Teste de Mecânica Analítica e Ondas

Licenciatura em Física e Mestrado Integrado em Engenharia Física
Universidade do Minho — 9 de Janeiro de 2020

(Leia as questões com muita atenção, pois algumas contêm múltiplas perguntas)

I

1- A conservação da energia mecânica E de um sistema formado por um corpo de massa $m = 0.4\,\mathrm{Kg}$ suspenso de uma mola, corresponde à equação,

$$(0.21\,\mathrm{Kg})\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (45\,\mathrm{Nm}^{-1})\,x^2 = E$$

onde x é a coordenada de desvio espacial da posição de equilíbrio do corpo.

(a)- Escreva a equação de movimento do sistema e indique qual o valor da correspondente constante elástica K.

(b)- Será que a mola tem massa? Se tiver, qual o seu valor? Justifique as suas respostas.

(c)- Indique se o oscilador associado ao sistema corpo - mola (i) não é amortecido nem forçado, (ii) é amortecido mas não forçado, (iii) é forçado mas não amortecido, ou (iv) é ambos amortecido e forçado. Justifique a sua resposta.

2- A coordenada de desvio espacial x de um oscilador tem a seguinte forma,

$$x = B\,e^{-\gamma t/2}\cos(\omega_1 t + \beta) + A\cos(\omega t - \delta)$$

onde

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}};\ A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}};\ \delta(\omega) = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

com $\gamma \ll 1$, $B > 0$ e $F_0 > 0$.

(a)- Forneça uma expressão para ω_0 e expresse o parâmetro γ como o quociente de ω_0 por uma quantidade física, cuja designação deve fornecer.

(b)- Indique se o oscilador (i) não é amortecido, (ii) é fracamente amortecido ou (iii) é fortemente amortecido. Justifique a sua resposta.

(c)- O oscilador é forçado? Justifique a sua resposta.

Nos movimentos

(d)- Caraterize os dois estados do oscilador para tempos (i) $t \ll 2/\gamma$ e (ii) $t \gg 2/\gamma$, respetivamente, e indique a denominação de cada um deles. Justifique a sua resposta.

(e)- Forneça a forma do desvio x quando o oscilador se encontrar no estado atingido quando $t \gg 2/\gamma$ e descreva um importante fenómeno físico associado a esse estado, se adequado ilustrado por uma figura esquemática de uma grandeza física, que deve definir, cujo pico em função de ω tem largura γ.

II

1- Considere um sistema constituido por três pontos materiais P_1 de massa $m_1 = m$, P_2 de massa $m_2 = m/2$ e P_3 de massa $m_3 = 3m$, onde $m = 1\,\text{Kg}$, no referencial em que as coordenadas destes pontos são em metros dadas por,

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

respetivamente.

(a) Determine os momentos e produtos de inércia do sistema.

(b) Determine o tensor de inércia do sistema.

2- Considere o movimento combinado do seguinte par de movimentos harmónicos simples,

$$x = c\left[\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}t + \tfrac{7\pi}{24}\right) - \sin\left(\tfrac{2\pi}{3}t - \tfrac{11\pi}{24}\right)\right]$$

onde $c = 1.5\,\text{mm}$ e o fator $2\pi/3$ que multiplica o tempo t é dado em unidades de s^{-1}.

(a) Determine a amplitude $A > 0$, frequências ω e ν e fase na origem $\alpha \in [0, \pi]$ do movimento harmónico simples resultante dessa combinação.

(b) Derive uma expressão para a amplitude A da forma $A = c \times d$ em que a expressão do fator d envolve apenas combinações dos números 1 e $\sqrt{2}$.

Dados auxiliares

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b; \qquad \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2} = 0.5; \; \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707; \; \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1.732}{2} \approx 0.866$$