MAO apontamentos

Simão Cardoso

Novembro 2021

1 Ligações holónomas

A existência de ligações traduz-se pela introdução de equações de ligações entre as coordenadas das partículas e o tempo.
As equações de ligação traduzem que os vetores $\vec{r_i}$ não podem ser vistos como independentes e por consequência as equações 1 também acontece o mesmo.

$$\vec{F_i} + \sum_j \vec{F_{ij}} = \frac{d\vec{p_i}}{dt} \tag{1}$$

A existência de ligações significa a existência de forças responsáveis por essas ligações.

A primeira dificuldade é ultrapassada através de **coordenadas generalizadas**, ou seja, coordenadas independentes. Para a segunda usa-se o princípio dos trabalhos virtuais.

2 Coordenadas genéricas

Um sistema com **n** partículas livres de ligações movem-se no espaço cartesiano. Têm no total **3n** graus de liberdade. Mas se o sistema está sujeito a l equações de ligação, diz-se então que o sistema tem **3n-l** graus de liberdade. Esses graus tem o nome de *coordenadas generalizadas* e são representadas como $q_1, q_2, ..., q_{3n-l}$.

Os vetores $\vec{r_i}$ são representados como:

$$\vec{r_1} = \vec{r_1}(q_1, q_2, ..., q_{3n-l}, t)$$
$$\vec{r_2} = \vec{r_2}(q_1, q_2, ..., q_{3n-l}, t)$$
$$\vec{r_n} = \vec{r_n}(q_1, q_2, ..., q_{3n-l}, t)$$

Para que os q_k parâmetros possam ser olhados como independentes, eles devem ser definidos de forma a que as equações de ligação sejam satisfeitas para quaisquer q_k.

3 Trabalhos virtuais

Uma partícula sujeita a ligações estará em equilíbrio se a resultante $\vec{F_t}$ das forças exteriores e de ligação for nula:

$$\vec{F_t} = 0 \tag{2}$$

Deslocamento virtual representa um deslocamento infinitesimal e instantâneo compatível com as forças de ligação.
Se a partícula está em equilíbrio, $\vec{F_t} = 0$, e portanto $\delta W = 0$. Inversamente, se $\delta W = 0$, como $\delta\vec{r}$ é arbitrário e por isso não propriamente perpendicular a $\vec{F_t}$, tem-se que $\vec{F_t} = 0$.

$$\delta W = \vec{F_t} \cdot \delta\vec{r} = 0 \tag{3}$$

A força total $\vec{F}_i$ pode ser decomposta em forças resultante exterior e a força resultante das ligações:

$$\delta W = (\vec{F} + \vec{R}) \cdot \delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} + \vec{R} \cdot \delta\vec{r} \tag{4}$$

Se decompormos a força total que atua na partícula i numa força resultante exterior e uma resultante de força de ligação temos então um sistema em equilíbrio:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{5}$$

Esta expressão traduz o **princípio dos trabalhos virtuais para um sistema de partículas**: num sistema em equilíbrio o trabalho virtual das forças aplicadas é nulo.

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0 \tag{6}$$

4 O princípio de d'Alembert e as equações de Lagrange

Pode-se considerar que cada uma das partículas que constituem o sistema está em equilíbrio quando se introduz ao lado das forças reais, existentes, $\vec{F}_i$, uma força formal, $\frac{d\vec{p}_i}{dt}$. Reduz-se assim o problema dinâmico a estático.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{3n-l} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right] \delta q_j \tag{8}$$

Os $\delta\vec{r}_i$, apesar de arbitrários, não são independentes entre si visto que estão relacionados pelas equações de ligação.

Os Q_j são chamados **componentes da força generalizada**. Tal como os q_j não têm as dimensões dum comprimento, também os Q_j não têm dimensão de uma força, mas o produto $Q_j \cdot \delta_j$ tem necessariamente as dimensões de energia.

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{9}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, ..., q_{3n-l}, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{3n-l})$$

A energia cinética dá-se por:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{10}$$

As equações de segunda espécie de Lagrange são dadas por **(caso geral)**:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{11}$$

Se as forças forem conservativas ($Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$) e V não depende das coordenadas generalizadas ($\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{12}$$

$$L = T - V$$

Onde:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$$

Temos assim um sistema de m equações diferenciais de segunda ordem (tantas equações quanto os graus de liberdade do sistema).

Quando as forças que atuam num sistema derivam duma função potencial que só depende das coordenadas, o sistema diz-se conservativo, ou seja, a energia total do sistema mantém-se. Se a função potencial também depender do tempo, a energia já não se mantém constante.

