

学 院
班 级
学 号
姓 名

○
密
封
线

东 北 大 学 研 究 生 考 试 试 卷

2018 — 2019 学 年 第 一 学 期

课程名称：应用数理统计（开卷）

总 分	一	二	三	四	五	六	七	八

说明：1、共八题，尽量详细写出计算与证明过程，小数点后保留两位；
2、样本都指简单随机样本；样本均值与样本方差分别定义为

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X})^2;$$

3、分位点 Q_α 取为上分位点，即： $\mathbf{P}(X > Q_\alpha) = \alpha$ 。

一、设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，

- 1.（5分）求出 \overline{X} 与 $X_1 - \overline{X}$ 的联合概率密度函数.
- 2.（5分）若 $\mu = 0$ ， $n = 26$ ，满足 $P(\overline{X}^2 < c(X_1 - \overline{X})^2) = 0.90$ ，常数 c 的值是多少.

二、设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自指数分布总体 X 的简单随机样本， $X \sim E(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \text{ 若参数 } \lambda \text{ 的先验分布为 } p(y) = \frac{b^k}{(k-1)!} y^{k-1} e^{-by}, y > 0, b \text{ 已知,}$$

- 1.（10分）求平方损失下参数 λ 的 Bayes 估计 $\hat{\lambda}_B$.
- 2.（5分）如果 $k = 2$ ， $n = 8$ ，求常数 c ，使得后验概率 $P(\lambda < c\hat{\lambda}_B) = 0.95$.

学 院
班 级
学 号
姓 名

.....
○
.....
密
.....
○
.....
封
.....
○
.....
线
.....
.....

三、设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自指数分布总体 X 的简单随机样本，总体概率密度为

$$f(x, \theta) = \frac{\beta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\beta x}, x > 0, \beta > 0, k \text{ 为正整数,}$$

- 1. (5 分) 当 k 已知时，求参数 $1/\beta$ 的极大似然估计；
- 2. (5 分) 当 $k=1$ 时，证明 $1/\beta$ 的极大似然估计为无偏估计；
- 3. (5 分) 当 $k=1$ 时，求参数 β 的矩估计.

四、(10 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 为来自正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ，设 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 为来自正

态总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，且两个总体之间相互独立，其中 $\sigma_1^2 = 4\sigma_2^2$ ，求参数 $\mu_1 - \mu_2$ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

学 院
班 级
学 号
姓 名

密

封

线

五、(15 分) 两台车床生产同一型号的滚珠，根据已有的经验可知两台车床生产滚珠的直径（单位：mm）都服从正态分布，先从两台车床产品中分别抽取 9 个和 16 个，数据如下：

$\bar{x}_1 = 15, s_1^2 = 0.1, \bar{x}_2 = 14.8, s_2^2 = 0.008$, 在水平 $\alpha = 0.05$ 下检验

1. (7 分) 两个机床生产的滚珠分布的方差是否相同;
2. (8 分) 两个机床生产的滚珠分布的均值是否相同.

六、(10 分) 在某医院, 因患心脏病而住院的男性患者 50 名中, 有 25 人秃顶, 而另外 50 个不是因心脏病而住院的男性病人中有 31 人秃顶, 利用列联表检验判断秃顶和患心脏病是否有显著性关系. (检验水平 $\alpha = 0.05$)

学 院
班 级
学 号
姓 名

.....
○
.....
密
.....
○
.....
封
.....
○
.....
线
.....
.....

七、（10 分）某产品可以在三台不同机器上生产. 现记录三台机器生产 5 天的日产量（单位：个）如下：

- 机器一：50，73，57，78，67；
- 机器二：61，55，63，44，47；
- 机器三：68，56，65，70，46.

设各机器的日产量服从正态分布且方差相等. 问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下各机器的日产量是否有显著性差异？（已知：全部数据的样本均值和样本方差， $\bar{x} = 60, s^2 = 108$ ；三台机器日产量的样本均值和样本方差， $\bar{x}_1 = 65, s_1^2 = 131.5$ ， $\bar{x}_2 = 54, s_2^2 = 70$ ， $\bar{x}_3 = 61, s_3^2 = 99$.)

八、（15 分）设 $y = \beta_0 + \beta_1x + \varepsilon$ ， $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. 已知变量 x 和 y 的 9 对独立观测数据如下：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	17	14	20	18	23	25	22	25	34

- 1（10 分）利用所给数据求 y 对 x 的一元线性回归方程；
- 2（5 分）检验假设 $H_0 : \beta_1 = 0, H_1 : \beta_1 \neq 0$.（检验水平 $\alpha = 0.05$ ）

已知： $\bar{x} = 0, \bar{y} = 22, \sum_{t=1}^n x_t y_t = 112, \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2 = 60, \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 = 272$.