11/4/2023 1º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	FIS ENGFIS

Nome ....**N**^{o} .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Determine uma base do espaço linear das soluções da equação diferencial homogénea

$$\dddot{x} - 9\dot{x} = 0\,.$$

$$1 \qquad e^{3t} \qquad e^{-3t}$$

2. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear

$$\dot{x} + 2x = e^{-t}\ .$$

com condição inicial $x(0) = 0$.

$$x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

3. *(1 valor)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0\,.$$

$$e^{-t}\left(a\cos(2t) + b\sin(2t)\right) \text{ com } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

4. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 0$.

$$x(t) = e^{-t}\left(2\cos(2t) + \sin(2t)\right)$$

5. *(1 valor)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 4\,\cos(t)\,.$$

$$x(t) = 2\,\sin(t)$$

6. *(1 valor)* Determine uma base ortonormada do plano $P = \{x - 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Por exemplo, a base formada pelos vetores

$$\mathbf{u}_1 = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}_2 = \left(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}\right)$$

7. *(1 valor)* Determine o ponto do plano $P = \{x - 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ mais próximo do ponto $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$.

$$(1/2,\ 1,\ 3/2)$$

8. *(1 valor)* Calcule a fatorização QR (ou seja, determine uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tais que $A = QR$) da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

9. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$T(x, y) = (x - iy, iy) .$$

Determine o operador adjunto T^* e a composição T^*T.

$T^*(x, y) = (x, ix - iy)$ e $T^*T = (x - iy, ix + 2y)$

10. *(1 valor)* Determine a matriz que define, relativamente à base canónica, um operador ortogonal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1, 0) = (0, -1)$.

Por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. *(1 valor)* A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

representa, na base canónica de $\mathbb{C}^2$, um operador

○ hermítico ○ hemi-hermítico ○ unitário

12. *(1 valor)* Se B é uma matriz complexa $n \times n$ arbitrária, então $B^* - B$ é

○ hemi-hermítica ○ unitária ○ hermítica

13. *(1 valor)* Se A é uma matriz quadrada real arbitrária, então $A^\top A$ é

○ simétrica ○ anti-simétrica ○ ortogonal

14. *(1 valor)* Se A e B são duas matrizes hermíticas $n \times n$, então $[A, B] = AB - BA$ é hermítica.

○ Verdadeiro ○ Falso

15. *(1 valor)* Se A é uma matriz complexa unitára $n \times n$, então as suas colunas formam uma base ortonormada de $\mathbb{C}^n$.

○ Verdadeiro ○ Falso

16. *(1 valor)* Uma matriz quadrada complexa U é unitária se

○ $U^* = U$ ○ $U^*U = I$ ○ $U^*U = UU^*$

17. *(1 valor)* Existe uma matriz ortogonal R tal que

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

○ Verdadeiro ○ Falso

18. *(1 valor)* A função $y(x) = e^{-x^2/2}$ é solução da equação diferencial

○ $\frac{dy}{dx} + y = 0$ ○ $\frac{dy}{dx} + xy = 0$ ○ $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$

19. *(1 valor)* No espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ se e só se $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

○ Verdadeiro ○ Falso

20. *(1 valor)* Se a matriz quadrada complexa A é hermítica, então todos os seus valores próprios são números reais.

○ Verdadeiro ○ Falso

11/4/2023 1º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	FIS ENGFIS

Nome ....**N**^{o} .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Determine uma base do espaço linear das soluções da equação diferencial homogénea

$$\dddot{x} - 4\dot{x} = 0\,.$$

$$1 \qquad e^{2t} \qquad e^{-2t}$$

2. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear

$$\dot{x} + 3x = e^{-2t} \quad .$$

com condição inicial $x(0) = 0$.

$$x(t) = e^{-2t} \; - e^{-3t}$$

3. *(1 valor)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0\,.$$

$$e^{-2t}\,(a\cos(t) + b\sin(t)) \;\text{ com }\; a, b \in \mathbb{R}\,.$$

4. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

$$x(t) = e^{-2t}\,(\cos(t) + 2\sin(t))$$

5. *(1 valor)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 4\,\sin(t)\,.$$

$$x(t) = -2\,\cos(t)$$

6. *(1 valor)* Determine uma base ortonormada do plano $P = \{2x - y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Por exemplo, a base formada pelos vetores

$$\mathbf{u}_1 = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}_2 = \left(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$$

7. *(1 valor)* Determine o ponto do plano $P = \{2x - y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ mais próximo do ponto $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$.

$$(1, 1/2, 3/2)$$

8. *(1 valor)* Calcule a fatorização QR (ou seja, determine uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tais que $A = QR$) da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

9. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$T(x, y) = (ix, -ix + y) .$$

Determine o operador adjunto T^* e a composição TT^*.