1°) As equações de Lagrange ainda podem ser escritas desta forma mesmo que o sistema não seja conservativo desde que as forças generalizadas Q_j possam ser obtidas por uma função $U(q_j, \dot{q}_j)$:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \tag{13}$$

A função é então chamada **potencial generalizado ou potencial dependente da velocidade.**

2°) Caso somente algumas forças serem conservativas, inclui-se em $L = T - V$ as forças conservativas e Q_j representa a força generalizada que não deriva de um potencial. Acontece muitas vezes quando considera-se forças de atrito.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \tag{14}$$

5 Teoremas de conservação e propriedades de simetria

A P_j chama-se **momento canónico** ou **momento conjugado** de q_j. Na medida que q_j não tem dimensões de comprimento, P_j também não terá dimensões de momento linear.

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{15}$$

Se considerarmos agora um sistema tal que o lagrangeano do sistema não contém uma certa coordenada q_j, a equação de Lagrange escreve-se:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt}P_j = 0 \tag{17}$$

$$P_j = constante \tag{18}$$

A coordenada q_j que não figura no lagrangeano chama-se **cíclicas**. Com efeito, porque, na ausência de potencial, o espaço é homogéneo as propriedades mecânicas do sistema isolado não mudam quando se efetua uma translação em bloco do sistema, o que significa que o lagrangeano não depende as coordenadas de posição.

6 Equações de Hamilton

Na formulação hamiltoniana utiliza-se em vez dos q_j e $\dot{q}_j$, o espaço q_j e os P_j definidos.

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \tag{19}$$

Onde

$$j = 1, ..., 3n - l$$

onde H (só depende de q_j e P_j):

$$H = \sum_{j=1}^{3n-l} \dot{q}_j P_j - L \tag{20}$$

Estas são as equações canónicas de Hamilton. Constituem um sistema de **2n** equações diferenciais de primeira ordem em relação ao tempo, que substituem o sistema de **n** equações de Lagrange que são equações diferenciais de segunda ordem em relação ao tempo.

Para um sistema em que V só é função dos q_i e em que as ligações não dependem do tempo, a função de Hamilton representa a energia total do sistema.

7 Equações de Hamilton e coordenadas cíclicas

O formalismo hamiltoniano é particularmente adaptado ao tratamento de problemas que envolvem coordenadas cíclicas. Se uma coordenada é cíclica de L, também o é de H.

$$\begin{cases} \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ P_i = constante \end{cases} \tag{21}$$

Assim, o sistema a estudar continua a ser um sistema com **n** graus de liberdade correspondente a uma coordenada cíclica. Na formulação hamiltoniana, quando a coordenada q_n é cíclica, o hamitoniano escreve-se:

$$H = H(q_1, q_2, ..., q_{n-1}, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n[constante], t) \tag{22}$$

O comportamento da coordenada cíclica dá-se por:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial P_n} \tag{23}$$

onde H

$$H = T + V = E_T \tag{24}$$

As forças de ligação não dependem do tempo e V não depende das coordenadas genéricas.

8 Determinação do número de graus de liberdade dum corpo rígido

O corpo rígido tem 6 graus de liberdade, qualquer que seja o número de pontos materiais que o constituem ou até mesmo que o corpo seja contínuo.
Entre os cossenos diretores existem 6 relações. Aos 9 cossenos diretores só se pode fazer corresponder 3 coordenadas generalizadas, ou seja, a direção do sistema O'X'Y'Z' em relação ao sistema OXYZ é definida por 3 grandezas.

$$\alpha_1 = \hat{x}' \cdot \hat{x} = \cos(o'x', ox)$$
$$\alpha_2 = \hat{x}' \cdot \hat{y} = \cos(o'x', oy)$$
$$\alpha_3 = \hat{x}' \cdot \hat{z} = \cos(o'x', oz)$$

$$\beta_1 = \hat{y}' \cdot \hat{x} = \cos(o'y', ox)$$
$$\beta_2 = \hat{y}' \cdot \hat{y} = \cos(o'y', oy)$$
$$\beta_3 = \hat{y}' \cdot \hat{z} = \cos(o'y', oz)$$

$$\gamma_1 = \hat{z}' \cdot \hat{x} = \cos(o'z', ox)$$
$$\gamma_2 = \hat{z}' \cdot \hat{y} = \cos(o'z', oy)$$
$$\gamma_3 = \hat{z}' \cdot \hat{z} = \cos(o'z', oz)$$

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \end{cases} \tag{25}$$

A matriz que define a transformação das coordenadas x_1, x_2 e x_3 nas coordenadas x_1', x_2' e x_3' é:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Se os coeficientes a_{ij} obedecem à condição de ortogonalidade, a matriz a_{ij}chama-se **matriz ortogonal.**
A passagem de um sistema de coordenadas ortogonais fixo no espaço a um sistema de coordenadas ortogonais fixo no corpo rígido é uma transformação ortogonal efetuada por meio de uma matriz ortogonal constituída pelos cossenos diretores dos eixos móveis.

