Processamento de Sinal

2º Ano

Continuous Fourier Series

Resumo

- Resposta de sistemas LIT a exponenciais complexas
- Série de Fourier de sinais contínuos
- Convergência da série de Fourier
- Propriedades da série de Fourier

Resposta de sistemas LIT a exponenciais complexas

Função própria de um sistema linear

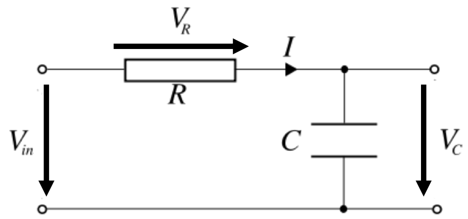
- DEFINIÇÃO:
  - Uma função *f(t)* será uma função própria de um sistema caracterizado pela transformação *T(.)* se:

$$y(t) = T(\, f(t)\,) = Pf(t)$$

Quando esta condição se verifica dizemos que *P* é o valor próprio do sistema associado à função própria *f(t)*.

Motivação

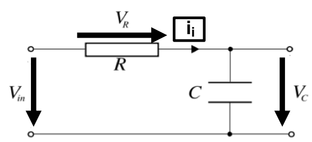
- Precisamos de uma forma eficaz de calcular a saída de um sistema LIT quando é aplicado à sua entrada um sinal periódico.



- Para resolver este problema, comecemos por determinar a resposta de um sistema LIT ao sinal exponencial complexa.

Função própria do circuito RC

- Consideremos o circuito anterior:



A tensão de saída v_C será:

$$y(t) = v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_i \, dt$$

Esta equação relaciona o sinal de saída com o sinal de entrada, portanto define a relação de transformação do sistema (*circuito RC*).

- *Que funções próprias este sistema admite ?*

Função própria do circuito RC

- Qual será a resposta do sistema ao seguinte sinal de corrente ?

$$i_i(t) = A\,\mathrm{e}^{st}$$

A equação de transformação do sistema do circuito RC é:

$$y(t) = v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_i\,dt$$

Teremos então:

$$y(t) = v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_i(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} A\,\mathrm{e}^{st}\;dt = \frac{1}{sC}A\,\mathrm{e}^{st}$$

se considerarmos que as condições iniciais são nulas.

Logo podemos concluir que a exponencial complexa é uma função própria do circuito RC.

Função própria de um sistema LIT

- Qual será a resposta de um sistema LIT ao sinal exponencial complexa ?

$$x(t) = e^{st}$$

  – Pelo integral de convolução temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \end{aligned}$$

  – De que forma podemos simplificar a expressão anterior ?

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Função própria de um sistema LIT

- Temos então que a resposta do sistema a uma exponencial complexa será:

$$y(t) = e^{st}H(s)$$

  onde H(s) é dado por

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- Que conclusões podemos retirar da análise da resposta do sistema LIT à exponencial complexa ?
  - Que as exponenciais complexas SÃO funções próprias dos sistemas LIT.
    - onde, a expressão *H(s)* será o valor próprio do sistema associado à função e^{st}.

Soma de Exponenciais Complexas

- Qual é a importância deste resultado ?
  - Se decompormos o sinal de entrada como uma soma de exponenciais complexas teremos:

$$x(t) = a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + a_3e^{s_3t} \ldots\ldots$$

  - Qual será a resposta do sistema ?

$$\begin{array}{ccc} a_1e^{s_1t} & \longrightarrow & a_1H(s_1)e^{s_1t} \\ a_2e^{s_2t} & \longrightarrow & a_2H(s_2)e^{s_2t} \\ a_3e^{s_3t} & \longrightarrow & a_3H(s_3)e^{s_3t} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Resposta do sistema para cada uma das funções próprias.

Soma de Exponenciais Complexas

Pela propriedade da aditividade a resposta do sistema será:

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t} \text{ ....}$$

- No caso geral será:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \quad \longrightarrow \quad y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- Temos então que para um sistema LIT, *se souber os valores próprios*, *H*(s_k), então o cálculo da resposta do sistema é trivial.

Combinação Linear de Exponenciais

- No caso particular de $s = j\omega$, temos:

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

  - Este sinal:
    - Periódico com período *T*, sendo a frequência fundamental dada por $\omega = 2\pi/T$.
    - Podemos definir um conjunto de exponenciais complexas relacionadas que são chamadas de harmónicos.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_k t}, \quad \text{com} \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$$

Combinação Linear de Exponenciais

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_k t}, \quad \text{com} \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$$

- Na expressão acima:
  - Quando *k= 0*, temos a constante ou a componente contínua.
  - Os termos para *k= +/-1* são chamados de harmónicos fundamentais ou harmónicos de primeira ordem.
  - Os termos para k= +/-2 são chamados de harmónicos de segunda ordem, sendo que no caso geral os termos +/-k são chamados de harmónicos de ordem k.

