Osciladores livres, amortecidos, forçados e ressonância

Notas de aula – Daniel Cosmo Pizetta

Instituto de Física de São Carlos – Universidade de São Paulo

Laboratório de Física II

1. Oscilador livre

Força atuante no sistema massa mola na horizontal, ideal – sem atrito e desconsiderando a viscosidade do ar, é dado pela Equação (1), onde x_0 denota a posição de equilíbrio.

$$F = -k(x - x_0) \tag{1}$$

Para o oscilador vertical sob a ação da gravidade teremos

$$F = -k(x - x_0) + mg \tag{2}$$

$$F = -kx + kx_0 + mg \tag{3}$$

Se consideramos que a força peso apenas desloca o sistema para uma nova posição de equilíbrio x'_0, podemos simplificar adotando está nova posição como referência para nosso sistema, se tornando

$$F = -kx \tag{4}$$

Em termos de derivadas temporais

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{5}$$

A solução estácionária é dada por

$$\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)} \tag{6}$$

Onde ϕ é uma constante para o deslocamento inicial em *t=0* e ω é dado por

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{k/m}} \tag{7}$$

Uma oscilação por um período completo, ***T***, equivale a deslocar a função (seno ou cosseno) em ***2π***, em termos matemáticos isso fornece, de modo geral,

$$\omega(t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi \tag{8}$$

Isto fornece

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9)$$

E por fim,

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad (10)$$

Podemos determinar A e φ através das equações a seguir, onde ambas são dependentes da frequência escolhida além das condições iniciais como velocidade e posição.

$$\boldsymbol{A(\omega)^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad \textbf{e} \quad \boldsymbol{\varphi(\omega) = tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)} \quad (11)$$

Note que a amplitude será simplesmente a posição inicial ($\boldsymbol{x_0}$) se a velocidade inicial ($\boldsymbol{v_0}$) for zero. Desta forma podemos fazer um esboço para a posição em função do tempo, como na Figura 1.

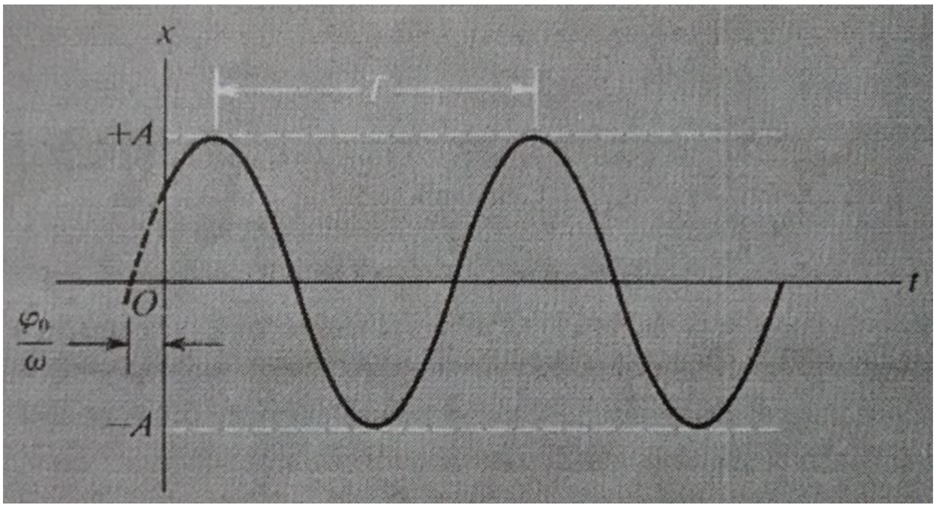


Figura 1 - Posição em função do tempo para um oscilador harmônico sem amortecimento. Neste caso a função solução é seno. Fonte: French, A. P.

Pela Eq. (10) podemos extrair algumas informações importantes quanto aos resultados esperados se mudarmos algumas variáveis.

- Se ***m*** aumenta, o período ***T*** aumenta – dado a maior inércia causada pela massa maior.
- Se ***k*** aumenta, o período ***T*** diminui – dado pela maior constante de restauração.
- O movimento dado pela Eq. (10) que a amplitude máxima de oscilação não varia, isso será verdade para um tempo curto de oscilação no ar.

