \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Note-se que, embora  $p$  depende  $z$ ,  $N$  não depende. Assim, provamos que

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in A$$

( $\Rightarrow$ )

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall z \in A.$$

Como  $n + p \geq N$

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_{n+p}(z)| &= |f_n(z) - f(z) + f(z) - f_{n+p}(z)| \\ &\leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_{n+p}(z)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

2. Aplicando 1. às somas parciais. ■

**Teorema 4.1.5 (Teste M de Weierstrass)** *Seja  $f_n$  uma sucessão de funções definidas em  $A \subset \mathbb{C}$ . Suponhamos que existe uma sucessão real  $M_n \geq 0$  tal que*

1.  $|f_n(z)| \leq M_n, \forall z \in A$ .
2. A série  $\sum_{n \geq 0} M_n$  é convergente. Então  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge absolutamente e uniformemente em  $A$ .

**Prova.** Como  $\sum_{n \geq 0} M_n$  é convergente,  $\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon, p = 1, 2, \dots$ . Assim para  $n \geq N$  temos

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon,$$

pelo critério de Cauchy, segue o resultado do teorema. ■

**Exemplo 4.1.6** Mostre que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge uniformemente em

$$A_r = \{z : |z| < r, 0 \leq r < 1\}$$

**Resolução** Seja  $g_n(z) = \frac{z^n}{n}$ . Temos

$$|g_n(z)| = \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{r^n}{n} < r^n, \forall z \in A_r.$$

Seja  $M_n = r^n$ . Temos que

$$\sum_{n \geq 1} M_n = \sum_{n \geq 1} r^n$$

converge, pois  $0 \leq r < 1$ . Então pelo critério de Weierstrass

$$\sum_{n \geq 1} g_n(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$$

converge uniformemente em  $A_r$ . ■

**Teorema 4.1.7 (de Weierstrass)** Seja  $A \subset \mathbb{C}$  e  $f_n$  uma sucessão de funções analíticas em  $A$ .

1. Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em todo o disco fechado contido em  $A$ , então  $f$  é analítica em  $A$ . Tem-se ainda que  $f'_n \rightarrow f'$  pontualmente em  $A$  e uniformemente em todo o disco contido em  $A$ .
2. Se  $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n(z)$  converge uniformemente em todo o disco fechado contido em  $A$ , então  $f$  é analítica em  $A$  e ainda  $f'(z) = \sum_{n \geq 1} f'_n(z)$  pontualmente em  $A$  e uniformemente em todo o disco fechado contido em  $A$ .

**Prova.** Ver por exemplo [Rud76]. ■

**Exemplo 4.1.8** Mostre que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

é analítica em  $A = \{z : |z| < 1\}$ . Escreva a série para  $f'(z)$ .

**Resolução** Seja  $f_n(z) = \frac{z^n}{n^2}$ ,  $f_n(z)$  analítica em  $A$ .

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n^2} < \frac{1}{n^2} \equiv M_n.$$

Temos

$$\sum_{n \geq 1} M_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$$

logo  $\sum_{n \geq 1} f_n(z)$  converge uniformemente em  $A$ . Logo a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$$

converge uniformemente nos discos fechados contidos em  $A$ . Assim

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$$

é analítica em  $A$  pelo teorema 4.1.7 e ainda

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{n}$$

■

**Proposição 4.1.9** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{C}$  uma curva em  $A$  e seja  $f_n$  uma sucessão de funções contínuas definidas em  $\gamma([a, b])$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $\gamma([a, b])$ . Então  $f$  é contínua e*

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \longrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$$

Além disso se  $\sum_{n \geq 0} f_n(z)$  converge uniformemente em  $\gamma$ , então

$$\int_{\gamma} \sum_{n \geq 0} f_n(z) dz \longrightarrow \sum_{n \geq 0} \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

**Prova.**  $f$  é contínua, por ser o limite uniforme de funções contínuas. Por outro lado,  $f_n \rightarrow f$  unif. em  $\gamma([a, b])$ , logo

$$\forall \epsilon > 0 \exists p : n \geq p \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in \gamma$$

temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} [f_n(z) - f(z)] dz \right| \\ &\leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| |dz| < \epsilon l(\gamma) \\ \Rightarrow \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz &\longrightarrow 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\gamma} f_n(z) dz &\longrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 4.1.10** Calcule

$$\int_{\gamma} \sum_{n=-1}^{\infty} z^n dz$$

onde  $\gamma = \{z : |z| = \frac{1}{2}\}$ .

**Resolução** Provemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

é uniformemente convergente em  $\gamma$ . Seja  $B$  um disco fechado contido em  $A = \{z : |z| < 1\}$ , tal que a distância de  $B$  à circunferência de raio 1 seja  $\delta$ . Temos

$$\forall z \in B, |z|^n \leq (1 - \delta)^n =: M_n.$$

Por outro lado

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \delta)^n$$

como  $1 - \delta < 1$  estamos na presença de uma série geométrica convergente. Pelo critério de Weierstrass

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

é uniformemente convergente em qualquer disco fechado contido em  $A$  em particular em  $\gamma$ , logo  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  é analítica em  $\gamma$ . Assim

$$\int_{\gamma} \sum_{n=-1}^{\infty} z^n dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} z^n dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz + 0 = 2\pi i.$$

■

## 4.2 Séries de potências e teorema de Taylor

Vamos estudar um tipo especial de séries, as séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n, z_0 \in \mathbb{C}.$$

**Lema 4.2.1 (Abel-Weierstrass)** *Seja  $r_0 \geq 0$  e  $a_n$  tal que  $|a_n| r_0^n \leq K$  para certo  $K, \forall n$ . Então para  $r < r_0$ ,*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

*converge uniformemente e absolutamente no disco  $A_r = \{z : |z - z_0| \leq r\}$ .*

**Prova.** Dado que

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n = |a_n| r_0^n \frac{r^n}{r_0^n} \leq K \left( \frac{r}{r_0} \right)^n,$$

então definindo  $M_n := K\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ , pelo critério M de Weierstrass, e atendendo a que

$$\sum_{n \geq 0} K \left( \frac{r}{r_0} \right)^n < \infty$$

pois  $\frac{r}{r_0} < 1$ , concluímos que  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  converge absolutamente e uniformemente em  $A_r$ . ■

**Teorema 4.2.2 (Conv. Séries Potências)** *Seja*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad (4.1)$$

*uma série de potências. Existe um único  $R > 0$  chamado raio de convergência da série tal que se  $|z - z_0| < R$  a série converge e se  $|z - z_0| > R$  a série diverge. Para  $|z - z_0| = R$  nada se pode concluir. Além disso a convergência é uniforme nos discos fechados contidos no círculo de convergência.*

**Prova.** Seja

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < \infty \right\}$$

e  $r_0 < R$ . Por definição de  $R$

$$\exists r_1 > 0 : r_0 < r_1 \leq R$$

tal que

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r_1^n < \infty.$$

Assim, temos

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r_0^n < \infty$$

pelo critério de comparação. Como  $|a_n| r_0^n \rightarrow 0$ , são limitados, o Lema 4.2.1 diz-nos que

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

converge absolutamente e uniformemente em  $A_r$ ,  $r < r_0$ . Assim se  $z$  é tal que  $|z - z_0| < R$  é interior a algum  $A_r$  e visto que podemos sempre escolher  $r_0$  tal

que  $r < r_0 < R$ , temos a convergência da série em  $z$ . No anel  $|z_1 - z_0| > R$ , suponhamos que

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z_1 - z_0)^n < \infty.$$

Como

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| \longrightarrow 0$$

pelo Lema 4.2.1 se  $R < r < |z_1 - z_0|$ , então

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z_1 - z_0)^n$$

converge absolutamente se  $z_1 \in A_r$ . Portanto

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < \infty$$

Mas por definição de  $R$  teríamos  $R < R$ , absurdo. Logo no anel  $|z - z_0| > R$  não há convergência da série (4.1). ■

**Corolário 4.2.3** *Uma série de potências é uma função analítica no interior do seu disco de convergência.*

**Prova.** Combinando o Teorema 4.2.2 e o Teorema 4.1.7. ■

**Teorema 4.2.4 (Derivadas de séries potências)** *Seja*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

*uma função analítica em  $\{z : |z - z_0| < R\}$ . Então*

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

*e esta série tem o mesmo raio de convergência  $R$ . Além disso os coeficientes  $a_n$  são dados por*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

**Prova.** 2ª Parte.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots \Rightarrow a_0 = f(z_0) \\
 f'(z) &= a_1 + 2a_2(z - z_0) + \dots + na_n(z - z_0)^{n-1} + \dots \Rightarrow a_1 = \frac{f'(z_0)}{1!} \\
 &\vdots \\
 f^{(k)}(z) &= k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 a_k + \dots + n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k) a_n (z - z_0)^{n-k} + \dots \\
 &\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.
 \end{aligned}$$

■

**Proposição 4.2.5** Considere a série de potências

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

1. Se  $\lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  existir então  $R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ .
2. Se  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ , então  $R = \frac{1}{\rho}$ , com a convenção  $\frac{1}{0} = \infty$  e  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

**Prova.** Ver por exemplo [Rud76].

■

**Exemplo 4.2.6** Determine o raio de convergência das seguintes séries.

1.  $\sum_{n \geq 0} z^n$ .
2.  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ .
3.  $\sum_{n \geq 0} n! z^n$ .

**Resolução** 1.  $R = 1$  por 1. da Proposição anterior.

2.  $R = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$ .

3. Dado que  $R = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$ , a série é convergente para  $|z| = 0$ , i.e., só para  $z = 0$ .

■



**Teorema 4.2.7 (de Taylor)** *Seja  $f$  analítica em  $A \subset \mathbb{C}$ . Seja  $z_0 \in A$  e  $A_r = \{z : |z - z_0| < r\} \subset A$ . Então para  $\forall z \in A_r$*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

*A esta série chama-se série de Taylor de  $f$  em torno de  $z_0$ .*

**Prova.** Ver por exemplo [HM87]. ■

1. Uma função analítica admite derivadas de todas as ordens ou equivalentemente, pode ser representada por uma série de Taylor.
2. Quando  $z_0 = 0$ , a série de Taylor diz-se de Maclaurin.

**Exemplo 4.2.8** As seguintes funções têm desenvolvimentos válidos em  $\mathbb{C}$ .

1.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

2.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

3.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

4. Usando o ramo principal do logaritmo no conjunto definido por  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ , temos

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

5. A série geométrica tem desenvolvimento válido em  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} z^n. \quad (4.2)$$

**Exemplo 4.2.9** Calcule a série de Taylor em torno de  $z_o = 0$  da função

$$f(z) = \frac{1}{4 + z^2}$$

e calcule o respectivo raio de convergência.

**Resolução** Temos

$$\frac{1}{4 + z^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{-z^2}{4}}.$$

Seja  $w = -\frac{z^2}{4}$ , então em  $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$  temos

$$\frac{1}{4} \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} w^n$$

válido em  $|w| < 1$ , por (4.2). Assim em  $|\frac{z^2}{4}| < 1$  temos

$$\frac{1}{4 + z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^n$$

ou seja no conjunto  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$  temos

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}.$$

**Observação 4.2.10** Note que  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$  é o maior disco em torno de 0 onde  $f$  é analítica, visto que  $\pm 2i$  são singularidades de  $f$ .

■

**Exemplo 4.2.11** Calcule os primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor da função

$$f(z) = \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

em torno de  $z_o = 0$ , calculando o raio de convergência.

**Resolução** Suponhamos que

$$\frac{1}{\cos z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 = \cos z (a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \\
&\Leftrightarrow 1 = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) (a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \\
&\Leftrightarrow 1 = a_o + a_1 z + \left(a_2 - \frac{a_o}{2!}\right) z^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2!}\right) z^3 + \left(a_4 - \frac{a_2}{2!} + \frac{a_o}{4!}\right) z^4 + \dots \\
&\Leftrightarrow a_o = 1 \wedge a_1 = 0 \wedge a_2 = \frac{1}{2} \wedge a_3 = 0 \wedge a_4 = \frac{5}{24} \wedge \dots
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \dots$$

Uma vez que  $\frac{1}{\cos z}$  não é analítica em  $z = \pm \frac{\pi}{2}$ , o raio de convergência é  $\frac{\pi}{2}$ , e é o maior raio de convergência em torno de zero onde  $f$  é analítica. ■

**Exemplo 4.2.12 (Aplic. às eq. diferenciais)** Encontre uma função  $f(z)$  tal que  $f(0) = 0$  e

$$f'(x) = 3f(x) + 2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

**Resolução** Suponhamos que existe uma solução  $f$  que é a restrição ao eixo real de uma função analítica em  $\mathbb{C}$ .

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \Rightarrow f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$$

Assim (4.3) resulta no seguinte:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} &= 3 \sum_{n \geq 0} a_n z^n + 2 \\
\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} a_{n+1} (n+1) z^n &= 3a_o + 2 + 3 \sum_{n \geq 1} a_n z^n \\
\Leftrightarrow (3a_o + 2 - a_1) + \sum_{n \geq 1} [-(n+1) a_{n+1} + 3a_n] z^n &= 0
\end{aligned}$$

por  $f(0) = 0$  tem-se que  $a_o = 0$  e  $3a_o + 2 - a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2$ . Para  $n > 1$  temos

$$-(n+1) a_{n+1} + 3a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3a_n}{n+1}$$

Isto é,

$$a_2 = \frac{3a_1}{2}, a_3 = \frac{3^2 a_1}{3 \cdot 2}, \dots, a_n = \frac{3^{n-1} a_1}{n!} = \frac{2 \cdot 3^n}{3 n!}.$$

Assim

$$f(z) = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{n!} z^n = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 1} \frac{(3z)^n}{n!} = \frac{2}{3} \left[ \sum_{n \geq 0} \frac{(3z)^n}{n!} - 1 \right] \Leftrightarrow$$

$$f(z) = \frac{2}{3} (e^{3z} - 1).$$

■

### 4.3 Séries de Laurent e Classificação de Singularidades

A série de Taylor permite-nos escrever uma série convergente em torno de um ponto  $z_o$  para uma função, sempre que essa função seja analítica numa vizinhança de  $z_o$ . Assim se  $f(z)$  é uma função não analítica em  $z_o$  não se aplica a série de Taylor. Por exemplo, a função

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

em torno de  $z_o = 0$ , pois  $f$  não é analítica em  $z_o = 0$ . Para ultrapassar este problema introduziremos um novo desenvolvimento em série.

