Teste Modelo 2022/2023

A

→ Alargamento por colisões (Homogéneos)

∘ Devido às colisões os dipolos interrompem a sua oscilação. E isto altera a frequência de oscilação, há uma queda de fase. Depois disto os átomos retomam à sua frequência natural.

∘ $\delta\nu_0 = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\gamma_c}{2\pi}$

→ Alargamento devido ao efeito de Doppler (Não homogénea)

∘ Como o átomo em repouso é excitado por frequências diferentes do que um átomo em movimento. Então como os átomos num gás têm uma grande variedade de velocidades, há uma grande intervalo de diferentes frequências associadas com a cada linha de absorção. Assim, a largura do espectro de absorção aumenta devido ao Efeito de Doppler.

$$\delta\nu_D = 2\frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2\ln 2\, K_B\, T}{m_{átomo}}}$$

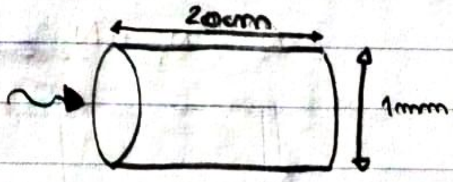
2.

Ne → $M = 20{,}2$ g/mol

Efeito de Doppler ⇒ $S(\nu)$ é um perfil gaussiano

$T = 400$ K

$\lambda = 632{,}8$ nm



→ Como estamos em 3D temos que:

$$N^{\underline{o}} \text{ de modos} = \frac{8\pi}{\lambda^2 c}\,\Delta\nu_{laser}\cdot \text{Volume}$$

$$\Delta\nu_D = 2{,}15\times10^3\left(\frac{1}{\lambda_0}\sqrt{\frac{T}{M}}\right) = 2{,}15\times10^3\left(\frac{1}{632{,}8}\sqrt{\frac{400}{20{,}2}}\right)\text{MHz} = 1{,}5\text{ GHz}$$

c)

Irradiância $= \left[\frac{W}{m^2}\right] = ?$

Da alínea (a) temos que:

$$\frac{I_\nu}{I^{sat}(\nu_0)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_\nu = \frac{1}{2} I^{sat}(\nu_0) = \frac{1}{2}\frac{h\nu}{\sigma(\nu)} A_{21}$$

$$S(\nu_0) = \frac{1}{\pi\delta\nu} = \frac{4}{A_{21}}$$

$$I_\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{hc}{\lambda}\right)\frac{A_{21}}{\lambda^2/(8\pi n^2)\, \cancel{A_{21}}\, S(\nu_0)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{hc}{\lambda}\right)\frac{\cancel{8}\pi n^2}{\cancel{4}\lambda^2} \times A_{21} = \frac{\pi h c n^2 A_{21}}{\lambda^3}$$

$$= \frac{\pi \times 6{,}626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 1}{(600 \times 10^{-9})^3} \cdot 32{,}8 \times 10^6$$

$$= 94{,}8\ \frac{W}{m^2}$$

d)

De Boltzmann temos que: $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1}\exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T}\right]$

Então:

$$\frac{0{,}25}{0{,}75} = \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T}\right] \Leftrightarrow \underbrace{\ln\left(\frac{0{,}25}{0{,}75}\right)}_{= -\ln 3} = -\frac{h\nu}{k_B T}$$

$$T = \frac{h\nu}{k_B \ln(3)} = 21836\ K$$

$\delta\nu = \frac{A_{21}}{4\pi}$

Sabemos que $S(\nu_0) = \frac{1}{\pi\delta\nu} = \frac{4}{A_{21}}$ então

$$\frac{\frac{1}{\pi\delta\nu}}{\frac{\delta\nu}{(\nu-\nu_0)^2+\delta\nu^2}} = 5 \Leftrightarrow 5 = \frac{(\nu-\nu_0)^2+\delta\nu^2}{\pi\,\delta\nu^2} \Leftrightarrow$$

$$5\pi\,\delta\nu^2 = (\nu-\nu_0)^2+\delta\nu^2 \Leftrightarrow \delta\nu^2(5\pi-1) = (\nu-\nu_0)^2$$

$$\delta\nu^2 = \frac{(10\times10^6)^2}{5\pi-1} \Leftrightarrow \frac{A_{21}^2}{16\pi^2} = \frac{(10\times10^6)^2}{5\pi-1}$$

$$A_{21} = \sqrt{\frac{16\pi^2(10\times10^6)^2}{5\pi-1}} = 32,8\times10^6\ s^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{A_{21}} = 30,5\ ms$$

b)

Potência emitida pela emissão espontânea?

