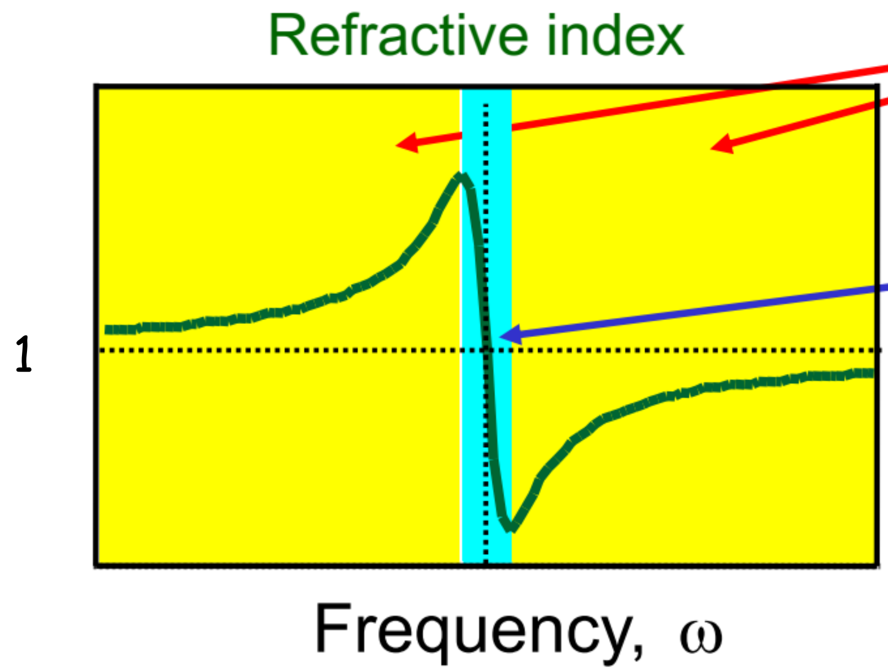
Dispersão no modelo de Lorentz



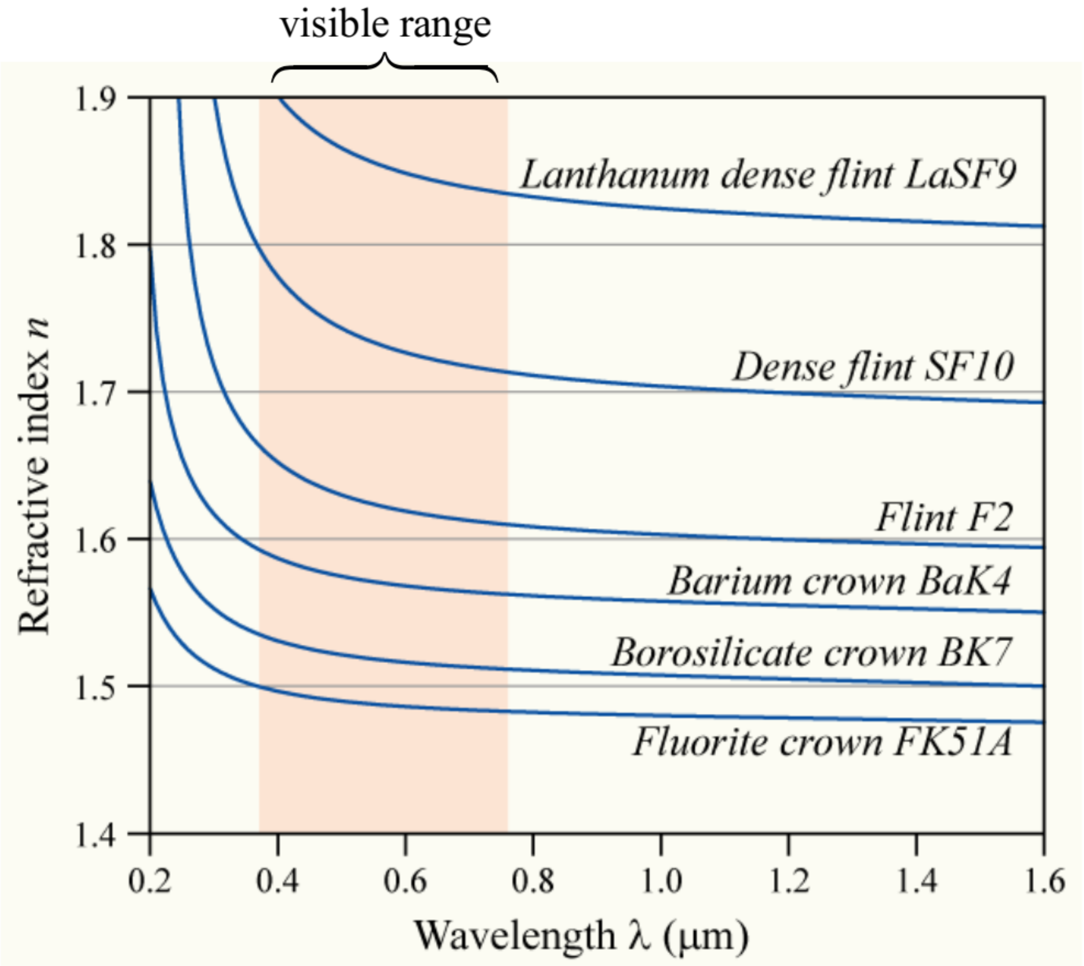
Dispersão "normal"
n ↑ quando ω ↑

Dispersão "anómala"
n ↓ quando ω ↑
Zona fina centrada na ressonância

Anómala indica apenas
que é menos comum

$$n(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{4\omega\varepsilon_0 m}\left[\frac{\omega-\omega_0}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\right]$$

