ELECTROMAGNETISMO
2012/13
(Lic. Física)

3º Teste (17/Jan/2013) – resolução

---

1. Resposta <u>A</u>.

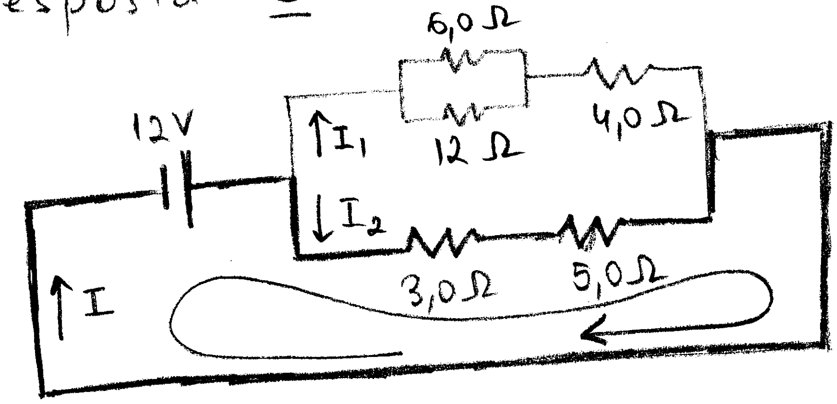
Não existindo cargas no interior da cavidade, é nulo o campo nessa região. Por outro lado é também nulo o campo no interior do condutor (porque é sempre assim no interior de um condutor).

Decorre então da relação entre o campo electrostático ($\vec{E}$) e o potencial (V)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V ,$$

que V é constante na cavidade e na coroa esférica condutora. Como o potencial é uma função contínua, então a coroa esférica condutora e a cavidade constituem uma única região equipotencial. Se o condutor está ao potencial <u>V</u>, o mesmo acontece com todos os pontos da cavidade.

2. Resposta c.



A 2ª regra de Kirchhoff (regra das malhas) aplicada à malha assinalada na figura permite escrever

$$12 = 3{,}0\,I_2 + 5{,}0\,I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 1{,}5\ \text{A}$$

3. Resposta A

Quando uma partícula de carga q e velocidade $\vec{v}$ fica sob acção de um campo magnético $\vec{B}$, a força magnética que se exerce sobre ela vale

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{F}$ só é nula quando $\vec{v}$ é paralela a $\vec{B}$. No caso de $\vec{F}$ ser não nula, a sua direcção é normal ao plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. A única resposta correcta só poderá ser A, pois quando a partícula é lançada na direcção de $\vec{B}$ resulta uma força magnética nula.

4. Resposta D.

Num circuito LC a carga nas armaduras do condensador varia sinusoidalmente no tempo sem nunca decair. A introdução de uma resistência em série nesse circuito (circuito RLC) provoca um decaimento exponencial dessa carga por causa da dissipação de energia na resistência. Esse decaimento será tanto mais rápido quanto maior for a resistência.

5.

a) Define-se fluxo (ϕ) do campo eléctrico ($\vec{E}$) através da superfície $\underline{S}$ como sendo o integral de superfície

$$\phi = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, da ,$$

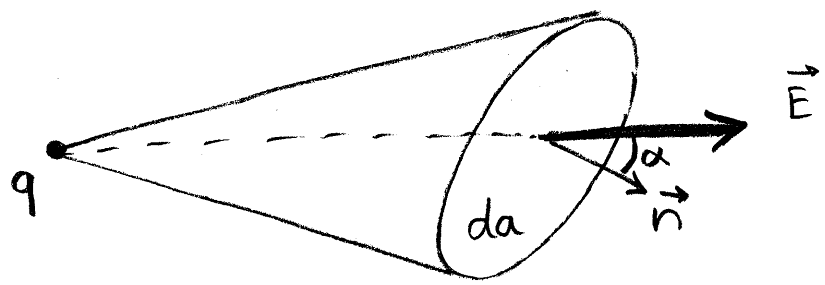
onde $\vec{n}$ é o vector unitário normal à superfície em cada ponto (com sentido fixado por algum critério) e $\underline{da}$ é um elemento de área.

