IV - Leis de conservação em electrodinâmica

1. Conservação local da carga eléctrica

A correcção de Maxwell à lei de Ampère é feita de forma a garantir a conservação local da carga. Por outras palavras, a coerência formal das equações de Maxwell exige que a carga seja <u>localmente</u> conservada. Com efeito:

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{B}) = \mu_0 \left[\nabla \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \dot{\vec{E}} \right] \equiv 0$$

$$= \mu_0 \left[\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] = 0$$

A lei de Maxwell-Ampère impõe a validade da equação de continuidade.

2. Conservação de energia: o Teorema de Poynting-Heaviside:

2.1. Energia de uma configuração de carga numa aproximação quase-estática.

Consideremos a energia de uma configuração estática de cargas pontuais:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left[\sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \, V(\vec{r}_i)$$

Evidentemente que, para uma distribuição contínua de carga $\Delta q_i = \rho(\vec{r})\, d\vec{r}$:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot V(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Podemos exprimir esta energia à custa dos campos. Num meio material linear, é útil considerar a energia associada às densidade de cargas livres. Assim,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L \quad \rightarrow \quad W = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot \vec{D} \; V(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Mas

$$\nabla \cdot (V\vec{D}) = V(\nabla \cdot \vec{D}) + \vec{D} \cdot (\nabla V)$$

Logo:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left[\nabla \cdot (V(\vec{r})\, \vec{D}) - \vec{D} \cdot (\nabla V) \right] \cdot d\vec{r}$$

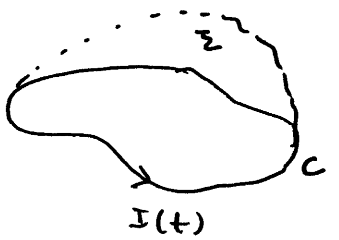
$$= \frac{1}{2} \left[\int_\Sigma V(\vec{r})\, \vec{D} \cdot \hat{n}\, d\Sigma + \int_V \vec{D} \cdot \vec{E}\, d\vec{r} \right]$$

Para um meio material muito extenso, podemos ignorar a contribuição do primeiro termo (de superfície) para a densidade local de energia. Podemos assim definir uma densidade volúmica de energia eléctrica como:

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad : \quad W = \int_V w(\vec{r})\, d\vec{r}$$

2.2 - Energia de uma configuração estacionária de correntes:

Consideremos um loop de corrente $I(t)$ (ver figura)



Seja $-\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ = força electromotriz) o trabalho necessário para que uma carga unitária dê uma volta ao circuito.

A energia despendida por unidade de tempo é:

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E} I$$

Mas:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$ (L = coeficiente de auto-indução do circuito)

$$\frac{dW}{dt} = L I \frac{dI}{dt}$$

Logo

$$W = \int_0^I L I' \, dI' = \frac{1}{2} L I^2$$

Por outro lado, $\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n} \, d\Sigma =$

$$= -\frac{d}{dt} \int_\Sigma (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma \Rightarrow$$

$$\phi = \int_\Sigma (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = L I$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{A} \cdot I \, d\vec{l}$$

$$W = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{I} \, dl$$

Evidentemente, para uma distribuição contínua de correntes:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{j}) \, d\vec{r}$$

Podemos exprimir esta energia à custa do campo.

Novamente, é útil expressar a energia em termos de corrente de carga livre $\vec{J}_f$:

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Numa aproximação quase-estática podemos ignorar a contribuição da corrente de deslocamento. Então, $\vec{J}_f = \nabla \wedge \vec{H}$ e :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \wedge \vec{H}) \, d\vec{r}$$

Mas, $\nabla \cdot (\vec{A} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \wedge \vec{H})$; então:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left[\vec{H} \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) - \nabla \cdot (\vec{A} \wedge \vec{H}) \right] d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, d\vec{r} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_\Sigma (\vec{A} \wedge \vec{H}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma}_{0}$$

0 (sistemas exteriores ($\Sigma \to \infty$))

Logo:

$$\underbrace{w = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}}_{\text{densidade de energia magnetostática.}}$$

Observação:

Repare que $(\vec{H}, \vec{B})$ e $(\vec{J}, \vec{E})$ são grandezas conjugadas no sentido em que o seu produto tem as dimensões de uma (densidade) de energia. Evidentemente, $\vec{D}$ e $\vec{B}$ são grandezas extensivas.

