Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Exercícios

Exercício 5: *Coeficientes de Clebsch-Gordan*

O operador de momento angular orbital $\hat{\boldsymbol{L}}$ e o operador de spin $\hat{\boldsymbol{S}}$, de número quântico $s = 1/2$, definem o momento angular total $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$ de um fermião, que se encontra num estado próprio de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ caracterizado pelo número quântico l (isto é, o valor próprio de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ nesse estado é $\hbar^2 l(l+1)$).

Os autoestados comuns de $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ têm, como valores possíveis para o número quântico que caracteriza $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $j = l - 1/2$ ou $j = l + 1/2$ (porquê?).

O objectivo deste exercício é expressar os autoestados de $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{S}^2$, $|\, j\, m_j,\, l\, s\,\rangle$, à custa dos autoestados de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ e $\hat{S}_z$, $|\, l\, m_l\, s\, m_s\,\rangle$, em que $|m_l| \leq l$ e $m_s = \pm 1/2$.

a) Comece por argumentar que no caso do multipleto $j = l + 1/2$, se tem para o autoestado com $m_j = l + 1/2$,

$$|\, j = l + 1/2\ m_j = l + 1/2,\, l\, s\,\rangle \ = |\, l\ m_l = l\ s\ m_s = 1/2\,\rangle\,. \tag{21}$$

b) Considere agora a fórmula (19) e, com $\hat{L}_-$ substituído por $\hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{S}_-$, l por j, e m por m_j, mostre que

$$\begin{aligned} |\, j = l + 1/2\ m_j,\, l\, s\,\rangle \ &= \hbar^{m_j - l - 1/2} \sqrt{\frac{(l + 1/2 + m_j)!}{(2l+1)!(l + 1/2 - m_j)!}} \\ &\times (\hat{L}_- + (l + 1/2 - m_j)\hat{S}_-)\, \hat{L}_-^{l - 1/2 - m_j} |\, l\ m_l = l\ s\ m_s = 1/2\,\rangle\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Pista: Note que $\hat{S}_-^2 = 0$.

c) Utilizando de novo a fórmula (19), e considerando o efeito de $\hat{L}_-^{l+1/2-m_j}$ e de $\hat{S}_-\, \hat{L}_-^{l-1/2-m_j}$ em $|\, l\ m_l = l\ s\ m_s = 1/2\,\rangle$, mostre que

$$\begin{aligned} \left|j = l + \tfrac{1}{2}\ m_j,\, l\, s\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \Big\{ & \sqrt{l + \tfrac{1}{2} + m_j}\ \left|l\ m_l = m_j - \tfrac{1}{2}\ s\ m_s = \tfrac{1}{2}\right\rangle \\ & + \sqrt{l + \tfrac{1}{2} - m_j}\ \left|l\ m_l = m_j + \tfrac{1}{2}\ s\ m_s = -\tfrac{1}{2}\right\rangle \Big\}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

d) Finalmente, mostre que

$$\begin{aligned} \left|j = l - \tfrac{1}{2}\ m_j,\, l\, s\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \Big\{ & \sqrt{l + \tfrac{1}{2} - m_j}\ \left|l\ m_l = m_j - \tfrac{1}{2}\ s\ m_s = \tfrac{1}{2}\right\rangle \\ & - \sqrt{l + \tfrac{1}{2} + m_j}\ \left|l\ m_l = m_j + \tfrac{1}{2}\ s\ m_s = -\tfrac{1}{2}\right\rangle \Big\}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Pista: Note que este estado tem um valor próprio associado ao operador $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ diferente do estado apresentado na alínea anterior.

