Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

Cap 1. Matrizes

Maria Antónia Forjaz

1. Matrizes

Alice: *Where shall I begin please your Majesty?*
King: *Begin at the beginning;*
and go on till you come to the end: then stop.

- álgebra - a palavra talvez tenha surgido pela 1ª vez no tratado *Al-Jabr wa-al-Muqabilah* (*o livro sumário sobre cálculos por transposição*), escrito por Al-Khwarizmi, matemático de origem árabe, nascido na Pérsia, por volta de 800 D.C.em Khwarizmi, actualmente no Uzbequistão.
- *Al-jabr* - a palavra da qual deriva álgebra, significa *reunião*, *conexão* (*a reunião de partes quebradas*).
- A história da álgebra linear tem talvez origem no século XVIII com o estudo detalhado de sistemas de equações lineares e dos determinantes por Leibniz (alemão, 1646-1716) e Cramer (suíço, 1704-1752).

Álgebra é o ramo da matemática que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética. Hoje em dia o termo é bastante abrangente podendo referir-se a várias áreas da matemática.

Álgebra linear é um ramo da matemática, que surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares, sejam elas algébricas ou diferenciais.

A álgebra linear utiliza conceitos e estruturas fundamentais da matemática como matrizes, sistemas de equações lineares, vectores, espaços vectoriais, aplicações lineares.

Origem:Wikipédia

expressão algébrica, estruturas algébricas, notação algébrica, sistema algébrico computacional, ...

Exemplo: Suponhamos que em 3 grandes superfícies se podem adquirir 4 tipos de computadores. Uma forma simples de representar os preços de tipo de computador em cada estabelecimento seria através de uma tabela de dupla entrada.

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	350	445	1399	1132
S_2	323	515	1645	295
S_3	315	395	1240	875

Na posição (2,3) da tabela (2ª linha, 3ª coluna) encontra-se o preço no estabelecimento S_2 do computador tipo C_3.

Quanto custam 2 computadores C_1, 3 de C_2, 1 de C_3, e 4 de C_4, no supermercado S_1? E no S_2? E no S_3?

Quanto custam 2 computadores C_1, 3 de C_2, 1 de C_3, e 4 de C_4, no supermercado S_1?

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	350	445	1399	1132
S_2	323	515	1645	295
S_3	315	395	1240	875

$$\begin{pmatrix} 350 & 445 & 1399 & 1132 \\ 323 & 515 & 1645 & 295 \\ 315 & 395 & 1240 & 875 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 350 & 445 & 1399 & 1132 \\ 323 & 515 & 1645 & 295 \\ 315 & 395 & 1240 & 875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 350 \times 2 + 445 \times 3 + 1399 \times 1 + 1132 \times 4 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7962 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Definição

- Uma matriz é um quadro de números dispostos em m linhas e n colunas.
- Os $m \times n$ elementos contidos na matriz são chamados elementos da matriz e representam-se entre parênteses curvos ou retos.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Definição

- Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se de ordem m por n e escreve $m \times n$.
- Uma matriz diz-se real (complexa) se todos os seus elementos são números reais (complexos).
- O conjunto de todas as matrizes reais (complexas) de ordem $m \times n$ denota-se por $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$).

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz A é uma matriz real de ordem 4×3, i.e. $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$.

Genericamente, uma matriz A de ordem $m \times n$ pode escrever-se como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou abreviadamente $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou ainda (dependendo do contexto) $A = (a_{ij})$.
O elemento a_{ij} está na posição (linha i, coluna j) da matriz A.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

com $a_{12} = 8$ e $a_{33} = 1$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 & 0 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i & 1+\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 & -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 & -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 & -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Qual a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 4}$ tal que $a_{ij} = i + j$?

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

- Se $m = n$, A diz-se uma matriz quadrada.
- Se $m \neq n$, A diz-se uma matriz retangular.
- Se $m = 1$, A diz-se uma matriz linha.
- Se $n = 1$, A diz-se uma matriz coluna.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 4/7 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

A é uma matriz retangular de ordem 2×4, B é uma matriz quadrada de ordem 2×2 (ou simplesmente de ordem 2) e x é uma matriz linha.

As matrizes linha ou coluna, são usualmente representadas por letras minúsculas e os seus elementos são identificados usando apenas um índice.

Definição

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n.

Os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A.

