Análise da Resposta Transitória

Teoria de Controlo

Licenciatura Engenharia Física - 3º ano

Tuesday, March 3-31, 2022

Vinícius Silva | Automação Controlo e Robótica | ID7267@alunos.uminho.pt

Sinais de Teste Típicos

- Sinais de entrada tradicionais em sistemas
  - ❖Entrada em Degrau
  - ❖Entrada em Rampa
  - ❖Entrada Impulsional
  - ❖Entrada Sinusoidal
- Permitem realizar com facilidade, análise matemática e experimental de sistemas de controlo, dado que são funções de tempo simples.
- Permitem estabelecer bases de referência para todos os sistemas de controlo.

Resposta Transitória e Resposta em Estado Estável

- A resposta ao tempo de um sistema de controlo é composta por duas partes:
  - A resposta transitória – refere-se à transição da resposta do sistema desde o estado inicial ao final.
  - A resposta em estado estável – comportamento do sistema quando t tende para infinito.

Estabilidade

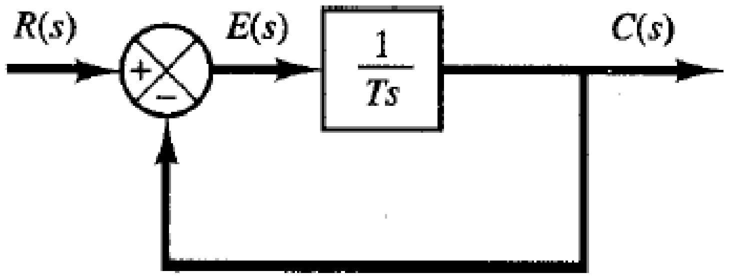
- Um sistema é estável, se a saída retorna ao seu estado de equilíbrio quando o sistema está sujeito a uma condição inicial.
- Um sistema é criticamente instável, se as oscilações de saída não param.
- Um sistema é instável, se a saída diverge sem limite, desde o seu estado de equilíbrio.

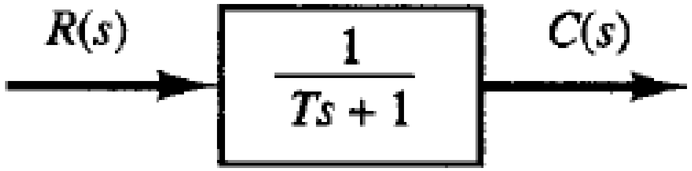
Estabilidade Relativa e Erro em Estado Estável

- Se a saída de um sistema, embora estável (estabilidade relativa), não coincide com a entrada, diz-se que o sistema tem um erro em estado estável.

Sistemas de Primeira Ordem

- Considere o seguinte sistema:





- Função de Transferência:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

  - T- refere-se à constante de tempo do sistema

Resposta ao Degrau Unitário

- Entrada: R(s)=1/s
- Assim:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}$$

- Fatorizando:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+(1/T)}$$

- Fazendo a transformada inversa de Laplace:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

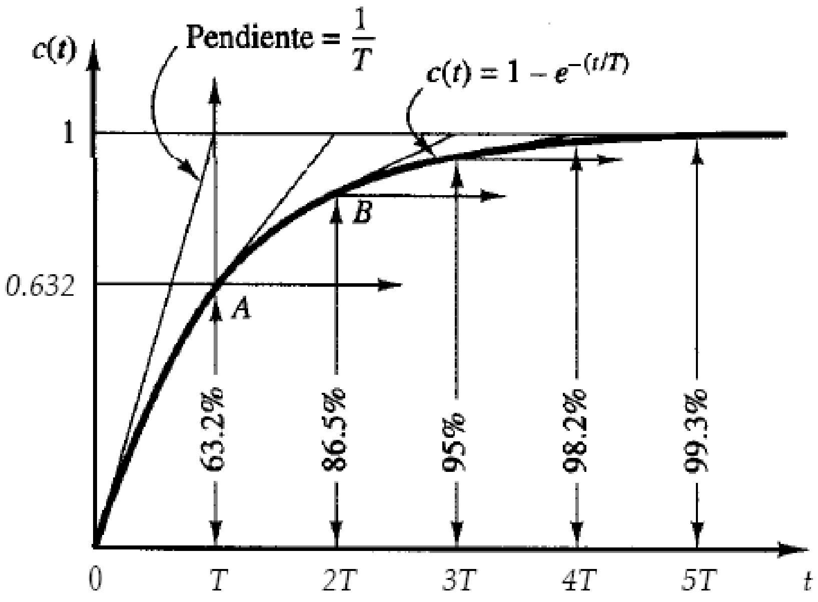
Resposta ao Degrau Unitário

- Analisando a equação anterior, verifica-se para t>=0 a função varia entre 0 e 1.
- Para t=T, o valor de c(t) é 0.632, ou seja, a resposta c(t) alcançou 63.2% do total.
- Quanto mais pequena a constante de tempo, mais rápida é a resposta do sistema.
- O declive da tangente da equação, para t=0 é 1/T:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \bigg|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

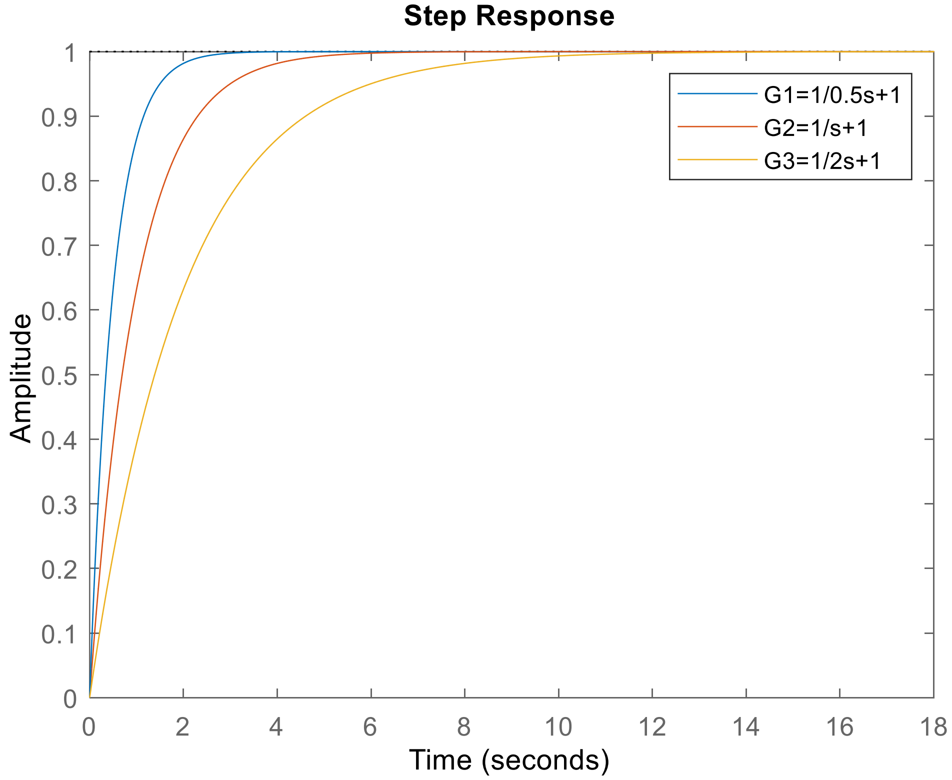
Resposta ao Degrau Unitário

- Representação gráfica de c(t):



- Pela figura:
  - 1T - 63.2% do final
  - 2T – 86.5% do final
  - 3T – 95% do final
  - 4T – 98.2% do final
  - 5T - 99.3% do final
- Em termos práticos, o tempo do sistema a 2% de erro é relevante, ou seja após 4T.

