Jaime E. Santos
Departamento de Física



# Física Quântica II

## Teste 16/12/2022

---

Por favor, não se esqueça de incluir o seu **nome**, **número de aluno** e de assinalar o **número do exercício**, em cada folha que utilize. Os exercícios devem ser resolvidos a caneta azul ou preta e é permitido utilizar uma máquina calculadora gráfica com a memória limpa (ou seja, não são permitidos formulários que não os dispensados abaixo). Por favor, explicite bem o seu raciocínio e numere as folhas que utilizar para apresentar a sua resolução dos exercícios.

Por favor, preste atenção às informações dadas nas páginas 3 e 4.

**Exercício 1:** *Adição de dois momentos angulares*

Suponha que um momento angular orbital caracterizado por $l = 1$ é adicionado a um spin, caracterizado por $s = 1/2$.

**a)** Com base na teoria de adição de momentos angulares da Mecânica Quântica, justifique porque há dois valores possíveis para o número quântico $j$, $j_{\text{max}} = 3/2$ e $j_{\text{min}} = 1/2$, que caracteriza os multipletos de momento angular total, $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$. Enumere os estados $|j\, m_j\,, 1\, 1/2\rangle$ de cada multipleto. **(3 valores)**

**b)** Explique a razão da igualdade

$$|j_{\text{max}}\, m_j = j_{\text{max}},\, 1\, 1/2\rangle = |l = 1\, m_l = 1\, s = 1/2\, m_s = 1/2\rangle\,.$$

**(1 valor)**

**c)** Utilizando operadores escada (ver o formulário), mostre que

$$\begin{aligned}|j_{\text{max}}\, m_j = j_{\text{max}} - 1,\, 1\, 1/2\rangle \;&=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Big(\sqrt{2}\,|l = 1\, m_l = 0\, s = 1/2\, m_s = 1/2\rangle \\ &\quad + |l = 1\, m_l = 1\, s = 1/2\, m_s = -1/2\rangle\Big)\,.\end{aligned}$$

**(2 valores)**

**d)** Justifique a igualdade

$$\begin{aligned}|j_{\text{min}}\, m_j = j_{\text{min}},\, 1\, 1/2\rangle \;&=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \big(|l = 1\, m_l = 0\, s = 1/2\, m_s = 1/2\rangle \\ &\quad - \sqrt{2}\,|l = 1\, m_l = 1\, s = 1/2\, m_s = -1/2\rangle\big)\,.\end{aligned}$$

**(1 valor)**

**Exercício 2:** *Teoria de perturbações independentes do tempo*

Considere um oscilador harmónico bi-dimensional isotrópico, cuja dinâmica é descrita por um Hamiltoniano $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + 1)$, em que as expressões para os operadores de destruição de criação são dadas no formulário.

Considere a perturbação $\hat{H}_1 = -\mathcal{K}\hat{x}\hat{y}$.

**a)** Mostre que a correcção de energia $E^1_{0,0}$ ao estado fundamental do sistema, $|0,0\rangle$, que é não degenerado, devida a esta perturbação, é igual a zero em primeira ordem da teoria de perturbações. **(2 valores)**

**b)** Utilizando a fórmula para a correção de segunda ordem à energia do estado fundamental (ver formulário), calcule o valor dessa correção. **(2 valores)**

**c)** Os primeiros estados excitados deste sistema são degenerados. Enumere-os e calcule a correção à sua energia devida a esta perturbação em teoria de perturbações de primeira ordem para níveis degenerados.

Note que é pedida apenas a correção de energia de primeira ordem. **(3 valores)**

**Exercício 3:** *Teoria de perturbações dependentes do tempo*

Um spin $1/2$ interage com um campo magnético estático, sendo o Hamiltoniano que descreve a sua dinâmica dado por $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_x$, em que $\hat{\sigma}_x$ é a correspondente matriz de Pauli (ver formulário).

O sistema encontra-se no seu estado fundamental a $t = 0$, passando a partir desse momento a interagir igualmente com um campo magnético dependente do tempo, que trataremos como uma perturbação, descrita pelo Hamiltoniano $\hat{H}_1(t) = -\frac{\epsilon\hbar\omega_0 t}{2T}\hat{\sigma}_z$, em que $\epsilon \ll 1$ é um fator adimensional. Calcule a probabilidade de transição para o estado excitado do sistema não perturbado a $t = T$ (ver formulário). **(3 valores)**

**Exercício 4:** *Estado ligado para o potencial delta de Dirac em 1d*

Mostramos na aula teórico-prática que a equação de Schrödinger para os estados ligados de uma partícula em 1d se pode escrever na forma integral como

$$\psi(x) = -\frac{m}{\hbar^2\kappa}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, e^{-\kappa|x-x'|}V(x')\psi(x'), \tag{1}$$

em que $V(x)$ é o potencial que atua sobre a partícula, sendo a energia da partícula dada por $E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$. Considere o potencial delta de Dirac $V(x) = -V_0\delta(x)$, em que $V_0 > 0$, ou seja, lidamos com um potencial atrativo (o formulário contém uma pequena referência às propriedades da função delta).

