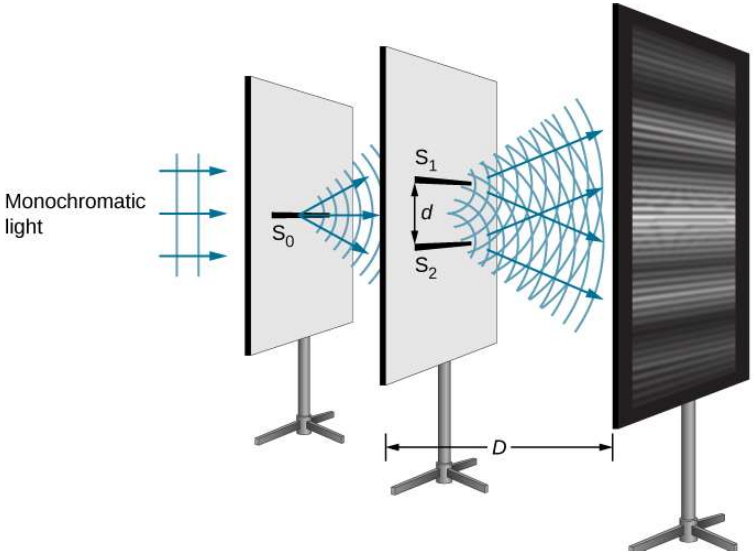
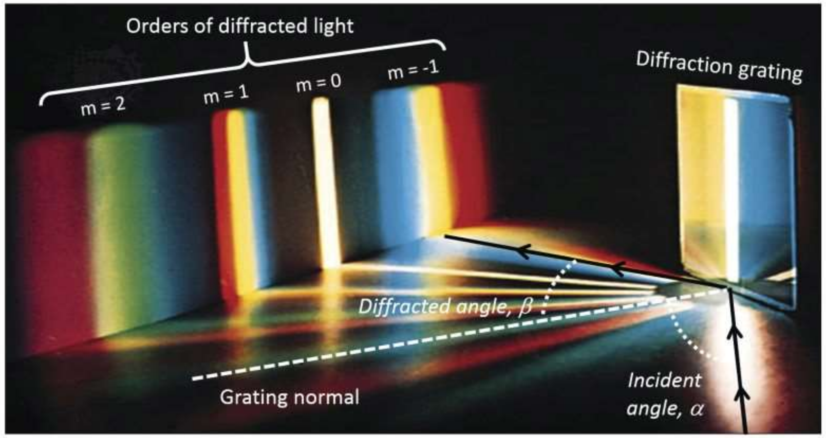
Interferência por divisão da frente de onda





- Dulpa fenda de Young
- Generalização para mais fendas – redes de difração
- Interferência e a natureza quântica da luz

Sobreposição de 2 ondas planas

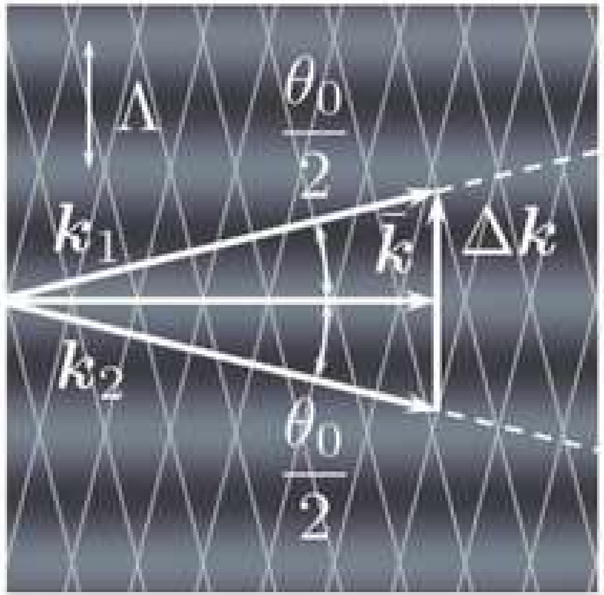
Considere a sobreposição de duas ondas planas com o mesmo amplitude e a mesma frequência

$$\mathbf{E}_{total} = E_0 \exp\left[i\left(\mathbf{k}_1 \bullet \mathbf{r} - \omega t\right)\right] + E_0 \exp\left[i\left(\mathbf{k}_2 \bullet \mathbf{r} - \omega t\right)\right]$$

definir

$$\bar{\mathbf{k}} \equiv \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\right)$$

$$\Delta\mathbf{k} \equiv \left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\right)$$



$$\mathbf{E}_{total} = E_0 \exp\left[i\left(\bar{\mathbf{k}} \bullet \mathbf{r} - \omega \mathbf{t}\right)\right]$$

$$\left\{\exp\left[i\Delta\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}/2\right] + \exp\left[-i\Delta\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}/2\right]\right\}$$

$$= 2E_0 \exp\left[i\left(\bar{\mathbf{k}} \bullet \mathbf{r} - \omega \mathbf{t}\right)\right] \cos\left(\Delta\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}/2\right)$$

Irradiância

$$I_{total} = 4I_0 \cos^2\left(\Delta\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}/2\right)$$

$$I_0 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c \left|E_0\right|^2$$ Irradiância de cada feixe individual

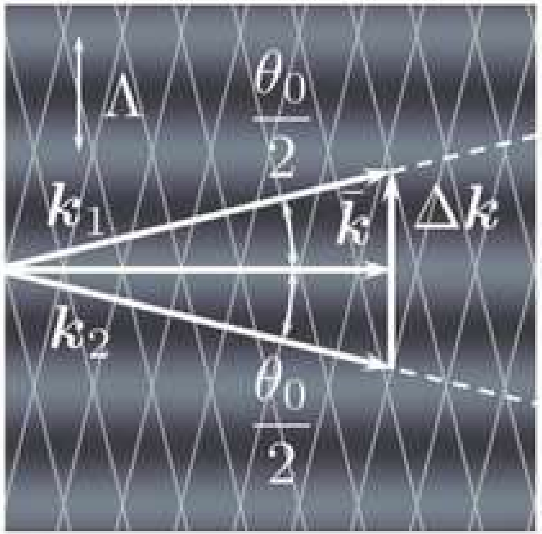
Franjas de interferência

Notar que $\left\langle I_{total} \right\rangle = 2I_0$

Exemplo

$$\mathbf{k}_1 = k\sin(\theta/2)\hat{\mathbf{x}} + k\cos(\theta/2)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{k}_2 = -k\sin(\theta/2)\hat{\mathbf{x}} + k\cos(\theta/2)\hat{\mathbf{z}}$$



$$\bar{\mathbf{k}} \equiv \tfrac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = k\cos(\theta/2)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\Delta\mathbf{k} \equiv (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = 2k\sin(\theta/2)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E}_{total}(z,t) = 2E_0 \exp\left[i\left(k\cos(\theta/2)z - \omega\mathbf{t}\right)\right]\cos\left(kx\sin\theta/2\right)$$

Onda que propaga em z

Onda estacionário na direção $\Delta\mathbf{k}$
Valores k_x opostos

$$I_{total} = 4I_0\cos^2\left[kx\sin(\theta/2)\right] = 2I_0\left\{1 + \cos\left[2kx\sin(\theta/2)\right]\right\}$$

Sem modulação ao longa do eixo dos zz

$$\Lambda = \frac{\pi}{k\sin(\theta/2)} = \lambda\frac{1}{2\sin(\theta/2)} \quad \lim_{\theta\ll 1} \rightarrow \frac{\lambda}{\theta}$$