Observação:

Os resultados anteriores são gerais para sistemas quase-estáticos. Se o meio material que consideramos for neutral, então

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

a densidade de energia pode ser expressa à custa dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

2.3- O Teorema de Poynting-Heaviside

Tentemos apreciar a energia associada aos campos eléctrico e magnético (ou às cargas e correntes que lhes dão origem) de uma forma mais geral

O trabalho realizado sobre uma carga pontual q que se desloca $d\vec{l}$ é:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right] \cdot \vec{v}\, dt$$

$$= q\, \vec{E} \cdot \vec{v}\, dt$$

Para uma distribuição contínua de cargas e correntes:

$(q = \rho\, d^3\vec{r} \; ; \; \rho\vec{v} = \vec{j})$:

$$dw = (\rho\, d\vec{r}) \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}\, dt = \vec{E} \cdot \vec{j}\, d\vec{r}\, dt$$

$$\frac{dW}{dt} \overset{*}{=} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{j})\, d\vec{r}$$

Usemos agora a lei de Ampère-Maxwell num meio material:

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

para exprimir esta taxa de realização de trabalho associada às correntes livres j_f :

$$\vec{J}_f = \nabla \wedge \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left[\vec{E} \cdot (\nabla \wedge \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d\vec{r}$$

Mas:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \wedge \vec{H}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot (\nabla \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \wedge \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

Logo:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left[-\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] - \int_\Sigma (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \hat{n}\, d\Sigma$$

(usámos $\nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ e o teorema de Gauss)

O trabalho total realizado por unidade de tempo sobre as cargas livres é igual à diminuição de energia armazenada nos campos por unidade de tempo, mais a energia que flui para o sistema através da sua fronteira Σ. [Teorema de Poynting - Heaviside].

Evidentemente, se o meio linear for neutral (e isotrópico, por simplicidade), então $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

Neste caso:

$$\frac{dW}{dt} = -\int_V \left[\frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] - \frac{1}{\mu} \int_\Sigma (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) d\vec{r} - \int \frac{1}{\mu} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma$$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right] \quad ; \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{E} \wedge \vec{B} \right]$$

(densidade de fluxo de energia por unidade de tempo.)

$\downarrow$

Vector de Poynting.

Este teorema exprime a conservação local de energia.

Vejamos um pouco melhor este ponto

$\frac{\partial}{\partial t} u_{em}$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{em}}{dt} - \int_{\Sigma} \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}$$

$\longrightarrow$ fluxo de energia por unidade de tempo injectado no sistema

$\downarrow$ trabalho realizado sobre as cargas livres do sistema em dt

variação da energia electromagnética em dt

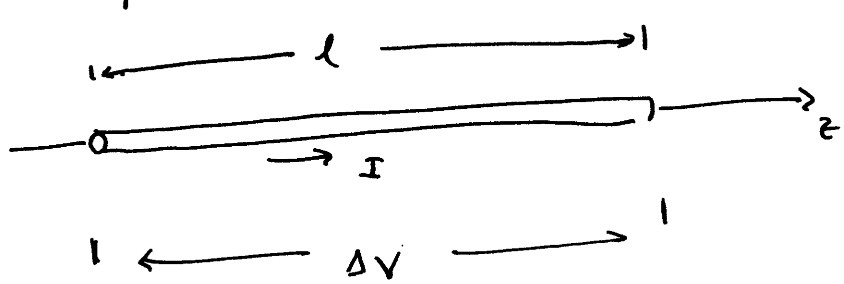
No seu forma diferencial:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{mec.} + u_{em}\right) = -\nabla\cdot\vec{S}}$$

Alguns exemplos simples:

Exemplo 8.1 (Griffiths)

Trabalho realizado (por forças externas) para transportar corrente num fio:

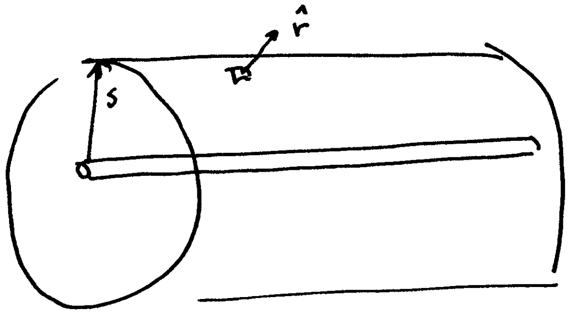


$$\vec{E} = \frac{V}{l}\hat{z} \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{e}_\phi$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\frac{V}{l}\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\left(\hat{z}\times\hat{e}_\phi\right)$$

$$= -\frac{VI}{2\pi l s}\hat{r}$$

(aponta radialmente na direcção do fio)

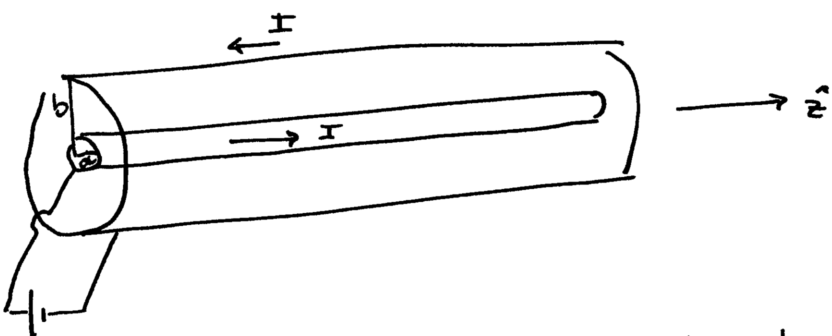


A energia que tem de atravessar a superfície cilíndrica de raio s por unidade de tempo para sustentar a corrente é:

$$\int_\Sigma \vec{S}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = -\frac{VI}{2\pi l s}\cdot 2\pi s l = VI$$

(corresponde à potência dissipada no fio!).

Problema 8.1 (Griffiths): (cabo co-axial)



$\vec{B}$ ≡ só é $\neq 0$ entre cilindros; Lei de Ampère: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{e}_\phi$

Campo eléctrico entre cilindros?

$$\nabla^2 V = 0 = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Por simetria $V \equiv V(s)$; entao:

$$\frac{1}{s}\,\partial_s\left(s\frac{\partial V}{\partial s}\right) = 0 \implies$$

$$\implies \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{C_1}{s}$$

$$V(s) = C_1 \ln s + \underbrace{C_2}_{\to 0} \implies$$

cond. fronteira $\implies V = C_1 \ln\left(\frac{a}{b}\right) \implies$

$$\implies C_1 = V \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$V(s) = V \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln s$$

$$\vec{E} = -\nabla V(s) = -\frac{\partial V(s)}{\partial s}\,\hat{s}$$

$$\boxed{\vec{E} = V \ln\left(\frac{a}{b}\right) \frac{1}{s}\,\hat{s}}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \frac{1}{\cancel{\mu_0}} V \ln\left(\frac{a}{b}\right) \frac{1}{s} \frac{\cancel{\mu_0} I}{2\pi s}\left(\hat{s} \wedge \hat{e}_\phi\right)$$

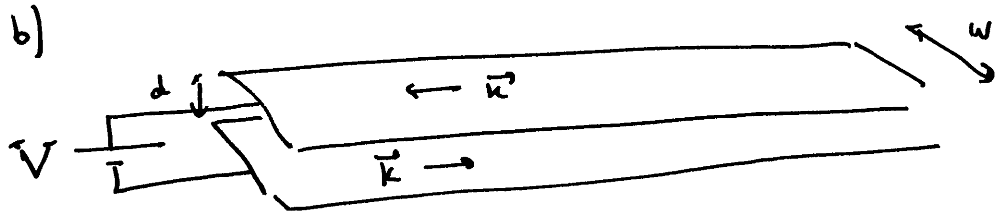
$$= V I \cdot \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2\pi s^2}\,\hat{z}$$