Observe abaixo na Figura 2 que as oscilações para um sistema real livre sempre tendem a ter um amortecimento.

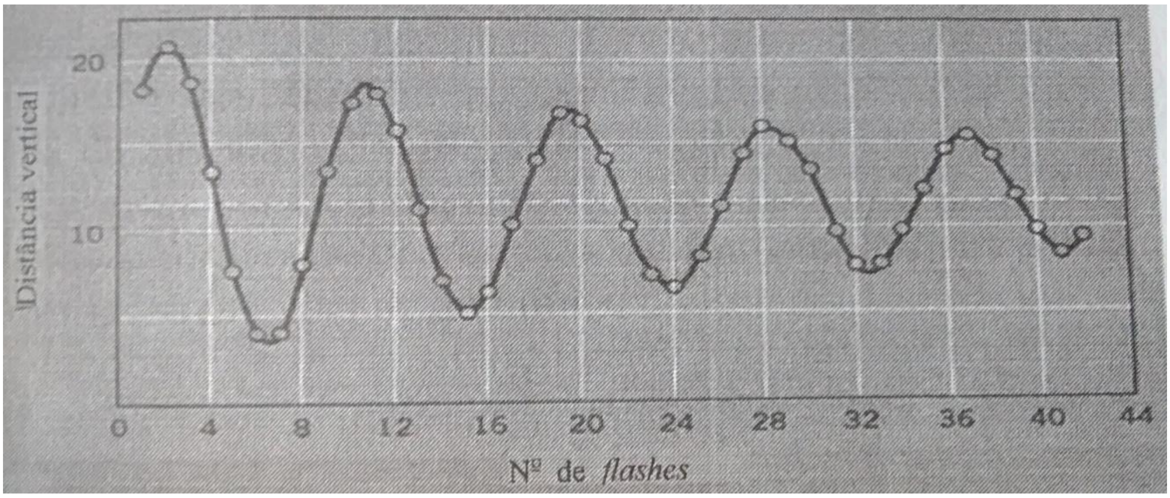


Figura 2 – Decaimento para oscilação livre. Fonte: French, A. P.

Apesar de termos respondido algumas questões, temos algumas outras perguntas que ficam ainda sem resposta:

- Se o comprimento inicial da mola fosse maior?
- E se a espessura da mola fosse maior?
- E se o material fosse mais rígido?

Para responder estas questões precisamos saber de onde vem o ***k*** da mola. Para um dado material, se sua deformação é proporcional a tensão aplicada, teremos uma constante de proporcionalidade,

$$\frac{Tensão}{Deformação} = \frac{T}{\Delta l / l_0} = Constante \tag{12}$$

A Eq. (12) pode ser reescrita em função da força em relação a área da seção transversal do material em questão

$$\frac{dF/a}{dl/l_0} = -Y \tag{13}$$

Onde ***Y*** é o módulo de Young ou módulo de elasticidade. O Sinal negativo se refere a oposição a direção da força aplicada. Podemos reescrever a Eq. X neste outro formato.

$$dF = -\frac{Ya}{l_0} dl \tag{14}$$

Integrando e substituindo ***l*** por ***x***, chegamos a equação que descreve o oscilador.

$$F = -\frac{Ya}{l_0} x \tag{15}$$

Portanto,

$$k = \frac{Ya}{l_0} \tag{16}$$

Com as Eq. (10) e (16), podemos responder as questões formuladas:

- Se o comprimento $\boldsymbol{l_0}$ aumenta, o período $\boldsymbol{T}$ aumenta – pois para um mesmo deslocamento inicial $\boldsymbol{x_i}$, a quantidade deslocada por comprimento é menor. Ex. Dois elásticos/molas em série.
- Se a mola é mais espessa, maior área $\boldsymbol{a}$ transversal, o período $\boldsymbol{T}$ diminui - mais difícil será o alongamento, pois será necessária uma força maior. Ex. Dois elásticos/molas em paralelo.
- Por fim se o material é mais rígido, $\boldsymbol{Y}$ maior, menor será o período $\boldsymbol{T}$.

