1. Num sistema de eixos Oxyz as coordenadas de dois pontos A e B são, respetivamente (2,2,0) e (4,2,0).

a) Desenhe os vetores de posição dos pontos A e B.

b) Determine os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

c) Calcule o módulo, a direção e o sentido do vetor $\overrightarrow{AB}$.

2. Um vector $\vec{a}$, no plano xy, tem de módulo 5 unidades e faz com o semi-eixo positivo dos *xx* um ângulo de 60º.

a) Determine as componentes do vector

b) Determine as componentes e o módulo do vector $\vec{a}-\vec{b}$, sabendo que $\vec{b}=2\hat{i}-5\hat{j}$.

3. Considere os vetores: $\vec{A}=3\hat{e}_1-2\hat{e}_2-\hat{e}_3$ e $\vec{B}=\hat{e}_1+2\hat{e}_2-3\hat{e}_3$.

a) Determine os vetores $-\vec{B}$ e $2\vec{B}$ Verifique qual a relação entre $\left|-\vec{B}\right|$, $\left|2\vec{B}\right|$ e $-\left|\vec{B}\right|$.

b) Determine os vetores $\vec{A}-\vec{B}$ e $\vec{A}+\vec{B}$.

c) Calcule $\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$ e $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$. Compare os resultados obtidos com $\left|\vec{A}\right|-\left|\vec{B}\right|$ e com $\left|\vec{A}\right|+\left|\vec{B}\right|$. Comente os resultados.

d) Calcule os versores $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Calcule o versor da direção $\overrightarrow{AB}$.

e) Calcule os produtos escalares $\vec{A}\cdot\vec{B}$ e $\vec{A}\cdot 2\vec{B}$. Qual o ângulo formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$?

f) Determine o produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$ e $\vec{B}\times\vec{A}$. Compare os resultados e comente.

4. Calcule a distância entre os dois pontos de coordenadas (6, 8, 10) e (-4, 4, 10).

5. Determinar as componentes de um vetor cujo módulo é 13 unidades e cujo ângulo, θ, com o eixo dos *zz* é de 22.6º. A projeção desse vector no plano *xy* faz um ângulo, ϕ, de 37º com o eixo +*Ox*. Calcule também os ângulos com os eixos *x* e *y*. (R: $v_x=4$, $v_y=3$, $v_z=12$, $\alpha_x=72^o$, $\alpha_y=76.7^o$)

6. Dê exemplos de grandezas físicas tensoriais.

7. Qual a definição de um tensor da ordem n ?

8. Construa um tensor simétrico S_{ij} a partir das componentes de dois vetores, A_i e B_j. Qual é o traço deste tensor?

9. Simplificar até onde for possível as seguintes expressões escritas usando a convenção de Einstein:

a) $\delta_{ij}\, a_{ij}$; b) $\delta_{ik}\, \delta_{kj}\, \delta_{ji}$; c) $a_{ij}\, b_{jk} = a_{ij}\, c_{jk}$; b) $\delta_{ij}\, \delta_{ij}$

10. Escreva a expressão $a_i = g_k\, c_k\, h_i - h_k\, c_k\, g_i$ em notação simbólica.

11. Escreva as seguintes expressões por extenso, ou seja, sem usar a convenção de Einstein:

a) $\delta_{ij}\, a_{ij}$; b) $a_{ij}\, x_i\, x_j$; c) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial x'_j}$

12. O tensor absolutamente antissimétrico de 3ª ordem (tensor Levi-Civita), ε_{ijk}, tem os seguintes elementos:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \qquad \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$$

e os restantes são nulos. Mostre que:

a) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$

b) $\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$

13. Mostre que as matrizes abaixo são ambas raízes quadradas da matriz identidade (ou seja, que o seu quadrado dá a matriz identidade).

a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. Explique o que são os valores próprios de um tensor. Explique o que significa "diagonalizar uma matriz". Dê exemplos de problemas físicos onde isto seja necessário.

15. Ache os valores próprios e as direções principais dos tensores:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. Mostre que as seguintes relações são verdadeiras

a) $\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{a} \right) = 0$

b) $\nabla \times \left(\nabla \phi \right) = 0$

c) $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{a} \right) = \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\, \vec{a}$

17. Considere o vetor $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$, que tem uma magnitude de $r^2 \equiv |\vec{r}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Determine:

a) $grad(r)$ d) $div(r^n \vec{r})$

b) $grad(r^{-n})$ e) $rot(r^n \vec{r})$

c) $\nabla^2 (1/r)$