ELECTROMAGNETISMO (2011/12)

2º Teste - 17/11/2011

---

1. Resposta $\underline{B}$.

Depois das esferas serem ligadas através do fio condutor a carga $\underline{q}$ irá repartir-se pelas duas esferas de modo a garantir que o seu potencial, V, é o mesmo (as duas esferas e fio de ligação passam a constituir um só condutor).

Deve pois verificar-se a relação

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\frac{1}{2}d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d}$$

$q_1 \equiv$ carga da esfera menor

$q_2 \equiv$ carga da esfera maior

sendo

$$q = q_1 + q_2$$

Então:

$$q_1 = \frac{1}{2}q_2$$

$$q = q_1 + q_2$$

De onde resulta

$$q_1 = \frac{1}{3}q$$

$$q_2 = \frac{2}{3}q$$

2. Resposta E

Quando se duplica a separação entre as armaduras de um condensador de placas paralelas:

- a carga em cada placa não é alterada (nem a densidade de carga), pois as placas estão isoladas

- o campo eléctrico entre as placas não é alterado, pois este só depende da densidade de carga nas placas, σ

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- a diferença de potencial, V, é alterada de acordo com a relação entre V e E

$$V = E.d$$ (porque o campo é uniforme)

se d duplica, então V duplica
(não diminui, como se afirma em B.)

3. Comecemos por considerar que as três cargas estão infinitamente separadas entre si, de modo que não existe qualquer interacção entre elas.

Podemos calcular a energia potencial eléctrica do sistema fazendo o cálculo do trabalho realizado contra o campo eléctrico no transporte sucessivo das cargas desde o infinito até aos pontos por elas ocupados na configuração final.

Este transporte deve ser feito na ausência de quaisquer forças dissipativas e com quase infinita lentidão (de modo a haver equilíbrio em cada instante).

Quando se transporta a 1ª carga (q_1), não há dispêndio de qualquer energia, pois não existe nenhum campo previamente estabelecido no espaço:

$$W_1 = 0$$

O transporte da segunda carga (q_2) exige que se realize o trabalho

$$\begin{aligned} W_2 &= q_2 V_1 \\ &= q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \end{aligned}$$

$V_1 \equiv$ potencial devido a q_1 no ponto para onde se transporta q_2

$r_{12} \equiv$ distância entre q_1 e q_2

Quando se transporta a 3ª carga (q_3) existe já no espaço o campo devido às cargas q_1 e q_2. O trabalho realizado neste transporte vale

$$W_3 = q_3 V_{12}$$

$V_{12} \equiv$ potencial devido a q_1 e q_2 no ponto para onde se transporta q_3

Mas

$$V_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

onde

$r_{13} \equiv$ distância entre q_1 e q_3

$r_{23} \equiv$ " " q_2 e q_3

vem então

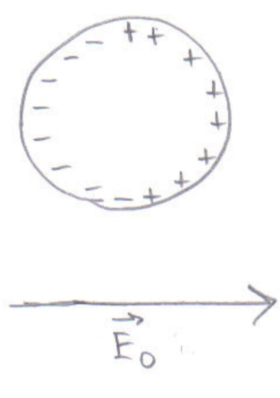
$$W_3 = q_3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

O trabalho total realizado no transporte sucessivo das três cargas é dado por

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

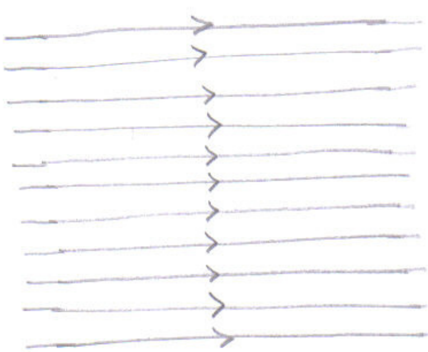
4.

a) Quando a esfera condutora é colocada sob acção do campo eléctrico as cargas livres (eléctrões) sofrem uma força que as faz deslocar até uma certa região à superfície do condutor. Este fenómeno, transitório, ocorre até que, em equilíbrio electrostático, o campo no interior do condutor seja nulo. Os electrões, com carga negativa, deslocam-se no sentido contrário ao campo eléctrico, acumulando-se numa superfície hemisférica. A superfície hemisférica oposta ficará com deficiência de electrões, ou seja ficará com uma carga positiva. A figura seguinte ilustra a distribuição de carga assim gerada (por influência do campo externo uniforme):

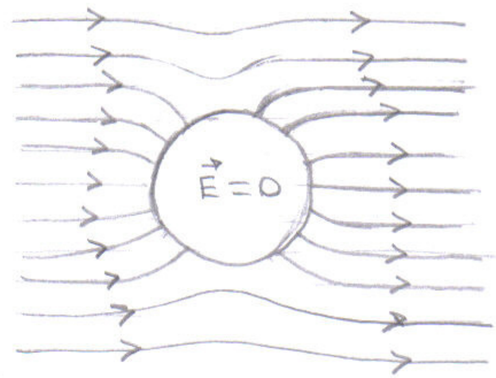


A colocação da esfera na região onde previamente existia um campo eléctrico uniforme vai modificar o campo eléctrico nessa região. Nas figuras (a) e (b), a seguir, esboçam-se as linhas de campo antes e depois de lá colocar a esfera

(a) antes



(b) depois



Depois da esfera ser inserida na região onde previamente existia um campo eléctrico uniforme, o campo eléctrico é alterado na vizinhança da esfera de modo a que as linhas de campo chegam e partem do condutor sempre perpendicularmente à sua superfície.
As linhas de campo chegam à superfície hemisférica com carga negativa e partem da superfície esférica com carga positiva.

b) O campo eléctrico pode derivar-se do potencial

$$V(r,\theta) = E_0\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\cos\theta + V_1$$

através da relação

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \ .$$

Tendo em conta que em coordenadas esféricas o gradiente se escreve

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$

vem:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[E_0\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\cos\theta + V_1\right]\vec{u}_r -$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[E_0\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\cos\theta + V_1\right]\vec{u}_\theta$$

(V não depende de ϕ, e por isso $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$)

$$\vec{E} = \left[E_0\left(1 + \frac{R^3 . 2r}{r^4}\right)\cos\theta\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[E_0\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\sin\theta\right]\vec{u}_\theta$$

$$= \left[E_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\right]\vec{u}_r + \left[E_0\left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right)\sin\theta\right]\vec{u}_\theta$$

O campo eléctrico num ponto infinitamente próximo do condutor relaciona-se com a densidade superficial de carga através da relação

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \; ,$$

sendo este campo normal à superfície

Então, σ pode calcular-se a partir do limite de $\vec{E}(r,\theta)$ quando $r \to R$:

$$\lim_{r\to R} \vec{E}(r,\theta) = \lim_{r\to R}\left\{\left[E_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\right]\vec{u}_r + \left[E_0\left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right)\sin\theta\right]\vec{u}_\theta\right\}$$

$$= 3E_0\cos\theta\,\vec{u}_r$$

num ponto infinitamente próximo da superfície $\vec{E}$ é normal à superfície

Resulta então para a densidade superficial de carga

$$\sigma = \varepsilon_0 \times \lim_{r \to R} |\vec{E}(r,\theta)|$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \times 3 E_0 \cos\theta$$

Nota: σ toma o valor máximo para $\theta = 0$ $(\sigma = 3\varepsilon_0 E_0)$ e para $\theta = \pi$ $(\sigma = -3\varepsilon_0 E_0)$, tomando o valor nulo para $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\sigma > 0$ no hemisfério $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\sigma < 0$ no hemisfério $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$