Aula 12: Oscilações Eletromagnéticas

Curso de Física Geral III

F-328

1º semestre, 2014

Instituto de Física Gleb Wataghin

Oscilações eletromagnéticas (LC)

Vimos:

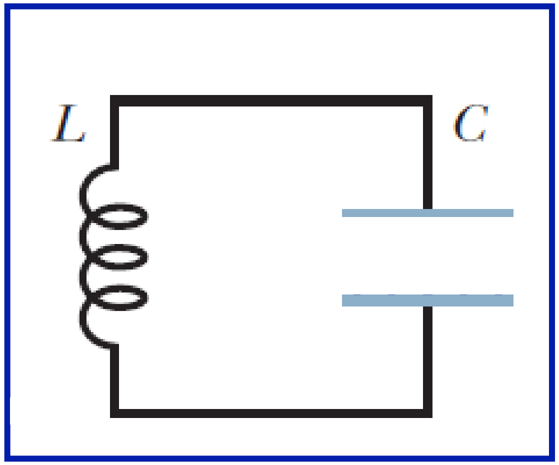
Circuitos RC e RL:

- $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$: têm comportamento exponencial

Veremos:

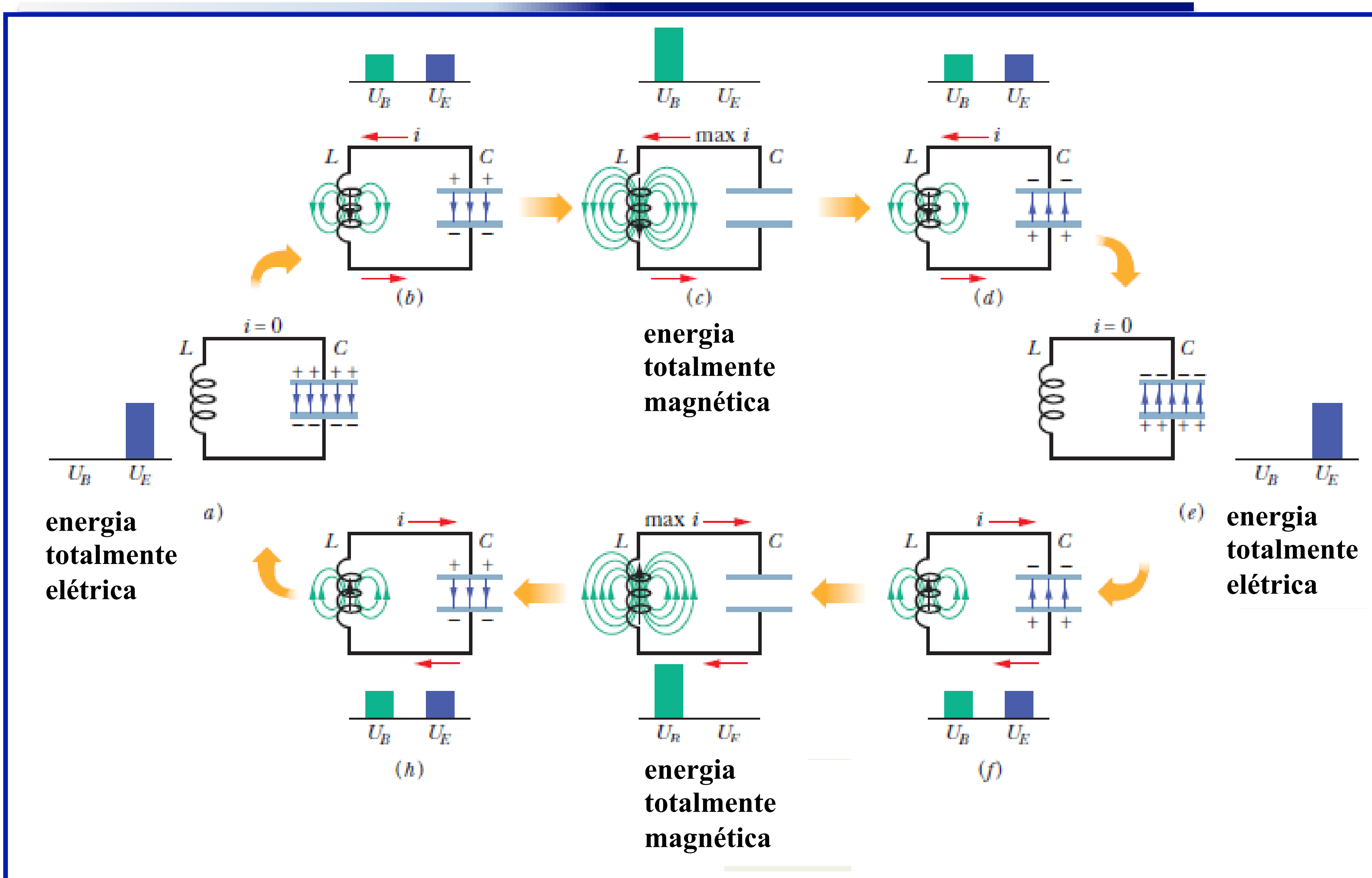
Circuito LC:

- $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$: comportamento senoidal
- Oscilações
  - campo elétrico do capacitor
  - campo magnético do indutor



→ **Oscilações eletromagnéticas**

Oscilações *LC*



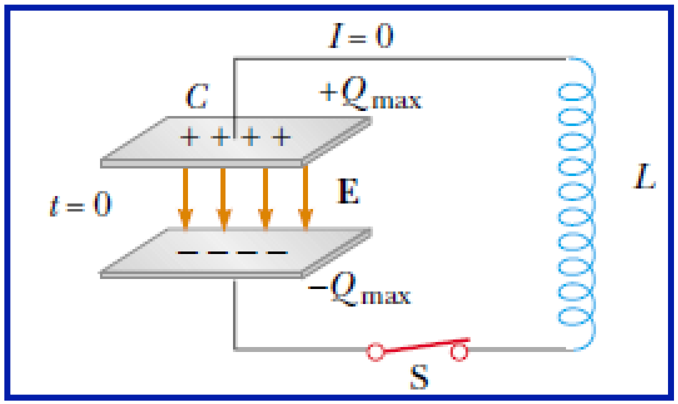
Oscilações eletromagnéticas (*LC*)

Simulação dos estágios

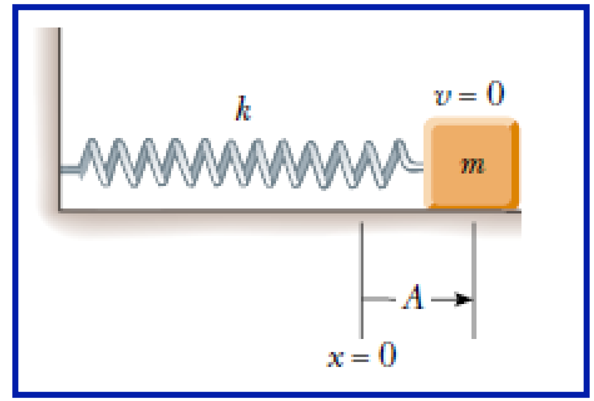
http://www.walter-fendt.de/ph14br/osccirc_br.htm

Osciladores harmônicos simples

Circuito *LC*



Sistema massa-mola



Elétrica: $U_E = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ (do capacitor)

Magnética: $U_B = \dfrac{1}{2}Li^2$ (do indutor)

$U_B \Leftrightarrow U_E$

Total: $U_E + U_B = U = cte$

Potencial: $U_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ (da mola)

Cinética: $U_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ (do bloco)

$U_c \Leftrightarrow U_p$

Total: $U_p + U_c = U = cte$

Analogia eletromecânica (massa-mola)

No sistema massa-mola , a energia total U é, em qualquer instante:

$$U = U_c + U_p$$

Se não houver atrito, U permanece constante, isto é:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \left(v = \frac{dx}{dt}\right)$$

cuja solução é: $\Rightarrow$ $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Movimento oscilatório
$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} & \text{: Frequência angular natural} \\ X_m & \text{: Amplitude} \\ \varphi & \text{: Constante de fase} \end{cases}$$

Analogia eletromecânica (oscilador LC)

Energia total oscilante : $U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

Como não há resistência no circuito, temos:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = 0 \iff \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \left(i = \frac{dq}{dt}\right)$$

cuja solução é: $\Rightarrow$ $q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Oscilações eletromagnéticas

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} : \text{Frequência angular natural} \\ Q : \text{Amplitude} \\ \varphi : \text{Constante de fase} \end{cases}$$

Corrente: $i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) = -I \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$

Analogia eletromecânica

	Circuito *LC*	**Sistema massa-mola**
Frequência angular:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Amplitude:	Q	X_m
Constante de fase:	φ	φ

Correspondências entre os dois sistemas

$q \rightarrow x$ $\qquad$ $L \rightarrow m$

$i \rightarrow v$ $\qquad$ $\frac{1}{C} \rightarrow k$

A amplitude e a constante de fase são determinadas pelas condições iniciais (no circuito LC, $i(0)$ e $q(0)$).

