FICHA 9

1. Calcule a derivada da função $\int_1^{\ln x} \sin(u + e^u)\, du$, com $x > 0$.

2. Determine uma função contínua f e uma constante k tal que, para todo o $x \in IR$, se verifique:

$$\int_k^x f(t)\, dt = \sin x + \frac{1}{2}.$$

Áreas planas

3. Em cada alínea, determine a medida da área da região limitada pelas curvas cujas equações são dadas:

(a) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 3x, \quad y = -x^2 + 4;$

(b) $x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x;$

(c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

4. Indique como recorreria ao cálculo integral para determinar a área de cada uma das seguintes regiões:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq x\};$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\};$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \ \text{ e } \ y \geq x^2 - 4x + 3 \ \text{ e } \ y \leq -x^2 + 5x - 4\}.$

5. Calcule a área da região plana limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^3$ e pela recta tangente no ponto de abcissa $x = 1$.