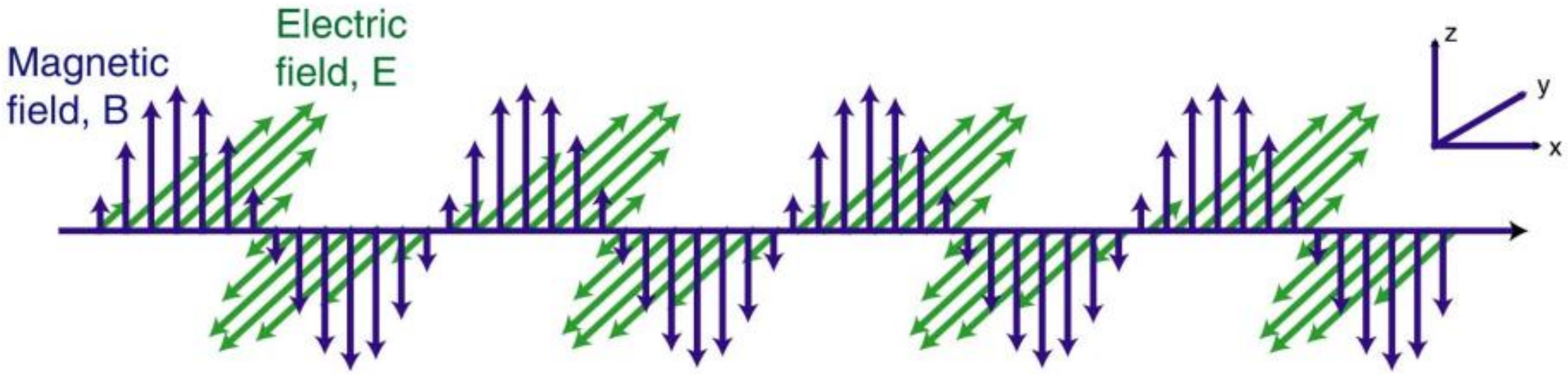
Equações de Maxwell



Derivação da equação da onda a partir das equações de Maxwell

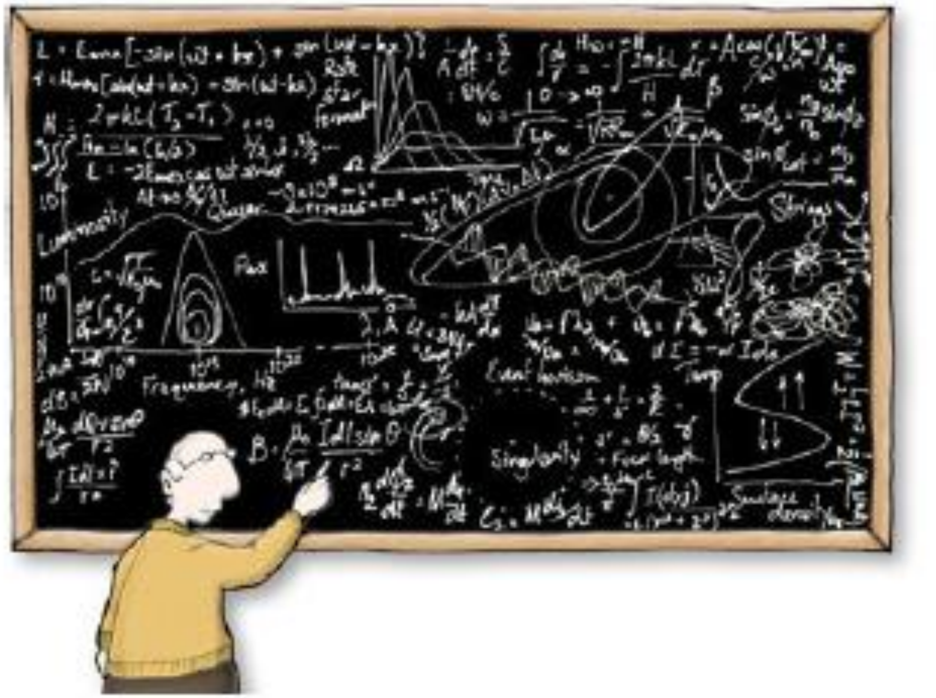
Porque as ondas EM são ondas transversais

