Resoluções teste de Modelo (Fotónica I)

A. Descreve dois exemplos de alargamento do perfil da linha que aumentam a largura do espetro da absorção acima do que é observado nas condições de alargamento natural.

Existem várias possibilidades: Entre os efeitos homogéneos são o decaimento não radiativa através fonões ou colisões, ambos que encurta o tempo de vida efetiva do dipolo oscilante. Entre os efeitos não homogéneos se encontram o efeito Doppler que distribua as frequências de ressonância em função da velocidade relativa entre a fonte e os átomos ou os campos elétricos locais devidos compressão ou defeitos na rede cristalina que deslocam as frequências através o efeito Stark.

B. Estime o número dos modos eletromagnéticos que podem interagir com átomos Ne (A = 20.2) na transição laser á 632.8nm que se encontram numa cavidade laser com um diâmetro de 1mm, um comprimento de 20 cm e uma temperatura de 600K. (pode assumir que o índice de refração de gás é 1)

$$\nu = c/\lambda \approx 4.74x10^{14}\,Hz \;;\; \Delta\nu_D = 7.13x10^{-7}\sqrt{\frac{T}{A}}\nu_0 \approx 1.84\,GHz$$

O número de modos eletromagnéticos numa cavidade de 3 dimensões é:

$$N^o \text{ modos} = \frac{n^3\omega^2}{\pi^2c^3}\Delta\omega\, Vol = \frac{8\pi}{\lambda^2 c}\Delta\nu\left(L\pi d^2/4\right) \approx 6x10^7$$

1. Um conjunto de 10^{10} átomos de “dois níveis” foi arrefecido até o efeito Doppler seja desprezável. A transição ocorre num comprimento de onda igual á 600nm e as degenerescências dos dois níveis são iguais.
Quando um laser de irradiância constante é sintonizado em ressonância com a transição, ao atingir um estado estacionário, 25% dos átomos se encontram no estado excitado. Ao dessintonizar a radiação por um valor igual à $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 10^8 s^{-1}$ apenas 1/12 dos átomos se encontram no estado excitado quando um estado estacionário é atingido. Determine:
(a) o tempo da vida do estado excitado, assumindo que apenas alargamento natural contribua para o perfil da linha.

No limite de alargamento natural a equação dinâmica para o nível excitado é

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{I_{in}\sigma(\omega)}{\hbar\omega_0}\left(N_1 - N_2\right) - A_{21}N_2$$ substuir $N_1 = N_T - N_2$ e resolver para N_2 no estado estacionário:

$$N_2 = \frac{\left(I/I_{sat}(\omega)\right)}{1+\left(2I/I_{sat}(\omega)\right)}N_T \quad \text{onde} \quad I_{sat}(\omega) = \frac{\hbar\omega_0 A_{21}}{\sigma(\omega)}$$

Assim quando o laser está em ressonância ($\omega = \omega_0$)

$$\frac{1}{4} = \frac{\left(I_{in}/I_{sat}(\omega_0)\right)}{1+\left(2I_{in}/I_{sat}(\omega_0)\right)} \Rightarrow \frac{I_{in}}{I_{sat}(\omega_0)} = \frac{1}{2}.$$

Quando $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ $\frac{1}{12} = \frac{\left(I_{in} / I_{sat}\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)\right)}{1 + \left(2I_{in} / I_{sat}\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)\right)} \Rightarrow \frac{I_{in}}{I_{sat}\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)} = \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \frac{I_{in}}{I_{sat}\left(\omega_0\right)}$

.

Logo $\frac{I_{sat}\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)}{I_{sat}\left(\omega_0\right)} = \frac{\sigma\left(\omega_0\right)}{\sigma\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)} = 5$.

Agora sabemos que $\sigma\left(\omega\right) = \frac{\lambda^2}{4n^2} A_{21} g\left(\omega\right)$ assim $\frac{g\left(\omega_0\right)}{g\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)} = 5$.

No caso de alargamento natural: $g\left(\omega\right) = \frac{\left(A_{21} / 2\pi\right)}{\left(\omega - \omega_0\right)^2 + \left(A_{21} / 2\right)^2}$. Ao substituir na equação acima temos $\frac{\left(\Delta\omega\right)^2 + \left(A_{21} / 2\right)^2}{\left(A_{21} / 2\right)^2} = 5 \quad \Rightarrow A_{21} = \Delta\omega = 10^8 s^{-1}$ e $\tau = \frac{1}{A_{21}} = 10ns$

(b) a potência da luz emitida espontaneamente pelos átomos quando o laser está sintonizado em ressonância com a transição.

O número total de emissões espontâneas/s = $A_{21}N_2 \approx 10^8 s^{-1}\left(2.5x10^9\right) \approx 2.5x10^{17} s^{-1}$.

