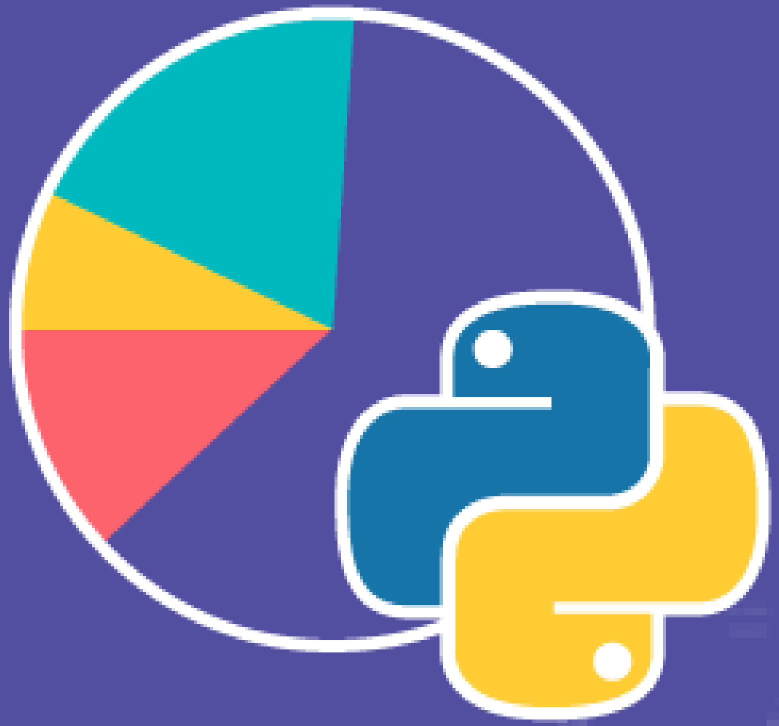
파이썬 확률 통계

확률



/* elice */

목차

1. 사건과 확률의 개념
2. 순열과 조합
3. 조건부 확률과 독립
4. 확률 분포

확률

확률

여려 가능한 결과 중 하나 또는 일부가 일어날 가능성

0과 1 사이의 값으로 정의

동전을 던졌을 때
앞면이 나올 가능성

=

동전을 던졌을 때
앞면이 나올 확률 0.5

확률의 용어

실험(Experiment) 또는 시행(Trial)	여러 가능한 결과 중 하나가 일어나도록 하는 행위
표본공간 (Sample Space)	실험에서 나타날 수 있는 모든 결과들을 모아둔 집합 (Ω or S)
사건 (Event)	표본공간의 일부분(부분집합) 사건 A 가 일어날 확률 ; P(A) 또는 Pr(A)

예) 동전을 던지는 실험

앞면 : H, 뒷면 : T , 표본 공간 $\Omega = \{H, T\}$으로 표시

앞면이 나오는 사건은 $A = \{H\}$이므로 P(A) = 0.5 = 1/2

확률의 용어

추출 방법

복원추출

모든 시행에서
똑같은 상황으로 시행하는 방법

예) 주머니에서 공을 꺼내 확인
한 후, 다시 넣고 다음 공 꺼내기

비복원 추출

앞의 시행이 다음 시행에
영향을 주는 방법

예) 주머니에서 공을 꺼내 확인
한 후, 다시 넣지 않고
다음 공 꺼내기

확률의 중요 구성요소

표본공간(Ω)

실험에서 나타낼 수 있는
모든 결과를 나열한 집합

사건(A)

모든 결과들 중 일부분,
표본공간의 부분집합

확률(P)

모든 결과 중,
사건이 발생하는 가능성을 0과
1사이의 값으로 정의

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{사건}(A)\text{의 원소의 수}}{\text{표본공간}(\Omega)\text{의 원소의 수}}$$

사건

경우의 수

표본공간에서 사건 A가 발생할 확률

$$\mathrm{P(A)} = \frac{A\text{에 속하는 결과의 수}}{\text{총 가능한 결과의 수}}$$

사건 A의 확률을 정의하기 위해 A에 속하는 **결과의 수** 파악 필요

사건의 원소의 개수(사건에 속하는 결과의 수)
= 1회 시행에서 일어날 수 있는 사건의 가짓수
= 사건의 경우의 수

사건의 기본적인 연산

A의 여사건

- 사건 A에 포함되지 않은 사건들의 집합
- A^c로 표시

A와 B의 합사건

- 사건 A 혹은 B에 포함되는 사건들의 집합
- $A \cup B$로 표시

A의 B의 곱사건

- 사건 A 와 B에 동시에 포함되는 사건들의 집합
- $A \cap B$로 표시

배반사건

- 동시에 일어날 수 없는 두 사건
- $A \cap B = 0$인 두 사건

경우의 수의 계산

합의 법칙

- 두 사건 A와 B 가 일어나는 경우의 수가 각각 m과 n
- 두 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않음
- 사건 A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 m+n

곱의 법칙

- 두 사건 A와 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m과 n
- 두 사건 A와 B가 동시에 또는 잇달아 일어남
- 이때 경우의 수는 m×n

팩토리얼(!)

```
def fac(n):
    if n == 0:
        return 1
    if n == 1 :
        return 1
    else:
        return n * fac(n-1)

# if 문을 활용하여 n 이 0혹은 1
인 경우, 1을 반환하며 그 외의
경우는 n * (n-1)!를 반환
```

