# 第一章　随机过程及其分类

在概率论中，我们研究了随机变量，$n$维随机向量。在极限定理中我们研究了无穷多个随机变量，但只局限在它们之间相互独立的情形。将上述情形加以推广，即研究一族无穷多个、相互有关的随机变量，这就是随机过程。

## 1. 随机过程的概念

定义：设$(\Omega, \Sigma, P)$是一概率空间，对每一个参数$t \in T$，$X(t,\omega)$是一定义在概率空间$(\Omega, \Sigma, P)$上的随机变量，则称随机变量族$X_T = \{X(t,\omega); t \in T\}$为该概率空间上的一随机过程。其中$T \subset R$是一实数集，称为指标集或参数集。

随机过程的两种描述方法：

用映射表示$X_T$，

$$X(t,\omega):\ T \times \Omega \to R$$

即$X(\cdot,\cdot)$是一定义在$T \times \Omega$上的二元单值函数，固定$t \in T$，$X(t,\cdot)$是一定义在样本空间$\Omega$上的函数，即为一随机变量；对于固定的$\omega \in \Omega$，$X(\cdot,\omega)$是一个关于参数$t \in T$的函数，通常称为样本函数，或称随机过程的一次实现，所有样本函数的集合确定一随机过程。记号$X(t,\omega)$有时记为$X_t(\omega)$或简记为$X(t)$。

参数$T$一般表示时间或空间。常用的参数一般有：(1) $T = N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$；(2) $T = \{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$；(3) $T = [a,b]$，其中$a$可以取$0$或$-\infty$，$b$可以取$+\infty$。当参数取可列集时，一般称随机过程为随机序列。

随机过程$\{X(t); t \in T\}$可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的状态空间，记作$S$。$S$中的元素称为状态。状态空间可以由复数、实数或更一般的抽象空间构成。

例 1：抛掷一枚硬币，样本空间为$\Omega = \{H,T\}$，借此定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{当出现H时}\\ 2t, & \text{当出现T时}\end{cases}\qquad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中$P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。

例 2：设

$$X(t)=A\cos(\omega t+\theta),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中$A$和$\omega$是正常数，$\theta\sim U(0,2\pi)$。试考察其样本函数和状态空间。

例 3：设正弦随机过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$，其中：$X(t)=A\cos\omega t$，$\omega$是常数，$A\sim U[0,1]$。试求：(1) 画出$X(t)$的样本函数；(2) 确定过程的状态空间；(3) 求$t=0,\pi/4\omega,3\pi/4\omega,\pi/\omega,\pi/2\omega$ 时$X(t_k)$的密度函数。

例 4：质点在直线上的随机游动，令$X_n$为质点在$n$时刻时所处的位置，试考察其样本函数和状态空间。

例 5：考察某“服务站”在$[0,t]$时间内到达的“顾客”数，记为$N(t)$，则$\{N(t),t\geq 0\}$是一随机过程，试考察其样本函数和状态空间。若记$S_n$为第$n$个“顾客”到达的时刻，则$\{S_n,n=1,2,\cdots\}$为一随机序列，我们自然要关心$\{S_n,n=1,2,\cdots\}$的情况以及它与随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$的关系，这时要将两个随机过程作为一个整体来研究其概率特性（统计特性）。

例 6：布朗运动。

## 2． 随机过程的分类

随机过程的分类一般有两种方法：(1) 以参数集和状态空间的特征来分类；(2) 以统计特征或概率特征来分类。我们分述如下：

### （一） 以参数集和状态空间的特性分类：

以参数集 $T$ 的性质，随机过程可分为两大类：(1) $T$ 可列；(2) $T$ 不可列。

以状态空间 $S$ 的性质，即 $X(t)$ 所取的值的特征，随机过程也可以分为两大类：(1) 离散状态，即 $X(t)$ 所取的值是离散的；(2) 连续状态，即 $X(t)$ 所取的值是连续的。

由此可将随机过程分为以下四类：

(a) 离散参数离散型随机过程；

(b) 连续参数离散型随机过程；

(c) 连续参数连续型随机过程；

(d) 离散参数连续型随机过程。

（二） 以随机过程的统计特征或概率特征分类：

以随机过程的统计特征或概率特征来进行分类，一般有以下一些：

(a) 独立增量过程；

(b) **Markov** 过程；

(c) 二阶矩过程；

(d) 平稳过程；

(e) 鞅；

(f) 更新过程；

(g) **Poission** 过程；

(h) 维纳过程。

注意：以上两种对随机过程的分类方法并不是独立的，比如，我们以后要讨论的 **Markov** 过程，就有参数离散状态空间离散的 **Markov** 过程，即 **Markov** 链，也要讨论参数连续状态离散的 **Markov** 过程，即纯不连续 **Markov** 过程。在下面几章中，我们将研究几种重要的、应用非常广泛的随机过程。

## 3. 随机过程的数字特征

### （一）单个随机过程的情形

设$\{X(t);t\in T\}$是一随机过程，为了刻画它的统计特征，通常要用到随机过程的数字特征，即随机过程的均值函数、方差函数、协方差函数和相关函数。下面我们给出它们的定义。

（a）　均值函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的均值函数定义为：(假设存在)

$$\mu_X(t)\hat{=}m(t)=E\{X(t)\}$$

（b）　方差函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的方差函数定义为：(假设存在)

$$\sigma_X^2(t)\hat{=}D_X(t)=E\{[X(t)-\mu_X(t)]^2\}$$

（c）　（自）协方差函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的（自）协方差函数定义为：

$$C_X(s,t)\hat{=}E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}$$

（d）　（自）相关函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的（自）相关函数定义为：

$$R_X(s,t)\hat{=}E\{X(s)X(t)\}$$

（e）　特征函数：记：

$$\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\hat{=}E\{\exp\{j[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]\}\}$$

称

$$\left\{\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\right\}$$

为随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维特征函数族。

数字特征之间的关系：

$$\begin{aligned}C_X(s,t)&\hat{=}E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}\\&=E\{X(s)X(t)\}-\mu_X(s)\cdot\mu_X(t)\\&=R_X(s,t)-\mu_X(s)\cdot\mu_X(t)\end{aligned}$$

$$\sigma_X^2(t)=D_X(t)=C_X(t,t)=R_X(t,t)-[\mu_X(t)]^2$$

例 7：考察上面的例 1，（1）写出$X(t)$的一维分布列$X(1/2),X(1)$；(2) 写出$X(t)$的二维分布列$(X(1/2),X(1))$；(3) 求该过程的均值函数和相关函数。

例 8：求例 2 中随机过程的均值函数和相关函数。

（二） 两个随机过程的情形

设$\{X(t);t\in T\}$、$\{Y(t);t\in T\}$是两个随机过程，它们具有相同的参数集，对于它们的数字特征，除了有它们自己的数字特征外，我们还有：

（a） 互协方差函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$的互协方差函数定义为：

$$C_{XY}(s,t)\hat{=}E\{[X(s)-\mu_X(s)][Y(t)-\mu_Y(t)]\}$$

（b） 互相关函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$的互相关函数定义为：

$$R_{XY}(s,t)\hat{=}E\{X(s)Y(t)\}$$

互协方差函数和互相关函数有以下的关系：

$$C_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-\mu_X(s)\cdot\mu_Y(t)$$

如果两个随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$，对于任意的两个参数$s,t\in T$，有

$$C_{XY}(s,t)=0$$

或

$$R_{XY}(s,t)=\mu_X(s)\cdot\mu_Y(t)=E\{X(s)\}\cdot E\{Y(t)\}$$

则称随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$是统计不相关的或不相关的。

（三） 有限维分布族

设$\{X(t);t\in T\}$是一随机过程，对于$\forall n\in N$，$\forall t_i\in T$ $(1\le i\le n)$，记

$$\begin{aligned}&F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\}\end{aligned}$$

其全体

$$\left\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\right\}$$

称为随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维分布族。它具有以下的性质：

（1）　对称性：对$(1,2,\cdots,n)$的任意排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$，则有：

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F_X(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n})$$

（2）　相容性：对于$m<n$，有：

$$\begin{aligned}&F_X(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty;t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)\\&=F_X(x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1,t_2,\cdots,t_m)\end{aligned}$$

注 1：随机过程的统计特性完全由它的有限维分布族决定。

注 2：有限维分布族与有限维特征函数族相互唯一确定。

问题：一个随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维分布族，是否描述了该过程的全部概率特性？解决此问题有以下著名的定理，此定理是随机过程理论的基础。

定理：（**Kolmogorov** 存在性定理）

设分布函数族$\left\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\right\}$满足以上提到的对称性和相容性，则必存在唯一的随机过程$\{X(t);t\in T\}$，使$\left\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\right\}$恰好是$\{X(t);t\in T\}$的有限维分布族，即：

$$\begin{aligned}&F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\}\end{aligned}$$

注：定理说明了随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维分布族包含了$\{X(t);t\in T\}$的所有概率信息。因此，研究随机过程的统计特征可以通过研究其有限维分布函数族的特性来达到。

（四）两个随机过程的独立性

设$\{X(t);t\in T\}$、$\{Y(t);t\in T\}$是两个随机过程，它们具有相同的参数集，任取$n,m\in N$，以及$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$t_1',t_2',\cdots,t_m'\in T$，则称$n+m$维随机向量

$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n), Y(t_1'), Y(t_2'), \cdots, Y(t_m'))$ 的联合分布函数：

$$\begin{aligned} &F_{XY}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_n; t_1', t_2', \cdots, t_m') \\ &= P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_n) \le x_n, Y(t_1') \le y_1, \cdots, Y(t_m') \le y_m\} \end{aligned}$$

为随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$的$n+m$维联合分布函数。

如果对于任取的$n, m \in N$，以及任意的$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，$t_1', t_2', \cdots, t_m' \in T$，随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$的联合分布函数满足：

$$\begin{aligned} &F_{XY}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_n; t_1', t_2', \cdots, t_m') \\ &= F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) \cdot F_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n; t_1', t_2', \cdots, t_m') \end{aligned}$$

则称随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$是独立的。

注：随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$独立可以得到随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$统计不相关，反之不对。但对于正态过程来说是等价的，这一点我们以后将看到。

## 4．$\delta$－函数及离散型随机变量分布列的$\delta$－函数表示

### （1）$\delta$－函数（Dirac 函数）的定义及性质

定义：对于任意的无穷次可微的函数$f(t)$，如果满足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt$$

其中：

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

则称$\delta_\varepsilon(t)$的弱极限为$\delta$－函数，记为$\delta(t)$。

显然，对于任意的$\varepsilon > 0$，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(t)dt=\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dt=1$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

注 1：$\delta(t)$ 在 $t=0$ 点的取值为 $\infty$，在 $t\neq 0$ 点的取值为 $0$，并且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$。

注 2：工程（信号处理等）上 $\delta$ －函数也称为单位脉冲函数或单位冲激函数。

$\delta$ －函数的筛选性质：

若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数，则有：

$$\int_{I}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

其中 $I$ 是包含点 $t=0$ 的任意区间。特殊地，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

更一般地，我们有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

（2）离散型随机变量分布列的 $\delta$ －函数表示

设离散型随机变量 $X$ 的分布列为：$P\{X=x_i\}=p_i \quad i=1,2,\cdots$，则由 $\delta$ －函数的筛选性质可以定义离散型随机变量 $X$ 的分布密度（离散型分布密度）为：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(x-x_i)$$

因为，由 $\delta$ －函数的筛选性质，离散型随机变量 $X$ 的分布函数可以表示为：

$$F(x)=P\{X\leq x\}=\sum_{x_i\leq x}p_i=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(u-x_i)du$$

注：工程上，常用离散型随机变量分布列的 $\delta$ －函数表示法。它将离散型随机变量的分布列表示成分布密度的形式，因此与连续型随机变量的概率分布密度函数一样，可以进行统一处理。在下面的例子中我们将看到它的应用。

## 5．条件数学期望

条件数学期望是随机数学中最基本最重要的概念之一，它在随机过程课程中具有广泛的应用，需要同学们很好地掌握。

（1）　离散型情形

定义：设二维离散型随机变量$(X,Y)$所有可能取的值是$(x_i,y_j)$，其联合分布率为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\geq 0$，记：

$$E\{X\mid Y\}\hat{=}\sum_j I_{(Y=y_j)}(\omega)E\{X\mid Y=y_j\}$$

称$E\{X\mid Y\}$为$X$ 关于$Y$的条件数学期望。

注 1：定义中的$I_{(Y=y_j)}(\omega)$是示性函数，即：

$$I_{(Y=y_j)}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in\{\omega:Y(\omega)=y_j\}\\ 0, & \omega\notin\{\omega:Y(\omega)=y_j\}\end{cases}$$

注 2：条件数学期望$E\{X\mid Y\}$是随机变量$Y$的函数，因此有关于它的分布，其分布为：

当$E\{X\mid Y=y_j\}\neq E\{X\mid Y=y_k\}\ (j\neq k)$时，

$$P\{E\{X\mid Y\}=E\{X\mid Y=y_j\}\}=P\{Y=y_j\}$$

否则，令：$D_j=\{k:E\{X\mid Y=y_k\}=E\{X\mid Y=y_j\}\}$，则

$$P\{E\{X\mid Y\}=E\{X\mid Y=y_j\}\}=\sum_{k\in D_j}P\{Y=y_k\}$$

注 3：由于条件数学期望$E\{X\mid Y\}$是随机变量$Y$的函数，故可以求其数学期望，其数学期望为：

$$E\{E\{X\mid Y\}\}=\sum_j E\{X\mid Y=y_j\}P\{Y=y_j\}=E\{X\}。$$

例 9：离散型随机变量$(X,Y)$的联合分布率如下表所示，试求$E\{X\mid Y\}$的分布率，$E\{X\},E\{E\{X\mid Y\}\}$。

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | $p_{\bullet j}$ |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **2/27** | **4/27** | **1/27** | **7/27** |
| **2** | **5/27** | **7/27** | **3/27** | **15/27** |
| **3** | **1/27** | **2/27** | **2/27** | **5/27** |
| $p_{i\bullet}$ | **8/27** | **13/27** | **6/27** | **1** |

（2）　连续型情形

定义：设二维随机变量具有联合分布密度函数 $f(x,y)$，$Y$ 的边缘分布为 $f_Y(y)$，若随机变量 $E\{X|Y\}$ 满足：

（a）$E\{X|Y\}$ 是随机变量 $Y$ 的函数，当 $Y=y$ 时，它的取值为 $E\{X|Y=y\}$；

（b）对于任意的事件 $D$，有：

$$E\{E\{X|Y\}|Y\in D\}=E\{X|Y\in D\}$$

则称随机变量 $E\{X|Y\}$ 为 $X$ 关于 $Y$ 的条件数学期望。

注 1：由于条件数学期望 $E\{X|Y\}$ 是随机变量 $Y$ 的函数，故可以求其数学期望，其数学期望为：

$$E\{E\{X|Y\}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y=y)f_Y(y)dy=E\{X\}$$

例 10：设：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$，则有：

$$E\{Y|X=x\}=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

$$E\{Y|X\}=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X-\mu_1)$$

解：先求 $Y$ 关于 $X=x$ 的条件分布密度，

$$f_{Y|X=x}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-\mu_2-\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1)\right]^2\right\}$$

即

$$f_{Y|X=x}(y|x) \sim N[\mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)]$$

$$E\{Y|X=x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y|x)dy = \mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1)$$

$$E\{Y|X\} = \mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(X-\mu_1)$$

（3）　条件数学期望的性质

在各给定的随机变量的数学期望存在的条件下，我们有：

（a）$E\{X\} = E\{E\{X|Y\}\}$；

（b）$E\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \middle| Y\right\} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i E\{X_i|Y\}$ a.s. ；其中 $\alpha_i\ (1\le i\le n)$ 为常数；

（c）$E\{g(X)h(Y)|Y\} = h(Y)E\{g(X)|Y\}$ a.s. ；

（d）$E\{g(X)h(Y)\} = E\{h(Y)E\{g(X)|Y\}\}$；

（e）　如果 $X, Y$ 独立，则有 $E\{X|Y\} = E\{X\}$；

证明：设 $(X,Y) \sim f(x,y)$，则有：

$$\begin{aligned}
E\{g(X)h(Y)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx\right]h(y)f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E\{g(X)|Y=y\}h(y)f_Y(y)dy = E\{h(Y)E\{g(X)|Y\}\}
\end{aligned}$$

注 1：常用的计算式子：

$$E\{g(X)h(y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{g(X)|Y=y\}h(x)f_Y(y)dy$$

$$P\{A\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{A|Y=y\}f_Y(y)dy$$

$$P\{X\le x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{X\le x|Y=y\}f_Y(y)dy$$

## 6．随机过程举例

例 a：如果正弦波随机过程为

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

其中振幅 $A$ 取常数，角频率 $\omega$ 取常数，而相位 $\theta$ 是一个随机变量，它均匀分布于 $(-\pi, \pi)$ 之间，即：

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求在 $t$ 时刻 $X(t)$ 的概率密度。

解：固定时刻 $t$，则随机变量 $X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ 是随机变量 $\theta$ 的函数。由分布函数的定义：

$$F_{X(t)}(y) = P\{X(t) \le y\} = P\{A\cos(\omega t + \theta) \le y\}$$

当 $y < -A$ 时，$F_{X(t)}(y) = 0$；当 $y \ge +A$ 时，$F_{X(t)}(y) = 1$

当 $-A \le y < +A$ 时，我们有：

$$\begin{aligned} F_{X(t)}(y) &= P\{X(y) \le y\} = P\{A\cos(\omega t + \theta) \le y\} = \\ &= P(\{-\pi < \theta \le \omega t - \arccos\frac{y}{A}\} \cup \{\arccos\frac{y}{A} - \omega t < \theta \le \pi\}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\omega t - \arccos\frac{y}{A}} dx + \int_{\arccos\frac{y}{A} - \omega t}^{\pi} dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\omega t - \arccos\frac{y}{A} + \pi + \pi - \arccos\frac{y}{A} + \omega t\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\omega t + \pi - \arccos\frac{y}{A}\right] \end{aligned}$$

因此，当 $-A \le y < +A$ 时，$X(t)$ 的概率密度为：

$$f_{X(t)}(y) = F'_{X(t)}(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}}$$

最终得到 $X(t)$ 的概率密度为：

$$f_{X(t)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}}, & -A \le y \le +A \\ 0, & \text{其　它} \end{cases}$$

例 b：设一由正弦振荡器输出的随机过程：

$$X(t)=A\cos(\Omega t+\theta),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中$A$、$\Omega$和$\theta$是相互独立的随机变量，并且已知它们的分布密度函数分别为：$\Omega\sim U(250,350)$、$\theta\sim U(0,2\pi)$及

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{2a}{A_0^2}, & a\in(0,A_0)\\ 0, & a\notin(0,A_0)\end{cases}$$

试求随机过程$X(t)$的一维概率密度。

解：设$Y(t)=a\cos(\omega t+\theta)$,其中$a$和$\omega$是常数，$\theta\sim U(0,2\pi)$，由例 a 的结果可知$Y(t)$的一维分布密度为：

$$f_{Y(t)}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}, & -a\le y\le +a\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

比较$X(t)$与$Y(t)$，我们有：

$$Y(t)=X(t\,|\,A=a,\Omega=\omega)$$

由连续型全概率公式，我们有：

$$P\{X(t)\le x\}=\iint P\{X(t)\le x\,|\,A,\Omega\}dF(a,\omega)$$

由于$A,\Omega$相互独立，因此有：

$$dF(a,\omega)=f(a,\omega)dad\omega=f_A(a)f_\Omega(\omega)dad\omega$$

故有$X(t)$的一维概率密度为：

$$f_{X(t)}(x)=\iint\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}f_A(a)f_\Omega(\omega)dad\omega=$$

$$=\int_x^{A_0}da\int_{250}^{350}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{2a}{A_0^2}\cdot\frac{1}{100}d\omega$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi A_0^2}\sqrt{A_0^2-x^2}, & |x|\le A_0\\ 0, & |x|>A_0\end{cases}$$

例 **c**：（一维随机游动）设有一质点在$x$轴上作随机游动，即在$t=0$时质点属于$x$轴的原点，在$t=1,2,3,\cdots$时质点可以在$x$轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为$p$和$q=1-p$。经时间$n$，质点偏离原点的距离为$k$，问经时间$n$步后，质点处于位置$k$的概率如何？

解：设质点第$i$次移动时的距离为$\xi_i$，则$\xi_i$是离散的随机变量，它可取＋**1**，也可取－**1**。且$P\{\xi_i=+1\}=p,\ P\{\xi_i=-1\}=1-p=q$

设：质点在$t=n$时，偏离原点的距离为$X_n$，则$X_n$也是一随机变量，且有：

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \qquad X_0=0$$

由题意，$\xi_i$与质点所处位置无关，且$\xi_i$与$\xi_k$（$i\neq k$）独立。

当$t=n$时，质点可取的值为:

$$n,n-2,n-4,\cdots,-(n-4),-(n-2),-n$$

如果在$n$次游动中有$m$次质点右向移动一个单位，即有$m$次$\xi_i=+1$发生，则有$n-m$次质点左向移动一个单位，即有$n-m$次$\xi_i=-1$发生，此时有：

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i=m\times(+1)+(n-m)\times(-1)=2m-n=k$$

由此得到 $m=\dfrac{n+k}{2}$。

因此，由题意，我们有：

$$P\{X_n=k\}=C_n^m p^m q^{n-m}=C_n^{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}=\frac{n!}{(\frac{n+k}{2})!(\frac{n-k}{2})!}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}$$

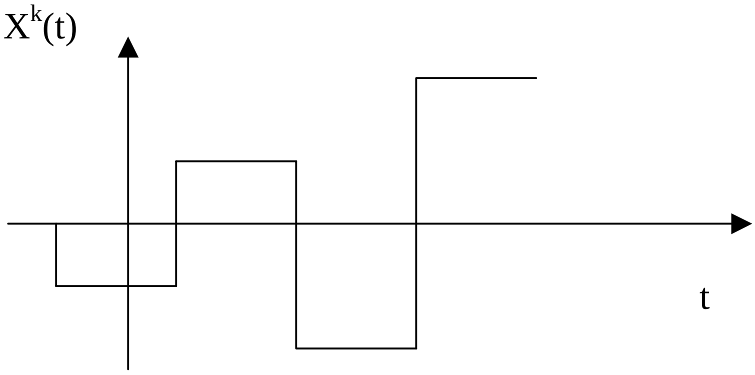
此式中$m$是一正整数，则如果$n$为奇数时，$k$也是奇数$(k<n)$；如果$n$为偶数时，$k$也是偶数$(k<n)$。

例 **d**：设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为$T_0$的脉冲信号，每隔 $T_0$ 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值 $\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差$u$为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。试求在两个时刻$t_1$ ,$t_2$时，随机过程 $X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。

解：典型样本函数如下图：




在时间轴上任意固定两个时刻$t_1,t_2$，我们令：

事件$C$：$t_1,t_2$间有不同周期的脉冲存在，即$t_1,t_2$处在不同的脉冲周期内；

事件$C^c$：$t_1,t_2$间没有不同周期的脉冲存在，即$t_1,t_2$处在相同的脉冲周期内；

（**1**）　当$|t_1-t_2|>T_0$时，有$P\{C\}=1$ 和 $P\{C^c\}=0$

（**2**）　当$|t_1-t_2|\le T_0$时，$t_1,t_2$可能处在同一脉冲内，也可能不处在同一脉冲内。假设$\theta$为$t_1$所在的脉冲的起始时刻，由于脉冲的起始时刻相对于原点$t=0$的时间差$u$是$(0,T_0)$内的均匀分布，而且该信号是等宽的脉冲信号，因此$\theta$可以看作均匀分布于$(t_1-T_0,t_1)$的随机变量。

如果$t_1<t_2$，则：

$$P\{C^c\} = P\{t_2 < \theta + T_0\} = P\{\theta > t_2 - T_0\} = 1 - P\{\theta < t_2 - T\}$$
$$= 1 - \frac{1}{T_0}\int_{t_1 - T_0}^{t_2 - T_0} d\theta = 1 - \frac{t_2 - t_1}{T_0}$$

如果$t_1 > t_2$，则：$P\{C^c\} = P\{t_2 > \theta\} = \frac{1}{T_0}\int_{t_1 - T_0}^{t_2} d\theta = 1 - \frac{t_1 - t_2}{T_0}$

因此有：　　$P\{C^c\} = 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$　　$P\{C\} = \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$

由全概率公式：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1, x_2) = f_{X_{t_1}X_{t_2}|C}(x_1, x_2|C)P\{C\} + f_{X_{t_1}X_{t_2}|C^c}(x_1, x_2|C^c)P\{C^c\}$$

根据不同周期内脉冲幅度是相互独立的随机变量，我们有：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}|C}(x_1, x_2|C) = \left[\sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\right] \times \left[\sum_{k=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_2 - k)\right]$$

如果$t_1, t_2$处在同一周期内，则$X_{t_1} = X_{t_2}$，此时有：

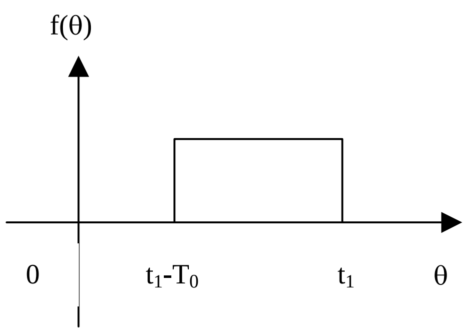
$$f_{X_{t_1}X_{t_2}|C^c}(x_1, x_2|C^c) = \left[\sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\delta(x_2 - i)\right]$$

由此最终得到$(X(t_1), X(t_2))$的二维联合概率密度如下：

当$|t_1 - t_2| \le T_0$时：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1, x_2) = \left[\sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\right] \times \left[\sum_{k=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_2 - k)\right]\frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$$
$$+ \left[\sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\delta(x_2 - i)\right]\left(1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}\right)$$

当$|t_1 - t_2| > T_0$时：$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1, x_2) = \left[\sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\right] \times \left[\sum_{k=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_2 - k)\right]$



例 **e**：设有某通信系统，它传送的信号是脉宽为$T_0$的脉冲信号，脉冲信号的周期为$T_0$。如果脉冲幅度$X(t)$是随机的，幅度服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，不同周期内的的幅度是相互统计独立的。脉冲沿的位置也是随机的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差$u$为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。$u$和脉冲幅度间也是相互统计独立的（脉冲幅度调制信号），试求在两个时刻$t_1$ ,$t_2$时，该随机过程$X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。

解：在时间轴上任意固定两个时刻$t_1,t_2$，讨论同例 **d**。

特别注意此时的状态空间！

（**a**）　当$|t_1-t_2|>T_0$时，$t_1,t_2$位于不同的周期内，此时我们有：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right\}$$

（**b**）　当$|t_1-t_2|\le T_0$时，$t_1,t_2$位于两个不同的周期内的概率为：

$$P\{C\}=\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

$t_1,t_2$位于相同的周期内的概率为：

$$P\{C^c\}=1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

根据全概率公式，我们有：

$$\begin{aligned}f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right\}\delta(x_1-x_2)\cdot\left[1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right]\end{aligned}$$

因为当$t_1,t_2$处在同一脉冲周期时，$X(t_1),X(t_2)$取相同的值，所以上式的第二项出现了$\delta(x_1-x_2)$函数。

此例中看出，$X(t_1),X(t_2)$的二维联合概率密度不再是二维正态分布，虽然

$X(t_1)$和$X(t_2)$都是正态分布。

例 f：考察一随机过程，它在$t_0+nT_0$时刻具有宽度为$b$的矩形脉冲波，脉冲幅度$A$为一等概率取值$\pm a$的随机变量，且$b<T_0$，$t_0$是在$(0,T_0)$上服从均匀分布的随机变量，并且脉冲幅度$A$与$t_0$独立，试求该过程的相关函数和方差。

解：由给定的随机过程，我们有：

$$E\{X(t)\}=a\times p+(-a)\times p+0\times(1-2p)=0$$

下面求相关函数：

任意取$t_1,t_2$，且$t_1<t_2$，当$|t_1-t_2|>T_0$时，$t_1,t_2$位于不同的周期内，此时有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}=0$$

当$|t_1-t_2|\le T_0$，且$t_1,t_2$位于两个不同的周期内时，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}=0$$

当$|t_1-t_2|\le T_0$，且$t_1,t_2$位于同一的周期内时，假设$\theta$为$t_1$所在的脉冲的起始时刻，只有当$t_2<\theta+b$时，$X(t_1)$和$X(t_2)$取到不为零的值，此时的概率为：

$$P\{t_2<\theta+b\}=1-P\{\theta<t_2-b\}=1-\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2-b}d\theta=\frac{b-(t_2-t_1)}{T_0}$$

由此，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\}=a^2\cdot\frac{b-(t_2-t_1)}{T_0}$$

同理，当$t_1>t_2$是，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\}=a^2\cdot\frac{b-(t_1-t_2)}{T_0}$$

因此，最终得到：

$$R_X(\tau)=\frac{a^2(b-|\tau|)}{T_0},\quad \tau=t_2-t_1,\qquad D_X(t)=R_X(0)=\frac{a^2b}{T_0}$$

例 g：随机电报信号定义如下：

（1）在任何时刻$t$，$X(t)$取值为 0 或 1，只有两种可能状态。并设

$$P\{X(t)=0\}=1/2,\ P\{X(t)=1\}=1/2$$

（2）每个状态的持续时间是随机的，设在$T$时间内波形变化的次数$\mu$服从 **Poission** 分布即：

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\quad (\lambda>0, T>0)$$

（3）$X(t)$取何值（即所处的状态）与随机变量$\mu$是相互统计独立的。

求随机电报信号$X(t)$的均值函数和自相关函数。

解：由均值函数和自相关函数的定义，有：

（1）　均值函数：$E\{X(t)\}=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，即均值函数是常数。

（2）　相关函数：在时间轴上任意固定两个时刻$t_1,t_2$，如果$t_2>t_1$，则

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}&=1\times 1P\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}+\\ &+0\times 1P\{X(t_1)=0,X(t_2)=1\}+1\times 0P\{X(t_1)=1,X(t_2)=0\}\\ &+0\times 0P\{X(t_1)=0,X(t_2)=0\}\end{aligned}$$

下面求$P\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}$。由于事件：$\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}$ 等价于事件：$\{X(t_1)=1,在t_2-t_1时间内波形发生偶数次变化\}$，即等价于事件：$\{X(t_1)=1,\mu=偶数\}$，故：

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1,t_2)&=P\{X(t_1)=1,\mu=偶数\}\\ &=P\{X(t_1)=1\}P\{\mu=偶数\}\\ &=\frac{1}{2}P\{\mu=偶数\}=\frac{1}{2}\sum_{k=偶数}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}++\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}]\\ &=\frac{1}{4}e^{-\lambda(t_2-t_1)}[e^{\lambda(t_2-t_1)}+e^{-\lambda(t_2-t_1)}]=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}]\end{aligned}$$

同理，如果$t_2 < t_1$，则有

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \frac{1}{4}[1 + e^{2\lambda(t_2 - t_1)}]$$

故有：

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \frac{1}{4}[1 + e^{-2\lambda|t_1 - t_2|}]$$

因此有：

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1,t_2) &= R_{XX}(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2)) \\ &= \frac{1}{4}e^{-2\lambda|t_1 - t_2|} \end{aligned}$$

设时间差$\tau = t_1 - t_2$，则有

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \frac{1}{4}[1 + e^{-2\lambda|\tau|}]$$

$$C_{XX}(t_1,t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2)) = \frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$$

因为随机电报信号$X(t)$的均值函数为常数，相关函数仅为时间差的函数，故随机电报信号是宽平稳过程。

## 6．复随机过程

定义：设$X, Y$为同一概率空间$(\Omega, \Sigma, P)$上的两个取实数值的随机变量，并设$Z = X + jY$，则称$Z$为该概率空间上的一个复随机变量。

我们有：

$$E\{Z\} = E\{X\} + jE\{Y\}$$

$$\begin{aligned} D\{Z\} &= E\{|Z - E\{Z\}|^2\} = E\{[Z - E\{Z\}]\overline{[Z - E\{Z\}]}\} \\ &= E\{(X - EX)^2\} + E\{(Y - EY)^2\} \end{aligned}$$

定义：设$\{X(t)\}$和$\{Y(t)\}$是具有相同参数和概率空间的一对实随机过程，

则$Z(t)=X(t)+jY(t)$称为复随机过程。

同样有：

$E\{Z(t)\}=E\{X(t)\}+jE\{Y(t)\}$，称为均值函数。

$R_{ZZ}(t_1,t_2)\hat{=}E\{Z(t_1)\overline{Z(t_2)}\}=E\{[X(t_1)+jY(t_1)]\overline{[X(t_2)+jY(t_2)]}\}$，称为复随机过程的相关函数。

例 **8**：设有复随机过程$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$，其中$\eta_k$ $(1\le k\le N)$是相互独立的随机变量，且服从正态分布$N(0,\sigma_k^2)$，$\omega_k$为常数。试求$\xi(t)$的均值函数和相关函数。

解：由于：

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}=\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos(\omega_k t)+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin(\omega_k t)$$

因此有：

$$E\{\xi(t)\}=E\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}\}=E\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos(\omega_k t)+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin(\omega_k t)\}=0$$

$$R_{\xi}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}=E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t_1}\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{N}\eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_k\eta_i e^{j\omega_k t_1-j\omega_i t_2}\right\}=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k(t_1-t_2)}=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k\tau}$$

其中$\tau=t_1-t_2$。

注意：均值为零，相关函数是时间差的函数，是宽平稳过程。

## 习题：

1、设随机向量$(X,Y)$的两个分量相互独立，且均服从标准正态分布$N(0,1)$。

(a) 分别写出随机变量$X+Y$和$X-Y$的分布密度

(b) 试问：$X+Y$与$X-Y$是否独立？说明理由。

2、设$X$和$Y$为独立的随机变量，期望和方差分别为$\mu_1,\sigma_1^2$和$\mu_2,\sigma_2^2$。

(a) 试求$Z=XY$和$X$的相关系数；

(b) $Z$ 与 $X$ 能否不相关？能否有严格线性函数关系？若能，试分别写出条件。

3、设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个实的均值为零，二阶矩存在的随机过程，其相关函数为 $E\{X(s)X(t)\} = B(t-s), s \leq t$，且是一个周期为 $T$ 的函数，即 $B(\tau+T) = B(\tau), \tau \geq 0$，试求方差函数 $D[X(t) - X(t+T)]$。

4、考察两个谐波随机信号 $X(t)$ 和 $Y(t)$，其中：

$$X(t) = A\cos(\omega_c t + \phi), \quad Y(t) = B\cos(\omega_c t)$$

式中 $A$ 和 $\omega_c$ 为正的常数；$\phi$ 是 $[-\pi, \pi]$ 内均匀分布的随机变量，$B$ 是标准正态分布的随机变量。

(a) 求 $X(t)$ 的均值、方差和相关函数；

(c)　若 $\phi$ 与 $B$ 独立，求 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互相关函数。

5、设 $\xi(t) = X\sin(Yt); t \geq 0$，而随机变量 $X$、$Y$ 是相互独立且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。

6、设随机向量 $X = (X_1, X_2)^\tau = (\mu, \Sigma)^\tau$，其中：$\mu = (\mu_1, \mu_2)^\tau = (1, 2)^\tau$，$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 \\ 4/5 & 1 \end{pmatrix}$，令随机向量 $Y = (Y_1, Y_2)^\tau = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X$。

(a)　试求随机向量 $Y$ 的协方差矩阵、$E\{Y_2 | Y_1\}$ 及 $E\{Y_1 + Y_2\}$；

(b)　试问 $X_2 - E\{X_2 | X_1\}$ 与 $X_1$ 是否独立？证明你的结论。

**教材：P33－37：1、4、5、10、11、12。**

# 第二章　Markov 过程

本章我们先讨论一类参数离散、状态空间离散的特殊随机过程，即参数为 $T=\{0,1,2,\cdots\}=N_0$，状态空间为可列 $S=\{1,2,\cdots\}$ 或有限 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 **Markov** 链。**Markov** 链最初由 **Markov** 于 **1906** 年引入，至今它在自然科学、工程技术、生命科学及管理科学等诸多领域中都有广泛的应用。之后我们将讨论另一类参数连续状态空间离散的随机过程，即研究纯不连续 **Markov** 过程。

## 1.　Markov 链的定义

定义：设随机序列 $\{X(n);n\geq 0\}$ 的状态空间为 $S$（离散），如果对 $\forall n\in N_0$，及 $i_0,i_1,\cdots,i_n,i_{n+1}\in S,\quad P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}>0$，有：

$$
\begin{aligned}
&P\{X(n+1)=i_{n+1}\,|\,X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}=\\
&=P\{X(n+1)=i_{n+1}\,|\,X(n)=i_n\}
\end{aligned}
\tag{A}
$$

则称 $\{X(n);n\geq 0\}$ 为 **Markov** 链。

注 **1**：随机序列 $\{X(n);n\geq 0\}$ 也可记为 $\{X_n;n\geq 0\}$。

注 **2**： 等式（**A**）刻画了 **Markov** 链的特性，称此特性为 **Markov** 性或无后效性（即随机过程将来的状态只与现在的状态有关，而与过去无关），简称为马氏性。**Markov** 链也称为马氏链。

定义：设 $\{X(n);n\geq 0\}$ 为马氏链，状态空间为 $S$，对于 $\forall i,j\in S$，称

$$P\{X(n+1)=j\,|\,X(n)=i\}\triangleq p_{ij}(n)$$

为马氏链 $\{X(n);n\geq 0\}$ 在 $n$ 时刻的一步转移概率。若对于 $\forall i,j\in S$，有

$$P\{X(n+1)=j\,|\,X(n)=i\}\triangleq p_{ij}(n)\equiv p_{ij}$$

即上面式子的右边与时刻 $n$ 无关，则称此马氏链为齐次（或时齐的）马氏链。

对于齐次马氏链，我们记 $P=(p_{ij})$，称矩阵 $P$ 为齐次马氏链的一步转移概

率矩阵，简称为转移矩阵。

注 3：对于马氏链$\{X(n); n\geq 0\}$，我们有：

$$
\begin{aligned}
&P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \cdots, X(n)=i_n\}= \\
&=P\{X(n)=i_n \mid X(0)=i_0, X(1)=i_1, \cdots, X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot \\
&\quad \cdot P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \cdots, X(n-1)=i_{n-1}\} \\
&=P\{X(n)=i_n \mid X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \cdots, X(n-1)=i_{n-1}\} \\
&=\cdots \\
&=P\{X(n)=i_n \mid X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot P\{X(n-1)=i_{n-1} \mid X(n-2)=i_{n-2}\}\cdot\cdots\cdot \\
&\quad \cdot P\{X(1)=i_1 \mid X(0)=i_0\}\cdot P\{X(0)=i_0\} \\
&=p_{i_{n-1}i_n}(n-1)\, p_{i_{n-1}i_{n-1}}(n-2)\cdot\cdots\cdot p_{i_0 i_1}(0)\cdot P\{X(0)=i_0\}
\end{aligned}
$$

因此，只要得到了马氏链的一步转移概率及初始分布，就可以求得马氏链的任意前$n+1$维的联合分布。特别地，若马氏链是齐次的，则由转移矩阵及初始分布，就可以得到齐次马氏链的任意前$n+1$维的联合分布。

注 4：一步转移概率满足：

$$p_{ij}(n)\geq 0 \quad (i,\ j\in S)$$

$$\sum_{j\in S} p_{ij}(n)=1 \quad i\in S$$

注 5：若状态空间是有限的，设状态数为$n$则一步转移矩阵是$n$阶方阵，若状态是无限可列的情形，则一步转移矩阵只是形式上的矩阵。

## 2.　切普曼－柯尔莫哥洛夫（C－K）方程

### （一）$m$步转移概率的定义

定义：称$p_{ij}^{(m)}(n)=P\{X(n+m)=j \mid X(n)=i\}$为马氏链$\{X(n); n\geq 0\}$的$m$步转移概率。在齐次马氏链的情况下，$p_{ij}^{(m)}(n)$与$n$无关，我们记为$p_{ij}^{(m)}$，称

$$P^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})$$

为齐次马氏链的$m$步转移（概率）矩阵。

显然有：

$$p_{ij}^{(m)}(n)\ge 0 \qquad (i,j\in S)$$

$$\sum_{j\in S}p_{ij}^{(m)}(n)=1 \qquad (i\in S)$$

$m=1$时，即为一步转移矩阵。

规定：
$$p_{ij}^{(0)}(n)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

（二）切普曼－柯尔莫哥洛夫（**C**－**K**）方程

定理：对于$m$步转移概率有如下的 **C**－**K** 方程：

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}(n)p_{kj}^{(r)}(n+m) \quad (i,j\in S)$$

对于齐次马氏链，此方程为：

$$p_{ij}^{(m+r)}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(r)} \quad (i,j\in S) \qquad (\text{C－K 方程})$$

证明：由$m$步转移概率的定义、全概率公式及马氏性，有：

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=$$

$$=P\{X(n+m+r)=j \mid X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X(n+m+r)=j,X(n+m)=k \mid X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X(n+m+r)=j \mid X(n+m)=k,X(n)=i\}\cdot$$

$$\cdot P\{X(n+m)=k \mid X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X(n+m+r)=j \mid X(n+m)=k\}P\{X(n+m)=k \mid X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}(n)p_{kj}^{(r)}(n+m)$$

对于齐次马氏链的情形：我们可以写成矩阵的形式即有：

$$P^{(m+r)}=P^{(m)}P^{(r)}$$

由此推出：

$$P^{(m)} = P^{(m-1)} P^{(1)} = \cdots = (P)^m = P^m$$

其中：$P^{(1)} = P$

由此可知：对于齐次马氏链，如果知道了它的初始分布 $\pi(0)$ 和一步转移矩阵 $P$，就可以求得 $X(n)$ 的所有有限维概率分布。即有：

$$\begin{aligned} & P\{X(n_1) = i_1, X(n_2) = i_2, \cdots, X(n_k) = i_k\} = \\ & = \sum_{j \in S} p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})} p_{i_{k-2} i_{k-1}}^{(n_{k-1} - n_{k-2})} \cdots p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} p_{j i_1}^{(n_1)} P\{X(0) = j\} \end{aligned}$$

上式中各 $m$ 步转移概率均可由 **C－K** 方程求出，利用一步转移矩阵及初始分布就可以完全确定齐次马氏链的统计性质。

## 3.　马氏链的例子

- 随机游动：

（1）　无限制的随机游动：

以 $X(n)$ 表示时刻 $n$ 时质点所处的位置，则 $\{X(n), n = 0,1,2\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其状态空间为 $S = \{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，一步转移概率为：

$$\begin{cases} p_{i\,i+1} = p, & (i \in S, 0 < p < 1) \\ p_{i\,i-1} = q = 1 - p, & (i \in S, 0 < p < 1) \\ p_{i\,j} = 0, & (i \neq i+1, i-1, \ j \in S) \end{cases}$$

现在求 $n$ 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$：

设 $n$ 次转移中向右 $m_1$ 次，向左 $m_2$ 次，则有

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = n \\ m_1(+1) + m_2(-1) = j - i \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{n + j - i}{2}, \quad m_2 = \frac{n - j + i}{2}$$

即有：

$$p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, & (n+j-i\text{ 是偶数}) \\ 0, & (n+j-i\text{ 是奇数}) \end{cases}$$

$$p_{ii}^{(n)}=\begin{cases} C_n^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}, & (n+j-i\text{ 是偶数}) \\ 0, & (n+j-i\text{ 是奇数}) \end{cases}$$

（2）　带有一个吸收壁的随机游动：

特点：当 $X(n)=0$ 时，$X(n+1)$ 就停留在零状态。

此时 $\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，一步转移概率为：

$$\begin{cases} p_{i\,i+1}=p & (i\geq 1, i\in S) \\ p_{i\,i-1}=q & (i\geq 1, i\in S) \\ p_{i\,j}=0 & (j\neq i+1, i-1, i\geq 1, i\in S) \\ p_{0\,0}=1 \end{cases}$$

注意；$i$ 状态为马氏链的吸收状态的充要条件是：$p_{i\,i}=1$。

（3）　带有二个吸收壁的随机游动：

此时 $\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$ 是一齐次马氏链，状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,a\}$，$0, a$ 为两个吸收状态，它的一步转移概率为：

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(a+1)\times(a+1)}$$

即有：

$$
\begin{aligned}
&p_{i\,i+1} = p && (1 \le i \le a-1) \\
&p_{i\,i-1} = q = 1-p && (1 \le i \le a-1) \\
&p_{i\,j} = 0 && (j \ne i+1, i-1; 1 \le i \le a-1) \\
&p_{00} = 1 \\
&p_{aa} = 1 \\
&p_{0\,j} = 0 && (j \ne 0) \\
&p_{a\,j} = 0 && (j \ne a)
\end{aligned}
$$

（4）　带有一个反射壁的随机游动：

特点：一旦质点进入零状态，下一步它以概率 $p$ 向右移动一格，以概率 $q=1-p$ 停留在零状态。

此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，它的一步转移概率为：

$$
\begin{aligned}
&p_{i\,i+1} = p && (i \ge 1) \\
&p_{i\,i-1} = q = 1-p && (i \ge 1) \\
&p_{i\,j} = 0 && (j \ne i+1, i-1; i \ge 1) \\
&p_{01} = p \\
&p_{00} = 1-p = q \\
&p_{0\,j} = 0 && (j \ne 0,1)
\end{aligned}
$$

（5）　带有二个反射壁的随机游动：

此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,a\}$，它的一步转移概率矩阵为：

$$
P = \begin{pmatrix}
q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \cdots & \cdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q & p
\end{pmatrix}_{(a+1)\times(a+1)}
$$

即有：

$$p_{00} = q = 1 - p$$
$$p_{01} = p$$
$$p_{aa} = p$$
$$p_{a\,a-1} = q = 1 - p$$
$$p_{0\,j} = 0 \quad (j \neq 0,1)$$
$$p_{a\,j} = 0 \quad (j \neq a, a-1)$$

- **排队模型**

**（1）　离散排队系统**

考虑顾客到达一服务台排队等待服务的情况。

若服务台前至少有一顾客等待，则在单位时间周期内，服务员完成一个顾客的服务后，该顾客立刻离去；若服务台前没有顾客，则服务员空闲。

在一个服务周期内，顾客可以到达，设第$n$个周期到达的顾客数$\xi_n$是一个取值为非负整数的随机变量，且$\{\xi_n, n \geq 1\}$相互独立同分布。在每个周期开始时系统的状态定义为服务台前等待服务的顾客数。若现在状态为$i$，则下周期的状态$j$应该为：

$$j = \begin{cases} (i-1) + \xi, & i \geq 1 \\ \xi, & i = 0 \end{cases}$$

其中$\xi$为该周期内到达的顾客数。

记第$n$个周期开始的顾客数为$X_n$，则$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n$，其中$a^+ \triangleq \max\{a, 0\}$，根据马氏链的定义，可知$\{X_n, n \geq 0\}$是一马氏链。

若假设$P\{\xi_n = k\} = a_k$，$a_k \geq 0$，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$，则$\{X_n, n \geq 0\}$的一步转移概率为：

$$p_{0\,j} = a_j \qquad j \geq 0$$
$$p_{1\,j} = a_j \qquad j \geq 0$$
$$p_{i\,j} = a_{j+1-i} \qquad i > 1, j \geq i-1$$
$$p_{i\,j} = 0 \qquad i > 1, j < i-1$$

易见：当$E\xi_n=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k>1$时，则当$n$充分大后，等待顾客的队伍将无限增大；若$E\xi_n=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k<1$，则等待服务的顾客队伍长度趋近某种平衡。

（2）　**G/M/1 排队系统**

略。（见纯不连续马氏过程的内容，以后会讲到。）

- 离散分支过程

考虑某一群体，假定某一代的每一个个体可以产生$\xi$个下一代，其中$\xi$是取值非负整数的离散型随机变量，$P\{\xi=k\}=a_k$，$a_k\ge 0$，$k\ge 0$，$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=1$，设某一代各个体产生下一代的个数相互独立同分布且与上一代相互独立。

令：$X_n$表示第$n$代个体的数目，则当$X_n=0$时，有$X_{n+1}=0$；当$X_n>0$时，有：

$$X_{n+1}=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{X_n}$$

其中$\xi_i$是第$n$代中第$i$个个体产生下一代的个数。

由此可知，只要给定$X_n$，那么$X_{n+1}$的分布就完全决定了，且与以前的$X_{n-1},X_{n-2},\cdots$无关，故$\{X_n,n\ge 1\}$是一马氏链。把这一类马氏链称为离散的分支过程。由母函数的性质，可以证明一步转移概率为：

$$\begin{aligned}p_{ij}&=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{X_n}=j\mid X_n=i\}\\&=P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=j\}\\&=\frac{\partial^j\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)^i}{j!\partial x^j}\Bigg|_{x=0}\end{aligned}$$

注 1：母函数的定义：设$F(s)$是随机变量$\xi$的母函数，则$F(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ks^k$；

注 2：母函数的性质：（1）$X$的母函数与其分布率是一一对应的，且有$p_k=\dfrac{g^{(k)}(0)}{k!}$；（2）设非负整值随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，而

$g_1, g_2, \cdots, g_n$ 分别是它们的母函数，则 $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的母函数为：$g_Y(s) = g_1(s) g_2(s) \cdots g_n(s)$。

注 3：显然有：$p_{00} = 1, p_{0k} = 0\ (k > 0)$，因此，状态 0 是离散分支过程的吸收状态。在离散分支过程模型中，我们最关心的问题是此过程被状态 **0** 吸收的概率，即灭绝概率问题。

- 卜里耶（**Polya**）模型（非齐次马氏链的例子）：

设盒子装有 $b$ 个黑球，$r$ 个红球。从盒子中随机摸出一球，观察颜色后将该球放回并加入与摸出的球同颜色的球 $c$ 只。如此取放继续，经过 $n$ 次摸放，研究盒子中的黑球数。

以 $X_n, n \ge 1$ 表示第 $n$ 次摸球后盒子中的黑球数（状态），每取放一次后黑球数或者不变，或者增加 $c$ 只，因此一步转移概率为：

$$p_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \begin{cases} \dfrac{i}{b + r + nc}, & j = i + c \\ 1 - \dfrac{i}{b + r + nc}, & j = i \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意：此过程是一非齐次的马氏链。另外，在研究实际问题时，如何设置过程的状态是非常重要的，考察下面的思考题会有深刻的体会。

思考题：在只装有 $r$ 个红球和 $b$ 个黑球的袋子中逐次随机取一球，每次将取出的球记下颜色并放回，同时在袋子中加进 $c$ 个同色球。令：

$$R_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球} \\ 0, & \text{反之} \end{cases} ;\ k = 1, 2, \cdots$$

问 $\{R_k\}$ 是否独立同分布？过程 $\{R_k\}$ 是否是马氏链？

解：由题意，我们有：

$$P\{R_1 = 1\} = \frac{r}{b + r}, \quad P\{R_1 = 0\} = \frac{b}{b + r}$$

$$P\{R_2=1\}=P\{R_2=1\big|R_1=1\}P\{R_1=1\}+P\{R_2=1\big|R_1=0\}P\{R_1=0\}$$
$$=\frac{r+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}+\frac{r}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r}=\frac{r}{b+r}$$
$$P\{R_2=0\}=P\{R_2=0\big|R_1=1\}P\{R_1=1\}+P\{R_2=0\big|R_1=0\}P\{R_1=0\}$$
$$=\frac{b}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}+\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r}=\frac{b}{b+r}$$

下面利用归纳法证明$R_k$的分布为：$P\{R_k=1\}=\frac{r}{b+r}$，$P\{R_k=0\}=\frac{b}{b+r}$。

当$k=1$时，结论成立。设当$k=l$时，结论成立，即：

$$P\{R_l=1\}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_l=0\}=\frac{b}{b+r}$$

当$k=l+1$时，设在第$l$次取球之前，袋中有$m$只红球，$n$只黑球，根据假设有：

$$P\{R_l=1\}=\frac{m}{m+n}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_l=0\}=\frac{n}{m+n}==\frac{b}{b+r}$$

由全概率公式，我们有：

$$P\{R_{l+1}=1\}=P\{R_{l+1}=1\big|R_l=1\}P\{R_l=1\}+P\{R_{l+1}=1\big|R_l=0\}P\{R_l=0\}$$
$$=\frac{m+c}{m+n+c}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{m}{m+n+c}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{m}{m+n}=\frac{r}{b+r}$$
$$P\{R_{l+1}=0\}=P\{R_{l+1}=0\big|R_l=1\}P\{R_l=1\}+P\{R_{l+1}=0\big|R_l=0\}P\{R_l=0\}$$
$$=\frac{n}{m+n+c}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{n+c}{m+n+c}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{n}{m+n}=\frac{b}{b+r}$$

因此，由归纳法可知：

$$P\{R_k=1\}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_k=0\}=\frac{b}{b+r}$$

又因为：

$$P\{R_2=1,R_1=1\}=P\{R_2=1\big|R_1=1\}P\{R_1=1\}=\frac{r+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}$$

$$P\{R_2=1\}P\{R_1=1\}=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r}$$

显然有：

$$P\{R_2=1,R_1=1\}\neq P\{R_2=1\}P\{R_1=1\}$$

因此，$\{R_k\}$不是独立的，但同分布。

又有：

$$P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1, R_{k-1}=1, \cdots, R_1=1\}=\frac{r+kc}{b+r+kc}$$

$$P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1, R_{k-1}=0, \cdots, R_1=0\}=\frac{r+c}{b+r+kc}$$

如果过程$\{R_k\}$是马氏链，我们应该有：

$$P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1, R_{k-1}=1, \cdots, R_1=1\}=P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1\}$$

$$P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1, R_{k-1}=0, \cdots, R_1=0\}=P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1\}$$

即应该有：

$$P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1, R_{k-1}=1, \cdots, R_1=1\}=P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1, R_{k-1}=0, \cdots, R_1=0\}$$

但由上面的计算，当$k>1$时，显然有：

$$P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1, R_{k-1}=1, \cdots, R_1=1\} \neq P\{R_{k+1}=1 \mid R_k=1, R_{k-1}=0, \cdots, R_1=0\}$$

因此，过程$\{R_k\}$不是马氏链。

- 应用例子：

某保密通信系统采用软件无线电，其信号的调制方式有 5 种。若此通信系统一直处于繁忙状态，在任何时刻只能采用其中一种信号调制方式，并且假设每经过一单位时间系统要进行调制方式转换，在转换时，这 5 种不同的调制信号方式被选择的概率分别为 1/5，2/5，1/10，1/10，1/5，且每次转换之间是独立的。$\xi_n$表示前$n$次信号转换中采用的信号调制方式为第二种方式的次数，问$\{\xi_n, n\geq 1\}$是否为齐次马氏链？如果是，写出其一步转移概率矩阵。

解：根据题意，此时的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，由于调制方式的每次转换之间是独立的，因此

$$P\{\xi_{n+1}=j \mid \xi_1=i_1, \cdots, \xi_{n-1}=i_{n-1}, \xi_n=i\}=P\{\xi_{n+1}=j \mid \xi_n=i\}$$

所以此链是马氏链，且是齐次的，其一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3/5 & 2/5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

# 4. 马尔可夫链状态的分类

## （一） 到达与相通

定义：对给定的两个状态$i$，$j \in S$，若存在正整数$n \geq 1$，使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，则称从状态$i$可到达状态$j$，记作$i \to j$，反之称从状态 $i$不可到达状态$j$。

注意：当状态 $i$不能到达状态$j$时，对于$\forall n \geq 1$，$p_{ij}^{(n)} = 0$，因此

$$P\left\{\text{到达状态 } j \,\middle|\, X_0 = i\right\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = j \,\middle|\, X_0 = i\right\}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{X_n = j \,\middle|\, X_0 = i\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

定义：有两个状态 $i$和$j$，如果由 $i$状态可到达$j$状态，即$i \to j$，且由$j$状态也可到达$i$状态，即$j \to i$，则称状态 $i$和状态$j$相通，记作$i \leftrightarrow j$。

定理：可到达和相通都具有传递性。即若$i \to k, k \to j$，则$i \to j$；若$i \leftrightarrow k, k \leftrightarrow j$，则$i \leftrightarrow j$。

证明：如果$i \to k, k \to j$，则由定义，存在$r \geq 1$和$n \geq 1$，使得：

$$p_{ik}^{(r)} > 0, \quad p_{kj}^{(n)} > 0$$

根据 **C－K** 方程，我们有：

$$p_{ij}^{(r+n)} = \sum_{m \in S} p_{im}^{(r)} p_{mj}^{(n)} \geq p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n)} > 0 \ \ (k \in S)$$

因此，$i \to j$。同理可以证明相通的情形。

## （二） 首达时间和首达概率：

定义：对于任意给定的$i, j \in S$，称随机变量：

$$T_{ij}(\omega) \hat{=} \min\left\{ n : X_0 = i,\, X_n(\omega) = j,\, n \ge 1 \right\}$$

为从状态$i$出发首次到达（进入）状态$j$的时间（时刻），简称首达时间。

注意：首达时间$T_{ij} : \Omega \to N_\infty \subset R$是一随机变量，它取值于$N_\infty = \left\{ 1, 2, \cdots, \infty \right\}$。

定义：对于任意给定的$i, j \in S$，称：

$$f_{ij}^{(n)} \hat{=} P\left\{ T_{ij} = n \middle| X_0 = i \right\}$$

为系统在 **0** 时从状态$i$出发，经$n$步首次到达状态$j$的概率。

由定义，显然有：

$$f_{ij}^{(n)} = P\left\{ X_n = j; X_m \ne j, m = 1, 2, \cdots, n-1 \middle| X_0 = i \right\}$$

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij} = P\left\{ X_1 = j \middle| X_0 = i \right\}$$

$$f_{ij}^{(\infty)} = P\left\{ X_m \ne j, \forall m \ge 1 \middle| X_0 = i \right\}$$

定义：对于任意给定的$i, j \in S$，称：

$$f_{ij} = \sum_{1 \le n < \infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{1 \le n < \infty} P\left\{ T_{ij} = n \middle| X_0 = i \right\} = P\left\{ T_{ij} < \infty \right\}$$

为系统在 **0** 时从状态$i$出发经过有限步转移后迟早到达状态$j$的概率。

注意：$P\left\{ T_{ij} = \infty \right\} \hat{=} f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}$，它表示系统在 **0** 时从状态$i$出发，经过有限步转移后不能到达状态$j$的概率。

（三）首达概率的基本性质：

（**1**）对于任意的$i, j \in S$，$0 \le f_{ij}^{(n)} < f_{ij} \le 1$；

（**2**）对于任意的$i, j \in S$ 及 $1 \le n < \infty$，有：$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$；

（**3**）对于任意的$i, j \in S$，$f_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \to j$；

（4）对于任意的$i,j\in S$， $f_{ij}>0\ and\ f_{ji}>0\Leftrightarrow i\leftrightarrow j$；

证明：因为：

$$\{X_0=i,X_n=j\}=\{X_0=i,X_n=j\}\cap\left\{\bigcup_{l=1}^{\infty}\left(T_{ij}=l\right)\right\}$$
$$=\bigcup_{l=1}^{n}\{X_0=i,X_n=j,T_{ij}=l\}\cup\left\{\bigcup_{l>n}\{X_0=i,X_n=j,T_{ij}=l\}\right\}$$

而

$$\bigcup_{l>n}\{X_0=i,X_n=j,T_{ij}=l\}=\varnothing$$

于是我们有：

$$\{X_0=i,X_n=j\}=\bigcup_{l=1}^{n}\{X_0=i,X_n=j,T_{ij}=l\}$$

因此，有：

$$P\{X_0=i\}P\{X_n=j\mid X_0=i\}=$$
$$=\sum_{l=1}^{n}P\{X_0=i\}P\{T_{ij}=l\mid X_0=i\}P\{X_n=j\mid X_0=i,T_{ij}=l\}$$

因此：

$$P\{X_n=j\mid X_0=i\}=$$
$$=\sum_{l=1}^{n}P\{T_{ij}=l\mid X_0=i\}P\{X_n=j\mid X_0=i,T_{ij}=l\}$$
$$=\sum_{l=1}^{n}P\{T_{ij}=l\mid X_0=i\}P\{X_n=j\mid X_0=i,X_k\neq j,1\le k\le l-1,X_l=j\}$$
$$=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}P\{X_n=j\mid X_l=j\}$$
$$=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}$$