Resposta ao Degrau Unitário



Resposta à Rampa Unitária

- Entrada: $R(s)=1/s^2$
- Assim: $$C(s) = \frac{1}{TS+1}\frac{1}{s^2}$$
- Fatorizando: $$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$
- Fazendo a transformada inversa de Laplace:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

Resposta à Rampa Unitária

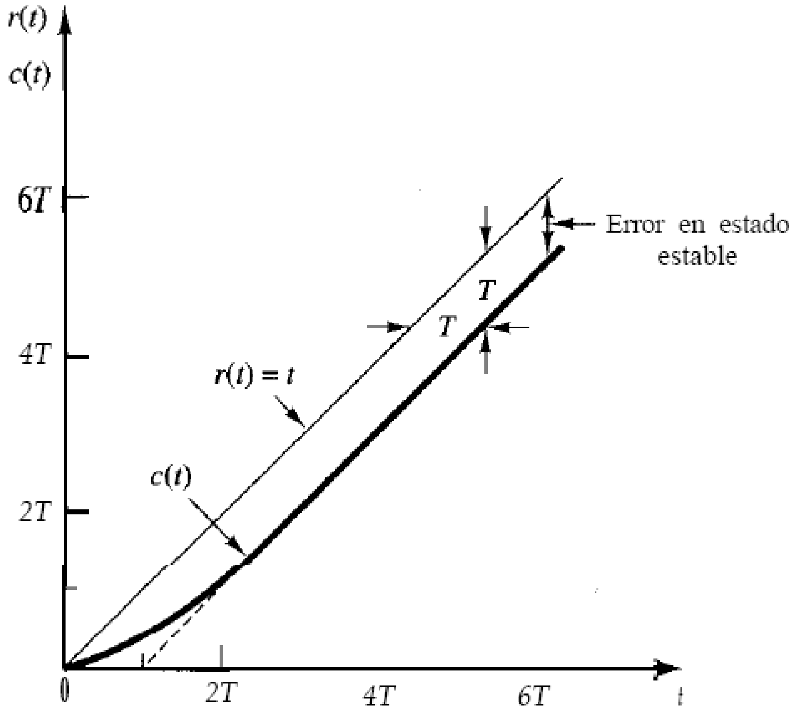
- Sendo o sinal de erro:

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$

- À medida que t tende para infinito, e^(-t/T) aproxima-se de zero, pelo que o sinal de erro e(t), se aproxima a T, ou seja: e(∞)=T.

Resposta à Rampa Unitária

- Representação Gráfica:



- O erro é igual a T durante um período longo de tempo t.
- Assim, quanto mais pequena for a constante de tempo T, menor será o erro em estado estável.

Resposta ao Impulso Unitário

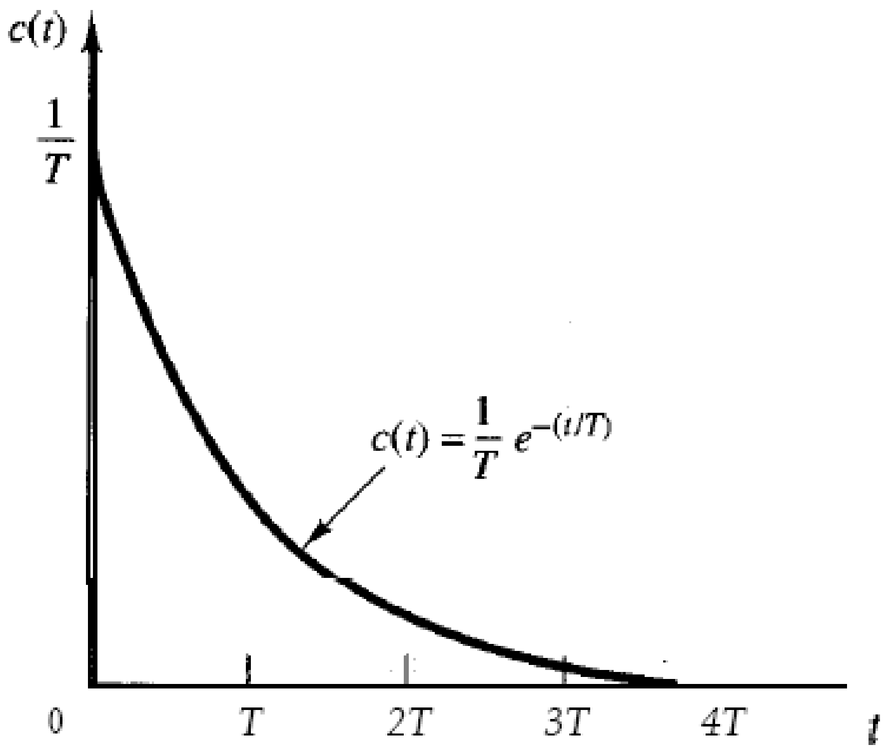
- Entrada: R(s)=1
- Assim:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

- Obtendo-se:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

- Representação gráfica:



Comparação entre as respostas às entradas

- Saída para entrada em rampa unitária:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

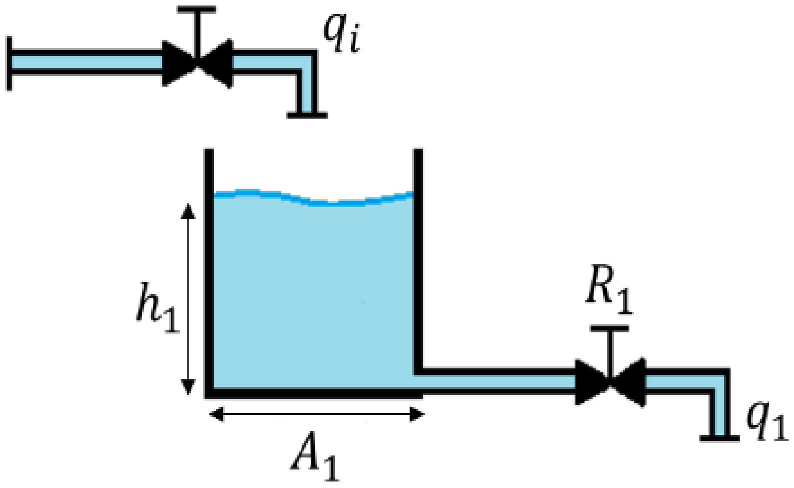
- A saída para o degrau unitário é a derivada da resposta em rampa:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

- A saída em impulso unitário é a derivada da resposta ao degrau unitário:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geq 0$$