팩토리얼의 정의

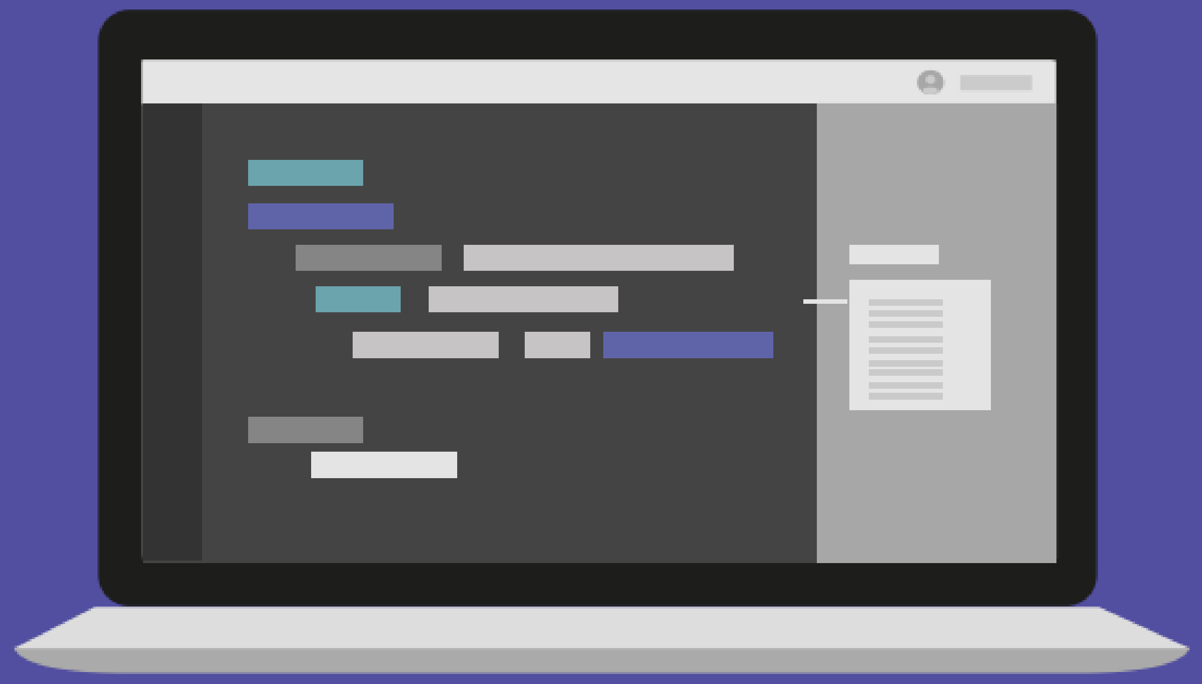
1부터 어떤 양의 정수 n까지의 정수를 모두 곱한 것

0! = 1
1! = 1
n! = n * (n-1)!

ex) 4명의 학생을 순서대로 세우는 경우의 수는 4!

[실습]

팩토리얼



확률의 정리

공리

증명을 필요로 하지 않거나 증명할 수 없지만

직관적으로 자명한 진리의 명제인 동시에

다른 명제들의 **전제**가 되는 명제

확률의 공리

모든 사건 A에 대하여 $0 \leq P(A) \leq 1$

어떤 확률도 0보다 작거나 1보다 클 수 없음

표본공간 Ω 에 대하여 $P(\Omega) = 1$

전체 표본공간, 즉 모든 확률의 합은 1임

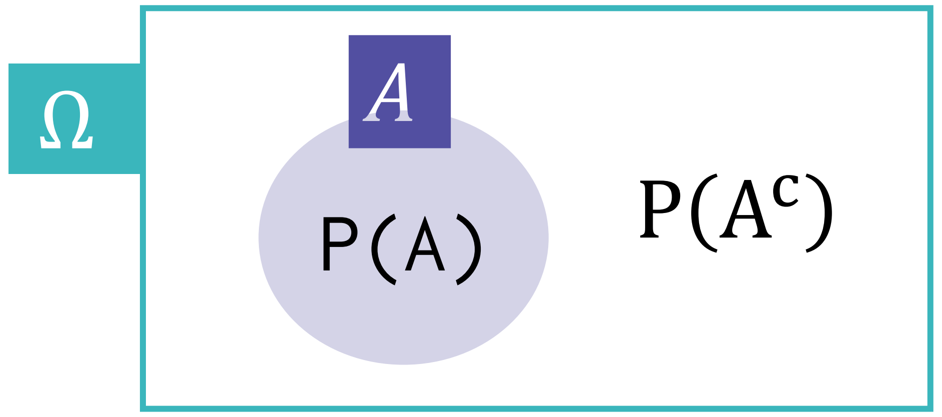
사건 $A_1, A_2, \ldots$ 이 서로 배반사건일 때

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

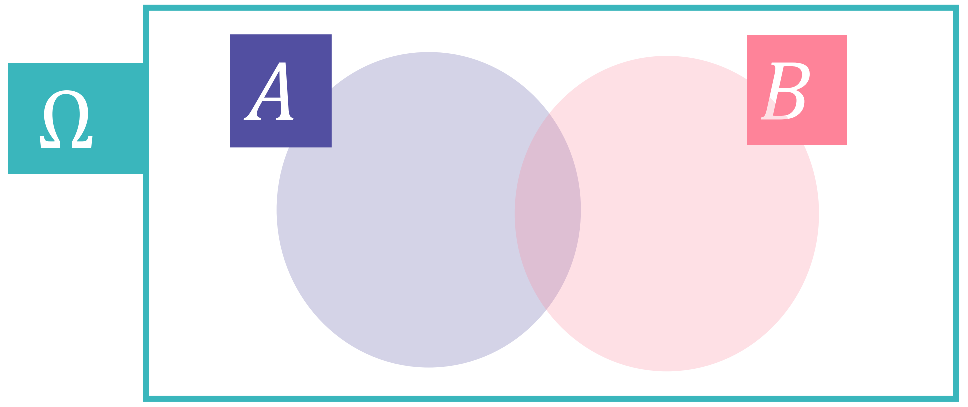
각 사건들의 교집합은 공집합이므로 서로 배반인 사건들이 일어날 전체 확률은 각각의 확률을 더한 것과 같음

확률의 정리

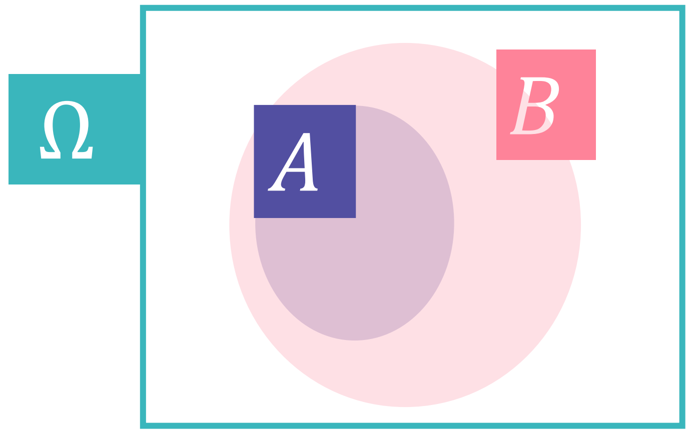
1.
사건 A의 여집합 A^c 에 대해 $P(A^c) = 1 - P(A)$



2.
임의의 두 사건 A와 B에 대하여
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

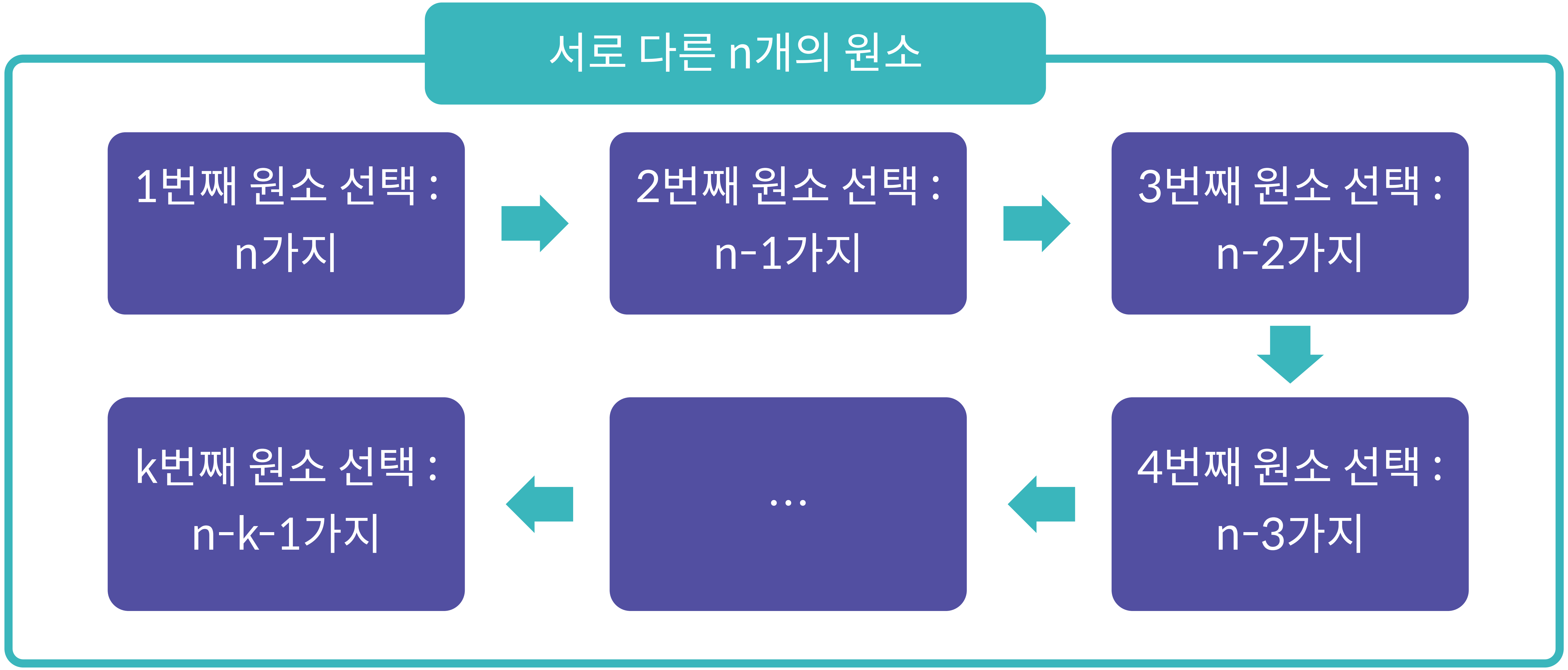


3.
$A \subset B$ 일 때
$P(A) \leq P(B)$



순열

순열



곱의 법칙에 의해 총 가능한 경우의 수

= n개의 서로 다른 원소 중 k개를 선택하여 배열하는 경우의 수 = 순열

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = {}_nP_k$$

순열

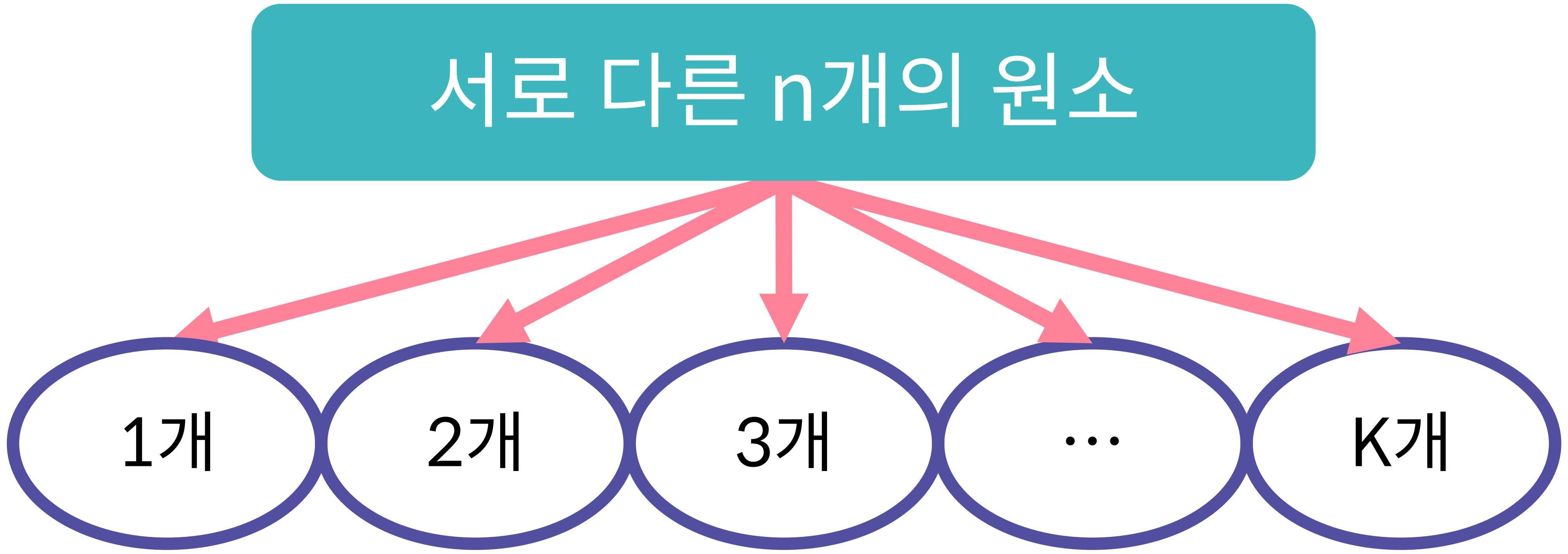
```
from itertools import permutations

list(permutations([n], k))
```

[] 안에 서로 다른 **n**개의 원소를 주고, 이 원소들 중 **k**개를
순서를 고려하여 뽑는 경우의 수 계산

조합

조합



서로 다른 n개의 원소에서 k개를 순서에 상관없이 선택하는 방법

$$= \frac{\text{(n개의 서로 다른 원소 중 k개를 선택하여 배열하는 경우의 수)}}{\text{(K개의 원소를 나열하는 경우의 수)}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

$$= {}_{n}C_{k}$$

조합

```
from itertools import combinations

list(combinations([n], k))
```

[] 안에 서로 다른 **n**개의 원소를 주고, 이 원소들 중 **k**개를
순서를 고려하지 않고 뽑는 경우의 수 계산

순열과 조합의 차이

- 순열
  - 순서가 **있음**
  - 반장/ 부반장 뽑기
- 조합
  - 순서가 **없음**
  - 2명의 대표 선발

중복순열

중복순열

서로 다른 n개의 원소 중에서 중복을 허용하여
r개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우

$$n\Pi r = n^r$$

예) a, b 중에서 중복을 허용하여 세 개를 뽑아 배열하는 경우 = 8개

a	a	a	a	b	a	b	a	a	b	b	a
a	a	b	a	b	b	b	a	b	b	b	b

중복순열

```
from itertools import product
list(product([n], repeat = k))
```

[] 안에 서로 다른 n개의 원소를 주고, 이 원소들 중 k개를 중복을 허용하면서 순서를 고려하여 뽑는 경우의 수 계산

중복조합

중복조합

서로 다른 n개의 대상 중 중복을 허용해
r개를 순서를 고려하지 않고 뽑는 경우

$$_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$$

예) 집합 S = {1,2,3,4} 에서
중복을 허용하여 3개의 원소를 뽑는 경우
(1,1,1) , (1,1,2), (1,1,3) ,⋯,(4,4,4)

$$_{4}H_{3} = {}_{4+3-1}C_{3} = {}_{6}C_{3} = 20$$

중복조합

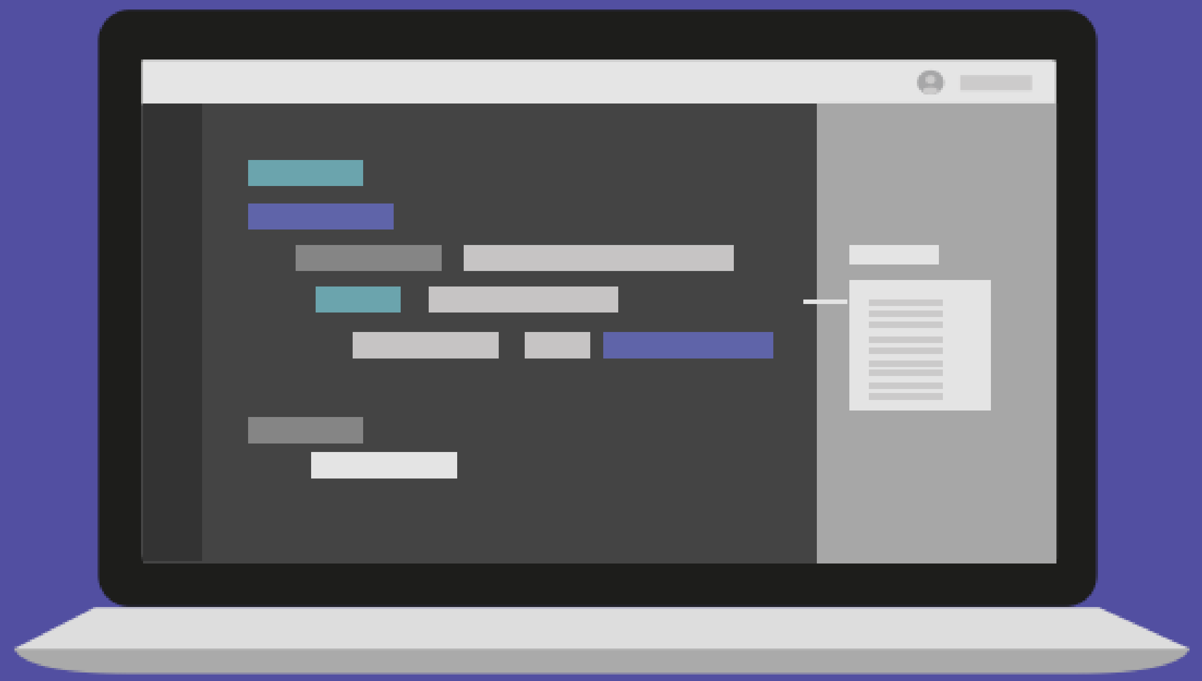
```
from itertools import combinations

list(combinations_with_replacement([n], k))
```

[] 안에 서로 다른 n개의 원소를 주고, 이 원소들 중
k개를 순서를 중복을 허락하여
순서를 고려하지 않고 뽑는 경우의 수

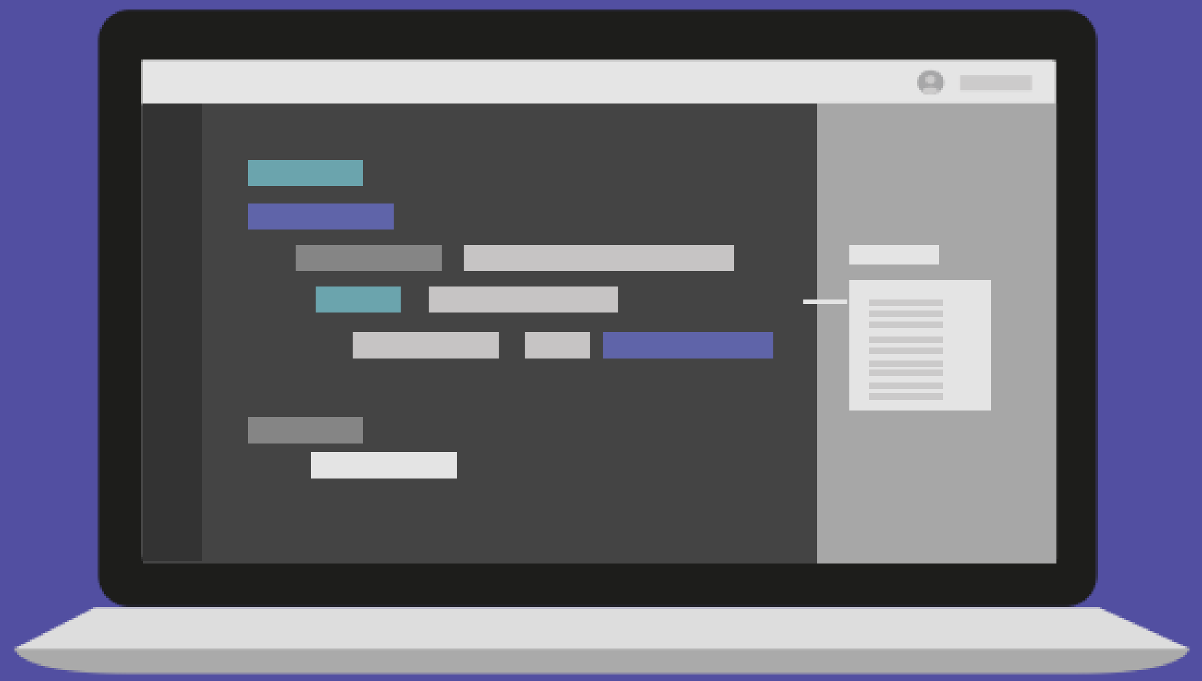
[실습]