Os elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ formam a diagonal secundária de A.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 10 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

diagonal principal diagonal secundária

Definição

Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se matriz nula. A matriz nula de ordem $m \times n$ é representada por $O_{m\times n}$ ou simplesmente por O.

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Definição

À matriz diagonal de ordem n cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1 chama-se matriz identidade de ordem n, e representa-se por I_n ou simplesmente por I.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição

Uma matriz quadrada $A = (A_{ij})$ diz-se:

- diagonal se todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, i.e. $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
- triangular superior se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, i.e. $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
- triangular inferior se todos os elementos acima da diagonal principal são iguais nulos $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular inferior,

$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/2 & 3 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular superior.

Definição

Uma matriz quadrada $A = (A_{ij})$ diz-se:

- diagonal se todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, i.e. $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
- triangular superior se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, i.e. $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
- triangular inferior se todos os elementos acima da diagonal principal são iguais nulos $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular inferior,

$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/2 & 3 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular superior.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz banda de largura de banda $2k+1$ se,

$$|i-j| > k, a_{ij} = 0$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se matriz tridiagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz tridiagonal ($k = 1$).

Definição

Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição

Uma matriz diz-se dispersa se a maior parte dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz banda de largura de banda $2k+1$ se,

$$|i-j| > k, a_{ij} = 0$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se matriz tridiagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz tridiagonal ($k = 1$).

Definição

Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição

Uma matriz diz-se dispersa se a maior parte dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz banda de largura de banda $2k+1$ se,

$$|i-j| > k, a_{ij} = 0$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se matriz tridiagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz tridiagonal ($k = 1$).

Definição

Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição

Uma matriz diz-se dispersa se a maior parte dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz banda de largura de banda $2k+1$ se,

$$|i-j| > k, a_{ij} = 0$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se matriz tridiagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz tridiagonal $(k = 1)$.

Definição

Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição

Uma matriz diz-se dispersa se a maior parte dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.
O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.
O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

pode efectuar-se o fraccionamento:

$A = \begin{pmatrix} B & I_2 \\ I_2 & B \end{pmatrix}$

com $B = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (bij)$ duas matrizes da mesma ordem.
Diz-se que A é igual a B, escreve-se $A = B$ se e só se $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo

Sejam $X = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 0 \\ 0 & 0.8 & 3/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & b & 0 \\ a & 0.8 & c \end{pmatrix}$

a=?,
b=?,
c=?

Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (bij)$ duas matrizes da mesma ordem.
Diz-se que A é igual a B, escreve-se $A = B$ se e só se $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo

Sejam $X = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 0 \\ 0 & 0.8 & 3/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & b & 0 \\ a & 0.8 & c \end{pmatrix}$

a=?,
b=?,
c=?

Operações com matrizes

$$A + B = ? \quad A - B = ? \quad \alpha A = ? \quad A.B = ?$$

Soma de matrizes

Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes da mesma ordem $m \times n$.
A soma de A e B é uma matriz $C = (c_{ij})$ cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

escrevendo-se $C = A + B$.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ então
$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

A adição de matrizes só está definida para **matrizes da mesma ordem.**

Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes da mesma ordem $m \times n$. $A - B$ significa $A + (-B)$ sendo $-B = (-b_{ij})$.

Exemplo

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

tem-se $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriedades da adição de matrizes

Teorema
Sejam A, B e C matrizes da mesma ordem $m \times n$.
Então:

(i) $A + B = B + A$ — Comutatividade

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ — Associatividade

(iii) $A + O = O + A = A$ — Elemento neutro

(iv) $A + (-A) = O$ — Elemento simétrico

Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

$\rightarrow$ A associatividade da adição permite-nos escrever $A + B + C$, sem qualquer ambiguidade.

Multiplicação escalar

Definição

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e α um número (escalar; $\alpha \in \mathbb{R}$).

O produto de α por A é a matriz $C = (c_{ij})$ cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

e escreve-se

$$C = \alpha A.$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad -2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação escalar

Teorema

Sejam A e B matrizes da mesma ordem $m \times n$ e, α e β escalares. Então:

(i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ — Associatividade mista

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ — Distribuição - adição escalares

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ — Distribuição - adição matrizes

(iv) $1\ A = A$ — Elemento identidade

(v) $0\ A = O_{m \times n}$ — Elemento absorvente

Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

Multiplicação de matrizes

...um ideia engraçada!

A ideia da multiplicação de matrizes pretende dar significado à notação, simples e abreviada de se escrever

$$Ax = b$$

para representar um sistema de m equações a n incógnitas.

