第一部分 集合论

第1章 集合

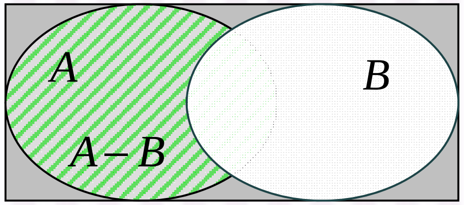
- 集合的概念及其表示法
- 集合的基本运算及其性质
- 包含排斥原理

对任意集合 A 有 $\Phi \subseteq A \subseteq E$

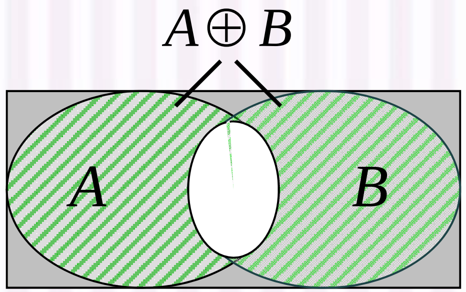
幂集的定义

由集合 A 的所有的子集组成的集合（包括空集和 A 本身），称为集合 A 的**幂集**，记为 $P(A)$（或 $\rho(A), 2^A$）。

1.2 集合的基本运算及其性质



$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$



对称差

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \text{ 且 } x \notin B) \text{ 或} (x \in B \text{ 且 } x \notin A)\}$$

对称差的性质

1. $A \oplus B = B \oplus A$　2. $A \oplus \varnothing = A$　3. $A \oplus A = \varnothing$

定理1 设A_1，A_2为有限集合，其元素个数分别为$|A_1|$，$|A_2|$，则有下列结论：

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$\boxed{\text{包含排斥原理}}$

定理2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为有限集合，其元素个数分别为 $|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_n|$，则有下列结论：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

$\boxed{\text{定理2是定理1的推广}}$

第一部分 集合论

第2章 二元关系

- 序偶与笛卡儿乘积
- 关系及其表示
- 关系的性质
- 复合关系和逆关系
- 关系的闭包运算
- 等价关系与等价类
- 序关系

2.1.2 笛卡儿乘积（直积）

定义4 设 A 和 B 是任意两个集合，若序偶的第一元素取自 A，第二元素取自 B，所有这些序偶的集合，称为集合 A 与 B 的**笛卡尔乘积（直积）**，记为 $A \times B = \{ <a,b> | a \in A, b \in B \}$

若 A 中有 n 个元素，B 中有 m 个元素

$A \times B$ 中含有 nm 个元素

n 阶笛卡儿乘积

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

$$= \{< x_1, x_2, \cdots, x_n > \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots x_n \in A_n\}$$

$$\boxed{A \times A \times \cdots \times A = A^n}$$

2.2.1 关系

定义5 若一个集合的元素都是序偶，称该集合是一个二元关系，简称关系，记为 R。在 R 中的任一序偶 $<x,y>$，可记为

$$<x,y> \in R \quad 或 \quad xRy$$

定义6 设有任意两个集合 X 和 Y，$X \times Y$ 的子集 R 称为 X 到 Y 的（二元）关系，当 $X = Y$ 时，称 R 为 X 上的二元关系。

集合 A 上的三种特殊关系

1、空关系： 由于空集 Φ 是 $A\times A$ 的子集，故也是 A 上的关系，称其为空关系。

2、全域关系：

$$E_A = \{<x,y> \mid x\in A, y\in A\} = A\times A$$

3、恒等关系：

$$I_A = \{<x,x> \mid x\in A\}$$

定义7 设 R 是二元关系，由 $<x,y>\in R$ 中所有 x 组成的集合，称为 R 的**定义域**，记为 $domR$

$$domR=\{x \mid 存在\ y, <x,y>\in R\}$$

定义8 设 R 是二元关系，由 $<x,y>\in R$ 中所有 y 组成的集合，称为 R 的**值域**，记为 $ranR$

$$ranR=\{y \mid 存在\ x, <x,y>\in R\}$$

定义9 关系 R 的定义域和值域一起称为 R 的**域**，记为 $fldR=domR\cup ranR$

关系矩阵

设两个有限集合

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$$

R 为 X 到 Y 的一个二元关系，对应于关系 R 有一个关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times n}$

其中 $r_{ij}=\begin{cases}1 & 当<x_i,y_j>\in R\\ 0 & 当<x_i,y_j>\notin R\end{cases}$

$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

关系图　设两个有限集合

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$$

R 为 X 到 Y 的一个二元关系

在平面上作 m 个结点和 n 个结点，若 x_iRy_j，则可自结点 x_i 至 y_j 作一有向弧段；若 $x_i \not R y_j$，则结点 x_i 和 y_j 没有连线，这种方法作出的图称为 R 的**关系图**。当 R 为 X 上的二元关系时，关系图中的结点仅表示 X 中的元素。

关系的性质

- 自反性与反自反性
- 对称性与反对称性
- 传递性

R 是 X 上的自反关系 $\Leftrightarrow \forall x(x \in X \to <x,x> \in R)$

R 为 X 上的反自反关系 $\Leftrightarrow \forall x(x \in X \to <x,x> \notin R)$

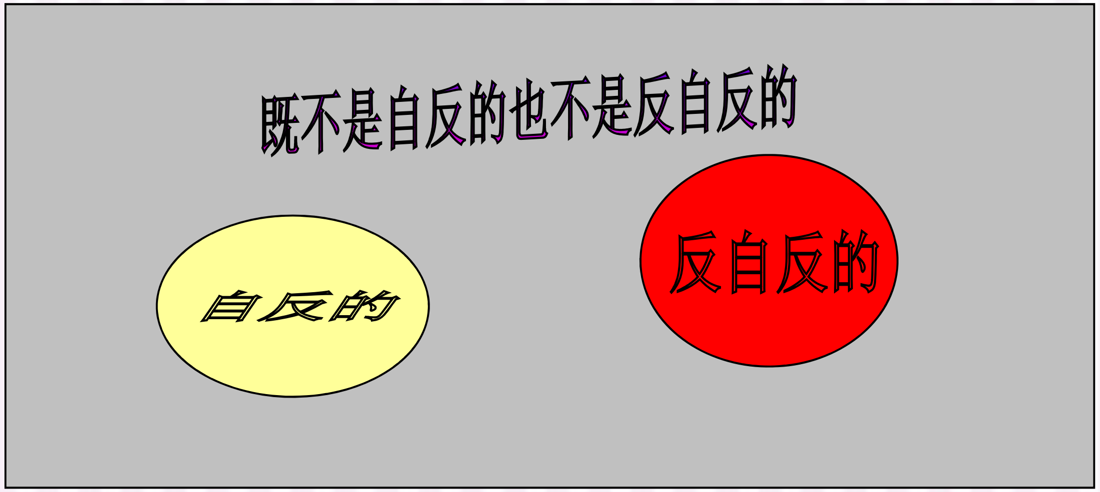
R 是 X 上的对称关系 $\Leftrightarrow \forall x \forall y$(若 $xRy \to yRx$)

R 是 X 上的反对称关系 $\Leftrightarrow \forall x \forall y$(若 xRy 且 $yRx \to x = y$)

R 是 X 上的传递关系 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z$(若 xRy 且 $yRz \to xRz$)

