代数系统部分作业 (答案)

姓名：____________班级：____________学号：____________班级序号：___________

一. 填空

1. 令 $Z_8=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$+_8$ 表示模 8 加法，则在群 $<Z_8,+_8>$ 中， 2 的阶数是___4___， 3 的阶数是 8___, 6 的阶数是___4___。

2. 设 A={a，b，c，d} ，A 上二元运算如下：

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

那么代数系统 $<A,*>$ 的幺元是___a___, b 的逆元为___d___,c 的逆元为___c___。

3. 以下两个置换是 S_5 中的置换，其中

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&3&5\end{pmatrix}$$

则 α =(13425)___， $\alpha\circ\beta$ =___(15)___(均用不交的轮换之积表示)。

4. 下列说法错误的是___CD___。（多选）

A. 在群中消去律成立； B. 循环群的生成元的阶数和群的阶数相同；

C. 素数阶群存在非平凡子群；D.阶数大于 1 的群中可能存在零元。

5. 设 S 是非负整数集，$\times$ 是关于数的普通乘法运算，则___B___。

A．$<S,\times>$ 是群；B．$<S,\times>$ 是有幺元的半群；

C．$<S,\times>$ 是无幺元的半群；D．$<S,\times>$ 不是群，也不是半群。

6. 在 3 元对称群中，元素 $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ 的阶数是___2___。

二. 证明与解答

1. 证明：$\langle R-\{0\},\times\rangle$ 构成群，并且为阿贝尔群。

证明：(1) $\forall x,y\in R-\{0\},\ x\times y\in R-\{0\}$,即×运算在 $R-\{0\}$ 上封闭，则 $\langle R-\{0\},\times\rangle$ 为代数系统；

(2) ×运算满足结合律，则 $\langle R-\{0\},\times\rangle$ 为半群；

(3) 存在幺元 $1\in R-\{0\}$；

(4) $\forall x \in R-\{0\}$,则 $x \times \frac{1}{x}=\frac{1}{x} \times x=1$，并且 $\frac{1}{x} \in R-\{0\}$，即任何一个元素 x 均存在逆元，为 $\frac{1}{x}$；

所以 $\langle R-\{0\}, \times\rangle$ 构成群，又因为 $\times$ 运算满足交换律，故 $\langle R-\{0\}, \times\rangle$ 为阿贝尔群。

2. 已知 R 为实数集，$S=R-\{-1\}$，在集合 S 上定义二元运算 $*$，如下：

$$a * b=a+b+ab$$

证明 $<S,*>$ 是群。

证明：(1) $\forall a, b \in S=R-\{-1\}$，$a * b=a+b+ab \neq-1$，所以 $a * b \in S$

反证法，若 $a * b=a+b+ab=-1$，则 $a=\frac{-1-b}{1+b}=-1$，与前提矛盾，综上 $<S,*>$ 为代数系统。

(2) 由 $(a * b) * c=(a+b+ab) * c=a+b+ab+c+ac+bc+abc$

$a *(b * c)=a *(b+c+bc)=a+b+c+bc+ab+ac+abc$

可得 $(a * b) * c=a *(b * c)$，则 $*$ 运算在 S 上满足结合律。

(3) $\forall a \in S=R-\{-1\}$,由 $a * 0=a+0+0=a$；$0 * a=0+a+0=a$，

故 0 为幺元且 $0 \in S$ 。 (2 分)

(4) $\forall a \in S=R-\{-1\}$,由 $a * b=b * a=a+b+ab=0,$ 得 $b=\frac{-a}{1+a} \in S$，即 S 中任何一个元素都有逆元。由此可证 $<S,*>$ 是群。

3. 求循环群 $<Z_{16},+_{16}>$ 的各阶子群，这里 $Z_{16}=\{0,1,2,\cdots,15\}$，$+_{16}$ 为模 16 的加法。

解：16 的因子有 1,2,4,8,16，故循环群 $<Z_{16},+_{16}>$ 有五个循环子群，表示如下：

一阶循环子群：$\left\langle 1^{\frac{16}{1}}\right\rangle=\left\langle\{0\},+_{16}\right\rangle$；二阶循环子群：$\left\langle 1^{\frac{16}{2}}\right\rangle=\left\langle\{8,0\},+_{16}\right\rangle$；

四阶循环子群：$\left\langle 1^{\frac{16}{4}}\right\rangle=\left\langle\{4,8,12,0\},+_{16}\right\rangle$；八阶循环子群：$\left\langle 1^{\frac{16}{8}}\right\rangle=\left\langle\{2,4,6,8,10,12,14,0\},+_{16}\right\rangle$

十六阶循环子群：$\left\langle 1^{\frac{16}{16}}\right\rangle=\left\langle\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,0\},+_{16}\right\rangle=<Z_{16},+_{16}>$

4. 写出群 $\left\langle Z_{9},+_{9}\right\rangle$ 中各元素关于子群 $\left\langle\{0,3,6\},+_{9}\right\rangle$ 的陪集，其中 $+_{9}$ 为模 9 的加法。

解：由于 $Z_{9}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$，并 $+_{9}$ 满足交换律，故运算得到的左陪集等于右陪集等于陪集。则：

$$0+_{9}\{0,3,6\}=3+_{9}\{0,3,6\}=6+_{9}\{0,3,6\}=\{0,3,6\}$$

$$1 +_9 \{0,3,6\} = 4 +_9 \{0,3,6\} = 7 +_9 \{0,3,6\} = \{1,4,7\}$$

$$2 +_9 \{0,3,6\} = 5 +_9 \{0,3,6\} = 8 +_9 \{0,3,6\} = \{2,5,8\}$$