Considerando o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + 4x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 7 \end{cases}$$

e usando matrizes escrevemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

sendo então o produto Ax definido por

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

...um ideia engraçada!

A ideia da multiplicação de matrizes pretende dar significado à notação, simples e abreviada de se escrever

$$Ax = b$$

para representar um sistema de m equações a n incógnitas.

Considerando o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 4x_2 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 7 \end{cases}$$

e usando matrizes escrevemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

sendo então o produto Ax definido por

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

...um ideia engraçada!

A ideia da multiplicação de matrizes pretende dar significado à notação, simples e abreviada de se escrever

$$Ax = b$$

para representar um sistema de m equações a n incógnitas.

Considerando o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 4x_2 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 7 \end{cases}$$

e usando matrizes escrevemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

sendo então o produto Ax definido por

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

outro exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

tem-se $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 \\ -1 \times 2 + 0 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

e $Ay = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 1 \times 5 \\ -1 \times 4 + 0 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

Considerando $B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \;\; x \quad\;\; y \end{array}$

podemos escrever

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 & 1 \times 4 + 1 \times 5 \\ -1 \times 2 + 0 \times 3 & -1 \times 4 + 0 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}$$

outro exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

tem-se $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 \\ -1 \times 2 + 0 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

e $Ay = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 1 \times 5 \\ -1 \times 4 + 0 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

Considerando $B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} x & y \end{array} \end{array}$

podemos escrever

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 & 1 \times 4 + 1 \times 5 \\ -1 \times 2 + 0 \times 3 & -1 \times 4 + 0 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}$$

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Então $AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 5 & 1 \times 2 + 2 \times 6 & 1 \times 3 + 2 \times 7 \\ -1 \times 1 + 1 \times 5 & -1 \times 2 + 1 \times 6 & -1 \times 3 + 1 \times 7 \\ 0 \times 1 - 1 \times 5 & 0 \times 2 - 1 \times 6 & 0 \times 3 - 1 \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 14 & 17 \\ 4 & 4 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{pmatrix}}_{3 \times 3}$$

e, no caso geral...

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{il} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots & \\ \dots & b_{2j} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{lj} & \dots & \end{pmatrix} \\
\text{linha } i & \text{coluna } j
\end{array}$$

na posição ij: $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$

Definição

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times l$ e $B = (bij)$ uma matriz de ordem $l \times n$. O produto de A por B é uma matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$$

e escreve-se $C = AB$.

e, no caso geral...

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{il} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots & \\ \dots & b_{2j} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{lj} & \dots & \end{pmatrix}$$

linha i coluna j

na posição ij: $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$

Definição

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times l$ e $B = (bij)$ uma matriz de ordem $l \times n$. O produto de A por B é uma matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$$

e escreve-se $C = AB$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes e α um número real. Então, se todas as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i)	$(AB)C = A(BC)$	Associatividade
(ii)	$A(B+C) = AB + AC$	Distribuitividade à direita
(iii)	$(A+B)C = AC + BC$	Distribuitividade à esquerda
(iv)	$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$	Associatividade mista
(v)	$A\,I = I\,A = A$	Elemento identidade
(vi)	$A\,O = O\,A = O$	Elemento absorvente

Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

$\rightarrow$ A multiplicação de matrizes não é comutativa.

Observação: a multiplicação de matrizes **não** goza da propriedade comutativa.

Se A é de ordem $m \times l$ e $B = (bij)$ é ordem $l \times n$ tem-se:

- o produto AB é definido e AB uma matriz de ordem $m \times n$,
- se $m = n$, BA está definido, mas é uma matriz ordem $l \times l$,
- no entanto, se $m = n = l$, em geral $AB \neq BA$.

Quando se tem $AB = BA$ diz-se que as matrizes A e B são comutáveis.

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ tem-se que

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC$ e $BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

donde se conclui:

- $AB \neq BA$,
- $AB = O$ e $A \neq O$ e e $B \neq O$,
- $A \neq O$ e $AB = AC$, com $B \neq C$.

Operação de Potenciação de matrizes

Definição

Define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n factores todos iguais à matriz A.

Escreve-se:

$$A^n = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{n}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A^2 =?, A^3 =?, \ldots A^n =?$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

será que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Operação de Potenciação de matrizes

Definição

Define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n factores todos iguais à matriz A.
Escreve-se:

$$A^n = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{n}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\quad A^2 = ?, A^3 = ?, \ldots A^n = ?$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

será que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Operação de Potenciação de matrizes

Definição

Define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n factores todos iguais à matriz A.