$T^*(x, y) = (-ix + iy, y)$ e $TT^*(x, y) = (x - y, -x + 2y)$

10. *(1 valor)* Determine a matriz que define, relativamente à base canónica, um operador ortogonal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1, 0) = (0, 1)$.

Por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. *(1 valor)* Se B é uma matriz complexa $n \times n$ arbitrária, então $B^* + B$ é

◯ hemi-hermítica ◯ unitária ◯ hermítica

12. *(1 valor)* Se A é uma matriz quadrada real arbitrária, então $A^\top A$ é

◯ anti-simétrica ◯ ortogonal ◯ simétrica

13. *(1 valor)* A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

representa, na base canónica de $\mathbb{C}^2$, um operador

◯ hemi-hermítico ◯ unitário ◯ hermítico

14. *(1 valor)* Se A e B são duas matrizes hermíticas $n \times n$, então $i[A, B] = i(AB - BA)$ é hermítica.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

15. *(1 valor)* Existe uma matriz ortogonal R tal que

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

◯ Verdadeiro ◯ Falso

16. *(1 valor)* Uma matriz quadrada complexa U é unitária se

◯ $U^*U = I$ ◯ $U^*U = UU^*$ ◯ $U^* = U$

17. *(1 valor)* No espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ se e só se $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

18. *(1 valor)* A função $y(x) = e^{-x^2/2}$ é solução da equação diferencial

◯ $\frac{dy}{dx} + y = 0$ ◯ $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$ ◯ $\frac{dy}{dx} + xy = 0$

19. *(1 valor)* Se A é uma matriz real ortogonal $n \times n$, então as suas colunas formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

20. *(1 valor)* Se a matriz quadrada complexa A é hermítica, então todos os seus valores próprios são números imaginários puros.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

2/6/2023
2º teste

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

FIS
ENGFIS

Name ....**N**^{o} .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Identifique a matriz simétrica A que define a forma quadrática

$$Q(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

e determine os seus valores próprios.

2. *(1 valor)* Determine uma matriz ortogonal U que diagonaliza a matriz simétrica A do exercício 1, ou seja, tal que $U^\top AU$ seja diagonal.

3. *(1 valor)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$$

4. *(1 valor)* Determine os valores máximo e mínimo da forma quadrática $Q(x, y)$, definida no exercício 1, na circunferência unitária $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\}$.

5. *(1 valor)* Calcule os valores e vetores próprios da matriz de Pauli

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

6. *(1 valor)* Calcule os valores singulares da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. *(1 valor)* Calcule o grupo a um parâmetro e^{tB} gerado pela matriz B definida no exercício 6.

8. *(1 valor)* Dê uma definição do grupo $\mathbf{SO}(3)$.

9. *(1 valor)* Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = & q + p \\ \dot{p} = & -q + p \end{cases}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (1, 1)$.

10. *(1 valores)* Considere o sistema não homogéneo

$$\begin{cases} \dot{q} = & q + p \\ \dot{p} = & -q + p + \cos(t) \end{cases}$$

Determine a solução com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.

11. *(1 valor)* Se existe uma base ortonormada de $\mathbb{C}^n$ formada por vetores próprios do operador $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ então o operador L é normal.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

12. *(1 valor)* Toda matriz quadrada real invertível A é um produto $A = PU$ de uma matriz positiva P e uma matriz orthogonal U.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

13. *(1 valor)* Se H é uma matriz quadrada hermítica, então e^H é unitária.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

14. *(1 valor)* Se A e B são matrizes quadradas hermíticas então $e^{A+B} = e^A e^B$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

15. *(1 valor)* As formas quadráticas $Q(x, y) = xy$ e $P(x, y) = x^2 - y^2$ são linearmente equivalentes (ou seja, existe uma transformação linear invertível $(x, y) \mapsto (x', y') = (ax + by, cx + dy)$ tal que $P(x', y') = Q(x, y)$).

◯ Verdadeiro ◯ Falso

16. *(1 valor)* Os semi-eixos do elipsoide $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ são

◯ 1 e 3 ◯ 1 e $\sqrt{3}$ ◯ 1 e $1/\sqrt{3}$

17. *(1 valor)* Toda matriz $A \in \mathbf{SU}(2)$ admite um vetor próprio com valor próprio $\lambda = 1$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

18. *(1 valor)* A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo unitário $\mathbf{U}(2)$ é

◯ o espaço linear das matrizes complexas 2×2 simétricas.

◯ o espaço linear das matrizes complexas 2×2 com traço nulo.

◯ o espaço linear das matrizes complexas 2×2 anti-hermíticas.

19. *(1 valor)* Existe uma matriz quadrada real A tal que $A^\top A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

20. *(1 valor)* Considere o sistema linear definido por

$$\begin{cases} \dot{x} = & 4x - y \\ \dot{y} = & 2x + y \end{cases}$$

A origem é

◯ um nodo instável. ◯ um ponto de sela. ◯ um foco estável.