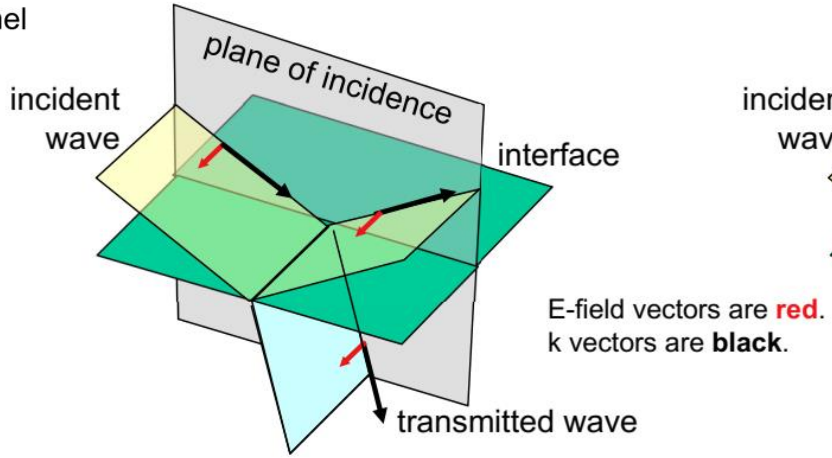
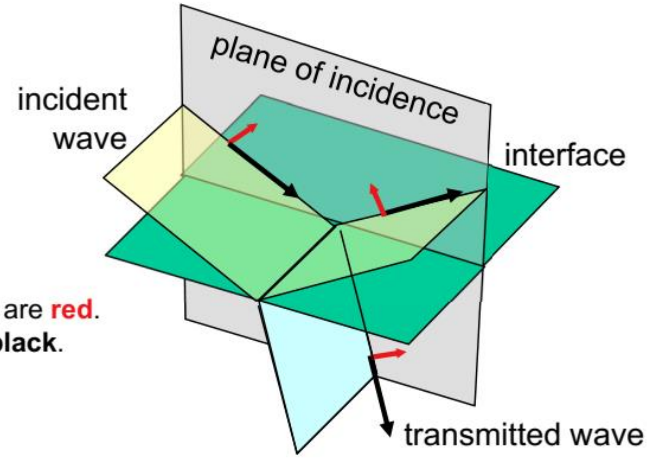
Reflexão e Transmissão: as equações de Fresnel

Augustin Fresnel
1788-1827

Condições de fronteira numa interface ótica

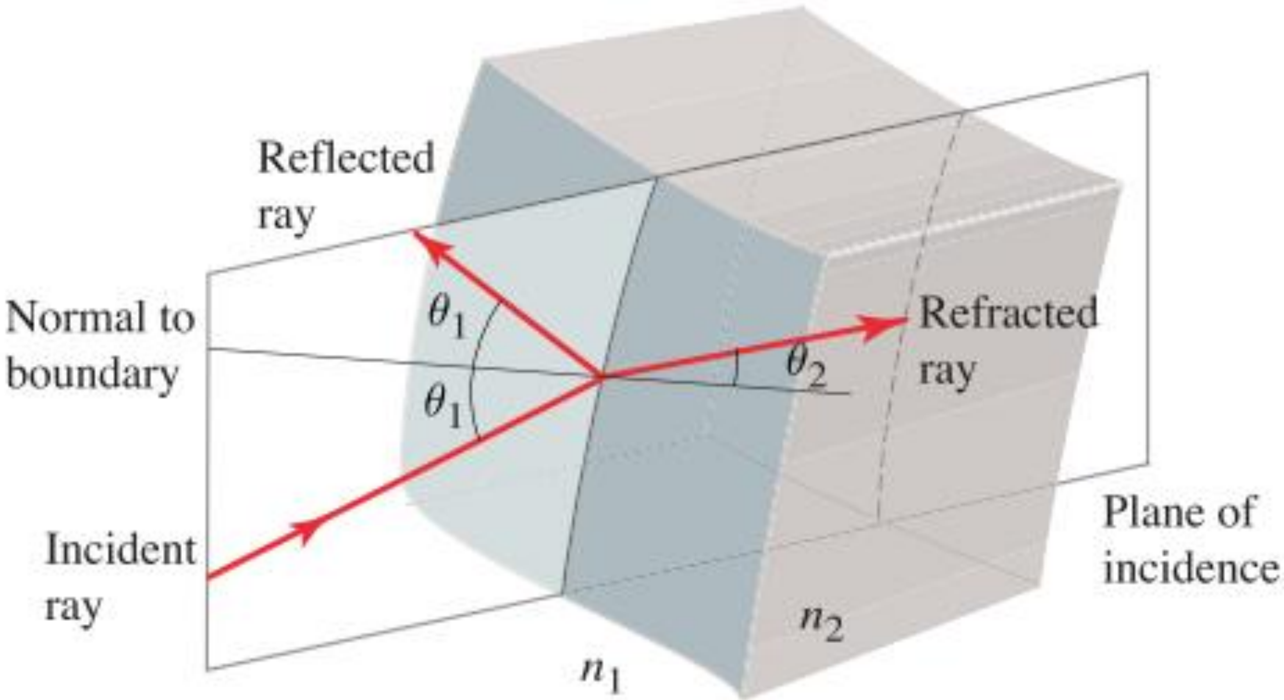
- Campos tangencias são contínuos





Hecht: 4.6-4.7

Plano de incidência



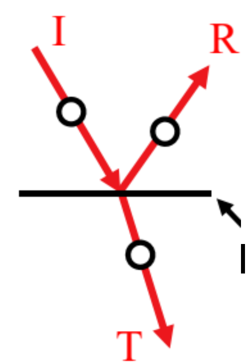
Plano de incidência: o plano geométrico definido pelos raios incidente e refletida

$$\mathbf{k}_{in} \text{ e } \mathbf{k}_{refl}$$

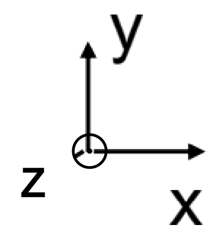
Polarização “s” e “p”

Pergunta chave: Em que direção aponta o campo elétrico?

