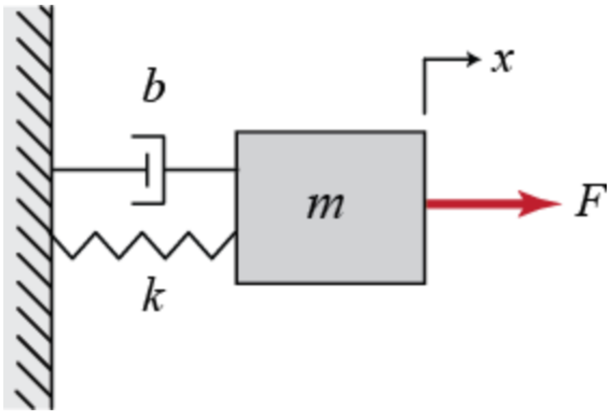
# Ficha de exercícios – Sistemas de 2ª Ordem + PID

**1.** Considere o seguinte sistema massa-mola-amortecedor:




Considere os seguintes parâmetros do sistema: k = 20 N/m; b = 10 N s/m; m=1 kg; F = 1 N. Posição desejada = 1m.

**1.1.** Modele matematicamente o sistema.

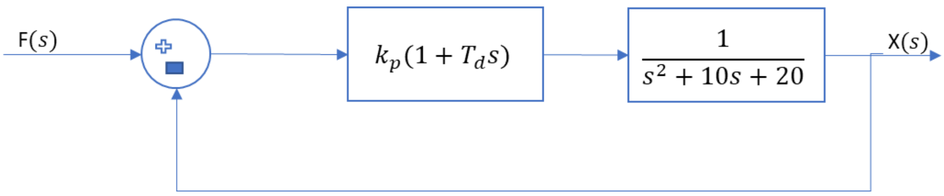
**1.2.** Calcule os polos do sistema, represente-os no plano s e classifique-o quanto a estabilidade.

**1.3.** Calcule a posição do bloco para t=1s.

**1.4.** Calcule o erro em regime permanente a uma entrada ao degrau.

**1.5.** Aplique um controlador proporcional e estude a resposta do sistema, calculando o erro em regime permanente do sistema. Estude a resposta a um degrau no MATLAB. Calcule os polos do sistema.

**1.6.** Aplique um controlador proporcional derivativo e estude a resposta do sistema, calculando o erro em regime permanente do sistema. Estude a resposta a um degrau no MATLAB. Calcule os polos do sistema.




$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{k_p(1+T_d s)\times\frac{1}{s^2+10s+20}}{1+k_p(1+T_d s)\times\frac{1}{s^2+10s+20}} = \frac{k_p(1+T_d s)}{s^2+10s+20}\times\frac{s^2+10s+20}{s^2+10s+20+k_p(1+T_d s)}$$

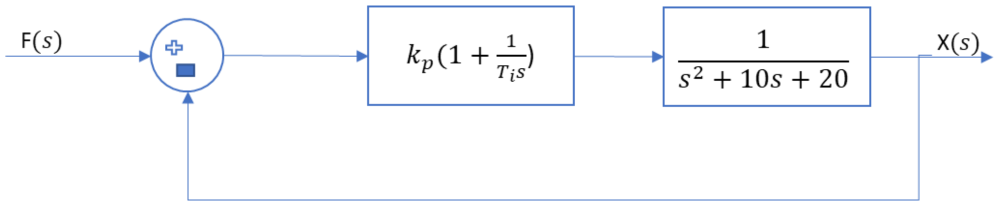
$$= \frac{k_p(1+T_d s)}{s^2+(10+k_pT_d)s+20+k_p}$$

Valor em regime permanente/ Steady state value:

$$X(\infty) = \lim_{s\to 0} s\times\frac{k_p(1+T_d s)}{s^2+(10+k_pT_d)s+20+k_p}\times\frac{1}{s} = \frac{k_p}{k_p+20}$$

Cálculo do erro / Computing the error: $e(t) = 1 - \frac{k_p}{k_p+20}$

**1.7.** Aplique um controlador proporcional integral e estude a resposta do sistema, calculando o erro em regime permanente do sistema. Estude a resposta a um degrau no MATLAB. Calcule os polos do sistema.




