5.2- Ondas electromagnéticas num meio linear, neutro e isotrópico: (livre de cargas e correntes)

$$\nabla\cdot\vec{D} = 0 \qquad \nabla\wedge\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \begin{cases}\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\\ \vec{B} = \mu\vec{H}\end{cases}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla\wedge\vec{H} = \dot{\vec{D}}$$

Se ε, μ são funções reais que não dependem do ponto (meio homogéneo), então; as equações acima são iguais às equações de Maxwell no vazio com $\varepsilon_0\mu_0$ substituído por $\varepsilon\mu$. A equação de onda vem:

$$\nabla\wedge\nabla\wedge\vec{E} = +\nabla^2\vec{E} = +\varepsilon\mu\ddot{\vec{E}} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n},$$

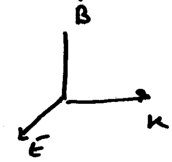
onde $n = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$; n = índice de refracção do meio.

Tudo o resto permanece idêntico:

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}(\vec{E}\wedge\vec{B})$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= kv \\ B_0 &= \frac{E}{v}\end{aligned}\right\} \text{ ondas planas}$$



$$I = \langle S\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\frac{E_0^2}{v} = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2$$

O que acontece quando uma onda encontra uma descontinuidade entre dois meios:

$$D_1^\perp = D_2^\perp \rightarrow \varepsilon_1 E_1^\perp = \varepsilon_2 E_2^\perp$$

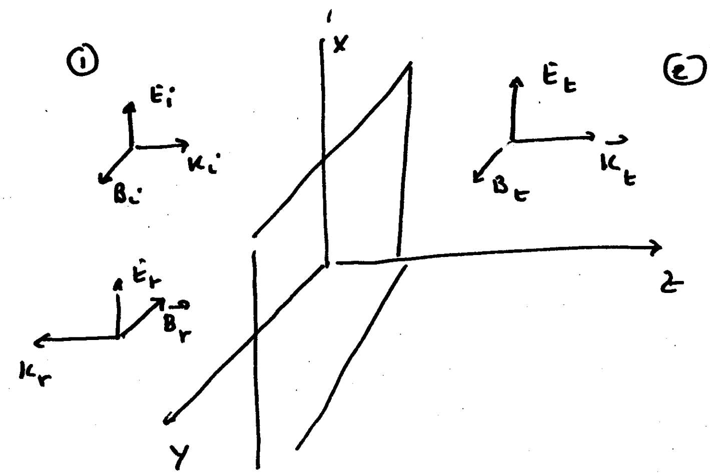
$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$$

$$B_1^\perp = B_2^\perp \rightarrow \mu_1 H_1^\perp = \mu_2 H_2^\perp \neq \cancel{\frac{B_1^\perp}{\mu_1}}$$

$$H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel} = \frac{B_1^{\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_2^{\parallel}}{\mu_2}$$

São as condições impostas pelas equações de Maxwell

5.2.1 - Reflexão e transmissão para incidência normal:



$$\begin{cases} \vec{\tilde{E}}_i(z,t) = \tilde{E}_{0i}\,\hat{x}\, e^{i(k_i z - \omega t)} \\ \vec{\tilde{B}}_i(z,t) = \vec{\tilde{B}}_{0i}\,\hat{y}\, e^{i(k_i z - \omega t)} = \frac{\vec{\tilde{E}}_{0i}}{v_1}\,\hat{y}\, e^{i(k_i z - \omega t)} \end{cases}$$

$$\hat{n} = \hat{x}$$

$$\begin{cases} \vec{\tilde{E}}_r(z,t) = \vec{\tilde{E}}_{0r}\,\hat{x}\, e^{i(-k_1 z - \omega t)} \\ \vec{\tilde{B}}_r(z,t) = -\vec{\tilde{B}}_{0r}\,\hat{y}\, e^{i(-k_1 z - \omega t)} \end{cases}$$

(Note: $\hat{k}_i \wedge \hat{n} = \hat{z} \wedge \hat{x} = \hat{y}$ i

$-\hat{k}_1 \wedge \hat{n} = -\hat{y}$: (onda refletida)

$$\tilde{\vec{E}}_t(z,t) = \tilde{\vec{E}}_0 \, \hat{x} \, e^{i(k_2 \cdot z - \omega t)}$$

$$\tilde{\vec{B}}_t(z,t) = \frac{\tilde{\vec{E}}_{0t}}{v_2} \, \hat{y} \, e^{i(k_2 z - \omega t)}.$$

