Elastoestática

- A elastostática refere-se às deformações de corpos com simetria elevada (cubos, cilindros, etc), sujeitos a combinações simples de forças externas.
- Os corpos são considerados como sendo feitos a partir de um material homogéneo e isotrópico.
- A elasticidade dos corpos é considerada linear.
- Para estudar os sólidos (hastes, postes, varões, etc), em equilíbrio, faz, assim, sentido utilizar as equações discutidas anteriormente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Tensor das deformações

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

Lei de Hooke (relação tensão-deformação)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\alpha}{E}\sigma_{ij} - \frac{\alpha}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

Lei de Hooke (relação deformação-tensão)

$$f_{Ri} = f_{Vi} + \sigma_{ij,j} = 0$$

Força resultante, $\vec{f}_R$, no equilíbrio mecânico

- As forças de volume, $\vec{f}_V$, assumem-se que são previamente conhecidas, antes da resolução do problema em estudo (a força da gravidade, por exemplo, é uma força de volume a considerar).
- Resolver o problema consiste em determinar σ_{ij}, ε_{ij} e o vetor deslocamento $\vec{u}$ para a situação em estudo.
- As equações acima são lineares, obedecendo ao princípio da sobreposição. Ou seja, a tensão total é o somatório das tensões, a deformação total é o somatório das deformações e o deslocamento total é a soma dos deslocamentos.

Elastoestática

- As condições fronteira na superfície do corpo podem ser descritas da forma.

1- O vetor deslocamento $\vec{u}$ é conhecido em todos os pontos do corpo e pretende-se obter os campos de deformações (ε_{ij}) e tensões (σ_{ij}).

2- O campo de tensões é conhecido em todo o corpo e pretende-se obter os campos de deformações (ε_{ij}) e de deslocamentos (u_i)

3- O vetor deslocamento é conhecido em parte do corpo e as tensões na restante parte.

- Para a situação 1, em que as condições fronteira são dadas em termos dos deslocamentos, as equações anteriores podem também ser escritas em termos dos deslocamentos, para procurar a solução:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

$$f_{Ri} = f_{Vi} + \sigma_{ij,j} = f_{Vi} + 2\mu\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial x_j} = f_{Vi} + 2\mu\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial x_i}$$

- Como: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $\qquad$ $\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$

$$f_{Ri} = f_{Vi} + 2\mu\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)$$

Elastoestática

- Relembrando que o índice *k* é repetido e pode ser renomeado para índice *j*, a equação anterior pode-se então escrever:

$$f_{Ri} = f_{Vi} + \mu \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

Em notação de tensores

$$\vec{f}_R = \vec{f}_V + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \left(\nabla \cdot \vec{u} \right)$$

Em notação simbólica

- No equilíbrio, obtém-se a chamada equação de Navier:

$$f_{Vi} + \mu \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0$$

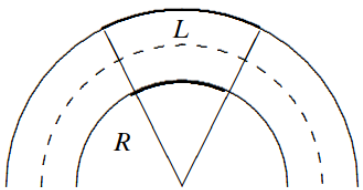
Em notação de tensores

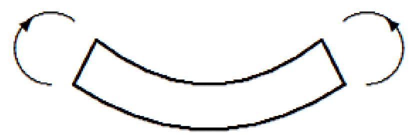
$$\vec{f}_V + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \left(\nabla \cdot \vec{u} \right) = 0$$