Energias elétrica e magnética

A energia elétrica armazenada no capacitor em qualquer instante t é:

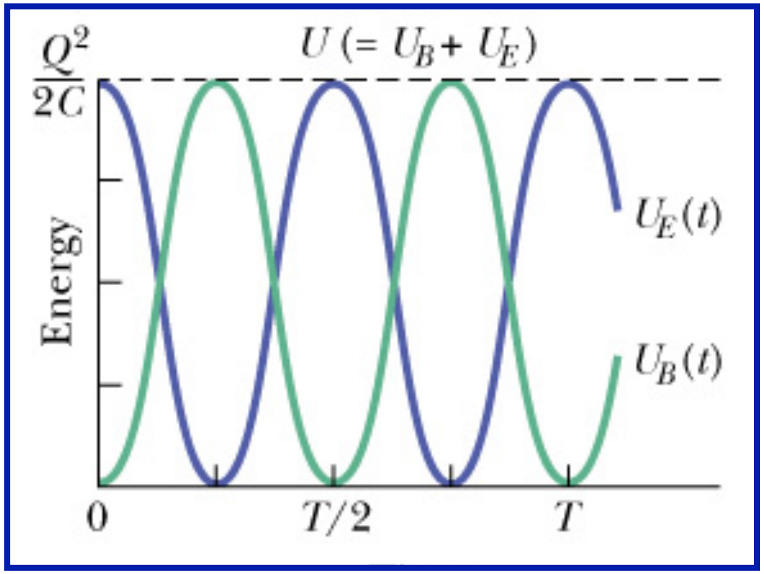
$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

A energia magnética armazenada no indutor é, por sua vez:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega_0^2 Q^2 \text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow U_B = \frac{Q^2}{2C}\text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$$

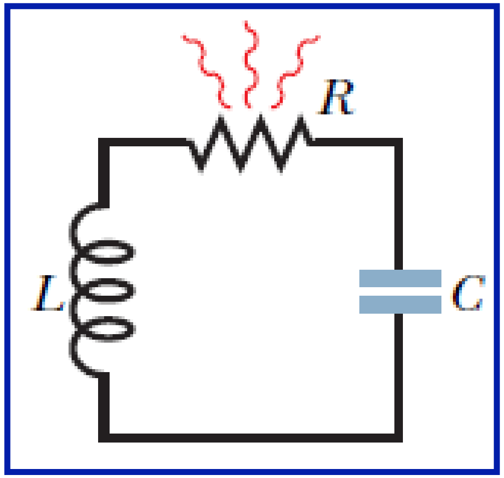
$$\Rightarrow \quad U_E + U_B = \frac{Q^2}{2C}$$

Então, a soma (energia total) permanece constante.



Oscilações amortecidas (circuito *RLC*)

Com um resistor R no circuito, a energia eletromagnética total U do sistema não é mais constante, pois diminui com o tempo na medida em que é transformada em energia térmica no resistor ($\frac{dU}{dt} < 0$) .



Energia eletromagnética $U = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{q^2}{2C}$

Potência dissipada $\frac{dU}{dt} = -Ri^2$

$$\Rightarrow \quad Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -Ri^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \left(i = \frac{dq}{dt} \right)$$

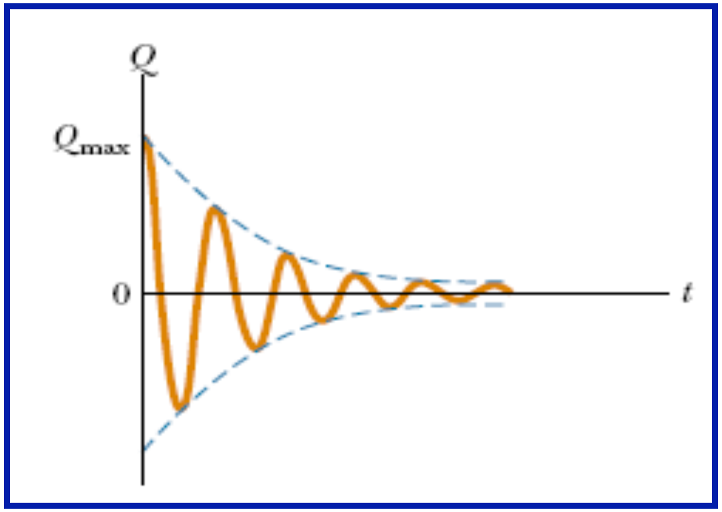
Oscilações amortecidas (circuito RLC)