即有：

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}$$

于是结论（2）成立。

当$i \to j$时，$\exists n > 0$，使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，取：

$$n' = \min\left\{n : p_{ij}^{(n)} > 0\right\},$$

则有：

$$f_{ij}^{(n')} = P\left\{T_{ij} = n' \middle| X_0 = i\right\} = p_{ij}^{(n')} > 0$$

因此

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \ge f_{ij}^{(n')} > 0$$

反之，当$f_{ij} > 0$时，$\exists n' > 0$，使得$f_{ij}^{(n')} > 0$，从而$p_{ij}^{(n')} > 0$，得$i \to j$。

因此（3）成立，（4）是（3）的结果。

（四）状态的分类

定义：对于状态$i \in S$，如果$f_{ii} = 1$，则称状态$i$为常返态（返回态）；如果$f_{ii} < 1$，则称状态$i$为非常返态（滑过态、瞬时态）。

令条件数学期望：

$$\mu_{ij} \mathrel{\hat=} E\left\{T_{ij} \middle| X_0 = i\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

$\mu_{ij}$是从状态$i$出发，首次到达状态$j$的平均转移步数（时间）。

注意：特别地，若$i = j$，则$\mu_{ii} \mathrel{\hat=} \mu_i$是从状态$i$出发，首次返回状态$i$的平均转移步数，称为状态$i$的平均返回时间；对应的$f_{ii}$称为状态$i$的返回概率；$f_{ii}^{(n)}$称为从状态$i$出发，经$n$步首次返回状态$i$的概率。

定义：对于常返态 $i \in S$，若$\mu_i < +\infty$，则称状态 $i$是正常返的；否则，若$\mu_i = \infty$，则称状态 $i$是零常返的。

（五）常返态和非常返态的判别

（1）　状态$i \in S$是常返的（$f_{ii}=1$）$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty$。

（2）　状态$i \in S$是非常返的（$f_{ii}<1$）$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}<\infty$。

（3）　如果$j \in S$是非常返的，则对$\forall i \in S$，有$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}<\infty$；$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$。

（4）　设$i \leftrightarrow j$，则$i$和$j$或者都是正常返的，或者都是非常返的，或者都是零常返的。

（5）　若状态$i \in S$是常返的，则$i$是零常返的$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$

（6）　如果$j \in S$是零常返的，则对$\forall i \in S$，有$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$。

证明：对于序列$\{ p_{ij}^{(n)}, n \geq 0\}$和$\{ f_{ij}^{(n)}, n \geq 1\}$，分别引入其母函数为：

$$P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$$

$$F_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$$

上面两个级数当$|s|<1$时，都是绝对收敛的。利用公式：

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
P_{ij}(s) &= \delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}\right) s^n \\
&= \delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n}\left(f_{ij}^{(v)} s^v\right)\left(p_{jj}^{(n-v)} s^{n-v}\right) \\
&= \delta_{ij}+\sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} s^v \sum_{n=v}^{\infty}\left(p_{jj}^{(n-v)} s^{n-v}\right) \\
&= \delta_{ij}+\sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} s^v \sum_{m=0}^{\infty}\left(p_{jj}^{(m)} s^{m}\right) \\
&= \delta_{ij}+F_{ij}(s) P_{jj}(s)
\end{aligned}$$

令 $j=i$，由上式，有：

$$P_{ii}(s)=\frac{1}{1-F_{ii}(s)}$$

在上式中，令 $s\to 1^-$，我们有：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}$$

由此可得以上结论的（1）、（2）。

另外，当 $j$ 是非常返态，且 $i\neq j$ 时，由

$$P_{ij}(s)=\delta_{ij}+F_{ij}(s)P_{ij}(s)$$

可得：

$$P_{ij}(1)=F_{ij}(1)P_{jj}(1)\le P_{jj}(1)<\infty$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}<\infty\text{，且 }\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$$

由此可得结论（3）。

若 $i\leftrightarrow j$，则存在正整数 $k,m$，使得

$$p_{ij}^{(k)}>0,\quad p_{ji}^{(m)}>0$$

因此对于任意的正整数 $r$，有：

$$p_{jj}^{(k+r+m)}\ge p_{ji}^{(m)}p_{ii}^{(r)}p_{ij}^{(k)}$$

由此可得：

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(k+r+m)}\ge \sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)}p_{ii}^{(r)}p_{ij}^{(k)}=p_{ji}^{(m)}p_{ij}^{(k)}\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)}$$

因此，当 $i$ 是常返态时，可知 $j$ 也是常返态；当 $i$ 是非常返态时，可知 $j$ 也是非常返态。结论（4）成立。

注意：（1）对于一个非常返态，在过程中访问它的次数是有限的；（2）一个状态有限的马氏链，不可能所有状态都为非常返态。

引入随机变量：

$$Y_n=\begin{cases}1, & X_n=i\\ 0, & X_n\neq i\end{cases};\ n=0,1,2,\cdots$$

则$\sum_{n=0}^{\infty}Y_n$代表马氏链$\{X_n;n\geq 0\}$处于状态$i$的次数，计算：

$$E\left\{\sum_{n=0}^{\infty}Y_n\,\middle|\,X_0=i\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}E\{Y_n\mid X_0=i\}=\sum_{n=0}^{\infty}1\times P\{Y_n=1\mid X_0=i\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X_n=i\mid X_0=i\}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$$

由此可得上面注中的结论（**1**）。

例 **1** （赌徒输光问题）赌徒甲有赌资$a$元，赌徒乙有赌资$b$元，$a$, $b$为不小于$1$的正整数。两人进行一系列的赌博。每赌一局，输者给赢者$1$元，没有和局，直赌到两人中有一人输光为止。设在每局中甲赢的概率为$p$，输的概率为$1-p$，求甲输光的概率。

解：此问题实际上就是状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots a+b\}$的一个马氏链，其中状态$0$和状态$a+b$为吸收态。甲开始处于状态$a$，最后它要么到达状态$0$（输光），要么到达状态$a+b$（将对方赢完），然后就不赌了。求甲输光的概率，实际上就是求甲从状态$a$首达状态$0$的概率。理论上有一步转移概率矩阵（很容易写出）就可以求得，但这样求相当麻烦，现在用其它方法来求。

令$u_i$为甲从状态$i$出发首达状态$0$的概率。我们要求的是$u_a$。因为状态$0$和状态$a+b$为吸收态，所以$u_0=1$, $u_{a+b}=0$，用全概率公式，

我们有：

$$u_i=pu_{i+1}+qu_{i-1}\Rightarrow(p+q)u_i=pu_{i+1}+qu_{i-1}$$

因此有：

$$p(u_{i+1}-u_i)=q(u_i-u_{i-1})\Rightarrow(u_{i+1}-u_i)=\frac{q}{p}(u_i-u_{i-1})=$$

$$=\cdots=\left(\frac{q}{p}\right)^i(u_1-u_0)$$

因此有：

$$\sum_{i=k}^{a+b-1}(u_{i+1}-u_i)=\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i(u_1-u_0)$$

$$u_{a+b}-u_k=(u_1-1)\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad k=0,1,2,\cdots,a+b$$

令 $k=0$，利用 $u_0=1, u_{a+b}=0$，可得：

$$-1=(u_1-1)\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad \Rightarrow \quad (-1)/\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i=u_1-1$$

代入上面的式子，有

$$u_{a+b}-u_k=\frac{-1}{\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i}\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad k=0,1,2,\cdots,a+b$$

令 $k=a$，$u_{a+b}=0$，可得：

$$u_a=\frac{1}{\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i}\sum_{i=a}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

此即为所要求的结果。

当 $p=q=0.5$ 时，　$u_a=\dfrac{b}{a+b}$

当 $p\neq q$ 时，　$u_a=\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$。

例 2　设有一电脉冲，脉冲的幅度是随机的，其幅度的可取值是 $\{1,2,3,\cdots,n\}$，且各幅度出现的概率相同。现用一电表测量其幅度，每隔一单位时间测量一次，从首次测量开始，记录其最大幅值为 $X_n\ (n\geq 1)$。(1) 证明该过程为一齐次马氏链；(2) 写出一步转移概率矩阵；(3) 仪器记录到最大值 $n$ 的期望时间。

解：(1) 记：$\xi_i$ 是第 $i$ （$i=1,2,\cdots$）次记录的幅度值，则 $\xi_i$ 是相互独立同分

布的随机变量序列。$X_m$ 是前 $m$ 次记录幅度的最大值。

则有：

$$\begin{aligned}&P\left\{X_{m+k}=j\,\middle|\,X_m=i,X_{m-1}=i_{m-1},\cdots,X_1=i_1\right\}\\&=P\{\max_{m+1\le l\le m+k}\left(\xi_l,i\right)=j\}\\&=P\{\max_{2\le l\le k+1}\left(\xi_l,i\right)=j\}\end{aligned}$$

以上用到了 $\xi_i$ 的相互独立性。

因此：

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(k)}(m)&=P\{X_{m+k}=j\,|\,X_m=i\}\\&=P\{\max_{1\le l\le m+k}\xi_l=j\,|\,\max_{1\le l\le m}\xi_l=i\}\\&=P\{\max_{2\le l\le k+1}\left(\xi_l,i\right)=j\}\end{aligned}$$

因此此过程是齐次马氏过程。

（2）一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{i}{n}, & j=i\\ \dfrac{1}{n}, & i<j\le n\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

（3）设 $T_n$ 为仪器记录到最大值 $n$ 的首达时间，则可以理解为起初在 $n$ 状态的首次返回时间，则：

$$P\{T_n=k\}=f_{nn}^{(k)}=\frac{1}{n}\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}},$$

因此记录到最大值 $n$ 的期望为

$$E\{T_n\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{n}\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}=n$$

由此可知，$n$ 状态是正常返态。

例 3 随机游动：

（1） 一维情形：状态空间为 $S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，都是相通的，因此构成一个类，任意取一个状态 $i\in S$，则有：$p_{ii}^{(2n-1)}=0,\quad p_{ii}^{(2n)}=C_{2n}^{n}p^nq^n$，

考虑母函数：

$$
\begin{aligned}
P_{ii}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n s^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(-1)^n}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\left(pqs^2\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\left(-4pqs^2\right)^n \\
&= \left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

从而有：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{s \to 1-0} P_{ii}(s) = \left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \infty, & p = 1/2 \\ \text{有限}, & p \neq 1/2 \end{cases}
$$

由此可知，当 $p = 1/2$ 时，所有状态为常返状态，当 $p \neq 1/2$ 时，状态为非常返状态，即马氏链是非常返的。

进一步研究当 $p = 1/2$ 时，一维随机游动的各个状态是属于零常返还是属于正常返。由上面的结论，我们有：

$$
P_{ii}(s) = \left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-s^2\right)^{-\frac{1}{2}}
$$

且有：

$$
P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s) P_{ii}(s)
$$

其中：$F_{ii}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n$ ，由此我们有：

$$
F_{ii}(s) = 1 - \left(1-s^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A}
$$

因此有：

$$
\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = F_{ii}'(1) = \lim_{s \to 1-} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} = \infty
$$

所以，当 $p = 1/2$ 时，一维随机游动的所有状态都是零常返的。

注意：将（**A**）式在原点泰勒展开，可以求得首达概率 $f_{ii}^{(n)}$，即：

$$
f_{ii}^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad f_{ii}^{(2k)} = \frac{C_{2k}^{k}}{2^{2k}(2k-1)} \quad (k \geq 2), \quad f_{ii}^{(2k-1)} = 0 \quad (k \geq 1)
$$

（2）　二维情形：计算质点经过$2n$步后仍然回到原位置的概率$p_{ii}^{(2n)}$。此时，质点必须与横坐标平行地向右移$k$步，向左移$k$步，向上移$l$步，向下移$l$步，并且$k+l=n$，因此有：

$$p_{ii}^{(2n)}=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2}=\frac{1}{4^{2n}}C_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2=\frac{1}{4^{2n}}\left(C_{2n}^{n}\right)^2\approx\frac{1}{\pi n}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$，因此，平面上的对称随机游动也是常返的。

（3）　三维情形：可以证明，空间上的对称随机游动是非常返的（**Polya** 定理）。

例 4：将小白鼠放在如下的迷宫中，假定小白鼠在其中作随机地移动，即当它处于某一格子中，而此格子又有$k$条路径通入别的格子，则小白鼠以$1/k$的概率选择任一条路径。如设小白鼠每次移动一个格子，并用$X_n$表示经$n$次移动后它所在的格子号码数，试：

（1）　说明$\{X_n;n\ge 1\}$构成一个齐次有限马氏链；

（2）　写出它的转移概率；

（3）　分解它的状态空间。

解：由题意可知其状态空间为$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

（1）由马氏链的定义可知，下一时刻小白鼠所处各个状态的概率只与当时小白鼠所处的状态有关，因此$\{X_n;n\ge 1\}$ $\{X_n;n\ge 1\}$构成一个齐次有限马氏链；

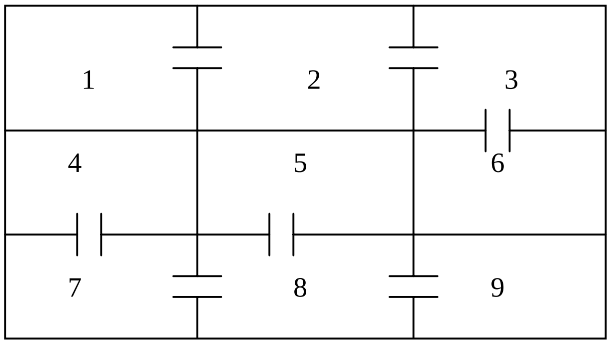
（2）一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

（3）画出状态转移图，状态空间的分解为两个闭集：

$$S_1 = \{1,2,3,6\}$$

$$S_2 = \{4,5,7,8,9\}$$




习题：P111－114：7、8、9、11、12；13、14、16。

# 第二章　Markov 过程

## 4.　马尔可夫链状态的分类

### （六）闭集和状态空间的分解

定义：设$C$是状态空间$S$的一个子集，如果从$C$内任何一个状态$i$不能到达$C$外的任何状态，则称$C$是一个闭集。如果单个状态$i$构成的集$\{i\}$是闭集，则称状态$i$是吸收态。如果闭集$C$中不再含有任何非空闭的真子集，则称$C$是不可约的。闭集是存在的，因为整个状态空间$S$就是一个闭集，当$S$不可约时，则称此马氏链不可约，否则称此马氏链可约。

有关的性质：

（1）$C$是闭集$\Leftrightarrow p_{ij}=0, \forall i\in C, j\notin C \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)}=0\ (n\geq 1), \forall i\in C, j\notin C$；

（2）$C$是闭集$\Leftrightarrow \sum_{j\in C} p_{ij}=1, \forall i\in C$；

（3）$i$为吸收态$\Leftrightarrow p_{ii}=1$；

（4）齐次马氏链不可约$\Leftrightarrow$任何两个状态均互通；

（5）所有常返态构成一个闭集；

（6）在不可约马氏链中，所有状态具有相同的状态类型；

定义：对$i\in S$，若正整数集$\left\{n; n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\right\}$非空，则定义其最大公约数为状态$i$的周期，记为$d_i$，当$d_i=1$时，称该状态无周期。

定义：称非周期正常返状态为遍历态。

注意：一个不可约的、非周期的、有限状态的马氏链一定是遍历的。

### （七）常返、非常返、周期状态的分类特性

设$i\leftrightarrow j$，则$i$和$j$或者都是非常返态，或者都是零常返态，或者都是正常

返非周期的（遍历），或者都是正常返有周期的且有相同的周期。

$$
\text{状态}\begin{cases}\text{非常返态}\\ \text{常返态}\begin{cases}\text{零常返态}\\ \text{正常返态}\begin{cases}\text{有周期}\\ \text{非周期（遍历态）}\end{cases}\end{cases}\end{cases}
$$

（八）周期状态的判别

（1） 按互通性将状态分类后，在同一类集合中选一个状态判别其周期性即可。

（2） 如有正整数$n$，使得 $p_{ii}^{(n)} > 0$，$p_{ii}^{(n+1)} > 0$，则状态$i$无周期。

（3） 如有正整数$m$，使得$m$步转移概率矩阵$P^m$中相应某状态$j$的那一列元素全不为零，则状态$j$无周期

（九）分解定理

（1） 齐次马氏链的状态空间$S$可唯一地分解为有限多个或可列多个互不相交的状态子集$D$，$C_1$，$C_2$，$\cdots$之并，即有$S = D \bigcup C_1 \bigcup C_2 \bigcup \cdots$。

其中：$D$是非常返态集，每个$C_n$，$n = 1,2,\cdots$均是由常返状态组成的不可约集，其中的状态互通，因此$C_n$，$n = 1,2,\cdots$中的状态具有相同的状态类型：或者均为零常返；或者均为正常返非周期（遍历）；或者均为正常返有且有相同的周期；而且对于$i$，$j \in C_n$，$f_{ij} = 1$。

（2） （周期链分解定理）一个周期为$d$的不可约马氏链，其状态空间$S$可以分解为$d$个互不相交的集$J_1$，$J_2$，$\cdots$，$J_d$之并，即有：

$$
S = \bigcup_{r=1}^{d} J_r , \quad J_k \bigcap J_l = \varnothing , k \neq l ,
$$

且

$$
\sum_{j \in J_{r+1}} p_{ij} = 1 , i \in J_r , r = 1,2,\cdots
$$

其中约定$J_{r+1} = J_1$。

（3）　基于上面的（1），我们将状态空间$S$中的状态依$D$, $C_1$, $C_2$, $\cdots$的次序从新排列，则转移矩阵具有以下的形式

$$P=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} P_D & P_{D_1} & P_{D_2} & \cdots \\ & P_1 & & \\ & & P_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} D \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{array}$$

其中$P_1$, $P_2$, $\cdots$均为随机矩阵，他们对应的链是不可约的。称以上形式的转移矩阵为标准形式。

## （十）有限马氏链的性质

（1）　所有非常返状态组成的集合不可能是闭集；

（2）　没有零常返状态；

（3）　必有正常返状态；

（4）　不可约有限马氏链只有正常返态；

（5）　状态空间可以分解为：

$$S=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k$$

其中：每个$C_n$, $n=1,2,\cdots,k$均是由正常返状态组成的有限不可约闭集，$D$是非常返态集。

## （十一）例子

例 1　设有三个状态$\{0,1,2\}$的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

例 2　设有四个状态$\{0,1,2,3\}$的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

解：$\{0,1\}$正常返，$\{2\}$非常返，$\{3\}$吸收态。

例 3 设马氏链的状态空间为$S=\{1,2,3,4,5\}$，一步转移概率为：

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3\\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

求此链的闭集。

解：画出状态转移图，此链可约，闭集为：$\{1,3,5\}$。

例 4 设马氏链的状态空间为$S=\{1,2,3,\cdots\}$，转移概率为：$p_{11}=1/2$，$p_{i\,i+1}=1/2$，$p_{i1}=1/2, i\in S$，研究各状态的分类。

解：画出状态转移图，可知：

$f_{11}^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，故 $f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$，故状态 1 是常返的。

又$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n<\infty$，故状态 1 是正常返的。

易知状态 1 是非周期的，从而状态 1 是遍历的。

对于其它状态，由于$1\leftrightarrow i, i\in S$，因此也是遍历的。

例 5 设有八个状态$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

讨论其周期性。

解：主对角线为 0，它是具有周期性的转移矩阵的标准形式。八个状态可以分为四个子集，$c_1=\{0\}$，$c_2=\{1,2,3\}$，$c_3=\{4,5\}$，$c_4=\{6,7\}$，它们互不相交，它们的并是整个状态空间，该过程具有确定的周期转移，即：$c_1\to c_2\to c_3\to c_4\to c_1$，周期为 4。

例 6 设齐次马氏链的状态空间为$\{1,2,3\}$，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求：(1) $T_{13}$的分布率及$ET_{13}$，(2) $f_{ii}\ (i=1,2,3)$

解：(1) 画出状态转移图，可得$T_{13}$的分布率为：

| $T_{13}=n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | … | n | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{13}^{(n)}=P\{T_{13}=n\}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4^2}$ | $\frac{3^2}{4^3}$ | $\frac{3^3}{4^4}$ | … | $\frac{3^{n-1}}{4^n}$ | … |

因此，$ET_{13}=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{T_{13}=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{3^{n-1}}{4^n}=4$。

(2) 由于：

$f_{11}^{(1)}=1/2,\ f_{11}^{(n)}=0,\ n>1$，故 $f_{11}=1/2<1$

$f_{22}^{(1)}=3/4,\ f_{11}^{(n)}=0,\ n>1$，故 $f_{11}=3/4<1$

$f_{33}^{(1)}=1,\ f_{11}^{(n)}=0,\ n>1$，故 $f_{33}=1$

**因此，状态 1 和 2 为非常返态，3 为常返态。**

例 7 设齐次马氏链的状态空间为 $\{1,2,3,4\}$，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

解：画出状态转移图，可知：

$$f_{44}^{(n)}=0\ (n\geq 1)\Rightarrow f_{44}=0<1$$

$$f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3},\ f_{33}^{(n)}=0\ (n>1)\Rightarrow f_{33}=\frac{2}{3}<1$$

故状态 3 和 4 为非常返态。

$$f_{11}=f_{11}^{(1)}+f_{11}^{(2)}+0+\cdots+0+\cdots=1$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}^{(n)}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=1$$

$$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<\infty$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}^{(n)}=1\times 0+2\times\frac{1}{2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=3<\infty$$

故状态 1 和 2 都是正常返的，易知它们是非周期的，从而是遍历状态。

例 8 设一齐次马氏链的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，其状态转移矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

试讨论此链状态的分类及常返的充分必要条件。

解：画出状态转移图，图中可以看出任意二状态都相通，链是不可约的，因此只要确定任一状态是常返的条件即可。

由状态转移图，可得：

$$f_{00}^{(1)}=1-p_0\text{；}f_{00}^{(2)}=p_0(1-p_1)=p_0-p_0p_1\text{；}$$
$$f_{00}^{(3)}=p_0p_1(1-p_2)=p_0p_1-p_0p_1p_2\text{；}\cdots$$
$$f_{00}^{(n)}=p_0p_1\cdots p_{n-2}-p_0p_1\cdots p_{n-1}\text{；}\cdots$$

因此有：

$$\sum_{n=1}^{N}f_{00}^{(n)}=1-p_0p_1\cdots p_{N-1}$$

即

$$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=1-\lim_{N\to\infty}p_0p_1\cdots p_{N-1}$$

因此此链常返的充分必要条件为：$\lim\limits_{N\to\infty}p_0p_1\cdots p_{N-1}=0$

**例 9** 设一口袋中装有三种颜色（红、黄、白）的小球，其数量分别为 3、4、3。现在不断地随机逐一摸球，有放回，且视摸出球的颜色计分：红、黄、白分别计 1、0、-1 分。第一次摸球之前没有积分。以$Y_n$表示第$n$次取出球后的累计积分，$n=0,1,\cdots$

（1）$Y_n$，$n=0,1,\cdots$是否齐次马氏链？说明理由。

（2）如果不是马氏链，写出它的有穷维分布函数族；如果是，写出它的一步转移概率$p_{ij}$和两步转移概率$p_{ij}^{(2)}$。

（3）令$\tau_0=\min\{n;Y_n=0,n>0\}$，求$P\{\tau_0=5\}$。

解：（1）是齐次马氏链。

由于目前的积分只与最近一次取球后的积分有关，因此此链具有马氏性且是齐次的。

状态空间为：$S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$。

（2）$$p_{ij}=P\{Y_{n+1}=j|Y_n=i\}=\begin{cases}0.3, & j=i+1\\ 0.4, & j=i\\ 0.3, & j=i-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$p_{ij}^{(2)}=P\{Y_{n+2}\big|Y_n=i\}=\begin{cases}0.3^2, & j=i+2\\ 2\times 0.3\times 0.4, & j=i+1\\ 0.4^2+2\times 0.3^2, & j=i\\ 2\times 0.3\times 0.4, & j=i-1\\ 0.3^2, & j=i+2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（3）即求首达概率，画状态转移图，我们有：

$$P\{\tau_0=5\}=2\times[3\times 0.3^4\times 0.4+0.3^2\times 0.4^3]=0.03096$$

注意：此题实际上就是直线上的随机游动。

例 10 设有无穷多个袋子，各装红球 $r$ 只，黑球 $b$ 只及白球 $w$ 只。今从第 1 个袋子中随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第 2 个袋子中随机取一球，放入第 3 个袋子，如此继续。令：

$$R_k=\begin{cases}1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球}\\ 0, & \text{反之}\end{cases}, \quad k=1,2,\cdots$$

（1）　试求 $R_k$ 的分布；

（2）　试证 $\{R_k;k=1,2,\cdots\}$ 为马氏链，并求一步转移概率矩阵。

解：（1）计算得 $R_k$ 的分布列为：

$$\begin{pmatrix} R_k & 1 & 0\\ P & \dfrac{r}{r+b+w} & \dfrac{b+w}{r+b+w}\end{pmatrix}$$

（2） $R_k$ 的状态空间为 $S=\{0,1\}$，一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}\dfrac{r+1}{r+b+w+1} & \dfrac{b+w}{r+b+w+1}\\ \dfrac{r}{r+b+w+1} & \dfrac{b+w+1}{r+b+w+1}\end{bmatrix}$$

例 11　设一具有 3 个状态的马氏链的一步转移矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$$

试确定此马氏链的状态分类。

附录：转移矩阵估计问题

例：某计算机经常出故障，研究人员每隔一刻钟记录一次计算机的运行状态，收集了 **24** 小时的数据（**97** 次记录），用 **1** 表示正常状态，**0** 表示故障状态，所得数据如下：

**1110010011111110011110111111001111111110001101101**

**111011011010111101110111101111110011011111100111**

设 $X_n$ 为第 $n$ 个时段的计算机状态，可以认为此是一齐次马氏链，状态空间为 $S=\{0,1\}$，试确定此马氏链的状态一步转移矩阵。

若已知计算机在某一时段的状态为 **0**，问在此条件下从此时段起此计算机能连续正常工作 **3** 刻钟的条件概率为多少？

设 $\{X_n;n\geq 0\}$ 为一齐次马氏链，状态空间为 $S$，我们有此马氏链的一次实现（样本）$x_0,x_1,\cdots,x_N$，而转移矩阵未知，如何用现有数据来估计转移矩阵 $P$？

记在状态 $i$ 之后首次出现状态 $j$ 的时间为 $n(i,j)$，定义似然函数：

$$L=\prod_{i,j\in S}p_{ij}^{n(i,j)}$$

相应的对数似然函数为：

$$L=\sum_{i,j\in S}n(i,j)\ln p_{ij}=\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}n(i,j)\ln p_{ij}$$

利用约束条件 $\sum_{j\in S}p_{ij}=1\ \forall i\in S$，由极大似然估计法（**MLEs**）我们有如下估计式：

$$\hat{p}_{ij}=\frac{n(i,j)}{\sum_{k\in S}n(i,k)}$$

注：此估计为局部最大估计。也可以由以下引理得到以上的估计。

引理：设 $z_i\geq 0\ (i\leq N)$，则在约束条件 $\sum_{i=1}^{N}x_i=1,\ x_i\geq 0\ (i\leq N)$ 下，函数 $\sum_{i=1}^{N}z_i\ln x_i$ 在 $x_i=\dfrac{z_i}{\sum_{i=1}^{N}z_i}\ (i\leq N)$ 处取得最大。

## 5．马氏链的极限性态与平稳分布

当一个马氏链系统无限期的远行下去时，我们所关心和需要解决的问题：

（1）　当 $n \to \infty$ 时，$P\{X_n = i\} = \pi_i(n)$ 的极限是否存在？即当马氏链系统无限期的远行下去时，此链处于各个状态的概率（可能性）分布。

（2）　在什么情况下，一个马氏链是一个平稳序列？

关于第一个问题，由于：$\pi_j(n) = \sum_{i \in S} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}$，其中 $\pi_i(0) = P\{X_0 = i\}$，$\{\pi_i(0), i \in S\}$ 是马氏链的初始分布，因此，问题可以转化为研究 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限性质，即研究 $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$ 是否存在？存在的话，其极限是否与 $i$ 有关？

关于第二个问题，实际上是一个平稳分布是否存在的问题。

### （一）$P^n$ 的极限性态

定理（**Markov**）：设有一有限状态的马氏链，若存在一个正整数 $m$，使得对于 $\forall i, j \in S$，有 $p_{ij}^{(m)} > 0$，则 $\lim_{n \to \infty} P^n = \pi$，其中 $\pi$ 是一随机矩阵，且它的各行都相同。

证明：（**A**）$m = 1$ 时的情形；

此时，由题意可知，存在 $0 < \varepsilon < 1$，使得 $p_{ij} \geq \varepsilon > 0,\ \forall i, j \in S$，

令：$m_j(n) \hat{=} \min_{i \in S} p_{ij}^{(n)}$，表示在 $n$ 步转移后在 $j$ 列中最小的一个元素；

令：$M_j(n) \hat{=} \max_{i \in S} p_{ij}^{(n)}$，表示在 $n$ 步转移后在 $j$ 列中最大的一个元素；

（1）　由 **C－K** 方程，证明 $m_j(n), M_j(n)$（注意：都是有界量）的单调性：

由于对于 $\forall\, i \in S$，有：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \geq \sum_{k \in S} p_{ik} m_j(n-1) = m_j(n-1)$$

因此，可得：

$$m_j(n) \ge m_j(n-1)$$

由于对于 $\forall\, i \in S$，有：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \le \sum_{k \in S} p_{ik} M_j(n-1) = M_j(n-1)$$

因此，可得：

$$M_j(n) \le M_j(n-1)$$

（2）　证明 $m_j(n), M_j(n)$ 收敛于同一极限：

令：$p_{i_0 j}^{(n)} = m_j(n) \hat{=} \min_{i \in S} p_{ij}^{(n)}$；$p_{i_1 j}^{(n-1)} = M_j(n-1) \hat{=} \max_{i \in S} p_{ij}^{(n-1)}$

则有：

$$m_j(n) = p_{i_0 j}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{i_0 k} p_{kj}^{(n-1)} = \varepsilon p_{i_1 j}^{(n-1)} + (p_{i_0 i_1} - \varepsilon) p_{i_1 j}^{(n-1)} + \sum_{k \in S, k \ne i_1} p_{i_0 k} p_{kj}^{(n-1)}$$

$$\ge \varepsilon M_j(n-1) + \left[ p_{i_0 i_1} - \varepsilon + \sum_{k \in S, k \ne i_1} p_{i_0 k} \right] m_j(n-1)$$

因此有：

$$m_j(n) \ge \varepsilon M_j(n-1) + (1-\varepsilon) m_j(n-1) \tag{a}$$

令：$p_{i_0' j}^{(n)} = M_j(n) \hat{=} \max_{i \in S} p_{ij}^{(n)}$；$p_{i_2 j}^{(n-1)} = m_j(n-1) \hat{=} \min_{i \in S} p_{ij}^{(n-1)}$

则有：

$$M_j(n) = p_{i_0' j}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{i_0' k} p_{kj}^{(n-1)} = \varepsilon p_{i_2 j}^{(n-1)} + (p_{i_0' i_2} - \varepsilon) p_{i_2 j}^{(n-1)} + \sum_{k \in S, k \ne i_2} p_{i_0' k} p_{kj}^{(n-1)}$$

$$\le \varepsilon m_j(n-1) + \left[ p_{i_0' i_2} - \varepsilon + \sum_{k \in S, k \ne i_2} p_{i_0' k} \right] M_j(n-1)$$

因此有：

$$M_j(n) \le \varepsilon m_j(n-1) + (1-\varepsilon) M_j(n-1) \tag{b}$$

由（a）和（b）式，我们有：

$$M_j(n) - m_j(n) \le (1-2\varepsilon)[M_j(n-1) - m_j(n-1)]$$

由上式递归可得：

$$0 \le M_j(n) - m_j(n) \le (1-2\varepsilon)^{n-1}[M_j(1) - m_j(1)] \le (1-2\varepsilon)^{n-1}$$

由于，$0<\varepsilon<1 \Rightarrow -1<1-2\varepsilon<1$，对上式两边令$n \to +\infty$求极限，得：

$$\lim_{n\to+\infty} M_j(n) = \lim_{n\to+\infty} m_j(n) \hat{=} \pi_j$$

由此证明了当$m=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \pi$。

（B）$m>1$时的情形；

由于：$\lim\limits_{n\to\infty}[P^{(m)}]^n = \lim\limits_{n\to\infty} P^{(mn)} = \pi$

对于$k=1,2,\cdots,m-1$，有：

$$\lim_{n\to\infty} P^{(mn+k)} = \lim_{n\to\infty} P^{(k)} P^{(mn)} = P^{(k)}\pi = \pi$$

至此定理得证。

注意：如果状态空间是无限可列的马氏链，则定理要修改为：

（1）　或者是$\pi$中的所有元素都大于零（此时仍为随机矩阵）

（2）　或者是$\pi$中的所有元素都等于零

**推论 1**　$P^n$的极限矩阵$\pi$是唯一的，且满足：

（1）$\sum\limits_{i\in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j$，　$\pi_i > 0$，即：$\pi P = \pi$。

（2）$\sum\limits_{i\in S} \pi_i = 1$，

**推论 2**　$\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n = j\} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$，即$\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n = j\}$所取的值与初始状态的分布无关。

证：由于：

$$\begin{aligned} P\{X_n = j\} &= \sum_{i\in S} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i\in S} p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j\} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i\in S} \pi_j P\{X_0 = i\} = \pi_j \sum_{i\in S} P\{X_0 = i\} = \pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$

即，经过无穷次转移后处于 $j$ 状态的概率与初始状态无关，与初始状态的分布也无关。

下面不加证明地给出几个常用的定理

定理：若 $j$ 是非常返或零常返，则对于任意的 $i\in S$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{X_n=j\}=\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$。

注意：当 $j$ 是正常返时，情况比较复杂，$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，即使存在，也可能与 $i$ 有关。

定理：若 $j$ 是遍历状态，则对于任意的 $i\in S$，有：

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

定理：对于不可约的遍历链，则对于任意的 $i,j\in S$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_j}$。

定理：若马氏链是不可约的遍历链，则 $\left\{\pi_i=\dfrac{1}{\mu_i},i\in S\right\}$ 是方程组

$$x_j=\sum_{i\in S}x_i p_{ij}\,,\quad j\in S$$

满足条件 $x_j\ge 0$，$j\in S$，$\sum\limits_{j\in S}x_j=1$ 的唯一解。

（二）平稳分布

定义：一个定义在状态空间上的概率分布 $\pi=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_i,\cdots\}$ 称为马氏链的平稳分布，如有：

$$\pi=\pi P$$

即，$\forall j\in S$，有：

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$$

平稳分布也称为马氏链的不变概率测度。对于一个平稳分布 $\pi$ ，显然有：

$$\pi = \pi P = \pi P^2 = \cdots = \pi P^n$$

定理：设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为平稳过程的充分必要条件是 $\pi(0) = (\pi_i(0), i \in S)$ 是平稳分布，即有：

$$\pi(0) = \pi(0)P$$

证明：充分性：记 $\pi(0) \hat{=} \pi$ ，则有：

$$\pi(1) = \pi(0)P = \pi$$

$$\pi(2) = \pi(1)P = \pi(0)P = \pi, \quad \cdots$$

$$\pi(n) = \pi(n-1)P = \cdots = \pi$$

因此，对于 $\forall i_k \in S$ ， $t_k \in N$ ， $n \geq 1$ ，$1 \leq k \leq n$ ，$t \in N$ ，有：

$$\begin{aligned} P\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\} &= \pi_{i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})} \\ &= \pi(t_1 + t) p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})} \\ &= P\{X_{t_1 + t} = i_1, X_{t_2 + t} = i_2, \cdots, X_{t_n + t} = i_n\} \end{aligned}$$

所以 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是严平稳过程。

必要性：由于 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是平稳过程，因此有：

$$\pi(n) = \pi(n-1) = \cdots = \pi(0)$$

又由 $\pi(1) = \pi(0)P$ 得：

$$\pi(0) = \pi(0)P$$

即 $\pi(0)$ 是平稳分布。

定理：不可约的遍历链恒有唯一的平稳分布 $\left\{\pi_i = \dfrac{1}{\mu_i}, i \in S\right\}$ ，且

$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$。

（三）$\lim_{n\to\infty} \pi_j(n)$ 的存在性

定义：若 $\lim_{n\to\infty} \pi_j(n) = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j\} = \pi_j^*$，$j \in S$ 存在，则称 $\pi^* = \{\pi_1^*, \cdots, \pi_j^*, \cdots\}$ 为马氏链的极限分布。

定理：非周期的不可约链是正常返的充分必要条件是它存在平稳分布，且此时平稳分布就是极限分布。

证明：充分性：设存在平稳分布：$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_j, \cdots\}$，由此有：

$$\pi = \pi P = \pi P^2 = \cdots = \pi P^n$$

即：

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}$$

由于：$\pi_j \ge 0$，$j \in S$，$\sum_{j\in S} \pi_j = 1$，

由控制收敛定理，有：

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S} \pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \left(\sum_{i\in S} \pi_i\right) \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$$

因为

$$\sum_{j\in S} \pi_j = \sum_{j\in S} \frac{1}{\mu_j} = 1$$

于是至少存在一个 $\pi_l = \dfrac{1}{\mu_l} > 0$，从而

$$\lim_{n\to\infty} p_{il}^{(n)} = \frac{1}{\mu_l} > 0$$

即有：

$$\mu_l < \infty$$

故$l$为正常返状态，由不可约性，可知整个链是正常返的，且有

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0,\ j \in S$$

必要性：由于马氏链是正常返非周期链，即为遍历链，由以上的定理立即可得结果。且有：

$$\pi_j = \pi_j^* = \frac{1}{\mu_j},\ j \in S$$

由此定理可知，对于不可约遍历链，则极限分布$\pi^* = \pi$存在，且就是等于平稳分布。

（四）例子

例 **1** 设$S = \{1,2\}$，且一步转移矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

求平稳分布及$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$。

解：由$\pi = \pi P$，解得：

$$\pi_1 = 5/7，\ \pi_1 = 2/7$$

故$\pi = (5/7, 2/7)$，由$\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_j}$，故$\mu_1 = 7/5, \mu_2 = 7/2$。

且：$\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix}$。

例 **2** 在一计算机系统中，每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差，以 **0** 表示误差状态，以 **1** 表示无误差状态。设状态的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

试说明相应齐次马氏链是遍历的，并求其极限分布（平稳分布）。

解：可以看出一步转移概率矩阵中的元素都大于零，因此可知是遍历的。

（1）　由矩阵的对角化可得：

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}^{-1}$$

因此有：

$$P^n=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.25\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}^{-1}$$

由此，可得：

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

极限分布为：$\pi=(2/3,1/3)$。

（2）　由$\pi=\pi P$，解得：$\pi=(2/3,1/3)$。

例 3 在直线上带有反射壁的随机游动，只考虑质点取 1、2、3 三个点，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{pmatrix}$$

讨论它是否为遍历链。

解：计算得：

$$P^2=\begin{pmatrix}q^2+pq & pq & p^2\\ q^2 & 2pq & p^2\\ q^2 & pq & p^2+pq\end{pmatrix}$$

可以看出其中得元素都大于零，因此可知是遍历的。即$\pi_j=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$，与$i$无关。

求极限分布时，只要解方程$\pi=\pi P$即可，可以求得：

$$\pi_1 = \left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\pi_2 = \frac{p}{q}\left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\pi_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^2\left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

例 **4** 限制性酶切片断平均长度的计算。

序列：**TACTAATCGGATAACCAAACA…**，切点为 **AA** 和 **AC** 的情况。

状态空间：$S_1 = \{A, B = C \cup G \cup T, AA\}$ ；$S_2 = \{A, C, G \cup T, AC\}$

$X_n$ 定义为记录原始序列在 $n$ 位置的状态情况。则 $\{X_n; n \ge 1\}$ 为一齐次马氏链，转移矩阵分别为：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & q & p \\ p & q & 0 \\ p & q & 0 \end{pmatrix} \quad p = p_A, q = p_C + p_G + p_T$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_A & 0 & p_G + p_T & p_C \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得，**AA** 酶切片断平均长度为：$\dfrac{1}{p_A^2} + \dfrac{1}{p_A}$ ；**AC** 酶切片断平均长度为：$\dfrac{1}{p_A p_C}$。

## **6**．非常返态分析

由状态空间的分解可知，状态空间 $S$ 可唯一地分解为：

$$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots = D \cup C$$

其中：$D$ 是非常返态集，每个 $C_n$ , $n = 1,2,\cdots$ 均是由常返状态组成的不可约集，其中的状态互通。

（一）　计算从状态 $i$ 出发进入状态子集 $C_k$ 的概率 $P\{C_k \mid i\}$。

若 $i \in C_k$ , 则有 $P\{C_k \mid i\} = 1$ ;若 $i \in C_m$ $m \neq k$ , 则有 $P\{C_k \mid i\} = 0$ ;若 $i \in D$，则有：

$$P\{C_k \mid i\} = \sum_{j \in S} p_{ij} P\{C_k \mid j\}$$

由此，我们有：

$$P\{C_k \mid i\} - \sum_{j \in D} p_{ij} P\{C_k \mid j\} = \sum_{j \in C_k} p_{ij} \,, \quad i \in D$$

解上式的线性方程组，即可得概率 $P\{C_k \mid i\}$，称此概率为 $C_k$ 的吸收概率。

（二）　非常返态进入常返态所需的平均时间

设 $T$ 为从状态 $i \in S$ 出发进入常返态类所需的时间，称此时间为吸收时间。$T$ 为取值于 $N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$ 的随机变量。

设 $P\{T = n \mid i\}, n = 0,1,2,\cdots$ 为过程经过 $n$ 步转移后由状态 $i$ 进入常返态类的概率，则

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} P\{T = n \mid i\} = P\{T < \infty \mid i\}$$

表示从状态 $i$ 出发迟早进入常返态类的概率。

称：$1 - \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} P\{T = n \mid i\} = 1 - P\{T < \infty \mid i\}$ 为过程的亏值，它表示过程永远停留在非常返态的概率。

若 $i \in C$，则有：$P\{T = 0 \mid i\} = 1, \ P\{T > 0 \mid i\} = 0$ ；

若 $i \in S$，我们有：

$$P\{T = n+1 \mid i\} = \sum_{j \in S} p_{ij} P\{T = n \mid j\}, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

因此，若$i \in D$，则由：

$$\begin{cases} P\{T=1|i\}=\sum_{j\in C} p_{ij} & \text{(起始条件)} \\ P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in D} p_{ij}P\{T=n|j\}, & n=1,2,\cdots \end{cases}$$

可以计算出吸收时间的概率分布。

另外，也可以利用首达概率计算吸收时间的概率分布如下：

$$P\{T=n|i\}=\sum_{j\in C} f_{ij}^{(n)} \quad i\in D, n=1,2,\cdots$$

当亏值为 **0** 时，计算非常返态进入常返态所需的平均时间为：

$$E\{T|i\}=\sum_{n=1}^{\infty} nP\{T=n|i\}$$

当亏值不为 **0** 时，上式无意义。

我们还可以计算非常返态进入常返态所需的平均时间如下：

由： $P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in S} p_{ij}P\{T=n|j\}, \quad n=0,1,2,\cdots$

两边各乘以$n$，有：

$$(n+1)P\{T=n+1|i\}-P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in S} n\cdot p_{ij}P\{T=n|j\}$$

上式对$n=0,1,2,\cdots$求和，我们有

$$E\{T|i\}-\sum_{n=1}^{\infty} P\{T=n|i\}=\sum_{j\in S} E\{T|j\}p_{ij} \qquad \textbf{(A)}$$

如果 $j\in C$，则$E\{T|j\}=0$；

若过程的亏值为 **0**，则有$\sum_{n=1}^{\infty} P\{T=n|i\}=1$，由（**A**）可得：

$$E\{T|i\}-\sum_{j\in D} E\{T|j\}p_{ij}=1, \quad i\in D$$

由上面的方程组即可计算非常返态进入常返态所需的平均时间。

习题：

**1**、　设$\{\xi_n, n\ge 1\}$为相互独立同分布的随机变量序列，其分布为：

$$P\{\xi_n=1\}=p>0, \quad P\{\xi_n=0\}=q=1-p>0$$

定义随机序列$\{X_n, n\ge 2\}$和$\{Y_n, n\ge 2\}$如下：

$$X_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 1; \\ 2, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 0; \\ 3, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 1; \end{cases} \qquad Y_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \text{其它}; \end{cases}$$

试问随机序列$\{X_n, n \ge 2\}$和$\{Y_n, n \ge 2\}$是否为马氏链？如果是的话，请写出其一步转移概率矩阵并研究各个状态的性质。不是的话，请说明理由。

**2、** 独立地连续抛掷一颗质地均匀的六面骰子，以$\xi_n$表示前$n$次抛掷出的最大点数，试明证$\{\xi_n; n \ge 1\}$是一马氏链，并求其$n$步转移概率矩阵。

**3、** 设一齐次马氏链的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

（**a**）试求首达概率 $f_{00}^{(n)}, n = 1,2,3,\cdots$；

（**b**）写出四个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

教材 **P116**：**20**、**21**。

# 第二章　Markov 过程

## 7．参数连续状态离散的马氏过程

### （一）参数连续状态离散的马氏过程的转移概率

定义：设$\{X(t)\,,t\ge 0\}$是取值于状态空间$S$的随机过程，$S$是有限或无限可列的，如果对于任意的正整数$n$，任意的$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}$，及任意的状态$i_1,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}\in S$，均有：

$$\begin{aligned}&P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\,|\,X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n\}\\&=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\,|\,X(t_n)=i_n\}\end{aligned}$$

则称此随机过程为参数连续状态离散的马氏过程（纯不连续马氏过程）。

对于纯不连续马氏过程，有：

$$P\{X(t_2)=j\,|\,X(t'),0\le t'\le t_1\}=P\{X(t_2)=j\,|\,X(t_1)=i\}\quad t_1\le t_2\,,i,j\in S$$

记：

$$p_{ij}(t_1,t_2)\hat{=}P\{X(t_2)=j\,|\,X(t_1)=i\}$$

称此条件概率为纯不连续马氏过程的转移概率。

显然有：

$$\begin{cases}p_{ij}(t_1,t_2)\ge 0\\ \sum\limits_{j\in S}p_{ij}(t_1,t_2)=1\quad i\in S\end{cases}$$

如果$p_{ij}(t_1,t_2)$仅为时间差$t=t_2-t_1$的函数，而与$t_1$和$t_2$的值无关，则称此纯不连续马氏过程为齐次的。此时

$$p_{ij}(t)=p_{ij}(t_1,t_2)\hat{=}P\{X(t_2)=j\,|\,X(t_1)=i\}\quad t=t_2-t_1$$

$$\begin{cases} p_{ij}(t) \geq 0 \quad i, j \in S, t \geq 0 \\ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1 \quad i \in S, t \geq 0 \end{cases}$$

以下我们主要讨论齐次纯不连续马氏过程。

纯不连续马氏过程的 **C－K** 方程：

一般情形：

$$P\{X(t_3) = j \mid X(t_1) = i\} =$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X(t_3) = j \mid X(t_2) = k\} P\{X(t_2) = k \mid X(t_1) = i\}$$

$$(t_1 < t_2 < t_3\,, \quad i\,, j \in S)$$

齐次情形：

$$p_{ij}(t+\tau) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(\tau)\,, \quad (i, j \in S, t > 0, \tau > 0)$$

连续性条件：

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

满足连续性条件的马氏过程称为随机连续的马氏过程。

注：$i, j$ 固定时，可以证明齐次纯不连续，并且随机连续的马氏过程的转移概率 $p_{ij}(t)$ 是关于 $t$ 的一致连续函数，并且是可微的。

（二）无穷小转移率 $q_{ij}$ 及转移率矩阵（$Q$ 矩阵）

取任意充分小的 $\Delta t > 0$，由连续性条件及上面的注，我们有：

$$p_{ij}(\Delta t) = p_{ij}(0) + q_{ij}\Delta t + o(\Delta t) = \delta_{ij} + q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$$

即：

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - \delta_{ij}}{\Delta t}$$

我们称 $q_{ij}$ 为从状态 $i$ 到状态 $j$ 的无穷小转移率或跳跃强度，显然有：

$$q_{ij}=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, & i\neq j\\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t}, & i=j\end{cases}$$

即有：

$$q_{ij}\geq 0,(i\neq j),\quad q_{ij}\leq 0,(i=j)$$

由$\sum\limits_{j\in S}p_{ij}(\Delta t)=1$及上面的式子，有：

$$1=1+\left(\sum_{j\in S}q_{ij}\right)\Delta t+\sum_{j\in S}o(\Delta t)\Rightarrow\left(\sum_{j\in S}q_{ij}\right)=\sum_{j\in S}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

两边求极限，即有：

$$\sum_{j\in S}q_{ij}=0$$

当状态有限的时候，我们可以定义一个矩阵如下：

$$Q=\begin{pmatrix}q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0n}\\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

称$Q$为转移率矩阵或$Q$矩阵。

注：当状态为无限可列时，也可以定义形式上的$Q$矩阵。

## （三）**Kolmogrov—Feller** 前进方程

由 **C－K** 方程，取任意充分小的$\Delta t>0$，有：

$$p_{ij}(t+\Delta t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)=$$

$$=p_{ij}(t)p_{jj}(\Delta t)+\sum_{k\in S,k\neq j}p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)\quad(i\in S)$$

由：

$$\begin{cases} p_{kj}(\Delta t) = q_{kj}\Delta t + o(\Delta t) & k \neq j \\ p_{jj}(\Delta t) = 1 + q_{jj}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

有：

$$p_{ij}(t+\Delta t) =$$

$$= p_{ij}(t)[1 + q_{jj}\Delta t + o(\Delta t)] + \sum_{k \in S, k \neq j} p_{ik}(t)[q_{kj}\Delta t + o(\Delta t)]$$

即有：

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$，我们有：

$$\frac{d\, p_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj} \quad i, j \in S, t \geq 0$$

由初始条件：

$$\begin{cases} p_{ij}(0) = 0 & i \neq j \\ p_{ii}(0) = 1 \end{cases}$$

即可求解上面的方程组。

当状态有限时，我们令：

$$\Gamma_i(t) = \left(p_{i0}(t), p_{i1}(t), \cdots, p_{in}(t)\right)$$

则有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\Gamma_i(t)}{dt} = \Gamma_i(t) Q & i = 0,1,2,\cdots,n \\ \Gamma_i(0) = (0,0,\cdots,1,\cdots 0) \end{cases}$$

进一步，若记：

$$P(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_0(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \vdots \\ \Gamma_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots & p_{0n}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n0}(t) & p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

则有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,P(t)}{d\,t} = P(t)Q \\ P(0) = I_{(n+1)\times(n+1)} \end{cases}$$

**此即为 Kolmogrov—Feller 前进方程。**

**（四）Kolmogrov—Feller 后退方程**

**根据 C－K 方程，取任意充分小的$\Delta t > 0$，有：**

$$p_{ij}(t+\Delta t) = p_{ij}(\Delta t + t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(\Delta t) p_{kj}(t) =$$
$$= p_{ii}(\Delta t) p_{ij}(t) + \sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(\Delta t) p_{kj}(t) \quad (i \in S)$$

**由：**

$$\begin{cases} p_{ik}(\Delta t) = q_{ik}\Delta t + o(\Delta t) & k \neq i \\ p_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

**得：**

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = q_{ii} p_{ij}(t) + \sum_{k\in S, k\neq i} q_{ik} p_{kj}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

**令$\Delta t \to 0$，我们有：**

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t} = \sum_{k\in S} q_{ik} p_{kj}(t) \quad i, j \in S, t \geq 0$$

**当状态有限时，记：**

$$S_j(t) = \begin{pmatrix} p_{0j}(t) \\ p_{1j}(t) \\ \vdots \\ p_{nj}(t) \end{pmatrix}$$

**则有：**

$$\frac{d\,S_j(t)}{d\,t} = Q S_j(t) \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n$$

**初始条件为：**

$$S_j(0)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(j+1)$$

上面的方程组即为 **Kolmogrov—Feller** 后退方程

（五）**Fokker-Planck** 方程

讨论有限状态的情形，令：$p_j(t)=P\{X(t)=j\}$

过程的初始分布为：

$$\vec{p}(0)=\left(p_0(0),p_1(0),\cdots,p_n(0)\right)$$

设在 $t$ 时刻时，过程所处各状态的概率分布为：

$$\vec{p}(t)=\left(p_0(t),p_1(t),\cdots,p_n(t)\right)$$

则有：

$$p_0(t)=p\{X(t)=0\}=\sum_{j=0}^{n}P\{X(t)=0\,|\,X(0)=j\}P\{X(0)=j\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}p_{j0}(t)p_j(0)=\sum_{j=0}^{n}p_j(0)p_{j0}(t)$$

即有：

$$\vec{p}(t)=\vec{p}(0)P(t)$$

即有：

$$\frac{d\,\vec{p}(t)}{d\,t}=\vec{p}(0)\frac{d\,P(t)}{d\,t}=\vec{p}(0)P(t)Q=\vec{p}(t)Q$$

因此，得：

$$\frac{d\,\vec{p}(t)}{d\,t}=\vec{p}(t)Q$$

此即为 **Fokker-Planck** 方程，其初始条件为

$$\vec{p}(0)=\left(\,p_0(0),p_1(0),\cdots,p_n(0)\,\right)$$

解此方程可得任意时刻该过程的一维概率分布。

（六）例子

例 1 假设某服务台有一部电话，如果在$t$时刻电话正被使用，置$X(t)=1$，否则置$X(t)=0$，因此$\{X(t)\,;t\ge 0\}$为一纯不连续马氏过程。假设此过程的转移概率矩阵为：

$$P(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1+7e^{-8t}}{8} & \dfrac{7-7e^{-8t}}{8}\\ \dfrac{1-e^{-8t}}{8} & \dfrac{7+e^{-8t}}{8}\end{pmatrix}$$

初始分布为：

$$q_0=P\{X(0)=0\}=1/10\,;\quad q_1=P\{X(0)=1\}=9/10$$

（1）　计算矩阵$P(0)$；

（2）　计算概率：$P\{X(0.2)=0\}$；$P\{X(0.2)=0\,|\,X(0)=0\}$；

$P\{X(0.1)=0,X(0.6)=1,X(1.1)=1\,|\,X(0)=0\}$；

$P\{X(1.1)=0,X(0.6)=1,X(0.1)=0\}$；

（3）　计算$t$时刻的一维分布；

（4）　计算$t$时刻的转移率矩阵；

例 2 设有参数连续、状态离散的马氏过程$\{X(t),t\ge 0\}$，状态空间为：$S=\{1,2,\cdots,m\}$，当 $i\ne j,i,j=1,2,\cdots,m$ 时，$q_{ij}=1$，$q_{ii}=-(m-1)$，$i=1,2,\cdots,m$，求$p_{ij}(t)$。

解：由 K－F 前进方程，可知：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=-(m-1)\,p_{ij}(t)+\sum_{k\ne j\,k\in S}p_{ik}(t)$$

由

$$\sum_{k\in S} p_{ik}(t)=1$$

可知

$$\sum_{k\neq j\, k\in S} p_{ik}(t)=1-p_{ij}(t)$$

因此，我们有：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=-(m-1)\,p_{ij}(t)+[1-p_{ij}(t)]=1-m\,p_{ij}(t)\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

解此微分方程，得：

$$p_{ij}(t)=ce^{-mt}+\frac{1}{m}\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

利用初始条件：

$$p_{ii}(0)=1,\quad p_{ij}(0)=0\quad (i\neq j)$$

可得：

$$p_{ii}(t)=\left(1-\frac{1}{m}\right)e^{-mt}+\frac{1}{m}\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$p_{ij}(t)=\frac{1}{m}(1-e^{-mt})\quad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m)$$

注意：关于指数分布（Exponential distribution）的性质

定义：若连续型随机变量 $X$ 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$，则称 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，记作 $X\sim Ex(\lambda)$。

性质：若 $X\sim Ex(\lambda)$，则 $E(X)=1/\lambda$

性质（无记忆性）：对于 $\forall s,t>0$，我们有：

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$$

例 **3**（排队问题）设有一服务台，$[0,t)$内到达服务台的顾客数是服从 **Poission** 分布的随机变量。单位时间到达服务台的平均人数是$\lambda$。服务台只有一个服务员，对顾客服务时间是按负指数分布的随机变量，平均服务时间为$1/\mu$。如果服务台空闲时，到达的顾客立刻得到服务；如果顾客到达时服务员正在为另一顾客服务，则他必须排队等候；如果顾客到达时发现已经有二人在等候，则他就离开不再回来。设$X(t)$代表在$t$时刻系统内顾客人数（包括正在被服务的顾客和排队等候的顾客）。假设系统在$t=0$时处于零状态，即服务人员空闲。求$t$时刻系统处于状态$j$的无条件概率$p_j(t)$所满足的微分方程。

解：(**1**) 写出状态空间：$S=\{0,1,2,3\}$

(**2**) 求$Q$矩阵：

(**a**) 当$X(t)=0$时，在$[t,t+\Delta t)$内到达一个顾客的概率为：

$$p_{01}(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

在$[t,t+\Delta t)$内到达二个或二个以上的顾客的概率为：

$$p_{0j}(\Delta t)=o(\Delta t)\quad j=2,3$$

因此

$$q_{01}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{01}(\Delta t)}{\Delta t}=\lambda$$

$$q_{0j}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{0j}(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

由：

$$\sum_{j\in S}q_{ij}=0$$

可得：

$$q_{00}=-\lambda$$

(**b**) 当$X(t)=1$时，表示在$t$时刻有一个顾客正在被服务。由指数分布的无记忆性，可知，在$[t,t+\Delta t)$内完成服务的概率为：

$$(1-e^{-\mu\Delta t})=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

由此可知，在$\Delta t$时间内系统由 **1** 状态转入到 **0** 状态的概率为：

$$p_{10}(\Delta t)=[\mu\Delta t+o(\Delta t)][1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

故

$$q_{10}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{10}(\Delta t)}{\Delta t}=\mu$$

在$\Delta t$时间内系统由 **1** 状态转入到 **2** 状态的概率为：

$$p_{12}(\Delta t)=[1-\mu\Delta t+o(\Delta t)][\lambda\Delta t+o(\Delta t)]=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

故

$$q_{12}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{12}(\Delta t)}{\Delta t}=\lambda$$

同理：

$$q_{13}=0$$

$$q_{11}=-(\lambda+\mu)$$

$$q_{20}=0$$

$$q_{21}=\mu$$

$$q_{23}=\lambda$$

$$q_{22}=-(\lambda+\mu)$$

（**c**）当$X(t)=3$时，系统不再接受新顾客，此时，状态只可转到 **2** 或仍在 **3**。

当$X(t)=3$时，在$\Delta t$时间内完成服务的概率为：$(1-e^{-\mu\Delta t})=\mu\Delta t+o(\Delta t)$

因此

$$q_{32}=\mu$$

$$q_{30}=0$$

$$q_{31}=0$$

$$q_{33}=-\mu$$

于是可得$Q$矩阵如下：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

（3）写出方程

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{d\,t}=-\lambda\,p_0(t)+\mu\,p_1(t) \\ \dfrac{d\,p_1(t)}{d\,t}=\lambda\,p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+\mu\,p_2(t) \\ \dfrac{d\,p_2(t)}{d\,t}=\lambda\,p_1(t)-(\lambda+\mu)p_2(t)+\mu\,p_3(t) \\ \dfrac{d\,p_3(t)}{d\,t}=\lambda\,p_2(t)-\mu\,p_3(t) \end{cases}$$

初始条件为：

$$\begin{cases} p_0(0)=1 \\ p_j(0)=0 \quad j=1,2,3 \end{cases}$$

## 8．纯不连续马氏链的极限性质

### （一）纯不连续马氏过程的 $h-$ 离散骨架

记 $p_j(t)=P\{X(t)=j\}$，$\forall\ j\in S$，称 $\vec{p}(t)=(p_i(t)\,,\forall i\in S)$，为纯不连续马氏过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 在 $t$ 时刻的分布，称 $\vec{p}(0)=(p_i(0)\,,\forall i\in S)$ 为初始分布。