**Teorema 4.3.1 (Desenvolvimento de Laurent)** *consideremos o conjunto  $A = \{z : r_1 < |z - z_o| < r_2\}$  com  $r_1 \geq 0$ ,  $r_1 < r_2$ .  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  analítica em  $A$ . Então podemos escrever*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_o)^n}$$

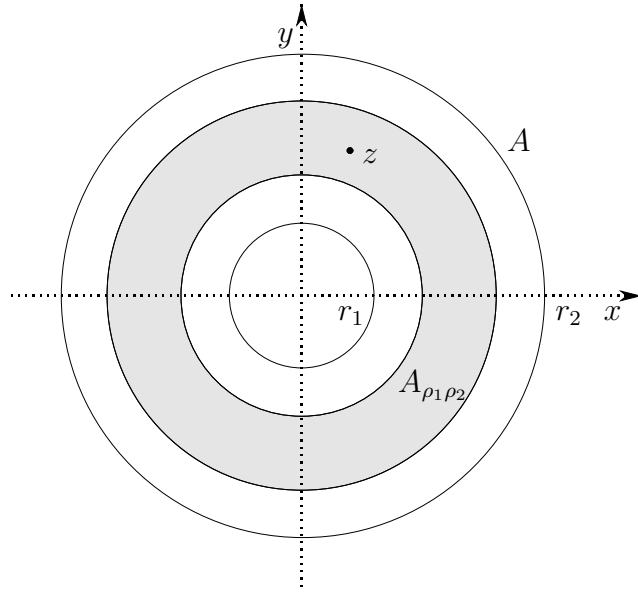
(desenvolvimento de  $f$  em série de Laurent) em que as séries convergem absolutamente em  $A$  e uniformemente em  $A_{\rho_1 \rho_2} = \{z : \rho_1 \leq |z - z_o| \leq \rho_2\}$  com  $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ , (ver Fig. 4.1). Se  $\gamma$  é uma circunferência de centro  $z_o$  e raio  $r$  tal que  $r_1 < r < r_2$ , então os coeficientes das séries são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_o)^{n+1}} d\tau, \quad n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\tau) (\tau - z_o)^{n-1} d\tau, \quad n \geq 1.$$

Este desenvolvimento quando possível é único.

Figura 4.1: Série de Laurent, com  $z_0 = 0$ .

**Prova.** Seja  $z \in A_{\rho_1 \rho_2}$ . Pela fórmula integral de Cauchy (ver pag. 70) temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)} d\tau$$

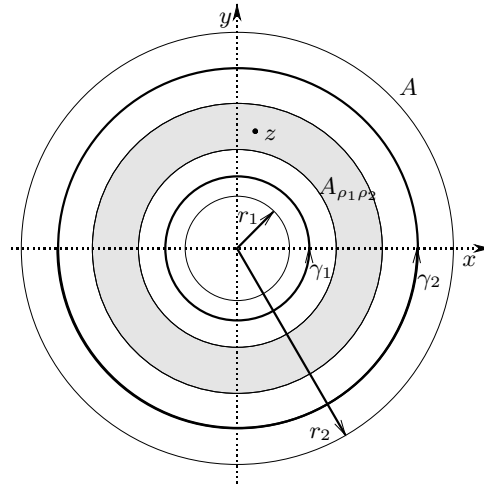
usando o teorema da deformação com  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  como na Fig. 4.2.

1. Para  $z$  no interior de  $\gamma_2$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau - z} &= \frac{1}{\tau - z_0 - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\tau - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\tau - z_0}} \\ &= \frac{1}{\tau - z_0} + \frac{z - z_0}{(\tau - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\tau - z_0)^3} + \dots \end{aligned}$$

visto que  $\left| \frac{z - z_0}{\tau - z_0} \right| < 1$ , converge uniformemente em  $\tau$  sobre  $\gamma_2$  porque a função

$$\frac{1}{\tau - z_0}$$

Figura 4.2: Construção das curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

é analítica. Assim a igualdade

$$\frac{f(\tau)}{\tau - z} = \frac{f(\tau)}{\tau - z_0} + \frac{f(\tau)(z - z_0)}{(\tau - z_0)^2} + \frac{f(\tau)(z - z_0)^2}{(\tau - z_0)^3} + \dots$$

pode ser integrada termo a termo, visto que a convergência é uniforme, i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau &= \sum_{n \geq 0} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau \right] (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

assim a série converge para  $z$  no interior de  $\gamma_2$ , logo converge uniformemente nos discos contidos em  $\gamma_2$  em particular em  $A_{\rho_1 \rho_2}$ .

2. Para  $z$  no exterior de  $\gamma_1$  temos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau - z} &= -\frac{1}{\tau - z_0 - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\tau - z_0}{z - z_0}} \\ &= \frac{1}{z - z_0} + \frac{\tau - z_0}{(z - z_0)^2} + \frac{(\tau - z_0)^2}{(z - z_0)^3} + \dots \end{aligned}$$

visto que  $\left| \frac{\tau - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ , converge uniformemente com respeito a  $\tau$  sobre  $\gamma_1$ . Assim

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau &= \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\tau) (\tau - z)^{n-1} d\tau \right) \frac{1}{(z - z_0)^n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \end{aligned}$$

Esta série converge para  $z$  no exterior de  $\gamma_1$ . Prova-se que a convergência é uniforme no exterior de  $\gamma_1$  usando o lema de Abel-Weierstrass. Assim de 1. e 2. concluímos que a convergência é uniforme em  $A_{\rho_1 \rho_2}$ . Portanto provamos a existência da série de Laurent. Para provar a unicidade, suponhamos que temos o desenvolvimento

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

a qual converge em  $A$  e converge uniformemente nos anéis interiores a  $A$ . Assim

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^{n-k-1} + \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^{n+k+1}}$$

as quais convergem uniformemente sobre  $\gamma \in \text{int}(A)$ . Integrando, termo a termo e tendo em conta

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } m = -1 \\ 0 & \text{se } m \neq -1 \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \\
 = & \sum_{n \geq 0} a_n \int_{\gamma} (z-z_0)^{n-k-1} dz + \sum_{n \geq 1} b_n \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+k+1}} \\
 = & \begin{cases} k \geq 0 : & 2\pi i a_k & \text{com } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \\ k \leq -1 : & 2\pi i b_{-k} & \text{com } b_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) (z-z_0)^{n-1} dz, \quad n \geq 1,
 \end{aligned}$$

isto é, os coeficientes são únicos, logo o teorema está provado. ■

**Exemplo 4.3.2** Desenvolva em série de Laurent a função

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

em torno da origem, indicando a região de validade desse desenvolvimento.

**Resolução**  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{e^z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots
 \end{aligned}$$

válido em  $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ . Onde  $b_2 = 1, b_1 = 1, b_k = 0$  se  $k \geq 3$  e  $a_n = \frac{1}{(n+2)!}$  para  $n \geq 0$ . ■

**Exemplo 4.3.3** Encontre o desenvolvimento de Laurent da função

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

em torno de  $i$ , dizendo em que região é válido.



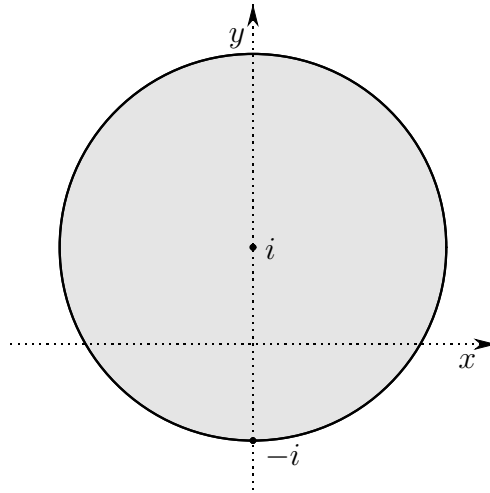


Figura 4.3: Região de convergência de  $\frac{1}{z+i}$ .

**Resolução** Temos

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{1}{2} \frac{1}{z + i}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{z + i} &= \frac{1}{2i + (z - i)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1 + \left(\frac{z-i}{2i}\right)} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} i^{n-1} 2^{-n-1} (z-i)^n, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade verdadeira desde que  $|\frac{z-i}{2i}| < 1$ . Assim o desenvolvimento de Laurent é

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{z - i} + \sum_{n \geq 0} i^{n-1} 2^{-n-2} (z-i)^n$$

válido em  $A = \{z : 0 < |z - i| < 2\}$  (ver Fig. 4.3). Neste caso temos

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_k = 0, \quad k \geq 2, \quad a_n = i^{n-1} 2^{-n-2}, \quad n \geq 0.$$



**Definição 4.3.4** Se  $f$  é analítica em  $A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} : 0 < |z - z_0| < r\}$ , i.e., analítica numa vizinhança privada de  $z_0$ , então  $z_0$  diz-se uma singularidade isolada de  $f$  e temos o seguinte desenvolvimento em série de Laurent, válido em  $A$

$$f(z) = \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

1.  $z_0$  diz-se um pólo de  $f$  se todos os coeficientes  $b_n$  da série de Laurent forem nulos excepto num número finito.
2. Se  $k$  é o maior inteiro tal que  $b_k \neq 0$ ,  $z_0$  diz-se um pólo de ordem  $k$  (finito). Se  $k = 1$  diz-se que se tem um pólo simples.  $b_1$  é o resíduo de  $f$  em  $z_0$ , representa-se por  $\text{Res}(f(z), z_0)$ .
3.  $z_0$  diz-se uma singularidade essencial de  $f$ , se  $b_k \neq 0$ , para uma infinidade de  $b_k$ 's.
4.  $z_0$  diz-se uma singularidade removível (ou evitável) se  $b_k = 0, \forall k$

**Observação 4.3.5** 1. Se  $z_0$  é um polo de ordem  $k$  de  $f$ , então

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

e o termo  $\frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0}$  cham-se parte principal de  $f$  em  $z_0$ .

1. Se  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f$ , então

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

se definirmos  $f(z_0) = a_0$  a função  $f$  torna-se analítica em  $z_0$ . Assim  $z_0$  é uma singularidade removível se podemos estender  $f$  a  $z_0$  de modo a obter uma função analítica em  $z_0$ .

**Exemplo 4.3.6** Verifique que a função

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

tem uma singularidade removível na origem e defina  $f$  na origem de forma a ser analítica.

**Resolução** Temos

$$e^z - 1 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!}.$$

Pelo que

$$\Rightarrow \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{n!}.$$

Assim, se  $z \neq 0$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{n!}$  converge para  $f(z)$  e para  $z = 0$  temos  $f(0) = 1$ . Então definindo

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

$f$  torna-se analítica em  $\mathbb{C}$ , neste caso obtemos o seguinte valor para  $f'(0)$ :

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{e^z - 1}{z} - 1}{z} = \frac{1}{2}.$$

a próxima proposição permite-nos calcular integrais conhecendo os resíduos da função. ■

**Proposição 4.3.7** *Seja  $f$  analítica em  $A$  com singularidade isolada em  $z_0$  e resíduo  $b_1$ . Se  $\gamma$  é uma circunferência centrada em  $z_0$  cujo interior, excepto  $z_0$ , está em  $A$ , então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i b_1.$$

**Prova.** No desenvolvimento em série de Laurent, temos

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) (z - z_0)^{n-1} dz, \forall n \geq 1.$$

Assim,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \Leftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i b_1.$$

■

**Exemplo 4.3.8** Calcule

$$\int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz$$

onde  $\gamma = \{z : |z| = 1\}$ .

**Resolução** A função  $e^{\frac{1}{z}}$  pode ser desenvolvida em  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$  como

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Logo  $b_1 = 1$ , e pela proposição anterior temos

$$\int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i.$$

■

**Proposição 4.3.9** *Seja  $f$  uma função analítica em  $A$  com uma singularidade isolada em  $z_0$ .*

1.  $z_0$  é uma singularidade removível sse verifica qualquer das condições equivalentes.
  - (a)  $f$  é limitada numa vizinhança privada de  $z_0$ .
  - (b)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe.
  - (c)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ .
2.  $z_0$  é um polo simples sse existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \text{Res}(f, z_0) = b_1 \neq 0$ .
3.  $z_0$  é um polo de ordem menor ou igual a  $k$  (ou possivelmente uma singularidade removível) sse se verifica qualquer uma das condições equivalentes.
  - (a)  $\exists M > 0, k \geq 1 : |f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^k}, \forall z \in \mathcal{V}_{\epsilon}^*(z_0)$  (viz. privada de  $z_0$ ).
  - (b)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$ .
  - (c)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$  existe.
4.  $z_0$  é um polo de ordem  $k \geq 1$  sse  $\exists \phi$  função analítica numa vizinhança de  $z_0$   $\mathcal{V} \setminus \{z_0\} \subset A$ , tal que  $\phi(z_0) = b_k \neq 0$  e

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}, \quad z \in \mathcal{V}, \quad z \neq z_0.$$

**Prova.** 1. Como  $z_0$  é uma singularidade removível, então podemos representar  $f(z)$  por

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

válido em  $\mathcal{V}_\epsilon^*(z_0)$ . A série representa uma função analítica em  $\mathcal{V}_\epsilon(z_0)$ . Assim

$$|f(z)| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| \epsilon^n < \infty$$

logo  $f$  é limitada em  $\mathcal{V}_\epsilon(z_0)$ . Portanto a condição 1.(a) está verificada. Temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$$

o que implica 1.(b). Verifica-se ainda que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$$

o que prova 1.(c).

Mostremos que 1.(c) implica que  $z_0$  é uma singularidade removível, i.e., devemos provar que cada  $b_k$  da série de Laurent é zero.

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\tau) (\tau - z_0)^{k-1} d\tau$$

onde  $\gamma$  é tal que  $f$  é analítica sobre  $\gamma$  e  $[\text{int} \gamma([a, b])] \setminus \{z_0\} \subset A$ . Seja  $\epsilon > 0$  fixo. Por 1.(c) podemos escolher  $0 < r < 1$  tal que sobre  $\gamma_r$

$$|f(\tau)| < \frac{\epsilon}{|\tau - z_0|} = \frac{\epsilon}{r}.$$

Então

$$\begin{aligned} |b_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} |f(\tau)| |\tau - z_0|^{k-1} |d\tau| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r} r^{k-1} \int_{\gamma_r} |d\tau| \\ &= \epsilon r^{k-1} \\ &\leq \epsilon. \\ &\Leftrightarrow |b_k| \leq \epsilon, \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário, vem que  $b_k = 0$ ,  $\forall k \geq 1$ , isto prova que  $z_0$  é uma singularidade removível.