<u>Teorema de Gauss</u> da electrostática:

O fluxo do campo eléctrico que sai através de uma superfície fechada $\underline{S}$ (sobre a qual não assentam cargas) é igual à carga total interior a $\underline{S}$ a dividir pela permitividade do vazio (ε_0):

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Para demonstrar o Teorema de Gauss começamos por considerar uma carga pontual q e um elemento de área $\underline{da}$ situada à distância $\underline{r}$ da carga



O fluxo do campo eléctrico $\vec{E}$ através do elemento de área $\underline{da}$ é dado por

$$\vec{E}.\vec{n}\,da = |\vec{E}|\,da.\cos\alpha$$

O ângulo sólido elementar, sob o qual um observador localizado no ponto onde se encontra a carga, observa a face interna do elemento de superfície esférica centrada na carga e de raio $\underline{r}$, é dado por

$$dw = \frac{da\cos\alpha}{r^2}$$

O fluxo $\vec{E}.\vec{n}\,da$ vem então

$$\vec{E}.\vec{n}\,da = |\vec{E}|\,r^2\,dw$$

Decorre da Lei de Coulomb e da definição de campo eléctrico que

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} .$$

substituindo na expressão anterior relativamente ao fluxo:

$$\vec{E}.\vec{n}\,da = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} r^2 d\omega$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\omega .$$

Integrando sobre uma superfície fechada contendo q (que corresponde a uma integração sobre o ângulo sólido completo, 4π):

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}\,da = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\omega$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} . 4\pi$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Usando o princípio de sobreposição pode-se somar para um número arbitrário de cargas pontuais, obtendo-se o T. Gauss para distribuições de cargas

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}\,da = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i .$$

6. a) $$V(r,\theta) = -\frac{3E_0 r\cos\theta}{\varepsilon_r+2} \qquad (r \leq a)$$

$$V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\,\frac{a^3E_0\cos\theta}{r^2} \qquad (r \geq a)$$

$\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_z$ campo eléctrico pré-existente à colocação da esfera dieléctrica

O campo eléctrico pode ser calculado a partir do potencial V através da relação

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Calculemos o campo nas duas regiões:

<u>Região interior à esfera.</u>

Tendo em conta que a coordenada cartesiana z se exprime por

$$z = r\cos\theta,$$

vem

$$V(z) = -\frac{3E_0 z}{\varepsilon_r+2}$$

Então

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$= \frac{3E_0}{\varepsilon_r+2}\vec{u}_z$$ o campo eléctrico é uniforme

ou, utilizando coordenadas esféricas,

$$\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{\mu}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{\mu}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{\mu}_\phi \right)$$

e tendo em conta que o potencial V é só função de $\underline{r}$ e $\underline{\theta}$, vem

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{3E_0 r \cos\theta}{\varepsilon_r + 2} \right) \vec{\mu}_r + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(- \frac{3E_0 r \cos\theta}{\varepsilon_r + 2} \right) \vec{\mu}_\theta \right]$$

$$= \frac{3E_0 \cos\theta}{\varepsilon_r + 2} \vec{\mu}_r - \frac{1}{r} \frac{3E_0 r \sin\theta}{\varepsilon_r + 2} \vec{\mu}_\theta$$

$$= \frac{3E_0 \cos\theta}{\varepsilon_r + 2} \vec{\mu}_r - \frac{3E_0 \sin\theta}{\varepsilon_r + 2} \vec{\mu}_\theta$$

$$= \frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2} \left(\cos\theta \, \vec{\mu}_r - \sin\theta \, \vec{\mu}_\theta \right)$$

