Acções Básicas de Controlo e Resposta de Sistemas de Controlo

Teoria de Controlo

Licenciatura Engenharia Física - 3º ano

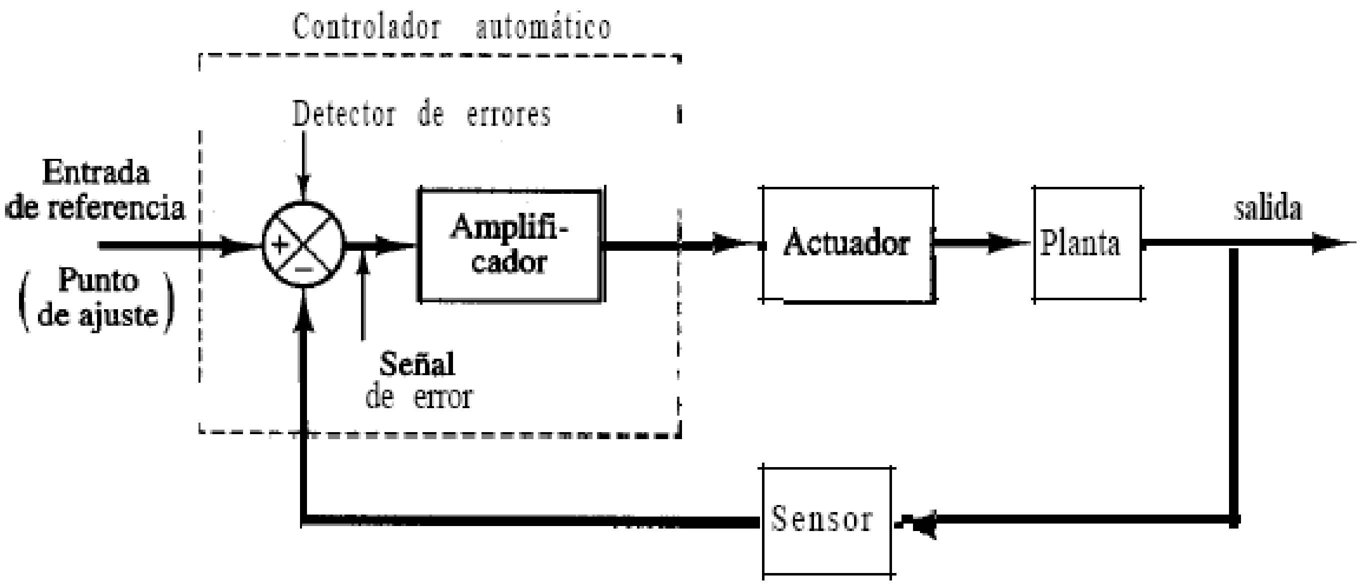
Thursday, April 07, 2022

Vinícius Silva | Automação Controlo e Robótica | ID7267@alunos.uminho.pt

Classificação de Controladores

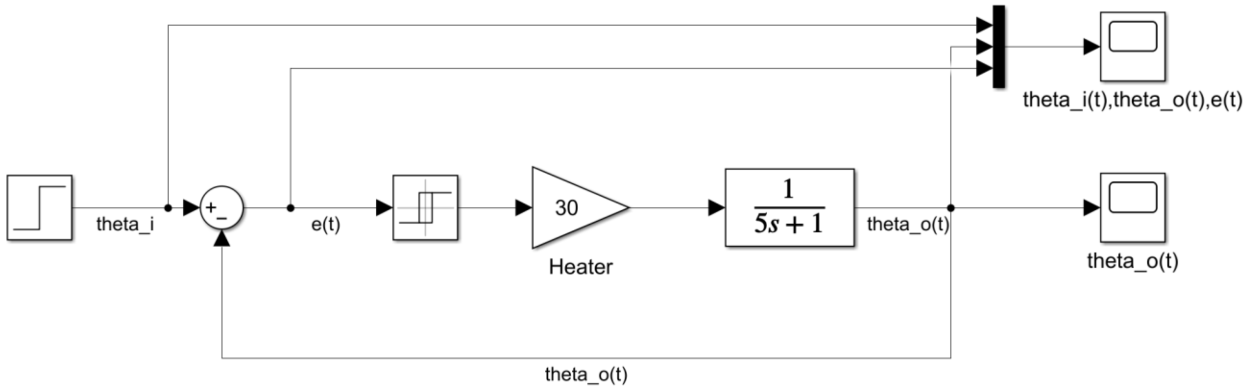
- De duas posições (on/off)
- Proporcionais (P)
- Integrais (I)
- Proporcionais-Integrais (PI)
- Proporcionais-Derivativos (PD)
- Proporcionais-Integrais-Derivativos (PID)

Exemplo de um diagrama de blocos de controlo



Acção de Controlo On/Off

- O controlador possui apenas dois estados (ligado ou desligado)
- Trata-se de um controlo simples e barato, sendo por isso muito utilizado quer industrialmente, quer domesticamente.



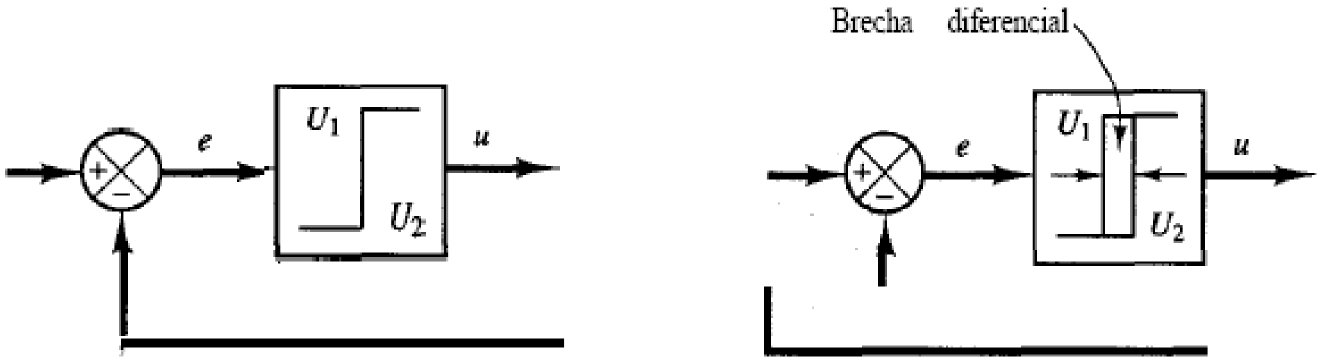
Acção de Controlo On/Off

- Suponha que o sinal de saída do controlador é u(t).
- u(t) apresenta apenas dois valores (máximo (ligado) e mínimo (desligado)).
- O valor máximo (U1) do controlador é estabelecido quando o erro e(t) apresenta um valor positivo.
- O valor mínimo (U2 geralmente 0) do controlador é estabelecido quando o erro e(t) apresenta um valor negativo.

$$
\begin{aligned}
u(t) &= U_1, \quad \text{para } e(t) > 0 \\
&= U_2, \quad \text{para } e(t) < 0
\end{aligned}
$$

Acção de Controlo On/Off

- Diagrama de blocos de controladores

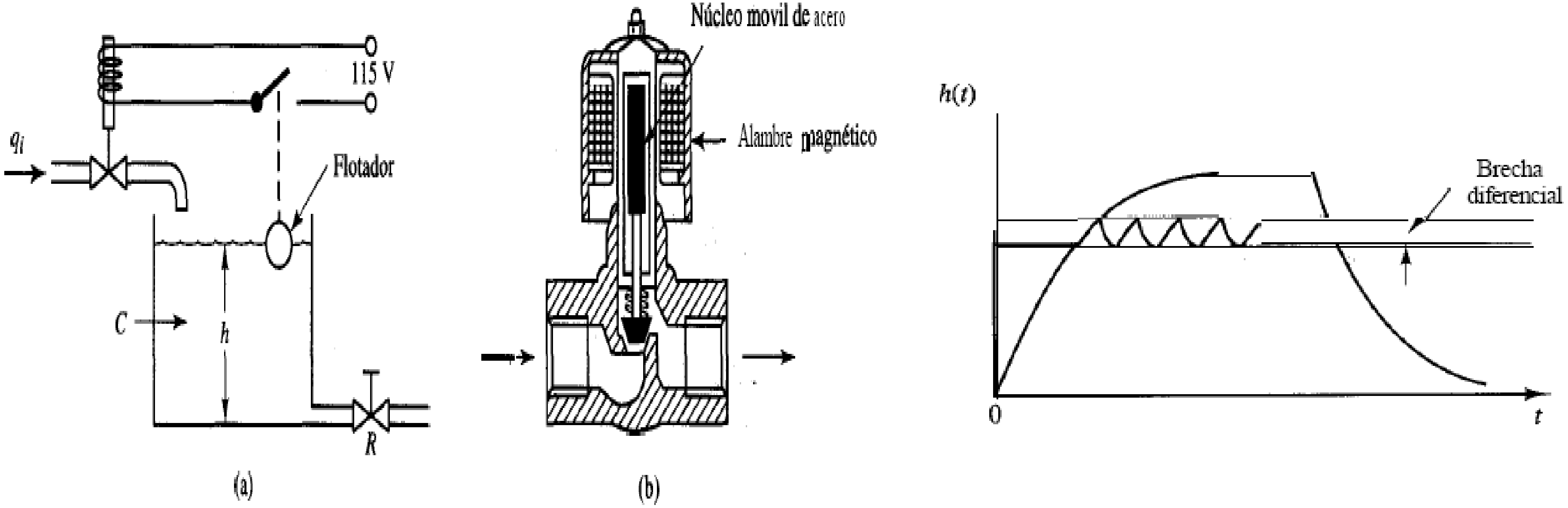


(a) (b)