3. Basta aplicar 1. à função  $(z - z_0)^k f(z)$  que tem uma singularidade removível. Como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

existe, temos 3.(c). Mas por 1.  $\exists \epsilon > 0$  :

$$|f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - z_0|^k}, \quad \forall z \in \mathcal{V}_\epsilon^*(z_0)$$

pelo que 3.(a) está provado com  $M \equiv \epsilon$ . Tem-se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ (z - z_0)^k f(z) \right] = 0$$

logo 3.(b) também se verifica. Provemos que

$$b_m = 0, \quad \forall m > k$$

Como  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$ , então  $\forall \epsilon > 0 \exists r : 0 < r < 1$ :

$$|f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - z_0|^{k+1}}$$

Assim

$$\begin{aligned} |b_{k+1}| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} |f(\tau)| |\tau - z_0|^k |d\tau| \\ &< \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r^{k+1}} r^k \int_{\gamma_r} |d\tau| \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Assim  $|b_k| < \epsilon \Rightarrow b_k = 0, \forall m > k$ .

2. É um caso particular de 3. com  $k = 1$ . Alternativamente temos.

( $\Rightarrow$ ) Se  $z_0$  é um polo simples, então

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \\ &= \frac{b_1}{z - z_0} + h(z), \quad \forall z \in \mathcal{V}^*(z_0), \quad b_1 \neq 0 \end{aligned}$$

onde  $h$  é uma função analítica em  $z_0$ , logo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [b_1 + (z - z_0) h(z)] = b_1 \neq 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

existe, então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 f(z) = 0$$

e por 3.  $f(z)$  é da forma

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

como

$$(z - z_0) f(z) = b_1 + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

tem-se que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = b_1 \neq 0$$

logo  $f$  tem um polo simples em  $z_0$ .

4. ( $\Rightarrow$ ) Por definição  $z_0$  é um polo de ordem  $k \geq 1$  sse  $f$  admite um desenvolvimento de Laurent, numa vizinhança  $\mathcal{V}_\epsilon^*(z_0)$ , da forma:

$$\begin{aligned} & f(z) \\ &= \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k} \left[ b_k + b_{k-1} (z - z_0) + \dots + b_1 (z - z_0)^{k-1} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^{n+k} \right] \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k} \phi(z). \end{aligned}$$

Assim,  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}$ , onde  $\phi(z)$  é analítica em  $\mathcal{V}_\epsilon^*(z_0)$ , visto ser uma série de potências convergente em  $\mathcal{V}_\epsilon^*(z_0)$ .  $\phi(z_0) = b_k \neq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Inversamente podemos de forma análoga em sentido contrário mostrando que  $z_0$  é um polo de ordem  $k \geq 1$ . ■

**Exemplo 4.3.10** Determine a ordem dos polos das seguintes funções:

1.  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$ .

2.  $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ .

3.  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$ .

**Resolução 1.** Temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left( z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots \end{aligned}$$

logo  $z_0 = 0$  é um polo simples.

2.  $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = 2 \neq 0$  logo por 2. da proposição anterior  $z = 1$  é um polo simples.

3. Como  $\cos z$  é analítica em  $\mathbb{C}$ , podemos fazer  $\phi(z) = \cos z$ , então

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z^2}$$

como  $\phi(0) = 1 \neq 0$ . então por 4. da proposição anterior  $f$  tem um polo de ordem 2 em  $z_0 = 0$ . ■

**Definição 4.3.11** Seja  $f$  analítica em  $A$  e  $z_0 \in A$ . Diz-se que  $f$  tem um zero de ordem  $k$  em  $z_0$  sse

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ e } f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$



Se  $f$  tem um zero de ordem  $k$  em  $z_0$ , atendendo ao desenvolvimento de Taylor em torno de  $z_0$  temos

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\
 &= \sum_{n \geq k} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!} (z - z_0)^{n+k} \\
 &= (z - z_0)^k \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!} (z - z_0)^n \\
 &= (z - z_0)^k g(z),
 \end{aligned}$$

onde  $g(z)$  é analítica em  $z_0$  e  $g(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$ . Logo

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\frac{1}{g(z)}}{(z - z_0)^k}$$

como  $\frac{1}{g(z)} = \frac{k!}{f^{(k)}(z_0)} \neq 0$ , por 4. da proposição anterior a função  $\frac{1}{f(z)}$  tem um polo de ordem  $k$ . Temos, pois o seguinte teorema que acabamos de demonstrar.

**Teorema 4.3.12** *Seja  $f$  analítica numa vizinhança de  $z_0$ , então  $f$  tem um zero de ordem  $k$  em  $z_0$  sse  $\frac{1}{f(z)}$  tem um polo de ordem  $k$  em  $z_0$ .*

*Se  $h(z)$  é uma função analítica numa vizinhança de  $z_0$  e  $h(z_0) \neq 0$ , então  $\frac{h(z)}{f(z)}$  tem um polo de ordem  $k$  em  $z_0$  sse  $f$  tem um zero de ordem  $k$  em  $z_0$ .*

**Exemplo 4.3.13** Mostre que se  $f$  e  $g$  são analíticas em  $z_0$  e  $g$  tem um zero de ordem  $n$  e  $f$  um zero de ordem  $k$  com  $k \geq n$ , então  $\frac{g}{f}$  tem um polo de ordem  $k - n$ .

**Resolução** Pelas hipóteses temos

$$f(z) = (z - z_0)^k F(z) \text{ com } F(z_0) \neq 0$$

$$g(z) = (z - z_0)^n G(z) \text{ com } G(z_0) \neq 0.$$

Assim

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = (z - z_0)^{k-n} \frac{F(z)}{G(z)}.$$

A primeira derivada de  $\frac{f}{g}$  que não se anula é a de ordem  $k - n$ , e nesse caso tem-se

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(k-n)}(z_0) = (k - n)! \frac{F(z_0)}{G(z_0)} \neq 0.$$

Portanto  $\frac{f}{g}$  tem um zero de ordem  $k - n$ . Então pelo teorema anterior  $\frac{g}{f}$  tem um polo de ordem  $k - n$ . ■

**Exemplo 4.3.14** Desenvolver em série de Laurent a função

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

nas seguintes regiões.

1.  $0 < |z| < 1$ .
2.  $1 < |z| < 2$ .

**Resolução 1.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{1}{1-z} + \frac{-\frac{1}{2}}{2-z}. \end{aligned}$$

Por um lado temos

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$$

no conjunto  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Por outro lado temos

$$\frac{-\frac{1}{2}}{2-z} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{z}{2}} = \left(-\frac{1}{4}\right) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

no conjunto  $\{z \in \mathbb{C} \mid |\frac{z}{2}| < 1\}$ . Assim, da combinação destas duas séries temos que

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{z} + \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n$$

a qual é válida na intersecção dos domínios

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\frac{z}{2}| < 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{1}{z} \frac{-1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{-\frac{1}{2}}{2-z}. \end{aligned}$$

Vamos analisar cada caso em particular e depois juntamos tudo. Assim, temos

$$\frac{1}{z} \frac{-1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

no domínio  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ . A outra parcela pode ser desenvolvida como

$$\frac{-\frac{1}{2}}{2-z} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n}$$

com domínio  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ . Portanto combinando estes dois desenvolvimentos, obtemos

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{\frac{1}{2}}{z} - \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+2}}$$

válido no anel  $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ .



## Exercícios

**Exercício 4.1** Mostre que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n}$  é analítica em  $A = \{z : |z| > 1\}$ .

**Exercício 4.2** Mostre que a função

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n! z^n}$$

é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Calcule o seu integral ao longo da circunferência unitária.

**Exercício 4.3** Prove que a série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$  converge no interior do círculo unitário e representa uma função analítica nessa região.

**Exercício 4.4** Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $A$  e se  $f_n$  são analíticas em  $A$ , será que  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente em  $A$ ? (Sugestão: utilize o exemplo 4.9).

**Exercício 4.5** Pode a série de potências  $\sum_{n \geq 0} a_n (z-2)^n$  convergir em  $z = 0$  e divergir em  $z = 3$ ?

**Exercício 4.6** Prove que  $e^z = e \sum_{n \geq 0} \frac{(z-1)^n}{n!}$ ,  $|z| < \infty$ .

**Exercício 4.7** Mostre que

1.  $\frac{1}{z^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1)(z+1)^n$ ,  $|z+1| < 1$ .
2.  $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n$ ,  $|z-2| < 2$ .

**Exercício 4.8** Desenvolva  $\cos z$  em série de Taylor<sup>1</sup> em torno do ponto  $z = \frac{\pi}{2}$ .

---

<sup>1</sup>Brook TAYLOR (1685-1731), matemático inglês que deu a conhecer em 1715 os desenvolvimentos em série de funções (mas sem se preocupar com questões de convergência, como era propósito desse tempo) e também com trabalhos sobre aplicações da matemática à física e mecânica.

**Exercício 4.9** Qual é o maior círculo onde a série de MacLaurin<sup>2</sup> da função  $\operatorname{tg} z$  converge para  $\operatorname{tg} z$  para todo o  $z$  no seu interior. Escreva os primeiros termos não nulos dessa série.

**Exercício 4.10** Qual é o raio de convergência do desenvolvimento em série de Taylor da função

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 - 1)(z + 2)(z - 3)}$$

em torno de  $z = i$ ?

**Exercício 4.11** Considere o seguinte desenvolvimento  $\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ .

1. Mostre que os coeficientes  $c_n$  são dados por

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

2. Mostre que os coeficientes  $c_n$ , (números de Fibonacci) verificam a relação  $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .
3. Qual é o raio de convergência da série? Justifique.

**Exercício 4.12** Com a ajuda das séries demonstrar que se  $c$  for uma constante complexa e

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^{cz}-1}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ c & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

então  $f$  é inteira.

**Exercício 4.13** Suponha que  $f$  é analítica em  $z_0$  e que  $f(z_0) = 0$ . Utilize séries para provar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

---

<sup>2</sup>Colin MACLAURIN (1698-1746), matemático escocês que foi discípulo de Newton e professor em Edimburgo, com trabalhos de geometria e física matemática, publicou em 1742 um Tratado de fluxões em que aparece a fórmula do desenvolvimento em série de uma função hoje conhecida pelo seu nome.

**Exercício 4.14** Encontre uma função  $f$  tal que

1.  $f(0) = 1$  e  $f'(x) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .
2.  $f(0) = 1$  e  $f'(x) = x + 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 4.15** Calcule a série de potências que resolve a equação funcional  $f(z) = z + f(z^2)$  e mostre que é a única série que resolve a equação com  $f(0) = 0$ .

**Exercício 4.16** Prove, usando séries de Taylor, a seguinte versão da regra de L'Hôpital<sup>3</sup>. Seja  $f(z)$  e  $g(z)$  analíticas, ambas tendo zeros de ordem  $k$  em  $z_0$ . Então  $\frac{f(z)}{g(z)}$  tem uma singularidade removível em  $z_0$  e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$

**Exercício 4.17** Classifique as singularidades das seguintes funções nos pontos indicados.

1.  $f(z) = \frac{\cos(z-1)}{z^2}, z_0 = 0$ .
2.  $f(z) = \frac{z}{z-1}, z_0 = 1$ .
3.  $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$  se  $f$  tem um zero em  $z_0$  de ordem  $k$ .

**Exercício 4.18** Considere o seguinte desenvolvimento em série de Laurent no anel  $0 < |z| < 1$ ,

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Calcule a expressão para o termo geral dos coeficientes  $c_n, n \in \mathbb{Z}$ .

---

<sup>3</sup>Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital (1661-1704), matemático francês que se tornou conhecido pela divulgação que deu ao cálculo diferencial (foi ele que publicou, em 1696, o primeiro livro de texto de cálculo que se conhece, com as lições de seu mestre Jhon Bernoulli - a quem se deve a regra hoje conhecida pelo nome de L'Hôpital).

**Exercício 4.19** Mostre, com recurso à série de Laurent, que  $z = 0$  é um polo de ordem dois de

$$f(z) = \frac{\operatorname{arctg}(z^2)}{z^4}.$$

Calcule  $\int_{|z|=1} f(z) dz$  (Sugestão:  $\operatorname{arctg}(z^2) = P\left(\frac{2z}{1+z^4}\right)$ ).

**Exercício 4.20** Considere a função  $f(z) = \frac{z^2-1}{\cos(\pi z)+1}$  com o seguinte desenvolvimento em torno de  $z = 0$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

1. Calcule  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$ .
2. Identifique as singularidades de  $f$  e classifique-as.
3. Qual é o raio de convergência da série? Justifique.

# Capítulo 5

## Cálculo de Resíduos

O teorema dos resíduos é uma “instrumento” muito útil no que concerne ao cálculo de integrais. Na Secção 5.4 vamos aplicar o teorema dos resíduos ao estudo de integrais impróprios. Outras aplicações deste teorema são dadas na Secção 5.5 na soma de séries. Finalmente na primeira secção damos algumas técnicas para o cálculo de resíduos.

### 5.1 Técnicas para o cálculo de resíduos

Se  $f$  tem uma singularidade isolada em  $z_0$ , então o desenvolvimento de Laurent em torno de  $z_0$  é dado por

$$f(z) = \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

onde  $b_1$  é o resíduo de  $f$  em  $z_0$ , representado por

$$b_1 = \text{Res}(f, z_0).$$

**Proposição 5.1.1** *Se  $f$  e  $g$  são funções analíticas e têm zeros em  $z_0$  da mesma ordem, então  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  tem uma singularidade removível em  $z_0$ .*

**Prova.** As funções  $f, g$  podem ser escritas como

$$f(z) = (z - z_0)^k F(z), \quad g(z) = (z - z_0)^k G(z)$$

com  $F(z_0) \neq 0$ ,  $G(z_0) \neq 0$  e ambas as funções  $F, G$  são analíticas em  $z_0$ . Assim a função  $h$  dada por

$$h(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$$



é analítica em  $z_0$ . ■

**Exemplo 5.1.2** A função

$$f(z) = \frac{z^2}{\sin^2 z}$$

tem uma singularidade removível na origem.

