第二章：语言及其文法

提纲

形式语言基础

- 计算机语言，首先考虑语言的形式化、规范化，使其具有可计算性和可操作性；这就是形式语言理论研究的问题。

- **形式语言**：**字母表**上的符号按一定的规则组成的所有**符号串**集合；其中的每个符号串称为一个**句子**。

形式语言诞生于1956年，由Chomsky创立。

※ 形式语言的基本观点是 ：
语言是符号串的集合！

※ 形式语言理论研究的**基本问题**是：
研究符号串集合的表示方法、结构特性 以及运算规律。

字母表 (*Alphabet*)

- 字母表∑是一个有穷符号集合
  - 符号：字母、数字、标点符号、…

例：

- 二进制字母表：{0,1}
- *ASCII*字符集
- *Unicode*字符集

字母表上的运算

➢字母表$\sum_1$和$\sum_2$的乘积(*product*)

➢$\sum_1\sum_2 = \{ab | a \in \sum_1, b \in \sum_2\}$

例： $\{0, 1\}\{a, b\} = \{0a, 0b, 1a, 1b\}$

字母表上的运算

➢字母表$\sum_1$和$\sum_2$的**乘积**(*product*)

➢字母表$\sum$的***n*次幂**(*power*)

$$\begin{cases} \sum^0 = \{\varepsilon\} \\ \sum^n = \sum^{n-1}\sum, n \geq 1 \end{cases}$$

例：$\{0,1\}^3 = \{0,1\}\ \{0,1\}\ \{0,1\}$
$= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

字母表的*n*次幂：长度为*n*的符号串构成的集合

字母表上的运算

- 字母表$\sum_1$和$\sum_2$的**乘积**(*product*)
- 字母表$\sum$的***n*次幂**(*power*)
- 字母表$\sum$的**正闭包**(*positive closure*)
  - $\sum^+ = \sum \cup \sum^2 \cup \sum^3 \cup \ldots$

例：$\{a, b, c, d\}^+ = \{a, b, c, d,$
$aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, \ldots,$
$aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, \ldots\}$

字母表的正闭包：长度为正数的符号串构成的集合

字母表上的运算

- 字母表$\sum_1$和$\sum_2$的乘积(*product*)
- 字母表$\sum$的n次幂(*power*)
- 字母表$\sum$的正闭包(*positive closure*)
- 字母表$\sum$的克林闭包(*Kleene closure*)
  - $\sum^* = \sum^0 \cup \sum^+ = \sum^0 \cup \sum \cup \sum^2 \cup \sum^3 \cup \ldots$

例：$\{a, b, c, d\}^* = \{\varepsilon, a, b, c, d,$
$aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, \ldots,$
$aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, \ldots\}$

字母表的星闭包：任意符号串（长度可以为零）构成的集合

符号串(*String*)

- 设∑是一个字母表，$\forall x \in \sum^*$，*x*称为是∑上的一个符号串
  - 符号串是字母表中符号的一个有穷序列
- 符号串*s*的长度，通常记作|*s*|，是指*s*中符号的个数
  - 例：|*aab*|=3
- 空串是长度为0的串，用 ε（*epsilon*）表示
  - $|\varepsilon| = 0$

符号串上的运算——连接

- 如果 x 和 y 是串，那么 x 和 y 的**连接**(*concatenation*)是把 y 附加到 x 后面而形成的符号串，记作 xy
- 例如，如果 $x=dog$ 且 $y=house$，那么 $xy=doghouse$
- **空串**是连接运算的**单位元**(*identity*)，即，对于任何符号串 s 都有，$\varepsilon s = s\varepsilon = s$