Variação de n em alguns vidros óticos

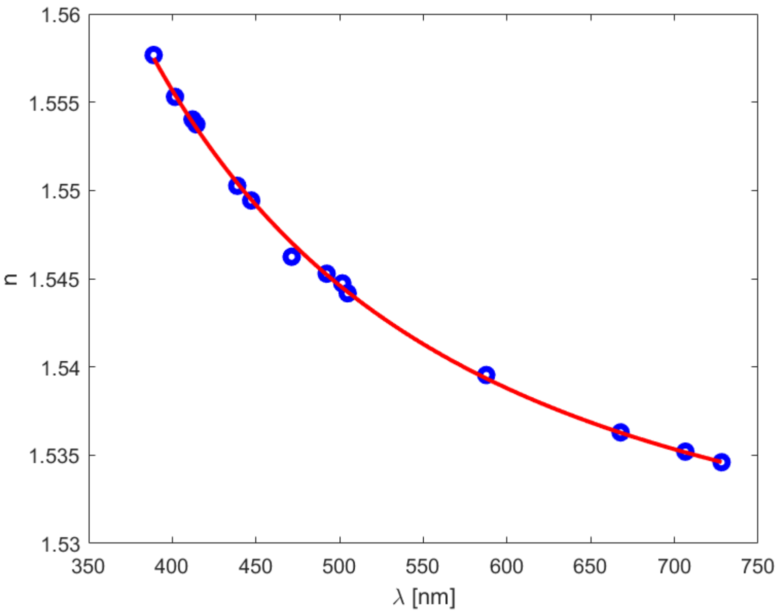


$\leftarrow \omega$

Dispersão normal

$$\omega = k v_{fase} = n k_0 \frac{c}{n} = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$$

Vidro (Crown glass)



$$n(\omega)=1-\frac{Ne^2}{4\omega\varepsilon_0 m}\left[\frac{\omega-\omega_0}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\right]$$

$$\omega_0-\omega\gg\gamma$$

$$n(\omega)\approx 1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\left[\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right]\to 1+A\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

