Jaime Santos
Universidade do Minho

Licenciatura em Física
Ano letivo 2022/2023

Física Quântica II

Exercícios

Exercício 8: *Projetores*

Um projetor num estado $|\, \varphi_\alpha \,\rangle$, pertencente a uma base do espaço de Hilbert de um problema de Física Quântica, é um operador linear, definido pela seguinte equação

$$\hat{P}_\alpha \,|\, \varphi_\beta \,\rangle = \delta_{\alpha\beta} \,|\, \varphi_\beta \,\rangle \,, \tag{28}$$

ou seja, o operador transforma o estado $|\, \varphi_\alpha \,\rangle$ nele próprio e anula qualquer outro estado da base.

a) Se $|\, \Psi \,\rangle$ é um estado arbitrário que se escreve, na base $\{|\, \varphi_\gamma \,\rangle\}$, com $\gamma = 1, \ldots, N$, onde N é a dimensão do espaço de Hilbert em questão (N pode mesmo ser infinito), como $|\, \Psi \,\rangle = \sum_\gamma c_\gamma \,|\, \varphi_\gamma \,\rangle$, e em que $c_\gamma = \langle \varphi_\gamma \,| \Psi \rangle$, mostre que $\hat{P}_\alpha \,|\, \Psi \,\rangle = c_\alpha \,|\, \varphi_\alpha \,\rangle$.

b) Usando a alínea anterior, mostre que $\hat{P}_\alpha \hat{P}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \hat{P}_\alpha$.

Pista: Note que $|\, \Psi \,\rangle$ é um estado arbitrário.

c) Mostre que os valores próprios de $\hat{P}_\alpha$ são 0 ou 1. Genericamente, um projetor é definido como um operador hermítico com valores próprios 0 e 1.

d) Mostre que $\hat{P} = \sum'_\alpha \hat{P}_\alpha$, em que a soma se estende a alguns dos estados da base, mas não necessariamente a todos, também é um projetor.

Pista: O que é $\hat{P}^2$? Quais são pois os seus valores próprios?

e) Se a soma da alínea anterior se estender a todos os estados da base, mostre que $\sum_\alpha \hat{P}_\alpha = \hat{\mathbb{1}}$ (resolução da identidade ou relação de completude).

Pista: Aplique $\sum_\alpha \hat{P}_\alpha$ a $|\, \Psi \,\rangle$, sendo este estado arbitrário.

f) Mostre que a probabilidade $p = \sum'_\alpha |\langle \varphi_\alpha \,| \Psi \rangle\,|^2$, de o sistema se encontrar num dos estados que fazem parte da soma parcial acima, pode ser escrita como $p = \langle \Psi |\, \hat{P} \,| \Psi \rangle$, ou seja, a probabilidade pode ser escrita ela própria como o valor médio de um certo operador linear.

g) Se um certo operador linear $\hat{A}$ tem por base própria $\{|\, \varphi_\gamma \,\rangle\}$, com valores próprios a_α, ou seja, $\hat{A} \,|\, \varphi_\alpha \,\rangle = a_\alpha \,|\, \varphi_\alpha \,\rangle$, mostre que $\hat{A} = \sum_\alpha a_\alpha \hat{P}_\alpha$.

Pista: Qual é o efeito de $\hat{A}$ aplicado a $|\, \Psi \,\rangle = \sum_\alpha c_\alpha \,|\, \varphi_\alpha \,\rangle$, em que este estado é genérico?

Exercício 9: *Avatares do oscilador harmónico*

Considere um oscilador harmónico de massa m e frequência ω_0, cujo Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2 \,, \tag{29}$$

onde $\hat{x}$ e $\hat{p}$ são os operadores da coordenada e do momento em 1d, com $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \,\hat{\mathbb{1}}$.

Introduzindo os operadores de destruição e criação, $\hat{a}_0 = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}}\,\hat{p}$, $\hat{a}_0^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}}\,\hat{p}$, pode-se escrever

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \frac{\hat{\mathbb{1}}}{2} \right) , \tag{30}$$

com $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$.

a) Para os estados próprios de $\hat{n}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$, $|j\rangle$, de valor próprio inteiro j, maior ou igual a zero, tem-se que $\hat{a}_0 \mid j \rangle = C_-(j) \mid j-1 \rangle$ e $\hat{a}_0^\dagger \mid j \rangle = C_+(j) \mid j+1 \rangle$. Mostre que $C_-(j) = \sqrt{j}$, $C_+(j) = \sqrt{j+1}$.

b) Considere agora outro oscilador harmónico, de massa m e de frequência $\omega = \omega_0\sqrt{1+\lambda} \geq \omega_0$, como discutido na aula teórica.

