O Princípio da relatividade

1. A invariância de c

Sejam S e S' dois referenciais com origens coincidentes a $t = t' = 0$ e com eixos cartesianos paralelos. O referencial S' move-se com uma velocidade $\vec{v} \parallel xx'$ constante (no ref. S)

A $t = t' = 0$ (quando as origens coincidem) é disparado um impulso luminoso que se propaga. Se c for invariante, a frente de onda vista dos dois referenciais é tal que:

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (S)$$

$$c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \qquad (S')$$

Estas duas equações só podem ser simultaneamente válidas se $t' \neq t$ quando $|\vec{r}| \neq |\vec{r}'|$!

As equações acima são do tipo:

$$-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

e são válidas qualquer que seja o referencial escolhido

A equação pode ser vista como a norma de um vector

$$[ct, x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Se definirmos $x_0 = ct$, temos um espaço vectorial 4d com elementos $[x_0\ x_1\ x_2\ x_3] = x^\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, dotado de uma métrica:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Este espaço diz-se um espaço de Minkowski. Uma transformação de referencial que preserve a invariância de c deve preservar a métrica, isto é, o comprimento dos vectores (dos 4-vectores).

Em particular

$$ds^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (2)$$

é um escalar

2. As transformações de Lorentz:

As leis da física (e da electrodinâmica) devem ser válidas em qualquer referencial inercial. Procuramos uma transformação que seja <u>linear</u> (para evitar paradoxos!) e que se reduza à transformação de Galileu no limite $v \ll c$

Isto significa que a transformação em causa deve ser do tipo:

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, x^{\beta} + a^{\alpha} \qquad (3)$$

a^{α} é um 4-vector constante e $\Lambda^{\alpha}_{\ \beta}$ uma matriz 4x4.

$\Lambda^{\alpha}_{\ \beta}$ deve preservar o produto interno entre 4-vectores (para que $d\xi$ seja invariante). Isto impõe que

$$d\xi'^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = -g_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}_{\ \gamma} \Lambda^{\beta}_{\ \delta}\, dx^{\gamma} dx^{\delta} \equiv$$

$$\equiv -g_{\gamma\delta}\, dx^{\gamma} dx^{\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda^{\alpha}_{\ \gamma} \Lambda^{\beta}_{\ \delta}\, g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta}$$

Isto impõe que

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \qquad (4)$$

As transformações (3) com a restrição (4) formam um grupo contínuo que se designa por Grupo de Poincaré ou Grupo de Lorentz inhomogéneo. Se $a^{\alpha} \equiv 0$, o grupo diz-se homogéneo. Se $\det \Lambda = 1$ o grupo diz-se próprio. Se $\det \Lambda = -1$ o grupo diz-se impróprio.

Observação:

$$\Lambda^{\alpha}_{\ \gamma} \Lambda^{\beta}_{\ \delta}\, g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta}$$

$\gamma = \delta = 0 \quad \rightarrow \quad \Lambda^{\alpha}_{\ 0} \Lambda^{\beta}_{\ 0}\, g_{\alpha\beta} = g_{00} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 g_{00} + \left[(\Lambda^{11})^2 + (\Lambda^{22})^2 + (\Lambda^{33})^2\right] g_{mm} = g_{00}$$

$$-(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{m=1}^{3} (\Lambda^{mm})^2 + 1 = 0 \quad \longleftarrow \quad (g_{00} = -1)$$

$$(\Lambda_{00})^2 = 1 + \sum_{m=1}^{3} (\Lambda^{mm})^2 \geq 1 \qquad (5)$$

<u>Observação</u>: Compare isto com transformações que preservam a métrica (a norma) em $\mathbb{R}^3$:

$$C_{\theta z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Rotação)}$$

$$\det C_{\theta z} = 1$$

$$\bar{1} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \det.\ \bar{1} = -1$$

(inversão é uma operação imprópria).

Ambas preservam a norma.

