| 班 级 |
| --- |
| |
| 学 号 |
| |
| 姓 名 |
| |

密 封 线

东北大学研究生院考试试卷

2011 —2012 学年第 一 学期

课程名称： 数值分析 （共3页）

| 总分 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | | |

一、解答下列各题：（每题5分，共30分）

1. 设近似值 $x$ 具有5位有效数字，则 $x$ 的相对误差限为多少？

解：记 $x^*=\pm 0.a_1a_2\ldots\times 10^m$，则 $x$ 的相对误差为：

$$\left|\frac{x^*-x}{x^*}\right|\le\frac{0.5\times10^{m-5}}{0.a_1a_2\ldots\times10^m}<\frac{0.5\times10^{-5}}{0.1}=0.5\times10^{-4}$$

即，相对误差限为：$0.5\times10^{-4}$.

2. 问 $a,b$ 满足什么条件时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&a\\0&b&5\end{pmatrix}$ 有分解式 $A=GG^T$，并求 $a=b=2$ 时

A=GGT

A必为对称正定.

$-2\sqrt{5}<a=b<2\sqrt{5}$

的分解式（其中 $G$ 是对角线元素大于零的下三角形矩阵）.

解：由于 $A=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&a\\0&b&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&a/2\\0&b/2&\sqrt{5-ab/4}\end{pmatrix}$（A对称正定时）

所以，当 $-2\sqrt{5}<a=b<2\sqrt{5}$ 时有分解式 $A=GG^T$，$a=b=2$ 时有：

$$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

3. 解线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2=2\\2x_1+9x_2=3\end{cases}$ 的 Jacobi 迭代法是否收敛，为什么？

解：Jacobi 迭代矩阵为：$B=\begin{pmatrix}0&2\\-2/9&0\end{pmatrix}$，所以，$\rho(B)=2/3<1$

所以，Jacobi 迭代法是否收敛.

4. 对方程 $f(x)=(x^3-a)^2=0$ 建立 Newton 迭代格式，并说明此迭代格式是否收敛？若收敛，收敛阶是多少？

解：Newton 迭代格式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-a}{6x_k^2},\quad x_{k+1}=\frac{5x_k}{6}+\frac{a}{6x_k^2},\quad k=0,1,2,\ldots$$

由于迭代函数为：$\varphi(x)=\frac{5x}{6}+\frac{a}{6x^2}$，方程根为：$\alpha=\sqrt[3]{a}$，所以，

$$|\varphi'(\alpha)|=\left|\frac{5}{6}-\frac{a}{3\alpha^3}\right|=\frac{1}{2}<1,\ \text{且}\ |\varphi'(\alpha)|=\frac{1}{2}\ne0$$

所以，此迭代格式收敛，收敛阶是1.

5. 设 $f(x)=4x^3+3x-5$，求差商 $f[0,1],f[1,2,3,4]$ 和 $f[1,2,3,4,5]$。

解：$f[0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2-(-5)=7$

$f[1,2,3,4]=4$，$f[1,2,3,4,5]=0$

6. 设 $p_2(x)$ 是区间 [0, 1] 上权函数为 $x$ 的二次正交多项式，计算积分 $\int_0^1 x^2p_2(x)dx$.

解：$\int_0^1 x^2p_2(x)dx=\int_0^1 x\cdot x\cdot p_2(x)dx=[x,p_2(x)]=0$

二、解答下列各题：（每题8分，共48分）

1. 用Gauss-Saidel迭代法求解方程组 $\begin{cases} x_1+0.3x_2-0.2x_3=1 \\ x_2+0.4x_3=2 \\ x_1+x_3=-1 \end{cases}$，如果取初值 $x_0=(0,0,0)^T$，试估计迭代10步的误差 $\|x_{10}-x^*\|_\infty$.

解：由于Gauss-Saidel迭代矩阵为:

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-0.3&0.2\\0&0&-0.4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-0.3&0.2\\0&0&-0.4\\0&0.3&-0.2\end{pmatrix}$$

所以，$\|G\|_\infty=0.5$，

由于Gauss-Saidel迭代格式为: $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-0.3x_2^{(k)}+0.2x_3^{(k)}+1 \\ x_2^{(k+1)}=-0.4x_3^{(k)}+2 \\ x_3^{(k+1)}=-x_1^{(k+1)}-1 \end{cases}$，所以，

$x^{(1)}=(1,2,-2)^T$，$\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=2$，于是

$$\|x_{10}-x^*\|_\infty\le\frac{\|G\|_\infty^{10}}{1-\|G\|_\infty}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=\frac{0.5^{10}}{0.5}\times 2=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}=0.00390625$$

2. 给定离散数据

| $x_i$ | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | −1 | 1 | 3 |

试求形如 $y=a+bx^2$ 的拟合曲线。

解：由于 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$，所以 $\varphi_0=(1,1,1,1)^T,\varphi_1=(1,0,1,4)^T$，

$f=(2,-1,1,3)^T$，所以，正则方程组为：$\begin{cases}4a+6b=5\\6a+18b=15\end{cases}$，

所以，$a=0,b=5/6$，拟合曲线为：$y=5/6x^2$

3. 求满足条件 $f(0)=1,f(1)=2,f(2)=0,f'(1)=0$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 的表达式。

解：设 $H_3(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$，则有：

$-2c=1$，$a+b+c=-2$，$-a+c=0$，解得： $a=c=-1/2,b=-1$，

所以，$H_3(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(x^2+2x+1)=-\frac{1}{2}(x^3-3x-2)$。

4. 确定求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{1}{2}f(-1)+A_1f(0)+A_2f(1)$ 中的待定系数，使其代数精度尽可能高，并问此公式是不是插值型求积公式.