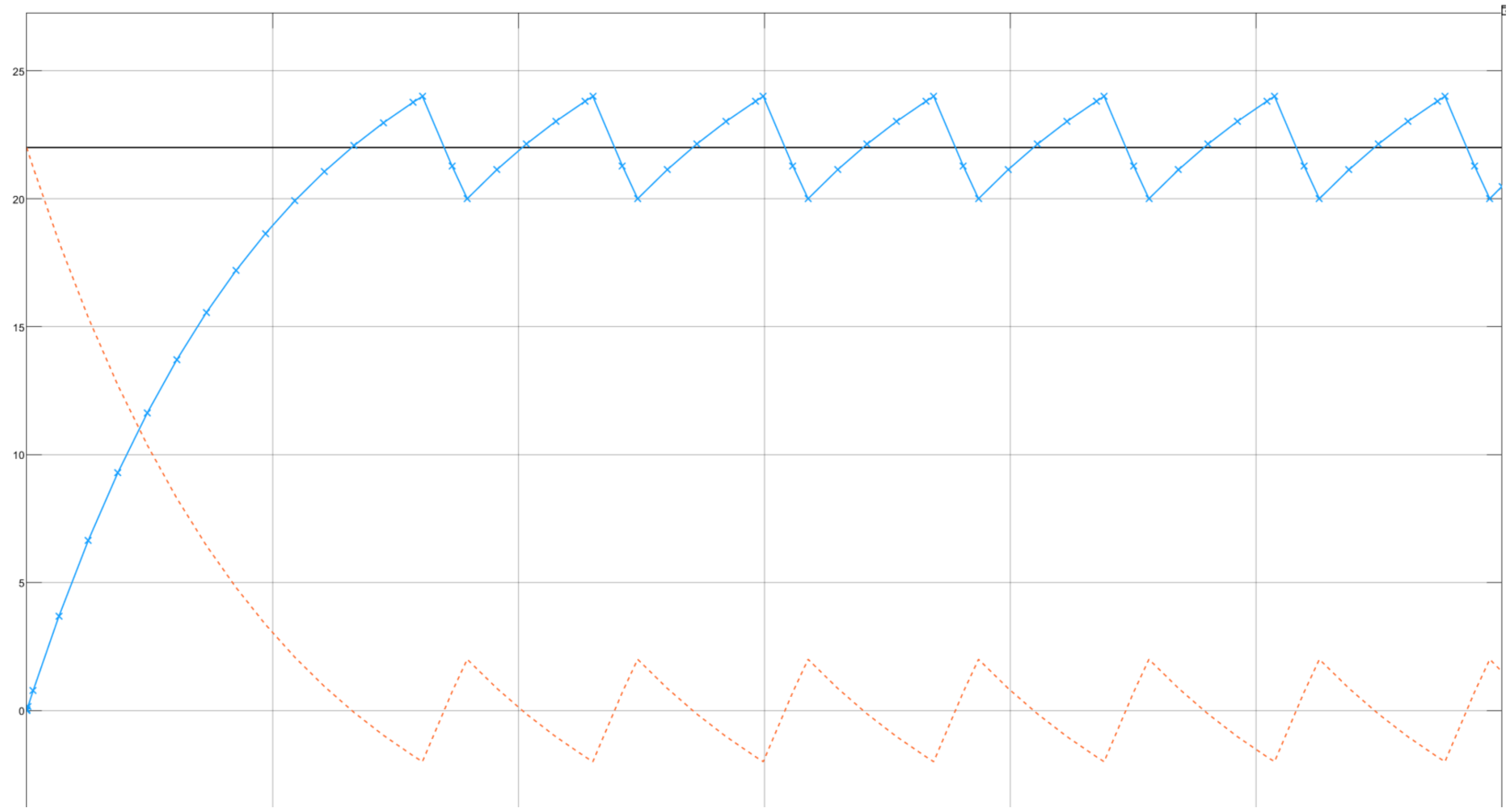
  - A gama para qual o sinal de erro pode mover-se para ocorrer uma comutação chama-se de brecha diferencial (acções mecânicas)

Acção de Controlo On/Off

- Considere o sistema de controlo de nível de água que utiliza uma válvula eletromagnética



Acção de Controlo On/Off



Controlador PID

- Controladores PID implementam acções de controlo proporcional, integral e derivativa.

$$c(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

Em qualquer uma delas estão presentes dois objectivos principais de acção, normalmente classificados como:

(i) acção reguladora, em que se pretende manter o valor das variáveis de saída em níveis pré-estabelecidos;

(ii) acção servo, em que se pretende que as variáveis de saída sigam trajectórias impostas aos 'pontos estabelecidos'.

Acção de Controlo Proporcional (P)

- Relação entre a saída do controlador u(t) e o sinal de erro e(t)

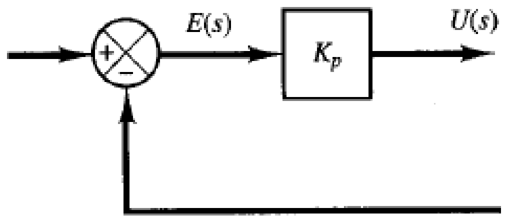
$$u(t) = K_p e(t)$$

- Em termos de Laplace

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

  - Kp- ganho proporcional

- O controlo proporcional trata-se de um amplificador com ganho ajustável
- Por si só, normalmente, possui sempre um erro.
- O aumento do ganho proporcional pode diminuir esse erro mas pode, contudo, levar o sistema a oscilar ou mesmo a se tornar instável.
  - Em d



Acção de Controlo Integral (I)

- Relação entre a derivada da saída do controlador du(t)/dt e o sinal de erro e(t):

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t)$$

- Sendo o sinal de saída do controlador:

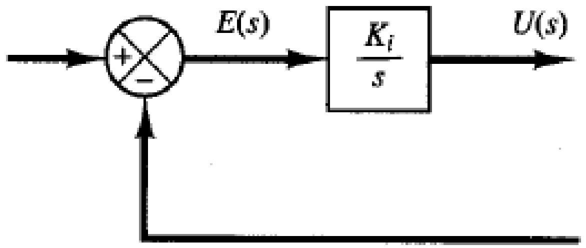
$$u(t) = K_i \int_0^t e(t)\, dt$$

- Em termos de Laplace

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

  - Ki – ganho integral

- Pela função verifica-se que para um erro nulo, a saída do controlador u(t) permanece estacionário.
- Verifica-se também que as variações do erro provocam saídas do controlador na mesma proporção.
- A ação integral é denominada por vezes de ação de controlo de reajuste.
- Em diagrama de blocos



Acção de Controlo Proporcional-Integral(PI)

- A acção de controlo PI de um controlador define-se por:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt$$

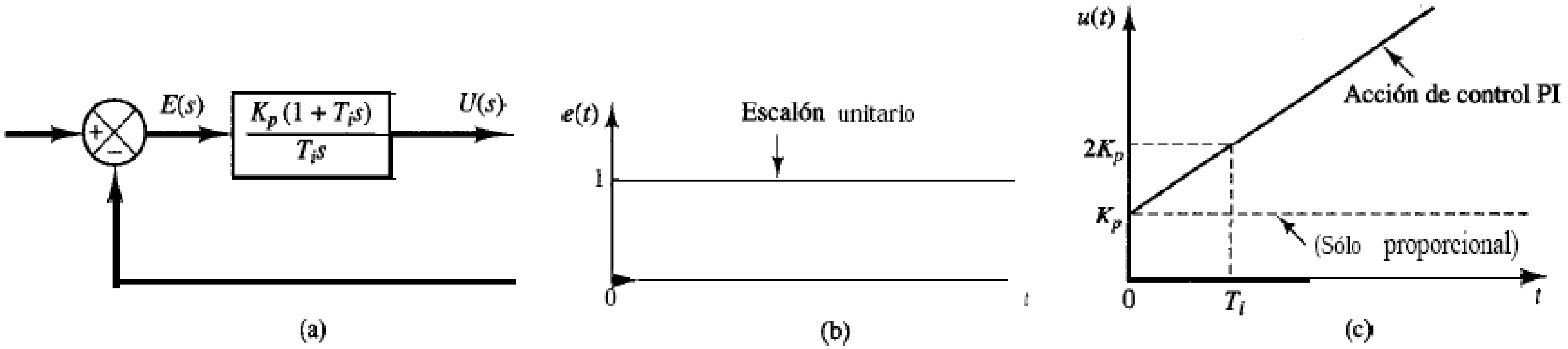
- Em termos de Laplace:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

  - Kp- ganho proporcional
  - Ti-Tempo integral

- Pela expressão verifica-se que Kp afeta as ações Proporcional e Integral da ação de controlo
- O inverso de Ti é denominado de velocidade de reajuste (repetições/min)
  - Corresponde à quantidade de vezes por minuto em que se duplica a ação proporcional de controlo.

Ação de Controlo Proporcional-Integral(PI)



Acção de Controlo Proporcional-Derivativa (PD)

- A ação de controlo PD de um controlador define-se por:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

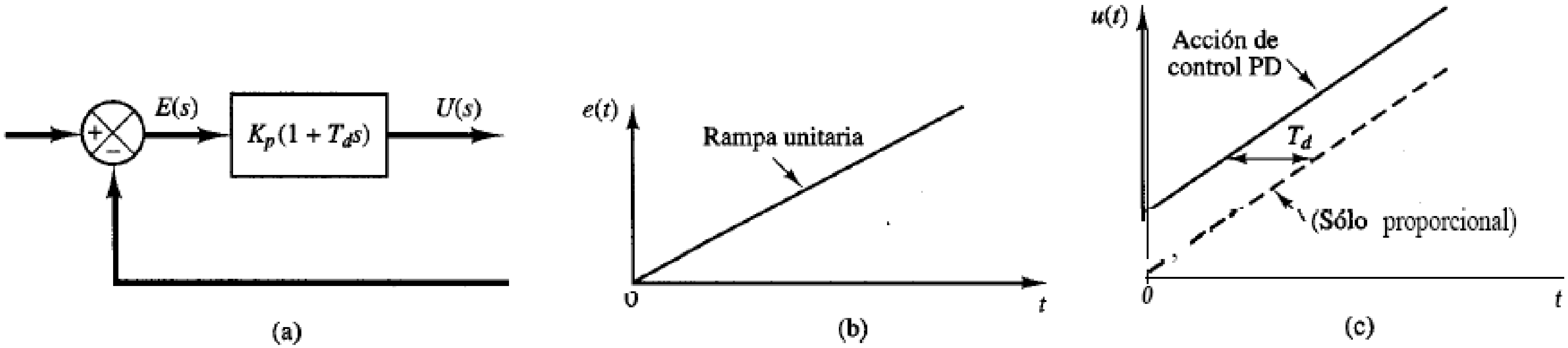
- Em termos de Laplace:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

  - Kp- ganho proporcional
  - Td- Tempo derivativo

- A ação derivativa tem um efeito de previsão.
- No entanto, amplifica os sinais de ruído e pode provocar um efeito de saturação do controlador.
- Esta ação nunca é utilizada sozinha, pois apenas é eficaz em períodos transitórios.

