Física Quântica I / Mecânica Quântica

Spin 1/2 e outros sistemas de 2 níveis

Vítor M. Pereira

Departamento de Física | Universidade do Minho

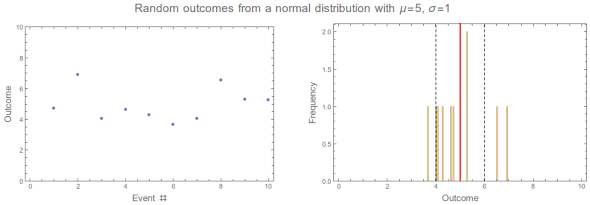
2021/22 — 2º Sem

Lição 9
Relações de incerteza

O que significa incerteza em MQ

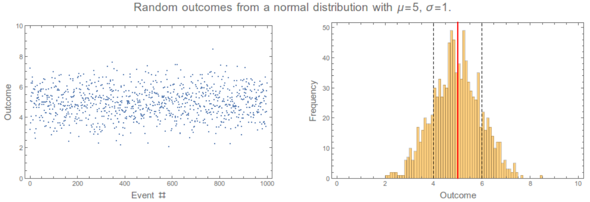
Amostra pequena.

Muito poucos eventos/resultados.



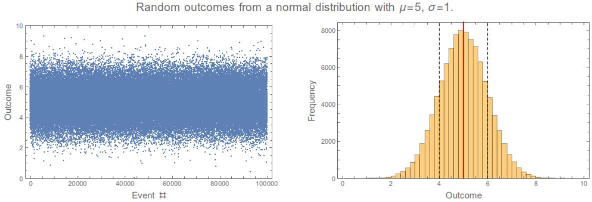
Amostra maior.

Distr. frequências começa a definir-se.



Amostra grande.

Distr. frequências com média e desvio padrão bem definidos.



Quantificando a incerteza em MQ

Regra geral, à medição de uma qualquer quantidade $\mathcal{A}$ está associada uma incerteza estatística, que quantificamos através do desvio padrão dos resultados dessa medição:

$$\delta\mathcal{A} \equiv \sqrt{\langle\hat{\mathrm{A}}^2\rangle_\psi - \langle\hat{\mathrm{A}}\rangle_\psi^2}, \qquad \text{onde} \qquad \langle\hat{\mathrm{A}}\rangle_\psi \equiv \langle\psi|\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle.$$

Iremos estudar se/como se relacionam as incertezas $\delta\mathcal{A}$ e $\delta\mathcal{B}$ associadas a duas quaisquer observáveis de um sistema.

Consideremos as duas observáveis $\hat{\mathrm{A}}$ e $\hat{\mathrm{B}}$, para as quais definimos os desvios relativamente à média num dado estado ψ (são operadores),

$$\Delta\hat{\mathrm{A}} \equiv \hat{\mathrm{A}} - \langle\hat{\mathrm{A}}\rangle_\psi, \qquad \Delta\hat{\mathrm{B}} \equiv \hat{\mathrm{B}} - \langle\hat{\mathrm{B}}\rangle_\psi,$$

bem como o desvio padrão de cada uma (são números):

$$\delta A = \sqrt{\langle\Delta\hat{\mathrm{A}}^2\rangle_\psi} = \sqrt{\langle\hat{\mathrm{A}}^2\rangle_\psi - \langle\hat{\mathrm{A}}\rangle_\psi^2}, \qquad \delta B = \sqrt{\langle\Delta\hat{\mathrm{B}}^2\rangle_\psi} = \sqrt{\langle\hat{\mathrm{B}}^2\rangle_\psi - \langle\hat{\mathrm{B}}\rangle_\psi^2}.$$

Vejamos o que acontece ao produto das incertezas: $\delta\mathcal{A} \times \delta\mathcal{B}$.

