Problema 8.8 (Griffiths)

Uma esfera de Fe de raio R tem uma carga Q e uma magnetização uniforme $\vec{M} = M\hat{z}$

a) Calcule o momento angular "armazenado" nos campos

b) Mostre o que acontece a este momento angular quando:

b1) Desmagnetizo a esfera

b2) Descarrego a esfera.

Solução:

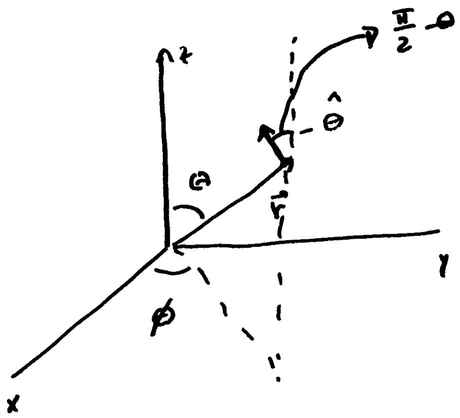
(a) Como vimos antes, os campos gerados pela esfera são: $\left(m = M \frac{4}{3}\pi R^3\right)$:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{r} & \text{se } r > R \end{cases} \qquad \vec{B} = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{z} & r < R \\ \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right] & r > R \end{cases}$$

Logo

$$\vec{\wp}_{em} = \varepsilon_0\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \dfrac{\mu_0}{(4\pi)^2}\dfrac{Qm}{r^5}\sin\theta\,\underbrace{(\vec{r}\wedge\hat{\theta})}_{+\hat{\phi}} \end{cases}$$

$$\vec{l}_{em} = \vec{r}\wedge\vec{\wp}_{em} = -\frac{\mu_0\,Qm}{(4\pi)^2\,r^4}\sin\theta\,\hat{\theta} \qquad -\hat{\theta} = \hat{r}\wedge\hat{\phi}$$



$$(-\hat{\theta})_z = \sin\theta$$

(esta é a única componente que sobrevive após integração angular)

$$[\vec{l}_{em}]_z = \frac{\mu_0 Q m}{(4\pi)^2 r^4} \sin^2\theta$$

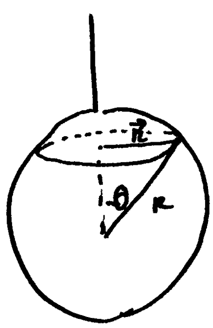
$$\vec{L} = \hat{z} \int \frac{\mu_0 Q m \cdot \sin^2\theta}{(4\pi)^2 r^4} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \hat{z} \left[\frac{\mu_0 Q m}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} \, dr \right]$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 Q m}{(4\pi)^{\cancel{2}}} \, 2\cancel{\pi} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{1}{R}$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 Q \frac{\cancel{4}}{3} \cancel{\pi} R^3 M}{(\cancel{4\pi})} \frac{2}{3} \frac{1}{R} = \frac{2}{9} \mu_0 Q M R^2 \hat{z} = \vec{L}$$

b) Desmagnetização da esfera:



A redução de M $\Rightarrow$ implica o aparecimento de um campo eléctrico circunferencial ($\parallel \hat{\phi}$)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow E \, 2\pi R \sin\theta = -\frac{2}{3} \mu_0 \dot{M} \cdot \pi (R\sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{R\sin\theta}{3} \mu_0 \frac{dM}{dt} \hat{\phi}$$

A força induzida por este campo na superfície da esfera (que tem uma carga Q) é:

$$d\vec{f} = \sigma \, d\Sigma \, \vec{E}$$

$\sigma \equiv$ densidade superficial de carga.

$$= -\sigma \, d\Sigma \, \frac{R \sin\theta}{3} \mu_0 \frac{dM}{dt} \hat{\phi}$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{R \sin\theta}{3} \mu_0 \frac{dM}{dt} \, d\Sigma \, \hat{\phi}$$

$$d\vec{N} = \vec{r} \wedge d\vec{f} = -\frac{\mu_0}{4\pi} Q \frac{\sin\theta}{3} \frac{dM}{dt} \, d\Sigma \, \underbrace{(\hat{r} \wedge \hat{\phi})}_{-\hat{\theta}}$$

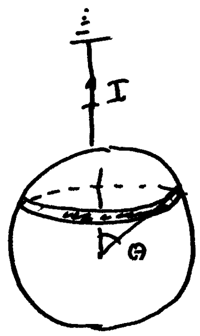
$$(d\vec{N})_z = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\sin\theta}{3} \frac{dM}{dt} \, d\Sigma \, \sin\theta$$

$$\vec{N} = \hat{z} \int \frac{\mu_0 Q}{4\pi \cdot 3} \sin^2\theta \frac{dM}{dt} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= -\hat{z} \frac{2\mu_0}{9} Q R^2 \frac{dM}{dt} \longrightarrow L_z = \int N_z \, dt = \frac{2\mu_0}{9} Q R^2 M \hat{z}$$

b2- Descarregar a esfera: (ex.: ligar o polo norte à terra)

a carga é drenada, mantendo-se sempre uniformemente distribuída (Porquê? É isto plausível?)