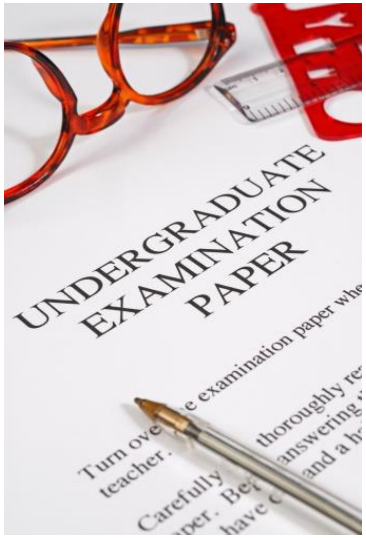
Relação entre as grandezas do campo elétrico e do campo magnético

Referência Hecht Cap. 3

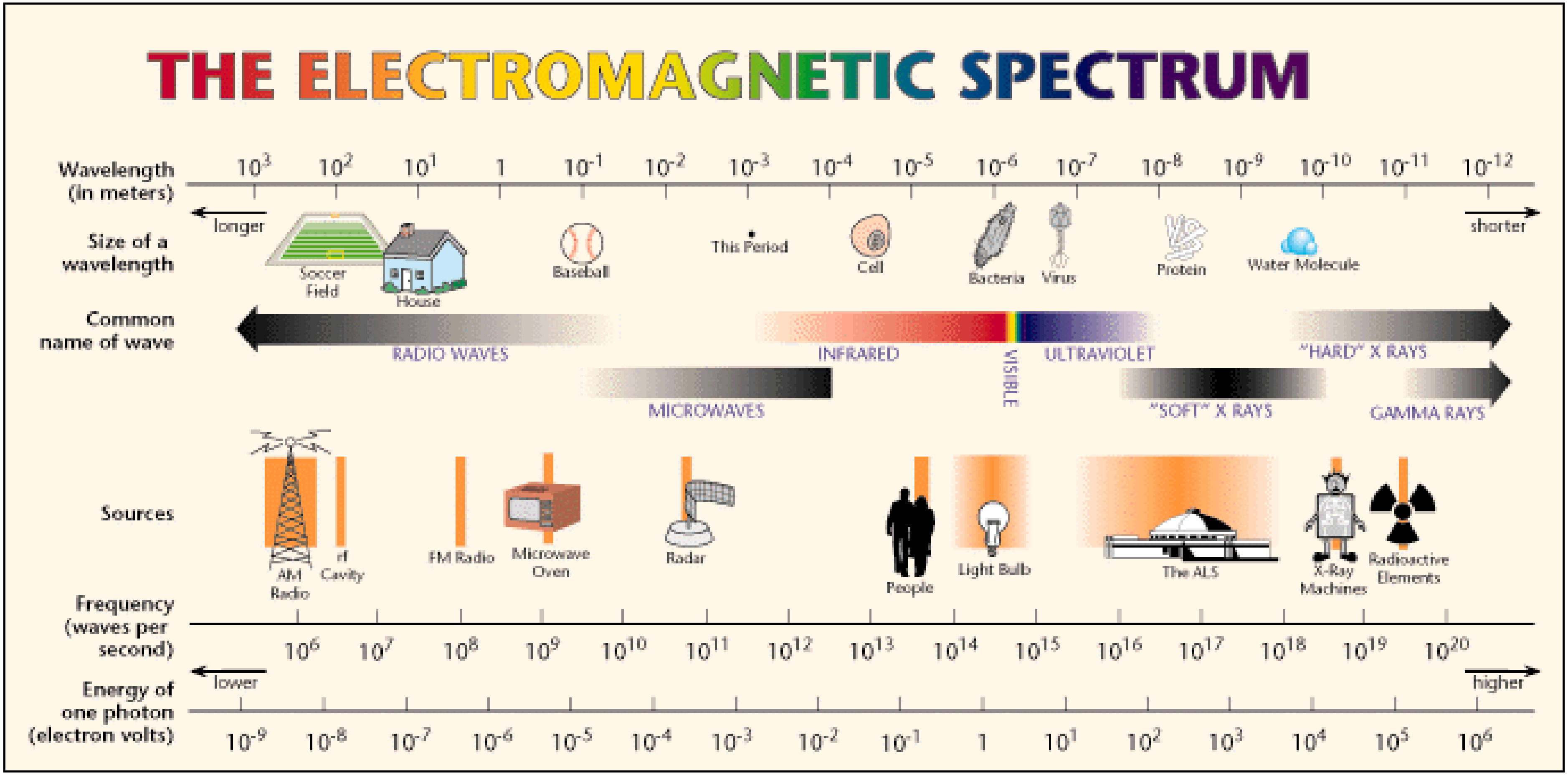
Avaliação:

2 Testes escritos (4 Abril, 23 Maio)?





O espetro eletromagnético

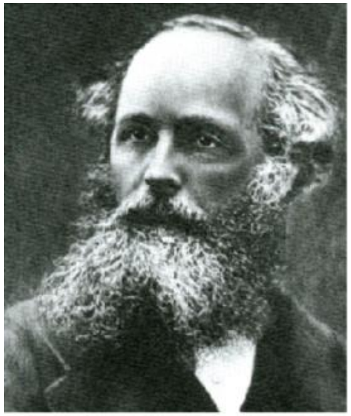


Visível: 400nm ↔ 750THz ↔ 3.1 eV
750nm ↔ 400THz ↔ 1.7 eV

As equações de Maxwell

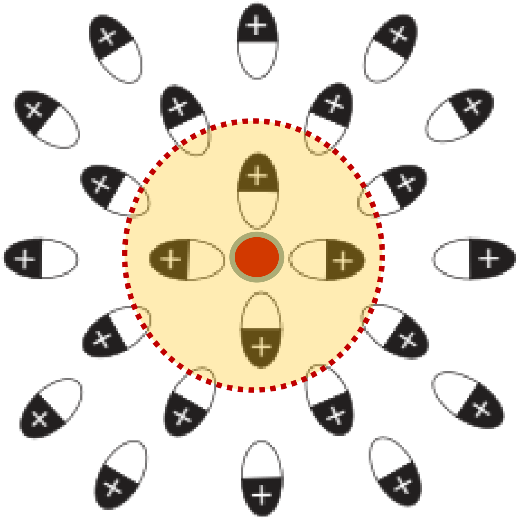
$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



James Clerk Maxwell (1831-1879)

Pormenor: pode haver 2 tipos de carga "livre" (free) e "ligado" (bound)



Num meio polarizável as cargas vão se reorientar para blindar (parcialmente) uma carga livre colocado dentro do meio.

Se o meio for linear $\frac{\rho_{livre}}{\rho_{total}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho_{livre}}{\varepsilon}$$

Algo análogo acontece com as correntes devida a magnetização do meio $\vec{J} \rightarrow \vec{J}_{livre}$ e $\mu_0 \rightarrow \mu$

Um pouco de historia

A versão original (1864) das equações do Maxwell era bastante mais complicada (havia 22 !)

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt} \\ q' &= q + \frac{dg}{dt} \\ r' &= r + \frac{dh}{dt} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} J_x &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ J_y &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ J_z &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \mu H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \mu H_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \mu H_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 4\pi p' \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi q' \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi r' \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi J_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 4\pi J_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi J_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} P &= \mu\left(\gamma\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dz}{dt}\right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \\ Q &= \mu\left(\alpha\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dx}{dt}\right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy} \\ R &= \mu\left(\beta\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} E_x &= \mu(H_z v_y - H_y v_z) - \frac{dA_x}{dt} - \frac{d\varphi}{dx} \\ E_y &= \mu(H_x v_z - H_z v_x) - \frac{dA_y}{dt} - \frac{d\varphi}{dy} \\ E_z &= \mu(H_y v_x - H_x v_y) - \frac{dA_z}{dt} - \frac{d\varphi}{dz} \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \mu(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} P &= kf \\ Q &= kg \\ R &= kh \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \varepsilon E_x &= D_x \\ \varepsilon E_y &= D_y \\ \varepsilon E_z &= D_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{D} \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} P &= -\zeta p \\ Q &= -\zeta q \\ R &= -\zeta r \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma E_x &= j_x \\ \sigma E_y &= j_y \\ \sigma E_z &= j_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma\mathbf{E} = \mathbf{j} \tag{1.6}$$

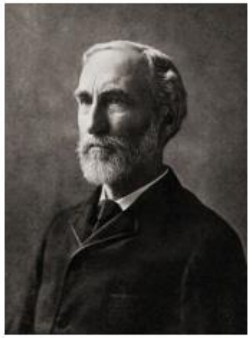
$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0 \rightarrow \rho + \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow -\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} \tag{1.7}$$

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} \tag{1.8}$$

No enanto ele chegou a uma equação de onda com uma velocidade que era quase igual ao melhor valor experimental da velocidade da luz (desacordo menor do que 5 %)

A consolidação foi feito pelo matemático livre Heavyside e o físico Josiah Willard Gibbs em 1884

Oliver Heaviside (1850 - 1925)



