东北大学研究生院《应用数理统计》试卷（2005 秋）

班级______ 姓名______ 学号______

注：$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　$\hat{S}^2=\frac{n}{n-1}S^2$　　$X_1+X_2\sim(0,2)$

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 为来自于总体容量为 5 的样本，则常数 C 为______时，统计量 $\dfrac{C(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布，且自由度为______ 3

2、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为正态母体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，若 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，则 C=______ $\frac{1}{2(n-1)}$

3、设有 r 个母体 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$ $(i=1,2,\cdots,r)$，分别取得样本 $X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in_i}$ $(i=1,2,\cdots,r)$，则
$E\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2\right]=$ $(n-r)\sigma^2$，其中 $\bar{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$，记 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$。

4、从一批某种型号电子管中抽出容量为 10 的样本，计算得样本标准差 S=45（小时）。设该批电子管寿命服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 σ 的置信概率为 95% 的置信上限为______。

5、对某正态母体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的均值 μ 进行假设检验，H_0：μ=900；H_1：μ>900。已知 σ=300，取样本容量为 25，H_0 的接受域为 $\bar{X}\in(-\infty,995)$。若 μ=900 不正确，μ=1070 正确，则犯第二类错误的概率为______。

$P\{\bar{X}<995\mid\mu>900\}$　　$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

二、（10 分）设总体 X 的分布密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)} & x\ge\theta\\ 0 & x<\theta\end{cases}$ 抽取容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$。1、求 θ 的矩估计量；2、求 θ 的最大似然估计。

$EX=\int_\theta^{+\infty}xe^{-(x-\theta)}dx=\theta+1=\bar{X}$　　$\hat{\theta}=\bar{X}-1$　　$\hat{\theta}=\min_{1\le i\le n}\{X_i\}$

三、（10 分）设有一大批产品，从中任取 100 件，经检验有正品 92 件，据此，能不能说这批产品的正品率高于 90%（α=0.05）。

四、（10 分）一实验室里有一批伏特计，它们经常被轮流用来测量电压。现在取 4 只，每只伏特计用来测量电压为 100 伏的恒定电动势各 5 次，得下列结果：

伏特计	测定值						
A	100.9,	101.1,	100.8,	100.9,	100.4	504.1	100.82
B	100.2,	100.9,	101.0,	100.6,	100.3	503	100.6
C	100.8,	100.7,	100.7	100.4,	100.0	502.6	100.52
D	100.4,	100.1,	100.3,	100.2,	100.0	501	100.2
	402.3	402.8	402.8	402.1	400.7		

问这几只伏特计之间有无显著差异（α=0.05）？

方差分析　$\bar{X}=100.535$

五、（10 分）在公路上某处 50 分钟之内，记录每 15 秒路过汽车的辆数，得到数据如下：

辆数	0	1	2	3	4	≥5
频数	92	68	28	11	1	0

试问这个分布能否作为泊松分布（α=0.05）？

$\chi^2=2.16$

$\chi^2_{0.95}(3)=7.815$

$n=200;\ m=6=k,\ l=1;$

$\hat{\lambda}=\bar{\xi}=\frac{\xi_1+\cdots+\xi_{200}}{200}=\frac{68+56+33+4}{200}=\frac{161}{200}\approx0.8$

$p_1=e^{-\lambda}=e^{-0.8}$，$p_2=\lambda e^{-\lambda}=0.8e^{-0.8}$；$p_3=\frac{\lambda}{2}p_2=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}$，$p_4=\frac{\lambda}{3}p_3$，$p_5=\frac{\lambda}{4}p_4$；$p_6=\frac{\lambda}{5}p_5$

$\chi^2_\alpha(m-k-1)=\chi^2_{0.05}(6-1-1)=\chi^2_{0.05}(4)=9.448$

六、(12分) 下表列出在不同质量下6根弹簧的长度：

质量 x (克)	5	10	15	20	25	30
长度 y (厘米)	7.25	8.12	8.95	9.90	10.9	11.8

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 / n L_{xx} & -\frac{\bar{x}}{L_{xx}} \\ -\frac{\bar{x}}{L_{xx}} & \frac{1}{L_{xx}} \end{bmatrix}$$