> 设 x,y,z 是三个符号串，如果 $x=yz$，则称 y 是 x 的**前缀**，z 是 x 的**后缀**

串上的运算——幂

➢串s的幂运算

$$\begin{cases} s^0 = \varepsilon, \\ s^n = s^{n-1}s, n \geq 1 \end{cases}$$

➢$s^1 = s^0 s = \varepsilon s = s$，$s^2 = ss$，$s^3 = sss$，…

➢例：如果 $s = ba$，那么$s^1 = ba$，$s^2 = baba$，$s^3 = bababa$，…

串s的n次幂：将n个s连接起来

提纲

自然语言的例子——句子的构成规则

- <句子> → <名词短语> <动词短语>
- <名词短语> → <形容词> <名词短语>
- <名词短语> → <名词>
- <动词短语> → <动词> <名词短语>
- <形容词> → *little*
- <名词> → *boy*
- <名词> → *apple*
- <动词> → *eat*

未用尖括号括起来部分表示语言的基本符号

尖括号括起来部分称为语法成分

文法的形式化定义

$G = (V_T, V_N, P, S)$

➢V_T：终结符集合

终结符（*terminal symbol*）是文法所定义的语言的基本符号，有时也称为*token*

➢例: V_T = { *apple, boy, eat, little* }

文法的形式化定义

$G = (V_T, V_N, P, S)$

➢V_T：终结符集合

➢V_N：非终结符集合

非终结符(*nonterminal*) 是用来表示语法成分的符号，有时也称为“语法变量”

➢例：V_N = {<句子>, <名词短语>, <动词短语>, <名词>, … }

文法的形式化定义

$G = (V_T, V_N, P, S)$

- V_T：终结符集合
- V_N：非终结符集合
- P：产生式集合

$V_T \cap V_N = \Phi$

$V_T \cup V_N$：文法符号集

产生式(*production*)描述了将终结符和非终结符组合成符号串的方法

产生式的一般形式：

$$\alpha \rightarrow \beta$$

读作：α定义为β

- $\alpha \in (V_T \cup V_N)^+$，且$\alpha$中至少包含$V_N$中的一个元素：称为产生式的头(*head*)或左部(*left side*)
- $\beta \in (V_T \cup V_N)^*$：称为产生式的体(*body*)或右部(*right side*)

文法的形式化定义

$G = (V_T, V_N, P, S)$

- V_T：终结符集合
- V_N：非终结符集合
- P ：产生式集合

产生式(*production*)描述了将终结符和非终结符组合成符号串的方法

产生式的一般形式:

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 例： $P = \left\{ \begin{array}{l} <句子> \rightarrow <名词短语><动词短>, \\ <名词短语> \rightarrow <形容词><名词短语>, \\ \cdots \end{array} \right\}$

文法的形式化定义

$G = (V_T, V_N, P, S)$

- V_T：终结符集合
- V_N：非终结符集合
- P：产生式集合
- S：开始符号

$S \in V_N$。开始符号(*start symbol*)表示的是该文法中最大的语法成分

- 例：S = <句子>

文法的形式化定义

$G = (V_T, V_N, P, S)$

- V_T：终结符集合
- V_N：非终结符集合
- P：产生式集合
- S：开始符号

例：$G = (\{\text{id}, +, *, (,)\}, \{E\}, P, E)$

$P = \{ E \to E + E,$

$E \to E * E,$

$E \to (E),$

$E \to \text{id} \}$

约定：不引起歧义的前提下，可以只写产生式

$G: E \to E + E$

$E \to E * E$

$E \to (E)$

$E \to \text{id}$

产生式的简写

➢对一组有相同左部的α产生式

$$\alpha \rightarrow \beta_1, \alpha \rightarrow \beta_2, \ldots, \alpha \rightarrow \beta_n$$

可以简记为：

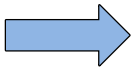
$$\alpha \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$$

读作：α定义为β_1，或者β_2，…，或者β_n。

β_1，β_2，…，β_n称为α的候选式(*Candidate*)

➢例

$$E \rightarrow E + E$$
$$E \rightarrow E * E$$
$$E \rightarrow (E)$$
$$E \rightarrow \mathrm{id}$$



$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathrm{id}$$

符号约定

- 下述符号是终结符
  - (a) 字母表中排在前面的小写字母，如 a、b、c
  - (b) 运算符，如 +、*等
  - (c) 标点符号，如括号、逗号等
  - (d) 数字0、1、. . .、9
  - (e) 粗体字符串，如id、if等

