Ficha 6

1. Demonstre que no espaço euclideano complexo $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$.

2. Sejam X um espaço euclideano, $Y \subset X$ um subespaço e $x \in X$ um vector. Suponha-se que $y_1 \in Y$ e $y_2 \in Y$ verificam a condição $|x-y_1| = \min_{y\in Y} |x-y| = |x-y_2|$. Demonstre que $y_1 = y_2$.

3. Represente $f \in R^4$ na forma $f = f_1 + f_2$, onde $f_1 \in$Lin$\{b_i\}$, e $f_2 \perp$Lin$\{b_i\}$:

   (a) $f = (5, 2, -2, 2)$, $b_1 = (2, 1, 1, -1)$, $b_2 = (1, 1, 3, 0)$;

   (b) $f = (-3, 5, 9, 3)$, $b_1 = (1, 1, 1, 1)$, $b_2 = (2, -1, 1, 1)$, $b_3 = (2, -7, -1, -1)$.

4. Utilizando o método de ortogonalização construa uma base ortogonal no subespaço $L \subset R^4$, gerado pelos vectores $(1, 2, 1, 3)$, $(4, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 0)$.

5. Encontre a distância entre o subespaço definido pelo sistema

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$

   e o vector $(2, 4, 0, -1)$.

6. Encontre os valores e vetores próprios das matrizes:

   (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Seja $A : K^n \to K^n$ uma aplicação linear. Suponha-se que numa base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ a matriz desta aplicação é diagonal, com diagonal $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, não são necessariamente diferentes. Demonstre que A não tem outros valores próprios.

8. Demonstre que toda a aplicação linear $A : R^{2n+1} \to R^{2n+1}$ tem pelo menos um vetor próprio real.

9. Encontre os vetores próprios e valores próprios da aplicação de derivação no espaço dos polinómios de grau $\leq n$.

10. Demonstre que o vetor próprio da aplicação A com o valor próprio λ é um vetor próprio da aplicação $P(A)$, onde P é um polinómio, e o seu valor próprio é $P(\lambda)$.

11. Seja $A : K^n \to K^n$ uma aplicação linear cuja inversa existe. Demonstre que A e A^{-1} têm os mesmos vetores próprios.

12. Demonstre que se λ^2 é um valor próprio da aplicação A^2, então λ ou $-\lambda$ é um valor póprio de A.