Resultado prévio: a desigualdade de Schwarz

Dado um qualquer par de kets $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, é sempre verdade que

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle.$$

Prova: Dados os dois kets $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, definamos um terceiro:

$$|\varphi\rangle = |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle. \qquad\qquad (\lambda \text{ é um número } \mathbb{C})$$

Uma vez que é sempre verdade que $\langle\varphi|\varphi\rangle \geq 0$, temos

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle + \langle\beta|\alpha\rangle\lambda^* + \lambda\langle\alpha|\beta\rangle + |\lambda|^2 \langle\beta|\beta\rangle \geq 0. \qquad (*)$$

Se escolhermos

$$\lambda = -\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle},$$

a desigualdade $(*)$ fica

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle. \quad \checkmark$$

Relações de incerteza

Voltando ao produto das incertezas $\delta\mathcal{A}\,\delta\mathcal{B}$, definamos

$$|\alpha\rangle = \Delta\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle \qquad \text{e} \qquad |\beta\rangle = \Delta\hat{\mathrm{B}}|\psi\rangle.$$

Estes kets permitem calcular os valores esperados dos desvios quadrados, porque

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\psi|\Delta\hat{\mathrm{A}}\,\Delta\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle = \big\langle(\Delta\hat{\mathrm{A}})^2\big\rangle_\psi = \delta\mathcal{A}^2, \qquad\qquad \langle\beta|\beta\rangle = \cdots = \delta\mathcal{B}^2.$$

De acordo com a desigualdade de Schwarz,

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \qquad \longrightarrow \qquad (\delta\mathcal{A})^2(\delta\mathcal{B})^2 \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2\,. \tag{$**$}$$

Notemos que o lado direito da última desigualdade corresponde a

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \Big|\big\langle\Delta\hat{\mathrm{A}}\,\Delta\hat{\mathrm{B}}\big\rangle_\psi\Big|^2$$

Mas, por outro lado, podemos sempre escrever

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\,\Delta\hat{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}[\Delta\hat{\mathrm{A}},\Delta\hat{\mathrm{B}}] + \frac{1}{2}\{\Delta\hat{\mathrm{A}},\Delta\hat{\mathrm{B}}\}$$

$$\Downarrow$$

$$\Big|\big\langle\Delta\hat{\mathrm{A}}\,\Delta\hat{\mathrm{B}}\big\rangle_\psi\Big|^2 = \frac{1}{4}\Big|\big\langle[\Delta\hat{\mathrm{A}},\,\Delta\hat{\mathrm{B}}]\big\rangle_\psi\Big|^2 + \frac{1}{4}\Big|\big\langle\{\Delta\hat{\mathrm{A}},\,\Delta\hat{\mathrm{B}}\}\big\rangle_\psi\Big|^2. \quad \text{(porquê?)}$$

Finalmente, reparando que

$$\left\langle [\Delta\hat{A},\, \Delta\hat{B}] \right\rangle_\psi = \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle_\psi, \qquad \text{(porquê?)}$$

podemos re-escrever a desigualdade ($**$) acima como

$$\delta\mathcal{A}^2\, \delta\mathcal{B}^2 \quad \geq \quad \frac{1}{4}\left|\left\langle [\hat{A},\, \hat{B}] \right\rangle_\psi\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\left\langle \{\Delta\hat{A},\, \Delta\hat{B}\} \right\rangle_\psi\right|^2.$$

Dado que ambos os termos são estritamente não-negativos, esta desigualdade é equivalente a:

Relação de incerteza generalizada (Heisenberg)

$$\delta\mathcal{A}\, \delta\mathcal{B} \quad \geq \quad \frac{1}{2}\left|\left\langle [\hat{A},\, \hat{B}] \right\rangle_\psi\right|.$$

É por este motivo que observáveis para as quais $[\hat{A},\, \hat{B}] \neq 0$ não podem ser ambas medidas com precisão arbitrariamente elevada, ou seja,

$$\text{quando} \quad \delta\mathcal{A} \to 0 \quad \text{então} \quad \delta\mathcal{B} \to \infty, \qquad \text{(e vice-versa)}$$

e se dizem portanto incompatíveis.