

Primitivas imediatas

1. Usando a fórmula $Pf'(x).f^n(x) = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, $n \neq -1$ e as propriedades das primitivas, determine a família de primitivas das funções, válidas no seu domínio:

a) $x + \sqrt{x}$	b) $\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt[3]{x}}{4}$	c) $(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}})^2$	d) $(x^2 + 1)^3$
e) $(-5x - 1)^6$	f) $\sqrt[3]{-5x - 1}$	g) $\frac{1}{(2x - 1)^2}$	h) $\frac{1}{\sqrt[5]{1 - 2x}}$
i) $\frac{3}{\sqrt[5]{(-5x - 1)^3}}$	j) $x\sqrt{x^2 + 1}$	k) $x^3(5x^4 - 1)^6$	l) $\frac{\exp x}{(3 - \exp x)^3}$
m) $\sin x \cos^7 x$	n) $\cosh(2x + 1) \sinh(2x + 1)$	o) $\frac{\tan x}{\cos^2 x}$	p) $\frac{\cos x}{\sin^3 x}$
q) $\sin x \sqrt{1 - \cos x}$	r) $\frac{3}{x(\ln x + 5)^8}$	s) $\frac{\arctan^5 x}{1 + x^2}$	

2. Usando a fórmula $P\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$, e as propriedades das primitivas, determine a a família de primitivas das funções, válidas no seu domínio:

a) $\frac{1}{9x - 5}$	b) $\frac{3x}{9x^2 - 5}$	c) $\frac{\exp x}{3 - \exp x}$	d) $\frac{\cos(2x)}{4 \sin(2x)}$
e) $\frac{\cos(1 - 5x)}{\sin(1 - 5x)}$	f) $\tan x$	g) $\frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	h) $\frac{3}{x(\ln x + 5)}$
i) $\frac{1}{x(\ln x^2)}$	j) $\frac{3}{(1 + x^2)(\arctan x + 10)}$		

3. Usando a fórmula $P\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = \arctan f(x) + C$, e as propriedades de primitivas, determine a família de primitivas das funções, válidas no seu domínio:

a) $\frac{1}{1 + 9x^2}$	b) $\frac{1}{5 + x^2}$	c) $\frac{1}{4 + 9x^2}$	d) $\frac{3x}{1 + x^4}$
e) $\frac{x^3}{x^8 + 1}$	f) $P\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$	g) $\frac{3}{x(1 + \ln^2 x)}$	h) $\frac{3 \exp x}{1 + \exp(2x)}$
i) $\frac{\exp x}{4 + \exp(2x)}$			

4. Usando a fórmula $P \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = \arcsin f(x) + C$, e as propriedades das primitivas, determine a família de primitivas das funções, válidas no seu domínio:

a) $\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$ d) $\frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$
e) $\frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}$ f) $\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ g) $\frac{3}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ h) $\frac{3 \exp x}{\sqrt{1-\exp(2x)}}$

5. Usando a fórmula $P \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = \operatorname{argsh} f(x) + C$, e as propriedades das primitivas, determine a família de primitivas das funções, válidas no seu domínio:

a) $\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}$ d) $\frac{x}{\sqrt{2x^4+1}}$
e) $\frac{3x}{\sqrt{x^4+1}}$ f) $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ g) $\frac{3}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$ h) $\frac{3 \exp x}{\sqrt{1+\exp(2x)}}$

6. Determinar a família de primitivas das seguintes funções, válidas no seu domínio:

1) 4 2) $2x + 3$ 3) $6x^4 + 4 - 5x$ 4) $2x^{-4}$, $x \neq 0$
5) $x^{1/2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{5x^3}$ 6) $\frac{ax^2 + bx + c}{dx^2}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 7) $\sqrt{7-8x}$ 8) $x(\sqrt{x} + x)$
9) $\frac{1}{2x^3}$ 10) $\frac{1}{2x}$ 11) $\frac{x}{\sqrt{2-5x^2}}$ 12) $x\sqrt{1-x^2}$
13) $x^3(1-5x^4)^7$ 14) $\frac{2}{3x-1}$ 15) $\frac{4x^2}{1-5x^3}$ 16) $\frac{x}{x+5}$
17) $3 \exp(x)$ 18) $5 \exp(-3x+8)$ 19) $x \cdot \exp(3x^2-5)$ 20) $\frac{\exp^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
21) $x^2 e^{-2x^3-7}$ 22) $\sin x e^{\cos x}$ 23) $\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ 24) $\frac{\ln x}{x}$
25) $\frac{1}{x \ln x}$ 26) $\sin(5x)$ 27) $3 \cos(1-x)$ 28) $\tan x$
29) $\cos x \sin^5 x$ 30) $\frac{1}{\cos^2 x}$ 31) 2^x 32) $3^{\sin^2 x} \sin(2x)$
33) e^{x+3} 34) $x \cdot \sin x^2$ 35) $x^2 \cdot \operatorname{sh}(x^3+5)$ 36) $\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
37) $\cos(-2x)$ 38) $\operatorname{ch}(3x+4)$ 39) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$ 40) $\sinh(-2x)$
41) $x^2 \cosh(-2x^3)$ 42) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 43) $\frac{x+1}{1+x^2}$ 44) $\frac{1}{\sin^2(2x)}$
45) $\frac{x^2}{x^2+2}$ 46) $\frac{2x^4-3x^2+x-1}{x^2}$ 47) $\frac{2x+3}{2x+1}$