Exemplo



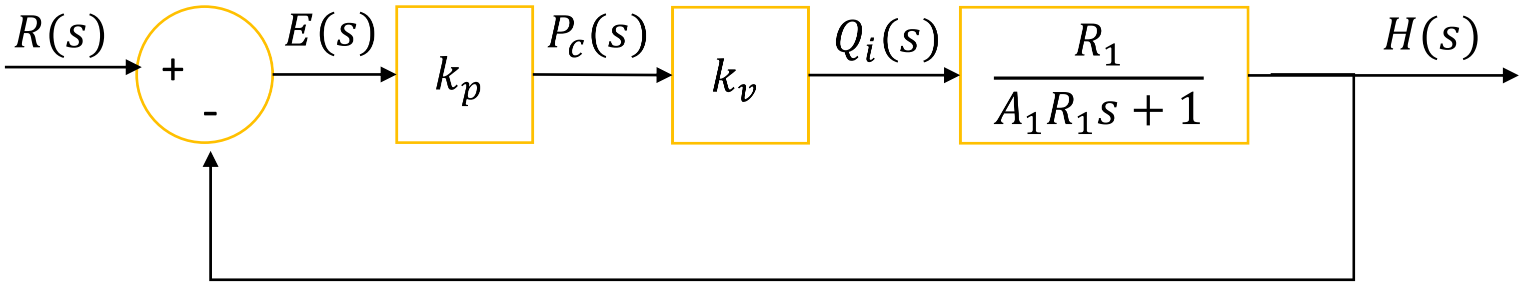
$a)$ q_i is the input and h_1 is the output (condições iniciais = 0):

- Tank 1: $entra = sai + acumula$
- $q_1(t) = \frac{h_1(t)}{R_1}$; $\quad volume\ do\ tanque\ 1 = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt}$
- $q_i(t) = \frac{h_1(t)}{R_1} + A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} (=) R_1 q_i(t) = h_1(t) + R_1 A_1 \frac{dh_1(t)}{dt}$

- Laplace:
  - $R_1 Q_i(s) = H_1(s) + R_1 A_1 s H_1(s) (=) H_1(s) = \frac{R_1}{A_1 R_1 s + 1} Q_i(s)$

Exemplo

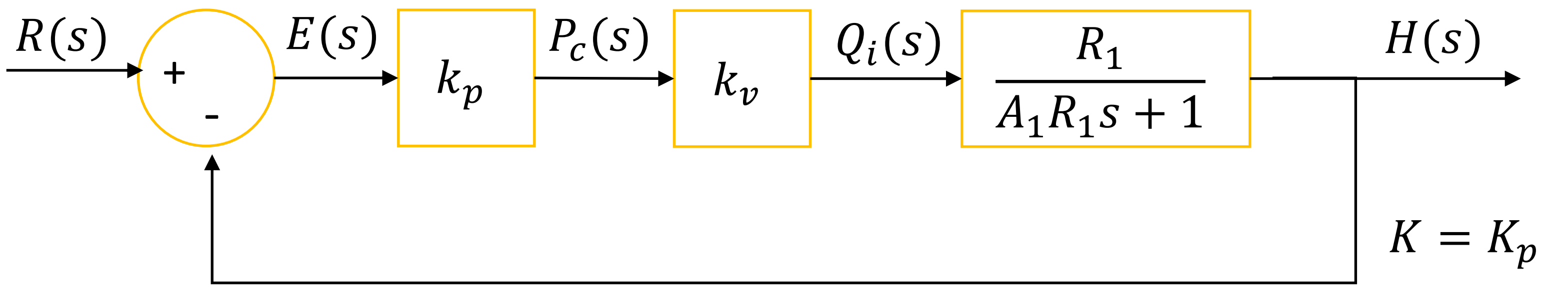
- Vamos considerer um controlador proporcional:
  - k_p é o ganho proporcional
  - k_v é o ganho da válcula de controlo
  - $Q_i(s) = K_p K_v E(s)$



$K = K_p K_v R_1 \quad \mathrm{T} = A_1 R_1$

Exemplo

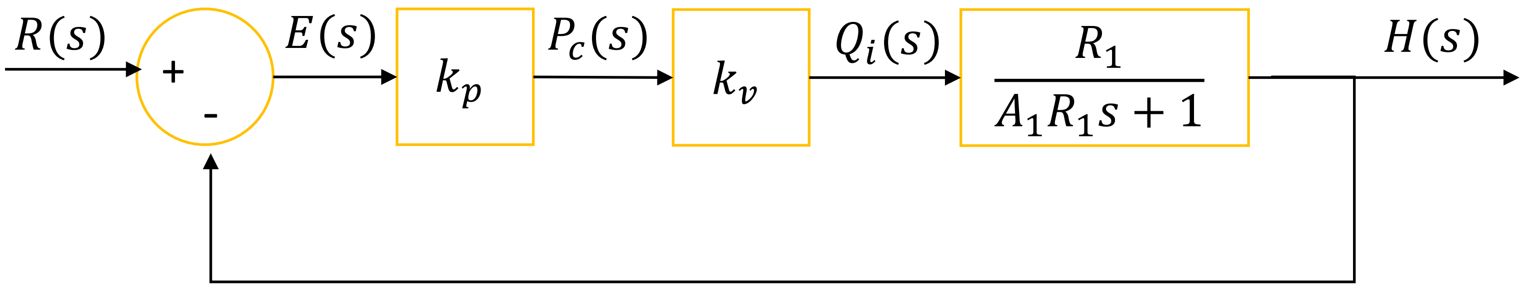
- Considere uma entrada em degrau unitário:
  - A função de transferência em malha fechada é obtida por:
  - $\frac{H(s)}{R(s)} = \frac{K}{\mathrm{T}s+1+k}$
  - Com a entrada $u(t) \rightarrow L[u(t)] = \frac{1}{s}$
  - $H(s) = \frac{K}{\mathrm{T}s+1+k}\frac{1}{s} \rightarrow H(s) = \frac{A_1}{s+\frac{1+k}{\mathrm{T}}} + \frac{A_2}{s}$



$K = K_pK_vR_1 \quad \mathrm{T} = A_1R_1$

Exemplo

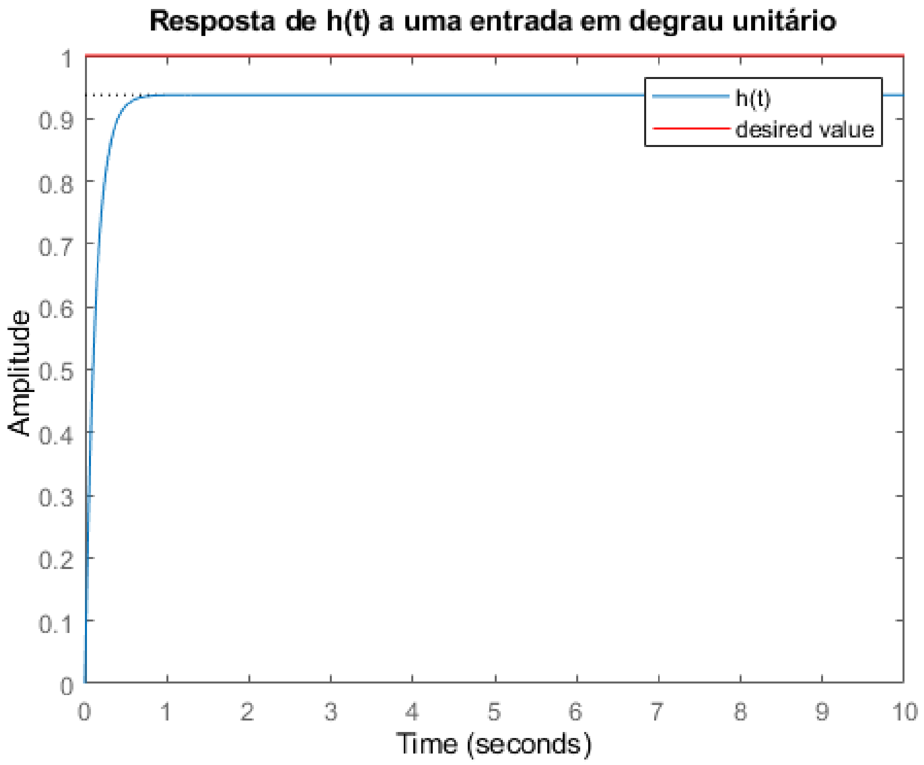
- Considere uma entrada em degrau unitário:
  - A função de transferência em malha fechada é obtida por:
  - $H(s) = \frac{K}{1+K}\frac{1}{s} - \frac{K}{1+K}\frac{1}{s+\frac{1+k}{\mathrm{T}}} \rightarrow L^{-1} \rightarrow h(t) = \frac{k}{1+K}\left(1 + e^{-\frac{t}{\mathrm{T}_1}}\right), to\ t \geq 0$
    - Where: $\mathrm{T}_1 = \frac{\mathrm{T}}{1+K}$



