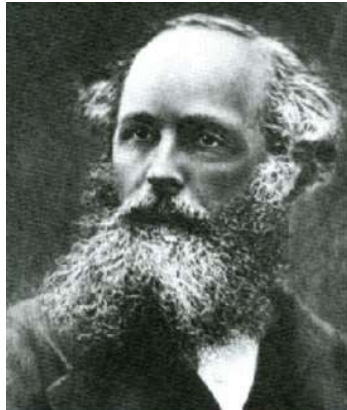


Maxwell



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

nos materiais
não magnéticos
 $\mu \approx \mu_0$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

No espaço livre

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = c \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \frac{c}{n} \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

n é o “índice de refração”

Em geral o índice de refração varia com a frequência (dispersão)

Soluções de
ondas planas

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

$$|\vec{k}|^2 = \mu_0 \epsilon \omega^2 \Rightarrow k = \omega \frac{n(\omega)}{c}$$

Qual é a variação de n com ω ?

Interação entre a Luz e a matéria



Nanopartículas
do ouro



Qual é a cor do ouro?

Materiais diferentes respondem a luz em maneiras diferentes

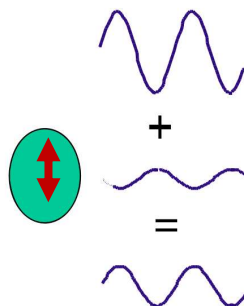
Objetivo: entender estas diferenças através um modelo microscópico da interação entre a luz e a matéria.

Quais são as alterações na luz quando se propaga num meio ?

Modelo:



Luz incide no átomo
excita os elétrões



Luz incidente

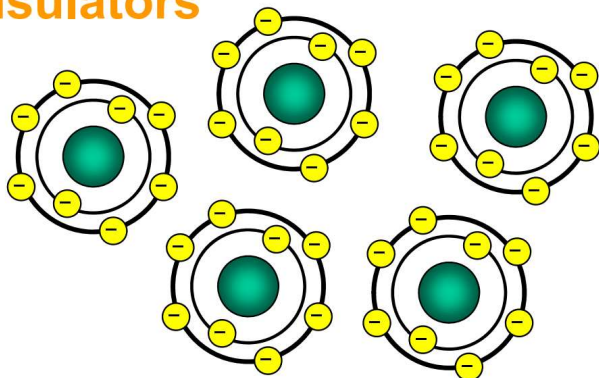
Luz emitida

Luz transmitida

Parâmetro crucial
é a fase entre a
luz incidente e a
luz emitida

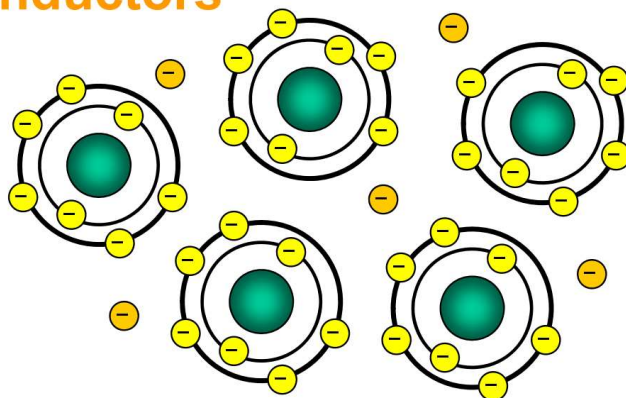
Dois casos limites

Insulators



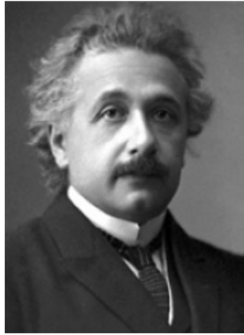
Nos materiais isoladores os elétrons são ligados fortemente aos núcleos

Conductors



Nos materiais condutores alguns elétrons são livres de desloca sobre distâncias grandes

Interação da Luz com um átomo: Aproximações



dica de Einstein:

“Devermos nos forçar para tornar o problema o mais simples possível, mas não simples demais...”

Simplificação nº 1:

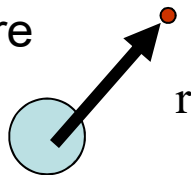
o núcleo é bastante pesado o que permite nos considerar, numa boa aproximação, que o núcleo é fixo na posição da origem ($r = 0$).

Simplificação nº 2:

Numa primeira aproximação podemos desprezar os efeitos do campo magnético

Força Lorentz numa carga livre

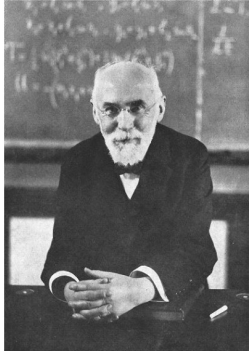
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$
$$|c\vec{B}| = |\vec{E}|$$



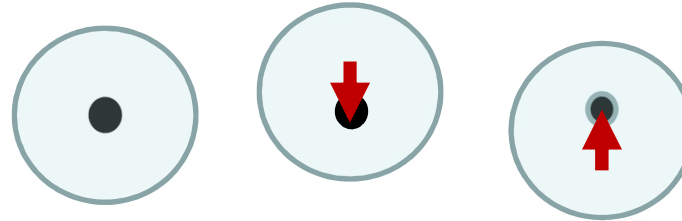
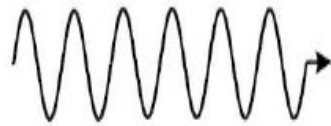
$$\Rightarrow \left| \frac{\vec{F}_B}{\vec{F}_E} \right| \leq \frac{v}{c} \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \alpha \approx \frac{1}{137}$$

Usando o modelo de Bohr por um átomo de H

Modelo do Lorentz

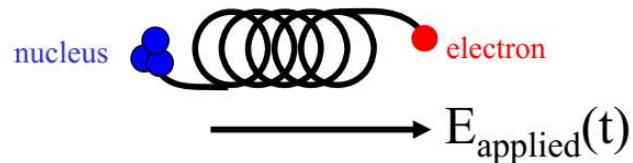


O campo EM oscila com frequência altas



Para pequenas oscilações a força do restauro (Coulomb) é proporcional ao deslocamento

$$F(r_{eq} + \delta r) \approx F(r_{eq}) + \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=r_{eq}} \delta r + \dots$$



$$k_{mola} = m\omega_0^2$$

Newton II
em 1^d

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_0 e^{-i\omega t} - m\omega_0^2 x - 2\gamma m \frac{dx}{dt}$$

Termo de amortecimento
Efeito da radiação, colisões....

Modelo do Lorentz

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_0 e^{-i\omega t} - m\omega_0^2 x - 2\gamma m \frac{dx}{dt}$$

Estamos interessados no estado estacionário
(depois os transientes decaem)

Procurar uma solução da forma $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$

$$\left[-m\omega^2 x_0 = -eE_0 - m\omega_0^2 x_0 + 2i\gamma m\omega x_0 \right] e^{-i\omega t}$$

$$x_0 = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\gamma\omega}$$

**O elétron oscila na frequência da luz incidente
com um amplitude e fase que varia com ω**

Modelo do Lorentz

$$x(t) = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\gamma\omega} e^{-i\omega t}$$