J. Willard Gibbs (1839 - 1903)

Permeabilidade dos materiais não magnéticos

Em frequências óticas (f ~ 4-8x10^{14} Hz)

Table 2.2 Representative Magnetic Permeability

Material	μ/μ_o	Class
Silver	0.99998	Diamagnetic
Copper	0.99999	Diamagnetic
Water	0.99999	Diamagnetic
Air	1.00000036	Paramagnetic
Aluminum	1.000021	Paramagnetic
Iron	5000	Ferromagnetic
Nickel	600	Ferromagnetic

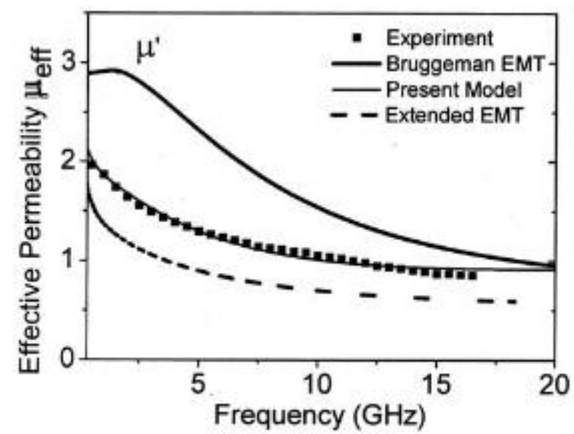
Valores para frequências baixas

Em geral é uma boa aproximação na ótica tomar

$\mu_0 \approx \mu$

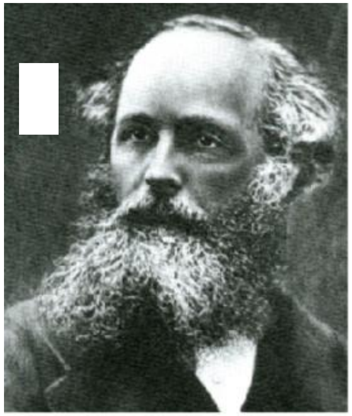
J. Appl. Phys. **99**, 083905 (2006)

Ferro 30% (10 μm) em cerra



(a)

As equações de Maxwell num meio linear



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

Sem cargas livres $\rho_{livre} = 0 \quad \vec{J}_{livre} = 0$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \qquad (1 \quad Gauss)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \qquad (2 \quad Gauss)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3 \quad Faraday)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4 \quad Ampere)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times (Faraday) + Ampere + Gauss \\ \vec{\nabla} \times (Ampere) + Faraday + Gauss \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{\mathbf{B}} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = 0 \end{array}$$

Ondas Planas

$$\vec{\mathbf{E}} = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathbf{E}}_0 \exp\left[i\left(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t\right)\right]\right\}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathbf{B}}_0 \exp\left[i\left(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t\right)\right]\right\}$$