注意：任意 $n$ 个时刻的联合分布率可由 $\vec{p}(0)$ 和 $P(t)$ 唯一确定，且有关系：

$$\vec{p}(t)=\vec{p}(0)P(t)$$

定义：对于纯不连续马氏过程 $\{X(t),t\geq 0\}$，任取 $h>0$，记：

$$X_n(h) = X(nh), \quad n \ge 0$$

则$\{X(nh), n \ge 0\}$是一离散时间的马氏链，称为以$h$为步长的$h-$离散骨架，简称$h$骨架。它的$n$步转移概率矩阵为$P(nh)$。

对于满足连续性条件的齐次纯不连续马氏过程，有以下结论：

命题：$\forall\, t \ge 0, i \in S$，有$p_{ii}(t) > 0$。

证明：由$p_{ii}(0) = 1 > 0$，及连续性条件$\lim\limits_{t \to 0} p_{ii}(t) = \delta_{ii} = 1$，可知：对任意固定的$t > 0$，当$n$充分大时，有$p_{ii}(t/n) > 0$，由 **C－K** 方程有：

$$p_{ii}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{ki}(t) \ge p_{ii}(s) p_{ii}(t)$$

因此可得：

$$p_{ii}(t) \ge [p_{ii}(t/n)]^n > 0$$

由此命题可知：对所有的$h > 0$及正整数$n$，及$\forall\, i \in S$，有$p_{ii}(nh) > 0$，这意味着对每一个离散骨架$\{X(nh), n \ge 0\}$，每一个状态都是非周期的。因此对于纯不连续的马氏过程，无需引入周期的概念。

定义：若存在$t > 0$，使得$p_{ij}(t) > 0$，则称由状态$i$可达状态$j$，记为$i \to j$；若对一切$t > 0$，有$p_{ij}(t) = 0$，则称由状态$i$不可达状态$j$；若$i \to j$且$j \to i$，则称状态$i$与$j$相通，记作$i \leftrightarrow j$。

由上面的命题可知，$i \leftrightarrow i$，因此相通是一等价关系，从而可以相通关系对状态空间分类。相通的状态组成一个状态类。若整个状态空间是一个状态类，则称该纯不连续马氏过程是不可约的。

定义：(**1**) 若$\int_0^{+\infty} p_{ii}(t)dt = +\infty$，则称状态$i$为常返状态；否则称状态$i$为非

常返状态。

（2）设 $i$ 为常返状态，若 $\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t) > 0$，则称状态 $i$ 为正常返状态；若 $\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t) = 0$，则称状态 $i$ 为零常返状态。

（3）若概率分布 $\pi = (\pi_i, i \in S)$，满足：

$$\pi = \pi P(t), \quad \forall t \ge 0$$

则称 $\pi$ 为 $\{X(t), t \ge 0\}$ 的平稳分布。

（4）若对 $\forall i \in S$，$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = \pi_i^*$ 存在，则称 $\pi^* \hat{=} \{\pi_i^*, i \in S\}$ 为 $\{X(t), t \ge 0\}$ 的极限分布。

与马氏链的讨论类似，我们有：

定理：不可约纯不连续马氏过程是正常返的充分必要条件是它存在平稳分布，且此时的平稳分布就是极限分布。

下面讨论 $p_j(t)$ 和 $p_{ij}(t)$ 的极限性质，讨论状态空间有限且各状态都相通的情形。状态无限可列的情形有类似的结果。

（二）极限性质

命题：当 $t \to \infty$ 时，$p_j(t)$ 趋于一个与初始分布 $\vec{p}(0)$ 无关的极限的充分必要条件是 $p_{ij}(t)$ 对任何状态 $i$ 趋于同一极限。

证明：设初始分布为 $\vec{p}(0) = (P\{X(0) = i\} = p_i(0), \forall i \in S)$，由全概率公式有：

$$p_j(t) = P\{X(t) = j\} = \sum_{i\in S} p_i(0) p_{ij}(t), \quad (j \in S)$$

“$\Rightarrow$”：若 $t \to \infty$ 时，$p_j(t)$ 趋于一个与初始分布 $\vec{p}(0)$ 无关的极限，即当 $t \to \infty$ 时，

$$p_j(t) \to p_j, \quad j \in S$$

特别地取一种初始分布 $p_i(0)=1$, $p_k(0)=0$, $k\in S, k\neq i$，我们有：

$$p_j(t)=p_{ij}(t)\,,\quad (i,j\in S)$$

因此有：

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\lim_{t\to\infty}p_j(t)=p_j\,,\quad i,j\in S\qquad \text{（极限与 } i \text{ 无关）}$$

“ $\Leftarrow$ ”: 若 $\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=p_j$ ， $i,j\in S$，则对于任意的 $\vec{p}(0)=(p_i(0)\,,\forall i\in S)$，有：

$$\lim_{t\to\infty}p_j(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\in S}p_i(0)p_{ij}(t)=\sum_{i\in S}p_i(0)p_j=p_j$$

定理：（**Markov** 定理）对于状态有限的纯不连续马氏过程，若 $\exists t_0$ 使得对于 $\forall i,r\in S$ 有 $p_{ir}(t_0)>0$，那么极限 $\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=p_j$ 存在且与 $i$ 无关 $(i,j\in S)$。

证明：令：$M_j(t)\hat{=}\max_{i\in S}p_{ij}(t)$，$m_j(t)\hat{=}\min_{i\in S}p_{ij}(t)$

则有：
$$0\le M_j(t),m_j(t)\le 1,\quad \forall\, t\ge 0$$

（**1**）　证明 $M_j(t),m_j(t)$ 的单调性：

由 **C－K** 方程，对于 $\forall i\in S$，我们有：

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in S}p_{ik}(\tau)p_{kj}(t)\le M_j(t)\sum_{k\in S}p_{ik}(\tau)=M_j(t)$$

因此有：

$$M_j(t+\tau)\le M_j(t)$$

同理，对于 $\forall i\in S$，我们有：

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in S}p_{ik}(\tau)p_{kj}(t)\ge m_j(t)\sum_{k\in S}p_{ik}(\tau)=m_j(t)$$

因此有：

$$m_j(t+\tau)\ge m_j(t)$$

由此可知当 $t\to+\infty$ 时，$M_j(t),m_j(t)$ 的极限存在。

（**2**）　证明 $\lim_{t\to+\infty}M_j(t)=\lim_{t\to+\infty}m_j(t)\hat{=}p_j$

证明的思路与离散的情形类似，见 **P168－P170**。

由上面的定理和命题可知，对于纯不连续马氏过程，如果存在一个$t_0$，使得对于$\forall i,r\in S$有$p_{ir}(t_0)>0$，则$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\lim_{t\to\infty}p_j(t)=p_j$，　$i,j\in S$。

此时，我们有：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d\,p_{ij}(t)}{dt}=0\,,\,i,j\in S,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{d\,p_j(t)}{dt}=0\,,\,j\in S$$

根据 **K－F** 前进方程

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj}$$

两边求极限，有：

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj}=\sum_{k\in S}p_k q_{kj}=0$$

因此，解以下的联立方程组：

$$\begin{cases}\sum_{k\in S}p_k q_{kj}=0\\ \sum_{k\in S}p_k=1\end{cases}$$

即可求得当$t\to\infty$时过程取各个状态的极限概率$p_j$。

（三）例子

例 **1**：(机器维修问题）设某机器的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，它的平均正常工作时间为$1/\lambda$；它损坏后修复时间也是一负指数分布的随机变量，它的平均修复时间为$1/\mu$。如果该机器在$t=0$时是正常工作的，问在$t=10$时该机器处于正常工作状态的概率是多少？长时间工作下去，机器处于正常状态的概率如何？

解：(**1**) 写出状态空间：记机器处于正常工作状态为 **0**，处于维修状态为 **1**，则状态空间为$\{0,1\}$。(**2**) 求出$Q$矩阵：由指数分布的“无记忆性”，可求得$Q$矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

(**3**) 写出前进或后退方程及初始条件：

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) \\ p'_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) \\ p_{10}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{00}(0) \\ p_{10}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P\{X(0)=0\} = p_0(0) = 1$$

$$P\{X(0)=1\} = p_1(0) = 0$$

**（4）求解上面的微分方程：**

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

**由：**

$$P\{X(t)=j\} = p_j(t) = \sum_{i\in S} p_i(0) p_{ij}(t) = p_0(0) p_{0j}(t)$$

**可求得：**

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_0(10) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-10(\lambda+\mu)}$$

**（5）极限性态：根据以上所求，求极限即有：**

$$\lim_{t\to\infty} p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \hat{=} p_0$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \hat{=} p_0$$

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \hat{=} p_0$$

**另外：根据上面极限性态的讨论，由：**

$$\begin{cases} \sum_{k\in S} p_k q_{kj} = 0 \\ \sum_{k\in S} p_k = 1 \end{cases}$$

**同样可以求得：**

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty} p_1(t) = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

**例 2　求解第 7 节中各个例子的极限问题。**

## 9．应用问题（生灭过程）

定义：纯不连续马氏过程$\{X(t), t\ge 0\}$如果满足：

（a）　过程中状态转移仅限于从一个状态向其邻近状态转移；

（b）　若$X(t)=n$，则在$[t,t+\Delta t)$内产生由$n$状态转移到$(n+1)$状态的概率为：$\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$；产生由$n$状态转移到$(n-1)$状态的概率为：$\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$；

（c）　若$X(t)=n$，则在$[t,t+\Delta t)$内转移二个或二个以上状态的概率为$o(\Delta \mathrm{t})$。

则称此纯不连续马氏过程$\{X(t), t\ge 0\}$为生灭过程。生灭过程的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$。由定义，可得生灭过程的$Q$（生灭矩阵）矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
\mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & \cdots & 0 & \mu_n & -(\lambda_n+\mu_n) & \lambda_n & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}$$

在条件$\lambda_i>0, i\ge 0$，$\mu_i>0, i\ge 1$，（$\mu_0=0$）下，有：

$$i-1 \leftrightarrow i \leftrightarrow i+1\,(i\ge 1)$$

因此，可知对$\forall\, i, j \in S$，有$i \leftrightarrow j$，从而这样的生灭过程是不可约的。

由生灭矩阵可以写出 **K－F** 前进方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_{00}(t)}{dt} = -\lambda_0 p_{00}(t) + \mu_1 p_{01}(t) \\ \dfrac{d\,p_{0n}(t)}{dt} = \lambda_{n-1} p_{0\,n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_{0\,n}(t) + \mu_{n+1} p_{0\,n+1}(t) \quad n \ge 1 \\ \dfrac{d\,p_{i0}(t)}{dt} = -\lambda_0 p_{i\,0}(t) + \mu_1 p_{i1}(t) \\ \dfrac{d\,p_{in}(t)}{dt} = \lambda_{n-1} p_{i\,n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_{i\,n}(t) + \mu_{n+1} p_{i\,n+1}(t) \quad n \ge 1 \end{cases} \qquad \textbf{(A)}$$

**Fokker-Planck** 方程：

$$\begin{cases} p_0^{/}(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_j'(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1} \end{cases}$$

其中$i = 0,1,2,\cdots,\ j = 1,2,\cdots$。以上的$\lambda_n, \mu_n$（$n = 0,1,2,\cdots$）均可以是$t$的函数。

如果$\{X(t), t \ge 0\}$的极限分布存在，即$p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_{i\,j}(t)$，且与$i$无关，则有$p_j'(t) = 0\ (t \to \infty)$，因此在 **Fokker-Planck** 方程中令$t \to \infty$，有：

$$\begin{cases} -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0 \\ \lambda_{j-1} p_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) p_j + \mu_{j+1} p_{j+1} = 0 \quad j \ge 1 \end{cases}$$

解以上代数方程组得：

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0, \cdots, \quad p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} p_0$$

利用：$\sum\limits_{k\in S} p_k = 1$，我们有：　$p_0 = \left( 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \right)^{-1}$

由此可知，当

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} < \infty$$

时，$0 < p_0 < 1,\ 0 < p_k < 1 \quad (k \ge 1)$，因此可得以下定理：

定理：设$\{X(t), t \ge 0\}$是生灭过程，$\lambda_i > 0, i \ge 0$，$\mu_i > 0, i \ge 1$，$\mu_0 = 0$，则$\{X(t), t \ge 0\}$存在唯一的平稳分布（它就等于极限分布）的充要条件为：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty$$

且

$$p_0=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)^{-1}\qquad p_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}p_0$$

注：离散参数的生灭过程：

设有马氏链，它的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，且设当$|i-j|>1$时，$p_{ij}=0$，在其它的$i,j$时$p_{ij}$是任意的正数，对于每个$j>0$，满足：

$$p_{j\,j-1}+p_{jj}+p_{j\,j+1}=1$$

当$j=0$时，满足：

$$p_{00}+p_{01}=1$$

试求该链为正常返的条件。

解：由式子 $p_{j,j-1}+p_{j,j}+p_{j,j+1}=1$ 可知各状态都相通，画出状态转移图，利用平衡原理，我们有：

$$\begin{cases}\pi_0 p_{01}=\pi_1 p_{10}\\ \pi_1(p_{10}+p_{12})=\pi_0 p_{01}+\pi_2 p_{21}\\ \cdots\\ \pi_j(p_{jj-1}+p_{jj+1})=\pi_{j-1}p_{j-1j}+\pi_{j+1}p_{j+1j}\\ \vdots\end{cases}$$

由此解得：$\pi_1=\dfrac{p_{01}}{p_{10}}\pi_0$，$\pi_2=\dfrac{p_{01}p_{12}}{p_{10}p_{21}}\pi_0,\cdots,\pi_j=\dfrac{p_{01}p_{12}\cdots p_{j-1j}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{jj-1}}\pi_0,\cdots$

由$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$，利用正常返和极限分布的关系，我们有：当

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{j-1j}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{jj-1}}<\infty$$

时，此马氏链的极限分布存在，因此是正常返的。

给定起始状态 $X(0)=i\in S$，就可以求得过程在 $t$ 时刻的转移概率 $p_{in}(t)$ 及处于状态 $n$ 的概率 $p_n(t)=P\{X(t)=n\}$，初始条件分别为：

$$p_{in}(0)=\delta_{in}=\begin{cases}1, & n=i\\ 0, & n\neq i\end{cases},\quad p_j(0)=P\{X(0)=j\}=1,\quad j=i$$

如果 $\lambda_n,\mu_n$ 均是 $t$ 的函数，则上述过程称为非齐次生灭过程；

如果 $\lambda_n,\mu_n$ 均是 $t$ 的线性函数，则称为非齐次线性生灭过程；

如果 $\lambda_n,\mu_n$ 均与 $t$ 的无关，则上述过程称为齐次生灭过程。

特别地，假设 $\lambda_n=n\lambda(t),\mu_n=n\mu(t)$，此时过程是非齐次生灭过程，关于此情况时的微分方程（**A**）的解法（用母函数求解法）可以参看 **P179**（课后阅读）。

当 $\lambda_n=n\lambda,\mu_n=n\mu$（与 $t$ 无关），此时过程是齐次线性生灭过程，对于此时，我们可以求 $E\{X(t)\}$，具体求法如下：此时的生灭矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots\\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & n\mu & -n(\lambda+\mu) & n\lambda & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases}\dfrac{dp_0(t)}{dt}=\mu p_1(t)\\ \dfrac{dp_1(t)}{dt}=-(\mu+\lambda)p_1(t)+2\mu p_2(t)\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{dp_n(t)}{dt}=(n-1)\lambda p_{n-1}(t)-n(\mu+\lambda)p_n(t)+(n+1)\mu p_{n+1}(t)\end{cases}$$

令：$M_X(t)=E\{X(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}np_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)$

则有：

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{dp_n(t)}{dt}=$$

$$=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)p_{n-1}(t)-(\mu+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}n^2p_n(t)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)p_{n+1}(t)$$

由于：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)p_{n-1}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}m(m+1)p_m(t)=\sum_{m=1}^{\infty}m(m+1)p_m(t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)p_{n+1}(t)=\sum_{m=2}^{\infty}(m-1)mp_m(t)=\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)mp_m(t)$$

因此：

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)p_n(t)-(\mu+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}n^2p_n(t)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)np_n(t)$$

$$=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)=(\lambda-\mu)M_X(t)$$

即有：

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=(\lambda-\mu)M_X(t)$$

利用初始条件：$M_X(0)=i\times 1=i$，即可求得：

$$M_X(t)=E\{X(t)\}=ie^{(\lambda-\mu)t}\qquad t\geq 0$$

由上面求解过程可以看到，一般来说，解前进方程、后退方程和福克－普朗克方程是比较困难的，有时根本无法求得其解析解。但是，如果只研究$t\to\infty$时的极限情况，我们就可以利用上面 **8**（二）中提到的方法，将微分方程求极限后，转化为解线性代数方程组，下面通过例子说明具体的求法。

例：（电话交换问题）某电话总机有$n$条线路。在某一呼唤来到时如有空闲线路，则该呼唤占用其中某一条空闲线路，并开始通话。如果通话结束，则该线路使用完毕而成为空闲线路，等待下一次呼唤。如果呼唤来到时遇到$n$条线路均被占用，则该呼唤遭到拒绝而消失。设有按 **poission** 分布的呼唤流，即在

$[t,t+\Delta t)$ 内来到一次呼唤的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，来到二次或二次以上的呼唤的概率为 $o(\Delta t)$；并设如果某一线路在某时刻 $t$ 被占用，而在 $[t,t+\Delta t)$ 内这条线路空闲出来的概率为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$，即通话时间按负指数分布。求总机在 $t$ 时刻有 $k$ 条线路被占用的概率所满足的微分方程；以及当 $t\to\infty$ 时，有 $k$ 条线路被占用的概率。

解：此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,n\}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，并且是一生灭过程，生灭矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (n-1)\mu & -[\lambda+(n-1)\mu] & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n\mu & -n\mu \end{pmatrix}$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt}=\lambda p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+2\mu p_2(t) \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t) \quad (0<k<n) \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t) \end{cases}$$

令：$t\to\infty$，我们有：

$$\begin{cases} -\lambda p_0+\mu p_1=0 \\ \lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}=0 \quad (0<k<n) \\ \lambda p_{n-1}-n\mu p_n=0 \end{cases}$$

设：$g_k=\lambda p_{k-1}-k\mu p_k$，则有：

$$g_k = \lambda p_{k-1} - k\mu p_k = \lambda p_k - (k+1)\mu p_{k+1} = g_{k+1}$$
$$g_0 = 0$$
$$g_n = 0$$

因此 $g_i = 0 \quad i = 0,1,2,\cdots,n$

故有：

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0 \\ \quad \cdots\cdots \\ p_k = \dfrac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \\ \quad \cdots\cdots \\ p_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \end{cases}$$

利用：$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 \Rightarrow p_0\left[1 + \dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 1$

可得：

$$p_k = \frac{\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i} \qquad 0 \le k \le n$$

画出转移率转移图，注意用极限平衡原理求解。

几种特殊的生灭过程：

- 有迁入的线性增长模型：此时 $\lambda_n = n\lambda + a$ , $\mu_n = n\mu$ ，（见习题 **17**）；
- 纯生过程（**Yule** 过程）：此时 $\lambda_n = \lambda$ , $\mu_n = 0$ ；
- 纯灭过程：此时 $\lambda_n = 0$ , $\mu_n = \mu$ ，（见习题 **18**）；

习题：教材 **P232－233**：**15**、**16**、**17**。

# 第三章 Poission 过程（Poission 信号流）

## 一、　基本概念及 Poission 过程的一维分布

### （1）　独立增量过程

定义：设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程，如果对于任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ ，$\forall n\in N$，$t_i\in T,\ 1\le i\le n$，有随机过程$X(t)$的增量：

$$X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2),\cdots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立，则称随机过程$\{X(t), t\in T\}$是独立增量过程。

注意：若独立增量过程的参数集$T=[a,b),\ a>-\infty$，一般假定$X(a)=0$，则独立增量过程是一马氏过程。特别地，当 $X(0)=0$ 时，独立增量过程$\{X(t), t\ge 0\}$是一马氏过程。证明如下：

形式上我们有：

$$P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}=$$

$$=\frac{P\{X(t_n)\le x_n, X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$

$$=\frac{P\{X(t_n)\le x_n, X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-2})=x_{n-2} \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-2})=x_{n-2} \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$

因此，我们只要能证明在已知 $X(t_{n-1})=x_{n-1}$ 条件下，$X(t_n)$ 与 $X(t_j)$，$j=1,2,\cdots,n-2$相互独立即可。

由独立增量过程的定义可知，当$a<t_j<t_{n-1}<t_n,\ j=1,2,\cdots,n-2$时，增量 $X(t_j)-X(a)$ 与 $X(t_n)-X(t_{n-1})$ 相互独立，由于在条件 $X(t_{n-1})=x_{n-1}$ 和 $X(a)=0$下，即有$X(t_j)$与$X(t_n)-x_{n-1}$相互独立。由此可知，在$X(t_{n-1})=x_{n-1}$条件下，$X(t_n)$与$X(t_j)$，$j=1,2,\cdots,n-2$相互独立，结果成立。

（2）　计数过程

定义：在$[0,t)$内出现随机事件$A$的总数组成的过程$\{N(t), t\geq 0\}$称为计数过程。计数过程满足：

（a）$N(t)\geq 0$；

（b）$N(t)\in N_0$；

（c）$\forall s,t>0, s<t$，则有：$N(s)\leq N(t)$；

（d）$\forall s,t>0, s<t$，$N(t)-N(s)$表示在时间间隔$[s,t)$内事件$A$出现的次数。

若计数过程在不相交的时间间隔内事件$A$出现的次数是相互独立的，则称此计数过程为独立增量计数过程。

若计数过程在时间间隔$[t,t+s)$内出现事件$A$的次数只与时间差$s$有关，而与起始时间$t$无关，则称此计数过程为平稳增量计数过程。

（3）　**Poission** 过程

**Poission** 过程是计数过程，而且是一类最重要、应用广泛的计数过程，它最早于 **1837** 年由法国数学家 **Poission** 引入，至今仍为应用最为广泛的随机过程之一。

定义：计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$称为时齐（齐次）**Poission** 过程，若满足：

（a）$N(0)=0$；

（b）独立增量过程，即任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n, n\in N$，

$$N(t_1), N(t_2)-N(t_1),\cdots, N(t_n)-N(t_{n-1})$$

相互独立；

（c）增量平稳性，即：

$$\forall s,t>0, n\geq 0,\ P\{N(s+t)-N(s)=n\}=P\{N(t)=n\}$$

（**d**）对任意$t>0$，和充分小的$\Delta t>0$，有：

$$\begin{cases} P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t) \\ P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t) \end{cases}$$

其中$\lambda>0$（称为强度常数）。

定理：（**Poission** 过程的一维分布）若$\{N(t), t\geq 0\}$为时齐 **Poission** 过程，则$\forall s,t>0$，有：

$$P\{N(s+t)-N(s)=k\}=P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\ ,\quad k\in N$$

即$N(s+t)-N(s)$是参数为$\lambda t$的 **Poission** 分布。

证明：由增量平稳性，记：

$$P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{N(s+t)-N(s)=n\}$$

（**I**）$n=0$情形：因为

$$\{N(t+h)=0\}=\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}, h>0,$$

我们有：

$$\begin{aligned} P_0(t+h)&=P\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}= \\ &=P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}=P_0(t)P_0(h) \end{aligned}$$

另一方面

$$P_0(h)=P\{N(t+h)-N(t)=0\}=1-(\lambda h+o(h))$$

代入上式，我们有：

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\left(\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}\right)$$

令$h\to 0$，我们有：

$$\begin{cases} P_0'(t)=-\lambda P_0(t) \\ P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

（**II**）$n>0$情形：因为：

$$\begin{aligned}\{N(t+h)=n\}&=\{N(t)=n, N(t+h)-N(t)=0\}\\&\bigcup\{N(t)=n-1, N(t+h)-N(t)=1\}\\&\bigcup\left[\bigcup_{l=2}^{n}\{N(t)=n-l, N(t+h)-N(t)=l\}\right]\end{aligned}$$

故有：

$$P_n(t+h)=P_n(t)(1-\lambda h-o(h))+P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h))+o(h)$$

化简并令 $h\to 0$ 得：

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘以 $e^{\lambda t}$，移项后有：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)\\ P_n(0)=P\{N(0)=n\}=0\end{cases}$$

当 $n=1$ 时，有：

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_1(t)\right]=\lambda\,,\ P_1(0)=0 \quad\Rightarrow\quad P_1(t)=(\lambda t)e^{-\lambda t}$$

由归纳法可得：

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\,,\quad n\in N_0$$

注意：$E\{N(t)\}=\lambda t \quad\Rightarrow\quad \lambda=\dfrac{E\{N(t)\}}{t}$，因此 $\lambda$ 代表单位时间内事件 $A$ 出现的平均次数。

注意：**Poission** 过程的转移率矩阵（**Q** 矩阵）的表示，并用上一章讲过的方法求解 **Poission** 过程的一维分布。

## 二、　Poission 过程与指数分布的关系

设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是一计数过程，记：

$S_0=0$，$S_n$ 表示第 $n$ 个事件发生的时刻（$n\geq 1$），

$X_n = S_n - S_{n-1}\ (n \ge 1)$ 表示第 $n-1$ 个事件与第 $n$ 事件发生的时间间隔。

当 $\forall t \ge 0, n \ge 0$ 时，有以下基本的关系式：

$$\{N(t) \ge n\} = \{S_n \le t\}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \le t < S_{n+1}\} = \{S_n \le t\} - \{S_{n+1} \le t\}$$

因此，我们有关于随机变量 $S_n$ 的分布函数：

当 $t < 0$ 时，$F_{S_n}(t) = 0$；当 $t \ge 0$ 时，有：

$$F_{S_n}(t) = P\{S_n \le t\} = P\{N(t) \ge n\} = 1 - P\{N(t) < n\} = 1 - e^{-\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$

其概率密度为：

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\ , \quad t \ge 0$$

特别地，当 $n = 1$ 时，有：

$$P\{X_1 \le t\} = P\{S_1 \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}\ , \quad t \ge 0$$

即 $X_1 \sim Ex(\lambda)$ 是参数为 $\lambda$ 的指数分布。

问题：$X_2, X_3, \cdots, X_n$ 是否还是服从参数为 $\lambda$ 的指数分布？是否独立？我们以下将给出一个重要的定理。

为了更好地理解下面的内容，我们先复习一下求随机变量概率密度的“微元法”以及顺序统计量的分布。

**（1）　求随机变量概率密度的“微元法”：**

- 一维情形：若随机变量 $X$ 的概率密度 $f(x)$ 在 $x$ 点连续，则有：

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P\{x < X \le x + h\}}{h} \quad \Rightarrow \quad P\{x < X \le x + h\} = f(x)h + o(h)$$

- 多维情形：若随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 处连续，则有：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lim_{h_1,h_2,\cdots,h_n\to 0}\frac{P\{x_1<X_1\le x_1+h_1,\cdots,x_n<X_n\le x_n+h_n\}}{h_1h_2\cdots h_n}$$

即：

$$\begin{aligned}&P\{x_1<X_1\le x_1+h_1,\cdots,x_n<X_n\le x_n+h_n\}=\\&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)h_1h_2\cdots h_n+o(h_1h_2\cdots h_n)\end{aligned}$$

（2）　顺序统计量的分布

定义：给定$(\Omega,\Sigma,P)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为其上的随机向量，$\forall\omega\in\Omega$，将试验结果 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$ 按从小到大顺序重新进行排列，记为$X_{(1)}(\omega)\le X_{(2)}(\omega)\le\cdots\le X_{(n)}(\omega)$，称$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的顺序统计量。

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是独立同分布非负的随机变量，其密度函数为$f(x)$，记$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$为相应的顺序统计量，则对于$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，取充分小的$h>0$，使得：

$$0<x_1<x_1+h<x_2<x_2+h<x_3<\cdots<x_{n-1}+h<x_n<x_n+h$$

有

$$\begin{aligned}&\{x_1<X_{(1)}\le x_1+h,x_2<X_{(2)}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{(n)}\le x_n+h\}=\\&=\bigcup_{(i_1,i_2,\cdots i_n)}\{x_1<X_{i_1}\le x_1+h,x_2<X_{i_2}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{i_n}\le x_n+h\}\end{aligned}$$

等式右边的各事件互不相容，因此有：

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}P\{x_1<X_{(1)}\le x_1+h,x_2<X_{(2)}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{(n)}\le x_n+h\}/h^n=\\&=\lim_{h\to 0}n!P\{x_1<X_{i_1}\le x_1+h,x_2<X_{i_2}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{i_n}\le x_n+h\}/h^n\end{aligned}$$

由此可得顺序统计量$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}n!\prod_{i=1}^{n}f(x_i), & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

特别地，若$X_1,X_2,\cdots,X_n$在$[0,t]$上独立同均匀分布，则其顺序统计量$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\le t\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 $X_k\sim Ex(\lambda)$，则其顺序统计量 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}n!\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n)}, & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

**定理**：计数过程 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是强度为 $\lambda$ 的时齐 **Poission** 过程的充分必要条件是 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是独立且参数同为 $\lambda$ 的指数分布。

注意：此定理的结论非常重要，它反映了 **Poission** 过程的本质特性，也为 **Poission** 过程的计算机模拟提供了理论基础。思考：如何进行模拟？

证明：（只证必要性）

（**a**）先求 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的联合概率密度：

令：$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，取充分小的 $h>0$，使得：

$$t_1-\frac{h}{2}<t_1<t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2}<t_2<t_2+\frac{h}{2}<\cdots<t_{n-1}+\frac{h}{2}<t_n-\frac{h}{2}<t_n<t_n+\frac{h}{2}$$

由：

$$\begin{aligned}&\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}\\ &=\left\{N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=0,N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=1,\right.\\ &\left.\quad N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)=0,\cdots,N\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_n-\frac{h}{2}\right)=1\right\}\cup H_n\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}H_n=&\left\{N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=0,N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=1,\cdots,\right.\\ &\left.N\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_n-\frac{h}{2}\right)\ge 2\right\}\end{aligned}$$

我们有：

$$P\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}=$$

$$=(\lambda h)^n e^{-\lambda\left(t_n+\frac{h}{2}\right)}+o(h^n)=\lambda^n e^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n)$$

因此，$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的联合概率密度为：

$$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}}{h^n}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n)}{h^n}=\lambda^n e^{-\lambda t_n}\ ,\quad 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$$

即：

$$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n}\ , & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（b）求 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度：

由：$X_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 1)$ 我们有：

$$\begin{cases}X_1=S_1\\ X_2=S_2-S_1\\ \vdots\\ X_n=S_n-S_{n-1}\end{cases}\qquad \text{令：}\begin{cases}x_1=t_1\ge 0\\ x_2=t_2-t_1\ge 0\\ \vdots\\ x_n=t_n-t_{n-1}\ge 0\end{cases}\qquad \Rightarrow\qquad \begin{cases}t_1=x_1\\ t_2=x_1+x_2\\ \vdots\\ t_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\end{cases}$$

则变换的雅可比行列式为：

$$J=\frac{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=1$$

于是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\ , & x_i\ge 0\,,1\le i\le n\\ 0\,, & \text{其它}\end{cases}$$

由此可得 $X_k$ 的概率密度为 $f_k(x_k)=\lambda e^{-\lambda x_k}$ , $x_k\ge 0$ , $1\le k\le n$，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$

由此证明了 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是独立且参数同为 $\lambda$ 的指数分布。

## 三、　剩余寿命与年龄

设 $N(t)$ 为在 $[0,t)$ 内事件 **A** 发生的个数，$S_n$ 表示第 $n$ 个事件发生的时刻，$S_{N(t)}$ 表示在 $t$ 时刻前最后一个事件发生的时刻，$S_{N(t)+1}$ 表示在 $t$ 时刻后首次事件发生的时刻，令：

$$\begin{cases} W(t)=S_{N(t)+1}-t \\ V(t)=t-S_{N(t)} \end{cases}$$

称 $W(t)$ 为事件 **A** 的剩余寿命或剩余时间，$V(t)$ 为事件 **A** 的年龄。

由定义可知：$\forall t\ge 0$ , $W(t)\ge 0$ , $0\le V(t)\le t$ ，我们有以下重要定理。

定理：设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的时齐 **Poission** 过程，则有：

（**a**）$W(t)$ 与 $\{X_n,n\ge 1\}$ 同分布，即

$$P\{W(t)\le x\}=1-e^{-\lambda x}\ ,\quad x\ge 0$$

（**b**）$V(t)$ 的分布为“ 截尾 ”的指数分布，即

$$P\{V(t)\le x\}=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x}\ , & 0\le x<t \\ 1\ , & t\le x \end{cases}$$

证明：注意到：

$$\{W(t)>x\}=\{N(t+x)-N(t)=0\}$$

以及

$$\{V(t)>x\}=\begin{cases} \{N(t)-N(t-x)=0\}\ , & t>x \\ \varnothing\ , & t\le x \end{cases}$$

即可得所要的结果。

定理：若$\{X_n, n\geq 1\}$独立同分布，又对$\forall t\geq 0$，$W(t)$与$X_n$ $(n\geq 1)$同分布，分布函数为$F(x)$，且$F(0)=0$，则$\{N(t), t\geq 0\}$为 **Poission** 过程。

注意：$X_n = S_n - S_{n-1}$表示的是第$n-1$个事件的寿命。

## 四、 到达时间的条件分布

下面讨论在条件$N(t)=n$下，$S_1, S_2, \cdots, S_n$的条件分布问题。

定理：设$\{N(t), t\geq 0\}$为时齐 **Poission** 过程，则对$\forall 0<s<t$，有：

$$P\{X_1 \leq s \mid N(t)=1\} = \frac{s}{t}$$

证明：

$$\begin{aligned}
P\{X_1 \leq s \mid N(t)=1\} &= \frac{P\{X_1 \leq s, N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}} = \\
&= \frac{P\{N(s)=1, N(t)-N(s)=0\}}{P\{N(t)=1\}} \\
&= \frac{(\lambda s)e^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda(t-s)}}{(\lambda t)e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

定理：设$\{N(t), t\geq 0\}$为齐次 **Poission** 过程，则在已知条件$N(t)=n$下，事件相继发生的时间$S_1, S_2, \cdots, S_n$的条件概率密度为

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n\leq t \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

证明：对$\forall 0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}=t$，取$h_0 = h_{n+1} = 0$及充分小的$h_i$，使得$t_i + h_i < t_{i+1}$，$1\leq i\leq n$，则有：

$$
\begin{aligned}
&P\{t_i < S_i \le t_i + h_i\,, 1 \le i \le n \mid N(t) = n\} = \\
&= \frac{P\{N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, 1 \le i \le n\,, N(t_{j+1}) - N(t_j + h_j) = 0, 1 \le j \le n\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{(\lambda h_1)e^{-\lambda h_1} \cdots (\lambda h_n)e^{-\lambda h_n} \cdot e^{-\lambda(t-h_1-h_2-\cdots-h_n)}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \cdots h_n
\end{aligned}
$$

因此可得定理的结果。

本定理说明：在 $N(t) = n$ 的条件下，事件相继发生的时间 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的条件分布与 $n$ 个在 $[0,t]$ 上相互独立同均匀分布的顺序统计量的分布函数一样。

定理：设 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为计数过程，$X_n$ 为第 $n$ 个事件与第 $n-1$ 个事件的时间间隔，$\{X_n, n \ge 1\}$ 独立同分布且 $F(x) = P\{X_n \le x\}$，若 $F(0) = 0$ 且对 $\forall 0 < s < t$，有

$$
P\{X_1 \le s \mid N(t) = 1\} = \frac{s}{t}, \quad t > 0
$$

则 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为 **Poission** 过程。

定理：设 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为计数过程，$X_n$ 为第 $n$ 个事件与第 $n-1$ 个事件的时间间隔，$\{X_n, n \ge 1\}$ 独立同分布且 $F(x) = P\{X_n \le x\}$，若 $E\{X_n\} < \infty, F(0) = 0$，且对 $\forall 0 < s < t$，有

$$
P\{S_n \le s \mid N(t) = n\} = \left(\frac{s}{t}\right)^n, \quad t > 0
$$

则 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为 **Poission** 过程。

例：设到达火车站的顾客流遵循参数为 $\lambda$ 的 **Poission** 流 $\{N(t), t \ge 0\}$，火车 $t$ 时刻离开车站，求在 $[0,t]$ 到达车站的顾客等待时间总和的期望值。

解：设第 $i$ 个顾客到达火车站的时刻为 $S_i$，则 $[0,t]$ 内到达车站的顾客等待时间总和为：

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)$$

因为：

$$E\{S(t)\mid N(t)=n\}=E\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\mid N(t)=n\}=$$

$$=E\{\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)\mid N(t)=n\}=nt-E\{\sum_{i=1}^{n}S_i\mid N(t)=n\}$$

$$=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

故：

$$E\{S(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(P\{N(t)=n\}E\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\mid N(t)=n\}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N(t)=n\}\cdot\frac{nt}{2}=\frac{t}{2}E\{N(t)\}=\frac{\lambda}{2}t^2$$

例：设一系统在$[0,t]$内受冲击的次数$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为$\lambda$的齐次 **Poission** 过程，第$k$次受冲击的损失为$D_k$，其中$\{D_k,k\geq 1\}$是独立同分布并与$\{N(t),t\geq 0\}$独立，且损失随时间按负指数衰减。$t=0$的衰减为$D$，经$t$时刻损失为$De^{-\alpha t}$（$\alpha>0$为常数），设损失可加，$t$时刻的总损失为$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}$，其中$S_k$为第$k$次冲击到达的时刻，试求$E\xi(t)$。

解：由于：

$$E\{\xi(t)\mid N(t)=n\}=E\{\sum_{k=1}^{N(t)}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=E\{\sum_{k=1}^{n}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E\{D_k\mid N(t)=n\}E\{e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=ED\cdot e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n}E\{e^{\alpha S_k}\mid N(t)=n\}$$

记$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$为$[0,t]$上独立同均匀分布的随机变量，则有：

$$\sum_{k=1}^{n} E\{e^{\alpha S_k} \mid N(t)=n\} = E\{\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha Y_{(k)}}\} = E\{\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha Y_k}\} = n\int_0^t e^{\alpha x}\frac{dx}{t} = \frac{n}{\alpha t}[e^{\alpha t}-1]$$

所以有：

$$E\{\xi(t) \mid N(t)=n\} = \frac{n}{\alpha t}[1-e^{-\alpha t}]\cdot ED$$

即有：

$$E\{\xi(t) \mid N(t)\} = \frac{N(t)}{\alpha t}[1-e^{-\alpha t}]\cdot ED$$

故：

$$E\{\xi(t)\} = E[E\{\xi(t) \mid N(t)\}] = \frac{\lambda\cdot ED}{\alpha}[1-e^{-\alpha t}]$$

## 五、 非齐次（时齐）Poission 过程

定义：一计数过程$\{N(t), t\ge 0\}$，称它为具有强度函数$\{\lambda(t)>0, t\ge 0\}$的非齐次 **Poission** 过程，若满足：

（**a**） $N(0)=0$

（**b**）独立增量过程，即任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，

$$N(t_1), N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$$

相互独立；

（**c**）对任意$t>0$，和充分小的$\Delta t>0$，有：

$$\begin{cases} P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \\ P\{N(t+\Delta t)-N(t)\ge 2\} = o(\Delta t) \end{cases}$$

其中$\lambda(t)>0$（称为强度常数）。

记：$m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$，则有：

定理：若$\{N(t), t\ge 0\}$为非时齐具有强度函数$\{\lambda(t)>0, t\ge 0\}$的 **Poission**

过程，则$\forall s,t>0$，有：

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\frac{\left[m(s+t)-m(s)\right]^n}{n!}e^{-[m(s+t)-m(s)]}\ (n\geq 0)$$

定理：(变换定理)

(**a**) 设$\{N(t),t\geq 0\}$为具有强度函数$\{\lambda(t)>0,t\geq 0\}$的非时齐 **Poission** 过程，令$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$，$m^{-1}(t)$是$m(t)$的反函数（由于$m(t)$单调增，反函数一定存在)，记$M(u)=N(m^{-1}(u))$，则$\{M(u),u\geq 0\}$是时齐 **Poission** 过程。

(**b**) 设$\{M(u),u\geq 0\}$是时齐 **Poission** 过程，参数$\lambda=1$。若强度函数$\{\lambda(s)>0,s\geq 0\}$，令$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$，$N(t)=M(m(t))$，则$\{N(t),t\geq 0\}$是非时齐的具有强度函数$\{\lambda(s)>0,s\geq 0\}$的 **Poission** 过程。

## 六、 复合 **Poission** 过程

定义：设$\{Y_i,i\geq 1\}$是独立同分布的随机变量序列，$\{N(t),t\geq 0\}$为 **Poission** 过程，且$\{N(t),t\geq 0\}$与$\{Y_i,i\geq 1\}$独立，记：

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

称$\{X(t),t\geq 0\}$为复合 **Poission** 过程。

物理意义：如$\{N(t),t\geq 0\}$表示粒子流，$N(t)$表示$[0,t]$内到达的粒子数，$Y_i$表示第$i$个粒子的能量，则$X(t)$表示$[0,t]$内到达的粒子的总能量。若$\{N(t),t\geq 0\}$表示顾客流，$Y_i$表示第$i$个顾客的行李重量，则$X(t)$表示$[0,t]$内到达的顾客的行李总重量。若某保险公司买了人寿保险的人在时刻$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$死亡，在时刻$S_n$死亡的人的保险金额是$Y_n$，在$[0,t]$内死亡的人数为$N(t)$，则$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$表示该公司在$[0,t]$内需要支付的赔偿金总额。

我们关心的是复合**Poission**过程的一些数字特征。

定义：随机变量 $X$ 的矩母函数定义为：

$$\phi(t) \hat{=} E\{e^{tX}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x)$$

若上面的积分存在。

如果 $X$ 的 $k$ 阶中心矩存在，则有：

$$E\{X^k\} = \phi^{(k)}(0)$$

下面求复合**Poission**过程$\{X(t), t \geq 0\}$的数学期望和方差。

先求 $X(t)$ 的矩母函数：

$$\begin{aligned}
\phi_{X(t)}(u) = E\{e^{uX(t)}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t)=n\} E\{e^{uX(t)} \mid N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\{e^{u(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)} \mid N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\{e^{u(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left(E\{e^{uY_1}\}\right)^n
\end{aligned}$$

令$Y \sim Y_i$的矩母函数为$\phi_Y(u) = E\{e^{uY}\}$，则有：

$$\phi_{X(t)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left(E\{e^{uY_1}\}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda t \phi_Y(u)\right]^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp\{\lambda t[\phi_Y(u) - 1]\}$$

对上式在$u = 0$处求导数，有：

$$E\{X(t)\} = \phi'_{X(t)}(0) = \lambda t \cdot E\{Y\}$$

以及

$$D(X(t)) = \lambda t E\{Y^2\}$$

特殊情形：若$\{\rho_i, i \geq 1\}$为独立同分布，取值为正整数的随机变量序列，且与 **Poission** 过程$\{N(t), t \geq 0\}$独立，记

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \rho_i$$

则称$\{X(t), t\geq 0\}$为平稳无后效流。

## 七、 条件 Poission 过程

定义：设$\Lambda$是一正的随机变量，分布函数为$G(x), x\geq 0$，设$\{N(t), t\geq 0\}$是一计数过程，且在给定条件$\Lambda=\lambda$下，$\{N(t), t\geq 0\}$是一 **Poission** 过程，即$\forall s,t\geq 0, n\in N_0, \lambda\geq 0$，有：

$$P\{N(s+t)-N(s)=n \big| \Lambda=\lambda\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

则称$\{N(t), t\geq 0\}$是条件 **Poission** 过程。

注意，条件 **Poission** 过程不一定是增量独立过程。由全概率公式我们有：

$$\begin{aligned}
&P\{N(s+t)-N(s)=n\}= \\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{N(s+t)-N(s)=n \big| \Lambda=\lambda\}f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\
&=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\
&=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(\lambda)
\end{aligned}$$

## 八、 例子

例：设$N_1(t)$和$N_2(t)$分别为强度为$\lambda_1$和$\lambda_2$，并且相互独立的 **Poission** 过程，证明在$N_1(t)$的任一到达时间间隔内，$N_2(t)$恰有$k$个事件发生的概率为：

$$p_k=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

证明：根据二中的定理，可以令$X$为$N_1(t)$的任一到达时间间隔并且$X\sim Ex(\lambda_1)$，即$X$的分布密度为：

$$f_X(t)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\,, & t\ge 0\\ 0\,, & t<0\end{cases}$$

由此可知：

$$\begin{aligned}p_k&=P\{N_2(t)=k,t\in[0,X)\}\\&=\int_0^{+\infty}P\{N_2(t)=k\mid X=t\}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt\\&=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda_2 t)}{k!}e^{-\lambda_2 t}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\,,\quad k=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

例：设 $N(t)$ 是强度为 $\lambda$ 的 **Poission** 过程，求在 $[0,t)$ 内发生了 $n$ 个事件的条件下，第 $r\ (r<n)$ 个事件发生时刻的概率密度。

解：取充分小的 $h>0$，则有：

$$\begin{aligned}&P\{x<S_r\le x+h\mid N(t)=n\}=\\&=\frac{P\{x<S_r\le x+h,N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}=\\&=\frac{P\{x<S_r\le x+h,N(t)-N(x+h)=n-r\}}{P\{N(t)=n\}}\\&=\frac{P\{x<S_r\le x+h\}P\{N(t)-N(x+h)=n-r\}}{P\{N(t)=n\}}\\&=\frac{f_{S_r}(x)h\cdot\dfrac{[\lambda(t-x-h)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot e^{-\lambda(t-x-h)}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}}\end{aligned}$$

两边除以 $h$，并令 $h\to 0$，我们有：

$$\begin{aligned}f_{S_r}(x\mid N(t)=n)&=\frac{f_{S_r}(x)\cdot\dfrac{[\lambda(t-x)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot e^{\lambda x}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}\\&=\lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\dfrac{[\lambda(t-x)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot e^{\lambda x}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}\end{aligned}$$

最后我们可以得到结果：

$$f_{S_r}(x\,|\,N(t)=n)=\frac{n!}{(n-r)!(r-1)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{r-1}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-r}\cdot\frac{1}{t},\quad 0<x<t$$

例：设$\{N(t),t\ge 0\}$是参数为$\lambda$的 **Poission** 过程，$f(t)=ke^{-kt}$是一确定性实函数，并且设

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

记$S_i$是$N(t)$的第$i$个事件到达的时刻，$A_i,i=1,2,\cdots$是一独立同分布的离散型随机变量序列，其分布率为：

$$P\{A_i=1\}=P\{A_i=-1\}=\frac{1}{2},\quad i=1,2\cdots$$

令$A_0=0$，$\{A_i,i=1,2,\cdots\}$与$N(t)$相互独立。现在构造一随机过程：

$$X(t)=A_{N(t)}f(t-S_{N(t)})u(t-S_{N(t)})$$

试画出此随机过程$\{X(t),t\ge 0\}$的一样本函数并求其均值函数和相关函数。

解：(**1**) 求均值函数：

由条件数学期望的性质，我们有：

$$E\{X(t)\}=E\{E\{X(t)\,|\,N(t)\}\}$$

又有：

$$E\{X(t)\,|\,N(t)=n\}=E\{A_n ke^{-k(t-S_n)}u(t-S_n)\}$$

$$=E\{A_n\}E\{ke^{-k(t-S_n)}u(t-S_n)\}=0$$

故有：

$$E\{X(t)\}=E\{E\{X(t)\,|\,N(t)\}\}=0$$

(**2**) 求相关函数：

由相关函数的定义，有：

$$R_X(t,t+\tau)=E\{X(t)X(t+\tau)\}$$

$$=E\{A_{N(t)}ke^{-k(t-S_{N(t)})}u(t-S_{N(t)})\times$$

$$\times A_{N(t+\tau)}ke^{-k(t+\tau-S_{N(t+\tau)})}u(t+\tau-S_{N(t+\tau)})\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P\{N(t)=i,N(t+\tau)=j\}\cdot E\{A_i ke^{-k(t-S_i)}u(t-S_i)\times$$

$$\times A_j ke^{-k(t+\tau-S_j)}u(t+\tau-S_j)\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i,N(t+\tau)-N(t)=0\}\times$$

$$\times E\{A_i^2k^2e^{-2k(t-S_i)-k\tau}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}$$

由$\{A_i,i=1,2,\cdots\}$与$N(t)$相互独立性，及$E\{A_i^2\}=1$，我们可得：

$$R_X(t,t+\tau)=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2E\{e^{-2k(t-S_i)}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}$$

由上面的例子可知，在条件$N(t)=i$下，$S_i$的条件分布密度为：

$$f_{S_i}(x)=\frac{ix^{i-1}}{t^i},\quad 0<x<t$$

因此我们有：

$$E\{e^{-2k(t-S_i)}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}=\int_0^t e^{-2k(t-x)}f_{S_i}(x)dx$$

即：

$$R_X(t,t+\tau)=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2\int_0^t e^{-2k(t-x)}f_{S_i}(x)dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2\int_0^t e^{-2k(t-x)}\frac{ix^{i-1}}{t^i}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}\frac{ix^{i-1}}{t^i}\right\}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda t}\right\}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\lambda e^{\lambda x}e^{-\lambda t}\right\}dx=e^{-\lambda\tau-k\tau}\frac{k^2\lambda}{2k+\lambda}\left[1-e^{-\lambda t-2kt}\right]$$

注：$\Gamma$ 分布的定义：

称随机变量 $X$ 服从参数为 $\alpha>0$、$\beta>0$ 的 $\Gamma$ 分布，如果其分布密度函数为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

记为：$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$；其中 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du$。

当 $\alpha$ 取整数时，$\Gamma(n)=(n-1)!$

习题：

（1） 某商场为调查顾源情况，考察男女顾客到达商场的人数。假设 $[0,t)$ 时间内男女顾客到达商场的人数分别独立地服从参数为 $\lambda$ 和 $\mu$ 的泊松过程。问：

（a） $[0,t)$ 时间内到达商场的总人数应该服从什么分布？

（b） 在已知 $[0,t)$ 时间内商场到达 $n$ 位顾客的条件下，其中有 $k$ 位是女顾客的概率为何？平均有多少位女顾客？

（2） 设在时间区间 $(0,t]$ 到达某商店的顾客数 $N(t),t\ge0$ 是强度为 $\lambda>0$ 的齐次泊松过程，$N(0)=0$，且每个顾客购买商品的概率 $p>0$，没有买商品的概率为 $q=1-p$，分别以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 表示 $(0,t]$ 所有购买商品的顾客数和所有没有购买商品的顾客数，$t\ge0$。证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是服从参数为 $\lambda p$ 和 $\lambda q$ 的泊松过程，并且是相互独立的。进一步求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 和相关函数 $R(s,t)$。

（3） 在某公共汽车起点站，有甲、乙两路公交车。设乘客到达甲、乙两路公交车的人数分别为参数 $\lambda_1$、$\lambda_2$ 的齐次 Poission 过程，且它们是相互独立的。假设 $t=0$ 时，两路公交车同时开始接受乘客上车。

（a） 如果甲车在时刻 $t$ 发车，计算在 $[0,t]$ 内到达甲车的乘客等待开车时间总和的期望值；

（b） 如果当甲路车上有 $n$ 个乘客时，甲路车发车；当乙路车上有 $m$ 个乘客时，乙路车发车。求甲路车比乙路车发车早的概率。（写出表达式即可）

教材 **P228－238：1、7、8、10。**

# 第三章 Poission 过程（Poission 信号流）

## 九、更新过程

### （1） 概念及基本性质

定义 设$\{X_k, k \geq 1\}$是独立同分布，取值非负的随机变量，分布函数为$F(x)$，且$F(0) < 1$。令$S_0 = 0, S_1 = X_1, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，对$\forall t \geq 0$，记：

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$$

则称$\{N(t), t \geq 0\}$为更新过程。

更新过程是一计数过程，并有：

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\} = \{S_n \leq t\} - \{S_{n+1} \leq t\}$$

记：$F_n(s)$为$S_n$的分布函数，由$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，易知：

$$F_1(x) = F(x)$$

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-u)dF(u) \quad (n \geq 2)$$

证明：由全概率公式有：

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P\{S_n \leq x\} = P\{S_{n-1} + X_n \leq x\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{S_{n-1} \leq x-u \mid X_n = u\} f_{X_n}(u)du \\ &= \int_0^{\infty} P\{S_{n-1} \leq x-u\} dF(u) \\ &= \int_0^x P\{S_{n-1} \leq x-u\} dF(u) \\ &= \int_0^x F_{n-1}(x-u)dF(u) = (F_{n-1} * f)(x) = (f * F_{n-1})(x) \end{aligned}$$

即$F_n(x)$是$F(x)$的$n$重卷积，记作：$F_n = F_{n-1} * F$。

另外，记：

$$m(t) = E\{N(t)\}$$

称 $m(t)$ 为更新函数。关于更新函数，有以下重要的定理。

定理：对于 $\forall t \ge 0$，有：

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

证明：根据以上的关系式，计算得：

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P\{N(t) = n\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} P\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) \ge k\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \ge n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \le t\}$$

即有：

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

推论：若对 $\forall t \ge 0$，$F(t) < 1$，则有：

$$m(t) \le F(t)(1 - F(t))^{-1}$$

下面是重要的更新方程。

定理：$\forall t \ge 0$，$m(t)$ 满足下列更新方程：

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u)dF(u)$$

证明：由 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$，得：

$$m(t) = F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t)$$

将 $F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-u)dF(u) \quad (n \ge 2)$ 代入上式，即有所要的结果。

令：

$$\tilde{m}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dm(t)$$

$$\tilde{F}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$$

则有：

$$\tilde{m}(s)=\frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)},\quad \tilde{F}(s)=\frac{\tilde{m}(s)}{1+\tilde{m}(s)}$$

证明：记：$\lambda(t)=\dfrac{dm(t)}{dt}$（称为更新强度函数），由 $m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$，可得：

$$\lambda(t)=\frac{dm(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dF_n(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$$

两边取 **Laplace** 变换，有：

$$\int_0^\infty \lambda(t)e^{-st}dt=\tilde{m}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-st}dF_n(t)$$

由 $\tilde{F}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$ 及 $F_n=F_{n-1}*F$，根据卷积的 **Laplace** 变换的性质，有：

$$\int_0^\infty e^{-st}dF_n(t)=[\tilde{F}(s)]^n$$

因此，我们有：

$$\tilde{m}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-st}dF_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{F}(s)]^n=\frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)}$$

（**2**）　极限性质

令：$\mu=E\{X_n\}$，由 $F(0^+)<1$，可知 $\mu>0$，下面给出几个极限定理。

定理：$P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=\mu\right\}=1$

推论：$P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty\right\}=1$

推论：$\forall t\ge 0$，有：

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)<\infty$$

记：$N(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}N(t)$，则有：

定理：$P\{N(\infty)=\infty\}=1$。

定理：$P\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\right\}=1$

证明：由于：

$$S_{N(t)}\le t<S_{N(t)+1}\quad\Rightarrow\quad\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\le\frac{t}{N(t)}<\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\frac{N(t)+1}{N(t)}$$

由以上的定理，两边取极限，我们可以得到：

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\right\}=1$$

由此定理，我们称$\frac{1}{\mu}$为更新过程的速率。

（3）　例子

例 1：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是独立同分布，非负取值的随机变量，且有：

$$P\{X_n=i\}=p(1-p)^{i-1}\quad i\ge 1$$

求$P\{N(t)=n\}$。

例 2：某更新过程的更新强度为：

$$\lambda(t)=\begin{cases}\lambda, & t\ge 0,\lambda>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

求该更新过程$\{N(t),t\ge 0\}$的时间间隔$X_n$的概率密度。

# 十、过滤的 Poission 过程

定义：设有一 Poission 分布的冲激脉冲串经过一线性时不变滤波器，则滤波器输出是一随机过程$\{\xi(t),t\ge 0\}$，即

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(T)}h(t-S_i)\qquad(*)$$

其中 $h(t)$ 是滤波器的冲激响应，$S_i$ 是第 $i$ 个冲激脉冲出现的时刻，$N(T)$ 是 $[0,T]$ 内进入滤波器输入端冲激脉冲的个数，它服从 **Poission** 分布，即：

$$P\{N(T)=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\ ,\quad k=0,1,2,\cdots$$

$\lambda$ 是单位时间内的平均脉冲数。我们称由（*）代表的随机过程为过滤的 **Poission** 过程。

设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 是独立同分布的随机变量，并且 $Y_1\sim U(0,T)$，由上节课的内容我们知道，在 $N(T)=k$ 的条件下，$S_1,S_2,\cdots,S_k$ 的分布与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 的顺序统计量 $Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(k)}$ 的分布是一样的。

给定关于过滤的 **Poission** 过程的一些基本假设：(**a**) $T$ 比 $h(t)$ 的脉冲持续时间 $\tau_a$ 大得多，即 $T>>\tau_a$；(**b**) $h(t)$ 是具有因果性的滤波器响应，即 $t<S_i$ 时，$h(t-S_i)=0$；(**c**) 被研究的时刻 $t$ 大于 $h(t)$ 的脉冲持续时间 $\tau_a$，即 $t>\tau_a$。

下面研究过滤的 **Poission** 过程的一些统计特性。

（**1**）$\xi(t)$ 的均值

$$\begin{aligned}
E\{\xi(t)\}&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\{\xi(t)\,|\,N(T)=k\}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{\sum_{i=1}^{k}h(t-S_i)\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\left\{\sum_{i=1}^{k}E[h(t-S_i)]\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\left\{\sum_{i=1}^{k}E[h(t-Y_i)]\right\}
\end{aligned}$$

下面求 $E[h(t-Y_i)]$：利用过滤的 **Poission** 过程的基本假设，有：

$$\begin{aligned}
E[h(t-Y_i)]&=\frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)dx=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}h(y)dy\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy
\end{aligned}$$

因此，我们有：

$$
\begin{aligned}
E\{\xi(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\}\left\{\sum_{i=1}^{k} E[h(t-Y_i)]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\}\frac{k}{T}\int_0^T h(y)dy \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \cdot \lambda T \\
&= \lambda \int_0^T h(y)dy
\end{aligned}
$$

（2）$\xi(t)$ 的相关函数 $R_{\xi\xi}(t,t+\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(t,t+\tau) &= E\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} h(t-S_i)\sum_{j=1}^{N(T)} h(t+\tau-S_j)\right\} \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)}\sum_{j=1}^{N(T)} h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $t<T, t+\tau<T$。

利用条件数学期望，我们有：

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(t,t+\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{P\{N(T)=k\}\cdot E_{S_iS_j}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{P\{N(T)=k\}\cdot \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} E_{S_iS_j}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

上面的等式中，当 $i=j$ 时，一共有 $k$ 项，有：

$$
\begin{aligned}
& E_{S_iS_i}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_i)\right] = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)h(t+\tau-x)dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} h(y)h(y+\tau)dy = \frac{1}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy
\end{aligned}
$$

当 $i \neq j$ 时，一共有 $k^2-k$ 项，利用独立性和假设条件，每项为：

$$E_{S_iS_j}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]=\frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)dx\cdot\frac{1}{T}\int_0^T h(t+\tau-x)dx$$
$$=\frac{1}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$

因此，我们有：

$$R_{\xi\xi}(t,t+\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\frac{k}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\frac{k^2-k}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$
$$=\frac{E\{N(T)\}}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+\frac{E\{[N(T)]^2-N(T)\}}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$
$$=\lambda\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+\lambda^2\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$

其中我们利用了：

$$E\{N(T)\}=\lambda T\text{，}\ E\{[N(T)]^2-N(T)\}=\lambda T+(\lambda T)^2-\lambda T=(\lambda T)^2$$

同时我们得到：

$$C_{\xi\xi}(t,t+\tau)=\lambda\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy=C_{\xi\xi}(\tau)$$

（3） $\xi(t)$ 的特征函数

$$\Phi_{\xi(t)}(v)=E\left\{e^{jv\xi(t)}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{e^{jv\xi(t)}\,\middle|\,N(T)=k\right\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-S_i)\right]\right\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_{(i)})\right]\right\}$$