Acção de Controlo Proporcional-Derivativa (PD)



Controlador PID

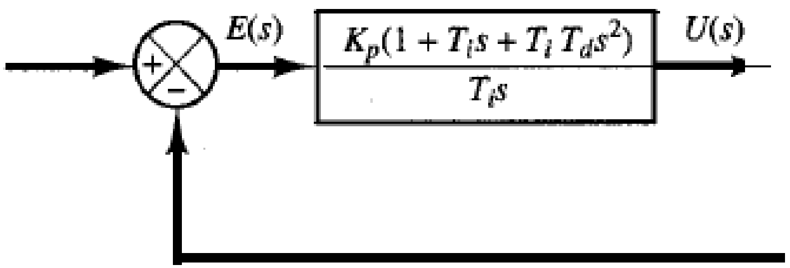
$$c(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

- **Acção Proporcional –P**
  - Acção imediata e proporcional ao valor do erro corrente
  - Acelera a resposta de um processo controlado
  - Reduz o tempo de subida e o erro máximo
  - Aumenta o “overshoot” e o tempo de estabilização
  - Produz um “off-set” inversamente proporcional ao ganho
- **Acção Integral –I**
  - Acção de controlo gradual, proporcional ao integral do erro
  - Responde ao passado do erro enquanto este for diferente de zero
  - Elimina o “off-set”. Reduz o tempo de subida.
  - Aumenta o “overshoot”, o período de oscilação e tempo de estabilização
  - Produz respostas lentas e oscilatória. Tende a instabilizar a malha
- **Acção Derivativa –D**
  - Acção antecipatória, resposta proporcional à derivada do erro
  - Usada para acelerar e estabilizar a malha.
  - Reduz o “overshoot” e o erro máximo e o período de oscilação
  - Não é indicada para processos com ruído

Controlador PID

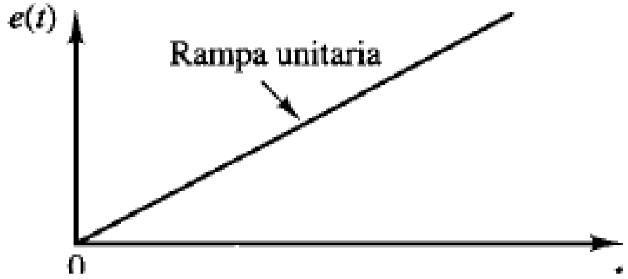
CL Response	Rise Time	Overshoot	Setting Time	S-S Error
Proporcional	Diminui	Aumenta	Pouco muda	Diminui
Integral	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui
Derivativo	Pouco muda	Diminui	Diminui	Não Influência

Acção de Controlo Proporcional-Integral-Derivativa (PID)



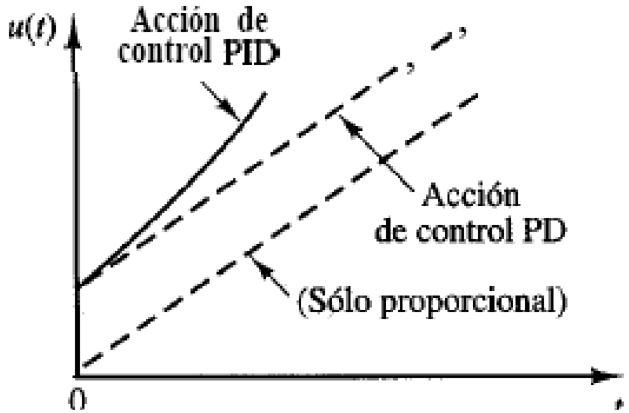
- Esta acção combina as vantagens das três acções de controlo individuais, no tempo é dada por:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$



- Em termos de Laplace:

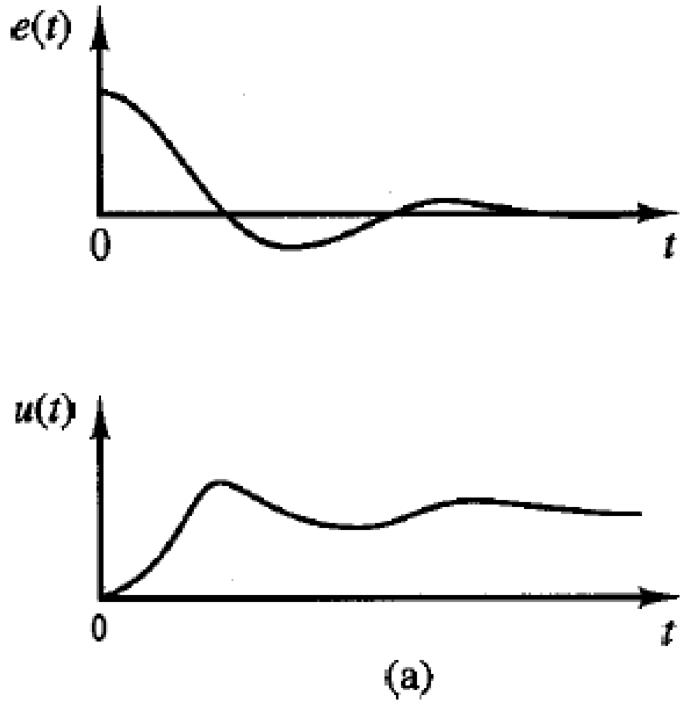
$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$



  - Kp- ganho proporcional
  - Ti- tempo integral
  - Td – tempo derivativo

Efeitos da acção de controlo Integral no desempenho de um sistema

- A ação Integral anula o erro em regime permanente

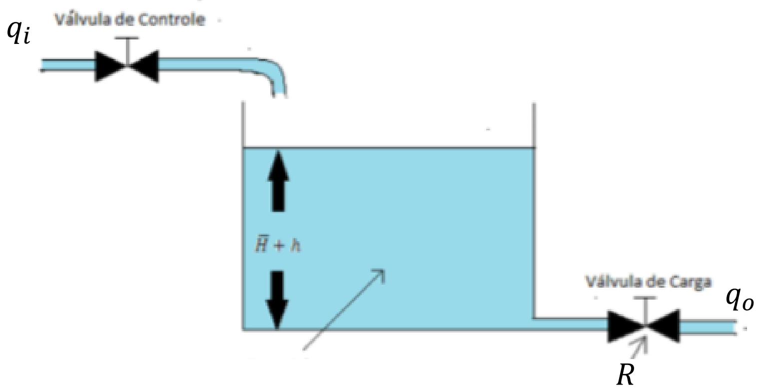


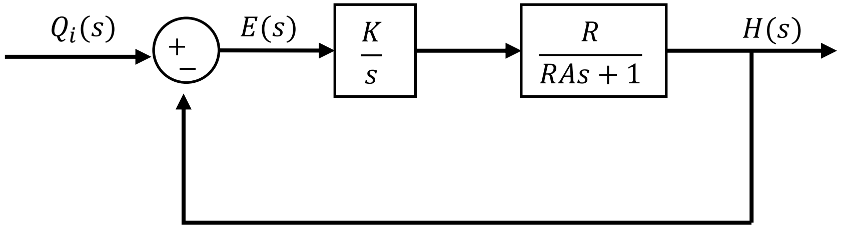
Pode verificar-se que o erro em regime permanente é eliminado pela ação integral.

Verifica-se também que para um erro nulo, a saída do controlador apresenta um valor diferente de zero.

Efeitos da acção de controlo Integral no desempenho de um sistema -exemplo

- Considere o seguinte sistema





$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{KR}{RAs^2 + s + KR}$$

$$\frac{E(s)}{Q_i(s)} = \frac{X(s) - H(s)}{X(s)}$$

$$= \frac{RAS^2 + s}{RAS^2 + s + KR}$$

Efeitos da ação de controlo Integral no desempenho de um sistema -exemplo

- O erro em estado estável para a resposta ao degrau unitário é obtido pela aplicação do teorema do valor final:

$$e_{ss} = lim_{s\to 0} sE(s)$$

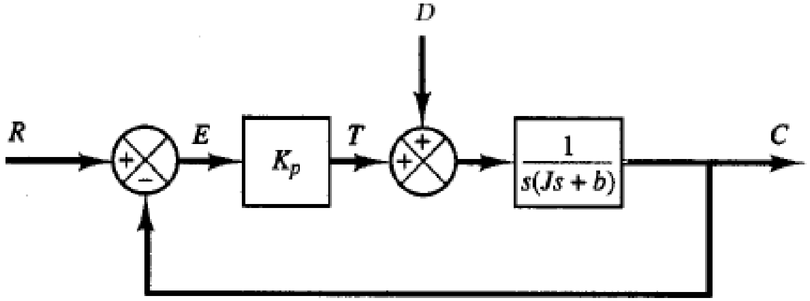
$$= lim_{s\to 0} s \frac{RAS^2 + s}{RAS^2 + s + KR} \frac{1}{s}$$

$$= 0$$

Verifica-se que o erro é nulo!

Resposta de um sistema com ação Proporcional, com perturbação

- Considere o seguinte sistema:



  - Supondo que R(s)=0

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

- O erro em regime permanente causado por uma perturbação em degrau de magnitude H é:

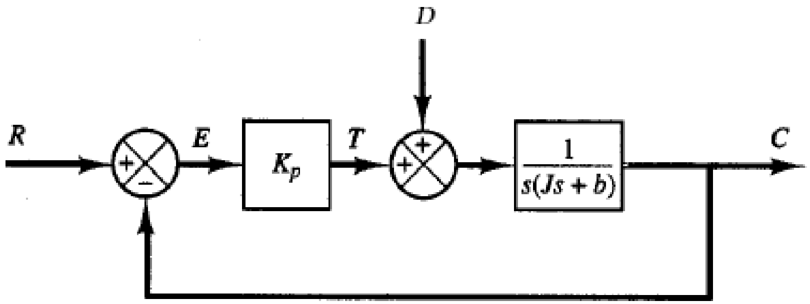
$$e_{ss} = lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$= lim_{s\to 0} s \frac{-1}{Js^2+bs+K_p} \frac{H}{s}$$

$$= -\frac{H}{K_p}$$

Resposta de um sistema com acção Proporcional, com perturbação – MATLAB

- Exemplo anterior:



- Pretende obter-se, as curvas de resposta do sistema quando este está sujeito a uma perturbação em degrau unitário, para diferentes valores de Kp.

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

Caso 1: $J = 1, b = 0.5, K_p = 1$ (sistema 1):

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

Caso 2: $J = 1, b = 0.5, K_p = 4$ (sistema 2):

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 4}$$

Caso 3: J=1, b=0.5, Kp=10 (sistema 3):

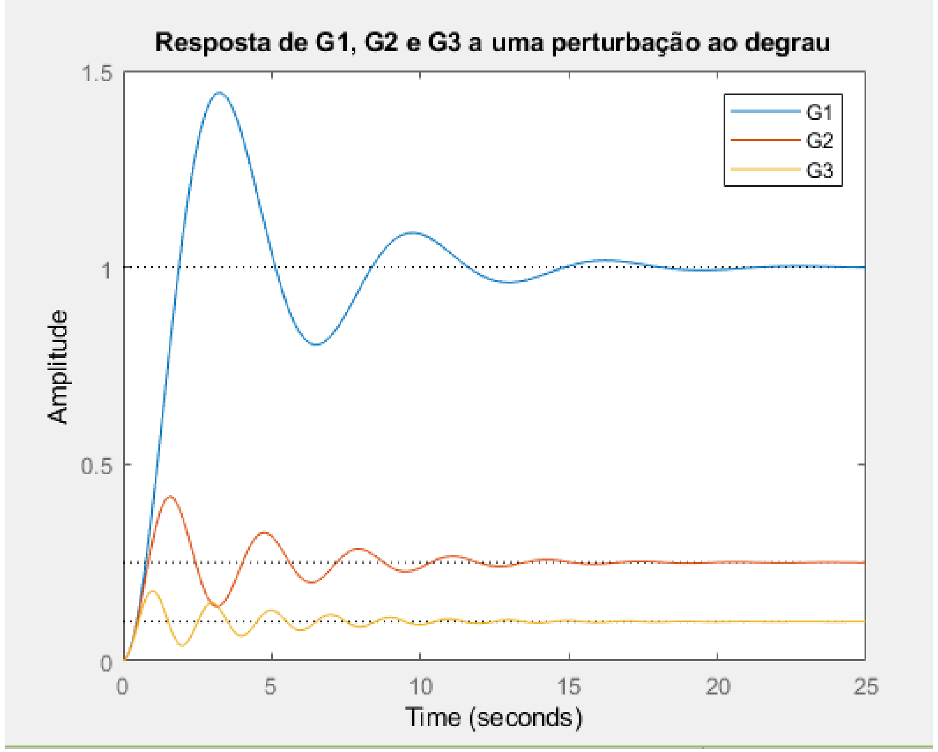
$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 10}$$