一个关系的自反性与反自反性可能都不存在

所有关系



定义在非空集合上的空关系是反自反的，对称的，反对称的，传递的

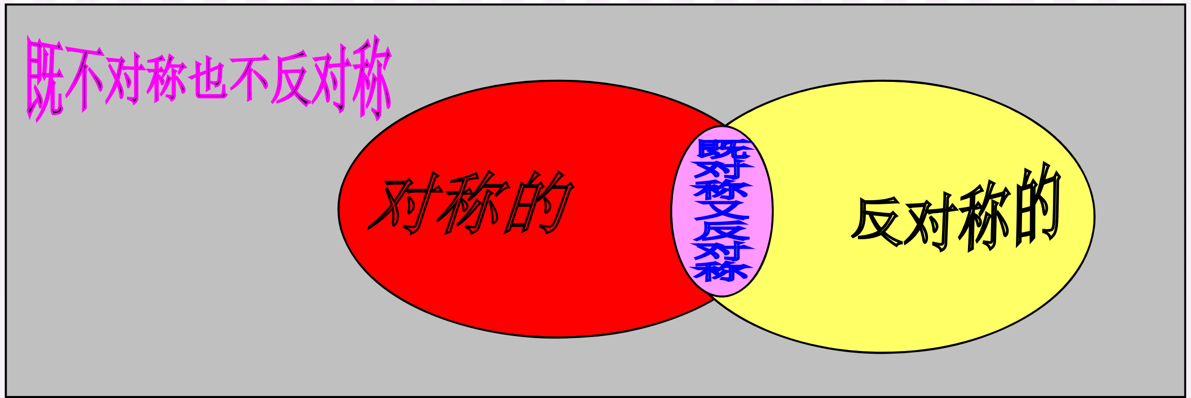
例　设 $X=\{1,2,3\}$，X 上的关系

$$R=\{<1,1>,<2,2>\}$$

既是对称的又是反对称的。

一个关系可以既有对称性又有反对称性，
一个关系也可以既不对称也不反对称。

所有关系



2.4 复合关系和逆关系

定义14 设 R 为 X 到 Y 的关系，S 为 Y 到 Z 的关系，称 $R\circ S$ 为 R 和 S 的**复合关系**（$\circ$ 也称为 R 与 S 的**合成运算**），它是一个 X 到 Z 的关系表示为

$$R\circ S=\{<x,z>\mid x\in X, z\in Z, \exists y\in Y, \text{使得} <x,y>\in R, <y,z>\in S)\}$$

复合关系可用矩阵运算表示

设 $M_R = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ $M_S = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

利用布尔运算

$$M_{R\circ S} = M_R \bullet M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5 关系的闭包运算

定义16 设 R 是 X 上的二元关系，若存在关系 R' 满足：

（1）R' 是自反的；

（2）$R' \supseteq R$ ；

（3）对于任何自反的关系 R''，

如果有 $R'' \supseteq R$，一定有 $R'' \supseteq R'$，称关系 R' 为 R 的自反闭包，记为 $r(R)$

定义16 设 R 是 X 上的二元关系，若存在关系 R' 满足：

（1）R' 是对称的；

（2）$R' \supseteq R$ ；

（3）对于任何对称的关系 R''，

如果有 $R'' \supseteq R$，一定有 $R'' \supseteq R'$，称关系 R' 为 R **的对称闭包**，记为 $s(R)$

定义16 设 R 是 X 上的二元关系，若存在关系 R' 满足：

（1）R' 是传递的；

（2）$R' \supseteq R$ ；

（3）对于任何传递的关系 R''，

如果有 $R'' \supseteq R$，一定有 $R'' \supseteq R'$，称关系 R' 为 R **的传递闭包**，记为 $t(R)$

定理9 设 R 是集合 X 上的二元关系，则

$$r(R) = R \cup I_X$$

自反闭包的构造方法

定理10 设 R 是集合 X 上的二元关系，则

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

对称闭包的构造方法

定理12　设集合 X 含有 n 个元素，R 是 X 上的二元关系，则存在一个正整数 $k \le n$，使得

$$t(R) = R^{+} = \bigcup_{i=1}^{k} R^{i} = R \cup R^{2} \cup \cdots \cup R^{k}$$

定理说明：最多只要求到 $k = n$ 即可。

用矩阵形式运算

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6 等价关系与等价类

2.6.1 等价关系

定义17 设 R 是 X 上的二元关系，若 R 是自反的、对称的和传递的，则 R 称为 X 上的等价关系。

同余关系是等价关系

2.6.2 等价类

定义18 设 R 是 X 上的等价关系，对任何 $a \in X$，集合

$$[a]_R = \{x \mid x \in X, aRx\}$$

称为元素 a 关于 R 的等价类，也称由元素 a 生成的 R 等价类。

定义19 设 X 是非空集合，若存在一个 X 的子集族 $S=\{S_1,S_2,\cdots S_m\}$，满足以下条件：

(1) $S_i \subseteq X$, $S_i \neq \Phi$ $(i=1,2,\cdots m)$

(2) $S_i \cap S_j = \Phi$ $(i \neq j)$

(3) $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = X$

称 S 为 X 的一个划分，S_i $(i=1,2,\cdots m)$ 称为划分块。

定理13 集合 A 上一个等价关系 R，决定了 A 的一个划分，该划分就是商集 A/R（由等价关系诱导的划分）。

一个等价关系决定集合的一个划分

定理14 集合 A 的一个划分确定 A 的元素间一个等价关系（由划分诱导的等价关系）。

一个划分决定集合上的一个等价关系

由 A 上的划分确定其诱导的等价关系 R 的方法

设 $S=\{S_1,S_2,\cdots S_m\}$ 是集合 A 的一个划分

作 $R_1=S_1\times S_1$, $R_2=S_2\times S_2$, $\cdots$, $R_m=S_m\times S_m$

则 $R=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_m$ 即为所求的等价关系。

同一划分块中的元素有关系 R

例28　设 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 有一个划分

$$S=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$$

试求由 S 诱导的 A 的一个等价关系。

解　$R_1=\{a,b\}\times\{a,b\}$

$$=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$$

$$R_2=\{c\}\times\{c\}=\{<c,c>\}$$

$$R_3=\{d,e\}\times\{d,e\}=\{<d,d>,<d,e>,<e,d>,<e,e>\}$$

$$R=R_1\cup R_2\cup R_3=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,$$

即为所求　$<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,d>,<e,e>\}$

由前面的讨论知

集合 A 上的等价关系 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 集合 A 的划分

想要知道一个集合上有多少个等价关系

只要求出此集合有多少个不同的划分即可。

2.7.1 偏序关系

定义21 设 R 是集合 X 上的二元关系，若 R 是自反的、反对称的和传递的，称 R 是 X 上的一个偏序关系，记为“$\preceq$”，序偶 $<X,\preceq>$ 称为偏序集。

哈斯图

特殊元素：极大元、极小元、最大元、最小元，上界，上确界，下届，下确界

第二部分 代数系统

第3章 代数系统的一般概念和性质
- 运算的性质、特殊元素
- 代数系统

运算*的性质和特殊元素在运算表中的体现

1.封闭性：表中各元素与表头中元素相同。

2.交换律：表中各元素关于对角线对称。

3.等幂律：表中对角线各元素与之相应的表头元素相同。

4.零元：该元素所对应的行和列中的元素与该元素相同。

5.幺元：该元素所在的行和列中的元素依次与表头元素相同。

6.可逆元:前提是存在幺元，若a与b互逆，当且仅当a所在的行，b所在列的元素以及b所在的行，a所在列的元素均为幺元

3.1.3 代数系统

定义12 一个非空集合 A，连同若干个定义在该集合上的运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$，构成的系统称为一个**代数系统**，记为 $<A, f_1, f_2, \cdots, f_k>$。

