Trabalho 6 - Pêndulo elástico: Análise crítica do modelo físico F= -Kx

1. Objetivos

- Estudar o comportamento das molas elásticas e as leis físicas envolvidas.
- Mostrar que os modelos físicos têm limitações que podem ser melhoradas : a introdução do conceito de massa específica de uma mola elástica como exemplo.

2. Introdução

A expressão da força F exercida por uma mola de constante elástica K quando sujeita a uma deformação x é bem conhecida:

$$F = -Kx \qquad \textbf{(6.1)}$$

Esta expressão é uma boa descrição do comportamento de uma mola em equilíbrio, desde que a mola esteja a funcionar em regime elástico. É importante não esquecer que, se a deformação ultrapassar um valor limite, que depende das características da mola em causa, a força exercida pela mola deixa de ser proporcional à deformação provocada e a mola deixa de se poder considerar elástica.

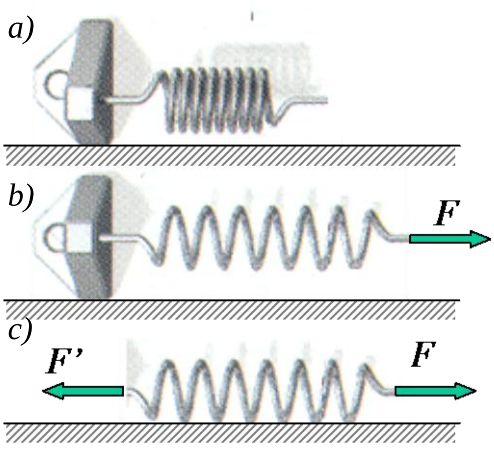


Figura 1 - Mola elástica sujeita a uma força F.

Mas, se a mola estiver em movimento, será válida a equação (6.1)? Será possível que a massa da mola não influencie o movimento?

Vamos supor uma mola em equilíbrio (*figura 1-a*). Num dado momento é aplicada uma força F na extremidade da mola (*figura 1-b*). A mola fica sujeita a uma tensão. As forças aplicadas na mola (*figura 1-c*) são então F e F' (força que o suporte exerce na mola). Da 2ª lei de Newton:

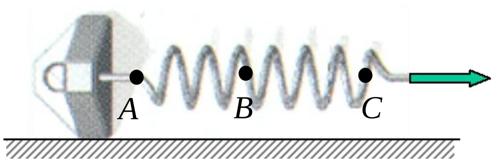
$$\vec{F} - \vec{F}' = m_{mola} \times \vec{a}$$

<u>Se a aceleração, ***a***, for nula</u> (mola em equilíbrio) as forças ***F*** e ***F'*** são iguais, a tensão a que a mola está sujeita é igual em todos os pontos e será diretamente proporcional à deformação da mola – neste caso tudo indica que o modelo $F = -kx$ seja uma boa descrição da situação real.

Mas o que acontecerá se a mola tiver um movimento estica / encolhe com aceleração diferente de zero ? Neste caso as espiras da mola também terão aceleração e, uma vez que a sua massa nunca é nula, terão de estar sujeitas a uma força resultante (2ª lei de Newton).

$$\text{se } \vec{a} \neq 0 \text{ e } m_{mola} \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{F} \neq \vec{F}'$$

Agora os cálculos não são simples já que a aceleração varia de espira para espira : $0 = a_A < a_C < a_B$ e não podemos dizer simplesmente: $\vec{F} - \vec{F}' = m_{mola} \times \vec{a}$ (qual a ? Do ponto A, B ou C ?).



Em rigor a mola tinha de ser considerada como um meio contínuo no qual o movimento se propaga, podendo haver zonas da mola onde as espiras estão mais contraídas e outras onde estão mais distendidas. A solução rigorosa é complexa. No entanto podemos tentar melhorar um pouco o nosso primeiro modelo $F = kx$.