符号约定

- 下述符号是终结符
- 下述符号是非终结符
  - (a) 字母表中排在前面的大写字母，如A、B、 C
  - (b) 字母S。通常表示开始符号
  - (c) 小写、斜体的名字，如 expr、stmt等
  - (d) 代表程序构造的大写字母。如E(表达式)、T(项)和F(因子)

符号约定

终结符	a, b, c	终结符号串	$u, v, \ldots, z$
非终结符	A, B, C		
文法符号	X, Y, Z	文法符号串	α, β, γ

- 下述符号是终结符
- 下述符号是非终结符
- 字母表中排在后面的大写字母（如X、Y、Z）表示文法符号（即终结符或非终结符）
- 字母表中排在后面的小写字母（主要是u、v、$\ldots$、z）表示终结符号串（包括空串）
- 小写希腊字母，如α、β、γ，表示文法符号串（包括空串）
- 除非特别说明，第一个产生式的左部就是开始符号

讨论

文法的四元组中，核心是哪部分?

提纲

自然语言的例子

文法：

①<句子> → <名词短语><动词短语>

②<名词短语> → <形容词><名词短语>

③<名词短语> → <名词>

④<动词短语> → <动词><名词短语>

⑤<形容词> → *little*

⑥<名词> → *boy*

⑦<名词> → *apple*

⑧<动词> → *eat*

有了文法（语言规则），如何判定一个词串是否是满足文法的句子?

单词串： *little boy eats apple*

推导 (*Derivations*)和归约(*Reductions*)

➢给定文法$G=(V_T, V_N, P, S)$，如果$\alpha \rightarrow \beta \in P$，那么可以将符号串$\gamma\alpha\delta$中的$\alpha$替换为$\beta$，也就是说，将$\gamma\alpha\delta$重写(*rewrite*)为$\gamma\beta\delta$，记作 $\gamma\alpha\delta \Rightarrow \gamma\beta\delta$。此时，称文法中的符号串 $\gamma\alpha\delta$ 直接推导(*directly derive*)出 $\gamma\beta\delta$

➢简而言之，就是用产生式的右部替换产生式的左部

推导 (*Derivations*)和归约(*Reductions*)

- 如果$\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1$，$\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$，$\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3$，…，$\alpha_{n-1} \Rightarrow \alpha_n$，则可以记作$\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_{n-1} \Rightarrow \alpha_n$，称符号串 α_0经过n步推导出α_n，可简记为$\alpha_0 \Rightarrow^n \alpha_n$
- $\alpha \Rightarrow^0 \alpha$
- $\Rightarrow^+$表示“经过正数步推导”
- $\Rightarrow^*$表示“经过若干（可以是0）步推导”

推导 (*Derivations*)和归约(*Reductions*)

例

文法：

① <句子> → <名词短语><动词短语>

② <名词短语> → <形容词><名词短语>

③ <名词短语> → <名词>

④ <动词短语> → <动词><名词短语>

⑤ <形容词> → *little*

⑥ <名词> → *boy*

⑦ <名词> → *apple*

⑧ <动词> → *eat*

<句子> ⇒ <名词短语><动词短语>

⇒ <形容词><名词短语><动词短语>

⇒ *little* <名词短语><动词短语>

⇒ *little* <名词><动词短语>

⇒ *little boy* <动词短语>

⇒ *little boy* <动词><名词短语>

⇒ *little boy eats* <名词短语>

⇒ *little boy eats* <名词>

⇒ *little boy eats apple*

回答前面的问题

- 有了文法（语言规则），如何判定某一词串是否是满足该文法（语言）的句子?
  - 句子的推导（文法） -从生成语言的角度
  - 句子的归约（自动机）-从识别语言的角度

} 均根据规则

句型和句子

- 如果 $S \Rightarrow^* \alpha$，$\alpha \in (V_T \cup V_N)^*$，则称$\alpha$是$G$的一个句型 (*sentential form*)
  - 一个句型中既可以包含终结符，又可以包含非终结符，也可能是空串
- 如果 $S \Rightarrow^* w$，$w \in V_T^*$，则称w是G的一个句子(*sentence*)
  - 句子是不包含非终结符的句型