**a)** Mostre a partir de (1) que $\psi(x) = C_\kappa\, e^{-\kappa|x|}$, em que $C_\kappa$ é uma constante de normalização, e que $\kappa = \frac{mV_0}{\hbar^2}$. **(2 valores)**

**b)** Determine essa constante. **(1 valor)**

**Exercício 5*:** *Aproximação de Born em 1d*

Foi igualmente mostrado que a equação de Schrödinger para os estados de energia positiva de uma partícula em 1d se pode escrever na forma integral como

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{m}{i\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, e^{ik|x-x'|} V(x')\psi(x'), \tag{2}$$

em que a energia da partícula é dada por $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

Considere de novo o potencial delta de Dirac $V(x) = -V_0\delta(x)$, em que $V_0 > 0$. Determine a amplitude de transmissão $t(k)$ na primeira aproximação de Born utilizando a equação (2). Recorde que $\psi(x) = t(k)e^{ikx}$ para $x \geq 0$ neste caso, e que a aproximação de Born corresponde a um desenvolvimento em série na intensidade do potencial de espalhamento. **(2 valores extra)**

**Informações:** A nota máxima no teste são 20 valores. Qualquer pessoa com nota superior a essa verá a sua classificação reduzida à nota máxima, o exercício extra 5 comporta alguma dificuldade suplementar e tem por objetivo permitir aos alunos melhorarem as suas classificações.

O aluno ou aluna terá aproveitamento sem necessidade de realizar exame se tiver pelo menos 10 valores. Aqueles com aproveitamento que desejem fazer melhoria de nota em exame podem fazê-lo, passando a contar como nota final a melhor das duas.

**Formulário:**

**Exercício 1:**

A ação dos operadores escada do momento angular orbital nos auto-estados de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{L}_z$ é dada por

$$\hat{L}_\pm |\, l\, m\,\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\, |\, l\, m \pm 1\,\rangle\,, \tag{3}$$

sendo que equações análogas são válidas para os operadores $\hat{J}_\pm$ e $\hat{S}_\pm$ e respetivos auto-estados.

**Exercício 2:**

Os operadores de destruição e criação do oscilador harmónico bidimensional são dados por $\hat{a}_x = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}}\,\hat{p}_x\right)$, $\hat{a}_x^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}}\,\hat{p}_x\right)$, $\hat{a}_y = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{y} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}}\,\hat{p}_y\right)$, $\hat{a}_y^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{y} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}}\,\hat{p}_y\right)$.

Aqui $\hat{x}$, $\hat{p}_x$, $\hat{y}$ e $\hat{p}_y$ são os operadores de posição e momento nas direções cartesianas de $x$ e $y$. Dadas as relações de comutação entre estes operadores, resulta que $[\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$ e $[\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$, sendo que os restantes comutadores que envolvem operadores de criação e destruição são nulos.

Os estados próprios do Hamiltoniano $\hat{H}_0$ são os estados próprios dos operadores de ocupação, $\hat{n}_x = \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x$, $\hat{n}_y = \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y$, $|n_x, n_y\rangle$, sendo que os valores próprios destes operadores são dados por $n_x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e $n_y = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Recorde que $\hat{a}_x\,|n_x, n_y\rangle = \sqrt{n_x}\,|n_x - 1, n_y\rangle$, $\hat{a}_x^\dagger\,|n_x, n_y\rangle = \sqrt{n_x + 1}\,|n_x + 1, n_y\rangle$, $\hat{a}_y\,|n_x, n_y\rangle = \sqrt{n_y}\,|n_x, n_y - 1\rangle$, $\hat{a}_y^\dagger\,|n_x, n_y\rangle = \sqrt{n_y + 1}\,|n_x, n_y + 1\rangle$.

A fórmula para a correção de segunda ordem à energia do estado fundamental é dada por $E_{0,0}^2 = \sum_{n_x\neq 0\,\vee\, n_y\neq 0} \frac{|\langle n_x, n_y|\hat{H}_1|0,0\rangle|^2}{E_{0,0} - E_{n_x,n_y}}$. Note que o somatório é sobre todos os valores de $n_x$ e $n_y$ tais que pelo menos um deles é diferente de zero. Evidentemente, estão presentes no resultado final apenas aqueles pares de valores $(n_x, n_y)$ para os quais o elemento de matriz $\langle n_x, n_y| \hat{H}_1 |0,0\rangle$ é distinto de zero.

**Exercício 3:**

As matrizes de Pauli são definidas como

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \, , \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \, , \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \, . \tag{4}$$

Em termos dos auto-estados de $\hat{\sigma}_z$, $|\pm\rangle$, os auto-estados de $\hat{\sigma}_x$ são dados por $|+,\hat{\mathbf{x}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ e $|-,\hat{\mathbf{x}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$.

A amplitude de transição de um auto-estado inicial $|n\rangle$ do Hamiltoniano $\hat{H}_0$ para um auto-estado final $|m\rangle$ é, de acordo com a teoria de perturbações dependentes do tempo, dada, em primeira ordem na perturbação $\hat{H}_1(t)$, por

$$\gamma^1_{n\to m}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} du \, \langle m| \hat{H}_1(u) |n\rangle \, e^{-i\omega_{nm}(u-t_0)} \, , \tag{5}$$

em que $\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ e $t_0$ é o momento em que a perturbação é aplicada.

Os seguintes integrais poderão ser-lhe úteis

$$\int_0^x dv \, v \cos v = x \sin x + \cos x - 1.$$

$$\int_0^x dv \, v \sin v = \sin x - x \cos x.$$

**Exercício 4:**

Recorde que a função delta de Dirac está definida como $\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, f(x')\delta(x'-a) = f(a)$, em que $f(x)$ é uma função pelo menos contínua em $x = a$.

**Total: 20 + 2 Valores**