Potencia dissipada:

$$P = \int_\Sigma \vec{S} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \int_a^b 2\pi s\, ds \cdot \frac{VI \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2\pi s^2}$$

$$P = VI \ln\frac{a}{b} \int_a^b \frac{dS}{S} = VI \qquad \square$$

b)



Dois condutores planares muito próximos ($d \ll w$) transportam uma corrente superficial $I = K w$

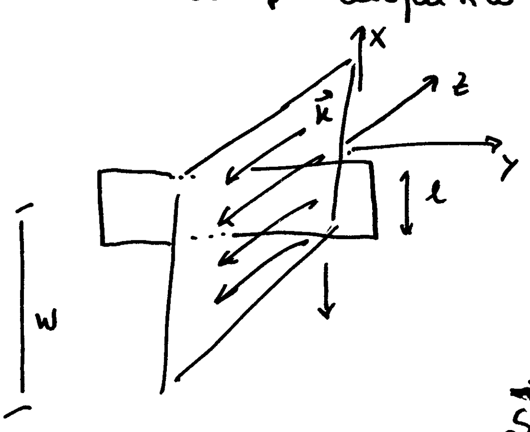
Campo eléctrico entre placas:

$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \rightarrow V(z) = C_1 z + \underset{\downarrow\, 0}{C_2}$$

$$V(w) = V = C_1 w \rightarrow C_1 = \frac{V}{w} \rightarrow V = \frac{V}{w} z$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{V}{d}\hat{y}}$$ (ver figura abaixo)

Campo magnético entre placas:



$$2B\ell = \mu_0 I \frac{\ell}{w}$$

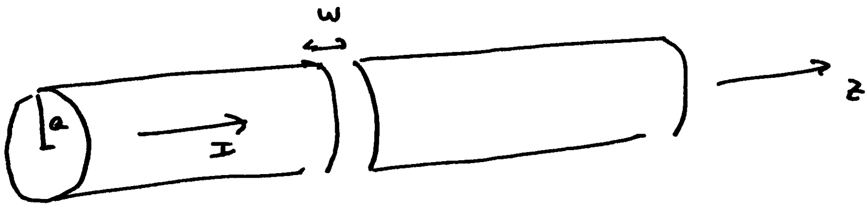
2 folhas : $$B = \frac{\mu_0 I}{w}\hat{x}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B} = -\frac{V}{\cancel{\mu_0} d}\hat{y} \wedge \frac{\cancel{\mu_0} I}{w}\hat{x}$$

$$= +\frac{VI}{wd}\hat{z}$$

$$\int \vec{S}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = VI \qquad \square$$

Problema 8.2 (Griffiths)



Um cilindro maciço de raio a tem uma descontinuidade (hiato) de comprimento w, e transporta uma corrente constante I uniformemente distribuída sobre a secção transversal.

a) Calcule os campos eléctrico e magnético no hiato como funções da distância ao eixo da estrutura.

b) Calcule a densidade de energia electromagnética e o vector de Poynting no hiato. Verifique que a equação de continuidade é verificada.

Solução:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} \quad ; \quad \sigma = \frac{Q(t)}{\pi a^2} = \frac{I t}{\pi a^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{I t}{\pi a^2 \varepsilon_0}\hat{z}$$

$\vec{B} = ?$

$$2\cancel{\pi}\cancel{s}\, B(s) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \cancel{\pi} s^{\cancel{2}}$$

$$B(s) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} s \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \frac{I}{\pi a^2 \varepsilon_0}$$

$$\vec{B}(s) = \frac{\mu_0 \cancel{\varepsilon_0} s I}{2\pi a^2 \cancel{\varepsilon_0}} \hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s\, \hat{e}_\phi$$

b) $$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\cancel{\mu_0}}\left[\frac{It}{\pi a^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\cancel{\mu_0} I}{2\pi a^2} s\,(\hat{z} \wedge \hat{e}_\phi)\right]$$

$$\boxed{\vec{S} = -\frac{I^2 t}{2\pi^2 a^4 \varepsilon_0} s \;\hat{e}_r}$$

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right] = \frac{1}{2}\left[\cancel{\varepsilon_0}\frac{I^2 t^2}{\pi^2 a^4 \varepsilon_0^{\cancel{2}}} + \frac{1}{\cancel{\mu_0}}\frac{\mu_0^{\cancel{2}} I^2}{4\pi^2 a^4} s^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{I^2 \mu_0}{\pi^2 a^4}\left[(ct)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right] \qquad (\text{usai } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1)$$