Escreve-se:

$$A^n = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{n}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\quad A^2 =?, A^3 =?, \ldots A^n =?$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

será que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Operação de Potenciação de matrizes

Definição

Define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n factores todos iguais à matriz A.

Escreve-se:

$$A^n = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{n}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A^2 =?, A^3 =?, \ldots A^n =?$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

será que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Matrizes simétricas e matrizes ortogonais

Definição

Dada uma matriz A, de ordem $m \times n$, a matriz cujas colunas são as linhas de A, pela ordem correspondente, diz-se a transposta de A e representa-se por A^T.

A matriz $B = A^T$ é uma matriz de ordem $n \times n$ e os seus elementos são dados por $b_{ij} = a_{ji}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$, e escreve-se $B = A^T$.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Definição Seja A uma matriz quadrada.

- A diz-se uma **matriz simétrica** se e só se $A^T = A$, i.e., $a_{ij} = a_{ji}$.
- A diz-se uma **matriz antisimétrica** se e só se $A^T = -A$, i.e., $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemplo

$$\underset{\text{simétria}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{não simétria}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{não antisimétria}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{antisimétria}}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}}$$

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz ortogonal se e só se $A^T A = AA^T = I_n$.

Exemplo:

Se $R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

uma vez que $R_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

então $RR_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} cos^2\alpha + sin^2\alpha & cos\alpha\ sin\alpha - sin\alpha\ cos\alpha \\ cos\alpha sin\ \alpha - sin\alpha\ cos\alpha & cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Do mesmo modo se verificava que $R_\alpha^T R = I_2$, podendo concluir-se que a matriz R é ortogonal.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz ortogonal se e só se $A^TA = AA^T = I_n$.

Exemplo:

Se $R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

uma vez que $R_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

então $RR_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} cos^2\alpha + sin^2\alpha & cos\alpha\ sin\alpha - sin\alpha\ cos\alpha \\ cos\alpha sin\ \alpha - sin\alpha\ cos\alpha & cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Do mesmo modo se verificava que $R_\alpha^T R = I_2$, podendo concluir-se que a matriz R é ortogonal.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz ortogonal se e só se $A^T A = AA^T = I_n$.

Exemplo:

Se $R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

uma vez que $R_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

então $RR_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} cos^2\alpha + sin^2\alpha & cos\alpha\, sin\alpha - sin\alpha\, cos\alpha \\ cos\alpha sin\,\alpha - sin\alpha\, cos\alpha & cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Do mesmo modo se verificava que $R_\alpha^T R = I_2$, podendo concluir-se que a matriz R é ortogonal.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz ortogonal se e só se $A^TA = AA^T = I_n$.

Exemplo:

Se $R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

uma vez que $R_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

então $RR_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} cos^2\alpha + sin^2\alpha & cos\alpha\ sin\alpha - sin\alpha\ cos\alpha \\ cos\alpha sin\ \alpha - sin\alpha\ cos\alpha & cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Do mesmo modo se verificava que $R_\alpha^T R = I_2$, podendo concluir-se que a matriz R é ortogonal.

Inversa de uma Matriz

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz X, de ordem n, tal que

$$XA = AX = I_n \tag{1}$$

diz-se que A é invertível, regular ou não singular.
Uma matriz X que verifique (1) chama-se inversa de A e representa-se por A^{-1}.

Exemplo:
Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ tem-se que $XA = AX = I_2$, donde $X = A^{-1}$ é a matriz inversa de A.

Inversa de uma Matriz

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz X, de ordem n, tal que

$$XA = AX = I_n \tag{1}$$

diz-se que A é invertível, regular ou não singular.
Uma matriz X que verifique (1) chama-se inversa de A e representa-se por A^{-1}.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ tem-se que $XA = AX = I_2$, donde $X = A^{-1}$ é a matriz inversa de A.

...nem todas as matrizes quadradas têm inversa

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

...nem todas as matrizes quadradas têm inversa

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

...nem todas as matrizes quadradas têm inversa

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

...nem todas as matrizes quadradas têm inversa

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.
Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal ($A^TA = AA^T = I_n$) então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal ($A^TA = AA^T = I_n$) então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^T A = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal ($A^TA = AA^T = I_n$) então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.