Polarização “s” (TE)
O campo **E** “sai” do plano de incidência



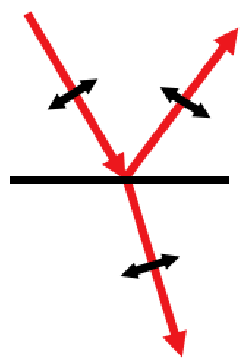
$\vec{\mathbf{E}} \parallel \hat{\mathbf{e}}_z$

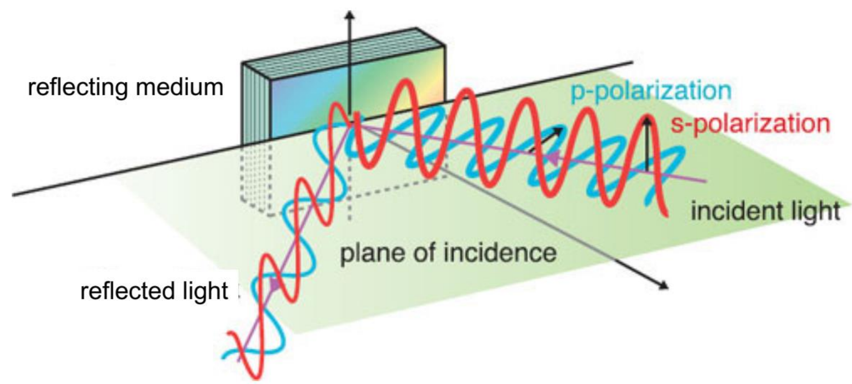


Plano de incidência (z=0)
(o plano do slide)

Interface no plano y=0

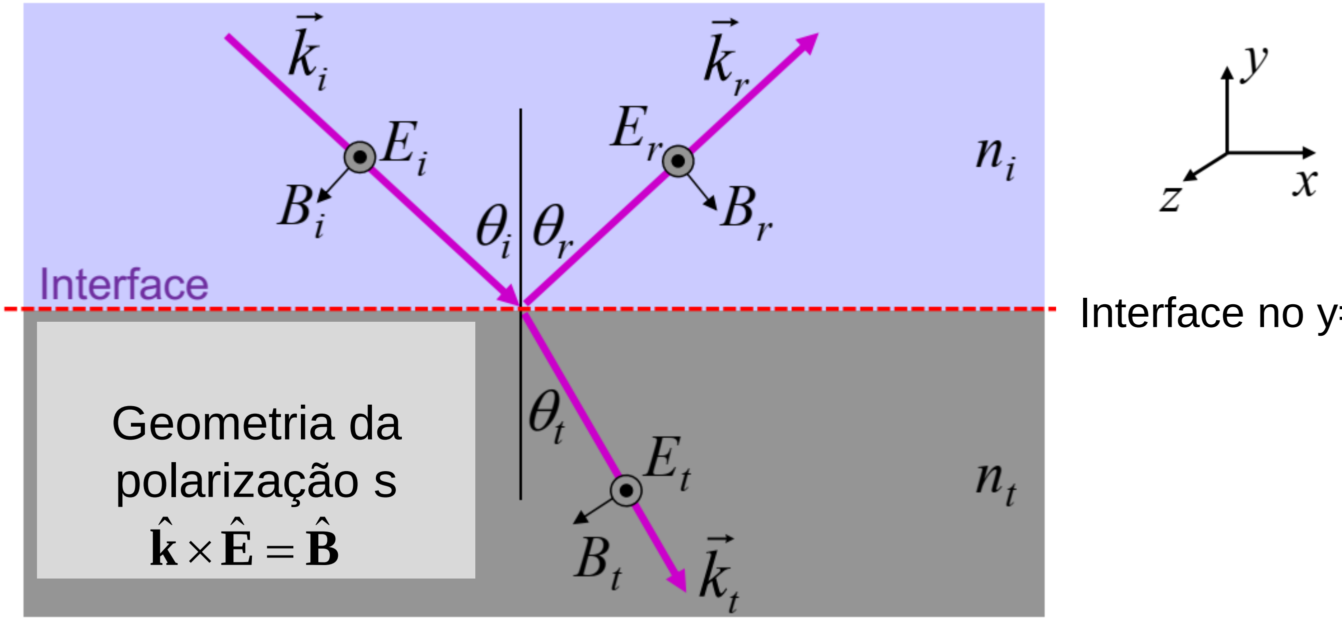
Polarização “p” (TM)
O campo **E** é “paralelo” ao plano de incidência





Caso da polarização "s" (TE)

Fresnel ~1820



Interface no y=0

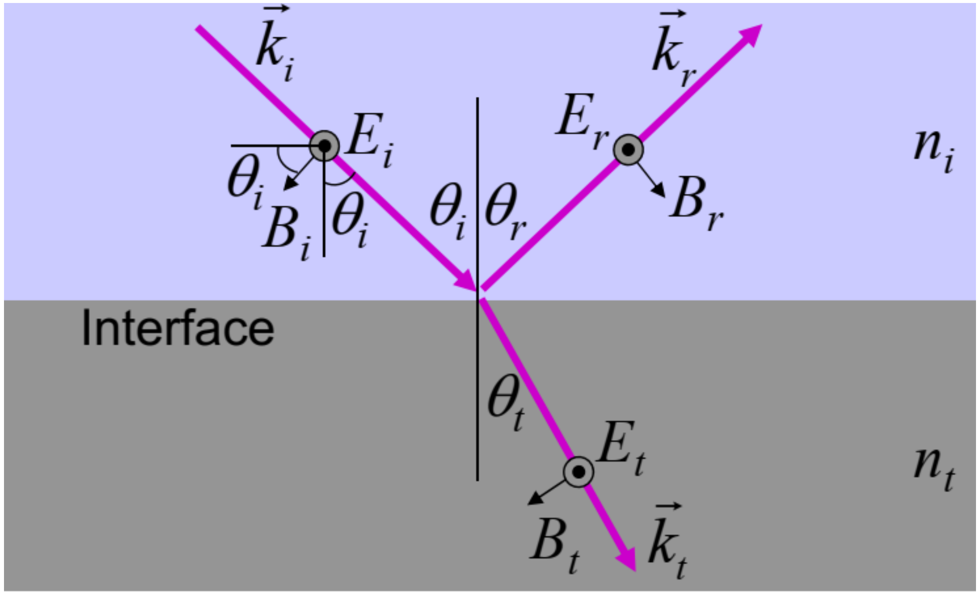
Condições de fronteira: Os campos tangencias á interface são contínuos

$$E_i\left(y=0\right)+E_r\left(y=0\right)=E_t\left(y=0\right)$$

Nota: não está indicada explicitamente a dependência nos coordenados x,z e t…

$$\exp\left[i\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t\right)\right]$$

Polarização “s” – condição no campo magnético



Condições de fronteira: Os campos tangencias á interface são contínuos

$$-B_i\left(y=0\right)\cos\theta_i + B_r\left(y=0\right)\cos\theta_r = -B_t\left(y=0\right)\cos\theta_t$$

Nota: a condição da continuidade é de fato no campo H, mas como $\mu_\iota = \mu_0$, $\mu_\iota = \mu_0$
$B = \mu_0 H$

Contas...

