Teste de Termodinâmica e Física Estatística

Licenciatura em Física e Mestrado Integrado em Engenharia Física

Universidade do Minho — 1 de Junho de 2021

PARTE I

1- Um dos importantes fenómenos descritos com sucesso pela física estatística, é o da Lei da radiação de Planck, que pode traduzir-se na quantidade $u(\omega, T)\, d\omega$.

(a) Forneça a expressão da função $u(\omega, T)$ e indique a que quantidade física se refere, defina todas as quantidades que aparecem na sua expressão e descreva o significado físico da correspondente Lei da radiação de Planck.

(b) Represente esquematicamente a dependência típica de $u(\omega, T)$ na frequência para por exemplo $T = 4000\,\mathrm{K}$ e $T = 6000\,\mathrm{K}$ e discuta o efeito da temperatura absoluta T na Lei da radiação de Planck.

(c) Qual o significado físico da quantidade $u(T) = \int_0^\infty u(\omega, T)\, d\omega$, que traduz a Lei de Stefan-Boltzmann? Comente a relação dessa quantidade com a constante de Stefan-Boltzmann e indique qual é a dependência de $u(T)$ em T.

2- Considere o plano (T, P), em que T e P são a temperatura e a pressão, respetivamente, de um sistema de uma componente que pode ter duas fases, a fase 1 e a fase 2. O sistema é constituído por N moléculas de uma mesma substância num estado de energia E, contidas num recipiente isolado de volume V.

(a) Represente esquematicamente o plano (T, P) incluindo uma curva de equilíbrio, com indicação das zonas das fases 1 e 2, e explique a condição de equilíbrio que corresponde a essa curva.

(b) Marque no plano (T, P) da figura três pontos, a que deverá chamar A, B, e C, que correspondam a estados em que as N moléculas (i) estão todas na fase 1, (ii) as N moléculas estão todas na fase 2 e (iii) em que N_1 moléculas estão na fase 1 e N_2 moléculas estão na fase 2 com $N = N_1 + N_2$, respetivamente. Justifique a sua resposta

(c) Sabendo que a transição entre as fases 1 e 2 é de primeira ordem, escreva a equção de Clausius-Clapeyron e indique o significado físico das quantidades que nela aparecem.

(d) Considere um ponto sobre a curva de equilíbrio da figura do plano (T, P) da pergunta 2 (a) e relacione as propriedades da curva nesse ponto com a equção de Clausius-Clapeyron.

PARTE II

1. Considere um sistema constituído por duas partículas (sem interacção entre si) e três estados de partícula única, respectivamente com energias 0, Δ e 2Δ. Admita que este sistema está em equilíbrio térmico a uma temperatura T. Enumere os possíveis microestados e as respectivas energias, bem como a função de partição e a energia média do sistema, admitindo que:
   a) as partículas são bosões.
   b) as partículas são fermiões.
   c) as partículas são clássicas e distinguíveis
   (Nota: não se preocupe em simplificar as expressões)

2. Um gás de fermiões a T=0K está confinado numa caixa cúbica de volume V.
   a) Obtenha a densidade de estados (o número de estados com energias compreendidas entre E e $E + dE$) em função da energia: $g(E)dE = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}dE$. Explique convenientemente o seu raciocínio.
   b) Prove que a energia de Fermi se pode exprimir à custa do número de partículas por unidade de volume como $E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}$.
   c) Calcule a energia de Fermi correspondente a uma estrela de neutroes com a massa do sol $(2 \times 10^{30}\ kg)$ e um raio de 15 km. Será razoável, neste caso, aproximar a temperatura da estrela a T=0K? Justifique.
   (Nota: a massa de um neutrão é $m = 1.67 \times 10^{-27} kg$)

3. Considere um gás de bosões (spin 0) com um número de partículas por unidade de volume $(\frac{N}{V})$ fixo, e uma densidade de estados $g(E)dE = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}$.
   a) Mostre que a temperatura de transição para a fase de Bose-Einstein é $T_c = \left(\frac{N/V}{2.612}\right)^{2/3}\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}$. Justifique os seus cálculos.
   b) Prove que, para $T < T_c$, a energia por unidade de volume do gás é proporcional a $T^{5/2}$. Como varia o calor específico a volume constante $C_v(T)$?

(Nota: $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}dx = 2.612\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).