Em geral o fator de amortecimento é pequeno e a frequência incidente tem ser próximo da ressonância para excitar os elétrons

$$\gamma \sim \frac{1}{\tau_{vida}} \sim 10^9 \text{ r / s} \quad \omega_0 \sim 10^{15} \text{ r / s}$$

$$\frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\gamma\omega} = \frac{1}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) + 2i\gamma\omega}$$

$$\approx \frac{1}{(\omega - \omega_0)(2\omega_0) + 2i\gamma\omega_0} = \frac{1}{2\omega_0} \frac{1}{\Delta\omega + i\gamma}$$

$$\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$$

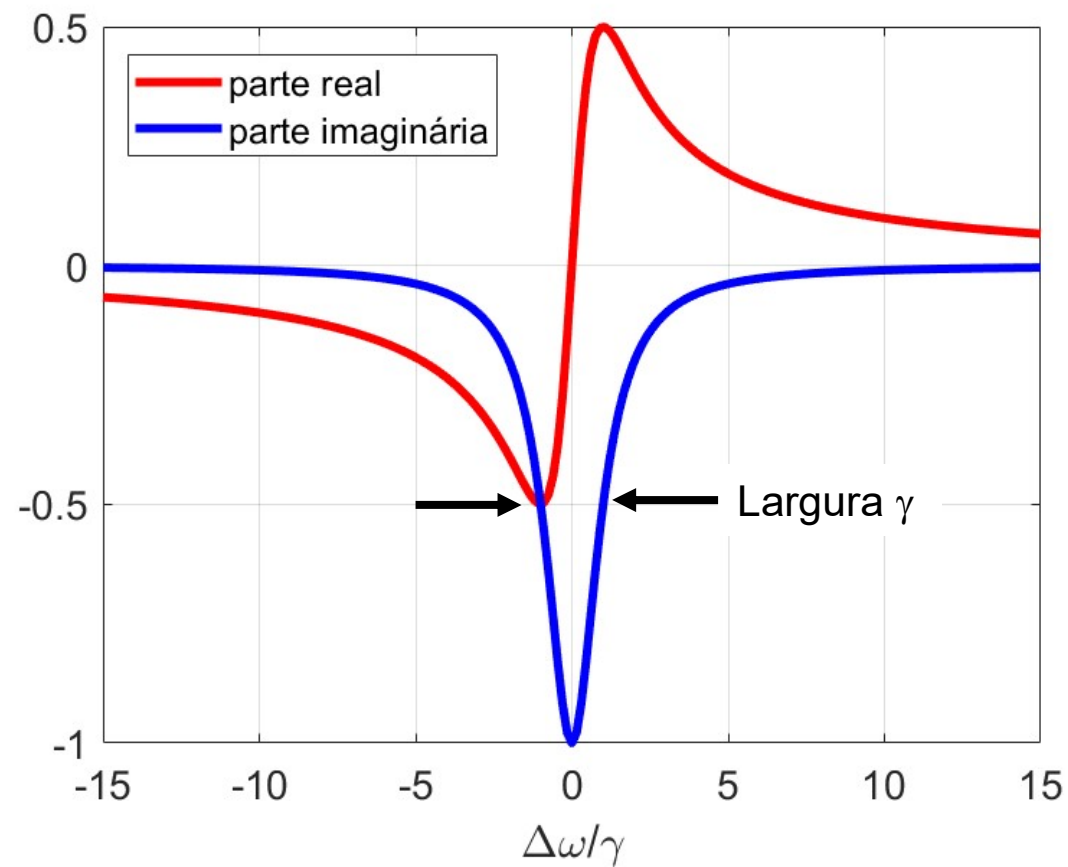
$$x(t) = \frac{e}{2\omega_0 m} \left[\frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} \right] E_0 e^{-i\omega t}$$

Campo incidente

Função Lorentziana complexa

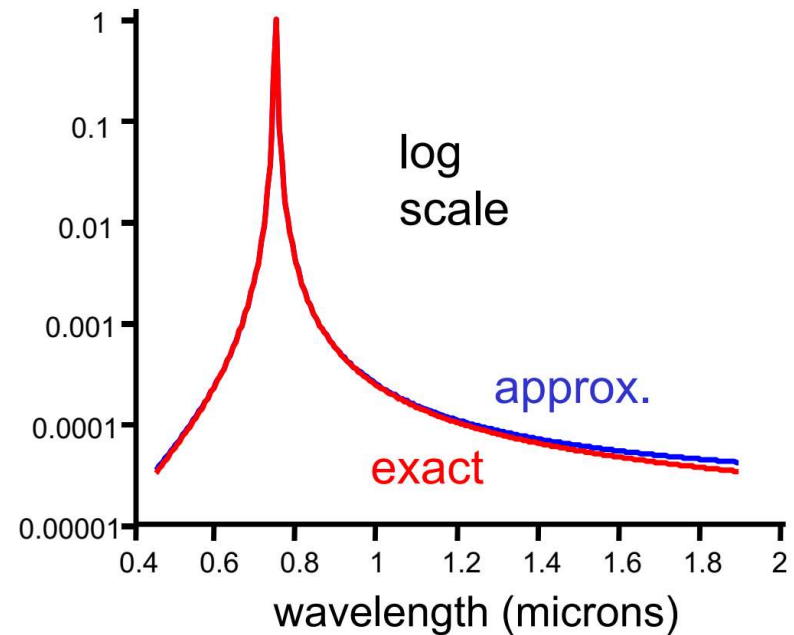
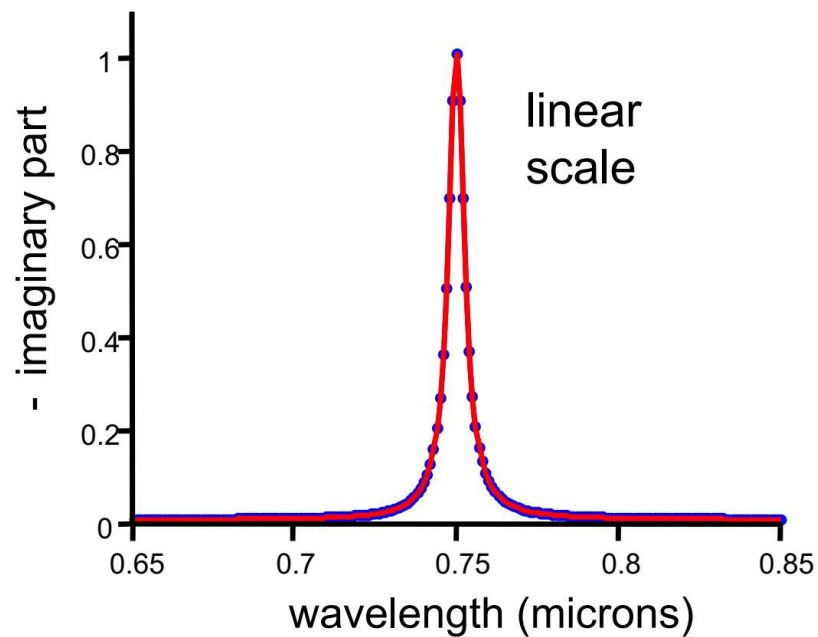
Função Lorentziana

$$\frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega^2 + \gamma^2} - i \frac{\gamma}{\Delta\omega^2 + \gamma^2}$$



