$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m
↳ constante elétrica

$c = 3 \times 10^8$ m/s
↳ velocidade da luz no vácuo

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m
↳ permitividade do vácuo

Teorema de Gauss: $\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\, dv = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{a}$ → fluxo
(S) → superfície fechada

Teorema de Stokes: $\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$
(C) → curva fechada

Electroestática

dá-nos a indicação de como o camp. el. brota no espaço

força ~~aplicada~~ total aplicada numa carga pontual

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0}$$

a dens. de carga vai gerar o campo elétrico

divergência do campo elétrico

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t) \quad \text{Lei de Coulomb ou de Gauss} \tag{1a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{1b}$$

significa que ñ podem haver monopólo magnético
↓ há sempre um monop. ⊕ que é anulado por um ⊖ (e vice-versa).

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \quad \text{Lei de Faraday} \tag{1c}$$

Se fizer variar um campo magnético gera um campo elétrico

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}}_{=\mu_0}\vec{j}(\vec{r},t) \quad \text{Lei de Ampére} \tag{1d}$$

Um campo elétrico a variar e/ou uma densidade de corrente elétrica a variar também cria um campo magnético

velocidade da luz

densidade de corrente elétrica!

Equações de Maxwell
↓
escritas de forma diferencial (derivada)

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

relação entre as constantes!

$\int_V dv$

$\int_S d\vec{a}$

$\int_C dl$

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, dv = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r},t)\,dv = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2a}$$

dens. de carga

Q → carga total → (*)

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\, dv = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0 \tag{2b}$$

as linhas do campo magnético são fechadas (por isso, contínuo) a soma dos fluxos é = 0

integ. no volume

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\, d\vec{a} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a} \tag{2c}$$

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\, d\vec{a} = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2}\int_S \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)\right)\cdot d\vec{a} \tag{2d}$$

integ. na superf.

Equações de Maxwell integradas

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{3}$$

$\vec{A}$ → potencial vetor!

podemos deduzir o CM como o rotacional de $\vec{A}$, sendo $\vec{A}$ um potencial vetor

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{4}$$

V → potencial elétrico! (escalar!!!)

No campo eletroestático o potencial vetor ñ varia no tempo, logo esta parte é omitida

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{conservação da carga elétrica} \tag{5}$$

significa que a carga elétrica se conserva! (numa superfície, a carga elétrica que sai é = à que entra)

→ saiu no 1º teste

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i^N q_i\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \tag{6}$$

→ CE se tivermos vários cargas pontuais a ≠ distâncias de uma carga Q (referência)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dq \tag{7}$$

→ CE onde a carga é distribuída continuamente sobre uma determinada região.

$dq = \lambda dl'$ → densidade de carga linear

$dq = \sigma da'$ → densidade de carga superficial

$dq = \rho dv'$ → densidade de carga volumétrica

Para $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}\ ;\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Num regime eletroestático, tbm permite chegar ao CE, pois $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$ e $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

permite calcular o potencial elétrico ←

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

→ Padrão de Coulomb [ou] Equação de Poisson: Acontece no vácuo, quando a 3ª eq. de Maxwell fica do tipo $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$, uma vez que o CM é constante ñ havendo nada a depender do tempo, Como $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$

1º equação de Maxwell ← $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\nabla^2 V$
$\Leftrightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$V(\vec{r}) = -\int_O^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l}$$

A expressão $\vec{E} = -\vec{\nabla}.V$ implica a forma de obtenção de $V(\vec{r})$ ao lado

O → ponto de referência ↓ mt. vezes usa-se o ∞

$d\vec{l} = dx.\hat{x} + dy.\hat{y} + dz.\hat{z}$

(*) A igualdade $\oint_S \vec{E}.d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ significa que o fluxo do campo elétrico que sai pela superfície é proporcional à carga que se encontre no seu interior

$Q = \int_V \rho\, dv = \int_S \sigma\, da = \int_C \lambda\, dl$

Obter $V(\vec{r})$ gerado numa distribuição discreta de cargas (conj. de cargas pontuais

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i^N \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \quad (9)$$

Forma de obter o potencial elétrico, num regime eletrostático, gerado por uma densidade de cargas $\rho(\vec{r})$ quaisquer distribuição volúmica) de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' \quad (*) \quad (10)$$

$$\vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Num plano infinito com uma densidade superficial de carga σ uniforme, o CE imediatamente acima é diferente ao CE imediatamente abaixo da superfície. Essa descontinuidade tem o valor de "$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$".

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N q_i\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1,\neq i}^N \frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i)$$

potencial devido a todas as cargas exceto a q_i, calculado no ponto $\vec{r}_i$

Trabalho total para colocar um conjunto de N cargas discretas do ∞ para um determinado ponto $(\vec{r}_i)$

100%

Trabalho total (energia armazenada no sistema) necessário para construir/desfazer este sistema de cargas

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

Caso geral: Energia total necessária para construir uma distribuição de cargas contínua

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2 dv$$

$dv = dx.dy.dz$

$\vec{n}$ é orientado

Energia que está armazenada no espaço infinito para um campo eletrostático E

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

Potencial elétrico dado por um dipolo de momento linear $\vec{p}$

Momento dipolar $(\vec{p})$: → dipolo 'físico'

define o sistema de um par de cargas opostas de magnitude "q", onde $\vec{d}$ é a distância entre as cargas e a direção definida em relação à carga positiva, de uma maneira simples e útil.

usado no estudo do CE em meios materiais, onde surge uma densidade destes momentos dipolares

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'dv'$$

Obtenção do momento dipolar corresponde a uma distribuição contínua de carga confinada a um volume V (expressão geral)

chamado fom. de momento dipolar da distribuição

• momento monopolar para um conj. de cargas pontuais:

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i$$

• momento dipolar para um conj. de cargas pontuais

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{r}_i$$

• momento quadripolar

Para um sistema discreto de cargas, cada uma com uma posição em relação à origem:

$$Q_{km} = \sum_{i=1}^N q_i\,(3x_k^i \cdot x_m^i - \delta_{km}\cdot r_i^2)$$

delta de Kronecker: $\delta_{km} = \begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$

Sabemos que $\boxed{Q_{mk} = Q_{km}}$ é simétrico e $\boxed{\sum_k Q_{kk} = 0}$ traço nulo

Para um sistema contínuo com densidade de carga:

$$Q_{km} = \int_V \rho(\vec{r})\cdot(3x'_k \cdot x'_m - \delta_{km}\cdot r'^2)\,dv'$$

(*) Podemos escrever esta expressão para as outras densidades (linear e superficial):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dl' \quad \text{densidade de carga linear}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}da \quad \text{densidade de carga superficial}$$

Dipolo elétrico: consiste em ter uma carga ⊕ e uma carga ⊖ com uma determinada dist. entre eles

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{Q}{r}}_{\text{termo monopolar}} + \underbrace{\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}_{\text{termo dipolar}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\sum_{ji} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}}_{\text{termo quadripolar}} + \dots\right]$$