$$\sigma(t) = \frac{q(t)}{4\pi R^2} \qquad \begin{bmatrix} q(0) = Q \\ q(\infty) = 0 \end{bmatrix}$$

$dq = \sigma \, 2\pi R \sin\theta \cdot R\, d\theta$; a carga eléctrica acumulada abaixo do anel ilustrado na figura é:

$$q_S(t) = \sigma\, 2\pi R^2 \int_\theta^\pi \sin\theta \, d\theta = 2\pi R^2 \sigma \left(1 + \cos\theta\right) =$$

$$= \frac{2\pi R^2 \, q(t)}{4\pi R^2} \cdot (1+\cos\theta) = \frac{q(t)}{2}(1+\cos\theta)$$

A corrente que atravessa o anel da figura é:

$$I(t) = -\frac{d q_S(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dq}{dt}(1+\cos\theta)$$

(uniformemente distribuída pelo anel). Isto corresponde a uma densidade superficial de corrente:

$$\vec{K}(t) = \frac{I(t)}{2\pi R \sin\theta}(-\hat{\theta})$$

$$= \frac{1}{4\pi R}\frac{dq}{dt}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\theta}$$

A densidade superficial de força vem:

$$d\vec{f} = \vec{K}(t) \wedge \vec{B} \cdot d\Sigma$$

Mas, que $\vec{B}$? (a componente $B_{//}$ é descontínua na superfície)

Tomamos o valor médio (Porquê?)

$$\vec{B} = \left\{ \frac{2}{3}\mu_0 M \hat{z} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 M}{R^3} \left[2\cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right] \right\} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\mu_0 M}{6} \left[2\hat{z} + 2\cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right]$$

$$\vec{K} \wedge \vec{B} = \frac{1}{4\pi R} \frac{dq}{dt} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \hat{\theta} \wedge \frac{\mu_0 M}{6} \left[2\hat{z} + 2\cos\theta \, \hat{r} \right]$$

$$d\vec{f} = \vec{K} \wedge \vec{B} \, d\Sigma = \frac{\mu_0 M}{24\pi} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta \, R} \frac{dq}{dt} \cdot 2 \left[(\hat{\theta} \wedge \hat{z}) + \cos\theta \, (\hat{\theta} \wedge \hat{r}) \right] \cdot d\Sigma .$$

O momento mecânico é:

$$d\vec{N} = R \hat{r} \wedge d\vec{f} = \frac{\mu_0 M}{24\pi} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \frac{dq}{dt} 2 \left[\hat{r} \wedge (\hat{\theta} \wedge \hat{z}) + \cos\theta \, \hat{r} \wedge (\hat{\theta} \wedge \hat{r}) \right] \cdot d\Sigma .$$

$$d\vec{N} = \frac{\mu_0 M}{12\pi} \frac{dq}{dt} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \left[\cos\theta \, \hat{\theta} + \cos\theta \, \hat{\theta} \right] R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 M R^2}{6\pi} \frac{dq}{dt} (1+\cos\theta) \cos\theta \, \hat{\theta} \, d\theta \, d\phi$$

$$(d\vec{N})_z = +\frac{\mu_0 M R^2}{6\pi}\frac{dq}{dt}(1+\cos\theta)\cos\theta \cdot 2\pi\,(-\sin\theta)$$

$$N_z = -\frac{\mu_0 M R^2}{6\pi}\frac{dq}{dt}\cdot 2\pi\int_0^\pi (1+\cos\theta)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 M R^2}{6\pi}\frac{dq}{dt}\cdot 2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi$$

$$= -\frac{2\mu_0}{9}MR^2\frac{dq}{dt}\,\hat{z}$$

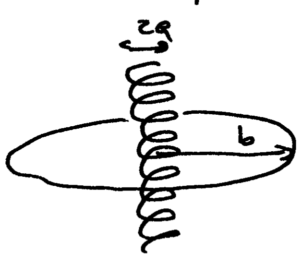
Consequentemente:

$$\vec{L} = -\int_Q^0 \frac{2\mu_0}{9}MR^2\,dQ\,\hat{z} = \frac{2}{9}\mu_0 M R^2 Q\,\hat{z}$$

como antes!

Problema 8.9 (Griffiths):

Um solenoide muito longo (raio a), com n espiras por unidade de comprimento transporta uma corrente I_s. Uma espira (co-axial) de raio $b \gg a$ tem uma resistência R.



($b>a$)

Quando I_s é reduzido é induzido uma corrente I_R na espira. Qual a origem da potência necessária para suportar esta corrente?