而：

$$E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_{(i)})\right]\right\}=E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_i)\right]\right\}$$
$$=\prod_{i=1}^{k}E\left\{\exp\left[jvh(t-Y_i)\right]\right\}=\left[\frac{1}{T}\int_0^T\exp\left[jvh(t-x)\right]dx\right]^k$$
$$=\left[\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right]^k$$

代入计算，有：

$$\Phi_{\xi(t)}(v)=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\cdot\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\cdot\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}^k$$
$$=e^{-\lambda T}\exp\left\{\lambda\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}=\exp\left\{\lambda\int_{t-T}^{t}\left[\exp(jvh(y))-1\right]dy\right\}$$

由于$h(t)$具有因果性，其持续时间$\tau_a << T$，同时认为$t>\tau_a$，因此，在$(t-T,0)$和$(t,T)$内，有$h(t)=0$。因此我们得到：

$$\Phi_{\xi(t)}(v)=\exp\left\{\lambda\int_{0}^{T}\left[\exp(jvh(y))-1\right]dy\right\} \qquad (**)$$

注意：在给定的假设条件下，随机过程$\xi(t)$的特征函数与$t$无关，也就是说$\xi(t)$的一维概率密度与时间$t$无关，这样的随机过程称为一级严平稳过程，同理可以证明，任取$n\in N,\ 0<t_1<t_2<\cdots<t_n\quad \xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n)$的联合概率密度仅与时间差$t_2-t_1,t_3-t_2,\cdots,t_n-t_{n-1}$有关，具有这样性质的随机过程称为严平稳过程，过滤的 **Poission** 过程就是严平稳过程。

另外，利用（**）式，我们有：

$$\frac{d\Phi_{\xi(t)}}{dv}\Big|_{v=0}=j\lambda\int_0^T h(y)dy$$

由特征函数与随机变量数字特征的关系，我们有：

$$E\{\xi(t)\}=\lambda\int_0^T h(y)dy$$
$$D\{\xi(t)\}=Var\{\xi(t)\}=\lambda\int_0^T[h(y)]^2dy$$

这些结果与（**1**）、（**2**）中所获得的结果是一致的。

（**4**）　当$\lambda\to\infty$时，特征函数的极限形式

我们记：

$$\alpha=\int_0^T h(y)dy\,,\quad \beta^2=\int_0^T[h(y)]^2dy$$

则有：

$$E\{\xi(t)\}=\lambda\alpha\,,\quad Var\{\xi(t)\}=\lambda\beta^2$$

作随机变量标准化变换，令：

$$\eta(t)=\frac{\xi(t)-\lambda\alpha}{\sqrt{\lambda}\beta}$$

则有：

$$E\{\eta(t)\}=0,\quad Var\{\eta(t)\}=1$$

下面求随机过程$\{\eta(t),t\geq 0\}$的特征函数。

$$\begin{aligned}\Phi_{\eta(t)}(v)&=E\left\{e^{jv\eta(t)}\right\}\\&=E\left\{\exp\left[jv\cdot\frac{\xi(t)-\lambda\alpha}{\sqrt{\lambda}\beta}\right]\right\}\\&=\exp\left\{-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}\right\}\cdot E\left\{\exp\left[j\cdot\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}\cdot\xi(t)\right]\right\}\\&=\exp\left\{-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}\right\}\cdot\exp\left\{\lambda\int_0^T\left[\exp\left(j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)\right)-1\right]dy\right\}\end{aligned}$$

以上用到了特征函数的性质。两边求对数，我们有：

$$\ln\Phi_{\eta(t)}(v)=-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\lambda\int_0^T\left[\exp\left(j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)\right)-1\right]dy$$

$$=-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\lambda\int_0^T\left[\frac{jv}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)-\frac{v^2}{2\lambda\beta^2}h^2(y)-\frac{jv^3}{6\lambda^{3/2}\beta^3}h^3(y)+\cdots\right]dy$$

$$=-\frac{jv\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\frac{jv\sqrt{\lambda}}{\beta}\int_0^T h(y)dy-\frac{v^2}{2\beta^2}\int_0^T[h(y)]^2dy-$$

$$-\frac{jv^3}{6\sqrt{\lambda}\beta^3}\int_0^T[h(y)]^3dy+\cdots$$

$$=-\frac{v^2}{2}-\frac{jv^3}{6\sqrt{\lambda}\beta^3}\int_0^T[h(y)]^3dy+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

上式中令$\lambda\to\infty$，我们得到：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\ln\Phi_{\eta(t)}(v)=-\frac{v^2}{2}\quad\Rightarrow\quad\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_{\eta(t)}(v)=\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}$$

由特征函数与分布函数唯一确定性，我们知道当$\lambda\to\infty$时，$\eta(t)$是服从标准正态分布的随机变量。因此可知$\xi(t)$也是服从正态分布的随机变量。即单位时间内出现的平均脉冲数无限增大时，$\xi(t)$的极限分布是正态分布，这符合中心极限定理。

习题：

**教材 P237－238：28、30。**

# 第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

## （一） 二阶矩过程

### 1．基本概念

注：以下讨论的随机过程都是复随机过程。

定义：设有随机过程$\{X(t), t \in T\}$，若对$\forall t \in T$，$X(t)$的均值和方差都存在，则称随机过程$\{X(t), t \in T\}$为二阶矩过程。

若$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，则$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$存在，我们令$\tilde{X}(t) = X(t) - \mu_X(t)$，则有$E\{\tilde{X}(t)\} = 0$，并且$\tilde{X}(t)$的二阶矩也是存在的，因此我们以后讨论的二阶矩过程一般都假定均值函数为零。

注：二阶矩过程的自协方差函数和自相关函数都是存在的。因为：

$$\operatorname{cov}\{X(t_1), X(t_2)\} = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)]\overline{[X(t_2) - \mu_X(t_2)]}\}$$

因此有：

$$\left|\operatorname{cov}\{X(t_1), X(t_2)\}\right|^2 \le \left\{E\left|[X(t_1) - \mu_X(t_1)]\overline{[X(t_2) - \mu_X(t_2)]}\right|\right\}^2$$

$$\le E\left|X(t_1) - \mu_X(t_1)\right|^2 \cdot E\left|X(t_2) - \mu_X(t_2)\right|^2$$

$$= D\{X(t_1)\} \cdot D\{X(t_2)\} < \infty$$

### 2．二阶矩过程相关函数的性质

定理：（共扼对称性）设$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，则有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \overline{R_{XX}(t_2, t_1)} \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

当$\{X(t), t \in T\}$是实的二阶矩过程时，有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2, t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

定理：（非负定性）设$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，对于$\forall n \in N$，

$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，以及$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in C$，我们有：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} R_{XX}(t_k, t_m)\lambda_k \overline{\lambda_m} \geq 0$$

## （二）　平稳过程

### 1．严平稳过程

定义：若随机过程$\{X(t), t \in T\}$满足：对于$\forall n \in N$，任选$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$t_i \in T, i = 1,2,\cdots,n$，以及任意的$\tau$，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$有

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_n + \tau)$$

则称此随机过程为严平稳随机过程。其中$F_X(\cdot)$是$n$维分布函数。

注 1：严平稳随机过程的一维分布函数与时间$t$无关。因此，如果严平稳随机过程的均值函数存在的话，则是一常数。

注 2：严平稳随机过程的任意二维分布函数只与时间差有关。因此，如果严平稳随机过程的二阶矩存在的话，则自相关函数只与时间差有关。

注 3：若上述的定义中的条件不是对于任意的$n$满足，而只是对于某个$k$满足时，即对于任意的$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$，$t_i \in T, i = 1,2,\cdots,k$，任意的$\tau$，有

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1, t_2, \cdots, t_k) = F_X(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_k + \tau)$$

而对于$n > k$时，上述等式不成立，则称它为$k$级平稳的随机过程。如果过程为$k$级平稳的，那么当$n < k$时，上面的等式成立。

### 2．宽平稳随机过程

定义：设随机过程$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，如果它的均值函数是常数，自相关函数只是时间差$\tau = t_2 - t_1$的函数，则称此随机过程为宽平稳随机过程。

注 1：宽平稳随机过程是二阶矩过程，但不一定是严平稳随机过程。

注 2：对于严平稳随机过程，只有它二阶矩存在时，它才是宽平稳过程。

**注 3：对于正态随机过程来说，严平稳就是宽平稳。**

**注 4：以下讨论平稳过程指的是宽平稳随机过程**

**3．宽平稳随机过程的性质**

（1）我们有：$R_{XX}(t_2-t_1)=\overline{R_{XX}(t_1-t_2)}\quad \forall t_1,t_2\in T$

或：　$R_{XX}(\tau)=\overline{R_{XX}(-\tau)}\quad \tau=t_2-t_1$，

对于实的随机过程，有：　$R_{XX}(\tau)=R_{XX}(-\tau)\quad \tau=t_2-t_1$　（偶函数）

（2）我们有：$R_{XX}(0)\geq|\mu_X|^2$

（3）我们有：$|R_{XX}(\tau)|\leq R_{XX}(0)$，　$|C_{XX}(\tau)|\leq C_{XX}(0)$

（4）相关函数$R_{XX}(\tau)$具有非负定性，即对于$\forall n\in N\quad t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，

以及$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in C$，我们有：

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\begin{pmatrix} R_{XX}(t_1-t_1) & R_{XX}(t_1-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_1-t_n) \\ R_{XX}(t_2-t_1) & R_{XX}(t_2-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_2-t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{XX}(t_n-t_1) & R_{XX}(t_n-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_n-t_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \overline{\lambda_2} \\ \vdots \\ \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R_{XX}(t_i-t_k)\lambda_i\overline{\lambda_k}\geq 0$$

**4．例子：**

（1）热（白）噪声：

设$\{X(n);n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是一实随机序列，满足：(a) $\{X(n)\}$相互独立；(b) $X(n)\sim N(0,\sigma^2)$。求其均值和相关函数。

解：由：

$$\mu_X(n)=E\{X(n)\}=0$$

$$D_X(n)=E\{X^2(n)\}=\sigma^2$$

$$\begin{cases} E\{X(n+m)X(n)\}=0 & (m\neq 0) \\ E\{X(n+m)X(n)\}=\sigma^2 & (m=0) \end{cases}$$

因此：

$$R_X(m)=\begin{cases} \sigma^2 & m=0 \\ 0 & m\neq 0 \end{cases}$$

所以它是一平稳随机序列。

（2）滑动平均：

设$\{X(n); n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$是一标准不相关序列，即满足：

$$E\{X(n)\}=0$$

$$E\{X(n)\overline{X(m)}\}=\begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$$

令$Y(n)=a_0X(n)+a_1X(n-1)+\cdots+a_sX(n-s)$，证明$\{Y(n)\}$是一平稳序列。其中$a_0,a_1,\cdots,a_s\in C$。

证明：显然：$\mu_Y(n)=E\{Y(n)\}=0$

$$\begin{aligned} R_Y(m)&=E\{Y(n+m)\overline{Y(n)}\} \\ &=E\left\{\sum_{k=0}^{s}a_kX(n+m-k)\overline{\sum_{i=0}^{s}a_iX(n-i)}\right\} \\ &=\sum_{i=0}^{s}\sum_{k=0}^{s}a_k\overline{a_i}E\{X(n+m-k)\overline{X(n-i)}\} \\ &=\sum_{0\le k\le s,0\le k-m\le s}a_k\overline{a_{k-m}} \end{aligned}$$

故$\{Y(n)\}$是一平稳序列。

（3）设有复随机过程$X(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$，其中$\eta_k\ (1\le k\le N)$是相互独立的随机变量，且$\eta_k\sim N(0,\sigma_k^2)$，$\omega_k$为常数。求$X(t)$的均值函数和相关函数，并说明是否是平稳过程？

解：由$\eta_k\ (1\le k\le N)$的独立性及均值为 0，显然有：

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{k=1}^{N} \eta_k e^{j\omega_k t}\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{k=1}^{N} \eta_k \cos\omega_k t + j \cdot \sum_{k=1}^{N} \eta_k \sin\omega_k t\right\} = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\}$$

$$= E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N} \eta_k e^{j\omega_k t_1}\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{N} \eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \eta_k \overline{\eta_i} e^{j\omega_k t_1 - j\omega_i t_2}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{j\omega_k (t_1 - t_2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{j\omega_k \tau} \quad (\tau = t_1 - t_2)$$

由此可知 $X(t)$ 是一平稳的随机过程。

（4）设随机过程

$$\xi(t) = \begin{cases} Xt + a & T > t \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $T$ 为一固定常数，随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，$a$ 为一常数。求 $E\{\xi(t)\xi(s)\}$，其中 $t > s$。

解：由于随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，即其分布密度为：

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (x > 0)$$

我们有：

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \lambda$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2\lambda^2$$

因此有：

$$E\{\xi(t)\xi(s)\} = E\{[Xt + a][Xs + a]\} =$$

$$= E\{X^2 ts + X(ta + sa) + a^2\}$$

$$= tsE\{X^2\} + (ta + sa)E\{X\} + a^2$$

$$= 2ts\lambda^2 + (t + s)a\lambda + a^2 \quad (t > s)$$

## （三）　　正交增量过程

定义：设随机过程$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程，若$t_1<t_2\le t_3<t_4$，且$t_1,\cdots,t_4\in T$，有：

$$E\left\{\left[X(t_2)-X(t_1)\right]\left[\overline{X(t_4)-X(t_3)}\right]\right\}=0$$

则称该过程为正交增量过程。

独立增量过程与正交增量过程的关系：对于独立增量过程$\{X(t), t\in T\}$，若它还满足：$E\{X(t)\}=a$，$E\{|X(t)|^2\}<\infty$，则该过程为正交增量过程。因为此时若任意取$t_1<t_2\le t_3<t_4$，且$t_1,\cdots,t_4\in T$，由独立增量性，我们有：

$$\begin{aligned}&E\left\{\left[X(t_2)-X(t_1)\right]\left[\overline{X(t_4)-X(t_3)}\right]\right\}\\&=E\{X(t_2)-X(t_1)\}E\{\overline{X(t_4)-X(t_3)}\}=0\end{aligned}$$

因此，均值为常数、存在二阶矩的独立增量过程一定是正交增量过程。反之，我们有非平稳随机过程的例子：

设$\{X(t), t\in[a,b]\}$为正交增量过程，规定$X(a)=0$，取$t_1=a$，$t_2=t_3=s$，$t_4=t\le b$，$t>s$，则由定义，有：

$$E\{X(s)[\overline{X(t)-X(s)}]\}=E\{X(s)\overline{X(t)}\}-E\{X(s)\overline{X(s)}\}=0$$

因此有：

$$E\{X(s)\overline{X(t)}\}=E\{X(s)\overline{X(s)}\}=E\{|X(s)|^2\}\mathrel{\hat=}F(s)$$

由此，我们有：

$$R_{XX}(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F(s)\quad(t>s)$$

$$R_{XX}(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F(t)\quad(t<s)$$

因此有：

$$R_{XX}(s,t)=F(\min(s,t))$$

这就意味着$\{X(t), t \in [a,b]\}$不是一平稳过程。

另外，当$t > s$时，由：

$$E\{|X(t)-X(s)|^2\} = E\{X(t)\overline{X(t)}\} - E\{X(t)\overline{X(s)}\}$$
$$- E\{X(s)\overline{X(t)}\} + E\{X(s)\overline{X(s)}\}$$
$$= F(t) - F(s) - F(s) + F(s) = F(t) - F(s) \geq 0$$

可知，$F(t)$是一不减的函数。

注：设$\{X(t); t \geq 0\}$是一独立增量过程，且$X(0)=0$及它的二阶矩存在，我们令：

$$Y(t) = X(t) - \mu_X(t)$$

则由$\{X(t); t \geq 0\}$是独立增量性，可知$\{Y(t); t \geq 0\}$也具有独立增量性，且有：

$$Y(0)=0, \quad E\{Y(t)\}=0, \quad D_Y(t) = E\{Y^2(t)\} = D_X(t)$$

下面我们求$\{X(t); t \geq 0\}$的协方差函数：若$0 \leq s < t$

$$C_X(s,t) = E\{Y(s)\overline{Y(t)}\}$$
$$= E\left\{[Y(s)-Y(0)]\left[\overline{Y(t)-Y(s)+Y(s)}\right]\right\}$$
$$= E\{Y(s)-Y(0)\}E\left\{\overline{Y(t)-Y(s)}\right\} + E\{Y^2(s)\}$$
$$= D_X(s)$$

由此可得：对于任意的$s, t \geq 0$，有

$$C_X(s,t) = D_X(\min(s,t))$$

因此，对于强度为$\lambda$的齐次 **Poission** 过程，我们可以得到：

$$C_N(s,t) = \lambda \min(s,t), \quad s,t \geq 0$$

$$R_N(s,t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s,t), \quad s,t \geq 0$$

同样地，对于非其次 **Poission** 过程，有：

$$R_N(s,t) = \int_0^{\min(s,t)} \lambda(\tau)d\tau \left[1 + \int_0^{\min(s,t)} \lambda(\tau)d\tau\right], \quad s,t \geq 0$$

例：设随机过程$\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$是一正交增量过程，并且有$X(0)=0$，$E\{X(t)\}=0$，及满足：

$$E\left\{\left|X(t)-X(s)\right|^2\right\}=|t-s|$$

试求：

（1）　证明：$E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}=\frac{1}{2}\left(|t|+|s|-|t-s|\right)$；

（2）　令：$\xi_n(t)=n\left[X\left(t+\frac{1}{n}\right)-X(t)\right]$，$n=1,2,\cdots$，则对每一个$n$，证明$\{\xi_n(t), -\infty < t < +\infty\}$是一平稳过程。

解：（1）任取$s,t \in R$，由$X(t)$是一正交增量过程，令：$F(t)=E\left\{\left|X(t)\right|^2\right\}$，我们有：

（a）　当$s>0, t<0$　或　$s<0, t>0$时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=0$$

（b）　当$s>0, t>0$时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F\left(\min\{s,t\}\right)$$

（c）　当$s<0, t<0$时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F\left(\max\{s,t\}\right)$$

因此，我们有：$R_X(s,t)=R_X(t,s)$。

由题目所给的条件，我们有：

$$\begin{aligned}|t-s| &= E\left\{\left|X(t)-X(s)\right|^2\right\}\\ &= E\left\{\left|X(t)\right|^2\right\}-E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}-E\left\{X(s)\overline{X(t)}\right\}+E\left\{\left|X(s)\right|^2\right\}\\ &= F(t)-R_X(t,s)-R_X(s,t)+F(s)=F(t)-2R_X(s,t)+F(s)\end{aligned}$$

$$|t|=E\left\{\left|X(t)-X(0)\right|^2\right\}=E\left\{\left|X(t)\right|^2\right\}=F(t)$$

$$|s|=E\left\{\left|X(s)-X(0)\right|^2\right\}=E\left\{\left|X(s)\right|^2\right\}=F(s)$$

由此可得：

$$E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}=R_X(t,s)=R_X(s,t)=\frac{1}{2}\left(|t|+|s|-|t-s|\right)$$

（2）由题意及（1）的结果，我们有：

$$R_{\xi_n}(t,s)=E\{\xi_{nt}\overline{\xi_{ns}}\}=n^2E\left\{\left[X\left(t+\frac{1}{n}\right)-X(t)\right]\left[\overline{X\left(s+\frac{1}{n}\right)-X(s)}\right]\right\}$$

$$=\frac{n^2}{2}\left[\left|t+\frac{1}{n}\right|+\left|s+\frac{1}{n}\right|-|t-s|+|t|+|s|-|t-s|-|t|-\left|s+\frac{1}{n}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|t-s-\frac{1}{n}\right|-\left|t+\frac{1}{n}\right|-|s|+\left|t+\frac{1}{n}-s\right|\ \right]$$

$$=\frac{n^2}{2}\left[\left|t-s-\frac{1}{n}\right|+\left|t+\frac{1}{n}-s\right|-2|t-s|\right]$$

$$=\begin{cases} n[1-n|t-s|], & 0\le|t-s|\le 1/n \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E\{\xi_n(t)\}=0$$

由此可知，随机过程$\{\xi_n(t),-\infty<t<+\infty\}$是一平稳过程。

## （四）　随机分析

### 1．　均方极限

定义：设随机序列$\{X_n;n=1,2,\cdots\}$及随机变量$X$均存在二阶矩，即$E\{|X_n|^2\}<\infty, E\{|X|^2\}<\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty}E\{|X_n-X|^2\}=0$$

则称随机序列$\{X_n\}$均方收敛于$X$，或序列$\{X_n\}$的均方极限为$X$，记作

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n=X$$

关于均方极限，具有以下性质

（1）　如果$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n=X$，则有：

（a）$\lim\limits_{n\to\infty}E\{X_n\}=E\{X\}=E\left\{\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n\right\}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} E\{|X_n|^2\} = E\{|X|^2\} = E\left\{\left|\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n\right|^2\right\}$

(2) 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$，则有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}(aX_n + bY_n) = aX + bY$$

其中 $a, b$ 为任意的复数。

(3) 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$ 则有：

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{X_n \overline{Y_m}\} = E\{X\overline{Y}\}$$

(4) 均方极限是唯一的。即，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$ 及 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = Y$，则有

$$X = Y$$

(5) （柯西准则）随机序列 $\{X_n; n = 1,2,\cdots\}$ 均方收敛（于 $X$）的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{|X_n - X_m|^2\} = 0$$

(6) （列维 **Loeve** 准则）随机序列 $\{X_n; n = 1,2,\cdots\}$ 均方收敛（于 $X$）的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{X_n \overline{X_m}\} = c$$

其中 $c$ 为复常数

(7) 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$f(u)$ 是一确定性函数，并且满足 **Lipschitz** 条件，即

$$|f(u) - f(v)| \le M|u - v|$$

其中 $M$ 是正常数。又假设 $f(X_n)$，$f(X)$ 的二阶矩都存在，则有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, f(X_n) = f(X)$$

(8) 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，则对于任意有限的 $t$，有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m} \exp\{jtX_n\} = \exp\{jtX\}$$

**2．** 二阶矩过程的均方连续

定义：设二阶矩过程$\{X(t); t \in T\}$，$t_0 \in T$，若有：

$$\lim_{h \to 0} E\{|X(t_0+h) - X(t_0)|^2\} = 0$$

即

$$X(t_0) = \underset{h \to 0}{l.i.m} X(t_0+h)$$

则称$X(t)$在$t = t_0$点均方意义下连续。若对于$\forall t \in T$，$X(t)$均在均方意义下连续，则称过程$\{X(t); t \in T\}$在均方意义下连续，或称过程具有均方连续性。

定理：设有二阶矩过程$\{X(t); t \in T\}$，$R(s,t)$为其自相关函数，则$\{X(t); t \in T\}$在$t = t_0 \in T$上均方连续的充分必要条件是：自相关函数$R(s,t)$在点$(t_0, t_0) \in T \times T$处连续。

定理：若二阶矩过程$\{X(t); t \in T\}$在均方意义下连续，则对于$\forall t \in T$，有：

$$\lim_{h \to 0} E\{X(t+h)\} = E\{X(t)\}$$

定理：设$\{X(t); t \in (-\infty, +\infty)\}$是宽平稳过程，则以下各条件是等价的：

（**a**）$\{X(t)\}$均方连续；

（**b**）$\{X(t)\}$在点$t = 0$处均方连续；

（**c**）自相关函数$R_{XX}(\tau)$在$-\infty < \tau < +\infty$上连续；

（**d**）自相关函数$R_{XX}(\tau)$在点$\tau = 0$处连续。

即：宽平稳过程$\{X(t); t \in (-\infty, +\infty)\}$均方连续的充分必要条件为：自相关函数$R_{XX}(\tau)$在点$\tau = 0$处连续。

**3．** 均方导数

（**1**）定义

定义：设有随机过程$\{X(t); t\in T\}$，$\{Y(t); t\in T\}$，如果

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}=Y(t_0)$$

其中$t_0, t_0+h\in T$，则称随机过程$\{X(t); t\in T\}$在$t=t_0\in T$处均方可导，并称$Y(t_0)$为过程$\{X(t); t\in T\}$在$t=t_0$处的均方导数，记作$X'(t_0)\hat{=}Y(t_0)$。若对于$\forall t\in T$，$X(t)$均在均方意义下可导，即有：

$$\lim_{h\to 0}E\left\{\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-Y(t)\right|^2\right\}=0$$

则称$Y(t)=X'(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$为随机过程$X(t)$在均方意义下的导数。

利用柯西准则，我们有：

定义：设有随机过程$\{X(t); t\in T\}$，$\{Y(t); t\in T\}$，如果对于$\forall t\in T$，有：

$$\lim_{h\to 0,\, k\to 0}E\left\{\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-\frac{X(t+k)-X(t)}{k}\right|^2\right\}=0$$

则称$X(t)$在均方意义下导数存在（可以求导）。记

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=X'(t)=\frac{dX(t)}{dt}=\dot{X}(t)$$

称此为$X(t)$在$t$处的均方导数或均方微商。

（2）均方可导的判定准则

定理：设二阶矩过程$X(t)$，它的自相关函数为$R(s,t)$，则$X(t)$在点$t=t_0\in T$处具有均方导数的充分必要条件为：

$$\frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial t\partial s}$$

在点$(t_0,t_0)$附近存在且在点$(t_0,t_0)$处连续。若二阶矩过程$X(t)$在$T$内均方可导，则其均方导数的相关函数为：

$$R_{X'}(s,t)=E\{X'(s)X'(t)\}=\frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial t\partial s}$$

（3）均方导数的性质

（a）设 $X(t),Y(t)$ 为两个均方可导的随机过程，$a,b\in C$ 为复常数，则 $aX(t)+bY(t)$ 也均方可导，并且有：

$$\frac{d}{dt}\left[aX(t)+bY(t)\right]=a\frac{dX(t)}{dt}+b\frac{dY(t)}{dt}$$

（b）设 $X(t)$ 为均方可导的随机过程，$f(t)$ 为一确定性函数，则 $f(t)X(t)$ 也是均方可导的随机过程，且有：

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)X(t)\right]=\frac{df(t)}{dt}X(t)+f(t)\frac{dX(t)}{dt}$$

（c）设 $X(t)$ 为均方可导的随机过程，则 $X'(t)$ 的均值函数为：

$$E\{X'(t)\}=\frac{dE\{X(t)\}}{dt}$$

（4）平稳随机过程的均方导数

若 $\{X(t);t\in T\}$ 为平稳随机过程，则有

$$R_{XX}(t,s)=R_{XX}(t-s)=R_{XX}(\tau),\quad \tau=t-s$$

若 $R''_{XX}(\tau)$ 存在，$\tau\in T$，而且在 $\tau=0$ 处 $R''_{XX}(\tau)$ 连续，则 $\{X(t);t\in T\}$ 均方可导，且

$$E\{X'(t)\overline{X'(s)}\}=-R''_{XX}(\tau)$$

这是因为：

$$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_{XX}(\tau)=-R''_{XX}(\tau)$$

当 $t=s$ 时，$\tau=0$，此时

$$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t \partial s}\Big|_{t=s} = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_{XX}(\tau)\Big|_{\tau=0} = -R''_{XX}(0)$$

因为平稳过程为实的随机过程时，有 $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$。若平稳随机过程 $X(t)$ 存在均方导数，则要求 $R(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续，$R'(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 连续，因此 $R'(0) = 0$。

对于平稳随机过程，因为均值函数为常数，因此：

$$E\{X'(t)\} = \frac{d}{dt} E\{X(t)\} = 0$$

（5）高阶导数

若二阶矩过程 $X(t)$ 的自相关函数有 $2n$ 阶导数，且在对角线 $t = s$ 上连续，则 $X(t)$ 有均方意义下的 $n$ 阶导数 $X^{(n)}(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}$ 存在。且有：

$$R_{X^{(n)}}(t,s) = E\{X^{(n)}(t)\overline{X^{(n)}(s)}\}$$

$$= \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial s^n} R_X(t,s)$$

$$E\left\{\frac{d^n}{dt^n} X(t)\right\} = \frac{d^n}{dt^n} E\{X(t)\}$$

$$R_{X^{(n)}X^{(m)}}(t,s) = E\{X^{(n)}(t)\overline{X^{(m)}(s)}\}$$

$$= \frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n \partial s^m} R_X(t,s)$$

如果 $X(t)$ 为平稳随机过程，则有：

$$R_{X^{(n)}X^{(m)}}(\tau) = E\{X^{(n)}(t+\tau)\overline{X^{(m)}(t)}\} = (-1)^m \frac{d^{(n+m)}}{d\tau^{(n+m)}} R_X(\tau)$$

如果 $X(t), Y(t)$ 为两个二阶矩过程，则它们的互相关函数定义为：

$$R_{XY}(t,s) = E\{X(t)\overline{Y(s)}\}$$

我们有：

$$R_{X'Y}(t,s)=E\{X'(t)\overline{Y(s)}\}=\frac{\partial}{\partial t}R_{XY}(t,s)$$

$$R_{X^{(n)}Y^{(m)}}(t,s)=E\{X^{(n)}(t)\overline{Y^{(m)}(s)}\}=\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n\partial s^m}R_{XY}(t,s)$$

（6）泰勒级数展开

若$\{X(t);t\in(-\infty,+\infty)\}$为平稳随机过程，其自相关函数为$R_X(\tau)$，如果$R_X(\tau)$是解析的，即$R_X(\tau)$存在各阶导数，且

$$R_X(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}R_X^{(n)}(0)\frac{\tau^n}{n!}$$

则$X(t)$可以进行泰勒展开，即有：

$$X(t+\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}X^{(n)}(t)\frac{\tau^n}{n!}$$

其中$X^{(n)}(t)$为随机过程$X(t)$的$n$阶均方导数。

4． 随机积分

（1）随机积分的定义

定义：设$\{X(t);t\in[a,b]\}$为二阶矩过程，$h(t,\tau)$是定义在$[a,b]$上的以$\tau$为参数的确定性函数，对$[a,b]$进行任意$n$划分：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

记：

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n,\quad \hat{t}_i\in[t_{i-1},t_i],\quad \lambda=\max_i\{\Delta t_i\}$$

作和式：

$$S_n(\tau)=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)X(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

如果存在随机变量$Y(\tau)$，对于任意的划分，任意的$\hat{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$，都有：

$$\lim_{\lambda\to 0,\, n\to\infty} E\left\{\left|Y(\tau) - S_n(\tau)\right|^2\right\} = 0$$

或

$$\lim_{\lambda\to 0,\, n\to\infty} E\left\{\left|Y(\tau) - \sum_{i=1}^{n} h(\hat{t}_i, \tau) X(\hat{t}_i)\Delta t_i\right|^2\right\} = 0$$

则称$S_n(\tau)$均方收敛于$Y(\tau)$，并称$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上均方可积，记$S_n(\tau)$的均方极限为$\int_a^b h(t,\tau)X(t)dt$，即有：

$$Y(\tau) = \int_a^b h(t,\tau)X(t)dt = \underset{\lambda\to 0,\, n\to\infty}{l.i.m} \sum_{i=1}^{n} h(\hat{t}_i, \tau) X(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

并称

$$Y(\tau) = \int_a^b h(t,\tau)X(t)dt$$

为$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上的均方积分。

（2）均方可积的准则

定理：$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充分必要条件为：

$$\int_a^b\int_a^b h(t,\tau)\overline{h(u,\tau)}R_{XX}(t,u)dtdu$$

存在。

由均方可积的定义可知，$Y(\tau)$是以$\tau$为参数的随机过程，因此可以求其均值函数和相关函数，我们有：

$$\mu_Y(\tau) = E\{Y(\tau)\} = E\left\{\int_a^b h(t,\tau)X(t)dt\right\} = \int_a^b h(t,\tau)E\{X(t)\}dt$$

$$= \int_a^b h(t,\tau)\mu_X(t)dt$$

$$R_{YY}(\tau_1,\tau_2) = E\{Y(\tau_1)\overline{Y(\tau_2)}\}$$

$$= E\left\{\int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}X(t)\overline{X(u)}dtdu\right\}$$

$$= \int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}R_{XX}(t,u)dtdu$$

（3）均方积分的性质

（a）若$\{X(t); t\in T\subset[a,b]\}$为均方连续随机过程，则对于$\forall t\in T$，有：

$$E\left\{\int_a^t X(u)du\overline{\int_a^t X(v)dv}\right\}=E\left\{\left|\int_a^t X(u)du\right|^2\right\}$$

$$\le (t-a)\int_a^t E\{X(u)\overline{X(u)}\}du$$

$$\le (b-a)\int_a^t E\{X(u)\overline{X(u)}\}du$$

（b）设随机过程$X(t)$在$[a,b]$上均方连续，则有：

$$\left\{E\left|\int_a^b X(u)du\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le\int_a^b\{E|X(u)|^2\}^{\frac{1}{2}}du$$

（c）设$X(t), Y(t)$在$[a,c]$上均方可积，$\alpha,\beta$为复常数，则有：

$$\int_a^c[\alpha X(t)+\beta Y(t)]dt=\alpha\int_a^c X(t)dt+\beta\int_a^c Y(t)dt$$

若$a\le b\le c$，则有：

$$\int_a^c X(t)dt=\int_a^b X(t)dt+\int_b^c X(t)dt$$

（d）若随机过程$X(t)$在$[a,b]$上均方连续，记

$$Y(t)\,\hat{=}\int_a^t X(u)du\quad (a\le t\le b)$$

则$Y(t)$在$[a,b]$上均方连续，均方可导，且有：

$$Y'(t)=X(t)$$

（e）若随机过程$X(t)$均方可导，且$X'(t)$均方连续，则有：

$$X(b)-X(a)=\int_a^b X'(t)dt$$

例 1：设有平稳随机过程$X(t)$，它的相关函数为$R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$，其中$\alpha,\sigma$为常数，求$Y(t)=a\frac{dX(t)}{dt}$（$a$为常数）的自协方差函数和方差函数。

解：略。

例 2：设$N_t$，$t \ge 0$是零初值、强度$\lambda > 0$的泊松过程。写出过程的转移函数，并问在均方意义下，$Y_t = \int_0^t N_s ds, t \ge 0$是否存在，为什么？

解：泊松过程的转移函数为：

$$p(s,t,i,j) = P\{N_t = j \mid N_s = i\} = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad t > s,\ j \ge i$$

其相关函数为：

$$R_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$$

由于在$\forall t$，$R_N(t,t)$连续，故均方积分存在。

例 3：设$N_t$，$t \ge 0$是零初值、强度$\lambda = 1$的泊松过程。

（1）　求它的概率转移函数$p(s,t,i,j) = P\{N_t = j \mid N_s = i\}$；

（2）　令$X_t = N_t - t, t \ge 0$，说明$Y = \int_0^1 X_t dt$存在，并求它的二阶矩。

解：（1）由上例，有：

$$p(s,t,i,j) = P\{N_t = j \mid N_s = i\} = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)} = \frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-(t-s)}$$

（2）先求相关函数，由$\lambda = 1$，得：

$$R_X(t,s) = E\{(N_t - t)(N_s - s)\} = \lambda \min\{t,s\} + \lambda^2 st + st(1-2\lambda) = \min\{t,s\}$$

对任意的$t$，在$(t,t)$处$R_X(t,t)$连续，故$X_t$均方连续，因此均方可积，$Y = \int_0^1 X_t dt$存在。

$$E\{Y^2\} = E\left\{\left[\int_0^1 X_t dt\right]^2\right\} = E\left\{\int_0^1 X_t dt \int_0^1 X_s ds\right\} = E\left\{\int_0^1\int_0^1 X_t X_s dtds\right\}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 R_X(t,s) dtds = \int_0^1\int_0^1 \min\{t,s\} dtds = \int_0^1 dt \int_t^1 tds + \int_0^1 dt \int_0^t sds = \frac{1}{3}$$

习题：

（1）　设随机过程$\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$是一实正交增量过程，并且$E\{X(t)\} = 0$，及满足：$E\left\{[X(t) - X(s)]^2\right\} = |t-s|, \quad -\infty < s,t < +\infty$；

令：$Y(t) = X(t) - X(t-1), -\infty < t < +\infty$，试证明$Y(t)$是平稳过程。

（2）　设 $\xi(t) = X\sin(Yt); t \geq 0$，而随机变量 $X$ 、$Y$ 是相互独立且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程，是否连续、可导？

**教材 P311－323：1、2、4、10、11、13、22、28。**

# 第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

## （四） 随机分析（续）

### 5．随机微分方程初步

设$\{Y(t);t\in T\}$是一均方连续的二阶矩过程，$X_0$是一存在一、二阶矩的随机变量，假设$\{Y(t);t\in T\}$和$X_0$是独立的，考虑以下随机微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{dX(t)}{dt}=Y(t)\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$$

试研究$\{X(t);t\in T\}$的统计特性。

解：方程两边在均方意义下积分，有：

$$X(t)=X(t_0)+\int_{t_0}^{t}Y(u)du$$

并且该解是唯一的。由于：

$$E\{X(t)\}=E\{X(t_0)\}+\int_{t_0}^{t}E\{Y(u)\}du$$

所以，当$E\{Y(t)\}=0$时，

$$E\{X(t)\}=E\{X_0\}$$

又相关函数为：

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\}\\&=E\{|X_0|^2\}+E\{X_0\}\int_{t_0}^{t_2}E\{\overline{Y(u)}\}du+E\{\overline{X_0}\}\int_{t_0}^{t_1}E\{Y(u)\}du\\&\quad+\int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_1}R_Y(u,v)dudv\end{aligned}$$

所以，当$E\{Y(t)\}=0$时，有：

$$R_X(t_1,t_2)=E\{|X_0|^2\}+\int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_1}R_Y(u,v)dudv$$

设有一阶线性微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = a(t)X(t) + Y(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

其中$a(t), t \in T$ 是一确定性函数，$\{Y(t); t \in T\}$是一均方连续的实二阶矩过程，$X_0$是存在一、二阶矩的随机变量，则此线性方程有唯一的解：

$$X(t) = X_0 \exp\{\int_{t_0}^{t} a(u)du\} + \int_{t_0}^{t} Y(v)\exp\{\int_{v}^{t} a(u)du\}dv$$

下面研究其均值函数和相关函数

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$$

$$= E\{X_0\}\exp\{\int_{t_0}^{t} a(u)du\} + \int_{t_0}^{t} E\{Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t} a(u)du\}dv$$

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$$

$$= E\{X_0^{\ 2}\}\exp\{\int_{t_0}^{t_1} a(u)du\}\exp\{\int_{t_0}^{t_2} a(v)dv\}$$

$$+ \exp\{\int_{t_0}^{t_1} a(u)du\}\int_{t_0}^{t_2} E\{X_0 Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t_2} a(u)du\}dv$$

$$+ \exp\{\int_{t_0}^{t_2} a(u)du\}\int_{t_0}^{t_1} E\{X_0 Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t_1} a(u)du\}dv$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} R_Y(v_1, v_2)\exp\{\int_{v_1}^{t_1} a(u)du\}\exp\{\int_{v_{21}}^{t_2} a(u)du\}dv_1 dv_2$$

## （五）　各态历经性

### 1．　各态历经性

本节主要讨论根据试验记录（样本函数）确定平稳过程的均值和相关函数的理论依据和方法。

一般地，计算平稳过程的均值和相关函数有各种不同的方法，例如：

$$\mu_X(t_1) \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)\overline{x_k(t_2)}$$

这样的计算需要对一个平稳过程重复进行大量地观察，以便获取数量很多的样本函数 $x_k(t)$，而这在实际当中是非常困难的，有时甚至是不可能的。但是根据平稳过程的统计特性是不随时间的推移而变化，于是自然希望在很长时间内观察得到一个样本函数，可以作为得到这个过程的数字特征的充分依据。本节给出的各态历经性定理指出：对平稳过程而言，只要满足一些较宽的条件，那么集平均（均值函数和相关函数）实际上可以用一个样本函数在整个时间轴上的时间平均值来代替。

定义：设 $X(t)$ 是均方连续平稳随机过程，如果它沿整个时间轴上的平均值（时间平均）$\langle X(t)\rangle$ 存在，即

$$\langle X(t)\rangle \hat{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

存在，而且

$$P\left\{\langle X(t)\rangle = E\{X(t)\} = \mu_X\right\}=1$$

则称该随机过程的均值具有各态历经性。

注：$\mu_X = E\{X(t)\}$ 表示该随机过程的集平均或统计平均。

定义：设 $X(t)$ 是均方连续平稳随机过程，且对于固定的 $\tau$，$X(t+\tau)\overline{X(t)}$ 也是连续平稳随机过程，$\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$ 表示 $X(t+\tau)\overline{X(t)}$ 沿整个时间轴上的时间平均，即

$$\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle \hat{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)\overline{X(t)}dt$$

若 $\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$ 存在，称 $\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$ 为 $X(t)$ 的时间相关函数。若

$$P\left\{\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle = E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\} = R_X(\tau)\right\}=1$$

则称该过程的自相关函数具有各态历经性。

定义：如果 $X(t)$ 是一均方连续平稳随机过程，且其均值和相关函数均具有各态历经性，则称该随机过程具有各态历经性，或者说 $X(t)$ 是各态历经的，或是遍历的。

例：计算随机正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\theta)$ 的时间平均 $\langle X(t)\rangle$ 和时间相关函数 $\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$，其中 $\theta\sim U(0,2\pi)$，$a,\omega$ 为常数。

例：设有平稳随机过程 $X(t)=\eta$，$\eta$ 是一异于零的随机变量，问该过程是否各态历经？

引理 1：车贝雪夫不等式：设 $X$ 是一随机变量，若 $DX<\infty$，则对于 $\forall\varepsilon>0$，有：$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$。

引理 1：设 $X$ 是一随机变量，则有：$DX=0 \quad\Leftrightarrow\quad P\{X=EX\}=1$，即：

$$DX=0 \quad\Leftrightarrow\quad X=EX \quad a.e$$

定理 1：（均值各态历经定理）平稳随机过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性的充分必要条件是：$\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-2T}^{2T}\left(1-\dfrac{|\tau|}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-|\mu_X|^2\right]d\tau=0$

证明：由于 $\langle X(t)\rangle$ 是一随机变量，计算 $\langle X(t)\rangle$ 的均值和方差：

$$E\{\langle X(t)\rangle\}=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\{X(t)\}dt=\mu_X$$

$$D\{\langle X(t)\rangle\}=E\{|\langle X(t)\rangle-\mu_X|^2\}=E\{|\langle X(t)\rangle|^2\}-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}X(t_1)dt_1\int_{-T}^{T}\overline{X(t_2)}dt_2\right\}-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\}dt_1dt_2\right]-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right]-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left[R_X(t_1-t_2)-|\mu_X|^2\right]dt_1dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right\}$$

其中$C_X(t_1-t_2)=R_X(t_1-t_2)-|\mu_X|^2$是$X(t)$的自协方差函数。

作变换：

$$\begin{cases} t_1-t_2=\tau \\ t_1+t_2=u \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1=(\tau+u)/2 \\ t_2=(u-\tau)/2 \end{cases} \quad -T\le t_1,t_2\le T$$

变换的雅可比行列式为：

$$J=\left|\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau,u)}\right|=\frac{1}{2}$$

于是有：

$$D\{\langle X(t)\rangle\}=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T+|\tau|}^{2T-|\tau|}\frac{1}{2}C_X(\tau)dud\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\left[2T-|\tau|\right]C_X(\tau)d\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]C_X(\tau)d\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]\left[R_X(\tau)-|\mu_X|^2\right]d\tau\right\}$$

由引理 2，即可得定理的结论。

如果随机过程是实过程，则$C_X(-\tau)=C_X(\tau)$，$R_X(-\tau)=R_X(\tau)$，对于实平稳过程$X(t)$，均值满足各态历经性的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-\mu_X^2\right]d\tau=0$$

推论：若平实稳随机过程$X(t)$的自协方差函数$C_X(\tau)$满足：

$$\lim_{\tau\to\infty}C_X(\tau)=0$$

则平稳随机过程$X(t)$的均值具有各态历经性。

推论：设随机序列$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$是平稳序列，则

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k=\mu_X\right\}=1$$

的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)C_X(k)=0$$

**定理 2**：（自相关函数各态历经定理）平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数具有各态历经性的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)\left[B(u)-|R_X(\tau)|^2\right]du=0$$

其中：

$$B(u)=E\{X(t+\tau+u)\overline{X(t+u)}\overline{X(t+\tau)\overline{X(t)}}\}$$

**定理 3**：平稳随机过程 $X(t)$ 的时间平均

$$\langle X(t)\rangle \hat{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$$

和集平均 $E\{X(t)\}=\mu_X$ 依概率 **1** 相等的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

如果过程是实的，则充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

**定理 4**：平稳随机过程 $X(t)$ 的时间相关函数

$$\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle \hat{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)\overline{X(t)}dt$$

和集相关函数 $R_X(\tau)=E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\}$ 依概率 **1** 相等的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|u|}{T}\right)\left[B(u)-|R_X(\tau)|^2\right]du=0$$

其中：

$$B(u)=E\{X(t+\tau+u)\overline{X(t+u)}\,\overline{X(t+\tau)\overline{X(t)}}\}$$

如果过程是实的，则充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)\left[B(u)-R_X^2(\tau)\right]du=0$$

例：设$\{x(k)\}$是均值为零的实平稳随机序列，令：

$$\overline{x}_t=\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}x(k)$$

则有：

$$Var\{\overline{x}_t\}=\frac{1}{L}\left[R_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}\left(1-\frac{l}{L}\right)R_x(l)\right]$$

其中：$R_x(l)$是$\{x(k)\}$的自相关函数。

证明：由于随机序列的均值为零，则：

$$\begin{aligned}Var\{\overline{x}_t\}&=E\left\{\frac{1}{L^2}\sum_{k=1}^{L}x(k)\sum_{p=1}^{L}x(p)\right\}\\&=\frac{1}{L^2}\left[LR_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}(L-l)R_x(l)\right]\\&=\frac{1}{L}\left[R_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}\left(1-\frac{l}{L}\right)R_x(l)\right]\end{aligned}$$

**2．联合平稳随机过程**

定义 :设$X(t),Y(t)$是两个平稳随机过程,若其互相关函数$E\{X(t+\tau)\overline{Y(t)}\}$和$E\{Y(t+\tau)\overline{X(t)}\}$仅为其时间差$\tau$的函数，而与$t$无关，则称两个随机过程$X(t),Y(t)$是联合平稳随机过程。即有：

$$R_{XY}(t+\tau,t)\hat{=}E\{X(t+\tau)\overline{Y(t)}\}=R_{XY}(\tau)$$

$$R_{YX}(t+\tau,t)\hat{=}E\{Y(t+\tau)\overline{X(t)}\}=R_{YX}(\tau)$$

显然有：

$$R_{YX}(\tau)=\overline{R_{XY}(-\tau)}$$

注意：若设 $X(t),Y(t)$ 是联合平稳随机过程，则 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 也是平稳随机过程，且有：

$$R_{ZZ}(\tau)=R_{XX}(\tau)+R_{YY}(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

联合平稳随机过程的性质

（1）$R_{YX}(\tau)=\overline{R_{XY}(-\tau)}$，若是实过程，则 $R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)$

（2）若设 $X(t),Y(t)$ 是实平稳随机过程，且联合平稳，则有：

$$[R_{YX}(\tau)]^2\le R_{XX}(0)R_{YY}(0)$$

$$[R_{XY}(\tau)]^2\le R_{XX}(0)R_{YY}(0)$$

$$[C_{YX}(\tau)]^2\le C_{XX}(0)C_{YY}(0)$$

$$[C_{XY}(\tau)]^2\le C_{XX}(0)C_{YY}(0)$$

由不等式：

$$E\{[X(t)+\lambda Y(t+\tau)]^2\}\ge 0\quad \forall\lambda$$

即可证明以上的结果。

## （六）　各态历经性的应用

遍历转换技术：

（1）利用遍历转换技术测量具有各态历经性的随机过程的均值

遍历转换技术是近年来发展起来的用于测量某些对象的数字特征，如均值、相关函数等的一项方法。其特点是对模拟量的测量对象不需要采用乘法器和积分器就可以得到数字特征，在精度上可以达到较高的程度，而且稳定性、可靠性都较高。其基本原理分析如下：

设 $Y(t)$ 是一具有均匀分布的严平稳遍历的随机过程，$X(t)$ 是被测的输入平

稳遍历随机信号，且 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 独立，我们设计一转换器，转换器中有一时钟，它给出取样的时刻 $t_k$，在时刻 $t_k$ 对输入随机信号取样，得到 $X(t_k)$。$Y(t)$ 作为参考电压，在 $t_k$ 诸取样时刻比较 $X(t_k)$ 和 $Y(t_k)$ 的值，记比较后的输出 $Z(t_k)$ 为：

$$Z(t_k)=\begin{cases}1, & X(t_k)>Y(t_k)\\ 0, & X(t_k)\le Y(t_k)\end{cases}$$

由此，输入信号 $X(t)$ 从模拟信号转换到了数字信号。即 $X(t_k)\to Z(t_k)$，这一转换称为遍历转换，在一定的条件下，经过遍历转换后，$\{Z(t_k)\}$ 保留了随机信号 $X(t)$ 的某些数字特征。

定理：设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是相互独立的两个遍历平稳的随机过程，$Y(t)$ 的一维概率分布密度为 $(0,\alpha)$ 上的均匀分布，其中取 $\alpha$ 足够大，使得 $P\{X(t_k)>\alpha\}$ 足够的小。$X(t)>0$，$t_k$ 是取样时刻，且有 $t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$，令

$$Z(t_k)=\begin{cases}1, & X(t_k)>Y(t_k)\\ 0, & X(t_k)\le Y(t_k)\end{cases}$$

若 $E\{X(t)\}=\mu_X$ 存在，则有：

（a）$P\{Z(t_k)=1\}=\dfrac{1}{\alpha}E\{X(t)\}=\dfrac{\mu_X}{\alpha}$

（b）$\mu_X=E\{X(t)\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}Z(t_k)$

证明：（a）由 $Z(t_k)$ 的定义，我们有：

$$P\{Z(t_k)=1\}=P\{X(t_k)>Y(t_k)\}=\iint\limits_{x>y} f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dydx$$

由于 $X(t)>0$，$Y(t)>0$，及 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的独立性，我们有：

$$P\{Z(t_k)=1\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dydx=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x} f_{X(t_k)}(x)f_{Y(t_k)}(y)dydx$$

$$=\int_{0}^{\infty}[\,f_{X(t_k)}(x)\int_{0}^{x}\frac{1}{\alpha}dy]dx=\frac{1}{\alpha}\cdot\int_{0}^{\infty}xf_{X(t_k)}dx=\frac{E\{X(t)\}}{\alpha}=\frac{\mu_X}{\alpha}$$

（b）由于 $Z(t_k)$ 是数字信号，只能取 0 或 1，而：

$$P\{Z(t_k)=1\}=\frac{\mu_X}{\alpha}$$

$$P\{Z(t_k)=0\}=1-P\{Z(t_k)=1\}=1-\frac{\mu_X}{\alpha}$$

由于 $X(t)$ 是一平稳过程，均值函数与 $t$ 无关，$\{Z(t_k)\}$ 是一平稳遍历的随机过程。因此：

$$E\{Z(t_k)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

上式依概率 1 相等。于是有：

$$E\{Z(t_k)\}=1\times P\{Z(t_k)=1\}=P\{Z(t_k)=1\}$$

$$=\frac{E\{X(t)\}}{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

因此，有：

$$\mu_X=E\{X(t)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

上式依概率 1 相等。

（2）利用遍历转换技术测量具有各态历经性的随机过程的相关函数

利用遍历转换技术，我们可以求两个遍历严平稳（联合平稳）随机过程的互相关函数，相应的可以得到一个严平稳过程的自相关函数。做法简述如下：

设输入信号为 $X_1(t),X_2(t)$，它们是两个遍历严平稳随机过程，且是联合平稳的和都存在二阶矩，用两个噪声器产生两个相互独立的参考电压 $Y_1(t),Y_2(t)$，它们都均匀分布于 $(0,\alpha)$，其中取 $\alpha$ 足够大，使得 $P\{X_1(t_k)>\alpha\}$ 和 $P\{X_2(t_k)>\alpha\}$ 足够的小。且 $Y_1(t),Y_2(t)$ 都是严平稳的。$X_1(t)$ 与 $Y_1(t),Y_2(t)$ 独立，$X_2(t)$ 与 $Y_1(t),Y_2(t)$ 也独立。那么：

$$R_{X_1X_2}(\tau)=E\{X_1(t)X_2(t-\tau)\}$$

设$X_1(t)>0, X_2(t)>0$，取：

$$Z_1(t_k)=\begin{cases}1, & X_1(t_k)>Y_1(t_k)\\ 0, & X_1(t_k)\le Y_1(t_k)\end{cases}$$

$$Z_2(t_k)=\begin{cases}1, & X_2(t_k)>Y_2(t_k)\\ 0, & X_2(t_k)\le Y_2(t_k)\end{cases}$$

令：

$$Z(t_k)=Z_1(t_k)Z_2(t_k-\tau)$$

则有：

$$Z(t_k)=\begin{cases}1, & X_1(t_k)>Y_1(t_k),\ X_2(t_k-\tau)>Y_2(t_k-\tau)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}P\{Z(t_k)=1\}&=P\{X_1(t_k)>Y_1(t_k),\ X_2(t_k-\tau)>Y_2(t_k-\tau)\}\\ &=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^{x_1}\frac{1}{\alpha}dy_1\right)\left(\int_0^{x_2}\frac{1}{\alpha}dy_2\right)f_{X_1(t_k)X_2(t_k-\tau)}(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &=\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2 f_{X_1(t_k)X_2(t_k-\tau)}(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &=\frac{1}{\alpha^2}R_{X_1X_2}(t_k,t_k-\tau)\\ &=\frac{1}{\alpha^2}R_{X_1X_2}(\tau)\end{aligned}$$

由$\{Z(t_k)\}$的遍历性，我们有：

$$E\{Z(t_k)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Z(t_k)\quad \text{（依概率 1 相等）}$$

而

$$E\{Z(t_k)\}=1\times P\{Z(t_k)=1\}=P\{Z(t_k)=1\}$$

$$=\frac{R_{X_1X_2}(\tau)}{\alpha^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Z(t_k)$$

故：

$$R_{X_1X_2}(\tau)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)=\alpha^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

因此，只要在遍历转换器输出端接一个计数器，对$Z(t_k)$进行计数，就可以得到$X_1(t)$和$X_2(t)$的互相关函数。若$X_1(t)=X_2(t)$，则得到自相关函数。

## （七）　典型例子

例 1：设随机过程$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta), -\infty<t<\infty$，其中$\omega_0$是常数，$A$与$\Theta$是相互独立的随机变量，$\Theta\sim U(,0,2\pi)$，$A$服从瑞利分布，即其分布密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

（a）　试证$X(t)$是平稳过程。

（b）　若将$X(t)$写成$X(t)=B\cos\omega_0 t+C\sin\omega_0 t$，其中$B=A\cos\Theta$，$C=-A\sin\Theta$，试证$B$和$C$独立同分布于$N(0,\sigma^2)$。

解：（a）计算得：

$$\mu_X(t)=E\{A\cos(\omega_0 t+\Theta)\}=E\{A\}E\{\cos(\omega_0 t+\Theta)\}$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t+\phi)d\phi=0$$

$$R_X(t,t+\tau)=E\{A\cos(\omega_0 t+\Theta)A\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\}$$

$$=E\{A^2\}E\{\cos(\omega_0 t+\Theta)\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\}$$

$$=\sigma^2\cos\omega_0\tau$$

因此$X(t)$是平稳过程。

（c）　由分布函数的定义

$$F_{B,C}(b,c)=P\{B\le b,C\le c\}=P\{A\cos\Theta\le b,-A\sin\Theta\le c\}$$

$$=\iint_{x\cos\Theta\le b,\ -x\sin\Theta\le c} f_A(x)f_\Theta(\phi)dxd\phi$$

作变换：

$$\begin{cases}u=x\cos\phi\\ v=-x\sin\phi\end{cases}$$

雅克比行列式为：

$$J=\frac{\partial(x,\phi)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{x}$$

因此有：

$$F_{B,C}(b,c)=\iint_{u\le b,\ v\le c}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}dudv$$

即有：

$$f_{B,C}(b,c)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}=f_B(b)\cdot f_C(c)$$

因此$B$和$C$独立且同分布于$N(0,\sigma^2)$。

例 2：设有一相位调制信号$X(t)=e^{j(\omega t+\theta(t))},-\infty<t<\infty$，其中$\omega>0$为常数，$\theta(t)$为一二阶严平稳随机过程，设$\Psi_{t_1,t_2}(u_1,u_2)$是随机过程$\theta(t)$的二维特征函数，同时对于任意的$-\infty<t<\infty$，$\Psi_{0,t}(1,0)=0$，试证明随机过程$X(t)$是一宽平稳过程，并求其相关函数。

解：由定义可知：

$$\mu_X(t)=E\{e^{j(\omega t+\theta(t))}\}=e^{j\omega t}E\{e^{j\theta(t)}\}=e^{j\omega t}\int e^{jx}dF_\theta(x,t)$$

由于$\theta(t)$是一二阶严平稳过程，故分布函数与时间无关，即有：

$$\mu_X(t)=e^{j\omega t}\int e^{jx}dF_\theta(x)=e^{j\omega t}E\{e^{j\theta(0)}\}$$

由：

$$\Psi_{0,t}(1,0)=E\{e^{j\theta(0)}\}=0$$

所以

$$\mu_X(t) = 0$$

另外：

$$\begin{aligned} R_X(s,t) &= E\{X(s)\overline{X(t)}\} = E\{e^{j(\omega s+\theta(s))}\overline{e^{j(\omega t+\theta(t))}}\} \\ &= e^{j\omega(s-t)}E\{e^{j(\theta(s)-\theta(t))}\} = e^{j\omega(s-t)}\int e^{j(x-y)}dF_\theta(x,y;s-t) \\ &= R_X(s-t) \end{aligned}$$

故随机过程 $X(t)$ 是一平稳过程。

例 **3**：设 $\{N(t); t \geq 0\}$ 是一强度为 $\lambda$ 的 **Poission** 过程，记 $X(t) = \dfrac{dN(t)}{dt}$，试求随机过程 $X(t)$ 的均值和相关函数。

解：$\mu_X(t) = \dfrac{dE\{N(t)\}}{dt} = (\lambda t)' = \lambda$

$$R_X(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}[\lambda^2 ts + \lambda \min\{t,s\}] = \lambda^2 + \lambda\delta(t-s)$$

例 **4**：设 $X(t)$ 是一实正态分布平稳过程，它的均值为零，定义：

$$Y(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right]$$

试证明

$$E\{Y(t)\} = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}[-k_X(\tau)]$$

其中 $k_X(\tau) = C_X(\tau)/\sigma_X^2$，$C_X(\tau)$ 是 $X(t)$ 的协方差函数，$\sigma_X^2 = C_X(0)$ 是 $X(t)$ 的方差。

解：为了解此题，现看下面的引理：

引理：设 $X, Y$ 是服从正态分布的二维随机变量，其联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则 $X$ 和 $Y$ 取不同符号的概率为：

$$P\{XY<0\}=\frac{\cos^{-1}r}{\pi}$$

引理的证明：

$$P\{XY<0\}=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}f(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty}f(x,y)dxdy$$

令：

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{\sigma_1}\\ v=\dfrac{y}{\sigma_2}\end{cases}$$

则有：

$$P\{XY<0\}=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[u^2-2ruv+v^2\right]\right\}dudv$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dudv$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}RdR\int_{-\arccos r}^{0}\exp\{-\frac{R^2}{2}\}d\theta=\frac{\arccos r}{\pi}$$

以上式子用了变换：

$$\begin{cases}\dfrac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}=R\cos\theta\\ v=R\sin\theta\end{cases}$$

下面给出例 4 的解：

由：

$$E\{Y(t)\}=\frac{1}{2}\left[1+E\left\{\frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right\}\right]$$

因此只要求：

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right\}= \\
&=1\times P\{X(t)X(t+\tau)\geq 0\}+(-1)\times P\{X(t)X(t+\tau)<0\} \\
&=1-2P\{X(t)X(t+\tau)<0\} \\
&=1-2\frac{\arccos r}{\pi}
\end{aligned}
$$