Veja abaixo a comparação entre as molas em serie e em paralelo.

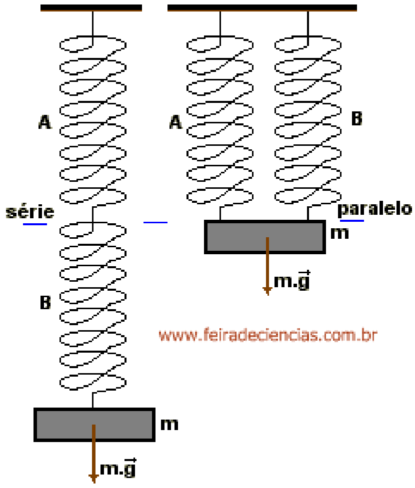


Figura 3 - Associação em serie e paralelo para o sistema massa mola. Fonte: www.feiradeciencias.com.br

Mas e se nos perguntarmos como a temperatura ou as ligações atômicas refletem nestes fenômenos. As respostas ficam para outro curso, mas vejam que o interessante é que os níveis estão relacionados, desde o macro (deslocamento da mola), micro (deslocamento de sub partes) e a escala atômica.

2. Osciladores amortecidos

Quando trabalhamos com experimentos com osciladores, mesmo que no ar, podemos notar um decaimento na amplitude de oscilação ao longo do tempo. Isso se deve a uma força de atrito – força viscosa, que atua como dissipativa para a energia do sistema em questão. Quanto mais viscoso o meio, mais drástico será o efeito esta força produzirá. Uma força de atrito viscoso em primeira aproximação é dada como

$$F_a = -bv \qquad (17)$$

Onde $\boldsymbol{v}$ é a velocidade e $\boldsymbol{b}$ é o módulo da força viscosa. Como há um sinal negativo, esta força sempre se opõe ao movimento.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (18)$$

A solução para tal equação é

$$\boldsymbol{x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi)} \qquad (19)$$

Note que agora há um termo de decaimento exponencial que faz com que a amplitude sempre diminua ao longo do tempo. Onde

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{b}{2m} \quad e \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \qquad (20)$$

Neste caso a amplitude máxima do movimento é dependente do tempo também, além da frequência como no caso anterior.

$$\boldsymbol{A(t,\omega) = \left(x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right) \mathrm{e}^{-\gamma t}} \qquad (21)$$

Podemos observar que, além da amplitude, a frequência de oscilação é modificada pela viscosidade. Se fizermos com que $\gamma = 0$, então $\omega' = \omega$ e voltamos ao oscilador sem amortecimento. Precisamos agora analisar alguns casos importantes quanto ao amortecimento.

2.1 Amortecimento sub crítico, $\boldsymbol{\gamma < \omega}$

Neste caso, o mais comum e interessante, o decaimento da amplitude é lento de forma que temos um ou mais períodos de oscilação. Este caso é o que foi tratado anteriormente. Note que a solução de seno ou cosseno, escrita em números complexos possui um expoente imaginário.

2.2 Amortecimento crítico, $\boldsymbol{\gamma = \omega = \gamma_c}$

Neste caso, onde o fator de amortecimento gama tem o mesmo valor da frequência angular deve ser resolvido com cuidado, onde a solução será

$$\boldsymbol{x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}} \qquad (22)$$

Esta solução também não permite uma oscilação, porém diferente do super amortecimento, esta é a que fornece o menor tempo para o retorno a posição de equilíbrio, que pode ser diferente da inicial dado as condições iniciais. Este é um sistema vantajoso para casos em que de deseja que o sistema não oscile, porém volte rapidamente a posição de equilíbrio tais como em sistemas de medição de energia entre outros.