Resposta de um sistema com acção Proporcional, com perturbação – MATLAB

- Código

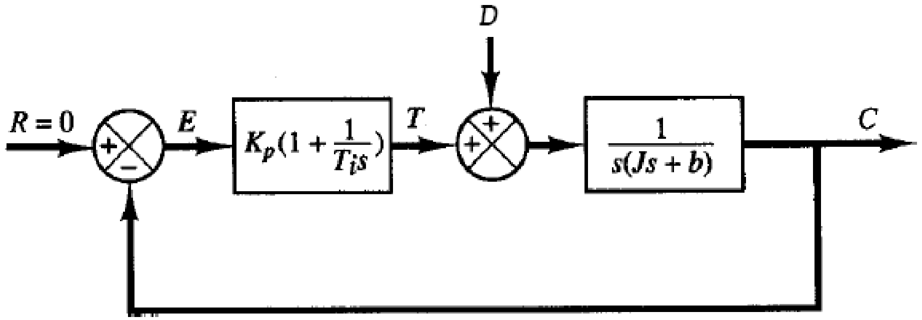
```
numA = [0 0 1];
demA = [1 0.5 1];

numB = [0 0 1];
demB = [1 0.5 4];

numC = [0 0 1];
demC = [1 0.5 10];

G1= tf(numA,demA);
G2= tf(numB,demB);
G3= tf(numC,demC);

figure(1);
step(G1,G2,G3);
legend('Resposta de G1
```

- Resultado



Resposta de um sistema PI com perturbação

- Considerando agora o mesmo sistema mas com controlo PI, com perturbação em degrau unitário.



O erro em estado estável para uma perturbação em degrau é eliminado com controlo PI!

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}$$

Com R=0

$$E(s) = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} D(s)$$

O erro em estado estável é:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{-s^2}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} \frac{1}{s} = 0$$

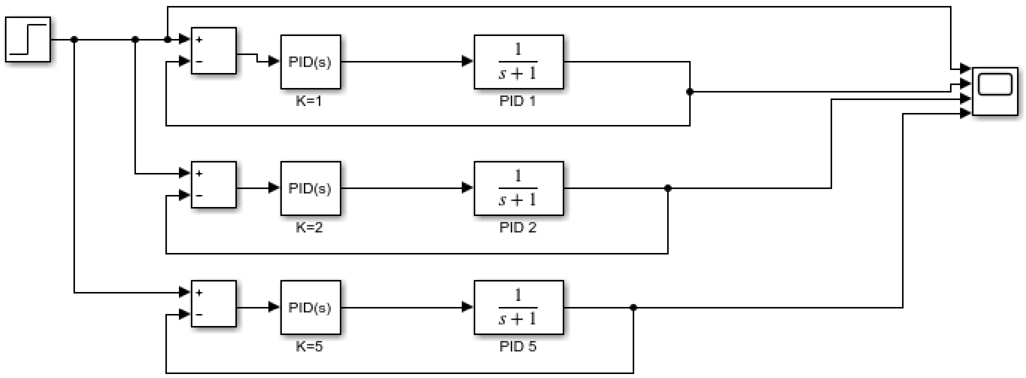
Resposta de um sistema PI com perturbação

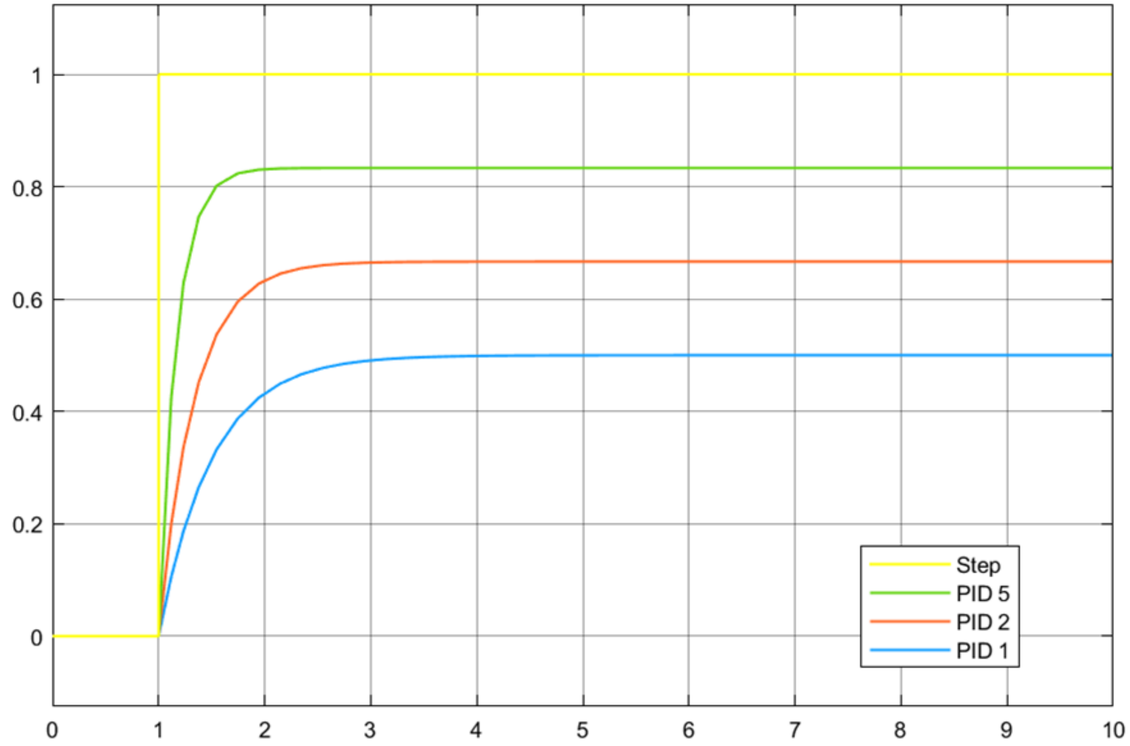
- No entanto é importante verificar que, o controlo integral agregado ao proporcional converteu o sistema inicialmente de 2ª ordem, num sistema de 3ª ordem, com a seguinte equação característica:

$$Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

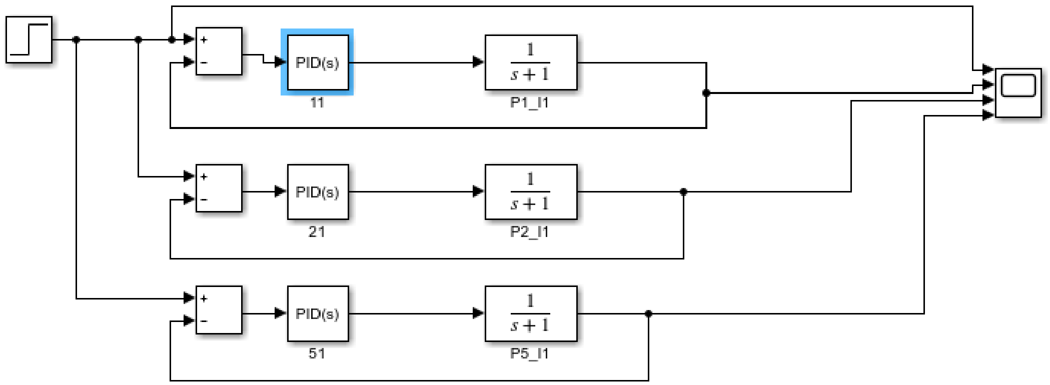
- O sistema é estável, se as raízes da equação tiverem parte real negativa.
- Sistemas instáveis não podem ser utilizados na prática.