**Resolução** Visto que  $z^2$  e  $\sin^2 z$  têm zeros de ordem 2, pela proposição anterior  $f(z)$  tem uma singularidade removível na origem. ■

**Proposição 5.1.3** *Sejam  $f$  e  $g$  analíticas em  $z_0$  e  $f(z_0) \neq 0$ ,  $g(z_0) = 0$ , e  $g'(z_0) \neq 0$ . Então*

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

*tem um polo simples em  $z_0$  e*

$$\text{Res}(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

**Prova.** Sabemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g'(z_0) \neq 0,$$

logo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{g(z)} = \frac{1}{g'(z_0)}.$$

Assim, temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

sendo este o resíduo de  $\frac{f(z)}{g(z)}$  em  $z_0$ .

Alternativamente podemos resolver do seguinte modo. A função  $g$  pode ser representada como

$$g(z) = (z - z_0) G(z)$$

com  $G(z_0) \neq 0$  sendo  $G$  analítica em  $z_0$ . Consideremos a função  $h$  definida por

$$h(z) = \frac{1}{z - z_0} \frac{f(z)}{G(z)}.$$

Dado que  $\frac{f}{G}$  é uma função analítica em  $z_0$ , então esta pode ser desenvolvida em série de Taylor em torno de  $z_0$  como

$$\frac{f(z)}{G(z)} = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Assim o desenvolvimento de Laurent em torno de  $z_0$  de  $h$  é dado por

$$h(z) = \frac{a_0}{z - z_0} + \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Por definição o resíduo de  $h$  em  $z_0$  é dado por

$$\text{Res}(h, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) h(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{G(z)} = \frac{f(z_0)}{G(z_0)}.$$

Como  $G(z_0) = g'(z_0)$ , pois  $g'(z) = G(z) + (z - z_0)G'(z)$ , então

$$\text{Res}(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

■

**Exemplo 5.1.4** Calcular o resíduo da função

$$f(z) = \frac{e^{-2z}}{z}.$$

**Resolução** Com  $e^{-2z}|_{z=0} = 1 \neq 0$  e  $z$  tem um zero de primeira ordem, então

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{e^{-2z}}{z'} \Big|_{z=0} = 1.$$

■

**Proposição 5.1.5** *Seja  $f$  uma função com singularidade isolada em  $z_0$  e  $k$  o menor inteiro maior que zero tal que*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

*existe. Então  $f(z)$  tem um polo de ordem  $k$  em  $z_0$  e se*

$$\phi(z) = (z - z_0)^k f(z),$$

então  $\phi(z)$  pode ser definida de forma única em  $z_0$  de modo que  $\phi$  seja analítica em  $z_0$ . Temos ainda que

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(z-1)!}.$$

**Prova.** Dado que  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$  existe, então  $\phi(z)$  tem uma singularidade removível em  $z_0$ . Assim

$$\phi(z) = (z - z_0)^k f(z) = b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \cdots \quad (5.1)$$

Portanto  $f$  tem o seguinte desenvolvimento

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

com  $b_k \neq 0$ , porque  $k$  é o menor inteiro tal que  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$  existe. Logo  $f$  tem um polo de ordem  $k$ . Atendendo a (5.1) temos que

$$\phi^{(k-1)}(z_0) = (k-1)!b_1 \Leftrightarrow b_1 = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

Assim,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

■

**Exemplo 5.1.6** Calcule o resíduo das seguintes funções.

1.  $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$  em  $z_0 = 1$ .
2.  $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$  nos zeros do  $\cos z$ .
3.  $f(z) = \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$  em  $z_0 = i$ .

**Resolução 1.**  $z = 1$  é um polo de ordem 3

$$f(z) = \frac{\frac{z^2}{(z+1)}}{(z-1)^3}, \text{ com } \phi(z) = \frac{z^2}{(z+1)}.$$

Então  $\text{Res}(f, 1) = \frac{\phi''(1)}{2} = \frac{1}{8}$ . ■

2.  $\cos z = 0 \Leftrightarrow z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (pólos simples). Como  $\sin z_k \neq 0$ , então

$$\text{Res}(\tan z, z_k) = \left. \frac{\sin z}{(\cos z)'} \right|_{z=z_k} = -1.$$

3. Consideremos a seguinte expressão equivalente:

$$\frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z^2 - 1}{(z - i)^2 (z + i)^2} = \frac{\frac{z^2 - 1}{(z + i)^2}}{(z - i)^2}.$$

Fazendo  $\phi(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + i)^2}$  temos  $\phi(i) \neq 0$ , peloq que  $z = i$  é um polo de ordem

2. Assim,

$$\text{Res}(f, i) = \phi'(z)|_{z=i} = 0.$$

**Proposição 5.1.7** *Sejam  $f, g$  analíticas em  $z_0$  e seja  $f(z_0) \neq 0$ ,  $g(z_0) = 0$ ,  $g'(z_0) = 0$  e  $g''(z_0) \neq 0$ . Então  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  tem um polo de segunda ordem com resíduo*

$$\text{Res}(h, z_0) = 2 \frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{f(z_0) g'''(z_0)}{[g''(z_0)]^2}.$$

**Prova.** A função  $h(z)$  tem um polo de segunda ordem em  $z_0$  pelo Exemplo 4.3.13, logo pode ser escrita como

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Mas  $f(z)$  pode ser escrita como

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

e

$$g(z) = \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \frac{g'''(z_0)}{3!}(z - z_0)^3 + \dots$$

Assim

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Ou ainda podemos ter a seguinte representação para  $f(z)$

$$f(z) = g(z) \left( \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \right).$$

Substituindo  $g(z)$  pelo seu desenvolvimento em série de Taylor em na igualdade anterior vem

$$\begin{aligned} f(z) &= \left( \frac{g''(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \frac{g'''(z_0)}{3!} (z-z_0)^3 + \dots \right) \\ &\quad \cdot \left( \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots \right) \\ &= \frac{b_2 g''(z_0)}{2!} + \left[ \frac{b_2 g'''(z_0)}{3!} + \frac{b_1 g''(z_0)}{2!} \right] (z-z_0) + \dots \end{aligned}$$

Portanto

$$f(z_0) = \frac{b_2 g''(z_0)}{2!}, \quad f'(z_0) = \frac{b_2 g'''(z_0)}{3!} + \frac{b_1 g''(z_0)}{2!}.$$

Atendendo a que o resíduo  $b_1$  é dado por

$$b_1 = \left( f'(z_0) - \frac{b_2 g'''(z_0)}{3!} \right) \frac{2}{g''(z_0)},$$

então substituindo  $f'(z_0)$  obtemos

$$b_1 = 2 \frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{f(z_0) g'''(z_0)}{[g''(z_0)]^2}.$$

■

**Exemplo 5.1.8** Calcule o resíduo da função na origem

$$f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}.$$

**Resolução** Seja  $h(z) = e^z$  e  $g(z) = \sin^2 z$ . Temos  $g(0) = g'(0) = 0$ ,  $g''(0) \neq 0$  e  $h(0) \neq 0$ ; ou seja  $z_0 = 0$  é um polo de segunda ordem de  $f$ . Então pelo teorema anterior temos

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{2 \times 1}{2} - \frac{2}{3} \frac{1 \times 0}{2^2} = 1.$$

■

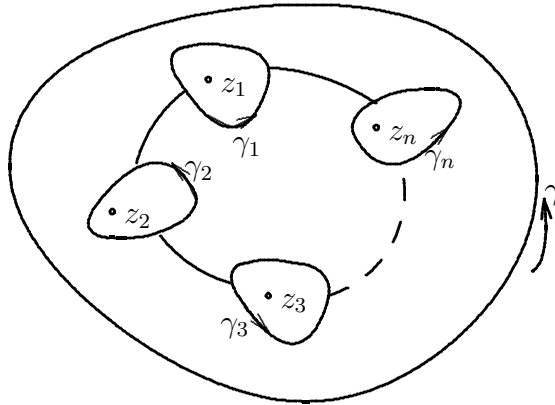


Figura 5.1: Prova intuitiva do teorema dos resíduos.

## 5.2 O teorema dos resíduos

**Teorema 5.2.1 (dos resíduos)** *Seja  $\gamma$  uma curva simples fechada, orientada no sentido positivo e  $f(z)$  uma função analítica em  $\gamma$  e no interior de  $\gamma$  excepto num número finito de pontos singulares,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  contidos no interior de  $\gamma$ . Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

**Prova.** Sejam  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  circunferências centradas em  $z_i$  cujos raios são suficientemente pequenos de forma que  $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$  sempre que  $i \neq j$  e  $\gamma_i \cap \gamma = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, n$ , (ver Figura 5.1). Pelo teorema da deformação (generalizado) temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

e pela Proposição 4.3.7 temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \text{Res}(f, z_k).$$

■

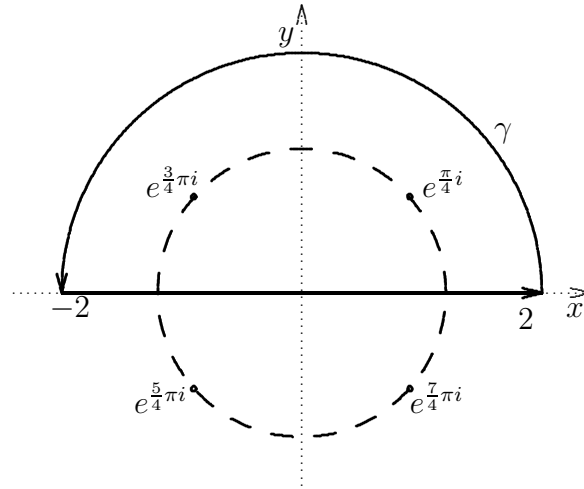


Figura 5.2: Contorno usado no cálculo de  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1}$ .

**Exemplo 5.2.2** Calcule o seguinte integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1}.$$

onde  $\gamma$  é a semi-circunferência superior centrada na origem e raio 2 mais a porção do eixo real entre -2 e 2, (ver Figura 5.2).

**Resolução** Temos  $z^4+1=0 \Leftrightarrow z_1=\exp(\frac{\pi}{4}i)$ ,  $z_2=\exp(\frac{3\pi}{4}i)$ ,  $z_3=\exp(\frac{5\pi}{4}i)$ ,  $z_4=\exp(\frac{7\pi}{4}i)$ . ■

Assim, pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[ \text{Res} \left( \frac{dz}{z^4+1}, \exp \left( \frac{\pi}{4}i \right) \right) + \text{Res} \left( \frac{dz}{z^4+1}, \exp \left( \frac{3\pi}{4}i \right) \right) \right].$$

Como  $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$  tem polos simples nos zeros do denominador, então

$$\text{Res} \left( \frac{1}{z^4+1}, \exp \left( \frac{\pi}{4}i \right) \right) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=\exp(\frac{\pi}{4}i)} = \frac{1}{4} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{Res} \left( \frac{1}{z^4+1}, \exp \left( \frac{3\pi}{4}i \right) \right) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=\exp(\frac{3\pi}{4}i)} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Logo

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i \left( -i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

**Exemplo 5.2.3** Calcule o valor do integral

$$\int_{\gamma} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz$$

onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 2$  percorrida no sentido positivo.

**Resolução** Os pontos singulares de  $\frac{5z-2}{z(z-1)}$  são  $z = 0$  e  $z = 1$ . Tendo em conta que

$$\frac{5z - 2}{z(z - 1)} = \frac{\frac{5z-2}{(z-1)}}{z},$$

temos

$$\text{Res} \left( \frac{5z - 2}{z(z - 1)}, 0 \right) = \frac{5z - 2}{(z - 1)} \Big|_{z=0} = 2.$$

Também

$$\frac{5z - 2}{z(z - 1)} = \frac{\frac{5z-2}{z}}{(z - 1)}$$

pelo que

$$\text{Res} \left( \frac{5z - 2}{z(z - 1)}, 1 \right) = \frac{5z - 2}{z} \Big|_{z=1} = 3$$

Assim

$$\int_{\gamma} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz = 2\pi i (2 + 3) = 10\pi i.$$

■

**Exemplo 5.2.4** Calcule o integral

$$\int_{\gamma} \frac{1 + z}{1 - \cos z} dz$$

onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 7$ .



**Resolução** Os pontos singulares de  $f(z) = \frac{1+z}{1-\cos z}$  são os pontos  $z_k$ :

$$1 - \cos z_k = 0 \Leftrightarrow \cos z_k = 1 \Leftrightarrow z_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

As únicas singularidades que se encontram no interior de  $\gamma$  são  $z = 0$  e  $z = \pm 2\pi$ . Como  $1 - \cos z$  tem um zero de segunda ordem em  $z = 0$  e  $z = \pm 2\pi$  e  $1 + z$  não se anula nestas singularidades, então pela Proposição 5.1.7 temos

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 2 \frac{(1+z)'}{(1-\cos z)''} \Big|_{z=0} - \frac{2}{3} \frac{(1+z)(1-\cos z)'''}{[(1-\cos z)']^2} \Big|_{z=0} = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} \frac{1 \cdot 0}{1} = 2.$$

Assim,

$$\operatorname{Res}(f, 2\pi) = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} \frac{(1+2\pi) \cdot 0}{1} = 2$$

e

$$\operatorname{Res}(f, -2\pi) = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} \frac{(1-2\pi) \cdot 0}{1} = 2.$$

Consequentemente

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (2 + 2 + 2) = 12\pi i.$$

■

## 5.3 Suplemento ao teorema dos resíduos

### 5.3.1 Ponto no infinito

Consideremos a transformação

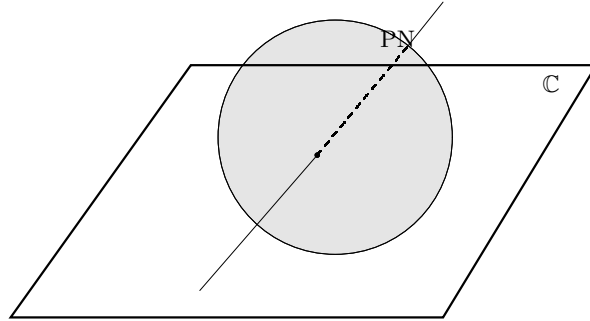
$$w = f(z) = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \rho e^{i\phi} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$

Os pontos  $z$  exteriores ao círculo  $r = R$  são transformados nos pontos  $w$  interiores ao círculo  $\rho = \frac{1}{R}$ , com a excepção do ponto  $w = 0$  que não é imagem de nenhum ponto do plano- $z$ . Para  $R$  suficientemente grande, as imagens caem numa vizinhança tão pequena quanto se queira do ponto  $w = 0$ .