Série de Fourier para Sinais Contínuos

Série de Fourier Contínua

- Quando podemos representar um sinal periódico como uma combinação linear de exponenciais complexas, então dizemos que esta representação corresponde a série de Fourier.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

O que é preciso determinar para podermos representar sinal x(t) segundo a série de Fourier ?

Série de Fourier Contínua

- Como obter os coeficientes a_k ?
  - Consideremos a equação da Série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

multiplicando ambos os lados por $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

Série de Fourier Contínua

integrando ambos os lados no período fundamental

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

trocando a ordem entre o somatório e o integral

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right]}$$

Qual é o valor desta expressão ?

Série de Fourier Contínua

como todos os termos serão nulos excepto quando *n* = *k*

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt = a_n T_0$$

os coeficientes serão calculados por

$$a_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Série de Fourier Contínua

- Estas duas equações são chamadas respectivamente de:
  - Equação de síntese e equação de análise

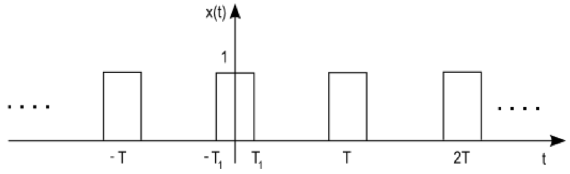
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

  - Os coeficientes a_k são chamados de coeficientes da série de Fourier ou coeficientes espectrais.

Exemplo

- Consideremos o seguinte sinal:



Qual será a representação do sinal segundo a série de Fourier ?

Exemplo

Teremos:

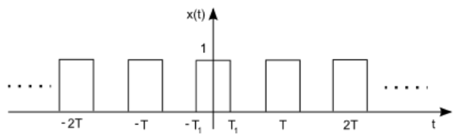
$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

Este é o caso geral para T_1

- Consideremos alguns possíveis valores de T_1

Exemplo

- $T_0 = 4T_1$, ou seja *duty cycle* de 50%.



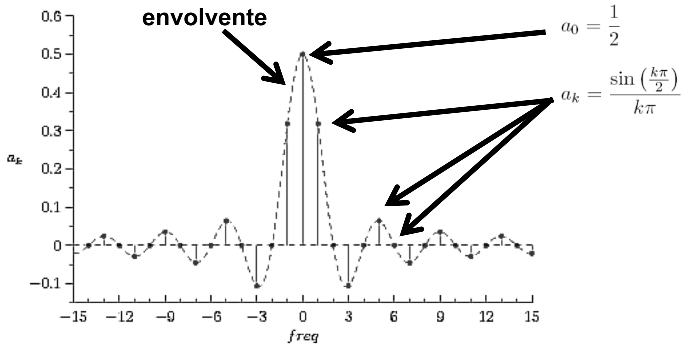
Expressão dos coeficientes da série de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

Quantos coeficientes são necessários para representar a onda quadrada com *duty cycle* de 50% como uma soma de exponenciais complexas ?