一个代数系统需要满足三个条件：

①有一个非空集合 S；

②定义一些运算；

③这些运算在集合 S 上是封闭的。

第二部分 代数系统

第4章 几个典型的代数系统

- 半群
- 群与子群
- 循环群与置换群
- 陪集与拉格朗日定理

半群的概念：

设 $<S,*>$ 为代数系统，若运算 $*$ 满足结合律，称代数系统 $<S,*>$ 为半群。

半群的性质：

定理　设 $<S,*>$ 是一个半群，若 S 是一个有限集，则必存在 $a \in S$，使得 $a*a=a$。

定义2 若半群$<S,*>$中的二元运算满足交换律，称其为**可换半群**。

定义3 若半群$<S,*>$中含有幺元，称其为**独异点**（也称**含幺半群**）。

4.1.2 子半群

定义2 设$<S,*>$是一个半群，若对非空集$B \subseteq S$，$*$在B上是封闭的，那么$<B,*>$也是一个半群，称$<B,*>$是$<S,*>$的**子半群**。

群的定义：

定义4 设 $<S,*>$ 是一个代数系统，$*$ 是 S 上的一个二元运算，若满足

（1） 运算 $*$ 是可结合的；-------半群

（2） 存在幺元 e；-------独异点

（3） 对于每一个元素 $x \in S$， 存在它的逆元 $x^{-1} \in S$， 称 $<S,*>$ 是一个群。

群的阶数

定义5 设$<G,*>$是一个群，若G是一个有限集，称$<G,*>$是**有限群**，G中元素的个数称为该有限群的**阶数**，记为$|G|$；若G是无限集，称$<G,*>$是**无限群**。

元素的阶数

定义6 设$<G,\circ>$是群，$x \in G$，使得$x^k = e$成立的最小正整数k称为x的**阶数**（或**周期**）记为$|x|$。

若不存在正整数k，使得$x^k = e$成立，称x是**无限阶**的。

定义7 若群 $<G,*>$ 中的运算 $*$ 是可交换的称该群为**交换群**，也称为**阿贝尔群**。

不是所有的群都是交换群

概括地说，代数系统仅仅是一个具有封闭二元运算的非空集合；半群是一个满足结合律的代数系统；独异点是带有幺元的半群；群是每个元素都有逆元的独异点。

$$\{群\} \subset \{独异点\} \subset \{半群\} \subset \{代数系统\}$$

定理1　阶数大于1的群中没有零元。

定义10 代数系统$<G,*>$中，如果存在$a\in G$,有$a*a=a$，称a为**等幂元**。

定理7 群$<G,*>$中，除幺元e外，没有其它等幂元。

两类特殊的群

循环群：

(1)定义：

定义11 设 $<G,*>$ 是一个群，若存在元素 $a \in G$，使得

$$G=\{a^k \mid k \in Z\}$$

$a^1=a$，$a^2=a*a$，…，$a^{j+1}=a^j*a$

称 $<G,*>$ 为**循环群**，记作 $G=<a>$，称 a 为此群的**生成元**。

(2)性质：

a) 任何一个循环群必是阿贝尔群

b) 循环群中生成元的阶数与群的阶数相同

(3)分类：无限阶循环群和有限阶循环群

(4) 生成元：

对无限阶循环群 $G=<a>$，其生成元是 a 和 a^{-1}。

$<Z_6,\oplus>$是6阶循环群，1和5都与6互质，故1和5是生成元。

对 n 阶循环群 $G=<a>=\{e,a,a^2,\cdots a^{n-1}\}$，其生成元是 a^t，当且仅当 t 与 n 互质。

(5)循环子群

a)无限阶循环群的子群除 <e>外，均为无限循环群。

b)有限阶循环群的子群：

定理12 n 阶循环群 $G=<a>$ 的子群的阶数均为 n 的因子。对于 n 的每个正因子 d，有且只有一个 d 阶循环子群，生成元为 $a^{\frac{n}{d}}$。

置换群：

(1)置换的概念：每一次置换产生一个全排列，每一个全排列对应着一个置换；

(2)置换表示： 置换表和不交的轮换之积表示

说明　按两个函数进行复合运算

$$(12)\circ(13)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(132)$$

先作

$$(23)\circ(123)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(13)$$

4.4 陪集与拉格朗日定理

4.4.1 陪集

定义14 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，且 $H=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$，$\forall g\in G$，集合 $\{g*h_1,g*h_2,\cdots,g*h_n\}$ $(\{h_1*g,h_2*g,\cdots,h_n*g\})$ 称为g关于子群$<H,*>$的左（右）陪集，记作 $g*H$ $(H*g)$，若左、右陪集相等，称其为关于子群$<H,*>$的陪集。

三个引理

引理1 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，$\forall h_i \in H$，则 $h_i * H = H * h_i = H$

引理2 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，对 $a \in G, h \in H$，有 $(a*h)*H = a*H$

引理3 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，$a, b \in G$，则$a*H$与$b*H$或者相等，或者互不相交。

4.4.2 拉格朗日定理

定理14 设$<G,*>$是一个有限群，$<H,*>$是其子群，若$|G|=m$，$|H|=n$，则$n|m$。

——拉格朗日定理

定理表明

子群存在时，子群的阶数一定是原群阶数的因子

其逆不真

即若n能够整除m，m阶群也不一定有n阶子群。

由拉格朗日定理得到以下结论

推论1 设 $<G,*>$ 是一个 m 阶群，$a \in G$，且 a 是 k 阶元，则 $k \mid m$。

元素的阶数是群阶数的因子。

推论2　设 $<G,*>$ 是一个 m 阶群，$\forall a \in G$，则 $a^m = e$ 。

推论3　素数阶群没有非平凡子群。

推论4　素数阶群必是循环群，且除幺元外其余元素均为生成元。

拉格朗日定理表明，m 阶群若有 n 阶子群时，一定有 $n|m$；可群不一定有其因子阶数的子群，但对循环群有下面定理：

定理15 设 $<G,*>$ 是一个 m 阶循环群，且 $n|m$，则 $<G,*>$ 必有 n 阶循环子群。

4.5 环与域

4.5.1 环

定义15 设 $< A,\star,* >$ 是一个代数系统，若满足

（1） $< A,\star >$ 是阿贝尔群；

（2） $< A,* >$ 是一个半群；

（3） 运算 $*$ 对于运算 $\star$ 是可分配的.

称 $< A,\star,* >$ 是环。

通常称 $\star$ 为加法运算，$*$ 为乘法运算

环可简单叙述为：

（1）对加法是可换群

（2）对乘法是半群

（3）乘法对加法是可分配的

定义19 设$<\boldsymbol{A},+,\bullet>$是一个代数系统，若满足

（1）$<\boldsymbol{A},+>$是阿贝尔群；

（2）$<\boldsymbol{A}-\{\boldsymbol{\theta}\},\bullet>$是阿贝尔群；

（3）运算$\bullet$对于运算$+$是可分配的.