$K = K_pK_vR_1 \qquad \mathrm{T} = A_1R_1$

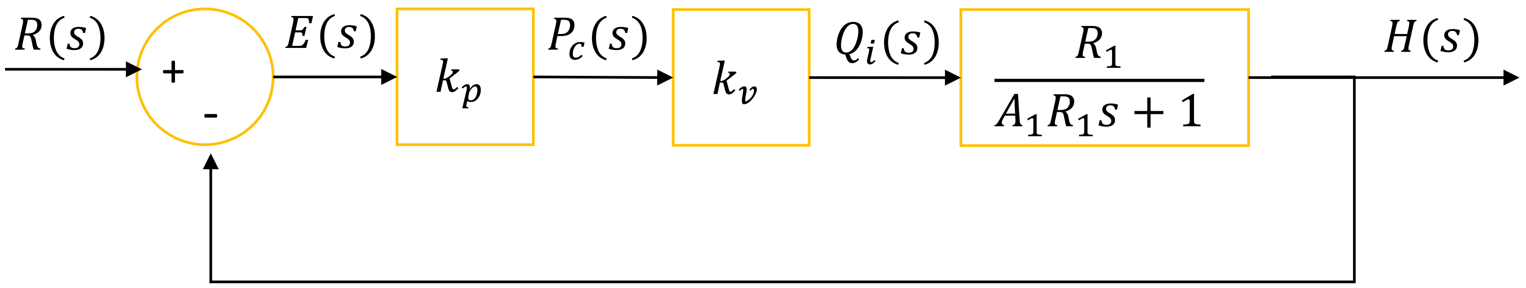
Exemplo

- Erro em estado estável (offset):
  - $h(\infty) = \frac{K}{1+K} \rightarrow h(\infty) = \frac{15}{15+1} = 0{,}9375$
  - De lembrar que :
    - $h(t) = \frac{k}{1+K}\left(1 + e^{-\frac{t}{T_1}}\right), to\ t \geq 0$
- O offset é uma característica do controlo proporcional.
- O offset reduz com o aumento de K.
- Assim, conclui-se que apenas com controlo proporcional é impossível eliminar o erro, para tal deve agregar-se uma acção de controlo integral.



Exemplo

- Considere uma entrada em degrau unitário:
  - A função de transferência em malha fechada é obtida por:
  - $H(s) = \frac{K}{1+K}\frac{1}{s} - \frac{K}{1+K}\frac{1}{s+\frac{1+k}{T}} \rightarrow L^{-1} \rightarrow h(t) = \frac{k}{1+K}\left(1 + e^{-\frac{t}{T_1}}\right), to\ t \geq 0$
    - Where: $T_1 = \frac{T}{1+K}$



$K = K_pK_vR_1 \qquad T = A_1R_1$

Sistemas 2ª Ordem

Sistemas de 2ª ordem

- Os sistemas de 2ª ordem são descritos por equações diferenciais de 2ª ordem:
  - $a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy(t) = ku(t)$
- Em Laplace:
  - $as^2Y(s) + bsY(s) + cY(s) = kU(s)$
  - $Y(s) = \frac{k}{as^2+bs+c}U(s)$
- A FT tem dois polos (valores de s que anulam o denominador da FT) iguais a:
  - $as^2 + bs + c = 0$
  - $s_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Sistemas de 2ª ordem

- Pode ver-se que os polos da FT podem ser reais ou complexos consoante o valor das constantes. Ou seja:

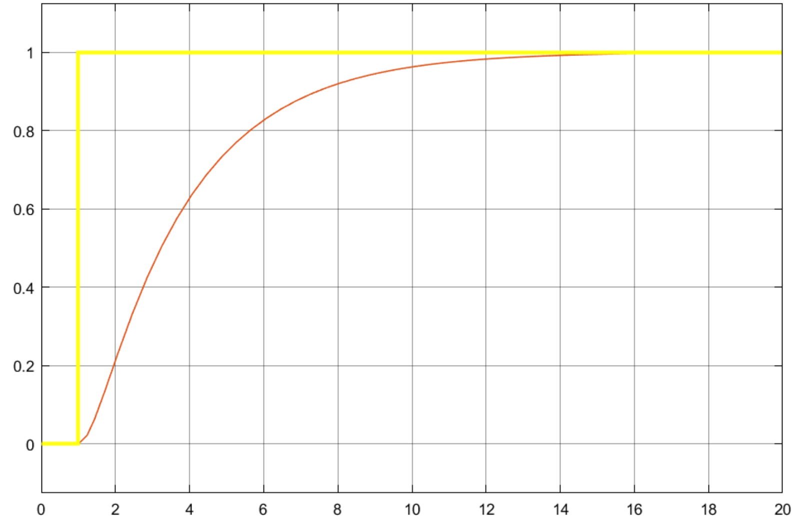
Cenário	Relações entre os parâmetros	Tipo Polos
1	$b^2 - 4ac > 0$	Polos reais e distintos
2	$b^2 - 4ac = 0$	Polo real duplo
3	$b^2 - 4ac < 0$	Polos complexos conjugados
4	$b^2 - 4ac < 0 \; e \; b = 0$	Polos imaginários puros

Sistemas de 2ª ordem – cenário 1

- Valores para as incógnitas:
  - k=1; a=1; b=3; c=1
  - $s^2 + 3s + 1 = 0$ ⟶ Pólos: $s_1 = -0{,}38 \mid s_2 = 2{,}62$
  - Os polos são reais e distintos

$\zeta = 1{,}5$

Resposta ao degrau unitário:

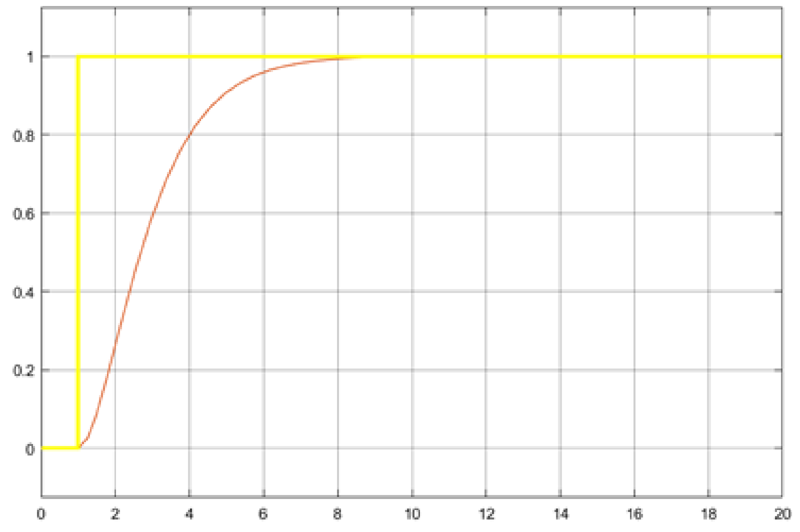


Sistemas de 2ª ordem – cenário 2

- Valores para as incógnitas:
  - k=1; a=1; b=2; c=1
  - $s^2 + 2s + 1 = 0$ ⟶ Pólos: $s_{1,2} = -1$
  - Os polo real duplo