$$A=0.526$$

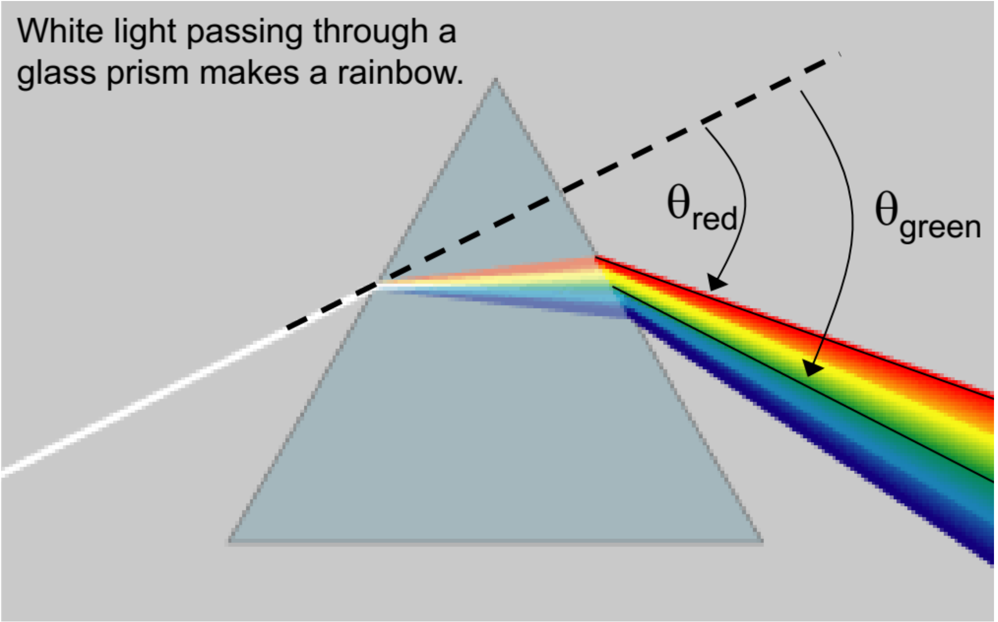
$$\lambda_0=92.43nm$$

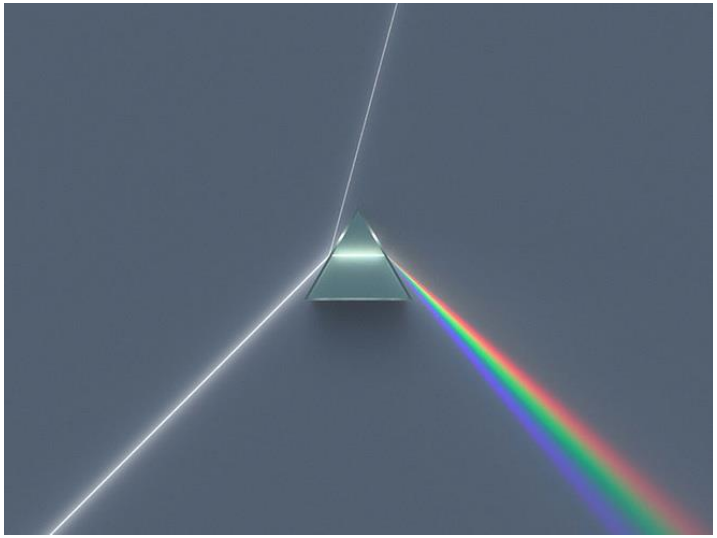
TABLE 3.3 Dispersion of Crown Glass*

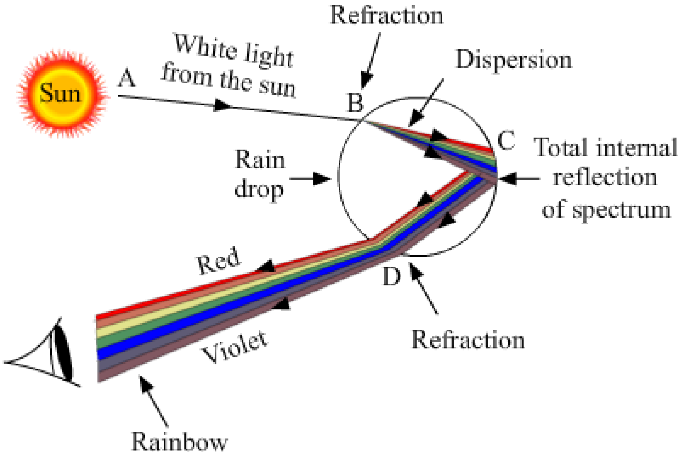
	Wavelength λ (nm)	Index of Refraction n
1.	728.135	1.5346
2.	706.519, 706.570	1.5352
3.	667.815	1.53629
4.	587.562, 587.587	1.53954
5.	504.774	1.54417
6.	501.567	1.54473
7.	492.193	1.54528
8.	471.314	1.54624
9.	447.148	1.54943
10.	438.793	1.55026
11.	414.376	1.55374
12.	412.086	1.55402
13.	402.619	1.55530
14.	388.865	1.55767

* The wavelengths are those of a He discharge tube. The corresponding indices were measured.

