21 . /02 /2022 → Capítulo 3

- Uma definição geral de um metal é que este conduz eletricidade. De certo modo, a razão para isso prende-se ao facto de que existem eletrões movíveis nesses materiais.

- Nos próximos capítulos, estaremos preocupados com a questão do porquê os eletrões são móveis em alguns materiais, mas não noutros, apesar de ambos conterem e^-.

Por enquanto, tomamos como dado que existem eletrões e gostaríamos de entender as suas propriedades.

Modelo de Drude - e^- nos metais

→ usado para o calculo das condutividades térmica e elétrica nos metais!

- Paul Drude entendeu que poderia aplicar a teoria cinética de Boltzmann de gases ideais para entender o movimento dos e^- nos metais. Considerou, portanto, os eletrões como sendo gases ideais. Esta teoria foi inovadora, fornecendo um conhecimento inicial de condução metálica.

- Foram assumidas algumas definições/regras para o movimento dos eletrões:

(1) ↳ Os eletrões têm um tempo médio entre choques (scattering time), τ, o qual depende da densidade e da energia média.

(2) ↳ A probabilidade de choque em dt é $\frac{dt}{\tau}$, o qual depende da intensidade do choque!.

(3) ↳ Quando há um choque, assume-se que o eletrão retorna ao momento $\vec{p} = 0$ (e depois recomeça). (Quando há um choque, o e^- pára, o que é estranho) → ⊛

(4) ↳ Entre choques, os eletrões, que são partículas de carga "$-e$", respondem a campos elétricos e magnéticos aplicados externamente, ou seja obedem ao eletromagnetismo / à Lei de Lorentz.

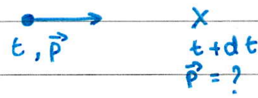
⊛ → Obviamente, é incorreto pensar que todas as partículas têm $\overset{\text{energia cinética}}{T = 0}$ depois de um choque, sendo isso um defeito da aproximação.

As primeiras três suposições correspondem às da teoria cinética dos gases ideais.

Já a última é apenas uma generalização lógica que tem em conta o facto que, ao contrário das moléculas no gás, os eletrões estão carregados e por isso respondem a campos eletromagnéticos.

∘ Considerando um eletrão com momento $\vec{p}$ no tempo t, qual será o momento que este terá no tempo $t+dt$?

↳ quando colide com um obstáculo!



Existe uma probabilidade $\frac{dt}{\tau}$ de que ele choque e atinja o momento zero. Caso não atinja o momento zero (o qual terá probalididade $(1-\frac{dt}{\tau})$), o eletrão vai simplesmente acelerar conforme ditado pela equação do movimento: $\underbrace{\vec{F}}_{\text{Força de Lorentz}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Juntando os dois termos obtém-se o valor médio do momento no instante $t + dt$:

$$\underbrace{\vec{p}(t+dt)}_{(*1)} = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)\cdot\left[\vec{p}(t) + \vec{F}\cdot dt\right] + 0\cdot\frac{dt}{\tau}$$

(*1) Escrito como se fosse apenas o momento linear mas sabemos que se trata do valor médio do momento linear!

Na verdade, sendo os choques algo probabilístico, todas as quantidades/variáveis devem ser tomadas como valores médios ao invés de valores exatos!

Daqui teremos que: (rearranjando)

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{p}}{\tau}}$$ (eq. do movimento)

, onde a força $\vec{F}$ é apenas a Força de Lorentz aplicada ao e^-:

$$\vec{F} = \underline{-e}\cdot(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

↳ (= à carga do protão (>0) daí termos que colocar o "-"!)

Podemos pensar no termo de choque $-\frac{\vec{p}}{\tau}$ como apenas uma força "de arrasto", exercida no e- pela colisão.

↓

"drag force"

(*) → Segundo a Lei de Ohm, a corrente (ou velocidade) é proporcional ao C.E. (ou força), o que não devia acontecer. No entanto, Drude defende esta proporcionalidade pela existência dos choques.

