Recorda-se que o método de Gauss permite transformar uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

numa matriz em escada através de operações sobre as linhas que podemos resumir do seguinte modo. Vamos denotar por $L_1, ..., L_p$ as linhas e $C_1, ..., C_n$ as colunas. Se C_1 não for nula, um dos a_{i1} é não nulo e, trocando eventualmente linhas, podemos supor que $a_{11} \neq 0$, ou seja que a_{11} é o pivô da linha L_1. Usando este pivô, podemos anular o resto da coluna C_1 efetuando as seguintes operações:

$$A \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} L_1 \\ \vdots \\ L_p \leftarrow L_2 - \frac{a_{1p}}{a_{11}} L_1}]{} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Aqui M é a matriz de ordem $(p-1) \times (n-1)$ obtida efetuando as operações indicadas. Repetimos depois o processo na matriz M e assim sucessivamente (podendo entretando trocar linhas e/ou simplificar linhas através de operações $L_i \leftarrow \lambda L_i$ com $\lambda \neq 0$) até obter uma matriz em escada. Se a coluna C_1 for nula, começamos o trabalho com a coluna C_2.

Exercício 16a): Considera-se o sistema em $\mathbb{R}^3$ dado por $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

A matriz ampliada do sistema é dada por

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

De modo a transformar a matriz $[A|b]$ numa matriz em escada efetuamos as seguintes operações:

$$[A|b] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Designando por $[\tilde{A}|\tilde{b}]$ a matriz obtida (em que $\tilde{A}$ é a matriz formada pelas 3 primeiras colunas), podemos concluir, considerando o número de pivôs, que $\text{car}([A|b]) = \text{car}([\tilde{A}|\tilde{b}]) = 3$ e que $\text{car}(A) = \text{car}(\tilde{A}) = 3$. Como $\text{car}([A|B]) = \text{car}(A)$, o sistema é possível. Este sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 3y - z &= 1 \\ -7y + 3z &= -1 \\ 2z &= 2 \end{cases}$$

que podemos resolver por substituição inversa obtendo $\mathcal{S} = \{(2/7, 4/7, 1)\}$.

Exercício 16c): Considera-se o sistema em $\mathbb{R}^3$ dado por $\begin{cases} 5y + 2z &= 5 \\ x + y &= 2 \\ 2x + 3y &= 2 \\ 3x - 2z &= 2 \end{cases}$

A matriz ampliada do sistema é dada por

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Efetuemos primeiro trocas de linha de modo a colocar a linha L_2 em primeira posição e usar depois o pivô desta linha. Escolhemos aqui de trocar linhas de modo a colocar também a linha L_1 na última posição obtendo assim a seguinte matriz

$$[\hat{A}|\hat{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

De modo a transformar a matriz $[\hat{A}|\hat{b}]$ numa matriz em escada efetuemos agora as seguintes operações:

$$[\hat{A}|\hat{b}] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \end{array}\right]$$

Efuando ainda a operação $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$ obtemos a matriz

$$[\tilde{A}|\tilde{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

e podemos concluir, pelo número de pivôs em cada matriz, que $\text{car}([A|b]) = \text{car}([\tilde{A}|\tilde{b}]) = 4$ e que $\text{car}(A) = \text{car}(\tilde{A}) = 3$. Como $\text{car}([A|B]) \neq \text{car}(A)$, o sistema é impossível e $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercício 14b). Trocando a segunda e terceira equação, o sistema dado é equivalente ao seguinte sistema (em $\mathbb{R}^4$):

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 3 \\ & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & = -3 \\ & & & -7x_4 & = -7 \end{array} \right.$$

Resolvendo por substituição inversa, obtemos

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{S}) & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 & = & 3 + x_3 - 2x_4 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 3 - (1 + x_3) - x_3 - 1 \\ x_2 & = & 1 + x_3 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 1 - 2x_3 \\ x_2 & = & 1 + x_3 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right. \end{array}$$

e obtemos que o conjunto de soluções é dado por $(1, 1, 0, 1) + \langle(-2, 1, 1, 0)\rangle$.

Um algoritmo para calcular a inversa de uma matriz invertível

Seja A um matriz quadrada de ordem $n \times n$ invertível.

Ideia: Se efetuando uma sequência de operações elementares sobre as linhas transformamos A na matriz I_n isto significa que multiplicámos A à esquerda por uma matriz P tendo obtido $PA = I_n$ e P será precisamente A^{-1}. De modo a obter explicitamente a matriz $P = A^{-1}$ vamos formar a matriz $[A|I_n]$ e efetuar sobre esta matriz as operações que transformam A em I_n passando assim de $[A|I_n]$ a $[PA|PI_n] = [I_n|P] = [I_n|A^{-1}]$ o que permitíra a identificação da matriz A^{-1}.

Consideremos o seguinte exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como A é de ordem 3×3, A é invertível se e só se $\text{car}(A) = 3$. As seguintes operações transformam A numa matriz em escada:

$$A \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Denotando por $\tilde{A}$ a matriz obtida, tem-se $\text{car}(A) = \text{car}\tilde{\text{A}} = 3$ pelo que A é invertível. Para calcular A^{-1}, formamos a matriz $[A|I_3]$ e efetuamos operações sobre as linhas que permitam passar de A em I_3. As operações podem ser organizadas do seguinte modo.

1) O primeiro grupo de operações que efectuamos corresponde às operações do método de Gauss que permitem transformar a matriz A numa matriz em escada ou, mais precisamente aqui, numa matriz triângular superior:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2) O segundo grupo de operações consiste em multiplicações das linhas por números (não nulos) apropriados e tem o objectivo de substituir a diagonal da matriz do quadro de esquerdo por uma diagonal de 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{2}L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

3) O último grupo de operações tem o objectivo de substituir por zeros os elementos que formam o triângulo por cima da diagonal na matriz do quadro esquerdo. A fim de fazer isto, vamos utilizar a última linha para transformar em 0 os elementos da última coluna que estão por cima da diagonal, e repetir depois a mesma estrátegia com a matriz obtida esquecendo a última linha e a última coluna. Estaremos assim a aplicar o método de Gauss de "baixo para cima" e da direita para a esquerda. Fazendo assim, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 + L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Podemos assim concluir que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

TPC: Determine a inversa da matriz B do exercício 19 da Folha 4.