Cada fotão emitida tem uma energia de $\approx hc / \lambda$ e assim a potência emitida é $\left(hc / \lambda\right) A_{21} N_2 \approx 82mW$

(c) a irradiância (W/m^2) do laser

Da alínea (a) $I_{in} = \frac{1}{2} I_{sat}\left(\omega_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{hc}{\lambda}\right) A_{21} \frac{1}{\left(\lambda^2 / 4\right) A_{21} g\left(\omega_0\right)}$; $g\left(\omega_0\right) = 2 / A_{21}\pi$

$$I_{in} = \frac{1}{2}\left(\frac{hc}{\lambda}\right) A_{21} \frac{2\pi}{\left(\lambda^2\right)} \approx 290W / m^2$$

(d) Qual é temperatura duma fonte da radiação térmica que excitava 25% dos átomos no estado estacionário?

Se só existe radiação térmica os átomos estarão em equilíbrio termodinâmico com a radiação térmica á uma temperatura T e a realão de Boltzan é valida:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{0.25N_T}{0.75N_T} = \exp\left[-\frac{hc / \lambda}{k_B T}\right] \quad T = \frac{hc / \lambda}{k_B} \ln\left(3\right) \approx 26300K$$

2. Os dois amplificadores óticos considerados neste problema se operam numa transição com alargamento homogénea e sobre condições de estado estacionário.

(a) Quando um sinal ótico com uma irradiância de 3.0 kW/m^2 é incidente num amplificador de 1m de comprimento a irradiância a saída é 36 kW/m^2. Se o sinal de entrada é reduzido até 1.0 kW/m^2 a irradiância a saída é 20 kW/m^2. Determine a irradiância da saturação e o coeficiente de ganho dos sinais pequenos, γ_0.

A equação relevante é $\ln\left[\frac{I(L)}{I(0)}\right]+\frac{I(L)-I(0)}{I_{sat}}=\gamma_0 L$

Temos (1) $I(0)=3kW/m^2 \quad I(L)=36kW/m^2 \qquad \ln[12]+\frac{33kW/m^2}{I_{sat}}=\gamma_0 L$

e (2) $I(0)=1kW/m^2 \quad I(L)=20kW/m^2 \qquad \ln[20]+\frac{19kW/m^2}{I_{sat}}=\gamma_0 L$

(2)-(1) $\Rightarrow \ln\left[\frac{20}{12}\right]\approx 0.51=\frac{14kW/m^2}{I_{sat}}$ ou seja $\Rightarrow I_{sat}\approx 27,4kW/m^2$

(b) Um outro amplificador ótico produz uma irradiância de $5I_0$ quando a irradiânica incidente é I_0 e é sintonizada em ressonância (ω_0) com a transição. Quando o sinal de entrado é dessintonizado para uma frequência próxima ω_1 uma irradianica de $3I_0$ é amplificada até $7I_0$. Determine a razão entre as secções eficazes $\sigma(\omega_0)/\sigma(\omega_1)$

$$I_{sat}=\frac{\hbar\omega_0}{\sigma(\omega)\tau_2} \quad \gamma_0(\omega)=\sigma(\omega)\left[N_2-\tfrac{g_2}{g_1}N_1\right]$$

Assim $\ln\left[\frac{I(L)}{I(0)}\right]+\frac{I(L)-I(0)}{I_{sat}}=\gamma_0 L$ pode ser reescrito como

$$\ln\left[\frac{I(L)}{I(0)}\right]=\sigma(\omega)\left\{\left[N_2-\tfrac{g_2}{g_1}N_1\right]L-\frac{I(L)-I(0)}{\hbar\omega_0}\tau_2\right\}$$

@ $\omega_0 \quad I(L)=5I_0 \quad I(0)=I_0 \quad \ln[5]=\sigma(\omega_0)\left\{\left[N_2-\tfrac{g_2}{g_1}N_1\right]L-\frac{4I_0}{\hbar\omega_0}\tau_2\right\}$

@ $\omega_0 \quad I(L)=7I_0 \quad I(0)=3I_0 \quad \ln[7/3]=\sigma(\omega)\left\{\left[N_2-\tfrac{g_2}{g_1}N_1\right]L-\frac{4I_0}{\hbar\omega_0}\tau_2\right\}$

Logo $\frac{\sigma(\omega_0)}{\sigma(\omega)}=\frac{\ln[5]}{\ln[7/4]}\approx 1,9$

3. Considere um sistema laser de 3 níveis com alargamento homogéneo como ilustrado em baixo. Assuma que uma das frequências próprias da cavidade está em ressonância com a transição entre níveis 1 e 2 e despreze os efeitos de degenerescência.