A relação entre os amplitudes complexas na interface para a polarização “ s” :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \qquad (1)$$

$$-B_{0i}\cos\theta_i + B_{0r}\cos\theta_r = -B_{0t}\cos\theta_t \qquad (2)$$

Lembrar que $E_0 = \frac{c}{n} B_0 \quad B_0 = nE_0 / c$ e $\theta_i = \theta_r$

(2) $n_i \left(E_{0r} - E_{0i}\right)\cos\theta_i = -n_t \boxed{E_{0t}} \cos\theta_t$

(1) $\boxed{E_{0i} + E_{0r}} = E_{0t}$

$$n_i \left(E_{0r} - E_{0i}\right)\cos\theta_i = -n_t \left(E_{0r} + E_{0i}\right)\cos\theta_t$$

$$E_{0r}\left[n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t\right] = E_{0i}\left[n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t\right]$$

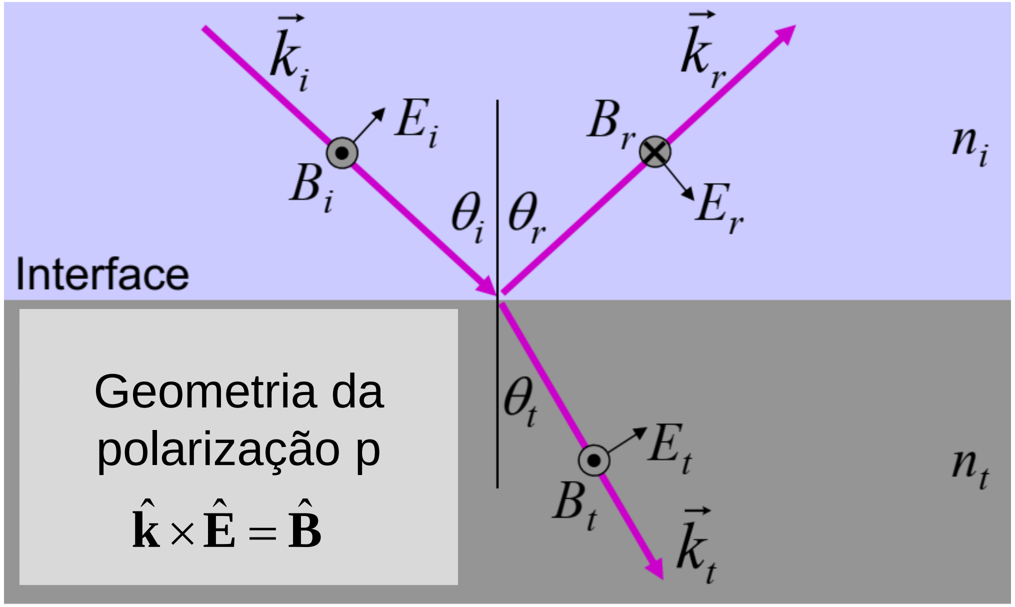
Coeficiente da reflexão

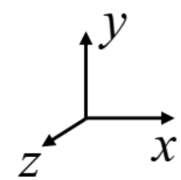
$$r_\perp = r_s \equiv \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$$

Contas análogas dão
o coeficiente da transmissão

$$t_\perp = t_s \equiv \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$$

Caso da polarização “p” (TM)





Interface no y=0

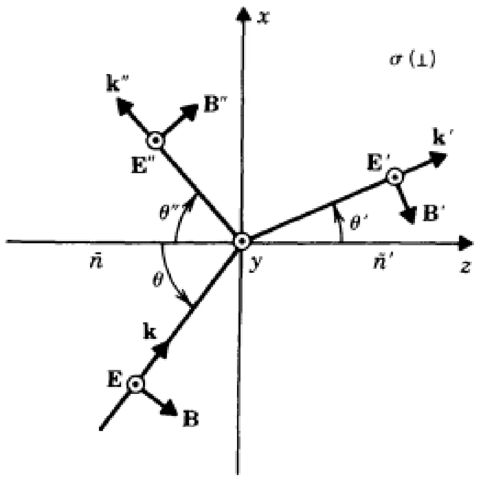
Nota técnica: Hecht usa uma notação diferente para o campo refletido. Esta (que é usado no livro “Fundamentals of Photonics de B Saleh e M Teich ou Physics of Light de J. Peatross e M.Ware é melhor. A diferença provoca diferenças de sinal na expressão para r_p

Condições de fronteira: Os campos tangencias á interface são contínuos

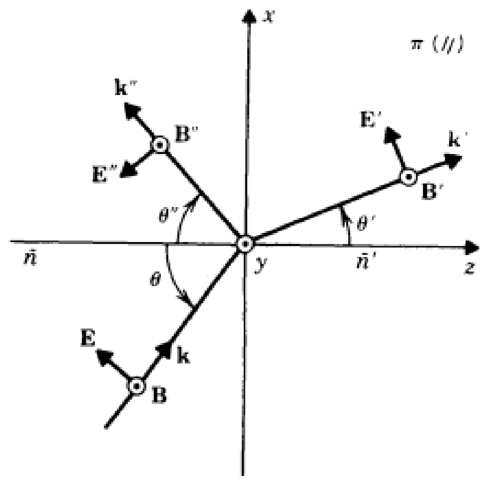
$$B_{0i} - B_{0r} = B_{0t}$$

$$E_{0i} \cos\theta_i + E_{0r} \cos\theta_r = E_{0t} \cos\theta_t$$

Convenção de Hecht (Born e Wolfe)



Polarização “s” ou ⊥



Polarização “p” ou ∥

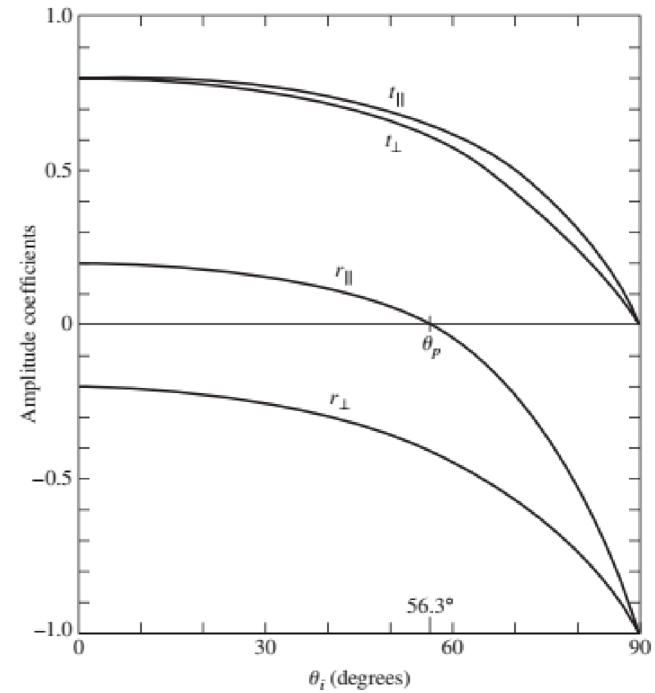
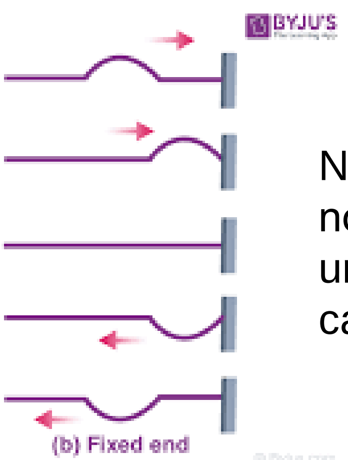


Figure 4.49 The amplitude coefficients of reflection and transmission as a function of incident angle. These correspond to external reflection $n_t > n_i$ at an air–glass interface ($n_{ti} = 1.5$).



Nesta convenção, no limite de incidência normal as polarizações “s” e “p” tem uma relação oposta de fase entre o campo E incidente e o campo E refletido.