Exercício 6: *Matrizes de Spin de Pauli: Representação bidimensional da álgebra* $\mathfrak{su}(2)$ *(revisão)*

As matrizes de Pauli são definidas como

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \,, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,. \tag{25}$$

Além disso, também definimos o operador vetorial $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$.

a) Comece por mostrar que $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{\mathbb{1}}$.

b) As matrizes de Pauli anti-comutam entre si, i.e. $\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i = 2\delta_{ij}\hat{\mathbb{1}}$.

c) Definindo o operador de spin $1/2$, $\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, mostre que obedece às relações que definem a álgebra de um momento angular, ou seja $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k$, onde ε_{ijk} é o símbolo de permutação, introduzido anteriormente. Mostre em particular que o valor próprio associado a $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ é $\frac{3}{4}\hbar^2$, ou seja, o número quântico que caracteriza este operador é $s = 1/2$.

d) Mostre que se $\hat{\boldsymbol{n}} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z)$ é um vetor unitário no espaço $\mathbb{R}^3$, se tem $(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 = \hat{\mathbb{1}}$. Note que, num abuso de notação, utilizamos o ˆ para designar quer operadores no espaço de Hilbert, quer versores no espaço real. O contexto deverá indicar qual o caso em questão.

Utilize este resultado para mostrar que

$$\exp(i\varphi\, \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \;=\; \hat{\mathbb{1}}\cos\varphi + i\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \sin\varphi \,. \tag{26}$$

Pista: Utilize o desenvolvimento em série de $\exp(i\varphi\, \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ e a propriedade que acabou de demonstrar.

e) Tome agora $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_z$, e $\hat{\boldsymbol{m}} = \cos\vartheta \hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\vartheta \hat{\boldsymbol{e}}_y$, um versor no plano xy. Mostre que

$$e^{i\frac{\varphi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}}(\hat{\boldsymbol{m}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})e^{-i\frac{\varphi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \;=\; \hat{\boldsymbol{m}}' \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \,, \tag{27}$$

com $\hat{\boldsymbol{m}}' = \cos(\vartheta - \varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin(\vartheta - \varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_y$, um outro versor no plano xy. Qual o significado físico desta transformação?

Exercício 7: *Valores expectáveis no estado de singleto*

Mostre que para o estado de singleto de dois spins $1/2$, $\mid \Psi \rangle = (\mid +- \rangle - \mid -+ \rangle)/\sqrt{2}$, são válidas as seguintes relações para os valores expectáveis de um ou de ambos os spins:

a) $\langle\Psi|\, \hat{\sigma}_i^{1,2}\, |\Psi\rangle = 0$.

b) $\langle\Psi|\, \hat{\sigma}_i^{1}\, \hat{\sigma}_j^{2}\, |\Psi\rangle = -\delta_{ij}$.

c) Mostre da alínea anterior que se $\hat{\mathbf{n}}^1$ e $\hat{\mathbf{n}}^2$ são dois versores em direções quaisquer do espaço, temos $\langle\Psi|\, (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^1 \cdot \hat{\mathbf{n}}^1)\, (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}}^2)\, |\Psi\rangle = -\hat{\mathbf{n}}^1 \cdot \hat{\mathbf{n}}^2$.

Estas relações podem ser usadas para mostrar que a mecânica quântica viola as desigualdades de Bell para certas classes de estados entrelaçados (entangled states).

Pista: Se designarmos por $\hat{P}_{12}$ o operador que troca os dois spins, temos $\hat{P}_{12} \mid \Psi \rangle = - \mid \Psi \rangle$ e também $\hat{P}_{12}\, \hat{\sigma}_i^{1,2}\, \hat{P}_{12} = \hat{\sigma}_i^{2,1}$. (este operador pode escrever-se explicitamente à custa dos operadores de spin como $\hat{P}_{12} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{1}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2)$, mas a sua expressão explicíta não é necessária para a resolução do exercício).

Note ainda que se $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}(\hat{\sigma}_i^1 + \hat{\sigma}_i^2)$ é uma das componentes do momento angular total do sistema de dois spins, temos que $\hat{S}_i \mid \Psi \rangle = 0$. Considere pois os valores expectáveis de $\hat{S}_i$ e $\hat{S}_i \hat{S}_j$ no estado singleto.

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt