班级
学号
姓名

密 封 线

东北大学研究生院考试试卷

2013 —2014 学年 第 一 学期

课程名称: 数值分析(共3页)

总分	一(1—7)	一(8-10)	二	三	四	五

一、解答下列各题:(每题5分,共50分)

1. 设 x 是 $\sqrt{70}$ 的近似值,问 x 至少要保留几位有效数字才能使得相对误差限不超过0.001。

$|\sqrt{70}-x| \le 0.00836$

2位有效数字

2. 用列主元高斯消去法求解方程组 $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$。

$\cancel{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to}$

$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & -310 & -310 \end{pmatrix}$

$x_3=-1$

$x_2=0$

$x_1=1$

$x=(0,-1,1)^T$

3. 讨论求解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。

A为正定对称矩阵 因此 GS收敛.

4. 证明对任意初值 $x_0 \in \mathbb{R}$,迭代公式 $x_{k+1} = \cos x_k$ 都收敛于方程 $x = \cos x$ 唯一的根。

5. 求满足条件 $f(0)=H(0)=1, f(1)=H(1)=2, f(2)=H(2)=9, f'(1)=H'(1)=3$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 的表达式。

6. 设 $f(x)=x^3-2x+3$,求差商 $f[0,1]$, $f[1,2,3,4]$, $f[0,1,2,3,4]$。

X	f(x)	1阶	2阶	4阶	5阶
0	3				
1	2	-1			
2	7	5	3		
3	24	17	6	1	
4	59	35	9	1	0
5	118	59	12	1	0

$f[0,1]=-1$

$f[1,2,3,4]=1$

$f[0,1,2,3,4,5]=0$

7. 求用最小二乘法拟合四点 (0,1), (1,2), (2,4), (3,5) 的直线。

8. 试确定参数 A，B，C 及 h，使求积公式 $\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx Af(-h)+Bf(0)+Cf(h)$ 代数精度尽可能高，并判断其是不是高斯型求积公式。

9 求区间[0，1]上权函数为 $\rho(x)=x^2$ 的二次正交多项式 $P_2(x)$。

10. 用二阶中点公式 $y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\right)$ 求解初值问题

$\begin{cases} y'=-4y & 0\le x\le 2 \\ y(0)=1 \end{cases}$，为使该公式绝对稳定，步长 h 取值范围多少？

二、(14 分)有简单迭代公式 $x_{k+1}=x_k+c(x_k{}^2-3)$，(1) c 取何值时收敛速度最快？（2）最高收敛阶为多少？（3）如果取 c=-0.3，$x_0=1.7$，则 k 取多少时能够满足精度 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$

三、(14 分)利用复化 Simpson 公式 S_n 计算定积分 $I=\int_1^2 \ln x dx$，若使 $|I-S_n|<10^{-4}$，问：(1) n 至少应取多大？（2）并求此近似值 S_n。

密 封 线

密
封
线

四、（14 分）已知求解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + \lambda k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \end{cases}$$

确定参数 λ, α, β，使差分公式的阶尽可能高，并指出差分公式的阶。

五、（8 分）给定线性方程组 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

用迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

求解 $Ax = b$，其中 α 为实数。问 α 的取值在什么范围内可使迭代收敛？α 取何值可使迭代收敛最快？