7. Determine a família de primitivas das seguintes funções, usando a substituição indicada:

- a) $\frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$, subst: $x = t^6$ b) $x\sqrt{4-x}$, subst: $\sqrt{4-x} = t$ c) $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, subst: $\sqrt{1+x} = t$
d) $\sqrt{9-x^2}$, subst: $x = 3 \sin t$ e) $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, subst: $x = 2 \sin t$ f) $\sqrt{1+4x^2}$, subst: $x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t$
g) $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, subst: $x = \operatorname{sh} t$

8. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais (determinar a função f que satisfaz as condições indicadas):

- a) $f'(x) = 4$, $f(1) = -1$ b) $f'(x) = 2x + 3$, $f(-3) = 8$
c) $f'(x) = 4 - 5x$, $f(2) = 6$ d) $f'(x) = 2x^{-4}$, $x \neq 0$, $f(1) = 6$
e) $f'(x) = 3x^2 - 7$, $f(2) = -1$

9. Determina F tal que $F'(x) = 1 - 4x$ e $F(1) = 0$.

- Esboça os gráficos de $y = F(x)$, $y = F(x) - 2$ e $y = F(x) + 4$.

10. Um carro quando trava efectua uma desaceleração constante de $22m/s^2$. Supondo que o carro quando começou a travar ia a uma velocidade de $88m/s$, que distância percorreu o carro até travar completamente?
11. Supõe que a taxa de crescimento populacional numa determinada cidade é de $4 + 5t^{2/3}$ por mês t . Se neste momento, a cidade tem 2000 pessoas, quantas terá daqui a 8 meses?

Primitivação por partes

1. Determine a família de primitivas das seguintes funções:

- a) $f(x) = x \exp(-x)$ b) $f(x) = x \sin(2x)$ c) $f(x) = x^2 \sin x$
d) $f(x) = x \ln x$ e) $f(x) = x^2 \ln x$ f) $f(t) = \exp t \sin t$
g) $f(t) = \exp(2t) \sin(3t)$ h) $f(x) = \arcsin x$

Primitivas de potências de funções trigonométricas

1. Determinar a família de primitivas das seguintes funções:

- a) $\sin x \cdot \cos^2 x$ b) $\sin^2 x$ c) $\cos^3 x$ d) $\sin^2 x \cdot \cos^3 x$ e) $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$
f) $\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}$ g) $\frac{1}{\cos x}$ h) $\frac{1}{\cos^4 x}$ i) $\tan^2 x$ j) $\tan^3 x$

Primitivas de funções racionais

1. Divida os polinómios das seguintes funções racionais:

- a) $\frac{x}{x+2}$ b) $\frac{x^2}{x^2-3x+2}$ c) $\frac{x^3}{x^2-4}$ d) $\frac{x^6+1}{x^2+2x+1}$ e) $\frac{x^4+x^2+2}{x^2(x+2)(x+3)}$

2. Decomponha as seguintes funções racionais em elementos simples:

- a) $\frac{x}{x^2-4}$ b) $\frac{x^2+1}{x^3-9x}$ c) $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$ d) $\frac{1}{x^2(x^2+1)(x-1)}$

3. Determinar a família de primitivas das seguintes funções:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{x}{x^2+2} & \text{b)} \frac{4x-1}{x+2} & \text{c)} \frac{x-1}{x^2-5x-6} & \text{d)} \frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)} \quad \text{e)} \frac{2x^3-2x^2+11x}{x^2+4} \\ \text{f)} \frac{1}{(x^2+1)(x-1)} & \text{g)} \frac{1}{x^2+2x+2} & \text{h)} \frac{x}{x^2+2x+2} & \end{array}$$