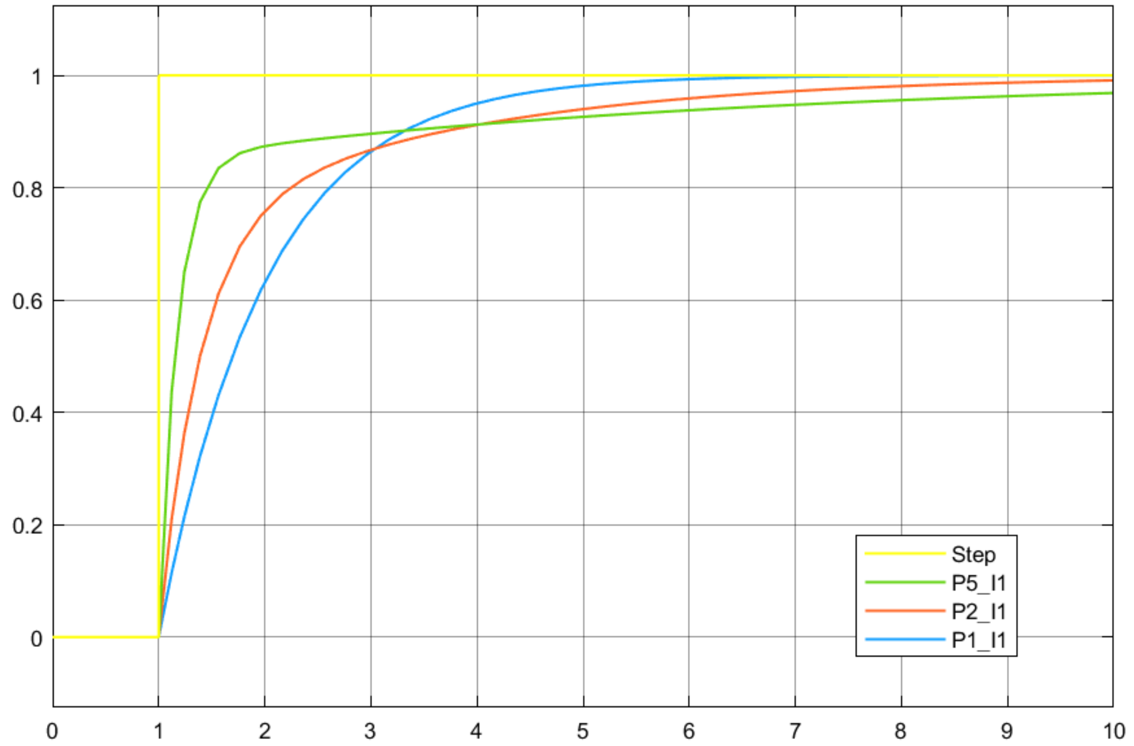
P-efeito do aumento do ganho



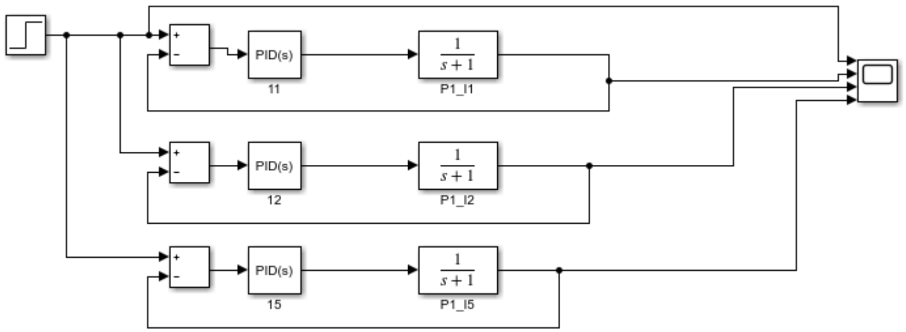


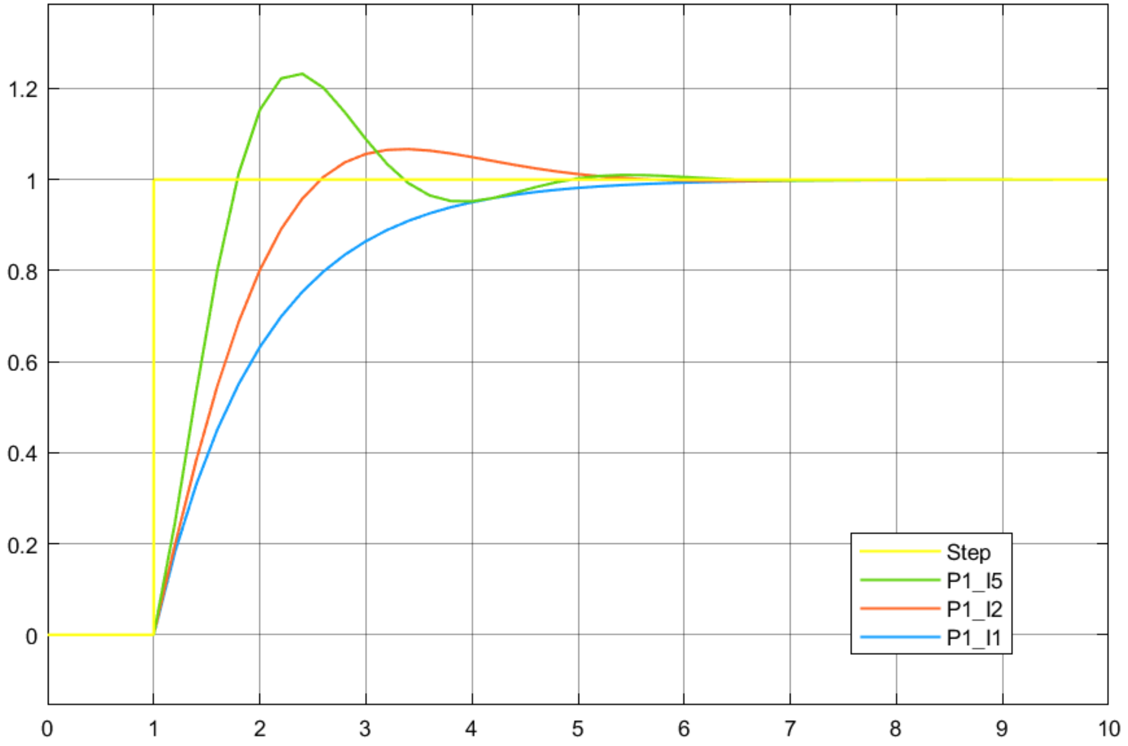
Efeito da ação P (I constante)



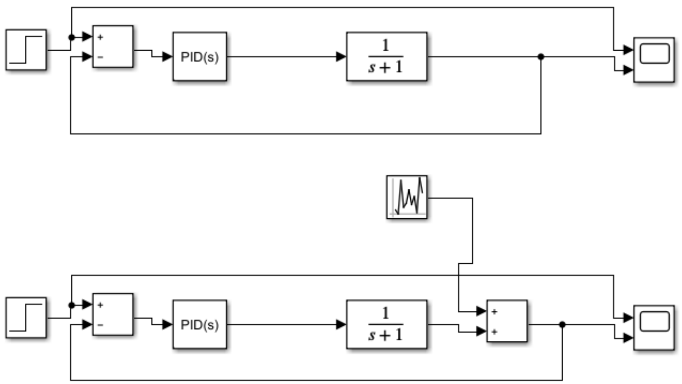


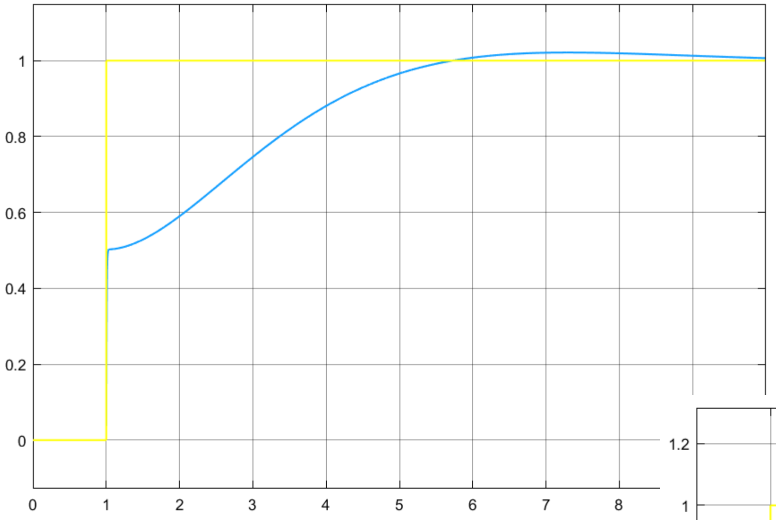
Efeito do aumento da ação I (P constante)

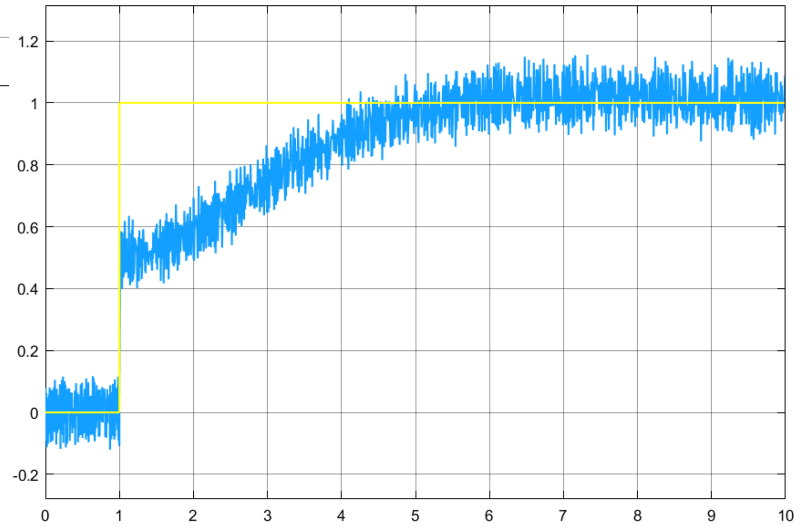




Efeito do ruido na ação derivativa

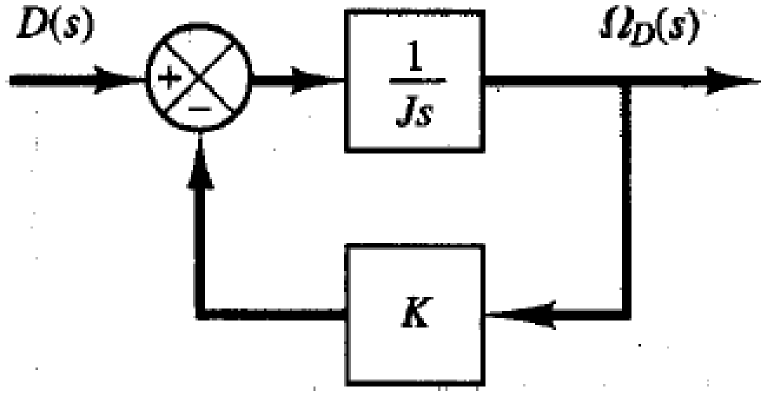






Exercícios

- 1-Considere o seguinte sistema:



- a) obtenha a função de transferência do sistema
- b) considere agora que é aplicada uma perturbação em degrau . Analise a resposta do sistema supondo que a referência de velocidade é nula.

Resolução Exe-1

- a)

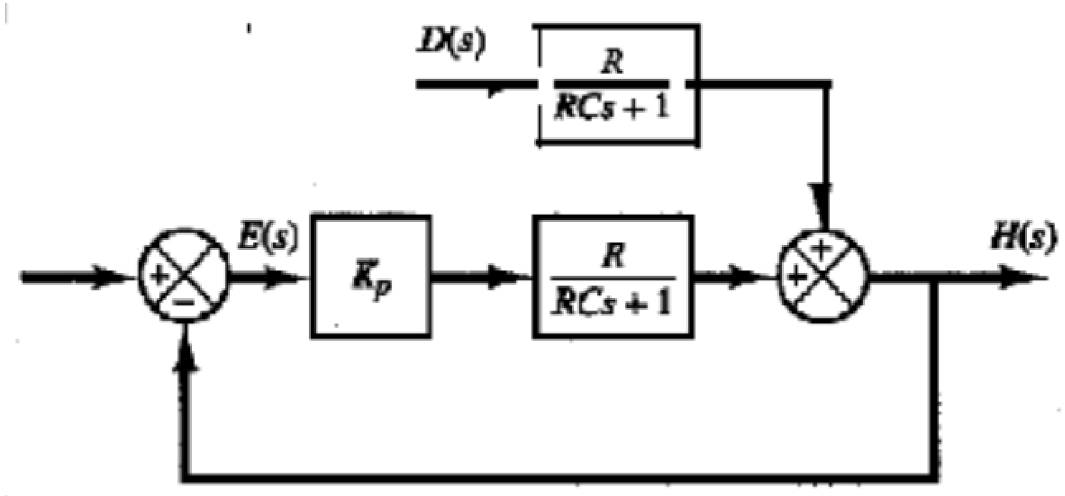
$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js + K}$$

- b) a saída em estado estável do sistema é obtida aplicando o teorema do valor final.

$$\begin{aligned}\omega_D(\infty) &= \lim_{s\to 0} s\Omega_D(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{Js + K}\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{K}\end{aligned}$$

Exercícios

- 2- Considere o seguinte sistema, calcule o erro em estado estável para:
  - com referência nula, para uma perturbação em degrau.
  - com perturbação nula, para uma entrada em degrau.
- Qual é o erro total?