Em notação simbólica

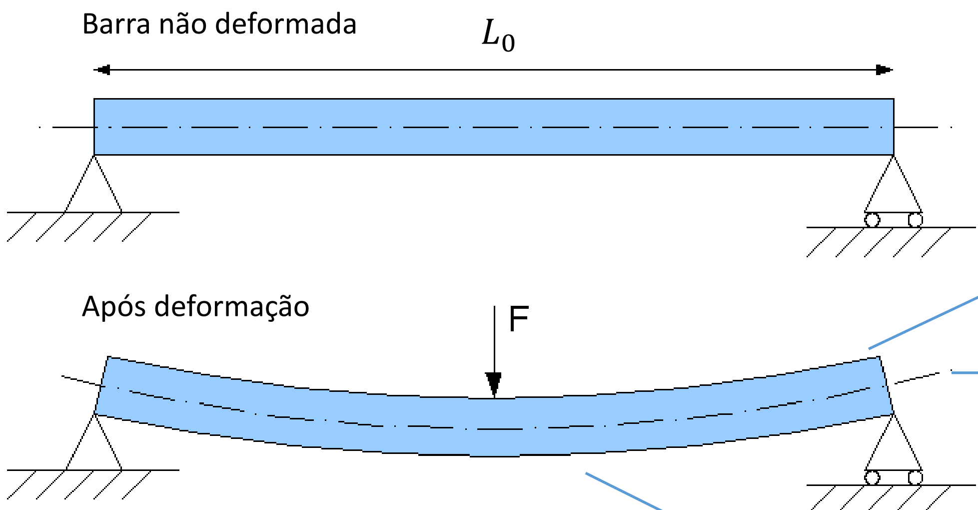
Elastoestática

- Exemplos. Deformação de hastes sem tensão de cisalhamento (flexão).
- A haste entra em flexão devido à aplicação de torque, por exemplo, nos extremos (ver figura).
- A deformação é considerada uniforme, se puder ser representada como fazendo parte de um anel circular de raio R.





- Haste é considerada como sendo constituídas por “fibras” paralelas ao longo do seu eixo



Fibra interior comprimida (comprimento do arco < L_0)

Fibra neutra (comprimento do arco = L_0)

Fibra exterior expandida (comprimento do arco > L_0)

Elastoestática

- Caso de flexão de uma haste presa numa base.
- R é o raio de curvatura da fibra neutra após a deformação.
- A deformação irá depender do comprimento de arco e raio de curvatura:

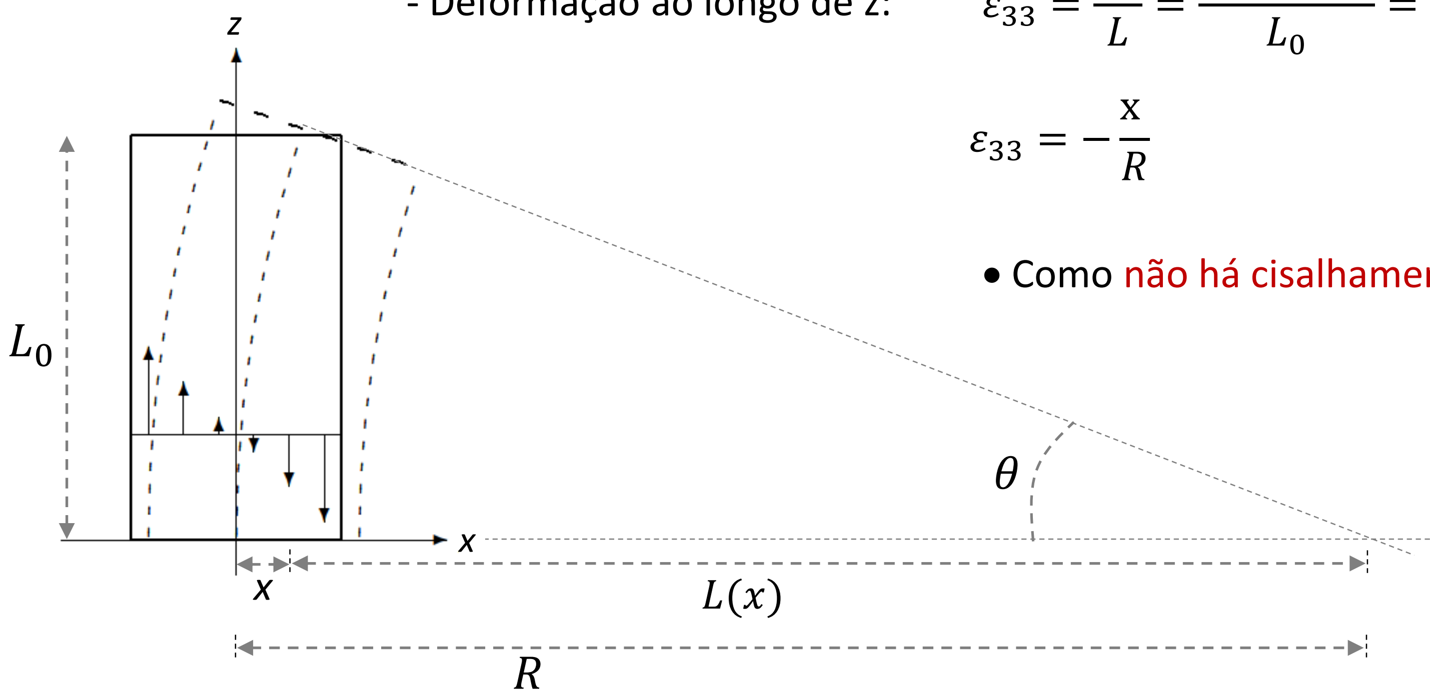
$L_0 = R\theta$ Comprimento da haste sem deformação