Gauss

$$\vec{k}\bullet\vec{\mathbf{E}}_0 = 0$$

$$\vec{k}\bullet\vec{\mathbf{B}}_0 = 0$$

ondas planas são ondas transversais

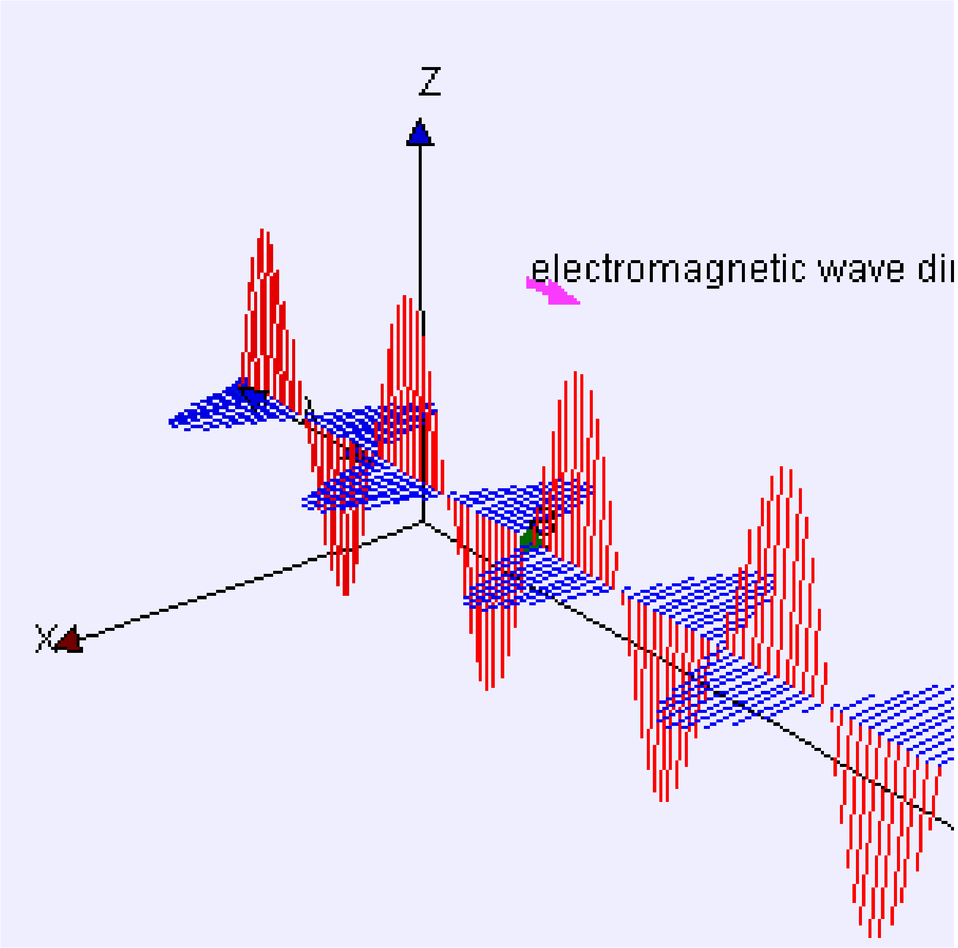
Faraday $\vec{k}\times\vec{\mathbf{E}}_0 = \omega\vec{\mathbf{B}}_0$ Campo magnético é perpendicular aos vetores $\vec{\mathbf{E}}_0$ e $\vec{k}$

$$c\left|\vec{\mathbf{B}}_0\right| = \left|\vec{\mathbf{E}}_0\right|$$

Força do Lorentz numa carga livre $\vec{F} = q\left(\vec{\mathbf{E}}+\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)$

$$\frac{\left|\vec{F}_B\right|}{\left|\vec{F}_E\right|} \leq \frac{\left|\vec{\mathbf{v}}\right|}{c}$$

Ondas transversais



Solução de ondas planas progressivas

$$\vec{\mathbf{E}} = \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbf{E}}_0 \exp\left[i\left(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t \right) \right] \right\}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbf{B}}_0 \exp\left[i\left(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t \right) \right] \right\}$$

frentes de onda $\perp \vec{k}$ logo a direção de propagação é ao longo de $\vec{k}$

Os campos elétricos e magnéticos têm o máximo amplitude nas mesmas posições e nos mesmos instantes (são em fase).

Ondas não tem ser sinusoidais – combinações lineares também são soluções – No entanto as condições impostos pelas equações de Maxwell continuam ser validas

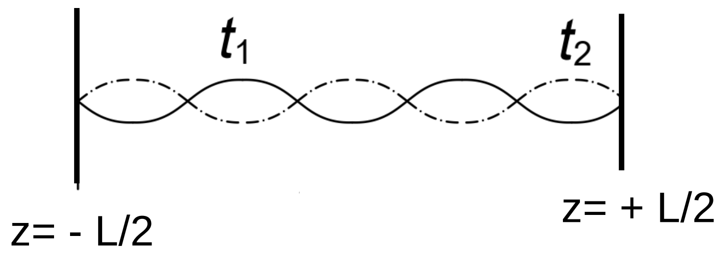
http://weelookang.blogspot.com/2011/10/ejs-open-source-propagation-of.html

Ondas estacionarias

Considere a sobreposição de duas ondas progressivas para formar um campo elétrico estacionário

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(kz - \omega t) \qquad \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(-kz - \omega t)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}(2E_0) \cos kz \cos \omega t$$



Qual é o campo magnético?