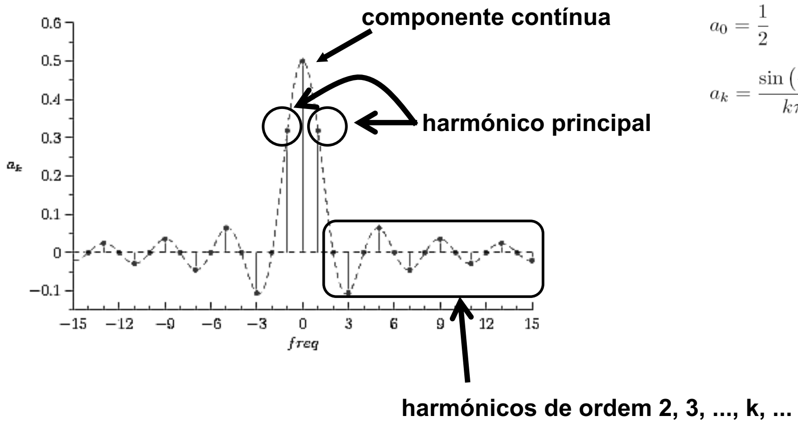
Exemplo



$a_0 = \frac{1}{2}$

$a_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}$

Exemplo

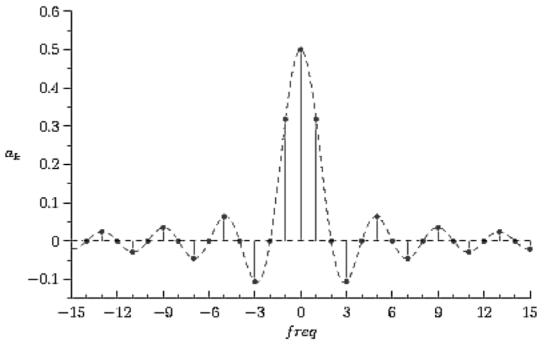


$a_0 = \frac{1}{2}$

$a_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}$

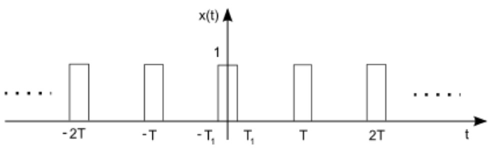
Exemplo

- O que aconteceria ao sinal se retirasse o harmónico a_0 ?



Exemplo

- $T_0= 8T_1$, ou seja *duty cycle* de 25%.



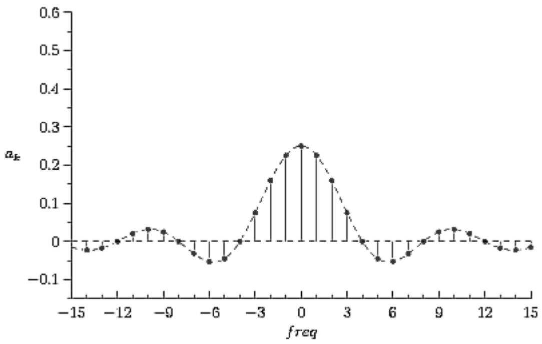
Expressão dos coeficientes da série de Fourier:

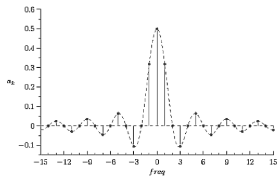
$$a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi}$$

Exemplo

- $T_0 = 8T_1$, ou seja *duty cycle* de 25%.





Decomposição de um sinal periódico

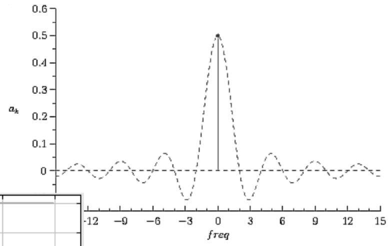
- Questões pertinentes:
  - *Como podemos reconstruir um sinal a partir dos coeficientes da série de Fourier ?*
  - *Qual será o efeito de truncar o número de harmónicos usados na reconstrução do sinal ?*
- Respostas:
  - Para reconstruir o sinal original a partir dos coeficientes basta usar a equação de síntese da série de Fourier:

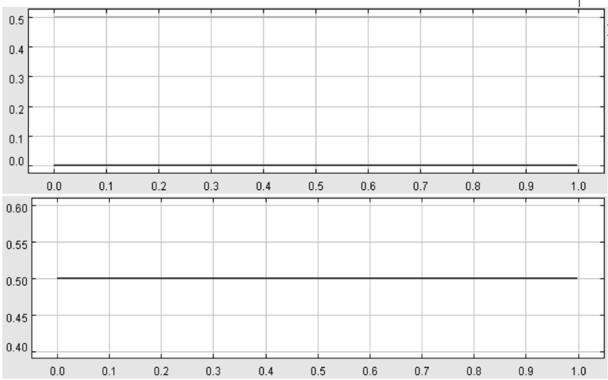
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

  - Podemos estudar o efeito da truncagem sintetizando o sinal com um número crescente de coeficientes.

Decomposição de um sinal periódico

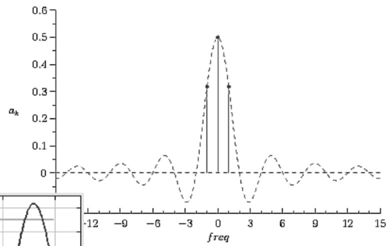
– Considerando apenas a_0.