↳ Note que, na ausência de qualquer campo aplicado externamente, a solução para esta equação diferencial resume-se a um momento em decaimento exponencial:

$$\vec{p}(t) = \underbrace{\vec{p}_0}_{\text{momento inicial!}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

que é o que devemos esperar para partículas que perdem momento na colisão. Isto explica-se pela terceira lei, segundo a qual se conclui que, quando houver um choque, ele pararia, o que neste caso faz todo o sentido já que não há nenhuma força externa aplicada.

↳ Considerando agora a situação em que é apenas aplicado um Campo Elétrico ($\vec{E} \neq 0$ mas $\vec{B} = 0$). A nossa equação do movimento ficaria:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \cdot \vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau}}$$

No caso estacionário, onde $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, teremos um momento médio dos e^- proporcional ao C.E. e ao tempo de choque:

$$m_e \cdot \vec{v} = \vec{p} = -e \cdot \tau \cdot \vec{E}$$

, onde m_e é a massa do eletrão e $\vec{v}$ a sua velocidade.

Se existir uma densidade de n eletrões no metal, cada um com carga $-e$, e todos a mover a uma velocidade $\vec{v}$, então a corrente elétrica (mais corretamente chamada de densidade de corrente elétrica, $\vec{j}$) é dada por:

$$\underbrace{\vec{j}}_{\text{dens de corrente}} = \underbrace{-e}_{\text{carga}} \cdot \underbrace{n}_{\text{densidade de } e^- \text{ livres}} \cdot \overbrace{\vec{v}}^{\text{velocidade}} = \frac{e^2 \cdot \overbrace{\tau}^{\text{tempo de choque}} \cdot n}{\underbrace{m_e}_{\text{massa do } e^-}} \cdot \vec{E}$$

densidade de e^- livres → depende do material !!!

Por outras palavras, tendo em conta que a condutividade de um metal, definida na expressão $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$, se obtém por:

(eq. que prevê a condutividade) ← $$\boxed{\sigma = \frac{e^2 \cdot \tau \cdot n}{m_e}}$$ (*)

⚠ → Em n apenas se tem em conta os e^- de valência / e^- livres !!!

Assim, medindo a condutividade do metal (e tendo como variáveis previamente conhecidas a m_e e a carga de um e^-), podemos obter o valor do produto entre τ e n!

↳ Considerando que é aplicado um Campo Elétrico e um Campo Magnético ($\vec{E} \neq 0$ e $\vec{B} \neq 0$), teremos a seguinte equação do movimento:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\left(\vec{E} + v \times \vec{B}\right) - \frac{\vec{p}}{\tau}}$$

No caso estacionário $\left(\frac{d\vec{p}}{dt} = 0\right)$, e usando a expressões $\vec{p} = m.\vec{v}$ e $\vec{j} = n.e.\vec{v}$, obtemos a seguinte equação para a corrente no estado estac.:

$$0 = -e.\vec{E} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{n} + \frac{m}{n.e.\tau}.\vec{j} \Leftrightarrow \vec{E} = \left(\frac{1}{n.e}.\vec{j} \times \vec{B} + \frac{m}{n.e^2.\tau}.\vec{j}\right)$$

Define-se, agora, uma matriz (3x3) conhecida por resistividade (inverso da condutividade), $\tilde{\rho}$, que relaciona o vetor corrente com o vetor do Campo Elétrico:

$$\boxed{\vec{E} = \tilde{\rho}.\vec{j}}$$

de tal forma que:

$$\boxed{\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_{zz} = \frac{m_e}{n.e^2.\tau}}$$

e se considerarmos um Campo Magnético orientado segundo $\hat{z}$ ($\vec{B} = B.\hat{e}_z$), então:

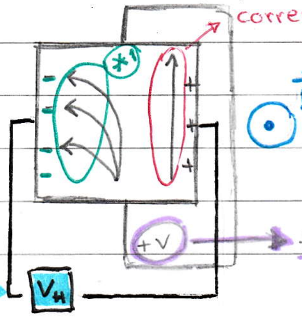
$$\boxed{\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{n.e}}$$

⇩ Estes termos da resistividade são conhecidos como a resistividade de Hall, de onde retiramos que, quando um C.M. é aplicado ⊥ a uma corrente elétrica, conseguimos detetar / medir uma tensão perpendicular a ambos. ⇒ **Efeito de Hall**

Essa tensão é conhecida por Tensão de Hall, V_H, proporcional à intensidade do C.M. (B) e inversamente proporcional à densidade de e^- (n), isto pelo menos segundo a teoria de Drude!

(experiência de Hall)

<u>Fisicamente</u>, temos:



corrente inicial (sem efeito do C.M.)

$\vec{B}$ → C.M. aplicado ⊥ à corrente (para fora)

(*1) → devido ao C.M., os e^- vão "curvar-se" e acumular-se numa das extremidades

tensão usada para gerar a corrente

$$\rho_{xy} = \frac{B}{\underbrace{n.e}_{\text{característico do material e dos } e^-}}$$

→ Daqui vamos saber o n (basta aplicar um B qualquer e, já sabendo o valor de e, basta apenas medir ρ_{xy}).

Define-se como coeficiente de Hall, R_H, como sendo: $R_H = \frac{\rho_{yx}}{|B|}$, o qual, na Teoria de Drude, é dado por: $\boxed{R_H = -\frac{1}{n.e}}$

∴ Utilizando o valor da densidade de e^- no metal, n, obtido pelo Efeito de Hall e utilizando a expressão da condutividade do metal, conseguimos descobrir o valor de τ (normalmente $\tau \simeq 10^{-14}$s para a maioria dos metais a uma temp. ambiente):

$$\sigma = \frac{e^2.\tau.n}{m_e} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\overset{\text{medido!}}{\sigma}.\overset{\text{constante}}{m_e}}{\underset{\text{constante}}{e^2}.\underset{\text{obtido no Efeito de Hall}}{n}}}$$

○ Mais tarde, Drude decide também calcular a condutividade térmica, K, $\underbrace{\text{devido aos } e^- \text{ livres}}_{\circledast}$ usando a teoria cinética de Boltzmann.

⊛ → Em qualquer experiência, existirá também uma certa quantidade de condutividade térmica fruto de vibrações estruturais do material (mais conhecida por condutividade térmica de fonões). No entanto, para a maioria dos metais, a condutividade térmica deve-se principalmente do movimento dos e^- e não das vibrações.

Obtemos: $\boxed{K = \frac{4}{\pi^2} . \frac{n.\tau.K_B^2.T}{m_e}}$ → Apesar de ainda conter este parâmetro desconhecido, trata-se do mesmo que apareceu na condutividade elétrica (falada anteriormente)

(ver subcapítulo 3.2) ↑

↳ (+ Vantagens e Desvantagens do modelo de Drude)

Successes of Drude theory:

– Wiedemann–Franz ratio $\kappa/(\sigma T)$ (ratio of thermal conductivity to electrical conductivity, known as the Lorenz number) comes out close to right for most materials

– Many other transport properties predicted correctly (for example, conductivity at finite frequency)

– Hall coefficient measurement of the density seems reasonable
for many metals.

Failures of Drude theory:

– Hall coefficient frequently is measured to have the wrong sign, indicating a charge carrier with charge opposite to that of the electron.
– There is no $3k_B/2$ heat capacity per particle measured for electrons in metals. In fact, in most metals we measure only a vibrational (Debye) specific heat, plus a very small term linear in T at low temperatures. This then makes the Peltier and Seebeck coefficients come out wrong by a factor of 100.