例

<句子>⇒ <名词短语> <动词短语>

⇒ <形容词> <名词短语> <动词短语>

⇒ *little* <名词短语> <动词短语>

⇒ *little* <名词> <动词短语>

⇒ *little boy* <动词短语>

⇒ *little boy* <动词><名词短语>

⇒ *little boy eats* <名词短语>

⇒ *little boy eats* <名词>

句子 ⇒ *little boy eats apple*

句型

语言的形式化定义

➢由文法G的开始符号S推导出的所有句子构成的集合称为**文法G生成的语言**，记为$L(G)$。即

- $L(G)=\{w \mid S \Rightarrow^{*} w, w \in V_T^{*}\}$

文法 $E \rightarrow E+E \mid E*E \mid (E) \mid \mathrm{id}$
生成的语言中包含多少个句子？

例

➢文法G

① $S \to L \mid LT$

② $T \to L \mid D \mid TL \mid TD$

③ $L \to a \mid b \mid c \mid \ldots \mid z$

④ $D \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid 9$

该文法生成的语言是：标识符

请写出无符号整数和浮点数的文法

$T \Rightarrow TL$
$\Rightarrow TDL$
$\Rightarrow TDDL$
$\Rightarrow TLDDL$
…
$\Rightarrow TD\ldots LDDL$
$\Rightarrow DD\ldots LDDL$

T：字母数字串

语言上的运算

运算	定义和表示
L和M的并	$L \cup M = \{s \mid s$属于L或者s属于$M\}$
L和M的连接	$LM = \{st \mid s$属于L且t属于$M\}$
L的幂	$\begin{cases} L^0 = \{\varepsilon\} \\ L^n = L^{n-1}L,\ n \geqslant 1 \end{cases}$
L的Kleene闭包	$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$
L的正闭包	$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$

例：令$L=\{A, B, \cdots, Z, a, b, \cdots, z\}$，$D=\{0, 1, \cdots, 9\}$。则$L(L \cup D)^*$表示的语言是标识符

文法的等价

如果$L(G_1)=L(G_2)$，则称文法G_1和G_2是等价的。

如文法$G_1[A]$：

$A \rightarrow DB$

$A \rightarrow DE$

$E \rightarrow AB$

$D \rightarrow 0$

$B \rightarrow 1$

$G_2[S]$：

$S \rightarrow 0S1$

$S \rightarrow 01$

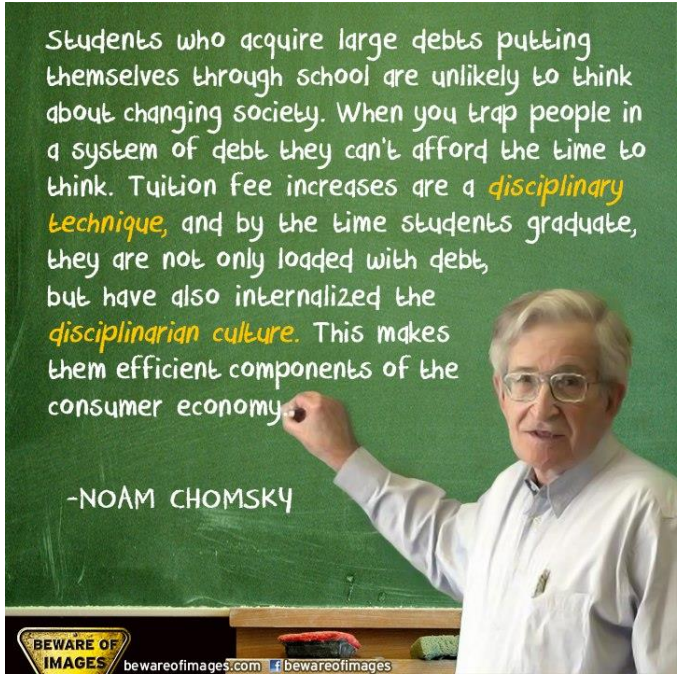
讨论

语言和文法之间的对应关系?

