Cálculo

Resolução da Ficha 12 — Dezembro

1. (a) Este é um integral impróprio de terceira espécie, uma vez que é de primeira (Tipo I, correspondendo ao limite superior infinito) e segunda espécie (Tipo II, pois em $x = 0$ a função não é limitada). Desta forma, é necessário "partir" o integral como soma de dois integrais

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx}_{\textit{Tipo II}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx}_{\textit{Tipo I}}$$

Resolução do integral Tipo II:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\alpha\to0^+} \int_\alpha^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\alpha\to0^+} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_\alpha^1 = -\frac{2}{e} - \lim_{\alpha\to0^+} \left(-2e^{-\sqrt{\alpha}}\right) = -\frac{2}{e} + 2$$

Resolução do integral Tipo I:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\beta\to+\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_1^\beta = \lim_{\beta\to+\infty} \left(-2e^{-\sqrt{\beta}}\right) + \frac{2}{e}$$
$$= 0 + \frac{2}{e}$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -\frac{2}{e} + 2 + \frac{2}{e} = 2$$

(b) Este é um integral Tipo I onde ambos os limites de integração são infinitos. Para o resolver, devemos "partir" o integral como soma de dois integrais, por exemplo, na forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$
$$= \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

Note-se que o integral da esquerda (original) só é convergente se AMBOS os integrais da direita são convergentes. Como

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \Big[\arctan(e^x)\Big]_\alpha^0 = \arctan(1) - \lim_{\alpha\to-\infty} \arctan(e^\alpha)$$
$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

temos de calcular o integral restante. Assim,

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\Big[\arctan(e^x)\Big]_0^\beta = \lim_{\beta\to+\infty}\arctan(e^\beta)-\arctan(1)$$
$$= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

donde,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

(c) Neste exercício o integral impróprio é de segunda espécie, $\underbrace{\int_0^1 \ln x dx}_{Tipo\ II}$, uma vez que a função ln não é limitada numa vizinhança de $x=0$. Assim,

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\beta\to0^+}\int_\beta^1 \ln x dx = \lim_{\beta\to0^+}\int_\beta^1 1.\ln x dx$$
$$= \lim_{\beta\to0^+}\left([x\ln x]_\beta^1 - \int_\beta^1 x.\frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\beta\to0^+}\Big[-\beta\ln\beta-[x]_\beta^1\Big]$$
$$= \lim_{\beta\to0^+}(-\beta\ln\beta-1+\beta) = -1-\lim_{\beta\to0^+}\beta\ln\beta$$

onde

$$\lim_{\beta\to0}\beta\ln\beta = \lim_{\beta\to0^+}\frac{\ln\beta}{\frac{1}{\beta}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando a regra de Cauchy, obtém-se

$$\lim_{\beta\to0^+}\beta\ln\beta = \lim_{\beta\to0^+}\frac{\ln\beta}{\frac{1}{\beta}} = \lim_{\beta\to0^+}\frac{\frac{1}{\beta}}{-\frac{1}{\beta^2}} = \lim_{\beta\to0^+}-\beta=0$$

Assim,

$$\int_0^1 \ln x dx = -1$$

(d) $\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx}_{Tipo\ II}$. Este é um integral impróprio de segunda espécie, uma vez que a função não está definida numa vizinhança de $x=\frac{\pi}{2}$ (a função tan não é limitada numa vizinhança daquele ponto). No entanto, para posterior resolução do integral é necessário realizar uma mudança de variável (substituição) adequada, dada por

$$t=\tan x$$
$$\begin{array}{rcl} x=\arctan t & \to & dx=\frac{1}{1+t^2}dt \\ x=0 & \to & t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} & \to & t=\tan 0=+\infty \end{array}$$

Aplicando as fórmulas

$$\begin{cases} 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x \end{cases}$$

deduz-se que

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Assim.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t\left(1+t^2\right)}{1+2t^2} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+2t^2} dt$$

Desta forma obtemos, na variável t, um integral de primeira espécie. Assim,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+2t^2} dt = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} \frac{t}{1+2t^2} dt = \frac{1}{4} \lim_{\alpha \to +\infty} \left[\ln\left|1+2t^2\right|\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\alpha \to +\infty} \left(\ln\left|1+2\alpha^2\right| - \ln 1\right) = +\infty$$

Logo, o integral dado é divergente.

