| 学　院 |
| --- |
| |
| 班　级 |
| |
| 学　号 |
| |
| 姓　名 |
| |

密　封　线

# 东 北 大 学 研 究 生 院 考 试 试 卷 （A/闭卷）

2017—2018 学年第 1 学期

课程名称：数值分析

一、简答题（每题 6 分，共 48 分）

1. 已知 $x=6.7321$ 具有 5 位有效数字，问由此计算 $f(x)=x^3+4x^2-10$ 至少具有几位有

①

③ 2. 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ 的 $Crout$ 分解式 $A=TM$.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ & 1 & -6\\ & & 1\end{bmatrix}$$

3. 试给出简化 $Newton$ 迭代法的收敛性条件并加以证明.

二.（本题 12 分）设有线性方程组 $Ax=b$ 的迭代格式 $Bx^{(k+1)}+Cx^{(k)}=b$ ，$k=0,1,\cdots$

③

其中 $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0&0&0\\\xi&0&0\\2&\eta&0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$，$x^{(k)}=\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{bmatrix}$.

$X^{(k+1)}=B^{-1}CX^{(k)}+B^{-1}b \quad M=B^{-1}C$

试确定实参数 $\xi$ 和 $\eta$ 的取值范围，使得迭代格式收敛.

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad M=\begin{pmatrix}\xi&0&0\\2-\xi&\eta&0\\-2&-\eta&0\end{pmatrix}$ 则 $\rho(M)=\xi$ 或 $\eta$

即 $\xi<1$，$\eta<1$ 迭代法格式收敛.

三.（本题 15 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 4 阶连续导数，

1. 求一个次数不超过 3 次的多项式 $p(x)$，使 $p(x)$ 满足

$$p(a)=f(a),p(b)=f(b),p'(a)=f'(a),p'(b)=f'(b)$$

2. 证明 $R(x)=f(x)-p(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2,\xi_x\in(a,b)$ 且与 $x$ 有关.

| |
|---|
| 学 院 |
| |
| 班 级 |
| |
| 学 号 |
| |
| 姓 名 |
| |

密 封 线

四．（本题 15 分）已知求解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

1．证明：此差分公式是二阶方法.

2．讨论此差分公式的收敛性.

3．用此差分公式求解初值问题 $y' = -10y$，$y(0) = 1$ 时，取步长 $h = 0.25$，所得数值解

稳定，为什么？

| 分 | 一（1-3） | 一（4-5） | 一（6-8） | 二 | 三 | 四 | 五 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

4. 给定离散数据

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $2$ |

试求形如 $y=a+bx^3$ 的拟合曲线.

设 $\varphi_0(x)=0$ $\varphi_1(x)=x^3$

$\varphi_0=(1,1,1,1)^T$ $\varphi_1=(-1,0,1,8)^T$ $f=(1,-1,0,2)^T$

则方程为 $\begin{cases} 4a_0+8b_0=2 \\ 8a_0+66b_0=15 \end{cases}$

$a_0=0.06$

$b_0=\frac{11}{50}$

$y=0.06+\frac{11}{50}x^3$

5. 求矩阵 $Q$ 的 $\|Q\|_2$, $\|Q\|_\infty$ 与 $Cond_2(Q)$, 其中

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\|Q\|_\infty=4$

$\lambda_{max}$ 为 $Q^TQ$ 的最大特征值

$\|Q\|_2=\sqrt{\lambda_{max}}=2$

$Q^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$cond_2=\|Q\|_2\|Q^{-1}\|_2$

| 学 院 |
| --- |
| |
| 班 级 |
| |
| 学 号 |
| |
| 姓 名 |
| |

密 封 线

6. 对积分$\int_0^1 f(x)dx$建立两点Gauss公式.

7. 设求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), (n \geq 3)$是插值型求积公式，求$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^3$.

8. 利用复化Simpson公式$S_2$计算定积分$I=\int_0^1 \cos x dx$的近似值，并估计误差.

五. 证明题（本题 10 分）

设 $A$ 是 $n$ 阶非奇异矩阵，$B$ 是 $n$ 阶奇异矩阵，试证明

$$Cond(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|}.$$