Contas…

A relação entre os amplitudes complexas na interface para a polarização “ p” são:

$$B_{0i} - B_{0r} = B_{0t} \qquad (1)$$

$$E_{0i}\cos\theta_i + E_{0r}\cos\theta_r = E_{0t}\cos\theta_t \qquad (2)$$

Lembrar que $E_0 = \frac{c}{n} B_0 \quad B_0 = nE_0 / c$ e $\theta_i = \theta_r$

(1) $n_i\left(E_{0i} - E_{0r}\right) = n_t E_{0t}$

(2) $\left(E_{0i} + E_{0r}\right)\cos\theta_i = E_{0t}\cos\theta_t$

$\cos\theta_t\,(1) - n_t\,(2)$

$$n_i\left(E_{0r} - E_{0i}\right)\cos\theta_t = n_t\left(E_{0r} + E_{0i}\right)\cos\theta_t$$

$$E_{0r}\left[n_i\cos\theta_t - n_t\cos\theta_i\right] = E_{0i}\left[n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i\right]$$

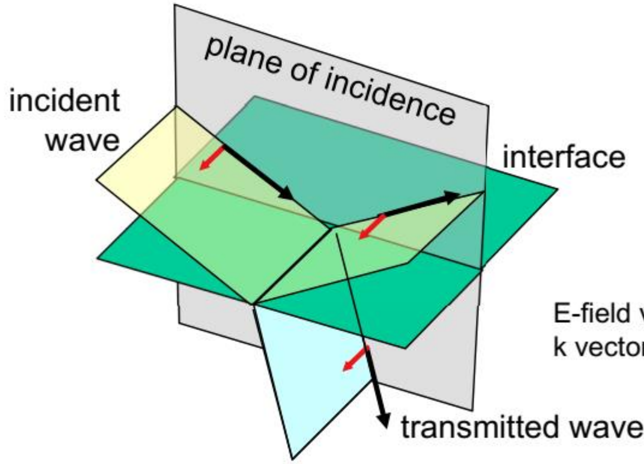
Coeficiente da reflexão

$$r_{\|} = r_p \equiv \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_i\cos\theta_t - n_t\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}$$

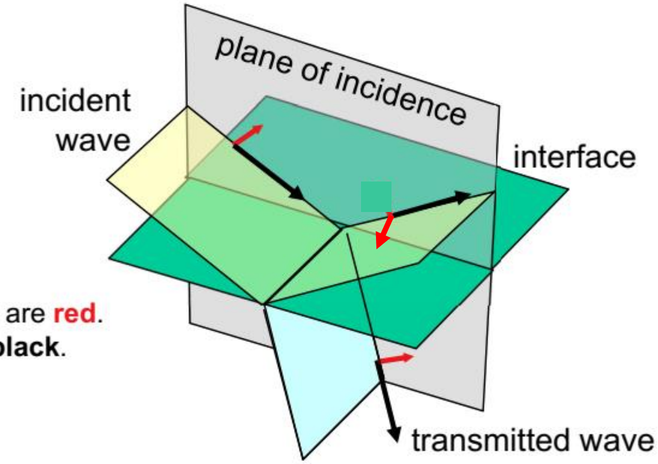
Contas análogas dão
o coeficiente da transmissão

$$t_{\|} = t_p \equiv \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}$$

Em resumo



E-field vectors are **red**.
k vectors are **black**.



Luz com polarização “s”

$$r_\perp = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)}$$

$$t_\perp = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)}$$

Luz com polarização “p”

$$r_\parallel = \frac{n_i \cos(\theta_t) - n_t \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_i)}$$

$$t_\parallel = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_i)}$$

E a lei de Snell-Descarte é valida com ambas as polarizações $n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$

Coeficiente de reflexão ar → vidro

$$r_{\|} = \frac{n_{ar}\cos\theta_t - n_{vidro}\cos\theta_i}{n_{ar}\cos\theta_t + n_{vidro}\cos\theta_i}$$

$$r_{\perp} = \frac{n_{ar}\cos\theta_i - n_{vidro}\cos\theta_t}{n_{ar}\cos\theta_i + n_{vidro}\cos\theta_t}$$

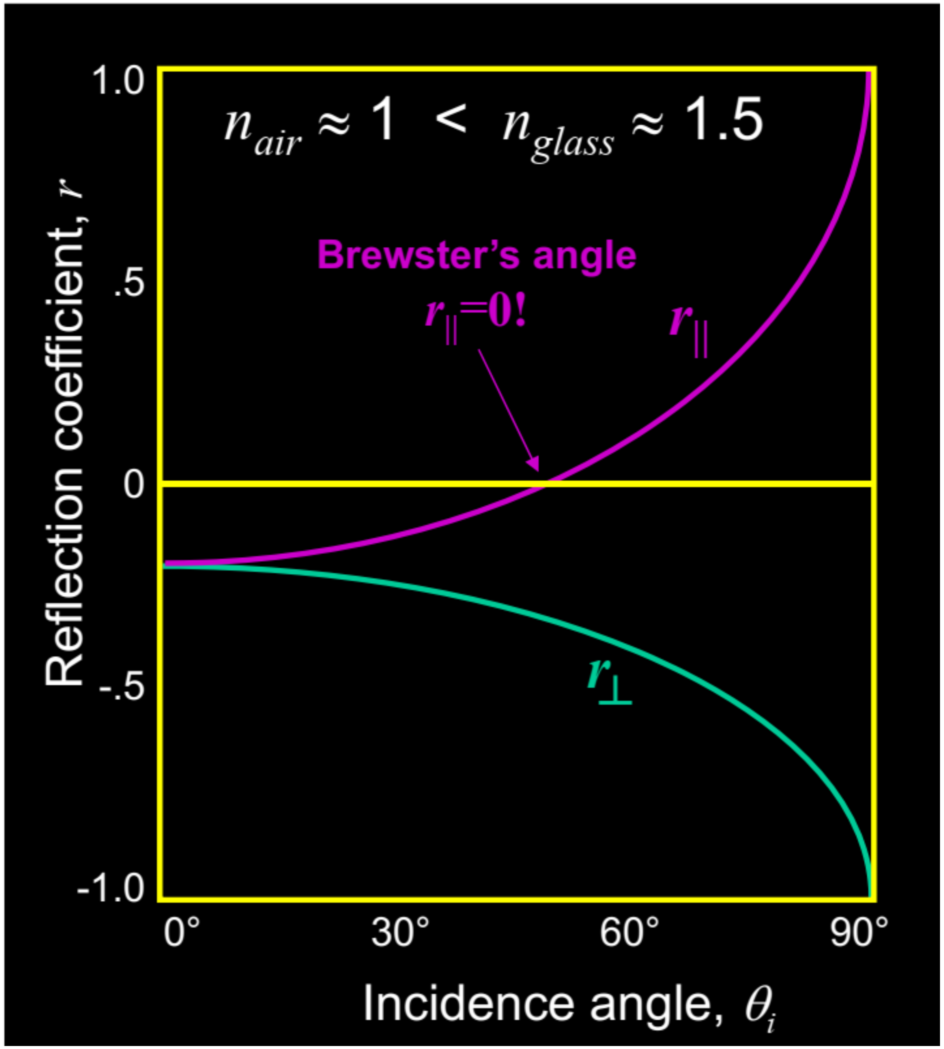
- $\theta_i = 0 = \theta_i \quad r_{\perp} = r_{\|}$
- $\theta_i \to 90^{\mathrm{o}} \quad r_{\|} \to 1; \quad r_{\perp} \to -1$

