1. (2 valores) Represente graficamente os seguintes conjuntos:
   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4\}$
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin x\}$ (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{y^2}{4} + z^2 = -\frac{x^2}{9}\}$

2. (1 valor) Considere uma região $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$ onde o potential $V : D \to \mathbb{R}$ de um campo eléctrico é dado por
$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + 9z^2}}.$$
Esboce as superfícies de nível de V (i.e. as superfícies equipotenciais).

3. (1 valor) Determine uma parametrização da curva planar dada por $4x^2 + y^2 = 1$ e represente-a graficamente.

4. (1 valor) Mostre que, se o vector tangente a uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^n$ é constante, então a trajectória da curva é (parte de) uma linha recta.

5. (3 valores) Considere a curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\alpha(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right).$$
   (a) Mostre que α é uma curva parametrizada por comprimento de arco.
   (b) Determine o seu triedo de Frenet $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ assim como a sua curvatura e torção.
   (c) Mostre que α parametriza um círculo e determine o seu centro e raio.

6. (1 valor) Diga, justificando, se o seguinte limite existe e, em caso afirmativo, calcule-o:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

7. (1,5 valores) Utilize a definição de derivada parcial para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0)$, sendo
$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y},\ X_0 = (2, -1).$$

8. (1 valor) Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe c^1. Usando a regra da cadeia e coordenadas polares r e θ, mostre que:
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2.$$

9. (1,5 valores) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe c^2 e $\psi(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, onde $c > 0$. Mostre que ψ satisfaz a equação de onda
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

10. (1,5 valores) Calcule a derivada direccional da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$, no ponto $P = (1, 2)$ e numa direcção que forma um ângulo de 60^0 com o eixo Ox.

11. (2 valores) Determine a equação do plano tangente ao hiperbolóide
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
no ponto (x_0, y_0, z_0). Esboce um gráfico que ilustre este problema para o caso em que $a = b = c = x_0 = 1$ e $y_0 = z_0 = 0$.

12. (1,5 valores) Mostre que $(0, 0)$ é ponto crítico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x^2 + y^2)\cos(x + 2y)$ e diga, justificando, se é extremo.

13. (2 valores) Determine os extremos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$, restritos ao círculo de raio 1 centrado na origem. Esboce um gráfico que ilustre este problema.