Exercícios de Física Computacional

Escola de Ciências da Universidade do Minho

Física e Engenharia Física

ano letivo 2021/2022, 1º semestre

Folha 2

1. Considere uma tina de ondas, em que as ondas radiam a partir do ponto em que são geradas. Se este ponto tiver coordenadas (x_1, y_1) a distância r_1 em relação a um ponto (x, y) será $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, podendo a onda ser descrita por

$$\phi_1(x, y) = A_1 \sin(k_1 r_1) \ ,$$

onde A_1 é a amplitude das ondas geradas e k_1 é o seu número de onda. Considere agora que uma segunda onda, $\phi_2(x, y)$ é gerada no ponto (x_2, y_2) com amplitude A_2 e número de onda k_2. Assumindo que a onda resultante resulta da soma linear das duas ondas, escreva um programa que calcule a altura da superfície de água em qualquer ponto da tina de ondas, que tem uma forma quadrada. Considere que o comprimento de onda das duas ondas é 5 cm, a sua amplitude 1 cm, que foram geradas no centro da tina, separadas por 20 cm na horizontal.
Sugestão: considere uma grelha de 500×500 pontos para cobrir uma tina quadrada com 1 m de lado. Use a função `imshow` para fazer a representação bidimensional da altura da água em função de (x, y).

2. Um dos exemplos mais famosos de caos determinista é o mapa logístico, definido pela seguinte equação iterativa:

$$x' = rx(1 - x). \tag{1}$$

Para um determinado valor de r, considere um valor de x e insira-o no lado direito da equação, obtendo um novo valor x'. Esta operação iterativa deve ser repetida um número grande de vezes, podendo acontecer uma de 3 coisas:

- os valores de x convergem para um determinado número e estabilizam aí. Por exemplo $x = 0$ é sempre um ponto fixo no mapa logístico;
- x não converge para um único número, mas origina-se um padrão periódico em torno de um pequeno número de valores;
- originam-se sequências de números pseudo-aleatórios (caos determinista)

(a) Escreva um programa que calcule e mostre o mapa logístico para $r \in [0; 4]$, representando os resultados num gŕafico de x em função de r. Nota: comece por fazer 1000 iterações para cada valor de r e seguidamente implemente um novo ciclo com mais 1000 iterações para obter os valores que serão representados no gráfico.

(b) Identifique os valores de r para que surgem cada uma das 3 situações descritas acima.

3. Os dados no ficheiro `millikan.txt` são os obtidos numa experiência histórica efetuada por Robert Millikan para estudar o efeito fotoelétrico. Quando luz de um comprimento de onda apropriado incide na superfície de um metal, podem ser ejetados eletrões do metal, sendo a sua energia igual à do fotão menos a função trabalho ϕ. A energia do fotão é $h\nu$, send h a constante de Planck e ν a frequência da luz. A energia do fotão ejetado pode ser medida através da diderença de potencial V necessária para o parar, levando a que a corrente associada se anule. A diferença de potencial, frequência e função trabalho relacionam-se da seguinte forma:

$$V = \frac{h}{e}\nu - \phi,$$

onde e é a carga do eletrão, 1.602×10^{-19} C.

Os dados constantes do ficheiro `millikan.txt` representam as frequências (em Hz) na primeira coluna e a diferença de potencial (em V) na segunda.

Usando estes dados determine a medida experimental de h, ajustando os dados à expressão adequada.

Nota: se

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}(mx_i + c - y_i)^2.$$

então o ajuste por mínimos quadrados pode ser feito com as seguintes expressões:

$$m = \frac{E_{xy} - E_x E_y}{E_{xx} - E_x^2}, \qquad c = \frac{E_{xx}E_y - E_x E_{xy}}{E_{xx} - E_x^2},$$

em que

$$E_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \qquad E_y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i, \qquad E_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2, \qquad E_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

4. Resolva a equação $4^x - 3^{2x} + 2^{3x} - 1 = 0$ usando os métodos da bissecção e da secante.

5. Resolva a equação $x^2 - x - 1 = 0$ usando o método de Newton.

6. Inverta a seguinte matriz e verifique o resultado obtido:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Faça a decomposição LU da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

8. Implemente um código geral para resolver sistemas lineares de equações usando o método de eliminação de Gauss. Verifique o código comparando com a resolução analítica de:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$