$L(x) = (R - x)\theta$ Comprimento do arco na posição x

- Deformação ao longo de z:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L(x) - L_0}{L_0} = \frac{(R-x)\theta - R\theta}{R\theta}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\mathrm{x}}{R}$$



- Como não há cisalhamento, $\sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

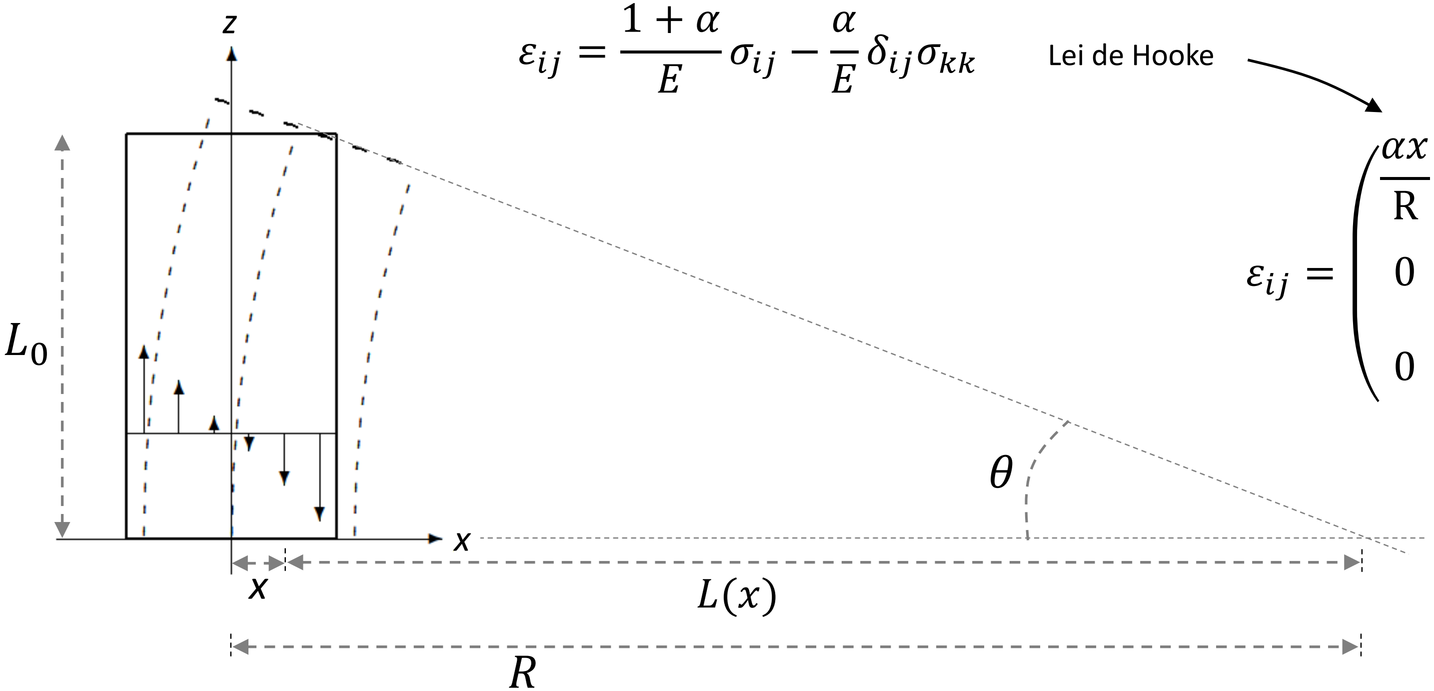
Elastoestática

- Como não há cisalhamento, $\sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- As únicas forças que existem é segundo o eixo dos *z* => $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ e $\sigma_{11} \neq 0$.
- Tensor das tensões:

$$\sigma_{33} = E\varepsilon_{33} = -E\frac{\mathrm{x}}{R} \quad \xrightarrow{\text{Lei de Hooke}} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{E}\dfrac{x}{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

- Tensor das deformações:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\alpha}{E}\sigma_{ij} - \frac{\alpha}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad \text{Lei de Hooke}$$



$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x}{\mathrm{R}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha x}{\mathrm{R}} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{x}{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