Solução geral para o caso de amortecimento fraco $\left(R < \sqrt{\frac{4L}{C}}\right)$: $\Rightarrow$ $q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \varphi)$

onde $\omega' = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

Quando $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 << \frac{1}{LC}$ $\Rightarrow$ $\omega' \cong \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ $\Rightarrow$ ω' aproxima-se da frequência angular natural do sistema

Oscilações *amortecidas*: amplitude de q(t) decai exponencialmente com o tempo.



Exemplo 1

Um circuito *RLC* série possui indutância L = 12 mH, capacitância C = 1,6 μF, e resistência R = 1,5 Ω.

a) em que instante t a amplitude das oscilações da carga no circuito será 50% do seu valor original?

Queremos que: $$Q_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} = 0{,}5\, Q_{\max} \Rightarrow -\frac{Rt}{2L} = \ln 0{,}5$$

daí: $$t = -\frac{2L}{R}\ln 0{,}5 \Rightarrow t = 0{,}011\, s$$

b) quantas oscilações foram completadas neste intervalo de tempo?

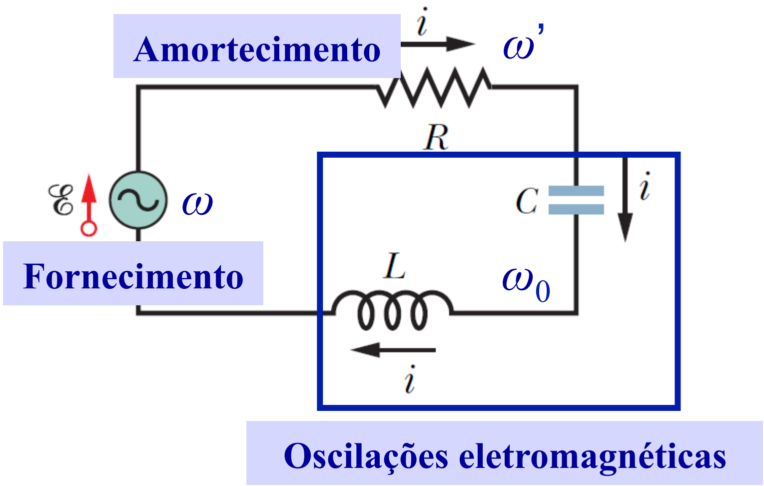
O tempo para uma oscilação completa é o período $T = \dfrac{2\pi}{\omega'}$.

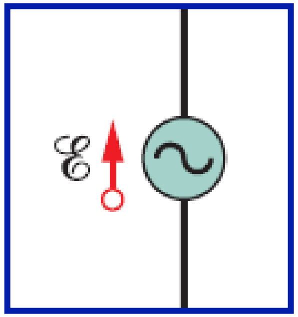
Neste caso, como $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 << \omega_0^{\,2}$, $\omega' \cong \omega_0$. Ou seja:

$$nT = t \Rightarrow n = \frac{t}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{ou} \quad n = \frac{0{,}011}{2\pi\left(12.10^{-3}\times 1{,}6.10^{-6}\right)^{\frac{1}{2}}} \cong 13$$

Oscilações forçadas (*RLC* com *fem*)

As oscilações de um circuito *RLC* não serão totalmente amortecidas se um dispositivo de *fem* externo fornecer energia suficiente para compensar a energia térmica dissipada no resistor.