2.3 Super amortecimento, $\boldsymbol{\gamma > \omega}$

Para este último caso, γ sendo maior que ω, aparecerá na frequência final um termo real de forma que a oscilação não mais existirá (seno ou cossenos hiperbólicos). Este termo faz com que a solução agora seja apenas um decaimento exponencial dado por

$$\boldsymbol{x(t) = A\mathrm{e}^{-(\gamma+\beta)t} + B\mathrm{e}^{-(\gamma-\beta)t}} \qquad (23)$$

onde

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{24}$$

Qual o erro do gráfico abaixo?

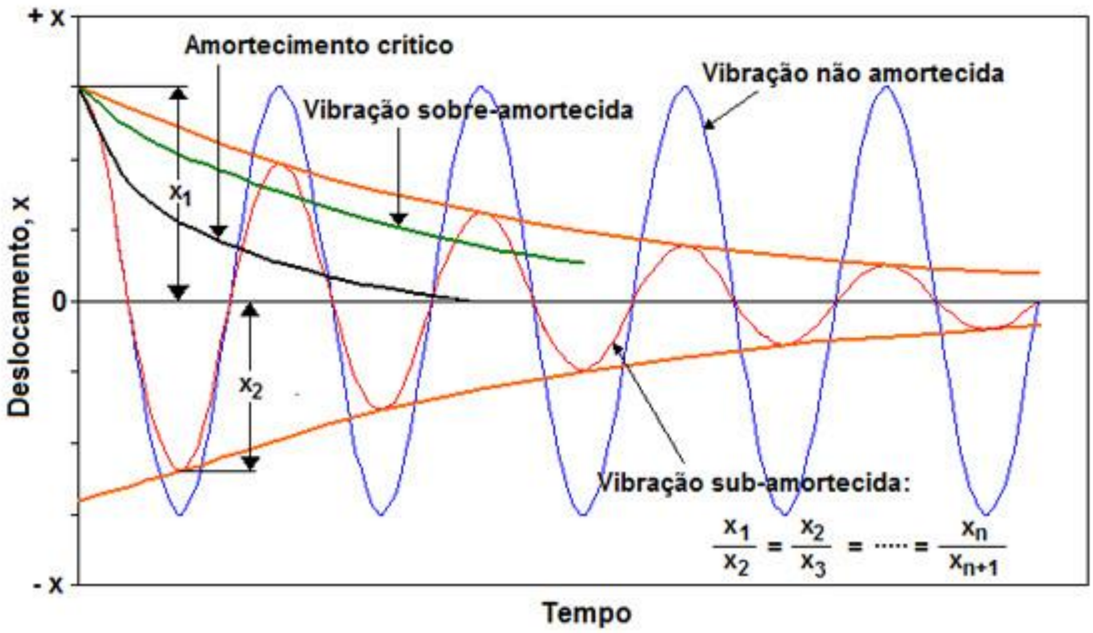


Figura 4 - Comparação entre diferentes tipos de amortecimento. Fonte: http://ctborracha.com/?page_id=1189

R: A frequência sem e com amortecimento são idênticas. Ok, pode ser pela escala, mas precisamos tomar cuidado ao dar estes exemplos.

Os amortecimentos são importantes para nosso dia a dia de forma que podemos encontra-los em vários seguimentos os quais veremos no próximo capítulo sobre ressonância. Atente para o tópico seguinte onde o fenômeno de ressonância pode ser limitado e/ou reduzido drasticamente com a inserção de amortecimento no sistema, podendo assim ter um controle sobre o fenômeno de ressonância, ou melhor, sobre a amplitude máxima na transferência de energia na ressonância.

3. Oscilador Forçado e Ressonância

O fenômeno de ressonância é de extrema importância para todos os ramos da ciência. Mais adiante, veremos onde podemos encontrar tal fenômeno e o que ele pode acarretar. A definição de ressonância de modo geral é que ela representa um ponto pelo qual o sistema responde com maior transmissão/recepção de energia, diferentemente dos pontos próximos ao mesmo.