$\underline{z=0}$

$$\begin{cases} E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \Rightarrow \tilde{\vec{E}}_{i0}(z=0) + \tilde{\vec{E}}_{r0}(z=0) = \tilde{\vec{E}}_{0t}(z=0) \\[2ex] \dfrac{B_1^{\parallel}}{\mu_1} = \dfrac{B_2^{\parallel}}{\mu_2} \Rightarrow \dfrac{1}{\mu_1}\left(\dfrac{1}{v_1}\tilde{E}_{0i} - \dfrac{1}{v_1}\tilde{E}_{0r}\right) = \dfrac{1}{\mu_2}\left(\dfrac{1}{v_2}\tilde{E}_{0t}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{r0} = \tilde{E}_{0t} \\[2ex] \tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \underbrace{\dfrac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}}_{\beta} \tilde{E}_{0t} = \beta \tilde{E}_{0t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0i} = \tilde{E}_{0t} - \tilde{E}_{r0} \\[2ex] \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0i} - \beta \tilde{E}_{0t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{E}_{0i} = \tilde{E}_{0t} - \tilde{E}_{0i} + \beta \tilde{E}_{0t} \\[2ex] \text{—} \end{cases}$$

$$\left\{ 2\tilde{E}_{0i} = (1+\beta)\tilde{E}_{0t} \quad \begin{array}{l} \to \left|\, \tilde{E}_{0t} = \dfrac{2}{1+\beta}\tilde{E}_{0i} \right. \\[3ex] \to \left|\, \tilde{E}_{0r} = \dfrac{1-\beta}{1+\beta}\tilde{E}_{0i} \right. \end{array} \right. \qquad (*)$$

Note: $n_1 = c\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \to \beta = \dfrac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \dfrac{\mu_1 \frac{c}{n_1}}{\mu_2 \frac{c}{n_2}} = \dfrac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$

$$\tilde{E}_{ot} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}} \tilde{E}_{oi} \quad ; \quad \tilde{E}_{or} = \frac{1 - \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}}{1 + \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}} \tilde{E}_{oi}$$

$$\tilde{E}_{ot} = \frac{2 \mu_2 n_1}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2} \tilde{E}_{oi} \quad ; \quad \tilde{E}_{or} = \frac{n_1 \mu_2 - \mu_1 n_2}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2} \tilde{E}_{oi}$$

Se o meio for não magnético e $\mu_1 \approx \mu_2 = \mu_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{E}_{ot} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} \tilde{E}_{oi} \quad ; \quad \tilde{E}_{or} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tilde{E}_{oi}$$

Seja $\begin{cases} n_2 = \frac{c}{v_2} \\ n_1 = \frac{c}{v_1} \end{cases}$ $\quad n_2 < n_1 \Rightarrow$ $\begin{cases} v_2 > v_1 \Rightarrow \tilde{E}_{or} \text{ está em fase c/ } E_{oi} \\ v_2 < v_1 \Rightarrow \tilde{E}_{or} \text{ está em antifase c/ } E_{oi} \end{cases}$

As amplitudes reais vêm:

$$E_{or} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| E_{oi} \quad ; \quad E_{ot} = \left| \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} \right| E_{oi}$$

A intensidade da onda é a energia média por unidade de área por unidade de tempo e é:

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2$$

Se $(\mu_1 = \mu_2 = \mu_0)$

$$R = \frac{I_R}{I_i} = \frac{E_r^2}{E_i^2} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$$

$$T = \frac{I_T}{I_i} = \frac{\varepsilon_2 v_2 E_T^2}{\varepsilon_1 v_1 E_I^2} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \frac{4 n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} =$$

$$T = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Então: $R + T = 1 \quad \left(\frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1+n_2)^2} + \frac{4 n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2} \right) = 1$

Exemplo:

$\begin{cases} \text{ar}: & n_1 \sim 1 \\ \text{vidro}: & n_2 = 1{,}5 \end{cases}$

$$R = \frac{(0{,}5)^2}{(2{,}5)^2} = \frac{0{,}25}{(2{,}5)^2} = 4\,\%$$

$$T = \frac{4 \cdot 1{,}5}{(2{,}5)^2} = 96\,\%$$

Observação: Qual R e T se $\mu_1 \neq \mu_2$? [(*) página 13]

$$R = \left(\frac{E_{0R}}{E_{0i}} \right)^2 = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 \quad \left(\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \right)$$

$$T = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_T}{E_i} \right)^2 = \beta \left(\frac{2}{1+\beta} \right)^2$$

$$T + R = \frac{(1-\beta)^2 + 4\beta}{(1+\beta)^2} = 1$$

[Nota: $\frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{v_1}{v_2}$]

$$\left(\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \right)$$

Problema : Prove que a polarização das ondas Refletida e transmitida é a mesma da incidente

Prova :

$$\hat{n}_T = \cos\theta_T\,\hat{x} + \sin\theta_T\,\hat{y}$$

$$\hat{n}_R = \cos\theta_R\,\hat{x} + \sin\theta_R\,\hat{y}$$

campo elet. $\quad E_{0i}\,\hat{x} + E_{0R}\,\hat{n}_R = E_{0T}\,\hat{n}_T$

campo mag. $\quad E_0\,\hat{y} - E_{0R}\,(\hat{z}\wedge\hat{n}_R) = \beta\,E_{0T}\,(\hat{z}\wedge\hat{n}_T)$

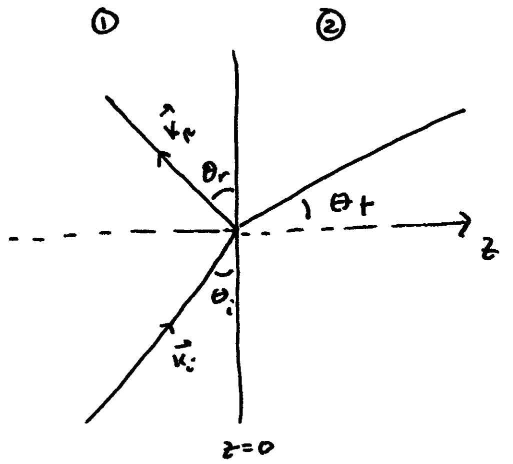
$$\begin{cases} E_{0R}\sin\theta_R = E_{0T}\sin\theta_T & \text{y-comp.} \quad \text{campo elet.} \\ E_{0R}\sin\theta_R = -\beta\,E_{0T}\sin\theta_T & (\text{x com}) \quad \text{comp mag.} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\ \sin\theta_R = \sin\theta_T = 0\ \right]$$

(c.q.d)

Reflectividade para incidência oblíqua



$$\tilde{\vec{E}}_i = \tilde{\vec{E}}_{0i}\, e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\tilde{\vec{B}}_i = \frac{1}{v_1}\left(\hat{k}_i \wedge \tilde{\vec{E}}_i\right)$$

$$\tilde{\vec{E}}_r = \tilde{\vec{E}}_{0r}\, e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\tilde{\vec{B}}_r = \frac{1}{v_1}\left(\hat{k}_r \wedge \tilde{\vec{E}}_R\right)$$

$$\tilde{\vec{E}}_T = \tilde{\vec{E}}_{0T}\, e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad ; \quad \vec{B}_T = \frac{1}{v_2}\left(\hat{k}_T \wedge \tilde{\vec{E}}_T\right)$$

$$v_i = \frac{\omega}{k_i} \Rightarrow v_1 k_i = k_r v_1 = k_T v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T = k_i = k_r \qquad \text{(dado que } \omega = \text{const.)}$$

Os campos eléctricos e magnéticos devem respeitar as eq. de fronteira impostas pelas equações de Maxwell para a fronteira entre os dois meios.

Para $z=0 \Rightarrow \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\;)_i^{*}\, e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + (\;)_R^{*}\, e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\;)_T^{*}\, e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

(*) componentes // ou $\perp$ à superfície, dependendo das cond. Mas a dependência espacial (para $z=0$) está contida nos argumentos dos exponenciais.