Temos assim as duas condições:

$$(\Lambda_{00})^2 \geqslant 1 \qquad ; \qquad (\det \Lambda) = \pm 1$$

Estas condições podem ser verificadas de 4 formas distintas:

- $\det \Lambda = 1$ $\quad \Lambda^0_{\ 0} \geqslant 1$ Transf. de Lorentz própria
- $\det \Lambda = -1$ $\quad \Lambda^0_{\ 0} \geqslant 1$ Transf. Lorentz imprópria (space-odd) $\bar{I}$
- $\det \Lambda = -1$ $\quad \Lambda^0_{\ 0} \leqslant -1$ Transf. Lorentz imprópria time-odd I'
- $\det \Lambda = 1$ $\quad \Lambda^0_{\ 0} \leqslant -1$ Transf. Lorentz ~~impróp~~ imprópria space-time odd $(\bar{I}')$

Consideramos apenas as consequências do 1º caso:

$$\det \Lambda = 1 \quad ; \quad \Lambda^0_{\ 0} \geqslant 1$$

c/ $a^\alpha = 0$: Transformações de Lorentz próprias e homogéneas.

A transformação de Lorentz própria. (homogénea)

(S); (S') move-se $v\hat{x}$ (visto de S); as origens coincidem a $t=t'=0$. Neste instante disparo um flash. A equação da frente de onda nos dois referenciais é:

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

$y=y'$; $z=z'$ $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \varepsilon \\ \delta & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$

(transformação linear e homogénea)

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \varepsilon t \\ t' = \delta x + \eta t \end{cases} \rightarrow dx' = \alpha\, dx + \varepsilon\, dt$$

$\downarrow$

origem de S' $\equiv x'=0 \Rightarrow dx'=0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\alpha}} \equiv$ a velocidade da origem de S' vista de S

Então: $\boxed{-\frac{\varepsilon}{\alpha} = v}$

$x=0 \rightarrow$ $\begin{aligned} dx' &= \varepsilon\, dt \\ dt' &= \eta\, dt \end{aligned}$ $\rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{\varepsilon}{\eta}$ = velocidade de S vista de S'. $= -v$

Logo: $\boxed{\frac{\varepsilon}{\eta} = -v}$ Consequentemente: $\boxed{\alpha = \eta}$

(b) Frente de onda:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$(\alpha x + \varepsilon t)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\delta x + \alpha t)^2$$

$$\alpha^2 x^2 + \varepsilon^2 t^2 + 2\alpha x \varepsilon t + y^2 + z^2 = c^2 \delta^2 x^2 + c^2 \alpha^2 t^2 + 2c^2 \delta x \alpha t$$

$$(\alpha^2 - c^2\delta^2) x^2 + (2\alpha x \varepsilon t - 2c^2 \delta x \alpha t) + y^2 + z^2 = (c^2\alpha^2 - \varepsilon^2) t^2$$

$$\overset{!}{=} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \implies$$

$$\implies \alpha^2 - c^2\delta^2 = 1 \quad ; \quad \varepsilon = \delta c^2 \quad ; \quad (c^2\alpha^2 - \varepsilon^2) = c^2$$

(Recorde, além disso, que $\varepsilon = -V\alpha$)

Repare que: $c^2\alpha - \varepsilon^2 = c^2\alpha^2 - V^2\alpha^2 = \alpha^2(c^2 - V^2) = c^2$

$$\implies \alpha^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \gamma$$

$$c^2\delta^2 = \alpha^2 - 1 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - 1 = \frac{1 - \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{1 - V^2/c^2} = \frac{\frac{V^2}{c^2}}{1 - V^2/c^2} \implies$$

$$\implies \delta^2 = \frac{V^2/c^4}{1 - V^2/c^2} \quad ; \quad \varepsilon^2 = \delta^2 c^4 = \frac{V^2}{1 - V^2/c^2}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \pm \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \pm \dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

Proper Lorentz transformation: $\Lambda^0_{\ 0} > 1 \Rightarrow$

$$\det \Lambda = +1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \pm \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \pm \dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

$$\det \Lambda = \frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = 1$$

Sem perda de generalidade:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & -\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ -\dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

Define:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma c \\ -\dfrac{\beta}{c}\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

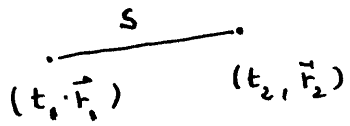
Isto é:

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \beta\gamma c\, t \\ y' = y \; ; \quad z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta x}{c}\right) \end{cases}$$