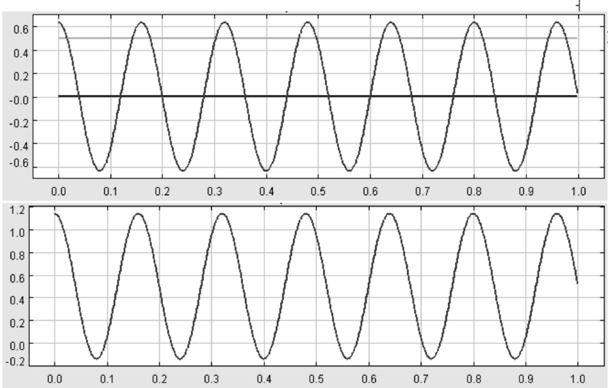




Decomposição de um sinal periódico

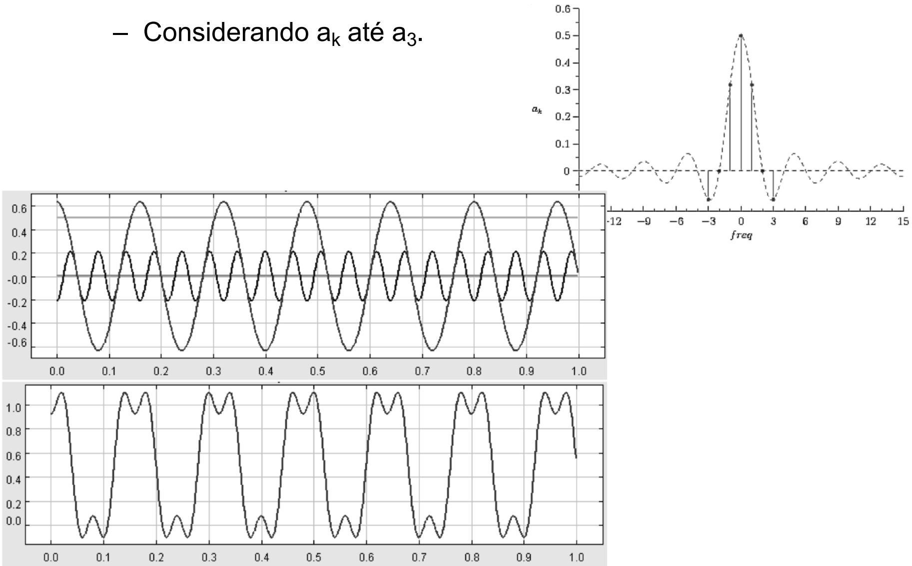
– Considerando a_k até a_1.





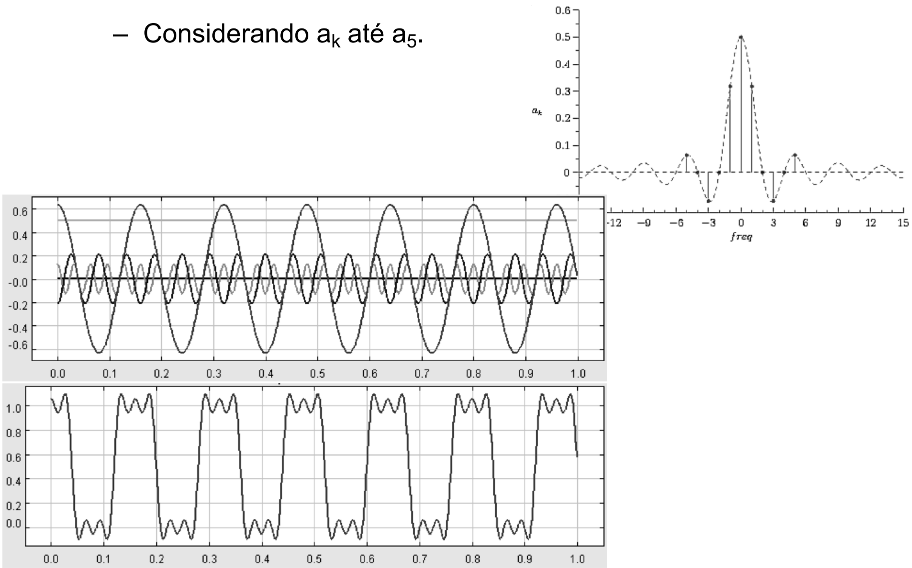
Decomposição de um sinal periódico

– Considerando a_k até a_3.