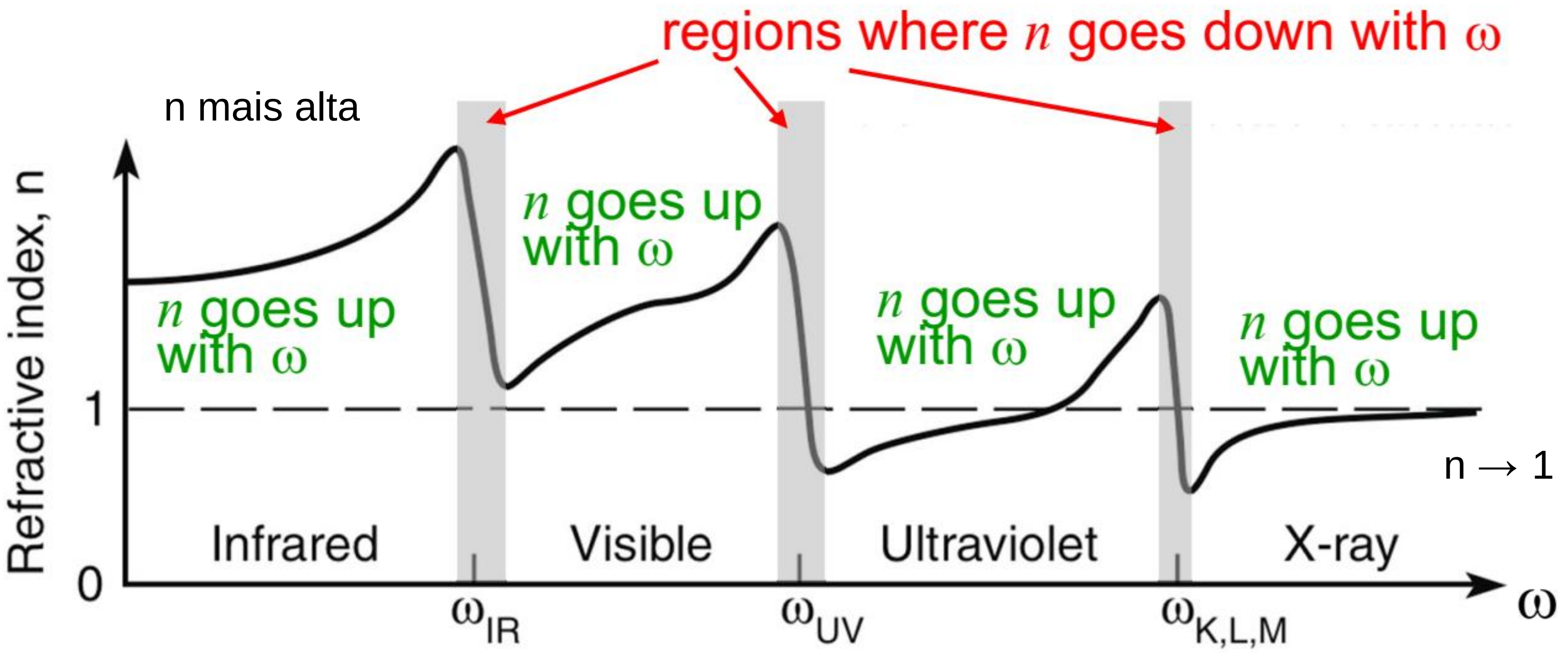
Dispersão em ação







As vezes n < 1



Materiais dielétrico transparentes tem ressonâncias no UV (ou IV) mas não no visível

Em geral n aumenta com a frequência no visível

Se $n < 1 \quad \mathrm{v} = \dfrac{c}{n} > c$ Quais são as implicações?

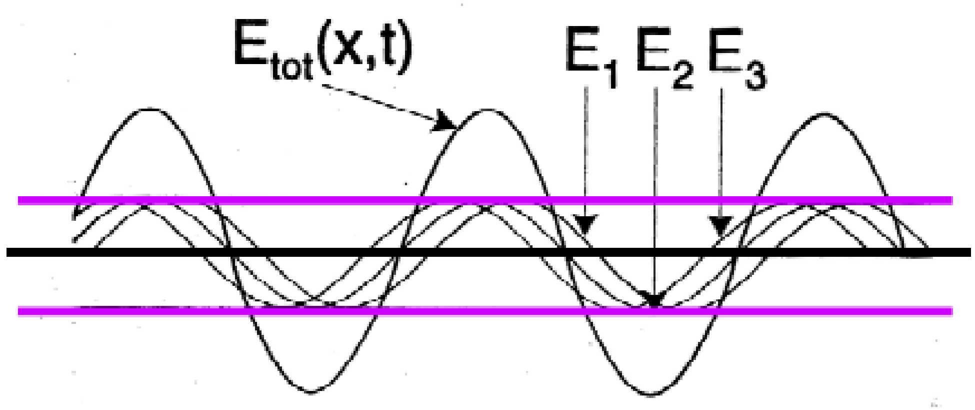
Sobreposição de ondas planas com fases diferentes

Somar ondas com a mesma frequência e mesmo vetor de onda mas com fases iniciais diferentes resulta numa onda com a mesma frequência.

Com notação complexa isso é fácil verificar

$$\vec{\mathrm{E}}_{total}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\vec{\mathrm{E}}_1 e^{i\varphi_1}\exp\left[i\left(\vec{\mathbf{k}}\bullet\vec{\mathbf{r}}-\omega t\right)\right]+\vec{\mathrm{E}}_2 e^{i\varphi_2}\exp\left[i\left(\vec{\mathbf{k}}\bullet\vec{\mathbf{r}}-\omega t\right)\right]+\vec{\mathrm{E}}_3 e^{i\varphi_3}\exp\left[i\left(\vec{\mathbf{k}}\bullet\vec{\mathbf{r}}-\omega t\right)\right]$$

$$=\left(\vec{\mathrm{E}}_1 e^{i\varphi_1}+\vec{\mathrm{E}}_2 e^{i\varphi_2}+\vec{\mathrm{E}}_3 e^{i\varphi_3}\right)\exp\left[i\left(\vec{\mathbf{k}}\bullet\vec{\mathbf{r}}-\omega t\right)\right]$$



Sobreposição de ondas planas com frequências diferentes

Ao somar ondas com frequências diferentes uma frequência de batimento é obtida

$$\vec{\mathrm{E}}_{total}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\vec{\mathrm{E}}_0\hat{x}\exp\left[i\left(k_1z-\omega_1t\right)\right]+\vec{\mathrm{E}}_0\hat{x}\exp\left[i\left(k_2z-\omega_2t\right)\right]$$

Definir

$$k_{med}=\frac{\left(k_1+k_2\right)}{2}\quad \Delta k=\frac{k_1-k_2}{2}\qquad k_1=k_{med}+\Delta k\quad k_2=k_{med}-\Delta k$$

$$\omega_{med}=\frac{\left(\omega_1+\omega_2\right)}{2}\quad \Delta\omega=\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\qquad \omega_1=\omega_{med}+\Delta\omega\quad \omega_2=\omega_{med}-\Delta\omega$$

$$\vec{\mathrm{E}}_{total}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\vec{\mathrm{E}}_0\hat{x}\exp\left[i\left(k_{med}z-\omega_{med}t\right)\right]\left\{\exp\left[i\left(\Delta kz-\Delta\omega t\right)\right]+\exp\left[-i\left(\Delta kz-\Delta\omega t\right)\right]\right\}$$

$$=2\vec{\mathrm{E}}_0\hat{x}\exp\left[i\left(k_{med}z-\omega_{med}t\right)\right]\cos\left[\left(\Delta kz-\Delta\omega t\right)\right]$$