David Brewster
1781 - 1868

Existe um angulo de incidência na polarização “p” em que $r_{\|} = 0$

$$\theta_{Brewster} = \tan^{-1}\left(n_t / n_i\right)$$

ar → vidro $\quad \theta_{Brewster} \approx \tan^{-1}(1.5) \approx 56.3^{\mathrm{o}}$



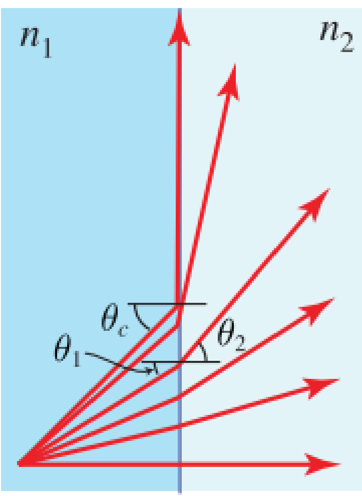
Coeficiente de reflexão vidro → ar

$$n_{vidro} > n_{ar}$$

Reflexão total interna
Ângulo critica

$$\theta_{critica} = \sin^{-1}\left(n_i / n_t\right)$$

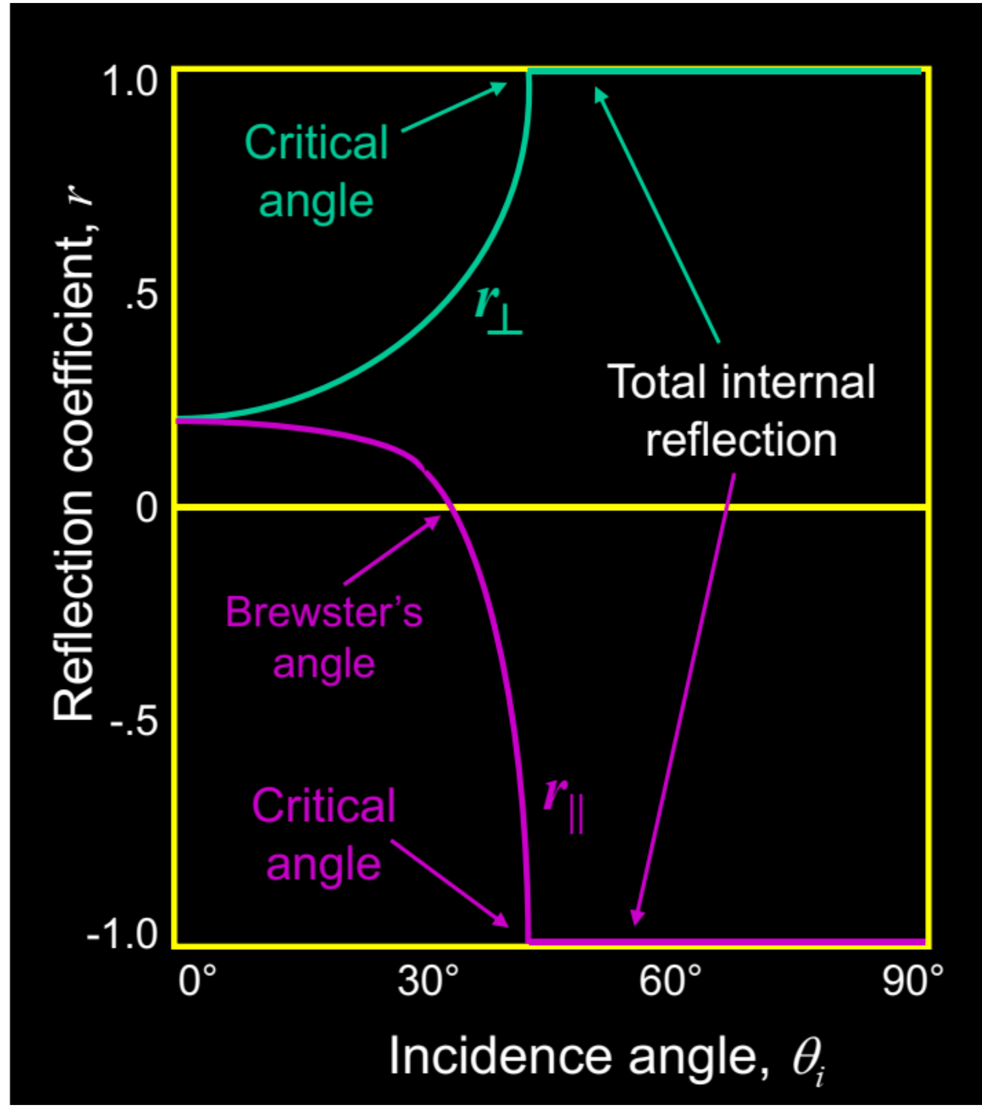
$\sin\theta_t$ não pode ser > 1



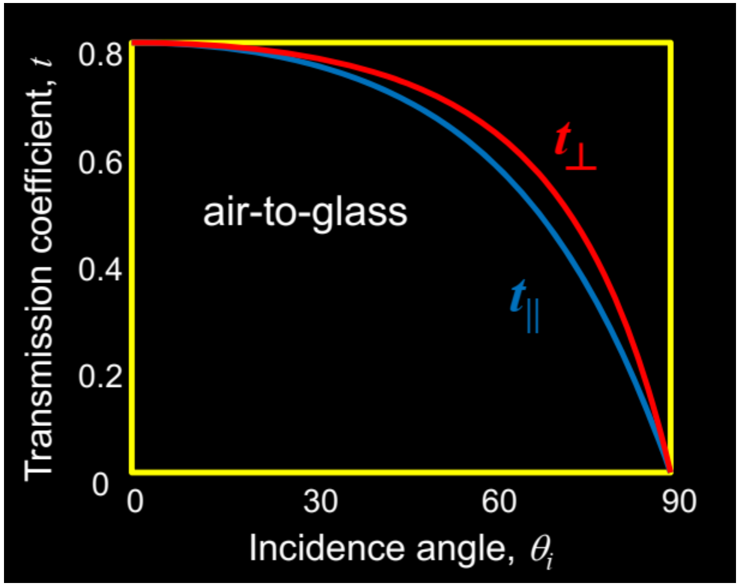
Internal refraction

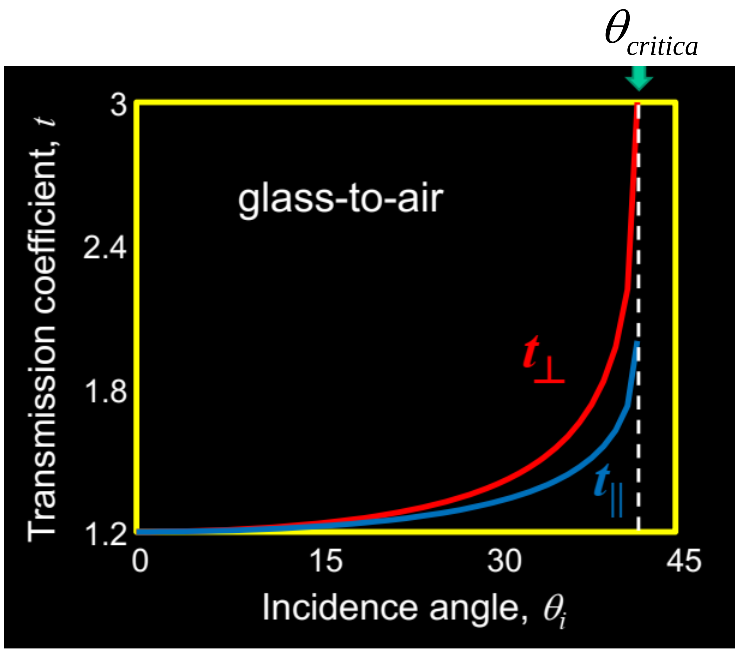
vidro→ ar

$$\theta_{critica} \approx \tan^{-1}(1/1.5)$$
$$\approx 41.8^{o}$$



transmissão





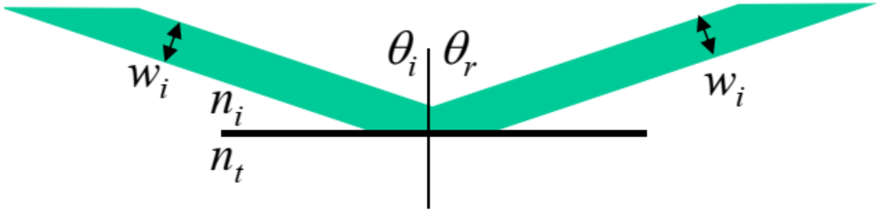
Note que o coeficiente de transmissão pode ser superior á unidade !

Caso de vidro → ar $\quad @\,\theta_i = \theta_{critica} \quad \sin(\theta_t) = 1; \cos(\theta_t) = 1$

$$t_\perp = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} = 2 \qquad t_\parallel = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i} = \frac{2n_i}{n_t} \approx 3$$