→ Temos que a taxa de emissão espontânea é dada por $-A_{21}N_2$.

Sabemos que em ressonância $N_2 = \frac{1}{4}N_T = 2,5\times10^9$ at

Logo, Taxa Em. Esp $= -32,8\times10^6\,(s^{-1}).\,2,5\times10^9$ (at)
$= 8,2\times10^{16}\ s^{-1}$

Power $= \frac{E}{\Delta t}$, como a energia de um fotão é $\frac{hc}{\lambda}$, então:

$$P = \frac{hc}{\lambda}\cdot N_2 A_{21} = \frac{6,626\times10^{-34}\times3\times10^8}{600\times10^{-9}}\times 8,2\times10^{16}$$

$= 27\ mW$

→ se $I_\nu^{sat} = \frac{h\nu}{\sigma(\nu)} A_{21}$, então:

$$N_2 = \frac{I_\nu / I_\nu^{sat}}{1 + 2 I_\nu / I_\nu^{sat}} N_T$$

→ Em ressonância $\nu = \nu_0$:

$$N_2 = \frac{1}{4} N_T \Rightarrow \frac{I_\nu / I_\nu^{sat}}{1 + 2 I_\nu / I_\nu^{sat}} = \frac{1}{4} \quad \frac{I_\nu}{I_\nu^{sat}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{I_\nu}{I_\nu^{sat}}$$

$$\frac{I_\nu}{I_\nu^{sat}}(1 - 1/2) = \frac{1}{4} \quad \frac{I_\nu}{I_\nu^{sat}} = \frac{1}{2}$$

→ Quando $\Delta\nu = \nu - \nu_0$

$$N_2 = \frac{1}{12} N_T \Rightarrow \frac{I_{\Delta\nu} / I_{\Delta\nu}^{sat}}{1 + 2 I_{\Delta\nu} / I_{\Delta\nu}^{sat}} = \frac{1}{12} \quad \frac{I_{\Delta\nu}}{I_{\Delta\nu}^{sat}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\frac{I_{\Delta\nu}}{I_{\Delta\nu}^{sat}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

$$\frac{I_{\Delta\nu}}{I_{\Delta\nu}^{sat}} = \frac{6}{5.12} = \frac{1}{10}$$

→ Como $\frac{I_\nu}{I_\nu^{sat}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{5}\frac{I_\nu}{I_\nu^{sat}}$

$$\frac{\frac{I_\nu}{I_\nu^{sat}}}{\frac{I_\nu}{I_{\Delta\nu}^{sat}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}} = 5 = \frac{I_{sat}(\nu_0 + \Delta\nu)}{I_{sat}(\nu_0)} = \frac{\sigma(\nu_0)}{\sigma(\nu_0 + \Delta\nu)}$$

Como $\sigma(\nu) = \frac{\lambda^2}{8\pi n^2} A_{21} S(\nu)$ e estamos sob um perfil Lorentziano, → $S(\nu) = \frac{\delta\nu/\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + \delta\nu^2}$, ond $\delta\nu = \frac{A_{21}}{4\pi}$

então:

$$\frac{S(\nu_0)}{S(\nu_0 + \Delta\nu)} = 5$$

$$N^{o} \text{ de modos} = \frac{8\pi}{(632{,}8\times10^{-9})^2 \times 3{,}0\times10^{8}} \times 1{,}5\times10^{9} \times \left(\pi \times \left(\tfrac{1}{2}\times10^{-3}\right)^2 \times 0{,}2\right)$$

$$= 49{,}2\times10^{6} \text{ modos}$$

2.