순열과 조합



[실습]

중복순열과 중복조합



조건부 확률

조건부 확률

특정한 사건의 확률을 구할 때,
다른 사건에 대한 정보가 주어지는 경우

다른 사건에 대한 정보를 이용하여
확률을 구하므로 기존 확률과 **달라질 수 있음**

조건부 확률 예시

수강생 30명을 아래와 같이 성별과 응답(A,B) 에 따라 구분

응답\성별	남	여	계
A	10	5	15
B	8	7	15
계	18	12	30

이 반에서 임의로 학생을 한 명 선택하는 경우

조건부 확률 예시

1. 선택된 학생의 응답이 A일 확률

임의로 선택된 학생이 A응답일 확률은

전체 학생이 30명, A 응답 학생이 15명이므로

15/30

$$확률 = \frac{구하려는\ 사건의\ 경우의\ 수}{전체\ 경우의\ 수}$$

조건부 확률 예시

2. 여학생을 선택했을 때 응답이 A일 확률

여학생 수는 12명,

A응답 여학생이 5명이므로

확률은 5/12

정보가 주어진 사건이 **일어났을 때**

$$\text{조건부확률} = \frac{\text{구하려는 사건이 일어날 확률}}{\text{정보가 주어진 사건의 확률}}$$

조건부 확률 정의

P(B) $\neq$ 0 인 사건 B에 대한 정보가 주어졌을 때
A가 발생할 조건부 확률을 P(A|B)라 하면

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P(B|A) 와 P(A) 를 이용해 사건 $A \cap B$의 확률계산

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

독립

독립

일반적으로 두 사건은 서로 연관성이 있는 경우가 많음

예시

동전을 두 번 던지는 실험에서 A는 **앞면이 2번** 나오는 사건이라 하고 B는 **앞면이 1번** 이상 나오는 사건이라고 할 때, 사건 A가 발생하였다는 정보가 주어지면 사건 B는 반드시 발생했다고 할 수 있다

독립

조건부 확률

조건부 확률은 두 사건의 **연관성**에 따라 달라진다

사건 A와 사건 B 사이에 연관성이 없음	=	사건 B는 A에 아무런 영향을 주지 못함	=	$P(A\|B)=P(A)$
사건 A와 사건 B 사이에 어떤 연관성이 있음	=	사건 B는 A에 대한 영향을 줄 수도 있음	=	$P(A\|B)\neq P(A)$

독립

두 사건 A와 B 가 서로 독립일 때

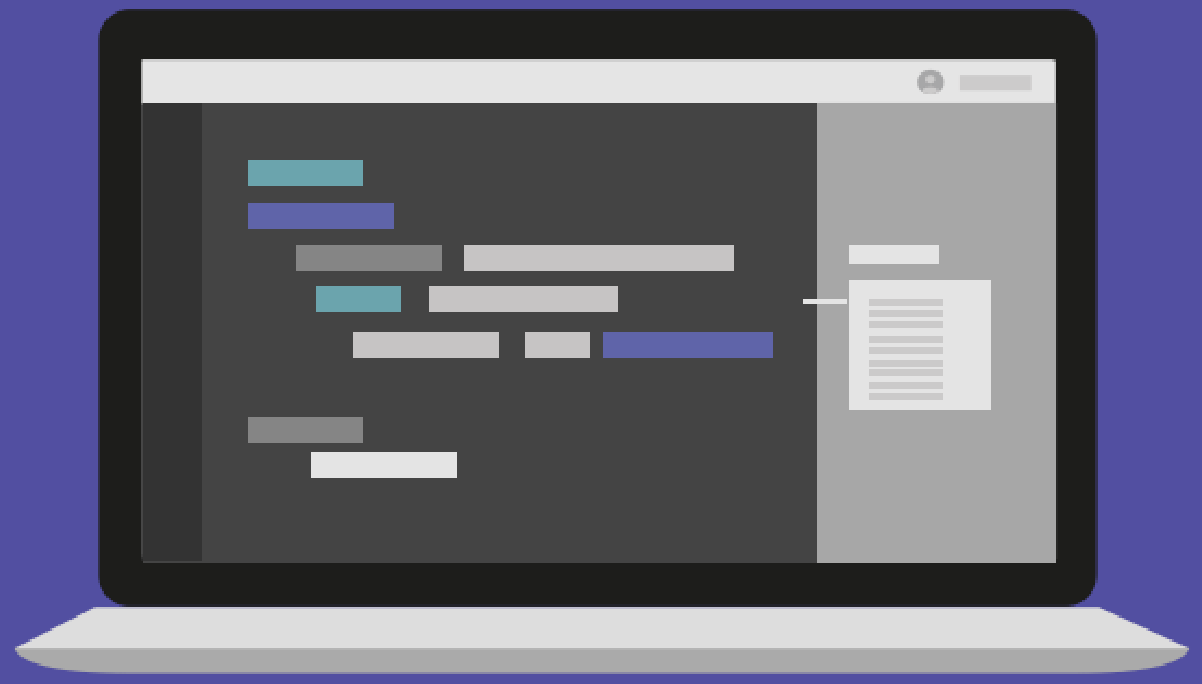
$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) * P(B)}{P(B)} = P(A)$$

사건 B가 A의 확률에 **영향을 주지 않음**

[실습]