Região exterior à esfera

Neste caso é mais conveniente utilizar coordenadas esféricas. Nestas coordenadas o gradiente escreve-se

$$\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi \right)$$

Tem-se então:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-E_0 r \cos\theta + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \frac{a^3 E_0 \cos\theta}{r^2} \right) \vec{u}_r + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-E_0 r \cos\theta + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \frac{a^3 E_0 \cos\theta}{r^2} \right) \vec{u}_\theta \right]$$

$$= \left(E_0 \cos\theta + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} a^3 E_0 \frac{2}{r^3} \cos\theta \right) \vec{u}_r +$$

$$- \frac{1}{r}\left(E_0 r \sin\theta - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \frac{a^3 E_0 \sin\theta}{r^2} \right) \vec{u}_\theta$$

$$= \left(E_0 \cos\theta + 2 a^3 E_0 \frac{\cos\theta}{r^3} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) \vec{u}_r +$$

$$+ \left(-E_0 \sin\theta + a^3 E_0 \frac{\sin\theta}{r^3} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) \vec{u}_\theta$$

b) As densidades de carga de polarização em volume (ρ_p) e em superfície (σ_p) são dadas por

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_p = (\vec{P} \cdot \vec{n})_{r=a}$$

onde $\vec{P}$ é a polarização e $\vec{n}$ é o vector unitário normal à superfície.

A polarização está relacionada com o campo eléctrico por:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

onde ε_0 é a permitividade do vazio e χ é a susceptibilidade eléctrica.

Tem-se então

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2} \vec{u}_z$$

Esta polarização é uniforme, pelo que

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$ não há cargas de polarização em volume

Por outro lado, notando que $\vec{n} \equiv \vec{u}_r$, e usando a polarização expressa em coordenadas esféricas

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2} \left(\cos\theta \, \vec{u}_r - \sin\theta \, \vec{u}_\theta \right)$$

vem

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{u}_r$$

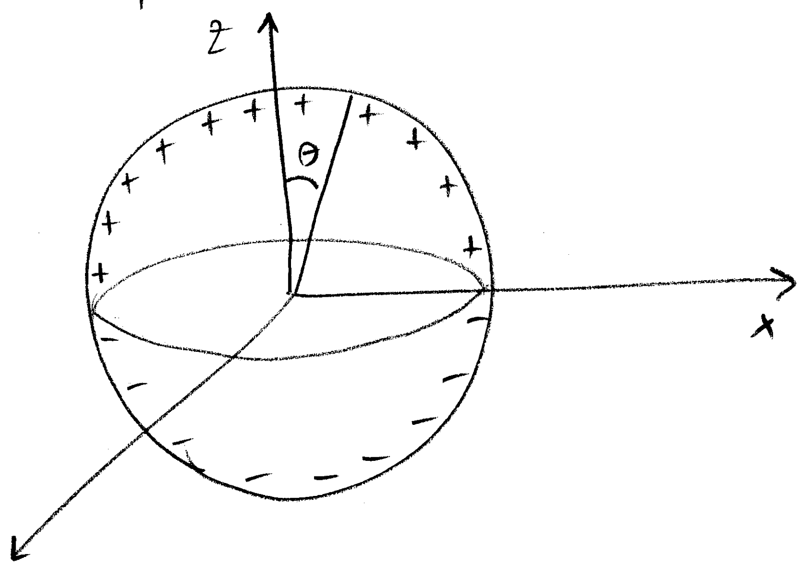
$$= 3\varepsilon_0 \chi \frac{E_0 \cos\theta}{\varepsilon_r + 2}$$

$$= 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} E_0 \cos\theta$$

Vemos que as cargas de polarização distribuídas na superfície da esfera são positivas para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ (hemisfério superior) e são negativas para $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ (hemisfério inferior).

Vemos ainda que $\sigma_p = 0$ para $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Esquematicamente, a carga de polarização superficial distribui-se sobre a esfera da seguinte forma:



Deve notar-se ainda que a densidade de carga é maior junto aos polos ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$) pois é proporcional a $\cos\theta$.

c) As fontes de campo magnético são a corrente de condução (de densidade $\vec{J}$) e a corrente de deslocamento (de densidade $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, onde $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ é o vector deslocamento).

Neste caso não há corrente de condução ($\vec{J} = 0$). Também não há corrente de deslocamento, uma vez que a rotação em torno do eixo dos zz não provoca uma variação do vector

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$= \frac{3 E_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\varepsilon_r + 2} \vec{u}_z .$$

Isto é $\vec{J} = 0$ e $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$.