Frequência de batimento

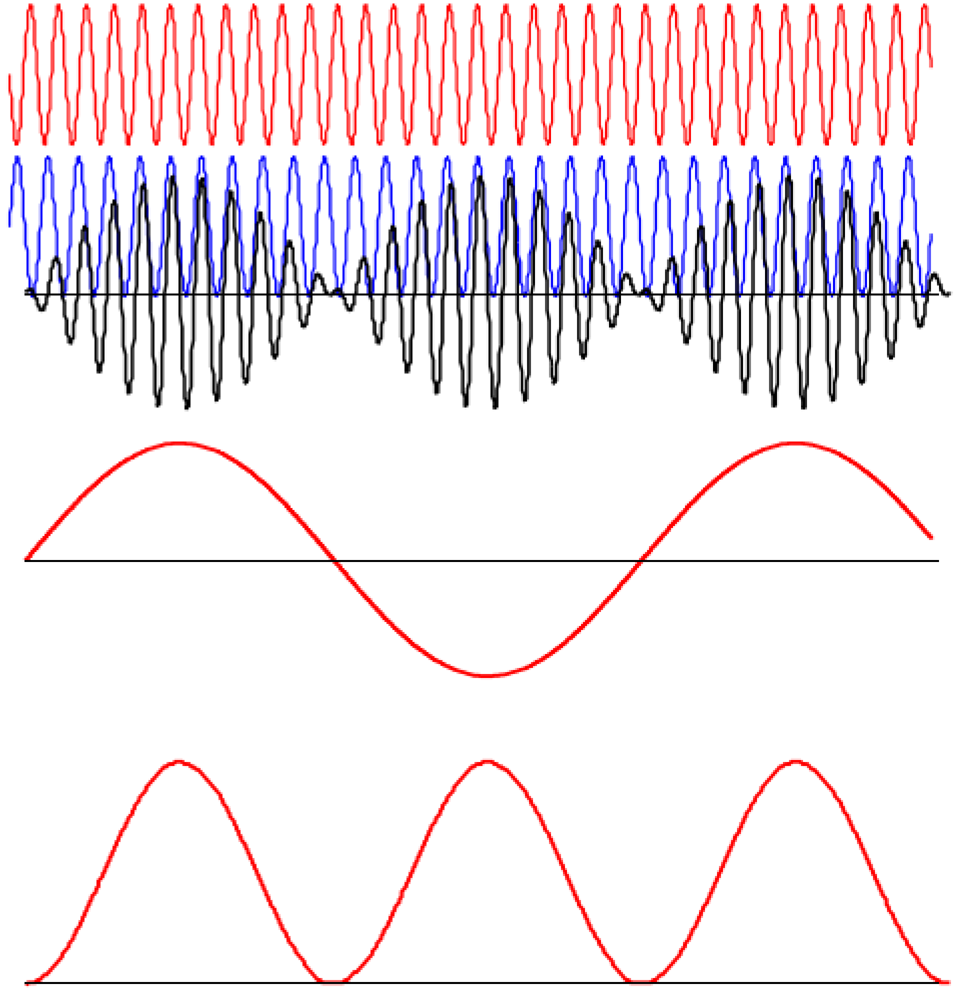
onda com ω_1

onda com ω_2

soma

envelope

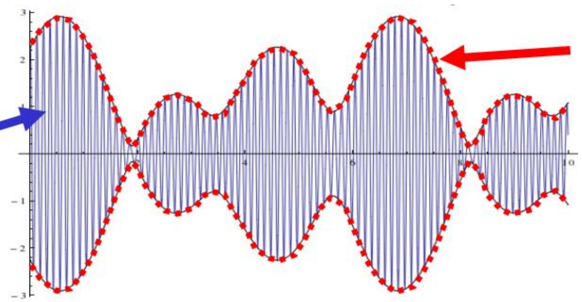
Irradiãncia



Velocidade da Fase e velocidade do Grupo

$$\vec{E}_{total}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=2\vec{E}_0\hat{x}\boxed{\cos\left[i\left(k_{med}z-\omega_{med}t\right)\right]}\boxed{\cos\left[\left(\Delta kz-\Delta\omega t\right)\right]}$$

fase
variação rápida



Envelopes
Variação mais lenta

Manter a fase constante requer: $k_{med}z=\omega_{med}t$

Velocidade da fase: $v_{fase}=\dfrac{\omega_{med}}{k_{med}}$

Propagar com o envelope requer: $\Delta kz=\Delta\omega t$

Velocidade do grupo: $v_{grupo}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}=\dfrac{d\omega}{dk}=\left[\dfrac{dk(\omega)}{d\omega}\right]^{-1}$

Em geral $v_{fase} \neq v_{grupo}$

$$\mathrm{v}_{grupo} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} = \left[\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right]^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi n(\omega)}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \qquad \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c}\left[n(\omega) + \omega\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right]$$

$$\mathrm{v}_{grupo} = \frac{c}{n}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)\right]}$$