提纲

Chomsky 文法分类体系

- 0型文法 (*Type-0 Grammar*)
- 1型文法 (*Type-1 Grammar*)
- 2型文法 (*Type-2 Grammar*)
- 3型文法 (*Type-3 Grammar*)



艾弗拉姆·诺姆·乔姆斯基（Avram Noam Chomsky，1928年12月7日—），美国哲学家。是麻省理工学院语言学的荣誉退休教授。乔姆斯基的《句法结构》被认为是20世纪理论语言学研究上最伟大的贡献。

0型文法（*Type-0 Grammar*）

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 无限制文法(*Unrestricted Grammar*)/短语结构文法

  (*Phrase Structure Grammar, PSG*)

  - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$，$\alpha$中至少包含1个非终结符

- 0型语言

  - 由0型文法G生成的语言$L(G)$

1型文法（*Type-1 Grammar*）

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 上下文有关文法(*Context-Sensitive Grammar , CSG*)
  - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P,\ \ |\alpha| \leq |\beta|$
  - 产生式的一般形式：$\alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \beta \alpha_2\ (\beta \neq \varepsilon)$
- 上下文有关语言（1型语言）
  - 由上下文有关文法 (1型文法) G生成的语言$L(G)$

CSG中不包含ε-产生式

2型文法（*Type-2 Grammar*）

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 上下文无关文法 (*Context-Free Grammar, CFG*)
  - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$，$\alpha \in V_N$
  - 产生式的一般形式：$A \rightarrow \beta$

例：

$S \rightarrow L \mid LT$

$T \rightarrow L \mid D \mid TL \mid TD$

$L \rightarrow a \mid b \mid c \mid d \mid \ldots \mid z$

$D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid 9$

2型文法（*Type-2 Grammar*）

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 上下文无关文法 (*Context-Free Grammar, CFG*)
  - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$，$\alpha \in V_N$
  - 产生式的一般形式：$A \rightarrow \beta$
- 上下文无关语言（2型语言）
  - 由上下文无关文法 (2型文法) G生成的语言$L(G)$

3型文法（*Type-3 Grammar*）

终结符	*a*, *b*, *c*	终结符号串	*u*, *v*, *w*, . . . , *z*
非终结符	*A*, *B*, C		
文法符号	*X*, *Y*, *Z*	文法符号串	*α*, *β*, *γ*

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 正则文法 (*Regular Grammar, RG*)
  - 右线性(*Right Linear*)文法： $A \rightarrow wB$ 或 $A \rightarrow w$
  - 左线性(*Left Linear*) 文法： $A \rightarrow Bw$ 或 $A \rightarrow w$
  - 左线性文法和右线性文法都称为正则文法

例（右线性文法）

① $S \rightarrow a \mid b \mid c \mid d$

② $S \rightarrow aT \mid bT \mid cT \mid dT$

③ $T \rightarrow a \mid b \mid c \mid d \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5$

④ $T \rightarrow aT \mid bT \mid cT \mid dT \mid 0T \mid 1T \mid 2T \mid 3T \mid 4T \mid 5T$

文法*G*（上下文无关文法）

① $S \rightarrow L \mid LT$

② $T \rightarrow L \mid D \mid TL \mid TD$

③ $L \rightarrow a \mid b \mid c \mid d$

④ $D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5$

3型文法（*Type-3 Grammar*）

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- 正则文法（*Regular Grammar, RG*）
  - 右线性(*Right Linear*)文法：$A \rightarrow wB$ 或 $A \rightarrow w$
  - 左线性(*Left Linear*) 文法：$A \rightarrow Bw$ 或 $A \rightarrow w$
  - 左线性文法和右线性文法都称为正则文法
- 正则语言（3型语言）
  - 由正则文法(3型文法) G生成的语言$L(G)$