A rotação da esfera dieléctrica em torno do eixo dos zz não provoca aparecimento de campo magnético.

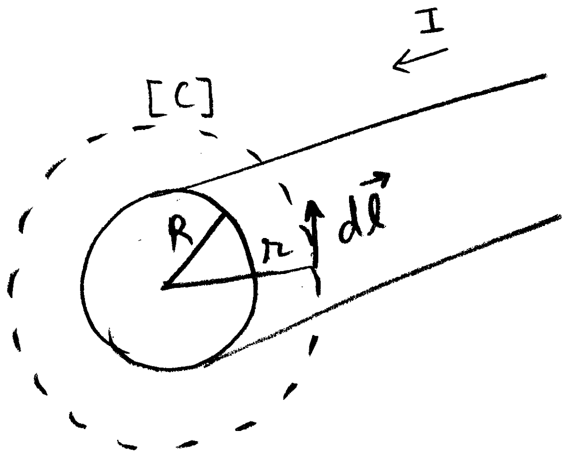
7.

a) O problema pode ser resolvido usando o Teorema de Ampère na forma integral:

$$\oint_{[C]} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \qquad (7.1)$$

onde $\underline{I}$ é a intensidade da corrente que atravessa uma superfície assente no contorno [C].

Comecemos por calcular o campo $\vec{B}$ no exterior do fio. Para aplicar o Teorema de Ampère escolhemos um contorno [C] circular em torno do cilindro, tal que a superfície $\underline{S}$ que assenta em [C] é atravessada pelo cilindro:



Por razões de simetria $|\vec{H}|$ toma o mesmo valor sobre todos os pontos de $[C]$ e $\vec{H}$ é sempre tangente a essa mesma curva. Então

$$H \oint_{[C]} dl = I$$

$$H \cdot 2\pi r = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

A intensidade de corrente I que percorre o fio vale

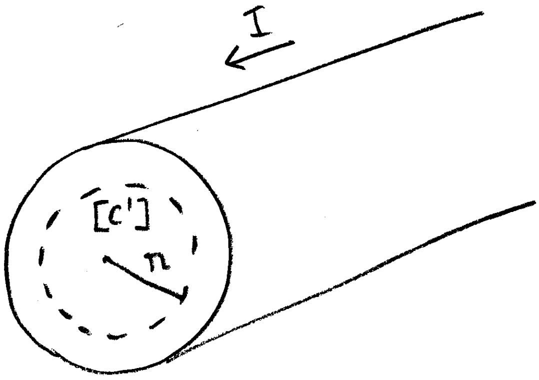
$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, da = \int_S \alpha r' da$$

$$= \int_0^R \alpha r' \cdot 2\pi r' dr' = \frac{2}{3} \pi \alpha R^3$$

Então

$$H = \frac{\frac{2}{3}\pi \alpha R^3}{2\pi r} = \frac{\alpha R^3}{3r} \qquad (r \geq R)$$

Para o cálculo de $\vec{H}$ no interior do fio consideramos uma curva $[c']$ circular, centrada com o eixo do cilindro, com raio $r < R$, como se ilustra na figura



Aplicando de novo o T. Ampère :

$$\oint_{[c']} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{int}$$

onde I_{int} é a intensidade da corrente que atravessa a superfície assente em $[c']$.
Pelas mesmas razões de simetria invocadas para o caso $r > R$, conclui-se que a circulação de $\vec{H}$ vale $H \cdot 2\pi r$, resultando

$$H \cdot 2\pi r = I_{int}$$

onde

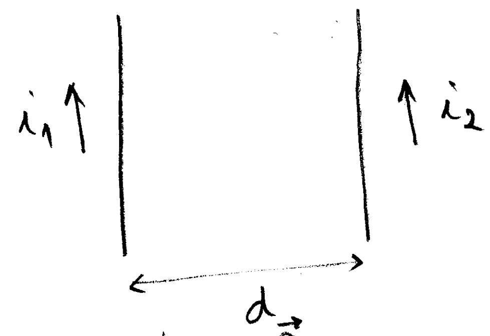
$$I_{int} = \int_S \alpha r' da$$
$$= \int_0^r \alpha r' \cdot 2\pi r' dr' = \frac{2}{3} \pi \alpha r^3$$

