ELECTROMAGNETISMO (Lic. Física) 2010/11

1º Teste - resolução

1. Resposta E.

Duas quaisquer cargas nunca podem dar origem a um campo nulo num ponto que não esteja situado na linha que passa pelas duas cargas. Tem, por isso, que existir uma terceira carga que anule o campo criado pelas duas primeiras.

2. Resposta D.

situação 1: $V_S < 0$

situação 2: $V_S < 0$ e igual ao potencial na situação 1 (porque o electrão e o protão estão à mesma distância de S que no caso 1)

situação 3: $V_S > 0$

3. Resposta D.

Pelo Teorema de Gauss o fluxo através de uma qualquer superfície fechada só depende do valor da carga interior à superfície (não depende da posição da carga nem da forma da superfície).

4.

a) $$V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

b) No deslocamento de uma carga eléctrica entre dois pontos assentes sobre uma superfície equipotencial não há variação da energia potencial (é nulo o trabalho realizado pela força eléctrica). Isto só pode ocorrer se a força eléctrica (ou o campo) for ortogonal ao deslocamento, ou seja, ortogonal em cada ponto à superfície equipotencial.

c) No caso de uma carga pontual o campo eléctrico num ponto situado a uma distância r da carga escreve-se

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r \qquad , \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Utilizando esta expressão do campo na expressão da alínea a)

$$V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

d) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$

(i) Em coordenadas esféricas a divergência escreve-se

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}$$

Como no caso de uma carga pontual $\vec{E}$ só depende de $\underline{r}$ $(E_\theta = E_\phi = 0)$ vem

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right] = 0$$

(ii) Teorema de Gauss na forma diferencial:

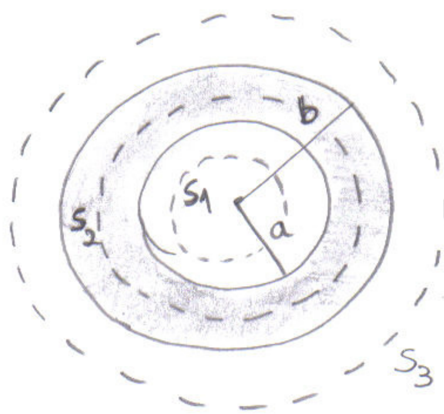
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Num ponto a uma distância $\underline{r}$ da carga a densidade de carga, ρ, é nula.

Logo $$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

5.

a) Vamos aplicar o teorema de Gauss utilizando superfícies gaussianas (S_1, S_2 e S_3) centradas c/ a camada esférica e passando nas regiões $r<a$, $a<r<b$ e $r>b$, respectivamente



T. Gauss:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$q_{int} \equiv$ carga interior à superfície gaussiana

Sobre qualquer ponto de S_1, S_2 e S_3 o campo eléctrico, $\vec{E}$, é sempre radial e, consequentemente, paralelo ao vector unitário normal à superfície, $\vec{n}$. Sobre uma mesma superfície gaussiana $\vec{E}$ toma sempre o mesmo valor, também por razões de simetria. Por isso o fluxo do campo eléctrico $\phi = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,da$ pode escrever-se simplesmente

$$\phi = E\oint_S da = 4\pi r^2 E$$

onde $\underline{r}$ é o raio da superfície gaussiana considerada.

Apliquemos agora o teorema de Gauss a cada uma das regiões

i) $r < a$

Neste caso $q_{int} = 0$

Logo $\quad 4\pi r^2 E = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{E = 0}$

ii) $a < r < b \quad , \rho = k/r^2$

Neste caso $\quad q_{int} = \displaystyle\int_a^r \rho \, dv$

$$= \int_a^r \rho r'^2 dr' \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \int_a^r \frac{k}{r'^2} r'^2 dr' \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \left[\phi\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi k (r-a)$$

Tem-se então

$$4\pi r^2 E = \frac{4\pi k (r-a)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{k}{\varepsilon_0} \frac{r-a}{r^2}$$

$$\boxed{E = \frac{k}{\varepsilon_0} \frac{r-a}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}}$$

iii) $r > b$

$$q_{int} = \int_a^b \rho \, dv = 4\pi k (b-a)$$

Tem-se então

$$4\pi r^2 E = \frac{4\pi k (b-a)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{k}{\varepsilon_0} \frac{b-a}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k}{\varepsilon_0} \frac{b-a}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}}$$

b) Passos para determinar a energia electrostática da distribuição de cargas

- calcular o potencial na região $a<r<b$ através da relação

$$V = \int_r^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_b^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

onde $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ são os campos eléctricos determinados em (ii) e (iii) da alínea anterior, respectivamente.
Nota: na expressão anterior está a tomar-se o potencial no infinito igual a zero.

- calcular a energia através de

$$W = \frac{1}{2}\int_{Vol.} \rho V \, dv$$

onde $\rho = k/r^2$ e a integração é realizada no volume da camada esférica $a<r<b$ (onde $\rho \neq 0$).