Cap. 7 - Eletrodinâmica

7.1. Força Eletromotriz

7.1.1. Lei de Ohm: Para fazer uma corrente fluir, temos que "empurrar" as cargas. A "velocidade" com que elas se movem depende da natureza do material.

Para a maioria das substâncias:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{f} \longrightarrow \text{força p/ unidade de carga}$$

$\vec{j}$ → densidade de corrente

σ → condutividade do meio (constante de cada material) $\neq$ (densidade superficial de carga)

Tbm expressa com recurso a outro termo, a resistividade:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

→ (nada a ver com dens. de carga)

- Materiais isolantes são ligeiramente condutores, porém a sua condutividade é insignificante quando comparada à do metal.
- Na maior parte dos casos, considera-se que a condutividade do metal é $\sigma = \infty$ (condutores perfeitos).

— " — " —

No nosso caso, a força que move as cargas para produzir a corrente é sempre considerada como sendo a força eletromagnética. Com isso a equação acima torna-se em:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \xrightarrow{\text{Quando a vel. das cargas mt pequena}} \boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

Para cargas estacionárias,

Esta expressão é conhecida como lei de Ohm.

- Para correntes estacionárias e condutividade uniforme,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

, a dens. de carga é zero; toda a carga desbalanceada permanece na superfície.

7.2. Indução eletromagnética

7.2.1. Lei de Faraday: Um campo magnético que varia induz um campo elétrico.

na forma integral: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$

A lei de Faraday reduz-se à regra $\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$ (ou $\nabla \times \vec{E} = 0$) no caso estático ($\vec{B}$ constante) como, é claro, deveria.

na forma diferencial: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(pelo teorema de Stokes)

Cap. 7 - Eletrodinâmica

7.1. Força Eletromotriz

7.1.1. Lei de Ohm:

Para fazer uma corrente fluir, temos que "empurrar" as cargas. A "velocidade" com que elas se movem depende da natureza do material.

Para a maioria das substâncias:

$$\vec{j} = \sigma . \vec{f} \longrightarrow \text{força p/ unidade de carga}$$

$\vec{j}$ → densidade de corrente

σ → condutividade do meio (constante de cada material) ≠ (densidade superficial de carga)

Tbm expressa com recurso a outro termo, a resistividade:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

→ (nada a ver com dens. de carga)

- Materiais isolantes são ligeiramente condutores, porém a sua condutividade é insignificante quando comparada à do metal.
- Na maior parte dos casos, considera-se que a condutividade do metal é $\sigma = \infty$ (condutores perfeitos).

— // — // —

No nosso caso, a força que move as cargas para produzir a corrente é sempre considerada como sendo a força eletromagnética. Com isso a equação acima torna-se em:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \xrightarrow[\text{cargas mt. pequena}]{\text{Quando a vel. das}} \boxed{\vec{j} = \sigma . \vec{E}}$$

Esta expressão é conhecida como lei de Ohm.

- Para correntes estacionárias e condutividade uniforme,

$$\nabla . \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla . \vec{j} = 0$$

, a dens. de carga é zero; toda a carga desbalanceada permanece na superfície.

Para cargas estacionárias, $\boxed{\vec{j} = 0}$ e, por isso, o $\boxed{\vec{E} = 0}$ dentro do condutor.

Para condutores perf., $\boxed{\vec{E} = \vec{j}/\sigma = 0}$, mesmo que a corrente esteja a fluir.

Na prática, os metais são bons condutores pelo que o C.E. necessário para movimentar a corrente é desprezável.

7.2. Indução eletromagnética

7.2.1. Lei de Faraday:

Um campo magnético que varia induz um campo

na forma integral: $\oint \vec{E} . d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . d\vec{a}$

na forma diferencial: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(pelo teorema de Stokes)

A lei de Faraday reduz-se à regra $\boxed{\oint \vec{E} . d\vec{l} = 0}$ (ou $\nabla \times \vec{E} = 0$) no caso estático ($\vec{B}$ constante) como, é claro, → deveria.

7.3. Equações de Maxwell

7.3.1. Eletrodinâmica antes de Maxwell: Inicialmente, existiam as seguintes leis que especificavam o divergente e o rotacional dos C.E. e dos C.M:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \qquad \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{\nabla \times \vec{B} = \vec{j} \cdot \mu_0} \qquad \boxed{I = \frac{\partial Q}{\partial t}}$$

Lei de Gauss — Lei de Faraday — Lei de Ampère

Apesar de terem sido utilizadas (e ainda serem) durante muito tempo, existe uma incoerência fatal nestas fórmulas, que corresponde à regra $\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0}$.