조건부 확률과 독립



확률 분포

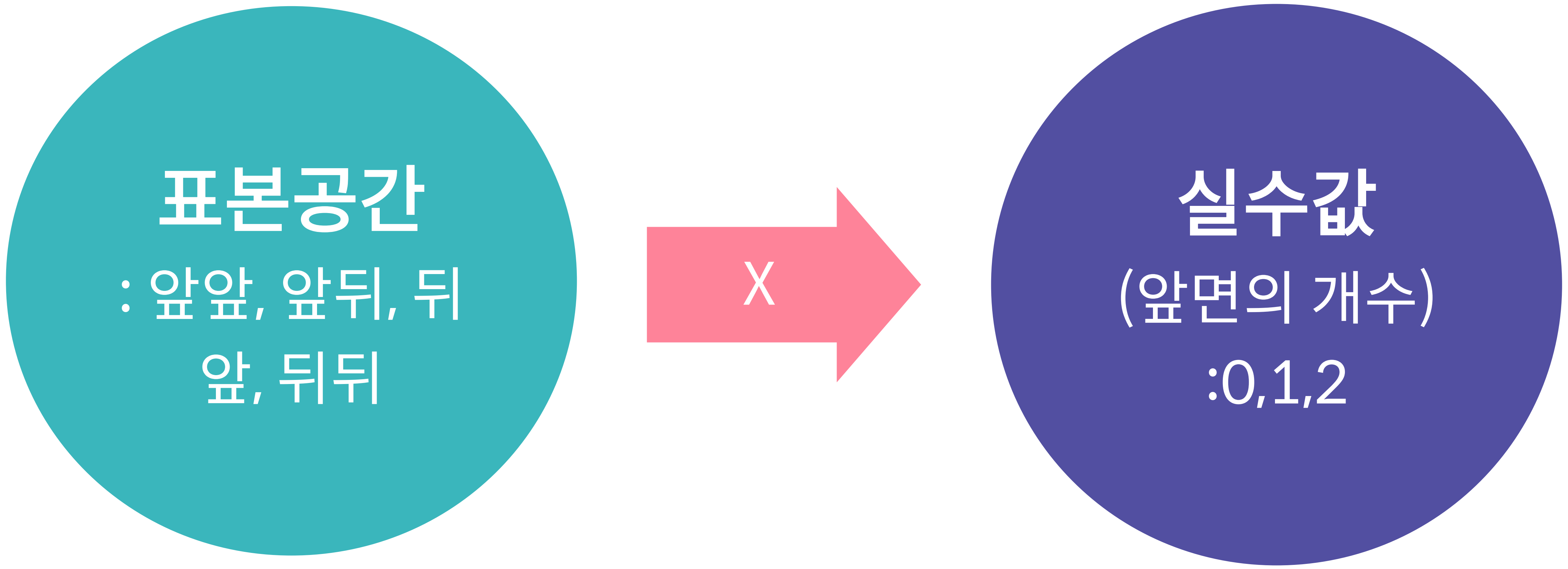
확률변수

각각의 근원사건에 실수값을 대응시킨 함수

X,Y,…처럼 대문자로 표시

시행을 하기 전엔 어떤 값을 갖게 될 지
알 수 없다는 불확실성을 표현

확률변수



동전을 2번 던졌을 때 앞면의 수를 나타내는 확률변수 X

$$P(X=2) = P(\{앞앞\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(\{앞뒤, 뒤앞\}) = \frac{1}{2}$$

확률분포

확률변수가 가질 수 있는 값들이 무엇이며,

그 값을 가질 가능성 또는 확률이

어떻게 분포되어 있는지를

0이상의 실수로 나타낸 것

이산 확률 분포

이산, 연속확률변수

이산확률변수

확률변수의 값의 개수를
셀 수 있는 경우

연속확률변수

확률변수의 값이 연속적인 구
간에 속하는 경우

이산확률분포

변수 x	확률 f(x)
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\cdots$	$\cdots$
x_k	$f(x_k)$
합계	1