Elastoestática

- Determinação do vetor deslocamento $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial x} = \frac{\alpha x}{R}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_{\mathrm{y}}}{\partial y} = \frac{\alpha x}{R}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_{\mathrm{z}}}{\partial z} = -\frac{x}{R}$$

$$\longrightarrow$$

$$u_{\mathrm{x}} = \frac{\alpha x^2}{2R} + A(y,z)$$

$$u_{\mathrm{y}} = \frac{\alpha xy}{R} + B(x,z)$$

$$u_{\mathrm{z}} = -\frac{xz}{R} + C(x,y)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\alpha y}{R} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{z}{R} + \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

Elastoestática

• Em x = 0, na fibra neutra, não há deslocamento segundo y (não é esticada lateralmente) nem segundo z (comprimento mantém-se). Ou seja, $u_{\mathrm{y}}(0,y,z)=u_{\mathrm{z}}(0,y,z)=0$:

$$u_{\mathrm{z}}(0,y,z)=0=0+C(0,y)\Rightarrow C(0,y)=0\Rightarrow C(x,y)=C'(x)$$

$C(x,y)$ não pode depender de y

$$u_{y}(0,y,z)=0=0+B(0,z)\Rightarrow B(0,z)=0\Rightarrow B(x,y)=B'(x)$$

$B(x,z)$ não pode depender de z

• Para o problema daqui, em z = 0, junto à base, $u_{\mathrm{z}}(x,y,0)=0$ (não há deslocamento na base) e tem-se:

$$u_{\mathrm{z}}(x,y,0)=0=0+C'(x)\Rightarrow C'(x)=0$$

• Considerando, por simplicidade, $B'(x)=0$, tem-se:

$$u_{\mathrm{x}}=\frac{\alpha x^2}{2R}+A(y,z) \qquad u_{\mathrm{y}}=\frac{\alpha xy}{R} \qquad u_{\mathrm{z}}=-\frac{xz}{R}$$

Elastoestática

- Para achar $A(y,z)$ falta, então, resolver as equações:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\alpha y}{R} = 0 \qquad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{z}{R} = 0$$

- Da primeira equação: $\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\alpha y}{R} \Rightarrow A(y,z) = -\frac{\alpha y^2}{2R} + A'(z)$

- Substituindo $A(y,z)$ na segunda equação:

$$\frac{\partial A'}{\partial z} - \frac{z}{R} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A'}{\partial z} = \frac{z}{R} \Rightarrow A'(z) = \frac{z^2}{2R} + A''$$

A'' é uma constante que não pode depender de x, y ou z

- Assim: $A(y,z) = -\frac{\alpha y^2}{2R} + \frac{z^2}{2R} + A''$

- Considerando, também por simplicidade, que A''=0, obtendo-se, finalmente:

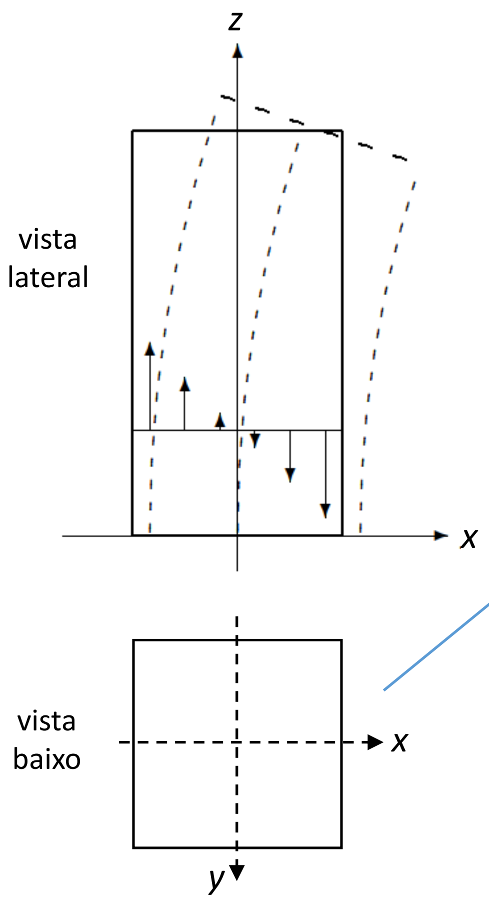
$$u_{\mathrm{x}} = \alpha\frac{x^2 - y^2}{2R} + \frac{z^2}{2R} \qquad u_{\mathrm{y}} = \frac{\alpha x y}{R} \qquad u_{\mathrm{z}} = -\frac{xz}{R}$$

Elastoestática

- Resultante das forças na haste.