(a) Escrever as equações dinâmicas para a variação das populações em ordem do tempo. No limite dos sinais pequenos com $A_{32}\gg P, A_{21}$ derive uma expressão para a inversão da população entre níveis 2 e 1, $\Delta N_{21}=N_2-N_1$ no estado estacionário, em termos da taxa de excitação P a taxa de emissão espontânea, A_{21} e a população total $N_T=N_1+N_2+N_3$.

$$\frac{dN_1}{dt} = -PN_1 - \frac{I\sigma}{\hbar\omega}\left(N_1 - N_2\right) + A_{21}N_2$$
$$\frac{dN_2}{dt} = A_{32}N_3 - A_{21}N_2 + \frac{I\sigma}{\hbar\omega}\left(N_1 - N_2\right)$$
$$\frac{dN_3}{dt} = P\left(N_1 - N_3\right) - A_{32}N_3$$

Assumindo que $A_{32} \gg P, A_{21}$ a equação para N_3 dá no estado estacionário

$N_3 = PN_1 / \left(P + A_{32}\right) \approx PN_1 / A_{32} \ll N_1$

Substituir este resultado na equação para N_2 da, no limite de sinais pequenos:

$\frac{dN_2}{dt} = PN_1 - A_{21}N_2$ e $N_1 \approx N_T - N_2$

Assim no estado estacionário $N_2 = \frac{PN_T}{P + A_{21}}; \quad N_1 = \frac{A_{21}N_T}{P + A_{21}}; \quad N_2 - N_1 = \frac{P - A_{21}N_T}{P + A_{21}}$

b) Dado os valores, $\sigma\left(\omega_0\right) = 10^{-12}cm^2; N_T = 3x10^9 cm^{-3}; A_{21} = 10^8 s^{-1}; P = 2A_{21}; R_1 = 1$, qual é o valor mínimo de R_2 que permite obter oscilação laser?

$P = 2A_{21} \quad \Rightarrow \quad N_2 - N_1 = N_T / 3 \qquad \gamma_0 = \sigma\left(N_2 - N_1\right) = 10^{-3}cm^{-1}$

Na condição limiar: $R_2 e^{\gamma_0 2L_g} = 1 \quad R_2 = e^{-\gamma_0 2L_g} = e^{-0.02} \approx 0.98$

(c) No caso em que $R_2 = 0.99$ qual seria a irradiância do feixe laser emitida?

Agora a I na transição 2→1 vai aumentar até que o ganho se satura ao nível limiar.

Temos $\frac{dN_2}{dt} = PN_1 - A_{21}N_2 + \frac{I_{cav}\sigma}{\hbar\omega}\left(N_1 - N_2\right)$ e no estado estacionário

$\frac{N_2}{N_1} = \frac{P / A_{21} - I_{cav} / I_{sat}}{1 + I_{cav} / I_{sat}} = \frac{2 - I_{cav} / I_{sat}}{1 + I_{cav} / I_{sat}}$ como $N_1 + N_2 \approx N_T$

$$N_2 - N_1 = \frac{N_2 - N_1}{N_2 + N_1} N_T = \frac{N_2 / N_1 - 1}{N_2 / N_1 + 1} N_T = \frac{1}{3 + 2I_{cav} / I_{sat}} N_T$$

O coeficiente de ganho é $\gamma = \sigma\left(N_2 - N_1\right) = \frac{\sigma N_T}{3 + 2\left(I / I_{sat}\right)} = \frac{3\gamma_0}{3 + 2\left(I / I_{sat}\right)}$ e

$$R_2 \exp\left(\gamma 2L_g\right) = 1 \quad \gamma 2L_g = \ln(1 / R_2) \quad \frac{3\left(2\gamma_0 L_g\right)}{3 + 2\left(I_{cav} / I_{sat}\right)} = \ln(1 / R_2)$$

mas $2\gamma_0 L_g = \ln\left(1 / 0.98\right) = 1 \quad \gamma 2L_g = \ln(1 / R_2) \quad \frac{3\left(2\gamma_0 L_g\right)}{3 + 2\left(I_{cav} / I_{sat}\right)} = \ln(1 / R_2)$

$$3+2\left(I_{cav}/I_{sat}\right)=3\frac{\ln\left(1/0.98\right)}{\ln\left(1/0.99\right)}\approx 6 \qquad I_{cav}\approx\frac{3}{2}I_{sat}=\frac{3}{2}\left(\frac{hc}{\lambda}\right)\frac{A_{21}}{\sigma}\approx 43W/cm^2$$

E a irradiância de feixe transmitida para fora é $I_{Laser}=T_2 I_{cav}=(1-R_2)I_{cav}\approx 850\,\frac{mW}{cm^2}$