$\mathrm{v}_{grupo} = \mathrm{v}_{fase}$ apenas se não existe dispersão

$$\frac{dn}{d\omega} = 0$$

Dispersão normal $\quad \frac{dn}{d\omega} > 0 \quad \mathrm{v}_{grupo} < c$

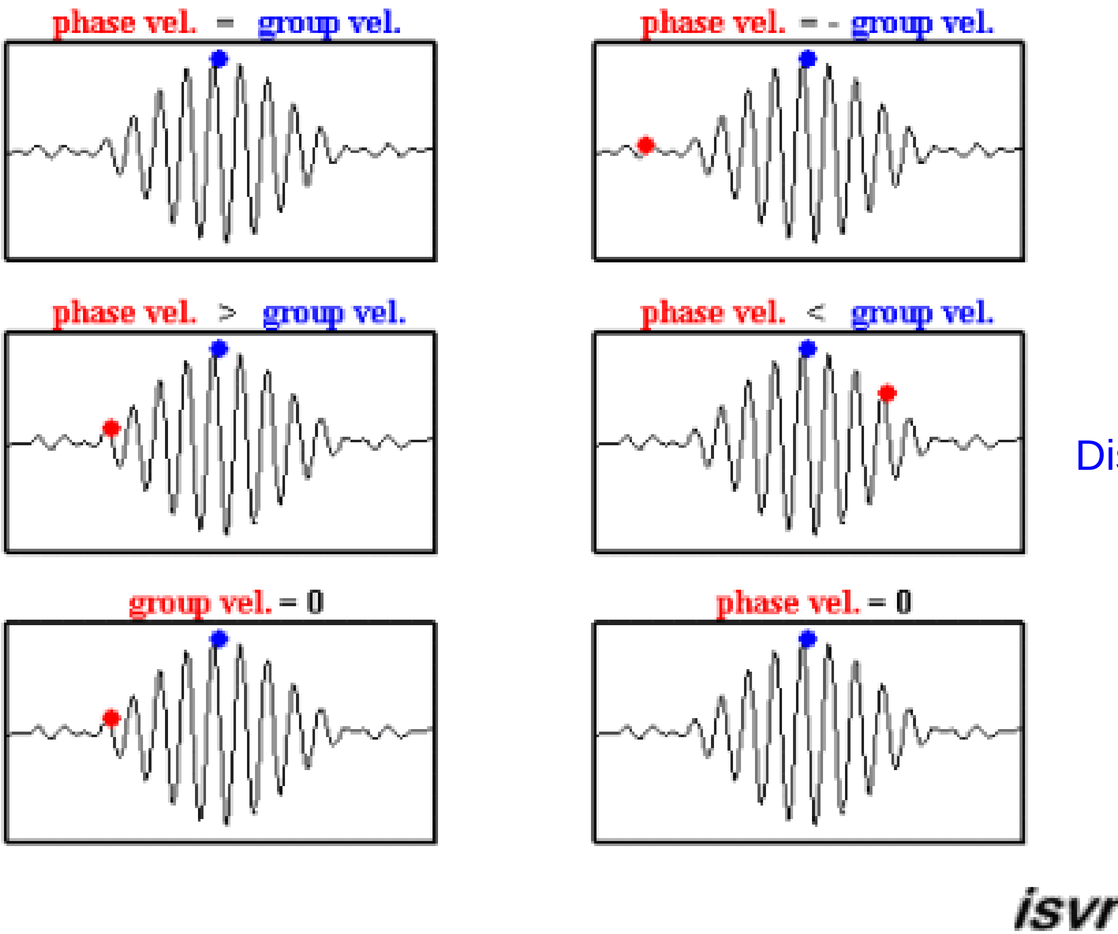
Dispersão anómala $\quad \frac{dn}{d\omega} < 0 \quad \mathrm{v}_{grupo} > c$