正则文法能描述程序设计语言的多数单词

四种文法之间的关系

➢逐级限制

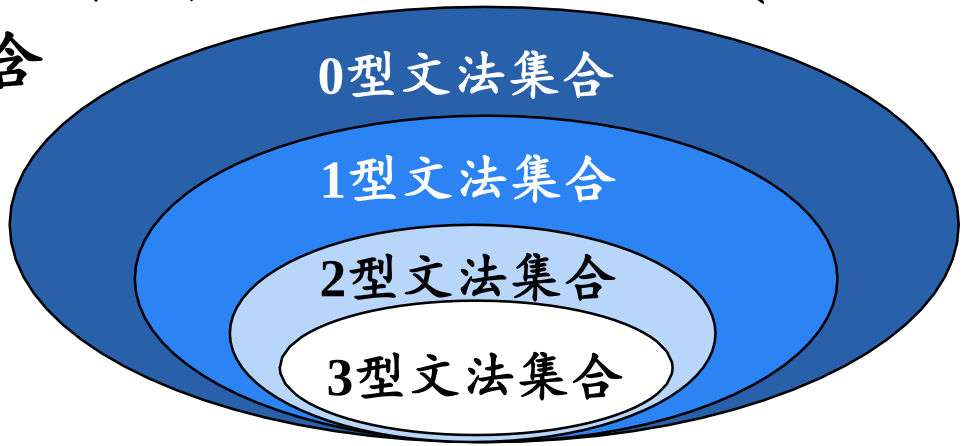
➢0型文法：α中至少包含1个非终结符

➢1型文法（CSG）：$|\alpha| \leq |\beta|$

➢2型文法（CFG）：$\alpha \in V_N$

➢3型文法（RG）：$A \rightarrow wB$ 或 $A \rightarrow w$ （$A \rightarrow Bw$ 或$A \rightarrow w$）

➢逐级包含



提纲

CFG 的分析树

G:

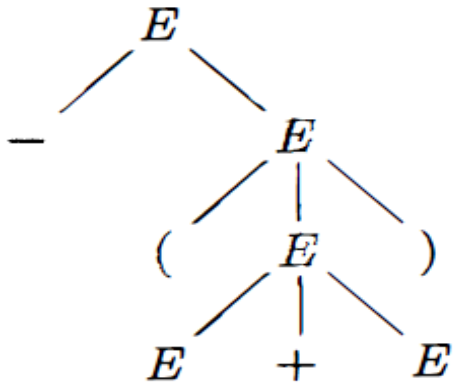
① $E \rightarrow E + E$

② $E \rightarrow E * E$

③ $E \rightarrow - E$

④ $E \rightarrow (E)$

⑤ $E \rightarrow$ id



- 根节点的标号为文法开始符号
- 内部结点表示对一个产生式$A \rightarrow \beta$的应用，该结点的标号是此产生式左部A。该结点的子结点的标号从左到右构成了产生式的右部β
- 叶结点的标号既可以是非终结符，也可以是终结符。从左到右排列叶节点得到的符号串称为是这棵树的产出(*yield*)或边缘(*frontier*)

分析树是推导的图形化表示

➢给定一个推导 $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n$，对于推导过程中得到的每一个句型$\alpha_i$，都可以构造出一个边缘为$\alpha_i$的分析树

推导过程：$E \Rightarrow -E \Rightarrow -(E) \Rightarrow -(E+E) \Rightarrow -(\mathrm{id}+E) \Rightarrow -(\mathrm{id}+\mathrm{id})$

文法：

① $E \rightarrow E+E$

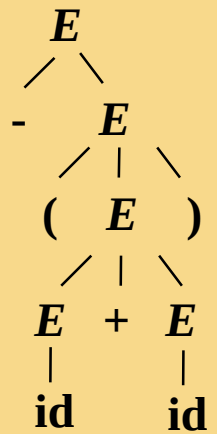
② $E \rightarrow E*E$

③ $E \rightarrow -E$

④ $E \rightarrow (E)$

⑤ $E \rightarrow \mathrm{id}$

分析树：



（句型的）短语

- 给定一个句型，其分析树中的每一棵子树的边缘称为该句型的一个短语(*phrase*)
  - 如果子树只有父子两代结点，那么这棵子树的边缘称为该句型的一个直接短语(*immediate phrase*)
    - 最左边的直接短语是句柄

