

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e diga se se trata de uma matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e calcule:

- | | |
|---------------------|--|
| (a) $\det(A)$; | (e) $\det(ABC)$; |
| (b) $\det(B)$; | (f) $\det(A^3)$; |
| (c) $\det(C)$; | (g) $\det(C^n)$, $n \in \mathbb{N}$; |
| (d) $\det(-2A^t)$; | (h) $\det(C^{-1})$. |

3. Calcule o determinante das seguintes matrizes usando o Teorema de Laplace e/ou operações elementares:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Para $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz $A_k = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix}$.

Recorrendo a um cálculo de determinante, determine para que valores de k a matriz A_k é invertível.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Calculando o determinante de A , justifique que A é invertível.
- (b) O que pode dizer dos sistemas de equações em \mathbb{R}^3 dados por $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$? Resolva estes sistemas usando as fórmulas de Cramer.
- (c) Determine a sua inversa usando a matriz adjunta.

6. Usando a matriz adjunta, determine a inversa das matrizes invertíveis do Exercício 1.

7. Represente graficamente o paralelogramo de \mathbb{R}^2 gerado pelos vetores $u = (2, 0)$ e $v = (-1, -1)$ e calcule a sua área.

8. Justifique que os vectores $u = (-1, 3, 0)$, $v = (1, 2, 2)$ e $w = (0, 0, -2)$ são linearmente independentes e determine o volume do paralelepípedo gerado por esses três vetores.

9. Calcule a área do paralelogramo de \mathbb{R}^3 gerado por $u = (-1, 3, 0)$ e $v = (1, 2, 2)$.

10. Em cada alínea, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) associada à matriz A dada e determine, caso existam, os seus valores próprios e os vectores próprios associados.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

(g) $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$