称$<\boldsymbol{A},+,\bullet>$是**域**。

第三部分 图论

第5章 图的一般概念与性质

- 图的基本概念
- 连通性与赋权图的最短路径
- 图的矩阵表示

第6章 几种特殊的图

- 欧拉图与哈密尔顿图
- 二部图
- 平面图
- 树

5.1.3 结点的度数

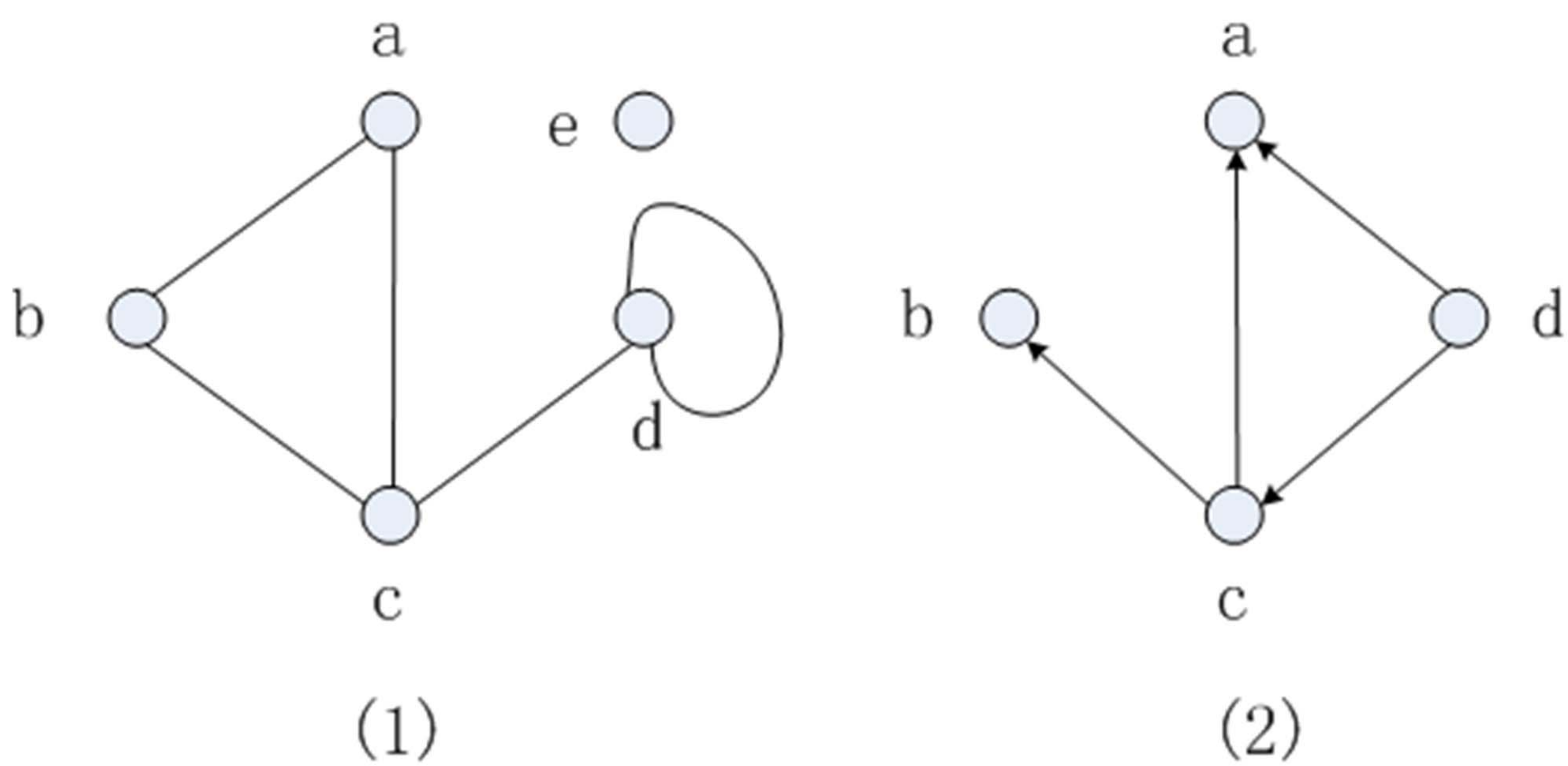
定义6 在图 $G=<V,E>$ 中，与结点 $v(v\in V)$ 关联的边数，称为该点的度数，记为 $\deg(v)$ 。

记 $\Delta(G)=\max\{\deg(v)|v\in V(G)\}$

$\delta(G)=\min\{\deg(v)|v\in V(G)\}$

分别称为图 $G=<V,E>$ 的最大度数和最小度数。

设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称 $\{\deg(v_1),\deg(v_2),\cdots,\deg(v_n)\}$ 为图 G 的度数序列。



规定在计算度数时，环算两度

定理1 任何一个图 $G=<V,E>$, 其结点度数总和，等于边数的两倍，即

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$$ （**Handshaking 握手定理**）

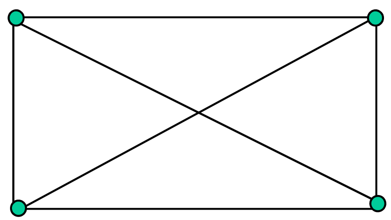
定理2 在任何图中，度数为奇数的结点必是偶数个。

定义7 在有向图中，射入一个结点v_i的边数称为该结点的**入度**，记为 $\deg^-(v_i)$；射出一个结点v_j的边数称为该结点的**出度**，记为 $\deg^+(v_j)$

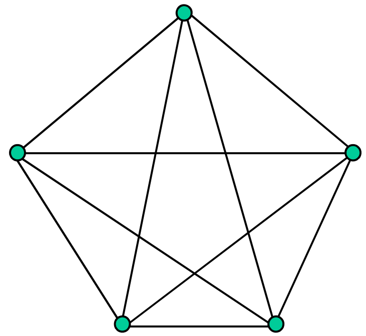
定理3 在任何一个有向图中，所有结点的入度之和等于出度之和，且等于边数。

5.1.4 完全图与子图

定义9 简单图$G=<V,E>$中，若每对结点间都有边关联，称该图为完全图，n阶无向完全图记为K_n。



K_4



K_5

n阶无向完全图K_n的边数等于$C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$

定义11 设图 $G=<V,E>$，存在图 $G'=<V',E'>$ 且 $E'\subseteq E, V'\subseteq V$，称 G' 为 G 的子图。如果 G 的子图包含 G 的所有结点，称该子图为 G 的生成子图。

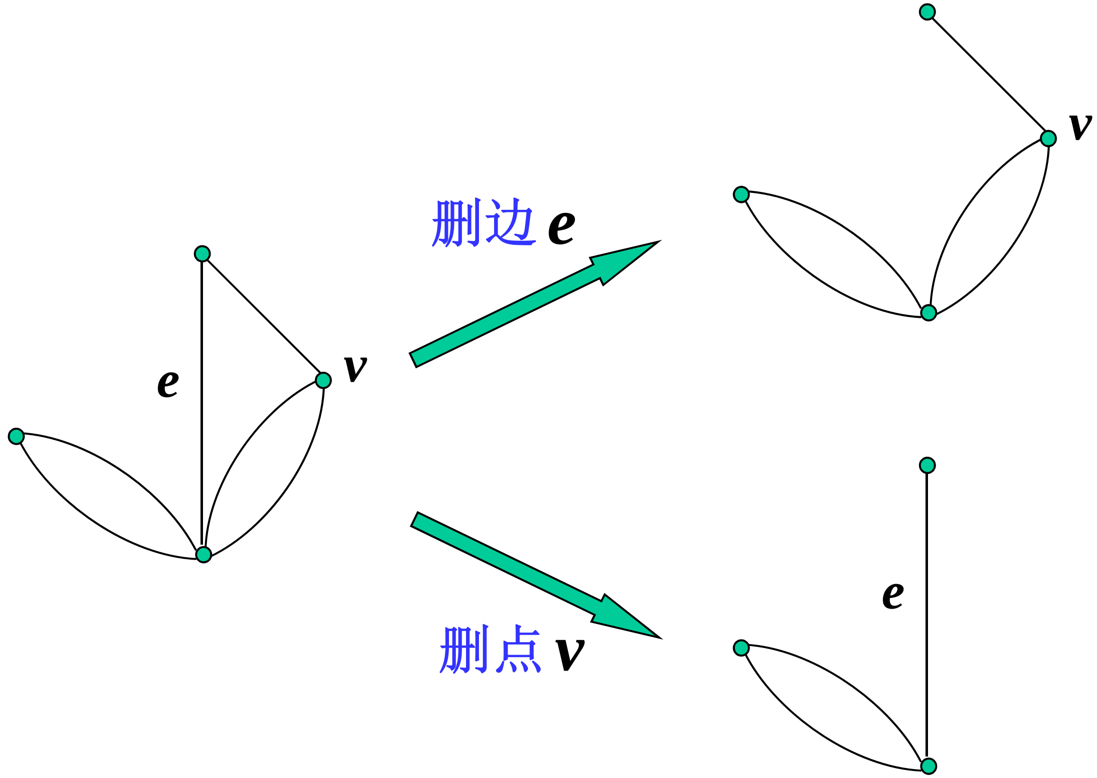
5.2.2 连通性

定义14 在无向图G中，若从结点u到结点v存在通路，称结点u和v是连通的。

连通分支数

连通图

删边、删点



定义16 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图，若有点集 $V_1 \subset V$，使图G删除了V_1中的所有结点后，得到的子图是不连通的，而删除了V_1的任何真子集后，所得的子图仍是连通图，称V_1是G的一个点割集。若某个点割集中只含有一个点，称该点为割点，称