Assim, com o intuito de introduzir o conceito de ponto no infinito,  $z = \infty$ , falamos na pré-imagem do ponto  $w = 0$  pela transformação  $w = \frac{1}{z}$ , ou seja, o ponto  $w = 0$  é a imagem do ponto  $z = \infty$  pela transformação  $f$ .

Concluimos que, o comportamento de uma função em  $z = \infty$ , reduz-se ao comportamento da função em  $z' = 0$  com  $z = \frac{1}{z'}$ .

Figura 5.3: Esfera de Riemann



**Exemplo 5.3.1** Mostre que a função

$$w = \frac{4z^2}{(1-z)^2}$$

aplica  $z = \infty$  em  $w = 4$ .

**Resolução** Seja  $z = \frac{1}{z'}$ , então

$$w = \frac{4}{(z' - 1)^2}$$

temos que, para  $z' = 0$ ,  $w = 4$ . Também podemos dizer que  $w = \infty$  quando  $z = 1$ , pois, sendo  $w = \frac{1}{w'}$ , tem-se

$$w' = \frac{(1-z)^2}{4z^2}$$

e para  $z = 1$  vem  $w' = 0$ . ■

O conjunto  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  é designado por plano complexo expandido e representa-se por  $\bar{\mathbb{C}}$ . Geometricamente ver Figura 5.3. A cada ponto  $z \in \mathbb{C}$ , podemos fazer corresponder um ponto sobre  $S$  (esféra de Riemann), por meio da projecção estereográfica. O único ponto que "fica de fora" é o "polo norte" (PN) ao qual associamos o ponto  $\infty$  do plano complexo expandido,  $\bar{\mathbb{C}}$ .

### 5.3.2 Resíduos e comportamento no infinito

Seja  $f$  uma função analítica numa vizinhança privada de  $\infty$ , no sentido da esfera de Riemann. Podemos pensar que  $\infty$  é uma singularidade isolada de  $f$  ou até removível. Seja  $F(z) = f(\frac{1}{z})$  e pomos  $\frac{1}{z} = \infty$  se  $z = 0$  ou, equivalentemente,  $\frac{1}{z} \rightarrow \infty$  quando  $z \rightarrow 0$ . Assim estudamos o comportamento de  $f$  em  $\infty$  em termos do comportamento de  $F$  em zero.

**Definição 5.3.2** 1. Dizemos que  $f$  tem um polo de ordem  $k$  no  $\infty$  se  $F$  tem um polo de ordem  $k$  em zero.

2. Dizemos que  $f$  tem um zero de ordem  $k$  no  $\infty$  se  $F$  tem um zero de ordem  $k$  em zero.

Definimos

$$\text{Res}(f, \infty) := -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}F(z), 0\right)$$

**Proposição 5.3.3** Suponhamos que existe  $R_0 > 0$  tal que  $f$  é analítica em  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ . Se  $\Gamma$  é uma circunferência de raio  $R > R_0$  centrada na origem e percorrida no sentido positivo, então

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty). \quad (5.2)$$

**Prova.** Seja  $\gamma(\theta) = \frac{1}{R} \exp(i\theta)$  com  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Se  $z \in \text{int}(\gamma)$ , então  $\frac{1}{z} \in \text{ext}(\Gamma)$ , logo a função

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}$$

é analítica no  $\text{int}(\gamma \setminus \{0\})$ . Assim, temos que  $-2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 2\pi i \text{Res}(F, 0)$ . Provemos que  $\int_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty)$ . Ora,

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{Res}(F, 0) &= \int_{\gamma} f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} dz \\ &= \int_0^{2\pi} f(Re^{-i\theta}) R^2 e^{-i2\theta} \frac{i}{R} e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(Re^{-i\theta}) R i e^{-i\theta} d\theta \\ &= - \int_{2\pi}^0 f(Re^{-i\theta}) R i e^{-i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo  $\theta(t) = -t \Rightarrow d\theta = -dt$ , pelo que

$$2\pi i \operatorname{Res}(F, 0) = \int_{-2\pi}^0 f(Re^{it}) Rie^{it} dt.$$

Novamente fazendo  $t(\theta) = \theta + 2\pi \Rightarrow dt = d\theta$  e usando o facto de que  $e^{2\pi i} = 1$  temos

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res}(F, 0) &= \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{\Gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

■

**Observação 5.3.4** O sinal negativo (em 5.2) resulta do facto do ponto singular ( $\infty$ ) estar à direita, no sentido positivo de  $\Gamma$ , se a curva for percorrida no sentido inverso, obtemos o mesmo valor com o sinal negativo.

**Proposição 5.3.5** *Seja  $\gamma$  uma curva em  $\mathbb{C}$  orientada no sentido positivo,  $f$  uma função analítica sobre  $\gamma$  e com um número finito de singularidades no exterior de  $\gamma$ , então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i),$$

onde  $z_i$  são os resíduos de  $f$  no  $\operatorname{ext}(\gamma)$ , incluindo  $\infty$ .

**Prova.** Ver por exemplo [HM87].

■

**Exemplo 5.3.6** Escolhendo um ramo de  $\sqrt{z^2 - 1}$  de modo que a função seja analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{[-1, 1]\}$  onde  $[-1, 1]$  é o segmento sobre o eixo real, calcule

$$\int_{|z|=2} \sqrt{z^2 - 1} dz.$$

**Resolução** A função

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$$

tem uma única singularidade em  $z = \infty$ , fora de  $\gamma$ . Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty).$$

Como  $\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}F\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$ , então temos

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, \infty) &= -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}F\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -\text{Res}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z^3}, 0\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2}\phi''(0)\right) \\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

onde  $\phi(z) = \sqrt{1-z^2}$ . Como  $\phi$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{x+yi : y=0 \wedge |x| \geq 1\}$  e consequentemente no interior de  $\gamma$ , podemos de facto calcular  $\phi''(0)$ . Assim

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{-2\pi i}{2} = -\pi i.$$

■

## 5.4 Aplicação ao cálculo de integrais reais impróprios

### 5.4.1 Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

**Proposição 5.4.1** 1. *Seja  $f$  uma função analítica num aberto contendo o conjunto  $H = \{z : \Im(z) \geq 0\}$ , excepto num número finito de singularidades  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , nenhuma das quais está sobre o eixo real. Suponhamos que existem constantes  $M, p > 1$  e  $R$  tais que  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$  para  $z \in H$  e  $|z| \geq R$ . Então*

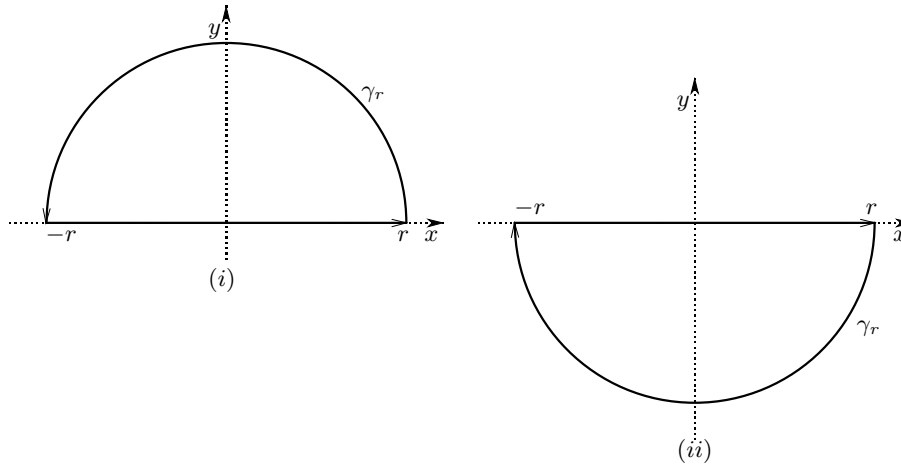
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i),$$

onde  $z_i$  são as singularidades de  $f$  pertencentes a  $H$ .

2. *Se as condições de 1. se verificarem substituído  $H$  por  $L = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \leq 0\}$ , então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i),$$

onde  $z_i$  são as singularidades de  $f$  pertencentes a  $L$ .

Figura 5.4: A curva  $\gamma_r$ .

3. Se  $f$  é da forma  $\frac{P}{Q}$  com  $P$  e  $Q$  polinómios, onde o  $\text{grau}(Q) \geq 2 + \text{grau}(P)$  e  $Q$  não tem zeros reais, então as fórmulas anteriores também se aplicam.

**Prova.** 1. Seja  $r > R$  tal que os polos de  $f$  se encontram no interior de  $\gamma_r$ , (ver Figura 5.4(i)). Pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i),$$

onde  $z_i$  são as singularidades de  $f$  em  $H$ . Por outro lado, temos

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_0^\pi f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta.$$

Se provarmos que o segundo integral do lado direito da igualdade anterior tende para zero quando  $r \rightarrow \infty$ , podêmos concluir que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i),$$

sendo  $z_i$  nas condições anteriores. Por hipótese sabemos que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|x|^p}, \quad |x| > R,$$

então o integral

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é finito para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ . Assim, podemos concluir que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Resta provar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta = 0 \quad (5.3)$$

Como

$$\left| \int_0^\pi f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \pi \frac{M}{r^p} r = \frac{\pi M}{r^{p-1}} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad p > 1,$$

então (5.3) está provado. Isto prova o ponto 1. da proposição. Para provar 2. usa-se o mesmo método para a curva da Figura 5.4 (ii), o sinal negativo é devido à curva ser percorrida no sentido negativo.

3. Seja  $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ . Então

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &\leq |a_0| + |a_1| |z| + \cdots + |a_n| |z|^n \\ &= |z|^n \left( \frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \cdots + |a_n| \right), \quad |z| > 1 \\ &< |z|^n (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|) \\ &= |z|^n M_1 \end{aligned}$$

Assim

$$|P_n(z)| \leq M_1 |z|^n$$

Seja  $Q_{n+p}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots + b_{n+p} z^{n+p}$ ,  $p \geq 2$ . Então, usando um procedimento análogo ao da demonstração do teorema fundamental da álgebra (ver pag. 77)

$$\begin{aligned} |Q_{n+p}(z)| &\geq |z|^{n+p} \left( |b_{n+p}| - \frac{a}{|z|} \right) \\ &\geq |z|^{n+p} \left( |b_{n+p}| - \frac{a}{R} \right) \\ &= |z|^{n+p} M_2. \end{aligned}$$

onde

$$|z| \geq R > 1 \text{ e } a = |b_0| + |b_1| + \cdots + |b_{n+p-1}|.$$

Assim

$$|Q_{n+p}(z)| \geq |z|^{n+p} M_2.$$

Portanto

$$\left| \frac{P_n(z)}{Q_{n+p}(z)} \right| \leq \frac{M_1 |z|^n}{M_2 |z|^{n+p}} = \frac{M}{|z|^p}, \quad p \geq 2.$$

Temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{P_n(x)}{Q_{n+p}(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_{n+p}(x)} dx.$$

verificando-se (5.3) do mesmo modo. ■

**Exemplo 5.4.2** Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

**Resolução** Consideremos  $P(z) = 1$  e  $Q(z) = z^4 + 1$ , temos

$$2 + \text{grau}(P) \leq \text{grau}(Q)$$

Então pela proposição anterior temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \sum_i \text{Res} \left( \frac{1}{z^4 + 1}, z_i \right),$$

onde  $z_i$  são as singularidades de  $\frac{1}{z^4 + 1}$  em  $H$ . Como as singularidades de  $\frac{1}{z^4 + 1}$  são os pontos

$$z_1 = \exp \left( \frac{\pi i}{4} \right), \quad z_2 = \exp \left( \frac{3\pi i}{4} \right), \quad z_3 = \exp \left( \frac{5\pi i}{4} \right), \quad z_4 = \exp \left( \frac{7\pi i}{4} \right)$$

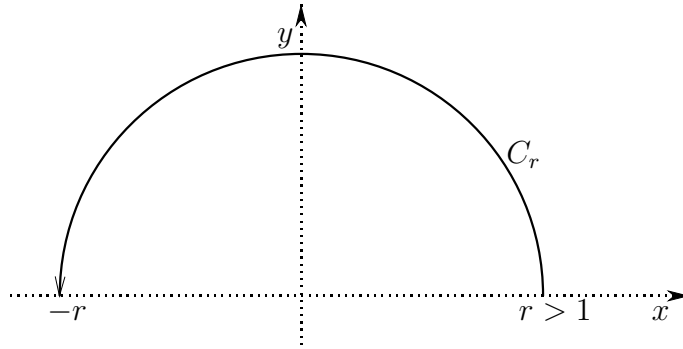
das quais só  $z_1$  e  $z_2$  se encontram em  $H$ . Sendo  $z_1$  e  $z_2$  pólos simples, temos

$$\text{Res} \left( \frac{1}{z^4 + 1}, \exp \left( \frac{\pi i}{4} \right) \right) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=\exp(\frac{\pi i}{4})} = \frac{1}{4} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

e

$$\text{Res} \left( \frac{1}{z^4 + 1}, \exp \left( \frac{3\pi i}{4} \right) \right) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=\exp(\frac{3\pi i}{4})} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$



Figura 5.5: A curva  $C_r$ .

Assim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \left( -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Provemos que

$$\int_{C_r} \frac{1}{z^4 + 1} dz \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

onde  $C_r$  é a semi-circunferência da Figura 5.5.

Se  $z \in C_r$ , então  $z = r \exp(i\theta)$  com  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Assim

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{1}{z^4 + 1} dz \right| &\leq \int_{C_r} \left| \frac{1}{z^4 + 1} \right| |dz| \\ &= \int_0^\pi \left| \frac{1}{r^4 e^{4\theta i} + 1} \right| |r e^{i\theta}| d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{1}{||r^4 e^{4\theta i}| - |1||} r d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{r}{r^4 - 1} d\theta \\ &= \frac{\pi r}{r^4 - 1} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

As questões que se colocam neste momento são as seguintes.

1. O que fazer quando a função tem polos reais?

2. Se a função não tiver o comportamento exigido pela proposição anterior no semi-plano escolhido? Por exemplo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

A função  $\exp(-z^2)$  não se comporta como exigido pela proposição anterior, pois sobre a recta  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$  temos que  $|\exp(-z^2)| = 1$ , visto que  $z^2$  está sobre o eixo imaginário. esta é a motivação para a nossa próxima secção.

