Teste de Mecânica Analítica e Ondas

Licenciatura em Física
e
Mestrado Integrado em Engenharia Física

Universidade do Minho — 10 de Novembro de 2016

I

1- Considere um sistema dinâmico formado por N partículas pontuais, ligadas duas a duas, de modo a que a distância entre cada par se mantém constante. Designe-se por m_j a massa de cada par $j = 1, 2, ..., N_p$ onde $N_p = N/2$. Escolhem-se como variáveis generalizadas as coordenadas esféricas r_j, θ_j e φ_j relativas aos $j = 1, 2, ..., N_p$ centros de massa de cada par. Em termos dessas variáveis, a energia cinética T e energia potencial V do sistema têm a seguinte forma e propriedades,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_p} m_j \left(\dot{r}_j^2 + r_j^2\,\dot{\theta}_j^2 + r_j^2\,\dot{\varphi}_j^2 \sin^2\theta_j\right) \\ V &= V(r_1, r_2, ..., r_{N_p})\,, \quad \partial V/\partial\theta_j = \partial V/\partial\varphi_j = 0\,, \quad j = 1, 2, ..., N_p \end{aligned}$$

(a)- Forneça a expressão do Lagrangeano e indique qual o correspondente número de equações de Lagrange do sistema de N partículas. Justifique as suas respostas.

(b)- Indique se algumas das variáveis generalizadas são cíclicas e se existirem indique quais são e quantas são. Justifique a sua resposta.

(c)- Indique se existem quantidades físicas que se conservam e se existirem defina essas quantidades e indique qual a sua expressão. Justifique a sua resposta.

2- Considere um corpo rígido formado por N partículas pontuais. Para simplificar, considera-se que o corpo não está a executar movimentos de translação, pelo que se escolhe $O = O'$. O seu momento angular é da forma,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)\,.$$

(a)- Expresse $\vec{v}_i$ como o produto externo de uma grandeza vetorial pelo vetor posição $\vec{r}_i$ de cada uma das N partículas do corpo rígido. Defina essa grandeza e justifique se em cada instante de tempo os seus valores são diferentes ou iguais para cada uma dessas partículas.

(b)- No caso do corpo rígido estar a sofrer rotações por ângulos de valor infinitesimal, expresse a grandeza da alínea anterior em termos das velocidades generalizadas associadas aos ângulos de Euler ϕ, θ e ψ e de versores apontando em direções do espaço bem definidas. Justifique a sua resposta.

(c)- Expresse a energia cinética T do corpo rígido associada ao seu presente movimento em termos do momento angular $\vec{L}$ e da grandeza vetorial da alínea (a).

II

1- Um ponto material de massa m, sujeito à acção da gravidade, é obrigado a permanecer num plano vertical sobre uma linha de equação $z = a\,(r + r^3)$, onde a é uma constante e $r \geq 0$ a distância do ponto material ao eixo OZ vertical. Escreva as equações de Lagrange para $z > 0$ nos casos em que o plano da linha:

(a) Está fixo.

(b) Roda com velocidade angular ω em torno do eixo OZ.

2- Considere dois referenciais S e S' inicialmente coincidentes. O referencial S' roda 30 graus no sentido direto em torno do eixo do x e roda em seguida em torno do novo eixo do y obtido pela primeira rotação de um ângulo de 60 graus no sentido direto.

(a) Obtenha a matriz da transformação correspondente à rotação total.

(b) Obtenha a matriz da transformação correspondente à rotação total por ordem inversa.

Dados auxiliares