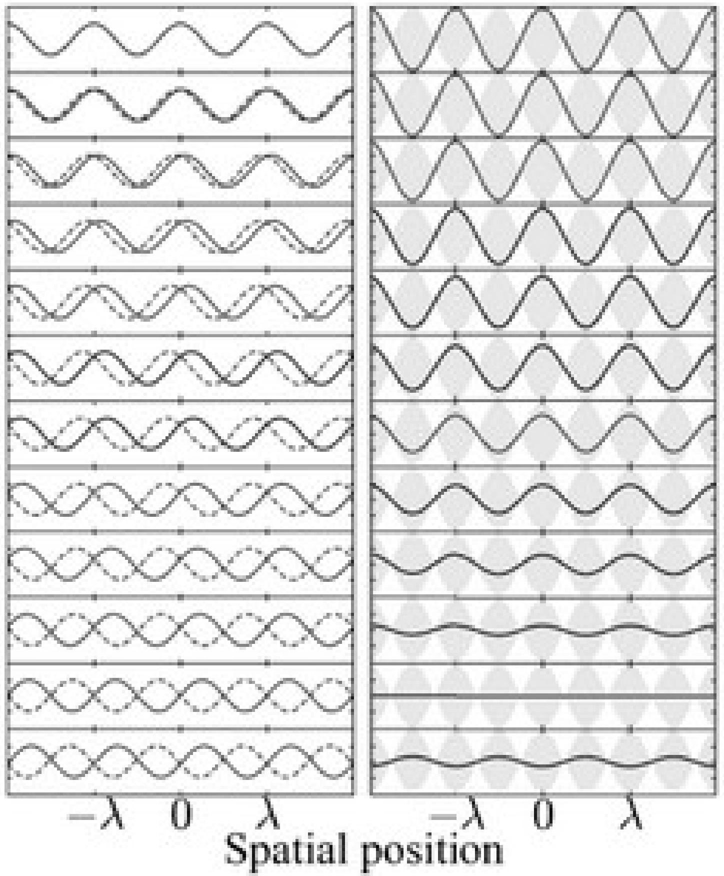
Ondas estacionárias

Um caso especial é quando $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ ondas que se propagam em direções opostas

$$\mathrm{E}_1 = E_0 \exp\left[i\left(\mathbf{k}_1 \bullet \mathbf{r} - \omega t\right)\right]$$

$$\mathrm{E}_2 = E_0 \exp\left[i\left(-\mathbf{k}_1 \bullet \mathbf{r} - \omega t\right)\right]$$

Ondas individuais A soma



$$\Delta t = \frac{T}{40}$$

$$\mathbf{E}_{total}\left(z,t\right)$$

$$= 2E_0 \exp\left[i\left(\bar{\mathbf{k}} \bullet \mathbf{r} - \omega \mathbf{t}\right)\right]\cos\left(\Delta\mathbf{k} \bullet \mathbf{r} / 2\right)$$

$$= 2E_0 \exp\left[-i\omega t\right]\cos\left(\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}\right)$$

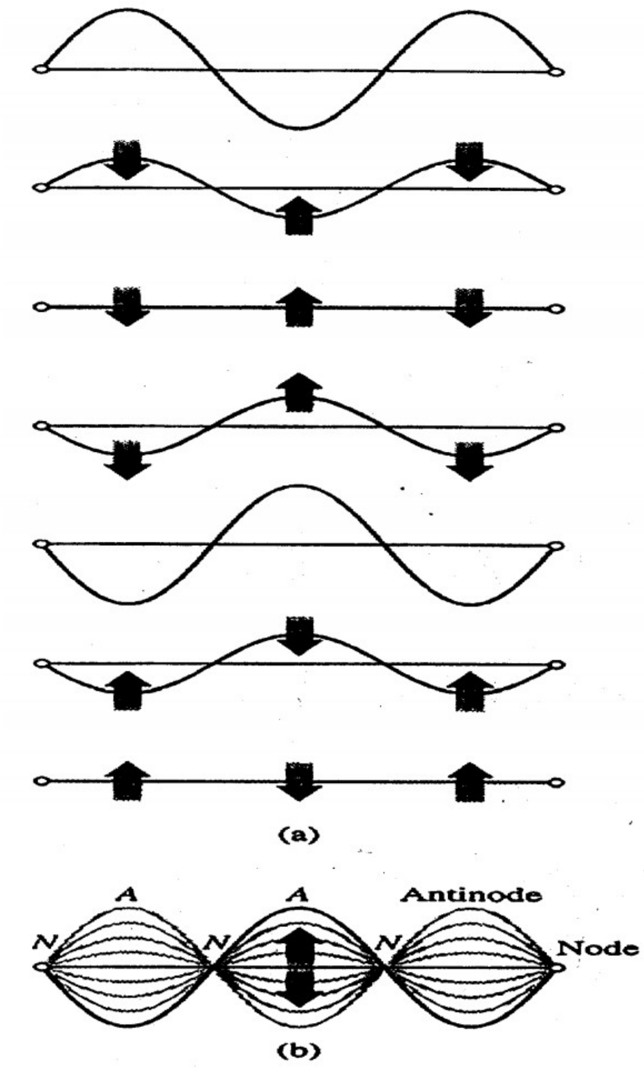
Onda estacionária com dependência espacial constante e um amplitude que varia no tempo

$$I_{total} = 4I_0 \cos^2\left[kz\right] = 2I_0\left\{1 + \cos\left[2kz\right]\right\}$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2}$$

Ondas estacionárias

$$2E_0 \cos(kz)\cos(\omega t)$$

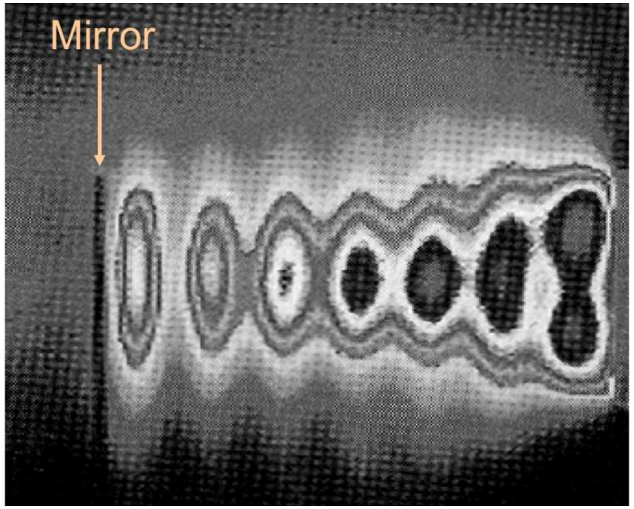


Esta situação é comum nas cavidades lasers ou microondas

Qual é a velocidade desta onda?

Qual é a velocidade da propagação de energia?

