T2 - Oscilações amortecidas no circuito RLC

1 Introdução

Neste trabalho iremos estudar fenómenos transitórios num circuito RLC.

O comportamento de um circuito RLC série é, do ponto de visto físico, semelhante ao de outros sistemas "oscilatórios", como por exemplo o pêndulo simples ou um sistema massa-mola, estes últimos já estudados em mecânica. Todos estes sistemas são descritos por conjuntos de equações com a mesma forma funcional.

Para um sistema massa-mola idêntico aquele que estudou em mecânica (movimento amortecido em parafina, e. g.) descrevendo o movimento de uma esfera de massa *m*, acoplada a uma mola de constante *k* teremos (na ausência de força exterior aplicada):

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \right), \qquad (1)$$

em que *c* representa o coeficiente de amortecimento ou de atrito viscoso. Nesta condição (oscilações não forçadas) o sistema oscilará com uma frequência chamada frequência angular natural do sistema $\left(\omega_0 = \sqrt{k/m}\right)$.

Em sistemas ideais sem amortecimento, quer na analogia mecânica (c = 0) quer no equivalente elétrico (R = 0), a energia total dos sistemas permanecerá constante e as oscilações continuariam, nessa condição, indefinidamente. No caso do circuito LC ideal teríamos sucessivamente trocas entre a energia potencial armazenada no campo elétrico do condensador ($CV^2/2$) e a energia armazenada no campo magnético da bobina ($LI^2/2$).

Quando nestes sistemas é introduzido um elemento dissipativo, como o atrito no caso das oscilações mecânicas, ou uma resistência no caso dos circuitos elétricos, parte da energia é dissipada e as oscilações tornam-se amortecidas até deixarem de ocorrer.

Considerando um circuito RLC em que o condensador está inicialmente carregado (tensão V_C para t < 0) e fechando o circuito em t = 0, fluirá no circuito uma corrente I. A conservação de energia impõe que:

$$RI^2 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{CV^2}{2} + \frac{LI^2}{2}\right) \tag{2}$$

A equação acima ainda pode ser escrita como:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \tag{3}$$

que é uma equação diferencial de 2ª ordem, linear e homogénea.

Esta mesma equação pode ser obtida diretamente através da aplicação da lei das malhas ao circuito RLC série (**provar**).

A equação (3) aceita soluções (tal como nos casos estudados na mecânica) do tipo:

$$q(t) = Ae^{st} \tag{4}$$

Substituindo esta solução na equação (3) resulta a equação característica:

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0 \quad \rightarrow s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{5}$$

A solução desta equação quadrática tem por raízes:

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\left(R^2 - 4\frac{L}{C}\right)^{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right)^{1/2} = -\gamma \pm j\alpha \tag{6}$$

com $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ e $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$; $\left(\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)$

De lembrar que $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ representa a frequência natural de oscilação do sistema, sendo que γ representa o chamado fator de amortecimento. ω_n representa então a frequência de oscilação do sistema$(\omega_n < \omega_0)$. Dependendo do valor de α^2 ser negativo, positivo ou nulo, assim teremos os diferentes tipos de amortecimento do sistema.

A. Amortecimento forte (regime de sobre-amortecimento)

Neste caso as soluções (s_i) são reais e negativas e teremos:

$$\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right) > 0,$$

ou seja, $\omega_0 < \gamma$ e portanto ω_n é imaginário. Neste caso não há oscilação.

Reescrevendo ω_n como $\omega_n = j\alpha$ com $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, a solução geral para $q(t)$ será dada por:

$$q(t) = q_1 e^{-(\gamma+\alpha)t} + q_2 e^{-(\gamma-\alpha)t} \qquad (7)$$

sendo q_1 e q_2 são constantes determinadas a partir das condições iniciais.

B. Amortecimento crítico

Neste caso teremos: $\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right) = 0$ ou seja, $\omega_0 = \gamma$ e $\omega_n = 0$

A solução geral para $q(t)$ será agora dada por:

$$q(t) = (q_1 + q_2 t)e^{-\gamma t}, \qquad (8)$$

sendo q_1 e q_2 constantes determinadas a partir das condições iniciais.

Isto significa que o valor da corrente cairá rapidamente para zero após atingir o máximo. Tal como no caso anterior, neste caso também não existe oscilação.

C. Amortecimento fraco (regime de sub-amortecimento)

A condição para este caso é dada por $\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right) < 0 \;\rightarrow\; \omega_0 > \gamma$

Neste caso R é pequeno $(R < 2\omega_0 L)$. A carga irá oscilar de acordo com:

$$q(t) = q_0 e^{-\gamma t} cos(\omega_n t)$$

(sendo $q(t=0) = q_0$, e $\varphi = 0$)

A frequência desta oscilação amortecida é menor do que ω_0 :

$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ $\left(\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\right)$ (na analogia mecânica)

Nestas condições a corrente toma a forma aproximada:

$$i(t) \approx \frac{q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\gamma t} sen(\omega_n t + \delta) \qquad \text{sendo} \quad \left(\delta = \arctan\left(\frac{\gamma}{\omega_n}\right)\right), \qquad (9)$$

equação que mostra que a amplitude da corrente oscila com uma frequência angular ω_n modulada por uma exponencial decrescente.

Na figura 1 representa-se a evolução da carga em função do tempo, para cada uma das situações apresentadas.

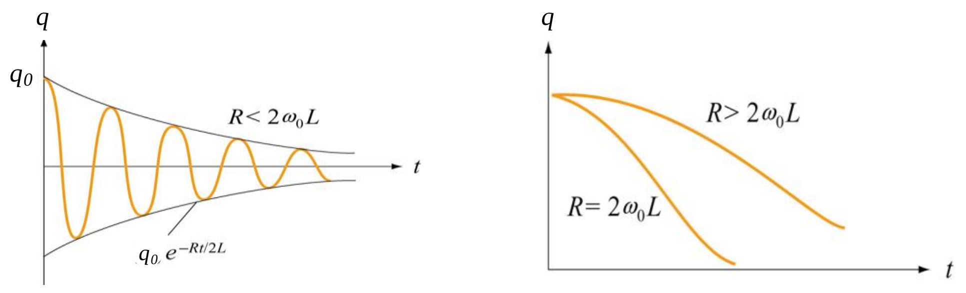

Figura 1 - Representação dos diferentes tipos de amortecimento para um circuito RLC série

2 Procedimento experimental

Material necessário

Caixa de resistências variáveis, condensadores (10 nF) e bobina (~39 mH)

Fonte de alimentação AC

Multímetros

Osciloscópio Agilent Technologies DSO3062A (60 MHz)

Fios de ligação

- Meça o valor da resistência interna da bobina.
- Calcule o valor das resistências a utilizar para simular as três situações de amortecimento descritas acima.
- Regule o gerador de sinais de modo a fornecer uma onda quadrada com 16 V_{p-p} e uma frequência de 20 Hz.
- Utilizando uma das resistências calculadas acima bem como o condensador e a(s) bobina(s) indicados, monte na placa fornecida um circuito RLC série (figura 1 d (ou c) do trabalho 1).
- Fazendo variar a resistência visualize (e registe) os sinais aos terminais da série condensador bobina (ou da resistência) para as várias situações de amortecimento descritas.
- Analise criticamente todos os resultados obtidos.