Velocidade do grupo e velocidade da fase

Espaço livre

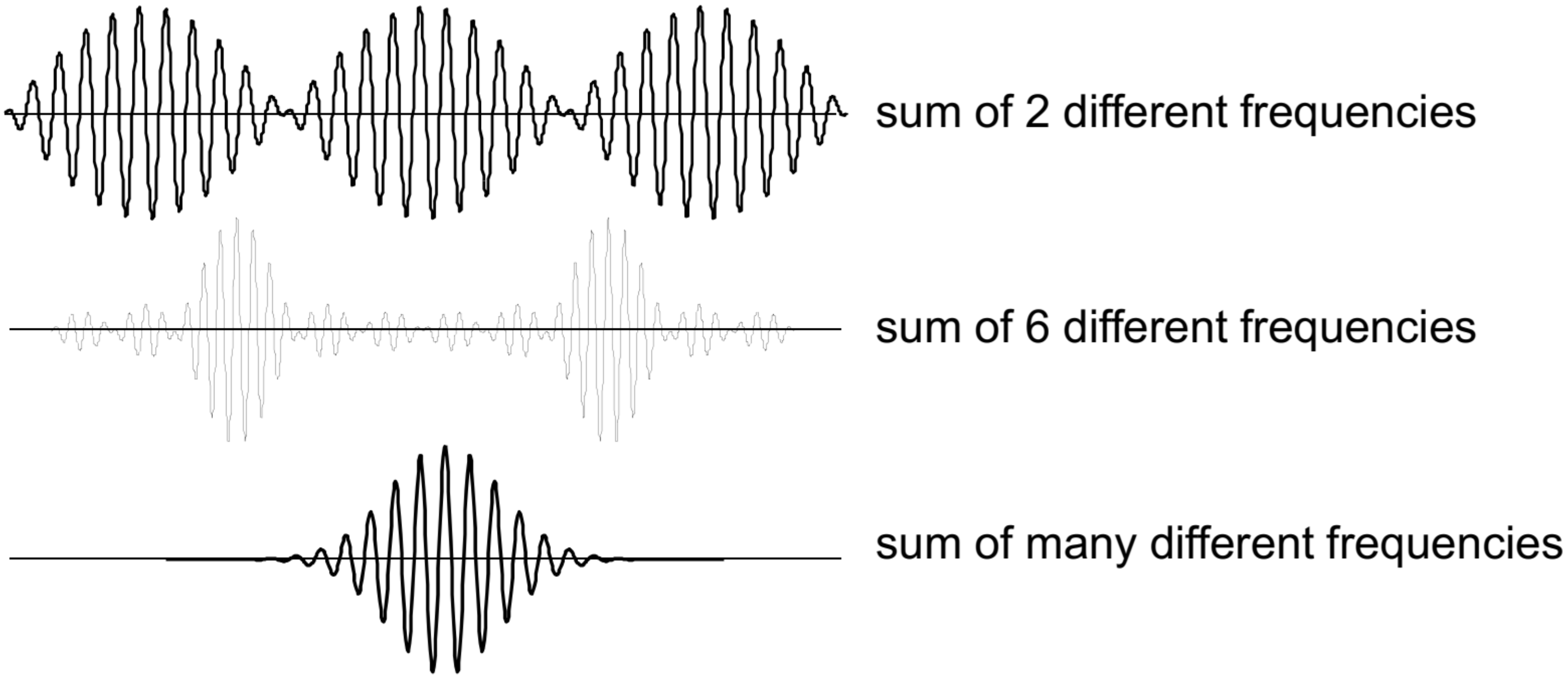
Dispersão normal

Dispersão anómala



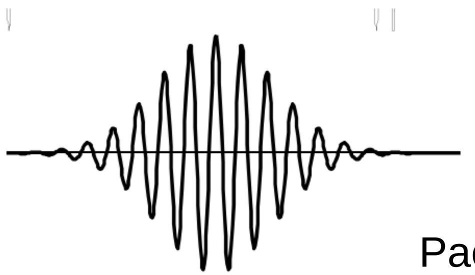
https://web.bryanston.co.uk/physics/Applets/Wave%20animations/Sound%20waves/Dispersive%20waves.htm

Pulsos propagam na velocidade do grupo



Para criar um pulso é necessário sobrepor ondas planas com varias frequências

Derivação alternativa da velocidade do grupo



Fourier:

$$E(z,t) = \int E(\omega) \exp\left[i(kz - \omega t)\right] d\omega$$

Pacote de onda centrado nos vetor de onda k_0 e frequência ω_0

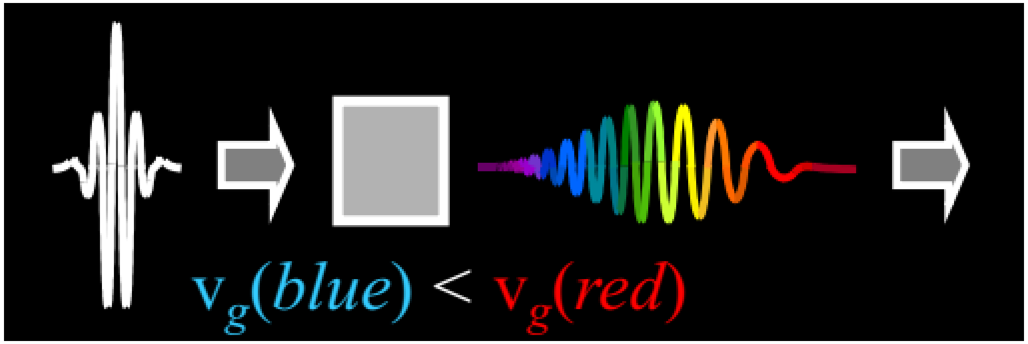
Escrever: $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ $\quad \Delta k = k - k_0 = \Delta\omega \dfrac{dk}{d\omega}$

$$E(z,t) = \boxed{\exp\left[i(k_0 z - \omega_0 t)\right]} \int \boxed{E(\omega) \exp\left[i\Delta\omega\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\right]} d\omega$$

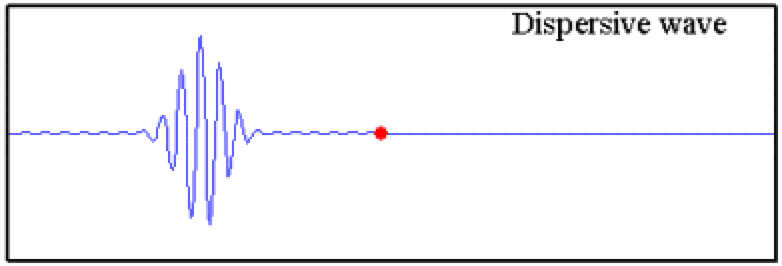
Fase global oscila rapidamente velocidade da fase $\quad \mathrm{v}_{fase} = \dfrac{\omega_0}{k_0}$