$$G(s)=\frac{H(s)}{R(s)}+\frac{H(s)}{D(s)}=\frac{k_p\times\frac{R}{RCs+1}}{1+k_p\times\frac{R}{RCs+1}}+\frac{\frac{R}{RCs+1}}{1+k_p\times\frac{R}{RCs+1}}=\frac{k_pR}{RCs+1+k_pR}+\frac{R}{RCs+1+k_pR}$$

$$H(s)=\frac{k_pR}{RCs+1+k_pR}R(s)+\frac{R}{RCs+1+k_pR}D(s)$$

a) Erro para uma entrada em degrau unitário, com perturbação nula:

$$H(s)=\frac{k_p\times\frac{R}{RCs+1}}{1+k_p\times\frac{R}{RCs+1}}\times R(s)+\frac{\frac{R}{RCs+1}}{1+k_p\times\frac{R}{RCs+1}}\times 0$$

$$\mathrm{E(s)=R(s)-H(s)=R(s)}\left[1-\frac{k_pR}{RCs+1+k_pR}\right]=R(s)\left[\frac{RCs+1+k_pR-k_pR}{RCs+1+k_pR}\right]=R(s)\left[\frac{RCs+1}{RCs+1+k_pR}\right]$$

$$E(\propto)=\lim_{s\to 0}s\times\frac{RCs+1}{RCs+1+k_pR}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{1+k_pR}$$

b) Erro para uma entrada nula, com perturbação degrau unitário:

$$H(s)=\frac{k_p\times\frac{R}{RCs+1}}{1+k_p\times\frac{R}{RCs+1}}\times 0+\frac{\frac{R}{RCs+1}}{1+k_p\times\frac{R}{RCs+1}}\times D(s)$$

$$\mathrm{E(s)=0-H(s)=0-}=R(s)\left[\frac{RCs+1+k_pR-k_pR}{RCs+1+k_pR}\right]=-\frac{R}{RCs+1+k_pR}\times D(s)$$

$$E(\propto)=\lim_{s\to 0}s\times\frac{R}{RCs+1+k_pR}\times\frac{1}{s}=-\frac{R}{1+k_pR}$$

c) Erro total do sistema:

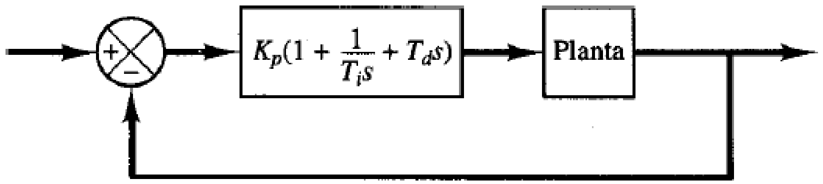
$$e(t)=\frac{1}{1+k_pR}-\frac{R}{1+k_pR}\qquad c(t)=1-\left[\frac{1}{1+k_pR}-\frac{R}{1+k_pR}\right]$$

Regras de Sintonização de controladores PID

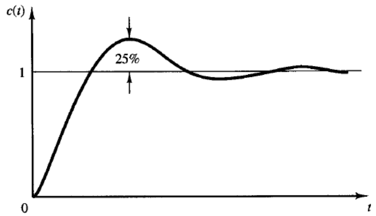
- Mais de 50% dos controladores industriais utilizam esquemas de controlo PID.
- Como quase todos os controladores são ajustados no local de operação, desenvolveram-se métodos de sintonização.

Regras de Sintonização de controladores PID

- Controlo PID de plantas
  - Quando um sistema possui uma planta complicada e que impede a sua determinação com simplicidade, deve recorrer-se a métodos de sintonização experimental.

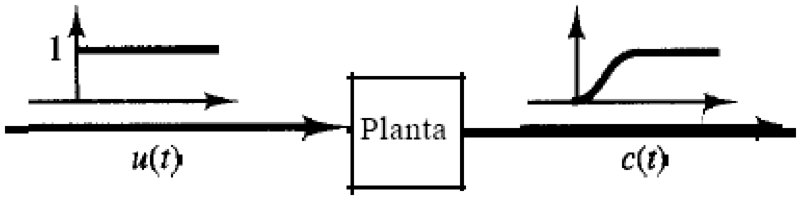


  - Os métodos experimentais são denominados de regras de Ziegler-Nichols.
    - Obtém-se um sobre-sinal máximo de 25% para uma resposta do degrau unitário.



Regras de Sintonização de controladores PID

- Regras de Ziegler-Nichols -1º método (open loop)
  - A reposta ao degrau unitário é obtida da seguinte forma:



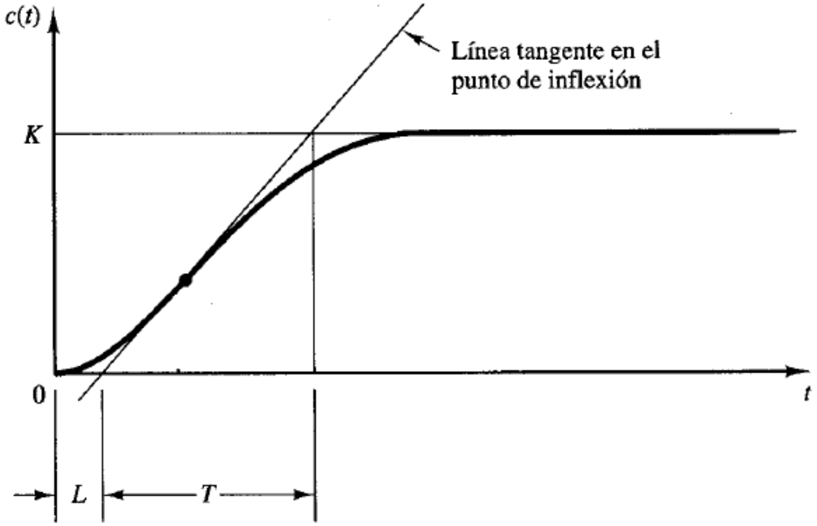
  - Se a planta não possuir integradores nem pólos dominantes complexos, a curva de resposta ao degrau unitário apresenta a forma de um S:

Se a resposta não apresentar uma curva deste género, o método não é pertinente.

Estas curvas podem ser geradas por simulação dinâmica.

Regras de Sintonização de controladores PID

- As curvas de resposta são caracterizados por dois parâmetros, o tempo de atraso L e a constante de tempo τ:



Para estas respostas, a função de transferência do sistema C(s)/U(s) é aproximada segundo um sistema de 1º ordem, com atraso:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1}$$

Regras de Sintonização de controladores PID

- Ziegler-Nichols propuseram fórmulas para determinar os parâmetros Kp, Ti e Td, a partir dos valores de K, L e τ (1º método):

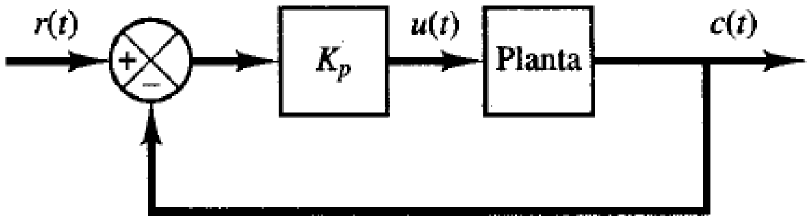
Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{\tau}{L}$	∞	0
PI	$0.9\frac{\tau}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{\tau}{L}$	$2L$	$0.5L$

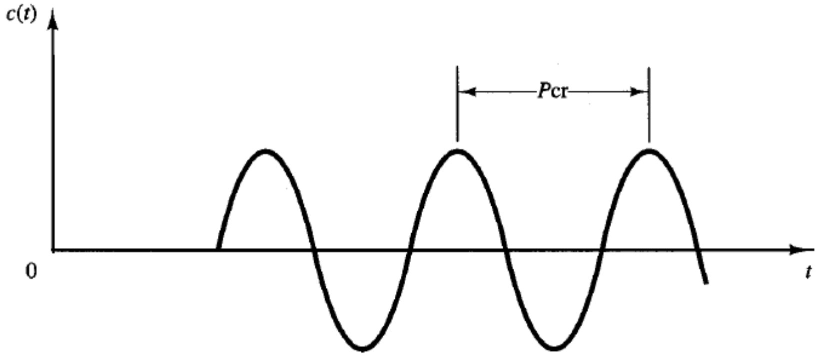
- Ou seja um controlador PID possui um pólo na origem e um zero duplo (s=-1/L):

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = 1.2\frac{\tau}{L}\left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls\right) = 0.6\tau\frac{\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s}$$

Regras de Sintonização de controladores PID

- Regras de Ziegler-Nichols -2º método (closed-loop)
  - Para este método utiliza-se somente a acção proporcional.
  - Incrementa-se Kp de 0 a um valor (Kcr- ganho crítico) que provoque oscilações permanentes na resposta do sistema, com período constante (Pcr- período crítico).
    - Caso não seja possível obter oscilações permanentes, não se utiliza este método.





Regras de Sintonização de controladores PID

- Ziegler-Nichols propuseram fórmulas para determinar os parâmetros Kp, Ti e Td, a partir dos valores de Kcr e Pcr (2º método):

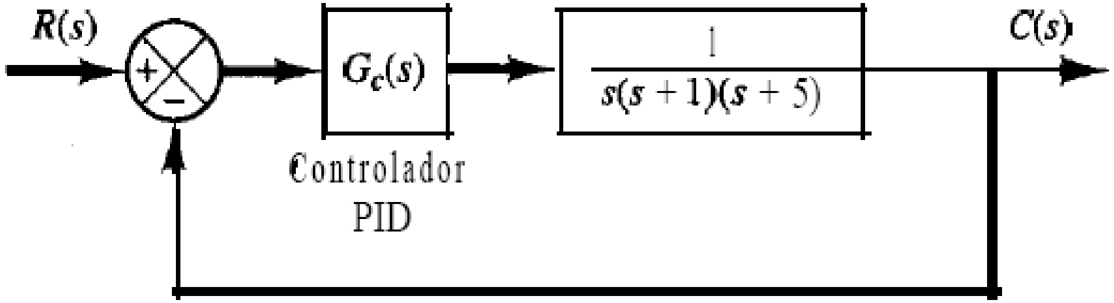
Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0{,}5K_{cr}$	∞	0
PI	$0{,}45K_{cr}$	$\frac{1}{1{,}2}P_{cr}$	0
PID	$0{,}6K_{cr}$	$0{,}5P_{cr}$	$0{,}125P_{cr}$

- Ou seja um controlador PID possui um pólo na origem e um zero duplo (s=-4/Pcr):

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = 0{,}6K_{cr}\left(1 + \frac{1}{0{,}5P_{cr}s} + 0{,}125P_{cr}s\right) = 0{,}075K_{cr}P_{cr}\frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}}\right)^2}{s}$$

Regras de Sintonização de controladores PID- Exemplo

- Considere o seguinte sistema de controlo:



- Determine os parâmetros do controlador PID (Kp, Ti e Td) de forma a que o sobre-sinal máximo não ultrapasse os 25% (em média).