Ondas estacionarias

Considere a sobreposição de duas ondas progressivas para formar um campo elétrico estacionário

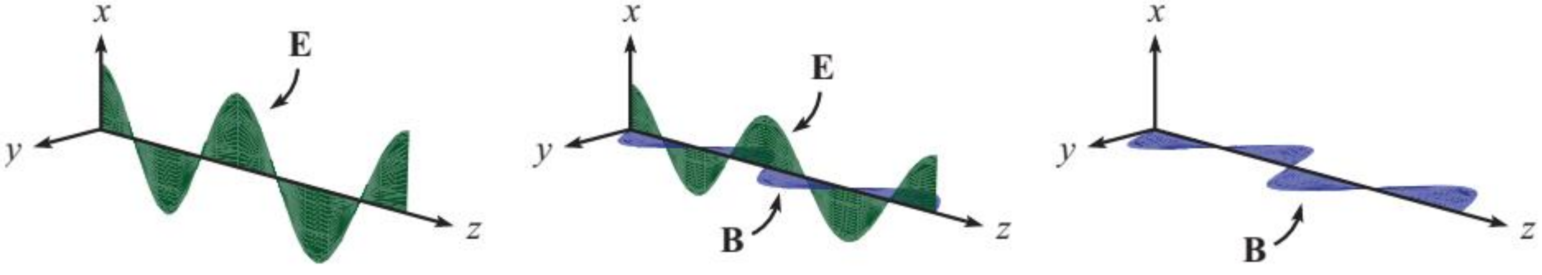
$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(kz - \omega t) \qquad \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(-kz - \omega t)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}(2E_0) \cos kz \cos \omega t$$

Qual é o campo magnético?

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}(2E_0/c) \sin kz \sin \omega t = \hat{\mathbf{y}} \frac{2E_0}{c} \cos\left(kz - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Agora existe uma diferença da fase de $\pi/2$ entre os campos elétricos e magnéticos



$(t=0)$ $(\omega t=\pi/4)$ $(\omega t=\pi/2)$

Faz lembrar a troca entre energia cinética e energia potencial dum oscilador harmónico

Energia

A densidade de energia associado com campos eletromagnéticos das ondas progressivas no vazio é

$$u_{EM} = \varepsilon_0 \frac{\left|\vec{\mathbf{E}}\right|^2}{2} + \frac{\left|\vec{\mathbf{B}}\right|^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 \left|\vec{\mathbf{E}}\right|^2 \qquad c\left|\vec{\mathbf{B}}_0\right| = \left|\vec{\mathbf{E}}_0\right| \qquad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Densidade energia é igual nos campos magnéticos e elétricos

Campo elétrico associado á um fotão? $\left|\vec{\mathbf{E}}_{fotão}\right| \sim \sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}$ Depende do volume da quantização!

Energia

A densidade da energia associado com campos EM no vazio é

$$u_{EM} = \varepsilon_0 \frac{\left|\vec{\mathbf{E}}\right|^2}{2} + \frac{\left|\vec{\mathbf{B}}\right|^2}{2\mu_0}$$

A variação com tempo

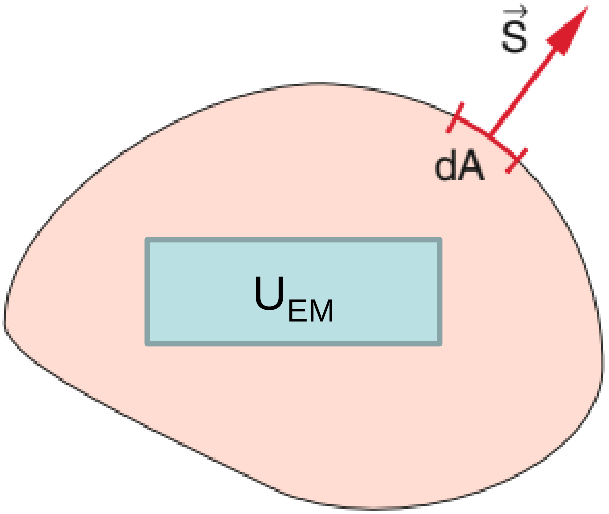
$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{B}} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$= \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \bullet \left[\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \vec{\mathbf{B}} \right] - \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{B}} \bullet \left[\nabla \times \vec{\mathbf{E}} \right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \nabla \bullet \left(\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{E}} \right)$$

$$\int_{Volume} d^3\vec{\mathbf{r}} \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = \int_{Volume} d^3\vec{\mathbf{r}} \frac{1}{\mu_0} \nabla \bullet \left(\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{E}} \right)$$

$$-\frac{\partial U_{EM}}{\partial t} = \int_{área} d\vec{\mathbf{A}} \bullet \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} \right)}_{\vec{\mathbf{S}}}$$



A perda da energia no volume é devida o transporte da energia fora do volume

Ondas progressivas (viajantes)

Vetor de "Poynting" $\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}\right)$

Por ondas progressivas

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos\left[i\left(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t\right) + \varphi \right]$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 \cos\left[i\left(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t\right) + \varphi \right]$$