Parece ser contrassenso, mas convêm lembrar que é a energia que é conservada

Refletância



$$I_r = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c n_i \left|E_r\right|^2$$

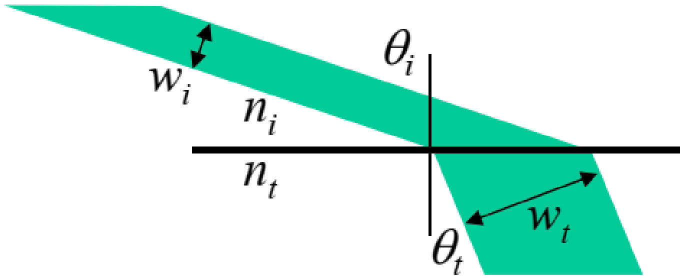
$$R \equiv \frac{\text{Potência refletida}}{\text{Potência incidente}} = \frac{I_r A_r}{I_i A_i}$$

$$\theta_i = \theta_r \Rightarrow w_i = w_r \Rightarrow A_i = A_r$$

$$I_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c n_i \left|E_i\right|^2$$

$$\boxed{R = \frac{\left|E_r\right|^2}{\left|E_i\right|^2} = \left|r\right|^2}$$

Transmitância

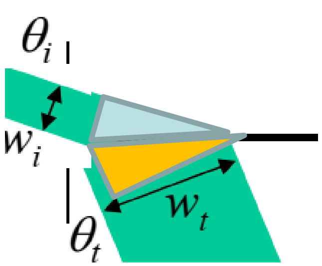


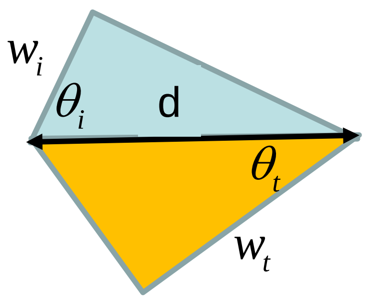
$$T \equiv \frac{\text{Potência transmitida}}{\text{Potência incidente}} = \frac{I_t \mathrm{A}_t}{I_i \mathrm{A}_i}$$

$$I_t = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c n_t \left|E_t\right|^2$$

$$I_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c n_i \left|E_i\right|^2$$

O angulo refratado é diferente do que o angulo de incidência e os feixes têm larguras diferentes