Como as condições de fronteira devem ser respeitadas $\forall \vec{r}$ no plano $z=0$, então:

$$\vec{K}_i \cdot \vec{r} = \vec{K}_R \cdot \vec{r} = \vec{K}_T \cdot \vec{r} \qquad (z=0)$$

$$\Rightarrow \quad K_i^x x = K_R^x x = K_T^x x \qquad (\text{if } y=0)$$

$$K_i^y y = K_R^y y = K_T^y y \qquad (\text{if } x=0)$$

Escolhamos os eixos $\hat{x}, \hat{y}$ de tal forma que $\vec{K}_i$ só tem componentes segundo $\hat{x}$ e $\hat{z}$; então também $\vec{K}_r$ e $\vec{K}_t$ só têm componentes segundo $\hat{x}$, e $\hat{z}$:

Os vectores $\vec{K}_i$, $\vec{K}_r$ e $\vec{K}_T$ definem um plano (de incidência)
Este plano inclui a normal à superfície

$$(K_i)_x = (K_r)_x = (K_T)_x \Rightarrow K_i \sin\theta_i = K_r \sin\theta_r = K_T \sin\theta_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_i = \theta_R \\ \\ \dfrac{\sin\theta_T}{\sin\theta_i} = \dfrac{n_1}{n_2} \qquad (\text{Snell}) \end{cases}$$

Estas leis decorrem das existência de condições de fronteira <u>mas não dependem</u> dos detalhes destas condições. Vejamos agora as consequências das condições precisas que as equações de Maxwell impõe:

Vejamos o que impõe as condições de fronteira específicas:

i) $\varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp} \Rightarrow \varepsilon_1 \left[\tilde{\vec{E}}_{0i} + \tilde{\vec{E}}_{0t} \right]_z = \varepsilon_2 \left(\tilde{\vec{E}}_{0T} \right)_z$

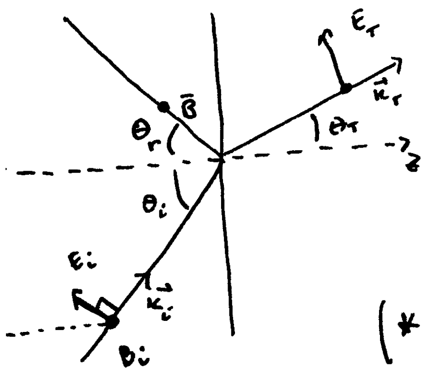
ii) $B_1^{\perp} = B_2^{\perp} \Rightarrow \left[\tilde{\vec{B}}_{0i} + \tilde{\vec{B}}_{0r} \right]_z = \left(\tilde{\vec{B}}_{0T} \right)_z$

iii) $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \Rightarrow \left[\tilde{\vec{E}}_{0i} + \tilde{\vec{E}}_{0R} \right]_{x,y} = \left(\tilde{\vec{E}}_{0T} \right)_{x,y}$

iv) $\frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel} \Rightarrow \frac{1}{\mu_1} \left(\tilde{\vec{B}}_{0i} + \tilde{\vec{B}}_{0R} \right)_{xy} = \frac{1}{\mu_2} \left(\tilde{\vec{B}}_{0T} \right)_{xy}$

$\left(\tilde{\vec{B}}_0 = \frac{1}{v} \hat{k} \wedge \tilde{\vec{E}}_0 \right)$

(a) Onda incidente polarizada paralelamente ao plano de incidência



(*) i) $\Rightarrow \varepsilon_1 \left(-\tilde{E}_{0i} \sin\theta_i + \tilde{E}_{0r} \sin\theta_r \right) =$

$= \varepsilon_2 \left(-\tilde{E}_{0T} \sin\theta_T \right)$

ii) irrelevant ($B^{\perp} = 0$)

(**) iii) $\tilde{E}_{0I} \cos\theta_i + \tilde{E}_{0R} \cos\theta_R = \tilde{E}_{0T} \cos\theta_T$

(**) iv) $\frac{1}{\mu_1 v_1} \left(\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0R} \right) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0T}$

(*) e (**) + $\theta_i = \theta_r$ e $\sin\theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_I \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0R} = \beta \tilde{E}_{0T}} \quad \left(\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \right)$

$$(***) \Rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \underbrace{\frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_i}}_{\alpha} \cdot \tilde{E}_{0T}'}$$

Resolvendo estas duas equações obtemos:

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\,\tilde{E}_{0I} \quad ; \quad \tilde{E}_T = \frac{2}{\alpha+\beta}\,\tilde{E}_{0i}$$

Com:

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta_T}}{\cos\theta_i} = \frac{\sqrt{1-\left[\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right]^2}}{\cos\theta_i}$$

$$\beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

<u>Observação</u>: • $\theta_i = 0$ (incidência normal) $\Rightarrow \alpha = 1$

(obtemos o resultado anterior)

• $\theta_i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \to \infty \Rightarrow E_T \to 0$

(a onda é totalmente reflectida)

• $\alpha = \beta \Rightarrow \tilde{E}_{0R} \equiv 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-\left[\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_B\right]^2}}{\cos\theta_B} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

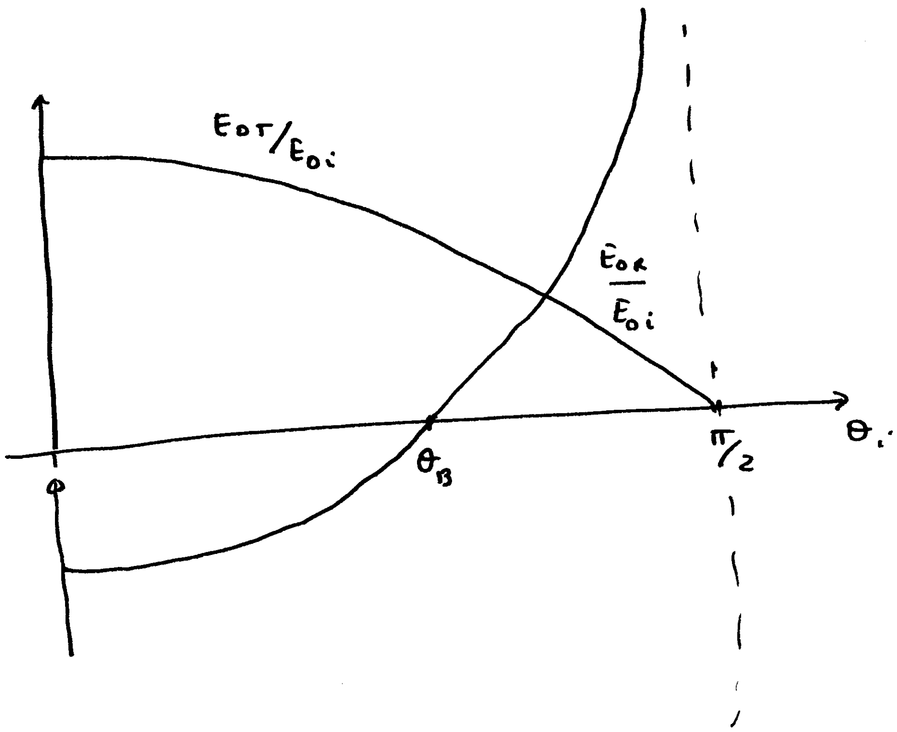
$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_B = \left(\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\right)^2 \cos^2\theta_B = \beta^2 \cos^2\theta_B$$

$$= \beta^2\left[1-\sin^2\theta_B\right]$$

$$-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2\theta_B + \beta^2 \sin^2\theta_B = \beta^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\beta^2 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\right) \sin^2\theta_B = \beta^2 - 1$$

$$\sin^2\theta_B = \frac{1-\beta^2}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - \beta^2} \quad \text{(angulo de Brewster)}$$



Observação: se $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \Rightarrow \beta \sim \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \sin^2\theta_B = \frac{1-\beta^2}{\frac{1}{\beta^2} - \beta^2} =$

$$= \frac{\beta^2 - \beta^4}{1-\beta^4} = \frac{\beta^2(1-\beta^2)}{(1+\beta^2)(1-\beta^2)} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta_B \sim \frac{m_2}{m_1}$$

A potencia por unidade de área na fronteira é $\vec{S}\cdot\hat{z}$ $\Rightarrow$

$$I_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 v_1 E_{0i}^2 \cos\theta_I$$

$$I_r = \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 v_1 E_{0R}^2 \cos\theta_R$$

$$I_T = \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 v_2 E_{0T}^2 \cos\theta_T$$

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0R}}{E_{0I}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1}\left(\frac{E_{0T}}{E_{0i}}\right)^2 \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_i} = \alpha\beta\left(\frac{2}{\alpha+\beta}\right)^2$$

