1. Represente graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(\alpha, 2\alpha) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\} \\
C_2 &= \{(\alpha, 2\alpha) \,:\, \alpha \in [0,1]\} \\
C_3 &= \{(\alpha, 2\alpha) \,:\, \alpha \in [-2,0[\} \\
C_4 &= \{(-3+\alpha, 1+2\alpha) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\} \\
C_5 &= \{\alpha(1,2) + \beta(-3,1) \,:\, \alpha \in \mathbb{R},\, \beta \in [0,+\infty[\} \\
C_6 &= \{(2+\alpha-3\beta, 2\alpha+\beta) \,:\, \alpha \geq 0,\, \beta \geq 0\} \\
C_7 &= \{(2+\alpha-3\beta, 2\alpha+\beta) \,:\, \alpha \in [0,1],\, \beta \in [0,1]\}
\end{aligned}$$

2. Considere novamente o conjunto $C_5 = \{\alpha(1,2) + \beta(-3,1) \,:\, \alpha \in \mathbb{R},\, \beta \in [0,+\infty[\}$ do exercício anterior. É verdade que $(1,0) \in C_5$? e $(0,1) \in C_5$? Justifique a sua resposta.

3. Represente graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(\alpha, 2\alpha, -\alpha) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\} \\
C_2 &= \{\alpha(1,2,-1) + \beta(3,0,1) \,:\, \alpha \geq 0,\, \beta \geq 0\}
\end{aligned}$$

4. Para cada alínea, diga, justificando, se os vetores considerados são paralelos.
   (a) $u = (1,2)$ e $v = (-2,-4)$.
   (b) $u = (1,2)$ e $v = (1,0)$.
   (c) $u = (1,-1,2)$ e $v = (-2,2,6)$.

5. Sejam $v = (x,y)$ and $v' = (x',y')$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$. Mostre que v e v' são paralelos sse $xy' - x'y = 0$.

6. Determine equações paramétricas da reta de $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $A = (-1,0,2)$ e $B = (3,-1,0)$. Esta reta passa pelo ponto $C = (2,0,2)$? e pelo ponto $D = (1, -\frac{1}{2}, 1)$?

7. Determine equações paramétricas e uma equação cartesiana da reta de $\mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $A = (-2,1)$ e que é paralela ao vetor $(3,2)$.

8. Determine elementos A e v de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + 2y = -1\} = \{A + \lambda v \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   Quais são as escolhas possíveis para A e v?

9. Determine equações paramétricas do plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ e $C = (0,0,1)$.

10. Considere, em $\mathbb{R}^3$, o ponto $A = (0, 0, 1)$ e os vetores $u = (1, -1, 1)$ e $v = (2, 0, -2)$.

    (a) Verifique que u e v não são paralelos.

    (b) Escreva equações paramétricas e uma equação cartesiana do plano $A + \langle u, v\rangle$.

    (c) Verifique se $(1, 2, -3)$ pertence ao plano $A + \langle u, v\rangle$.

11. Determine vetores não paralelos $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - y - 3z = 0\} = \langle u, v\rangle.$$

12. Considerando em $\mathbb{R}^3$ os vetores $u = (\frac{1}{2}, 1, 0)$, $v = (\frac{3}{2}, 0, 1)$, $u' = (1, 2, 0)$, e $v' = (0, -3, 1)$, mostre que $\langle u, v\rangle = \langle u', v'\rangle$.

13. Considere, em $\mathbb{R}^2$, os vetores $u = (2, 0)$ e $v = (1, 1)$.

    (a) Calcule $||u||$, $||v||$ e $(u|v)$.

    (b) Determine $\angle(u, v)$.

14. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vetores $u = (1, -1, \sqrt{2})$ e $v = (0, 1, 0)$.

    (a) Calcule $||u||$, $||v||$ e $(u|v)$.

    (b) Determine $\angle(u, v)$.

15. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Estabeleça o Teorema de Pitágoras: $||u + v||^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ sse $(u|v) = 0$.

    (b) Mostre a *identidade do paralelograma*: $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$.

    (c) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostre a *desigualdade triângular*: $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

16. Determine o centro e o raio da esfera de $\mathbb{R}^3$ de equação $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = -1$.

17. Considere em $\mathbb{R}^2$ a circunferência centrada na origem e de raio 1. Determine o (outro) ponto de interseção desta circunferência com a reta que passa pelo ponto $(-1, 0)$ e que é dirigida pelo vetor $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ onde $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Interprete geometricamente. (*Ind.*: use uma equação paramétrica da reta e uma equação cartesiana da circunferência).

18. Determine uma equação cartesiana da reta de $\mathbb{R}^2$

    (a) que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $(-3, 2)$.

    (b) que passa pelo ponto $(1, 4)$ e é perpendicular ao vetor $(-3, 2)$.

    (c) que passa pelos pontos $A = (1, 3)$ e $B = (-2, 2)$.

19. Determine um vetor normal à reta de $\mathbb{R}^2$

    (a) que passa pelo ponto $A = (1, 3)$ e que é paralela ao vetor $v = (5, 2)$.

(b) de equação cartesiana $2x - 3y = 4$.

20. Determine uma equação cartesiana do plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e que é perpendicular ao vetor $(-1, 2, 1)$.

21. Determine uma equação cartesiana do hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que passa pelo ponto $(0, 1, 2, 3)$ e que é perpendicular ao vetor $(-1, 2, 0, 1)$.

22. Considere em $\mathbb{R}^3$ os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ dados pelas seguintes equações cartesianas:

$$\mathcal{P} : x - 2y + z = 0 \qquad \mathcal{P}' : z = 1$$

(a) Determine um vetor normal para cada um desses planos.

(b) Determine a interseção desses planos.

23. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo.

(a) Suponha que $w = \lambda v + u$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e u é ortogonal a v. Mostre que $\lambda = \dfrac{(w|v)}{(v|v)}$.

(b) Mostre que todo o vetor $w \in \mathbb{R}^n$ escreve-se de maneira única como $w = \lambda v + u$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e u ortogonal a v.

24. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a reta $\mathcal{R}$ de equação cartesiana $-x + 3y = 2$.

(a) Verifique que o ponto $(1, 2)$ não pertence à $\mathcal{R}$.

(b) Determine a distância entre o ponto $(1, 2)$ e a reta $\mathcal{R}$.

25. Determine a distância entre o ponto $(1, 1, 1)$ e o plano $\mathcal{P}$ de equação $x - 2y = 0$.

26. (a) Considerando $u = (1, 2, 3)$ e $v = (1, 0, -2)$, calcule $u \wedge v$ e $v \wedge u$.

(b) Considerando $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ verifique que:

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2 \qquad e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) \neq (e_1 \wedge e_1) \wedge e_2$$

27. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. Mostre a *identidade de Lagrange*

$$||u \wedge v||^2 = ||u||^2||v||^2 - (u|v)^2$$

e deduza disso que $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen} \angle(u, v)$.

28. Utilizando o produto vetorial, determine uma equação cartesiana dos planos de $\mathbb{R}^3$ dados pelas seguintes equações paramétricas:

(a) $\begin{cases} x = t - 2s \\ y = t + s \\ z = 2t \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = -1 - \beta \\ z = 2\alpha \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$