Eletromagnetismo

Simão Cardoso

Eq. Maxwell

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ → lei de Coulomb → $-\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ → lei de Faraday
- $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\vec{j}$ → Lei de Ampère

Padrão de Coulomb

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Padrão de Lorentz

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\vec{j} \end{cases}$$

Integral Lei de Coulomb

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_V \frac{\rho\, dv}{\varepsilon_0}$$

Divergência na lei de Ampère

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$ Equação de continuidade (conservação de carga elétrica)

Integral lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$$

Eletrostática no vácuo

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$
- $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$

Campo elétrico numa superfície

$$(\vec{E}_{cima} - \vec{E}_{baixo})\hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

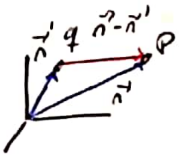
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \end{cases}$$

Integral Lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2}\int_S \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) d\vec{a}$$

Lei de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$



N cargas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}$$

Carga contínua

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dq\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Eq. de Poisson ⇒ $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Eq. de Laplace ⇒ $\nabla^2 V = 0$

Potencial elétrico

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Energia eletrostática

$r_{ji} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$

Cargas pontuais

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Cargas contínuas

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,d\vec{v} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2\,d\vec{v}$$

Momento dipolar

$$\vec{P} = q\vec{d} \longrightarrow \vec{P} = \int \rho\,\vec{r}\,dv$$

$(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$

$$\vec{P}\cdot\hat{r} = qd\cos\theta$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

Expansão de Multipolo

Cargas pontuais

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{Q}{r}}_{1^o} + \underbrace{\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^3}}_{2^o} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}}_{3^o} + \dots\right]$$

Cargas contínuas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{1^o} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\int r'\cos\alpha\, \rho\, dv'}_{2^o} + \frac{1}{r^3}\underbrace{\int (r')^2\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\alpha - \tfrac{1}{2}\right)\rho\, dv'}_{3^o} + \dots\right]$$

Soluções da Eq. de Laplace

1D $\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \rightarrow V = mx + b$

2D $\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \rightarrow V(x,y) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{circ} V\, dl$

3D $\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \rightarrow V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{esfera} V\, d\vec{a}$

Teorema da Unicidade

=> A solução da eq. de Laplace num volume V é unicamente determinada pelo valor do potencial na superfície S que é fronteira de V.

Corolário => A eq. de Poisson também fica unicamente determinada se conhecer o potencial em S + ρ no volume.

Condutor → A carga está na superfície

- $\vec{E} = 0$
- $\rho = 0$
- $V =$ constante

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

Pressão => $\boxed{P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

Condensador

$$\boxed{V = -\int_{\ominus}^{\oplus} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{C = \frac{q}{V}}$$

Polarização

$$\vec{P} = n\,\vec{p} = n q \vec{d}$$

n: nº moléculas por m³

carga deslocada através de $d\vec{a}$

$$dq = \vec{P}\cdot d\vec{a}$$

- $\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

Densidade de carga devido à polarização

- $\vec{j}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} \rightarrow \vec{j} = (\vec{j}_l + \vec{j}_P)$

Corrente de polarização

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_l \rightarrow (\rho = \rho_l + \rho_P)$

D: Deslocamento elétrico $(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})$

Eq. Maxwell no material

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_l \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}_l \\ \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \end{cases}$$

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

χ: susceptibilidade elétrica

- $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$

ε_r: P. relativa

ε: Permeabilidade do meio

Linear, Isotrópico, Homogéneo

$$P_i = \underbrace{\varepsilon_0\sum_j \chi_{ij} E_j}_{\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}} + \varepsilon_0\sum_{j,k}\chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \dots$$

=> $\nabla^2 V = -\frac{\rho_l}{\varepsilon}$

Eq. Poisson num material

=> $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$

Campo elétrico num material

=> $W = \frac{\varepsilon}{2}\int E^2\, dv$

Energia num material

Magnetostática

Equações Importantes

Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}\,') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, dv'$$

Biot-Savart (linha)

$$\vec{B}(\vec{r}\,') = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{l}\,' \times |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{l}\,' \times \vec{r}}{r^3}$$

Potencial Vetor

$$\vec{A}(\vec{r}\,') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dv'$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{enc}$$

Equação ciclotrônica

$$mv = qBR$$

Vetor Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$$

$$P = \int_S \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

Magnetização

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\vec{V}_{(\text{volume})}}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Intensidade Magnética

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

Temperatura de Curie
⇒ quando um material perde toda a magnetização
Ferromagnetismo
(mantém a magnetização)

Equações Maxwell (Vácuo)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Potencial Vetor dipolo

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\cdot\ \vec{m} = I\int_S d\vec{a}$$

Torque

$$\vec{N} = (\vec{m} \times \vec{B}) \rightarrow \text{paramagnetismo (paralelo a B)}$$

Momento dipolo clássico

$$\Delta\vec{m} = -\frac{e^2 B R^2}{4 m_e}\hat{z} \rightarrow \text{diamagnetismo (oposto a B)}$$

Paramagnetismo > diamagnetismo

Equações de Maxwell
em materiais

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \rho \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{cases}$$

Trabalho Variável

$$\frac{dw}{dt} = \vec{E}\cdot\vec{j}\,dv$$

Teorema de Poynting

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)dv - \frac{1}{\mu_0}\oint_S (\vec{E}\times\vec{B})\,d\vec{a}$$

Densidade de energia do campo

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

Vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

Equações de onda (Vácuo)

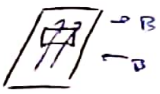
$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Psi(\vec{r},t) = a e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + b e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}$$

(Solução)

Equações úteis

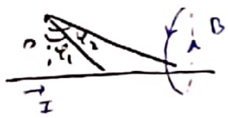
Fronteira

$$B_+ - B_- = \mu_0 \vec{j} \times \hat{n}$$

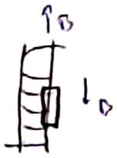


Linha

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$$



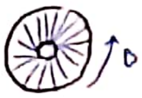
Solenoide



$$B = \mu_0 n I$$

Solenoide Toroidal

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}$$



Anel

$$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

Centro círculo

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Potencial Vetor

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{A} = \mu_0\vec{j}}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \mu_0\vec{j}$$

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dv'$$

Demonstrações

Força magnética não faz trabalho

$$dW_m = \vec{F}_m\cdot d\vec{l}$$

$$= \underbrace{q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot dt\,\vec{v}}_{\text{Perpendicular}}$$

$$= 0$$

Corrente na força magnética

$$d\vec{F}_m = (\vec{v}\times\vec{B})\,dq$$

$$= \int(\vec{v}\times\vec{B})\,dq$$

$$= \int(\vec{v}\times\vec{B})\lambda\,d\vec{l}$$

$$= \int(\lambda\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{l}$$

$$= \int(\vec{I}\times\vec{B})\,d\vec{l}$$

$$\vec{F}_m = I\int(d\vec{l}\times\vec{B})$$

Biot-Savart

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \cancel{\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}^{\,0}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{j}$$

$$\nabla^2\vec{B} = -\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{j}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dv'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dv'$$

Equações de onda

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$