$\zeta = 1$

Resposta ao degrau unitário:

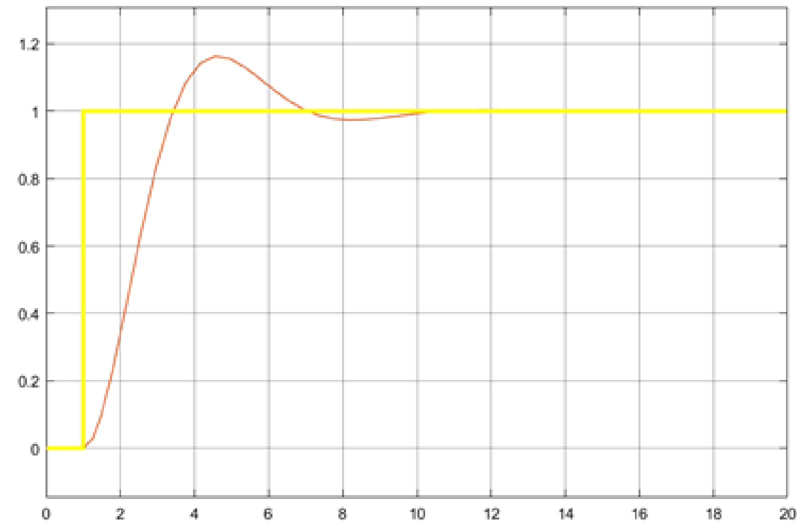


Sistemas de 2ª ordem – cenário 3

- Valores para as incógnitas:
  - k=1; a=1; b=1; c=1
  - $s^2 + 3s + 1 = 0$ ⟶ Pólos: $s_{1,} = -1 + j\sqrt{3} \mid s_2 = -1 - j\sqrt{3}$
  - <u>Os polos são complexos e conjugados</u>

$\zeta = 0{,}5$

Resposta ao degrau unitário:

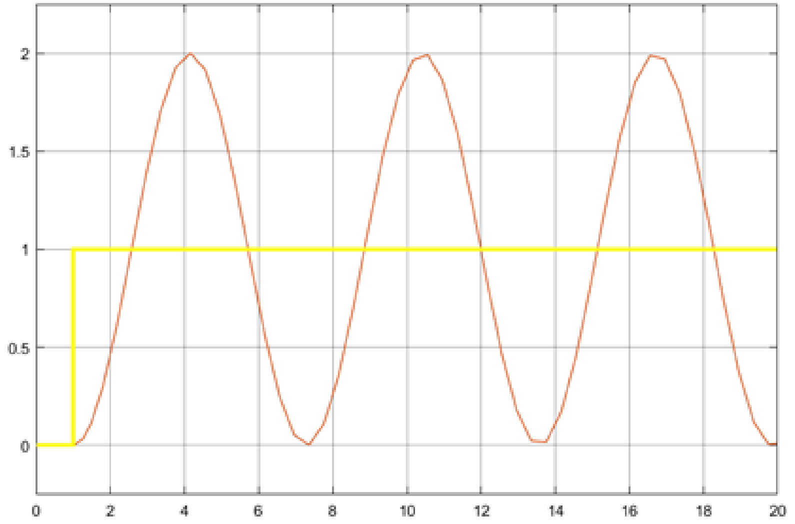


Sistemas de 2ª ordem – cenário 4

- Valores para as incógnitas:
  - k=1; a=1; b=0; c=1
  - $s^2 + 1 = 0$ $\longrightarrow$ Pólos: $s_{1,2} = \pm j$
  - Os polos são imaginários puros

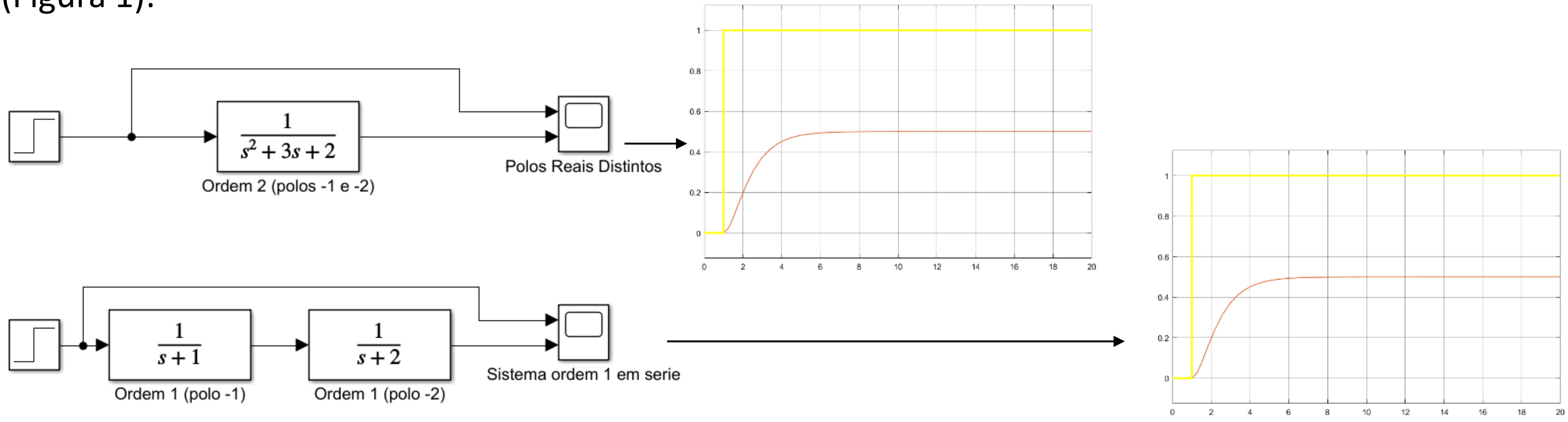
$\zeta = 0$

Resposta ao degrau unitário:



Sistemas de 2ª ordem

- Para polos reais a resposta ao degrau assemelha-se à resposta de um sistema de 1ª ordem (não é de facto igual, esta apresenta um ponto de inflexão que não existe nos sistemas de 1ª ordem). Um sistema de 2ª ordem com polos reais pode ser visto como dois sistemas de 1ª ordem em série (Figura 1):



Sistemas 2ª ordem – Parâmetros característicos

- Sistemas de 2ª ordem em função dos seus parâmetros característicos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta w_n \frac{dy}{dt} + w_n^2 y(t) = K_{rp} w_n^2 u(t)$$

Nesta forma geral intervêm 3 parâmetros:

ζ - coeficiente de amortecimento do sistema;

$\boldsymbol{w_n}$ - frequência natural de oscilação do sistema (ou – frequência natural não amortecida);

$\boldsymbol{K_{rp}}$ - ganho em regime permanente.

