数理逻辑部分作业 (答案)

要求：写清个人姓名学号等信息

姓名：____________班级：____________学号：____________班级序号：____________

一. 填空

1. 下列语句中，(C)是命题。

A． 你明天出去玩吗？　　　　B．您的书法作品太棒了！

C． 天空是蓝色的。　　　　D．我正在说谎。

2. 命题公式 $P \to (Q \vee P)$ 的真值是(本题填写 T 或 F)____T____。

3. 设 P：你去，Q：他去，将命题“如果你去了，那么他就不去．”翻译成符号形式为：$\underline{P \to \neg Q}$。

4. $\neg P \vee (Q \wedge R) \uparrow (S \vee T)$ 的对偶式为 $\underline{\neg P \wedge (Q \vee R) \downarrow (S \wedge F)}$。

5. $\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \underline{\forall x \neg P(x)}$。

二. 证明

1 (1) 设前提集合 $\Gamma = \{P \vee Q, Q \to R, P \to S, \neg S\}$,结论为 $H = R \wedge (P \vee Q)$,试证明 $\Gamma \Rightarrow H$ 。

(2) 设前提集合 $\Gamma = \{P \to (Q \to S), \neg R \vee P, Q\}$,结论为 $H = R \to S$,试证明 $\Gamma \Rightarrow H$ 。

证明：(1):

(1) $\neg S$	P
(2) $P \to S$	P
(3) $\neg P$	$T(1),(2)$
(4) $P \vee Q$	P
(5) Q	$T(3),(4)$
(6) $Q \to R$	P
(7) R	$T(5),(6)$
(8) $R \wedge (P \vee Q)$	$T(4),(7)$

(2):

(1) R	P(附加前提)
(2) $\neg R \vee P$	P
(3) P	$T(1),(2)$
(4) $P \to (Q \to S)$	P
(5) $Q \to S$	$T(3),(4)$
(6) Q	P
(7) S	$T(5),(6)$
(8) $R \to S$	CP

2. 符号化下列命题，并推证其结论。

如果乙不参加篮球赛，那么甲就不参加篮球赛。如果乙参加篮球赛，那么甲和丙就参加。因此如果甲参加篮球赛，那么丙就参加篮球赛。（设 P：甲参加篮球赛；Q：乙参加篮球赛；R：丙参加篮球赛）

解：前提：$\neg Q \to \neg P$

$Q \to (P \wedge R)$

结论：$P \to R$

证明：

(1) P	P(附加前提)
(2) $\neg Q \to \neg P$	P
(3) Q	$T(1),(2)$
(4) $Q \to (P \wedge R)$	P
(5) $P \wedge R$	$T(3),(4)$
(6) R	$T(5)$
(7) $P \to R$	CP

3.如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子就会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。(这个例子旨在说明推理的有效性和结论的真实性是不同的，只管推理即可。)设 P:马会飞；Q:羊吃草；R:母鸡是飞鸟；S:烤熟的鸭子会跑。符号化上述推理的前提，结论，并构造上述推理的证明。

解：前提：$(P \vee Q) \rightarrow R, R \rightarrow S, \neg S$

结论：$\neg Q$

证明：方法一：直接证明法。

$(1)\neg S$	P
$(2) R \rightarrow S$	P
$(3)\neg R$	$T(1),(2)$
$(4)(P \vee Q) \rightarrow R$	P
$(5)\neg(P \vee Q)$	$T(3),(4)$
$(6)\neg P \wedge \neg Q$	$T(5)$
$(7)\neg Q$	$T(6)$

方法二：反证法

$(1) Q$	P(附加前提)
$(2)\neg S$	P
$(3) R \rightarrow S$	P
$(4)\neg R$	$T(2),(3)$
$(5)(P \vee Q) \rightarrow R$	P
$(6)\neg(P \vee Q)$	$T(4),(5)$
$(7)\neg P \wedge \neg Q$	$T(6)$
$(8)\neg Q$	$T(7)$
$(9) Q \wedge \neg Q$(矛盾)	$T(1),(7)$

