班级
学号
姓名

密 封 线

东北大学研究生院考试试卷

2010 —2011 学年第 一 学期

课程名称： 数值分析(A)

总分	1—3	4—6	7—9	10—12	13-15

1. (5 分) 设近似值 $x = 15.26$ 近似 x^* 的相对误差限为 0.0003，问 x 至少具有几位有效数字。

解 由于绝对误差限为：15.26×0.0003＝0.004578<0.5×10^{-2} 2 分

所以，x 至少具有 4 位有效数字。 5 分

2. (6 分) 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&4&-4\\3&5&2\\1&4&3\end{pmatrix}$ 的 Crout 分解式 $A=TM$.

解 由于 $A=\begin{pmatrix}2&4&-4\\3&5&2\\1&4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&-2\\3&-1&-8\\1&2&21\end{pmatrix}$ 3 分

所以，$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&-1&0\\1&2&21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&1&-8\\0&0&1\end{pmatrix}$ 6 分

3. （6 分）设 $f(x)=4x^3+2x^2-3$，求差商 $f[0,1], f[1,2,3,4], f[1,2,3,4,5]$。

解 f[0, 1]=(3-(-3))/1=6 2 分
f[1, 2, 3, 4]=4 4 分
f[1, 2, 3, 4, 5]=0 6 分

4. (6 分) 设 $x_{k+1}=x_k^3+ax_k^2+bx_k+c,\ k=0,1,2,\ldots$ 是求方程根 $\alpha=1$ 的迭代法，试确定参数 a,b,c 使迭代法的收敛阶尽可能高，并指出阶是多少？

解 由 $\alpha=1$ 得 $1=1+a+b+c$ 2 分

令 $\varphi'(1)=3+2a+b=0,\ \ \varphi''(1)=6+2a=0$ 得 $a=-3, b=3, c=0$， 5 分

此时，迭代法 3 阶收敛。 6 分

5. (6 分) 解线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-2\\2x_1+3x_2+3x_3=3\\-4x_1-6x_2+7x_3=1\end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代法是否收敛，为什么？

解 令 $0=\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\2\lambda&3\lambda&3\\-4\lambda&-6\lambda&7\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\0&3\lambda+2&-1\\0&0&7\lambda+6\end{vmatrix}=\lambda(3\lambda+2)(7\lambda+6)$ 3 分

得 $\rho(G)=6/7<1$， $(D-L)^{-1}U=M$ $\rho(M)<1$ 5 分

所以，Gauss-Seidel 迭代法收敛。 7 分

6. (8 分) 用 Jacobi 法解线性方程组 $\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=1\\x_1+3x_2+x_3=2\\2x_1-x_2+4x_3=3\end{cases}$，取 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，估计迭代 10 步的误差 $\|x^{(10)}-x^*\|_\infty$。

解 由于 $B=\begin{pmatrix}0&-1/3&1/3\\-1/3&0&-1/3\\-1/2&1/4&0\end{pmatrix}$，所以 $\|B\|_\infty=3/4$， 2 分

又由于 $x_1=(1/3,2/3,3/4)^T$，所以 $\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=3/4$ 4 分

所以，$\|x^{(10)}-x^*\|_\infty\le\dfrac{\|B\|_\infty^{10}}{1-\|B\|_\infty}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=\dfrac{3^{11}}{4^{10}}\approx 0.1689$ 8 分

密 封 线

7. (10 分) 说明方程 $x^3-x-3=0$ 在区间[1, 2]内有唯一根，并建立一个收敛的迭代格式，使对任意初值 $x_0\in[1,2]$ 都收敛，说明收敛理由。

解　由 $f(1)=-3<0, f(2)=3>0, f'(x)=3x^2-1>0$，知有唯一根。3 分

又由于 $1<\sqrt[3]{4}\le\varphi(x)=\sqrt[3]{x+3}\le\sqrt[3]{5}<2$，$|\varphi'|=\dfrac{1}{3(x+3)^{2/3}}<1/3<1$　7 分

所以，$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+3}$ ，$k=0,1,2,\ldots$ 对任意初值 $x_0\in[1,2]$ 都收敛。　9 分