Sistemas 2ª ordem – Parâmetros característicos

- Laplace:

$$s^2Y(s) + 2\zeta w_n sY(s) + w_n^2 Y(s) = K_{rp} w_n^2 U(s)$$

$$Y(s) = \frac{K_{rp} w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} U(s)$$

- A FT tem dois (valores de s que anulam o denominador da FT) iguais a:

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta w_n \pm \sqrt{(2\zeta w_n)^2 - 4w_n^2}}{2} = \frac{-2\zeta w_n \pm 2\sqrt{\left(\zeta w_n\right)^2 - w_n^2}}{2}$$

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm \sqrt{\left(\zeta w_n\right)^2 - w_n^2} \qquad s_{1,2} = -\zeta w_n \pm w_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad \boxed{s_{1,2} = -w_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

Sistemas 2ª ordem – Parâmetros característicos

- Vamos consideras os 4 cenários:
  - ζ>1
  - **ζ=1**
  - 0<ζ**<1**
  - **ζ=0**

ζ	**Polos:** $s_{1,2} = -\zeta w_n \pm w_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$	**Tipo Polos**
ζ>1	$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm w_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$	Reais e distintos
ζ=1	$s_{1,2} = -w_n$	Real Duplo
0<ζ<1	$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm w_n j\sqrt{1 - \zeta^2}$	Complexo Conjugado
ζ=0	$s_{1,2} = \pm w_n j$	Imaginário Puro

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} U(s)$$

Sistemas de 2ª ordem – classificação

- Se $\zeta=1$, o sistema designa-se de **criticamente** amortecido.
- Se $\zeta>1$, o sistema designa-se de **sobre** amortecido.
- A resposta transitória dos sistemas criticamente amortecidos e sobre amortecidos não oscila.
- Se $\zeta=0$, a resposta transitória <u>não tem amortecimento</u>. É **oscilatório**.
- Se $0<\zeta<1$, o sistema designa-se de **sub** amortecido

Sistemas de 2ª ordem – Resposta ao degrau

- Resposta temporal a uma entrada em degrau para cada um dos cenários de amortecimento:

$$Y(s) = \frac{K_{rp} w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} U(s) = \frac{K_{rp} w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \frac{u_0}{s}$$

Sistemas de 2ª ordem – Resposta ao degrau

ζ	Tipo Polos	Resposta ao degrau
ζ>1	Reais e distintos	$y(t) = u_0 K_{rp}(1 + \frac{e^{-\zeta w_n t}}{2\Delta}\left(\frac{1}{\zeta+\Delta}e^{-\Delta w_n t} - \frac{1}{\zeta-\Delta}e^{\Delta w_n t}\right))$
ζ=1	Real Duplo	$y(t) = u_0 K_{rp}(1 - (1 + w_n t)e^{-\zeta w_n t})$
0<ζ<1	Complexo Conjugado	$y(t) = u_0 K_{rp}(1 - e^{-\zeta w_n t}(\cos w_a t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen w_a t)$ $y(t) = u_0 K_{rp}(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta w_n t}\,\mathrm{sen}(w_a t + \phi))$
ζ=0	Imaginário Puro	$y(t) = u_0 K_{rp}(1 - \cos w_n t)$

$\phi = arccos\zeta = arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ e $\Delta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ e $w_a = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$

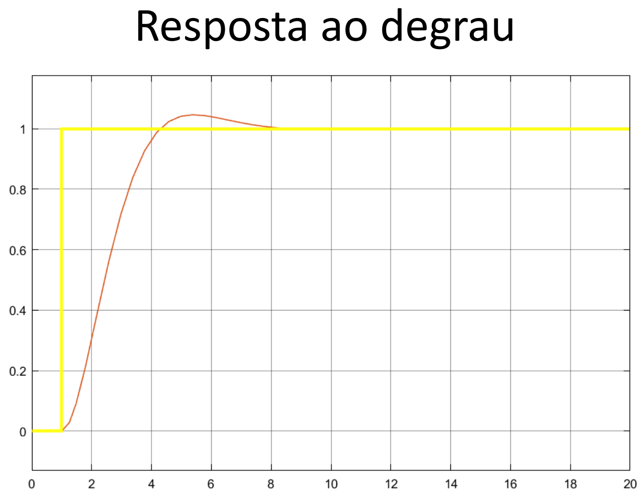
Sistemas de 2ª ordem – análise em detalhe no caso sub-amortecido

Exemplos alterando o ζ:

$\zeta = 0{,}5$

$\zeta = 0{,}2$

$\zeta = 0{,}7$

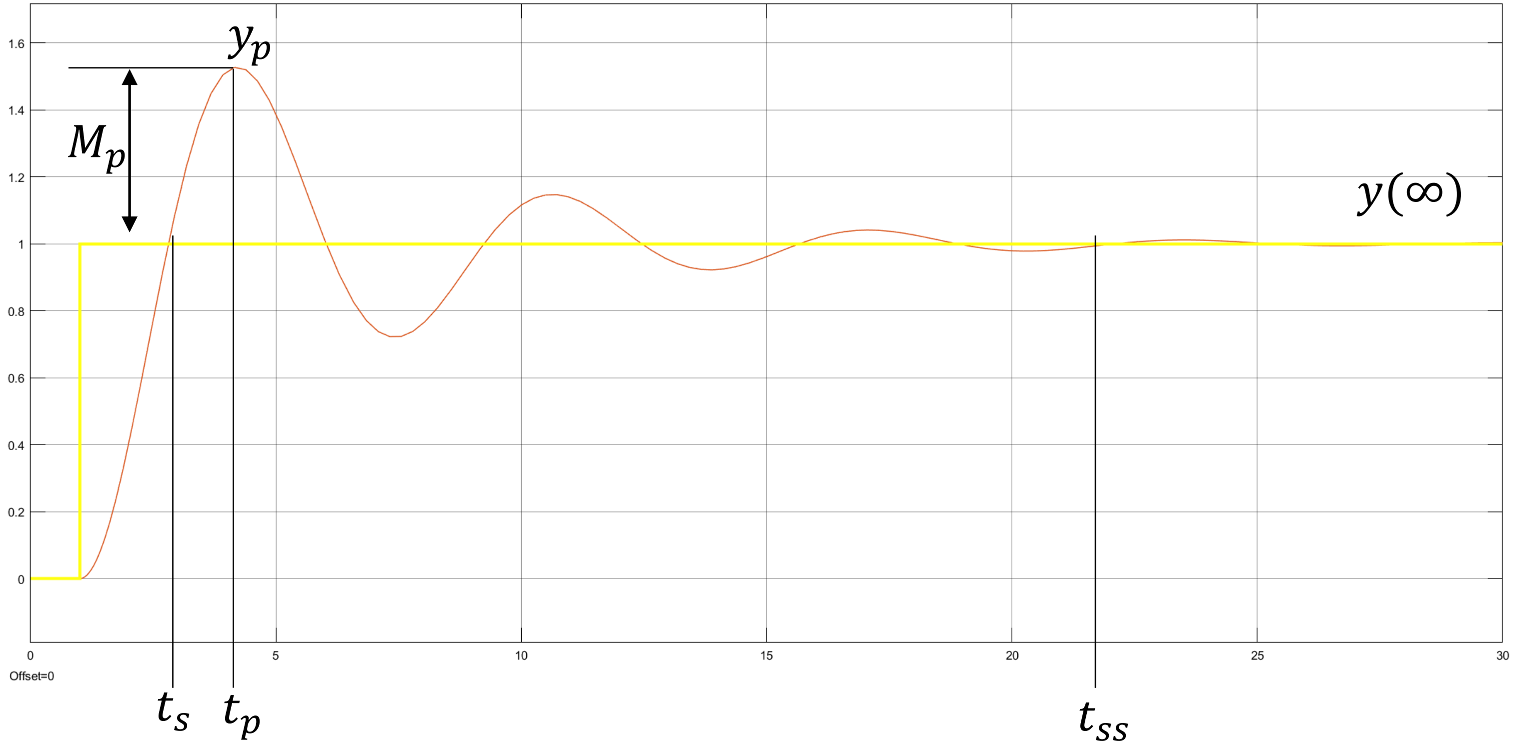


Para este caso ($0 < \zeta \leq 1$) define-se frequência natural amortecida como sendo:

$$w_a = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Sistemas de 2ª ordem – análise em detalhe no caso sub-amortecido

