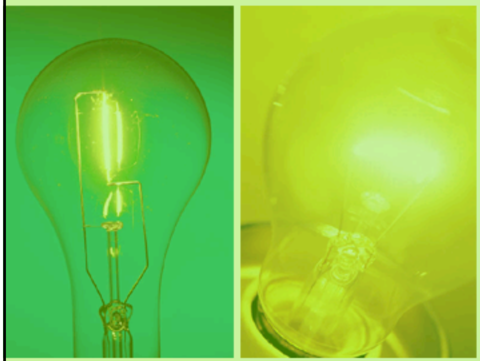
Processamento de Sinal



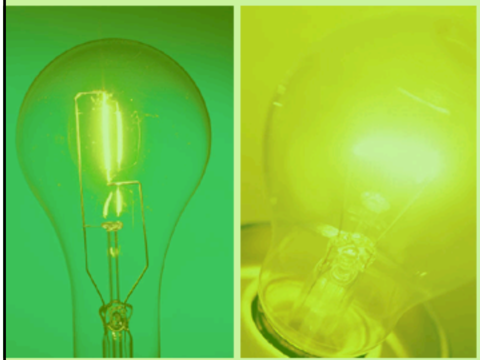
2º Ano

Discrete-time Fourier Transform

Resumo

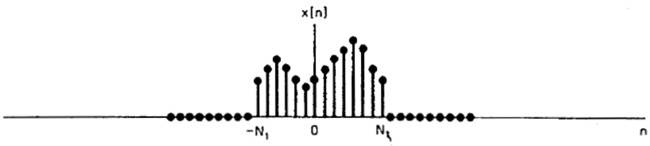
- Transformada de Fourier de Sinais discretos (DTFT) aperiódicos.
- Convergência da DTFT.
- DTFT de Sinais periódicos.
- Propriedades da DTFT.

DTFT de Sinais aperiódicos



Sinais discretos aperiódicos

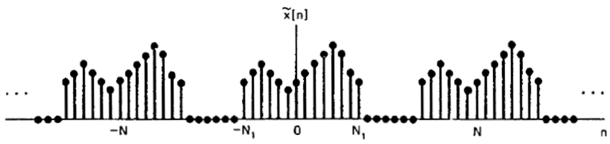
- Consideremos o seguinte sinal discreto:



  – Esta sequência é aperiódica, sendo diferente de zero apenas na gama: $-N_1 \leq n \leq N_1$.

Sinais discretos aperiódicos

- O sinal abaixo pode ser entendido como uma versão periódica de x[n]:



  - Qual será a Série de Fourier do sinal periódico ?

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

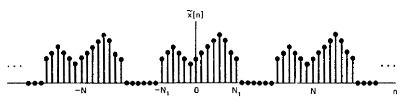
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

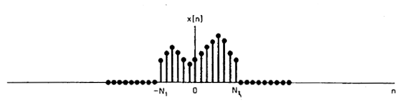
- *Qual é o intervalo de análise das duas equações anteriores ?*
- *Que intervalo deveremos escolher ?*
- *Qual é a relação entre o sinal periódico e o sinal aperiódico ?*

Sinais discretos aperiódicos

- Escolhendo a range –N/2:N/2, teremos:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$





Sinais discretos aperiódicos

- Consideremos a seguinte função:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

  - Se a variável independente Ω for contínua, então a função X é contínua e periódica.
  - Qual será a relação de $X(\Omega)$ com os coeficientes da série de Fourier ?

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Sinais discretos aperiódicos

- Os coeficientes, a_k, da série de Fourier serão amostras da função $X(\Omega)$:

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$

onde

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Sinais discretos aperiódicos

- Consideremos a equação de síntese:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$= \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

Sabemos que o período pode ser obtido por

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

$$\boxed{\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{\Omega_0}{2\pi} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}}$$

Qual é o significado desta equação ?

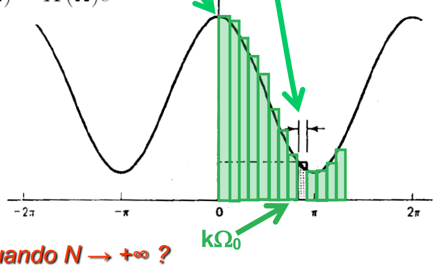
Sinais discretos aperiódicos

Qual é o significado desta equação ?

$$\boxed{\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{\Omega_0}{2\pi} \underbrace{X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}}}$$

- O produto dos dois termos representa uma área.
- Como o somatório desenvolve-se para vários valores *k*, temos que o somatório será uma aproximação da área da função envolvente

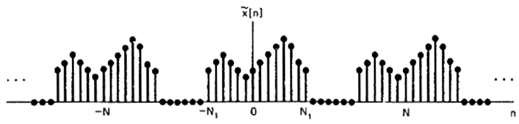
$f(\Omega) = X(\Omega) e^{j\Omega n}$



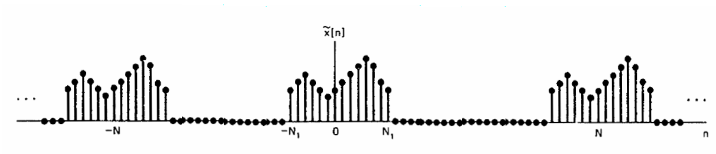
O que acontecerá quando N → +∞ ?