Aproximação $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$

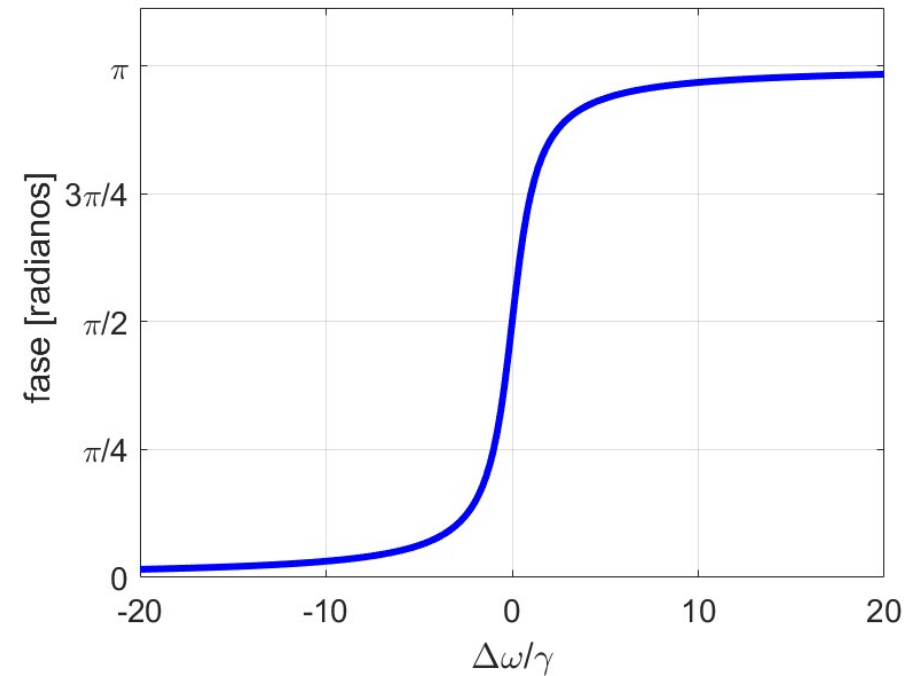
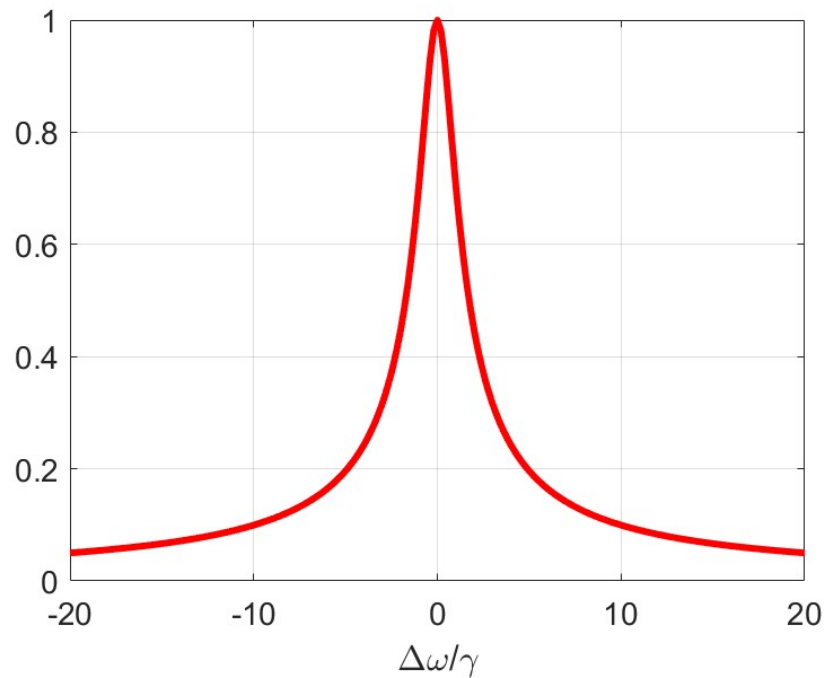
Aqui $\lambda_0 = 750nm$ $\omega_0 = 2.51 \times 10^{15} r / s$ $\gamma = 10^{13} r / s$ que é elevada



Função Lorentziana

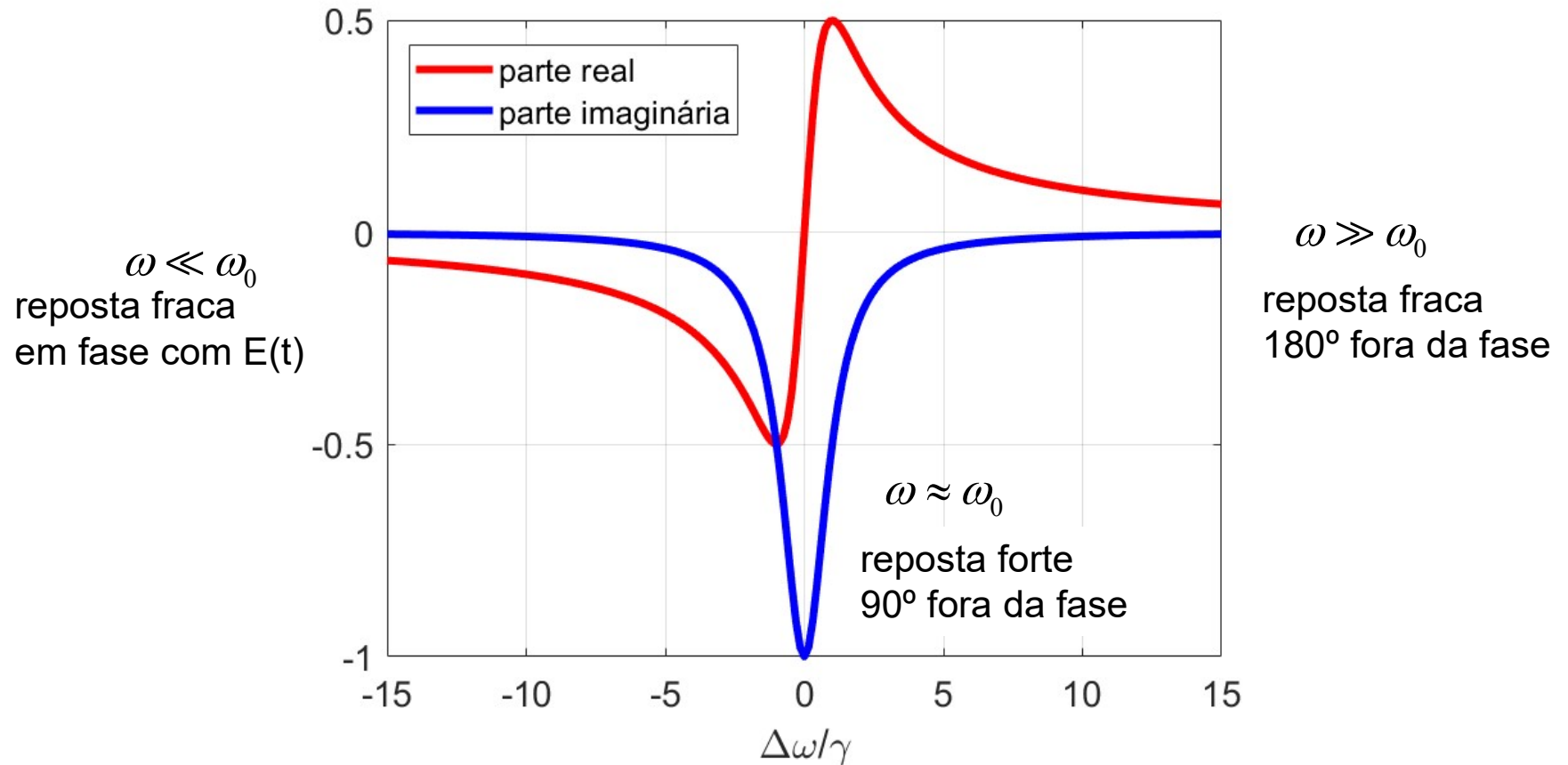
$$\frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \gamma^2}} \exp\left[i \tan^{-1}\left(\frac{-\gamma}{\Delta\omega}\right)\right]$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0$$



Modelo Lorentz para átomos excitados por luz

$$x(t) = \frac{e}{2\omega_0 m} \left[\frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} \right] E(t)$$



Equações de Maxwell num material não magnético

Sem cargas livres:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

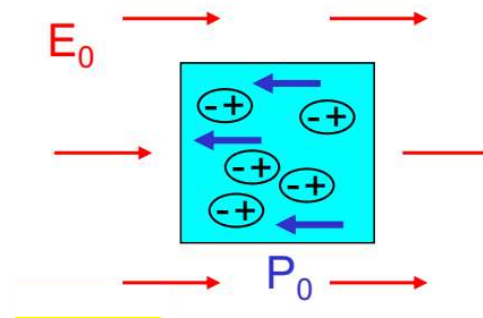
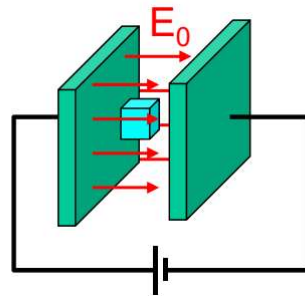
$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{Polarizabilidade} = \frac{\text{Momento dipolar}}{\text{volume}}$$

$$\text{Resposta linear do meio} \quad \vec{P}(t) = -eN\chi(t) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(t)$$

$$N = \frac{N^\circ \text{ átomos}}{\text{volume}}$$

No eletrostático



A situação é parecido quando o campo oscila
só que para frequência elevadas a polarização é reduzida
(comparado com os valores estáticos)

Equação da onda com polarização

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t}$$

Na derivação da equação de onda
este termo deu origem ao termo

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

A polarizabilidade serve como uma “fonte”
e torna a equação da onda uma equação
não homogênea

Ao especializar ao caso em que o campo elétrico é orientado ao longo do eixo dos xx

$$P(t) = -eNx(t)$$

Note que o termo de fonte $\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \sim \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2}$ é proporcional á uma aceleração dos eletrões

Cargas em aceleração radiam energia.

