Ondas em fluídos e em meios elásticos

- **Ondas em fluídos**
- Ondas longitudinais. Ondas sonoras.
- Considere-se a equação de Navier-Stokes no caso em que se podem desprezar as forças de volume:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho}\left(k' + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$$

- Inicialmente o fluído estava em equilíbrio a uma pressão P_0 e com densidade ρ_0.
- Vamos assumir que o fluído sofre uma pequena perturbação que o põe a oscilar.
- As oscilações correspondem a variações periódicas da pressão e da densidade:

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho \qquad\qquad P = P_0 + \Delta P$$

- Uma vez que o fluído em média está em equilíbrio (hidrostática) e não irá fluir, então podemos desprezar as forças de viscosidade e o termo de convecção (2º termo do lado esquerdo da equação de Navier-Stokes).

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}}_{\approx 0} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \underbrace{\frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho}\left(k' + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{v})}_{=0}$$

Equação de onda, para *f*(x,y,z,t)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Ondas em fluídos e em meios elásticos

- Juntando a equação da página anterior com a equação da continuidade, tem-se:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla P}{\rho} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

- Desenvolvendo as equações em termos de $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ e de $P = P_0 + \Delta P$, para pequenas perturbações:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla(\Delta P)}{\rho_0} \qquad \frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho \qquad P = P_0 + \Delta P$$

- Derivando a equação da continuidade em ordem ao tempo:

$$\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = 0 \qquad \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla \cdot \left(-\frac{\nabla(\Delta P)}{\rho_0}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial t^2} - \nabla^2 \Delta P = 0$$

Equação de onda, para *f*(x,y,z,t)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Ondas em fluídos e em meios elásticos

- Como $\rho = M/V$ então $V = M/\rho$ (em que M é a massa no volume V).
- Da relação entre a pressão e variação relativa do volume, em que K é o módulo volumétrico, tem-se:

$$\Delta P = -K\frac{\Delta V}{V} \qquad \Delta V = -\frac{M}{\rho^2}\Delta\rho \longrightarrow \Delta P = K\frac{M}{V}\frac{\Delta\rho}{\rho^2} = K\rho\frac{\Delta\rho}{\rho^2}$$

$$\Delta P = K\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

- Logo:

$$\frac{\partial^2\Delta\rho}{\partial t^2} - \nabla^2\left(K\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) = 0 \qquad \frac{\partial^2\Delta\rho}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\nabla^2\Delta\rho$$

$$\nabla^2\Delta\rho = \frac{1}{\frac{K}{\rho_0}}\frac{\partial^2\Delta\rho}{\partial t^2} \longrightarrow$$

- Equação de onda para $\Delta\rho$.
- Para ondas harmónicas $\boxed{v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}}$ é a velocidade de propagação da onda.

Equação de onda, para *f*(x,y,z,t)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Ondas em fluídos e em meios elásticos

- **Ondas harmónicas**

- As vibrações harmónicas são representadas por funções do tipo $A \cdot sen(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)$ ou do tipo $A \cdot cos(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_2)$.

- ω é a frequência angular (em rad/s), que é dada por $\omega = 2\pi f$ ou por $\omega = \frac{2\pi}{T}$, onde f é a frequência (em hertz) e *T* é o período (em segundos).

- $\vec{k}$ é o vetor de onda e aponta no sentido de propagação da onda. O seu módulo é $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, onde λ é o comprimento de onda (em metros).

- No caso em que se tem $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$, a onda é progressiva, deslocando-se no sentido positivo dos eixos. No caso em que se tem $\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}$, a onda desloca-se no sentido negativo.

- Escrevendo as ondas em fluídos em termos de vibrações harmónicas:

$$\Delta\rho = A\cos(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1) \quad \text{ou} \quad \Delta\rho = A\,\mathrm{sen}(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_2)$$

- Em que *A* é a amplitude da onda.

- Quando ambas as equações acima representam a mesma onda, então φ_1 e φ_2 estão desfasados de 90º ($\varphi_1 = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}$)

- A velocidade de propagação da onda é dada por $\mathrm{v} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$.

