3 exercícios (parcialmente) resolvidos da Ficha 4

Ex. 19 - Inversa da matriz B pelo algoritmo de Gauss-Jordan

Forma-se a matriz $[B|I_3]$ e efetua-se as seguintes operações.

(1) Método de Gauss para transformar B numa matriz triângular superior:

$$[B|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

(2) Transformar a diagonal (da matriz do lado esquerdo) numa diagonal de 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \to -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \to -L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

(3) Transformar a matriz do lado esquerdo em I_3 pelo método de Gauss aplicado de baixo para cima e da direita para a esquerda.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_1 \to L_1 - 3L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Podemos assim concluir que $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ex.6 Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é dita *simétrica* se $A^t = A$ e *anti-simétrica* se $A^t = -A$.

(b) Mostre que o conjunto das matrizes simétricas de ordem 2×2 é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a sua dimensão.

Denota-se por W o conjunto das matrizes simétricas de ordem 2×2, isto é

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \, : \, A^t = A\}.$$

Vamos verificar que W é um s.e.v de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- O vetor nulo de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, isto é a matriz nula de ordem 2×2, pertence a W pois
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Sejam $A, B \in W$. Tem-se $A^t = A$ e $B^t = B$. Logo, pelas propriedades da transposta, tem-se
$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$$
o que significa que $A + B \in W$.
- Sejam $A \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se $A^t = A$. Logo, pelas propriedades da transposta, tem-se
$$(\alpha A)^t = \alpha(A^t) = \alpha A$$
o que significa que $\alpha A \in W$.

Sendo estas três condicões verificadas podemos dizer que W é um s.e.v de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Para determinar a dimensão de W precisamos de terminar uma sua base.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$A \in W \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = c$$

Disso podemos concluir que

$$W = \{A \in \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \, : \, a, b, d \in \mathbb{R}\}$$

Escrevendo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vemos que as três matrizes simétricas $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são geradores de W. Para podermos concluir que E, F, e G formam uma base de W ainda precisamos de verificar que são linearmente independentes. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha E + \beta F + \gamma G = 0_{2\times 2}$ (onde $0_{2\times 2}$ representa a matriz nula de ordem 2×2). Tem-se

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde podemos concluir que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo E, F, e G são linearmente independentes.

Em conclusão, E, F, e G formam uma base de W pelo que a dimensão de W é 3.

Ex.18(a) Considera-se o sistema em $\mathbb{R}^3$ de matriz ampliada

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

onde α é um número real. Queremos determinar em função de α a natureza do conjunto de soluções $\mathcal{S}$ do sistema. Já podemos dizer que $\mathcal{S}$ nunca será um subespaço vetorial pois $\mathbf{b} \neq \vec{0}$. Assim, se não for vázio, $\mathcal{S}$ será um subespaço afim não vetorial de $\mathbb{R}^3$. Vamos agora efetuar operações sobre as linhas de modo a transformar a matriz $[A|\mathbf{b}]$ numa matriz em escada:

$$[A|\mathbf{b}] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{array}\right]$$

Vê-se que a característica de A depende da nulidade de $-3+\alpha$ e tem-se $-3+\alpha = 0$ sse $\alpha = 3$. Vamos assim distinguir os dois casos: $\alpha \neq 3$ e $\alpha = 3$.

- Se $\alpha \neq 3$, temos $\mathrm{car}([A|B]) = \mathrm{car}(A) = 3$ pois na última matriz há, neste caso, 3 pivôs. Logo o sistema é possível. Como é um sistema em $\mathbb{R}^3$, temos $\dim(\mathcal{S}) = 3 - \mathrm{car}(A) = 0$ o que significa que $\mathcal{S}$ é um ponto (diferente da origem pois $\mathbf{b} \neq \vec{0}$).
- Se $\alpha = 3$, a última matriz fica

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  e temos $\mathrm{car}([A|B]) = \mathrm{car}(A) = 2$ pois há, neste caso, apenas 2 pivôs na matriz simples tal como na matriz ampliada. O sistema também é possível mas agora temos $\dim(\mathcal{S}) = 3 - 2 = 1$ o que significa que $\mathcal{S}$ é uma reta afim (que não passa pela origem pois $\mathbf{b} \neq \vec{0}$).