Ficha 3

1. Considere a aplicação (função) $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (y,x)$.
   (a) Calcule $T(1,2)$.
   (b) Verifique que T é uma transformação linear.
   (c) Determine a imagem por T da reta $\mathcal{R} = \langle v \rangle$ onde $v = (1,2)$.

2. Diga se a aplicação dada em cada uma das alíneas seguintes é uma transformação linear.
   (a) $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\quad T(x,y,z) = (2x,2y)$
   (b) $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\quad T(x,y,z) = (x+y+2, z-3)$
   (c) $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\quad T(x,y) = (x^2,0)$
   (d) $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}|\mathbf{x})$ onde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

3. Considere as seguintes transformações lineares T. Em cada caso, determine
   - o núcleo de T indicando a sua dimensão e uma sua base (se tiver dimensão não nula),
   - a imagem de T indicando a sua dimensão e uma sua base (se tiver dimensão não nula),
   - o conjunto $\mathcal{C}$ dado dando uma descrição geometrica do mesmo.

   (a) $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-3y,0) \end{array}$ e $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (2,0)\}$.

   (b) $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,2x) \end{array}$ e $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (2,0)\}$.

   (c) $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,2y,0) \end{array}$ e $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (2,1,1)\}$.

   (d) $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z,y-2z) \end{array}$
   e $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (2,1)\}$.

4. Para cada transformação linear considerada no exercício anterior, diga, justificando, se é injetiva, sobrejetiva, bijetiva.

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T(1,0) = (2,0) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (1,2).$$

   (a) Determine $T(x,y)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Verifique que T é bijetiva e determine a sua inversa.

6. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabendo que

$$T(1,0,0) = (1,2), \quad T(0,1,0) = (-1,0) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (1,-2).$$

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $\mathrm{Ker}T = \langle (1,2,3) \rangle$ e $T(2,0,1) = (0,-1)$. Determine o conjunto

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,-1)\}.$$

8. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma transformação linear e seja

$$\mathcal{C} = A + \langle v_1, \cdots, v_k \rangle \qquad (A, v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n)$$

   um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a imagem de $\mathcal{C}$ pela transformação T é o subespaço afim de $\mathbb{R}^p$ dado por

$$T(\mathcal{C}) = T(A) + \langle T(v_1), \cdots, T(v_k) \rangle.$$

9. Usando o exercício anterior, determine e represente graficamente a imagem das seguintes retas de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{R}_1 = \langle (1,2) \rangle \qquad \mathcal{R}_2 = (0,1) + \langle (1,2) \rangle$$

   por cada uma das seguintes transformações lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x,-y)$

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (2x-y,0)$

10. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e sejam $v_1, \cdots, v_k \in V$ vetores linearmente independentes. Mostre que, se T é injetiva, então $T(v_1), \cdots, T(v_k)$ são linearmente independentes.