Introduzindo novos operadores de destruição e criação, $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}$, $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}$, podemos escrever o operador Hamiltoniano para este oscilador como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\mathbb{1}}}{2} \right) . \tag{31}$$

Mostre que podemos expressar os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, em termos de $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_0^\dagger$, como

$$\hat{a} = \cosh x\, \hat{a}_0 + \sinh x\, \hat{a}_0^\dagger\,, \tag{32}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sinh x\, \hat{a}_0 + \cosh x\, \hat{a}_0^\dagger\,, \tag{33}$$

em que $x = \frac{1}{4}\ln(1+\lambda)$.

c) Tomando agora $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ como funções de x (isto implica pensar no problema como se de uma série de osciladores com diferentes valores de ω se tratasse), mostre que $\frac{d\hat{a}}{dx} = \hat{a}^\dagger$, $\frac{d\hat{a}^\dagger}{dx} = \hat{a}$.

d) As equações (32) e (33) definem uma transformação unitária entre os dois conjuntos de operadores, já que ambos obedecem às mesmas relações de comutação entre si, ou seja, $\hat{a} = \hat{U}_x \hat{a}_0 \hat{U}_x^\dagger$, $\hat{a}^\dagger = \hat{U}_x \hat{a}_0^\dagger \hat{U}_x^\dagger$, em que $\hat{U}_x$ é um operador unitário e $\hat{U}_x^\dagger$ é o seu inverso, $\hat{U}_x \hat{U}_x^\dagger = \hat{\mathbb{1}}$.

Escrevendo $\hat{U}_x = e^{ix\hat{V}}$, em que $\hat{V}$ é um operador hermítico, mostre que $\frac{d\hat{a}}{dx} = i\hat{U}_x[\hat{V}, \hat{a}_0]\hat{U}_x^\dagger$ e $\frac{d\hat{a}^\dagger}{dx} = i\hat{U}_x[\hat{V}, \hat{a}_0^\dagger]\hat{U}_x^\dagger$. Utilizando o resultado da alínea anterior, mostre que $[\hat{V}, \hat{a}_0] = -i\hat{a}_0^\dagger$ e $[\hat{V}, \hat{a}_0^\dagger] = -i\hat{a}_0$. Finalmente, mostre que $\hat{V} = \frac{1}{2i}[(\hat{a}_0)^2 - (\hat{a}_0^\dagger)^2]$ é uma solução destas equações. Assim, $\hat{U}_\lambda = e^{\frac{1}{8}\ln(1+\lambda)[(\hat{a}_0)^2 - (\hat{a}_0^\dagger)^2]}$ (trocamos aqui o subescrito x por λ e substituimos a expressão de x em termos de λ).

e) Mostre que se $\mid j \rangle$ é um estado próprio de $\hat{n}_0$ com valor próprio j, $\mid \lambda, j \rangle = \hat{U}_\lambda \mid j \rangle$, é um estado próprio de $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, com o mesmo valor próprio.

f) Expandindo $\hat{U}_\lambda$ em primeira ordem em λ na expressão de $\mid \lambda, j \rangle$, verifique que obtém o mesmo resultado para a expansão da função de onda em potências de λ, que aquele obtido na aula teórica recorrendo à teoria de perturbações.

Note-se que se tem $\hat{H} = \sqrt{1+\lambda}\,\hat{U}_\lambda \hat{H}_0 \hat{U}_\lambda^\dagger$, e por isso os valores de energia são sujeitos ao *rescaling* por um factor de $\sqrt{1+\lambda}$, mas de resto mantém-se inalterados. O operador $\hat{U}_\lambda$ é conhecido como operador de *squeezing* (veja Phys. Rev. A **80**, 053401 (2009), para mais informações).

Exercício 10: *Teoria de perturbações para o oscilador harmónico sujeito a uma força constante*

Considere agora o oscilador harmónico sujeito a um força constante

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \hat{x}^2 - F\hat{x}\,, \tag{34}$$

em que F é o valor da força externa aplicada ao oscilador (p.e. $F = q\mathcal{E}$, em que q é a carga do oscilador e $\mathcal{E}$ a magnitude do campo elétrico aplicado). A força externa será aqui tratada como perturbação.

a) Comece por mostrar que é possível escrever o Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \hat{X}^2 - \frac{F^2}{2m\omega_0^2}\hat{\mathbb{1}}\,, \tag{35}$$

em que $\hat{X}$ é um novo operador coordenada tal que $[\hat{X}, \hat{p}] = i\hbar\hat{\mathbb{1}}$.

b) Conclua que os níveis de energia do Hamiltoniano com perturbação são dados por $E_j = \hbar\omega_0(j + 1/2) - \frac{F^2}{2m\omega_0^2}$.

c) Mostre em teoria de perturbações que não existe correção de primeira ordem à energia $E_{0j} = \hbar\omega_0(j + 1/2)$.

d) Mostre que a correção de segunda ordem é dada por $E_{2j} = -\frac{F^2}{2m\omega_0^2}$, para qualquer estado.

Note que este exercício mostra que não existem correções de energia em ordem superior à segunda, que já nos dá o resultado exato. Isso não é verdade em relação à função de onda. Se está a pensar que existe uma transformação unitária que liga os estados dos dois sistemas, assim como o Hamiltoniano, está a pensar corretamente, nesse caso o operador unitário em questão é conhecido como *operador de deslocamento*. Este operador, aplicado ao estado fundamental $|\,0\,\rangle$ de $\hat{H}_0$ (na ausência do campo externo) gera os famosos *estados coerentes* do oscilador harmónico.

Responsável: Jaime Santos, DFUM e CFUM **E-Mail:** jaime.santos@fisica.uminho.pt