$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{k_p(1+\frac{1}{T_i s}) \times \frac{1}{s^2+10s+20}}{1+k_p(1+\frac{1}{T_i s}) \times \frac{1}{s^2+10s+20}} = \frac{k_p(1+\frac{1}{T_i s})}{s^2+10s+20} \times \frac{s^2+10s+20}{s^2+10s+20+k_p(1+\frac{1}{T_i s})}$$

$$= \frac{k_p(1+\frac{1}{T_i s})}{s^2+10s+20+k_p(1+\frac{1}{T_i s})} =$$

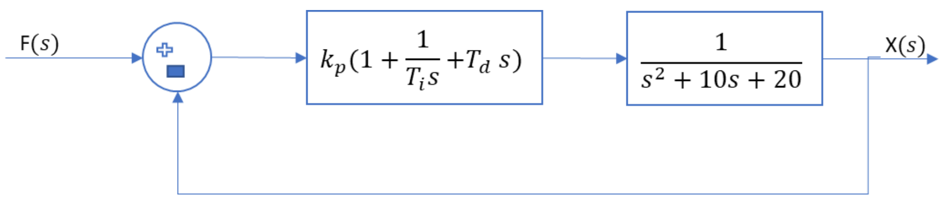
$$= \frac{\frac{k_p}{T_i s}(T_i s+1)}{s^2+10s+20+\frac{k_p}{T_i s}(T_i s+1)} = \frac{k_p T_i s + k_p}{T_i(s^3+10s^2+(20+k_p)s+\frac{k_p}{T_i})} = \frac{T_i(k_p s + \frac{k_p}{T_i})}{T_i(s^3+10s^2+(20+k_p)s+\frac{k_p}{T_i})}$$

Valor em regime permanente / Steady state value:

$$X(\infty) = \lim_{s\to 0} s \times \frac{T_i(k_p s + \frac{k_p}{T_i})}{T_i(s^3+10s^2+(20+k_p)s+\frac{k_p}{T_i})} \times \frac{1}{s} = \frac{\frac{k_p}{T_i}}{\frac{k_p}{T_i}} = 1$$

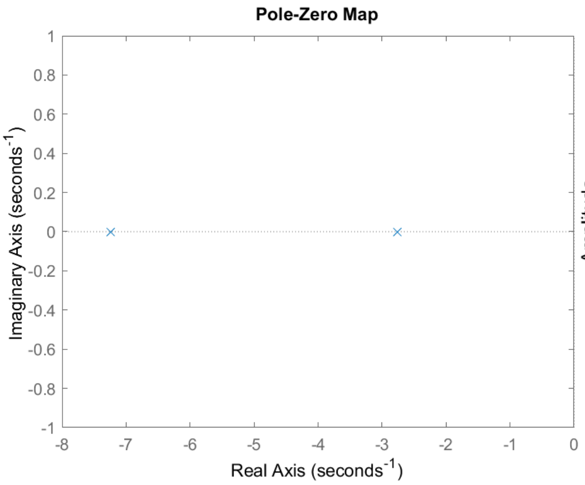
Cálculo do erro / Computing the error: $e(t) = 1 - 1 = 0$

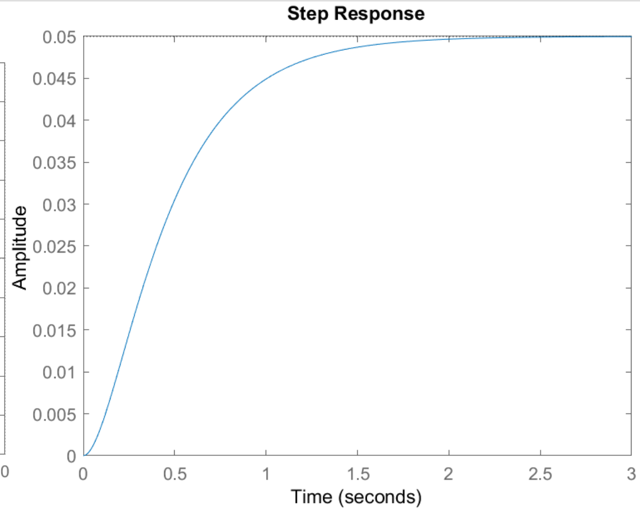
**1.8.** Sintonize um controlador PID. Aplique as regras de Ziegler-Nichols para sintonizar corretamente o controlador PID a aplicar ao sistema.