Soluções de alguns exercícios

1.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C & \text{b)} 6\sqrt{x} + \frac{3\sqrt[3]{x^7}}{21} + C & \text{c)} -\frac{1}{3x^3} - \frac{4}{5\sqrt{x^5}} - \frac{1}{2x^2} + C & \text{d)} \frac{x^7}{7} + \frac{3x^5}{5} + x^3 + x + C \\ \text{e)} \frac{1}{35}(5x+1)^7 + C & \text{f)} -\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+1)^4} + C & \text{g)} -\frac{1}{2(2x-1)} + C & \text{h)} -\frac{5}{8}\sqrt[5]{(1-2x)^4} + C \\ \text{i)} -\frac{3}{2}\sqrt[5]{(5x+1)^2} + C & \text{j)} \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C & \text{k)} \frac{1}{140}(5x^4-1)^7 + C & \text{l)} \frac{1}{2(3-\exp x)^2} + C \\ \text{m)} -\frac{1}{8}\cos^8 x + C & \text{n)} \frac{1}{4}\sinh^2(2x+1) + C & \text{o)} \frac{\tan^2 x}{2} + C & \text{p)} -\frac{1}{2\sin^2 x} + C \\ \text{q)} \frac{2}{3}\sqrt{(1-\cos x)^3} + C & \text{r)} -\frac{3}{7(\ln x+5)^7} + C & \text{s)} \frac{\arctan^6 x}{6} + C & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{1}{9}\ln|9x-5| + C & \text{b)} \frac{1}{6}\ln|9x^2-5| + C & \text{c)} -\ln|3-\exp x| + C & \text{d)} \frac{1}{8}\ln|\sin(2x)| + C \\ \text{e)} -\frac{1}{5}\ln|\sin(1-5x)| + C & \text{f)} -\ln|\cos x| + C & \text{g)} -2\ln|\cos \sqrt{x}| + C & \text{h)} 3\ln|\ln x+5| + C \\ \text{i)} \frac{1}{2}\ln|\ln x^2| + C & \text{j)} 3\ln|\arctan x+10| + C & & \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{1}{3}\arctan(3x) + C & \text{b)} \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(\frac{\sqrt{5}}{5}x) + C & \text{c)} \frac{1}{6}\arctan(\frac{3}{2}x) + C & \text{d)} \frac{3}{2}\arctan(x^2) + C \\ \text{e)} \frac{1}{4}\arctan(x^4) + C & \text{f)} P - \arctan(\cos x) + C & \text{g)} 3\arctan(\ln x) + C & \text{h)} 3\arctan(e^x) + C \\ \text{i)} \frac{1}{2}\arctan(\frac{e^x}{2}) + C & & & \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{1}{3}\arcsin(3x) + C & \text{b)} \arcsin(\frac{x}{2}) + C & \text{c)} \frac{3}{2}\arcsin(x^2) + C & \text{d)} \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x^2) + C \\ \text{e)} \frac{3}{2}\arcsin(x^2) + C & \text{f)} P - \arcsin(\cos x) + C & \text{g)} 3\arcsin(\ln x) + C & \text{h)} 3\arcsin(e^x) + C \\ \text{i)} \frac{1}{2}\arctan(\frac{e^x}{2}) + C & & & \end{array}$$

6.