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

Regras de Sintonização de controladores PID-Exemplo

- Dado que a planta possui um integrador, não é possível utilizar o 1º método, pelo que utilizámos o 2º. Assim:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5)+K_p}$$

- O valor de Ko que torna o sistema marginalmente estável é obtido pelo critério de estabilidade de Routh. Equação característica:

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$$

- Efetuando o arranjo de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \dfrac{30-K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

- Analisando os termos da 1ª coluna é possível verificar que ocorre uma oscilação para Kp =30, dado que permite anular o termo, logo Kcr=30.

Critério de Estabilidade do Routh-Hurwitz

- Escreva o polinómio característico na seguinte forma:
  - $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$
- Considerando os coeficientes positivos, então arranje-os conforme o diagrama:

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \; \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \; \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \; \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \; \ldots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \; \ldots \\
\ldots & & & & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}
$$

$$b1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

Regras de Sintonização de controladores PID- Exemplo

- Determinando o ganho crítico a equação característica fica:

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$$

- Para encontrar a frequência crítica substitui-se s=jw na equação característica:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0$$

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

- Obtendo w^2=5, assim:

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8099$$

Regras de Sintonização de controladores PID-Exemplo

- Utilizando, os valores de Kcr e Pcr determinados e aplicando as fórmulas da tabela do 2º método obtém-se:

$$K_p = 0.6K_{cr} = 18$$

$$T_i = 0.5P_{cr} = 1.405$$

$$T_d = 0.125P_{cr} = 0.35124$$

- Pelo que a função de transferência do controlador PID é:

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$= 18\left(1 + \frac{1}{1.405s} + 0.35124s\right)$$

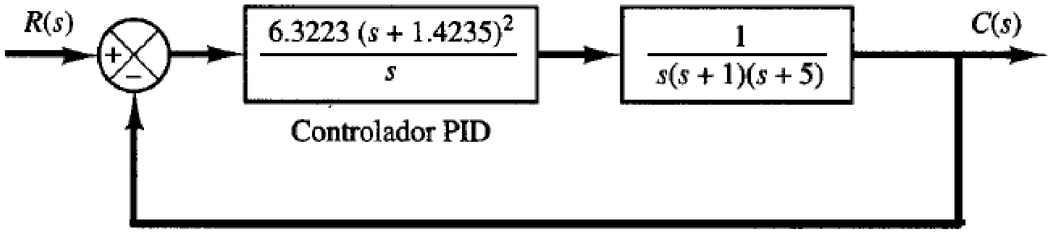
$$= \frac{6.3223(s + 1.4235)^2}{s}$$

1 pólo em zero (origem)

1 zero duplo em s=-1.4235

Regras de Sintonização de controladores PID- Exemplo

- O diagrama de blocos do sistema em malha fechada é:



- A que corresponde a equação:

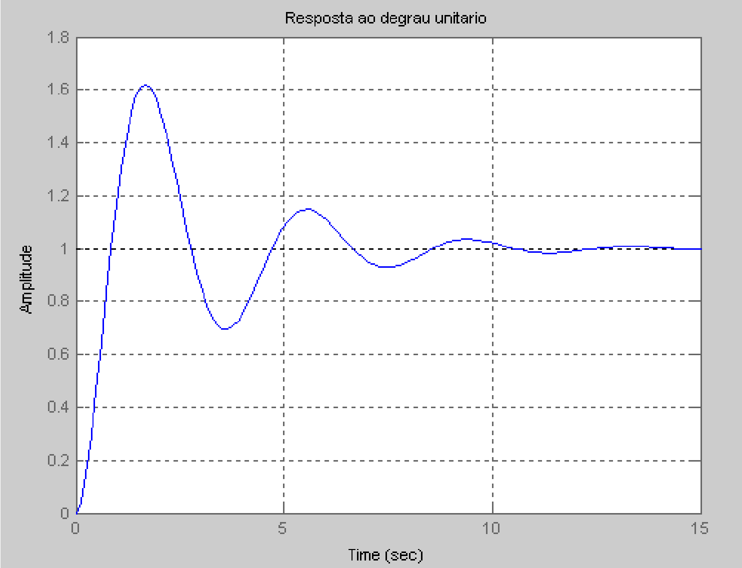
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.3223s^2 + 18s + 12.811}{s^4 + 6s^3 + 11.3223s^2 + 18s + 12.811}$$

- A resposta ao degrau unitário é obtida em matlab:

```
num=[0 0 6.3223 18 12.811];
den=[1 6 11.3223 18 12.811];
step(num,den)
grid
title('Resposta ao degrau unitario')
```

Regras de Sintonização de controladores PID- Exemplo

- Resposta do sistema

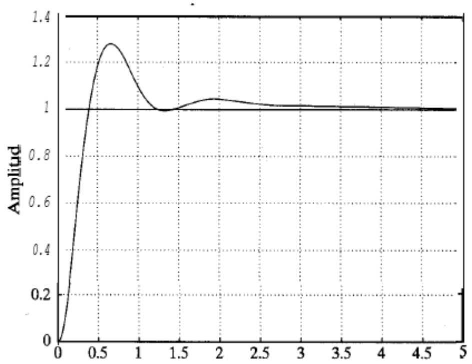


- Pode verificar-se que o sistema possui um sobre-sinal de 62%, logo excessivo, pelo que é necessário proceder a novo ajuste do controlador por tentativas (ex: matlab)

- Após algumas iterações verifica-se que para os factores de aproximadamente o dobro:

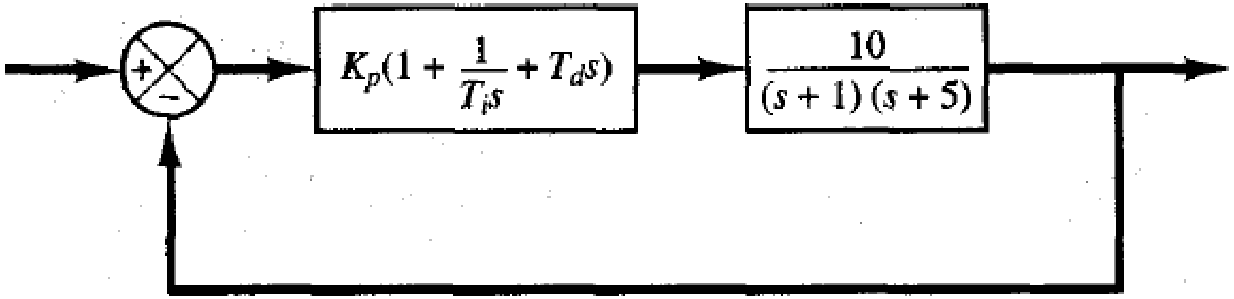
$$K_p = 39.42, \quad T_i = 3.077, \quad T_d = 0.7692$$

- Obtém-se uma resposta satisfatória (overshoot de cerca de 28%), podendo afirmar-se que o método de Ziegler-Nichols constituiu um bom ponto de partida para os parâmetros de controlo:



Exercícios

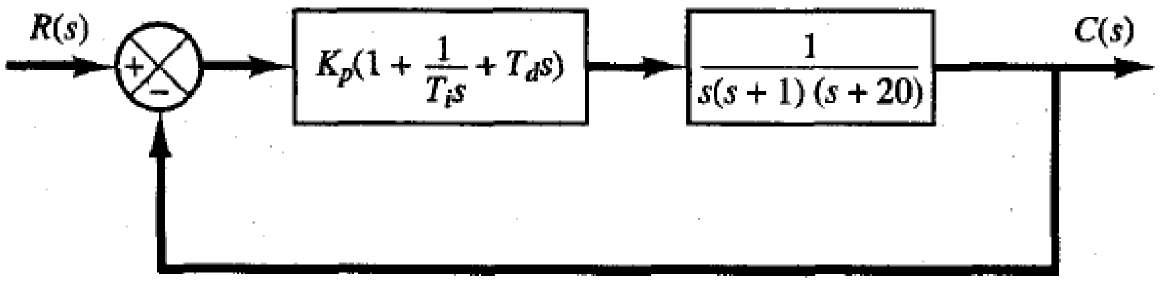
- 2- Considere o seguinte sistema de controlo:



- Utilizando as regras de Zieger-Nichols, determine os valores de Kp, Ti e Td.
- Apresente a resposta do sistema para um degrau unitário (matlab)
- Pretende-se que o sobre-sinal máximo seja 25%, se necessário efectue ajustes finos.

Exercícios

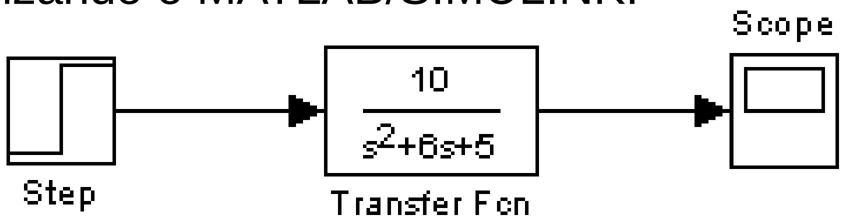
- 3- Considere o seguinte sistema de controlo:



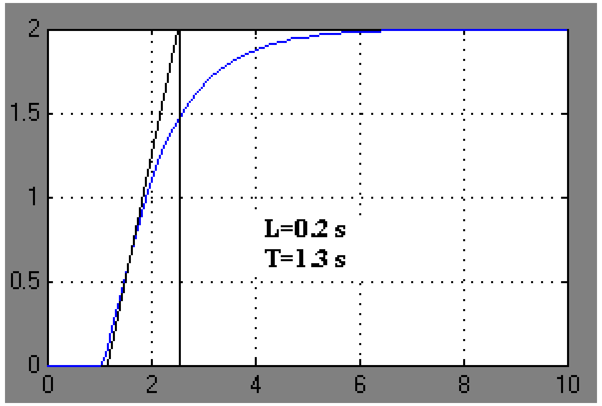
  - Utilizando as regras de Ziegler-Nichols determine os valores de Kp, Ti, Td.
  - Apresente a resposta ao degrau unitário do sistema.
  - Realize ajustes finos dos parâmetros determinados de forma a obter um sobre-sinal máximo de 15%.

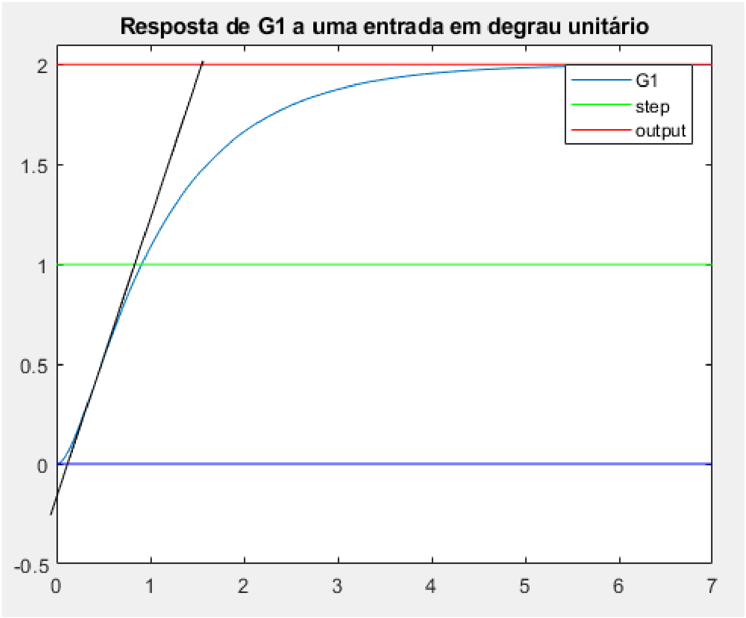
Resolução Exercício 2

Dado que G(s) não possui integradores nem pólos complexos pode utilizar-se o 1º método de ZN, assim utilizando o MATLAB/SIMULINK:



Obtém-se a seguinte resposta em malha aberta que permite determinar os valores de L e T.





