班级
学号
姓名

密 封 线

东北大学研究生院考试试卷

2012 —2013 学年第 一 学期

课程名称： 数值分析 （共 2 页）

总分	一	二	三	四	五	六

一、填空题：（每题 5 分，共 50 分）

1. 设近似值 x 的相对误差限为 10^{-5}，则 x 至少具有（ 5 ）位有效数字.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则 A 的 Doolittle 分解式是（$A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}$），Crout 分解式是（ $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ ）.

LU.

TM

[illegible]

3. 解线性方程组 $\begin{cases}x_1-4x_2=2\\x_1+9x_2=1\end{cases}$ 的 Jacobi 迭代矩阵的谱半径 $\rho(B)=$（ 2/3 ）.

4. 迭代格式 $x_{k+1}=x_k^3-3x_k^2+3x_k$，$k=0,1,2,\dots$ 求根 $\alpha=1$ 是（ 3 ）阶收敛的.

5. 设 $f(x)=\sin x$，用以 $x_i=i$，$i=0,1,2$ 为节点的二次插值多项式近似 $\sin 1.5$ 的值，误差为 $|R_2(1.5)|\le$（ $1/16=0.0625$ ）.

6. 设 $f(x)=5x^3+3$，则差商 $f[0,1]=$（ 5 ），$f[1,2,3,4]=$（ 5 ），$f[1,2,3,4,5]=$（ 0 ）.

7. 区间 $[-1,\ 1]$ 上权函数为 x^2 的二次正交多项式设 $p_2(x)=$（ $x^2-3/5$ ）.

8. 对离散数据

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	-1	1	3

的拟合曲线 $y=\frac{5}{6}x^2$ 的均方差为（$\sqrt{2.5}\approx 1.58$）.

9. 设求积公式 $\int_{-1}^{2}f(x)dx\approx A_0f(-1)+A_1f(0)+A_2f(1)$ 是插值型求积公式，则积分系数 $A_0=$（ 3/4 ），$A_1=$（ 0 ），$A_2=$（ 9/4 ）.

10. 求解常微分方程初值问题的差分公式 $\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n))\\y_0=\alpha\end{cases}$ 的绝对稳定区间是（ (-2，0) ）.

二、（10 分）已知求线性方程组 $Ax=b$ 的迭代格式：

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\mu}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}),\quad i=1,2,\cdots,n$$

(1) 求此迭代法的迭代矩阵 M；

(2) 证明：当 A 是严格对角占优矩阵，$\mu=0.5$ 时，此迭代格式收敛.

解：迭代法的矩阵形式为：

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\mu D^{-1}(b-Ax^{(k)})=D^{-1}(D-\mu A)x^{(k)}+\mu D^{-1}b$$

所以，迭代矩阵为 $M=D^{-1}(D-\mu A)$.

当 A 是严格对角占优矩阵，$\mu=0.5$ 时，由于

$$\rho(M)\le\|M\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|\frac{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|}{2a_{ii}}|<1$$，所以，迭代格式收敛.

三、（12 分）说明方程 $x-\cos x=0$ 有唯一根，并建立一个收敛的迭代格式，使对任意初值 x_0 都收敛，说明收敛理由和收敛阶。

解：记 $f(x)=x-\cos x$，则 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=-1<0, f(1)=1-\cos 1>0$，而且，$f'(x)=1+\sin x\ge 0$，所以，方程 $x-\cos x=0$ 有唯一根，且在区间 $[0,\ 1]$ 内。

建立迭代格式：$x_{k+1}=\cos x_k$，$k=0,1,2,\dots$

由于，迭代函数 $\varphi(x)=\cos x$ 在区间 $[-1,1]$ 上满足条件：

$$-1<\cos 1\le\varphi(x)\le 1,\quad |\varphi'(x)|=|\sin x|\le\sin 1<1$$

所以，此迭代格式对任意 $x_1\in[-1,1]$ 都收敛。因此，对任意初值 x_0 都收敛。

又由于，$\varphi'(\alpha)=-\sin\alpha\ne 0\ (0<\alpha<1)$，所以，此迭代格式 1 阶收敛。

四、(10 分) 利用复化 Simpson 公式 S_2 计算定积分 $I=\int_0^2 \cos x dx$ 的近似值，并估计误差。

解：$I \approx S_2 = \frac{1}{6}[\cos 0 + \cos 2 + 2\cos 1 + 4\cos\frac{1}{2} + 4\cos\frac{3}{2}] = 0.909622804$

由于 $f(x)=\cos x$ 的 4 阶导数在 $[0,2]$ 上的最大值为：$M_4 = 1$，所以

误差为：$|I - S_2| \le \frac{2^5 M_4}{2880 \times 2^4} = 0.000694444$

五、(10 分) 设求解常微分方程初值问题：$\begin{cases} y' = f(x,y), & x\in[a,b] \\ y(a)=\alpha \end{cases}$ 的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,y_n) + f(x_n+\frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n,y_n))] \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

求此差分公式的阶。

解：由于

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f_n + f_n + \frac{h}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + O(h^2)]$$

$$= y_n + hf_n + \frac{h^2}{4}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + O(h^3)]$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

$$= y_n + f_n h + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + O(h^3)$$

所以，$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{4}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + O(h^3) = O(h^2)$

所以，此差分公式是 1 阶方法。

六、(8 分) 设 $p_1(x)$ 是 $f(x)$ 以 $x_0 = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = 1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ 为节点的一次插值多项式，试由 $p_1(x)$ 导出求积分 $I=\int_0^2 f(x)dx$ 的插值型求积公式，并导出公式的截断误差.

解　设由 $p_1(x)$ 导出求积分 $I=\int_0^2 f(x)dx$ 的插值型求积公式为：

$$I = \int_0^2 f(x)dx \approx A_0 f(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) + A_1 f(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

由插值余项知，公式至少具有 1 次代数精度，于是有：

$A_0 + A_1 = 2$，$A_0(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) + A_1(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2$，即：$A_0 = A_1 = 1$.

所以，由 $p_1(x)$ 导出求积分 $I=\int_0^2 f(x)dx$ 的插值型求积公式为：

$$I = \int_0^2 f(x)dx \approx f(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

容易验证此公式具有 3 次代数精度，即对次数不大于 3 次的多项式精确成立，记 $H_3(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x_1]$ 的 3 次 Hermite 插值多项式，则有：

$$R[f] = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 p_1(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 H_3(x)dx + \int_0^2 H_3(x)dx - \int_0^2 p_1(x)dx$$

$$= \int_0^2 \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2(x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 dx = \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\int_0^2 (x^2-\frac{1}{3})^2 dx$$

$$= \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\int_0^2 (x^2-\frac{1}{3})^2 dx = \frac{109 f^{(4)}(\eta)}{540}$$