TEORIA DO CONTROLO DESAFIO 1

EXERCÍCIOS → SLIDE 46

② Obtenha a solução $y(t)$ das seguintes eqs. diferenciais, supondo as condições iniciais nulas em resposta ao degrau $x(t) = u(t)$. ↳ = a dizer $y(0) = 0$ e $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$

✓2) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 18\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 8x(t) - 4$

entrada do sistema: $x(t) = u(t)$

devido às condições iniciais

Calculando as transformadas de Laplace:

- $\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - s^{2-1}\cancel{y(0)}^{=0} - s^{2-2}\cancel{y'(0)}^{=0} = s^2Y(s)$

- $\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = sY(s) - s^{1-1}\cancel{y(0)}^{=0} = sY(s)$

- $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$
- $\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$
- $\mathcal{L}[4] = \mathcal{L}[4u(t)] = \frac{4}{s}$

Logo, aplicando o teorema da linearidade vamos ter que:

$$s^2Y(s) + 18sY(s) + 4Y(s) = \frac{8}{s} - \frac{4}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)(s^2 + 18s + 4) = \frac{4}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+18s+4} \cdot \frac{4}{s} \Leftrightarrow$$

Cálculos auxiliares:

$s^2 + 18s + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s = \frac{-18 \pm \sqrt{(18)^2 - 4\times1\times4}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s \simeq -0{,}23 \vee s \simeq -17{,}77$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{4}{(s+0{,}23)(s+17{,}77)} \cdot \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{A_1}{s+0{,}23} + \frac{A_2}{s+17{,}77} + \frac{A_3}{s}$$

Calculando os valores de A_1, A_2 e A_3:

- $A_1 = \lim_{s\to -0{,}23} \frac{4}{(s+17{,}77)\cdot s} = \frac{4}{(-0{,}23+17{,}77)\cdot(-0{,}23)} =$

$\simeq -0{,}991$

- $A_2 = \lim_{s\to -17{,}77} \frac{4}{(s+0{,}23)\cdot s} = \frac{4}{(-17{,}77+0{,}23)\cdot(-17{,}77)} =$

$\simeq 0{,}0128$

→

- $A_3 = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{4}{(s+0,23)(s+17,77)} = \dfrac{4}{0,23 \cdot 17,77} =$

$\simeq 0,979$

Logo, vamos ter que:

$$Y(s) = \frac{-0,991}{s+0,23} + \frac{0,0128}{s+17,77} + \frac{0,979}{s}$$

Para obter a solução y(t) da eq. diferencial (utilizando o formulário):

↳ calculando a transformada de Laplace inversa de Y(s)

$$y(t) = -0,991\, e^{-0,23t} + 0,0128\, e^{-17,77t} + 0,979\, u(t)$$

EXERCÍCIO FORNECIDO PELO PROFESSOR

Calcule a transformada de Laplace inversa do seguinte:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)} + \frac{A_4}{s}$$

calculando os valores de A_1, A_2, A_3 e A_4:

- $A_1 = \lim\limits_{s \to -1} \dfrac{1}{(1-1)!} \dfrac{d^{1-1}}{ds^{1-1}} \left[(s+1)^3 X(s) \right] =$

$= \lim\limits_{s \to -1} \cancel{(s+1)^3} \cdot \dfrac{1}{\cancel{(s+1)^3}} \cdot \dfrac{1}{s} = \lim\limits_{s \to -1} \dfrac{1}{s} =$

$= \dfrac{1}{-1} = -1$

- $A_2 = \lim\limits_{s \to -1} \dfrac{1}{(2-1)!} \dfrac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \left[(s+1)^3 X(s) \right] =$

$= \lim\limits_{s \to -1} \dfrac{d}{ds} \left[\cancel{(s+1)^3} \cdot \dfrac{1}{\cancel{(s+1)^3}} \cdot \dfrac{1}{s} \right] =$

$= \lim\limits_{s \to -1} \dfrac{d}{ds} \dfrac{1}{s} = \lim\limits_{s \to -1} \left(-\dfrac{1}{s^2} \right) = -\dfrac{1}{(-1)^2} =$

$= -\dfrac{1}{1} = -1$

$$\bullet\ A_3 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}} \left[(s+1)^3 X(s) \right] =$$

$$= \lim_{s \to -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[\cancel{(s+1)^3} \cdot \frac{1}{\cancel{(s+1)^3}} \cdot \frac{1}{s} \right] =$$

$$= \lim_{s \to -1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \lim_{s \to -1} \frac{2}{s^3} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{(-1)^3} = \frac{1}{(-1)^3} = -1$$

$$\bullet\ A_4 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{(0+1)^3} = \frac{1}{1^3} = \frac{1}{1} = 1$$

Logo, vamos ter que:

$$X(s) = \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s}$$

Portanto, a sua transformada de Laplace inversa é:

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} e^{-t} - t e^{-t} - e^{-t} + u(t)$$

EXERCÍCIOS - SLIDE 58

Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{d y(t)}{dt} + 1 y(t) = 8 x(t) - 4$$

a) obtenha a resposta $y(t)$ para a resposta ao degrau.

b) considere agora a resposta para $\frac{1}{s} e^{-s/3}$.