Envelopes da variação “lenta”

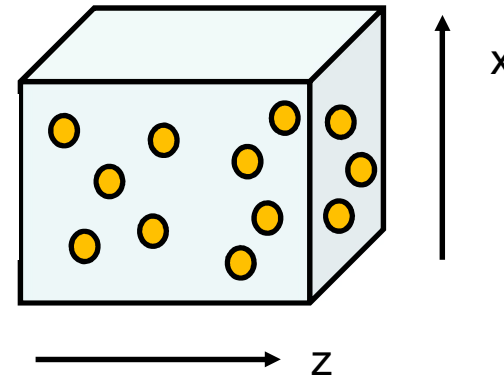
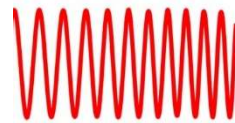
$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Especializar para o caso E e P são orientados ao longo do eixo dos xxs e a radiação se propaga ao do eixo dos zzs

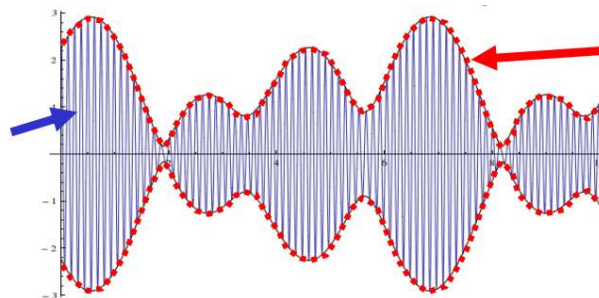
Esperamos que devida a interação os amplitudes dos campo elétrico e da polarizabilidade podem variar com a distância da propagação

Procurar soluções da forma

$$E(\vec{r}, t) = E_0(z) \exp[i(kz - \omega t)]$$
$$P(\vec{r}, t) = P_0(z) \exp[i(kz - \omega t)]$$



Exponenciais
Variação rápida



Envelopes
Variação lenta com z

Os cálculos

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

$$E(\vec{r}, t) = E_0(z) \exp[i(kz - \omega t)]$$

$$P(\vec{r}, t) = P_0(z) \exp[i(kz - \omega t)]$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 E_0(z) \exp[i(kz - \omega t)]$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 P_0(z) \exp[i(kz - \omega t)]$$

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ E_0(z) \exp[i(kz - \omega t)] \}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial E_0}{\partial z} + ikE_0 \right) \exp[i(kz - \omega t)] \right\}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} - k^2 E_0 \right) \exp[i(kz - \omega t)]$$

$$\left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} - k^2 E_0 \right) + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 = -\mu_0 \omega^2 P_0$$

$$\left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} \right) = -\mu_0 \omega^2 P_0$$

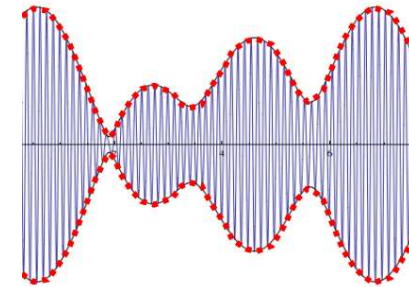
A aproximação da envolvente lenta (“SVEA”)

$$\left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} \right) = -\mu_0 \omega^2 P_0$$

Assumimos que a variação da amplitude do campo elétrico, E_0 , varia pouco numa escala do comprimento de onda

$$\frac{\partial E_0(z)}{\partial z} \approx i \frac{\mu_0 \omega^2}{2k} P_0(z)$$

$$\left| \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial E_0}{\partial z} \right| \sim \frac{1}{\lambda} \left| \frac{\partial E_0}{\partial z} \right|$$



É necessário um modelo microscópico para relacionar a polarizabilidade com o campo E

Lorentz:
$$P(z, t) = -eNx(t) = -eN \frac{e}{2\omega_0 m} \frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} E(z, t)$$

$$= \underbrace{\frac{-Ne^2}{2\omega_0 m} \left[\frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} \right]}_{P_0(z, t)} E_0(z) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\frac{\partial E_0(z)}{\partial z} \approx i \left(\frac{-Ne^2}{4\epsilon_0 mc} \right) \left[\frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} \right] E_0(z)$$

Resolução

$$\frac{\partial E_0(z)}{\partial z} \approx i \left(\frac{-Ne^2}{4\varepsilon_0 mc} \right) \left[\frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} \right] E_0(z)$$

Esta equação tem a forma geral $\frac{\partial E_0(z)}{\partial z} = iF(\omega) E_0(z)$ $F(\omega) = \frac{-Ne^2}{4\varepsilon_0 mc} \left[\frac{1}{\Delta\omega + i\gamma} \right]$

A solução é $E_0(z) = E_0(z=0) e^{iF(\omega)z}$

A função $F(\omega)$ é complexa e pode ser decomposto em partes **reais** e **imaginárias**
É conveniente definir duas novas quantidades:

$$\alpha(\omega) = 2 \operatorname{Im}\{F(\omega)\} \quad \alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 mc} \left[\frac{\gamma}{\Delta\omega^2 + \gamma^2} \right]$$

$$n(\omega) = 1 + \operatorname{Re}\{F(\omega)\} / k \quad n(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{4\omega_0 \varepsilon_0 m} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega^2 + \gamma^2} \right]$$

$$F(\omega) = \operatorname{Re}\{F(\omega)\} + i \operatorname{Im}\{F(\omega)\} = k [n(\omega) - 1] + i\alpha(\omega) / 2$$

Juntando as peças

$$E(\vec{r}, t) = E_0(z) e^{i(kz - \omega t)} \quad E_0(z) = E_0(z=0) e^{iF(\omega)z} \quad \Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$$

$$F(\omega) = k[n(\omega) - 1] + i\alpha(\omega)/2$$

Coeficiente da absorção

$$E(\vec{r}, t) = E_0(z=0) e^{ik[n-1]z - \alpha z/2} e^{i(kz - \omega t)} \\ = E_0(z=0) \boxed{e^{-\alpha z/2}} e^{i(nkz - \omega t)}$$

$$\boxed{\alpha(\omega)} = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 mc} \left[\frac{\gamma}{\Delta\omega^2 + \gamma^2} \right]$$

$$\boxed{n(\omega)} = 1 - \frac{Ne^2}{4\omega\varepsilon_0 m} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega^2 + \gamma^2} \right]$$

A interação com os átomos introduziu

- uma atenuação exponencial do campo
- Uma variação no vetor da propagação

Índice da refração

$$k \rightarrow nk = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

Ambas estas alterações variam com a frequência do campo

Note que $I(z, t) = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n |E_0(z, t)|^2 = I(z=0) e^{-\alpha z}$