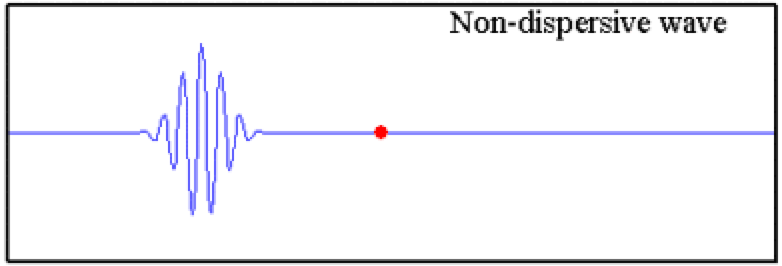
Envelope velocidade do grupo $\quad \mathrm{v}_{grupo} = \dfrac{d\omega}{dk}$

Efeito da dispersão nos pulsos



Dispersão normal: a velocidade do grupo é maior para os comprimentos de onda maiores

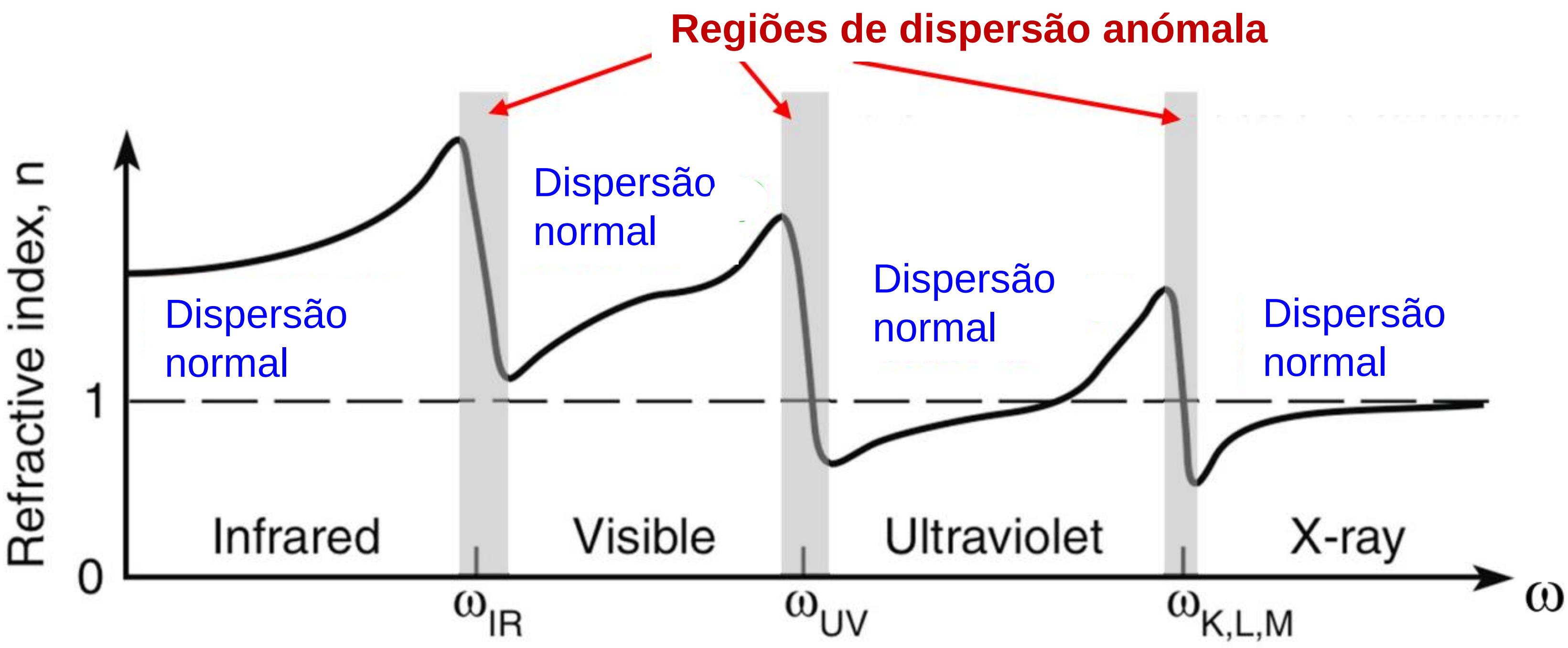




isvr

http://web.bryanston.co.uk/physics/Applets/Wave%20animations/Sound%20waves/Dispersive%20waves.htm

Dispersão anómala



$$v_{grupo} = \frac{c}{n}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)\right]}$$

Nas zonas de dispersão anómala $v_{Grupo} > v_{fase}$
e pode ser maior do que c.
Note que as zonas de dispersão são finas e lá a absorção é forte

No entanto informação se propaga na velocidade do grupo apenas sobre condições de dispersão normal. Ver a discussão na https://www.mathpages.com/home/kmath210/kmath210.htm