Observações: 4-vectores do tipo tempo e do tipo espaço

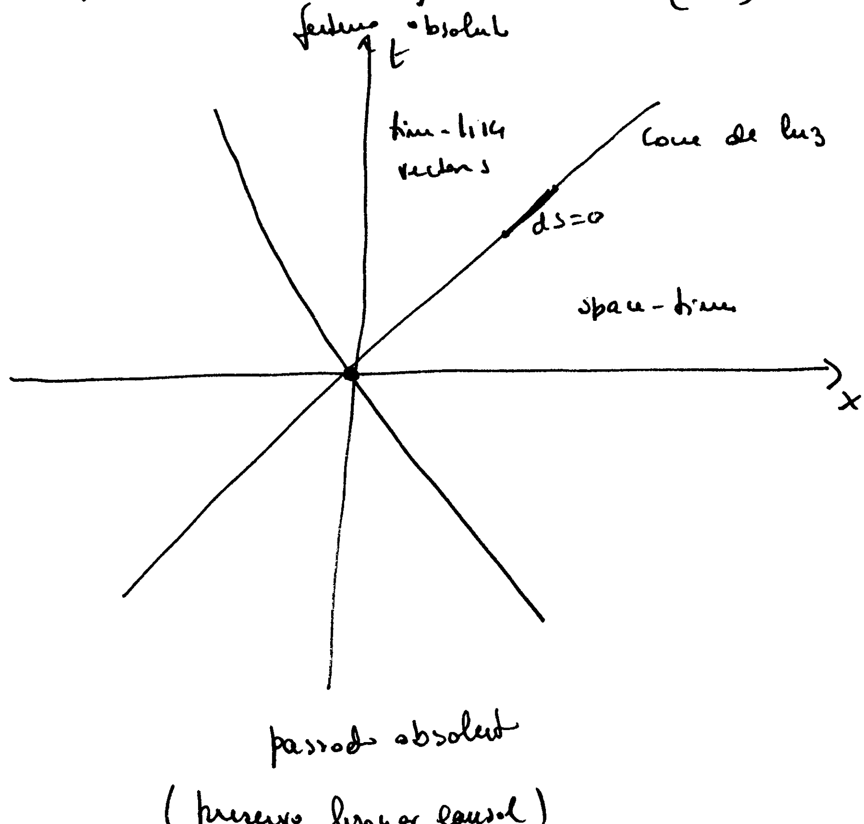
$$(ds)^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$\downarrow$



valor invariante: todos os observadores concordam com ds (é um escalar)

$(ds)^2 > 0$ $\qquad$ $(ds)^2 = 0$ $\qquad$ $(ds)^2 < 0$



<u>Observação</u>: ordem temporal e anti-partículas: (pode ignorar esta observação)

Pode uma transformação de Lorentz trocar a ordem temporal de dois acontecimentos?

$$x_2 \text{ ocorre depois de } x_1 \text{ em } S.$$

$$x_2^0 > x_1^0$$

Para S'

$$x_2'^0 - x_1'^0 = \Lambda^0_{\ \alpha}\left[x_2^\alpha - x_1^\alpha\right]$$

Consideremos a transformação de Lorentz "standard" que "desenhámos" antes:

$$\Lambda^0_{\ 0} = \gamma \qquad \Lambda^i_{\ 0} = \gamma v_i$$

$\left(\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$. Então:

$$x_2'^0 - x_1'^0 = \gamma(x_2^0 - x_1^0) + \gamma\,\frac{\vec{v}}{c}\cdot(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$$

Isto pode ser negativo se $\vec{v}\cdot(\bar{x}_2-\bar{x}_1) < -(x_2^0 - x_1^0)\,c \Rightarrow$

$\Rightarrow v > c$ (só acontecimentos do tipo espaço podem ver a sua ordem temporal alterada por uma transformação de Lorentz).

Se $v < c$ a ordem temporal é preservada.

Contudo, se $\hbar \neq 0$ temos que considerar o princípio da incerteza:

Se ~~x~~ uma partícula está em $\vec{x}_1$ em t_1, então nós sabemos nada sobre a sua velocidade. Em particular, pode acontecer (há uma probabilidade) de a partícula ir de x_1 a x_2 mesmo se $(x_2-x_1)^2 - c^2(x_1^0-x_2^0)^2 \leq \frac{\hbar^2}{m}$

(tipicamente, para um protão, $\frac{\hbar^2}{m^2} \sim 4\times 10^{-28}$ cm)

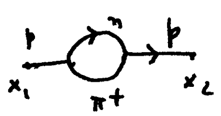
Neste caso, a ordem temporal pode alterar-se para observadores diferentes. Claro que isto faz suspeitar que a correlação causal possa ser comprometida a altas energias (10^{15} GeV)