Então

$$H = \frac{I_{int}}{2\pi r}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\pi \alpha r^3}{2\pi r} = \frac{1}{3}\alpha r^2$$

c) À distância $d \gg R$ os fios podem ser considerados filiformes. Designemos por i_1 e i_2 as correntes que percorrem os fios $\underline{1}$ e $\underline{2}$, respectivamente:



O campo magnético $\vec{B}$ num ponto do fio 2 devido ao fio 1 tem módulo

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d},$$

tem direcção perpendicular à folha de papel e aponta para dentro.

A força exercida sobre o fio 2 é dada por

$$\vec{F} = i_2 \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

Esta força é perpendicular ao fio 2, aponta para o fio 1 (força atractiva) e vale em módulo:

$$F = i_2 \int \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\, dl$$

$$= \frac{i_1 i_2 \mu_0}{2\pi d} \int dl$$

Então, a força por unidade de comprimento sobre o fio 2 (igual e de sentido oposto à força exercida sobre o fio 1) vale

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{d} \qquad (\text{pois } i_1 = i_2 = I)$$

Vimos na alínea anterior que a intensidade de corrente I vale

$$I = \frac{2}{3} \pi \alpha R^3$$

O resultado final vem então

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\left(\frac{2}{3}\pi \alpha R^3\right)^2}{d}$$

$$= \frac{2 \mu_0 \pi \alpha^2 R^6}{9d}$$

8.

a) O campo magnético $\vec{B}$ variável no tempo induz uma força electromotriz (f.e.m.) adicional na espira, que é dada pela lei de Faraday

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$$

onde o fluxo do campo magnético é dado por

$$\phi = \int_S \vec{B}.\vec{n}\, da$$

sendo $\underline{S}$ uma superfície assente sobre a espira e $\vec{n}$ o vector unitário $\perp$ a S em cada ponto
No caso em estudo a área utilizada para o cálculo do fluxo ($A = \text{lado} \times \text{lado}/2$) não varia no tempo e $\vec{B} \parallel \vec{n}$
consequentemente

$$\mathcal{E}_{ind} = -A\frac{dB}{dt}$$

como B varia no tempo a uma taxa constante ($B = bt$), então a força electromotriz (induzida pelo campo magnético variável) é constante (não varia no tempo).
Consequentemente, a corrente na espira (devida à sobreposição $\mathcal{E}_{bat}$ e $\mathcal{E}_{ind}$) não varia no tempo.

o fenómeno de auto-indução só ocorre quando a corrente varia no tempo e é traduzido por

$$\mathcal{E}_{auto} = -L\,\frac{di}{dt} \quad , \quad L \equiv \text{auto-indutânci}$$

Como $di/dt = 0$, conclui-se que não há f.e.m. auto-induzida na espira.

b) $\mathcal{E}_{bat} = 1{,}00\ V$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{bat} + \mathcal{E}_{ind}$

Como $\mathcal{E} = 1{,}10\ V$, então $\mathcal{E}_{ind} = 0{,}1\ V$

Como vimos na alinea anterior

$$\mathcal{E}_{ind} = -A\,\frac{dB}{dt}$$

Neste caso $A = 1 \times 1/2 = 0{,}5\ m^2$ e $\vec{B}$ aponta para fora da folha de papel.

Então

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_{ind}}{A}$$

$$= -\frac{0{,}1}{0{,}5} = -0{,}2\ T/s$$

O campo magnético $\vec{B}$ decresce a uma taxa constante de $0{,}2\ T/s$.

c) A intensidade da corrente na espira pode ser determinada pela Lei de Ohm

$$\mathcal{E} = R i$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1{,}1}{2{,}0} = 0{,}55 \text{ A}$$

A potência dissipada é dada por

$$P = R i^2$$
$$= R \frac{\mathcal{E}^2}{R^2}$$
$$= \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$
$$= \frac{1{,}1^2}{2{,}0} \simeq 0{,}6 \text{ W}$$