解：令公式对 $f(x)=1,x$ 都精确成立，得：$A_1+A_2=3/2$，$A_2=1/2$，

所以，$A_1=1$，$A_2=1/2$ 时，公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{1}{2}f(-1)+f(0)+\frac{1}{2}f(1)$ 代数精度最高.

又由于公式对 $f(x)=x^2$ 不能精确成立，所以，代数精度为1，不是插值型求积公式。

5. 利用复化Simpson公式 $S_2$ 计算定积分 $I=\int_0^\pi \sin x dx$ 的近似值，并估计误差。

解：$I\approx S_2=\frac{\pi}{12}[\sin 0+\sin\pi+2\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{4}+4\sin\frac{3\pi}{4}]=\frac{\pi}{6}(1+2\sqrt{2})=2.00456$

由于 $f(x)=\sin x$ 的4阶导数在 $[0,\pi]$ 上的最大值为：$M_4=1$，所以

误差为：$|I-S_2|\le\frac{\pi^5M_4}{2880\times 2^4}=0.006641$

6. 求解初值问题 $\begin{cases}y'=\sin(x+2y),\quad 0\le x\le 2\\ y(0)=1\end{cases}$ 的改进Euler方法是否收敛？为什么？

解：由于 $|\sin(x+2y)-\sin(x+2\bar{y})|=|2\cos(x+2\xi)(y-\bar{y})|\le 2|y-\bar{y}|$

即，函数 $f(x,y)=\sin(x+2y)$ 连续，且关于变量 $y$ 满足Lipschitz条件，所以，改进Euler方法收敛。

三、（9 分）说明方程 $2x-\sin x-2=0$ 在区间 $[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内有唯一根，并建立一个收敛的迭代格式，使对任意初值 $x_0 \in [\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}]$ 都收敛，说明收敛理由和收敛阶。

解：记 $f(x)=2x-\sin x-2$，则 $f(x)\in C[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}]$，且 $f(\frac{1}{2})<0, f(\frac{\pi}{2})>0$，而且，

$f'(x)=2-\cos x>0$，所以，方程 $2x-\sin x-2=0$ 在区间 $[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内有唯一根。

建立迭代格式：$x_{k+1}=\frac{1}{2}\sin x_k+1$，$k=0,1,2,\ldots$

由于，迭代函数 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\sin x+1$ 在区间 $[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上满足条件：

$$\frac{1}{2}<1<\varphi(x)<\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}，\ |\varphi'(x)|=|\frac{1}{2}\cos x|<\frac{1}{2}<1$$

所以，此迭代格式对任意初值 $x_0\in[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}]$ 都收敛。

又由于，$\varphi'(\alpha)=\frac{1}{2}\cos\alpha\neq 0$，所以，此迭代格式 1 阶收敛。

四、（9 分）已知求解常微分方程初值问题：$\begin{cases} y'=f(x,y), & x\in[a,b] \\ y(a)=\alpha \end{cases}$ 的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)) \\ y_0=\alpha \end{cases}$$

求此差分公式的阶。

解：由于

$$y_{n+1}=y_n+f_n h+\frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)+\frac{h^3}{8}(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}f_n^2)+O(h^4)$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}(y'''(x_n)+O(h^4))$$

$$=y_n+f_n h+\frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+O(h^4)$$

所以，$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$

所以，此差分公式是 2 阶方法。

五、（4 分）设矩阵 $M$ 是 $n$ 阶方阵，$M$ 有一个绝对值小于 1 的特征值 $\lambda$，且方程组 $x=Mx+g$ 有唯一解 $x^*$，证明：存在初始向量 $x^{(0)}$ 使迭代格式：$x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$，$k=0,1,2,\ldots$ 产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 $x^*$.

解：由 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$ 和 $x^*=Mx^*+g$ 可得：

$$x^{(k+1)}-x^*=M(x^{(k)}-x^*),\quad k=0,1,2,\ldots$$

递推的：$x^{(k)}-x^*=M^k(x^{(0)}-x^*)$

设 $y$ 是矩阵 $M$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，取 $x^{(0)}=y+x^*$，则有：

$x^{(k)}-x^*=M^k y=\lambda^k y$，于是有：$\|x^{(k)}-x^*\|=|\lambda|^k\|y\|$

所以，$\lim\limits_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=0$，即序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 $x^*$.