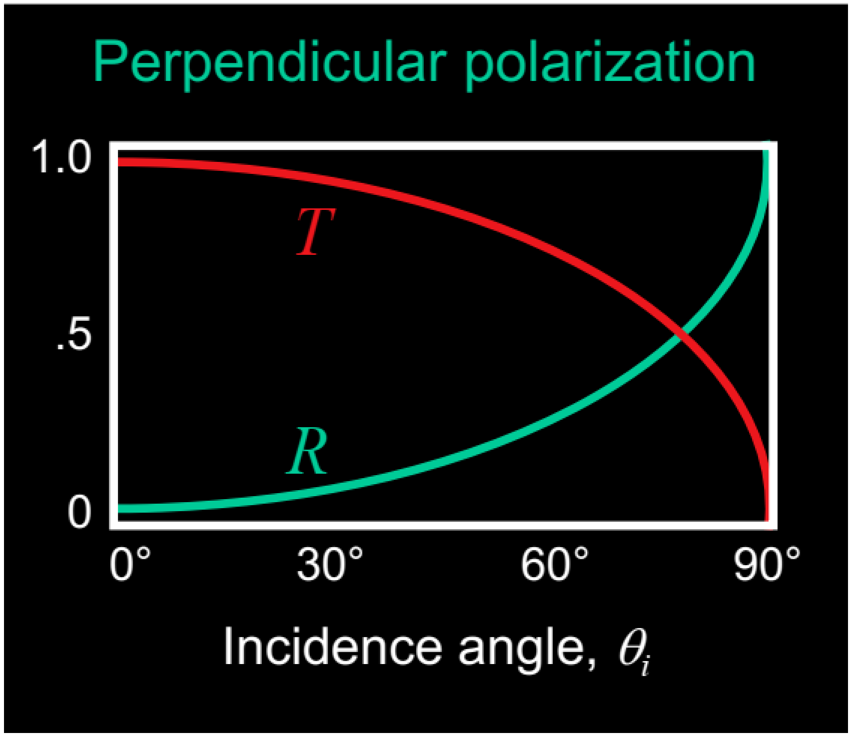
$$w_t = d\cos\theta_t$$

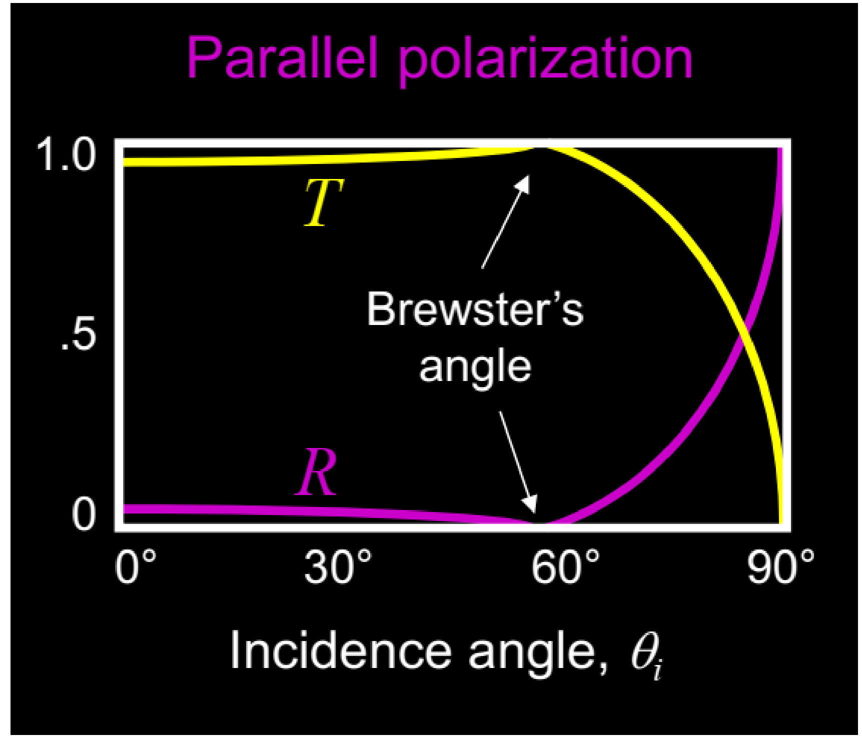
$$w_i = d\cos\theta_i$$

$$\frac{\mathrm{A}_t}{\mathrm{A}_i} = \frac{w_t}{w_i} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$T = \frac{n_t \cos\theta_t \left|E_t\right|^2}{n_i \cos\theta_i \left|E_i\right|^2} = \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i}\left|t\right|^2$$

Curvas para o caso de ar ⟶ vidro

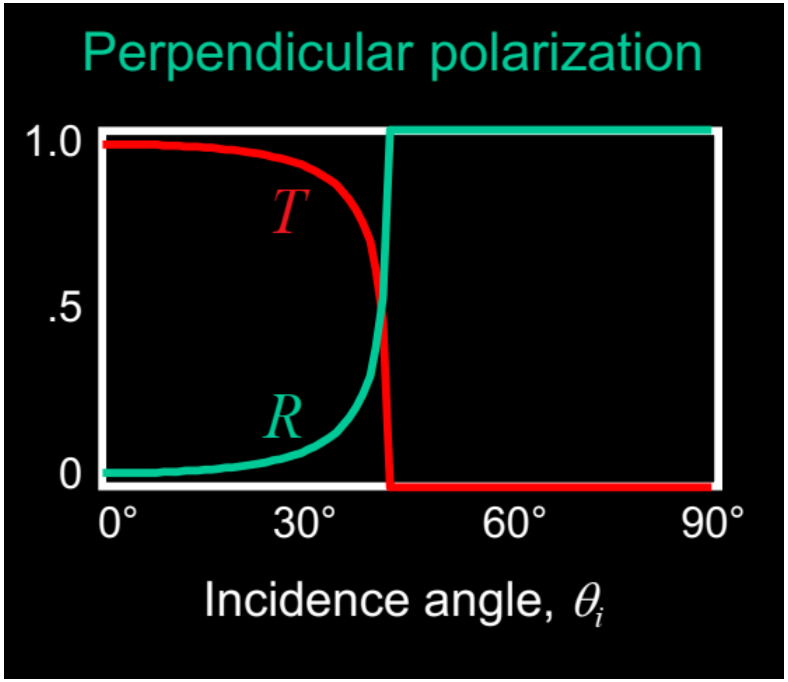


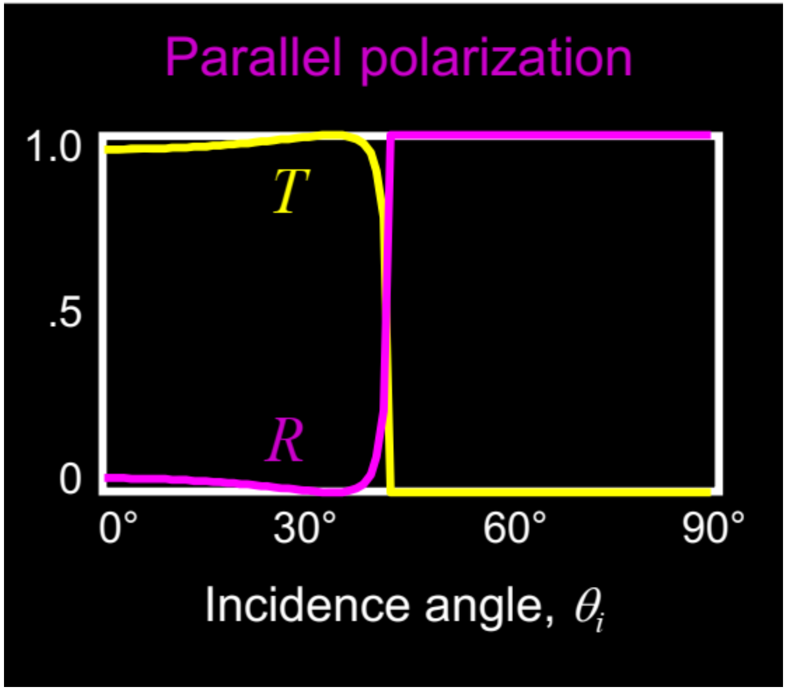


embora r + t nem sempre é =1

R+T =1

Curvas para o caso de vidro ⟶ ar





O ângulo crítico é igual para as duas polarizações

R+T = 1

Incidência normal

Quando $\theta_i = 0 \quad \theta_r = \theta_t = 0 \qquad R = \frac{(n_t - n_i)^2}{(n_t + n_i)^2} \quad T = \frac{4 n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$

Numa interface vidro ar $\quad n_{ar} \approx 1 \quad n_{vidro} \approx 1.5 \quad R \approx 0.04 \quad T \approx 0.96$