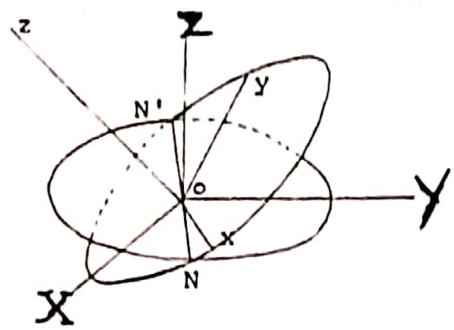
Condição de ortogonalidade

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik} = \delta j, k \tag{27}$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{28}$$

9 Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler designados por ϕ (rotação em torno do OZ), θ (rotação em torno da linha dos nodos) e ψ (rotação em torno de Oz) são definidos como ângulos correspondentes a 3 rotações.



Pode-se exprimir facilmente as coordenadas dum ponto P no sistema Oxyz em função das coordenadas do mesmo ponto em OXYZ e dos ângulos de Euler.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{29}$$

Velocidades angulares

$$\begin{cases} \vec{w}_\phi = \dot{\phi}\hat{z} \\ \vec{w}_\theta = \dot{\theta}\hat{\xi} \\ \vec{w}_\psi = \dot{\psi}\hat{z}' \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\delta\phi}{\delta t} \\ \dot{\theta} = \frac{\delta\theta}{\delta t} \\ \dot{\psi} = \frac{\delta\psi}{\delta t} \end{cases} \tag{31}$$

Rotação em torno do eixo "mágico":

$$\vec{w} = \vec{w}_\phi + \vec{w}_\theta + \vec{w}_\psi \tag{32}$$

$$\vec{w}_\phi = \begin{bmatrix} \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\vec{w}_\theta = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\vec{w}_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{35}$$

10 Momento angular e energia cinética do movimento de um corpo em torno dum ponto

Se escolhermos como ponto de referência no sólido o centro de massa, tanto o momento angular como a energia cinética podem escrever-se como a soma de dois termos, um dependendo das coordenadas do centro de massa e traduzindo a contribuição da translação, e outro dependendo dos ângulos de Euler e traduzindo a contribuição de rotação:

$$\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v} + \vec{L}_{rot}(\phi, \theta, \psi) \tag{36}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + T_{rot}(\phi, \theta, \psi) \tag{37}$$

Para determinar a expressão do momento angular dum sólido rígido com um ponto fixo em relação a esse ponto fixo começa-se pela expressão geral:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r_i} \times \vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{w}r_i^2 - \vec{r_i}(\vec{r_i} \cdot \vec{w})) \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \tag{39}$$

Onde:

$$\begin{cases} I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i^2 - x_i^2) \rightarrow m_i(y_i^2 + z_i^2) \\ I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i^2 - y_i^2) \rightarrow m_i(x_i^2 + z_i^2) \\ I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i^2 - z_i^2) \rightarrow m_i(y_i^2 + x_i^2) \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} I_{xy} = I_{yx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \\ I_{xz} = I_{zx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \\ I_{yz} = I_{zy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \end{cases} \tag{41}$$

Um conjunto de grandezas que se transformam segundo a lei (42) é chamado **um tensor de segunda ordem.** Os momentos e os produtos de inércia (39) são as componentes de um tensor de 2ª ordem. Os valores das componentes do tensor dependem do sistema de eixos escolhidos.

$$I'_{jk} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} a_{jl} a_{km} I_{lm} \tag{42}$$

Diagonalizando o tensor inercial:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 w_x \\ I_2 w_y \\ I_3 w_z \end{bmatrix} \tag{44}$$

Para a energia cinética do corpo rígido com um ponto fixo tem-se (45) onde I_1, I_2 e I_3 são os momentos principais de inércia.

$$T = \frac{1}{2}(I_1 w_x^2 + I_2 w_y^2 + I_3 w^z) = \frac{1}{2}\vec{w} \cdot \vec{L} \tag{45}$$

Relações entre as componentes do inércia:

$$
\begin{cases}
I_1 + I_2 \geq I_3 \\
I_2 + I_3 \geq I_1 \\
I_1 + I_3 \geq I_2
\end{cases}
\tag{46}
$$

Momento de inércia de um corpo em relação a uma reta:

$$
I = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2
\tag{47}
$$

11 Elipsoide da inércia

$$
Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fyz - 2Gzx - 2Hxy = 1
\tag{48}
$$

Onde:

$$
\begin{cases}
A = I_{xx} \\
B = I_{yy} \\
C = I_{zz} \\
F = -I_{yz} \\
G = -I_{xz} \\
H = -I_{xy}
\end{cases}
\tag{49}
$$

De L for H (Como se faz)

1) $L = T - V$

2) $P = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

3) $H = \sum_{j=1}^{3n-1} P \dot{q}_j - L$

4) $H_{\dot{q}_j \to P}$ (Hamiltoniano)

5) $\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases}$

Se $H = T + V$

1) $H_{\dot{q}_j \to P}$

2) $\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases}$