$$k(G)=\min\{|V_1| \mid V_1 \text{是} G \text{的点割集}\}$$

为图G的点连通度（简称连通度）。

连通度 $k(G)$ 是为了产生一个不连通图，需要删除的点的最少数目，因此一个非连通图其连通度 $k(G)=0$；存在割点的连通图，其连通度 $k(G)=1$；而完全图 K_p，其连通度 $k(G)=p-1$

定义17 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图，若有边集 $E_1 \subseteq E$，使图 G 中删除了 E_1 中的所有边后，得到的子图是不连通图，而删除了 E_1 的任何真子集后所得到的图是连通图，称 E_1 是 G 的一个**边割集**，若某个边割集中只含有一条边称该边为**割边**（或**桥**），称

$$\lambda(G)=\min\{|E_1| \mid E_1\text{是}G\text{的边割集}\}$$

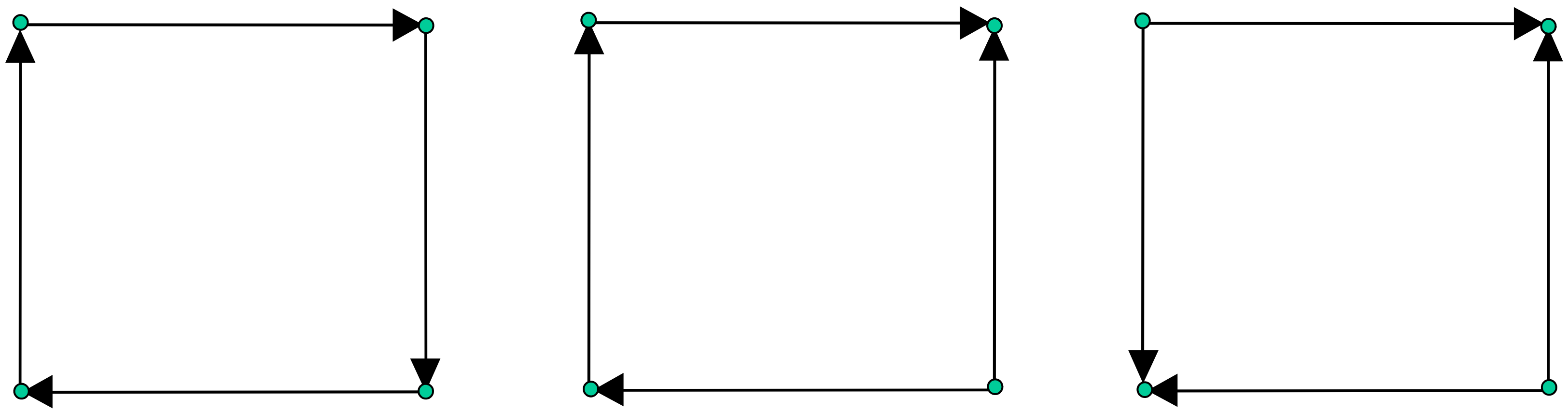
为图 G 的**边连通度**。

边连通度 $\lambda(G)$ 是为了产生一个不连通图需要删除的边的最少数目，故一个非连通图，其边连通度 $\lambda(G)=0$；存在割边的连通图，其边连通度 $\lambda(G)=1$。

下面讨论有向图的连通性

定义18 在简单有向图G中，若任意两个结点间，至少从一个结点到另一个结点存在通路（也称可达），称此图为**单侧连通的**；若任意两个结点均可达，称此图为**强连通的**；若去掉边的方向后，该图是无向连通图，称此图为**弱连通的**。

例　如图所示



强连通　　单侧连通　　弱连通

强连通 → 单侧连通 → 弱连通

求赋权图最短路径的Dijkstra标号算法

基本思想：给 n 阶赋权图 G 的每个结点记一个数（称为标号），标号有两种：临时标号（T 标号）和固定标号（P 标号），T 标号表示从始点到终点的最短通路的权的上界；P 标号表示从始点到该点的最短通路的权。

具体算法如下：

第一步　给始点 v_1 标上 P 标号 $d(v_1)=\infty$，给其它结点标上 T 标号 $d(v_j)=w_{1j}\ (2\le j\le n)$，其中 w_{ij} 是连接 v_i 和 v_j 的边权，若 v_i 与 v_j 没有边相连令 $w_{ij}=\infty$，用计算机计算时，可根据具体问题，取一个足够大的数代替 ∞。

第二步　在所有的 T 标号中取最小者，如 v_k 的 T 标号 $d(v_k)$ 最小，则将 v_k 的 T 标号改为 P 标号

并重新计算具有T标号的其它结点v_j的T标号：

$$\text{新的}d(v_j)=\min\{\text{旧的}d(v_j),d(v_k)+w_{kj}\}$$

第三步 若终点已具有P标号，则此标号即为所求的最短路径的权，算法停在；否则转入第二步。

若要求始点到其它各点的最短路径，第三步修改为所有结点都已具有P标号时算法停止

5.3 图的矩阵表示

5.3.1 图的邻接矩阵与可达性矩阵

定义22 设 $G=<V,E>$ 是一个简单图，且有 n 个结点 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称 n 阶方阵 $A(G)=(a_{ij})$ 为 G 的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\ adj\ v_j\\ 0, & v_i\ nadj\ v_j\ or\ i=j\end{cases}$$

（adj表示邻接， nadj表示不邻接）

（3）设邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})_n$，则

$$(a_{ij}^{(2)})_n=(A(G))^2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$a_{ij}^{(2)}$ $(i \neq j)$表示从结点v_i到v_j的长度为2的通路数目；$a_{ii}^{(2)}$表示结点v_i到自身的长度为2的回路数目；以此类推，$a_{ij}^{(l)}$ $(i \neq j)$ 表示从结点v_i到v_j的长度为 l 的通路数目；$a_{ii}^{(l)}$表示结点v_i到自身的长度为l的回路数目，其中 $(a_{ij}^{(l)})_n = (A(G))^l$

$(A(G))^l$ 中所有元素之和是
长度为l的所有通路和回路的总数目

定义23 设$G=<V,E>$是一个简单有向图，有n个结点$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称n阶方阵$P(G)=(p_{ij})$为G的可达性矩阵，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 到 } v_j \text{ 至少有一通路}\\ 0, & v_i \text{ 到 } v_j \text{ 不存在通路}\end{cases}$$