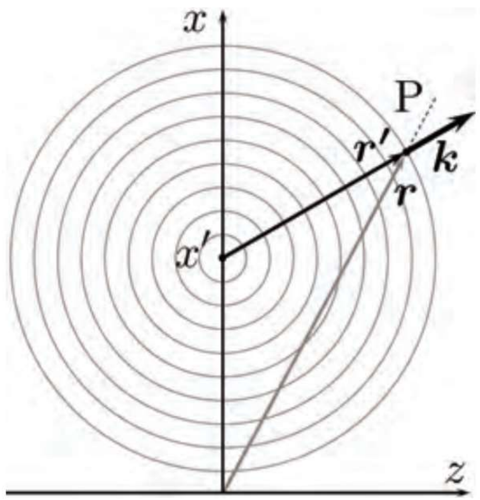
Micro-odas 3.4 GHz



Ondas estacionárias

A sobreposição de duas ondas esféricas também produz ondas estacionarias

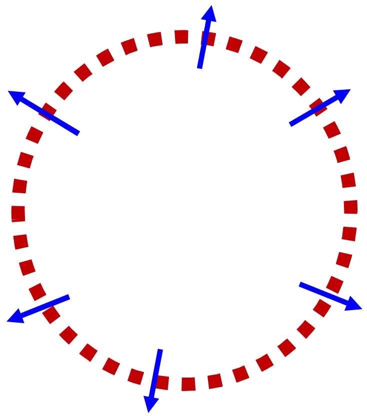
Ondas esféricas



No plano que contêm a fonte as ondas tem uma forma circular.
Tal como uma onda plana a fase adquirida na propagação até o ponto P tem a forma

$$\exp\left[i\mathbf{k}\bullet\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{fonte}\right)-i\omega t\right]=\exp\left[ikr'-\omega t\right]$$

Mas ao propagar o amplitude tem diminuir, pois a energia está espalhada sobre uma área maior

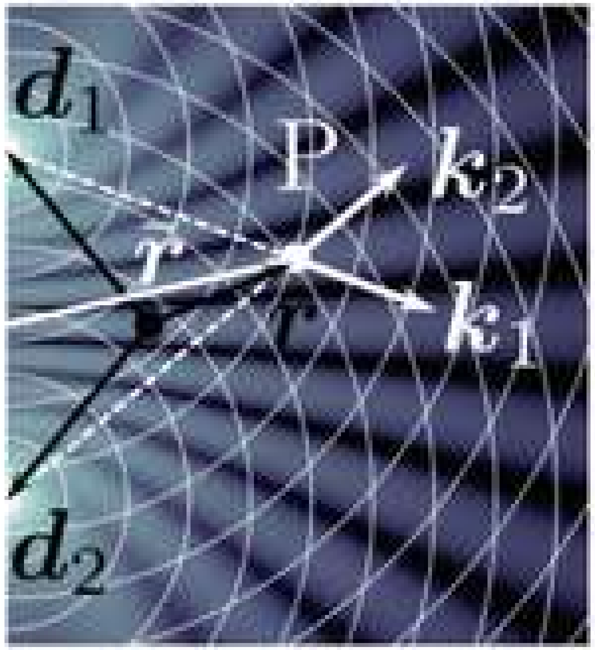


$$P_{esf}=\int_{A} I_{esf}\left(r\right)dA=4\pi r^2 I_{esf}\left(r\right)$$

logo $$I_{esf}\left(r\right)=\frac{P_{esf}}{4\pi r^2}=\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c\left|E_{esf}\left(r\right)\right|^2$$

$$\left|E_{esf}\left(r\right)\right|\sim\frac{1}{r}\qquad E_{esf}\left(\mathbf{r},t\right)=E_0\frac{\exp\left[i\mathbf{k}\bullet\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{fonte}\right)-i\omega t\right]}{ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{fonte}\right|}$$

Sobreposição duas ondas esféricas



$$\mathbf{E}_{total} = E_0 \frac{\exp\left[i\mathbf{k}_1 \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{d}_1)\right]}{ik|\mathbf{r} - \mathbf{d}_1|} + E_0 \frac{\exp\left[i\mathbf{k}_2 \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{d}_2)\right]}{ik|\mathbf{r} - \mathbf{d}_2|}$$

$\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ especificam a origem de cada fonte

Definir $\overline{\mathbf{r}}$ como a distância entre o bi-setor de $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ e o ponto de observação P .

No caso em que $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2|, \lambda$ $\qquad \mathbf{r} - \mathbf{d}_{1,2} \approx \overline{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{E}_{total} = E_0 \frac{e^{i\mathbf{k}_1 \bullet \overline{\mathbf{r}}}}{ik|\overline{\mathbf{r}}|} \left\{1 + e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\bullet \overline{\mathbf{r}}}\right\}$$

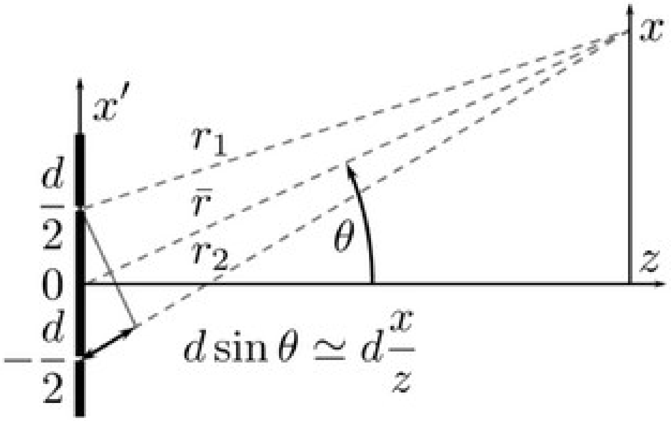
$$I_{total} = \frac{2I_s}{(k\overline{r})^2} \left\{1 + \cos\left[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \bullet \overline{\mathbf{r}}\right]\right\}$$

Fase relativo entre as 2 ondas

Parecido com o caso de ondas planas mas $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ variam com a posição do ponto P

Interferometro de Young

Luz passa pelas duas fendas delgadas
(com uma largura << a sua separação d, a distância até o ecrã)



$z = 0$

Podemos aproximar a luz que passa pela cada fenda como uma fonte de ondas esféricas

O amplitude do campo no ecrã

$$E_{tot} = E_0 \frac{e^{i(kr_1 - \omega t)}}{ikr_1} + E_0 \frac{e^{i(kr_2 - \omega t)}}{ikr_2}$$

Quando o ecrã está muito distante das fenda os amplitudes das ondas proveniente das duas fendas são quase iguais

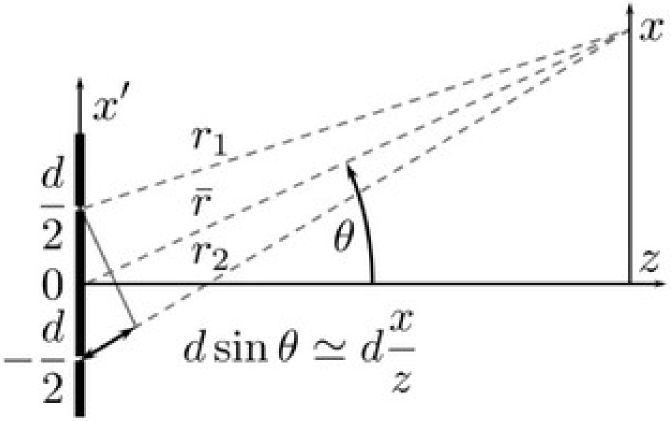
$$r_{1,2} = \sqrt{(x \mp d/2)^2 + z^2} \quad z \gg d \quad \rightarrow \sqrt{x^2 + z^2} = \bar{r}$$

nos denominadores

$$E_{tot} \approx \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{ik\bar{r}} \left[e^{ikr_1} + e^{ikr_2} \right]$$