Resolução Exercício 2

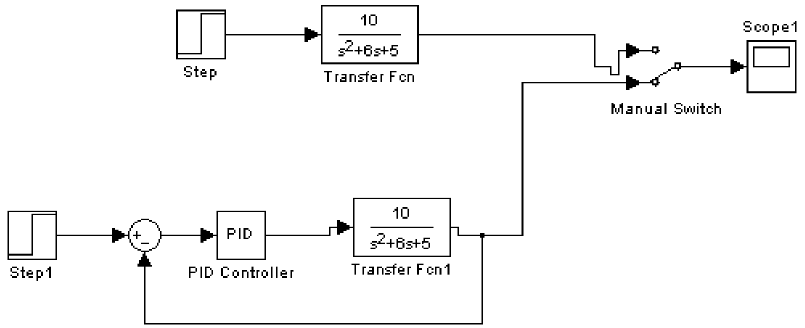
Segundo a tabela:

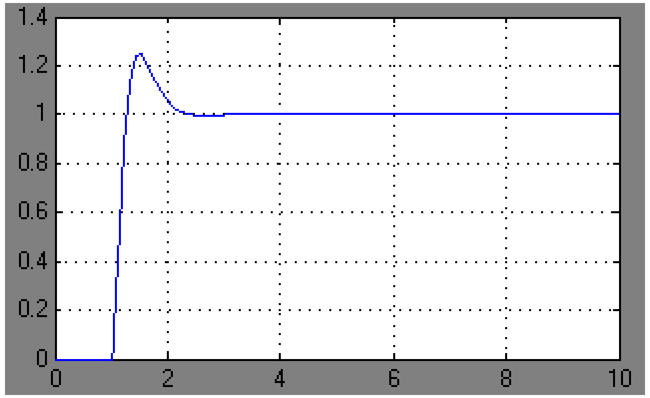
Tipo de controlador	K_p	Ti	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Obtém-se:

Tipo de Controlador	Kp	Ti	Td
P	6.5	-	-
PI	5.85	0.67	-
PID	7.8	0.4	0.1

Simulando:

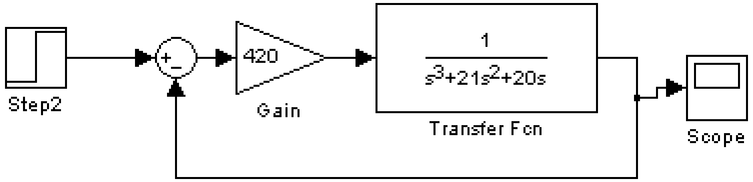


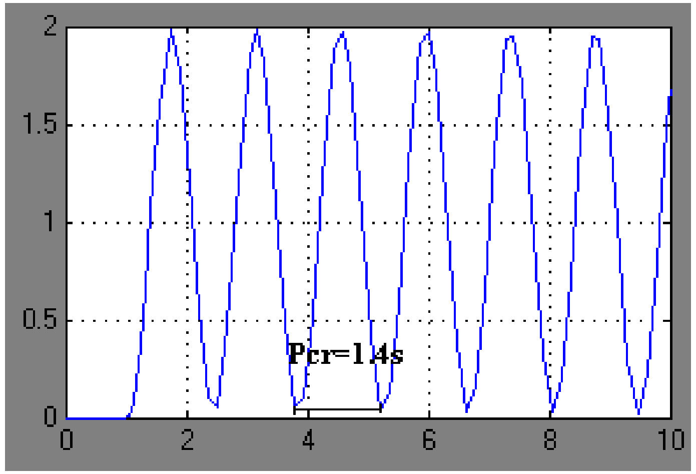


Overshoot <25% e erro em regime permanente <2%, ou seja um ótimo ponto de sintonização.

Resolução Exercício 3- método experimental

Dado que a planta do sistema possui um integrador não é possível aplicar o 1º método de Ziegler-Nichols, aplicando-se assim o 2º. Verifica-se que para um Kp= 420, a resposta do sistema apresenta oscilações constantes ou seja Kcr=420.





Resolução Exercício 3

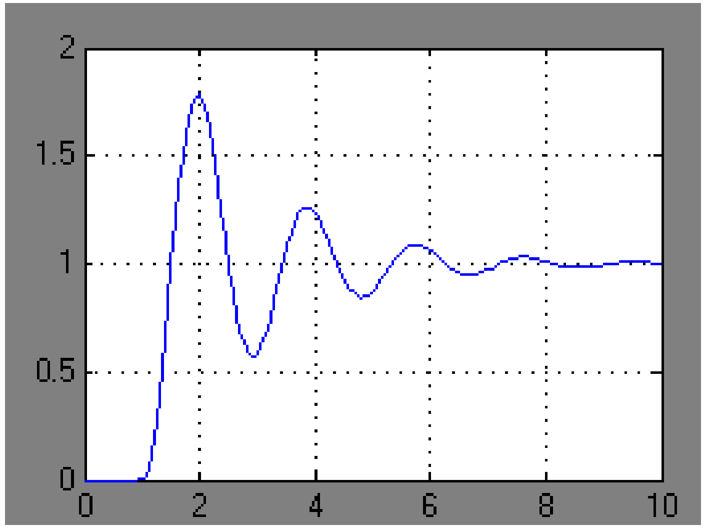
Utilizando a seguinte tabela:

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Obtém-se:

Tipo de Controlador	Kp	Ti	Td
P	210	-	-
PI	189	1.17	-
PID	252	0.7	0.175

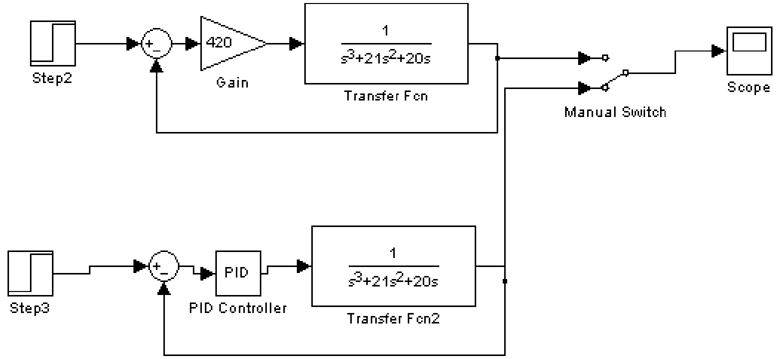
O que permite obter a seguinte resposta:

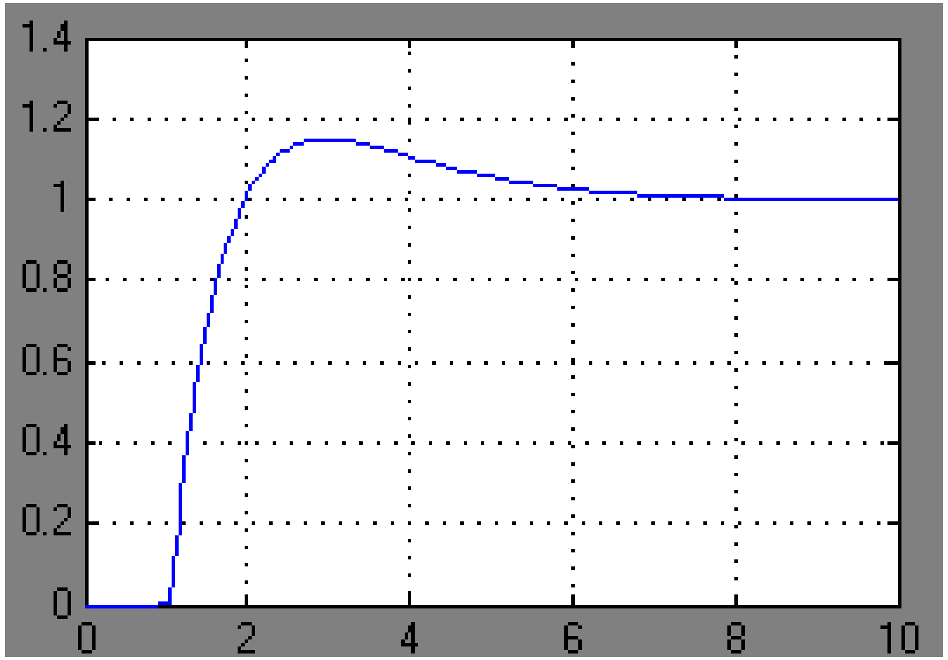


Embora o sistema apresente erro nulo em regime permanente, possui um grande *overshoot* , pelo que devem realizar-se ajustes finos.

Resolução Exercício 3

Para Kp=700, Ti=1.94s e Td=0.5s obtém-se uma resposta com *overshoot* <15% e erro em regime permanente <2%.





Resolução Exercício 3-método analítico

- Dado que a planta possui um integrador, não é possível utilizar o 1º método, pelo que utilizámos o 2º. Assim:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+20) + K_p}$$

- O valor de Kp que torna o sistema marginalmente estável é obtido pelo critério de estabilidade de Routh. Equação característica:

$$s^3 + 21s^2 + 20s + K_p = 0$$

- Efectuando o arranjo de Routh:

$$\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 20 \\
s^2 & 21 & K_p \\
s^1 & \dfrac{420 - K_p}{21} & \\
s^0 & K_p &
\end{array}$$

- Analisando os termos da 1ª coluna é possível verificar que ocorre uma oscilação para Kp =420, dado que permite anular o termo, logo Kcr=420.

Resolução Exercício 3-método analítico

- Determinando o ganho crítico a equação característica fica:

$$s^3 + 21s^2 + 20s + 420 = 0$$

- Para encontrar a frequência crítica substitui-se s=jw na equação característica:

$$(j\omega)^3 + 21(j\omega)^2 + 20(j\omega) + 420 = 0$$

$$21(20 - \omega^2) + j\omega(20 - \omega^2) = 0$$

- Obtendo w^2=20, assim:

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{20}} = \boxed{1.404963}$$

Resolução Exercício 3-método analítico

- Utilizando, os valores de Kcr e Pcr determinados e aplicando as fórmulas da tabela do 2º método obtém-se:

$$K_p = 0.6K_{cr} = \boxed{252}$$

$$T_i = 0.5P_{cr} = \boxed{0.7}$$

$$T_d = 0.125P_{cr} = \boxed{0.175}$$