- 1) $4x + C$ 2) $x^2 + 3x + C$ 3) $\frac{6}{5}x^5 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + C$ 4) $-\frac{2}{3}x^{-3} + C, x \neq 0$
- 5) $\frac{2}{3}x^{3/2} - 6\sqrt[3]{x} - \frac{1}{5}x^{-2} + C$ 6) $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}\ln|x| - \frac{c}{dx} + C$, 7) $-\frac{1}{12}\sqrt{(7-8x)^3} + C$ 8) $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{x^3}{3} + C$
- 9) $-\frac{1}{4x^2} + C$ 10) $\frac{1}{2}\ln|x| + C$ 11) $-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}$ 12) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$
- 13) $-\frac{1}{160}(1-5x^4)^8 + C$ 14) $\frac{2}{3}\ln|3x-1|$ 15) $-\frac{4}{15}\ln|1-5x^3| + C$ 16) $x - 5\ln|x+5| + C$
- 17) $3\exp(x) + C$ 18) $-\frac{5}{3}\exp(-3x+8) + C$ 19) $\frac{1}{6}\exp(3x^2-5) + C$ 20) $2\exp(\sqrt{x}) + C$
- 21) $-\frac{1}{6}e^{-2x^3-7} + C$ 22) $-e^{\cos x} + C$ 23) $-e^{\frac{1}{x}} + C$ 24) $\frac{\ln^2 x}{2}$
- 25) $\ln|\ln x| + C$ 26) $-\frac{1}{5}\cos(5x) + C$ 27) $-3\sin(1-x) + C$ 28) $-\ln|\cos x| + C$
- 29) $\frac{\sin^6 x}{6} + C$ 30) $\tan x + C$ 31) $\frac{2^x}{2} + C$ 32) $\frac{3^{\sin^2 x}}{\ln 3} + C$
- 33) $e^{x+3} + C$ 34) $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$ 35) $\frac{1}{3}\operatorname{ch}(x^3+5) + C$ 36) $-2\cos\sqrt{x} + C$
- 37) $-\frac{1}{2}\sin(-2x) + C$ 38) $\frac{1}{3}\sinh(3x+4) + C$ 39) $\sin(\ln x) + C$ 40) $-\frac{1}{2}\cosh(-2x) + C$
- 41) $-\frac{1}{6}\sinh(-2x^3) + C$ 42) $\operatorname{argsh}(x) + C$ 43) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C$ 44) $-\frac{1}{2}\cot(2x) + C$
- 45) $x - \sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C$ 46) $\frac{2}{3}x^3 - 3x + \ln|x| + \frac{1}{x} + C$ 47) $x + \ln|2x+1| + C$

7.

- a) $6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \sqrt[6]{x} + \arctan(\sqrt[6]{x})\right) + C$ b) $-2\left(\frac{4}{3}\sqrt{(4-x)^3} - \frac{1}{5}\sqrt{(4-x)^5}\right) + C$
- c) $2\left(\frac{1}{3}\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1+x)}\right) + C$ d) $\frac{9}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right) + C$
- e) $2\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right) + C$ f) $\frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\operatorname{argsh}(2x) + C$
- g) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

8.

- a) $f(x) = 4x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 3x + 8$
- c) $f(x) = 4x - \frac{5}{2}x^2 + 8$ d) $f(x) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{x^3} + 10\right)$
- e) $f(x) = x^3 - 7x + 5$

9. $F(x) = -2x^2 + x + 1$

10. A função que descreve a distância percorrida pelo carro ao fim de t segundos é $r(t) = -11t(t - 8)$ metros. O carro percorreu 176m até parar completamente.

11. A função que descreve o número de pessoas da cidade aos t meses é $C(t) = 4t + 3t^{5/3} + 2000$.
Daqui a 8 meses a cidade terá 2128 pessoas.

Primitivação por partes

1.

- a) $-x \exp(-x) - \exp(-x) + C$ b) $-\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$ c) $-x^2 \cos x + x \sin x + \cos x + C$
d) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ e) $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$ f) $\frac{\exp t}{2} (\sin t - \cos t) + C$
g) $f(t) = \frac{2}{13} \exp(2t) (\sin(3t) - \frac{3}{2} \cos(3t)) + C$ h) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

Primitivas de potências de funções trigonométricas

1.

- a) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$ b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$ c) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ d) $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$ e) $\frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin(4x) + C$
f) $\frac{\tan^4 x}{4} + C$ g) $\ln(\tan x + \frac{1}{\cos x}) + C$ h) $\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$ i) $\tan x - x + C$ j) $\frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C$

Primitivas de funções racionais

1.

- a) $1 - \frac{2}{x+2}$ b) $1 + \frac{3x-2}{x^2-3x+2}$ c) $x + \frac{4x}{x^2-4}$
d) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 11 + \frac{26x+12}{x^2+2x+1}$ e) $1 + \frac{-5x^3-7x^2+2}{x^2(x+2)(x+3)}$

2.

- a) $\frac{1/2}{x-2} + \frac{1/2}{x+2}$ b) $-\frac{1/9}{x} + \frac{5/9}{x-3} + \frac{5/9}{x+3}$ c) $-\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-2}$
d) $\frac{-1}{x} - \frac{-1}{x^2} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{x+1}{x^2+1}$

3.

- a) $\frac{1}{2} \ln(x^2+2) + C$ b) $4x - 9 \ln(x+2) + C$ c) $\frac{2}{7} \ln|x+1| + \frac{5}{7} \ln|x-6| + C$ d) $\frac{1}{3}$
f) $-\frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan x + C$ g) $\arctan(x+1) + C$ h) $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C$