Soma de dois fasors
resultado varia com a diferencia da fase

Interferometro de Young



$$E_{tot} \approx \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{ik\overline{r}}\left[\mathrm{e}^{ikr_1} + \mathrm{e}^{ikr_2}\right]$$

$$r = \sqrt{\left(x - x'\right)^2 + z^2}$$

$$= z\sqrt{1 + \frac{\left(x - x'\right)^2}{z^2}} \approx z + \frac{\left(x - x'\right)^2}{2z}$$

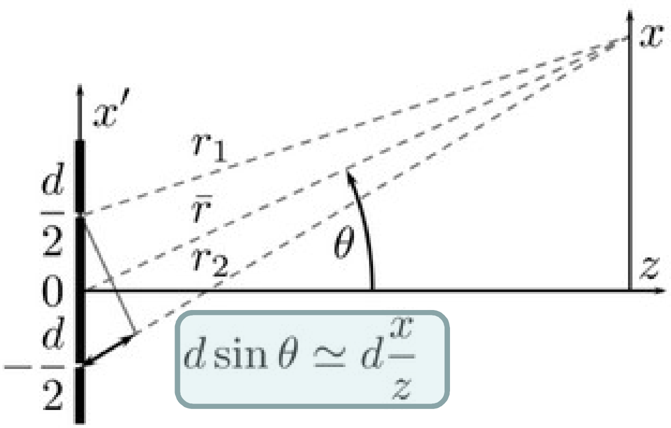
$$= z + \frac{x^2}{2z} - \frac{xx'}{z} + \frac{x'^2}{2z} = \overline{r} - \frac{xx'}{z} + \frac{x'^2}{2z}$$

$$r_{1,2} \approx \overline{r} \mp \frac{xd}{2z} + \frac{d^2}{8z}$$

Aproximação de Fresnel
(ângulos θ pequenos)

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Interferometro de Young



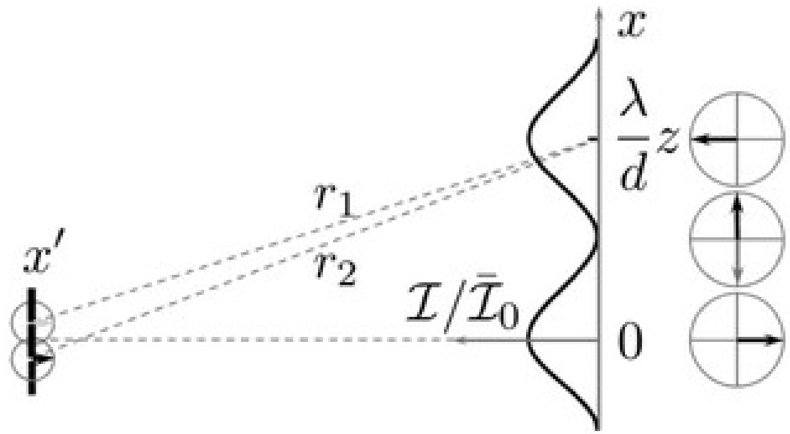
$$E_{tot} \approx \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{ik\bar{r}}\left[\mathrm{e}^{ikr_1} + \mathrm{e}^{ikr_2}\right] \qquad r_{1,2} \approx \bar{r} \mp \frac{xd}{2z} + \frac{d^2}{8z}$$

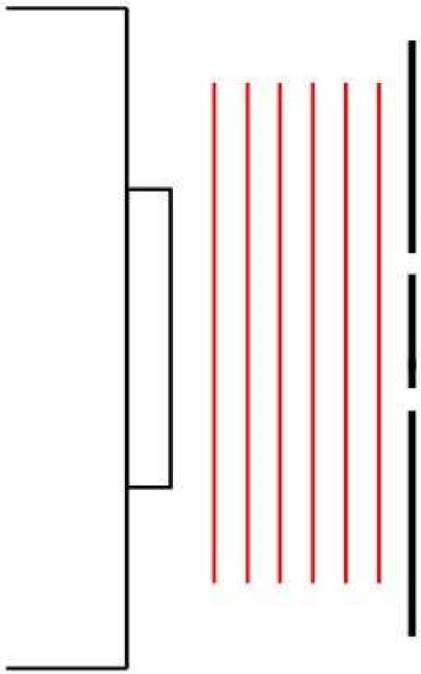
$$E_{tot} \approx \frac{E_0 e^{i(k\bar{r}-\omega t)}}{ik\bar{r}} e^{ikd^2/8z} \underbrace{\left[\mathrm{e}^{-ikxd/2z} + \mathrm{e}^{+ikxd/2z}\right]}_{2\cos\left(\frac{kxd}{2z}\right)}$$

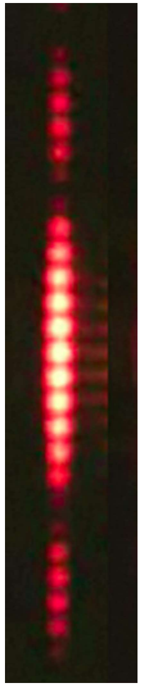
$$I_{tot} \approx 4I_f \cos^2\left(\frac{kxd}{2z}\right) = 2I_f\left[1 + \cos\left(\boxed{\frac{kxd}{z}}\right)\right]$$

Distribuição sinusoidal de intensidade
que varia com a fase relativa

Escala espacial da padrão aumenta com z

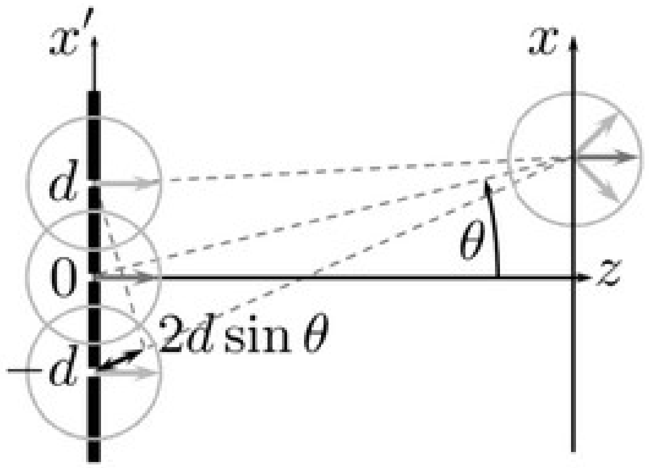






Interferência de ondas múltiplas

Considere a soma de 3 fasores todos em fase no z = 0:



No limite em que a ecrã é muito distante das fendas

$$E_{tot} \approx E_s e^{-i\omega t}\left\{ \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}_1} + \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}_2} + \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}_3} \right\}$$

$$\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}_1 = k\sqrt{(x-d)^2 + z^2}$$

$$\approx kz + \frac{k(x-d)^2}{2z} \qquad \text{Fresnel}$$

$$\approx \boxed{kz + \tfrac{1}{2}\frac{kx^2}{z}} - k\frac{xd}{z} + \cancel{\tfrac{1}{2}k\frac{d^2}{z}} \qquad (d \ll x)$$