### 5.4.2 Integrais impróprios envolvendo funções trigonométricas

**Proposição 5.4.3** *Seja  $f$  uma função.*

1. *Seja  $\omega > 0$ . Suponhamos que  $f$  é analítica num aberto contendo  $H = \{z : \Im(z) \geq 0\}$  excepto num número finito de singularidades,  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , nenhuma das quais está sobre o eixo real. Suponhamos ainda que  $|f(z)| \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ , i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0 \exists R > 0 : |z| > R \Rightarrow |f(z)| < \epsilon, \quad z \in H.$$

*Então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x) f(x) dx = 2\pi i \sum_i \text{Res}(\exp(i\omega z) f(z), z_i), \quad (5.4)$$

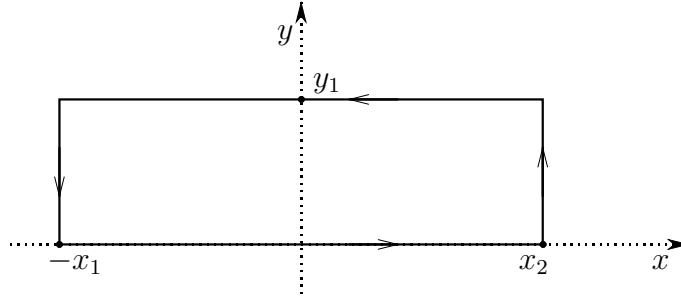
2. *Nas mesmas condições de 1. com  $H$  substituído por  $L = \{z : \Im(z) \leq 0\}$  e  $\omega < 0$  temos*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x) f(x) dx = -2\pi i \sum_i \text{Res}(\exp(i\omega z) f(z), z_i), \quad (5.5)$$

*onde  $z_i$  são as singularidades de  $\exp(i\omega z) f(z)$  em  $L$ .*

3. *Se  $f$  for substituída por  $\frac{P}{Q}$ , com o grau de  $Q$  maior que o grau de  $P$ , e  $Q$  não tem zeros reais, então as fórmulas (5.4) e (5.5) são válidas.*

Figura 5.6: Curva usada para a prova da proposição 5.4.3.



Em qualquer das situações 1. e 2. o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x) f(x) dx$$

existe no sentido

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \exp(i\omega x) f(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 \exp(i\omega x) f(x) dx$$

e são dadas pelas fórmulas anteriores. Se  $f(x)$  é real para  $x$  real, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega x) f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega x) f(x) dx$$

são iguais à parte real e parte imaginária de (5.4) e (5.5), respectivamente.

**Prova.** 1. Seja  $\omega > 0$ , e consideremos a curva da Figura 5.6, onde  $y_1 > x_1$ ,  $x_2 > 0$  são tais que  $\gamma$  contém os polos no semi-plano superior. Assim pelo teorema dos resíduos

$$\int_{\gamma} \exp(i\omega z) f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(\exp(i\omega z) f(z), z_i), \quad (5.6)$$

onde  $z_i$  são as singularidades de  $\exp(i\omega z) f(z)$  em  $H$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \exp(i\omega z) f(z) dz \\ = & \int_0^{y_1} e^{i\omega(x_2+iy)} f(x_2+iy) dy + \int_{x_2}^{x_1} e^{i\omega(x+iy_1)} f(x+iy_1) dx \\ & + \int_{y_1}^0 e^{i\omega(-x_1+iy)} f(-x_1+iy) dy + \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x) dx \end{aligned}$$

Denotamos por  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$  os integrais do lado direito da igualdade anterior, respectivamente.

Seja  $\epsilon > 0$ , e seja  $R$  como nas condições de 1. Definimos

$$\begin{aligned} M_1 &= \max \{|f(x_2+iy)| : 0 \leq y \leq y_1\} \\ M_2 &= \max \{|f(x+y_1i)| : -x_1 \leq x \leq x_2\} \\ M_3 &= \max \{|f(-x_1+iy)| : 0 \leq y \leq y_1\}. \end{aligned}$$

Se  $y_1 > x_1 > R$  e  $y_1 > x_2$ , então cada uma das constantes  $M_i$  é tal que  $M_i < \epsilon$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Assim

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_0^{y_1} |e^{i\omega(x_2+iy)}| |f(x_2+iy)| dy \\ &\leq M_1 \int_0^{y_1} e^{-\omega y} dy \\ &= \frac{M_1}{\omega} (1 - e^{-\omega y_1}) \\ &\leq \frac{M_1}{\omega}. \end{aligned}$$

Por um processo análogo temos

$$|I_3| \leq \frac{M_3}{\omega}.$$

No caso de  $I_2$  temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{-x_1}^{x_2} |e^{i\omega(x+y_1i)}| |f(x+y_1i)| dx \\ &\leq \int_{-x_1}^{x_2} e^{-\omega y_1} M_2 dx \\ &\leq M_2 e^{-\omega y_1} (x_2 - x_1), \end{aligned}$$

como  $\omega > 0$ , escolhemos  $y_1 : e^{-\omega y_1} (x_2 - x_1) < \epsilon$ . Como

$$\int_{\gamma} \exp(i\omega z) f(z) dz = I_1 + I_2 + I_3 + \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x) dx,$$

então

$$\int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x) dx - 2\pi i \sum_i \text{Res}(\exp(i\omega z) f(z), z_i) = -(I_1 + I_2 + I_3),$$

onde  $z_i$  são pontos nas mesmas condições que em (5.6). Portanto

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x) dx - 2\pi i \sum \text{Res}(\exp(i\omega z) f(z), z_i) \right| \\ & \leq \frac{M_1}{\omega} + \frac{M_3}{\omega} + M_2 e^{-\omega y_1} (x_2 - x_1) \\ & < \frac{2\epsilon}{\omega} + \epsilon^2. \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de  $\epsilon$ , concluímos que

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}(\exp(i\omega z) f(z), z_i).$$

A prova de 2. é feita de um modo análogo e a de 3. usa-se um processo semelhante ao da demonstração da Proposição 5.4.1 pondo  $|P_n(z)| \leq M_1 |z|^n$  e  $|Q_{n+1}(z)| \geq M_2 |z|^{n+1}$ . ■

**Exemplo 5.4.4** Mostre que para  $b > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b}.$$

**Resolução** Dado que  $\frac{\cos x}{x^2 + b^2}$  é uma função par, temos

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx.$$

Então pela proposição anterior temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = 2\pi i \sum_i \text{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2}, z_i \right),$$

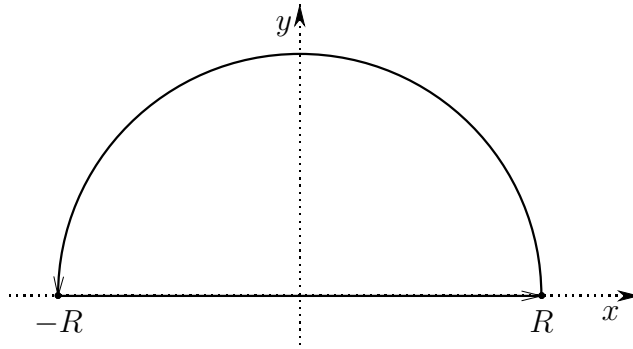


Figura 5.7: Contorno usado na resolução do Exemplo 5.4.4.

onde  $z_i$  são as singularidades de  $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$  em  $H$ . Como o único polo de  $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$  que está em  $H$  é  $bi$  e

$$\text{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z^2+b^2}, bi \right) = \frac{e^{i^2b}}{2bi} = \frac{e^{-b}}{2bi},$$

então

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+b^2} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \left( 2\pi i \frac{e^{-b}}{2bi} \right) = \frac{\pi e^{-b}}{2b}.$$

Vamos apresentar um processo alternativo para resolver o integral deste exemplo sem recorrer ao teorema dado. Usando o contorno da Figura 5.7 com  $|R| > |b|$ . Como

$$\text{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z^2+b^2}, bi \right) = \frac{e^{i^2b}}{2bi} = \frac{e^{-b}}{2bi},$$

então pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+b^2} dz = 2\pi i \frac{e^{-b}}{2bi} = \frac{\pi e^{-b}}{b}.$$

Equivalentemente temos

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+b^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+b^2} dz = \frac{\pi e^{-b}}{b}.$$

Se provarmos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+b^2} dz = 0$$

concluimos, depois de passar ao limite, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{b}$$

ou ainda que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{b}.$$

Portanto, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{b} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b}.$$

Resta então provar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2} dz = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2} dz \right| &\leq \int_{C_R} \left| \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2} \right| |dz| \\ &\leq \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{||z|^2 - b^2|} |dz|. \end{aligned}$$

Se  $z \in C_R$ , então  $z = R \exp(i\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , logo

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{||z|^2 - b^2|} |dz| &= \int_0^\pi \frac{|e^{iRe^{i\theta}}|}{R^2 - b^2} |Rie^{i\theta}| d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{R |e^{Ri(\cos \theta + i \sin \theta)}|}{R^2 - b^2} d\theta \\ &= \frac{R}{R^2 - b^2} \int_0^\pi |e^{iR \cos \theta}| e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{R}{R^2 - b^2} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{2R}{R^2 - b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

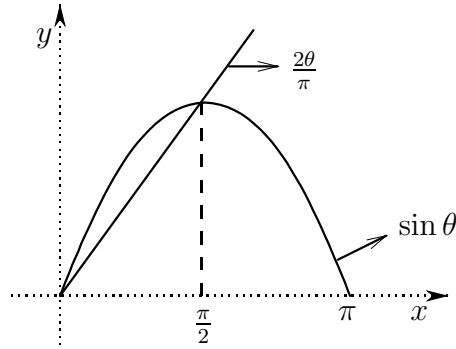


Figura 5.8: Prova geométrica de  $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ .

Como  $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$  (ver Figura 5.8). temos que

$$\begin{aligned} \frac{2R}{R^2 - b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta &\leq \frac{2R}{R^2 - b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= \frac{2R}{R^2 - b^2} \left( -\frac{\pi}{2R} e^{-R} + \frac{\pi}{2R} \right) \\ &= \frac{\pi}{R^2 - b^2} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto, está concluído o exemplo. ■

**Lema 5.4.5** *Suponhamos que  $f$  tem um polo simples em  $z_0$  e seja  $\gamma_\epsilon$  a porção de círculo da Figura 5.9. de raio  $\epsilon$  e ângulo  $\alpha$ . Então*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \alpha i \text{Res}(f, z_0).$$

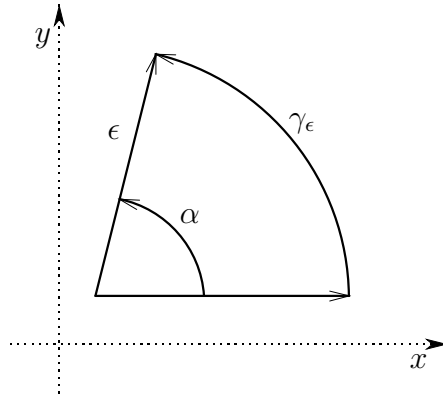
**Prova.** A série de Laurent próximo de  $z_0$  é dada por

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + g(z)$$

onde  $g(z)$  é analítica em  $z_0$ . Assim

$$\int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{b_1}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz.$$



Figura 5.9: A curva  $\gamma_\epsilon$ .

Como  $\gamma_\epsilon(\theta) = z_0 + \epsilon e^{i\theta}$ ,  $\alpha_0 \leq \theta \leq \alpha_0 + \alpha$ . Temos

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{b_1}{z - z_0} dz = \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \alpha} \frac{b_1}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = b_1 \alpha i.$$

Dado que  $g(z)$  é analítica perto de  $z_0$ , então é limitada, digamos por  $M$ , logo

$$\int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz \leq M l(\gamma) \epsilon \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Assim

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \alpha i \text{Res}(f, z_0).$$

■

**Definição 5.4.6** *Seja  $f$  contínua em  $\mathbb{R}$  excepto em  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Se*

$$\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} f(x) dx, \quad \int_{x_n + \epsilon}^{+\infty} f(x) dx$$

*forem convergentes para qualquer  $\epsilon > 0$ , e se*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{x_1 - \epsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1} + \epsilon}^{x_n - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_n + \epsilon}^{+\infty} f(x) dx \right\}$$

é finito, então chamamos a este limite o Valor Principal de Cauchy, e representamo-lo por

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

**Proposição 5.4.7** *Seja  $f$  analítica num aberto contendo o semi-plano superior  $H = \{z : \Im(z) \geq 0\}$ , excepto num número finito de singularidades. Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , singularidades sobre o eixo real e suponhamos que são polos simples. Se*

1.  $\exists M, p > 1$  e  $R$  tal que  $\forall z \in H$  com  $|z| \geq R$  temos

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}.$$

2.  $f(z) = e^{iaz}g(z)$  com  $a > 0$  e

$$|g(z)| \longrightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty,$$

ou ainda

$$\forall \epsilon > 0 \exists R : |z| > R \Rightarrow |f(z)| < \epsilon.$$

Então

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

existe e

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i) + \pi i \sum_m \text{Res}(f, x_m),$$

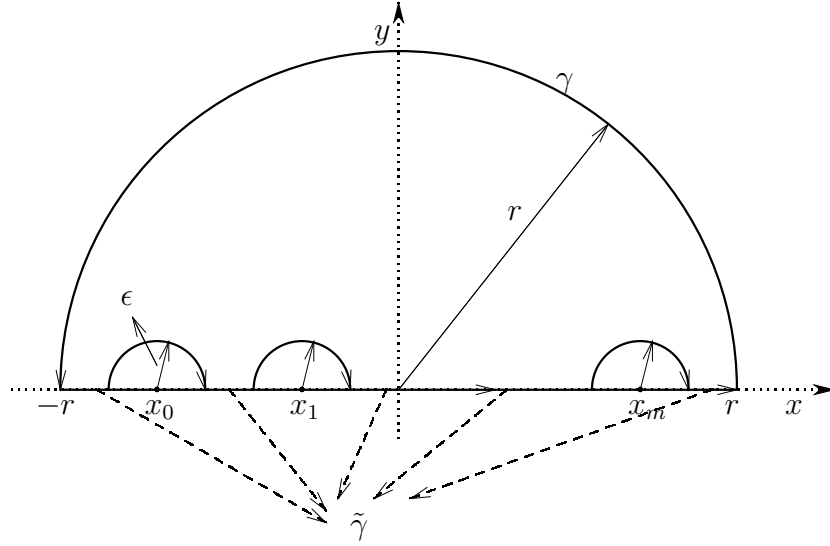
onde  $z_i$  são singularidades de  $f$  em  $H \setminus \mathbb{R}$ .