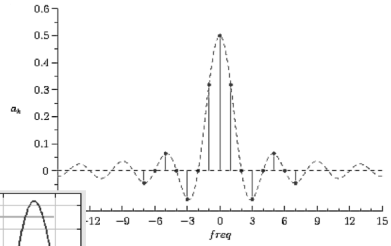
Decomposição de um sinal periódico

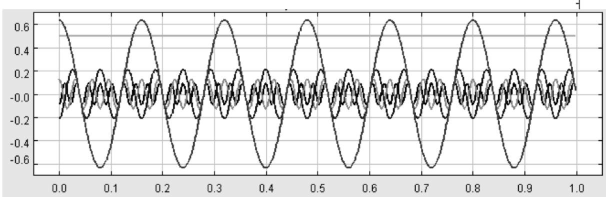
– Considerando a_k até a_5.

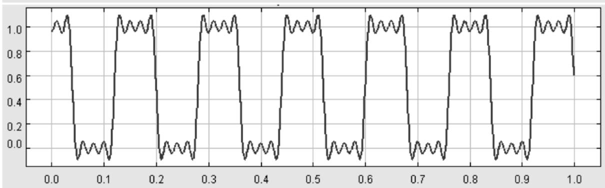


Decomposição de um sinal periódico

– Considerando a_k até a_7.

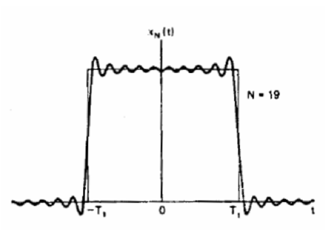


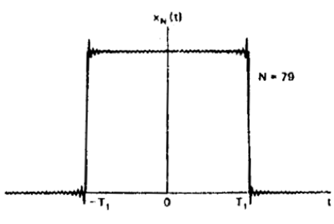




Decomposição de um sinal periódico

– O que acontecerá se adicionarmos mais harmónicos ?

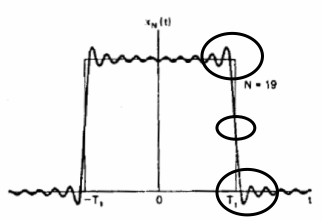


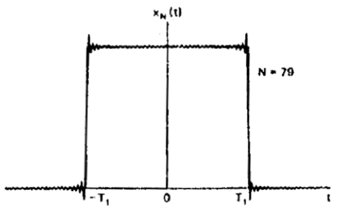


Qual foi o efeito de aumentarmos o número de harmónicos ?

Decomposição de um sinal periódico

- Conclusão:
  – *No caso em que o número de descontinuidades é finito e estas são finitas*
    - *O sinal resultante da série de Fourier coincide com o sinal x(t)* ***excepto*** *nos pontos de descontinuidade, onde* <u>*convergirá para o valor médio da descontinuidade*</u>.





Convergência da Série de Fourier

- Vimos nos *slides* anteriores que a série de Fourier permite decompor um sinal como uma soma de cosenos desfasados no tempo e ponderados.
- **Questão**: Será que consigo representar qualquer sinal como uma soma finita/infinita de cosenos e senos ?
  – O matemático *P. Dirichlet* propôs um conjunto de condições que se observadas garantem que um sinal pode ser decomposto segundo a Série de Fourier

Convergência da Série de Fourier

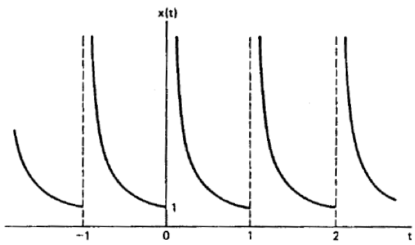
- Primeira condição de *Dirichlet*.
  - O sinal *x(t)* tem que ser absolutamente integrável no seu período, ou seja

$$\int_T |x(t)|dt \; < \; \infty$$

Esta condição garante que os coeficientes da Série de Fourier existem e são finitos.

  - Exemplo:

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1.$$



Convergência da Série de Fourier

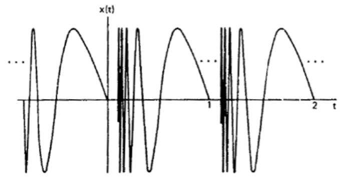
- Segunda condição de *Dirichlet*.
  - O sinal *x(t)* tem que ter um número finito de descontinuidades na sua derivada em qualquer intervalo de tempo, ou seja, o número de máximos e mínimos num intervalo de tempo tem que ser finito.

  - Exemplo:

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1.$$

Este sinal obedece a primeira condição.