(b) O. Incidente polarizado perpendicularmente ao plano de incidência

$$\tilde{\vec{E}}_i = \tilde{E}_{0i}\,\hat{y}\,e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad \tilde{\vec{B}}_i = \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0i}\,e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t)}(-\cos\theta_i\,\hat{x}+\sin\theta_i\,\hat{z})$$

$$\tilde{\vec{E}}_R = \tilde{E}_{0R}\,\hat{y}\,e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad \tilde{\vec{B}}_R = \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0R}\,e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega t)}(\cos\theta_R\,\hat{x}+\sin\theta_R\,\hat{z})$$

$$\tilde{\vec{E}}_T = \tilde{E}_{0T}\,\hat{y}\,e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad \tilde{\vec{B}}_T = \frac{\tilde{E}_{0T}}{v_2}\,e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}(-\cos\theta_T\,\hat{x}+\sin\theta_T\,\hat{z})$$

$$\Downarrow$$

• $B_1^\perp = B_2^\perp \Rightarrow \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0I}\sin\theta_i + \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0R}\sin\theta_i = \frac{1}{v_2}\tilde{E}_{0T}\sin\theta_T \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T}\left(\frac{v_1\sin\theta_T}{v_2\sin\theta_i}\right)}$$

- $E_1'' = E_2'' \Rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T}}$

- $\frac{1}{\mu_1} B_1'' = \frac{1}{\mu_2} B_2'' \Rightarrow \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0i}(-\cos\theta_i) + \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0R}\cos\theta_i\right] =$

$$= \frac{1}{\mu_2}\frac{1}{v_2}\tilde{E}_{0T}(-\cos\theta_T)$$

Definindo: $\alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_i}$; $\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$

obtemos:

$$\tilde{E}_{0T} = \frac{2}{1+\alpha\beta}\tilde{E}_{0I}$$

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\tilde{E}_{0I}$$

Nota: $\alpha\beta = \beta\frac{\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_i}{\beta^2}}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{\beta^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i}$

$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \simeq \frac{n_2}{n_1}$; se $>1 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i}$

Ângulo Brewster? Se sim $\Rightarrow \alpha\beta \equiv 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i} = \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1} \Rightarrow 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\sin^2\theta_i =$

$$= \left(\frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1}\right)^2\cos^2\theta_i \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\sin^2\theta_i + \left(\frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1}\right)^2\cos^2\theta_i \Rightarrow \boxed{\frac{v_2}{v_1} = 1 \quad \mu_1 = \mu_2} \Rightarrow$ no reflection

Absorpção por cargas livres (meio homogéneo e isotrópico)

$$\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$$

ρ_f = densidade volúmica de carga

As equações de Maxwell escrevem-se:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon} \qquad \nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \wedge \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \varepsilon \dot{\vec{E}}$$

Conservação local de carga:

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

$$\sigma (\nabla \cdot \vec{E}) = \sigma \frac{\rho_f}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_f(t) = \rho_f(0)\, e^{-\sigma/\varepsilon\, t}$$

Um meio condutor dissipa qualquer concentração volúmica de carga num tempo $\tau \sim \frac{\varepsilon}{\sigma}$

Para frequências relativamente baixas e boa condutividade

$\tau << T$ (período da onda) $\Rightarrow \langle \rho_f \rangle_T \simeq 0$

Nestas condições:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Vejamos estas:

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} = -\nabla \wedge \dot{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu \sigma \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

$$\begin{cases} +\nabla^2 \vec{E} = \mu \sigma \dot{\vec{E}} + \mu \varepsilon \ddot{\vec{E}} \\ \nabla^2 \vec{B} = \mu \sigma \dot{\vec{B}} + \mu \varepsilon \ddot{\vec{B}} \end{cases}$$ (de forma análoga)

Procurando soluções do tipo onda plana:

$$\tilde{\vec{E}}_0 (z, t) = \tilde{\vec{E}}_0 \, e^{i(\tilde{k} z - \omega t)}$$

$$\tilde{\vec{B}} (z, t) = \tilde{\vec{B}}_0 \, e^{i(\tilde{k} z - \omega t)}$$

obtemos, substituindo:

$$-\tilde{k}^2 = -\mu \sigma i \omega - \mu \varepsilon \omega^2 \Rightarrow \tilde{k} = \sqrt{\mu \varepsilon \omega^2 + i \omega \mu \sigma} =$$

$$= k + i \eta$$ (o número de onda é agora complexo)

$$\begin{cases} k = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} \\ \eta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \end{cases}$$

As soluções são agora:

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 \, e^{-\eta z} \, e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\tilde{\vec{B}} = \tilde{\vec{B}}_0 \, e^{-\eta z} \, e^{i(kz - \omega t)}$$

[Comprimento de penetração da radiação no metal (d):

$$e^{-\eta d} = \frac{1}{e} \Rightarrow \eta d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{\eta} \;]$$

A parte real (k) determina λ, ν e n como antes.