Sinais discretos aperiódicos

- A nossa questão é: “O que acontecerá quando N → +∞ ?”
  - Se considerarmos o sinal inicial



e fazermos N → +∞ teremos



Sinais discretos aperiódicos

- Como $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$

  Teremos que
  - A frequência angular fundamental, Ω_0, tenderá para zero.
  - O sinal periódico tenderá para o sinal aperiódico.

- A consequência da primeira conclusão será que o somatório

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} \Omega_0 X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} \, d\Omega$$

Sinais discretos aperiódicos

- Ao par de equações

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{\jmath\Omega n}\,d\Omega$$

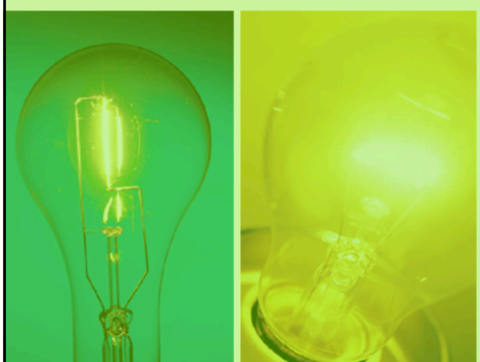
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\jmath\Omega n}$$

denominamos de Transformada de Fourier no Tempo Discreto (DTFT).

  – A primeira equação é a equação de síntese, pois permite sintetizar o sinal temporal, x[n], a partir do seu espectro.

  – A segunda equação é chamada de equação de análise, pois permite obter a representação espectral do sinal aperiódico.

Convergência da DTFT



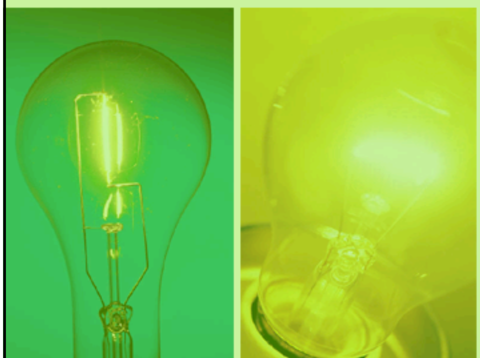
Convergência da DTFT

- No estudo da convergência devemos considerar dois casos:
  - Sequências finitas.
    - As expressões das transformadas discretas aplicam-se sempre.
  - Sequências infinitas.
    - Neste caso, prova-se que a DTFT existirá se a sequência infinita for absolutamente somável ou se tiver energia finita.

$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]| < +\infty$$

$$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 < +\infty$$

Propriedades da DTFT



Propriedades

- Convolução:
  - Se os seguintes pares de transformada existirem

$$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(\Omega)$$

$$h[n] \xrightarrow{DTFT} H(\Omega)$$

então a convolução de x[n] por h[n] será

$$x[n] * h[n] \xrightarrow{DTFT} X(\Omega)\,H(\Omega)$$

Propriedades

- Derivada na frequência:
  - Se o seguinte par de transformada existir

$$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(\Omega)$$

então a derivada da frequência da DTFT de x[n] será

$$nx[n] \xrightarrow{DTFT} j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$$

Q: Determine a DTFT de $x[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

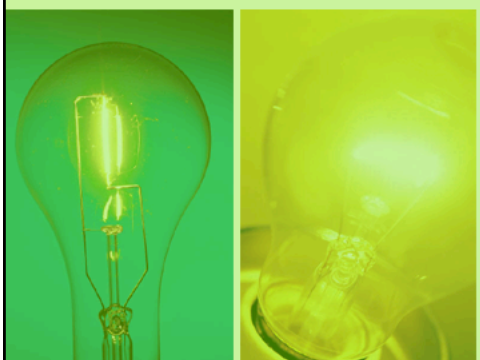
Propriedades

Aperiodic signal	Fourier transform
$x[n]$	$X(\Omega)$ periodic with
$y[n]$	$Y(\Omega)$ period 2π
$ax[n] + by[n]$	$aX(\Omega) + bY(\Omega)$
$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
$x[-n]$	$X(-\Omega)$
$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k \end{cases}$	$X(k\Omega)$
$x[n] * y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\theta)Y(\Omega - \theta)\,d\theta$
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}X(\Omega) + \pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - 2\pi k)$
$nx[n]$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
$x[n]$ real	$\begin{cases} X(\Omega) = X^*(-\Omega) \\ \mathcal{Re}\{X(\Omega)\} = \mathcal{Re}\{X(-\Omega)\} \\ \mathcal{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathcal{Im}\{X(-\Omega)\} \\ \lvert X(\Omega)\rvert = \lvert X(-\Omega)\rvert \\ \sphericalangle X(\Omega) = -\sphericalangle X(-\Omega) \end{cases}$
$x_e[n] = \mathcal{Ev}\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$	$\mathcal{Re}\{X(\Omega)\}$
$x_o[n] = \mathcal{Od}\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$	$j\,\mathcal{Im}\{X(\Omega)\}$

Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega$$

DTFT de Sinais periódicos



Sinais periódicos

- DTFT de sinais periódicos:
  - De forma análoga ao caso contínuo, a DTFT de sinais discretos periódicos será dada por:

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$