$1/\alpha$ distância para qual $I \rightarrow I_0 / e \approx 0.37 I_0$

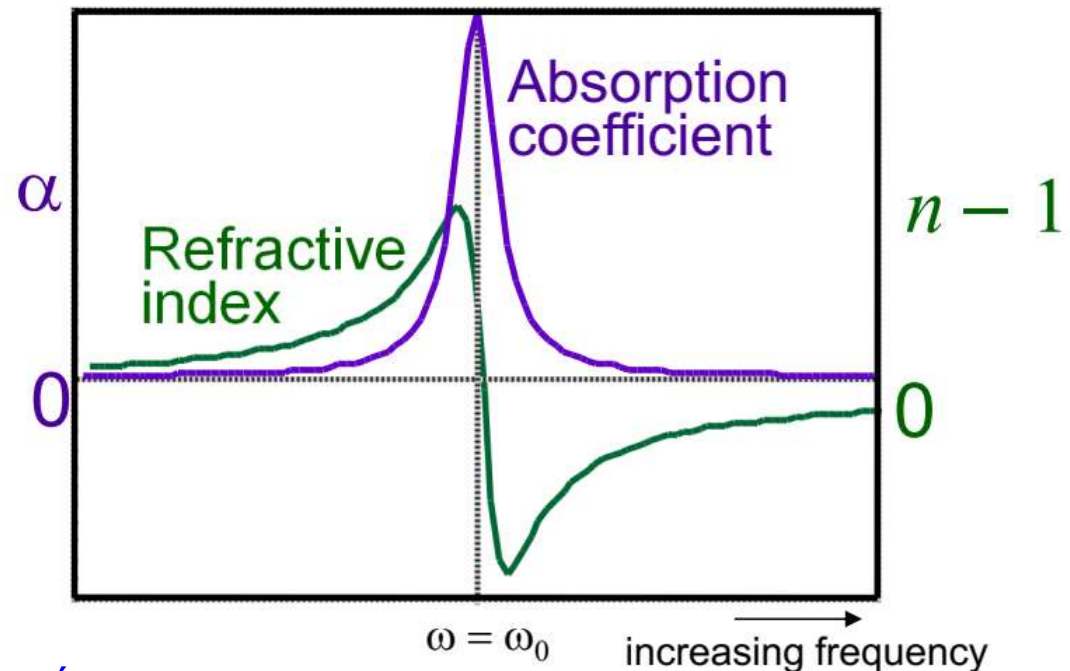
Modelo de Lorentz - resumo

$$\alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 mc} \left[\frac{\gamma}{\Delta\omega^2 + \gamma^2} \right]$$

$$n(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{4\omega_0 \varepsilon_0 m} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega^2 + \gamma^2} \right]$$

$$\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$$

São essencialmente a função do Lorentz (com alguns constantes a frente)

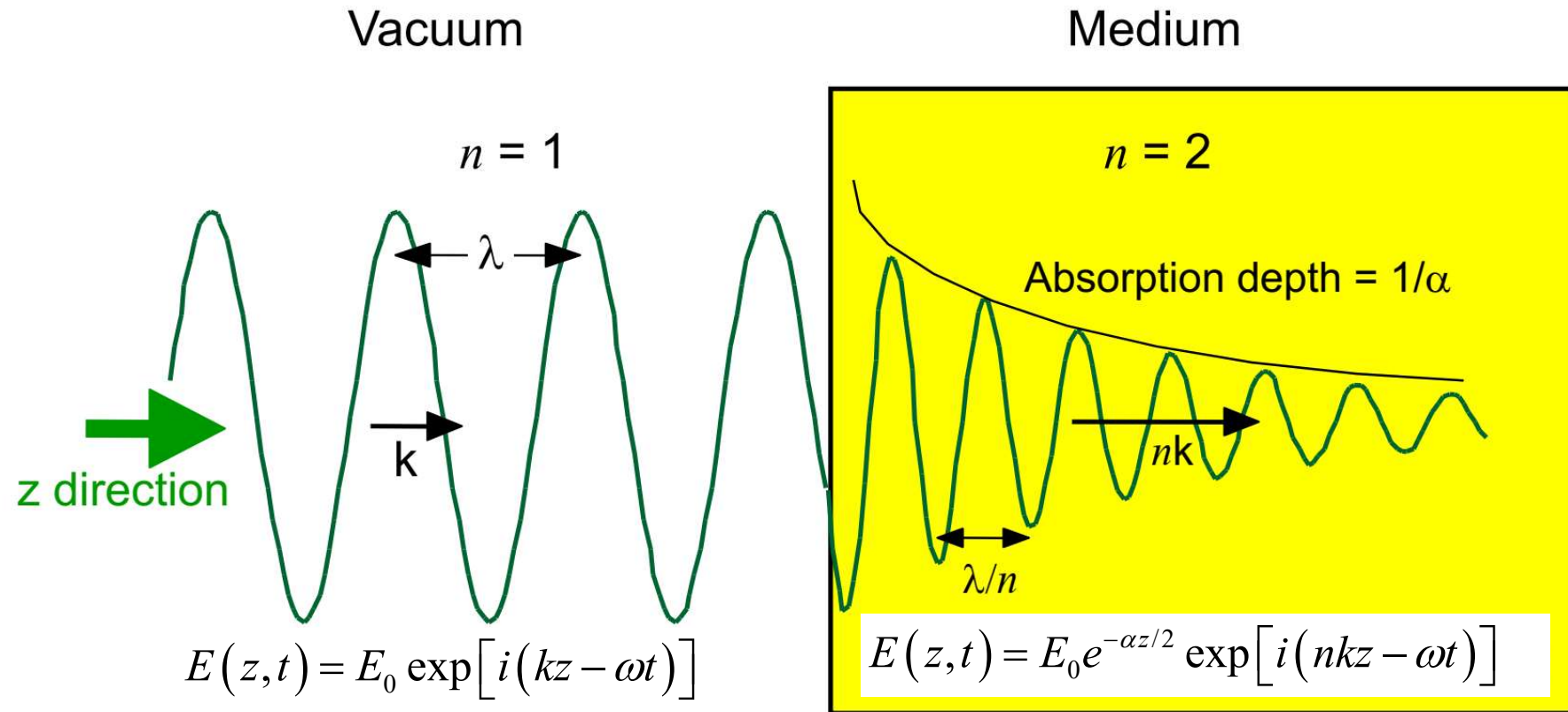


A velocidade (da fase) do campo elétrico é

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \text{num meio (dielétrico)} \quad k \rightarrow nk_0 \quad v \rightarrow \frac{\omega}{nk_0} = \frac{c}{n}$$

Em geral, por uma ressonância na UV $n > 1$ e a velocidade (da fase) de ondas é menor do que c (é possível em algumas situações ter $n < 1$)

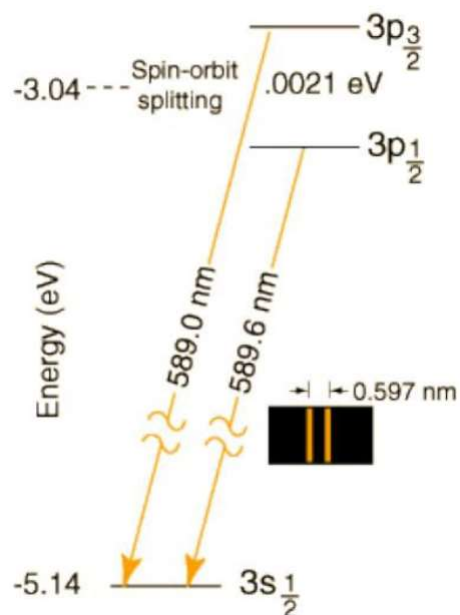
Transição do vácuo para um meio dielétrico



Note: A frequência não muda. Porque?

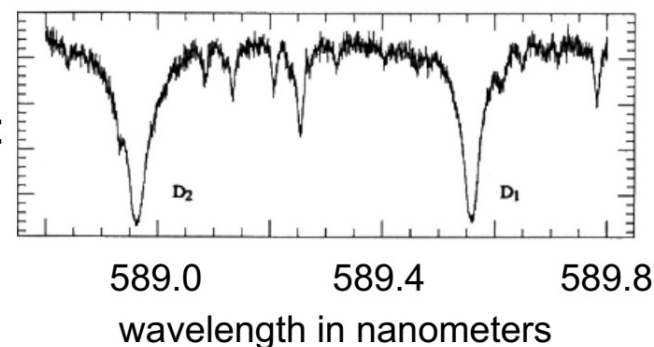
Em geral pode haver varias ressonâncias

Exemplo: Sódio (Na)

