Derivação do integral

1. Utilizando um resultado visto no curso, se $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} \sin(u + e^u)\, du$, então

$$g'(x) = \operatorname{sen}(\ln(x) + \mathrm{e}^{\ln(x)}) \times (\ln(x))' = \operatorname{sen}(\ln(x) + x) \times \frac{1}{x}$$

2. Derivando ambos os membros em ordem a x obtemos

$$\left(\int_k^x f(t)\ dt\right)' = \left(\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \cos(x)$$

Para determinar k verificamos que

$$\int_k^x f(t)\ dt = \int_k^x \cos(t)\ dt = \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(k)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(k) = \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow &\operatorname{sen}(k) = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow &k = \frac{\pi}{6} + 2r\pi \vee k = \frac{5\pi}{6} + 2r\pi
\end{aligned}$$

Basta escolher $k = \frac{\pi}{6}$.

Áreas planas

3. As regiões para cada uma das alíneas seguintes podem ser vistas em baixo.

(a) $x = 0,\quad x = 1,\quad y = 3x,\quad y = -x^2 + 4;$
Uma vez que $\forall x \in [0, 1]$ se tem $-x^2 + 4 \geq 3x$, então a área da região sombreada é dada por:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (-x^2 + 4) - (3x)dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^1\\
&= -\frac{1}{3} + 4 - \frac{3}{2}\\
&= \frac{13}{6}
\end{aligned}$$

(b) $x = 0,\quad x = \frac{\pi}{2},\quad y = \operatorname{sen}(x),\quad y = \cos(x);$
Verificamos que a região pretendida é constituída por duas sub-regiões, nas quais as funções sen e cos invertem papéis. De outra forma,

$$\begin{aligned}
\cos(x) \geq \operatorname{sen}(x),\ \forall x \in [0, \pi/4]\\
\operatorname{sen}(x) \geq \cos(x),\ \forall x \in [\pi/4, \pi/2]
\end{aligned}$$

Então a área da região sombreada é dada por

$$\int_0^{\pi/4} \cos(x) - \text{sen}(x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{sen}(x) - \cos(x)dx$$

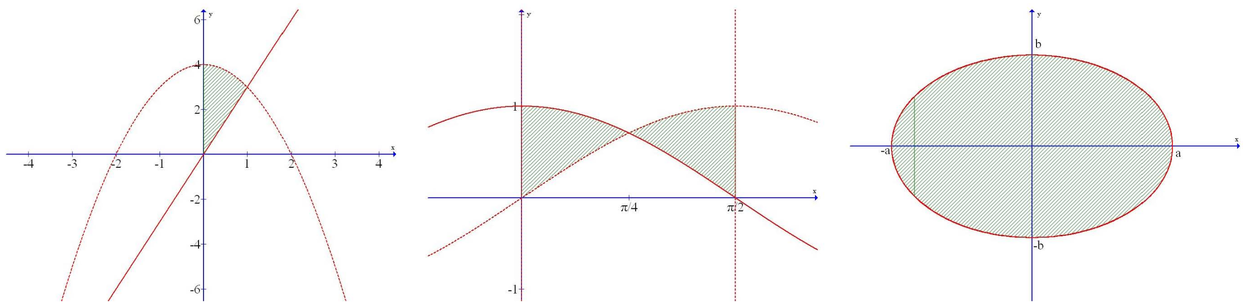
Por simetria da região, bastará calcular uma das sub-regiões e multiplicar por 2:

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\pi/4} \cos(x) - \text{sen}(x)dx &= 2\Big[\text{sen}(x) + \cos(x)\Big]_0^{\pi/4} \\ &= 2\Big[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\Big] \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

(c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
A área a calcular neste caso é a de uma elipse, definida pelas expressões $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ e $y = -b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ (arcos superior e inferior, respectivamente). Por simetria da região, bastará determinar a área da região contida no primeiro quadrante e multiplicar por 4. Esta sub-região é delimitada por $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $y = 0$ e as rectas verticais $x = 0$ e $x = a$. Assim, a área total da região sombreada é dada por

$$\begin{aligned} 4\int_0^a b\sqrt{1 - x^2/a^2} - 0 \, dx &= 4b\int_0^a \sqrt{1 - x^2/a^2} \, dx \\ &= 4b\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \text{sen}^2(t)} \, a\cos(t) \, dt \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} |\cos(t)| \cos(t) \, dt \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt \\ &= 2ab\Big[t + \frac{\text{sen}(2t)}{2}\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

Na resolução anterior é utilizada a substituição $x = a\,\text{sen}(t)$ e o facto de que $\cos(t) \geq 0 \; \forall t \in [0, \pi/2]$.