No caso de um sistema forçado, com uma força harmônica externa dada por

$$F_{ext} = F_0 cos(\Omega t) \tag{25}$$

Neste caso Ω é a frequência e $\boldsymbol{F_0}$ é a amplitude máxima da força externa. Assim a equação do oscilador possui mais um termo, ficando

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0cos(\Omega t) \qquad (26)$$

E a solução estacionária para esta equação será

$$\boldsymbol{x(t) = Acos(\Omega t + \delta)} \qquad (27)$$

Note que a amplitude de oscilação é imposta pelo agente externo, onde temos

$$\boldsymbol{A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}} \quad \mathbf{e} \quad \boldsymbol{\delta(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega\prime^2}} \qquad (28)$$

Lembrando que

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad e \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \qquad (29)$$

A amplitude é independente do tempo e terá um máximo quando o denominador for mínimo, ou seja, a frequência de ressonância será

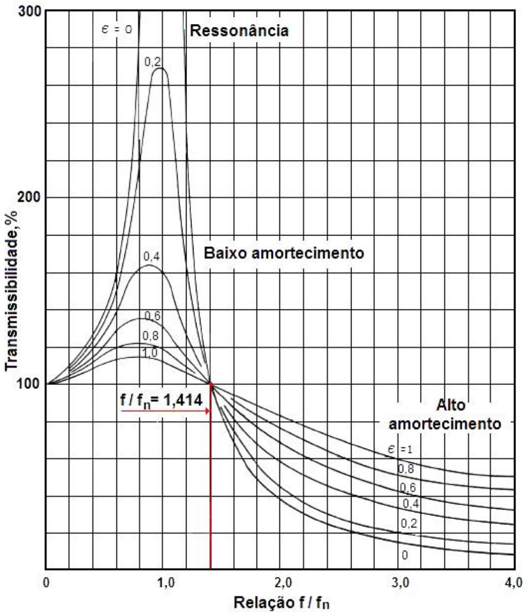
$$\boldsymbol{\Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}} \qquad (30)$$

- Se não há amortecimento, $\gamma = 0$, a expressão no denominador só depende da diferença $\omega^2 - \Omega^2$, assim quando na ressonância, a amplitude vai para infinito. Observe que isso não acontece se há algum amortecimento.
- A frequência de ressonância depende do amortecimento, portando quanto maior o amortecimento, menor será a frequência de ressonância.

Podemos também definir o valor Q (fator de qualidade) como sendo

$$\boldsymbol{Q = \omega/\gamma} \qquad (31)$$

A oscilação reduz de um fator e em aproximadamente Q/π ciclos da oscilação livre. Este fator é muito importante principalmente para aplicações em engenharia.



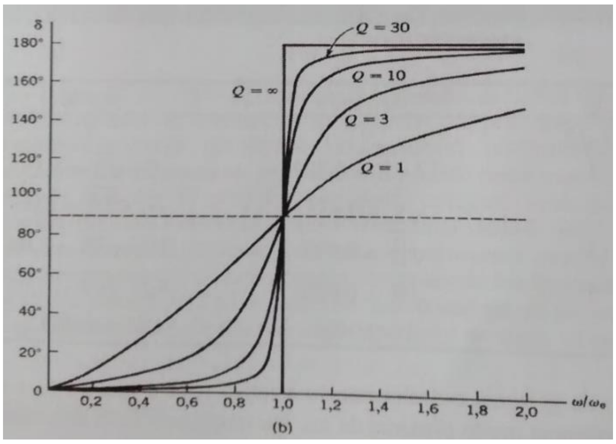


Figura 5- a) Transmissão de energia entre a fonte e o sistema para vários valores e amortecimento e relação entre frequência da fonte. B) Defasagem do oscilador em relação a fonte para diferentes amortecimentos. Fonte a) http://ctborracha.com/?page_id=1189 Fonte: b) French, A. P.