Se uma partícula salta de x_1 a x_2 (intervalo de tipo espaço) para um observador, para outro, ~~x_2~~ a partícula pode ser vista de $x_2' \to x_1'$ (inversão de ordem temporal). Como CPT é uma simetria exacta $\Rightarrow$ este processo é equivalente a uma partícula de carga conjugada e paridade conjugada que se propaga de $x_2' \to x_1'$

Por exemplo, um observador "vê":

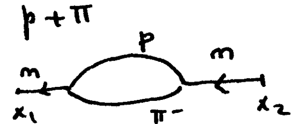
(S) $x_1 \to p \to n + \pi^+$ $\qquad$ $x_2 \to n + \pi^+ \to p$

t_1 $\qquad$ $t_2 > t_1$



(S') $x_2 \to n \to p + \pi^-$ $\qquad$ $x_1 \to p + \pi^- \to n$

t_2 $\qquad$ $t_1 > t_2$



3. Consequências cinemáticas:

i) Contracção do comprimento: $[ct = x_0]$

$x_1,\ x_2,\ x_3$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

• $\det \Lambda = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$ (claro!

• $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$

check: $$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & -\gamma^2\beta + \gamma^2\beta \\ \gamma^2\beta - \gamma^2\beta & \gamma^2(1-\beta^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contracção do comprimento.

$$x_1(1) = \gamma\,(x_1'(1) + \beta\, x_0'(1))$$

$$x_1(2) = \gamma\,(x_1'(2) + \beta\, x_0'(2))$$

(S) $L_0 = x_1(2) - x_1(1)$ → distancia entre as extremidades de uma régua que está em repouso em S

$$x_1(2) - x_1(1) = L_0 = \gamma\left[(x_1'(2) - x_1'(1)) + \beta\,(x_0'(2) - x_0'(1))\right]$$

Mas, a medida do mesmo comprimento em S' é feita num dado instante ⇒ $x_0'(2) - x_0'(1) = 0$

Logo: $\boxed{L_0 = \gamma L'}$

ii) Dilatação do tempo:

$$x'_0 = \gamma x_0 - \gamma \beta x_1$$

$$\Delta x'_0 = x'_0(2) - x'_0(1) = \gamma \left[(x_0(2) - x_0(1)) - \beta \, (x_1(2) - x_1(1)) \right]$$

Se o relógio está em repouso em S', $x_1(2) = x_1(1)$

$$\Delta x'_0 = \gamma \, \Delta x_0 \qquad \boxed{\Delta x_0 = \frac{\Delta x'_0}{\gamma}}$$

iii) Transformação de velocidades:

$$x'_1 = \gamma (x_1 - \beta x_0)$$

$$x'_0 = \gamma (x_0 - \beta x_1)$$

$$dx'_1 = \gamma \, dx_1 - \beta\gamma \, dx_0$$

$$dx'_0 = \gamma \, dx_0 - \beta\gamma \, dx_1$$

$$V'_x = \frac{dx'_1}{dx'_0} \cdot \frac{dx'_0}{dt'} = c \, \frac{dx'_1}{dx'_0} = c \, \frac{\cancel{\gamma} \, dx_1 - \beta \cancel{\gamma} \, dx_0}{\cancel{\gamma} \, dx_0 - \beta \cancel{\gamma} \, dx_1} =$$

$$= c \, \frac{\frac{dx_1}{dx_0} - \beta}{1 - \beta \frac{dx_1}{dx_0}} = \frac{V_x - \beta c}{1 - \beta \frac{V_x}{c}}$$

$$v_y' = c\frac{dx_2'}{dx_0'} = c\frac{dx_2}{\gamma\, dx_0 - \beta\gamma\, dx_1} = \frac{c}{\gamma}\frac{dx_2}{dx_0\left[1-\beta\frac{dx_1}{dx_0}\right]} =$$

$$= \frac{c}{\gamma}\frac{dx_2/dx_0}{1-\frac{\beta}{c}v_x} = \frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{\beta}{c}v_x\right)}$$

(o mesmo para v_z)

Em resumo:

$$v_x' = \frac{v_x - \beta c}{1-\beta\frac{v_x}{c}} \qquad v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{\beta}{c}v_x\right)}$$