- Parâmetros adicionais na resposta ao degrau de sistemas sub-amortecidos $\zeta < 1$:



Sistemas de 2ª ordem – análise em detalhe no caso sub-amortecido

- Parâmetros adicionais na resposta ao degrau de sistemas sub-amortecidos $\zeta < 1$:

$\boldsymbol{t_s}$	Tempo de subida (tempo para que a resposta atinja o valor final pela primeira vez)
$\boldsymbol{t_p}$	Tempo de pico (tempo do 1º pico)
$\boldsymbol{y_p}$	Valor de y(t) no primeiro pico
$\boldsymbol{y(\infty)}$	Valor final da resposta y(t)
$\boldsymbol{t_{ss}(2\%)}$	Tempo de estabelecimento (tempo a 2% do valor final)
$\boldsymbol{M_p}$	Sobre-elongação normalizada
$\boldsymbol{PO}$	Sobre-elongação percentual (‘percent overshoot’)

Sistemas de 2ª ordem – análise em detalhe no caso sub-amortecido

- Parâmetros adicionais na resposta ao degrau de sistemas sub-amortecidos $\zeta < 1$:
  - Tempo de subida:
    - $t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_a}$
    - Onde $\beta = \tan^{-1}\frac{\omega_a}{\sigma}$, $\sigma = \zeta\omega_n$ e $\omega_a = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
  - Tempo de pico:
    - $t_p = \frac{\pi}{\omega_a}$
  - Tempo de estabelecimento a 2%:
    - $t_p = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ Em que $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$ é a constante do sistema

Sistemas de 2ª ordem – análise em detalhe no caso sub-amortecido

- Parâmetros adicionais na resposta ao degrau de sistemas sub-amortecidos $\zeta < 1$:
  - Mp – sobre-elongação normalizada:
    - $M_p = \frac{y_p}{y(\infty)} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
  - PO – sobre-elongação percentual ('percent overshoot'):
    - $overshoot = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100$

Sistemas de 2ª ordem – exemplo

- Considere a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{X(S)} = \frac{K_{rp}{\omega_n}^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n + {\omega_n}^2}$$

Onde, $K_{rp} = 1$, $\varsigma = 0.6$ e $\omega_n = 5\,rad/s$.

Calcular o tempo de subida (t_r), o tempo de pico (t_p), o sobre-sinal máximo ou overshoot e o tempo de estabelecimento (t_s), para uma entrada em degrau unitário.

Para o tempo de subida (t_r):

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_a} = \frac{\pi - \beta}{4} = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55\,seg}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\omega_a}{\zeta\omega_n} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 0.93\,rad$$

$$\omega_a = \omega_n\sqrt{1 - \varsigma^2} = 5\sqrt{1 - 0.6^2} = 4$$

Sistemas de 2ª ordem – exemplo

- Continuação:

Para o tempo de pico (t_p):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_a} = \frac{\pi}{4} = 0.785\ seg$$

Para o sobre-sinal máximo ou overshoot (M_p):

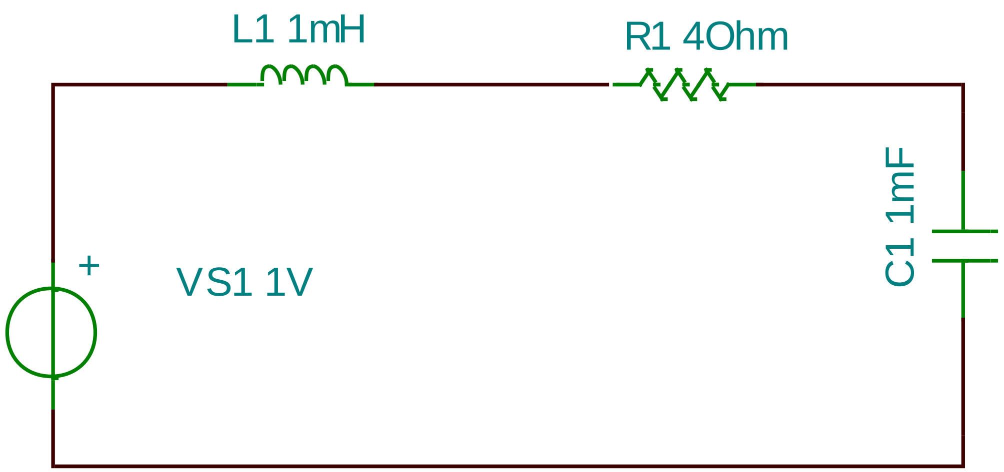
$$overshoot = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 9{,}5\%$$

Para o tempo de estabelecimento (t_s):

$$t_{2\%} = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{3} = 1.33\ seg$$

Sistemas 2ª ordem – exercício

- Determine a resposta ao degrau do circuito LRC série se L = 1 mH, R= 4Ω, C = 1 mF.



Sistemas 2ª ordem – Resolução

$$u_i(t) = u_l(t) + u_r(t) + u_c(t)$$

$$u_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) \qquad i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$u_i(t) = LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

$$\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\mathrm{K}_{rp}\omega_n^2}u_i(t) = \frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\zeta\omega_n}\frac{du_c(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_n^2}u_c(t)$$

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \dfrac{R}{L} \\ \omega_n^2 = \dfrac{1}{LC} \\ \mathrm{K}_{rp}\omega_n^2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases} \qquad \begin{cases} \zeta = \dfrac{R}{2w_nL} \\ \omega_n = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} \\ \mathrm{K}_{rp} = 1 \end{cases}$$

Sistemas 2ª ordem – Resolução

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{1 \times 10^{-3} \times 1 \times 10\hat{} - 3}} = 10^3$$

$$\zeta = \frac{R}{2\omega_n L} = \frac{4}{2 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-3}} = 2 \;\rightarrow\; \zeta > 1$$

Sistema sobre-amortecido

ζ	Tipo Polos	Resposta ao degrau
ζ>1	Reais e distintos	$y(t) = u_0 K_{rp}(1 + \frac{e^{-\zeta w_n t}}{2\Delta}\left(\frac{1}{\zeta + \Delta} e^{-\Delta w_n t} - \frac{1}{\zeta - \Delta} e^{\Delta w_n t}\right))$

$$\Delta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Sistemas de 2ª ordem – exercício

- Considere a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{X(S)} = \frac{K}{s^2 + \mathrm{Kks} + K}$$

- Determine os valores de K e k para que o sobre-sinal máximo da resposta ao degrau unitário seja 25% e o tempo de pico 2s.