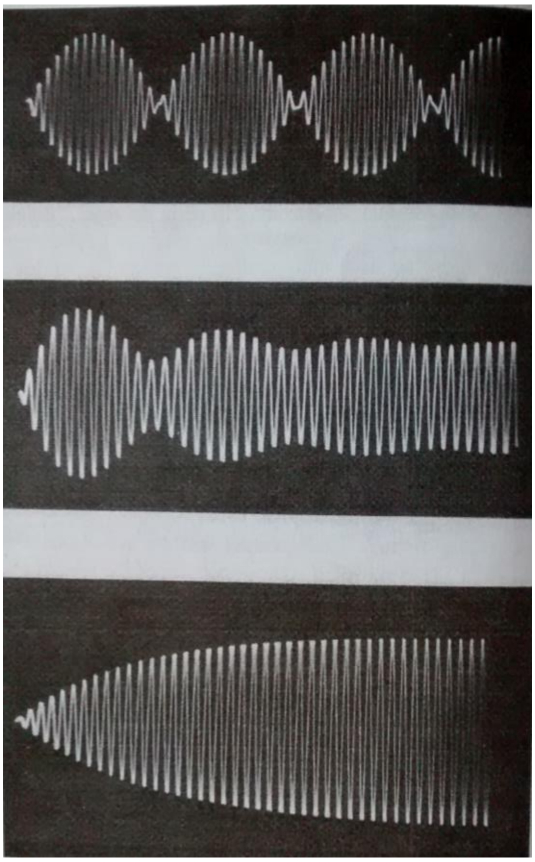


Figura 6 - Oscilações transiente em um sistema forçado. a) Batimento transiente de longa duração. b) Batimento transiente de curta duração. c) Oscilação na frequência de ressonância. Fonte: French, A. P.

Após visto esta figura, podemos chegar a conclusão de que o sistema após um tempo, sempre entrará num regime estacionário e que a solução transiente desaparecerá por completo. Porém, devemos tomar cuidado com o ‘sempre’. No mundo real, num oscilador mecânico, é muito difícil que tais oscilações obedeçam perfeitamente estas regras, principalmente com baixo amortecimento. Lembre-se que a solução transiente é altamente dependente das condições iniciais e uma pequena perturbação no sistema pode ocasionar um recomeço! Pense em algumas delas como, vento, atrito indevido, alteração de movimento na forma atuante, deslocamento indevido (rotação, torção, translação lateral) todos estes contratempos poderão fazer com que o sistema entre no regime transiente novamente. Por isso, dificilmente você verá um sistema convergir para a solução estacionária tão facilmente. Além disso, os tempos das soluções transiente podem ser muito grandes em comparação com o tempo do experimento – isso somado ao item anterior, quanto mais tempo é necessário, mais chances de ocorrer algum dos problemas citados.

3.1 Mecânica

Exemplos de aplicação e ocorrência de ressonância e amortecimento:

- Ponte de Takoma: https://www.youtube.com/watch?v=9lQaIdDI5OE
- Ground resonance:
    - Brasil: https://www.youtube.com/watch?v=0FeXjhUEXlc
    - Exército: https://www.youtube.com/watch?v=RihcJR0zvfM
- Fios galopantes: https://www.youtube.com/watch?v=GEGbYRii1d4
- Sistema suspensão e amortecimento carro: https://www.youtube.com/watch?v=EbkWaNDyFOQ (0:37, 1:27, 3:48)
- Sistema antissísmico: https://www.youtube.com/watch?v=H6xmv6MP7SI
- Tuned mass damper: http://en.wikipedia.org/wiki/Tuned_mass_damper
- Stockbridge Damper: http://en.wikipedia.org/wiki/Stockbridge_damper

3.1 Eletromagnética

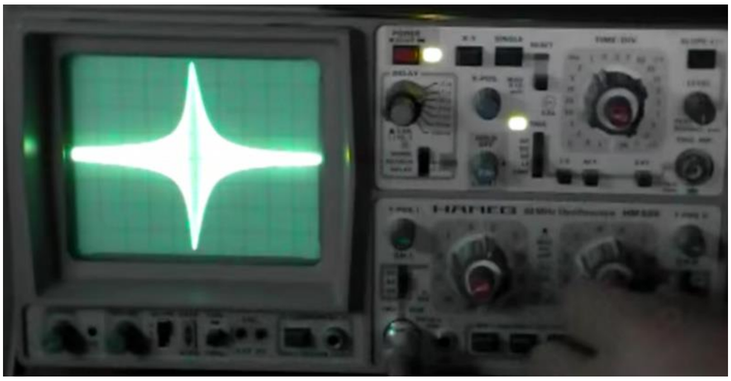


Figura 7 - Ressonância no circuito RLC - Eixo Y representa a amplitude e o eixo X a variação de frequência. Fonte: Youtube - RLC tunning view with an oscilloscope