Media temporal → $\left\langle \vec{\mathbf{S}} \right\rangle = I = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c \left|\vec{\mathbf{E}}_0\right|^2$

I é a Irradiãncia ou a Intensidade

Fluxo da energia: Energia/ área/tempo (W/m^2)

Na superfície da Terra $I_{Sol} \approx 1000W / m^2$

TABLE 3.1 The Mean Photon Flux Density for a Sampling of Common Sources

Light Source	Mean Photon Flux Density Φ/A in units of (photons/s · m^2)
Laserbeam (10 mW, He-Ne, focused to 20 μm)	10^{26}
Laserbeam (1 mW, He-Ne)	10^{21}
Bright sunlight	10^{18}
Indoor light level	10^{16}
Twilight	10^{14}
Moonlight	10^{12}
Starlight	10^{10}

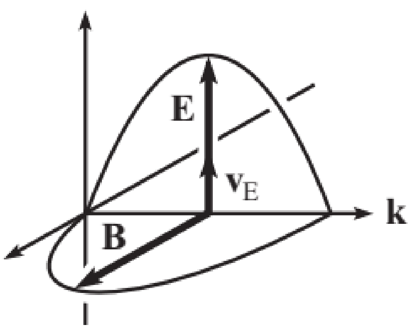
Momento duma onda EM

Relatividade restrita $U^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ Fotões m = 0

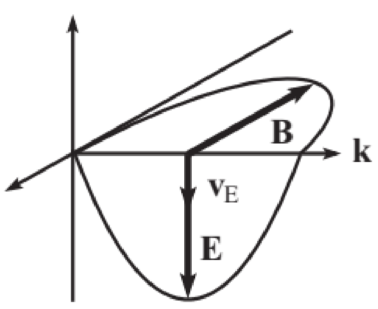
$$p_{fotão} = \frac{U}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} \qquad \vec{\mathbf{p}}_{fotão} = \hbar\vec{\mathbf{k}}$$

Considere uma onda plana que incide numa partícula pequena com carga q

(some time t)



(half period later)



O trabalho realizado na carga pelo campo EM

$$dU = \vec{\mathbf{F}}_E \bullet d\vec{x} = qE\left(\mathrm{v}_E dt\right)$$

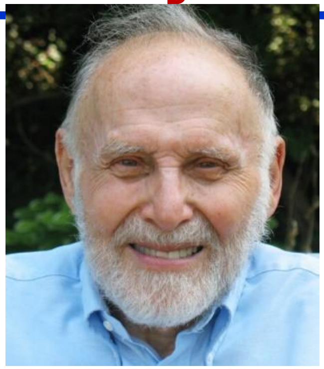
O momento transferido pelo campo EM

$$\left|d\vec{\mathbf{p}}\right| = \left|\vec{\mathbf{F}}_B \bullet dt\right| = \left|q\left(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)dt\right| = \frac{q\mathrm{v}_E E}{c}dt$$

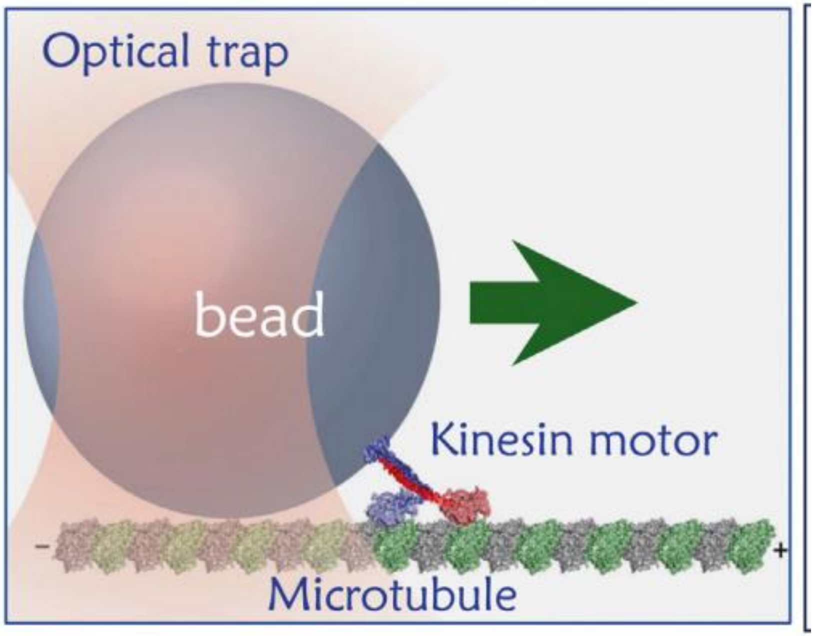
logo $$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\left|d\vec{\mathbf{p}}\right|}{dt} = \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{1}{c}\frac{dU}{dt} = \frac{\left|\vec{\mathbf{S}}\right|}{c}$$