文法：

① $E \rightarrow E + E$

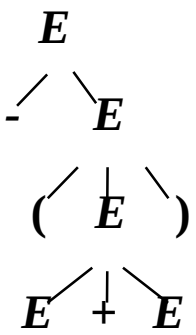
② $E \rightarrow E * E$

③ $E \rightarrow - E$

④ $E \rightarrow (E)$

⑤ $E \rightarrow$ id

分析树：



短语：

- -(E+E)
- (E+E)
- E+E

直接短语：

- E+E

句柄：

- E+E

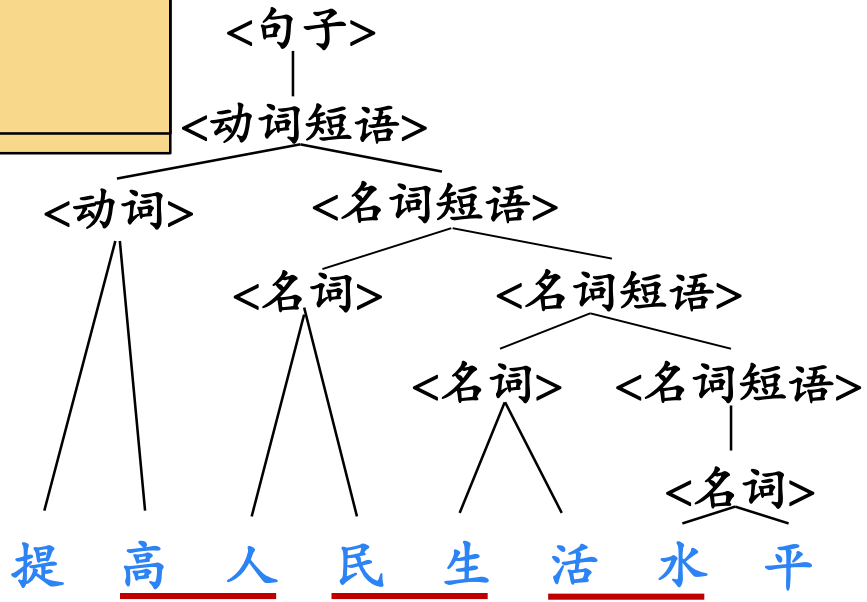
直接短语一定是某产生式的右部

但产生式的右部不一定是给定句型的直接短语

例

文法：
①<句子> → <动词短语>
②<动词短语> → <动词> <名词短语>
③<名词短语> → <名词> <名词短语> | <名词>
④<动词> → 提 高
⑤<名词> → 高 人 | 人 民 | 民 生 | 生 活
| 活 水 | 水 平

输入：提 高 人 民 生 活 水 平



二义性文法 (*Ambiguous Grammar*)