<u>Observação</u>: invariância da velocidade da luz:

$$v_x = c \quad \rightarrow \quad c' = \frac{c-\beta c}{1-\beta} = c$$

<u>Observação</u>: Adição sucessiva de velocidades // xx'

$$S_0 \xrightarrow[\Lambda_1]{v_1} S_1 \xrightarrow[\Lambda_2]{v_2} S_2 \quad (\text{a respeito de } S_1)$$

Qual v_2 a respeito de S_0?

$$S_0 \rightarrow S_2$$

$$\Lambda_{02} = \Lambda_2\Lambda_1$$

$$\Lambda_{02} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1\gamma_2 + \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 & -\beta_1\gamma_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\gamma_2 \\ -\beta_2\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1\gamma_2 & \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \\ \\ \beta \gamma = (\beta_1 + \beta_2) \gamma_1 \gamma_2 \end{cases}$$

$$\beta = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \cancel{\gamma_1 \gamma_2}}{\cancel{\gamma_1} \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

$$\frac{V}{c} = \frac{1}{c} \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \quad - \quad V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}$$

(em acordo com o resultado anterior)

<u>Observação</u>: $V \ll c$ $\quad V'_x = V_x - V$

$V'_y = V_y$ como em Galileu!

IV) Momento linear e sua definição

<u>Tempo próprio:</u> vimos que $dS = \sqrt{-g_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta}$ é um invariante (tem o mesmo valor para qualquer observador).

Esta grandeza escalar tem as dimensões de um comprimento. Podemos obter um escalar com dimensões de um tempo dividindo por c

$$d\tau = \frac{dS}{c}$$

Então:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2}$$

$$= \frac{c\,dt}{c}\sqrt{1-\left(\frac{dr}{dx_0}\right)^2}$$

$$= dt\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

(v é a velocidade da partícula)

Como se vê, o "tempo próprio" é o tempo medido no referencial próprio da partícula. e é o mesmo para todos os observadores.

Seja $[x^0, x^1, x^2, x^3]$ as componentes de um 4-vector

Consideremos a sua variação em relação ao tempo próprio:

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Como $d\tau$ é um invariante $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ é um 4-vector.

(Velocidade própria). As suas componentes são:

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c\,dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\eta^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{etc.}$$

As componentes da velocidade própria transformam-se de uma forma simples sob uma mudança de referencial

$$\eta'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}\,\eta^\nu \quad , \text{ onde } \Lambda^\mu_{\ \nu} \text{ é uma transformação de Lorentz.}$$

É por isso conveniente definir o momento linear de uma partícula como --- a parte espacial do 4-vector $m\eta^\nu$:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\eta} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

[$p^0 = \frac{m\,c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ é a componente temporal do 4-vector]

Note que, se multiplicarmos p^0 por c obtemos uma energia. Podemos escrever

$$p^0 = \frac{E}{c} \Rightarrow \boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Veremos algo mais sobre isto adiante. (esta é a energia da partícula)

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}$$

$$= -\frac{E^2}{c^2} + m^2\,\vec{\eta}\cdot\vec{\eta} = -\frac{E^2}{c^2} + m^2\,\frac{v^2}{1-v^2/c^2}$$

$$m^2\,\eta^\mu\eta_\mu = m^2\left[-\eta^{0\,2} + \eta^2\right] = \frac{-c^2+v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,m^2 = -m^2c^2$$

Logo

$$-m^2c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \frac{m^2v^2}{1-v^2/c^2}$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 = m^2c^4}$$

expressão que relaciona a energia e o momento de uma partícula.

Observação: Repare que se $v \ll c$ se tem

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sim mc^2\left[1 + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2} + \dots\right] = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

energia cinética não relat.

$E - mc^2$ = Energia cinética =

$$= mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right]$$

4 - Força Relativista

Num dado Referencial S podemos definir Força como a taxa de variação do momento linear:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad c/ \quad \vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(tal como em mecânica Newtoniana).

Em alternativa, podemos definir força como um 4-vector que se obtém derivando o 4-momento p^μ em ordem ao tempo próprio:

$$K^\mu = \frac{d p^\mu}{d\tau} \qquad \text{(força de Minkowski)}$$

As componentes espaciais de K^μ relacionam-se de forma simples com as componentes da força ordinária $\vec{F}$

$$\vec{K} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \vec{F} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

A componente temporal de K^μ é

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau}$$

Representa a taxa de variação da energia em ordem ao tempo próprio.