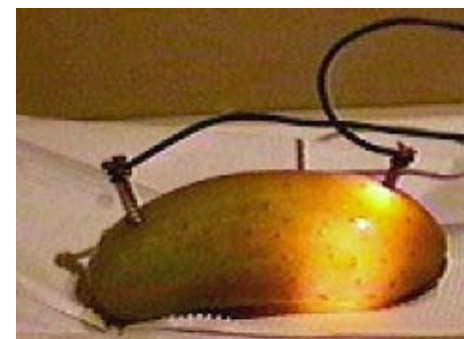


Espectro da luz solar a passar pela atmosfera

Intensity of the light from the sun,
passing through the atmosphere

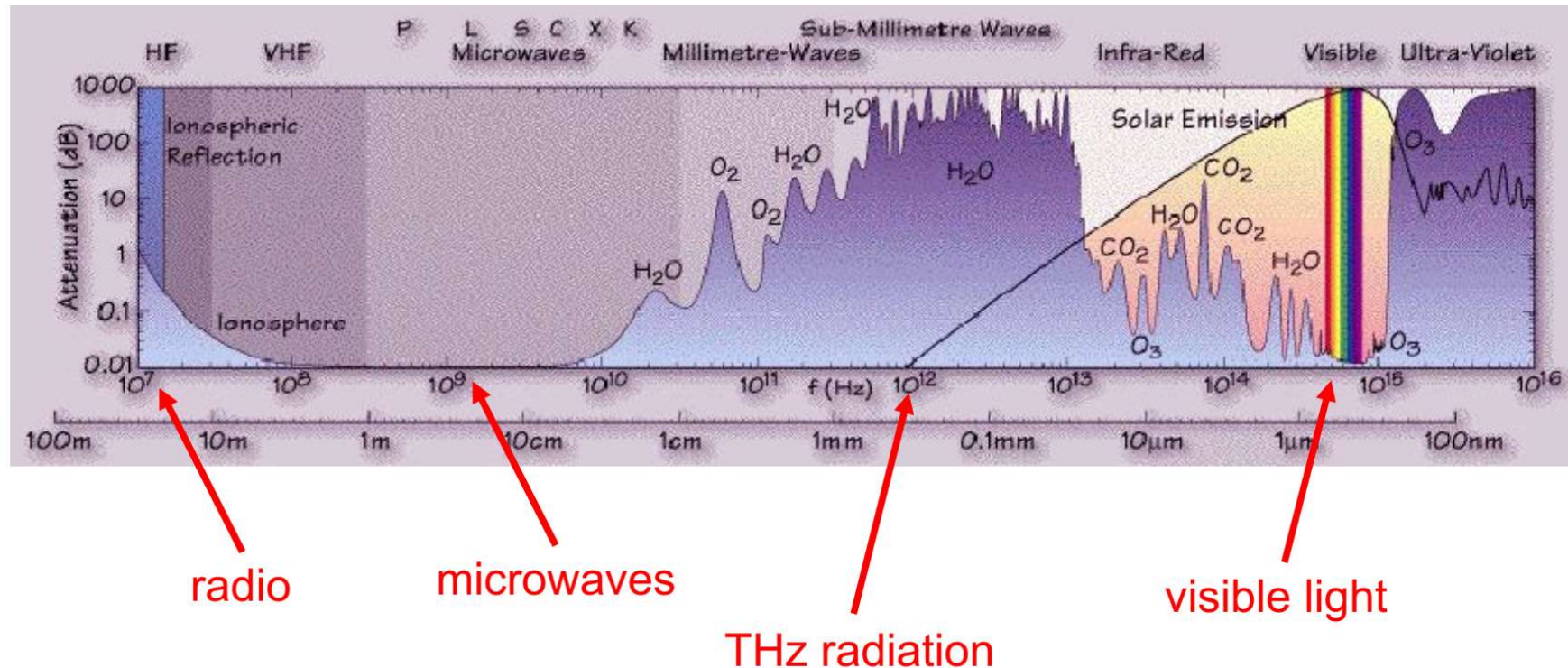


Absorption:

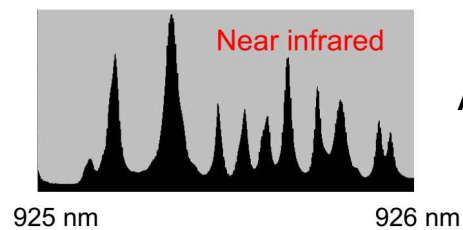


Um pepino “elétrico”

Absorção da atmosfera



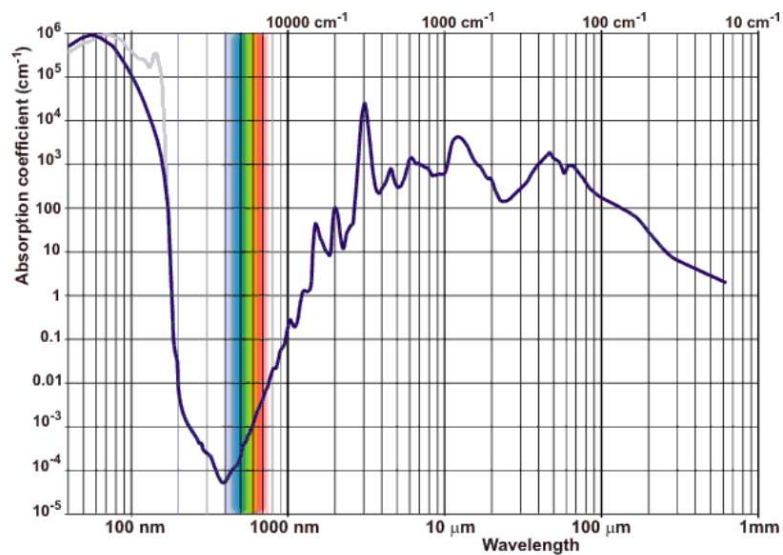
Moléculas são mais complexa do que átomos – têm espectros de absorção mais complicadas