8.（7 分）求满足条件 $f(0)=1, f(1)=-1, f(2)=0, f'(1)=0$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 的表达式。

解　令 $H_3(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$　2 分

则有：$2c=-1, a+b+c=1, -a+c=0$　4 分

解得：$a=c=-1/2, b=2$　6 分

所以，$H_3(x)=-\dfrac{1}{2}(x-2)(x^2-4x+1)=-\dfrac{1}{2}x^3+3x^2-\dfrac{9}{2}x+1$　7 分

9.（7 分）给定离散数据

x_i	−1	0	1	2
y_i	−1	1	0	3

试求形如 $y=a+bx^2$ 的拟合曲线。

解　由于基函数为：$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x^2$　1 分

于是：$\varphi_0=(1,1,1,1), \varphi_1=(1,0,1,4), f=(-1,1,0,3)$　3 分

正则方程组为：$\begin{cases}4a+6b=3\\6a+18b=11\end{cases}$　4 分

解得：$a=-1/3, b=13/18=0.7222$，

拟合曲线为：$y=\dfrac{13}{18}x^2-\dfrac{1}{3}$　7 分

10. (9 分) 利用复化 Simpson 公式 S_2 计算定积分 $I=\int_0^1\cos x dx$ 的近似值，并估计误差。

解　$I\approx S_2=\dfrac{1}{12}[\cos 0+\cos 1+2\cos\dfrac{1}{2}+4\cos\dfrac{1}{4}+4\cos\dfrac{3}{4}]$　3 分

$=0.841489382$　5 分

$M_4=\max|f^{(4)}(x)|=\max|\cos x|=1$　6 分

$|I-S_2|=|R(f)|\le\dfrac{1}{2880\times 2^4}=0.000021701$　9 分

11.（5 分）设求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ ，$(n\ge 2)$ 是插值型求积公式，求 $\sum_{k=0}^{n}A_k x_k^2$.

解　由于插值型求积公式代数精度至少是 n，　2 分

所以，$\sum_{k=0}^{n}A_k x_k^2=\int_a^b x^2dx=\dfrac{1}{3}(b^3-a^3)$　5 分

12.（6 分）对积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 建立两点 Gauss 公式。

解　由于 $P_0(x)=1, P_1(x)=x-\dfrac{(P_0,x)}{(P_0,P_0)}P_0=x-\dfrac{1}{2}$，

$P_2(x)=x^2-\dfrac{(P_0,x^2)}{(P_0,P_0)}P_0-\dfrac{(P_1,x^2)}{(P_1,P_1)}P_1=x^2-x+\dfrac{1}{6}$　2 分

Gauss 点为：$x_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$x_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　4 分

积分公式为：$\int_0^1 f(x)dx\approx\dfrac{1}{2}[f(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6})+f(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6})]$　6 分

13．(5 分)求解初值问题$\begin{cases} y' = xye^y & 1 \le x \le 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$的改进 Euler 方法是否收敛？为什么？

解　由于$f(x,y) = xye^y$关于 y 满足 Lipschitz 条件，　　2 分

所以，改进 Euler 法收敛。　　5 分

14．（5 分）证明矩阵谱半径$\rho(A)$不是矩阵范数。

证明　因为$\rho(A) = 0$时，不一定有$A = 0$、例如$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、　　2 分

所以，$\rho(A)$不满足范数的非负性，不是范数。　　5 分

15.（9 分）已知求解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}(3k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + 2h, y_n + 2hk_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

求此差分公式的阶。

解　由于

$$k_2 = f_n + 2h\left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n\right) + 2h^2\left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2\right) + O(h^3) \quad 2 分$$

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n\right) + \frac{h^3}{2}\left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2\right) + O(h^4) \quad 4 分$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{6} y'''(x_n) + O(h^4) \quad 5 分$$

$$= y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n\right)$$

$$+ \frac{h^3}{6}\left[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2 + \frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y} + \left(\frac{\partial f_n}{\partial y}\right)^2 f_h\right] + O(h^4) \quad 7 分$$

于是，$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$，此差分公式是 2 阶的。　　9 分