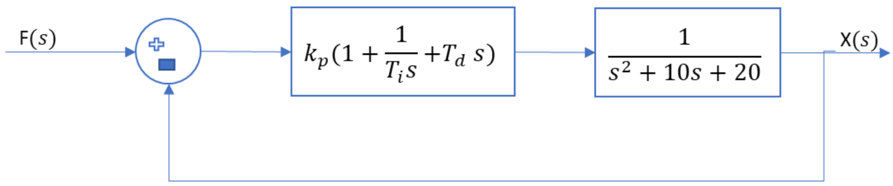


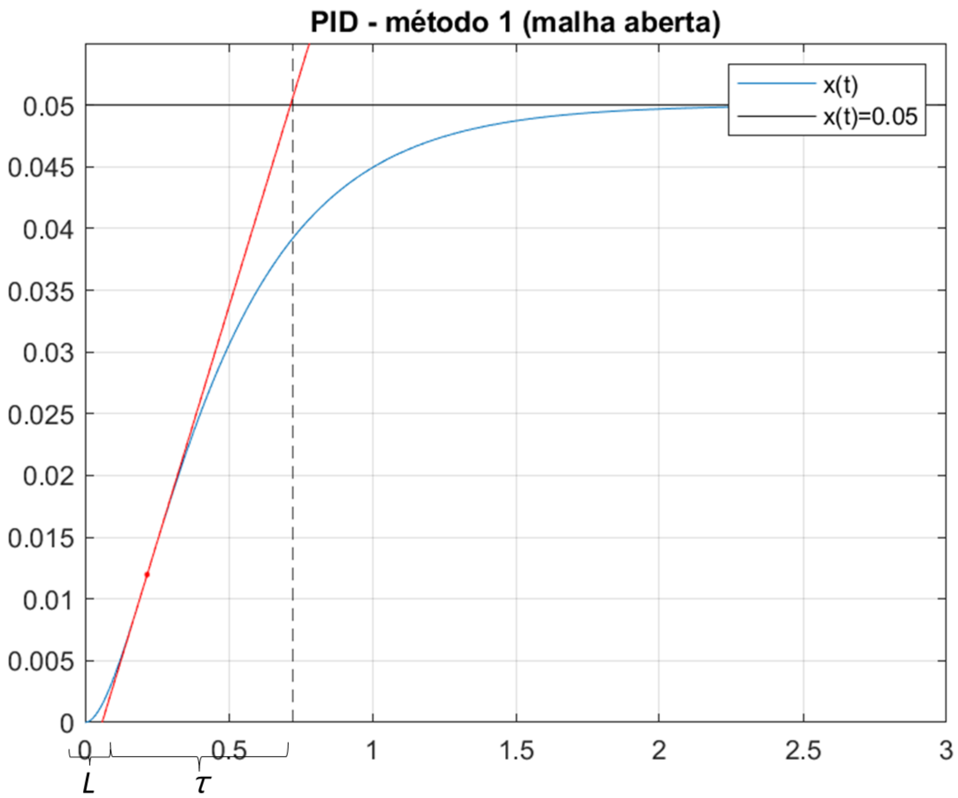

Se analisarmos a função de transferência do sistema temos que / If we analyze the transfer function of the system we have to:

Pólos/ Poles: $s_1 = -7{,}24$ | $s_2 = -2.76$ | Os pólos são puramente reais e estão localizados no semiplano esquerdo. O sistema é estável e sobre amortecido. Logo, a resposta do sistema (abaixo) é estável e sobre amortecida. Então podemos usar o 1º método (malha aberta). / The poles are purely real and are located on the left half plane. The system is stable and over-damped. Therefore, the system response (below) is stable and over-damped. So we can use the 1st method (open loop)