$N = 10^{10}$ átomos

2 níveis → Não há efeito de Doppler

$\lambda = 600\,nm$

em ressonância

$g_1 = g_2$ → No estado estacionário: $N_2 = 0{,}25N$

$S(\nu)$ → Lorentziano → $\Delta\nu = \nu - \nu_0 = 10\,MHz$ no estado estacionário

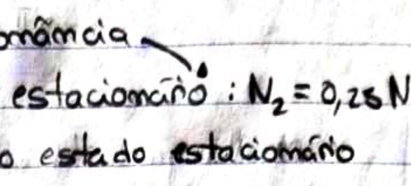
$\delta\nu_0 = \frac{A_{21}}{4\pi}$ $\quad N_2 = \frac{1}{12}N$

a)

A equação dinâmica que dá a variação da população é:

$$\frac{dN_2}{dt} = \overset{\text{Em est}}{-\frac{\sigma(\nu)}{h\nu} I_\nu} \overset{\text{Ab}}{(N_2 - N_1)} - \overset{\text{Em Esp}}{A_{21} N_2}$$

→ No estado estacionário:



$$\frac{dN_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow N_2 = \frac{\frac{\sigma(\nu)}{h\nu} \cdot I_\nu N_1}{A_{21} + \frac{\sigma(\nu) I_\nu}{h\nu}}$$

*Pôr A_{21} em evidência

$$N_T = N_1 + N_2 = N_1\left[1 + \frac{\sigma(\nu)/h\nu\, I_\nu}{A_{21} + \frac{\sigma(\nu) I_\nu}{h\nu}}\right] = N_1\left(\frac{A_{21} + 2\sigma(\nu)/h\nu\, I_\nu}{A_{21} + \frac{\sigma(\nu)}{h\nu} I_\nu}\right)$$

$$N_1 = \frac{A_{21} + \sigma(\nu)/h\nu \cdot I_\nu}{A_{21} + 2\sigma(\nu)/h\nu\, I_\nu} N_T$$

$$N_2 = \frac{\sigma(\nu)/h\nu\, I_\nu}{A_{21} + 2\frac{\sigma(\nu)}{h\nu} I_\nu} N_T = \frac{\sigma(\nu)/(h\nu A_{21})\, I_\nu}{1 + \frac{2\sigma(\nu)\, I_\nu}{h\nu A_{21}}}$$

*K

Como $P = 2A_{21} \Rightarrow N_2 - N_1 = \frac{N_T}{3}$

$g_0(\nu) = \sigma(N_1 - N_2) \Leftrightarrow g_0(\nu) = \frac{\sigma N_T}{3} \Leftrightarrow$

$\sigma N_T = 3 g_0(\nu)$

$g(\nu) = \frac{3\, g_0(\nu)}{3 + 2 I_{cav}/I_{sat}}$ $\qquad g_0(\nu) = 0{,}01\ cm^{-1} = -\frac{\ln(r_1 r_2)}{2l}$

$g(\nu) = -\frac{1}{2l}\ln(r_1 r_2) \Rightarrow r_2 \exp(g(\nu) \cdot 2l) = 1$

$2l\, g(\nu) = \ln\left(\frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{r_2}\right)\frac{1}{2l} = \frac{3 g_0(\nu)}{3 + 2 I_{cav}/I_{sat}}$

$3 + 2\frac{I_{cav}}{I_{sat}} = \frac{3 \ln(1/0{,}98)}{\ln(1/0{,}99)}$

$\frac{I_{cav}}{I_{sat}} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$

$I_{cav} = \frac{3}{2} \times \frac{hc}{\lambda} \frac{A_{21}}{\sigma} \sim 43\ W/cm^2$

Como $R_2 + T = 1 \Rightarrow I_{Laser} = (1 - R_2) I_{cav} = 850 \frac{mW}{cm^2}$

$$-g_{limiar} \cdot 2l = \ln(r_1 r_2) \therefore r_1 r_2 = e^{-g_{limiar} \times 2l}$$

$$r_2 = \frac{e^{-0{,}01 \times 2 \times 0{,}1}}{1} = 0{,}998$$

c)

$R_2 = 0{,}99$

Anteriormente vimos que:

$$\frac{dN_2}{dt} = PN_1 - A_{21} N_2 + \frac{I_{cav}\sigma}{h\nu}(N_1 - N_2)$$

No estado estacionário:

$$N_2 \left[A_{21} + \frac{I_{cav}\sigma}{h\nu}\right] = N_1 \left[P + \frac{I_{cav}\sigma}{h\nu}\right]$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{P + \frac{I_{cav}\sigma}{h\nu}}{A_{21} + \frac{I_{cav}\sigma}{h\nu}} \qquad \text{Se } I_{sat} = \frac{h\nu A_{21}}{\sigma}:$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{P/A_{21} + I_{cav}/I_{sat}}{1 + I_{cav}/I_{sat}} = \frac{2 + I_{cav}/I_{sat}}{1 + I_{cav}/I_{sat}}$$