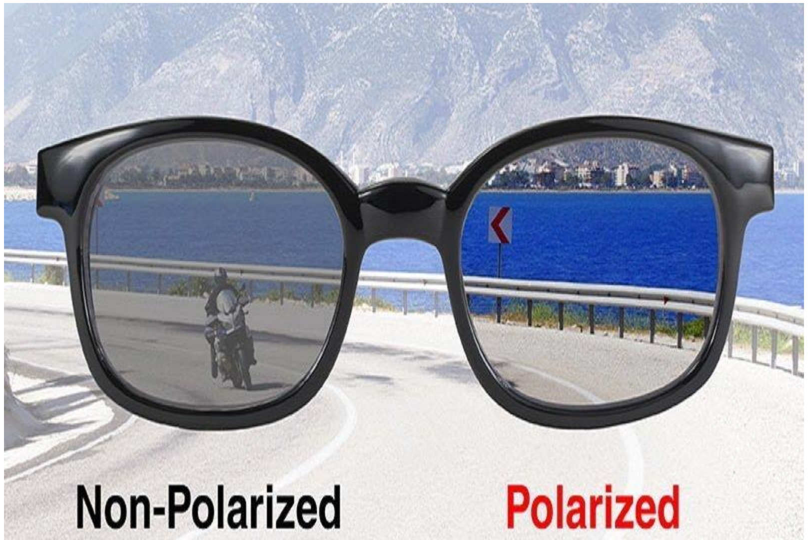
Igual para vidro → ar ou ar → vidro

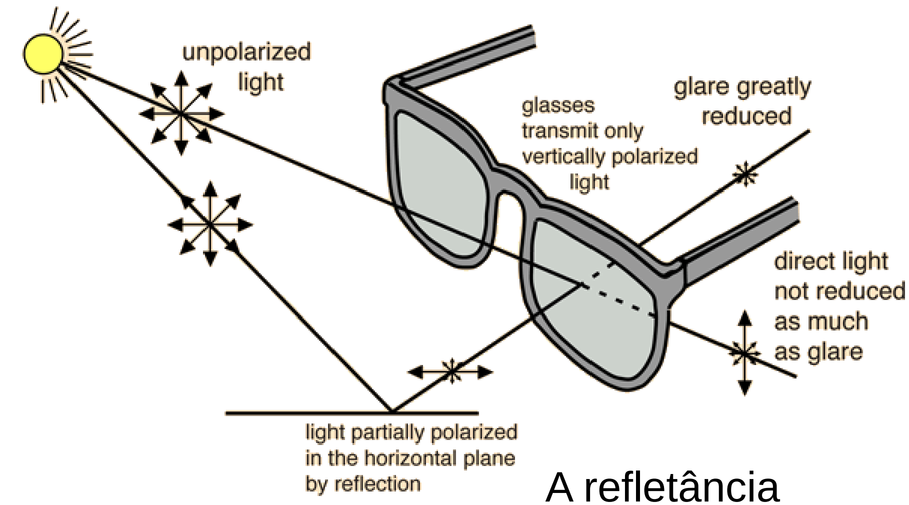
Duas superfícies $\quad T_{vidro} \approx 0.92 \qquad R_{vidro} \approx 0.08$

Fresnel em ação

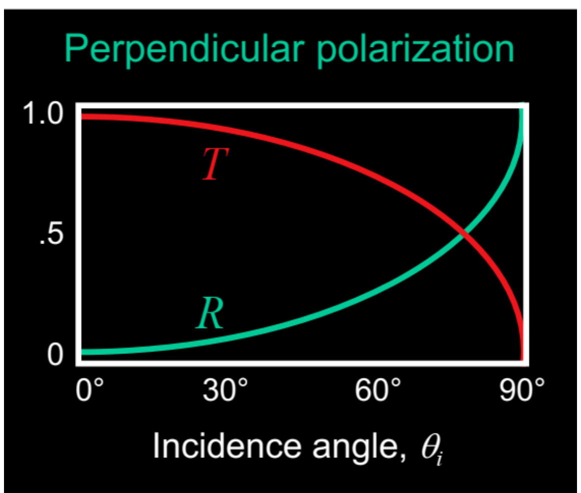
A glass rod and a wooden rod immersed in benzene. Since the index of refraction of benzene is very nearly that of glass, the rod on the left seems to vanish in the liquid. (E.H.)

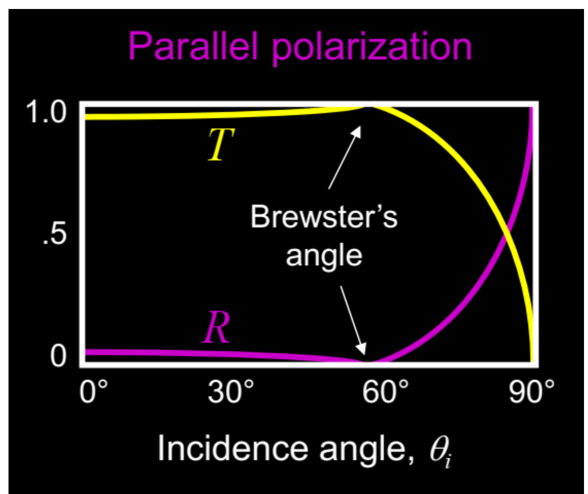
At near-glancing incidence the walls and floor are mirrorlike—this despite the fact that the surfaces are rather poor reflectors at $\theta_i = 0°$. (E.H.)

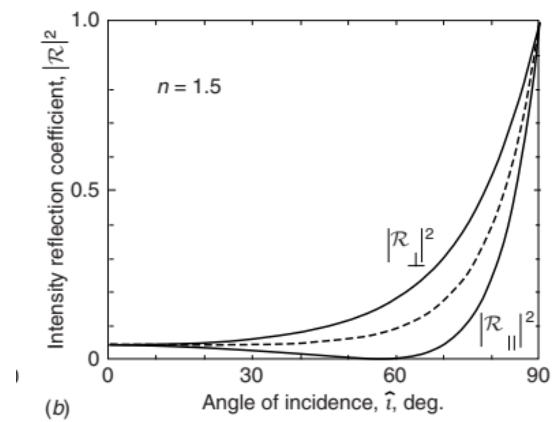




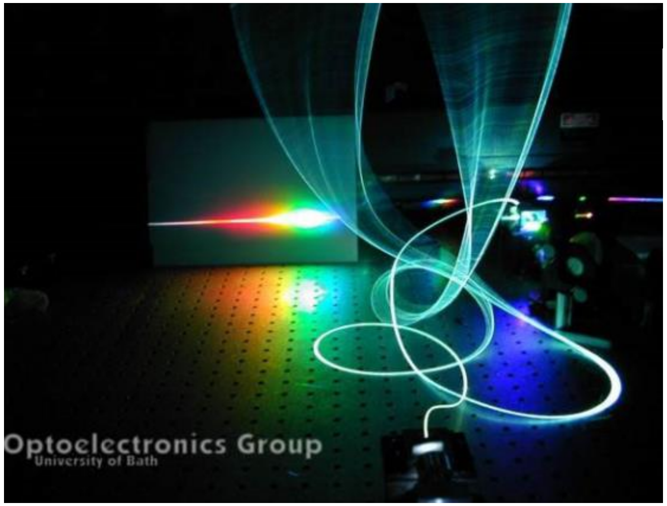
A refletância para polarização s é superior ao p



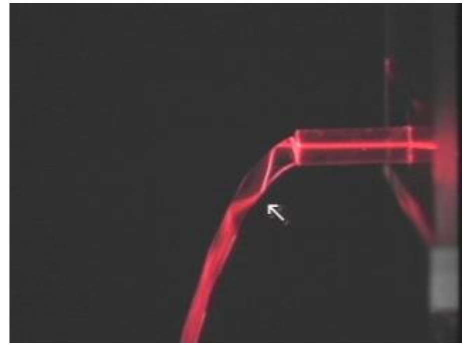




Aplicações na ótica



Fibras óticas usam reflexão interna total para guiar a luz



Muitos laser usam componentes no ângulo de Brewster para evitar perdas devida reflexões