TPC - Aula de problemas dia 09/03/2021

Carlos Miguel Passos Ferreira, A92846, MIEFIS

28 de março, 2021

1 Problema 1

O estado do spin de um eletrão é dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle$$

Qual é a probabilidade de encontrar o spin $\downarrow$ como resultado de medição? Qual é a probabilidade de encontrar como resultado da medição " + ", com $|+\rangle = \frac{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$?

Desenvolvimento :

Numa primeira instância, verifica-se se o estado ψ se encontra normalizado:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle\uparrow| + \sqrt{\frac{2}{3}}\langle\downarrow|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle\right) = \\ &= \frac{1}{3}\langle\uparrow|\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}\langle\uparrow|\downarrow\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}\langle\downarrow|\uparrow\rangle + \frac{2}{3}\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \\ &= 1\end{aligned}$$

Confirmada a normalização do estado ψ, prossegue-se para o cálculo da amplitude de probabilidade de sair $|\downarrow\rangle$, feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}a_{|\downarrow\rangle} &= \langle\downarrow|\psi\rangle = \\ &= \langle\downarrow|\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Após a obtenção da amplitude, obtem-se o valor da probabilidade de encontrar o spin $\downarrow$:

$$P_{|\downarrow\rangle} = \left|a_{|\downarrow\rangle}\right|^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

Finalmente, prossegue-se ao cálculo da amplitude de sair $|+\rangle$, a qual posteriormente nos servirá para a obtenção da sua probabilidade:

$$\begin{aligned}
a_{|+\rangle} &= \langle +|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\downarrow|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\uparrow \mid \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}\langle\uparrow \mid \downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\downarrow \mid \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}\langle\downarrow \mid \downarrow\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Feito este cálculo, prosseguimos à obtenção da probabilidade de sair $|+\rangle$, pelo mesmo processo usado no caso anterior:

$$\begin{aligned}
P_{|+\rangle} = \left|a_{|+\rangle}\right|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{6} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{6} = \\
&= \frac{1}{6}\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \\
&\approx \frac{1}{6}(3 + 2 \times 1,4) \approx \\
&\approx 0,97
\end{aligned}$$

2 Problema 2

Normalize o estado $2|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle$.

Desenvolvimento :

Admitindo de que o estado indicado no enunciado se trata do estado ψ, iremos normaliza-lo, tendo em conta a seguinte expressão:

$$|\psi\rangle_{normalizado} = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}} \tag{1}$$

Para tal, apenas precisamos de obter o valor do denominador da expressão acima, obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= (2\langle\uparrow| + 4\langle\downarrow|)\,(2|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle) = \\ &= 4\langle\uparrow|\uparrow\rangle + 8\langle\uparrow|\downarrow\rangle + 8\langle\downarrow|\uparrow\rangle + 16\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \\ &= 20\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{normalizado} &= \frac{2|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle}{\sqrt{20}} = \frac{2|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle}{2\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}|\uparrow\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|\downarrow\rangle\end{aligned}$$

3 Problema 3

Um eletrão é preparado no estado de spin " $2|\uparrow\rangle - 3i|\downarrow\rangle$ ". Normalize o estado e calcule a probabilidade de encontrar os spins $|\uparrow\rangle$ e $|+\rangle = \frac{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$. Qual é o valor esperado do componente z do spin?

Desenvolvimento :

Admitindo de que o estado $2|\uparrow\rangle - 3i|\downarrow\rangle$ pode ser considerado como sendo o estado $|\psi_i\rangle$. Iremos normalizar este estado:

$$\begin{aligned}\langle\psi_i|\psi_i\rangle &= (2\langle\uparrow| + 3i\langle\downarrow|)\,(2|\uparrow\rangle - 3i|\downarrow\rangle) = \\ &= 4\langle\uparrow|\uparrow\rangle - 6i\langle\uparrow|\downarrow\rangle + 6i\langle\downarrow|\uparrow\rangle - 9i^2\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \\ &= 13\end{aligned}$$

Pela expressão 1, temos que:

$$\begin{aligned}|\psi_i\rangle_{normalizado} &= \frac{2|\uparrow\rangle - 3i|\downarrow\rangle}{\sqrt{13}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}}|\uparrow\rangle - \frac{3i}{\sqrt{13}}|\downarrow\rangle\end{aligned}$$

