

1. Considere uma onda plana monocromática, linearmente polarizada segundo  $zz'$  e a propagar-se no vazio segundo  $yy'$ .
- a) Obtenha todos os elementos do correspondente tensor de Maxwell.
- b) Imagine que a referida onda plana tem uma frequência angular  $\omega = 10^{10} \text{ rad/s}$  e incide normalmente numa superfície metálica ( $\sigma = 6 \times 10^7 [\Omega.m]^{-1}$ ;  $\epsilon \sim \epsilon_0 = 8,854 \times \frac{10^{-12} F}{m}$ ;  $\mu \sim \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$ ). Qual o comprimento de penetração da radiação no metal? (indique apenas as contas e explique o seu raciocínio).
- c) Qual a diferença de fase entre o campo magnético e o campo eléctrico no interior do metal?

Recorde:  $T_{ij} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2)$ ;  $k = k_1 + ik_2$ ;

$$k_1 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad k_2 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(6 valores)

2. a) Explique por que razão modos TEM não podem existir no interior num tubo oco de paredes perfeitamente condutoras.

Pista: considere um tubo orientado segundo  $zz'$  e analise as implicações das leis de Gauss ( $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ) e de Faraday ( $\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ ) se  $E_z = B_z = 0$ .

- b) Considere agora um modo TE propagando-se no interior do referido tubo, supondo que este é rectangular e tem uma secção transversal  $a \times b$ . A relação de dispersão deste modo é, nestas

condições,  $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}$ , com  $\omega_{mn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$ . Quais as velocidades de fase e de grupo correspondentes? Como se comparam estas velocidades com  $c$  (a velocidade da luz no vazio)?

(5 valores)

3. a) Explique como pode formular as equações de Maxwell em termos dos potenciais  $\vec{A}$  e  $\varphi$ .

- b) O que entende por liberdade de gauge?

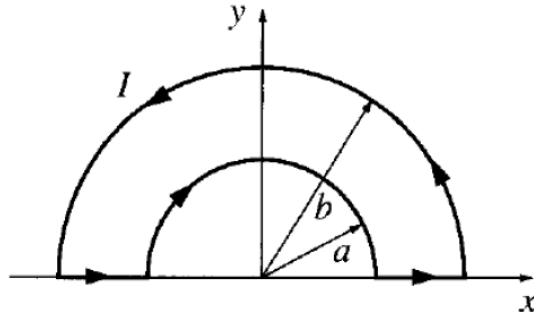
- c) Considere os potenciais  $\varphi = 0$  e  $\vec{A} = A_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t)$ . Obtenha os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  por eles gerados.

(Recorde as eqs. de Maxwell:  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ ,  $\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j}$  )

(4 valores)

4. O fio representado na figura abaixo transporta uma corrente que cresce proporcionalmente ao quadrado do tempo,  $I(t) = kt^2$ .
- Calcule os potenciais retardados no ponto  $O$ .
  - Obtenha o campo eléctrico em  $O$ .

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad t_R = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$



(5 valores)