$$\approx \boxed{k\bar{r}} - k\frac{xd}{z}$$

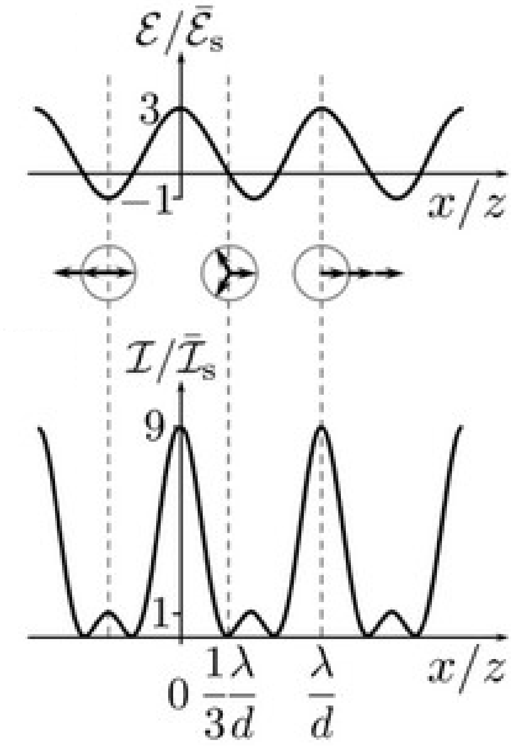
$$E_{tot} \approx E_s e^{i(k\bar{r}-\omega t)}\left\{ \mathrm{e}^{ikxd/z} + 1 + \mathrm{e}^{-ikxd/z} \right\}$$

$$I_{tot}(x) \approx I_s\left[1 + 2\cos\left(\frac{kxd}{z}\right)\right]^2$$

Interferência de 3 fendas

$$E_{tot} \approx E_s e^{i(k\bar{r}-\omega t)} \left\{ e^{ikxd/z} + 1 + e^{-ikxd/z} \right\}$$

$$I_{tot}(x) \approx I_s \left[1 + 2\cos\left(\frac{kxd}{z}\right) \right]^2$$



- Picos principais $I_{tot} = 9I_s$
  interferência construtiva total dos 3 fasores
- Picos subsidiários $I_{tot} = I_s$
  interferência construtiva parcial de 2 fasores
  e destrutiva de um fasor
- Mínimos $I_{tot} = 0$
  interferência destrutiva total

Irradiância em média $\langle I(x) \rangle = 3I_s$

Redes de difração

Construídas primeiro pelo Josef Fraunhofer (riscas paralelas num superfície metálica)
Muito úteis em espetroscopia.

$$E_{tot} \approx E_s e^{i(k\bar{r}-\omega t)} \sum_{m=\frac{-N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \mathrm{e}^{-imkxd/z}$$

Generalização para N fasores

$$S = \mathrm{e}^{i\left(-\frac{N}{2}\right)\frac{kxd}{z}} + \mathrm{e}^{i\left(-\frac{N}{2}+1\right)\frac{kxd}{z}} + \cdots 1 + \ldots \mathrm{e}^{i\left(\frac{N}{2}-1\right)\frac{kxd}{z}}$$

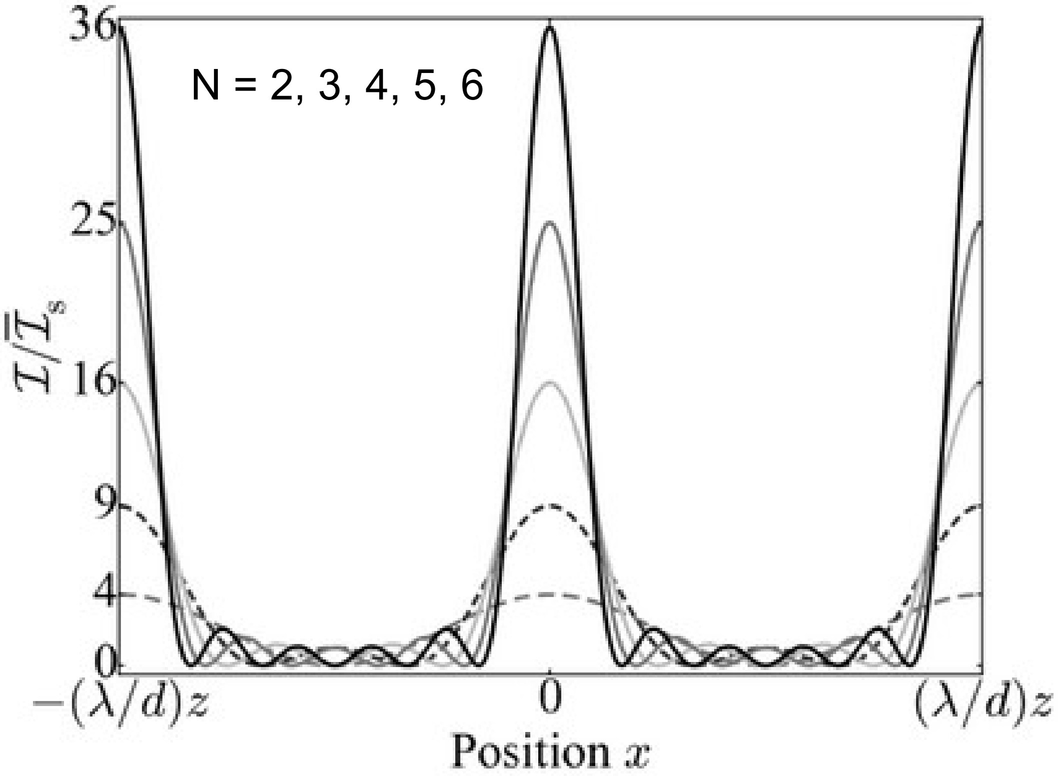
$$\mathrm{e}^{i\frac{kxd}{z}} S = \qquad + \mathrm{e}^{i\left(-\frac{N}{2}+1\right)\frac{kxd}{z}} + \cdots 1 + \ldots \mathrm{e}^{i\left(\frac{N}{2}-1\right)\frac{kxd}{z}} + \mathrm{e}^{i\left(\frac{N}{2}\right)\frac{kxd}{z}}$$

$$\boxed{I_{tot} \approx I_s \frac{\sin^2\left(N\frac{kxd}{2z}\right)}{\sin^2\left(\frac{kxd}{2z}\right)}}$$

$$S = \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{N}{2}\frac{kxd}{z}} - \mathrm{e}^{i\left(\frac{N}{2}\right)\frac{kxd}{z}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{kxd}{z}}} = \frac{\mathrm{e}^{i\left(\frac{N}{2}\right)\frac{kxd}{z}} - \mathrm{e}^{-i\frac{N}{2}\frac{kxd}{z}}}{\mathrm{e}^{i\frac{kxd}{2z}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{kxd}{2z}} - \mathrm{e}^{-i\frac{kxd}{2z}}\right)} = \mathrm{e}^{-i\frac{kxd}{2z}} \frac{\sin\left(N\frac{kxd}{2z}\right)}{\sin\left(\frac{kxd}{2z}\right)}$$

Redes de difração

$$I_{tot} \approx I_s \frac{\sin^2\left(N\frac{kxd}{2z}\right)}{\sin^2\left(\frac{kxd}{2z}\right)}$$



Máximos quando

$$\frac{kx_{\max}d}{2z} = m\pi \qquad x_{\max} = m\left(\frac{\lambda z}{d}\right)$$

$$I_{\max} = \lim_{\theta\to m\pi} I_s\left(\frac{\sin(N\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2$$

$$= I_s\left(\lim_{\theta\to m\pi}\frac{\sin(N\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2$$

$$= I_s\left(\lim_{\theta\to m\pi}\frac{N\cos(N\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2$$