Ondas em fluídos e em meios elásticos

- **Ondas harmónicas**
- Para se representar a forma geral das ondas harmónicas usa-se a exponencial complexa, que é definida da forma:

$$e^{i(\omega t \pm \vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)} = \cos\left(\omega t \pm \vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi\right) + i\, sen(\omega t \pm \vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)$$

- A parte real contem o termo em co-seno e a parte imaginária em seno.
- Frequentemente, as operações com a exponencial complexa são mais simples que com as funções trigonométricas.
- Ao argumento do seno ou do co-seno, ou seja $\omega t \pm \vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi$, dá-se o nome de fase da onda.
- De acordo com o teorema de Fourier, uma oscilação geral pode ser escrita como uma sobreposição (soma) de ondas harmónicas.

Ondas em fluídos e em meios elásticos

- **Vibrações em meios elásticos**
- Os sólidos têm todos algum grau de elasticidade e, quando, sujeitos a forças de excitação (por exemplo, martelo a bater num sino), são, em consequência, postos a oscilar.
- Quando a força de excitação é aplicada eles sofrem deformação, com deslocamentos $\vec{u}(\vec{r},t)$ que dependem do tempo.
- Aqui assume-se que os sólidos são homogéneos, isotrópicos e com deslocamentos pequenos em relação ao equilíbrio.
- Conforme se viu quando se estudou elastoestática, a força resultante ($\vec{f}_R$) no meio elástico é:

$$f_{Ri} = f_{Vi} + \mu \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

Em notação de tensores

$$\vec{f}_R = \vec{f}_V + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \left(\nabla \cdot \vec{u} \right)$$

Em notação simbólica

- Em que μ e λ são os coeficientes de Lamé (considerados constantes). Aqui iremos ignorar as forças de volume (ex., a gravidade) dadas por $\vec{f}_V$.
- Uma vez que $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0$, em que $\vec{r}_0$ é a configuração de referência (que é sempre constante), então a velocidade pode ser relacionada com o vetor deslocamento:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

Equação de onda, para *f*(x,y,z,t)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Ondas em fluídos e em meios elásticos

- **Equação de Navier**
- Pela 2ª lei de Newton normalizada pelo volume, $\vec{f}_R = m\vec{a}/V \Longrightarrow \vec{f}_R = \rho\vec{a} \Longrightarrow \vec{f}_R = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$.
- Assim, obtém-se a **equação de Navier do movimento**:

$$\mu\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Em notação de tensores

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$$

Em notação simbólica

- O vetor deslocamento pode ser decomposto em duas componente: $\vec{u}_L$ -> componente longitudinal e $\vec{u}_T$ -> componente transversal.
- Na componente longitudinal a oscilação (deslocamento $\vec{u}_L$) é na mesma direção que a direção de propagação da onda.
- Na componente transversal a oscilação (deslocamento $\vec{u}_T$) é na direção perpendicular à direção de propagação da onda.
- O deslocamento total $\vec{u}$ é dado por:

$$\vec{u} = \vec{u}_T + \vec{u}_L$$

- A componente transversal tem divergência nula, enquanto a componente longitudinal tem rotacional nulo. Ou seja:

$$\nabla\cdot\vec{u}_T = 0 \qquad\qquad \nabla\times\vec{u}_L = 0$$

Equação de onda, para *f*(x,y,z,t)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Ondas em fluídos e em meios elásticos

- **Onda transversal**
- Uma vez que $\nabla \cdot \vec{u}_T = 0$, substituindo na equação de Navier tem-se:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \Longrightarrow \nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Em notação simbólica

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Em notação de tensores

- A equação acima representa a equação de onda para ondas transversais, em que a velocidade de propagação é dada por:

$$\boxed{v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}$$

Equação de onda, para *f*(x,y,z,t)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Ondas em fluídos e em meios elásticos

Nota: para um vetor geral:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$$

- **Onda longitudinal**
- Uma vez que $\nabla \times \vec{u}_T = 0$, tem-se:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_L) = 0 \Longrightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u} = 0 \Longrightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = \nabla^2 \vec{u}$$

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

- Tem-se, então:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \Longrightarrow \nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Em notação simbólica

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \frac{1}{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Em notação de tensores

- A equação acima representa a equação de onda para ondas longitudinais, em que a velocidade de propagação é dada por:

$$\boxed{v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}$$

$$v_L > v_T$$

A onda longitudinal propaga-se com velocidade maior do que a da onda transversal.

Equação de onda, para *f*(x,y,z,t)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$