因此有：

$$E\{Y(t)\}=\frac{1}{2}\left[1+1-2\frac{\arccos r}{\pi}\right]=1-\frac{\arccos r}{\pi}=\frac{1}{\pi}\arccos(-r)$$

由于此时：

$$r=k_X(\tau)$$

我们即可得到结论。

例 5：设随机振幅、随机相位正弦波过程 $X_t=V\sin(t+\varTheta),t\geq 0$，其中随机变量$V$和$\varTheta$相互独立，且有分布：

$$\varTheta\sim U[0,2\pi],\ V\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$$

令： $Y_t=\begin{cases}1, & 如|X_t|>\sqrt{2}/2\\ 0, & 反之\end{cases},t\geq 0$，试求过程$Y_t,t\geq 0$的均值函数。

解：由定义，随机过程$\{Y(t);t\geq 0\}$的均值函数为：

$$
\begin{aligned}
\mu_Y(t)&=E\{Y(t)\}=1\times P\{Y(t)=1\}+0\times P\{Y(t)=0\} \\
&=P\{Y(t)=1\}=P\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\}
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&P\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\}=P\{|V\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\} \\
&=P\{|(-1)\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=-1\}+P\{|0\times\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=0\}+ \\
&\quad +P\{|(1)\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=1\} \\
&=\frac{1}{2}P\{|\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\} \\
&=\frac{1}{2}P\{\sin(t+\Theta)>\sqrt{2}/2\}+\frac{1}{2}P\{\sin(t+\Theta)<-\sqrt{2}/2\}
\end{aligned}
$$

由于当$\Theta \sim U(0,2\pi)$时，随机变量$\xi(t)=\sin(t+\Theta)$的分布密度为：

$$f_{\xi(t)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x\le +1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

因此有：

$$P\left\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\right\}=\frac{1}{4}$$

即：

$$\mu_Y(t)=\frac{1}{4}$$

例六：设随机过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$是均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$的实平稳正态过程。设$X(t)$通过线性半波检波器后的输出为：

$$Y(t)=\begin{cases}X(t), & X(t)\ge 0\\ 0, & X(t)<0\end{cases}$$

试求：

（1）　随机过程$Y(t)$的相关函数$R_Y(\tau)$，并说明其是否为平稳过程；

（2）　随机过程$Y(t)$的均值和方差；

（3）　随机过程$Y(t)$的一维概率分布密度函数$f_Y(y)$。

解：（1）由题意及条件数学期望公式，有：

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t)Y(t+\tau)\}=E\{E\{Y(t)Y(t+\tau)\mid X(t)X(t+\tau)\}\}\\&=\iint E\{Y(t)Y(t+\tau)\mid X(t)X(t+\tau)\}f_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy\\&=\iint\limits_{x\ge 0,y\ge 0}xyf_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy\end{aligned}$$

其中：

$$f_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=R_X(0),\quad r=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

由此可得：

$$R_Y(\tau) = \iint\limits_{x\ge 0, y\ge 0} xy f_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{xy}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

令：

$$u = \frac{x}{\sigma_1}，\quad v = \frac{y}{\sigma_2}$$

则有：

$$R_Y(\tau) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{xy}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$
$$= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} uv \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u^2 - 2ruv + v^2\right]\right\}dudv$$
$$= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} uv \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2 + v^2\right]\right\}dudv$$

令：

$$\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}} = R\cos\theta，\quad v = R\sin\theta$$

得变换：

$$u = \sqrt{1-r^2}R\cos\theta + rR\sin\theta, \quad v = R\sin\theta$$
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(R,\theta)} = R\sqrt{1-r^2} \quad \Rightarrow \quad dudv = R\sqrt{1-r^2}dRd\theta$$

则有：

$$R_Y(\tau) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} uv \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2 + v^2\right]\right\}dudv$$
$$= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{\arccos(-r)} R\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}R\cos\theta + rR\sin\theta\right]\exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\}RdRd\theta$$
$$= \frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_0^{\arccos(-r)} \sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}\cos\theta + r\sin\theta\right]d\theta$$
$$= \frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}r\theta - \frac{1}{4}r\sin 2\theta\right]_0^{\arccos(-r)}\right\}$$
$$= \frac{R_X(0)}{2\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\varphi + \cos\varphi\right]$$

**其中：** $\sin\varphi = r = \dfrac{R_X(\tau)}{R_X(0)}, \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{2}$ **。结合以下（2）的结果可知是平稳的。**

**（2）由条件数学期望的计算公式，有：**

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = E\{E\{Y(t)|\,X(t)\}\}$$

$$= \int_0^{+\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right\} dx = \sqrt{\frac{R_X(0)}{2\pi}}$$

$$E\{Y^2(t)\} = R_Y(0) = \frac{R_X(0)}{2}$$

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t)\} - m_Y^2 = R_Y(0) - m_Y^2 = \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \cdot \frac{R_X(0)}{2}$$

**（3）当** $y < 0$ **时，** $F_{Y(t)}(y) = 0$ **；当** $y \ge 0$ **时，我们有：**

$$F_{Y(t)}(y) = P\{Y(t) \le y\} =$$

$$= P\{Y(t) \le y|\,X(t) \ge 0\} P\{X(t) \ge 0\} + P\{Y(t) \le y|\,X(t) < 0\} P\{X(t) < 0\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^y f_{X(t)}(x)dx + \frac{1}{2}$$

**由此可得** $Y(t)$ **的一维概率分布密度为：**

$$f_{Y(t)}(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2R_X(0)}\right\} U(y)$$

习题：

（1）　设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为零、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的实平稳正态过程。设 $X(t)$ 通过线性全波检波器后，其输出为 $Y(t) = |\,X(t)\,|$，试求：

（a）　随机过程 $Y(t)$ 的相关函数 $R_Y(\tau)$，并说明其是否为平稳过程；

（b）　随机过程 $Y(t)$ 的均值和方差；

（c）　随机过程 $Y(t)$ 的一维概率分布密度函数 $f_Y(y)$。

（2）　设 $Y(t) = X(-1)^{N(t)}, t \ge 0$，其中 $\{N(t); t \ge 0\}$ 为强度为 $\lambda > 0$ 的 **Poission** 过程，随机变量 $X$ 与此 **Poission** 过程独立，且有如下分布：

$$P\{X = -a\} = P\{X = a\} = 1/4, \;\; P\{X = 0\} = 1/2, \quad a > 0$$

问：随机过程$Y(t), t \geq 0$是否为平稳过程？请说明理由。

**教材 P316－319：17、18、30。**

# 第五章　平稳过程的谱分析

## （一）　确定性函数（信号）的能谱分析

### 1．Fourier 变换

若函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 满足下列条件：(**a**) $f(t)$ 在任意有限区间上满足 **Dirichlet** 条件（即函数连续或只有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点）；(**b**) $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积；则在 $f(t)$ 的连续点处有：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau]e^{j\omega t}d\omega$$

令：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{(A)}$$

则有：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \text{(B)}$$

我们称（**A**）为函数 $f(t)$ 的 **Fourier** 变换，记作：

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$$

$F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的象函数。

称（**B**）为 $F(\omega)$ 的 **Fourier** 逆变换，记为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

$f(t)$ 叫作 $F(\omega)$ 的象原函数。

在确定性信号的频谱分析中，**Fourier** 变换 $F(\omega)$ 又称为确定性信号 $f(t)$ 的频谱函数，而频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱（亦简称为频谱）。由于 $\omega$ 是连续变化的，我们称之为连续频谱。对一个确定性信号作 **Fourier** 变换，

就是求这个信号的频谱。

乘积定理：若 $f_1(t), f_2(t)$ 都满足 **Fourier** 变换的条件，且 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}d\omega$$

证明：由于，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)e^{-j\omega t}}dt\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}dt}\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)d\omega$$

同理可以证明另一个等式。

**2．** 能量积分及能量谱密度

设函数 $f(t)$ 满足 **Fourier** 变换的条件，若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$$

上面的等式称为 **Parseval** 等式。其中令：

$$S(\omega)=|F(\omega)|^2$$

称为函数（信号）$f(t)$ 的能量密度函数或能量谱密度。它可以决定函数（信号）$f(t)$ 的能量分布规律，将它对所有频率积分就得到 $f(t)$ 的总能量 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2 dt$。

能量谱密度满足：$S(\omega)=S(-\omega)$。

**3．** 确定性信号的卷积与相关函数

**（1）** 卷积

若给定函数 $f_1(t), f_2(t)$，则积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

称为函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积，记为 $f_1(t) * f_2(t)$。即：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

显然有：$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$。

例：若 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0 \\ 1, & t\ge 0\end{cases}$，$f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0 \\ e^{-t}, & t\ge 0\end{cases}$，求 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积。

卷积定理：假设 $f_1(t), f_2(t)$ 都满足 **Fourier** 变换的条件，且

$$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)],\quad F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$$

则有：

$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

**（2）** 相关函数

对于两个不同的函数（信号）$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt$$

称为两个函数（信号）$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数，记作 $R_{12}(\tau)$，即

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt$$

而积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau) f_2(t) dt$$

记为 $R_{21}(\tau)$，即

$$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau) f_2(t) dt$$

若 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$ 时，则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$

称为函数（信号） $f(t)$ 的自相关函数（简称相关函数），记为 $R(\tau)$，即

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$

我们有：

$$R(\tau)=R(-\tau)，\ R_{12}(\tau)=R_{21}(-\tau)$$

相关函数和能量谱密度之间的关系：

在乘积定理中，令 $f_1(t)=f(t), f_2(t)=f(t+\tau)$，且 $F(\omega)=\mathscr{F}[\,f(t)\,]$，根据 **Fourier** 变换的位移性质，我们有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\omega)} F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

即有：

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

另外，由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) f(t) e^{-j\omega\tau} dt d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} f(t) e^{j\omega t} d\tau dt$$

令：$t+\tau=u, t=t$，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega u} f(t) e^{j\omega t} du dt = \left| F(\omega) \right|^2$$

即：

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

由此可得，自相关函数 $R(\tau)$ 和能量谱密度函数 $S(\omega)$ 构成一对 **Fourier** 变换对。即：

$$\begin{cases} R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{cases}$$

利用自相关函数 $R(\tau)$ 和能量谱密度函数 $S(\omega)$ 是偶函数的性质，我们有：

$$\begin{cases} R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \\ S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \end{cases}$$

当 $\tau = 0$ 时，则有：

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

此即为 **Parseval** 等式。

若 $F_1(\omega) = \mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega) = \mathscr{F}[f_2(t)]$，根据乘积定理，可得：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

我们称 $S_{12}(\omega) = \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega)$ 为互能量谱密度，同样可见，互相关函数和互能量谱密度之间构成一对 **Fourier** 变换对，即：

$$\begin{cases} R_{12}(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ S_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{cases}$$

另外，关于互能量谱密度，我们有：

$$S_{21}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)}$$

例：求指数衰减函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0 \end{cases}$（$\beta > 0$）的自相关函数和能量谱

密度。

**4．一些常用的结果**

（1）$\mathscr{F}[\delta(t)]=1$，$\mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}$ ；

（2）设$u(t)$为单位阶跃函数，则$\mathscr{F}[u(t)]=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ ；

（3）$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$，$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ ；即有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega),\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

（4）$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$，

$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$。

## （二） 平稳随机过程（信号）的功率谱密度

现在我们考虑在一有限时间区间上取值的平稳随机过程（信号）$\{\xi(t);-T<t<T\}$，在均方意义下计算其 **Fourier** 变换，即：

$$X_T(f)\mathrel{\hat=}\int_{-T}^{T}[\xi(t)-\mu_\xi]e^{-j2\pi ft}dt \qquad (\omega=2\pi f)$$

则在这一区间上的功率谱分布为：

$$\frac{|X_T(f)|^2}{2T}\ge 0$$

这一功率谱函数的集平均为：

$$P_T(f)\mathrel{\hat=}E\left\{\frac{|X_T(f)|^2}{2T}\right\}$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\left\{[\xi(t_1)-\mu_\xi]\overline{[\xi(t_2)-\mu_\xi]}\right\}e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

$$=\int_{-2T}^{2T}C_{\xi\xi}(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

其中：

$$\tau = t_1 - t_2, \ C_{\xi\xi}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau) - \left|\mu_\xi\right|^2$$

$P_T(f)$表示平稳随机过程（信号）$\xi(t)$在时间区间$(-T,T)$上的平均功率随频率$f$的分布，当$T \to +\infty$时，这一分布给出了功率谱密度，即：

$$P_{\xi\xi}(f) \triangleq \lim_{T\to+\infty} P_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\xi\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \geq 0$$

上式给出了平稳随机过程（信号）$\{\xi(t); -\infty < t < +\infty\}$的功率谱密度的定义，并且表明功率谱密度不可能为负。

功率谱密度的性质：

（1）　功率谱密度$P_{\xi\xi}(f)$是实的；

证明：由复平稳随机过程功率谱的定义，我们有：

$$\overline{P_{\xi\xi}(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{C_{\xi\xi}(\tau)} e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\xi\xi}(-\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} C_{\xi\xi}(\tau') e^{-j2\pi f\tau'} d\tau' = P_{\xi\xi}(f)$$

（2）　$P_{\xi\xi}(f) \geq 0$；

（3）　自协方差函数是功率谱密度的 **Fourier** 逆变换，即

$$C_{\xi\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

（4）　功率谱密度对频率的积分给出随机信号$\xi(t)$的方差，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi\xi}(f) df = C_{\xi\xi}(0) = E\left\{\left|\xi(t) - \mu_\xi\right|^2\right\}$$

（5）　若$\{\xi(t); -\infty < t < +\infty\}$是零均值的随机过程（信号），则协方差与相关函数等价，即$C_{\xi\xi}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau)$，则有：

$$S_{\xi\xi}(f) \triangleq P_{\xi\xi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \geq 0$$

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

以上两式所描述的关系称为 **Wienner-Khinchine** 定理：任意零均值的平稳

过程的功率谱$S_{\xi\xi}(f)$（$P_{\xi\xi}(f)$）和它的自相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$组成一对 **Fourier** 变换对。

（6）　对于零均值的随机过程（信号）$\xi(t)$，功率谱的积分等于零滞后（$\tau=0$）处的相关函数，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi\xi}(f)df = E\{|\xi(t)|^2\} = R_{\xi\xi}(0)$$

（7）　若$\xi(t)$是实的随机过程，则功率谱密度$P_{\xi\xi}(f)$是实的偶函数；

（8）　均值为零，功率谱密度为非零常数的平稳随机过程（信号）称为白噪声（信号），此时:

$$S(f)=S_0\ (-\infty<f<+\infty),\ R_{\xi\xi}(\tau)=S_0\delta(\tau)\text{。}$$

关于离散型平稳随机过程的功率谱密度：

假设$\{\xi(k);k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳随机序列，其相关函数满足：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(k)|<\infty$$

则称

$$f_{\xi\xi}(\lambda)\hat{=}\sum_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)e^{-jk\lambda}\quad(-\pi\le\lambda\le\pi)$$

为该序列的功率谱密度。

我们有：

$$R_{\xi\xi}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{\xi\xi}(\lambda)e^{jk\lambda}d\lambda\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

对于实的随机序列，由于$R_{\xi\xi}(k)=R_{\xi\xi}(-k),k=0,1,2\cdots$，因此有：

$$f_{\xi\xi}(\lambda)=2\sum_{k=1}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)\cos k\lambda+R_{\xi\xi}(0)$$

$$R_{\xi\xi}(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_{\xi\xi}(\lambda)\cos(k\lambda)d\lambda$$

$$f_{\xi\xi}(-\lambda)=f_{\xi\xi}(\lambda)$$

两个联合平稳的随机过程的互功率谱密度：设两个联合平稳的随机信号$\xi(t),\eta(t)$，其互协方差为$C_{\xi\eta}(\tau)$，则有：

$$C_{\xi\eta}(\tau)=R_{\xi\eta}(\tau)-\mu_{\xi}\overline{\mu_{\eta}}$$

若$\mu_{\xi}=0,\ \mu_{\eta}=0$，则有$C_{\xi\eta}(\tau)=R_{\xi\eta}(\tau)$。

另外互相关系数为：

$$\rho_{\xi\eta}(\tau)=\frac{C_{\xi\eta}(\tau)}{\sqrt{C_{\xi\xi}(0)C_{\eta\eta}(0)}}$$

我们定义$C_{\xi\eta}(\tau)$的 **Fourier** 变换为两个联合平稳随机信号$\xi(t),\eta(t)$的互功率谱密度，即：

$$P_{\xi\eta}(f)\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}C_{\xi\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

注意，它是关于频率$f$的复函数，其实部称为同相谱（**cospectrum**），虚部称为正交谱（**quadrature spectrum**）。

记：$P_{\xi\eta}(f)=\left|P_{\xi\eta}(f)\right|\exp\{j\phi_{\xi\eta}(f)\}$，称 $\phi_{\xi\eta}(f)$的关于频率$f$的导数为群延迟（**group delay**）。

注意：教材中定义互相关函数$R_{\xi\eta}(\tau)$的 **Fourier** 变换为两个联合平稳随机信号$\xi(t),\eta(t)$的互功率谱密度，即

$$S_{\xi\eta}(f)\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\xi\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

两种定义本质上是一致的。

由互相关函数的关系式$R_{\eta\xi}(\tau)=\overline{R_{\xi\eta}(-\tau)}$，我们有：

$$\begin{aligned}S_{\eta\xi}(f)&\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{R_{\xi\eta}(-\tau)}e^{-j2\pi f\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{R_{\xi\eta}(-\tau)e^{j2\pi f\tau}}d\tau\\&=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\xi\eta}(s)e^{-j2\pi fs}ds}\quad(-\tau=s)\\&=\overline{S_{\xi\eta}(f)}\end{aligned}$$

同样，我们有：

$$R_{\xi\eta}(\tau) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi\eta}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$R_{\eta\xi}(\tau) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

令：$\tau = 0$，则有：

$$R_{\eta\xi}(0) \hat{=} E\{\eta(t)\overline{\xi(t)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\xi}(f) df$$

注意以上式子解释的物理意义。

例 1：随机电报信号的相关函数为：

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{4} e^{-2\lambda|\tau|} \quad \lambda \text{为常数，} -\infty < \tau < +\infty$$

求其功率谱密度。

解：由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|R_{\xi\xi}(\tau)\right| d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4} e^{2\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{4\lambda} < \infty$，因此功率谱存在。

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4} e^{2\lambda\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-2\lambda\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \frac{\lambda}{4(\lambda^2 + \pi^2 f^2)}$$

若相关函数为 $R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda|\tau|})$，则必须应用 $\delta$ －函数求解。即此时

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda|\tau|}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{\lambda}{4(\lambda^2 + \pi^2 f^2)}$$

例 2：随机相位正弦波信号的相关函数为：

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos\omega_0\tau$$

求功率谱密度。

解：注意函数不是绝对可积的处理方法。

$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\frac{A^2}{4}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[j(\omega_0-2\pi f)\tau)]d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-j(\omega_0+2\pi f)\tau)]d\tau\right\}$$

$$=\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\quad(\omega_0=2\pi f_0)$$

例 3：设有平稳随机信号$\xi(t)$，其功率谱密度为：

$$S(f)=\frac{(2\pi f)^2+4}{(2\pi f)^4+10(2\pi f)^2+9}$$

求该信号的相关函数和均方差。

解：略。

## （三）　具有随机输入的线性系统

### 1．　线性系统（过程）的基本概念

- 系统的分类

线性与非线性、分布参数与集总参数等；

描述方式：连续时间系统、离散时间系统；

研究方法：输入输出模型（外特性）、状态空间模型（内部特性）；

- 任意系统的输入输出关系可以表示为

$$y(t)=L\{\,u(t)\}$$

其中$u(t)$代表输入，$y(t)$代表输出，$L$是一个算子。

- 如果算子$L$是线性的，则称该系统为线性系统；满足下列条件的算子称为线性算子：

（1）$L(\alpha u(t))=\alpha L(u(t))$，$\alpha$是任意常数

（2） $L(u_1(t)+u_2(t))=L(u_1(t))+L(u_2(t))$

- 如果输出 $y(t)$ 在 $t$ 时的值只决定于在 $t$ 时的输入 $u(t)$ 的值，则称该系统是瞬时系统；不是瞬时的系统称为动态系统。
- 一个系统在 $t$ 时的输出完全由闭区间 $\left[t-T,t\right]$ 内的输入值所决定，其中 $T>0$，则称该系统为记忆时间为 $T$ 的记忆系统。
- 在 $t$ 时的输出 $y(t)$ 值仅与过去（包括现在的）输入值有关，而和将来的输入值无关的系统称为可实现的系统，或称为具有因果性的系统。
- 一个动态系统如果它的输入、输出是连续时间函数，而且可以用一组常微分方程来描述，则称该系统为集总参数、连续时间动态系统。如果输入、输出是离散时间函数，而且可以用一组差分方程来描述该系统，则称该系统为集总参数、离散时间的动态系统。
- 任何线性、集总参数的动态系统均可以表示成卷积形式：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

其中 $h(t,\tau)=L(\delta(t-\tau))$。

对于具有因果性的动态系统，有 $h(t,\tau)=0 \quad (\tau>t)$，因此输入输出关系可以写成为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

- 一个系统它的输入在时间轴上有一个平移，输出也有同样的平移，即：$y(t-\tau)=L\{u(t-\tau)\}$，则称该系统为时不变系统，对于时不变系统有，$L\{\delta(t-\tau)\}=h(t-\tau)$。因此，对于线性、时不变、具有因果性的动态系统，有：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- 本课程主要讨论的是线性、定常、时不变、具有因果性（可实现）的动态系统。

**2．** 卷积法

一般线性、集总参数的动态系统$L$的输入输出关系可以由卷积表示为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

其中：$h(t,\tau)=L\{\delta(t-\tau)\}$是系统对冲激信号的响应。

如果系统具有因果性，即满足：$h(t,\tau)=0,\quad \tau>t$，则上式为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

如果系统还具有时不变性，即满足：$L\{\delta(t-\tau)\}=h(t-\tau)$，则输入输出关系为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=L\{x(t)\}$$

给定一个线性系统，冲激响应$h(t,\tau)=L\{\delta(t-\tau)\}$由此系统唯一确定，我们主要研究具有因果性的时不变线性系统。此系统的输入输出关系由上式确定。如果输入信号$\xi(t)$是一随机信号，则输出$\eta(t)$也为一随机信号，随机信号的输入输出关系可以表示为：

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau=L\{\xi(t)\}$$

下面研究当给定一平稳随机信号时，系统输出的统计特性。研究的方法主要有卷积法和功率谱密度法。

现给定一$RC$电路（线性系统），输入信号为平稳随机信号$\{\xi(t);t\geq 0\}$，其均值为零，相关函数为$R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$，给定零初始条件$\eta(0^-)=0$，求输出$\eta(t)$的统计特性。

$RC$电路（线性系统）的冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则输入随机信号$\{\xi(t);t\geq 0\}$（注意：零时接入信号）经过此系统后的输出为：

$$\begin{aligned}\eta(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau\\&=\int_{0}^{t}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}h(u)\xi(t-u)du\end{aligned}$$

由此可知：$E\{\eta(t)\}=0$，相关函数为：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}=E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$$
$$=E\left\{\int_0^{t_1}h(t_1-u)\xi(u)du\cdot\int_0^{t_2}h(t_2-v)\xi(v)dv\right\}$$
$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1-u)h(t_2-v)E\{\xi(u)\xi(v)\}dudv$$
$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1-u)h(t_2-v)R_{\xi\xi}(u-v)dudv$$

将 $R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-\beta|\tau|}$ 和冲激响应代入，我们有：

（a）$t_1<t_2$ 时：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\alpha e^{-\alpha(t_1-u)}\int_0^{u}\alpha e^{-\alpha(t_2-v)}\sigma^2e^{-\beta(u-v)}dvdu$$
$$+\int_0^{t_1}\alpha e^{-\alpha(t_1-u)}\int_u^{t_2}\alpha e^{-\alpha(t_2-v)}\sigma^2e^{-\beta(v-u)}dvdu$$
$$=\alpha^2\sigma^2\int_0^{t_1}\frac{1}{\beta+\alpha}e^{-\alpha t_1}e^{\alpha u}e^{-\alpha t_2}e^{-\beta u}\cdot(e^{\beta u}e^{\alpha u}-1)du$$
$$=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta(t_2-t_1)}-\beta e^{-\alpha(t_2-t_1)}+\beta e^{-\alpha(t_2+t_1)}+$$
$$+\alpha e^{-\alpha(t_2+t_1)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}\}$$

（b）$t_1>t_2$ 时：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta(t_1-t_2)}-\beta e^{-\alpha(t_1-t_2)}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+$$
$$+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}\}$$

合并以上的两式，我们有：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta|t_1-t_2|}-\beta e^{-\alpha|t_1-t_2|}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+$$
$$+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}\}\qquad\text{（C）}$$

现在令 $t_1\to\infty,t_2\to\infty,\tau=t_1-t_2$，则有：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}\}=R_{\eta\eta}(\tau)\qquad\text{（D）}$$

以上的（C）式表明，在$t=0$时接入随机信号$\xi(t)$，此时有一瞬态过程，因此输出是非平稳的；(D）式表明，经过了瞬态达到稳态后，系统输出为平稳过程。

考虑一般的情形：一个具有因果性的时不变线性系统，其冲激响应为$h(t), t>0$，输入为平稳的（复）随机信号$\xi(t)$，则系统的输出为：

$$\eta(t)=\int_0^t h(t-u)\xi(u)du$$

因此，有：

$$E\{\eta(t)\}=\int_0^t h(t-u)\mu_\xi(u)du$$

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}=\int_0^{t_1} h(t_1-u)\int_0^{t_2}\overline{h(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u,v)dudv$$

如果只考虑进入稳态后的系统输出，只要将输入信号在$t=-\infty$时接入动态系统，那么当$t>0$时系统已趋于稳态，此时有：

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^t h(t-u)\xi(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\xi(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\xi(t-u)du$$

因此，对于复平稳过程，此时有：

$$E\{\eta(t)\}=\mu_\xi\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du =\text{常数}$$

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)\overline{h(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u,v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)\overline{h(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u-v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\overline{h(v)}R_{\xi\xi}(t_1-t_2-u+v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\overline{h(v)}R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv$$

$$=R_{\eta\eta}(\tau)$$

因此，此时的输出为一平稳随机信号。

例：给定由如下微分方程确定的线性系统：

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

求电流$i(t)$对激励$e(t)=\delta(t)$的冲激响应。

解：系统的冲激响应$h(t)$满足的方程：

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t)+7\frac{d}{dt}h(t)+10h(t)=\delta''(t)+6\delta'(t)+4\delta(t)$$

其齐次解为：

$$h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}\quad (t\geq 0_+)$$

利用冲激函数匹配法，我们有：

$$\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}h(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+d\Delta u(t)\\ \frac{d}{dt}h(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t) & (0_-<t<0_+)\\ h(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)\end{cases}$$

代入方程，有：

$$\begin{aligned}&[a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+d\Delta u(t)]+7[a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)]+\\&+10[a\delta(t)+b\Delta u(t)]=\delta''(t)+6\delta'(t)+4\delta(t)\end{aligned}$$

比较两边系数，有：

$$a=1,\quad b=-1,\quad c=1$$

$$h(0_+)=b+h(0_-)=-1;\quad \frac{d}{dt}h(0_+)=c+\frac{d}{dt}h(0_-)=1$$

代入 $h(t)$，我们有：

$$\begin{cases}A_1+A_2=-1\\ -2A_1-5A_2=1\end{cases}\Rightarrow\quad A_1=-\frac{4}{3},\quad A_2=\frac{1}{3}$$

由于 $a=1$，由此可得系统的冲激响应为：

$$h(t)=\delta(t)+\left(-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-5t}\right)u(t)$$

### 3．功率谱密度法

设输入为复平稳随机信号 $\xi(t)$，相关函数为 $R_{\xi\xi}(\tau)$，功率谱密度为 $S_{\xi\xi}(f)$，则由上面的内容，我们有：

$$S_{\xi\xi}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\xi\xi}(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

因为

$$R_{\eta\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\,R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv$$

于是有：

$$\begin{aligned}S_{\eta\eta}(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\eta\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau\end{aligned}$$

作变换：$\tau-u+v=s \quad \Rightarrow \quad \tau=s+u-v$，我们有：

$$\begin{aligned}S_{\eta\eta}(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}h(u)R_{\xi\xi}(s)e^{-j2\pi f(s+u-v)}dsdudv\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}e^{j2\pi fv}dv\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)e^{-j2\pi fu}du\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\xi\xi}(s)e^{-j2\pi fs}ds\\&=\overline{H(jf)}\cdot H(jf)\cdot S_{\xi\xi}(f)\\&=\left|H(jf)\right|^2S_{\xi\xi}(f)\end{aligned}$$

即：

$$S_{\eta\eta}(f)=\left|H(jf)\right|^2S_{\xi\xi}(f)$$

其中：

$$H(jf)\,\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

称为系统的转移函数。

因此我们有：

$$\begin{aligned}R_{\eta\eta}(\tau)&=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\eta\eta}(f)e^{j2\pi f\tau}df\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(jf)\right|^2S_{\xi\xi}(f)e^{j2\pi f\tau}df\end{aligned}$$

**4．联合平稳信号的情形**

上面我们已经给出了两个联合平稳随机信号的互相关函数和互功率谱密度之间的关系，即：

$$S_{\eta\xi}(f) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{\eta\xi}(\tau) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

现在研究具有因果关系的线性时不变系统，输入随机信号为平稳信号$\xi(t)$，输出为$\eta(t)$，考察进入稳态后的系统输出，此时我们有：

$$\begin{aligned} R_{\eta\xi}(t_1,t_2) &= E\{\eta(t_1)\overline{\xi(t_2)}\} = E\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)\xi(u)\overline{\xi(t_2)}du\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u,t_2)du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u-t_2)du \qquad \text{(E)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(t_1-u-t_2)du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du \end{aligned}$$

此式表明，输入相关函数与系统的冲激响应的卷积为输出与输入的互相关函数。

另外，由上式，我们有：

$$\begin{aligned} R_{\eta\eta}(t_1,t_2) &= E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\} = E\{\eta(t_1)\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_2-v)\xi(v)dv}\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t_2-v)}R_{\eta\xi}(t_1,v)dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t_2-v)}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u-v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(v)}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(t_1-u-t_2+v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(v)}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv \\ &= R_{\eta\eta}(\tau) \quad (\tau = t_1-t_2) \end{aligned}$$

我们令：$v' = -v$，由上式可以得到：

$$\begin{aligned} R_{\eta\eta}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-v')}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u-v')dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-v')}R_{\eta\xi}(\tau-v')dv' \end{aligned} \qquad \text{(F)}$$

即输出信号$\eta(t)$的相关函数是$R_{\eta\xi}(\tau)$与$\overline{h(-t)}$的卷积。

由式子（E）和（F），我们有：

$$\begin{aligned} S_{\eta\xi}(f) &\hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du \cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(v)\cdot e^{-j2\pi f(u+v)}dudv = H(jf)\cdot S_{\xi\xi}(f) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{\eta\eta}(f) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\eta}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-v)} R_{\eta\xi}(\tau - v) dv \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-v)} R_{\xi\xi}(s) \cdot e^{-j2\pi f(v+s)} ds dv \quad (\tau - v = s) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\xi}(s) e^{-j2\pi f s} ds \cdot \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(-v) e^{j2\pi f v} dv} \\
&= S_{\eta\xi}(f) \cdot \overline{H(jf)} \\
&= H(jf) \cdot \overline{H(jf)} \cdot S_{\xi\xi}(f) \\
&= \left| H(jf) \right|^2 \cdot S_{\xi\xi}(f)
\end{aligned}
$$

若$\xi(t)$和$\eta(t)$是联合平稳的随机信号，令：$X(t) = \xi(t) + \eta(t)$，则有：

$$
\begin{aligned}
R_{XX}(\tau) &= E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\} \\
&= E\{[\xi(t+\tau) + \eta(t+\tau)]\overline{[\xi(t) + \eta(t)]}\} \\
&= R_{\xi\xi}(\tau) + R_{\eta\eta}(\tau) + R_{\xi\eta}(\tau) + R_{\eta\xi}(\tau)
\end{aligned}
$$

即有：

$$
S_{XX}(f) = S_{\xi\xi}(f) + S_{\eta\eta}(f) + S_{\xi\eta}(f) + S_{\eta\xi}(f)
$$

由：$S_{\xi\eta}(f) = \overline{S_{\eta\xi}(f)}$，可以保证上式是实的。

若$\xi(t)$和$\eta(t)$的均值为零，且$\xi(t)$和$\eta(t)$正交，则有：

$$
R_{\xi\eta}(\tau) = 0,\ R_{\eta\xi}(\tau) = 0, \Rightarrow S_{\xi\eta}(f) = S_{\eta\xi}(f) = 0
$$

因此有：

$$
S_{XX}(f) = S_{\xi\xi}(f) + S_{\eta\eta}(f)
$$

$$
R_{XX}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau) + R_{\eta\eta}(\tau)
$$

## （四）平稳随机信号的谱分解定理及抽样定理

## 1． 谱分解定理

### （1） 随机振幅的简谐振动叠加

给定一随机过程：

$$\xi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_n e^{j\omega_n t}$$

其中$\{\eta_n;n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为一列复随机变量，且$E\{\eta_n\}=0$，$E\{\eta_n\overline{\eta_m}\}=\sigma_n^2\delta_{nm}$，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2<\infty$，$\{\omega_n;n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为任意一列实数，则有：

$$E\{\xi(t)\}=0$$

$$E\{\xi(t)\overline{\xi(s)}\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2 e^{j\omega_n(t-s)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2 e^{j\omega_n\tau},\quad \tau=t-s$$

因此，随机过程$\xi(t)$是平稳随机过程，且具有离散的功率谱，谱线位于$\omega_n$处。此过程可以看作具有随机振幅的简谐振动叠加。

考察另一随机过程：

$$\xi(t)=\sum_{n=1}^{N}\{\xi_n\cos\omega_n t+\eta_n\sin\omega_n t\},\quad -\infty<t<\infty$$

其中$\{\xi_n;1\le n\le N\}$和$\{\eta_n;1\le n\le N\}$是互不相关的实的随机变量序列，$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N$为任意实数，且

$$E\{\xi_n\}=0,\ E\{\eta_n\}=0$$

$$E\{\xi_n\eta_m\}=0,\quad 1\le n,m\le N$$

$$E\{\xi_n\xi_m\}=E\{\eta_n\eta_m\}=\sigma_n^2\delta_{nm}$$

则有：

$$E\{\xi(t)\}=0$$

$$E\{\xi(t)\xi(s)\}=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2\cos\omega_n(t-s)=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2\cos\omega_n\tau,\quad \tau=t-s$$

因此，随机过程$\xi(t)$是平稳随机过程，且具有离散的功率谱，谱线位于$\omega_n$处，在$\omega_n$处的功率为$\sigma_n^2$。此过程可以看作具有随机振幅的简谐振动叠加。

对于确定性信号，我们有：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}df,\quad \omega=2\pi f$$

问题：对于任意的平稳过程是否可以分解为具有随机振幅的简谐振动的叠加？

（2）　　谱分解定理

定理：（谱分解定理）设$\{\xi(t);-\infty<t<+\infty\}$是一均值为零均方连续的平稳过程，则$\xi(t)$可以表示为

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dZ(f),\quad \omega=2\pi f$$

其中：

$$Z(f)=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\cdot\xi(t)dt$$

且$Z(f)$具有以下性质：

（a）$E\{Z(f)\}=0$

（b）若区间$(f_1,f_1+\Delta f_1)$与$(f_2,f_2+\Delta f_2)$不相重叠，则有

$$E\{[Z(f_1+\Delta f_1)-Z(f_1)]\overline{[Z(f_2+\Delta f_2)-Z(f_2)]}\}=0$$

（c）$E\{\left|Z(f_2)-Z(f_1)\right|^2\}=F(f_2)-F(f_1)$

其中$F(f)$为随机过程$\xi(t)$的功率谱函数，即

$$F(f)=\int_{-\infty}^{f}S_\xi(\tau)d\tau$$

我们称$Z(f)$为随机过程$\xi(t)$的随机谱函数。它是由随机过程$\xi(t)$确定，参数为频率$f$的正交增量随机过程。

引理 **1**：设随机过程$\{Z(f); -\infty < f < \infty\}$为正交增量过程，则存在一非降函数$F(f)$，满足：

$$E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\} = F(f_2)-F(f_1),\quad (f_2 \ge f_1)$$

证明：任意固定一点$f_0$，令：

$$F(f)=\begin{cases} E\{|Z(f)-Z(f_0)|^2\}; & f \ge f_0 \\ -E\{|Z(f)-Z(f_0)|^2\}; & f < f_0 \end{cases}$$

则$F(f)$非降且满足上式。

引理 **2**：设随机过程$\{Z(f); -\infty < f < \infty\}$为正交增量过程，且由引理 **1** 中确定的$F(f)$有界，则积分$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dZ(f)$在均方意义下存在。

引理 **3**：设$\xi(t)$为均方连续的平稳过程，且其谱函数$F(f)$连续，则以下积分在均方意义下存在。

$$Z(f) = \underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\cdot\xi(t)dt,\quad \omega = 2\pi f$$

谱分解定理的证明：

（**A**）　谱函数$F(f)$连续的情形：

此时，由引理 **3**，我们定义：

$$Z(f) = \underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\cdot\xi(t)dt,\quad \omega = 2\pi f$$

现验证这样定义的$Z(f)$满足定理中关于它的三条性质。

（**a**）　由$E\{\xi(t)\}=0$，可知$E\{Z(f)\}=0$。

（**b**）　设在$f$轴上任意取两点$s_1, s_2$，且$s_1 < s_2$，则

$$E\left\{\xi(t)\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\right\}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}E\left\{\xi(t)\int_{-T}^{T}\frac{e^{j2\pi s_2 u}-e^{j2\pi s_1 u}}{j2\pi u}\cdot\overline{\xi(u)}du\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{j2\pi s_2 u}-e^{j2\pi s_1 u}}{j2\pi u}\cdot e^{j2\pi f(t-u)}dudF(f)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi ft}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^T\frac{\sin 2\pi(s_2-f)u}{u}du-\int_0^T\frac{\sin 2\pi(s_1-f)u}{u}du\right]dF(f)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi ft}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty\frac{\sin 2\pi(s_2-f)u}{u}du-\int_0^\infty\frac{\sin 2\pi(s_1-f)u}{u}du\right]dF(f)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi ft}\cdot[\operatorname{sgn}(s_2-f)-\operatorname{sgn}(s_1-f)]dF(f)=\int_{s_1}^{s_2}e^{j2\pi ft}dF(f)$$

以上式子计算利用了 **Dirichlet** 积分，即：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \lambda>0\\ 0, & \lambda=0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \lambda<0\end{cases}$$

因此有：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\lambda)$$

再设在 $f$ 轴上另外取两点 $s_3,s_4$，且 $s_3<s_4$，则

$$E\{[Z(s_4)-Z(s_3)]\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j2\pi s_3 t}-e^{-j2\pi s_4 t}}{j2\pi t}E\{\xi(t)\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{s_1}^{s_2}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j2\pi s_3 t}-e^{-j2\pi s_4 t}}{j2\pi t}\cdot e^{j2\pi ft}dtdF(f)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{s_1}^{s_2}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin 2\pi(s_4-f)t}{t}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin 2\pi(s_3-f)t}{t}dt\right]dF(f)$$

$$=\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(s_4-f)-\operatorname{sgn}(s_3-f)]dF(f)$$

由此可知，当 $s_1<s_2\le s_3<s_4$ 或 $s_3<s_4\le s_1<s_2$ 时，有：

$$E\{[Z(s_4)-Z(s_3)]\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}=0$$

（c）　当$s_3 = s_1, s_2 = s_4$时，有：

$$E\{|Z(s_2) - Z(s_1)|^2\} = F(s_2) - F(s_1)$$

最后证明：

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dZ(f), \quad \omega = 2\pi f$$

由均方积分的定义可知，只要证明：

$$\lim_{A\to\infty} E\left\{ \left| \xi(t) - \int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f) \right|^2 \right\} = 0$$

因为：

$$\begin{aligned} &E\left\{ \left| \xi(t) - \int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f) \right|^2 \right\} = \\ &= E\left\{ \xi(t)\overline{\xi(t)} \right\} + E\left\{ \int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f) \overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)} \right\} \\ &\quad - E\left\{ \xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)} \right\} - E\left\{ \overline{\xi(t)} \int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f) \right\} \end{aligned}$$

分别计算以上式子的四项：

$$E\left\{ \xi(t)\overline{\xi(t)} \right\} = R_\xi(0)$$

$$E\left\{ \xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-j\omega_k' t} E\{\xi(t)\overline{[Z(f_{k+1}) - Z(f_k)]}\}$$

上面的式子利用了均方积分的定义，其中

$$\omega_k < \omega_k' < \omega_{k+1}，\ -A < f_1 < f_2 < \cdots < f_n = A，\ \omega_k = 2\pi f_k$$

而取极限时要求$n \to \infty$，$\lambda = \max\{|f_{k+1} - f_k|\} \to 0$。

利用上面的推导结果，我们有：

$$\begin{aligned} E\left\{ \xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)} \right\} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-j\omega_k' t} E\{\xi(t)\overline{[Z(f_{k+1}) - Z(f_k)]}\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-j\omega_k' t} \int_{f_k}^{f_{k+1}} e^{j\omega t} dF(f) \end{aligned}$$

故：

$$\lim_{A\to\infty} E\left\{ \xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(f) = R_\xi(0)$$

同理有：

$$\lim_{A\to\infty}E\left\{\overline{\xi(t)}\int_{-A}^{A}e^{j\omega t}dZ(f)\right\}=R_{\xi}(0)$$

另外：

$$\lim_{A\to\infty}E\left\{\int_{-A}^{A}e^{j\omega t}dZ(f)\overline{\int_{-A}^{A}e^{j\omega t}dZ(f)}\right\}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\lim_{n\to\infty}E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n-1}e^{j\omega_k' t}[Z(f_{k+1})-Z(f_k)]\right]\cdot\overline{\left[\sum_{i=1}^{n-1}e^{j\omega_i'' t}[Z(f_{i+1})-Z(f_i)]\right]}\right\}$$

$$=\lim_{A\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left[F(f_{k+1})-F(f_k)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dF(f)=R_{\xi}(0)$$

因此有：

$$E\left\{\left|\xi(t)-\int_{-A}^{A}e^{j\omega t}dZ(f)\right|^2\right\}=$$

$$=E\left\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\right\}+E\left\{\int_{-A}^{A}e^{j\omega t}dZ(f)\overline{\int_{-A}^{A}e^{j\omega t}dZ(f)}\right\}$$

$$-E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A}e^{j\omega t}dZ(f)}\right\}-E\left\{\overline{\xi(t)}\int_{-A}^{A}e^{j\omega t}dZ(f)\right\}$$

$$=R_{\xi}(0)+R_{\xi}(0)-R_{\xi}(0)-R_{\xi}(0)=0$$

至此，我们证明了当$F(f)$为连续时的谱分解定理。

（B）　谱函数$F(f)$有不连续点的情形

此时，在$F(f)$的连续点处，仍然以

$$Z(f)=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\cdot\xi(t)dt,\quad \omega=2\pi f$$

定义$Z(f)$；而在$F(f)$的间断点处，定义：

$$Z(f)=\frac{1}{2}\left[Z(f-0)+Z(f+0)\right]$$

此时谱分解定理中的三条性质仍然满足。

注 1：$Z(f)$是一随机过程，称为谱过程。以后我们将证明，当$\xi(t)$是一平

稳的正态过程时，谱过程$Z(f)$也是一正态过程。

注 2：谱分解定理表明：一个零均值的均方连续的平稳随机过程，可以看作许多元谐波震荡的叠加，元谐波为$e^{j\omega t}dZ(f)$，这些震荡覆盖了整个频率轴上，它的复振幅为随机的$dZ(f)$，不同频率的复振幅是不相关的，复振幅的均值为零，复振幅的方差为$dF(f)$，即该频率的功率。

注 3：当$\xi(t)$为一实的零均值均方连续的平稳随机过程时，$Z(f)$仍然是一复的随机过程，设$Z(f)=Z_1(f)+jZ_2(f)$，则有：

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dZ(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\cdot[dZ_1(f)+jdZ_2(f)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t dZ_1(f)-\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega t dZ_2(f)+$$

$$+j\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t dZ_2(f)+\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega t dZ_1(f)\right]$$

由于$\xi(t)$为一实过程，因此上式的虚部为零，因此有：

$$Z_1(f)=Z_1(-f)$$

$$Z_2(f)=-Z_2(-f)$$

故有：

$$Z(-f)=\overline{Z(f)}$$

现在设在$+f$和$-f$处分别有两个微元频率区$df$和$-df$，由于两个区域不相交叠，故有：

$$E\{dZ(f)\overline{dZ(-f)}\}=0$$

而

$$E\{dZ(f)\overline{dZ(-f)}\}=E\{[dZ(f)]^2\}=$$

$$=E\{[dZ_1(f)]^2\}+2jE\{dZ_1(f)dZ_2(f)\}-E\{[dZ_2(f)]^2\}=0$$

因此有：

$$E\{[dZ_1(f)]^2\}=E\{[dZ_2(f)]^2\}$$

$$E\{dZ_1(f)dZ_2(f)\}=0$$

即$Z_1(f)$和$Z_2(f)$是不相关的。

另外，

$$dF(f)=E\{|dZ(f)|^2\}=E\{[dZ_1(f)]^2\}+E\{[dZ_2(f)]^2\}$$

故：

$$E\{[dZ_1(f)]^2\}=E\{[dZ_2(f)]^2\}=\frac{1}{2}dF(f)$$

## 2．　抽样定理

如何从抽样信号中恢复原连续信号，以及在什么条件下才可以无失真地完成这种恢复？著名的“抽样定理”对此作出了明确而精辟的回答。抽样定理在通信系统、信息传输理论、控制理论等方面占有十分重要的地位，许多近代通信方式（如数字通信系统）都以此定理作为理论基础。

对于确定性信号，时域抽样定理说明：一个频率受限的信号$f(t)$，如果频谱只占据$-\omega_m \sim \omega_m$的范围，则信号$f(t)$可以用等间隔的抽样值唯一地表示，而抽样间隔时间必须不大于$1/2f_m$（奈奎斯特（**Nyquist**）间隔），其中$\omega_m=2\pi f_m$，或者说，最低抽样频率为$2f_m$（奈奎斯特（**Nyquist**）频率）。

下面我们将确定性信号的抽样定理推广到随机信号的情形。

设$\{\xi(t);-\infty<t<+\infty\}$是一均值为零均方连续的平稳过程，它的功率谱密度限于$(-f_c,f_c)$之间，即当$|f|>f_c$时，$S_\xi(f)=0$。由谱分解定理，$\xi(t)$可以表示为：

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dZ(f)=\int_{-f_c}^{f_c}e^{j\omega t}dZ(f),\quad \omega=2\pi f,\ -\infty<t<+\infty \qquad (*)$$

现在令一频率函数为：

$$g(f)=\begin{cases}e^{j\omega t}, & |f|<f_c \\ 0, & |f|\ge f_c\end{cases}\quad \omega=2\pi f$$

设$2f_c=\dfrac{1}{t_0}$ $\Rightarrow$ $t_0=\dfrac{1}{2f_c}$（常数）。

将以上定义的$g(f)$展成 **Fourier** 级数，有：

$$g(f)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{jnt_0\omega}, \quad |f|<f_c$$

其中：

$$c_n=\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}g(f)e^{-jnt_0\omega}df=\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}e^{j\omega t}e^{-jnt_0\omega}df=\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}$$

即有：

$$g(f)=e^{j\omega t}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}\cdot e^{jnt_0\omega}, \ |f|<f_c, \ \omega=2\pi f, \ -\infty<t<\infty$$

将上式代入（*），得：

$$\begin{aligned}\xi(t)&=\int_{-f_c}^{f_c}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}\cdot e^{jnt_0\omega}dZ(f)\\&=\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}\cdot\int_{-f_c}^{f_c}e^{jnt_0\omega}dZ(f)\right\}\end{aligned}$$

由（*）可知：

$$\xi(nt_0)=\int_{-f_c}^{f_c}e^{jnt_0\omega}dZ(f)$$

因此有：

$$\xi(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\xi(nt_0)\cdot\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}, \quad -\infty<t<+\infty$$

此即为随机信号的抽样公式，即抽样定理。

**习题：P445：1、2（3、4）、3、4、5、7、8、11、14。**

# 第六章　高斯（Gauss）过程

## （一）　多元正态（Gauss）分布

### 1．$n$ 元正态分布的定义

定义：设 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 是 $n$ 元随机向量，其均值为 $\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$，其中 $\mu_i=E\{\xi_i\}, i=1,2,\cdots,n$，令：

$$b_{ik}=\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_k)=E\{(\xi_i-\mu_i)(\xi_k-\mu_k)\}, i,k=1,2,\cdots,n$$

则可得 $\vec{\xi}$ 的协方差矩阵为：$B=(b_{ik})_{n\times n}$，注意矩阵 $B$ 为一非负定对称矩阵，我们有如下的定义：

（1）　如果 $B$ 是一正定矩阵，则 $n$ 元随机向量 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 服从正态分布时的概率分布密度为：

$$f_{\vec{\xi}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{\vec{\xi}}(\vec{x}^T)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T B^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\}$$

其特征函数为：

$$\Phi_{\vec{\xi}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\Phi_{\vec{\xi}}(\vec{t}^T)=\exp\{j\vec{t}^T\cdot\vec{\mu}-\frac{1}{2}\vec{t}^T B\vec{t}\} \qquad \textbf{(A)}$$

$n$ 元随机向量服从正态分布记为：$\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$。

（2）　如果 $B$ 不是一正定矩阵，则由（A）可以定义一特征函数，由此特征函数对应的分布函数我们定义为 $n$ 元正态分布，仍记为 $\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$。

### 2．$n$ 元正态分布的边缘分布

定理：设 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 为服从 $n$ 元正态分布的随机向量，即 $\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$，则 $\vec{\xi}$ 的任意一个子向量 $(\xi_{k_1},\xi_{k_1},\cdots,\xi_{k_m}), m\le n$ 仍服从正态分布。

**3．$n$元正态分布的独立性**

定理：$n$元正态分布的随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立的充分必要条件是它们两两不相关。

定理：设$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为正态分布的随机向量，且$\vec{\xi}^T=(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)^T$

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中：$B_{11},B_{22}$分别是$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$的协方差矩阵，$B_{12}$是由$\vec{\xi}_1$及$\vec{\xi}_2$的相应分量的协方差构成的矩阵，$B_{12}=B_{21}^T$，则$\vec{\xi}_1$与$\vec{\xi}_2$相互独立的充分必要条件是$B_{12}=0$。

**4．正态随机变量线性变换后的性质**

（1）设$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，$\vec{\mu}^T=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$\zeta=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k=\vec{a}^T\cdot\vec{\xi}$，$\vec{a}^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则有$E\{\zeta\}=\vec{a}^T\cdot\vec{\mu}$，$D\{\zeta\}=\vec{a}^TB\vec{a}$。

（2）令$C=(c_{jk})_{m\times n}$，$\vec{\eta}=C\vec{\xi}$，则有：

$$E\{\vec{\eta}\}=C\vec{\mu},\ D\{\vec{\eta}\}=CBC^T$$

（3）$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$的充分必要条件是：

$$\forall\,\zeta=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k=\vec{a}^T\vec{\xi}\sim N(\sum_{k=1}^{n}a_k\mu_k,\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_ka_ib_{ki})=N(\vec{a}^T\vec{\mu},\vec{a}^TB\vec{a})$$

（4）若$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，$C=(c_{jk})_{m\times n}$为任意的矩阵，则有：$\vec{\eta}=C\vec{\xi}$为服从$m$元正态分布，即$\vec{\eta}=C\vec{\xi}\sim N(C\vec{\mu},CBC^T)$。

（5）若$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，则存在一正交矩阵$U$，使得$\vec{\eta}=U^T\vec{\xi}$是一独立正态分布的随机向量，它的均值为$U^T\vec{\mu}$，方差为矩阵$B$的特征值。

（6）$n$维正态随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的每一个分量都是正态变量；反

之，若$X_1, X_2, \cdots, X_n$都是正态随机变量，且相互独立，则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$n$维正态随机变量。

**5．例子**

- 设$(X_1, X_2, X_3, X_4)$为服从正态分布的随机向量，且$E\{X_i\}=0, i=1,2,3,4$，试证明：

  $$\begin{aligned} &E\{X_1X_2X_3X_4\} \\ &\quad = E\{X_1X_2\}E\{X_3X_4\}+E\{X_1X_3\}E\{X_2X_4\}+E\{X_1X_4\}E\{X_2X_3\} \end{aligned}$$

  证明：见教材 **P466**。

  注意：此结论非常重要，经常会被应用。

- 设$X, Y$是服从均值为零的正态分布二维随机变量，其联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则

$$E\{XY\}=r\sigma_1\sigma_2, \quad E\{X^2Y^2\}=\sigma_1^2\sigma_2^2+2r^2\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$E\{|XY|\}=\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}[\varphi\sin\varphi+\cos\varphi]$$

其中：$\sin\varphi=r, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$。

证明：由联合分布可以求得边缘分布和条件分布为：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[y-\frac{r\sigma_2 x}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

由此可得：

$$E\{Y|X\}=\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}X, \quad E\{Y^2|X\}=(1-r^2)\sigma_2^2+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}X^2$$

因此，我们有：

$$E\{XY\}=E\{E\{XY|X\}\}=E\{XE\{Y|X\}\}$$
$$=\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}E\{X^2\}=r\sigma_1\sigma_2$$

$$E\{X^2Y^2\}=E\{E\{X^2Y^2|X\}\}=E\{X^2E\{Y^2|X\}\}$$
$$=(1-r^2)\sigma_2^2E\{X^2\}+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}E\{X^4\}=(1-r^2)\sigma_2^2\sigma_1^2+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot 3\sigma_1^4$$
$$=\sigma_2^2\sigma_1^2+2r^2\sigma_2^2\sigma_1^2=E\{X^2\}E\{Y^2\}+2[E\{XY\}]^2$$

另外

$$E\{|XY|\}=\iint|xy|f(x,y)dxdy$$
$$=\iint_{xy>0}xyf(x,y)dxdy-\iint_{xy<0}xyf(x,y)dxdy$$
$$=E\{XY\}-2\iint_{xy<0}xyf(x,y)dxdy$$
$$=r\sigma_1\sigma_2-2\left[\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}xyf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty}xyf(x,y)dxdy\right]$$

令：

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{\sigma_1}\\ v=\dfrac{y}{\sigma_2}\end{cases}$$

则有：

$$E\{|XY|\}=r\sigma_1\sigma_2-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}uv\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[u^2-2ruv+v^2\right]\right\}dudv$$

$$=r\sigma_1\sigma_2-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dudv$$

令：

$$\begin{cases}R\cos\theta=\dfrac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\\ R\sin\theta=v\end{cases}$$

则有：

$$\begin{cases} u = \sqrt{1-r^2} R\cos\theta + rR\sin\theta \\ v = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(R,\theta)} = R\sqrt{1-r^2} \quad \Rightarrow \quad dudv = R\sqrt{1-r^2}\,dRd\theta$$

因此有：

$$E\{|XY|\} = r\sigma_1\sigma_2 -$$

$$-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\arccos r}^{0} R\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}R\cos\theta + rR\sin\theta\right]\exp\{-\frac{R^2}{2}\}RdRd\theta$$

$$= r\sigma_1\sigma_2 - \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_{-\arccos r}^{0} \sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}\cos\theta + r\sin\theta\right]d\theta$$

$$= r\sigma_1\sigma_2 - \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}r\theta - \frac{1}{4}r\sin 2\theta\right]_{-\arccos r}^{0}$$

$$= \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\right]$$

其中：$\sin\varphi = r,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$。

## （二）　高斯（正态）过程

定义：如果随机过程$\{\xi(t);\, t\in T\}$的有限维分布均为正态分布，则称此随机过程为高斯过程或正态过程。正态过程是二阶矩过程。

设$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，则由正态过程的定义，有：

$$f_\xi(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_t - \vec{\mu}_t)^T B^{-1}(\vec{x}_t - \vec{\mu}_t)\}$$

其中：

$$\vec{x}_t^{\,T} = (x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n})$$

$$\vec{\mu}_t^T=(\mu_{t_1},\mu_{t_2},\cdots,\mu_{t_n}),\quad \mu_{t_k}=E\{\xi(t_k)\}$$

$$b_{ki}=E\{(\xi(t_k)-\mu_{t_k})(\xi(t_i)-\mu_{t_i})\}=R_\xi(t_k,t_i)-\mu_{t_k}\mu_{t_i},\quad B=(b_{ki})_{n\times n}$$

如果$\{\xi(t);t\in T\}$为实的宽平稳过程，则$\mu_{t_k}=E\{\xi(t_k)\}=\mu$为常数，$R_\xi(t_k,t_i)=R_\xi(t_k-t_i),\ b_{ki}=R_\xi(t_k-t_i)-\mu^2=b(t_k-t_i)$，因此可得有限维分布的特征函数为：

$$\Phi_\xi(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=$$

$$=\exp\left\{j\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)\mu-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n b(t_k-t_i)u_k u_i\right\}$$

由此，实平稳正态过程也是实严平稳过程。关于正态过程我们有以下的结论。

定理：设$\{\vec{\xi}^{(n)};n=1,2,\cdots\}$为$k$维实正态随机向量序列，其中$\vec{\xi}^{(n)}=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)})^T$，且$\vec{\xi}^{(n)}$均方收敛于$\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)^T$，即

$$\lim_{n\to\infty}E\{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|^2\}=0,\quad 1\le i\le k$$

则$\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)^T$也是正态分布的随机向量。

定理：若正态过程$\{\xi(t);t\in T\}$在$T$上是均方可导的，则$\{\xi'(t);t\in T\}$也是正态过程。

定理：若正态过程$\{\xi(t);t\in T\}$在$T$上是均方可积的，则

$$\eta(t)=\int_a^t\xi(u)du,\ a,t\in T\quad 及\quad \eta(t)=\int_a^b\xi(u)h(t,u)du,\ a,b\in T$$

也是正态过程。

## （三）　正态马氏过程

定义：若正态过程$\{X(t);t\in T\}$又是马尔可夫过程，则称$\{X(t);t\in T\}$为正态马尔可夫（马氏）过程。

先考虑$n$维均值为零的正态随机向量的条件分布，设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$n$维正态分布，其分布密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|A|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}\vec{x}A^{-1}\vec{x}\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|A|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\}$$

其中：$A^{-1}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定对称矩阵。

考虑 $X_n$ 在条件 $X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_{n-1}=x_{n-1}$ 下的条件分布密度：

$$f(x_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_n}$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right\}dx_n}$$

利用式子：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}x_ix_j+a_{nn}x_n^2+2x_n\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_i$$

我们有：

$$f(x_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right\}dx_n}=$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}x_n^2-x_n\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_i\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}x_n^2-x_n\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_i\right\}dx_n}=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}\left[x_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}/a_{nn})x_i\right]^2\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}\left[x_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}/a_{nn})x_i\right]^2\right\}dx_n}$$

$$=c\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}\left[x_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}/a_{nn})x_i\right]^2\right\}$$

其中 $c$ 是归一化常数，与 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 无关。由此可知，$X_n$ 在给定条件 $X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_{n-1}=x_{n-1}$ 下的条件分布密度 $f(x_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 是一

正态分布的概率分布密度，其均值为$-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}/a_{nn})x_i$，于是有：

$$E\{X_n \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}\} = -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_{in}}{a_{nn}}x_i \qquad \text{(B)}$$

$$E\{X_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}\} = -\frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}x_{n-1} \qquad \text{(C)}$$

若$\{X(t); t \geq 0\}$为一均值为零的实正态过程，记：

$$R(s,t) = E\{X(s)X(t)\}$$

$$\rho(s,t) = \frac{R(s,t)}{\sqrt{R(s,s)R(t,t)}} = \frac{Cov(s,t)}{\sqrt{Cov(s,s)Cov(t,t)}}$$