Iremos analisar os casos:

↳ Lei de Faraday: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$! ← este caso está certo

por uma das leis

↳ Lei de Ampère: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{j}) \cdot \mu_0$ → Ocorre aqui um problema uma vez que $(\nabla \cdot \vec{j})$ apenas é $= 0$ para correntes estacionárias (magnetostática), porém em geral, $\nabla \cdot \vec{j} \neq 0$

↳ Existe uma outra forma de ver que a lei de Ampère se encontra incorreta (exemplo do carregamento do condensador). Essa explicação encontra-se no manual, pág. 224.

7.3.2. Correção da Lei de Ampère: De forma a corrigir esse erro, foi aplicada a lei da continuidade (que defende a conservação da carga elétrica) e a lei de Gauss à lei de Ampère:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Para que possamos anular a lei de Ampère, basta adicionar a este um novo termo $\left(\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ que anularia a $\vec{j}$ feito o divergente do rotacional.

Nova lei de Ampère: $\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \left[\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]}$

Esta alteração não afeta em nada quando nos encontramos no campo da magnetostática (onde $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$) que fará a lei de Ampère retornar à sua expressão inicial.

De facto, este novo termo é mt. difícil de ser detetado nos experimentos comuns, onde "$\vec{j}$" sempre prevalece. No entanto, terá um papel crucial nas ondas eletromagnéticas.

Esta modificação levou à criação de uma nova ideologia, a qual complementa a da <u>lei de Faraday</u>, que diz:

Um campo elétrico variável induz um campo magnético.

Este novo termo ficou conhecido por <u>corrente de deslocamento</u>, $\vec{j}_d$:

$$\boxed{\vec{j}_d = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \vec{j}_d} \rightarrow \text{Lei de Ampère modificada}$$

7.3.3. Equações de Maxwell

lei de Gauss: $\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ $\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$

lei de Faraday: $\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

lei de Ampère: $\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{j}_d}}$

As eq. de Maxwell (já modificadas), juntamente com a lei da força:

$$\boxed{\vec{F} = q(E + \vec{v} \times \vec{B})}$$

$\vec{F} \rightarrow$ força que uma carga (q) é sujeita

$\vec{v} \rightarrow$ velocidade com que a carga vai

Resumem todo o conteúdo teórico da eletrodinâmica clássica, reforçando a noção de que os C.E. podem ser produzidos <u>tanto</u> por cargas (ρ) como pela var. dos C.M. $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$, e os C.M. podem ser produzidos <u>tanto</u> por correntes ($\vec{j}$) quanto pela var. de C.E. $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$. De facto, estas variações dos campos dependem elas mesmas das cargas e das correntes.

Assim sendo, rearranjou-se as eq. de Maxwell de forma que os campos fiquem à esquerda das igualdades e as fontes à direita:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad \boxed{\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \quad \boxed{\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot \vec{j}}$$

As eq. de Maxwell mostram como as <u>cargas</u> produzem <u>campos</u>; reciprocamente, a lei da Força mostra como os <u>campos</u> afetam as <u>cargas</u>.

7.3.4. Carga Magnética

Considerando o espaço livre, onde ρ e $\vec{j}$ se <u>anulam</u>, as eq. de Maxwell alteram-se para:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = 0} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Para que haja uma certa simetria entre as leis, teríamos que introduzir novos termos:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = \underbrace{\alpha_0}_{\text{ou } \mu_0} \cdot \rho_m} \quad \boxed{\nabla \times \vec{E} = +\underbrace{\beta_m}_{\text{ou } -\frac{1}{\varepsilon_0}} \cdot \vec{j}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}_e + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{\text{ou } \frac{1}{c^2}} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

, onde "ρ_m" representaria a densidade de "carga magnética" e "ρ_e" a densidade de carga elétrica; "$\vec{j}_m$" seria a corrente da "carga magnética" e "$\vec{j}_e$" seria a corrente de carga elétrica. Ambas as cargas seriam conservadas, pelas expressões:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{j}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}} \qquad \boxed{\nabla \cdot \vec{j}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}}$$

De uma certa forma, as eq. de Maxwell imploram pela existência de cargas magnéticas, no entanto até hoje nenhuma foi encontrada, fazendo com que $\boxed{\rho_m = 0}$ em toda a parte, assim como $\boxed{\vec{j}_m = 0}$, ao contrário do que acontece para as cargas elétricas, nas quais se comprovou a existência de fontes estacionárias para o $\vec{E}$.

7.3.5. Equações de Maxwell na matéria