说明 可达性矩阵表明图中两结点间是否存在通路或回路。

（可达性矩阵的定义可以推广到无向图）

利用邻接矩阵求可达性矩阵的方法

设 $G=<V,E>$ 是一个简单有向图，有 n 个结点 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，其邻接矩阵为 A，令

$$B_n = A + A^2 + \cdots + A^n$$

再将 B_n 中不为0的元素均改为1，得到的矩阵即为可达性矩阵 P 。

求可达性矩阵可以利用布尔运算

5.3.2 图的关联矩阵

定义24 设 $G=<V,E>$ 是一个无向图，且 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，称矩阵

$$M(G)=(m_{ij})_{n\times m}$$

为无向图 G 的关联矩阵。其中

$$m_{ij}=\begin{cases}0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ 1, & v_i\text{与}e_j\text{关联一次}\\ 2, & v_i\text{与}e_j\text{关联两次}\end{cases}$$

所谓“关联两次”即 e_j 是以 v_i 为端点的环。

定义25 设 $G=<V,E>$ 是一个简单有向图 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，称矩阵

$$M(G)=(m_{ij})_{n\times m}$$

为有向图 G 的**关联矩阵**。其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{是} e_j \text{的起点} \\ 0, & v_i \text{与} e_j \text{不关联} \\ -1, & v_i \text{是} e_j \text{的终点}\end{cases}$$

欧拉图的定义：

欧拉图的判断方法：

定理1 无向图 G 存在欧拉通路 $\Leftrightarrow$ G 是连通的，且有0个或2个奇数度结点。

推论 无向图 G 存在欧拉回路 $\Leftrightarrow$ G 是连通的，且所有结点的度数均为偶数。

与哥尼斯堡七桥问题类似的还有图的一笔画的判断问题。要判断一个图是否可以一笔画出，有两种情况：

（1）从图中某一个结点出发，经过每条边一次且仅一次，到达另一个结点；（用定理1判断）

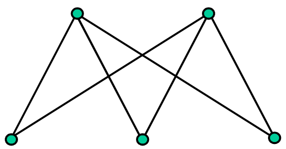
（2）从图中某一个结点出发，经过每条边一次且仅一次，再回到该结点。（用推论判断）

6.2.2 二部图

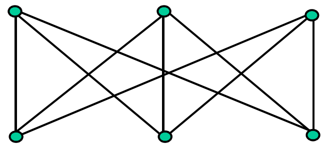
定义5 若能将无向图$G=<V,E>$的结点集V划分为两部分V_1和V_2 $(V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \Phi)$，使得$G$中任一条边的两个端点，一个属于$V_1$，另一个属于$V_2$，称$G$是**二部图**（也称为**偶图**），$V_1$和$V_2$称为**互补结点子集**，将$G$记为

$$G=<V_1,V_2,E>$$

若V_1中任一结点与V_2中所有结点有且仅有一条边相关联，称该二部图G为完全二部图（或完全偶图），若$|V_1| = n$, $|V_2| = m$，将完全二部图记为$K_{n,m}$。



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

判断二部图的方法

定理5 一个无向图$G=<V,E>$是二部图$\Leftrightarrow$ G中所有回路的长度均为偶数。

定理6 设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$，$|V_1|\le|V_2|$，G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配 $\Leftrightarrow$ V_1 中任意 k $(k=1,2,\cdots,|V_1|)$ 个结点至少邻接 V_2 中 k 个结点。

——Hall定理

证（略）。

说明 定理中的条件称为“相异性条件”。

定理7 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$，若满足

（1）V_1中每个结点至少关联$t(t>0)$条边；

（2）V_2中每个结点至多关联t条边.

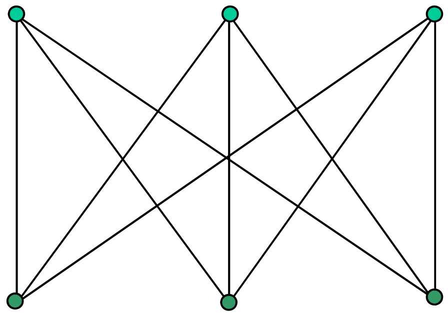
则G中存在从V_1到V_2的完备匹配。

证（略）。

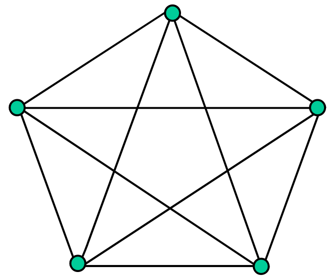
说明 定理中的条件称为“t条件”，满足“t条件”的二部图，一定满足“相异性条件”

有些图，无论如何改画，均不能构成平面图

例10 如图所示



$K_{3,3}$



K_5

$K_{3,3}$和K_5均为非平面图

定义8 设 $G=<V,E>$ 是一个无向连通图，由图中的边所围成的区域，区域内既不包含图的结点，也不包含图中的边，称这样的区域为图 G 的面，其中面积无限的区域称为无限面，面积有限的区域称为有限面，包含该面的诸边构成的回路称为该面的边界，边界的长度称为该面的次数，面 r 的次数记为 $\deg(r)$ 。

6.3.2 平面图的性质及判定

定理8 一个平面图中，面的次数之和，等于其边数的两倍。

定理9 设有一个连通的平面图G，共有v个结点，e条边，则一定有

$$v-e+r=2$$ ——Euler公式

其中r为图的面数。

定理12 给定无向图T,以下关于树的定义是等价的（其中e表示边数,v表示结点数）

（1）无回路的连通图;

（2）无回路且 $e=v-1$;

（3）连通且 $e=v-1$;

（4）无回路,但增加一边后得唯一回路;

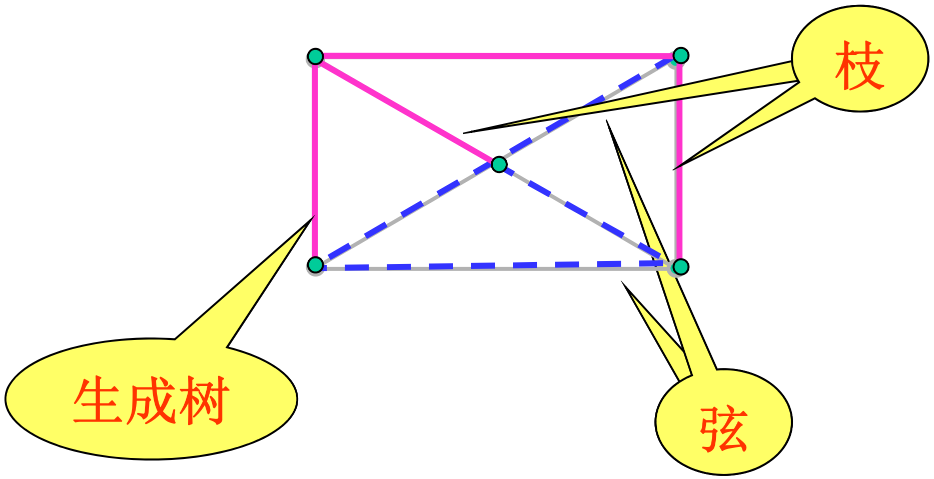
（5）连通,删除任一边后便不连通;

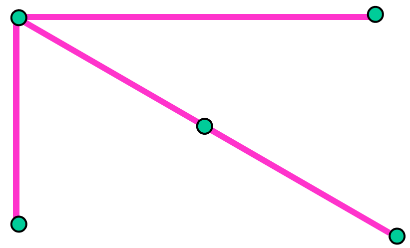
（6）每一对结点之间有且仅有一条通路。

定理13 任一n阶非平凡树，至少有两片树叶。**（非平凡树至少有两个1度点）**

定义11 若图 G 的生成子图 T 是树， 称树 T 为图 G 的生成树， 树 T 的边称为树枝，图 G 的不在生成树 T 中的边称为弦，所有弦的集合称为 T 的补（余树）。