设 $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$，$\varepsilon_i$ 相互独立且均服从分布 $N(0, \sigma^2)$。

1、写出经验回归直线方程；

2、计算剩余方差 $\hat{\sigma}_e^2$

3、在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 H_0：$\beta=0$　　否定 H_0，回归方程成立。

七、(8分) 设总体X与Y相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的样本：$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$。检验假设 H_0：$\mu_1 \leq 2\mu_2$；H_1：$\mu_1 > 2\mu_2$，试构造假设检验的拒绝域。

已知一些分布的下分位数点：

$\Phi(1)=0.8413$　　$\Phi(1.2)=0.8849$　　$\Phi(1.25)=0.8944$

$\Phi(1.3)=0.9032$　　$\Phi(1.64)=0.95$　　$\Phi(1.96)=0.9750$

$\chi^2_{0.025}(9)=2.7$　　$\chi^2_{0.025}(10)=3.247$　　$\chi^2_{0.05}(9)=3.325$

$\chi^2_{0.05}(10)=3.94$　　$\chi^2_{0.95}(4)=9.448$　　$\chi^2_{0.95}(5)=11.071$

$\chi^2_{0.975}(4)=11.143$　　$\chi^2_{0.975}(5)=12.833$

$F_{0.95}(3,16)=3.24$　　$F_{0.975}(3,16)=4.08$　　$F_{0.95}(2,15)=3.68$

$F_{0.975}(2,15)=4.77$　　$F_{0.95}(1,4)=7.71$　　$F_{0.975}(1,4)=12.22$

$F_{0.95}(2,3)=9.55$　　$F_{0.975}(2,3)=16.04$

427.290

六：解：1.由已知：$\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 17.5$　$L_{xx} = \sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2 = 437.5$　$\bar{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = 9.487$

$L_{yy} = \sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2 = 14.678$　$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 1076.5$　$L_{xy} = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 80.065$

$$\hat{\beta}' = \begin{bmatrix} \bar{y} - \bar{x} L_{xy}/L_{xx} \\ L_{xy}/L_{xx} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{a} &= \bar{y} - \bar{x} L_{xy}/L_{xx} = 6.2846 \\ \hat{\beta} &= L_{xy}/L_{xx} = 0.183. \end{aligned}$$

故 $\hat{y} = 6.2846 + 0.183x$

2. $U_R = \hat{\beta}^2 \cdot L_{xx} = \hat{\beta} \cdot L_{xy} = 14.652$　　$Q_e = L_{yy} - U_R = 0.026$

故：$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{Q_e}{n-k-1} = \frac{0.026}{4} = 0.0065$

3、由题意：$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2 c_{11})$　即：$\hat{\beta} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right)$。则知 H_0 的拒绝域 $W = \left\{ \frac{\hat{\beta}^2/c_{11}}{Q_e/(n-k-1)} > F_{1-\alpha}(1, n-k-1) \right\}$

其中：$\frac{\hat{\beta}^2/c_{11}}{Q_e/(n-k-1)} = \frac{0.183^2/2275}{0.0065} = 0.002265 < F_{0.95}(1,4) = 7.71$，故接受检验假设 H_0：$\beta=0$

七：解：~~由 σ^2 已知……~~ 令 $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n_1} x_i$，$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n_2} y_i$。则：$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$

$2\bar{Y} \sim N\left(2\mu_2, \frac{4\sigma^2}{n_2}\right)$　又 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 相互独立 $\Rightarrow \bar{X} - 2\bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - 2\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{4\sigma^2}{n_2}\right)$

检验假设 H_0：$\mu_1 \leq 2\mu_2$；H_1：$\mu_1 > 2\mu_2$。则统计量为：$Z = \frac{\bar{X} - 2\bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{4}{n_2}}}$

即：H_0：$\mu_1 - 2\mu_2 \leq 0$；H_1：$\mu_1 - 2\mu_2 > 0$

则 H_0 的拒绝域为：$W = \left\{ \frac{\bar{X} - 2\bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{4}{n_2}}} \geq Z_\alpha \right\}$