**Prova.** Seja  $\gamma = \gamma_r + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m + \tilde{\gamma}$ , ver Figura 5.10. Pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, w_i),$$

onde  $w_i$  são as singularidades de  $f$  em  $H$ . Como  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ , então por comparação os integrais

$$\int_{-\infty}^{x_1-\epsilon} f(x) dx, \quad \int_{x_m+\epsilon}^{+\infty} f(x) dx$$

Figura 5.10: Curva  $\gamma$  para o cálculo do Valor Principal.

são convergentes para qualquer  $\epsilon > 0$ . Logo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}} f(x) dx$$

existe. Assim

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_i),$$

onde  $z_i$  são as singularidades de  $f$  em  $H \setminus \mathbb{R}$ . Atendendo à deconposição the  $\gamma$  temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(x) dx + \int_{\gamma_r} f(z) dz + \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

De modo análogo como foi feito na Proposição 5.4.1, temos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}} f(x) dx = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i).$$

Pelo lema anterior

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_j} f(x) dx = -\pi i \operatorname{Res}(f, x_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$$

logo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}} f(x) dx = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i) + \pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(f, x_j),$$

mas isto por definição é o valor principal de Cauchy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}} f(x) dx \right).$$

■

**Proposição 5.4.8** *Seja  $f$  analítica num aberto contendo o semi-plano inferior  $L = \{z : \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$  excepto num número finito de singularidades, das quais  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , são polos simples sobre o eixo real.*

1.  $\exists M, p > 1$  e  $R$  tal que  $\forall z \in L$  com  $|z| \geq R$  temos

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}.$$

2.  $f(z) = e^{iaz} g(z)$ ,  $a < 0$  e  $g = \frac{P}{Q}$  onde o grau de  $Q$  é maior que o de  $P$ .  
Então

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_i) - \pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(f, x_j)$$

onde  $z_i$  são singularidades de  $f$  em  $H \setminus \mathbb{R}$ .

**Prova.** Análoga à anterior, usando a curva da Figura 5.11.

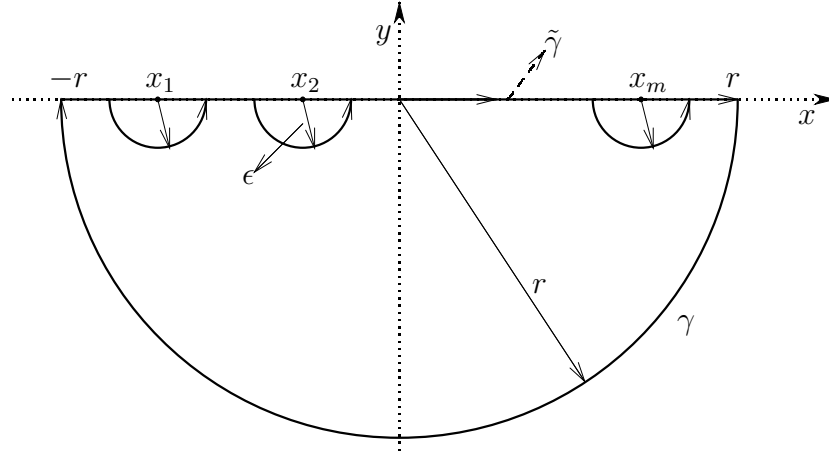
■

**Exemplo 5.4.9** Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  existe e calcule o seu valor.

Figura 5.11: Curva usada para provar a proposição 5.4.8.



**Resolução** Consideremos  $f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$ , temos que  $|\frac{1}{x}| \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , então pela Proposição 5.4.7

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

existe. Logo

$$\Im(I) = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existe, (integração por partes...), então

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ainda pela Proposição 5.4.7

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \text{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z}, z = 0 \right) = \pi i \cdot 1 = \pi i$$

Assim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

visto que  $\frac{\sin x}{x}$  é uma função par temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Alternativamente poderíamos pensar em na função

$$f(z) = \frac{e^{-iz}}{z} = \frac{e^{-ix}e^y}{x+yi} = e^{-ix} \frac{e^{\operatorname{Im}(z)}}{z}$$

e aplicar a Proposição 5.4.8, tendo em conta que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iz}}{z}, z=0\right) = 1.$$

Portanto

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = -\pi i$$

o que nos dá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(-x)}{x} dx = -\pi$$

e por conseguinte, dado que  $\frac{\sin(-x)}{x}$  é ímpar

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

■

**Exemplo 5.4.10** Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)(x^2+1)} dx.$$

**Resolução** Consideremos

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{x(x+1)(x^2+1)}.$$

Como

$$\left| \frac{1}{z(z+1)(z^2+1)} \right| \longrightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty,$$

então pela Proposição 5.4.7

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

existe, logo

$$\Im(I) = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)(x^2+1)} dx.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)(x^2+1)} dx$$

existe, então

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)(x^2+1)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)(x^2+1)} dx.$$

■

Os pontos  $z = 0, z = -1, z = \pm i$ , são polos simples de  $f(z)$  com resíduos

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \left. \frac{e^{iz}}{(z+1)(z^2+1)} \right|_{z=0} = 1. \\ \text{Res}(f, -1) &= \left. \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} \right|_{z=-1} = -\frac{1}{2} [\cos(1) + i \sin(-1)] \\ \text{Res}(f, i) &= \left. \frac{e^{iz}}{z(z+1)(z+i)} \right|_{z=i} = -\frac{1}{4e} (1-i). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 2\pi i \left[ -\frac{1}{4e} (1-i) \right] + \pi i \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\cos(1) + i \sin(-1)] \right\} \\ &= i \left( -\frac{\pi}{2e} + \pi - \frac{\pi}{2} \cos(1) \right) - \frac{\pi}{2e} - \frac{\pi}{2} \sin(1). \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)(x^2+1)} dx = \pi \left( -\frac{1}{2e} + 1 - \frac{1}{2} \cos(1) \right).$$

### 5.4.3 Integrais definidos de funções trigonométricas

**Proposição 5.4.11** *Seja  $R(\sin \theta, \cos \theta)$  o quociente de polinômios de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , cujo denominador não se anula sobre a circunferência unitária,  $z = \exp(i\theta)$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Então*

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i),$$

onde  $z_i$  são as singularidades de  $f$  no interior de  $\{z : |z| = 1\}$  sendo  $f$  dada por

$$f(z) = \frac{1}{zi} \left[ R\left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \right].$$

**Prova.** Seja  $z = \exp(i\theta)$  um ponto sobre a circunferência unitária. Então temos

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Pelo facto de  $R$  não ter polos sobre a circunferência,  $f$  também não tem, e assim pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i),$$

onde  $z_i$  são as singularidades de  $f$  no interior de  $\{z : |z| = 1\}$ . Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{|z|=1} f(z) dz. \end{aligned}$$

Isto prova o resultado da proposição. ■

**Exemplo 5.4.12** Calcule

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$



**Resolução** Pela proposição anterior, com  $z = \exp(i\theta) \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$  e  $\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$ , logo

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{i((z-a) + az(a-z))} = \int_{|z|=1} \frac{idz}{(z-a)(az-1)}.$$

Os polos são  $z = a$  e  $z = \frac{1}{a}$ . Suponhamos que  $a > 1$  pelo que  $z = \frac{1}{a} \in \text{int}(\{z : |z| = 1\})$ . O resíduo é dado por

$$\text{Res}\left(f, \frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{i}{z-a}}{(az-1)'} \Big|_{z=\frac{1}{a}} = \frac{i}{1-a^2}.$$

Suponhamos que  $a < 1$  então  $z = a \in \text{int}(\{z : |z| = 1\})$  e

$$\text{Res}(f, a) = \frac{i}{az-1} \Big|_{z=a} = \frac{i}{a^2-1}.$$

Assim

$$I = \begin{cases} \frac{2\pi}{a^2-1} & \text{se } a > 1 \\ \frac{2\pi}{1-a^2} & \text{se } a < 1 \end{cases}.$$

**Exemplo 5.4.13** Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \pi.$$

**Resolução** Sendo  $z = \exp(i\theta)$  com  $0 \leq \theta < 2\pi$ , temos

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} &= \frac{dz}{iz} \frac{1}{3 - z - \frac{1}{z} + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{dz}{i} \frac{2}{3z - z^2 - 1 + \frac{1}{2i}z^2 - \frac{1}{2i}} \\ &= \frac{2i}{(2+i)z^2 - 6z - i + 2} dz. \end{aligned}$$

Como  $(2+i)z^2 - 6z - i + 2 = 0$  se e só se  $z = \frac{5}{2+i}$  ou  $z = \frac{1}{2+i}$ , das quais só a segunda está no interior de  $\{z : |z| = 1\}$  com resíduo

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{1}{2+i}\right) = \frac{2i}{2(2+i)z - 6} \Big|_{z=\frac{1}{2+i}} = -\frac{i}{2},$$

então

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = 2\pi i \left(-\frac{i}{2}\right) = \pi.$$

■

#### 5.4.4 Integrais em torno de um ponto de ramificação

**Proposição 5.4.14** *Seja  $f$  analítica em  $\mathbb{C}$  excepto num número finito de singularidades isoladas, nenhuma das quais está sobre o eixo real positivo. Seja  $a > 0$  não inteiro e suponhamos que*

1.  $\exists M_1, R_1 > 0$  e  $b > a : |z| \geq R_1 \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{M_1}{|z|^b}$
2.  $\exists M_2, R_2 > 0$  e  $d : 0 < d < a, 0 < |z| < R_2 \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{M_2}{|z|^d}$
3. Se  $f = \frac{P}{Q}$  com  $\operatorname{grau} P = p$  e  $\operatorname{grau} Q = q$  e
  - (a)  $0 < a < q - p$
  - (b)  $n_Q, n_P$  a ordem do zero de  $Q$  e  $P$  em  $z = 0$  respectivamente, então  $n_Q - n_P < a$  ( $Q(0) \neq 0 \Rightarrow n_Q = 0$ )

Então

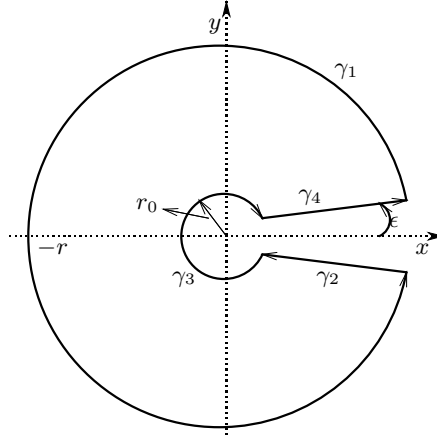
$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x) dx$$

é absolutamente convergente e

$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x) dx = \frac{\pi e^{-\pi a i}}{\sin(a\pi)} \sum_k \operatorname{Res}(z^{a-1} f(z), z_k),$$

onde  $z_k$  são as singularidades de  $f$  excepto  $z = 0$ .

Figura 5.12: Contorno usado na demonstração da Proposição 5.4.14.



**Prova.** Que o integral é absolutamente convergente, é uma consequência da seguinte estimativa

$$|f(x)| \leq \frac{M_1}{|x|^b},$$

para  $x$  suficientemente grande. Para  $x$  pequeno temos

$$|f(x)| \leq \frac{M_2}{|x|^d}.$$

Consideremos o contorno da Figura 5.12

. Seja  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ . Escolhemos  $r, r_0$  e  $\epsilon$  de forma que

$$r_0 \leq R, r \geq R$$

e  $\gamma$  contém todos os polos de  $f(z)$  excepto  $z = 0$ . Consideremos

$$I = \int_{\gamma} z^{a-1} f(z) dz$$

onde  $z^{a-1} = \exp((a-1)\log z)$ , com  $\log z$  o ramo do logaritmo correspondente a  $0 < \arg z < 2\pi$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} z^{a-1} f(z) dz \\ I_2 &= \int_{\gamma_2} z^{a-1} f(z) dz \\ I_3 &= \int_{\gamma_3} z^{a-1} f(z) dz \\ I_4 &= \int_{\gamma_4} z^{a-1} f(z) dz. \end{aligned}$$

Temos  $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ . Pelo teorema dos resíduos

$$I = 2\pi i \sum_k \text{Res}(z^{a-1} f(z), z_k)$$

onde  $z_k$  são as singularidades de  $z^{a-1} f(z)$  excepto  $z = 0$ . Usando as seguintes parametrizações para  $\gamma_2$  e  $\gamma_4$

$$\gamma_2: [r, r_0] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto te^{i(2\pi-\epsilon)}, \quad \gamma_4: [r_0, r] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto te^{i\epsilon},$$

temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{\gamma_1} |z^{a-1}| |f(z)| |dz| \leq M_1 \int_{\gamma_1} \frac{|z|^{a-1}}{|z|^b} |dz| \leq M_1 2\pi r^{a-b} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \\ |I_2| &= \int_r^{r_0} [te^{i(2\pi-\epsilon)}]^{a-1} f(te^{i(2\pi-\epsilon)}) e^{i(2\pi-\epsilon)} dt \rightarrow \int_r^{r_0} t^{a-1} e^{2\pi i a} f(t) dt, \quad \epsilon \rightarrow 0. \\ |I_3| &\leq \int_{\gamma_3} |z^{a-1}| |f(z)| |dz| \leq M_2 \int_{\gamma_3} \frac{|z|^{a-1}}{|z|^d} |dz| \leq M_2 r_0^{a-d} 2\pi \rightarrow 0, \quad r_0 \rightarrow 0. \\ |I_4| &= \int_{r_0}^r [te^{i\epsilon}]^{a-1} f(te^{i\epsilon}) e^{i\epsilon} dt \rightarrow \int_{r_0}^r t^{a-1} f(t) dt, \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim

$$I_2 + I_4 \longrightarrow (1 - e^{2\pi a i}) \int_{r_0}^r t^{a-1} f(t) dt,$$

e como

$$\begin{aligned} 1 - e^{2\pi a i} &= 1 - (\cos^2 \pi a - \sin^2 \pi a + i 2 \sin \pi a \cos \pi a) \\ &= 2 \sin^2 \pi a + 2i \sin \pi a \cos \pi a \\ &= -2i \sin \pi a (\cos \pi a + i \sin \pi a) \\ &= -2i e^{i\pi a} \sin \pi a \end{aligned}$$

vem que

$$I_2 + I_4 \longrightarrow -2ie^{i\pi a} \sin \pi a \int_{r_0}^r t^{a-1} f(t) dt.$$