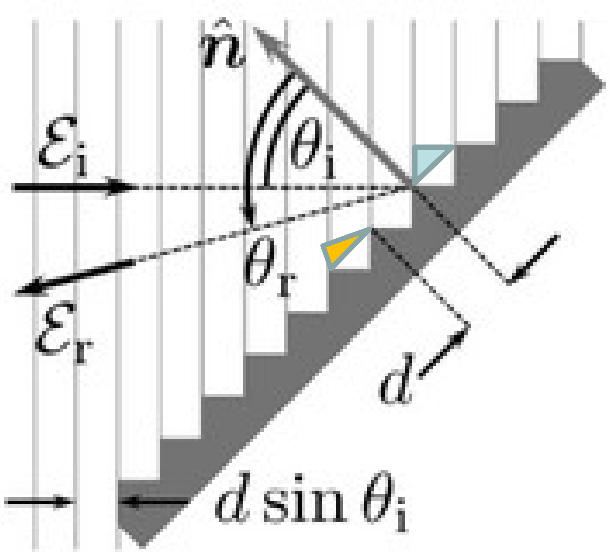
$$= N^2 I_s$$

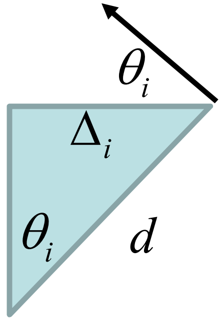
Primeiro mínimo

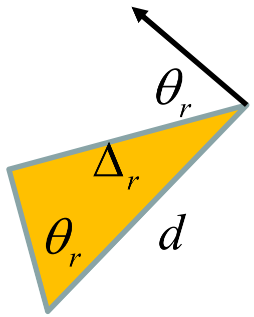
$$N\frac{kx_{\min}d}{2z} = \pi \qquad x_{\min} = \left(\frac{\lambda z}{Nd}\right)$$

Rede de difração em reflexão

Um exemplo importante são redes de difração em reflexão
Consiste de degraus com separação d







$$\Delta_i = d\sin\theta_i \qquad \Delta_r = d\sin\theta_r$$

Diferença de fase de um degrau para o próximo

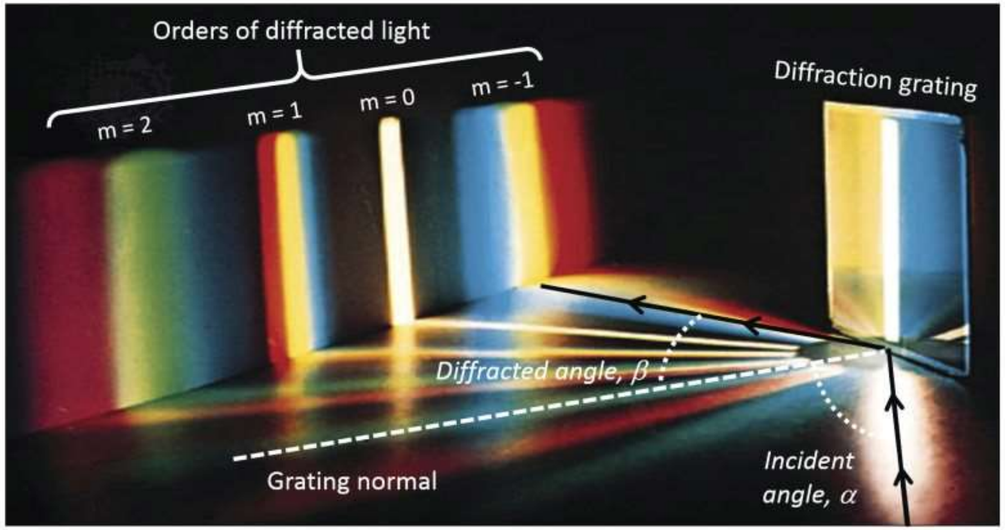
$$\phi = kd\sin\theta_i + kd\sin\theta_r$$

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_r e^{i(k\bar{r}-\omega t)} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{in\phi}$$

Máxima quando $\boxed{m\lambda = d\sin\theta_i + d\sin\theta_r}$

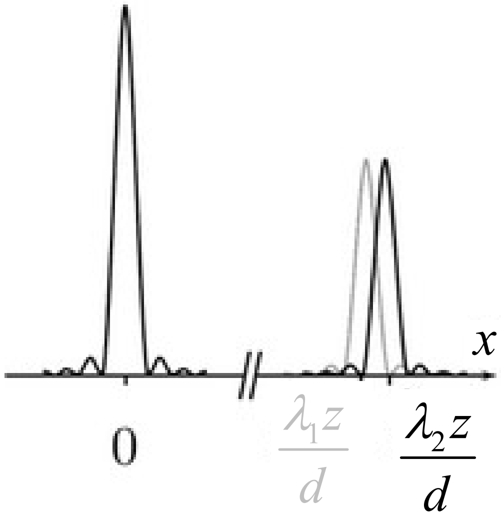
Comprimentos de onda diferentes são separados

Rede de difração



Capacidade de resolver dois picos

Critério de Rayleigh: Os dois espetro são distinguíveis quando o máximo de um espetro é coincidente com o primeiro mínimo de outro espetro

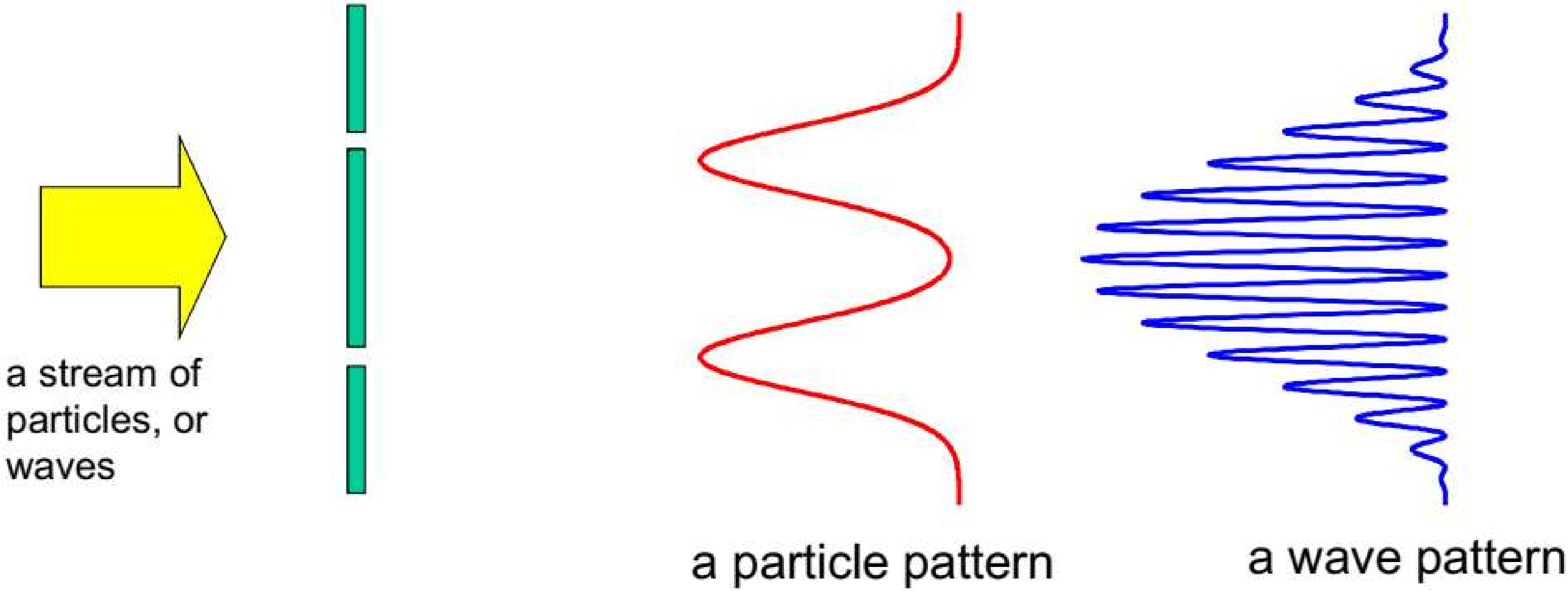


$$I_{tot} \approx I_s \frac{\sin^2\left(N\frac{kxd}{2z}\right)}{\sin^2\left(\frac{kxd}{2z}\right)} \qquad 1^{\text{o}}\ \max \quad x^{\lambda}_{\max} = \left(\frac{\lambda z}{d}\right) \qquad 1^{\text{o}}\ \min x^{\lambda}_{\min} = \frac{\lambda z}{Nd}$$