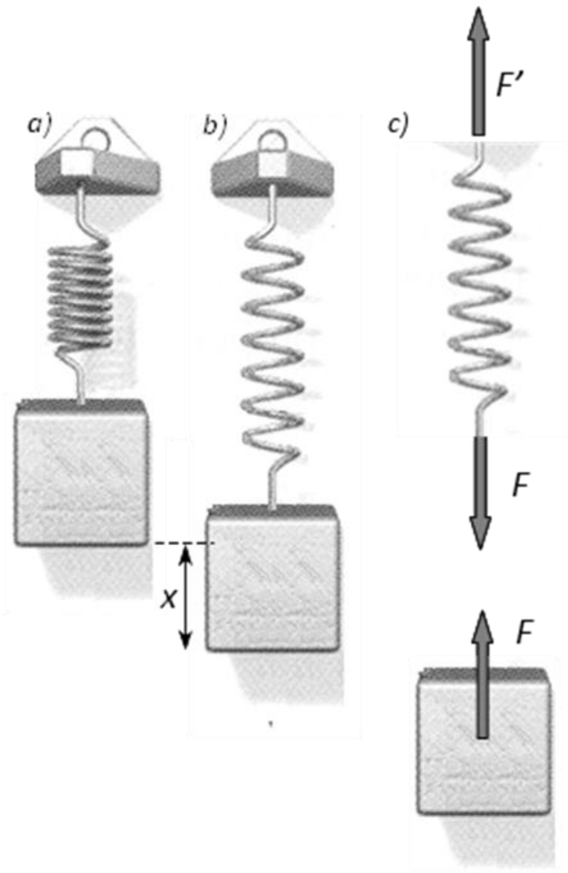
Se a massa da mola e/ou a sua aceleração forem suficientemente pequenas para que as forças F e F' sejam quase iguais, podemos imaginar que esta situação não é muito diferente de admitirmos que a massa da mola está toda concentrada num ponto. Não sabemos que aceleração devemos atribuir a esse ponto, mas sabemos que no ponto C a aceleração pode ser escrita em função da deformação da mola: $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Como este valor de aceleração é apenas válido para o ponto C e todos os restantes pontos têm valores menores de aceleração podemos, para que o modelo seja mais próximo da realidade, admitir que apenas uma parte da massa da mola (a que chamamos *massa eficaz da mola*) tem esta aceleração e que a parte restante está em repouso. De acordo com este modelo a expressão anterior pode ser reescrita:

$$F = -Kx - m_{eficaz}\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \textbf{(6.2)}$$

É possível provar que a massa eficaz da mola corresponde a um terço da sua massa total.

O objetivo deste trabalho é verificar experimentalmente se este modelo descreve bem uma situação de mola em movimento e se é preferível ao 1ºmodelo ($F = kx$).

Determinar a constante K a partir de medidas estáticas é fácil. Mas medir com alguma precisão a força F em situações dinâmicas (com aceleração) não é lá muito fácil e no entanto é isto que precisamos de fazer para saber qual dos modelos é mais adequado. Para isso teremos que utilizar uma estratégia adequada: suspendemos uma massa na ponta da mola e pomos esta a oscilar. O período de oscilação (que podemos medir com uma boa precisão) previsto por cada um dos modelos é diferente, o que nos permitirá dizer qual deles fez a boa previsão e por isso qual está correto .



A figura representa uma mola com uma massa suspensa. Na situação de equilíbrio estático (*figura a)* a mola está deformada e exerce uma força que cancela o peso[1] da massa *m*.

Se o corpo for afastado da posição de equilíbrio (*figura b)*, a mola vai exercer uma força *F* sobre o corpo. Se *x* for o valor do afastamento em relação à posição de equilíbrio estático, e *m* a massa do corpo, podemos escrever a equação do movimento do corpo, para cada um dos modelos.

MODELO I

A força exercida pela mola sobre o corpo será, de acordo com este modelo $F=-kx$. Aplicando a 2º lei de Newton, obtemos a equação de um movimento harmónico:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \textbf{(6.3)}$$

Que admite a solução: $x(t) = Asen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, em que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência angular do movimento. O período do movimento, T_1, de acordo com o *MODELO I* será então:

$$T_I = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \textbf{(6.4)}$$

$$T_I = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \textbf{(6.5)}$$

[1] Consulte o apêndice, no final do guia.

MODELO II

De acordo com este modelo a força F exercida sobre o corpo será $F = -kx - m_{eficaz}\dfrac{d^2x}{dt^2}$, então pela 2º lei de Newton, a equação do movimento será:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m + m_{eficaz}}x = 0 \qquad \textbf{(6.6)}$$

Que corresponde também a um movimento harmónico simples mas de período:

$$T_{II} = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_{eficaz}}{k}} \qquad \textbf{(6.7)}$$

Estas são as duas previsões distintas para o valor do período que irá testar experimentalmente.