生成树不唯一





也是一棵生成树

定义12　若G是一个有n个结点m条边的连通图，它的生成树中有$n-1$条边，必须删除

$$m-(n-1)=m-n+1$$

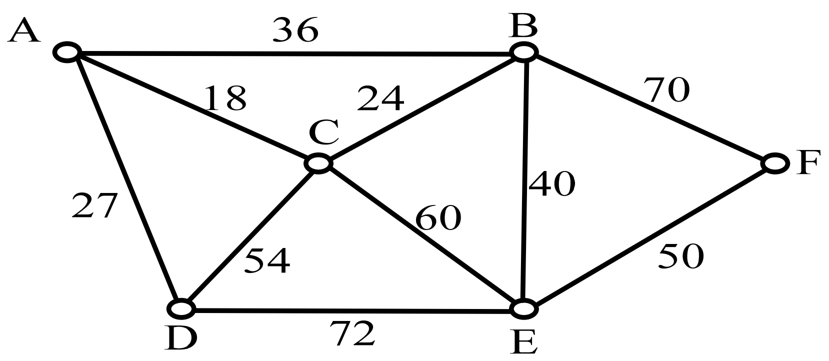
条边，称数$m-n+1$为连通图G的秩。

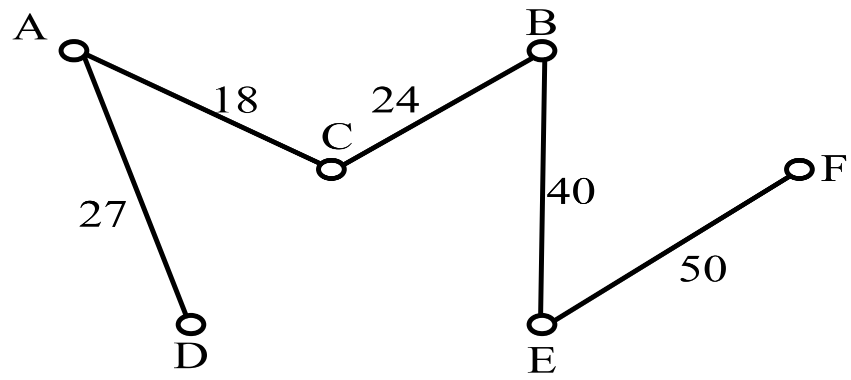
定义13 若给连通图G的每一边e，赋予一个数字$C(e)$，称$C(e)$为边e的**权**；图G的生成树T的所有边权之和，称为生成树T的**树权**，记为$C(T)$；在G的所有生成树中，树权最小的一棵称为**最小生成树**。

寻找最小生成树的方法 (Kruskal避圈法)

在已有的边集上找相邻不成回路的最小边

引例：如图所示的赋权图表示六个城市及它们之间的通信线路造价。试给出一个设计图使得各城市之间能够通信而且总造价最小。





总造价为　　$27 + 18 + 24 + 40 + 50 = 159$

6.4.2 根树及其应用

定义14 如果一个有向图在不考虑边的方向时是一棵树，称该有向图为**有向树**。

定义15 一棵有向树如果恰有一个结点的入度为0，其余所有结点的入度都为1，称它为**根树**；入度为0的结点称为**根**；出度为0的结点称为**叶**；出度不为0的结点称为**分支点**(或**内点**)

定义19 若每个结点的出度最大是 m（最多有 m 个儿子）的根树称为 m 叉（元）树；若每个结点的出度均为 m 或0，称该树为完全 m 叉（元）树；若所有树叶的层数相同，称该树为正则 m 叉（元）树。

定理18　设有完全m叉树，其树叶数为t，分支点数为i，则 $(m-1)i=t-1$

当树是完全二叉树时，$i=t-1$，即分支点比树叶少1个。

2、最优树

定义20 一棵二叉树 T，每一片树叶都带权，称该树为带权二叉树。

定义21 在带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的二叉树中，若带权为 w_i 的树叶，其通路长度为 $L(w_i)$，将

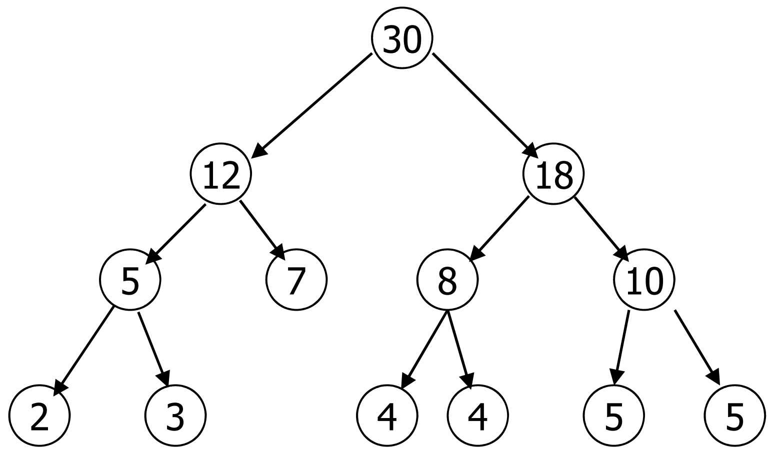
$$W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i L(w_i)$$

称为带权二叉树的权；在所有带权二叉树中，$W(T)$ 最小的那棵树，称为最优树。

例18　构造叶权为 2,3,4,4,5,5,7 的最优树

解　过程如下

$\underline{2}$	$\underline{3}$	4	4	5	5	7
	5	$\underline{4}$	$\underline{4}$	5	5	7
	5		8	$\underline{5}$	$\underline{5}$	7
	$\underline{5}$		8		10	$\underline{7}$
			$\underline{8}$		$\underline{10}$	12
					$\underline{18}$	$\underline{12}$
						30



$$w(T)=\sum_{i=1}^{7} w_i L(w_i)$$

$$=2\times3+3\times3+7\times2+4\times3$$
$$+4\times3+5\times3+5\times3=83$$

第7章 命题逻辑

- 命题与联结词
- 命题公式及其分类
- 等值演算
- 其它联结词
- 对偶与范式
- 推理理论

命题的语句形式 ——陈述句

非命题的陈述句 ——悖论语句

疑问句
祈使句 } 非命题语句
感叹句

1、否定　　“否定”是一个一元运算

定义3　设 P 是一个命题，P 的否定是一个新命题，记作 $\neg P$。若 P 为 T，$\neg P$ 为 F；若 P 为 F，$\neg P$ 为 T。 其关系如表所示

P	$\neg P$
T	F
F	T

2、合取　　“合取”是一个二元运算

定义4　设 P 和 Q 是两个命题，P 与 Q 的合取也是一个命题，记作 $P \wedge Q$，当且仅当 P,Q 同时为 T 时，$P \wedge Q$ 为 T，其它情况下，$P \wedge Q$ 均为 F。

其关系如表所示

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

自然语言中:“与”“但是”“既…，就…”“不仅…，而且…”“虽然…，但是…”等等均可用∧表示。

3、析取 “析取”是一个二元运算

定义5 设 P 和 Q 是两个命题，P 与 Q 的析取也是一个命题，记作 $P \vee Q$，当且仅当 P,Q 同时为 F 时，$P \vee Q$ 为 F，其它情况下，$P \vee Q$ 均为 T。

其关系如表所示

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4、蕴含　　“蕴含”是一个二元运算

定义6　设 P 和 Q 是两个命题，P 与 Q 的蕴含也是一个命题，记作 $P \to Q$，当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P \to Q$ 的真值为 F，其它情况下，$P \to Q$ 均为 T。其关系如表所示