<u>Restrições adicionais impostas pelas equações de Maxwell:</u>

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \tilde{\vec{K}} \cdot \tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{\vec{K}} \cdot \tilde{\vec{B}}_0 = 0$$

as ondas são transversais, como antes.

Consideremos por simplicidade que:

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_0 \, \hat{x} \, e^{-\eta z} \, e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow i\left(\tilde{\vec{K}} \wedge \tilde{\vec{E}}_0\right) = -i\omega \vec{B}_0$$

$$\tilde{K} \tilde{E}_0 (\hat{z} \wedge \hat{x}) = \omega \tilde{B}_0 \qquad B \parallel \hat{y}$$

$$\bar{B}_0 = \frac{\tilde{K}}{\omega} \bar{E}_0$$

Qual é então a restrição sobre as amplitudes de E e B?

$$\tilde{K} = K e^{i\phi}$$

$$K = \sqrt{k^2 + \eta^2} = \omega \sqrt{\varepsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{k}\right)$$

$$\frac{\tilde{B}_0}{\tilde{E}_0} = \frac{\tilde{K}}{\omega}$$

$$\tilde{B}_0 = \frac{K}{\omega} e^{i\phi} \tilde{E}_0 \Rightarrow B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K}{\omega} e^{i\phi} E_0 e^{i\delta_E}$$

$$\boxed{\delta_B = \delta_E + \phi}$$

Os campos eléctrico e magnético não oscilam agora em fase: o campo magnético tem um atraso de fase.

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}$$

Em conclusão:

$$\begin{cases} \vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\eta z} \hat{x} \cos[kz - \omega t + \delta_E] \\ \vec{B}(z,t) = E_0 \sqrt{\varepsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}} e^{-\eta z} \hat{y} \cos[kz - \omega t + \delta_E + \phi] \end{cases}$$

Problema 9.18 (Griffiths)

1. cargas electricas no vidro ; a densidade volumica de carga decai com tempos característicos:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$n \sim 1{,}5 \text{ (vidro)} \Rightarrow \varepsilon_2 \sim n^2 \simeq (1{,}5)^2$$

$$\varepsilon = 8{,}85 \times 10^{-12} (1{,}5)^2 \sim 2 \times 10^{-11} \frac{C^2}{N m^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \sim 10^{-12} \Omega \cdot m \Rightarrow \tau \sim 20 s \quad !$$

2. filme de Ag para blindar radiacao a 10^{10} Hz:

$$\rho = 1{,}59 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$$

$$\varepsilon \sim \varepsilon_0 \quad (10^{10} \text{ Hz})$$

$$\eta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \sim$$

$$\sim \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} = \sqrt{\frac{\cancel{\varepsilon}\sigma\mu\omega}{2\cancel{\varepsilon}}}$$

$$d \sim \eta^{-1} \sim \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \sim 6 \times 10^{-4} \text{ mm} \quad !!!$$

3. Comprimento de onda de radio frequencia (1 MHz) no cobre e velocidade de propagação:

$$\sigma = 6 \times 10^7 \gg \omega \varepsilon_0$$

$$k = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} \sim$$

$$\sim \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} \sim 0,4 \text{ mm}.$$

$$v = \frac{\omega}{2\pi}\lambda = \lambda\nu = 4 \times 10^{-4} \cdot 10^6 \sim 400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \ !!$$

(no vazio $c = 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$!!)

Problema: Mostre que num bom condutor o campo magnético tem um atraso de fase de 45° relativamente ao campo eléctrico

$$\sigma \gg 1 \Rightarrow \eta \sim k \sim \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \Rightarrow \frac{\eta}{k} = 1 \text{ e}$$

$$\operatorname{arctg} \phi = 1$$

Razão das amplitudes:

$$\frac{B_0}{E_0} \sim \sqrt{\varepsilon\mu \sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}} \sim \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\omega}}$$