Solução:

$$\vec{B} = \mu_0 n I_S \hat{z} \qquad \phi(t) = \mu_0 n I_S \pi a^2$$

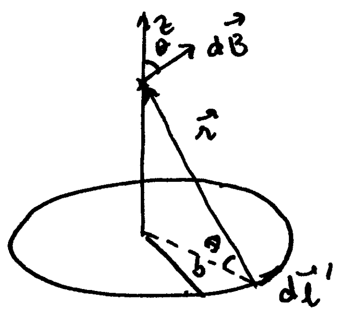
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 n \pi a^2 \frac{dI_S}{dt}$$

$$I_R = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\mu_0 n \pi a^2}{R}\frac{dI_S}{dt}$$

Poynting vector: (fora do solenoide) $r=a$:

$$E \cdot 2\pi a = -\mu_0 n \frac{dI_S}{dt}\pi a^2 \rightarrow \vec{E} = -\frac{\mu_0 n}{2} a \frac{dI_S}{dt}\hat{\phi}$$

Campo magnético (fora do solenoide $r=a$) tem origem na corrente que flui no espiro: Qual é este campo?



$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2}$$

(Como $b \gg a$) podemos considerar que ($B(a) \sim B(0)$ (eixo do espiro))

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{z^2+b^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl\; b}{(z^2+b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

Entao:

$$S = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{\mu_0 n}{2}\, a\, \frac{dI_s}{dt}\right]\left[\frac{\mu_0 I_R}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\right](\hat{\phi}\wedge\hat{z})$$

$$= -\frac{1}{4}\mu_0\, I_R\, \frac{dI_s}{dt}\, \frac{a\, b^2\, n}{(b^2+z^2)^{3/2}}\, \hat{r}$$

$$P = \int_{\Sigma} \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi a\, dz \cdot S(z) =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\pi\,\mu_0\, I_R\, n\, \frac{dI_s}{dt}\, a^2 \cancel{b^2}\, n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(b^2+z^2)^{3/2}}}_{\frac{\cancel{2}}{\cancel{b^2}}}$$

$$P = -\left(\pi\mu_0\, a^2 n\, \frac{dI_s}{dt}\right) I_R = \mathcal{E}\, I_R$$

□

Problema 8.10 (Griffiths)

Uma esfera de raio R possui uma polarização uniforme e uma magnetização uniforme. Calcule o momento electromagnético associado:

Solução: Como vimos:

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{1}{3\epsilon_0}\vec{P} & r < R \\[2mm] \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{p}\right] & r > R \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M} & r < R \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right] & r > R \end{cases} \qquad \left(m = \frac{4}{3}\pi R^3 M\right)$$

$$\vec{P}_{em} = \varepsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B})$$

Dentro da esfera:

$$\vec{P}_{em} = -\frac{2}{9}\mu_0 (\vec{P} \wedge \vec{M}) \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{27}\mu_0 \pi R^3 (\vec{M} \wedge \vec{P})$$

Fora:

$$\vec{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^6}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right]\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right]$$

Dado que: $\hat{r} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{m}) = \vec{p}(\hat{r}\cdot\vec{m}) - \vec{m}(\hat{r}\cdot\vec{p})$, podemos verificar que

$$\left(3\left[(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right] \; 3\left[(\vec{m}\cdot\hat{r}) - \vec{m}\right]\right) = -2(\vec{p}\wedge\vec{m}) + 3\hat{r}\cdot \cdot\left[\hat{r}\wedge(\hat{p}\wedge m)\right]$$

Então:

$$\vec{P}_{fora} = \frac{\mu_0}{16\pi^2}\int \frac{1}{r^6}\left\{-2(\vec{p}\wedge\vec{m}) + 3\hat{r}\left[\hat{r}\cdot(\vec{p}\wedge\vec{m})\right]\right\} \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\mu_0}{16\pi^2}\left(\int_R^\infty \frac{1}{r^4}dr\right)\cdot\left\{-2(\vec{p}\wedge\vec{m})\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi + 3\int \hat{r}\left[\hat{r}\cdot(\vec{p}\wedge\vec{m})\right]\sin\theta\, d\theta\, d\phi\right\}$$

Escolha $z \parallel (\vec{p} \wedge \vec{m})$

Então:

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \, \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \, \hat{y} + \cos\theta \, \hat{z}$$

Apenas a componente zz' sobrevive:

$$\vec{P}_{fora} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \left(-\frac{1}{3r} \right)_R^{\infty} \hat{z} \left\{ -2 \left| (\vec{p} \wedge \vec{m}) \right| \int \sin\theta \, d\theta \, d\phi + \right.$$

$$\left. + 3 \left| (\vec{p} \wedge \vec{m}) \right| \int \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi \right\}$$

$$= -\frac{\mu_0}{12\pi R^3} |\vec{p} \wedge \vec{m}| \hat{z} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{12\pi R^3} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P} \right) \wedge \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M} \right) = \frac{4}{27} \mu_0 R^3 (\vec{M} \wedge \vec{P})$$

Então:

$$\vec{P}_{em} = \left(\frac{8}{27} \mu_0 \pi R^3 + \frac{4}{27} \mu_0 \pi R^3 \right) (\vec{M} \wedge \vec{P}) =$$

$$= \frac{4}{9} \mu_0 R^3 \left[\vec{M} \wedge \vec{P} \right]$$