확률질량함수

어떤 확률변수 x가 갖는 확률을 나타내는 함수

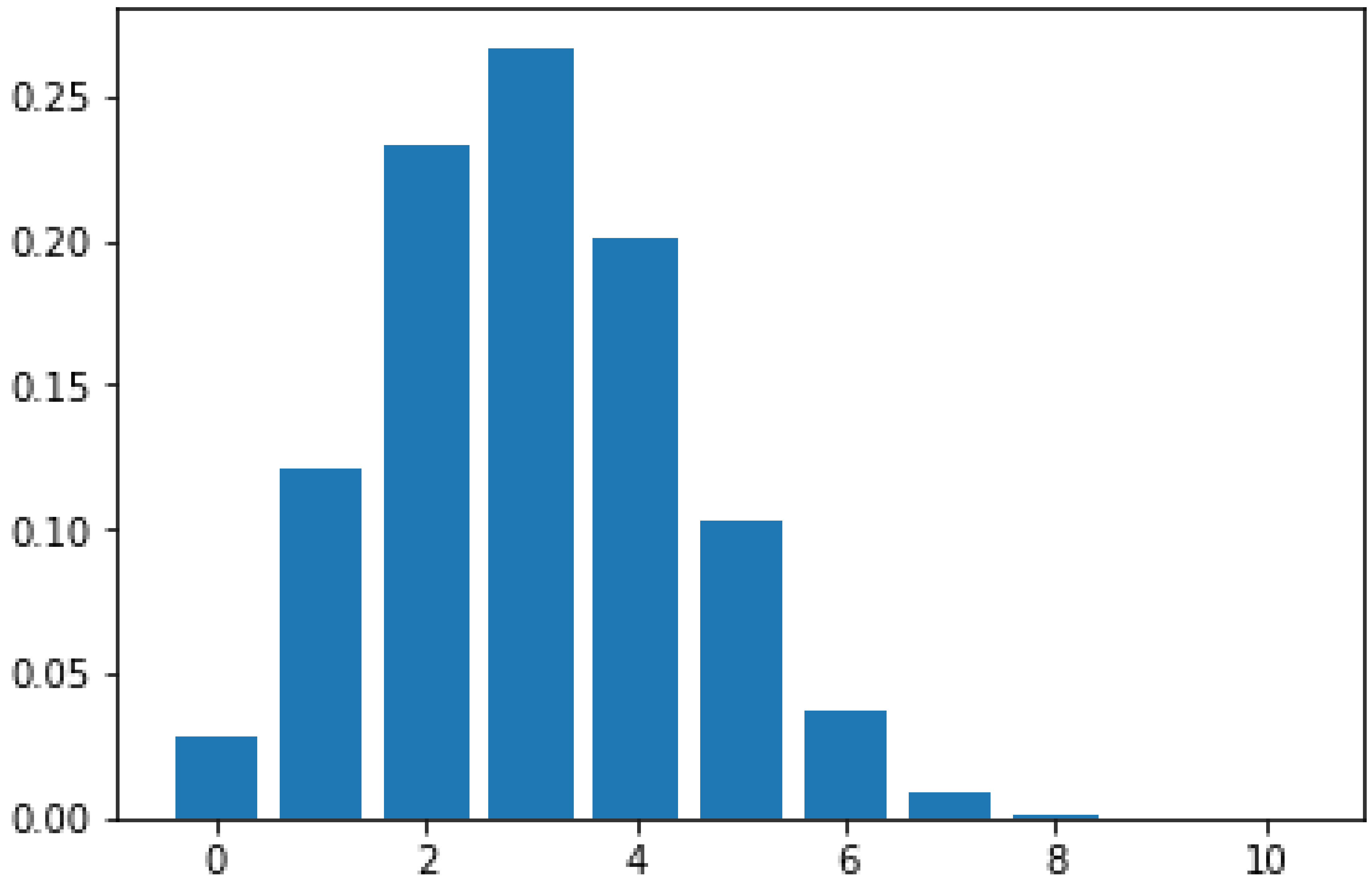
$y = f(x)$: x가 갖는 확률은 y이다

확률 질량 함수의 조건

모든 x_i값에 대해 $0 \leq f(x_i) \leq 1$이고

$\sum_{all\ x_i} f(x_i) = 1$

이산확률분포



이산확률분포의 종류

1) 베르누이분포
2) 이항분포
3) 기하분포
4) 음이항분포
5) 초기하분포
6) 포아송분포

…

확률밀도함수

연속확률변수 X가 갖는 확률의 분포를 표현

어느 구간의 확률이 더 크고 작은 지
나타낼 수 있는 함수를 이용

연속 확률 분포

연속확률분포

확률 밀도 함수의 조건

1) 모든 x 값에 대해 $f(x) \geq 0$

모든 x값에 대해 확률 밀도 함수값은 0보다 크거나 같다

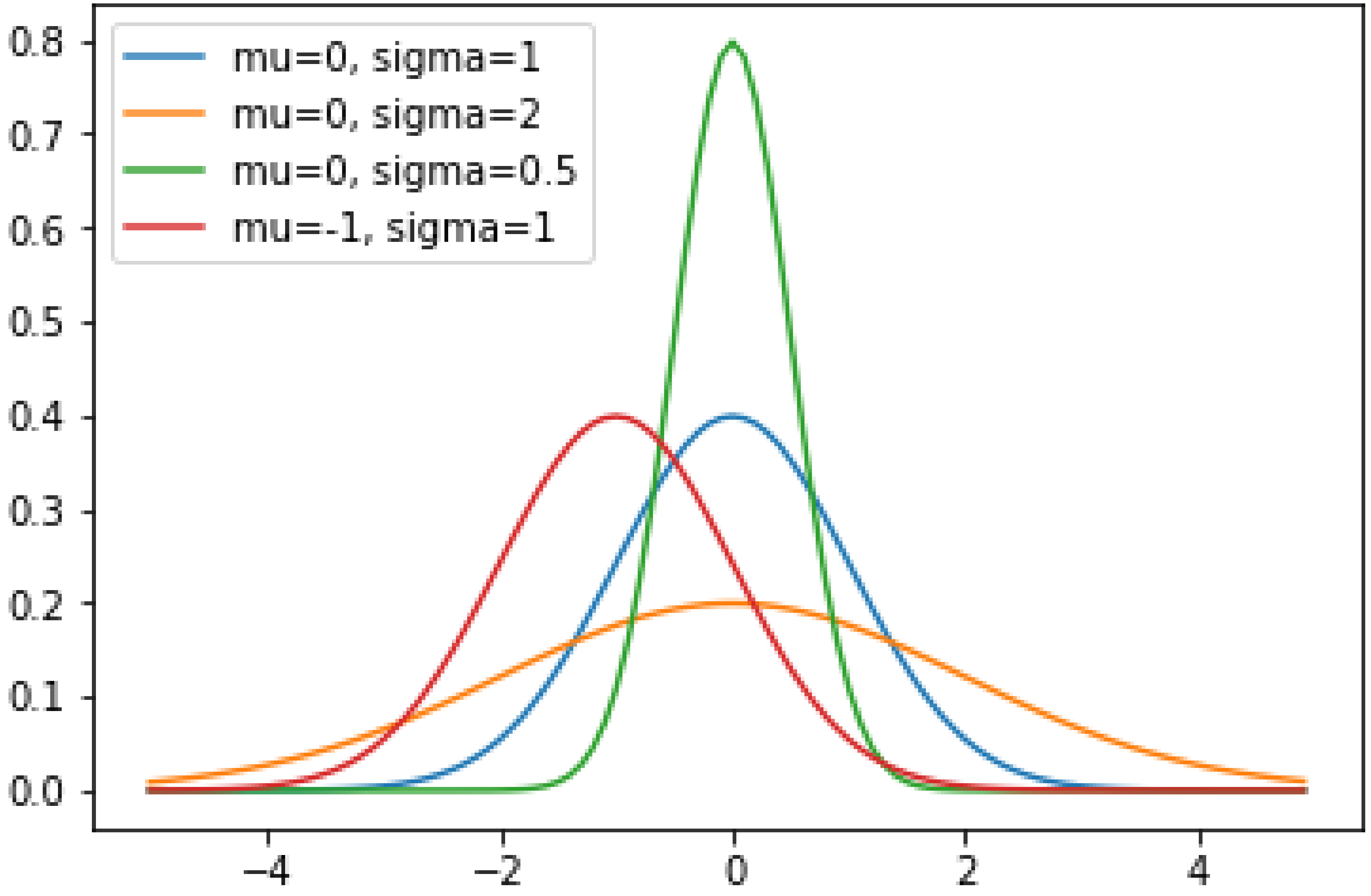
2) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

a~b까지 구간의 확률은 그 구간만큼 $f(x)$에서 적분한 값과 같다

3) $P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

전체 구간을 적분했을 때 확률 밀도 함수값은 1이다

연속확률분포



mu=0, sigma=1
mu=0, sigma=2
mu=0, sigma=0.5
mu=-1, sigma=1
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−4
−2
0
2
4