Haste com forma com simetria elevada (x: a secção é quadrada).

- Como só existem tensões segundo o eixo dos zz, $\vec{F} = (0{,}0, F_z)$:



Lado da base = *a*

$$dF_z = \sigma_{zz} dS_z \qquad\qquad dS_z = \mathrm{dxdy}$$

- Força resultante:

$$F_z = \int \sigma_{zz} dS_z = \int\int \sigma_{zz} dxdy = \int\int -E\frac{x}{R} dxdy$$

- Por simetria a integração em x dá zero. Logo:

$$F_z = 0$$

$$\vec{F} = 0$$

- A resultante das forças é nula, como seria de esperar (equilíbrio).

Elastoestática

- Resultante dos momentos das forças (torque) na haste.
- Como só existem tensões segundo o eixo dos zz, $\vec{F} = (0,0,F_z)$:

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times d\vec{F} \qquad \vec{r} \times d\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & dF_z \end{vmatrix} = yF_z\hat{e}_1 - xdF_z\hat{e}_2 = (y\sigma_{zz}\hat{e}_1 - x\sigma_{zz}\hat{e}_2)dS_z$$

$$\vec{M} = \int (y\sigma_{zz}\hat{e}_1 - x\sigma_{zz}\hat{e}_2)dS_z = \int\int (y\sigma_{zz}\hat{e}_1 - x\sigma_{zz}\hat{e}_2)dxdy = \int\int (-E\frac{xy}{R}\hat{e}_1 + E\frac{x^2}{R}\hat{e}_2)dxdy$$

- Componentes *x* e *y*, para haste de secção quadrada de lado *a*, como no slide anterior:

$$M_x = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} -E\frac{xy}{R}dxdy = -\frac{E}{R}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} xdx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} ydy = -\frac{E}{R}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 0$$

$$M_y = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} E\frac{x^2}{R}dxdy = \frac{E}{R}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy = \frac{Ea}{R}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{Ea^4}{12R}$$

- Obtém-se, então, o momento de flexão da haste, no caso de ela ter secção quadrada: $\vec{M} = \dfrac{Ea^4}{12R}\hat{e}_2$
- Para o caso geral, para outras secções, obtém- a lei de Euler-Bernoulli:

$$\boxed{\mathrm{M} = \frac{EI_A}{R}}$$

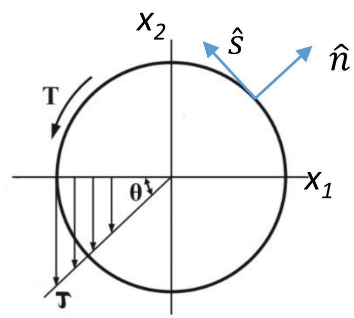
I_A é o momento da área, que, para o sistema de eixos escolhido: $I_A = \int_S x^2 dS$

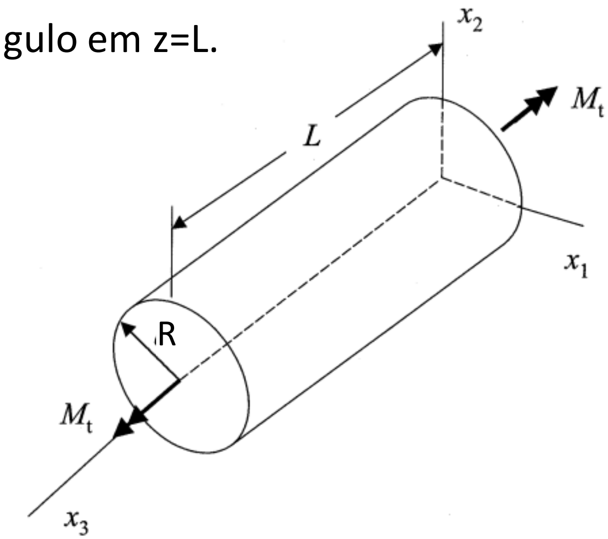
Elastoestática

- Torção de uma haste.
- Considere-se o exemplo da figura.
- Considera-se que não há forças perpendiculares às superfícies externas.
- Só existem forças ($\vec{T}$) tangenciais.
- O deslocamento acumulado ao longo do arco em cada ponto z (eixo x_3) é $s(z) = R\theta(z)$, onde R é o raio da base e $\theta(z)$ o angulo rodado nesse ponto.
- Se a torção é uniforme, então $\theta(z) = \frac{\Theta_{tot}}{L} z$, onde Θ_{tot} é o angulo em z=L.
- Assim:

$$s(z) = \frac{R\Theta_{tot}}{L} z$$

$$G = \frac{\Theta_{tot}}{L}$$ coeficiente de torção





- Vetor comprimento de arco:

$$\vec{s}(z) = \frac{R\Theta_{tot}}{L} z\hat{e}_\theta = GRz(-sen(\theta)\hat{e}_1 + cos(\theta)\hat{e}_2) \Rightarrow \vec{s}(z) = Gz\left(-\underbrace{y}_{Rsen\theta}\hat{e}_1 + \underbrace{x}_{Rcos\theta}\hat{e}_2\right)$$

- O vetor deslocamento será igual ao vetor comprimento de arco:

$$\vec{u}(z) = \vec{s}(z) = Gz(-y\hat{e}_1 + x\hat{e}_2)$$

Elastoestática

- Torção de uma haste.
- Determinação do tensor das deformações.

traço

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$$

$$\vec{u}(\mathrm{z}) = Gz(-y\hat{e}_1 + x\hat{e}_2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

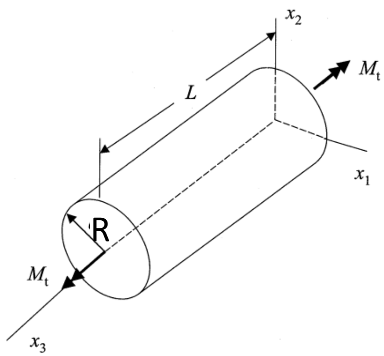
$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-Gy}{2} \\ 0 & 0 & \frac{Gx}{2} \\ \frac{-Gy}{2} & \frac{Gx}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(-Gz + Gz) = 0$$

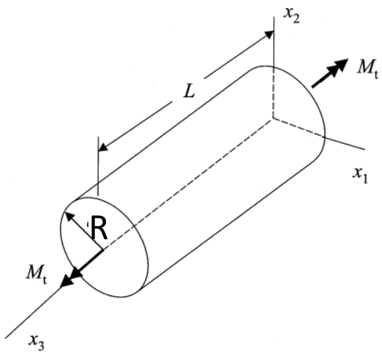
$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(-Gy + 0) = \frac{-Gy}{2}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(Gx + 0) = \frac{Gx}{2}$$



Elastoestática

- Determinação do tensor das tensões.



$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

$$\varepsilon_{kk} = 0$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -G\mu y \\ 0 & 0 & G\mu x \\ -G\mu y & G\mu x & 0 \end{pmatrix}$$

- As secções da haste têm a normal segundo o eixo dos z.
- Ou seja, $\hat{n} = \hat{e}_3 = (0,0,1)$. Nesse caso, a tensão $\vec{\tau}^s$ nas secções da haste vem:

$$\tau_i^s = \sigma_{ij}n_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -G\mu y \\ 0 & 0 & G\mu x \\ -G\mu y & G\mu x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\tau}^s = -G\mu y\hat{e}_1 + G\mu x\hat{e}_2$$

- O torque correspondente é: $\vec{M} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int \vec{r} \times \vec{\tau}^s dS_z$

- Fazendo o produto vetorial e integrando verifica-se que as componentes M_x e M_y são nulas (secção simétrica) e que é apenas necessário calcular a componente M_z:

$$M_z = \int (x\tau_y^s - y\tau_x^s)dS_z = \int\int (xG\mu x + yG\mu y)dxdy = G\mu \int\int (x^2 + y^2)dxdy$$

Elastoestática

- Torção de uma haste.
- O momento das forças (torque) pode então escrever-se:

$$\vec{M} = G\mu \int\int (x^2 + y^2) dxdy\, \hat{e}_3$$

$$I_s = \int\int (x^2 + y^2) dxdy$$

I_s é o momento da área da secção

$$\vec{M} = G\mu I_s \hat{e}_3$$

- O torque é perpendicular ao eixo do corpo, como seria de esperar, dado que torce no plano das suas secções.
- O módulo do torque, para uma situação geral será:

$$\boxed{M^s = G\mu I_s}$$

- Para o caso em que o corpo é cilíndrico de raio R (nota: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), tem-se (usando coordenadas polares):

$$M^s = G\mu \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = 2\pi G\mu \int_0^R r^3 dr = 2\pi G\mu \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$M^s = \frac{\pi G\mu R^4}{2}$$