Como $N_T = N_2 + N_1$ $\Rightarrow$ $N_2 - N_1 = \frac{N_2 - N_1}{N_2 + N_1} N_T$

$$N_2 - N_1 = \frac{\frac{N_2}{N_1} - 1}{\frac{N_2}{N_1} + 1} N_T = \frac{1}{3 + 2\, I_{cav}/I_{sat}} N_T$$

$$g(\nu) = \sigma(\nu)\, \Delta N = \frac{10\, \sigma(\nu)}{3 + 2\, I_{cav}/I_{sat}} N_T$$

$$N_2 = \frac{A_{32}P}{\cancel{A_{21}(P+A_{32})}} \cdot \frac{\cancel{A_{21}(P+A_{32})}}{A_{21}(2P+A_{32})+A_{32}P} N_T$$

$$= \frac{A_{32}P}{A_{21}(2P+A_{32})+A_{32}P} N_T$$

$$N_3 = \frac{P}{\cancel{P+A_{32}}} \cdot \frac{A_{21}\cancel{(P+A_{32})}}{A_{21}(2P+A_{32})+A_{32}P} N_T$$

$$= \frac{PA_{21}}{A_{21}(2P+A_{32})+A_{32}P} N_T$$

Como $A_{32} >> P, A_{21}$

$$N_3 = \frac{PA_{21}}{A_{32}(A_{21}+P)} N_T$$

$$N_2 = \frac{\cancel{A_{32}}P}{\cancel{A_{32}}(A_{21}+P)} N_T$$

$$N_1 = \frac{A_{21}\cancel{A_{32}}}{\cancel{A_{32}}(P+A_{21})} N_T$$

$$N_2 - N_1 = \left(\frac{P}{A_{21}+P} - \frac{A_{21}}{P+A_{21}}\right) N_T$$

$$\Delta N_{21} = \frac{P - A_{21}}{P + A_{21}} N_T$$

b)

$\lambda_{21} = 694$ nm

$\sigma(\nu_{21}) = 10^{-17}\ cm^2$

$N_T = 3\times10^{15}\ cm^{-3}$

$A_{21} = 10^8\ s^{-1}$

$P = 2A_{21}$

$r_1 = 1$

→ Temos que: $g_{limiar} = -\frac{1}{2l}(r_1 r_2)$

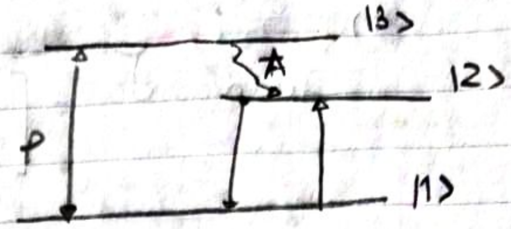
$$g_{limiar} = \sigma(\nu)\,\Delta N_{21}$$

$$= 10^{-17} \times \frac{10^8}{3\times10^8} \cdot 3\times10^{15} \left[\frac{cm^2 \cdot s^{-1} \cdot cm^{-3}}{s^{-1}}\right]$$

$$= 0{,}01\ cm^{-1}$$

3.

$g_1 = g_2 = 1$
Alargamento homogéneo



a)

$$\frac{dN_3}{dt} = PN_1 - PN_3 - A_{32}N_3 \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = A_{32}N_3 - A_{21}N_2 \quad (2)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -PN_1 + A_{21}N_2 \quad (3)$$

No estado estacionário: $\frac{dN_3}{dt} = 0 = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt}$

(1) $$N_3 = \frac{P}{P + A_{32}} N_1$$

(3) $$N_2 = \frac{A_{32}}{A_{21}} \cdot \frac{P}{P + A_{32}} N_1$$

$$N_T = N_1 + N_2 + N_3 = N_1 \left(\frac{P}{P + A_{32}} + \frac{A_{32}P}{A_{21}(P + A_{32})} + 1 \right)$$

$$N_T = N_1 \left(\frac{A_{21}P + A_{32}P + A_{21}(P + A_{32})}{A_{21}(P + A_{32})} \right)$$

$$N_1 = \frac{A_{21}(P + A_{32})}{A_{32}P + A_{21}A_{32} + 2A_{21}P} N_T$$