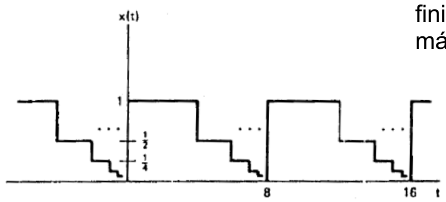
$$\int_T |x(t)|dt \; < \; \infty$$



Convergência da Série de Fourier

- Terceira condição de *Dirichlet*.
  - O sinal *x(t)* tem que ter num intervalo de tempo qualquer um número finito de descontinuidades e estas devem ser finitas.
  - Exemplo:
    - Neste exemplo, o sinal x(t) obedece às duas primeiras condições, mas falha na terceira (tem um número infinito de descontinuidades).

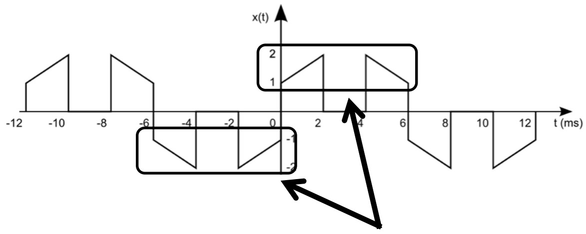
As descontinuidades são finitas e o sinal só tem um máximo e um mínimo !!!



Propriedades da Série de Fourier para Sinais Contínuos

Motivação e Definições

- Motivação:
  – A representação de certos sinais segundo a Série de Fourier pode tornar-se complexa devido a estrutura do sinal.



  • A resolução do integral no cálculo dos coeficientes a_k será elaborada devido o produto da equação dos segmentos de recta pela exponencial complexa.

Motivação e Definições

  – As propriedades da série de Fourier permitem reduzir significativamente a complexidade do cálculo dos coeficientes a_k.

- Definamos a seguinte relação:

$$x(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

  – O par relaciona o sinal contínuo *x(t)* e os respectivos coeficientes da série de Fourier, a_k.

Linearidade

- Propriedade: Linearidade.
  - Consideremos dois sinais, x(t) e y(t), periódicos com período T tal que

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$
$$y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$$

A propriedade da linearidade permite-nos expressar o coeficiente do sinal z(t) tal que

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

Linearidade

- Prova:
  - Sabemos que z(t): $z(t) = Ax(t) + By(t)$

Temos então que:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_T \{Ax(t) + By(t)\}e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_T Ax(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt + \frac{1}{T}\int_T By(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= A\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt + B\frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= Aa_k + Bb_k \end{aligned}$$

Explicite os pressupostos da prova:

- Linearidade.
- Sinais com o mesmo período.

Deslocamento Temporal

- Propriedade: Deslocamento temporal (*time shifting*).
  - Qual será a série de Fourier do sinal $y(t)= x(t-t_0)$?

    Os coeficientes da série de Fourier do sinal $y(t)$ serão:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0)e^{-jn\omega_0 t}\,dt
\end{aligned}
$$

Façamos a seguinte mudança de variável:

$$\tau = t - t_0 \quad \Rightarrow \quad dt = d\tau \ \wedge \ t = \tau + t_0$$

Deslocamento Temporal

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jn\omega_0(\tau+t_0)}\,d\tau \\
&= \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jn\omega_0 t_0}e^{-jn\omega_0\tau}\,d\tau \\
&= e^{-jn\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}\,d\tau \\
&= e^{-jn\omega_0 t_0}a_k
\end{aligned}
$$

Temos então que:

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k \quad \Longrightarrow \quad x(t-t_0) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0}a_k$$

Propriedades

Periodic signal	Fourier series coefficients
$x(t)$ periodic with period T_0	a_k
$y(t)$ periodic with period T_0	b_k
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk(2\pi/T_0)t_0}$
$e^{jM(2\pi/T_0)t}x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a^*_{-k}
$x(-t)$	a_{-k}
$x(\alpha t),\ \alpha > 0$ $\left(\text{periodic with period } \frac{T_0}{\alpha}\right)$	a_k
$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$	$T_0 a_k b_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\frac{2\pi}{T_0}a_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (finite-valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk(2\pi/T_0)}\right)a_k$
$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \mathcal{R}e\{a_k\} = \mathcal{R}e\{a_{-k}\} \\ \mathcal{I}m\{a_k\} = -\mathcal{I}m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k} \end{cases}$
$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ $[x(t)$ real$]$	$\mathcal{R}e\{a_k\}$
$x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ $[x(t)$ real$]$	$j\mathcal{I}m\{a_k\}$

Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$