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

自然语言中，“如果…，那么…”可以用 $\to$ 表示。

5、等价　　“等价”是一个二元运算

定义7　设 P 和 Q 是两个命题，P 与 Q 的等价也是一个命题，记作 $P \leftrightarrow Q$，当 P 与 Q 的的真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 T，否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 F，其关系如表所示

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$P \leftrightarrow Q$ ——充分必要条件

7.2.3 命题公式的分类

定义11 设 A 是一个命题公式

（1）若 A 在它的任何赋值下取值均为 T，称 A 是重言式或永真式，

（2）若 A 在它的任何赋值下取值均为 F，称 A 是矛盾式或永假式，

（3）若 A 至少存在一组赋值使其为 T，称 A 是可满足式，

下面给出了24个等值式（用真值表证明）

1. $A \Leftrightarrow \neg\neg A$　（对合律）

2. $A \Leftrightarrow A \vee A$；3. $A \Leftrightarrow A \wedge A$（等幂律）

4. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$，5. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$（交换律）

6. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
7. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
（结合律）

8. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
9. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
（分配律）

$10.\ \neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$11.\ \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

（德·摩根律）

$12.\ A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$

$13.\ A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

（吸收律）

$14.\ A\vee T\Leftrightarrow T$；$15.\ A\wedge F\Leftrightarrow F$（零一律）

$16.\ A\wedge T\Leftrightarrow A$；$17.\ A\vee F\Leftrightarrow A$（同一律）

$18.\ A\wedge\neg A\Leftrightarrow F$；$19.\ A\vee\neg A\Leftrightarrow T$（否定律）

20. $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ （蕴含等值式）

21. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ （等价等值式）

22. $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$ （假言易位）

23. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$ （等价否定等值式）

24. $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$ （归谬论）

有了上述等值式，利用逻辑推理的方法，可以证明其它等值式，此过程称为**等值演算**。

7.5 对偶与范式

7.5.1 对偶式

对偶式是相互的

定义20 在仅含有联结词$\neg,\wedge,\vee$的命题公式A中，将$\wedge$换成$\vee$，$\vee$换成$\wedge$，若存在常元T和F亦相互取代，所得公式A^*称为A的对偶式。

例 A：$\neg(P\wedge Q)\vee(P\wedge(\neg Q\vee\neg S)\vee T)$

A^*：$\neg(P\vee Q)\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg S)\wedge F)$

下面给出的蕴含式，与前面的24个等值式一样，在推理过程中的任何时候均可应用。

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$； 2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$

3. $P \Rightarrow P \vee Q$； 4. $Q \Rightarrow P \vee Q$

5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$； 6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

7. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$； 8. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

9. $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$； 10. $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

11. $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$； 12. $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

13. $P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$

14. $P \vee Q, P \to R, Q \to R \Rightarrow R$

15. $P \to R \Rightarrow (P \vee Q) \to (R \vee Q)$

16. $P \to R \Rightarrow (P \wedge Q) \to (R \wedge Q)$

要求：熟记以上16个推理规则

论证方法 { 直接证明法 / 间接证明法 }

- 论证方法
  - 直接证明法
  - 间接证明法

第8章 谓词逻辑

- 谓词公式及其解释
- 谓词公式的等值式与蕴含式
- 谓词逻辑的推理理论

当个体域没有特别说明时，一般指全总个体域，在符号化时，首先需要对个体加以限制，因此引进一个新的谓词，称为**特性谓词**。如例3两小题中的 $M(x)$，一般情况下

对全称量词，特性谓词常作蕴含的前件。
对存在量词，特性谓词常作合取项。

使用量词时需要注意以下几点：

（1）在不同的个体域中，命题符号化的的形式可能不同。

（2）若没有给出个体域，应理解为全总个体域

（3）当个体域为有限集时，量词可以消掉，

如个体域 $D=\{a,b,c,d\}$，有

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a)\wedge A(b)\wedge A(c)\wedge A(d)$$

$$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a)\vee A(b)\vee A(c)\vee A(d)$$

定义8 在含有$\forall xP(x)$或$\exists xP(x)$的公式中，称x为指导变元或作用变元，称$P(x)$为相应量词的作用域或辖域。在作用域中，x的一切出现，称为约束出现（即x受相应量词指定变元的约束），$P(x)$中除去约束以外出现的变元，称为自由变元，自由元是不受约束的变元，尽管有时它也在量词的作用域中，但不受量词的指导变元的约束，故可将它看成公式中的参数。

量词的约束关系

量词　　　　　　　　自由变元

$$\exists x\,\underline{P(x)} \rightarrow \forall y \exists z\,\underline{(Q(x,y) \wedge R(z))}$$

指导变元　　　　　　辖域

命题演算的推广

命题逻辑中的等值式均可作为谓词逻辑中的等值式。例如

$$A(x,y) \to B(x,y) \Leftrightarrow \neg A(x,y) \vee B(x,y)$$

$$\neg\neg A(x) \Leftrightarrow A(x)$$

定理1　量词否定等值式

(1) $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

(2) $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

（$A(x)$为任意公式）

通俗讲，量词与否定¬之间的关系如下

否定所有 ⟺ 至少有一个非

否定存在 ⟺ 所有非

定理2　量词辖域的收缩与扩张等值式

设 H 是一个不含约束变元 x 的公式

(1)　$\forall x(P(x) \vee H) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee H$

(2)　$\forall x(P(x) \wedge H) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge H$

(3)　$\exists x(P(x) \vee H) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee H$

(4)　$\exists x(P(x) \wedge H) \Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge H$

定理3 量词分配等值式

(1) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

(2) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

举例说明

所有人唱歌并且跳舞 $\Longleftrightarrow$ 所有人唱歌并且所有人跳舞。

有些人唱歌或者跳舞 $\Longleftrightarrow$ 有些人唱歌或者有些人跳舞。

定理4 多个量词的等值式

(1) $\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

(2) $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

说明 相同量词可以交换，但不同量词不可随意交换。

8.4 谓词逻辑的推理理论

谓词逻辑的推理方法,可看作是命题逻辑推理方法的推广，故命题逻辑的很多等值式和蕴涵式,均可在谓词逻辑中使用，如 ***P*** 规则、***T*** 规则和 ***CP*** 规则。

但在谓词逻辑中，某些前提与结论可能会受量词限制，为了使用命题逻辑中的等值式和蕴涵式，必须在推理过程中设立消去和添加量词的规则，下面介绍这些规则。

8.4.1 全称指定规则（简称 *US* 规则）

规则如下：

由一般得到特殊

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(c)$$

其中 P 是谓词，c 是个体域中某个个体。

8.4.2 存在指定规则（简称 *ES* 规则）

规则如下：

由存在得到具体

$$\exists x P(x) \Rightarrow P(c)$$

其中 P 是谓词，c 是个体域中某个个体。

注意　应用 *ES* 规则时，指定的个体 c 不是任意的。

8.4.3 全称推广规则（简称*UG*规则）

规则如下：

由全部个体得到一般

$$P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$$

其中 P 是谓词。

注意 若能证明个体域中任何一个个体 c，都能使 $P(c)$ 成立，则可得结论 $\forall x P(x)$ 。

8.4.4 存在推广规则（简称*EG*规则）

规则如下：

由个体得到存在

$$P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$$

其中 P 是谓词，c 是个体域中某个个体。

谓词的演绎推理

假定推导过程都是在相同的个体域内进行的（通常是全总个体域）。

综合推理方法

- 推导过程中可以引用命题演算中的规则 P 和规则 T；
- 如果结论是以条件形式或析取形式给出，则可使用规则 CP；
- 若需消去量词，可以引用规则 US 和规则 ES；
- 当所求结论需定量时，可引用规则 UG 和规则 EG 引入量词;
- 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法;
- 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式;
- 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式。