Potência e Tensão eficaz

O trabalho necessário para transportar uma carga dq no intervalo de tempo dt entre os terminais do elemento (por exemplo, uma resistência) submetido a uma d.d.p. $V(t)$ é

$$dW = dq \cdot V(t)$$
$$= I(t) \cdot dt \cdot V(t)$$

A potência "consumida" por esse elemento é

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = V(t) \cdot I(t) \quad , \quad V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

No caso de uma resistência

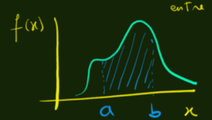
$$P_R(t) = V(t) \cdot \frac{V(t)}{R} = \frac{V^2(t)}{R} = \frac{V_0^2 \cos^2(\omega t)}{R}$$
$$= \frac{V_0^2}{R}\left(1 + \frac{\cos(2\omega t)}{2}\right)$$

A potência média dissipada na resistência é dada por

$$\bar{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_0^2}{R}\,\frac{1}{2}\left(1+\cos(2\omega t)\right)dt$$
$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{V_0^2}{R}\cdot\frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T$$
$$= \frac{1}{T}\,\frac{V_0^2}{R}\cdot\frac{1}{2}\left(T + \frac{1}{2\omega}\underbrace{\left(\sin(2\omega T)\right)}_{=0}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{V_0^2}{R}$$
$$= \frac{\left(\frac{V_0}{\sqrt{2}}\right)^2}{R}$$
$$= \frac{V_{ef}^2}{R} \quad , \quad \text{onde} \quad \boxed{V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}}$$

Tensão eficaz

Nota: valor médio de uma função entre a e b



$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Recordar que $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Em corrente alternada, a potência média dissipada numa resistência é igual àquela que seria dissipada em corrente contínua aplicando uma tensão de valor igual à tensão eficaz.

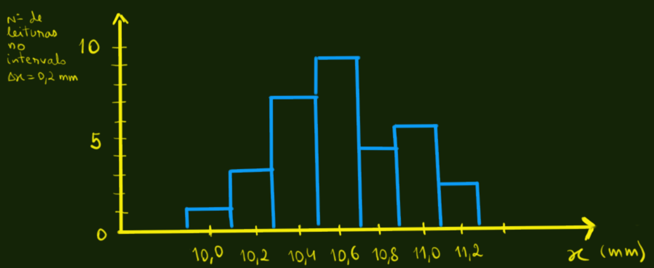
ANÁLISE ESTATÍSTICA DE ERROS ALEATÓRIOS

Distribuição de medições

Exemplo

Intervalo (mm)	N° de vezes em que a medida ocorre no intervalo
9,9 – 10,1	1
10,1 – 10,3	3
10,3 – 10,5	7
10,5 – 10,7	9
10,7 – 10,9	4
10,9 – 11,1	5
11,1 – 11,3	2

Histograma



Se continuarmos a fazer medidas até obter um n° muito grande dessas medidas e tomando Δx muito pequeno obtem-se uma curva contínua conhecida por função de distribuição, $f(x)$ ($f(x)$ é a fracção do n° de medidas em cada intervalo)

Significado da função de distribuição

$f(x)\,dx \equiv$ fracção das N medidas situadas no intervalo x a $x+dx$

ou

probabilidade de que uma única medida tomada ao acaso na distribuição se situe no intervalo x a $x+dx$

A probabilidade de que uma medida se situe em todo o domínio tem que ser igual a 1:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$$

Valor médio

No caso de uma distribuição discreta de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, a média aritmética é

$$\boxed{\bar{x} = \sum_i x_i\, p_i(x_i)} \quad , \quad p_i(x_i) \equiv \text{probabilidade de que ocorra o valor } x_i$$

Por analogia, tem-se, para uma distribuição contínua

$$\boxed{\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx}$$

Desvio padrão da distribuição

O erro de uma medida de valor x é

$$e = x - X \quad , \quad \text{onde } X \equiv \text{verdadeiro valor (desconhecido)}$$

O valor quadrático médio do erro é

$$\boxed{\overline{e^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - X)^2 f(x)\,dx}$$

variância da distribuição

Desvio padrão é a raiz quadrada da variância

$$\boxed{\sigma_x = \left(\overline{e^2}\right)^{1/2}}$$

σ_x é uma medida da largura da distribuição, ou seja, da dispersão das medidas.

