Análise Complexa — Exame de Recurso

LFis/MIEFis — 2015/2016

1 $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = i \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \iff e^{iz} - e^{-iz} = -2$$

Mudansa de variável $y = e^{iz}$

$$\operatorname{sen} z = i \iff y - \frac{1}{y} = -2 \iff y^2 + 2y - 1 = 0 \iff$$

$$\iff y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \iff y = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\iff \begin{cases} e^{iz} = -1+\sqrt{2} & (>0) \\ e^{iz} = -1-\sqrt{2} & (<0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} iz = \operatorname{Ln}(-1+\sqrt{2}) \\ iz = \operatorname{Ln}(-1-\sqrt{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} iz = \ln(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi i \\ iz = \ln(1+\sqrt{2}) + (\pi + 2k\pi)i \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} z = -i\ln(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi \\ z = -\ln(1+\sqrt{2}) + (2k+1)\pi \end{cases}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

2 A função $f(z) = \operatorname{sen} z$ é uma função analítica, pois é uma combinasão elementar de funções exponenciais. Como está definida em todo o plano complexo, para ser uma função limitada teria de ser uma função constante, pelo teorema de Liouville. Isto não é verdade. Logo, a função complexa seno não é limitada.

3 $f(z) = \bar{z} z^2 \Rightarrow f(x+iy) = (x-iy)(x+iy)^2 = (x-iy)(x^2+2xyi-y^2)$

$= x^3 + 2x^2yi - xy^2 - x^2yi + 2xy^2 + iy^3 =$

$= (x^3 + xy^2) + i(y^3 + x^2y)$

Portanto, $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ onde

$u(x,y) = x^3 + xy^2$ e $v(x,y) = y^3 + x^2y$

As funções u e v são funsões diferenciáveis (do ponto de vista real) uma vez que são dois polinómios.

Podemos aplicar as equações de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3y^2 + x^2 \\ 2xy = -2xy \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 = 0 \\ 4xy = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Portanto, $z=0$ é o único ponto de diferenciabilidade da função f.

A função f não é analítica em nenhum ponto uma vez que não é diferenciável em nenhum aberto de $\mathbb{C}$.

4. A função $f(z) = e^{\cos z}$ é uma função analítica, pois é a composta de duas funções analíticas: a função exponencial e a função cosseno. A curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é uma curva fechada, trata-se da circunferência de centro 0 e raio 1. A função $f(z)$ está definida em $\mathbb{C}$ — domínio simplesmente conexo que contem a curva γ. Logo, pelo teorema de Cauchy, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

5. A função $f(z) = 3z^2 + 3$ é uma função analítica (é polinomial) e está definida em $\mathbb{C}$ (domínio simplesmente conexo). Logo $\int_\gamma f(z)\,dz$ não depende da curva escolhida, apenas dos seus extremos. Mais precisamente $\int_\gamma f(z)\,dz = F(i) - F(-i)$ onde F é uma primitiva de f. Podemos tomar $F(z) = z^3 + 3z$. Logo, temos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = i^3 + 3i - \left((-i)^3 - 3i\right) = -i + 3i - i + 3i = 4i$$

6. Para $z \in D$, temos que $\left|\frac{z^n}{2^n}\right| = \frac{|z|^n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$ é uma série convergente, pois é uma série geométrica de razão $R = 1/2$ $(|R| < 1)$. Pelo teste de Weierstrass a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ converge uniformemente, para $z \in D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

7. Começamos por decompor $f(z)$ em frações parciais

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} \Rightarrow 1 = A(z-2) + B(z+1)$$

$z = -1 \Rightarrow 1 = -3A \Rightarrow A = -1/3$

$z = 2 \Rightarrow 1 = 3B \Rightarrow B = 1/3$

Portanto, $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{-1/3}{z+1} + \dfrac{1/3}{z-2}$

Podemos ainda escrever:

$$f(z) = -\frac{1}{3z}\,\frac{1}{1+1/z} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{z/2-1} =$$

$$= -\frac{1}{3z}\,\frac{1}{1-(-1/z)} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-z/2}$$

Em Ω, $|-1/z| < 1$ (pois $|z|>1$) e $|z/2|<1$ (pois $|z|<2$) logo podemos aplicar o desenvolvimento em série geométrica e temos:

$$f(z) = -\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3}z^{-n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3\times 2^{n+1}}, \text{ para } z\in\Omega.$$

8 Sabemos que $e^{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\theta^n}{n!}$, $\theta\in\mathbb{C}$, logo

$$e^{-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-n}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

A série de Laurent de $f(z)$ em torno de $z_0=0$ tem uma infinidade de termos na parte principal. Logo $z_0=0$ é uma singularidade essencial de $f(z)$.

A única singularidade de $f(z)$ é $z_0=0$ e esta encontra-se no interior da curva $\gamma = \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$

Pelo teorema dos resíduos, $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$.

Sabemos que $\operatorname{Res}_{z=0} f(z)$ é igual a c_{-1}, onde c_{-1} é o coeficiente do termo z^{-1} na série de Laurent.

Portanto, $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \times(-1) = -2\pi i$

9 Por um teorema sabemos que:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos x}\,dx = 2\pi i \sum_{|z_k|<1}\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

onde $f(z) = \dfrac{1}{5-4\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right)}\,\dfrac{1}{iz}$

Simplificando, $f(z) = \dfrac{-i}{5z - 2z(z+z^{-1})} = \dfrac{-i}{-2z^2+5z-2}$

Singularidades de $f(z)$:

$-2z^2+5z-2=0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-4\times 4}}{-4} \Leftrightarrow$

$z = \dfrac{-5\pm 3}{-4} \Leftrightarrow z = 2 \vee z = \dfrac{1}{2}$

$z=\frac{1}{2}$ é a única singularidade tal que $|z|<1$

Logo, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos x}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)$

$f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ com $\varphi(z) = -i$

$\psi(z) = -2z^2+5z-2$

Assim, $\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = \dfrac{\varphi(1/2)}{\psi'(1/2)} = \dfrac{-i}{-4\times\frac{1}{2}+5} = \dfrac{-i}{3}$

Logo, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos x}\,dx = \frac{2\pi}{3}$

10 A equação $z^5+z^2-2=0$ é uma equação polinomial do $5^{\underline{o}}$ grau, logo pelo teorema fundamental da álgebra, tem 5 raízes complexas.

Para determinar o número de raízes em $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |z|<2\}$ vamos aplicar o teorema de Rouché.

O conjunto Ω é simplesmente conexo e está limitado pela curva de Jordan $\gamma = \{z\in\mathbb{C} : |z|=2\}$.

Consideremos $f(z) = z^5$ e $g(z) = z^2-2$ que são funções analíticas.

Em γ, $|f(z)| = |z^5| = |z|^5 = 2^5 = 32$

$|g(z)| = |z^2-2| \leq |z^2|+2 = 4+2=6$

Logo, para $z\in\gamma$, $|f(z)| > |g(z)|$.

$f(z)$ tem 5 raízes (iguais) em Ω ($z=0$ é o único zero de $f(z)=z^5$ com multiplicidade 5)

Portanto, $f(z)+g(z) = z^5+z^2-2$ tem 5 zeros (eventualmente distintos) em Ω.