<u>NOTA</u>: para as 2 alíneas considere que as <u>condições iniciais são nulas</u>.

$\hookrightarrow$ ora, isto quer dizer que $y(0) = 0$ e $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

a)

Nesta alínea, consideramos que $x(t) = u(t)$

Calculando as transformadas de Laplace:

$$\bullet\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right] = s^2 Y(s) - s^{2-1} \cancel{y(0)}^{0} - s^{2-2} \cancel{y'(0)}^{0} =$$
$$= s^2 Y(s)$$

$$\bullet\ \mathcal{L}\left[\frac{d y(t)}{dt}\right] = s\, Y(s) - s^{1-1} \cancel{y(0)}^{=0} = s\, Y(s)$$

$\rightarrow$

- $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ • $\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

- $\mathcal{L}[4] = \mathcal{L}[4u(t)] = \frac{4}{s}$

Por isso, aplicando o teorema da linearidade vamos ter que:

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) + 1Y(s) = \frac{8}{s} - \frac{4}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)(s^2+4s+1) = \frac{4}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+1} \cdot \frac{4}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{4}{s^2+4s+1} \cdot \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

cálculos auxiliares:

$s^2+4s+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\times1\times1}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s \simeq -0,27 \vee s \simeq -3,73$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{4}{(s+0,27)(s+3,73)} \cdot \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{A_1}{s+0,27} + \frac{A_2}{s+3,73} + \frac{A_3}{s}$$

calculando os valores de A_1, A_2 e A_3:

- $A_1 = \lim_{s \to -0,27} \frac{4}{s+3,73} \cdot \frac{1}{s} = \frac{4}{(-0,27+3,73)\cdot(-0,27)} =$

$\simeq -4,282$

- $A_2 = \lim_{s \to -3,73} \frac{4}{s+0,27} \cdot \frac{1}{s} = \frac{4}{(-3,73+0,27)\cdot(-3,73)} =$

$\simeq 0,310$

- $A_3 = \lim_{s \to 0} \frac{4}{(s+0,27)(s+3,73)} = \frac{4}{0,27 \cdot 3,73} \simeq 3,972$

Logo, vamos ter que:

$$Y(s) = \frac{-4,282}{s+0,27} + \frac{0,310}{s+3,73} + \frac{3,972}{s}$$

Por isso, vamos ter que a resposta $y(t)$ vai ser:

$$y(t) = -4,282\, e^{-0,27t} + 0,310\, e^{-3,73t} + 3,972\, u(t)$$

a sua transformada de Laplace

b)

vamos agora considerar a entrada do sistema a seguinte: $X(s) = \frac{1}{s} e^{-s/3}$.

Logo, vamos ter que:

$$s^2 Y(s) + 4s Y(s) + 1 Y(s) = \frac{8}{s} e^{-s/3} - \frac{4}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)\left(s^2 + 4s + 1\right) = \frac{4}{s}\left(4 e^{-s/3} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{4}{(s^2 + 4s + 1) \cdot s}}_{\text{vamos considerar isto} = a\ Y_1(s)} \left(4 e^{-s/3} - 1\right)$$

ou seja, vamos ter: $Y_1(s) = \underbrace{\frac{4}{(s^2+4s+1) \cdot s}}_{\text{da alínea anterior, sabemos:}}$

$$y_1(t) = -4,282\, e^{-0,27t} + 0,310\, e^{-3,73t} + 3,972\, u(t)$$

Mas, basicamente:

$$Y(s) = Y_1(s)\left(4 e^{-s/3} - 1\right) \Leftrightarrow Y(s) = 4 Y_1(s) e^{-s/3} - Y_1(s)$$

Portanto, aplicando o teorema da translação real e o teorema da linearidade; vamos ter que a transforma de Laplace inversa é:

$$y(t) = 4\, y_1(t + 1/3) - y_1(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = -17,128\, e^{-0,27(t+1/3)} + 1,24\, e^{-3,73(t+1/3)} + 15,888\, u(t) + 4,282\, e^{-0,27t} - 0,310\, e^{-3,73t} - 3,972\, u(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) \simeq -19,622\, e^{-0,27t} + 1,421\, e^{-3,73t} + 11,916\, u(t)$$