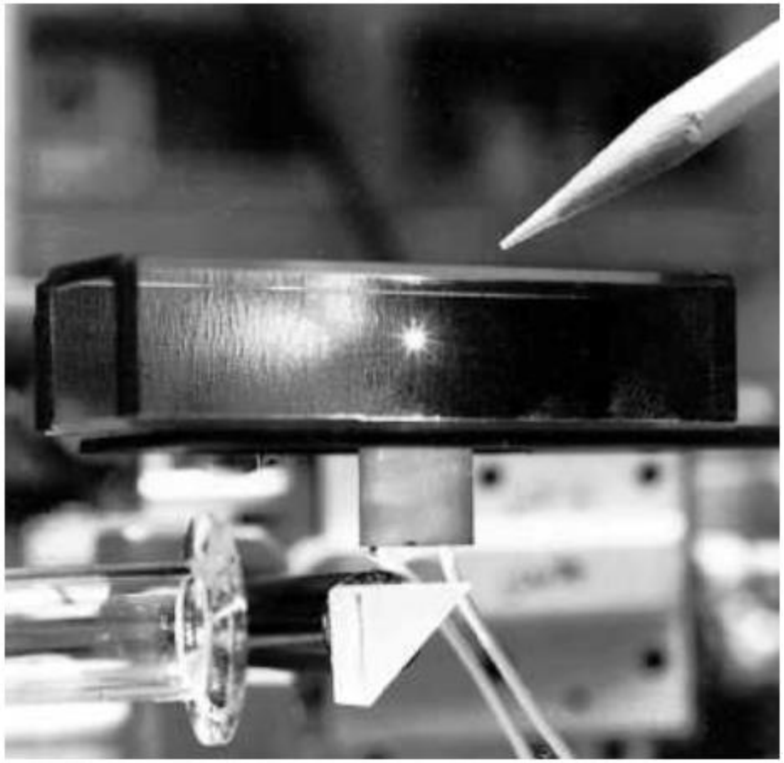
Pressão radiativa $$\frac{\left|\vec{\mathbf{S}}\right|}{c} = \frac{\left|\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}\right|}{\mu_0 c} = \varepsilon_0\left|\vec{\mathbf{E}}\right|^2 = u_{EM}$$

Levitação e pinças óticas

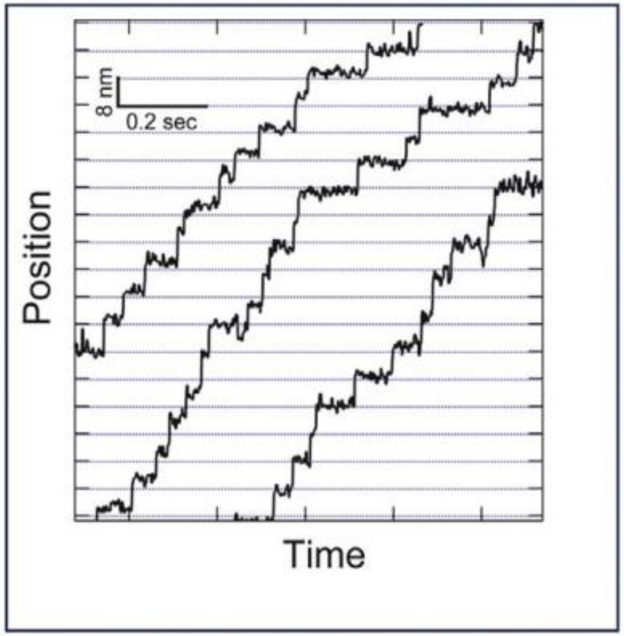


Arthur Ashkin (1922-2020)
Prémio Nobel 2018





The tiny starlike speck is a minute (one-thousandth of an inch diameter) transparent glass sphere suspended in midair on an upward 250-mW laserbeam. (Bell Laboratories)



Passos de ~8nm

Fotões

"What is known of [photons] comes from observing the results of their being created or annihilated."

- Eugene Hecht

O que é conhecido a cerca de quase tudo vem de observar dos resultados de fotões serem criados ou aniquilados