(e) Neste exercício, o ponto "problemático" encontra-se no interior do intervalo de integração, uma vez que função não está definida para $x = 1/2$. Assim, é necessário partir o integral como soma de dois integrais na seguinte forma

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x-1} dx = \int_{-1}^{1/2} \frac{1}{2x-1} dx + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2x-1} dx$$

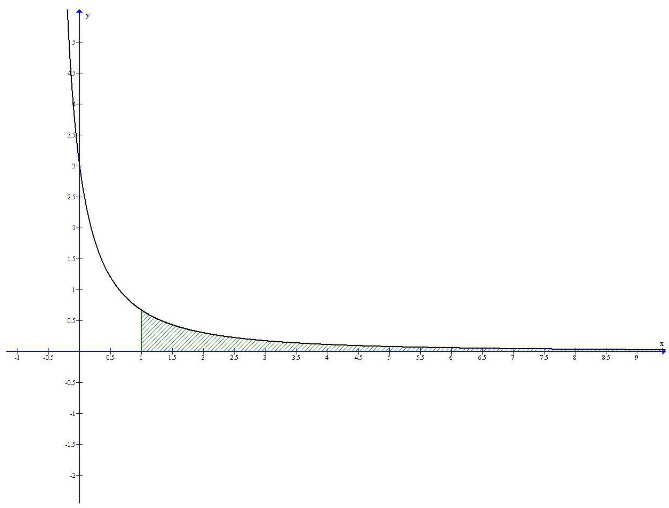
Obtemos assim dois integrais de segunda espécie. Note-se que o integral (original) da esquerda só é convergente se AMBOS os integrais da direita são convergentes. Assim,

$$\int_{-1}^{1/2} \frac{1}{2x-1} dx = \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}^-} \int_{-1}^{y} \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}^-} \left[\ln|2x-1|\right]_1^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}^-} \left(\ln|2\alpha-1| - \ln 1\right) = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}^-} \ln|2\alpha-1| = \ln(0^+) = -\infty$$

Como um dos integrais da direita é divergente, então $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x-1} dx$ é divergente.

2. A região pretendida pode ser visualizada na figura seguinte



A área da região sombreada pode ser calculada a partir de

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{2+x}\right)dx=\lim_{M\to+\infty}\int_1^M\left(\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{2+x}\right)dx$$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{M\to+\infty}\left[2\ln|2x+1|-2\ln|2+x|\right]_1^M\\
&=-2\ln 3+2\ln 3+2\lim_{M\to+\infty}\ln\left|\frac{2M+1}{2+M}\right|\\
&=0+2\ln\left|\lim_{M\to+\infty}\frac{2M+1}{2+M}\right|\\
&=2\ln\left|\lim_{M\to+\infty}\frac{M\left(2+\frac{1}{M}\right)}{M\left(\frac{2}{M}+1\right)}\right|=2\ln 2
\end{aligned}$$

3. A duração média de um átomo de uma substância radioactiva, obtém-se da resolução do seguinte integral impróprio (Tipo I)

$$\int_0^{+\infty}e^{ct}t\,dt=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha}e^{ct}t\,dt=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\left[\frac{e^{ct}}{c}t\right]_0^{\alpha}-\int_0^{\alpha}\frac{e^{ct}}{c}dt\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{e^{c\alpha}}{c}\alpha-\frac{1}{c}\left[\frac{e^{ct}}{c}\right]_0^{\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{e^{c\alpha}}{c}\alpha-\frac{e^{c\alpha}}{c^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$=0-0+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c^2}$$

uma vez que sendo $c<0$, tem-se

$$\lim_{\alpha\to+\infty}e^{c\alpha}\alpha=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{e^{-c\alpha}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{-ce^{-c\alpha}}=0\ \ \text{(regra de Cauchy)}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}e^{c\alpha}=0$$

Assim,

$$M=-c\int_0^{+\infty}e^{ct}tdt=-c\left(\frac{1}{c^2}\right)=-\frac{1}{c}$$

Logo, para o caso do carbono 14 tem-se

$$M=-\frac{1}{-0.000121}\approx 8264.5\ \text{ unidades de tempo}$$