则有以下的定理。

定理：设$\{X(t); t \geq 0\}$为一均值为零的实正态过程，则它是马氏过程的充要条件为：对于任意的$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \geq 2$，有：

$$E\{X_{t_n} \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \cdots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\} = E\{X_{t_n} \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

证明：考虑以上结论（**B**）和（**C**）即可。

定理：设$\{X(t); t \geq 0\}$为一均值为零的实正态过程，则它是马氏过程的充要条件为：对于任意的$0 \leq t_1 < t_2 < t_3$，有：

$$\rho(t_1, t_3) = \rho(t_1, t_2)\rho(t_2, t_3)$$

证明：充分性：设$\{X(t); t \geq 0\}$为马氏过程，任取$0 < s < t$，则由（**B**）有：

$$E\{X(t) \mid X(s) = x\} = -\left(\frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}\right)x \qquad \text{(D)}$$

考虑$(X(s), X(t))$的联合分布，其分布密度为：

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)|A|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}\vec{x}^T A^{-1}\vec{x}\}$$

其中：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R(s,s) & R(s,t) \\ R(t,s) & R(t,t) \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{R(s,s)R(t,t)-R(s,t)^2}\begin{pmatrix} R(t,t) & -R(t,s) \\ -R(s,t) & R(s,s) \end{pmatrix}$$

由（D）有：

$$E\{X(t)|\,X(s)=x\}=\left(\frac{R(s,t)}{R(s,s)}\right)x$$

即：

$$E\{X(t)|\,X(s)\}=\left(\frac{R(s,t)}{R(s,s)}\right)X(s)$$

由马尔可夫性，有：

$$R(t_1,t_3)=E\{X(t_1)X(t_3)\}=E\{E[X(t_1)X(t_3)|\,X(t_2)]\}$$

$$=E\{E[X(t_1)|\,X(t_2)]E[X(t_3)|\,X(t_2)]\}$$

由上式，我们有：

$$R(t_1,t_3)=E\left\{\frac{R(t_1,t_2)}{R(t_2,t_2)}X(t_2)\frac{R(t_2,t_3)}{R(t_2,t_2)}X(t_2)\right\}=\frac{R(t_1,t_2)R(t_2,t_3)}{R(t_2,t_2)}$$

由此得到了 $\rho(t_1,t_3)=\rho(t_1,t_2)\rho(t_2,t_3)$。

必要性：由 $\rho(t_1,t_3)=\rho(t_1,t_2)\rho(t_2,t_3)$，可得，对于任意的 $1\le k\le n-1$，有：

$$\rho(t_k,t_n)=\rho(t_k,t_{n-1})\rho(t_{n-1},t_n)$$

即有：

$$R(t_k,t_n)=\frac{R(t_k,t_{n-1})R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}$$

因而对于任意的 $1\le k\le n-1$，有：

$$E\left\{\left[X(t_n)-\frac{R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}X(t_{n-1})\right]X(t_k)\right\}=0$$

这就意味正态随机变量 $X(t_n)-\dfrac{R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}X(t_{n-1})$ 与 $X(t_1),\cdots,X(t_{n-1})$ 相互独立，故有：

$$E\left\{X(t_n)-\frac{R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}X(t_{n-1})\,\middle|\,X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\right\}=0$$

即有：

$$E\{X_{t_n}\,|\,X_{t_1}=x_1,X_{t_2}=x_2,\cdots,X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}=\frac{R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}x_{n-1}$$

$$=E\{X_{t_n}\,|\,X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}$$

必要性得证。

对于平稳随机正态序列及平稳正态随机过程的情形，我们有：

定理：设 $\{X(n);n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为正态分布、平稳的随机序列，且 $C(0)\neq 0$，则 $X(n)$ 是马氏链的充分必要条件是：

$$C(n)=a^nC(0),\quad n\geq 0,|a|\leq 1$$

其中：$C(n)$ 为 $X(n)$ 的协方差函数。

定理：设 $\{X(t);t\geq 0\}$ 为一均方连续、平稳的实正态过程，$C(\tau)$ 为其协方差函数，则该过程是马氏过程的充分必要条件为：

$$C(\tau)=C(0)e^{a\tau},\quad \tau\geq 0,a<0$$

## （四）　窄带平稳实高斯过程

### 1.　一维包络分布和一维相位分布

由前面关于窄带平稳信号的表示法，我们有：

$$\begin{cases}\xi(t)=x_c(t)\cos 2\pi f_0t+x_s(t)\sin 2\pi f_0t\\ \hat{\xi}(t)=x_c(t)\sin 2\pi f_0t-x_s(t)\cos 2\pi f_0t\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}x_c(t)=\xi(t)\cos 2\pi f_0t+\hat{\xi}(t)\sin 2\pi f_0t\\ x_s(t)=\xi(t)\sin 2\pi f_0t-\hat{\xi}(t)\cos 2\pi f_0t\end{cases}$$

其中：$E\{\xi(t)\}=0$，$\hat{\xi}(t)$ 为 $\xi(t)$ 的 Hilbert 变换。

若$\xi(t)$为一窄带平稳的实正态过程，则由以上两组表达式可知，$x_c(t), x_s(t)$均为正态过程，且是联合正态过程（为什么？）。

例：设有线性系统，它的冲激响应为$h(t)$，输入为实平稳正态过程$\xi(t)$。设其输出为$\eta(t)$，试证明$\xi(t)$、$\eta(t)$为联合正态随机过程。

证明：由线性系统输入、输出的关系：

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\xi(\tau)\,d\tau$$

可知$\eta(t)$为实正态随机过程。

令：

$$\varsigma = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\xi(t)\,dt$$

其中$g(\cdot)$是一任意实函数。则$\varsigma$为一正态分布随机变量。

定义实函数：

$$g(t) = g_1(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u)h(u-t)du$$

则有：

$$\begin{aligned}
\varsigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\xi(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\xi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u)\,h(u-t)du\xi(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\xi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u-t)\xi(t)dt\, g_2(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\xi(u)\,du + \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u)\eta(u)\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (g_1(u), g_2(u)) \cdot \begin{pmatrix} \xi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} du
\end{aligned}$$

由于$g(t)$、$g_1(t)$、$g_2(t)$为任意的实函数，而$\varsigma$为一正态分布随机变量，因此$\xi(t)$、$\eta(t)$为联合正态随机过程。

下面研究窄带平稳实高斯过程的一维包络分布和一维相位分布：

设$\xi(t)$的相关函数为$R_\xi(\tau)$，方差为$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0)$，则$x_c(t), x_s(t)$的均值为零，方差为：

$$\sigma_{x_c}^2 = R_{x_c}(0) = \sigma_{x_s}^2 = R_{x_s}(0) = R_\xi(0) = \sigma_\xi^2$$

由于$R_{x_c x_s}(0) = E\{x_c(t)x_s(t)\} = 0$，因此$x_c(t), x_s(t)$相互独立。它们的联合分布密度为：

$$f(x_c, x_s) = f(x_c)f(x_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

由$\xi(t)$的表达式，我们有：

$$\xi(t) = V(t)\cos[2\pi f_0 t + \theta(t)]$$

其中：

$$\begin{cases} V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \theta(t) = tg^{-1}\left(-\dfrac{x_s(t)}{x_c(t)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(t)\cos\theta(t) = x_c(t) \\ -V(t)\sin\theta(t) = x_s(t) \end{cases}$$

此变换的雅克比行列式为：

$$J = \frac{\partial(x_{c_t}, x_{s_t})}{\partial(V_t, \theta_t)} = \begin{vmatrix} \cos\theta_t & -\sin\theta_t \\ -V_t\sin\theta_t & -V_t\cos\theta_t \end{vmatrix} = -V_t \quad \Rightarrow \quad |J| = V_t$$

当$V_t > 0, 0 \le \theta_t \le 2\pi$时，有：

$$f(V_t, \theta_t) = \frac{V_t}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

故：

$$f(V_t) = \begin{cases} \dfrac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\dfrac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}\}, & V_t \ge 0 \\ 0, & V_t < 0 \end{cases}$$

即$V(t)$服从瑞利分布。

$$f(\theta_t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \le \theta_t \le 2\pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

且有：

$$f(V_t, \theta_t) = f(V_t)f(\theta_t)$$

因此，在同一时刻$t$，包络$V(t)$与相位$\theta(t)$是独立的随机变量，但它们不是独立的随机过程。

另外有：

$$E\{V(t)\}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_{\xi}^{2},\ E\{V^{2}(t)\}=2\sigma_{\xi}^{2},\ D\{V(t)\}=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_{\xi}^{2}$$

**2.**　研究包络$V(t)$与相位$\theta(t)$在任意两个不同时刻$t_1,t_2$的联合分布

此时可以推出：

$$f(V_{t_1},V_{t_2},\theta_{t_1},\theta_{t_2})\neq f(V_{t_1},V_{t_2})f(\theta_{t_1},\theta_{t_2})$$

由此可知包络过程$V(t)$与相位过程$\theta(t)$不独立。详细推导课后阅读。

## （五）　正弦波和窄带平稳实高斯过程之和

令：

$$\eta(t)=P\sin(\omega_0 t+\theta)+\xi(t)$$

其中：$P,\ \omega_0=2\pi f_0$为常数，$\xi(t)$为窄带平稳实高斯过程，$\omega_0$为窄带平稳实高斯过程的功率谱密度的中心角频率，$\theta\sim U(0,2\pi)$。$\theta$与$\xi(t)$相互独立，并且满足：

$$E\{\xi(t)\}=0,\ D\{\xi(t)\}=\sigma_{\xi}^{2}$$

若$\theta$是一固定的值，则由上式定义的随机过程$\eta(t)$仍然是一高斯过程，且

$$E\{\eta(t)\}=P\sin(\omega_0 t+\theta)$$

它是一关于时间参数$t$的函数，因此$\eta(t)$不是一平稳过程。

若$\theta\sim U(0,2\pi)$，则由上式定义的随机过程$\eta(t)$的均值函数为：

$$E\{\eta(t)\}=E\{P\sin(\omega_0 t+\theta)+\xi(t)\}=E\{P\sin(\omega_0 t+\theta\}+E\{\xi(t)\}=0$$

$$R_\eta(t_1,t_2)=\frac{P^2}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2)+R_\xi(t_1-t_2)$$

$$=\frac{P^2}{2}\cos\omega_0\tau+R_\xi(\tau)=R_\eta(\tau)\quad \tau=t_1-t_2$$

由此可知，此时$\eta(t)$是一平稳过程。但是此时$\eta(t)$不是一高斯过程。

随机相位正弦波的特征函数为：

$$\Phi_s(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{juP\sin(\omega_0 t+\theta)\}d\theta=J_0(Pu)$$

其中：$J_0$为零级贝塞尔函数。

注：贝塞尔函数的定义：

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)d\theta$$

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-jx\cos\theta}d\theta$$

$$I_0(x)=J_0(jx)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}d\theta$$

称$J_0(x)$为零级贝塞尔函数，$I_0(x)$为修正的零级贝塞尔函数。

随机相位正弦波的概率密度为：

$$f_s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{P^2-x^2}}, & |x|<P\\ 0, & |x|\ge P\end{cases}$$

另外，窄带平稳实高斯过程的一维分布密度为：

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

其特征函数为：

$$\Phi_\xi(u)=\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_\xi^2u^2\}$$

由此可得$\eta(t)$的一维概率密度为：

$$f_\eta(x) = f_s(x) * f_\xi(x)$$

其特征函数为：

$$\Phi_\eta(u) = \Phi_s(u) \cdot \Phi_\xi(u) = J_0(Pu)\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_\xi^2 u^2\}$$

对上式作 **Fourier** 逆变换，可得$\eta(t)$的一维概率密度为：

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[-x^2/(2\sigma_\xi^2)]^k}{k!}\cdot {}_1F_1\left(k+\frac{1}{2};1;-\frac{P^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

其中：

$${}_1F_1(a;b;z) = 1 + \frac{a}{b}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots$$

为合流型超几何级数。

注意，在$\eta(t)$的一维概率密度的表达式中，$P^2/(2\sigma_\xi^2)$代表随机正弦信号功率与窄带噪声$\xi(t)$的功率之比。$\eta(t)$的一维分布密度显然不是一正态分布，但是当信噪比很弱时，$\eta(t)$的一维分布密度应该很接近于正态分布。

下面研究$\eta(t)$的包络，也就是研究信号$\eta(t)$的检波器输出问题。

利用$\xi(t)$是窄带平稳实正态信号，我们有：

$$\begin{aligned}\eta(t) &= P\sin(\omega_0 t+\theta) + \xi(t)\\ &= P\sin(\omega_0 t+\theta) + x_c(t)\cos 2\pi f_0 t + x_s(t)\sin 2\pi f_0 t\\ &= (P\sin\theta + x_c(t))\cos 2\pi f_0 t + (P\cos\theta + x_s(t))\sin 2\pi f_0 t\\ &= z_c(t)\cos 2\pi f_0 t + z_s(t)\sin 2\pi f_0 t\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{cases} z_c(t) = P\sin\theta + x_c(t)\\ z_s(t) = P\cos\theta + x_s(t)\end{cases}$$

由于$x_c(t), x_s(t)$是独立的正态分布随机变量，均值为零，方差为$\sigma_\xi^2$，并且由条件$x_c(t), x_s(t)$和$\theta$是独立的，故当$0 \le \theta \le 2\pi$时，有：

$$f(x_c,x_s,\theta)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{x_c^2+x_s^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot\frac{1}{2\pi}$$

由变换：

$$\begin{cases} z_c=P\sin\theta+x_c \\ z_s=P\cos\theta+x_s \\ \theta=\theta \end{cases}$$

可得$(z_c(t),z_s(t),\theta)$的联合分布密度：

$$f(z_c,z_s,\theta)=\frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}[(z_c-P\sin\theta)^2+(z_s-P\cos\theta)^2]\}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{z_c^2+z_s^2+P^2-2P(z_c\sin\theta+z_s\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\}\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

另外，

$$\eta(t)=z_c(t)\cos 2\pi f_0t+z_s(t)\sin 2\pi f_0t$$
$$=V(t)\cos(2\pi f_0t+\varphi(t))$$

其中：

$$\begin{cases} V(t)\cos\varphi(t)=z_c(t)=P\sin\theta+x_c(t) \\ -V(t)\sin\varphi(t)=z_s(t)=P\cos\theta+x_s(t) \\ \theta=\theta \end{cases}$$

由此变换及$(z_c(t),z_s(t),\theta)$的联合分布密度，可得$(V(t),\varphi(t),\theta)$的联合分布密度：

当$V_t\ge 0,0\le\varphi_t\le 2\pi,0\le\theta\le 2\pi$时，有：

$$f(V_t,\varphi_t,\theta)=$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2-2P(V_t\cos\varphi_t\sin\theta-V_t\sin\varphi_t\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\}$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2-2PV_t\cos(\theta-\varphi_t)}{2\sigma_\xi^2}\}$$

当其它情况时，有：

$$f(V_t,\varphi_t,\theta)=0$$

由此可以求得关于包络$V(t)$的边缘分布为：

$$f(V_t)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(V_t,\varphi_t,\theta)d\varphi_t d\theta$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\theta-\varphi_t)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

$$=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\theta-\varphi_t-\pi/2)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

$$=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\pi/2+\varphi_t-\theta)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

令：

$$\pi/2+\varphi_t-\theta=\alpha$$

有：

$$f(V_t)=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\exp\{\frac{PV_t\cos\alpha}{\sigma_\xi^2}\}d\alpha d\theta$$

$$=\begin{cases}\dfrac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\dfrac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot I_0(\dfrac{PV_t}{\sigma_\xi^2}) & V_t\ge 0\\ 0, & V_t<0\end{cases}$$

其中：

$$I_0(x)=J_0(jx)$$ （零级修正贝塞尔函数）

注意，当$P=0$时，此结果和前面关于$\xi(t)$的包络一维分布是一致的。

令：

$$\begin{cases}v=\dfrac{V_t}{\sigma_\xi}\\ a=\dfrac{P}{\sigma_\xi}\end{cases}$$

则有：

$$f(v)=v\exp\{-\frac{v^2+a^2}{2}\}I_0(av)\quad v\ge 0$$

其中：$\frac{a^2}{2}=\frac{P^2}{2\sigma_\xi^2}$为输入（功率）信噪比；$v=\frac{V_t}{\sigma_\xi}$为包络与噪声均方根值之比。

注意以下的结果。当$PV_t>>\sigma_\xi^2$时，包络的一维分布密度可以近似地表示为：

$$f(V_t)=\frac{1}{\sigma_\xi}\left(\frac{V_t}{2\pi P}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{(V_t-P)^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

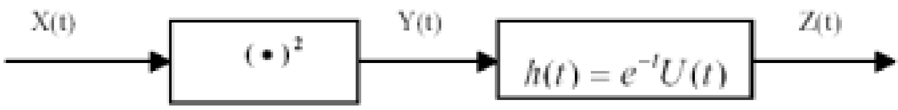
由此可知，当$V_t$接近于$P$，且$P>>\sigma_\xi$时，包络的一维分布密度近似于正态分布密度。

（六）例子

例 1． 设随机过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$是均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$的实平稳正态过程，令随机过程$Y(t)=X^2(t)$，试证明$Y(t)$是平稳过程且其自相关函数为$R_Y(\tau)=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)$。若下图所示系统的输入$X(t)$是一实平稳正态随机信号，其输出信号$Z(t)$的功率谱密度函数为：

$$S_Z(\omega)=\frac{\pi\delta(\omega)}{1+\omega^2}+\frac{2\beta}{(\beta^2+\omega^2)(1+\omega^2)}\qquad(\beta>0)$$

试求随机信号$X(t)$、$Y(t)$的自相关函数$R_X(\tau)$和$R_Y(\tau)$。




解：由于$X(t)$是均值为零的实正态平稳过程，因此有：

$$E\{Y(t)\}=E\{X^2(t)\}=R_X(0)=\text{常数}$$

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}=E\{X^2(t)X^2(t-\tau)\}\\&=E\{X^2(t)\}E\{X^2(t-\tau)\}+2E\{X(t)X(t-\tau)\}\\&=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)\end{aligned}$$

因此$Y(t)=X^2(t)$是平稳过程。

由题意可知：

$$H(\omega)=\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{1+j\omega} \quad\Rightarrow\quad |H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^2}$$

由：

$$S_Z(\omega)=|H(\omega)|^2 S_Y(\omega)$$

可得：

$$S_Y(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{2\beta}{(\beta^2+\omega^2)}$$

因此有：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}+e^{-\beta|\tau|}$$

根据式子：

$$R_Y(\tau)=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)$$

我们有：

$$\frac{3}{2}=R_Y(0)=3R_X^2(0) \quad\Rightarrow\quad R_X^2(0)=\frac{1}{2}$$

因此有：

$$R_X(\tau)=\sqrt{\frac{R_Y(\tau)-R_X^2(0)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\beta|\tau|}{2}}$$

例 2．设有随机过程$\xi(t)=Xt^2+2Yt-1, 0<t<\infty$，$X$与$Y$是相互独立的正态随机变量，期望均为 0，方差分别是$\sigma_X^2$和$\sigma_Y^2$。问过程$\{\xi(t)\}$是否正态过程？是否平稳过程？均需说明理由。

解：任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，则有：

$$\begin{pmatrix}\xi(t_1)\\ \xi(t_2)\\ \vdots\\ \xi(t_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Xt_1^2+2Yt_1-1\\ Xt_2^2+2Yt_2-1\\ \vdots\\ Xt_n^2+2Yt_n-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1^2 & 2t_1\\ t_2^2 & 2t_2\\ \vdots & \vdots\\ t_n^2 & 2t_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

由于$X$与$Y$独立，且都服从正态分布，因此可得$(X,Y)^{\tau}$服从正态分布，根据随机向量线性变换的性质，由上式可知随机向量$(\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n))^{\tau}$服从正态（高斯）分布，所以随机过程$\xi(t)=X\,t^2+Yt+1,\,0<t<\infty$是正态（高斯）过程。

由于

$$
\begin{aligned}
&m_{\xi}(t)=E\{Xt^2+2Yt-1\}=-1\\
&R_{\xi}(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=E\{[Xs^2+2Ys-1][Xt^2+2Yt-1]\}=\\
&=E\{X^2s^2t^2+2XYs^2t-Xs^2+2XYt^2s+4Y^2st-2Ys-Xt^2-2Yt+1\}\\
&=\sigma_X^2s^2t^2+4\sigma_Y^2st+1
\end{aligned}
$$

由此可知，此随机过程不是平稳的。

例 **3**．设有随机过程$\xi(t)=X\,t^2+Yt+1,\,0<t<\infty$，其中$X$与$Y$是相互独立的正态随机变量，期望均为 **0**，方差分别为$\sigma_X^2$和$\sigma_Y^2$。证明过程$\{\xi(t)\}$为均方可积的正态过程，并求过程$\{\ \eta(t)=\int_0^t\xi(s)ds,\ t>0\ \}$的相关函数。

解：正态过程的证明如上例。

由计算可得：

$$E\{\xi(t)\}=E\{Xt^2+Yt+1\}=t^2E\{X\}+tE\{Y\}+1=1$$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi}(t_1,t_2)&=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=E\{[t_1^2X+t_1Y+1][t_2^2X+t_2Y+1]\}\\
&=t_1^2t_2^2E\{X^2\}+(t_1^2t_2+t_1t_2^2)E\{XY\}+t_1t_2E\{Y^2\}+\\
&\qquad+(t_1^2+t_2^2)E\{X\}+(t_1+t_2)E\{Y\}+1\\
&=t_1^2t_2^2E\{X^2\}+t_1t_2E\{Y^2\}+1=t_1^2t_2^2\sigma_X^2+t_1t_2\sigma_Y^2+1
\end{aligned}
$$

由于$R_{\xi}(t_1,t_2)$连续，因此过程$\{\xi(t)\}$为均方可积。

过程$\{\ \eta(t)=\int_0^t\xi(s)ds,\ t>0\ \}$的相关函数为：

$$
\begin{aligned}
R_{\eta}(t_1,t_2)&=E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}=E\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\}\\
&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}E\{\xi(u)\xi(v)\}dudv=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}R_{\xi}(u,v)dudv\\
&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}(u^2v^2\sigma_X^2+uv\sigma_Y^2+1)dudv
\end{aligned}
$$

# （七）维纳过程（布朗运动）

## 1．维纳过程的定义

设质点每经过$\Delta t$时间，随机地以概率$p=1/2$向右移动$\Delta x>0$距离，以概率$q=1/2$向左移动$\Delta x>0$距离，且每次移动是相互独立的。记：

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次质点向右移动}\\ -1, & \text{第}i\text{次质点向左移动}\end{cases}$$

若$X(t)$表示在$t$时刻质点所处的位置，则有：

$$X(t)=\Delta x(X_1+X_2+\cdots+X_{[\frac{t}{\Delta t}]})$$

显然有：

$$E\{X_i\}=0,\ D\{X_i\}=E\{X_i^2\}=1$$

故有：

$$E\{X(t)\}=0,\ D\{X(t)\}=(\Delta x)^2\left[\frac{t}{\Delta t}\right]$$

假设$\Delta x=c\sqrt{\Delta t}$，其中$c>0$为常数，它由物理意义确定。

令$\Delta t\to 0$，即研究连续的游动，则有：

$$E\{X(t)\}=0$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}D\{X(t)\}=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta x)^2\left[\frac{t}{\Delta t}\right]=\lim_{\Delta t\to 0}c^2\Delta t\left[\frac{t}{\Delta t}\right]=c^2t$$

另一方面，任取两个时刻$0<t_1<t_2$，令：

$$n_1=\left[\frac{t_1}{\Delta t}\right],\quad n_2=\left[\frac{t_2}{\Delta t}\right]$$

则有：

$$X(t_1)=\Delta x(X_1+X_2+\cdots+X_{n_1})$$

$$X(t_2)=\Delta x(X_1+X_2+\cdots+X_{n_2})$$

$$X(t_2)-X(t_1)=\Delta x(X_{n_1+1}+\cdots+X_{n_2})$$

由于$(X_1+X_2+\cdots+X_{n_1})$与$(X_{n_1+1}+\cdots+X_{n_2})$是相互独立的，因此$X(t_1)$与$X(t_2)-X(t_1)$相互独立。即随机过程$X(t)$是一独立增量过程。由此$X(t)$可以看作由许多微小的相互独立的随机变量$X(t_i)-X(t_{i-1})$组成之和。由中心极限定理，当$\Delta t\to 0$时，我们有：

$$\lim_{\Delta t\to 0}P\left\{\frac{\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}\Delta x X_i-0}{\sqrt{c^2 t}}\le x\right\}=\Phi(x)$$

即有：

$$\lim_{\Delta t\to 0}P\left\{\frac{X(t)}{\sqrt{c^2 t}}\le x\right\}=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\{-\frac{u^2}{2}\}du$$

故当$\Delta t\to 0$时，$X(t)$趋向于正态分布，即

$$\Delta t\to 0\text{时，}\ X(t)\sim N(0,c^2 t)$$

由此，我们引入维纳过程（**Wienner Process**）的定义：

定义：若一随机过程$\{W(t);t\ge 0\}$满足：

（**1**）$W(t)$是独立增量过程；

（**2**）$\forall s,t>0, W(s+t)-W(s)\sim N(0,c^2 t)$；

（**3**）$W(t)$是关于$t$的连续函数；

则称$\{W(t);t\ge 0\}$是布朗运动或维纳过程（**Wienner Process**）。

若 $c=1, W(0)=0$ 时，称此时的维纳过程为标准的维纳过程，记为$\{W_0(t);t\ge 0\}$。标准维纳过程的一维概率密度为：

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$$

且有：$W_0(t_i)-W_0(t_{i-1})\sim N(0,t_i-t_{i-1})$。

**注 1**：维纳过程是正态过程（这一结论并不是显然的）**:**一般地，由维纳过程的定义可知，任取$t_1<t_2<\cdots<t_n$，则$W(t_1),W(t_2)-W(t_1),\cdots,W(t_n)-W(t_{n-1})$相互独立，且都服从正态分布，由于：

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2)-W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_n)-W(t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

因此 $W(t_1),W(t_2),\cdots,W(t_n)$ 也服从正态分布，即维纳过程也是正态过程。

**注 2**：维纳过程与 **Poission** 过程的比较。

定理：设$\{W_0(t);t\ge 0\}$为标准维纳过程，令$x_0=0,t_0=0$，则对任意$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，$(W_0(t_1),W_0(t_2),\cdots,W_0(t_n))$的联合分布密度为：

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i-x_{i-1};t_i-t_{i-1})$$

其中：

$$p(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$$

证明：令：$Y_1=W_0(t_1),Y_i=W_0(t_i)-W_0(t_{i-1}),i=2,3,\cdots,n$，则有：

$$W_0(t_i)=\sum_{k=1}^{i}Y_k \qquad \textbf{(*)}$$

由维纳过程的增量独立性知，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$是相互独立的，且$Y_i\sim N(0,t_i-t_{i-1})$，则$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的联合分布密度为：

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\exp\{-\frac{y_i^2}{2(t_i-t_{i-1})}\}$$

由变换式子（*），可得$(W_0(t_1),W_0(t_2),\cdots,W_0(t_n))$的联合密度函数为：

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f(y_1,y_2,\cdots,y_n)|J|$$

其中：

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |J|=1$$

故

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\exp\{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p(x_i-x_{i-1};t_i-t_{i-1})$$

注意：由于标准维纳过程是独立增量过程，因此具有马氏性。即标准维纳过程是马氏过程。

**2． 维纳过程的性质**

下面主要研究标准维纳过程的基本性质。设$\{W_0(t);t\geq 0\}$为标准维纳过程，则有：

$$E\{W_0(t)\}=0$$

$$E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\}=E\{W_0(t_1)[W_0(t_2)-W_0(t_1)+W_0(t_1)]\}$$

$$=E\{W_0^2(t_1)\}=t_1 \quad t_1\leq t_2$$

同理可得：

$$E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\}=E\{W_0^2(t_2)\}=t_2 \quad t_1\geq t_2$$

因此有：

$$R_{W_0}(t_1,t_2)=E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\}=\min(t_1,t_2)$$

故维纳过程不是平稳过程。

由于当$t_1=t_2$时，标准维纳过程的相关函数$R_{W_0}(t_1,t_2)$是一连续函数，因此

标准维纳过程是均方连续的随机过程。

由于：

$$\frac{\partial}{\partial t_2}R_{W_0}(t_1,t_2)=u(t_1-t_2)=\begin{cases}1, & t_1>t_2\\ 0, & t_1<t_2\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_{W_0}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}u(t_1-t_2)=\delta(t_1-t_2)$$

因此若记标准维纳过程的均方导数为$W_0^{/}(t)$，则有：

$$E\{W_0^{/}(t_1)W_0^{/}(t_2)\}=\frac{\partial}{\partial t_1}u(t_1-t_2)=\delta(t_1-t_2)=\delta(\tau)\quad \tau=t_1-t_2$$

由此可知$W_0^{/}(t)$是一正态分布的白噪声。这提供了产生正态白噪声的一种方法。

记：$W(t)=\mu t+\sigma W_0(t)$，其中$\mu,\sigma$为常数，则有：

$$E\{W(t)\}=\mu t$$

$$D\{W(t)\}=E\{[W(t)-\mu t]^2\}=\sigma^2 E\{W_0^2(t)\}=\sigma^2 t$$

我们称$\mu$为偏离系数，$\sigma^2$为过程$W(t)$的强度。$W(t)$的一维分布密度为：

$$f_W(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\}$$

$W(t)$为非平稳过程。

例：设$\{B_t;t\geq 0\}$是初值为零标准布朗运动过程，试求它的概率转移密度函数$p(s,t,x,y)\hat{=} f_{B_t|B_s}(y|x)$。

解：由标准维纳过程的定理：设$\{W_0(t);\, t\geq 0\}$为标准维纳过程，则对任意$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，$(W_0(t_1),W_0(t_2),\cdots,W_0(t_n))$的联合分布密度为：

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i-x_{i-1};t_i-t_{i-1})$$

其中：

$$p(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$$

可知：当$s<t$时，$(B_s,B_t)$的联合分布密度为：

$$f_{B_sB_t}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}$$

$B_s$的分布密度为：

$$f_{B_s}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}$$

因此

$$p(s,t,x,y)\hat{=}f_{B_t|B_s}(y|x)=\frac{f_{B_sB_t}(x,y)}{f_{B_s}(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}$$

例：求随机过程$X(t)=W^2(t), t>0$，（其中$W(t)$是偏离系数为零，强度为$\sigma^2$的 Wienner 过程）的均值函数和相关函数，从而判定其均方连续性和均方可微性。

例：设$W(t)$是偏离系数为零，强度为$\sigma^2$的 Wienner 过程，求随机过程$X(t)=\int_0^t sW(s)ds$ 和$X(t)=tW\left(\frac{1}{t}\right)$ 的均值函数和相关函数。

**3．** 维纳过程的应用

设$\xi(t)$是一正态分布的白噪声，研究其均方积分$\{\eta(t)=\int_0^t\xi(u)du; t\geq 0\}$的统计特性。

假设：

$$E\{\xi(t)\}=0,\ R_\xi(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$$

由于均方积分是一线性变换，由$\xi(t)$是一正态过程，可知$\int_0^t\xi(u)du$仍然为一正态过程。且有：

（1） $E\{\eta(t)\}=E\{\int_0^t\xi(u)du\}=0$

（2） $E\{\eta(0)\}=E\{\int_0^0\xi(u)du\}=0$

（3）当$0 \le t_1 < t_2$时，有：

$$R_\eta(t_1,t_2) = E\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\} = E\{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\xi(u)\xi(v)dudv\}$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\sigma^2\delta(u-v)dvdu = \int_0^{t_1}\sigma^2 du = \sigma^2 t_1$$

当$0 \le t_2 < t_1$时，有：

$$R_\eta(t_1,t_2) = E\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\} = E\{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\xi(u)\xi(v)dudv\}$$

$$= \int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\sigma^2\delta(u-v)dudv = \int_0^{t_2}\sigma^2 dv = \sigma^2 t_2$$

由此有：

$$R_\eta(t_1,t_2) = \sigma^2\min(t_1,t_2)$$

因此$\eta(t)$是一维纳过程。若$\sigma^2 = 1$，则$\eta(t)$是一标准维纳过程，即$\eta(t) = W_0(t)$。

由上面讨论的维纳过程的性质可知，当$\sigma^2 = 1$时，有：

$$\frac{d}{dt}W_0(t) = W_0^{/}(t) \quad （W_0^{/}(t)\text{为正态白噪声）}$$

$$\int_0^t W_0^{/}(u)du = W_0(t)$$

## （八）维纳积分

### 1. 维纳积分的定义

定义：给定$\{W_0(t); t \ge 0\}$是一标准维纳过程，$b(t)(t \ge 0)$为一确定性函数，且满足：

$$\int_0^t |b(u)|^2 du < \infty \quad \forall t \ge 0$$

给定$t > 0$，对区间$[0,t]$作一任意划分$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t$，作和为：

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} b(t_k)[W_0(t_{k+1}) - W_0(t_k)]$$

称 $S_n$ 的均方极限为维纳积分，记为：

$$U(t) = \int_0^t b(u)dW_0(u)$$

即：

$$\lim_{\lambda \to 0} E\{\left| S_n - \int_0^t b(u)dW_0(u) \right|^2\}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} E\{\left| \sum_{k=0}^{n-1} b(t_k)[W_0(t_{k+1}) - W_0(t_k)] - \int_0^t b(u)dW_0(u) \right|^2\} = 0$$

其中：$\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n}(t_k - t_{k-1})$。

注：可以证明 $S_n$ 的均方极限一定存在。并且有以下的结果：

$$E\{U(t)\} = E\{\int_0^t b(u)dW_0(u)\} = 0$$

$$R_U(t_1,t_2) = E\{\int_0^{t_1} b(u)dW_0(u) \int_0^{t_2} b(v)dW_0(v)\}$$

$$= \int_0^{\min(t_1,t_2)} b^2(u)du$$

注意以上定义中 $S_n$ 的求和方式。

例：试研究维纳积分：

$$U(t) = \int_0^t \sin \omega u dW_0(u)$$

的均值，相关函数。令 $\Delta U = U(t_2) - U(t_1)$ $(t_2 > t_1)$，试研究 $\Delta U$ 的均值和相关函数。

解：由于：$\int_0^t \sin^2 \omega u du < \infty$，故维纳积分是存在的。因此：$E\{U(t)\} = 0$，

$$R_U(t_1,t_2) = \int_0^{\min(t_1,t_2)} \sin^2(\omega u)du = \int_0^{\min(t_1,t_2)} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega u) \right) du$$

$$= \frac{1}{2}\min(t_1,t_2) - \frac{1}{4\omega}\sin\{2\omega[\min(t_1,t_2)]\} \quad (t_1 \ge 0, t_2 \ge 0)$$

由于维纳过程是一正态过程，因此维纳积分 $U(t)$ 仍然为一正态过程，所以

$\Delta U$ 是正态分布的随机变量。由此我们有：

$$E\{\Delta U\}=0$$

$$\sigma_{\Delta U}^2=E\{[U(t_2)-U(t_1)]^2\}$$

$$=R_U(t_2,t_2)-2R_U(t_2,t_1)+R_U(t_1,t_1)$$

$$=\frac{t_2}{2}-\frac{\sin 2\omega t_2}{4\omega}-t_1+\frac{\sin 2\omega t_1}{2\omega}+\frac{t_1}{2}-\frac{\sin 2\omega t_1}{4\omega}$$

$$=\frac{1}{2}(t_2-t_1)-\frac{1}{2\omega}\cos\omega(t_1+t_2)\sin\omega(t_2-t_1)$$

**2．** 维纳积分的性质

（1） 关于确定性函数的线性性：

设 $a_1,a_2$ 为常数，$b_1(u),b_2(u)$ 为确定性函数，且满足：

$$\int_0^t b_1^2(u)du<\infty,\ \int_0^t b_2^2(u)du<\infty,\quad \forall t\geq 0$$

则有：

$$\int_0^t [a_1b_1(u)+a_2b_2(u)]dW_0(u)=a_1\int_0^t b_1(u)dW_0(u)+a_2\int_0^t b_2(u)dW_0(u)$$

（2） 可加性

$$\int_0^{t_1} b(u)dW_0(u)+\int_{t_1}^{t_2} b(u)dW_0(u)=\int_0^{t_2} b(u)dW_0(u),\ 0\leq t_1<t_2$$

注意：当 $t\geq 0, b(u)>0$ 时，并不一定有 $U(t)=\int_0^t b(u)dW_0(u)>0$，例如：取 $b(u)=1$ 时，有 $U(t)=\int_0^t 1dW_0(u)=W_0(t)$，而 $W_0(t)$ 是一正态分布的随机变量，它可能取负值。

**3．** 维纳积分的统计特性

维纳积分 $\{U(t);t\geq 0\}$ 是一随机过程，它具有以下基本性质：

（1）$U(0)=0$；

（2） $E\{U(t)\}=0$

（3） $\{U(t);t\geq 0\}$ 是一正态过程；

（4） $\{U(t);t\geq 0\}$ 是一独立增量过程，因此是一马氏过程；

（5） $U(t)$ 的方差为 $\sigma_U^2(t)=\int_0^t b^2(u)du$ ；

（6） $U(t)$ 的方差的导数为：$\dfrac{d\sigma_U^2}{dt}=b^2(t)\ (t\geq 0)$，它是一时间 $t$ 的函数。

注意到维纳过程方差的导数是一常数，因此我们称 $U(t)$ 为非齐次维纳过程，$b(t)$ 为 $U(t)$ 的强度函数。

由于 $\dfrac{d}{dt}W_0(t)=W_0'(t)$，$W_0'(t)$ 为正态白噪声，因此，考虑一个线性系统，其冲激响应为 $h(t,\tau)$，冲激响应满足平方可积。以正态白噪声输入此系统，则输出为：

$$\eta(t)=\int_0^t h(t,\tau)W_0'(\tau)d\tau=\int_0^t h(t,\tau)dW_0(\tau)$$

因此，输出是一维纳积分，它是一非齐次的维纳过程，并且有：

$$E\{\eta(t)\}=0$$

$$\begin{aligned}R_\eta(t_1,t_2)&=E\left\{\int_0^{t_1}h(t_1,u)W_0'(u)du\int_0^{t_2}h(t_2,v)W_0'(v)dv\right\}\\&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1,u)h(t_2,v)E\{W_0'(u)W_0'(t_2)\}dudv\\&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1,u)h(t_2,v)\delta(u-v)dudv\\&=\int_0^{\min(t_1,t_2)}h(t_1,u)h(t_2,u)du\end{aligned}$$

**4．广义维纳积分**

设有两个独立的标准维纳过程 $\{W_{01}(t);t\geq 0\}$ 和 $\{W_{02}(t);t\geq 0\}$，定义：

$$W_0(t)=\begin{cases} W_{01}(t); & t\geq 0 \\ W_{02}(-t); & t<0 \end{cases}$$

并假定

$$\int_{-\infty}^{t}\left|h(t,u)\right|^2du<\infty$$

记

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,u)dW_0(u)\hat{=}\lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{t}h(t,u)dW_0(u)\quad(-\infty<t<\infty)$$

则称$\xi(t)$为广义维纳积分。

广义维纳积分具有以下的基本性质：

（1）$E\{\xi(t)\}=0$

（2）$R_\xi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\min(t_1,t_2)}h(t_1,u)h(t_2,u)du\quad(-\infty<t_1,t_2<\infty)$

例：设：

$$h(t,u)=\begin{cases} \beta\exp\{-\alpha(t-u)\}, & -\infty<u<t<\infty \\ 0, & -\infty<t<u<\infty \end{cases}\quad \alpha,\beta>0$$

试研究广义维纳积分的统计性质。

解：由广义维纳积分的性质有$E\{\xi(t)\}=0$。其中：

$$\xi(t)=\beta\int_{-\infty}^{t}\exp\{-\alpha(t-u)\}dW_0(u)$$

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{\min(t_1,t_2)}\exp\{-\alpha(t_1-u)\}\exp\{-\alpha(t_2-u)\}du$$

当$t_2>t_1$时，有：

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{t_1}\exp\{-\alpha(t_1+t_2)\}\exp\{2\alpha u\}du=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha(t_2-t_1)\}$$

当$t_2<t_1$时，有：

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{t_2}\exp\{-\alpha(t_1+t_2)\}\exp\{2\alpha u\}du=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha(t_1-t_2)\}$$

故：

$$R_\xi(t_1,t_2)=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha\left|t_1-t_2\right|\}=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha\left|\tau\right|\},\quad \tau=t_1-t_2$$

因此$\xi(t)$是一平稳过程。由于：

$$\xi(t)=\beta\int_{-\infty}^{t}\exp\{-\alpha(t-u)\}dW_0(u)=\beta\int_{-\infty}^{t}\exp\{-\alpha(t-u)\}W_0^{/}(u)du$$

而$W_0^{/}(t)$为正态白噪声，因此$\xi(t)$是一正态过程，而且是一马氏过程，参数为$\beta^2/(2\alpha),\alpha$。

注意：例中给出的过程$\xi(t)$称为奥斯坦－乌伦贝克（**Ornstein-Uhlenbeck**）过程，它是一正态马氏过程。

## （九）伊藤（Ito）随机积分

### 1．伊藤（Ito）随机积分的定义

考察以下随机微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{dX(t)}{dt}=f(t,X(t))+g(t,X(t))\dfrac{dW(t)}{dt}\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$$

其中：$W(t)$为维纳过程。此随机方程我们称为伊藤（**Ito**）随机微分方程。此方程形式上的解可以写成：

$$X(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}f(t,X(t))dt+\int_{t_0}^{t}g(t,X(t))dW(t)$$

此积分称为伊藤（**Ito**）随机积分方程。

要研究此方程的解，我们需要引入伊藤（**Ito**）随机积分的定义。

定义：设$X(t)$为一二阶矩过程，$W(t)$为维纳过程，对区间$[a,b]\ (b>a\geq 0)$进行划分：$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$，记$\lambda=\max\limits_{1\leq k\leq n}\{t_k-t_{k-1}\}$，作和式：

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$$

若以上和式$\eta_n$当$\lambda\to 0,n\to\infty$时均方收敛，则其均方极限称为$X(t)$关于维纳过程$W(t)$的伊藤（**Ito**）随机积分。记为：

$$\underset{\lambda\to 0,n\to\infty}{l.i.m}\ \eta_n = \int_a^b X(t)dW(t)$$

注意：和式中求和取点的方式。

定理：设 $X(t)$ 为均方连续的二阶矩过程，并且对任意的 $s_1', s_2' \le t_{k-1} < t_k$ 及 $s_1 < s_2 \le t_{k-1} < t_k$，随机向量 $(X(s_1'), X(s_2'), W(s_2) - W(s_1))$ 与 $W(t_k) - W(t_{k-1})$ 相互独立，则 $X(t)$ 关于维纳过程 $W(t)$ 的伊藤（**Ito**）随机积分存在且唯一。

若 $W(t)$ 为标准维纳过程时，则有：

$$E\left\{\left(\int_a^b X(t)dW_0(t)\right)^2\right\} = \int_a^b E\left\{X^2(t)\right\}dt$$

例：研究伊藤（**Ito**）随机积分 $\int_a^b W_0(t)dW_0(t)$。

解：标准维纳过程 $W_0(t)$ 满足以上定理的要求，因此伊藤（**Ito**）积分 $\int_a^b W_0(t)dW_0(t)$ 存在且唯一。对区间 $[a,b]$ 进行划分：

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\text{，}\lambda = \max_{1\le k\le n}\{t_k - t_{k-1}\}\text{，}$$

作和式如下：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n W_0(t_{k-1})[W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})] = \\
&\quad = -\sum_{k=1}^n W_0(t_{k-1})[W_0(t_{k-1}) - W_0(t_k)] \\
&\quad = -\{W_0^2(t_0) - W_0(t_0)W_0(t_1) + W_0^2(t_1) - W_0(t_1)W_0(t_2) + \\
&\qquad\quad + \cdots + W_0^2(t_{n-1}) - W_0(t_{n-1})W_0(t_n)\} \\
&\quad = -\left\{\frac{1}{2}W_0^2(t_0) + \frac{1}{2}[W_0(t_0) - W_0(t_1)]^2 + \frac{1}{2}[W_0(t_1) - W_0(t_2)]^2 + \right. \\
&\qquad\quad \left. + \cdots + \frac{1}{2}[W_0(t_{n-1}) - W_0(t_n)]^2 - \frac{1}{2}W_0^2(t_n)\right\} \\
&\quad = \frac{1}{2}[W_0^2(b) - W_0^2(a)] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]^2
\end{aligned}$$

令：

$$\Delta W_{0k}=W_0(t_k)-W_0(t_{k-1}),\quad \Delta t_k=t_k-t_{k-1}$$

则由：

$$E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(\varDelta W_{0k})^2-(b-a)\right]^2\right\}=E\left\{\sum_{k=1}^{n}[(\varDelta W_{0k})^2-\varDelta t_k]\right\}^2$$

$$=E\{\sum_{k=1}^{n}[\varDelta W_{0k}^2-\varDelta t_k]^2+2\sum_{k,i=1;k\neq i}^{n}[\varDelta W_{0k}^2-\varDelta t_k][\varDelta W_{0i}^2-\varDelta t_i]\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\varDelta W_{0k}^2-\varDelta t_k]^2+2\sum_{k,i=1;k\neq i}^{n}E\{[\varDelta W_{0k}^2-\varDelta t_k][\varDelta W_{0i}^2-\varDelta t_i]\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\varDelta W_{0k}^2-\varDelta t_k]^2+2\sum_{k,i=1;k\neq i}^{n}E\{\varDelta W_{0k}^2-\varDelta t_k\}E\{\varDelta W_{0i}^2-\varDelta t_i\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\varDelta W_{0k}^2-\varDelta t_k]^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E\{\varDelta W_{0k}^4-2[\varDelta W_{0k}^2](\varDelta t_k)+(\varDelta t_k)^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{3(\varDelta t_k)^2-2(\varDelta t_k)(\varDelta t_k)+(\varDelta t_k)^2\}=2\sum_{k=1}^{n}(\varDelta t_k)^2\leq 2\lambda\sum_{k=1}^{n}\varDelta t_k$$

$$=2\lambda(b-a)\to 0\quad(\lambda\to 0)$$

可知：

$$\underset{\lambda\to 0}{l.i.m}\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2=b-a$$

由上面推导的和式，我们有：

$$\int_a^b W_0(t)dW_0(t)=\frac{1}{2}[W_0^2(b)-W_0^2(a)]-\frac{1}{2}\underset{\lambda\to 0}{l.i.m}\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2$$

$$=\frac{1}{2}[W_0^2(b)-W_0^2(a)]-\frac{1}{2}(b-a)$$

注意：如果令：

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}W_0(t_{k-1})[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]$$

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} W_0(t_k)[W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]$$

则有：

$$J_n - I_n = \sum_{k=1}^{n} [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]^2$$

$$\underset{\lambda \to 0}{l.i.m} (J_n - I_n) = b - a$$

这就是在伊藤（**Ito**）随机积分的定义中，我们为什么在作和式 $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} X(t_{k-1})[W(t_k) - W(t_{k-1})]$ 时要在 $X(\cdot)$ 中取划分小区间左边的点 $t_{k-1}$，而不取任意的 $t_k' \in [t_{k-1}, t_k]$ 的原因。

**2．** 伊藤（**Ito**）积分的性质

（**1**）线性性：

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dW(t) = \alpha \int_a^b X(t) dW(t) + \beta \int_a^b Y(t) dW(t)$$

（**2**）如果 $a \le b \le c$，则有

$$\int_a^c X(t) dW(t) = \int_a^b X(t) dW(t) + \int_b^c X(t) dW(t)$$

（**3**）设 $\int_a^b X(t) dW_0(t)$ 存在，则对于 $a \le t \le b$，有：

$$Y(t) = \int_a^t X(u) dW_0(u)$$

存在，且关于 $t$ 均方连续。

（**4**）设 $\{X_n(t), t \in [a,b]\}$ 是均方连续的二阶矩过程序列，且满足伊藤（**Ito**）随机积分存在的条件。如果关于 $t$ 一致地有：

$$X(t) = \underset{n \to \infty}{l.i.m} X_n(t)$$

则 $X(t)$ 也是均方连续的，且满足伊藤（**Ito**）随机积分存在的条件，对于一切的 $a \le t \le b$，一致地有：

$$\underset{n \to \infty}{l.i.m} \int_a^t X_n(u) dW_0(u) = \int_a^t X(u) dW_0(u)$$

注意：在伊藤（**Ito**）随机积分中，如果 $X(t)$ 为一确定性函数，则它就是上面定义的维纳积分。

**3．** 伊藤（**Ito**）随机积分的应用

研究线性伊藤（**Ito**）随机微分方程（**Langevin** 方程）：

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = -\alpha X(t) + \beta \dfrac{dW_0(t)}{dt} \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

其中：$\alpha > 0, \beta > 0$ 为常数。

解：注意到方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) = \beta y(t) & t \ge 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

的解可以写成：

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} y(u) du$$

因此以上的线性伊藤（**Ito**）随机微分方程可以看作以白噪声 $\beta \dfrac{dW_0(t)}{dt}$ 激励由方程（*）确定的线性系统，因此 $X(t)$ 形式上可以写成：

$$X(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} \beta W_0'(u) du = \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dW_0(u)$$

因此有：

$$E\{X(t)\} = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = \beta^2 \int_0^{\min(t_1,t_2)} \exp\{-\alpha(t_1 - u)\} \exp\{-\alpha(t_2 - u)\} du$$

$$= \beta^2 \exp\{-\alpha(t_1 + t_2)\} \int_0^{\min(t_1,t_2)} \exp\{2\alpha u\} du$$

$$= \frac{\beta^2}{2\alpha} [\exp\{-\alpha |t_1 - t_2|\} - \exp\{-\alpha(t_1 + t_2)\}] \quad t_1, t_2 \ge 0$$

注意 $X(t)$ 不是一平稳的随机过程（有瞬时效应），如果激励时间换成 $t = -\infty$，

则有

$$R_X(t_1,t_2)=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha|t_1-t_2|\}\quad t_1,t_2\ge 0$$

此时的输出即为一平稳的随机过程。以上的输出$X(t)=\beta\int_0^t e^{-\alpha(t-u)}dW_0(u)$称为奥斯坦－乌伦贝克（**Ornstein -Uhlenbeck**）过程。

（十）例子

例 **1**．设$\{W(t);t\ge 0\}$为一标准的维纳过程，令随机过程$Y(t)=W(t+1)-W(t)$，$t\ge 0$。

(a) 试证明随机过程$\{Y(t);t\ge 0\}$是平稳过程；

(b) 试证明随机过程$\{Y(t);t\ge 0\}$的功率谱密度为:

$$S_Y(\omega)=(\omega/2)^{-2}\cdot\sin^2(\omega/2)$$

(c) 试求$W(1)+W(2)+\cdots+W(n)$的分布。

解：解：(**a**) 显然有，

$$E\{Y(t)\}=E\{W(t+1)-W(t)\}=E\{W(t+1)\}-E\{W(t)\}=0$$

$$\begin{aligned}R_Y(s,t)&=E\{Y(s)Y(t)\}=E\{[W(s+1)-W(s)][W(t+1)-W(t)]\}\\&=\min\{s+1,t+1\}-\min\{s,t+1\}-\min\{s+1,t\}+\min\{s,t\}\end{aligned}$$

因此，我们有：

当$0\le s\le t\le s+1$时：$R_Y(s,t)=s+1-s-t+s=1+(s-t)$

当$0\le t\le s\le t+1$时：$R_Y(s,t)=t+1-t-s+t=1-(s-t)$

当 $t\ge s+1$，或 $s\ge t+1$时：$R_Y(s,t)=0$

令$\tau=s-t$，则$Y(t)$的自相关函数为：

$$R_Y(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|\le 1\\ 0, & |\tau|>1\end{cases}$$

所以随机过程$\{Y(t);t\ge 0\}$是平稳过程。

(**b**) 由维纳－辛钦公式，有：

$$S_Y(\omega)=\int_{-1}^{1}(1-|\tau|)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$=\int_0^1 2(1-\tau)\cos(\omega\tau)d\tau=(\omega/2)^{-2}\cdot\sin^2(\omega/2)$$

（c）由于维纳过程是正态过程，因此可知$\xi=W(1)+W(2)+\cdots+W(n)$是正态分布的随机变量，且$E\{\xi\}=E\{W(1)+W(2)+\cdots+W(n)\}=0$，下面求此随机变量的方差：

$$D\{\xi\}=E\{\xi^2\}=E\{[W(1)+W(2)+\cdots+W(n)]^2\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}E\{W^2(i)\}+2\sum_{1\le i<j\le n}E\{W(i)W(j)\}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

所以 $\xi=W(1)+W(2)+\cdots+W(n)\sim N\left(0,\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$。

习题：

（1）　设$B(t),t\ge 0$是初值为零的标准布朗运动，令$\xi(t)=(1-t)B[t/(1-t)],\ 0\le t<1$，$\eta(t)=e^{-at}B(e^{2at}-1),t\ge 0,\ a>0$的常数，试求随机过程$\xi(t)$和$\eta(t)$的均值函数和相关函数，并说明$\xi(t)$和$\eta(t)$是否是正态过程。

（2）　设$\{B(t),t\ge 0\}$是标准的布朗运动，试求$B(t)$与$\int_0^1 B(u)du$的相关系数，其中：$0\le t\le 1$。

（3）　已知$B(t),t>0$是初值为 0 的标准布朗运动，求在$B(1)=0$时$B(t)$ $(0<t<1)$的条件概率分布密度函数。

（4）　已知 $B(t),t\ge 0$ 是初值为零的标准布朗运动，令 $\xi(t)=\sqrt{a}B(t)+b$，$\eta(t)=B(at)+b$，其中常数$a>0,b>0$，$t\ge 0$。试分析此两随机过程的前二阶矩是否相同？此两过程是否同分布？说明理由。

**教材 P561：6、7、10、11、13、16。**

# 第一章概论

第 1 题

某公共汽车站停放两辆公共汽车 A 和 B，从 t=1 秒开始，每隔 1 秒有一乘客到达车站。如果每一乘客以概率$\frac{1}{2}$登上 A 车，以概率$\frac{1}{2}$登上 B 车，各乘客登哪一辆车是相互统计独立的，并用$\xi_j$代表 t=j 时乘客登上 A 车的状态，即乘客登上 A 车则$\xi_j$＝1，乘客登上 B 车则$\xi_j$＝0，则$P\{\xi_j=1\}=\frac{1}{2}, P\{\xi_j=0\}=\frac{1}{2}$, 当 t＝n 时在 A 车上的乘客数为$\eta_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \eta_n$是一个二项式分布的计算过程。

（1）求$\eta_n$的概率，即$P\{\eta_n=k\}=?\, k=0,1,2,...,n;$

（2）当公共汽车 A 上到达 10 个乘客时，A 即开车（例如 t＝21 时$\eta_{21}=9$，且 t＝22 时又有一个乘客乘 A 车，则 t＝22 时 A 车出发），求 A 车的出发时间 n 的概率分布。

解（1)：

$$P\{\eta_n=k\}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

解（2)：

$$\begin{aligned}&P\{\text{车A在时刻n开车}\}\\&=P(\text{在n - 1时刻，车A有9名乘客；在n时刻第10名乘客登上车A})\\&=\binom{n-1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\binom{n-1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

第 2 题

设有一采用脉宽调制以传递信息的简单通信系统。脉冲的重复周期为 T，每一个周期传递一个值；脉冲宽度受到随机信息的调制，使每个脉冲的宽度均匀分布于（0，T）内，而且不同周期的脉宽是相互统计独立的随机变量；脉冲的幅度为常数 A。也就是说，这个通信系统传送的信号为随机脉宽等幅度的周期信号，它是以随机过程$\xi(t)$。图题 1－2 画出了它的样本函数。试求$\xi(t)$的一维概率密度$f_{\xi_t}(x)$。

解：

$$
\begin{aligned}
&f_{\xi_t}(x)=P_A\delta(x-A)+P_0\delta(x)\\
&P\{\xi(t)=A\}=P_A \quad P\{\xi(t)=0\}=P_0\\
&\qquad t\in[(n-1)T,nT] \;\; n\text{是任意的,脉冲宽度}\eta_n\in(0,T)\\
&P\{\xi(t)=A\}=P\{t\in[(n-1)T,nT+\eta_n]\}\\
&\qquad =P\{\eta_n>[t-(n-1)T]\}\\
&\qquad =\int_{t-(n-1)T}^{T}\frac{1}{T}d\eta\\
&\qquad =\frac{T-t+(n-1)T}{T}\\
&\qquad =\frac{nT-t}{T}\\
&\qquad =n-\frac{t}{T}\\
&\qquad =1-\frac{t-(n-1)T}{T}\\
&P\{\xi(t)=0\}=1-P\{\xi(t)=A\}=\frac{t-(n-1)T}{T}=\frac{t}{T}-(n-1)\\
&\qquad \therefore\ f_{\xi_t}(x)=P_A\delta(x-A)+P_0\delta(x)\\
&\qquad =\left(n-\frac{t}{T}\right)\delta(x-A)+\left(\frac{t}{T}-(n-1)\right)\delta(x)
\end{aligned}
$$

第 3 题

设有一随机过程$\xi(t)$，它的样本函数为周期性的锯齿波。图题 1－3(a)、(b)画出了两个样本函数图。各样本函数具有统一形式的波形，其区别仅在于锯齿波的起点位置不同。设在 t=0 后的第一个零值点位于$\tau_0$，$\tau_0$是一个随机变量，它在（0，T）内均匀分布，即 $f_{\tau_0}(t)=\begin{cases}\frac{1}{T} & (0\le t\le T)\\ 0 & (\text{其它值})\end{cases}$ 若锯齿波的幅度为 A，求随机过程$\xi(t)$的一维概率密度。

解（1）：$\xi(t)$取值在 0，A 之间，且均匀分布

$$
f_{\xi(t)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{A} & (0\le x\le A)\\ 0 & (\text{其它值})\end{cases}
$$

解（2）：

令$\xi(t)$＝x，则 x=k(t-$\tau_0$)，$(0\le x\le A)$，t=$t^{'}-\left\lfloor\frac{t^{'}}{T}\right\rfloor T$，k 为斜率。所以$\tau_0$=t-$\frac{x}{k}$。

$$f_{\xi(t)}(x)=\begin{cases}=\dfrac{1}{T}\bullet\left|-\dfrac{1}{k}\right|=\dfrac{1}{A} & (0\le x\le A)\\ 0 & (\text{其它值})\end{cases}$$

第 4 题

设有随机过程$\zeta(t)=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t \quad (-\infty<t<\infty)$其中$\omega$为常数，且$\omega$>0，$\xi$和$\eta$是随机变量，且相互统计独立，它们的概率密度为

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\} \quad (-\infty<x<\infty)$$
$$f_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{y^2}{2}\} \quad (-\infty<y<\infty)$$

即$\xi$和$\eta$是正态分布 N（0，1）随机变量。若把$\zeta(t)$写成$\zeta(t)=V\sin(\omega t+\phi)$的形式，

（1）求 $f_v(v), f_\varphi(\varphi), f_{v\varphi}(v,\varphi),$ 问 V 和$\phi$是否统计独立。

（2）画出$\zeta(t)$的典型样本函数；

（3）求$\zeta(t)$的一维概率密度 $f_{\xi_t}(z)$；

（4）设有事件 A，$A\underline{\underline{\Delta}}\{\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\zeta^2(t)dt>c\}$，其中 c 为常数，求出现 A 事件的概率 P(A)。

解（1）:

$\xi,\eta$ 相互独立，故其联合概率密度为 $f_{\xi\eta}(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$，利用随机变量变换后的概率密度的公式，可得到$v,\phi$的联合概率密度：

$$f_{v\phi}(v,\phi)=f_\xi(v\sin\phi)\cdot f_\eta(v\cos\phi)\cdot|J|$$

$$\begin{aligned}\zeta(t)&=V\sin(\omega t+\phi)\\&=V\sin\phi\cos\omega t+V\cos\phi\sin\omega t\\&=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\xi=V\sin\phi\\ \eta=V\cos\phi\end{cases} \qquad \begin{cases}V=\sqrt{\xi^2+\eta^2} & (0<V<+\infty)\\ \phi=\tan^{-1}\dfrac{\xi}{\eta} & (0<\phi<2\pi)\end{cases}$$