Desvio padrão da média

Numa experiência a melhor estimativa para a quantidade que se quer medir é a média

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Erro da i-ésima leitura: $e_i = x_i - X$, $X \equiv$ verdadeiro valor

Erro do valor médio: $E = \bar{x} - X$

Suponhamos que o nº de medições é suficientemente grande para que possamos dividi-lo em conjuntos de m medidas

$$\underbrace{x_1 \; x_2 \cdots x_m}_{m \text{ medidas}} \;\; \underbrace{x_{m+1} \; x_{m+2} \cdots x_{2m}}_{m \text{ medidas}} \;\; \underbrace{x_{2m+1} \cdots x_{3m}}_{m \text{ medidas}} \;\; \underbrace{\cdots}$$

$$\bar{x}_A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \qquad \bar{x}_B \qquad \bar{x}_C \qquad \cdots$$

O conjunto de valores médios $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C, \ldots$ formam uma distribuição cujo desvio padrão designamos por desvio padrão da média ($\sigma_{\bar{x}}$)

↓ ↓

Toma-se como a incerteza do valor médio

Relação entre σ_x e $\sigma_{\bar{x}}$

O erro do valor médio, para n medidas é:

$$\begin{aligned} E &= \bar{x} - X \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n} n X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - X)}_{e_i \text{ (erro da i-ésima medida)}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} e_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} e_i e_j\right] \end{aligned}$$

Vamos calcular o valor médio de E^2, ou seja, o quadrado do desvio padrão da média $\sigma_{\bar{x}}^2 = \overline{E^2}$

Para isso tomamos um grande nº de conjuntos de n medidas e fazemos a média sobre todos os conjuntos:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{n^2}\overline{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} + \frac{1}{n^2}\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_i e_j}$$

(a barra — na parte superior denota o "valor médio")

Mas:

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = n\,\overline{e^2}$$

(o somatório dos valores médios é n vezes o valor médio)

$$\overline{\sum_i \sum_j e_i e_j} = 0$$

(porque os erros e_i e e_j são independentes)

Conclui-se que: $\overline{E^2} = \frac{1}{n}\overline{e^2}$

Tendo em consideração que

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \overline{E^2} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x^2 = \overline{e^2}$$

resulta

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n}\sigma_x^2$$

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

Note-se que:

- σ_x depende apenas da precisão das medições individuais
- $\sigma_{\bar{x}}$ decresce com o aumento do nº de medições (n)

Estimativa de σ_x

No caso de uma distribuição discreta

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2}$$

$X \equiv$ verdadeiro valor da grandeza que se mede

X é desconhecido $\Rightarrow$ não podemos calcular σ_x usando a expressão anterior

Alternativa: usar os resíduos ($d_i = x_i - \bar{x}$) em vez dos erros e_i e estabelecer uma relação aproximada com σ_x

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

$$s = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2}$$ desvio padrão da população

Recordar que:

- $e_i = x_i - X \quad \Rightarrow \quad x_i = e_i + X$
- $E = \bar{x} - X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)$

Então:

$$\begin{aligned}
x_i - \bar{x} &= e_i + X - \bar{x} \\
&= e_i + X - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= e_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= e_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X) \\
&= e_i - E
\end{aligned}$$

Podemos então escrever para o desvio padrão da população ao quadrado

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i - E)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i^2 - 2Ee_i + E^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum e_i^2 - 2E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 - 2E\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)}_{E} + E^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 - 2E^2 + E^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 - E^2
\end{aligned}$$

Tomando a média sobre um grande nº de conjuntos de n medidas (à semelhança do que fizemos anteriormente):

$$\begin{aligned}
\overline{s^2} &= \overline{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2} - \overline{E^2} \\
&= \sigma_x^2 - \sigma_{\bar{x}}^2
\end{aligned}$$

Mas: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n}\sigma_x^2$

Logo: $\overline{s^2} = \sigma_x^2 - \frac{1}{n}\sigma_x^2 = \sigma_x^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}\overline{s^2} = \frac{n}{n-1}\overline{s^2}$$

Numa situação real $\overline{s^2}$ não é rigorosamente conhecido (porque apenas medimos um conjunto limitado de $\underline{n}$ valores).

A melhor estimativa de $\overline{s^2}$ é $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Usando esta estimativa, obtem-se

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &\simeq \frac{n}{n-1}s^2 \\
&\simeq \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_x \simeq \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2}}$$ Desvio padrão da amostra