연속확률분포 종류

1) 균일분포
2) 지수분포
3) 감마분포
4) 정규분포
5) 베타분포

…

누적분포함수

누적분포함수

X가 가질 수 있는 가장 작은 값부터 x까지 해당하는
확률질량함수의 값을 누적해서 더한 것

$F(x) = P(X \leq x)$ 라고 표시

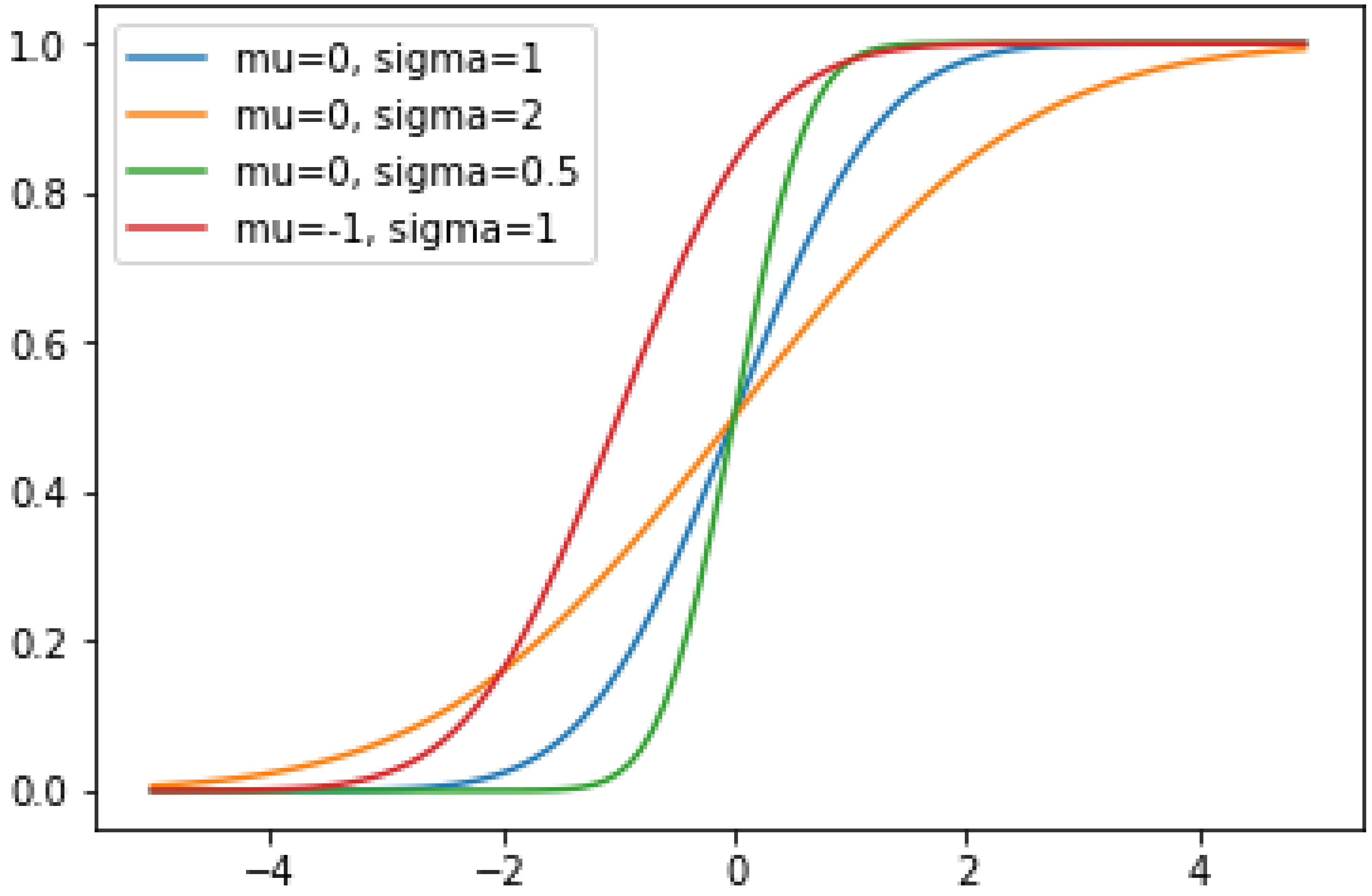
이산확률변수의 누적분포함수

$$F(x) = \sum_{y \leq x, y \epsilon X(s)} p(y)$$

연속확률변수의 누적분포함수

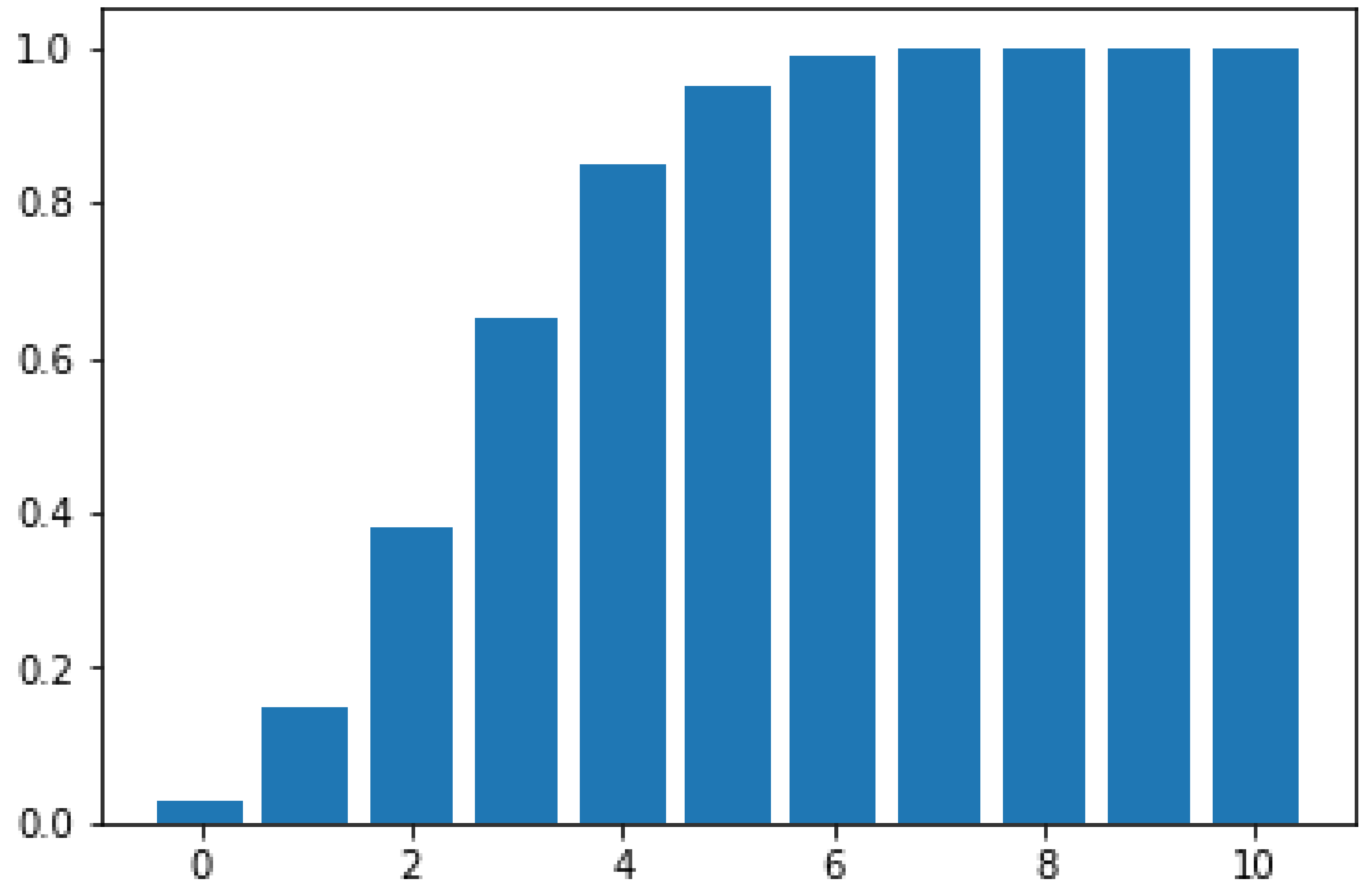
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

연속형 누적분포함수



mu=0, sigma=1
mu=0, sigma=2
mu=0, sigma=0.5
mu=-1, sigma=1
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−4
−2
0
2
4

이산형 누적분포함수



[실습]

확률분포