(a) (b) (c)

4. As regiões para cada uma das alíneas seguintes podem ser vistas em baixo. Neste exercício não é exigido o cálculo do integral.

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \;\text{ e }\; 0 \leq y \leq x\}$;
   A região pretendida é delimitada pelas rectas verticais $x = 0$ e $x = 4$ e inferiormente por $y = 0$. Superiormente, a região é delimitada por funções diferentes, pelo que se torna necessário dividir em duas sub-regiões, uma das quais limitada superiormente por $y = x$ e

a outra pelo arco (superior) de circunferência $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$. Para determinar o ponto de transição temos de igualar as duas funções

$$\sqrt{4-(x-2)^2} = x \Leftrightarrow 4-(x-2)^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee \boxed{x = 2}$$

Assim a área da região sombreada é dada por

$$\int_0^2 x - 0\, dx + \int_2^4 \sqrt{4-(x-2)^2} - 0\, dx$$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;
Verificamos que a região é delimitada por translacções das funções $|x|$ e $-|x|$, uma vez que

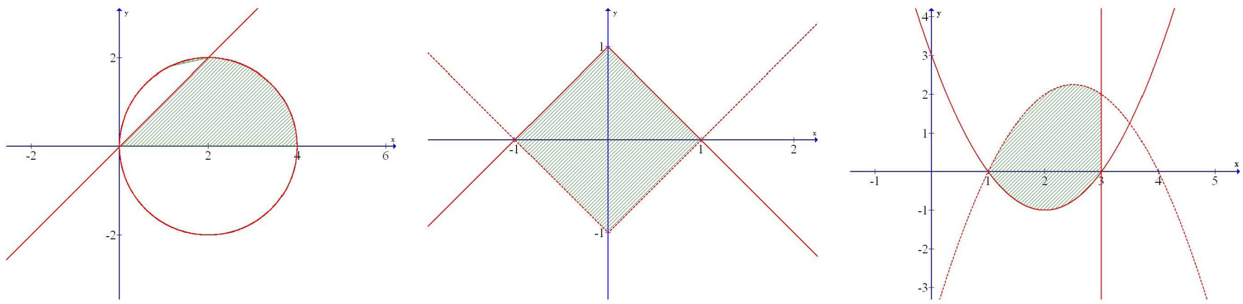
$$|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1 - |x| \Leftrightarrow -(1-|x|) \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow -1 + |x| \leq y \leq 1 - |x|$$

A região está representada abaixo. Por simetria, bastará determinar a área da sub-região contida no primeiro quadrante ($x > 0$) que é limitada por $y = 1-x$, $y = 0$ e as rectas $x = 0$ e $x = 1$. Assim, a área total é dada por

$$4\int_0^1 (1-x) - 0\, dx$$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \;\text{ e }\; y \geq x^2 - 4x + 3 \;\text{ e }\; y \leq -x^2 + 5x - 4\}$.
A região pretendida é delimitada por duas parábolas que se intersectam em $x = 1$ e $x = 7/2$. Assim, superiormente tem-se $y = -x^2+5x-4$, inferiormente $y = x^2-4x+3$ e lateralmente as rectas $x = 1$ e $x = 3$ pelo que a área é dada por

$$\int_1^3 (-x^2 + 5x - 4) - (x^2 - 4x + 3)\, dx$$



(a) (b) (c)

5. Calcule a área da região plana limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^3$ e pela recta tangente no ponto de abcissa $x = 1$.

Começamos por determinar a equação da recta tangente ao gráfico de x^3 em $x = 1$. Assim, $y = mx + b$ em que $m = f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$. Por outro lado, a recta tangente passa no ponto $(1, 1)$ pelo que $1 = 3 \times 1 + b$, donde $b = -2$. A região pretendida encontra-se a sombreado na figura seguinte. Notamos que é limitada superiormente por $y = x^3$, inferiormente pela recta tangente $y = 3x - 2$ e lateralmente pelas rectas $x = -2$ e $x = 1$ (intersecções de x^3 com $3x - 2$). Assim, a área da região pretendida é dada por

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 x^3 - (3x-2)\, dx &= \int_{-2}^1 x^3 - 3x + 2\, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^1 \\ &= \frac{11}{4}\end{aligned}$$