Rayleigh: $$\frac{\lambda_2 z}{d} = \frac{\lambda_1 z}{d} + \frac{\lambda_1 z}{Nd} \qquad \frac{\lambda_1}{N} = (\lambda_2 - \lambda_1) = \Delta\lambda$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{1}{N}$$ No 1º ordem

A experiência de dulpa fenda e a natureza da luz



As padrões esperadas são muito diferentes no caso que o feixe incidente consiste de partículas ou ondas....

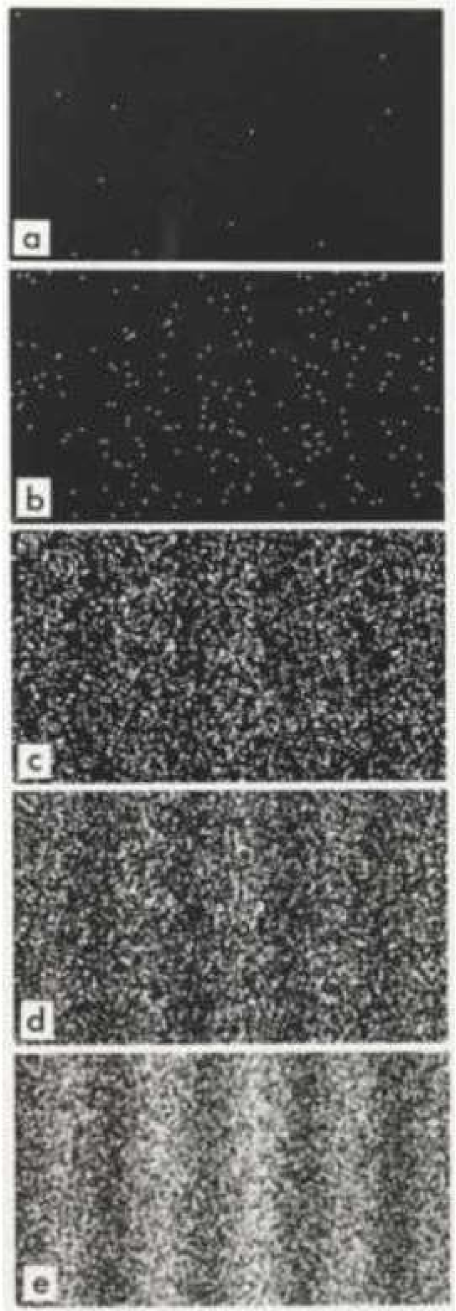
Louis de Broglie,
1892-1987

Nobel 1927

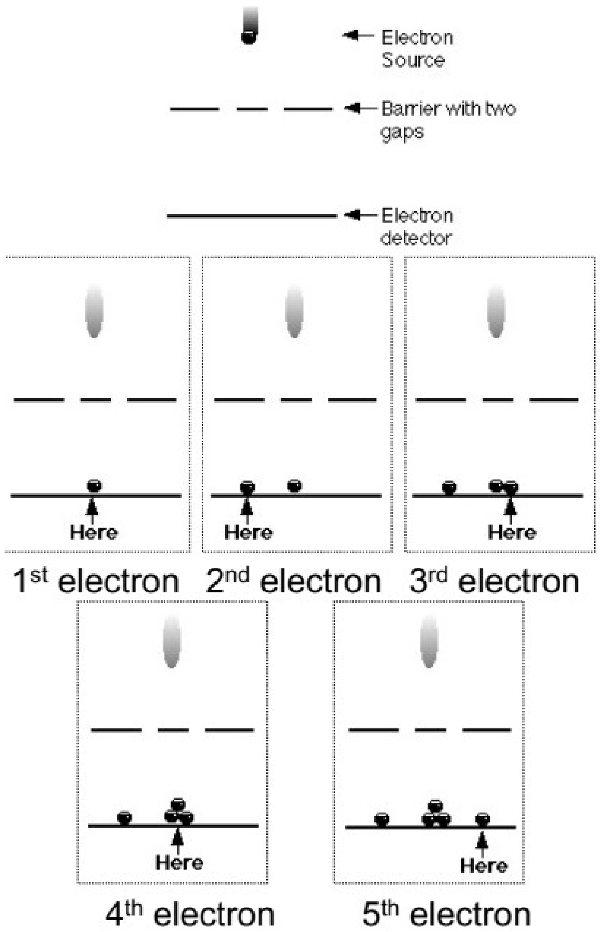
Efeito fotoelétrico: luz é absorvida em pacotes bem definidas (fotões), i.e. Ondas EM podem assumir propriedades que associámos com partículas.
De Broglie sugeriu que o converso também seria possível, partículas pode demonstrar propriedades ondulatórios

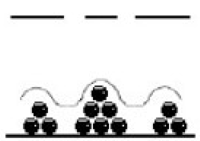
$$\lambda = h/p$$

Ao enviar eletrões mono energéticas através uma placa com duas ondas uma padrão de interferência pode ser observada