Gerador de tensão alternada (*fem* ca): $\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t)$

ω : frequência angular propulsora

Oscilações forçadas ($q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$) **:**

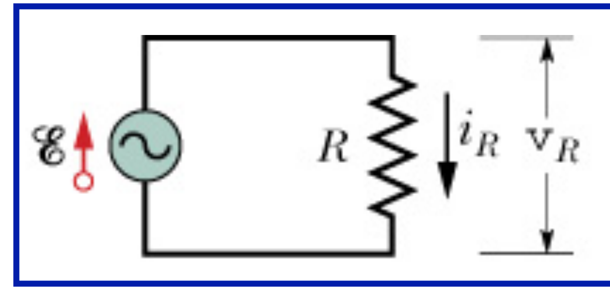
• Frequência: Qualquer que seja ω_0 (natural), essas grandezas oscilam com ω (frequência propulsora)

• Corrente: $i(t) = I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$

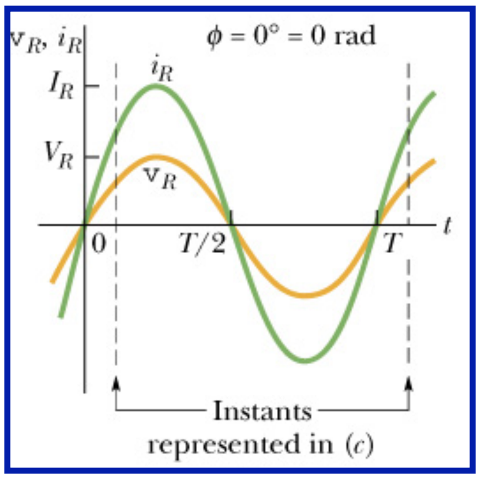
Circuito resistivo (R)

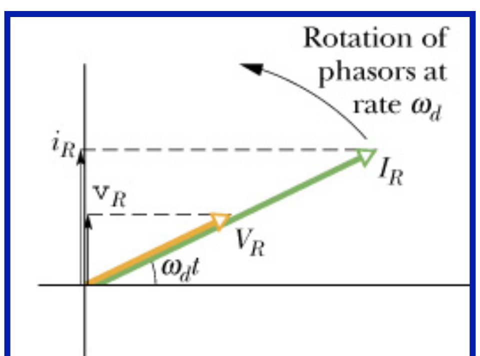
Um resistor ligado ao gerador de *fem alternada*:

$$\varepsilon = v_R = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = V_R \operatorname{sen}(\omega t)$$



Corrente i_R no resistor: $i_R = \dfrac{v_R}{R} = \dfrac{V_R}{R}\operatorname{sen}(\omega t)$





Por associação com a forma geral da corrente *ac*:

$$i_R = I_R \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

- Relação entre as amplitudes da corrente e da tensão no resistor:

$$I_R = \frac{V_R}{R} \Rightarrow \boxed{V_R = I_R R}$$

- Corrente e tensão *(ddp)* estão *em fase* no resistor:

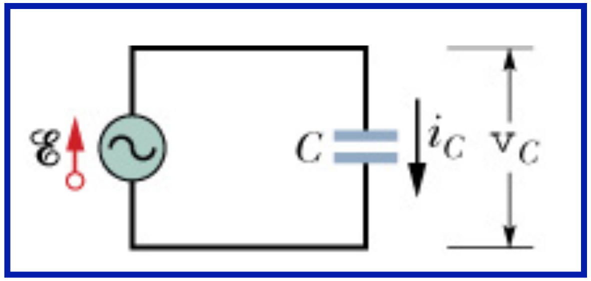
$$\Rightarrow \varphi = 0$$

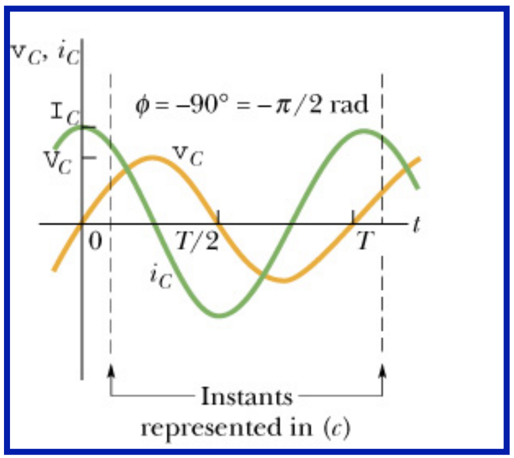
Circuito capacitivo (C)

Tensão: $v_C = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = V_C \operatorname{sen}(\omega t)$

Carga: $q_C = C v_C = C V_C \operatorname{sen}(\omega t)$

Corrente: $i_C = \omega C V_C \cos(\omega t) = \omega C V_C \operatorname{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2})$