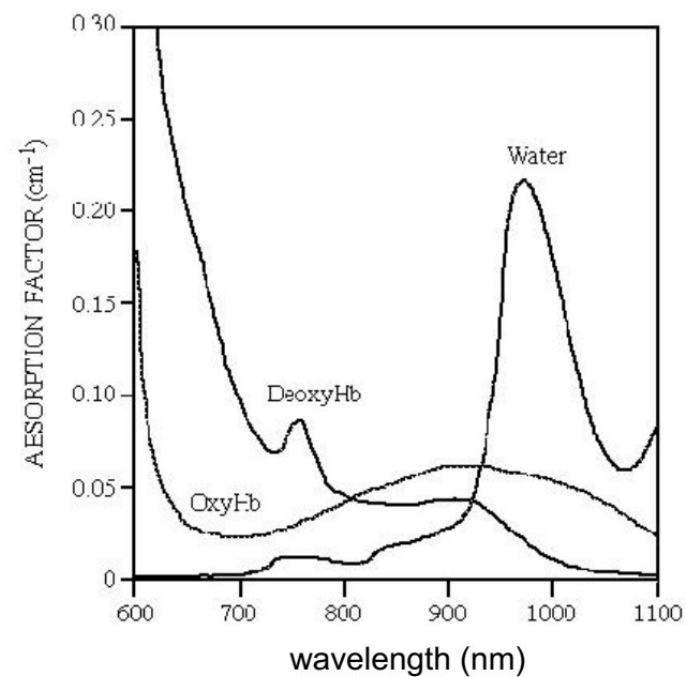
Absorção da H₂O no IV próximo

Sólidos e líquidos frequentemente tem bandas de absorção largas

água



sangue

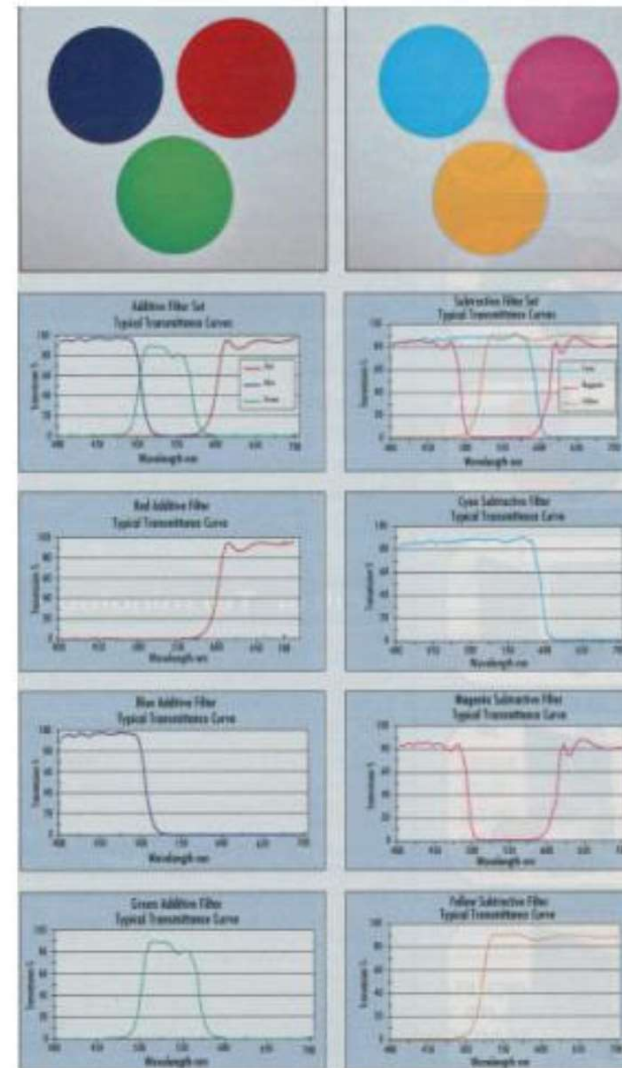


Vidros coloridos como filtros da absorção

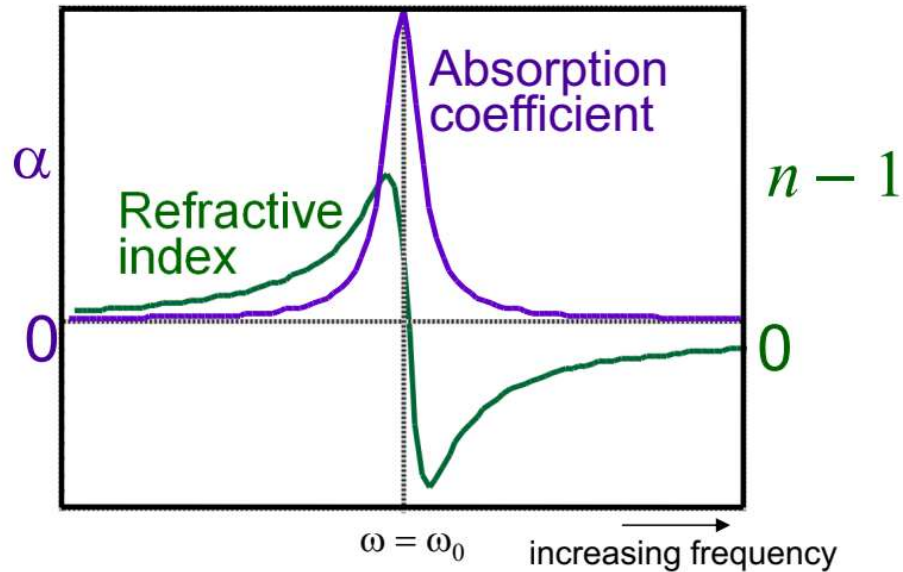
Vidros dopados com semicondutores

É possível arranjar repostas variadas

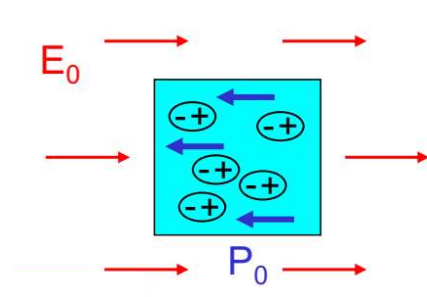
- iate entre banda de condução e valência
- Efeitos quânticos



Mesmo longo da ressonância o índice n varia



Mesmo para as frequências em que existe pouca absorção, o meio interage com o campo E



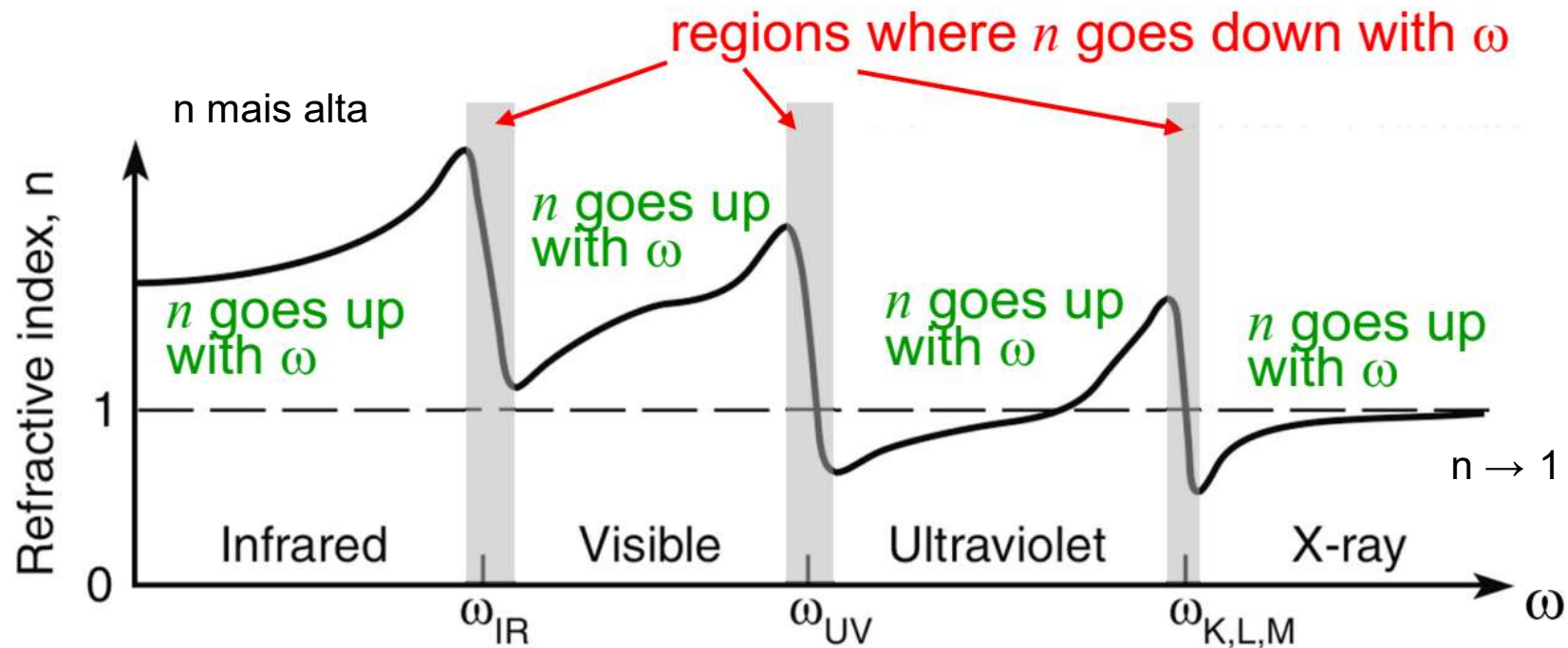
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}$$

Para frequências baixas a polarização pode ser elevada.