Esta ressonância é a capaz de fazer com que seu rádio, sua tv, seu celular “sintonize”, ou seja, que entre em ressonância em uma faixa ou valor específico de frequência – circuitos RLC. Afinal, como se daria a transmissão de som, vídeo ou dados se precisássemos transmitir tal potência sem que houvesse o acoplamento entre o receptor e transmissor. Veja ressonância magnética para um exemplo mais claro. Pense no micro-ondas também.

3.2 Ótica

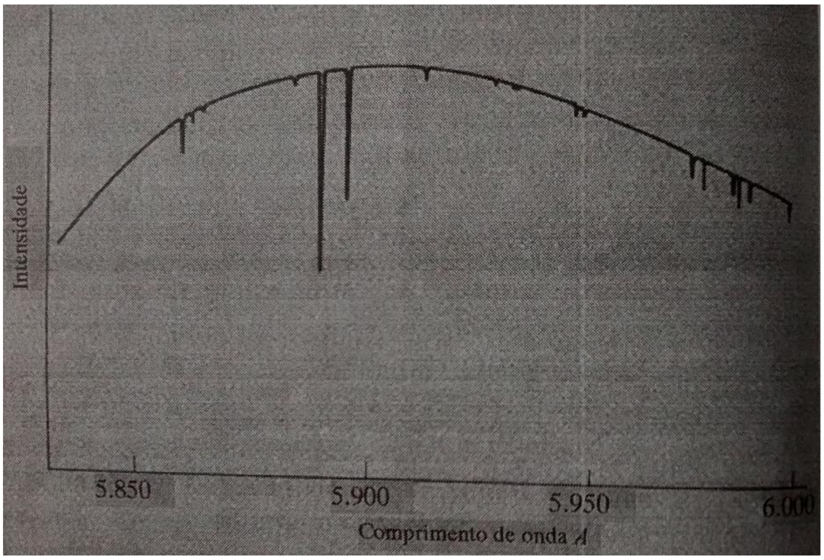


Figura 8- Porção do espectro solar mostrando as linhas do Sódio em 5,890A e 5,896A. Fonte: French, A. P.

