班　级
学　号
姓　名

密　封　线

东北大学研究生院考试试卷

2010 — 2011　学年第　一　学期

课程名称：　数值分析(A)

总分	1—3	4—6	7—9	10—12	13-15

1. (5 分) 设近似值 $x=25.23$ 近似 x^* 的相对误差限为 0.0003，问 x 至少具有几位有效数字。

解　由于绝对误差限为: $25.23\times0.0003=0.007569<0.5\times10^{-1}$　　2 分

所以，x 至少具有 3 位有效数字。　　5 分

2. (6 分) 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&4&-2\\3&5&3\\1&4&2\end{pmatrix}$ 的 Crout 分解式 $A=TM$? 单比角

解　由于 $A=\begin{pmatrix}2&4&-2\\3&5&3\\1&4&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&-1&-6\\1&2&15\end{pmatrix}$　　3 分

所以，$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&-1&0\\1&2&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$　　6 分

3. (7 分) 解线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-2\\2x_1+3x_2+3x_3=3\\-4x_1-6x_2+7x_3=1\end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代法是否收敛，为什么？

解　令 $0=\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\2\lambda&3\lambda&3\\-4\lambda&-6\lambda&7\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\0&3\lambda+2&-1\\0&0&7\lambda+6\end{vmatrix}=\lambda(3\lambda+2)(7\lambda+6)$　　3 分

得 $\rho(G)=6/7<1$,　　5 分

所以，Gauss-Seidel 迭代法收敛。　　7 分

4. (8 分) 用 Jacobi 法解线性方程组 $\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=1\\x_1+3x_2+x_3=2\\2x_1-x_2+4x_3=3\end{cases}$，取 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，估计迭代 10 步的误差 $\|x^{(10)}-x^*\|_\infty$。

解　由于 $B=\begin{pmatrix}0&-1/3&1/3\\-13&0&-1/3\\-1/2&1/4&0\end{pmatrix}$，所以 $\|B\|_\infty=3/4$，　　2 分

又由于 $x_1=(1/3,2/3,3,3/4)^T$，所以 $\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=3/4$　　4 分

所以，$\|x^{(10)}-x^*\|_\infty\le\frac{\|B\|_\infty^{10}}{1-\|B\|_\infty}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=\frac{3^{11}}{4^{10}}\approx0.1689$　　8 分

5. (9 分) 说明方程 $x^3-x-3=0$ 在区间[1，2]内有唯一根，并建立一个收敛的迭代格式，使对任意初值 $x_0\in[1,2]$ 都收敛，说明收敛理由。

解　由 $f(1)=-3<0, f(2)=3>0, f'(x)=3x^2-1>0$，知有唯一根。　　3 分

又由于 $1<\sqrt[3]{4}\le\varphi(x)=\sqrt[3]{x+3}\le\sqrt[3]{5}<2$，$|\varphi'|=\frac{1}{3(x+3)^{2/3}}<1/3<1$　　7 分

所以，$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+3}$，$k=0,1,2,\ldots$ 对任意初值 $x_0\in[1,2]$ 都收敛。　　9 分

6. (6 分) 设 $x_{k+1}=x_k^3+ax_k^2+bx_k+c$，$k=0,1,2,\ldots$ 是求方程根 $\alpha=1$ 的迭代法，试确定参数 a,b,c 使迭代法的收敛阶尽可能高，并指出阶是多少？

解　由 $\alpha=1$ 得 $1=1+a+b+c$　　2 分

令 $\varphi'(1)=3+2a+b=0$，$\varphi''(1)=6+2a=0$ 得 $a=-3,b=3,c=0$。　　5 分

此时，迭代法 3 阶收敛。　　6 分

7.（6 分）设 $f(x)=4x^3+2x^2-3$，求差商 $f[0,1], f[1,2,3,4], f[1,2,3,4,5]$。

解 f[0,1]=(3-(-3))/1=6 2 分

f[1,2,3,4]=4 4 分

f[1,2,3,4,5]=0 6 分

8.（7 分）求满足条件 $f(0)=-1, f(1)=2, f(2)=0, f'(1)=0$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 的表达式。

解 令 $H_3(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ 2 分

则有：$2c=1, a+b+c=-2, -a+c=0$ 4 分

解得：$a=c=1/2, b=-3$ 6 分

所以，$H_3(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x^2-6x+1)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{13}{2}x-1$ 7 分

9.（7 分）给定离散数据

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	-1	1	3

试求形如 $y=a+bx^2$ 的拟合曲线。

解 由于基函数为：$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x^2$ 1 分

于是：$\varphi_0=(1,1,1,1), \varphi_1=(1,0,1,4), f=(2,-1,1,3)$ 3 分

正则方程组为：$\begin{cases}4a+6b=5\\6a+18b=15\end{cases}$ 4 分

解得：$a=0, b=5/6$，

拟合曲线为：$y=\frac{5}{6}x^2$ 7 分

10.（5 分）设求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$，$(n\ge 2)$ 是插值型求积公式，求 $\sum_{k=0}^{n}A_k x_k^2$.

解 由于插值型求积公式代数精度至少是 n， 2 分

所以，$\sum_{k=0}^{n}A_k x_k^2=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$ 5 分

11.（6 分）对积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 建立两点 Gauss 公式。

解 由于 $P_0(x)=1, P_1(x)=x-\frac{(P_0,x)}{(P_0,P_0)}P_0=x-\frac{1}{2}$，

$P_2(x)=x^2-\frac{(P_0,x^2)}{(P_0,P_0)}P_0-\frac{(P_1,x^2)}{(P_1,P_1)}P_1=x^2-x+\frac{1}{6}$ 2 分

Gauss 点为：$x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$，$x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$ 4 分

积分公式为：$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}[f(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6})+f(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6})]$ 6 分

12. (9 分) 利用复化 Simpson 公式 S_2 计算定积分 $I=\int_0^1\cos x dx$ 的近似值，并估计误差。

解 $I\approx S_2=\frac{1}{12}[\cos 0+\cos 1+2\cos\frac{1}{2}+4\cos\frac{1}{4}+4\cos\frac{3}{4}]$ 3 分

$=0.841489382$ 5 分

$M_4=\max|f^{(4)}(x)|=\max|\cos x|=1$ 6 分

$|I-S_2|=|R(f)|\le\frac{1}{2880\times 2^4}=0.000021701$ 9 分

13．(5分)求解初值问题$\begin{cases} y' = ye^x & 1 \le x \le 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$的改进Euler方法是否收敛？为什么？

解　由于$f(x,y) = ye^x$关于y满足Lipschitz条件，　2分

所以，改进Euler法收敛。　5分

14.（9分）已知求解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}(3k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + 2h, y_n + 2hk_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

求此差分公式的阶。

解　由于

$$k_2 = f_n + 2h(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + 2h^2(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2) + O(h^3)$$　2分

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + \frac{h^3}{2}(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2) + O(h^4)$$　4分

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + O(h^4)$$　5分

$$= y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n)$$

$$+ \frac{h^3}{6}[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2 + \frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y} + (\frac{\partial f_n}{\partial y})^2 f_n] + O(h^4)$$　7分

于是，$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$，此差分公式是2阶的。　9分

15.（5分）证明矩阵谱半径$\rho(A)$不是矩阵范数。

证明　因为$\rho(A) = 0$时，不一定有$A = 0$，例如$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，　2分

所以，$\rho(A)$不满足范数的非负性，不是范数。　5分

密　封　线