Teste 1 - Cálculo para Ciências

Correcção - 09/11/2022

1) a) $D'f = [0,10]$

b) $f^{-1}([1,8]) = \{x \in Df : 1 \leq f(x) \leq 8\} = [0,4] \cup [6,7[\cup [8,9[\cup]9,10]$

($\underline{\text{ou}} = [0,4] \cup [6,7[\cup ([8,10] \setminus \{9\})$)

c) {Minimizantes locais} $= [1,2] \cup \{7\}$

d) {Maximizantes locais} $= \{0\} \cup]1,2[\cup \{5,9,10\}$

e) {Pontos de descontinuidade} $= \{2,7,9\}$

f) $f'(4) = \frac{4}{2} = 2$ g) {Pontos onde f não é derivável} $= \{1,2,5,6,7,9\}$

h) $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to0^+} f(y) = f(0) = 8$

$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{7x-1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} f\left(7-\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to0^+} f(7-y) = 3$

2) a) $\lim_{x\to1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{RH}{=} \lim_{x\to1} \frac{-1+1/x}{3x^2-3} = \lim_{x\to1} \frac{-x+1}{3(x^2-1)x}$

$= \lim_{x\to1} \frac{-\cancel{(x-1)}}{3\cancel{(x-1)}(x+1)x} = \frac{-1}{6}$

b) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{tg}(3x)}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(3x)}{x(e^x-1)\cos(3x)}$

$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos(3x)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{e^x-1}}_{\left(\frac{0}{0}\right)}$

$= 1 \cdot \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{2\cos(2x)}{1}}_{RH} \cdot \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{3\cos(3x)}{e^x}}_{RH} = 1\cdot2\cdot3 = 6$

$\underline{\text{ou}}$

$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{tg}(3x)}{x(e^x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{RH}{=} \lim_{x\to0} \frac{2\cos(2x)\operatorname{tg}(3x)+3\operatorname{sen}(2x)\sec^2(3x)}{e^x-1+xe^x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\underset{RH}{=} \lim_{x\to0} \frac{-4\operatorname{sen}(2x)\operatorname{tg}(3x)+6\cos(2x)\sec^2(3x)+6\cos(2x)\sec^2(3x)+18\operatorname{sen}(2x)\sec^2(3x)\operatorname{tg}(3x)}{e^x+e^x+xe^x}$

$= \frac{0+6+6+0}{2} = 6$

③ $f'(x) = e^{\operatorname{sen}(x^2)} + x e^{\operatorname{sen}(x^2)} \cos(x^2)\, 2x$ ②

④ a) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2 - \ln x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty \cdot 1$

porque $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ e

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \underset{R.H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} (x^2 - 2 - \ln x) = 0 - 2 + \infty = +\infty$

b) $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = 0 \iff \frac{2x^2-1}{x} = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (porque $\frac{-1}{\sqrt{2}} \notin D_f$)

Então f' anula-se apenas em $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) Como a função f é derivável, o Corolário do Teorema de Rolle garante que f tem no máximo 2 zeros (porque f' se anula uma única vez)

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $f(1) = -1$, o Corolário do Teorema de Bolzano garante a existência de um zero de f, $x_1 \in]0,1[$.

Como $f(1) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, o mesmo corolário garante que f tem um outro zero, $x_2 \in]1,+\infty[$.

Assim, f tem exatamente 2 zeros.

⑤ A função $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) e^{-2x}$ é contínua e é derivável em $]0,1[$ por ser o produto de f com uma função exponencial. Como $g(0) = f(0) = 0$ e $g(1) = f(1)e^{-2} = 0$, aplicando o Teorema de Rolle a g, concluímos que

$$\exists\, c \in]0,1[\quad g'(c) = 0$$

Mas $0 = g'(c) = f'(c)e^{-2c} - 2f(c)e^{-2c}$, ou seja $f'(c)e^{-2c} = 2f(c)e^{-2c}$, o que é equivalente a $f'(c) = 2f(c)$

<u>Observação</u>: Como podem verificar, há um erro no enunciado (eu deveria ter escrito $f(c) = \frac{1}{2}f'(c)$ ou $f'(c) = 2f(c)$)

Vou pensar como resolver este problema depois de ter corrigido os testes todos e antes de lançar as notas.