3. Procedimento experimental

O trabalho está dividido em duas partes (medidas estáticas e medidas dinâmicas).

MEDIDAS ESTÁTICAS:

1. Meça a massa da mola.
2. Suspenda uma massa na mola, espere que seja atingida a situação de equilíbrio e meça a elongações correspondente.
3. Repita o passo anterior para várias massas diferentes.

MEDIDAS DINÂMICAS:

1. Suspenda uma massa na mola, afaste-a da posição de equilíbrio e meça o tempo correspondente a 20 oscilações.
2. Repita o passo anterior para várias massas diferentes.

4. Análise dos resultados

MEDIDAS ESTÁTICAS:

1. Construa um gráfico da força aplicada à mola em função da elongação.
2. Verifique se a mola está a funcionar em regime elástico
3. Determine a constante K da mola.

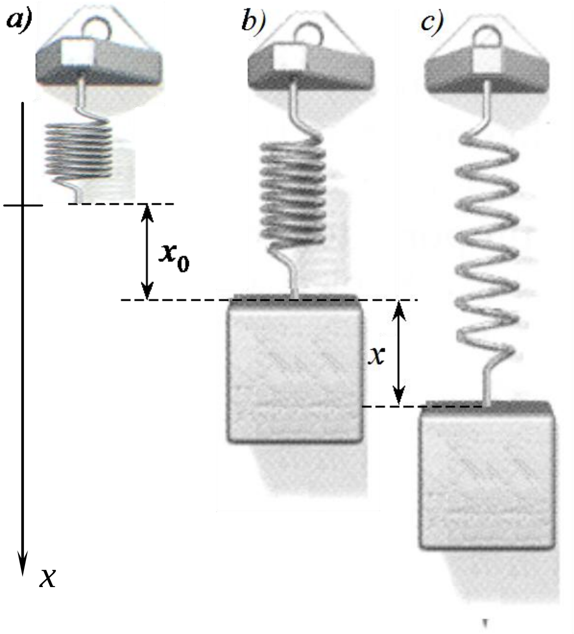
MEDIDAS DINÂMICAS:

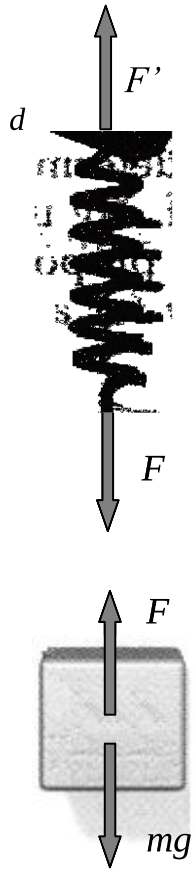
1. Calcule para cada uma das massas suspensas o período de oscilação
3. Represente graficamente o quadrado do período de oscilação em função da massa oscilante.
4. Verifique qual o modelo que melhor se aplica para descrever o movimento que observou. Justifique.
5. A partir do gráfico traçado em (4) determine a massa eficaz da mola e a constante da mola. Comente os resultados obtidos.

APÊNDICE: MOLA NA POSIÇÃO VERTICAL – O EFEITO DO PESO

Na posição *a)* a mola não está deformada. Quando o corpo é suspenso na mola, a mola vai deformar e atinge uma nova posição de equilíbrio – a posição *b)* - a que corresponde uma deformação x_0. Nesta posição o corpo está sujeito ao seu peso e à força F que a mola exerce:

$$F_{mola} = -kx_0$$
$$-kx_0 + mg = 0$$
$$kx_0 = mg$$





Se o corpo é afastado da posição de equilíbrio (*figura c*), fica sujeito a uma força elástica proporcional à elongação da mola (x_0+x) e continua sujeito ao seu peso:

$$F_{res} = -k(x + x_0) + mg \Leftrightarrow F_{res} = -kx - kx_0 + mg$$

Mas já vimos que: $kx_0 = mg$ então:

$$F_{res} = -kx - mg_0 + mg$$

$$F_{res} = -kx$$

Em que x é a elongação da mola medida à posição de equilíbrio com o corpo suspenso.