Análise Complexa
MIEFis / LFis

Primeiro Teste
08/11/2016

Proposta de resolução

1. $\cos z = i \iff \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = i \iff e^{iz}+e^{-iz}-2i=0$

Mudança de variável: $y = e^{iz}$

$\cos z = i \iff y + \dfrac{1}{y} - 2i = 0 \iff y^2 - 2iy + 1 = 0 \iff$

$\iff y = \dfrac{2i \pm \sqrt{-4-4}}{2} \iff y = \dfrac{2i \pm 2\sqrt{2}\, i}{2}$

$\iff y = (1\pm\sqrt{2})i \iff e^{iz} = (1+\sqrt{2})i \ \vee\ e^{iz} = (1-\sqrt{2})i$

$\iff iz = \operatorname{Ln}((1+\sqrt{2})i) \ \vee\ iz = \operatorname{Ln}((1-\sqrt{2})i)$

$\iff iz = \ln(1+\sqrt{2}) + i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) \ \vee\ iz = \ln(\sqrt{2}-1) + i\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

$\iff z = +\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) + \dfrac{1}{i}\ln(1+\sqrt{2}) \ \vee\ z = \left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) + \dfrac{1}{i}\ln(\sqrt{2}-1)$

$\iff z = \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) - i\ln(1+\sqrt{2}) \ \vee\ z = \left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) - i\ln(\sqrt{2}-1)$

2.

(a) $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

onde $u(x,y) = x^2-y^2-2y$ e $v(x,y) = 2xy+2x$

As funções u, v são $\mathbb{R}$-diferenciáveis pois são polinomiais

$$Jf = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y-2 \\ 2y+2 & 2x \end{bmatrix}$$

Portanto as equações de Cauchy-Riemann $\begin{cases} \partial u/\partial x = \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x \end{cases}$ são satisfeitas para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Pelo teorema de Cauchy-Riemann, a função f é diferenciável para todo o $z\in\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é um aberto, resulta que f é analítica em $\mathbb{C}$.

(b) $f(x+iy) = f\left(\dfrac{z+\bar z}{2} + i\,\dfrac{z-\bar z}{2i}\right) =$

$= \left(\dfrac{z+\bar z}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{z-\bar z}{2i}\right)^2 - 2\,\dfrac{z-\bar z}{2i} + i\,2\,\dfrac{z+\bar z}{2}\,\dfrac{z-\bar z}{2i} + 2i\,\dfrac{z+\bar z}{2}$

$= \dfrac{1}{4}\left(z^2+2z\bar z+\bar z^2\right) + \dfrac{1}{4}\left(z^2-2z\bar z+\bar z^2\right) + i(z-\bar z) + \dfrac{1}{2}\left(z^2-\bar z^2\right) + i(z+\bar z)$

$= \dfrac{1}{2}\left(z^2+\bar z^2\right) + \dfrac{1}{2}\left(z^2-\bar z^2\right) + 2iz = z^2+2iz.$

Portanto, na variável z, $f(z) = z^2 + 2iz$.
Logo, uma primitiva de $f(z)$ é $F(z) = \frac{z^3}{3} + iz^2$.

3

(a) $\int_\gamma \bar{z}\,dz$, $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto (1-t)1 + t(2-i)$

$\gamma(t) = 1 - t + 2t - it = (1+t) - it$
$\gamma'(t) = 1-i$ $\qquad \bar{\gamma}(t) = (1+t) + it$

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^1 \bar{\gamma}(t)\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 [(1+t) + it](1-i)\,dt =$$
$$= (1-i)\left[t + \frac{t^2}{2} + i\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = (1-i)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) =$$
$$= (1-i)\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - 3i + i + 1\right) = \frac{1}{2}(4-2i) = 2-i$$

(b) $\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z}\,dz$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 1/2\}$

A função $f(z)$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ – quociente entre um polinómio e a composta da exponencial com um polinómio.
A curva γ, circunferência de centro -1 e raio $\frac{1}{2}$, é uma curva fechada. $z_0 = 0 \notin \text{Interior}(\gamma)$, logo $f(z)$ está definida num domínio simplesmente conexo Ω, por exemplo $\Omega = D(-1, 3/4)$, tal que $\gamma \subset \Omega$. Pelo teorema de Cauchy, $\int_\gamma f(z) = 0$

(c) $\int_\gamma \frac{\operatorname{senh} z}{z^3 - 4z^2}\,dz$, onde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 3\}$

A função $f(z) = \frac{\operatorname{senh} z}{z^3 - 4z^2}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0,4\}$.
– quociente entre a função seno hiperbólico e um polinómio.
A curva γ, circunferência de centro 2 e raio 3, é uma curva de Jordan tal que $\{0,4\} \subset \text{Interior}(\gamma)$.
As curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-4| = \frac{1}{2}\}$ estão nas condições do teorema de Cauchy para um sistema de curvas e temos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Temos $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2}\,dz$ onde $g(z) = \frac{\operatorname{senh} z}{z-4}$

Pela fórmula integral de Cauchy generalizada, vem

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i\, g'(0) = -\frac{\pi i}{2}$$

C.A.: $g'(z) = \dfrac{\cosh z\,(z-4) - \operatorname{senh} z}{(z-4)^2} \Rightarrow g'(0) = \dfrac{-4}{16} = -\dfrac{1}{4}$

Temos $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-4}\,dz$, onde $h(z) = \dfrac{\operatorname{senh} z}{z^2}$.

Pela fórmula integral de Cauchy generalizada, vem

$$\int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-4}\,dz = 2\pi i\, h(4) = 2\pi i \frac{\operatorname{senh} 4}{16} = \frac{\pi i \operatorname{senh} 4}{8}$$

Logo, $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i \operatorname{senh} 4}{8} = (\operatorname{senh} 4 - 4)\frac{\pi i}{8}$

4 $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z-3}$ $\qquad z^2-2z-3=0 \Leftrightarrow z=3 \vee z=-1$

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)(z+1)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1}$$

$\Rightarrow z = A(z+1) + B(z-3)$ $\qquad z=3 \Rightarrow 3 = A4 \Rightarrow A = 3/4$

$\qquad z=-1 \Rightarrow -1 = -B4 \Rightarrow B = 1/4$

$$f(z) = \frac{3/4}{z-3} + \frac{1/4}{z+1} = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{3-z} - \frac{1}{1+z}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-z/3} - \frac{1}{1+z}\right)$$

Sabemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$, $|w|<1$

Logo, $\displaystyle\frac{1}{1-z/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$, $\left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z|<3$

$\displaystyle\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $|z|<1$

Portanto: $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 3^{-n}}{4} z^n$

A série pedida converge quando $|z|<3 \wedge |z|<1$, ou seja, quando $|z|<1$. Assim, o raio de convergência é $R=1$.

5 Suponhamos que existe um zero não isolado de $f(z)$. Então, para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in D(z_0, 1/n)$ tal que $f(z_n)=0$. A sucessão $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$. Se $g(z)=0$, a função nula,

então $g(z_n) = f(z_n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. As funções $f(z)$ e $g(z)$ são funções analíticas no domínio Ω logo, pelo teorema da unicidade, concluímos que $f(z) = g(z)$, $\forall z \in G$. Logo $f(z)$ é a função nula.