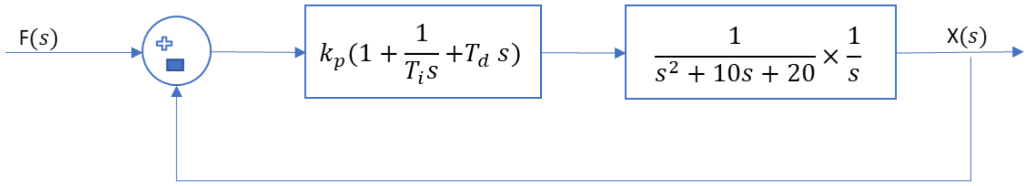




$L = 0.059 \mid L + \tau = 0.7224\ então\ \tau = 0.7224 - 0.059 = 0.6634$

$PID \Rightarrow k_p = 14{,}512 \mid T_i = 0{,}1156 \mid T_d = 0{,}0289$

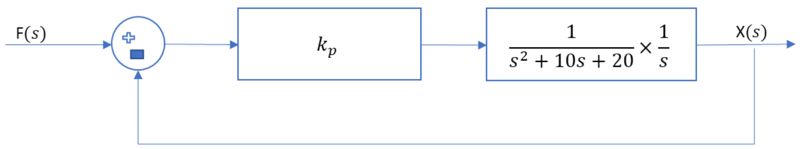
**1.9.** Considere que o sistema sofre uma perturbação que consiste na inclusão de um integrador na função de transferência do sistema. Aplique as regras de Ziegler-Nichols para sintonizar corretamente o controlador PID a aplicar ao sistema.




Se analisarmos a função de transferência do sistema temos que / If we analyze the transfer function of the system we have to:

Pólos / Poles: $s_1 = -7{,}24 \mid s_2 = -2.76 \mid s_3 = 0$ | Dois pólos são puramente reais e estão localizados no semiplano esquerdo, mas um é igual a zero. O sistema é instável. Então temos que usar o 2º método (malha fechada). / Two poles are purely real and are located on the left half plane, but one is equal to zero. The system is unstable. So we have to use the 2nd method (closed loop).

1º passo / 1st step:




$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{k_p \times \frac{1}{s^2+10s+20}\times\frac{1}{s}}{1+k_p \times \frac{1}{s^2+10s+20}\times\frac{1}{s}} = \frac{k_p}{s^3+10s^2+20s+k_p}$$

2º passo / 2nd step:

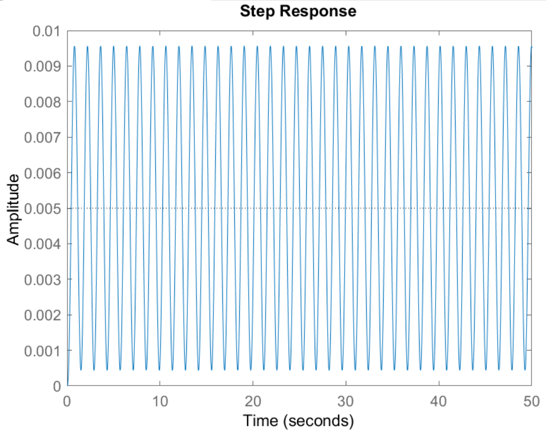
Critério de estabilidade de Routh:

$s^3 + 10s^2 + 20s + k_p = 0$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 20 \\ s^2 & 10 & k_p \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{10*20-1\times k_p}{10} = \frac{200-k_p}{10} \qquad c_1 = \frac{b_1*k_p-0}{b_1} = k_p$$

Para um $k_p = 200$, é possível verificar oscilações, $k_{cr} = 200$. Podemos observar o estado crítico do sistema com um $k_p = k_{cr} = 200$ abaixo / For a $k_p = 200$, it is possible to check oscillations, $k_{cr} = 200$. We can observe the critical state of the system with a $k_p = k_{cr} = 200$ below:




3º passo / 3rd step: Descobrir o período crítico ($P_{cr}$). Para isso iremos substituir na equação abaixo $s = jw$: / Find out the critical period ($P_{cr}$). For this we will substitute $s = jw$ in the equation below:

$$s^3 + 10s^2 + 20s + 200 = 0$$

$$(jw)^3 + 10(jw)^2 + 20(jw) + 200 = 0 \ (=)(jw)^3 + 10(jw)^2 + 20(jw) + 10 \times 20$$
$$= 0 \ (=) - jw^3 - 10w^2 + 20jw + 10 \times 20 = 0 \ (=)10(20 - w^2) + jw(20 - w^2) = 0$$

$$w^2 = 20 \rightarrow w_{cr} = \sqrt{20}$$

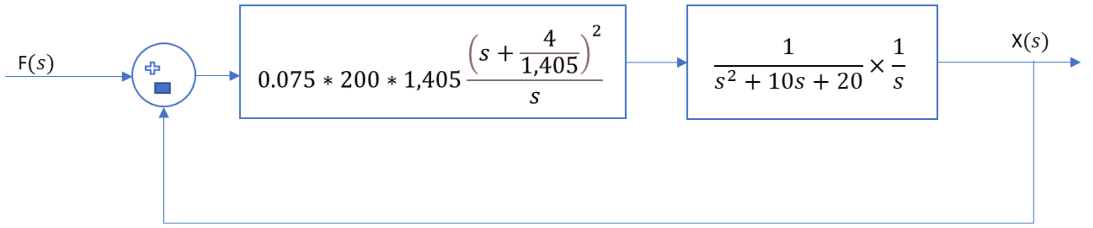
$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{20}} = 1{,}405$$

$$k_p = 0{,}6 \times k_{cr}$$

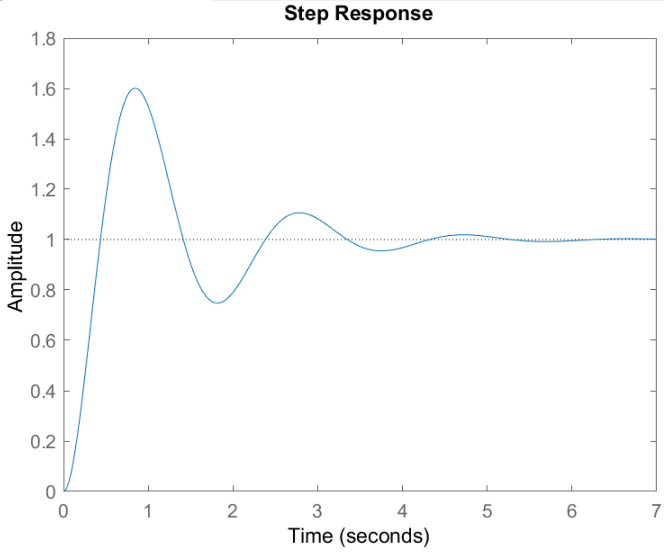
$$T_i = 0{,}5 \times P_{cr}$$

$$T_d = 0.125 \times P_{cr}$$

$$PID = 0.075 * k_{cr} * P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}}\right)^2}{s}$$




A reposta ao degrau unitário do sistema com o controlador PID sintonizado abaixo. Podemos observar que o erro do sistema foi eliminado. / The system unit step response with the PID controller tuned below. We can see that the system error has been eliminated.




**1.10.** Utilizando uma ferramenta computacional (MATLAB) apresente graficamente a resposta do sistema com os parâmetros definidos nas alíneas anteriores.

**1.11.** Recorrendo ao MATLAB estude a influência dos parâmetros de controlo do PID no sistema para uma entrada ao degrau unitário.

**2.** Considere agora os seguintes parâmetros do sistema: k = 20 N/m; b = 5 N s/m; m=1 kg; F = 1 N. Determine, para uma entrada ao degrau, os seguintes parâmetros:

**2.1.** A atenuação do sistema ($\sigma$)

**2.2.** A frequência natural não amortecida ($\omega_n$)

**2.3.** O factor de amortecimento ($\varsigma$)

**2.4.** A classificação em que se insere o sistema em termos de amortecimento. Justifique.

**2.5.** O tempo de subida ($t_r$)

**2.6.** O tempo de pico ($t_p$)

**2.7.** O tempo de estabelecimento a 2 % ($t_s$)

**2.8.** O overshoot (%) (Mp%)