

代数系统部分作业

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____ 班级序号: _____

一. 填空

1. 令 $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $+_8$ 表示模 8 加法, 则在群 $\langle Z_8, +_8 \rangle$ 中, 2 的阶数是_____, 3 的阶数是_____, 6 的阶数是_____。
2. 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上二元运算如下:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

那么代数系统 $\langle A, * \rangle$ 的幺元是_____, b 的逆元为_____, c 的逆元为_____。

3. 以下两个置换是 S_5 中的置换, 其中

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

则 $\alpha =$ _____, $\alpha \circ \beta =$ _____ (均用不交的轮换之积表示)。

4. 下列说法错误的是_____。(多选)

- A. 在群中消去律成立; B. 循环群的生成元的阶数和群的阶数相同;
C. 素数阶群存在非平凡子群; D. 阶数大于 1 的群中可能存在零元。

5. 设 S 是非负整数集, \times 是关于数的普通乘法运算, 则_____。

- A. $\langle S, \times \rangle$ 是群; B. $\langle S, \times \rangle$ 是有幺元的半群;
C. $\langle S, \times \rangle$ 是无幺元的半群; D. $\langle S, \times \rangle$ 不是群, 也不是半群。

6. 在 3 元对称群中, 元素 $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的阶数是_____。

二. 证明与解答

1. 证明: $\langle R - \{0\}, \times \rangle$ 构成群, 并且为阿贝尔群。

2. 已知 R 为实数集, $S = R - \{-1\}$, 在集合 S 上定义二元运算 $*$, 如下:

$$a * b = a + b + ab$$

证明 $\langle S, * \rangle$ 是群。

3. 求循环群 $\langle Z_{16}, +_{16} \rangle$ 的各阶子群, 这里 $Z_{16} = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$, $+_{16}$ 为模 16 的加法。

4. 写出群 $\langle Z_9, +_9 \rangle$ 中各元素关于子群 $\langle \{0, 3, 6\}, +_9 \rangle$ 的陪集, 其中 $+_9$ 为模 9 的加法。