Jacobi 行列式：

$$|J|=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(V,\phi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial(v\sin\phi)}{\partial v} & \frac{\partial(v\cos\phi)}{\partial v}\\ \frac{\partial(v\sin\phi)}{\partial\phi} & \frac{\partial(v\cos\phi)}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\phi & \cos\phi\\ V\cos\phi & -V\sin\phi\end{vmatrix}=V$$

$$\begin{aligned}f_{V\phi}(v,\varphi) &= f_{\xi\eta}(\xi(v,\varphi),\eta(v,\varphi))\bullet|J|\\ &= f_{\xi\eta}(x,y)\bullet|J|\\ &= f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)V\\ &=\frac{V}{2\pi}e^{-\frac{V^2}{2}}\end{aligned}$$

所以$v,\phi$的联合概率密度 $f_{v\phi}(v,\phi)=\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{v^2}{2})\cdot v$。该式分别对$v,\phi$在各自的定义域内积分 ，即得$v,\phi$的概率密度：

$$\begin{aligned}f_V(v) &= \int_0^{2\pi} f_{V\phi}(v,\varphi)d\varphi\\ &= Ve^{-\frac{V^2}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{\phi}(\varphi) &= \int_0^{+\infty} f_{V\phi}(v,\varphi)dv\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{V}{2\pi}e^{-\frac{V^2}{2}}dv\\ &= \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

因为 $f_v(v)\cdot f_{\phi}(\phi)=f_{v\phi}(v,\phi)$，所以可知二者统计独立。

解（2）：

典型样本函数图形，略。

解（3）：

利用特征函数求解。

在 t 时刻，cos(wt),sin(wt) 值均给定。

高斯随机变量$\xi$的特征函数为$\Phi_{\xi}(u)=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$

高斯随机变量$\eta$的特征函数为$\Phi_{\eta}(u)=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$

因此$\xi\cos\omega t,\eta\sin\omega t$的特征函数分别为，

$$\Phi_\xi(u\cos\omega t)=\exp\left(-\frac{u^2\cos^2(\omega t)}{2}\right),$$

$$\Phi_\eta(u\sin\omega t)=\exp\left(-\frac{u^2\sin^2(\omega t)}{2}\right)$$

又因为 $\zeta(t)=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t$，故随机变量 $\zeta$ 的特征函数为 $\Phi_\xi(u\cos\omega t)\cdot\Phi_\eta(u\sin\omega t)=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$，所以随机变量 $\zeta$ 的概率密度为其特征函数的傅立叶反变换，计算得：

$$f_\zeta(\mathrm{z})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

解（4）：

若 c 小于零，则事件 A 为必然事件，P（A）=1；

若 c 大于等于零，

考察 $\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\zeta^2(t)dt$，变形为：

$$\begin{aligned}&\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}v^2\sin^2(\omega t+\phi)dt\\&=v^2\end{aligned}$$

P{A}=P{ $v^2>c$ }=P{ $v>\sqrt{c}$ }= $\int\limits_{\sqrt{c}}^{\infty}v\cdot\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv=\exp\left(-\frac{c}{2}\right)$

第 5 题

求第 4 题所给出的随机过程 $\zeta(t)$ 的均值和自相关函数。

解：

$$\begin{aligned}E\{\zeta(t)\}&=E\{\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t\}\\&=E\{\xi\}\cos\omega t+E\{\eta\}\sin\omega t\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&R_\xi(t_1,t_2)=E\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\}\\&=E\{(\xi\cos\omega t_1+\eta\sin\omega t_1)(\xi\cos\omega t_2+\eta\sin\omega t_2)\}\\&=E\{\xi^2\}\cos\omega t_1\cos\omega t_2+E\{\xi\eta\}\cos\omega t_1\sin\omega t_2\\&\qquad+E\{\xi\eta\}\cos\omega t_2\sin\omega t_1+E\{\eta^2\}\sin\omega t_1\sin\omega t_2\\&=\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\sin\omega t_1\sin\omega t_2\\&=\cos(\omega t_1-\omega t_2)\\&=\cos(\omega\tau)\end{aligned}$$

第 6 题

设有随机过程$\xi(t)$，并设 x 是一实数，定义另一个随机过程$\eta(t)$ $\begin{cases} \eta(t)=1 & (\xi(t)<x) \\ \eta(t)=0 & (\xi(t)\geq x) \end{cases}$

试证$\eta(t)$的均值和自相关函数分别为随机过程$\xi(t)$的一维和二维分布函数。

解：

$$\begin{aligned} E\{\eta(t)\} &= 1\bullet P\{\xi(t)<x) + 0\bullet P\{\xi(t)\geq x\} \\ &= P\{\xi(t)<x) \\ &= F_{\xi}(x) \\ E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} &= 1\bullet 1P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2) \\ &= P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2) \\ &= F_{\xi}(x_1,x_2) \end{aligned}$$

第 7 题

设有随机过程$\{\xi(t),\quad -\infty<t<\infty\},\xi(t)=\eta\cos t$，其中$\eta$为均匀分布于（0,1）间的随机变量，即 $f_{\eta}(y)=\begin{cases} 1 & (0\leq y<1) \\ 0 & \text{(其它y值）} \end{cases}$ 试证：

（1）$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\dfrac{1}{3}\cos t_1\cos t_2$

（2）$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\dfrac{1}{12}\cos t_1\cos t_2$

解（1）：

$$\begin{aligned} &R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{\eta\cos t_1\eta\cos t_2\} \\ &=E\{\eta^2\}\cos t_1\cos t_2 \\ &=\int_0^1\eta^2 d\eta\cos t_1\cos t_2 \\ &=\frac{1}{3}\cos t_1\cos t_2 \end{aligned}$$

解（2）：

$$E\{\eta\}=\int_0^1\eta d\eta=\frac{1}{2}$$

$$E\{\xi\}=E\{\eta\cos t\}=E\{\eta\}\cos t=\frac{1}{2}\cos t$$

$$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{(\eta\cos t_1-\frac{1}{2}\cos t_1)(\eta\cos t_2-\frac{1}{2}\cos t_2)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\{\eta^2\}\cos t_1 \cos t_2 - \frac{1}{2}E\{\eta\}\cos t_1 \cos t_2 \\
&\qquad - \frac{1}{2}E\{\eta\}\cos t_1 \cos t_2 + \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 \\
&= \frac{1}{3}\cos t_1 \cos t_2 - \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 - \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 + \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 \\
&= \frac{1}{12}\cos t_1 \cos t_2
\end{aligned}
$$

第 8 题

设有一随机过程$\xi(t)$作为图题 1－8 所示的线性系统的输入，系统的输出为$\eta(t)$，若$\xi(t)$的相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$，是求输出随机过程$\eta(t)$的自相关函数（用输入过程的相关函数表示）。

解：

$$
\begin{aligned}
&R_{\eta\eta}(t_1,t_2) = E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} \\
&= E\{[\xi(t_1-T)-\xi(t_1)][\xi(t_2-T)-\xi(t_2)]\} \\
&= E\{\xi(t_1-T)\xi(t_2-T)\} - E\{\xi(t_1-T)\xi(t_2)\} \\
&\qquad - E\{\xi(t_1)\xi(t_2-T)\} + E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\
&= R_{\xi\xi}(t_1-T,t_2-T) - R_{\xi\xi}(t_1-T,t_2) \\
&\qquad - R_{\xi\xi}(t_1,t_2-T) + R_{\xi\xi}(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

第 9 题

设$\xi(\omega,t)$是§3 例二所定义的随机电报信号（即任何时刻$\xi(\omega,t)$以概率 1 / 2 取值 0 或 1，单位内时间波形平均变化次数为$\lambda_\xi$），$\eta(\omega,t)$也是 0、1 随机电报信号，它在单位内时间波形平均变化次数为$\lambda_\eta$，且$\xi(\omega,t)$和$\eta(\omega,t)$是相互统计独立的；又设随机过程$\zeta(\omega,t)$是$\xi(\omega,t)$、$\eta(\omega,t)$两随机信号之和，即$\zeta(\omega,t)=\xi(\omega,t)+\eta(\omega,t)$。

（1）试画出$\zeta(\omega,t)$的典型样本函数；

（2）试求$\zeta(\omega,t)$的一维概率密度；

（3）设有两时刻 $t_1,t_2$,求$\zeta(t_1)$和$\zeta(t_2)$的二维联合概率密度。

解（1）：略。

解（2）：

$$P\{\zeta(\omega,t)=0\}=P\{\xi(\omega,t)=0\}P\{\eta(\omega,t)=0\}$$
$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$
$$P\{\zeta(\omega,t)=1\}=P\{\xi(\omega,t)=0\}P\{\eta(\omega,t)=1\}$$
$$+P\{\xi(\omega,t)=0\}P\{\eta(\omega,t)=1\}$$
$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$P\{\zeta(\omega,t)=2\}=P\{\xi(\omega,t)=1\}P\{\eta(\omega,t)=1\}$$
$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$
$$\therefore f_{\zeta}(z)=\frac{1}{4}\delta(z)+\frac{1}{2}\delta(z-1)+\frac{1}{4}\delta(z-2)$$

解（3）：

随机电报信号 $t_1,t_2$ 之间发生偶数次变化的概率是

$$\sum_{k=even}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$
$$=\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)})$$
$$=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)})$$

随机电报信号 $t_1,t_2$ 之间发生奇数次变化的概率是

$$\sum_{k=odd}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$
$$=\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)})$$
$$=\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)})$$

$\zeta(t_1)$ 和 $\zeta(t_2)$ 的二维联合概率密度＝

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}\delta(z_1)\left\{\begin{array}{l}
P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}\delta(z_2)\\
+[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\
\qquad +P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2-1)\\
+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\delta(z_2-2)
\end{array}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{4}\delta(z_1-1)\left\{\begin{array}{l}
[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\
\qquad +P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2)\\
+2[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\
\qquad +P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2-1)\\
+[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\
\qquad +P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2-2)
\end{array}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{4}\delta(z_1-2)\left\{\begin{array}{l}
P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\delta(z_2)\\
+[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\
\qquad +P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2-1)\\
+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}\delta(z_2-2)
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}\delta(z_1)\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{4}(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)})^2\delta(z_2)\\
\qquad +\frac{1}{2}(1-e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2-1)\\
\qquad +\frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)})^2\delta(z_2-2)
\end{array}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{4}\delta(z_1-1)\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(1-e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2)\\
\qquad +(1+e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2-1)\\
\qquad +\frac{1}{2}(1-e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2-2)
\end{array}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{4}\delta(z_1-2)\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)})^2\delta(z_2)\\
\qquad +\frac{1}{2}(1-e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2-1)\\
\qquad +\frac{1}{4}(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)})^2\delta(z_2-2)
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

第 10 题

质点在直线上作随机游动，即在 t＝1，2，3，…时质点可以在 x 轴上往右或往左作一个单位距离的随机游动。若往右移动一个单位距离的概率为 p，往左移动一个单位距离的概率为 q，即 $P\{\xi_i=+1\}=p, P\{\xi_i=-1\}=q, p+q=1$，且各次游动是相互统计独立的。经过

n 次游动，质点所处的位置为$\eta_n = \eta(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$。

（1）求$\eta(n)$的均值；

（2）求$\eta(n)$的相关函数和自协方差函数$R_{\eta\eta}(n_1, n_2)$和$C_{\eta\eta}(n_1, n_2)$。

解（1）：

$$\begin{aligned}
E\{\eta(n)\} &= E\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\{\xi_i\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{1 \times p + (-1) \times q\} \\
&= n(p - q) \\
&= n(2p - 1)
\end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(n_1, n_2) &= E\{\eta(n_1)\eta(n_2)\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \sum_{j=1}^{n_2} \xi_j\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=i}^{n_2} \xi_i \xi_j\} \\
&= n_1 n_2 (2p-1)^2 + \min(n_1, n_2)[1 - (2p-1)^2] \\
&= n_1 n_2 (2p-1)^2 + \min(n_1, n_2) 2p(2-2p)
\end{aligned}$$

我做的结果：

$$\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(n_1, n_2) &= E\{\eta(n_1)\eta(n_2)\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \sum_{j=1}^{n_2} \xi_j\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)} \xi_i\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} \xi_i \xi_j\} + E\{\sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)} \xi_i^{2}\} \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} E\{\xi_i \xi_j\} + \sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)} E\{\xi_i^{2}\} \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} E\{\xi_i\} E\{\xi_j\} + \min(n_1, n_2)(p+q) \\
&= n_1 n_2 (2p-1)^2 + \min(n_1, n_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\eta\eta}(n_1,n_2) &= E\{(\eta(n_1)-E[\eta(n_1)])(\eta(n_2)-E[\eta(n_2)]) \\
&= E\{\eta(n_1)\eta(n_2)\} - E\{\eta(n_1)\}E\{\eta(n_2)\} \\
&= R_{\eta\eta}(n_1,n_2) - n_1 n_2 (2p-1)^2
\end{aligned}
$$

第 11 题

设有§2 例二所定义的四电平随机调幅信号$\xi(t)$，求它的自协方差函数。

解：

$$
E\{\xi(t)\} = 2\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} + (-2)\times\frac{1}{4} + (-1)\times\frac{1}{4} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= E\{(\xi(t_1)-E[\xi(t_1)])(\xi(t_2)-E[\xi(t_2)]) \\
&= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} - E\{\xi(t_1)\}E\{\xi(t_2)\} \\
&= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

当$|t_1-t_2|<T_0$时

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= R_{\xi\xi}(t_1,t_2) \\
&= \frac{1}{16}\bullet\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\sum_{i=-2,-1,1,2} i \sum_{j=-2,-1,1,2} j + \frac{1}{4}\bullet(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0})\sum_{i=j=-2,-1,1,2} ij \\
&= 0 + \frac{1}{4}\bullet(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0})(1^2+2^2+(-1)^2+(-2)^2) \\
&= \frac{5}{2}\bullet(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0})
\end{aligned}
$$

当$|t_1-t_2|>T_0$时

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= R_{\xi\xi}(t_1,t_2) \\
&= \frac{1}{16}\bullet\sum_{i=-2,-1,1,2} i \sum_{j=-2,-1,1,2} j \\
&= 0
\end{aligned}
$$

第 12 题

设有§2 例五所定义的、幅度服从正态分布的随机调幅信号$\xi(t)$，求它的自协方差函数。

解：

由定义知：

$$
E\{\xi(t)\} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= E\{(\xi(t_1)-E[\xi(t_1)])(\xi(t_2)-E[\xi(t_2)]) \\
&= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} - E\{\xi(t_1)\}E\{\xi(t_2)\} \\
&= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

若$|t_1-t_2|>T$

$$
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) = E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = E\{\xi(t_1)\}E\{\xi(t_2)\} = 0
$$

若｜$t_1$-$t_2$|<T

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\
&= \frac{|t_1-t_2|}{T_0}\times 0+\left(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right)E\{[\xi(t)]^2\} \\
&= \left(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right)\sigma^2
\end{aligned}
$$

# 马尔可夫过程（I）－马尔可夫链

第 1 题

设 $\xi(t)$ 是一马尔可夫过程，又设 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots < t_{n+k}$，试证明 $f_{t_n/t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_n/x_{n+1},\cdots,x_{n+k}) = f_{t_n/t_{n+1}}(x_n/x_{n+1})$ 即一个马尔可夫过程的反向也具有马尔可夫性。

解：

$$\begin{aligned}
&f_{t_n/t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_n/x_{n+1},\cdots,x_{n+k})\\
&=\frac{f_{t_n,t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k})}{f_{t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_{n+1},\cdots,x_{n+k})}\\
&=\frac{f_{t_{n+k}/t_{n+k-1}}(x_{n+k}/x_{n+k-1})\cdots f_{t_{n+1}/t_n}(x_{n+1}/x_n)f_{t_n}(x_n)}{f_{t_{n+k}/t_{n+k-1}}(x_{n+k}/x_{n+k-1})\cdots f_{t_{n+2}/t_{n+1}}(x_{n+2}/x_{n+1})f_{t_{n+1}}(x_{n+1})}\\
&=\frac{f_{t_{n+1}/t_n}(x_{n+1}/x_n)f_{t_n}(x_n)}{f_{t_{n+1}}(x_{n+1})}\\
&=\frac{f_{t_{n+1},t_n}(x_{n+1}x_n)}{f_{t_{n+1}}(x_{n+1})}\\
&=f_{t_n/t_{n+1}}(x_n/x_{n+1})
\end{aligned}$$

第 2 题

试证明对于任何一个马尔可夫过程，如“现在”的$\xi(t)$值为已知，则该过程的“过去”和“将来”是相互统计独立的，即如果有$t_1 < t_2 < t_3$，其中 $t_2$ 代表“现在”，$t_1$ 代表“过去”，$t_3$ 代表“将来”，若$\xi(t_2) = x_2$ 为已知值，试证明 $f_{t_1,t_3/t_2}(x_1,x_3/x_2) = f_{t_1/t_2}(x_1/x_2)f_{t_3/t_2}(x_3/x_2)$

解：

$$\begin{aligned}
f_{t_1,t_3/t_2}(x_1,x_3/x_2) &= \frac{f_{t_1,t_3,t_2}(x_1,x_3,x_2)}{f_{t_2}(x_2)}\\
&=\frac{f_{t_3/t_2}(x_3/x_2)f_{t_2/t_1}(x_2/x_1)f_{t_1}(x_1)}{f_{t_2}(x_2)}\\
&=\frac{f_{t_3/t_2}(x_3/x_2)f_{t_2,t_1}(x_2,x_1)}{f_{t_2}(x_2)}\\
&=f_{t_1/t_2}(x_1/x_2)f_{t_3/t_2}(x_3/x_2)
\end{aligned}$$

第 3 题

若 $\xi(t)$ 是一马尔可夫过程，$t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} < t_{m+2}$，试证明

$$f_{t_{m+1},t_{m+2}/t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_1,x_2,\cdots,x_m)=f_{t_{m=1},t_{m+2}/t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_m)$$

解：

$$\begin{aligned}
&f_{t_{m+1},t_{m+2}/t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_1,x_2,\cdots,x_m)\\
&=\frac{f_{t_{m+1},t_{m+2},t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1},x_{m+2},x_1,x_2,\cdots,x_m)}{f_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)}\\
&=\frac{f_{t_{m+2}/t_{m+1}}(x_{m+2}/x_{m+1})f_{t_{m+1}/t_m}(x_{m+1}/x_m)\cdots f_{t_2/t_1}(x_2/x_1)f_{t_1}(x_1)}{f_{t_m/t_{m-1}}(x_m/x_{m-1})\cdots f_{t_2/t_1}(x_2/x_1)f_{t_1}(x_1)}\\
&=f_{t_{m+2}/t_{m+1}}(x_{m+2}/x_{m+1})f_{t_{m+1}/t_m}(x_{m+1}/x_m)\\
&=f_{t_{m=1},t_{m+2}/t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_m)
\end{aligned}$$

第 4 题

若有随机变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$, 且$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$为相互统计独立的随机变量，$\xi_n$的概率密度为$f_{\xi_n}(x_n)=f_n(x_n), E\{\xi_n\}=0, n=1,2,\cdots$。定义另一随机变量序列$\{\eta_n\}$如下：

$$\begin{aligned}
&\eta_1=\xi_1\\
&\eta_2=\xi_1+\xi_2\\
&\eta_3=\xi_1+\xi_2+\xi_3\\
&\cdots\cdots\\
&\eta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

试证明：

（1）序列$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$具有马尔可夫性；

（2）$E\{\eta_n/\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1}\}=E\{\eta_n/\eta_{n-1}=y_{n-1}\}=y_{n-1}$

解（1）：略（附后）
解（2）：略（附后）

第 5 题

设有随机过程$\xi(n), n=1,2,3,\cdots$，它的状态空间 I：{x: 0<x<1} 是连续的，它的参数 T 为离散的，T＝n，n=1,2,…。设$\xi(1)$为(0,1)间均匀分布的随机变量，即$\xi(1)$的概率密度为

$$f_1(x_1)=f_{\xi(1)}(x_1)=\begin{cases}1 & (0<x_1<1)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$$，$\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(\mathrm{m})$的联合概率密度为

$$\begin{cases} f_{1,2,\cdots,m}(x_1,x_2,\cdots,x_m) \\ \quad = f_{\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m)}(x_1,x_2,\cdots,x_m) \\ \quad = \dfrac{1}{x_1x_2\cdots x_{m-1}} \quad (0<x_m<x_{m-1}\cdots<x_1<1) \\ f_{1,2,\cdots,m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0 \quad (其它x_i值) \end{cases}$$

（1）求$\xi(2)$的边际概率密度;

（2）试问该过程是否为马尔可夫过程;

（3）求转移概率密度 $f_{2/1}(x_2/x_1),\cdots\cdots, f_{m/m-1}(x_m/x_{m-1})$。

（4）求$P\{\xi(1)<\frac{3}{4},\xi(3)<\frac{1}{3}\}$。

解（1）:

$$f_{\xi(1),\xi(2)}(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1} \quad (0<x_2<x_1<1)$$

$$f_{\xi(2)}(x_2)=\int_{x_2}^{1} f_{\xi(1),\xi(2)}(x_1,x_2)dx_1=\int_{x_2}^{1}\frac{1}{x_1}dx_1=-\ln x_2$$

解（2）:

$$\begin{aligned} & f_{\xi(m)/\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m-1)}(x_m/x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}) \\ &= \frac{f_{\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m)}(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{f_{\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m-1)}(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})} \\ &= \frac{1}{x_1x_2\cdots x_{m-1}} / \frac{1}{x_1x_2\cdots x_{m-2}} \\ &= \frac{1}{x_{m-1}} \quad (0<x_m<x_{m-1}\cdots<x_1<1) \end{aligned}$$

$f_{\xi(m)/\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m-1)}(x_m/x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})$只与$\xi(m-1)$有关，该过程是马尔可夫过程。

解（3）:

$$f_{2/1}(x_2/x_1)=\frac{1}{x_1} \quad (0<x_2<x_1<1),$$

$\cdots\cdots,$

$$f_{m/m-1}(x_m/x_{m-1})=\frac{1}{x_{m-1}} \quad (0<x_m<x_{m-1}<\cdots<1)$$

解（4）：略（附后）

第6题

设有一参数离散、状态连续的随机过程$\xi(n), n=1,2,3,\cdots$，它的状态空间为：

$I:\{x; x\geq 0\}$，又$\xi(1)$的概率密度为

$$f_{\xi(1)}(x_1)=f_1(x_1)=\begin{cases} e^{-x_1} & (x_1\geq 0)\\ 0 & (\text{其它}x_i\text{值})\end{cases}$$

$\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(\mathrm{m})$的 m 维联合概率密度为

$$\begin{cases} \mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{m}) \\ \quad =\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}}\bullet\exp\{-(x_m x_{m-1}+x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\} \\ \qquad\qquad (x_1\geq 0, x_2\geq 0,\cdots,x_m\geq 0) \\ \mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{m})=0 \quad (\text{其它}x_i\text{值})\end{cases}$$

（1）求$\xi(2)$的概率密度;

（2）求边际概率密度函数$\mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m\text{-}1}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}})$；

（3）说明该过程是马尔可夫过程，并求其转移概率密度$f_{m/m-1}(x_m/x_{m-1})$；

解（1）：

$$\mathrm{f}_{\xi(1),\xi(2)}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)=x_1\exp\{-(x_2x_1+x_1)\}\quad (x_2\geq 0, x_1\geq 0)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{f}_{\xi(2)}(\mathrm{x}_2)&=\int_0^\infty \mathrm{f}_{\xi(1),\xi(2)}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)dx_1\\ &=\int_0^\infty x_1\exp\{-(x_2x_1+x_1)\}dx_1\\ &=\frac{1}{(x_2+1)^2}\end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{cases} \mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m\text{-}1}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}}) \\ =\int_0^\infty \mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{m})\mathrm{dx}_\mathrm{m} \\ =\int_0^\infty \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}}\bullet\exp\{-(x_mx_{m-1}+x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}\mathrm{dx}_\mathrm{m} \\ =\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}2}}\bullet\exp\{-(x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}\ (x_1\geq 0,x_2\geq 0,\cdots,x_m\geq 0) \\ \mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m\text{-}1}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}}) \\ =0\ (\text{其它}x_i\text{值})\end{cases}$$

解（3）：略

$$\begin{aligned}&\mathrm{f}_{\mathrm{m}/1,2,\cdots,\mathrm{m\text{-}1}}(\mathrm{x}_\mathrm{m}/\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}})\\ &=\frac{\mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{m})}{\mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m\text{-}1}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}})}\\ &=\frac{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}}\bullet\exp\{-(x_mx_{m-1}+x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}}{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}2}}\bullet\exp\{-(x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}}\\ &=\mathrm{x}_{\mathrm{m\text{-}1}}\bullet\exp\{-x_mx_{m-1}\}\ \ (x_m\geq 0, x_{m-1}\geq 0)\end{aligned}$$

$f_{\xi(m)/\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m-1)}(x_m/x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})$只与$\xi(m-1)$有关，该过程是马尔可夫过程。

第 7 题

有三个黑球和三个白球。把这六个球任意等分给甲、乙两个袋中，并把甲袋中的白球数定义为该过程的状态，则有四种状态：0，1，2，3。现每次从甲、乙两袋中各取一球，然后相互交换，即把从甲袋取出的球放入乙袋，把从乙袋取出的球放入甲袋，经过 n 次交换，过程的状态为$\xi(n), n=1,2,3,\cdots$。

（1）试问该过程是否为马尔可夫链；

（2）计算它的一步转移概率矩阵。

解（1）：

该过程是马尔可夫链；

解（2）：

$P_{00}=P_{02}=P_{03}=0$

$P_{01}=\{\text{甲袋全为黑球，乙袋全为白球}\}=1$

$P_{10}=\{\text{甲袋2个黑球,1个白球，取白球；乙袋2个白球,1个黑球，取黑球}\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$$\begin{aligned}P_{11}&=\{\text{甲袋2个黑球,1个白球，取黑球；乙袋2个白球,1个黑球，取黑球}\}\\&\cup\{\text{甲袋2个黑球,1个白球，取白球；乙袋2个白球,1个黑球，取白球}\}\\&=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$P_{12}=\{\text{甲袋2个黑球,1个白球，取黑球；乙袋2个白球,1个黑球，取白球}\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P_{13}=0$

$P_{20}=0$

$P_{21}=\{\text{甲袋2个白球，取白球；乙袋2个黑球,1个白球，取黑球}\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=$

$$\begin{aligned}P_{22}&=\{\text{甲袋2个白球,1个黑球，取黑球；乙袋2个黑球,1个白球，取黑球}\}\\&\cup\{\text{甲袋2个白球,1个黑球，取白球；乙袋2个黑球,1个白球，取白球}\}\\&=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$P_{23}=\{\text{甲袋2个白球,1个黑球，取黑球；乙袋2个黑球,1个白球，取白球}\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$P_{30}=P_{31}=0$

$P_{32}=1$

$P_{33}=0$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

第 8 题

设｛$\xi(n)$｝是一马尔可夫链，它的状态空间为 I：{0,1,2},它的初始状态的概率分布为 $P\{\xi(0)=0\}=\frac{1}{4}, P\{\xi(0)=1\}=\frac{1}{2}, P\{\xi(0)=2\}=\frac{1}{4}$；它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

（1）计算概率 $P\{\xi(0)=0,\xi(1)=1,\xi(2)=1\}$；

（2）计算 $P_{01}{}^{(2)}$。

解（1）：

$$\begin{aligned} & P\{\xi(0)=0,\xi(1)=1,\xi(2)=1\} \\ & = P\{\xi(0)=0\}P\{\xi(1)=1/\xi(0)=0\}P\{\xi(2)=1/\xi(1)=1\} \\ & =\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{16} \end{aligned}$$

解（2）：

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{36} & \frac{16}{36} & \frac{13}{36} \\ \frac{4}{48} & \frac{13}{48} & \frac{31}{48} \end{pmatrix}$$

$$P_{01}{}^{(2)}=\frac{7}{16}$$

第 9 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I：{0，1，2}，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

（1）试求$P^{(2)}$，并证明$P^{(2)}=P^{(4)}$;

（2）求$P^{(n)},n\geq 1$。

解（1）:

$$\begin{aligned}P^{(2)}&=P\bullet P\\&=\begin{pmatrix}0\ 1\ 0 & & \\ 1-p & 0 & p\\ 0\ 1\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\ 1\ 0 & & \\ 1-p & 0 & p\\ 0\ 1\ 0 & & \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0\ 1\ 0 & & \\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^{(4)}&=P^{(2)}\cdot P^{(2)}\\&=\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0\ 1\ 0 & & \\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0\ 1\ 0 & & \\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0\ 1\ 0 & & \\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore P^{(4)}=P^{(2)}$$

解（2）:

$$P^{(3)}=P^{(2)}\cdot P=\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

若 n 为奇数，$P^{(n)}=P,n\geq 1$；若 n 为偶数，$P^{(n)}=P^{(2)},n\geq 1$

第 10 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I:｛0，1｝，它的一步转移概率矩阵为 $P=\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}$ $(0<p<1)$试用数学归纳法证明：

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}$$

解：

$$n=1$$

$$P=\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}\quad(0<p<1)$$

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}$$

$$P^{(n+1)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}$$

第 11 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I:｛0，1｝，它的一步转移概率矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$ $(0<a<1,0<b<1)$ 试求 $P^{(n)}$（利用矩阵的特征值、特征矢量方法计算）

解：

对一步转移概率矩阵作特征值分解，其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2$ 相应的特征矢量是 $u_1,u_2$，

考虑 1 步转移概率矩阵，

$$Pu_1=\lambda_1 u_1\qquad Pu_2=\lambda_2 u_2$$

$$P(u_1\,u_2)=(\lambda_1 u_1\,\lambda_2 u_2)=(u_1\,u_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=(u_1\,u_2)\Lambda$$

进一步考虑 1 步转移概率矩阵，则有

$$P = P(u_1 u_2)(u_1 u_2)^T = (u_1 u_2)\Lambda(u_1 u_2)^T$$

再考虑 n 步转移概率矩阵，有

$$\begin{aligned}P^{(n)} = P^n &= \left[(u_1 u_2)\Lambda(u_1 u_2)^T\right]^n \\ &= (u_1 u_2)\Lambda(u_1 u_2)^T \cdot (u_1 u_2)\Lambda(u_1 u_2)^T \cdots (u_1 u_2)\Lambda(u_1 u_2)^T \\ &= (u_1 u_2)\Lambda^n (u_1 u_2)^T \\ &= (u_1 u_2)\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}(u_1 u_2)^T\end{aligned}$$

将 $\lambda_1, \lambda_2$， $u_1, u_2$ 代入上式可以得到最后的结果。

第 12 题

天气预报问题。其模型是：今日是否下雨依赖于前三天是否有雨（即一连三天有雨；前两天有雨，第三天是晴天；…），问能否把这个问题归纳为马尔可夫链。如可以，问该过程的状态有几个？如果过去一连三天有雨，今天有雨的概率为 0.8；过去三天连续为晴天，而今天有雨的概率为 0.2；在其它天气情况时，今日的天气和昨日相同的概率为 0.6。求这个马尔可夫链的转移矩阵。

解：

设下雨为 1，晴天为 0，共有 8 种状态，转移概率矩阵（竖排依次为昨天、前天、大前天；横排依次为今天、昨天、前天）

| | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | 0.8 | 0 | 0 | 0 | 0.2 | 0 | 0 | 0 |
| 001 | 0.6 | 0 | 0 | 0 | 0.4 | 0 | 0 | 0 |
| 010 | 0 | 0.6 | 0 | 0 | 0 | 0.4 | 0 | 0 |
| 011 | 0 | 0.6 | 0 | 0 | 0 | 0.4 | 0 | 0 |
| 100 | 0 | 0 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 0.6 | 0 |
| 101 | 0 | 0 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 0.6 | 0 |
| 110 | 0 | 0 | 0 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 0.6 |
| 111 | 0 | 0 | 0 | 0.2 | 0 | 0 | 0 | 0.8 |

第 13 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I:｛0，1｝，它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$

解：

$$f_{00}^{(1)} = P_{00} = \frac{1}{2}$$
$$f_{00}^{(2)} = P_{01}P_{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$f_{00}^{(3)} = P_{01}P_{11}P_{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$
$$f_{01}^{(1)} = P_{01} = \frac{1}{2}$$
$$f_{01}^{(2)} = P_{00}P_{01} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$f_{01}^{(3)} = P_{00}P_{00}P_{01} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

第 14 题

设有一个三状态 I:｛0，1，3｝的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$。

解：

$$\begin{aligned}
f_{00}^{(1)} &= P_{00} = p_1 \\
f_{00}^{(2)} &= P_{01}P_{10} + P_{02}P_{20} = q_1\cdot 0 + 0\cdot q_3 = 0 \\
f_{00}^{(3)} &= P_{01}P_{11}P_{10} + P_{01}P_{12}P_{20} + P_{02}P_{22}P_{20} + P_{02}P_{21}P_{10} \\
&= q_1p_2\cdot 0 + q_1q_2q_3 + 0 + 0 \\
&= q_1q_2q_3 \\
f_{01}^{(1)} &= P_{01} = q_1 \\
f_{01}^{(2)} &= P_{00}P_{01} + P_{02}P_{21} \\
&= p_1q_1 + 0 \\
&= p_1q_1 \\
f_{01}^{(3)} &= P_{00}P_{00}P_{01} + P_{00}P_{02}P_{21} + P_{02}P_{22}P_{21} + P_{02}P_{20}P_{01} \\
&= p_1^2q_1
\end{aligned}$$

第 15 题

设有一电脉冲序列，脉冲的幅度是随机的，其幅度的变域为｛1，2，3，…，n｝，且在变域上均匀分布。现用一电表测量其幅度，每个一单位时间测量一次，从第一次测量计算起，求仪器记录到最大值 n 的期望时间。

解：

用$T_{ij}$表示从状态 I 首次进入状态 J 的时间。设为开始测量时的状态为 0 状态。题目即是要求$E(T_{0n})$

$$E(T_{0n})=\sum_{m=1}^{\infty}P\{T_{0n}=m)\cdot m$$
$$=\frac{1}{n}\cdot 1+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot 2+\frac{1}{n}\cdot(\frac{n-1}{n})^2\cdot 3+\cdots+\frac{1}{n}\cdot(\frac{n-1}{n})^k\cdot(k+1)+\cdots$$

令$p=\frac{1}{n},x=\frac{n-1}{n}$。考察函数项级数$px,px^2,\cdots$，易证其对 x（在其收敛域内）一致收敛。

$$f(x)=px+px^2+\cdots=\frac{px}{1-x},$$

$$f'(x)=p\cdot 1+px\cdot 2+px^2\cdot 3+\cdots=\frac{p}{(1-x)^2}$$

从而

$$E(T_{0n})=\frac{1}{n}/(1-\frac{n-1}{n})^2=n$$

第 16 题

确定下列马尔可夫链的状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。已知该链的一步转移概率矩阵为

（1）$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

（2）$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（3）$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

（4）$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解（1）：略（附后）

解（2）：略（附后）

解（3）：略（附后）

解（4）：略（附后）

第 17 题

一质点沿圆周游动。圆周按顺时针、等距排列五个点（0，1，2，3，4）把圆周分成五格。质点每次游动或顺时针或逆时针移动一格，顺时针移动一格的概率为 p，逆时针移动一格的概率为 1-p。设$\xi(n)$代表经过 n 次转移后质点所处的位置（即状态），$\xi(n)$是一个齐次马尔可夫链。试求

（1）一步转移概率矩阵；

（2）极限概率分布。

解（1）：

设状态为 0，1，2，3，4（顺时针旋转），则一步转移概率矩阵为，

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

解（2）：

设达到稳态的分布是 $\pi=(\pi(0) \quad \pi(1) \quad \pi(2) \quad \pi(3) \quad \pi(4))$ ，则有

$$\pi P = \pi$$

$$\pi = (\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5})$$

第 18 题

求习题 7 所给出的概率模型的极限分布。

解：

设达到稳态的分布是 $\pi = (\pi(0) \quad \pi(1) \quad \pi(2) \quad \pi(3) \quad \pi(4))$ ，则有

$$\pi P = \pi$$

已知

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可以解出

$$\pi = (\frac{1}{21} \ \frac{3}{7} \ \frac{3}{7} \ \frac{1}{21} \ \frac{1}{21})$$

第 19 题

设质点在 xy 平面内的 x 方向或 y 方向上作随机游动。在 xy 平面上安排着整数点格，质点每次转移只能沿 x 方向向左或向右移一格，或沿 y 方向向上或向下移一格，设这四种转移方式的概率均相等。若质点从（0，0）出发游动，求经过 2n 次转移质点回到（0，0）点的概率，问这种对称的二维的随机游动是常返的、还是非常返的？

解：

经过 2n 次随机游动，返回（0，0）点，其往上与往下、向左与向右的随机游动次数分别相等。设上下移动了 2k 次，左右必移动了 2(n-k)次。k=0,1,2,…,n。

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k} (\frac{1}{4})^k C_{2n-k}^{k} (\frac{1}{4})^k C_{2n-2k}^{n-k} (\frac{1}{4})^{n-k} C_{n-k}^{n-k} (\frac{1}{4})^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2n!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} (\frac{1}{4})^{2n}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2n!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} 2^{-4n}$$

$$\because \sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2n!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} (\frac{1}{4})^{2n} < \infty$$

所以，同一维的随机游动一样，二维随机游动是非常返的。

第 20 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I:｛0，1，2，…｝，且设当|i-j|>1 时 $P_{ij}=0$,在其它的 i,j 值时 $P_{ij}$ 是任意的正数，对每个 j>0 必须满足 $P_{j,j-1}+P_{jj}+P_{j,j+1}=1$。当 j=0 时，$P_{00}+P_{01}＝1$ 这类过程可以称为离散参数的生灭过程。求该链为正常返的条件。

解：

设 $p_{j,j-1}=q_j, p_{j,j+1}=p_j$ 画出该链的状态转移图，设该链存在极限分布 $\pi(0),\pi(1),\pi(2),\cdots$，于是有，

$$q_1\pi(1)=p_0\pi(0),$$

$$p_{i-1}\pi(i-1)+q_{i+1}\pi(i+1)=(p_i+q_i)\pi(i),\qquad i\ge 1$$

上面第二式可改写为：

$$q_{i+1}\pi(i+1)-q_i\pi(i)=p_i\pi(i)-p_{i-1}\pi(i-1), i\ge 1$$

所以两边同时对 i 求和，有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[q_{i+1}\pi(i+1)-q_i\pi(i)\right]=\sum_{i=1}^{n-1}\left[p_i\pi(i)-p_{i-1}\pi(i-1)\right],\qquad n\ge 2$$

化简后即为：

$$q_n\pi(n)-q_1\pi(1)=p_{n-1}\pi(n-1)-p_0\pi(0)$$

又因为

$$q_1\pi(1)=p_0\pi(0)$$

所以有

$$q_n\pi(n)=p_{n-1}\pi(n-1), n\ge 1$$

即

$$\pi(n)=\frac{p_{n-1}}{q_n}\pi(n-1), n\ge 1$$

从而有

$$\pi(n)=\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{p_{r-1}}{q_r}\right)\bullet\pi(0), n\ge 1$$

因为极限分布的归一化，$\sum_{m=0}^{\infty}\pi(m)=1$，所以

$$\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{m}\frac{p_{r-1}}{q_r}\right]\bullet\pi(0)=1$$

可见当$1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{m}\left(\frac{p_{r-1}}{q_r}\right)$收敛时$\pi(0)$不为 0，是正常返；反之如它不收敛，为 0，是零常返。

因此该链正常返的条件是：

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{m}(\frac{p_{r-1}}{q_r})\text{ 收敛}$$

第 21 题

设$\xi(n), n=1,2,3,\cdots$是伯努利过程。定义另一随机过程{ $\eta(n), n=1,2,3,\cdots$ }: 如果$\xi(n)$ ＝0，则$\eta(n)$＝0；如果$\xi(n)=\xi(n-1)=\cdots=\xi(n-k+1)=1$，而$\xi(n-k)=0$，则$\eta(n)$ ＝k (k=1,2,…,n)；即$\eta(n)$代表在 n 时和 n 前连续出现$\xi(m)$=1 次数。

（1）试证明$\eta(n)$是一马尔可夫链，并求其一步转移概率

（2）从零状态出发，经 n 步转移，求首次返回零状态的概率 $f_{00}^{(n)}$ 和 n 步转移概率 $P_{00}^{(n)}$；

（3）该链是常返的还是非常返的？

（4）设 T 代表连续两个$\eta$＝0 间的时间，则 T 为一随机变量。求 T 的均值和方差

解（1）：

$\eta(n)$的状态空间是 I:{0,1,2…}。其一步转移概率是，

从状态 n（n=0,1,2…）出发，

$$P_{n0}=\frac{1}{2}, P_{n,n+1}=\frac{1}{2},$$

从状态 n 到其他状态的转移概率为 0。

解（2）：

$$\begin{aligned} f_{00}^{(n)} &= P\{\xi(0)=0;\xi(k)=1, k=1,2,\cdots,n-1;\xi(n)=0\} \\ &= (\frac{1}{2})^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{00}^{(n)} &= P\{\xi(n)=0;\xi(k)=0\text{或}1, k=1,2,\cdots,n-1;\xi(n)=0\} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(\xi(k)=0\text{或}1)\cdot\xi(n)=0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

解（3）：

该链是常返的。

解（4）：

$$P\{T=m\}=(\frac{1}{2})^m=2^{-m}$$

$$E\{T\}=\sum_{m=1}\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot m=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}\left(\sum_{m=1}^{\infty}s^m\right)_{s=\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
E\{T\} &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{1-s}\right)\Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1-s)+s}{(1-s)^2}\Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-s)^2}\Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

上述求解认为 1/2，应改为一般的通解。

解（1）：对伯努利过程，设 $P\{\xi(n)=1\}=p,则P\{\xi(n)=0\}=1-p$

$\eta(n)$ 的状态空间是 I:{0,1,2…}。其一步转移概率是，$p_{ij}$ 是

$$
\begin{aligned}
&P_{i0}=1-p, \\
&j不为零时P_{i,j}=p\cdot\delta_{i(j-1)},
\end{aligned}
$$

解（2）：

当 n 为 0 时

$$f_{00}^{(n)}=1$$

$$P_{00}^{(n)}=1$$

当 n 不为 0 时

$$f_{00}^{(n)}=\mathrm{p}^{\mathrm{n}-1}(1-\mathrm{p})$$

$$P_{00}^{(n)}=1\text{-p}$$

解（3）：

因为 $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathrm{P}_{00}^{(\mathrm{n})}=\infty$，故零状态常返，又各态是相通的，故该链是常返的。

解（4）：

$$
\begin{aligned}
P\{T=\mathrm{n}\} &= (\mathrm{p})^{\mathrm{n}-1}(1-\mathrm{p})^2 \\
E\{T\} &= \sum_{\mathrm{n}=1}(\mathrm{p})^{\mathrm{n}-1}(1-\mathrm{p})^2\cdot\mathrm{n} \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{p}} \\
\mathrm{D(T)} &= \sum_{\mathrm{n}=1}(\mathrm{p})^{\mathrm{n}-1}(1-\mathrm{p})^2\cdot\mathrm{n}^2-\frac{1}{(1-\mathrm{p})^2} \\
&= \frac{\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})^2}
\end{aligned}
$$

# 第三章 马尔可夫过程（II）

## 状态离散参数连续的马尔可夫过程

第 1 题

设有一泊松过程$\{N(t), t \ge 0\}$， 若有两时刻 s,t，且 s<t，试证明

$$P\{N(s)=k/N(t)=n\}=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$ 其中 k=0,1,2,…,n

解：

$$\begin{aligned}P\{N(s)=k/N(t)=n\}&=P\{N(s)=k,N(t)=n\}/P\{N(t)=n\}\\&=P\{N(s)=k,N(t-s)=n-k\}/P\{N(t)=n\}\\&=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\cdot\frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}\Big/\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

第 2 题

设顾客按泊松分布抵达银行，其到达速率为$\lambda$。若已知在第一小时内有两个顾客抵达银行，问：

（1）此顾客均在最初的 20 分钟内抵达银行的概率为何？

（2）至少有一个顾客在最初的 20 分钟内抵达银行的概率为何？

解（1）：

$$\begin{aligned}P\{N(s)=k/N(t)=n\}&=P\{N(20)=2/N(60)=2\}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}\\&=\left(\frac{20}{60}\right)^2\left(1-\frac{20}{60}\right)^{2-2}\\&=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{aligned}P&=1-P\{N(20)=0/N(60)=2\}\\&=1-\left(\frac{20}{60}\right)^0\left(1-\frac{20}{60}\right)^2\\&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

第 3 题

设$\{N(t), t \ge 0\}$为泊松过程，其参数为$\lambda$。设$\psi_{N(t)}(s)$是随机变量 N(t)的母函数，证明

（1）$\psi_{N(t+\Delta t)}(s) = \psi_{N(t)}(s)\psi_{N(\Delta t)}(s)$

（2）$\dfrac{\partial \psi_{N(t)}(s)}{\partial t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\psi_{N(t+\Delta t)}(s) - \psi_{N(t)}(s)}{\Delta t} = \psi_{N(t)}(s) \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\psi_{N(\Delta t)}(s) - 1}{\Delta t}$

（3）当|s|<1 时 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\psi_{N(\Delta t)}(s) - 1}{\Delta t} = \lambda(s-1)$ 或 $\dfrac{\partial \psi_{N(t)}(s)}{\partial t} = \lambda(s-1)\psi_{N(t)}(s)$

（在证明过程中运用泊松过程的四个假设）

解（1）：

$$
\begin{aligned}
\psi_{N(t)}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t=n)\} \cdot s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} s^n \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t s)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda t} e^{\lambda t s} \\
&= e^{\lambda t(s-1)}
\end{aligned}
$$

$$\psi_{N(t+\Delta t)}(s) = e^{\lambda(t+\Delta t)(s-1)}$$

$$\psi_{N(\Delta t)}(s) = e^{\lambda(\Delta t)(s-1)}$$

$$\therefore \psi_{N(t+\Delta t)}(s) = \psi_{N(t)}(s) \cdot \psi_{N(\Delta t)}(s)$$

解（2a）：

$$\frac{\partial \psi_{N(t)}(s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t(s-1)}) = \lambda(s-1)e^{\lambda t(s-1)}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{N(t+\Delta t)}(s) - \psi_{N(t)}(s)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\lambda(t+\Delta t)(s-1)} - e^{\lambda t(s-1)}}{\Delta t} \\
&= e^{\lambda t(s-1)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\lambda \Delta t(s-1)} - 1}{\Delta t} \\
&= e^{\lambda t(s-1)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda \Delta t(s-1) + 0(\Delta t)}{\Delta t} \\
&= e^{\lambda t(s-1)} \cdot \lambda(s-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{N(t)}(s) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{N(\Delta t)}(s) - 1}{\Delta t} &== e^{\lambda t(s-1)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda \Delta t(s-1) + 0(\Delta t)}{\Delta t} \\
&= e^{\lambda t(s-1)} \cdot \lambda(s-1)
\end{aligned}
$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{N(t+\Delta t)}(s) - \psi_{N(t)}(s)}{\Delta t} = \psi_{N(t)}(s) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{N(\Delta t)}(s) - 1}{\Delta t}$$

方法（2b）：

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi_{N(t+\Delta t)}(s)-\psi_{N(t)}(s)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\lambda(t+\Delta t)(s-1)}-e^{\lambda t(s-1)}}{\Delta t}\\ &= e^{\lambda t(s-1)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\lambda\Delta t(s-1)}-1}{\Delta t}\\ &= \psi_{N(t)}(s)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi_{N(\Delta t)}(s)-1}{\Delta t}\end{aligned}$$

解（3）：

$$\begin{aligned}\psi_{N(t)}(s)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi_{N(\Delta t)}(s)-1}{\Delta t} &= e^{\lambda t(s-1)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\lambda\Delta t(s-1)}-1}{\Delta t}\\ &= e^{\lambda t(s-1)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\lambda\Delta t(s-1)+0(\Delta t)}{\Delta t}\\ &= e^{\lambda t(s-1)}\cdot\lambda(s-1)\end{aligned}$$

第 4 题

利用习题 3 得到的偏微分方程式求：

（1）泊松过程$\{N(t),t\ge 0\}$的母函数$\psi_{N(t)}(s)$的表示式；

（2）P{N(t)=k},k=0,1,2,….的表示式。

解（1）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_{N(t)}(s)}{\partial t} &= \lambda(s-1)\psi_{N(t)}(s)\\ \frac{1}{\psi_{N(t)}(s)}\frac{\partial\psi_{N(t)}(s)}{\partial t} &= \lambda(s-1)\\ \ln\psi_{N(t)}(s) &= \lambda(s-1)t\\ \psi_{N(t)}(s) &= e^{\lambda(s-1)}\\ &= e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda st}\\ &= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda st)^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}s^k\end{aligned}$$

解（2）：

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

第 5 题

设有非齐次泊松过程$\{N(t),t\ge 0\}$，它的均值函数 m(t)可以表示为$m(t)=t^2+2t,\ t\ge 0$，求

在 t=4,t=5 间出现 n 个事件的概率。

解：

$$\begin{aligned}
&\int_4^5 m(t)dt = \int_4^5 (t^2+2t)dt \\
&= [\frac{1}{3}t^3 + t^2]_4^5 \\
&= \left(\frac{125}{3}+25\right) - \left(\frac{64}{3}+16\right) \\
&= \frac{61}{3} + 9 \\
&= \frac{88}{3}
\end{aligned}$$

$$P\{N(5)-N(4)=n\} = \frac{\left(\frac{88}{3}\right)^n}{n!} e^{-\frac{88}{3}}$$

第 6 题

设$\xi,\eta$是两个非负整值随机变量，定义二元离散随机变量的母函数为

$$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} z_1{}^k z_2{}^n P\{\xi=k,\eta=n\} \quad \text{k、n 均为非负整数。}$$

（1）求$\phi_\xi(z)$，用$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)$表示之；

（2）若$\xi,\eta$是彼此统计独立的随机变量，试证明$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)=\phi_\xi(z_1)\phi_\eta(z_2)$

（3）设有随机变量$w=\xi+\eta$，求随机变量 w 的母函数，用$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)$表示之；

（4）设有二元随机变量$\xi,\eta$，其母函数为$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)=\exp\{-a_1-a_2-b+a_1z_1+a_2z_2+bz_1z_2\}$其中 $a_1$,$a_2$,b>0,问$\xi$的分布是否符合泊松分布？$\eta$的分布是否符合泊松分布？$\xi,\eta$是否统计独立？若$w=\xi+\eta$，问 w 是否符合泊松分布？

解（1）：

$$\begin{aligned}
\phi_\xi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi=k) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi=k,\eta=n)\right) z^k \cdot 1^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi=k,\eta=n) z^k \cdot 1^n \\
&= \phi_{\xi\eta}(z_1=z, z_2=1)
\end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{aligned}
\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} z_1{}^k z_2{}^n P\{\xi=k,\eta=n\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} z_1{}^k z_2{}^n P\{\xi=k\}P\{\eta=n\} \\
&= \phi_\xi(z_1)\phi_\eta(z_2)
\end{aligned}$$

解（3）：

$$\phi_w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P(\xi+\eta=k)z^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}[\sum_{n=0}^{\infty}P(\xi=n,\eta=k-n)]z^k$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(\xi=n,\eta=k-n)z^n\cdot z^{k-n}$$
$$\underline{\underline{k^{'}=k-n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P(\xi=n,\eta=k^{'})z^n\cdot z^{k^{'}}$$
$$=\phi_{\xi\eta}(z_1=z,z_2=z)$$

解（4）:

$$\phi_{\xi}(z)=\phi_{\xi\eta}(z_1=z,z_2=1)$$
$$=\exp(-a_1-a_2-b+a_1z+a_2+bz)$$
$$=\exp[(z-1)(a_1+b)]$$

$\xi$ 符合泊松分布。

$$\phi_{\eta}(z)=\phi_{\xi\eta}(z_1=1,z_2=z)$$
$$=\exp(-a_1-a_2-b+a_1+a_2z+bz)$$
$$=\exp[(z-1)(a_2+b)]$$

$\eta$ 符合泊松分布

$$\phi_w(z)=\phi_{\xi\eta}(z_1=z,z_2=z)$$
$$=\exp(-a_1-a_2-b+a_1z+a_2z+bzz)$$
$$=\exp[(z-1)(a_1+a_2+b)+bz(z-1)]$$
$$=\exp[(z-1)(a_1+a_2+b+bz)]$$

w 不符合泊松分布。

第 7 题

设 $\{N_1(t),t\geq 0\}$ 和 $\{N_2(t),t\geq 0\}$ 是相互统计独立的泊松过程，其参数分别为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$。若 $N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$ 问 $\{N_0(t),t\geq 0\}$ 是否为泊松过程？

解：

$$\phi_{N_0}(v)=\exp\{\lambda t(e^{jv}-1)\}$$
$$\phi_{N_0}(v)=E\{\exp\{jvN_0(t)\}$$
$$=E\{\exp\{jv(N_1(t)-N_2(t)\}$$
$$=E\{\exp\{jvN_1(t)\cdot\exp\{-jvN_2(t)\}$$
$$=E\{\exp\{jvN_1(t)\}E\{\exp\{-jvN_2(t)\}$$
$$=\phi_{N_1}(v)\phi_{N_2}(-v)$$
$$=\exp\{\lambda_1t(e^{jv}-1)\}\exp\{\lambda_2t(e^{-jv}-1)\}$$
$$=\exp\{\lambda_1te^{jv}+\lambda_2te^{-jv}+(\lambda_1+\lambda_2)t\}$$

无法写成泊松过程特征函数的形式

$$\exp\{\lambda t(e^{jv}-1)\}$$

由于特征函数与概率有相同的特性

$\therefore N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$不符合泊松过程的分布规律.