3.3 Nuclear

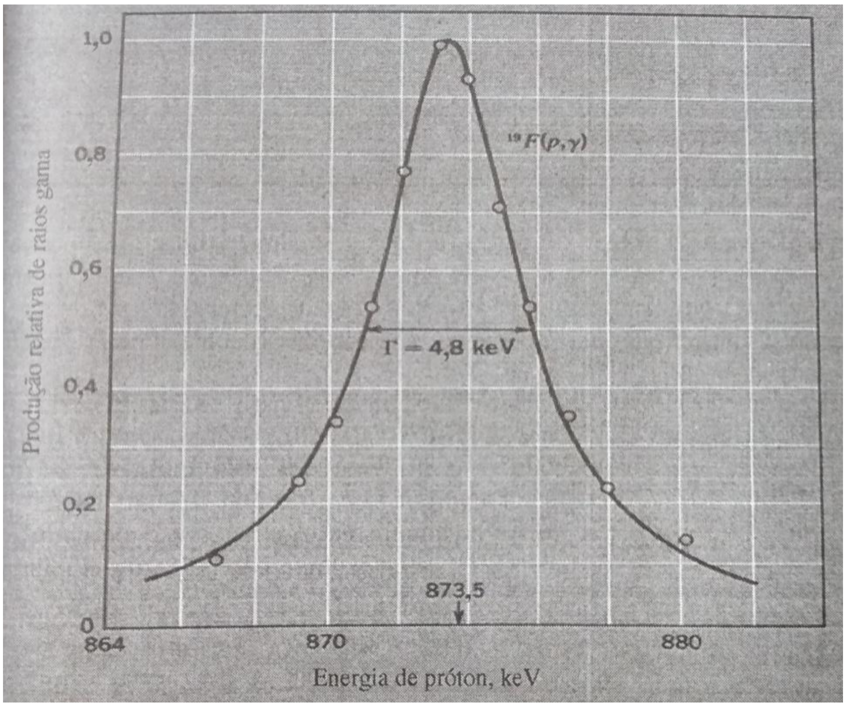


Figura 9 - Produção de raios gama como função da energia de bombardeamento de protons. Fonte: French, A. P.

3.4 Magnética Nuclear

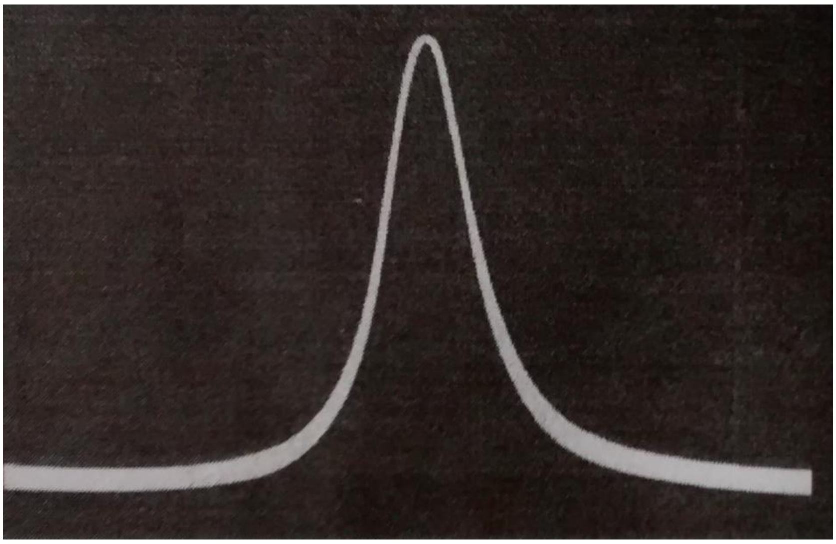


Figura 10 - Linha de ressonância magnética de prótons na água. Sinal recebido em Y e variação de B0 em X. Fonte: French, A.P.

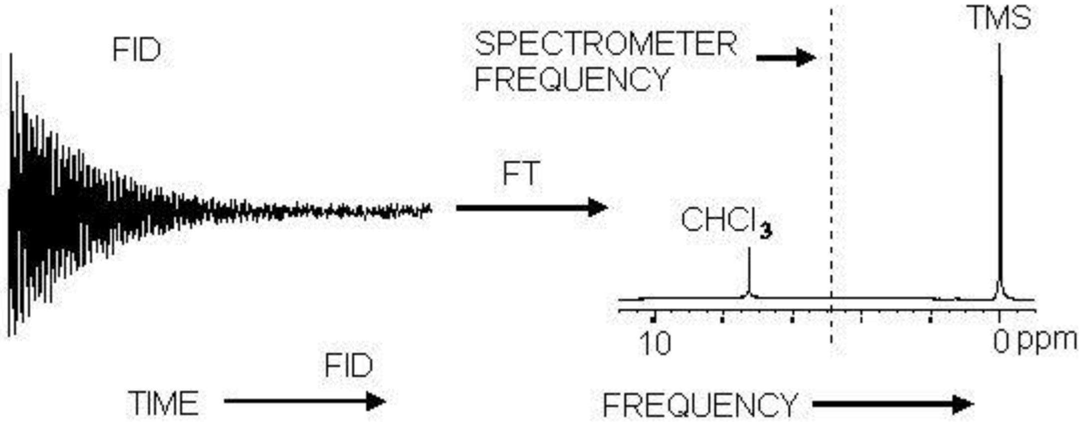


Figura 11 - Espectroscopia de ressonância magnética.