As leis de transformação das forças de Minkowski são triviais, visto que K^μ é um 4-vector.

$$K'^\nu = \Lambda^\nu_{\ \mu} K^\mu$$, onde $\Lambda^\nu_{\ \mu}$ é a matriz da transformação de Lorentz.

As leis de transformação das forças ordinárias (taxa de variação do momento em ordem ao tempo local) são menos óbvias e vamos explorá-las brevemente.

Forças ordinárias:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Consideremos um pequeno exercício preliminar simples: uma partícula parte do repouso na origem a $t=0$, submetida a uma força constante segundo x. Pretende-se obter $x(t)$.

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{m\,v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}$$

$$\Delta W = \int F_x\, dx = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \cdot dx =$$

$$= \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \frac{dx}{dt}\, dt = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) v\, dt$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{m\,\frac{dv}{dt}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\cdot\frac{2v}{c^2}\cdot\frac{dv}{dt}\cdot mv}{1-v^2/c^2} =$$

$$\Delta W = \int\left[\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\frac{dv}{dt} + \frac{v^3 m/c^2}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}}\cdot\frac{dv}{dt}\right]dt$$

$$= \int \frac{mv\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right] + mv^3/c^2}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}}\cdot\frac{dv}{dt}\,dt =$$

$$= \int \frac{mv}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}}\,\frac{dv}{dt}\,dt = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)dt$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2\left[\gamma-1\right]$$

(o trabalho é igual à variação da energia cinética)

- Consideremos ainda um segundo exercício:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m \beta c$$

$$p^2 = \gamma^2 m^2 \beta^2 c^2 \qquad ; \qquad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

Logo:

$$m^2c^4\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) = m^2c^4 \qquad (!)$$

$$m^2c^4\gamma^2 - m^2c^4\gamma^2\beta^2 = m^2c^4$$

$$m^2c^4\gamma^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad \text{(como vimos antes)}$$

<u>Nota:</u> $p^0 = \frac{E}{c} \rightarrow F^0 = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \rightarrow$

→ Note-se contudo que $(F^0, \vec{F})$ não é um 4-vector!

- Transformação do 4-momento:

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$ é um 4-vector ; Logo:

$$\begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma_c & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

(base : $(x_0 = ct,\ x_1\ ,\ x_2,\ x_3)$)

Na base $\left[\frac{E}{c^2}, p_x, p_y, p_z\right]$, $\frac{E}{c^2}$ transforma-se como um tempo enquanto que p_x, p_y e p_z como x, y, e z respectivamente. Logo:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta}{c}E\right) \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z$$

$$\frac{E'}{c^2} = \gamma\left(\frac{E}{c^2} - \frac{\beta p_x}{c}\right) \Rightarrow E' = \gamma\left(E - \beta p_x c\right)$$

Nota:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{p_x}{m}\frac{mc^2}{E} = c^2\frac{p_x}{E}$$

(recorde que $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ e $\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-v^2/c^2}$)

$$\boxed{\vec{v}\,\frac{E}{c^2} = \vec{p}}$$

- Consideremos finalmente a lei de transformação das forças ordinárias:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Seja S' o referencial no qual a partícula está temporariamente em repouso. $(t' \equiv \tau)$

Então:

$$\Delta p_y = \Delta p_y'$$

$$\Delta t' = \Delta \tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Delta t$$

Logo:

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{\Delta p_y'}{\Delta t'} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p_y'}{\Delta t'}$$

Isto é: $F_y = \frac{1}{\gamma} F_y'$

(idêntico para F_z)

$$p_x = \gamma \left(p_x' + \frac{v E'}{c^2} \right)$$

$$\Delta p_x = \gamma \Delta p_x' + \gamma \frac{v}{c^2} \Delta E'$$

Mas $E' = \sqrt{m^2 c^4 + p'^2 c^2}$

$$\Delta E' = \frac{1}{2} \left[m^2 c^4 + p'^2 c^2 \right]^{-1/2} \cdot 2 c^2 p' \Delta p'$$

Como $\Delta p' = 0$ (S' é o ref. onde a partícula está instantaneamente em repouso)

$$\Delta E' = 0$$

Então: $\Delta p_x = \gamma \Delta p_x'$

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\gamma \Delta p_x'}{\Delta t'} \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \gamma \frac{\Delta p_x'}{\Delta t'} \frac{1}{\gamma} = \frac{\Delta p_x'}{\Delta t'}$$

$$\boxed{F_x = F_x' \quad !!}$$