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{\mu_0 I^2 c^2 t}{\pi^2 a^4} = \frac{I^2 t}{\pi^2 a^4 \varepsilon_0}$$

$$-\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{s}\partial_s\left(s \cdot \frac{I^2 t}{2\pi^2 a^4 \varepsilon_0} s\right) = \frac{1}{\cancel{s}}\,\cancel{\partial_s}\,\frac{\cancel{2}\cancel{s}\, I^2 t}{\cancel{2}\pi^2 a^4 \varepsilon_0} =$$

$$= \frac{I^2 t}{\pi^2 a^4 \varepsilon_0}$$

$$\left[\frac{\partial u_{mec.}}{\partial t} = 0 \quad \text{no gap}\right]$$

Problema 8.9 (*) (Griffiths):

Uma bobina muito longa (raio a) com n espiras/comprimento, transporta uma corrente I_b. Uma espira circular de raio $b \gg a$ ~~concêntrica com a~~ (co-axial) tem uma resistência R

Quando a corrente no solenóide é progressivamente reduzida, observa-se o aparecimento de uma corrente I_e induzida na espira.

a) Calcule I_e como função de $\frac{dI_b}{dt}$

b) Confirme que a potência necessária tem origem na bobina. [Calcule o vector de Poynting na região fora da bobina e verifique a eq. de continuidade de energia).

Solução:

a) $$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\pi a^2 B\right] = -\frac{d}{dt}\left[\pi a^2 \mu_0 n I_b\right] \equiv$$

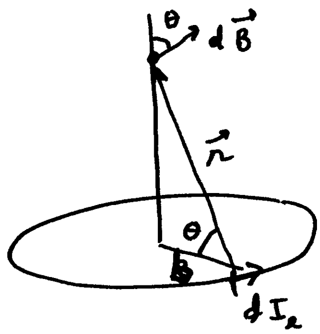
$$\equiv R I_e \quad \Rightarrow \quad I_e = -\frac{\pi a^2 \mu_0 n}{R}\frac{dI_b}{dt}$$

b) $$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$ (imediatamente fora da bobina $r = a^+$

$$2\pi a E = -\mu_0 \pi a^2 n \frac{dI_b}{dt} \rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{1}{2}\mu_0 a n \frac{dI_b}{dt}\hat{\phi}}$$

Nesta região (mesmo fora do solenoide $r \sim a^+$) qual é o campo magnético?

O campo magnético resulta a corrente que percorre a espira circular de raio b. Como $b \gg a$ podemos admitir que o campo é o aquele no eixo da espira



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{I}\wedge\hat{n}}{r^2}\,dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\vec{l}\wedge\hat{r}}{r^2}$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl}{r^2}\cos\theta =$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}}$$

Logo:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = -\frac{1}{2}\,a n\,\frac{dI_b}{dt}\cdot\mu_0\frac{I_e}{2}\,\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}(\hat{\phi}\wedge\hat{z})$$

$$= -\frac{1}{4}\mu_0\, I_e\,\frac{dI_b}{dt}\,\frac{ab^2 n}{(b^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{r}$$

$$\underline{P} = \int_\Sigma \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} S\; 2\pi a\, dz =$$

$$= -2\pi a\,\frac{1}{4}\mu_0\, I_e\,\frac{dI_b}{dt}\,ab^2 n\,\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(b^2+z^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{b^2}}$$

$$P = \underbrace{-\pi\mu_0 a^2 n \frac{dI_b}{dt}}_{\substack{R\,I_e \\ \text{(ver acima)}}} I_e = R I_e^2$$

A potência necessária para sustentar a corrente na espira provém do fluxo de campo gerado pela bobina!