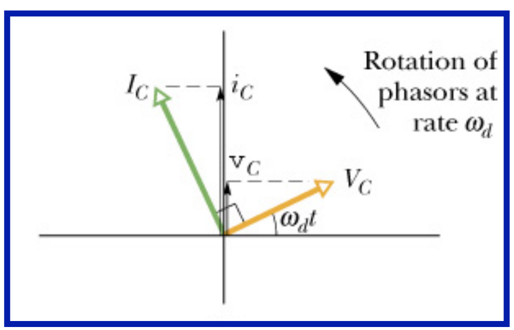


Introduzindo a *reatância capacitiva* $\Rightarrow$ $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \operatorname{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

- Relação entre as amplitudes da corrente e da tensão no capacitor:

$$\Rightarrow \boxed{V_C = I_C X_C}$$



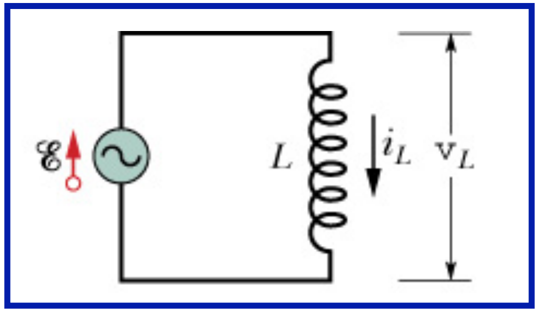
- Corrente está *adiantada de* $\frac{\pi}{2}$ em relação à tensão:

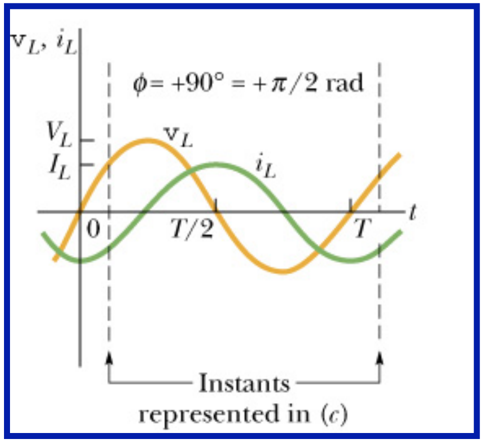
$$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

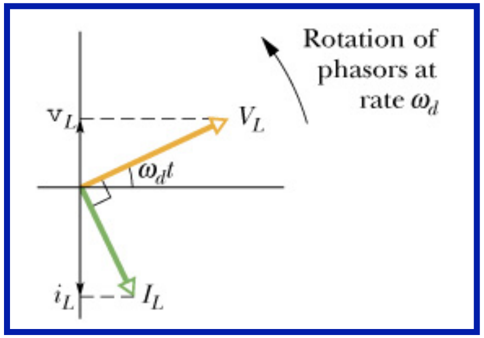
Circuito indutivo (L)

Tensão: $v_L = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = V_L \operatorname{sen}(\omega t) = L\dfrac{di_L}{dt}$

Corrente: $i_L = \dfrac{V_L}{L}\displaystyle\int \operatorname{sen}(\omega t)dt = -\dfrac{V_L}{\omega L}\cos(\omega t)$







Introduzindo a *reatância indutiva* $\Rightarrow X_L = \omega L$

$$i_L = \frac{V_L}{X_L}\operatorname{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

- Relação entre as amplitudes da corrente e da tensão no capacitor:

$$\Rightarrow \boxed{V_L = I_L X_L}$$

- Corrente está *atrasada de* $\dfrac{\pi}{2}$ em relação à tensão:

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

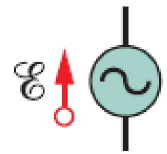
Simulações dos três circuitos simples

http://www.walter-fendt.de/ph14br/accircuit_br.htm

Pontos essenciais

Conservação da energia

Em circuitos *RLC* com corrente alternada:

- Fonte: *fem* 

- Dissipação: *R* 

- Troca de forma entre magnética (*L*) 
  e elétrica (*C*) 

Impedância *Z*

Grau de oposição à circulação da corrente alternada

Lista de exercícios do capítulo 31

Os exercícios sobre Oscilações Eletromagnéticas estão na página da disciplina : (http://www.ifi.unicamp.br).
Consultar: Graduação → Disciplinas → F 328 Física Geral III

Aulas gravadas:
http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)
ou
UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)