Seja  $\delta > 0$ , então  $\exists r, \epsilon$  tais que

$$\left| \int_{r_0}^r t^{a-1} f(t) dt - \int_0^\infty t^{a-1} f(t) dt \right| < \frac{\delta}{4}$$

e ainda

$$\frac{|I_1|}{|2ie^{ia\pi} \sin \pi a|} < \frac{\delta}{4}, \quad \frac{|I_3|}{|2ie^{ia\pi} \sin \pi a|} < \frac{\delta}{4}.$$

Seja  $\epsilon$  tal que

$$\left| \frac{I_2 + I_4}{-2ie^{ia\pi} \sin \pi a} - \int_\epsilon^r t^{a-1} f(t) dt \right| < \frac{\delta}{4}.$$

Assim

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty t^{a-1} f(t) dt - \frac{I}{-2ie^{ia\pi} \sin \pi a} \right| \\ = & \left| \int_0^\infty t^{a-1} f(t) dt - \frac{I_2 + I_4}{-2ie^{ia\pi} \sin \pi a} + \int_\epsilon^r t^{a-1} f(t) dt - \int_\epsilon^r t^{a-1} f(t) dt \right. \\ & \left. + \frac{I_1 + I_3}{-2ie^{ia\pi} \sin \pi a} \right| \\ \leq & \left| \int_0^\infty t^{a-1} f(t) dt - \int_\epsilon^r t^{a-1} f(t) dt \right| + \left| -\frac{I_2 + I_4}{-2ie^{ia\pi} \sin \pi a} + \int_\epsilon^r t^{a-1} f(t) dt \right| \\ & + \left| \frac{I_1}{-2ie^{ia\pi} \sin \pi a} \right| + \left| \frac{I_3}{-2ie^{ia\pi} \sin \pi a} \right| \\ \leq & \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} \\ = & \delta. \end{aligned}$$

Dada a arbitrariedade de  $\delta$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{a-1} f(t) dt &= \frac{I}{-2ie^{i\pi a} \sin \pi a} \\ &= \frac{2\pi i \sum_k \text{Res}(z^{a-1} f, z_k)}{-2ie^{i\pi a} \sin \pi a} \\ &= \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\sin \pi a} \sum_k \text{Res}(z^{a-1} f, z_k). \end{aligned}$$

onde  $z_k$  são as singularidades de  $z^{a-1}f$  excepto a origem. ■

**Exemplo 5.4.15** Prove que para  $0 < a < 2$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2 \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

**Resolução** Temos  $Q(z) = z^2 + 1$ ,  $P(z) = 1$  e  $0 < a < 2 - 0$ . Pela proposição anterior

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^2+1} dx = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin \pi a} \left( \operatorname{Res} \left( \frac{z^{a-1}}{z^2+1}, i \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{z^{a-1}}{z^2+1}, -i \right) \right).$$

Como

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z^{a-1}}{z^2+1}, i \right) = \frac{i^{a-1}}{2i}, \quad \operatorname{Res} \left( \frac{z^{a-1}}{z^2+1}, -i \right) = -\frac{(-i)^{a-1}}{2i},$$

então temos

$$\begin{aligned} \frac{i^{a-1} - (-i)^{a-1}}{2i} &= \frac{1}{2i} [\exp((a-1)\log i) - \exp((a-1)\log(-i))] \\ &= \frac{1}{2i} \left( \exp\left((a-1)\frac{\pi i}{2}\right) - \exp\left((a-1)\frac{3\pi i}{2}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \exp\left(\frac{a\pi i}{2}\right) + \exp\left(\frac{3\pi a i}{2}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} e^{\pi a i} \left( \exp\left(-\frac{\pi a i}{2}\right) + \exp\left(\frac{\pi a i}{2}\right) \right) \\ &= -e^{\pi a i} \left( \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) \right), \end{aligned}$$

escolhendo  $\arg(z)$  tal que  $0 < \arg(z) < 2\pi$ . Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^2+1} dx &= \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\sin \pi a} \left( -e^{\pi a i} \left( \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) \right) \right) \\ &= \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{\sin \pi a} \\ &= \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi}{2 \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 5.4.16** Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x^3+1} dx, \quad 0 < a < 3.$$

**Resolução** Temos  $z^3+1=0 \Leftrightarrow z_1 = \exp\left(\frac{\pi}{3}i\right), z_2 = \exp(\pi i), z_3 = \exp\left(\frac{5\pi}{3}i\right)$ . Os resíduos são

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^3+1}, \exp\left(\frac{\pi}{3}i\right)\right) &= \frac{\exp\left(\frac{\pi}{3}i(a-1)\right)}{3 \exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right)} = -\frac{1}{3} \exp\left(\frac{\pi a}{3}i\right). \\ \operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^3+1}, \exp(\pi i)\right) &= \frac{(-1)^{a-1}}{3(-1)^2} = -\frac{1}{3} \exp(\pi a i). \\ \operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^3+1}, \exp\left(\frac{5\pi}{3}i\right)\right) &= \frac{\exp\left(\frac{5\pi(a-1)}{3}i\right)}{3 \exp\left(\frac{10\pi}{3}i\right)} = -\frac{1}{3} \exp\left(\frac{5\pi a}{3}i\right). \end{aligned}$$

■

Então

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x^3+1} dx &= \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\sin \pi a} \left[ -\frac{1}{3} \left( \exp\left(\frac{\pi a}{3}i\right) + \exp\left(\frac{5\pi a}{3}i\right) + \exp(\pi a i) \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{3 \sin \pi a} \left( \exp\left(-\frac{2\pi a}{3}i\right) + \exp\left(\frac{2\pi a}{3}i\right) + 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{3 \sin \pi a} \left( 2 \cos\left(\frac{2\pi a}{3}i\right) + 1 \right). \end{aligned}$$

## 5.5 Soma de Séries

Pretendemos desenvolver um método que nos permita calcular o valor de

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$$

para uma dada função  $f$ .

Seja  $f$  analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$  tais que  $z_i \notin \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Seja  $G(z)$  analítica em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  tal que  $G(z)$  tem polos simples para cada  $n \in \mathbb{Z}$  e

$$\operatorname{Res}(G(z), z=n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(um candidato é  $G(z) = \pi \cot(\pi z)$ ). Nestas condições temos

$$\operatorname{Res}(f(z)G(z), z=n) = f(n).$$

Se  $\gamma$  é uma curva cujo interior contém os pontos  $-N, \dots, -1, 0-1, \dots, N$ , então temos

$$\int_{\gamma} G(z) f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=-N}^N f(n) + 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f(z)G(z), z_i).$$

No caso em que  $f$  tem singularidades inteiras, temos

$$\int_{\gamma} G(z) f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=-N}^N f(n) + 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f(z)G(z), z_i),$$

onde a primeira soma é feita sobre os pontos  $n$  os quais não são singularidades de  $f$  e  $z_i$  são singularidades de  $f$ .

**Teorema 5.5.1** *Seja  $f$  analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ . Seja  $C_N$  o quadrado com vértices em  $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Suponhamos que*

$$\int_{C_N} G(z) f(z) dz \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n) = - \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z), z_i),$$

onde a primeira soma é feita sobre os pontos  $n$  os quais não são singularidades de  $f$ . Se  $f$  não tiver singularidades inteiras, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n) = - \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z), z_i).$$

Para que se verifique (5.7) basta existirem  $R, M > 0$  tais que  $|zf(z)| \leq M$  com  $|z| \geq R$ .

**Prova.** Ver por exemplo [HM87, Theorem 4.4.1]. ■



**Observação 5.5.2** No caso em que aparecem séries do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n)$$

usamos o mesmo contorno  $C_N$  e a função  $G(z) = \pi \csc(\pi z)$ . Se  $f$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ , então se  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$  temos

$$\operatorname{Res}(\pi \csc(\pi z) f(z), z = n) = \frac{\pi f(z)}{(\sin z)'} \Big|_{z=n} = (-1)^n f(n).$$

E o seguinte resultado tem lugar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (-1)^n f(n) = - \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}(\pi \csc(\pi z) f(z), z_i),$$

onde a soma no lado esquerdo é feita nos pontos  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ .

**Exemplo 5.5.3** Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Resolução** Seja  $f(z) = \frac{1}{z^2}$ .  $f$  tem uma singularidade na origem. Calculemos

$$\operatorname{Res}\left(\pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2}, z = 0\right).$$

Como  $\cot(z)$  tem um pólo simples em  $z = 0$ , então

$$\cot(z) = \frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Usando a definição de  $\cot$  e os desenvolvimentos de  $\sin$  e  $\cos$  obtemos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) \left(\frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right) \\ &= b_1 + a_0 z + \left(a_1 - \frac{b_1}{3!}\right) z^2 + \left(a_2 - \frac{a_0}{3!}\right) z^3 + \dots \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Portanto o desenvolvimento para a função  $\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$  é dado por

$$\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{\pi \left( \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3!} + \dots \right)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{z} + \dots,$$

de onde se conclui que

$$\text{Res} \left( \pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2}, z = 0 \right) = -\frac{\pi^2}{3}.$$

Pelo teorema anterior temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

ou ainda que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Isto prova o resultado. ■

**Exemplo 5.5.4** Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Resolução** Temos  $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = -\frac{1}{8} \frac{(-1)^n}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}$ .  $f$  tem um pólo de ordem 3 em  $z = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Res}(\pi \csc(\pi z) f(z)) = -\frac{1}{8} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{\pi^3}{16}.$$

■

Assim, pela Observação 5.5.2 temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=-N}^0 \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \right) = \frac{\pi^3}{16}$$

ou ainda

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

O resultado segue por definição.

**Exemplo 5.5.5** Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Resolução** Seja  $f(z) = \frac{1}{z^4}$ .  $f$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Pelo teorema anterior

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=-N}^{-1} f(n) + \sum_{n=1}^N f(n) \right\} = -\text{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z), z=0)$$

ou seja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(n) = -\frac{1}{2} \text{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z), z=0).$$

■

Como  $\cot(z)$  tem um pólo simples em  $z=0$ , então

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \left( \frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \right)$$

$$= b_1 + a_0 z + \left( a_1 - \frac{b_1}{3!} \right) z^2 + \left( a_2 - \frac{a_0}{3!} \right) z^3 + \left( a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{b_1}{5!} \right) z^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ a_0 = 0 \\ a_1 - \frac{b_1}{3!} = -\frac{1}{2!} \\ a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{b_1}{5!} = \frac{1}{4!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = -\frac{1}{3} \\ a_3 = -\frac{1}{45} \end{cases}$$

Assim

$$\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^4} = \frac{\pi}{\pi z^5} - \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{z^3} - \frac{1}{45} \frac{\pi^4}{z} + \dots$$

Portanto  $\text{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z), z=0) = -\frac{\pi^4}{45}$  e assim, concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(n) = \frac{\pi^4}{90}.$$

### Exercícios

**Exercício 5.1** Escrever a parte principal das seguintes funções, em suas singularidades isoladas classificando-as.

1.  $f(z) = z \exp\left(\frac{1}{z}\right).$
2.  $f(z) = \frac{z^2}{1+z}.$

**Exercício 5.2** Calcule os resíduos das seguintes funções nos seus pontos singulares, classificando-os.

1.  $\frac{1}{e^z - 1}.$
2.  $\sin\left(\frac{1}{z}\right).$
3.  $\frac{1}{z^2 \sin z}.$
4.  $\frac{1 - \cosh z}{z^3}.$
5.  $\frac{\exp(2z)}{(z-1)^2}.$
6.  $\frac{z^2 - 1}{\cos(\pi z) + 1}.$

**Exercício 5.3** Seja  $q$  uma função analítica com um zero de ordem um em  $z_0$ . Prove que se  $f(z) = \frac{1}{[q(z)]^2}$ , então

$$\text{Res}(f, z_0) = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}.$$

**Exercício 5.4** Mostre por meio de um exemplo que se  $f$  tem resíduo  $b_1$  em  $z_0$ , então  $f^2$  não tem necessariamente resíduo  $b_1^2$  em  $z_0$ .

**Exercício 5.5** Sejam  $f, g$  funções com polos simples em  $z_0$ . Mostre que  $fg$  tem um polo de ordem dois em  $z_0$ . Calcule  $\text{Res}(fg, z_0)$ .

**Exercício 5.6** Calcule os seguintes integrais.

1.  $\int_{|z|=9} \frac{dz}{e^z - 1}.$
2.  $\int_{|z|=8} \tan z dz.$

3.  $\int_{|z|=2} \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)} dz.$
4.  $\int_{|z|=2} \left( e^z - e^{\frac{1}{z}} \right) dz.$

**Exercício 5.7** Mostre que

$$\int_{\gamma} \exp \left( z + \frac{1}{z} \right) = 2\pi i \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! (n+1)!}.$$

**Exercício 5.8** Mostre que se  $f$  é analítica sobre e no interior de uma curva fechada  $\gamma$ , excepto nos seus polos, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

onde  $N$  é a soma do número de zeros de  $f$  e  $P$  a soma do números de polos de  $f$  todos interiores a  $\gamma$  e contados de acordo com a sua multiplicidade.

**Exercício 5.9** Deduza a fórmula integral de Cauchy e a fórmula integral de Cauchy para derivadas a partir do teorema dos resíduos.

**Exercício 5.10** Estabeleça os seguintes resultados.

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$
2.  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{1+x^4} dx = \frac{\pi e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{m}{\sqrt{2}} + \sin \frac{m}{\sqrt{2}} \right).$
3.  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$
4.  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}.$
5.  $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$
6.  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(4\theta)}{2+\cos \theta} d\theta = 2\pi \left( \frac{97}{\sqrt{3}} - 56 \right),$  considerando a parte real de  $\int_0^{2\pi} \frac{e^{4\theta i}}{2+\cos \theta} d\theta$  convertendo a um integral ao longo da circunferência unitário.

# Bibliografia

- [HM87] M. J. Hoffman and J. E. Marsden. *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [Rud76] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, third edition edition, 1976.