| 班级 |
| --- |
| |
| 学号 |
| |
| 姓名 |
| |

密 封 线

# 东北大学考试试卷（B）

2014-2015学年第一学期

课程名称： 数值分析（共4页）

| 总分 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | | | | | | | |

一、（本题10分）

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}$，求 $\rho(A)$、$cond_2(A)$。

$\rho(A)=5$

$cond_2(A)=\frac{3}{5}$

$|\lambda E-A|=0$

$\begin{vmatrix}\lambda-4&-1\\-1&\lambda-4\end{vmatrix}=0=\lambda^2-8\lambda+16-1$

$=(\lambda-3)(\lambda-5)=0$

$\lambda_1=3\ \lambda_2=5$

2. 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\1&3&1\end{pmatrix}$ 的 $LU$ 分解式 $A=LU$。

$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&0&-\frac{9}{2}\end{bmatrix}$

二、（本题10分）

1. 设 $x=(x_1,x_2,x_3)^T\in R^3$，问 $f(x)=\sqrt{x_1^2+2x_2^2+3x_3^2}$ 是不是 $R^3$ 上的向量范数，为什么？

2. 若迭代法 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$ 收敛，设 $0<\omega<1$，问迭代法 $x^{(k+1)}=[\omega I+(1-\omega)M]x^{(k)}+(1-\omega)g$ 是否收敛，为什么？

三、（本题10分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&\alpha&\alpha\\\alpha&1&\alpha\\\alpha&\alpha&1\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

1. 设 $\alpha\in U$ 时，$A$ 可分解为 $GG^T$（其中 $G$ 为下三角矩阵），求 $U$；

2. 写出解线性方程组 $Ax=b$ 的 $Jacobi$ 迭代格式，并讨论此格式在 $\alpha\in U$ 时的收敛性.

1. A为对称正定时，A可分解为 $GG^T$.

$1-\alpha^2>0$ $(\alpha-1)(2\alpha+1)>0$ 即 $\alpha\in(-\frac{1}{2},1)=U$

## 四．（本题 10 分）

考虑求方程 $2\cos x-3x+12=0$ 根迭代公式

$$x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k,\qquad k=0,1,2\cdots$$

1. 试证：对任意 $x_0\in R$，该迭代方法收敛，并指明收敛阶.

2. 取初值 $x_0=4$，用此格式计算需迭代多少步能使得近似根 $x_k$ 满足精度要求 $|x_k-x_{k-1}|\le 10^{-3}$.

## 五．（本题 10 分）

给定函数 $f(x)$ 的数据表如下

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 2 |
| $f'(x)$ | 0 | |

1. 构造二次 *Hermite* 插值多项式 $H_2(x)$；

2. 试根据插值余项确定一个常数 $C$，使不等式

$$|f(x)-H_2(x)|\le C\cdot\max_{0\le x\le 1}|f'''(x)|$$

对任意 $x\in[0,\ 1]$ 能保持成立.

密 封 线

六.（本题 10 分）

已知实验数据

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
| $\rho_i$ | 1 | 2 | 2 | 1 |

1. 用最小二乘法求出拟合这组数据的直线 $y=a+bx$；

2. 给出均方误差（结果保留 4 位有效数字）.

七.（本题 10 分）试构造区间 $[-1,1]$ 上权函数 $\rho(x)\equiv1$ 的两点 $Gauss$ 型求积公式 $G(f)$，并继续构造两点复化 $Gauss$ 公式 $G_n(f)$.

八.（本题 10 分）

设 $\varepsilon=10^{-3}$，用复化 $Simpson$ 公式计算 $I=\int_1^2\ln x dx$ 的近似值时，若要求 $|I-S_n|\le\varepsilon$.

1. 求出 $n$；

2. 计算相应 $S_n$.

密

封

线

九．（本题 10 分）

给定常微分方程初值问题：$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$，$a \le x \le b$.

求多步方法 $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{h}{4}[7f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})]$ 的局部截断误差，并指出是几阶方法.

十．（本题 10 分）

若用二阶中点公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \end{cases}$$

求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = -4y \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1. 试分析此差分格式的收敛性；

2. 为保证该公式绝对稳定，步长 $h$ 应取多少.

解：2 写出IVP问题的二阶中点公式.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = -4y_n \\ K_2 = \cancel{f} -4(y_n + \frac{1}{2}h(-4y_n)) \end{cases}$$

$K_1' = -4K_1$

$K_2' = -4K_2$

$$y_{n+1} = y_n + h[-4(y_n + \frac{1}{2}h(-4y_n))]$$