Exemplo H_2O : $\omega \approx 0$ $\chi \approx 78$

$\omega \approx \omega_{opt}$ $\chi \approx 0.77$

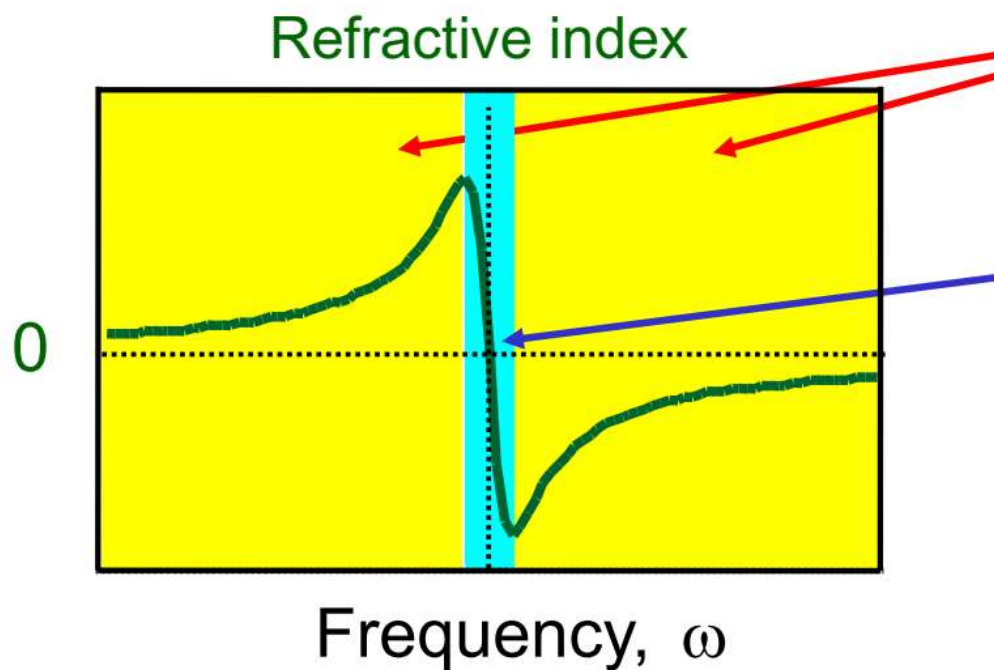
Comportamento típico dum material dielétrico



Materiais dielétrico transparentes tem ressonâncias no UV (ou IV) mas não no visível

Em geral n aumenta com a frequência no visível

Dispersão

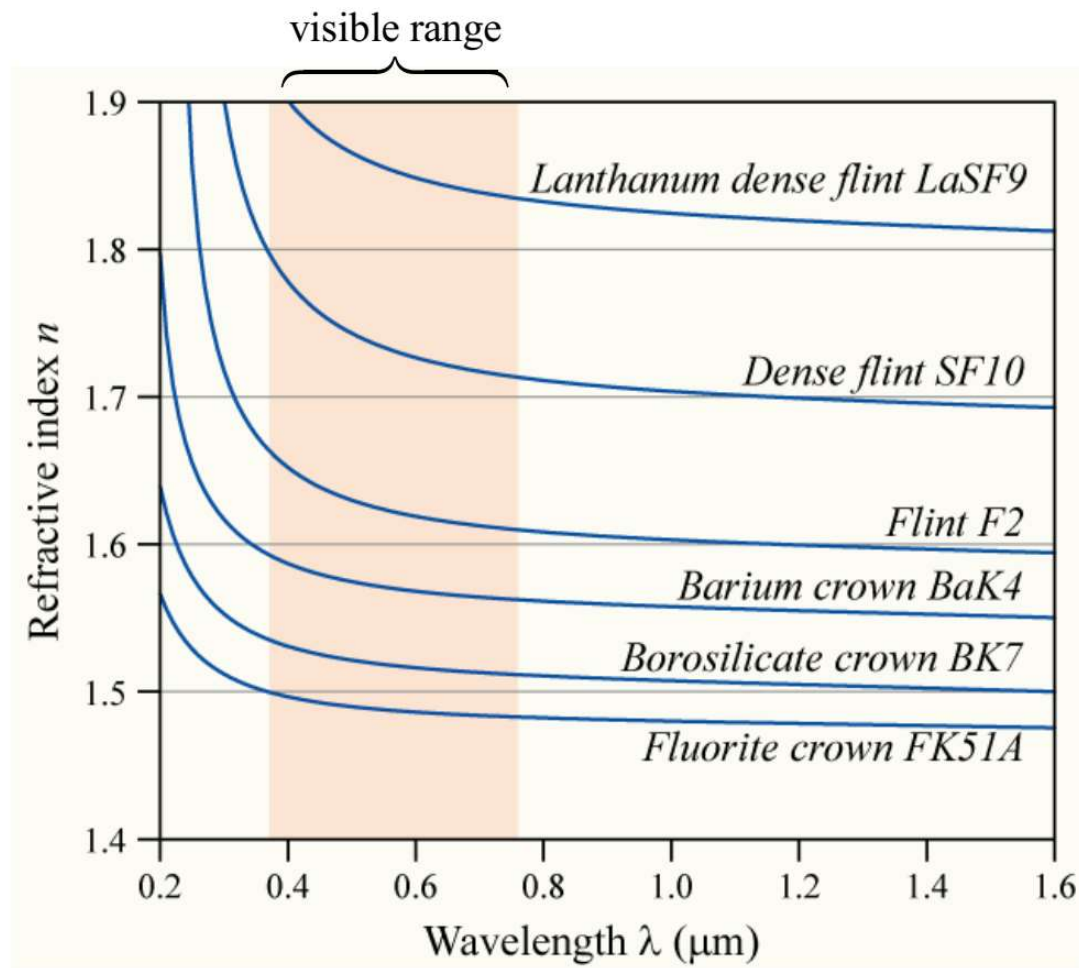


Dispersão "normal"
 $n \uparrow$ quando $\omega \uparrow$

Dispersão "anômala"
 $n \downarrow$ quando $\omega \uparrow$

Anômala indica apenas
que é menos comum

Variação de n em alguns vidros óticos



Dispersão normal

$$\omega = kv_{\text{fase}} = nk_0 \frac{c}{n} = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$$

$\leftarrow \omega$

Vidro (Crown glass)

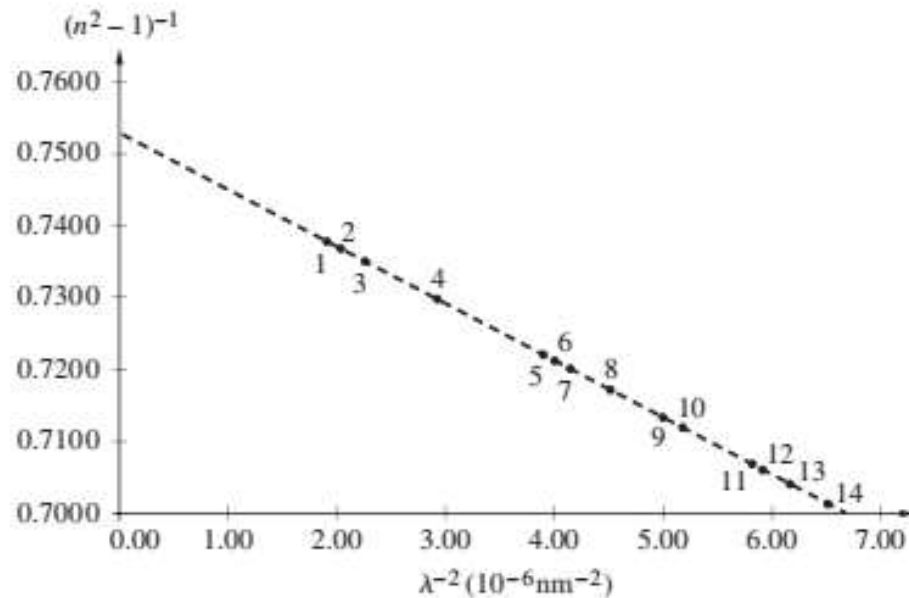


Figure 3.39 Graph of $(n^2 - 1)^{-1}$ versus λ^{-2} for the data shown in Table 3.3. See N. Gauthier, *Phys. Teach.*, **25**, 502 (1987).

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (3.70)$$

$$(n^2 - 1)^{-1} = -C\lambda^{-2} + C\lambda_0^{-2}$$

TABLE 3.3 Dispersion of Crown Glass*

	Wavelength λ (nm)	Index of Refraction n
1.	728.135	1.5346
2.	706.519, 706.570	1.5352
3.	667.815	1.53629
4.	587.562, 587.587	1.53954
5.	504.774	1.54417
6.	501.567	1.54473
7.	492.193	1.54528
8.	471.314	1.54624
9.	447.148	1.54943
10.	438.793	1.55026
11.	414.376	1.55374
12.	412.086	1.55402
13.	402.619	1.55530
14.	388.865	1.55767

* The wavelengths are those of a He discharge tube. The corresponding indices were measured.

Dispersão em ação

White light passing through a glass prism makes a rainbow.