➢如果一个文法可以为某个句子生成多棵分析树，则称这个文法是二义性的

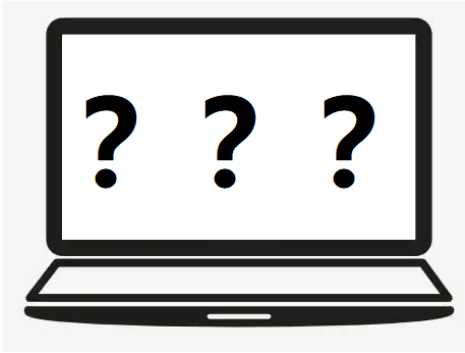
或者，若一个文法存在某个句子有两个不同的最左（右）推导，则称这个文法是二义性的

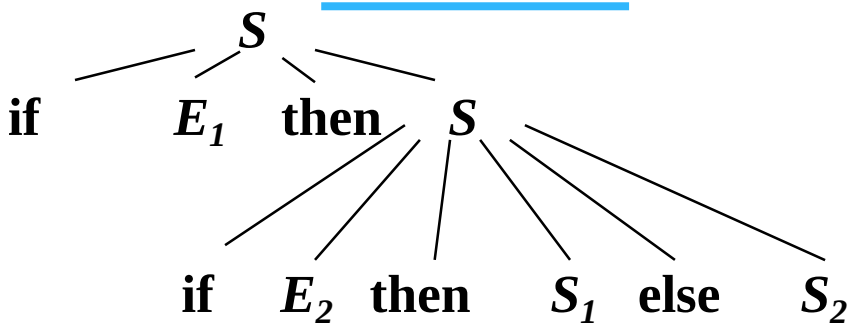
例

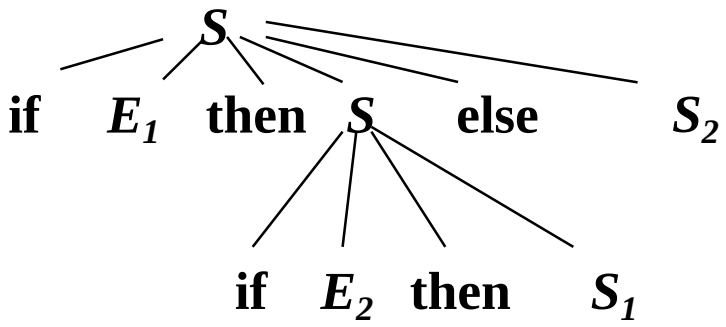
- 文法（语句）
  - $S \rightarrow$ **if** E **then** S | **if** E **then** S **else** S } 条件语句
  - | *other* ← 其他语句
- 句型
  - **if** E_1 **then if** E_2 **then** S_1 **else** S_2

Compiler

二义性







例

$G'[E]$:

$E \to \mathbf{i}$

$E \to E+E$

$E \to E*E$

$E \to (E)$

$G[E]$:

$E \to T \mid E+T$

$T \to F \mid T*F$

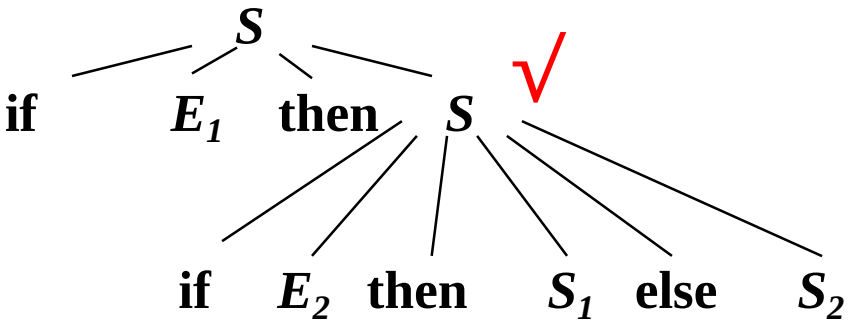
$F \to (E) \mid \mathbf{i}$

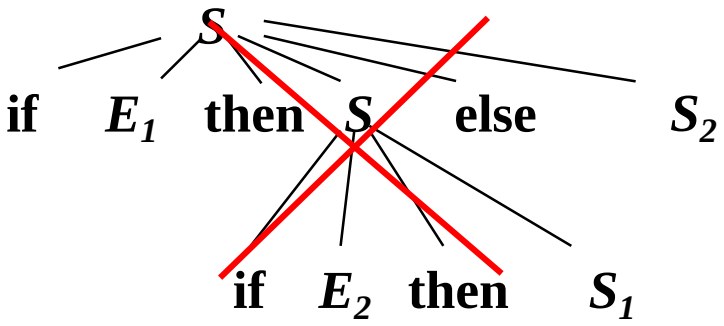
例

- 文法（语句）
  - $S \rightarrow$ **if** E **then** S
    | **if** E **then** S **else** S
    | *other*

消歧规则：每个else和最近的尚未匹配的if匹配

- **if** E_1 **then if** E_2 **then** S_1 **else** S_2





二义性文法的判定

➢对于任意一个上下文无关文法，不存在一个算法，判定它是无二义性的；但能给出一组充分条件，满足这组充分条件的文法是无二义性的

➢满足，肯定无二义性

➢不满足，也未必就是有二义性的

如果产生上下文无关语言的每一个文法都是二义的，则说此语言是先天二义的。