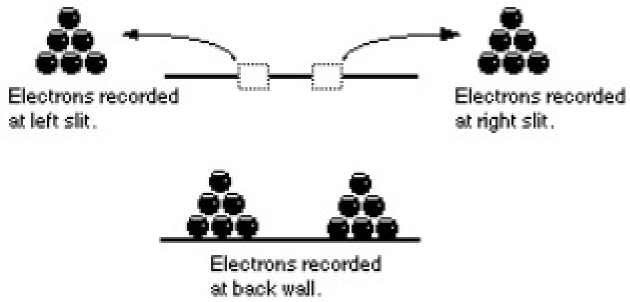


Observar os eletrões destrói a Interferência





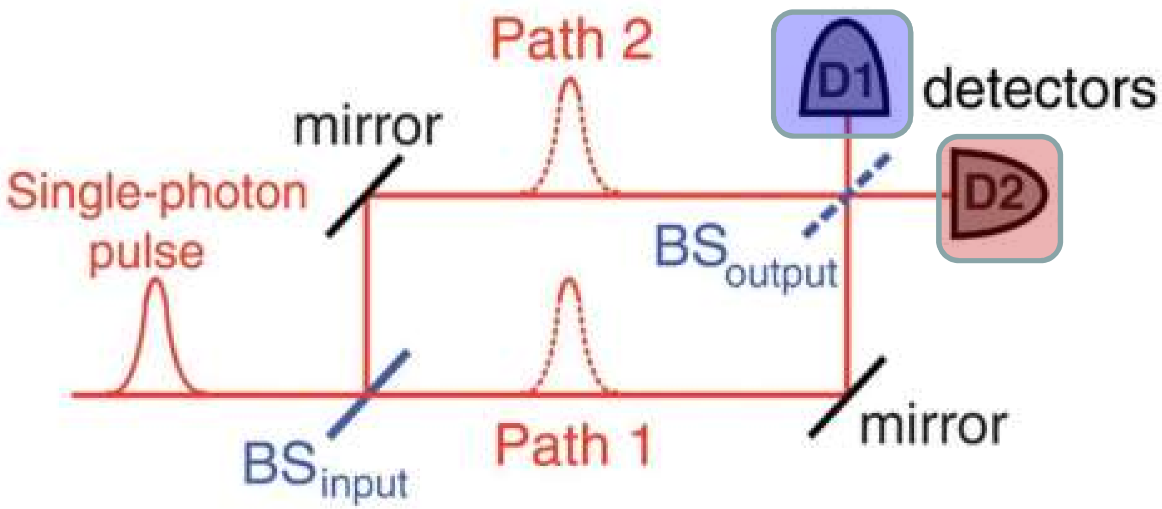
Eventually, a diffraction pattern



Detetar qual fenda o eletrão atravessou destrói a padrão de interferência

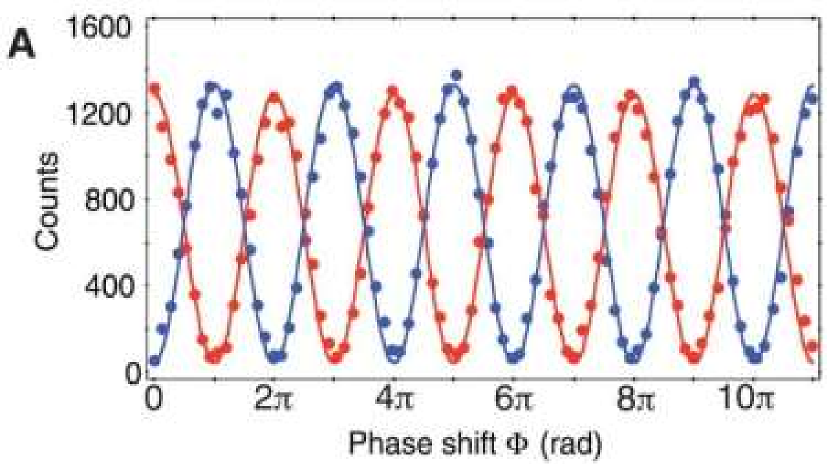
Sem obter informação sobre o caminho a padrão de interferência aparece

Um experiência com fotões únicas



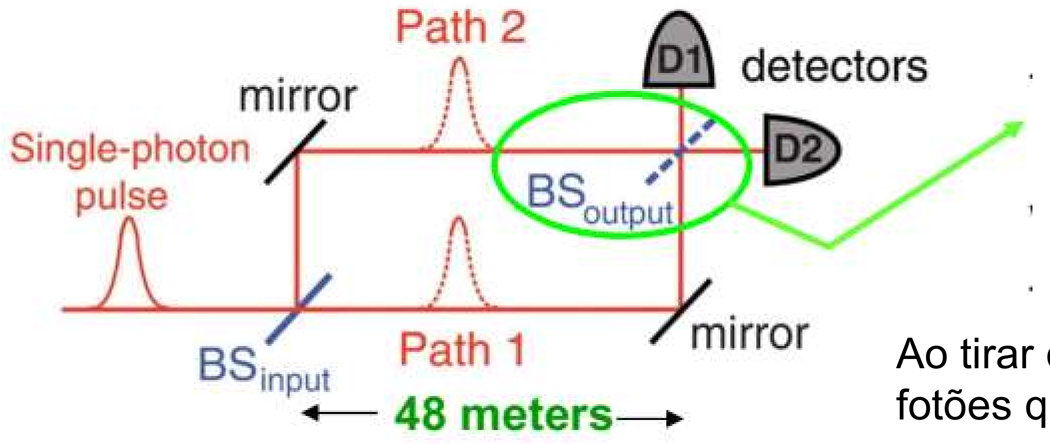
O fotão só pode ser detetado uma vez – é detetado no detetor D1 ou D2
Mais qual detetor recebe o fotão varia com a diferencia da fase entre os caminhos.

Cada fotão "toma" os dois caminhos alternativos



V. Jacques et al., *Science* (March 2007)

Experiência de escolha adiada

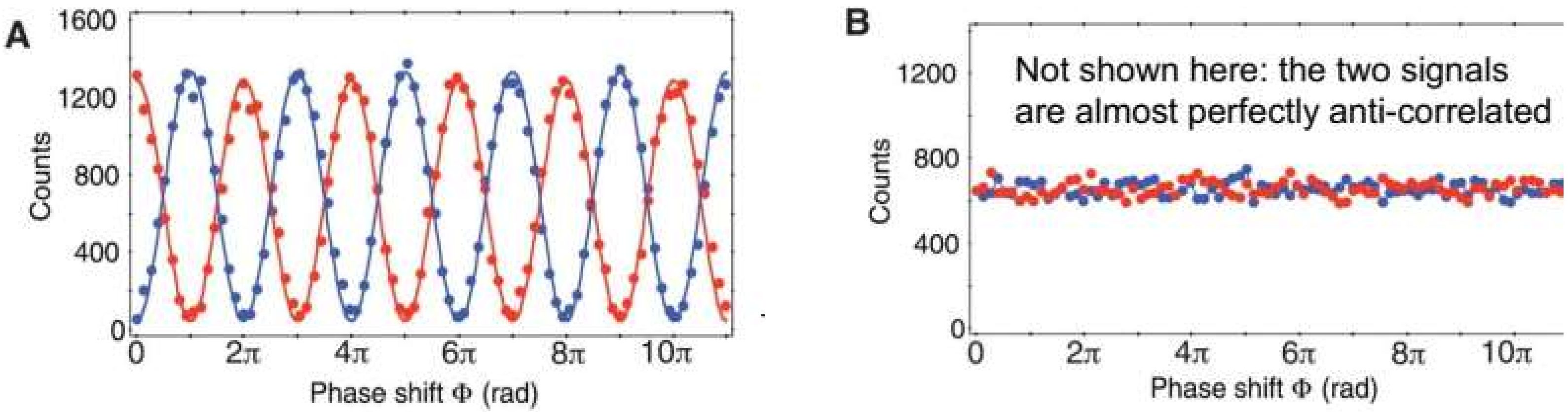


John Wheeler: Decidir tira ou deixar o segundo divisor de feixe depois o fotão ter passado pelo primeiro divisor de feixe

Ao tirar o divisor de feixe D1 (2) só deteta fotões que se propagam no caminho 1 (2).

Com divisor

Sem divisor



A medida realizar determina se efeitos ondulatórios ou particulares são observados

V. Jacques et al., *Science* (March 2007)

O gato de Schrödinger

Depois 1 hora existe 50% probabilidade que a partícula desintegra matando o gato.

Depois uma hora qual é o estado do gato?

Reposta intuitiva: existe 50% chance que o gato sobreviveu – só sabe ao certo quando abra a caixa.

Reposta de MQ: Ao longo do tempo o sistema se evolve numa sobreposição de estado gato vivo + gato morte. Ao abrir a caixa uma medida é realizada e o sistema “se colapsa” num dos estados.