Sistemas de 2ª Ordem – Em resumo

- Considere a seguinte função de transferência de um sistema de 2ª ordem:
- $\frac{C(s)}{R(S)} = \frac{k}{Js^2+Bs+K}$
- Neste sistema temos dois polos:
- $-B \pm \frac{\sqrt{B^2-4JK}}{2J}$, as raízes são complexas se $B^2 - 4JK < 0$. Ou reais se $B^2 - 4JK \geq 0$
- <u>A função de transferência genérica que descreve a dinâmica de um sistema de 2ª ordem é:</u>
- $\frac{C(s)}{R(S)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}$

- Onde:
- ω_n-> frequência natural não amortecida
- ζ-> fator de amortecimento relativo ao sistema
- $\sigma = \zeta\omega_n$-> atenuação
- $\omega_a = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$-> frequência natural amortecida
- $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$-> constante de tempo

Sistemas de 2ª ordem – resposta livre

- Aplicando transformadas de Laplace com condições iniciais diferentes de zero e rearranjando matematicamente obtém-se a função de transferência (FT):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta w_n \frac{dy}{dt} + w_n^2 y(t) = K_{rp} w_n^2 u(t)$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\zeta w_n\big(sY(s) - y(o)\big) + w_n^2 Y(s) = K_{rp} w_n^2 U(s)$$

$$Y(s) = \frac{K_{rp} w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} U(s) + \frac{s + 2\zeta w_n}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} y(0) + \frac{1}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} y'(0)$$

Se $y'(0) = 0$ e U(s)=0 vem:

$$Y(s) = \frac{s + 2\zeta w_n}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} y(0)$$

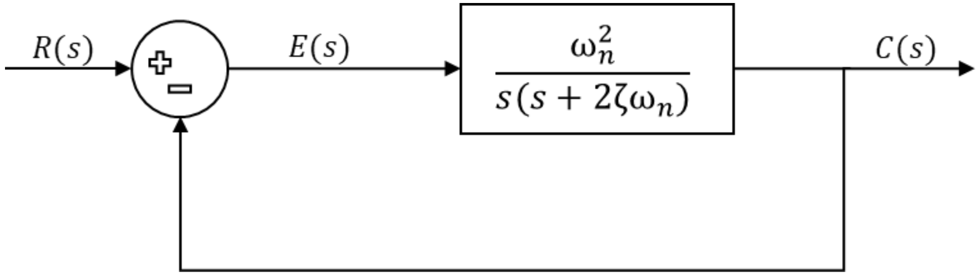
Sistemas de 2ª ordem – resposta livre

ζ	Tipo Polos	Resposta livre
>1	Reais e distintos	$y(t) = y(0)\dfrac{e^{-\zeta w_n t}}{2\Delta}\left((\zeta+\Delta)e^{\Delta w_n t} - (\zeta-\Delta)e^{-\Delta w_n t}\right)$
=1	Real Duplo	$y(t) = y(0)(1 + w_n t)e^{-w_n t})$
<1	Complexo Conjugado	$y(t) = y(0)\dfrac{1}{sen\phi}e^{-\zeta w_n t}\,\mathrm{sen}(w_a t + \phi)$
=0	Imaginário Puro	$y(t) = y(0)cosw_n t$

Com $\phi = arccos\zeta = arctg\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ e $\Delta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ e $w_a = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Sistemas 2ª Ordem

Representação diagrama de blocos:

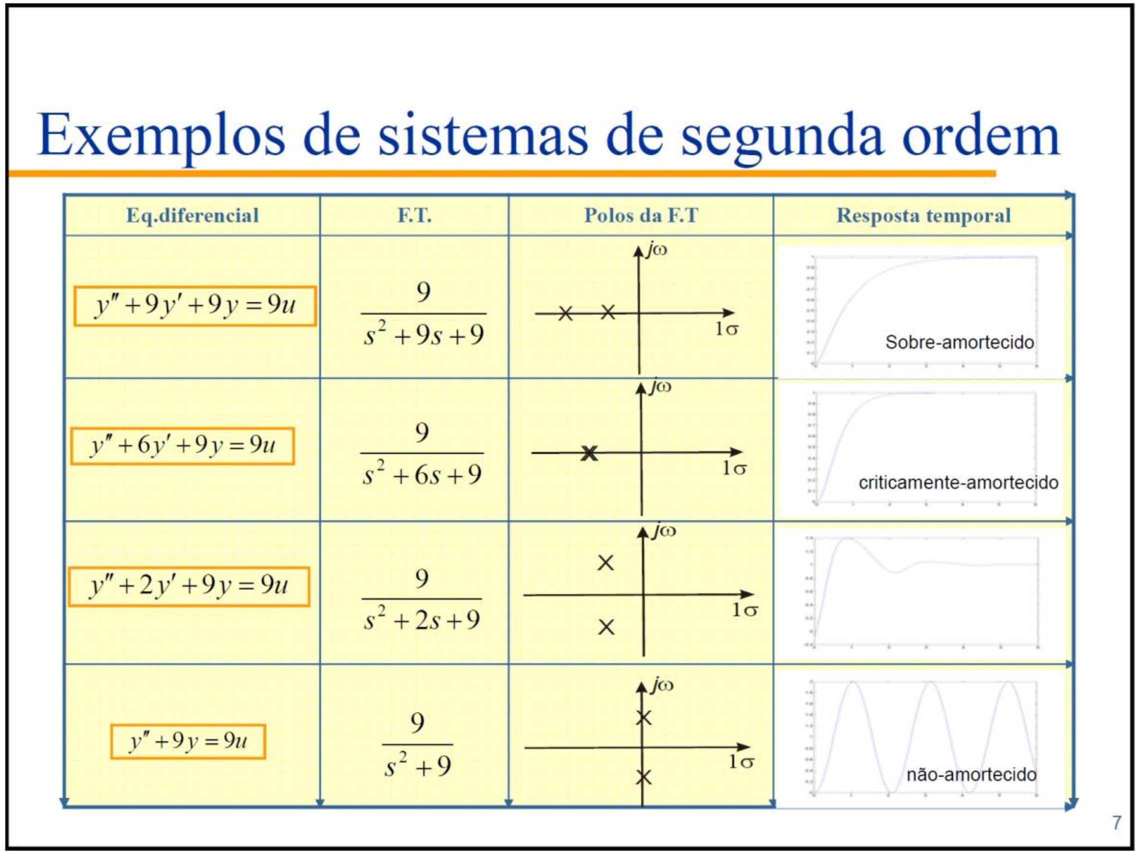


Nota: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \times \frac{s(s+2\zeta\omega_n)}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2}$

- **Exemplo:**
  - Então para a função de transferência inicial

    temos: $\frac{C(s)}{R(S)} = \frac{\frac{k}{J}}{s^2+\frac{B}{J}s+\frac{K}{J}}$
  - Onde: $\omega_n^2 = \frac{k}{J}, 2\zeta\omega_n = \frac{B}{j} = 2\sigma, \zeta = \frac{B}{2J\sqrt{\frac{K}{J}}}$

Estabilidade dos sistemas de 2ª ordem



Exemplos de sistemas de segunda ordem

Eq.diferencial	F.T.	Polos da F.T	Resposta temporal
$y'' + 9y' + 9y = 9u$	$\frac{9}{s^2 + 9s + 9}$	$j\omega$, 1σ	Sobre-amortecido
$y'' + 6y' + 9y = 9u$	$\frac{9}{s^2 + 6s + 9}$	$j\omega$, 1σ	criticamente-amortecido
$y'' + 2y' + 9y = 9u$	$\frac{9}{s^2 + 2s + 9}$	$j\omega$, 1σ	
$y'' + 9y = 9u$	$\frac{9}{s^2 + 9}$	$j\omega$, 1σ	não-amortecido

7