Prosseguindo para o cálculo das probalidades indicadas no enunciado:

1. Probabilidade de encontrar o spin $|\uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}a_{|\uparrow\rangle} &= \langle\uparrow|\psi_{i_{normalizado}}\rangle = \langle\uparrow|\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}}|\uparrow\rangle - \frac{3i}{\sqrt{13}}|\downarrow\rangle\right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}}\langle\uparrow|\uparrow\rangle - \frac{3i}{\sqrt{13}}\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_{|\uparrow\rangle} &= \left|a_{|\uparrow\rangle}\right|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \\
&= \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \\
&= \frac{4}{13}
\end{aligned}
$$

2. Probabilidade de encontrar o spin $|+\rangle$

$$
\begin{aligned}
a_{|+\rangle} &= \langle +|\psi_{i_{normalizado}}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\downarrow|\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}}|\uparrow\rangle - \frac{3i}{\sqrt{13}}|\downarrow\rangle\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{-3i}{\sqrt{13}}\right) = \\
&= \frac{2-3i}{\sqrt{26}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{|+\rangle} &= \left|a_{|+\rangle}\right|^2 = \left(\frac{2-3i}{\sqrt{26}}\right)\left(\frac{2+3i}{\sqrt{26}}\right) = \\
&= \frac{(2-3i)(2+3i)}{26} = \frac{4-9i^2}{26} = \\
&= \frac{13}{26} = \frac{1}{2} = \\
&= 0,5
\end{aligned}
$$

Por fim, precisa-se de calcular o valor esperado do componente $z$da rotação do spin. Sabe-se que:

- $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - \frac{\hbar}{2}c\langle\downarrow| = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

O estado $|\psi_i\rangle_{normalizado}$ representado na forma matricial será:

$$
|\psi_{i_{normalizado}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3i \end{pmatrix}
$$

pelo que o seu conjugado define-se por:

$$
\langle\psi_{i_{normalizado}}| = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & 3i \end{pmatrix}
$$

Com isto, temos :

$$\begin{aligned}
\langle\psi_{i_{normalizado}}|\,\hat{S}_z\,|\psi_{i_{normalizado}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & 3i \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3i \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{13}\times\begin{pmatrix} 2 & 3i \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3i \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{13}\times\frac{\hbar}{2}\times(-5) = \\
&= \frac{-5\hbar}{26}
\end{aligned}$$

4 Problema 4

Construa a matriz de S_y, da mesma forma que $S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Sugestão do professor:

Sabe-se que:

$$\begin{cases}
\hat{S}_x &= \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{S}_z &= \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2}\sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}
\end{cases}$$

Além disso, temos que:

$$\begin{cases}
|\circlearrowleft\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \\
|\circlearrowright\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle
\end{cases}$$

Definindo um estado γ tal que:

$$|\gamma\rangle = \sqrt{p_{\circlearrowleft}}\,|\circlearrowleft\rangle + \sqrt{p_{\circlearrowright}}\,|\circlearrowright\rangle \tag{2}$$

Temos que a média do estado γ do $\mathbf{\hat{S}_y}$ pode ser obtida por:

$$\langle\gamma|\,\hat{S}_y\,|\gamma\rangle = \frac{\hbar}{2}p_{\circlearrowleft} + p_{\circlearrowright}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) \tag{3}$$

onde

$$\begin{cases}
a_{\circlearrowleft} &= \langle\circlearrowleft|\gamma\rangle \\
a_{\circlearrowright} &= \langle\circlearrowright|\gamma\rangle
\end{cases} \text{ o que implica que } \begin{cases}
p_{\circlearrowleft} &= |\langle\circlearrowleft|\gamma\rangle|^2 \\
p_{\circlearrowright} &= |\langle\circlearrowright|\gamma\rangle|^2
\end{cases}$$

Desenvolvimento:

Pela equação 3 temos que:

$$\begin{aligned}
\langle\gamma|\,\hat{\mathbf{S_y}}\,|\gamma\rangle &= \frac{\hbar}{2}\,|\langle\circlearrowleft|\gamma\rangle|^2 - \frac{\hbar}{2}\,|\langle\circlearrowright|\gamma\rangle|^2 = \\
&= \frac{\hbar}{2}\,\langle\circlearrowleft|\gamma\rangle\,\langle\circlearrowleft|\gamma\rangle^* - \frac{\hbar}{2}\,\langle\circlearrowright|\gamma\rangle\,\langle\circlearrowright|\gamma\rangle^* = \\
&= \frac{\hbar}{2}\,\langle\circlearrowleft|\gamma\rangle\,\langle\gamma|\circlearrowleft\rangle - \frac{\hbar}{2}\,\langle\circlearrowright|\gamma\rangle\,\langle\gamma|\circlearrowright\rangle = \\
&= \frac{\hbar}{2}\,\langle\gamma|\circlearrowleft\rangle\,\langle\circlearrowleft|\gamma\rangle - \frac{\hbar}{2}\,\langle\gamma|\circlearrowright\rangle\,\langle\circlearrowright|\gamma\rangle = \\
&= \langle\gamma|\left[\frac{\hbar}{\mathbf{2}}\,|\circlearrowleft\rangle\,\langle\circlearrowleft| - \frac{\hbar}{\mathbf{2}}\,|\circlearrowright\rangle\,\langle\circlearrowright|\right]|\gamma\rangle
\end{aligned}$$

de onde se conclui que $\hat{S_y} = \frac{\hbar}{2}\,|\circlearrowleft\rangle\,\langle\circlearrowleft| - \frac{\hbar}{2}\,|\circlearrowright\rangle\,\langle\circlearrowright|$.

Desenvolvendo este resultado:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\uparrow\rangle + i\,|\downarrow\rangle)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\langle\uparrow| - i\,\langle\downarrow|) - \frac{\hbar}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\uparrow\rangle - i\,|\downarrow\rangle)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\langle\uparrow| + i\,\langle\downarrow|) = \\
&= \frac{\hbar}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right] - \\
&- \frac{\hbar}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right] = \\
&= \frac{\hbar}{2}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix} = \\
&= \frac{\hbar}{2}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\right] = \\
&= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclui-se que : $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$, onde $\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ representa a sua matriz de Pauli.

5 Problema 5

Dada a representação da matriz do observavél $S_\phi = \cos(\phi)S_x + \sin(\phi)S_y$. Calcule o valor esperado de S_ϕ dado o estado de spin

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}|\downarrow\rangle \tag{4}$$

sendo $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ os estados de spin para cima e para baixo na direção z. Qual é a incerteza ΔS_ϕ?

Desenvolvimento :

Tendo em conta as definições de S_x e S_y usadas no problema anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
S_\phi &= \cos(\phi)S_x + \sin(\phi)S_y = \cos(\phi)\frac{\hbar}{2}\sigma_x + \sin(\phi)\frac{\hbar}{2}\sigma_y = \\
&= \cos(\phi)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin(\phi)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sin(\phi) \\ i\sin(\phi) & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cos(\phi) - i\sin(\phi) \\ \cos(\phi) + i\sin(\phi) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sabendo que $\cos(\phi) \pm i\sin(\phi) = e^{\pm i\phi}$, podemos simplificar o resultado acima:

$$S_\phi = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

Relativamento ao estado $|\psi\rangle$, temos que:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}|\downarrow\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, temos que a média do valor esperado do S_ϕ será:

$$\langle\psi|\,\hat{S}_\phi\,|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}\; e^{i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)} \\ \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)}\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)}\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right) =$$

$$= \hbar \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)$$

Obtendo este valor, passamos ao cálculo de ΔS_ϕ:

$$(\Delta S_\phi)^2 = \langle\psi|\,(\hat{S}_\phi)^2\,|\psi\rangle - \langle\psi|\,\hat{S}_\phi\,|\psi\rangle^2 \tag{5}$$

Pelo resultado acima obtido temos que:

$$\langle\psi|\,\hat{S}_\phi\,|\psi\rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4} - \hbar^2 \times \frac{2}{9} \times \cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)$$

Dessa forma, é-nos apenas necessário obter $\langle\psi|\,(\hat{S}_\phi)^2\,|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\,(\hat{S}_\phi)^2\,|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{+i\phi} & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{+i\phi} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{+i\phi} & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)} \\ \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}$$

Assim, basta substituir estes valores obtidos acimas na equação 5 para obter o valor pretendido:

$$(\Delta S_\phi)^2 = \frac{\hbar^2}{4} - \hbar \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\Delta S_\phi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} - \hbar^2 \times \frac{2}{9} \times \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right)}$$