4 所有的哺乳动物是脊椎动物；并非所有的哺乳动物都是胎生动物；故有些脊椎动物不是胎生的。

设 $P(x)$: x 是哺乳动物；$Q(x)$: x 是脊椎动物；$R(x)$: x 是胎生动物；符号化上述推理的前提，结论，并构造上述推理的证明。

解：前提：$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to R(x))$

结论：$\exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$

证明：

$(1)\ \neg(\forall x)(P(x)\to R(x))$ $\quad P$

$(2)\exists x\neg(P(x)\to R(x))$ $\quad T(1)$

$(3)\exists x(P(x)\wedge\neg R(x))$ $\quad T(2)$

$(4)P(c)\wedge\neg R(c)$ $\quad ES(3)$

$(5)P(c)$ $\quad T(4)$

$(6)\forall x(P(x)\to Q(x))$ $\quad P$

$(7)P(c)\to Q(c)$ $\quad US(6)$

$(8)Q(c)$ $\quad T(5),(7)$

$(9)\neg R(c)$ $\quad T(4)$

$(10)Q(c)\wedge\neg R(c)$ $\quad T(8),(9)$

$(11)\exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$ $\quad EG(10)$

5. 所有有理数都是实数。某些有理数是整数。所以，某些实数是整数。

设 $R(\mathrm{x})$:x 是实数；$Q(\mathrm{x})$:x 是有理数；$I(\mathrm{x})$:x 是整数。符号化上述推理的前提，结论，并构造上述推理的证明。

解：前提：$\forall x(Q(x)\to R(x))$，$\exists x(Q(x)\wedge I(x))$，

结论：$\exists x(R(x)\wedge I(x))$

证明：

$(1)\exists x(Q(x)\wedge I(x))$ $\quad P$

$(2)Q(a)\wedge I(a)$ $\quad ES(1)$

$(3)\forall x(Q(x)\to R(x))$ $\quad P$

$(4)Q(a)\to R(a)$ $\quad US(3)$

$(5)Q(a)$ $\quad T(2)$

$(6)R(a)$ $\quad T(4),(5)$

$(7)I(a)$ $\quad T(2)$

$(8)R(a)\wedge I(a)$ $\quad T(6),(7)$

$(9)\exists x(R(x)\wedge I(x))$ $\quad EG(8)$

6. 符号化下面命题，并推证其结论。

每位科学家都是勤奋的。每个勤奋又身体健康的人在事业中都会获得成功。存在着身体健康的科学家。所以存在着事业获得成功的人。（个体域为人类，$P(x)$：x是科学家；$Q(x)$：x勤奋；$R(x)$：x身体健康；$S(x)$：x事业获得成功。）

解：前提为：$\forall x(P(x)\to Q(x))$

$\forall x(Q(x)\wedge R(x)\to S(x))$

$\exists x(P(x)\wedge R(x))$

结论：$\exists xS(x)$

证明：

(1)	$\exists x(P(x)\wedge R(x))$	P	切记先引入$\exists x(P(x)\wedge R(x))$前提
(2)	$P(c)\wedge R(c)$	ES(1)	
(3)	$P(c)$	T(2)	
(4)	$R(c)$	T(2)	
(5)	$\forall x(P(x)\to Q(x))$	P	
(6)	$P(c)\to Q(c)$	US(5)	
(7)	$Q(c)$	T(3),(6)	
(8)	$Q(c)\wedge R(c)$	T(4),(7)	
(9)	$\forall x(Q(x)\wedge R(x)\to S(x))$	P	
(10)	$Q(c)\wedge R(c)\to S(c)$	US(9)	
(11)	$S(c)$	T(8),(10)	
(12)	$\exists xS(x)$	EG(11)	