第 8 题

有复合泊松过程$\{X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n, t\geq 0\}$，其中$Y_n, n=1,2,3,\cdots$是彼此统计独立、同分布的随机变量，$\{N(t), t\geq 0\}$是一泊松过程，$Y_n$和 N(t)也是统计独立的。求复合泊松过程$\{X(t), t\geq 0\}$的特征函数。如果$Y_n, n=1,2,3,\cdots$的概率分布为

$$P\{Y_n=1\}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P\{Y_n=-1\}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

而泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$的参数$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$，试证明$\{X(t), t\geq 0\}$的特征函数为$\phi_{X(t)}(v)=\exp\{\lambda_1 te^{jv}+\lambda_2 te^{-jv}-(\lambda_1+\lambda_2)t\}$。试比较此结果与 7 提所得的结果，说明 7 题中的$N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$是一复合泊松过程。

解：

$$\begin{aligned}
\phi_{X(t)}(v) &= E\{e^{jvX}\} \\
&= E\{\exp\{jv\sum_{n=1}^{N9t)}Y_n\} \\
&= E\{\prod_{n=1}^{N(t)}\exp\{jvY_n\}\} \\
&= E_N\{\prod_{n=1}^{N(t)}E_Y\{\exp\{jvY\}\} \\
&= E_N\{\prod_{n=1}^{N(t)}\phi_Y(v)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}[\phi_Y(v)]^n \\
&= \exp\{(\phi_Y(v)-1)\lambda t\}
\end{aligned}$$

$$\phi_Y(v)=e^{jv}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+e^{-jv}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{X(t)}(v) &= \exp\{(\phi_Y(v)-1)\lambda t\} \\
&= \exp\{(e^{jv}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+e^{jv}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}-1)\lambda t\} \\
&= \exp\{\lambda_1 te^{jv}+\lambda_2 te^{-jv}-(\lambda_1+\lambda_2)t\}
\end{aligned}$$

$N_1(t), N_2(t)$相互独立。

$N_1(t), N_2(t)$之和是泊松过程。

$N_1(t), N_2(t)$之差是复合泊松过程，$N_1(t)$对应 $Y_n$=1, $N_2(t)$ 对应 $Y_n$=-1。

第 9 题

在某交通道上设置了一个车辆记录器，记录南行、北行车辆的总数。设 X(t)代表在$[0,t)$内南行的车辆数，Y(t)代表在$[0,t)$内北行的车辆数，X(t) 、Y(t)均服从泊松分布，且相互统计独立；设$\lambda$和$\eta$分别代表在单位时间内通过的南行、北行车辆平均数。如果在 t 时车辆记录器记录的车辆数为 n，问其中 k 辆属于南行车的概率为何？]

解：

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t)=k/X(t)+Y(t)=n\}\\
&=P\{X(t)=k,X(t)+Y(t)=n\}/P\{X(t)+Y(t)=n\}\\
&=P\{X(t)=k,Y(t)=n-k\}/P\{X(t)+Y(t)=n\}\\
&=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\eta t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\eta t}/\{\frac{[(\lambda+\eta)t]^n}{n!}e^{-(\lambda+\eta)t}\}\\
&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)^k\left(\frac{\eta}{\lambda+\eta}\right)^{\text{n-k}}
\end{aligned}
$$

第 10 题

设$\{X_1(t),t\ge 0\}$和$\{X_2(t),t\ge 0\}$ $\{X_3(t),t\ge 0\}$为三个相互统计独立的泊松过程，$\lambda_1$、$\lambda_2$和$\lambda_3$分别为 $X_1(t)$、$X_2(t)$和 $X_3(t)$的参数。若 $X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n$ 时，求 $X_1(t)=k$ 、$X_2(t)=j$ 的条件概率，即求$P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j/X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}$。

解：

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j/X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&=P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j,X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}/P\{X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&=P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j,X_3(t)=n-k-j\}/P\{X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&=\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}e^{-\lambda_1 t}\cdot\frac{(\lambda_2 t)^j}{j!}e^{-\lambda_2 t}\,\frac{(\lambda_3 t)^{n-k-j}}{(n-k-j)!}e^{-\lambda_3 t}/\left\{\frac{[(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t]^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}\right\}\\
&=\frac{n!}{k!\,j!(n-k-j)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^k\left(\frac{\lambda_{21}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^j\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^{\text{n-k-j}}
\end{aligned}
$$

第 11 题

有一个有两个元件组成的系统，这两种元件当遇到下列不同类型的振动时遭受损坏。如出现第一种类型振动，将使甲失效；如出现第二类型振动，将使元件乙失效；如出现第三种类型振动，将使甲乙两元件同时失效。在（0，t）内出现一、二、三种类型振动的事件均服从泊松分布；出现二、三种类型振动的出现率分别为$\lambda_1$、$\lambda_2$和$\lambda_3$。又设 $X_1$ 代表元件甲的寿命，$X_2$ 代表元件乙的寿命。试证明：

（1） $P\{X_1\ge s,X_2\ge t\}=\exp\{-\lambda_1 s-\lambda_2 t-\lambda_3\max(t,s)\}$

（2） $P\{X_1\ge s\}=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)s\}$

（3） $P\{X_2 \ge t\} = \exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)t\}$

解（1）：

$$P\{X_1 \ge s, X_2 \ge t\}$$

在(0,t)时间内没有第一和第三种振动、在(0,s)时间内没有第二和第三种振动，即在(0,t)时间内没有第一种振动、在(0,s)时间内没有第二种振动、在(0,t)以及(0,s)时间内没有第三种振动；

$$= \exp\{-\lambda_1 s\}\cdot\exp\{-\lambda_2 t\}\cdot\exp\{-\lambda_3 \max(t,s)\}$$
$$= \exp\{-\lambda_1 s-\lambda_2 t-\lambda_3 \max(t,s)\}$$

解（2）：

$$P\{X_1 \ge s\} = P\{X_1 \ge s, X_3 \ge s\}$$

在(0,t)时间内没有第一和第三种振动，
即在(0,t)时间内没有第一种振动、在(0,t)时间内没有第三种振动；

$$= \exp\{-\lambda_1 s\}\exp\{-\lambda_3 s\}$$
$$= \exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)s\}$$

解（3）：

$$P\{X_2 \ge t\} = P\{X_3 \ge t, X_2 \ge t\}$$

在(0,s)时间内没有第二和第三种振动，
即在(0,t)时间内没有第二种振动、在(0,t))时间内没有第三种振动；

$$= \exp\{-\lambda_2 t\}\exp\{-\lambda_3 t\}$$
$$= \exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)t\}$$

第 12 题

设有一脉冲串送入计数器，在 $[0,t)$ 出现的脉冲数服从泊松分布，其脉冲的出现率为 $\lambda$。脉冲到达计数器可以被记录，也可能不被记录。每一个脉冲能被记录的概率为 $P_r$。不同脉冲是否被记录是相互统计独立的。设 X(t)是在 $[0,t)$ 内被记录的脉冲数，

（1）求 $P\{X(t)=k\},\quad k=0,1,2,\cdots$

（2）$\{X(t), t\ge 0\}$ 是否服从泊松分布？

解（1）：

$$P\{X(t)=k\} = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}P_r^k(1-P_r)^{n-k}C_n^k$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

解（2）：

$\{X(t), t\ge 0\}$ 是复合泊松过程，相当于 $Y_n$=1 被记录，$Y_n$=0 不被记录。

第 13 题

设有一非齐次泊松过程$\{N(t), t\ge 0\}$，其中$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$，$\omega$为常数。求：

（1）过程$\{N(t), t\ge 0\}$的均值 E{N(t)};

（2）过程$\{N(t), t\ge 0\}$的方差 D{N(t)}。

解：

$$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$$

$$m(t)=\int_0^t \lambda(u)du=\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos\omega u)du$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{2\omega}\sin\omega t$$

非齐次泊松过程在（0,t）时间内发生 n 个事件的概率是

$$\frac{\left[m(t)\right]^n}{n!}e^{-m(t)}$$

非齐次泊松过程在（0,t）时间内的母函数是

$$P(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)s^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[m(t)\right]^n}{n!}e^{-m(t)}s^n$$

$$=e^{-m(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[m(t)s\right]^n}{n!}$$

$$=e^{-m(t)}e^{m(t)s}$$

$$=e^{m(t)(s-1)}$$

解（1）：过程$\{N(t), t\ge 0\}$的均值 E{N(t)}

$$E\left[N(t)\right]=m(t)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2\omega}\sin\omega t$$

解（2）：过程$\{N(t), t\ge 0\}$的方差 D{N(t)}

$$D\left[N(t)\right]=m(t)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2\omega}\sin\omega t$$

第 14 题

设有两个相互统计独立的泊松过程$\{X(t), t\ge 0\}$和$\{Y(t), t\ge 0\}$，两个过程的事件出现率分别为$\lambda_x$ $\lambda_y$。试证明在过程$\{X(t), t\ge 0\}$中两个相邻事件间，过程$\{Y(t), t\ge 0\}$出现 k 个事件的概率为$P=\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}\right)^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$

解：

$\{X(t), t\ge 0\}$中两个相邻事件间为 t 的概率密度，等于在$(0,t)$时间间隔内不发生任何事件、而在$(t,t+\Delta t)$发生事件的概率，即$(0,t)$

$$e^{-\lambda_x t}\lambda_x \Delta t$$

在$(0,t)$时间间隔内，过程$\{Y(t), t\geq 0\}$出现 k 个事件的概率为

$$\frac{(\lambda_y t)^k}{k!}e^{-\lambda_y t}$$

在过程$\{X(t), t\geq 0\}$中两个相邻事件间隔内，发生过程$\{Y(t), t\geq 0\}$出现 k 个事件的概率是：

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_y t)^k}{k!}e^{-\lambda_y t}e^{-\lambda_x t}\lambda_x dt \\
&= \int_0^\infty \frac{t^k}{k!}e^{-(\lambda_x+\lambda_y)t}\lambda_y{}^k \lambda_x dt \\
&= \lambda_x \lambda_y{}^k (\lambda_x+\lambda_y)^{-k+1} \\
&= \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}\right)^k \quad (k=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}$$

第 15 题

设有两个通信用信道，每个信道的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，其均值为$\frac{1}{\lambda}$。两个信道何时产生中断是相互统计独立的。信道一旦中断，立刻进行维修，其维修时间也是负指数分布的随机变量，其维修平均时间为$\frac{1}{\mu}$。两个信道的维修时间也是统计独立的。设两个信道在 t=0 时均正常工作。

（1）求这两个信道组成的系统 Q 矩阵。

（2）列出前进方程；

（3）求在 t 时两个信道均处于正常工作状态的概率；

（4）求在$[0,t)$内两个信道连续工作的概率。

解（1）：

系统状态：维修信道数（0，1，2），

$$Q=\begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$$

解（2）：

$$\dot{P}=PQ$$

$$P=\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{22} & P_{22} \end{pmatrix}$$

解（3）：

$$\dot{p}=pQ$$

$$p=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

求 $p_0$ 即是在 t 时两个信道均处于正常工作状态的概率。

解（4）：

P｛在 $[0,t)$ 内两个信道连续工作｝＝$e^{-2\lambda t}$

第 16 题

一条电路共给 m 个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现做若下假设：（1）若一焊工在 t 使用电、而在 $(t,t+\Delta t)$ 内停止用电的概率为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$；（2）若一焊工在 t 使没有用电、而在 $(t,t+\Delta t)$ 内用电的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$；每一焊工的工作情况是统计独立的。设 $\xi(t)$ 表示在 t 是正在用电的焊工数。

（1）求该过程的状态空间；

（2）求该过程的 Q 矩阵；

（3）设 $\xi(0)=0$，列出福克－普朗克微分方程式；

（4）当 $t\to\infty$ 时，求极限分布 $P_n$。

解（1）：

该系统的状态空间是 n=0,1,2,…,m 解（1）：

解（2）：

该过程的转移概率，Q 矩阵

$$
\begin{aligned}
&n=1,2,\cdots,m-1\\
&P_{n-1,n}=(m-n)\lambda\\
&P_{n+1,n}=n\mu\\
&P_{n,n}=-n\mu-(m-n)\lambda\\
&P_{k,n}=0 \quad (k\neq n-1,n,n+1);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&n=0\\
&P_{0,1}=m\lambda\\
&P_{0,0}=-m\lambda\\
&P_{k,n}=0 \quad (k\neq n,n+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&n=m\\
&P_{m,m-1}=m\mu\\
&P_{m,m}=-m\mu\\
&P_{k,n}=0 \quad (k\neq n-1,n)
\end{aligned}
$$

解（3）：

$$
\begin{aligned}
&\dot{p}=pQ\\
&p=\begin{pmatrix}p_0 & p_1 & p_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

解（4）：

稳态求解 ，极限分布

$$p_0 \cdot m\lambda = p_1\mu$$
$$p_1(m-1)\lambda = p_2 \cdot 2\mu$$
$$\cdots\cdots$$
$$p_{m-1}\lambda = p_m m\mu$$
$$\therefore p_n = p_0 \frac{m!}{n!(m-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n \quad n = 1,2,\cdots,m$$
$$\sum_{n=0}^{m} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n = 1$$

第 17 题

设由一“生、移民及灭”过程，其中$\begin{matrix} \lambda_n = n\lambda + a & (\lambda > 0, a > 0) \\ \mu_n = n\mu & (\mu > 0) \end{matrix}$起始状态$\xi(0) = n_0$ $n\lambda$代表状态为 n 时的自然增长，a 代表移民。

（1）写出描写这一过程的福克－普朗克微分方程组；

（2）求描写平均值$M_\xi(t) = E\{\xi(t)\}$的微分方程组；

（3）求$M_\xi(t)$。

解（1）：

写出该过程的 Q 矩阵为：

$$\begin{matrix}
-a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu & -(\mu+\lambda+a) & \lambda + a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -[2(\mu+\lambda)+a] & 2\lambda + a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n\mu & -[n(\mu+\lambda)+a] & n\lambda + a & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{matrix}$$

因此福克普朗可方程为：

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -ap_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$\frac{dp_m(t)}{dt} = [(m-1)\lambda + a]p_{m-1}(t)$$
$$-[m(\mu+\lambda)+a]p_m(t) + (1+m)\mu p_{m+1}(t), m \ge 1$$

解（2）：

$$M_\xi(t) = E\{\xi(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n(t)$$

利用福克普朗克方程

$$\frac{d}{dt}M_{\xi}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{d}{dt}p_n(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\mu p_{n+1}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}n[(n-1)\lambda+a]p_{n-1}(t)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}n[n(\mu+\lambda)+a]p_n(t)$$

整理可得

$$\frac{d}{dt}M_{\xi}(t)=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)+\sum_{n=1}^{\infty}ap_{n-1}(t)$$

从而

$$\frac{d}{dt}M_{\xi}(t)=(\lambda-\mu)M_{\xi}(t)+a$$

此即$M_{\xi}(t)$所满足的微分方程

解（3）：

如果$\lambda=\mu$

则$M_{\xi}(t)=at+d$，其中 d 为待定常数。

由于$M_{\xi}(0)=n_0$所以$d=n_0$

从而　$M_{\xi}(t)=at+n_0$；

如果$\lambda\neq\mu$

设　$M_{\xi}(t)=c(t)\bullet\exp[(\lambda-\mu)t]$

带入微分方程，可得$c'(t)=a\bullet\exp[-(\lambda-\mu)t]$

所以$c(t)=-\frac{a}{\lambda-\mu}\bullet\exp[-(\lambda-\mu)t]+C$其中 C 为待定常数

进而可得$M_{\xi}(t)=C\bullet\exp[(\lambda-\mu)t]-\frac{a}{\lambda-\mu}$

由于$M_{\xi}(0)=n_0$所以$C=n_0+\frac{a}{\lambda-\mu}$

所以$M_{\xi}(t)=(n_0+\frac{a}{\lambda-\mu})\exp[(\lambda-\mu)t]-\frac{a}{\lambda-\mu}$

第 18 题

在“生灭”过程中，如果参数$\lambda_n = 0 \quad \mu_n = \mu$，则该过程原是“纯灭”过程。如其起始状态$\xi(0) = n$，求 $p_{nj}$，n>j>0。

解：

$$j = n-1$$
$$P_{n,j} = \mu$$

$$j = n$$
$$P_{n,j} = -\mu$$

$$j \neq n-1, n$$
$$P_{n,j} = 0$$

第 19 题

设有一“生灭”过程，其中$\lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu$，$\lambda, \mu$均为常数，且$\lambda > 0, \mu > 0$，其起始状态$\xi(0) = 0$。

（1）试证明$p_n(t) = P\{\xi(t) = n\}$满足下列方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

（2）设$G(u,t) \underline{\underline{\Delta}} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) u^n$，即$G(u,t)$为$\xi(t)$的母函数。试证

$$\frac{\partial G(u,t)}{\partial t} + \mu(u-1)\frac{\partial G(u,t)}{\partial t} = \lambda(u-1)G(u,t)$$

（3）解上述偏微分方程式，证明$G(u,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}uf[e^{-\mu t(u-1)}]}$其中 $f[.]$是任意函数；

（4）利用起始条件$p_0(0) = p\{\xi(0) = 0\} = 1$或$G(u,0) = 1$证明$G(u,t) = e^{\frac{1}{\mu}(\mu-1)(1-e^{-\mu t})}$

（5）证明$p_n(t) = e^{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t})}\{\frac{1}{n!}[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})]^n\}$

（6）求其均值函数$M_{\xi}(t) = E\{\xi(t)\} = ?$

（7）试证明$\lim_{t \to \infty} p_0(t) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$。

解（1）：

状态 n=0,1,2,…

$$n=1,2,\cdots$$
$$P_{n-1,n}=\lambda$$
$$P_{n+1,n}=n\mu$$
$$P_{n,n}=-n\mu-\lambda$$
$$P_{k,n}=0\quad(k\neq n-1,n,n+1);$$

$$n=0$$
$$P_{0,1}=\lambda$$
$$P_{0,0}=-\lambda$$
$$P_{k,n}=0\quad(k\neq n,n+1)$$

$$\dot{p}=pQ$$
$$p=\begin{pmatrix}p_0(t) & p_1(t) & p_2(t)\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{cases}\dfrac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)\\ \dfrac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_n(t)+(n+1)\mu p_{n+1}(t)\quad(n\geq 1)\end{cases}$$

解（2）：

$$\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)u^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial p_n(t)}{\partial t}u^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}u^n[\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_n(t)+(n+1)\mu p_{n+1}(t)]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}u^n[\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t)]+\sum_{n=0}^{\infty}u^n[-\lambda p_n(t)+(n+1)\mu p_{n+1}(t)]$$
$$=[\sum_{n=1}^{\infty}u^n\lambda p_{n-1}(t)-\sum_{n=0}^{\infty}u^n\lambda p_n(t)]-\sum_{n=1}^{\infty}u^n n\mu p_n(t)+\sum_{n=0}^{\infty}u^n(n+1)\mu p_{n+1}(t)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}u^n\lambda(u-1)p_n(t)-\sum_{n=1}^{\infty}u^n n\mu p_n(t)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}u^{n-1}np_n(t)$$
$$=\lambda(u-1)G(u,t)-\mu(u-1)\sum_{n=1}^{\infty}u^{n-1}np_n(t)$$
$$=\lambda(u-1)G(u,t)-\mu(u-1)\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}$$

解（3）：略

解（4）：略

解（5）：略
解（6）：略
解（7）：略

第 20 题

设有时变、纯增长过程 $\xi(t)$ ,其参数为 $\lambda_n(t)=\lambda(\frac{1+an}{1+a\lambda t})(n=0,1,2,\cdots,a>0,\lambda>0)$ 过程的起始状态为 $\xi(0)=0$。

（1）设 $p_k(t)=P\{\xi(t)=k\}$,写出描写 $p_k(t)$的福克－普朗克微分方程组；

（2）解该微分方程，证明

$$p_0(t)=(1+a\lambda t)^{-\frac{1}{a}}$$
$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}(1+a\lambda t)^{-k-\frac{1}{a}}\prod_{m=1}^{k-1}(1+am)\quad (k\geq 1)$$

该过程称为卜里耶(polya)过程。

解（1）：

该过程的 Q 矩阵为：

$$\begin{matrix} -\lambda_0(t) & \lambda_0(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1(t) & \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2(t) & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{matrix}$$

福克普朗克方程为：

$$\frac{d}{dt}p_0(t)=-\lambda_0(t)p_0(t)$$
$$\frac{d}{dt}p_n(t)=-\lambda_n(t)p_n(t)+\lambda_{n-1}(t)p_{n-1}(t),n\geq 1$$

解（2）：

解关于 $p_0(t)$ 的微分方程

$$p_0(t)=(1+a\lambda t)^{-\frac{1}{a}}+C$$

其中 C 为待定常数。由于 $p_0(0)=1$，令上式中 t 为零，解得 C 为零。从而有

$$p_0(t)=(1+a\lambda t)^{-\frac{1}{a}}。$$

对于 $p_n(t)$

$$\frac{d}{dt}p_n(t)=-\lambda_n(t)p_n(t)+\lambda_{n-1}(t)p_{n-1}(t),n\geq 1$$

令

$$f_k(t)=(1+a\lambda t)^{k+\frac{1}{a}}\bullet\frac{1}{\sum_{m=1}^{k-1}(1+am)},k\geq 2$$

$$f_k(t)=(1+a\lambda t)^{k+\frac{1}{a}},k=1$$

于是 $p_n(t)$ 的微分方程可化为：

$$\frac{d}{dt}[f_k(t)\bullet p_k(t)]=\lambda[f_{k-1}(t)\bullet p_{k-1}(t)],k\geq 1$$

令

$$f_k(t)\bullet p_k(t)=\delta_k(t)$$

于是有

$$\frac{d}{dt}(\delta_k(t))=\lambda\delta_{k-1}(t)$$

对上式两边作拉普拉斯变换，有：

$$s\Delta_k(s)-\delta_k(0)=\lambda\Delta_{k-1}(s)$$

又因为

$$\delta_k(0)=0,k\geq 1$$

所以

$$s\Delta_k(s)=\lambda\Delta_{k-1}(s)$$

从而可递推得

$$\Delta_k(s)=(\frac{\lambda}{s})^k\Delta_0(s)$$

而 $\delta_0(t)=1,$ 可得 $\Delta_0(s)=\frac{1}{s}$。所以

$$\Delta_k(s)=\lambda^k(\frac{1}{s})^{k+1}$$

对上式作拉氏反变换可得

$$\delta_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

又

$$f_k(t)\bullet p_k(t)=\delta_k(t)$$

所以

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}(1+a\lambda t)^{-k-\frac{1}{a}}\sum_{m=1}^{k-1}(1+am),k\geq 1$$

证毕

第 21 题

设$[0,t)$内到达的顾客服从泊松分布，参数为$\lambda$。设有单个服务员、服务时间为负指数分布的排队系统（M / M / 1），平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。试证明：

（1）在服务员的服务时间内到达顾客的平均数为$\frac{\lambda}{\mu}$；

（2）在服务员的服务时间内无顾客到达的概率为$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$。

解（1）：

服务时间为 t 的概率密度为$\mu e^{-\mu t}$，相应 n 个顾客到达的概率为$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$.在服务时间内平均到达的顾客数为

$$
\begin{aligned}
E\{N\} &= \int_0^\infty e^{-\mu t}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\mu dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\lambda t\cdot\mu dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu t}e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\lambda t\cdot\mu dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu t}\lambda t\cdot\mu dt \\
&= \lambda\int_0^\infty -d(e^{-\mu t})t \\
&= \lambda\int_0^\infty e^{-\mu t}dt \\
&= \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned}
$$

解（2）：

服务时间为 t 的概率为$\mu e^{-\mu t}$，相应没有顾客到达的概率为$e^{-\lambda t}$.

$$
\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu t}\cdot\mu dt = \frac{\mu}{\lambda+\mu}
$$

第 22 题

设有单个服务员、服务时间为负指数分布的排队服务系统，平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$；到达服务点的顾客数服从泊松分布，参数为$\lambda$，问顾客到达时排队系统中已有 n 个或 n 个以上顾客的概率为何$(n\ge 0)$？

解：

到达稳定状态后

$$
\lambda p_0 = \mu p_1 \quad p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0
$$

$$
\lambda p_1 = \mu p_2 \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0
$$

… …

$$\lambda p_{k-1}=\mu p_k \quad p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_{n-1}=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

… …

又有

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0=\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}p_0=1$$

$$p_0=1-\frac{\lambda}{\mu}$$

顾客到达时排队系统中已有 n 个或 n 个以上顾客的概率

$$\sum_{k=n}^{\infty}p_k=\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}p_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

第 23 题

设有如题 22 所给的排队服务系统（M / M / 1）。设排队已到达统计平稳状态。服务的规则是先到先服务。设 y 代表一顾客花费在排队等候的时间和服务时间的总和。求 y 的概率密度 $f_y(t)$，并证明：

（1）一个顾客花费在系统内的时间小于或等于 x 的概率为 $1-e^{-(\mu-\lambda)x}$；

（2）一个顾客花费在排队的时间小于或等于 x 的概率为

$$\begin{cases}1-\dfrac{\lambda}{\mu} & (x=0)\\ (1-\dfrac{\lambda}{\mu})+\dfrac{\lambda}{\mu}(1-e^{-(\mu-\lambda)x}) & (x>0)\end{cases}$$

解（1）：

服务一个用户时间为 t 的概率为 $e^{-\mu t}\cdot\mu dt$；

服务二个用户时间为 t 的概率为 $\mu te^{-\mu t}\cdot\mu dt$；

服务 k 个用户时间为 t 的概率为 $\dfrac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\mu dt$

用户到达系统后，系统内有 k－1 个用户的概率为 $p_{k-1}$，相应等待及服务时间是 k 个用户的服务时间，因此花费时间为 t 的概率是

$$\sum_{k-1=0}^{\infty}p_{k-1}\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\mu dt$$

$$=\sum_{k-1=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\mu dt$$

$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\mu t}\cdot dt$$

$$=(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt$$

因此有

$$f_y(t)=(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}$$

一个顾客花费在系统内的时间小于或等于 x 的概率为

$$\int_0^x f_y(t)dt$$
$$=\int_0^x (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt$$
$$=1-e^{-(\mu-\lambda)x}$$

解（2）：

若 x=0

$$p_0=1-\frac{\lambda}{\mu}$$

若 x>0

$$f_{y'}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\mu dt$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\mu dt$$
$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\mu\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\frac{\lambda}{\mu}dt$$
$$=(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}\frac{\lambda}{\mu}dt$$

排队时间小于等于 x 的概率为

$$\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\int_0^x f_{y'}(t)dt$$
$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-(\mu-\lambda)x}\right)$$
$$\therefore\begin{cases}1-\frac{\lambda}{\mu} & (x=0)\\ \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-(\mu-\lambda)x}\right) & (x>0)\end{cases}$$

第 24 题

设有单个服务员、服务时间为负指数分布的排队服务系统。到达服务点的顾客数服从泊松分布，参数为$\lambda$。在这个服务系统中再作如下规定；当顾客被服务结束后，他以概率$\alpha$离开系统，而以概率$1-\alpha$重新再去排队，于是一顾客可多次被服务，设每次服务的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。

（1）建立这个系统的平衡方程，求系统进入统计平稳后取各状态的概率，并说明存在统计平稳的条件；

（2）问顾客从进入系统起到他第一次被服务所花费的排队等候时间的平均值；

（3）求顾客进入系统会一共被服务了 n 次的概率$(n\geq 1)$；

（4）求顾客被服务的时间平均值（不包括该顾客在系统内排队等候的时间）。

解（1）：

$$\lambda p_0 = \mu\alpha p_1 \quad p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right) p_0$$

$$\lambda p_1 = \mu\alpha p_2 \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right) p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^2 p_0$$

$\cdots \ \cdots$

$$\lambda p_{k-1} = \mu\alpha p_k \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right) p_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^n p_0$$

$\cdots \ \cdots$

又有

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^k p_0 = \frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)} p_0 = 1$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu\alpha}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)$$

平稳条件是 $\frac{\lambda}{\mu\alpha} < 1$

解（2）：

$$f_{y^{\cdot}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{(\mu\alpha t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t} \cdot \mu\alpha dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^{k-1} \frac{(\mu\alpha t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t} \cdot \frac{\lambda}{\mu\alpha} \mu\alpha dt$$

$$= (\mu\alpha - \lambda) e^{-(\mu-\lambda)t} \frac{\lambda}{\mu\alpha} dt$$

$$\int_0^{\infty} f_{y^{\cdot}}(t) \cdot t dt$$

$$= \int_0^{\infty} (\mu\alpha - \lambda) e^{-(\mu-\lambda)t} \frac{\lambda}{\mu\alpha} \cdot t dt$$

$$= \frac{\lambda}{\mu\alpha}(\mu\alpha - \lambda) \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)t} \cdot t dt$$

$$= \frac{\lambda}{\mu\alpha}\left(\mu\alpha - \lambda\right)$$

$$\left[\frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^{\infty} -d\left(t\, e^{-(\mu-\lambda)t}\right) + \frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)t} dt\right]$$

$$= \frac{\lambda}{\mu\alpha}\int_0^{\infty} e^{-(\mu\alpha-\lambda)t} dt$$

$$= \frac{\lambda}{\mu\alpha} \cdot \frac{1}{\mu\alpha - \lambda}$$

解（3）：

$(1-\alpha)^{n-1}\alpha$

解（4）：

各次服务是相互独立的，总共被服务 n 次的时间平均为 $\frac{n}{\mu}$，被服务时间的平均值是

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha(1-\alpha)^{n-1}\frac{1}{\mu} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-1} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\frac{d}{d(1-\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)^{n} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\frac{d}{d(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\frac{d}{dk}\left(\frac{k}{1-k}\right)/_{k=1-\alpha} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\frac{1}{(1-k)^2}/_{k=1-\alpha} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\cdot\frac{1}{\alpha^2} \\
&=\frac{1}{\mu\alpha}
\end{aligned}
$$

第 25 题

某加油站有两台泵，只有当顾客抵达加油站时泵有空闲，方可立刻对该顾客进行服务，顾客才进入系统；否则，如顾客见到两台泵均被占用便立即离去。潜在的顾客按泊松分布规律抵达油站，其参数为 $\lambda$；油站对顾客的服务时间是负指数分布的随机变量，其平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$。求进入加油站接受服务的顾客与抵达加油站的潜在顾客的比率。

解：

顾客到达加油站与加油站状态是相互统计独立，所求比率为 $\frac{p_0+p_1}{p_0+p_1+p_2}$ 其中

$p_0, p_1, p_2$ 是加油站有 0，1，2 个顾客的稳态概率。

$$\lambda p_0=\mu p_1 \quad p_1=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0$$

$$\lambda p_1=2\mu p_2 \quad p_2=\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)p_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$\frac{p_0+p_1}{p_0+p_1+p_2}=\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

第 26 题

某项作业包括三台同一类型的机器和二个维修工。每台机器的正常工作时间（从开始工作到遭受损坏而不能工作的时间间隔）是按负指数规律分布的随机变量，其平均工作时间为 10 个小时。一个维修工维修一台机器所需的时间也是按负指数分布的随机变量，其平均维修时间为 8 小时。求：

（1）不工作机器的数学期望；

（2）两个维修工均忙着维修及其所占的时间。

解：稳态方程

$$3\lambda p_0 = \mu p_1 \quad p_1 = \left(\frac{3\lambda}{\mu}\right) p_0$$

$$2\lambda p_1 = 2\mu p_2 \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_1 = 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$\lambda p_2 = 2\mu p_3 \quad p_3 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) p_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0$$

又有

$$\sum_{k=0}^{3} p_k = \left\{1 + \frac{3\lambda}{\mu} + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\right\} \cdot p_0 = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{3\lambda}{\mu} + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{8}} = 0.8$$

$$p_0 \approx 0.164$$

解（1）：

$$\begin{aligned} & E\{\text{不工作机器}\} \\ & = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 \\ & = \frac{3\lambda}{\mu} p_0 + 2 \cdot 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + 3 \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ & = \frac{3\lambda}{\mu} p_0 + 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \frac{9}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ & \approx 1.4 \end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{aligned} T & = (p_2 + p_3) \cdot 8 \\ & = [3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0] \cdot 8 \\ & = 24\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + 12\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ & \approx 3.626h \end{aligned}$$

第 27 题

设有一出租汽车站。到达该站的出租汽车数服从泊松分布，平均每分钟到达一辆出租汽车；到达该站的顾客数也服从泊松分布，平均每分钟到达顾客 2 人。如果出租汽车到站时无顾客候车，不论是否已有汽车停留在站上，该辆汽车就停留在站上候车；反之，如果顾客到达汽车站时发现站上没有汽车，他就离去；如果顾客到占时有汽车在候客，他就可以立刻雇一辆。问：

（1）在其车站上等候的出租汽车数为何？

（2）在到站的潜在顾客中有多少雇得了出租汽车？

解：

设 n 表示汽车站上等候的汽车数，即系统的状态，达到稳定状态后

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0$$

$$\lambda p_1 = \mu p_2 \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$\lambda p_{k-1} = \mu p_k \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$\cdots \quad \cdots$$

又有

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 = p_0 = 1$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \rho^n (1-\rho)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = 1 - \rho$$

解（1）：

等候的出租汽车数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$$

$$=(1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$=(1-\rho)\rho\frac{1-\rho+\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho}$$

解（2）：

到站的潜在顾客中雇得了出租汽车的平均数为

$$(1-p_0)\mu=\mu-\lambda$$

第 28 题

设某更新过程的时间间隔服从泊松分布，其均值为 $\mu$，即

$$P\{x_n=k\}=\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!},\quad k=0,1,2\cdots。$$

（1）求 $S_n$ 的分布；

（2）计算 P{N(t)=n}。

解：

设随机变量 $x_n$ 的母函数为 $G_n(s)$

因为 $x_n$ 都服从泊松分布，所以 $G_n(s)=e^{\mu(s-1)}$

因为 $s_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$ 所以 $s_n$ 的母函数为 $F(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s)=\exp[n\mu(s-1)]$

因此 $P\{s_n=i\}=\frac{F^{(i)}(0)}{i!}=\frac{(n\mu)^i\exp(-n\mu)}{i!}$

由此可得：

$$P\{N(t)=n\}=P\{s_n\le t<s_{n+1}\}=P\{s_n<t\}-P\{s_{n+1}<t\}$$
$$=\sum_{j=1}^{[t]}\frac{(n\mu)^j\exp(-n\mu)}{j!}-\sum_{k=1}^{[t]}\frac{[(n+1)\mu]^k\exp[-(n+1)\mu]}{k!}$$

其中[t]为高斯函数，表示不超过 t 的最大整数。

第 29 题

设更新过程的时间间隔 $X_n$ 的分布函数为 F(t)，f(t)为其概率密度，m(t)为［0，t］内平均更新的次数，m(t)=E{N(t)}。试证明 $m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-x)f(x)dx$

解：

利用课本 P224 的（10）式

$$f(t)=\lambda(t)-\int_0^t\lambda(t-u)f(u)du$$

对该式两边从零到 t 积分可得：

$$\int_0^t f(t)dt = \int_0^t \lambda(t)dt - \int_0^t \int_0^t \lambda(t-u)f(u)dudt$$

因为

$$F(t) = \int_o^t f(t)dt, m(t) = \int_o^t \lambda(t)dt$$

所以有

$$F(t) = m(t) - \int_0^t \int_0^t \lambda(t-u)f(u)dudt$$

交换积分次序，有

$$F(t) = m(t) - \int_0^t \int_0^t \lambda(t-u)f(u)dtdu$$

所以

$F(t) = m(t) - \int_0^t m(t-u)f(u)du$ 将第二项的积分变量换为 x

得

$$F(t) = m(t) - \int_0^t m(t-x)f(x)dx$$

即

$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx$ 证毕

第 30 题

在使用中的一机器，或因损坏而更新，或因使用 T 时而更新。如果相继更新的机器的寿命是相互统计独立的随机变量，且具有相同的分布函数 F(t)，其相应的概率密度函数为 f(t)，试证明：

（1）长期工作时机器的更新率为 $\left\{\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]\right\}^{-1}$；

（2）长期工作中使用的机器损坏率为 $\dfrac{F(T)}{\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]}$

解：略

长期工作时机器工作寿命为 x 的概率密度是 f(x)，机器工作寿命大于 T 而没有损坏的概率是 1-F(T)，机器损坏的概率是 F(T)。

长期工作时机器的平均工作时间是 $\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]$

长期工作时机器的更新率是 $\left\{\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]\right\}^{-1}$

长期工作时机器的损坏率是机器损坏的概率与损坏机器和没有损坏而更新机器的概率之比，是 $\dfrac{F(T)}{\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]}$。

# 第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

平稳随机过程

第 1 题

设有一泊松过程$\{N(t), t \geq 0\}$,求:(1) $P\{N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2\}$,用$t_1, t_2$的函数表示之;(2)该过程的均值和相关函数。(3)问该过程是否为平稳过程?

解(1):

解(2):

解(3):

解(待补充)

第 2 题

设有一个最一般概念的随机电报信号$\{\xi(t)\}$,它的定义如下:(1) $\xi(0)$是正态分布的随机变量$N(0,\sigma^2)$;(2)时间$\tau$内出现的电报脉冲的个数服从泊松分布,即

$$P\{k,\tau\}=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau} \quad k=0,1,2,\cdots$$

(3)不同时间的电报脉冲幅度服从正态分布$N(0,\sigma^2)$,这个脉冲幅度值延伸到下一个电报脉冲出现是保持不变,在不同电报脉冲内的幅度取值是相互独立的,同一个电报脉冲内幅度是不变的;(4)不同时间间隔内出现电报脉冲的个数是相互统计独立的。它的样本函数如图题 4-2。试求(1)它的两元概率密度函数;(2)是问该过程是否平稳?

解(1):

欲求 $f_\xi\left(x_1, x_1; t_1, t_2\right)$,设$\tau=t_2-t_1$,$t_2>t_1$,则:

相隔为τ的两点之间一直没有出现新的电报脉冲的概率为$e^{-\lambda\tau}$

相隔为τ的两点之间有新的电报脉冲的概率为 1-$e^{-\lambda\tau}$

前者 $t_1$,$t_2$两点位于同一脉冲上,后者位于不同的相互独立的脉冲上,

故相应的二元概率密度是,定义τ=$|t_1-t_2|$

$$e^{-\lambda\tau}\delta(x_1-x_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\exp(-\frac{x_2^2}{2\delta^2})+(1-e^{-\lambda\tau})\frac{1}{2\pi\delta^2}\exp(-\frac{x_2^2+x_1^2}{2\delta^2})$$

解(2):

该过程是宽平稳的。($\because E\left[\xi(t)\right]=0$, $f_\xi\left(x_1, x_1; t_1, t_2\right)$只与$|t_1-t_2|$有关)

二阶矩过程

第 3 题

设为独立同分布随机变量，且均匀分布于$(0,1)$上；又设有随机过程

$$\eta(t)=\xi_1\sin(\xi_2 t)\quad (t\ge 0)$$

求（1）$\eta(t)$的均值；（2）$\eta(t)$的相关函数。

解（1）：

$$E\{\xi_1\}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

$$E\{\xi_1^{\,2}\}=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$E[\eta(t)]=E[\xi_1]E[\sin(\xi_2 t)]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sin x_2tdx_2$$

$$=\frac{1}{2}[1-\cos t]/t$$

解（2）：

$$E[\eta(t_1)\eta(t_2)]=E[\xi_1\xi_1]E[\sin(\xi_2t_1)\sin(\xi_2t_2)]$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\left[\cos[x_2(t_1-t_2)]-\cos[x_2(t_1+t_2)]\right]dx_2$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{\sin(t_1-t_2)}{t_1-t_2}-\frac{\sin(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\right]$$

第 4 题

设$\xi(t)$是实正态分布平稳随机过程，它的数学期望为 0，如定义

$$\eta(t)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\xi(t)\xi(t+\tau)}{|\xi(t)\xi(t+\tau)|}\right]$$

试证明$E\{\eta(t)\}=\dfrac{1}{\pi}\cos^{-1}[-k_\xi(\tau)]$，其中$k_\xi(\tau)=C_\xi(\tau)/\sigma_\xi^2$，$C_\xi(\tau)$代表$\xi(t)$的协方差函数，$\sigma_\xi^2$代表$\xi(t)$的方差。

解（待补充）

平稳随机过程

第 5 题

设有随机过程$\xi(t)=z\sin(t+\theta),\quad -\infty<t<\infty,$，其中$z,\theta$是相互统计独立的随机变量，$P(\theta=\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，$P(\theta=-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，Z均与分布于(-1, 1)间。试证明$\xi(t)$是宽平稳随机过程，

但不满足严平稳的条件（不满足一级严平稳的条件）。

解（1）：

首先计算随机变量 $z$ 的均值和方差

$$E\left\{Z\right\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}xdx=0$$

$$E\left\{Z^2\right\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{3}$$

接着计算的均值函数和相关函数

$$E[\eta(t)]=E[Z]E[\sin(t+\theta)]=0$$

$$E[\eta(t_1)\eta(t_2)]=E[Z^2]E[\sin(t_1+\theta)\sin(t_2+\theta)]$$

$$=\frac{1}{6}E[\cos(t_1-t_2)-\cos(t_1+t_2+2\theta)]$$

$$=\frac{1}{6}\cos(t_1-t_2) \qquad \tau=t_1-t_2$$

$$=R_{\xi}(\tau)$$

故 $\xi(t)$ 是宽平稳的

解（2）：

t ＝ 0 时，$\sin(t+\theta)=\sin\theta$ 以 1/2 的概率取 $\sqrt{2}/2$，以 1/2 的概率取 $-\sqrt{2}/2$，而 Z 均匀分布于（－1，1），∴ $\xi(t)$ 的取值均匀分布于 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

t ＝ $\frac{\pi}{4}$ 时，$\sin(t+\theta)=\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)$ 以 1/2 的概率取 1，以 1/2 的概率取 0，而 Z 均匀分布于（－1，1），∴ $\xi(t)$ 以 1/2 的概率均匀分布于（－1，1），以 1/2 的概率取值为 0。

它的一维概率分布与 t 有关，∴它不是严格平稳的

第 6 题

设 Z 为随机变量，$\theta$ 为另一随机变量，Z 与 $\theta$ 相互统计独立，均匀分布于 $(0,2\pi)$ 间；又设有随机过程 $\xi(t)=z\sin(\omega t+\theta),\quad -\infty<t<\infty,$ 其中 $\omega$ 为常数，$\omega$>0，是利用特征函数证明 $\xi(t)$ 系一严平稳随机过程。

解：

$$\Phi_{\xi}(u)=E(e^{j\xi u})=\int dzf_z(Z)\int d\theta\frac{1}{2\pi}e^{juZ\sin(\omega t+\theta)}$$

$$=\int dzf_z(Z)\bullet J_0(uZ)$$

$\Phi_\xi(u)$ 于 t 无关，$\xi(t)$ 的各阶矩于 t 无关，它是严格平稳的。

解（待补充）

第 7 题

设有一相位调制的正弦信号，其复数表示式为 $\xi(t)=e^{j(\omega t+\theta(t))}$ $-\infty<t<\infty$，其中 $\omega$ 为常数，$\omega>0$，$\theta(t)$ 是一个二级严平稳过程。设 $\psi_{t_1t_2}(u_1,u_2)$ 是过程的二维特征函数，即 $\psi_{t_1t_2}(u_1,u_2)=E\left\{e^{j[u_1\theta(t_1)+u_2\theta(t_2)]}\right\}$ 同时对于任何 $-\infty<\tau<\infty$，$\psi_{0\tau}(1,0)=0$，试证明过程 $\xi(t)$ 是宽平稳过程，并求它的相关函数 $R_\xi(t_1,t_2)$。

解：

先求均值，

$$
\begin{aligned}
m_\xi(t) &= E\{\xi(t)\} \\
&= E\left\{e^{j(\omega t+\theta(t))}\right\} \\
&= e^{j\omega t}\cdot E\left\{e^{j\theta(t)}\right\} \\
&= e^{j\omega t}\int e^{jx}dF(x,t)
\end{aligned}
$$

由于 $\theta(t)$ 是一个二阶严平稳过程，故

$$
\begin{aligned}
m_\xi(t) &= e^{j\omega t}\int e^{jx}dF(x,t) \\
&= e^{j\omega t}\int e^{jx}dF(x) \\
&= e^{j\omega t}\cdot E\left\{e^{j\theta(0)}\right\}
\end{aligned}
$$

考虑到 $\psi_{0\tau}(1,0)=E\left\{e^{j\theta(0)}\right\}=0$

$m_\xi(t)=0$，均值为常数

再求自相关函数

$$
\begin{aligned}
R_\xi(t_1,t_2) &= E\left\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\right\} \\
&= E\left\{e^{j(\omega t_1+\theta(t_1))}e^{-j(\omega t_2+\theta(t_2))}\right\} \\
= \quad &= e^{j\omega(t_1-t_2)}E\left\{e^{j(\theta(t_1)-\theta(t_2))}\right\} \\
&= e^{j\omega(t_1-t_2)}\psi_{0,\tau}(1,-1) \\
&= R_\xi(t_1-t_2)
\end{aligned}
$$

故过程 $\xi(t)$ 是宽平稳过程，且 $R_\xi(t_1,t_2)==e^{j\omega(t_1-t_2)}\psi_{t_1,t_2}(1,-1)$

第 8 题

设有一时间离散的马尔可夫过程 $\xi(n), n=0,1,2,\cdots$, $\xi(0)$ 具有概率密度函数 $f_0(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$ 对于 $n=1,2,3,\cdots$，当给定 $\xi(n-1)=\text{x}$ 时 $\xi(n)$ 的条件概率密度均与分布于 $(1\text{-x},1)$ 之间。问 $\xi(n), n=0,1,2,\cdots,$ 是否满足严平稳的条件？

解（待补充）

第 9 题

设有两状态时间离散的马尔可夫链 $\xi(n), n=0,1,2,\cdots,$ $\xi(n)$ 可取 0 或 1，它的一步转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$，其中 $p_1+q_1=1,\quad p_2+q_2=1,$ 且 $P\{\xi(0)=1\}=\dfrac{p_1}{p_1+p_2}$，$P\{\xi(0)=0\}=\dfrac{p_2}{p_1+p_2}$ 试证明该过程为严平稳过程。

解（提示）：

给出初始时刻的概率分布，给出任意时刻的概率分布，证明它们示相同的；

给出任意 N 个时刻的概率分布，证明它们具有平移不变性。

随机分析

第 10 题

设有相位调制的正弦波过程 $\xi(t)=A\cos(\omega t+\pi\eta(t))$，其中 $\omega$ 为常数，$\omega$>0，$\{\eta(t), t\ge 0\}$ 是泊松过程，A 是对称伯努利随机变量，即 $P\{A=1\}=\dfrac{1}{2}, P\{A=-1\}=\dfrac{1}{2},$，A 和 $\eta(t)$ 是相互统计独立的，试画出其样本函数，样本函数是否连续？求 $\xi(t)$ 的相关函数 $R_\xi(t_1,t_2)$，问该过程是否均方连续？

解：

求 $\xi(t)$ 自相关函数：

$$
\begin{aligned}
&R_\xi(t_1,t_2)\\
&=E\left\{A\cos\left(\omega t_1+\pi\eta\left(t_1\right)\right)\cdot A\cos\left(\omega t_2+\pi\eta\left(t_2\right)\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}E\left\{A^2\right\}E\left\{\cos\left[\omega\left(t_1+t_2\right)+\pi\left(\eta\left(t_1\right)+\eta\left(t_2\right)\right)\right]\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\cos\left[\omega\left(t_1-t_2\right)+\pi\left(\eta(t_1)-\eta\left(t_2\right)\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

考虑到 A 和 $\eta(t)$ 是相互统计独立的

$$E(A^2)=\frac{1}{2}\times 1^2+\frac{1}{2}\times(-1)^2=1$$

$$R_\xi(t_1,t_2)$$

$$=\frac{1}{2}E\{\cos[\omega(t_1+t_2)+\pi(\eta(t_1)+\eta(t_2))]+\cos[\omega(t_1-t_2)+\pi(\eta(t_1)-\eta(t_2))]\}$$

条件数学期望

$$E(Y\mid x_i)=\sum_j y_j p_{j/i}=\sum_j y_j p\{Y=y_j\mid X=x_i\}$$

全期望公式

$$E(X)=E\{E[X/Y]\}=\sum_j p[Y=y_j]E(X/y_j)$$

注意到

$$\eta(t_1)=m,\quad \eta(t_2)=n$$

$$\eta(t_1)-\eta(t_2)=k,$$

$$\eta(t_1)+\eta(t_2)=\eta(t_1)-\eta(t_2)+2\eta(t_2)=k+2n$$

其中，m,n 是正整数，k 是整数

则

$$E\left\{\cos[\omega(t_1+t_2)+\pi\left(\eta(t_1)+\eta(t_2)\right)]\right.$$

$$\left.+\cos\left[\omega(t_1-t_2)+\pi\left(\eta(t_1)-\eta(t_2)\right)\right]\mid \eta(t_1)-\eta(t_2)=k\right\}$$

$$=\left\{\cos\left(\omega(t_1+t_2)\right)+\cos\left(\omega(t_1-t_2)\right)\right\}(-1)^k$$

相关函数可以写作

$$R_\xi(t_1,t_2)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P_r\left[\eta(t_1)-\eta(t_2)=k\right](-1)^k\left\{\cos\left[\omega(t_1+t_2)\right]+\cos\left[\omega(t_1-t_2)\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda(t_1-t_2)\right)^k}{k!}e^{-\lambda(t_1-t_2)}(-1)^k\left\{\cos\left[\omega(t_1+t_2)\right]+\cos\left[\omega(t_1-t_2)\right]\right\}$$

从相关函数可以知道，相位调制的正弦波过程 $\xi(t)=A\cos(\omega t+\pi\eta(t))$ 的相关函数是连续函数，相应的随机过程是均方连续的，但不是平稳的。

第 11 题

设有实宽平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_\xi(\tau)$，试证

$$P\{|\xi(t+\tau)-\xi(t)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{2}{\varepsilon^2}\left[R_\xi(0)-R_\xi(\tau)\right]$$

提示

首先证明

$$E\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2\right\}=2\left[R_\xi(0)-R_\xi(\tau)\right]$$

接着计算

$$\begin{aligned}E\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2\right\}&=\sum_x x\cdot P\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2=x\right\}\\&\ge\sum_{x\ge\varepsilon^2}x\cdot P\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2=x\right\}\\&\ge\sum_{x\ge\varepsilon^2}\varepsilon^2\cdot P\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2\ge\varepsilon^2\right\}\\&\ge\varepsilon^2\cdot\sum_{x\ge\varepsilon^2}P\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2\ge\varepsilon^2\right\}\\&\ge\varepsilon^2\cdot P\{|\xi(t+\tau)-\xi(t)|\ge\varepsilon\}\end{aligned}$$

综合上式得证。

## 平稳随机过程

第 12 题

设有随机过程 $\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{j\omega_k t}$ 其中 $A_k$, k= 1, 2, 3, …, n 是 n 个实随机变量， $\omega_k$, k = 1, 2, 3, …, n 是 n 个实数。试问各 $A_k$ 之间应满足怎样的条件才能使 $\xi(t)$ 是一个复的平稳随机过程？

提示

$\xi(t)$ 得均值应为零，相关函数应是时间差得函数，与时间原点得位置无关。可求得

各 $A_k$ 均值为零，

各 $A_k$ 之间应该相互正交，即互相关为零。

## 随机分析

第 13 题

设平稳随机过程 $\xi(t)$ 的相关函数为 $R_\xi(\tau)$， 且 $R_\xi(T)=R_\xi(0)$， T 为一常数，T>0，试证：

（1）有 $\dfrac{\xi(t+T)=\xi(t)}{E\left\{\left[\xi(u+T)-\xi(u)\right]\cdot\left[\xi(u+t+T)-\xi(u+t)\right]\right\}}$ 依概率 1 相等；

（2） $R_\xi(t+T)=R_\xi(t)$ 及相关函数具有周期性，其周期为 T。

（具有周期性相关函数的平稳随机过程称为周期性随机过程）

提示（1）：

从计算 $E\left\{\left|\xi(t+T)-\xi(t)\right|^2\right\}$ 的极限为零着手。

提示（2）：

从计算 $E\left\{\left[\xi(u+T)-\xi(u)\right]\cdot\left[\xi(u+t+T)-\xi(u+t)\right]\right\}$ 的极限为零着手

或从计算$E\left\{\left[\xi(u+T)-\xi(u)\right]\cdot\overline{\xi(u+t+T)}\right\}$的极限为零着手

二阶矩过程

第 14 题

设有随机过程$\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}[A_k\cos\varpi_k t+B_k\sin\omega_k t]$，其中$\omega_k$, k= 1, 2, 3, …, n 是给定的实数，$A_k$,$B_k$, k= 1, 2, 3, …, n 是实随机变量，E{$A_k$}= 0, E{$B_k$}=0,各 $A_k$,$B_k$ 间彼此相互统计独立，$D\{A_k\}=\sigma_k^2=D\{B_k\}$，k= 1, 2, 3, …, n。求它的相关函数$R_\xi(t_1,t_2)$。

解（略）

第 15 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$、$\eta(t)$，且$\xi(t)$、$\eta(t)$是相互统计独立的；有设有随机过程$Z(t)$、$\omega(t)$， $Z(t)=\xi(t)+\eta(t)$、$\omega(t)=2\xi(t)+\eta(t)$求$R_z(\tau)$ $R_w(\tau)$ $R_{zw}(\tau)$ $R_{wz}(\tau)$。

解（略）

第 16 题

设$\xi(t)$、$\eta(t)$、$\zeta(t)$为实随机过程，$\zeta(t)=\xi(t)\eta(t)$，$\xi(t)$、$\eta(t)$为相互统计独立的随机过程，则

（1） $R_\zeta(\tau)=R_\xi(\tau)R_\eta(\tau)$

（2）若$P(t)=\xi(t)-\mu_\xi$ $Q(t)=\eta(t)-\mu_\xi$ $R_P(\tau)=e^{-a|\tau|}$ $R_Q(\tau)=e^{-b|\tau|}$

a,b 均为正实数，$\mu_\xi$ $\mu_\eta$为$\xi(t)$、$\eta(t)$的均值，求$R_\xi(t)$。

解（略）

第 17 题

设有随机过程$\{\zeta(t),-\infty<t<\infty\},\zeta(t)=\eta\cos t+\xi\sin t$，其中$\xi,\eta$为统计独立的随机变量，$\xi,\eta$均可取－1 和＋2 两个值，取－1 的概率为$\frac{2}{3}$，取＋2 的概率为$\frac{1}{3}$。

（1）试计算$E\{\zeta(t)\}$相关函数$R_\zeta(t_1,t_2)$。

（2）证$\zeta(t)$是一宽平稳随机过程，但不是严平稳随机过程。

解（1）：

$$E\{\xi\}=E\{\eta\}=-1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=0$$
$$E\{\xi\eta\}=E\{\xi\}\cdot E\{\eta\}=0$$
$$E\{\xi^2\}+E\{\eta^2\}=(-1)^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=2$$

$$E[\zeta(t)]=E[\eta\cos t+\xi\sin t]=0$$

$$R_{\zeta}(t_1-t_2)=E\{[\eta\cos t_1+\xi\sin t_1][\eta\cos t_2+\xi\sin t_2]\}$$

$$=E[\eta^2]\cos t_1\cos t_2+E[\xi^2]\sin t_1\sin t_2$$

$$=2\cos(t_1-t_2)$$

显然它是宽平稳的

解（2）：

t=0 时，$\zeta(t)=\eta$，$\zeta(t)$ 的取值为－1 和 2

t=π/4 时，$\zeta(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\eta+\xi)$，$\zeta(t)$ 的取值为 $-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}/2$，$2\sqrt{2}$，$\zeta(t)$ 的一维分布于 t 有关。

∴它不是严平稳的。

第 18 题

设有随机游动 $\eta(t,s)$，

（1）$\eta(0,s)=0$；

（2）$\eta(t,s)$ 定义在样本点 s 集上，且 $t\geq 0$；

（3）每个时间间隔 T，该过程取一个新的值，

$$\eta(t,s)=Y_n \quad (nT\leq t<(n+1)T)$$

（4）$Y_n$ 是二项分布随机变量，$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，

$\xi_k$ 为取(-a)、(+a)两个可能值的随机变量，且 $P\{\xi_k=-a\}=\frac{1}{2},P\{\xi_k=+a\}=\frac{1}{2},k=1,2,3,\cdots,$ $\xi_j$ 与 $\xi_k$ $(j\neq k)$ 相互统计独立。

（1）试证 $E\{\eta(t,s)\}=0$；

（2）试证 $E\{\eta^2(t,s)\}=na^2=a^2[t/T]$；

（3）当 $T\to 0$，每次跃变值 a 也趋于 0 时，$\frac{a^2}{T}\to\beta,\beta$ 为常数，定义

$$z(t)=\lim_{T\to 0}\{\eta(t,s)\}\Rightarrow\frac{a^2}{T}=\beta$$

试证 $E\{z(t)\}=0,D\{z(t)\}=\beta t$

（4）求 z(t)的概率密度函数；
（5）$\eta(t,s)$、z(t)均为独立增量随机过程，求$C_z(t_1,t_2)$。（过程 z(t)称为维纳过程）。
解（待补充）

第 19 题

设有图题 4－19 所示的电路，其中 $W_0(t)$为输入随机过程，$W_0(t)$为标准的维纳过程（即上题的 z(t)，且其$\beta=1$）；其输出为$\xi(t)=W_0(t)-W_0(t-1)$。求$\xi(t)$的均值和相关函数。

解（待补充）

第 20 题

定义$\xi(t)=\sigma e^{-2at}W_0(e^{2at}-1)$，其中$\sigma,a$均为常数，$\sigma>0,a>0$，$W_0$(.)代表标准的维纳过程，称$\xi(t)$为 Ornstein-Uhlenbeck 过程，求$\xi(t)$的均值和相关函数。
解（待补充）

随机分析、相关函数计算
第 21 题

设有随机过程$\xi(t)$，它的均值为$\mu_\xi(t)$，相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$；若有随机过程$\eta(t)=a(t)\xi(t)+b(t)$，其中 a(t),b(t)是确定性函数，求$\eta(t)$的均值和相关函数。
解（略）

第 22 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_\xi(\tau)=Ae^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$；其中 A,a 为常数，a>0，求$\eta(t)=\dfrac{d\xi(t)}{dt}$的相关函数。
解（略）

第 23 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，它的自协方差为$C_\xi(\tau)=Ae^{-a|\tau|}(\cos\beta\tau+\dfrac{a}{\beta}\sin\beta|\tau|)$；其中 A,a，$\beta$为常数，又$\eta(t)=\dfrac{d\xi(t)}{dt}$，求$\eta(t)$的自协方差函数及方差。
解（略）

第 24 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-a^2\tau^2}$；其中$\sigma$、a 为常数，若有随机过程$\eta(t)=a\dfrac{d\xi(t)}{dt}$，a 为常数，求$\eta(t)$的相关函数。

解（略）

第 25 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)$；且设$\eta(t)=\xi(t)+\dfrac{d\xi(t)}{dt}+\dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$，求$\eta(t)$的相关函数。

解（略）

第 26 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|+\dfrac{1}{3}\alpha^2\tau^2)$；若有随机过程$\eta(t)=\xi(t)+\dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$，求$\eta(t)$的相关函数。

解（略）

第 27 题

设有随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$；若有随机过程$\eta(t)$、$\zeta(t)$定义如下：$\eta(t)=a\xi(t)+b\dfrac{d\xi(t)}{dt}$，$\zeta(t)=c\dfrac{d\xi(t)}{dt}+f\dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$,其中 a,b,c,f 为常数，试求$\eta(t)$和$\zeta(t)$的相关函数。

解（略）

第 28 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，它的均值为 0，相关函数为$R_{\xi}(\tau)$；若$\eta(t)=\int_0^t \xi(u)du$，求$\eta(t)$的方差和自协方差函数。

解（略）

第 29 题

设有随机过程$\xi(t)$，它的均值为$\mu_{\xi}(t)$，相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$，协方差函数为$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)$；若$\eta(t)=a_0\xi(t)+a_1\dfrac{d\xi(t)}{dt}+b_1\int_0^t e^{-\lambda u}\xi(u)du+c$，其中 $a_0$,$a_1$,$b_1$,c 均为实常数，求$\eta(t)$的均值和自协方差函数。

解（略）

系统，短时间的时间平均器

第 30 题

设有实随机过程$\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$加入到一短时间的时间平均器上作为它的输入，它的输出为$\eta(t)$，$\eta(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\xi(u)du$ 式中 t 为输出信号的输出时刻，T 为平均器采用的积分时间间隔。若$\xi(t)=\zeta\cos t$，其中$\zeta$为$(0,1)$内均匀分布的随机变量，

（1）求输入过程的均值和相关函数，问输入过程是否平稳？

（2）证明输出过程的表示式为

$$\eta(t)=\zeta\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos(t-\frac{T}{2})$$

（3）证明输出的均值为

$$E\{\eta(t)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos(t-\frac{T}{2})$$

输出相关函数为

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)^2\cos(t_1-\frac{T}{2})\cos(t_2-\frac{T}{2})$$

问输出是否为平稳过程？

解，见讲义

第 31 题

如果短时间平均器的输入信号为$\xi(t)=\sin(\omega t+\theta)\quad(-\infty<t<\infty)$，其中$\omega$为常数，$\omega$>0，$\theta$为随机相角，它是$(0,2\pi)$内均匀分布的随机变量，试证明：

（1）$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\cos\omega(t_1-t_2)$

（2）它的输出信号表示式为$\eta(t)=\dfrac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\sin(\omega t-\frac{\omega T}{2}+\theta)$

（3）输出信号$\eta(t)$的均值和输出信号相关函数为

$E\{\eta(t)\}=0$，

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2\cos\omega(t_1-t_2)$$

问$\eta(t)$是否平稳？

解，见讲义

第 32 题

若短时间平均器的输入为宽平稳随机过程$\{\xi(t),\quad (-\infty<t<\infty)\}$，其均值为常数$\mu_\xi$，相关函数为$R_\xi(\tau)$，试证明它的输出也是宽平稳随机过程，并计算出它的均值和相关函数。

解，见讲义

第 33 题

如果短时间平均器的输入为宽平稳随机过程$\xi(t)$，它的均值为$\mu_\xi$，协方差函数为

$$C_{\xi\xi}(\tau)=\begin{cases}\sigma^2(1-\frac{|\tau|}{\tau_0}) & (0\le|\tau|\le\tau_0)\\ 0 & (|\tau|\ge\tau_0)\end{cases};$$

$\eta(t)$为其输出过程，试证

$$D\eta(t)=\begin{cases}\sigma^2(1-\frac{1}{3}\frac{T}{\tau_0}) & (0\le T\le\tau_0)\\ \sigma^2\frac{\tau_0}{T}(1-\frac{1}{3}\frac{\tau_0}{T}) & (\tau_0<T)\end{cases}$$

解，见讲义

第 34 题

如果短时间平均器的输入为随机电报信号，它的均值为$\frac{1}{2}$，它的自协方差函数为$C_\xi(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$，$\eta(t)$为平均器的输出过程，试证$\eta(t)$的方差为$D\eta(t)=\frac{1}{4\lambda T}(1-\frac{1}{2\lambda T}+\frac{1}{2\lambda T}e^{-2\lambda T})$

解，见讲义

各态历经性

第 35 题

设有随机过程$\xi(t)$和 N(t)，且$\xi(t)=b+N(t)$，其中 b 为常数，$E\{N(t)\}=0$，N(t)的相关函数为$R_N(\tau)$，即 N(t) 为平稳随机过程。如果$\hat{b}=\frac{1}{T}\int_0^T\xi(u)du$证$E\{\hat{b}\}=b$，且$D\hat{b}=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|\tau|}{T})R_N(\tau)d\tau$

提示：

利用定理证明的方法给予证明

第 36 题

设$\xi(t)$为一随机起始时间的周期过程，它的样本函数见图题 4－36。图中 A 为幅度，T 为周期，A、T 均为常数，$t_0$为起始时间，它是(0,T)上均匀分布的随机变量。求：

（1）$\xi(t)$ 的均值 $E\{\xi(t)\}$、均方差 $E\{\xi^2(t)\}$ 和方差 $D\xi(t)$；

（2）$\xi(t)$ 的时间平均值 $<\xi(t)>$ 和 $<\xi^2(t)>$，问 $\xi(t)$ 是否具有各态历经性？

提示：

随机过程具有随机的起始时刻，具有各态历经性。

第 37 题

设有平稳 Ornstein-Uhlenbeck 过程 $\xi(t)$，它的均值为 $\mu_\xi=0$，相关函数为 $R_\xi(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},\ -\infty<t<\infty$，其中 $\sigma^2,\alpha$ 为常数，$\alpha>0$，试证明该过程满足均值各态历经定理（其实它也符合相关函数各态历经定理（不证））。试说明：利用图题 4－37 所示的方块图可以用一个样本函数求得它的参数 $\sigma^2$ 和 $\alpha=\ln[\frac{\sigma^2}{R_\xi(1)}]$。

提示：

利用定理给予证明

# 第五章

# 平稳随机过程的谱分析及随机过程通过线性系统的分析

## 相关函数和功率谱密度分析

第 1 题

设有周期信号如图题 5－1 所示，求它的时间相关函数和它的功率谱密度。

解：

相关函数周期为 T。

$$R(\tau)=1-\frac{|\tau|}{T}\quad (|\tau|\le\frac{T}{2})$$

$$R(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t-\tau)dt$$

功率谱密度为离散谱，谱线为 1 / T 的倍数。

$$\begin{aligned}P(n)&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}R(\tau)e^{-j\frac{2\pi}{T}n\tau}d\tau\\&=\frac{1}{T}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)f(t-\tau)e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}e^{-j\frac{2\pi}{T}n(t-\tau)}dtd\tau\\&=a_n\cdot a_n^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{j\frac{2\pi}{T}nt}dt\\&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{-T/4}+\int_{-T/4}^{T/4}+\int_{T/4}^{T/2}f(t)e^{-j\omega_0 nt}dt\\&=\frac{1}{T}\frac{1}{n\omega_0}\{[e^{-j\omega_0 n(-\frac{T}{4})}-e^{-j\omega_0 n(-\frac{T}{2})}]\\&\qquad+[e^{-j\omega_0 n(\frac{T}{4})}-e^{-j\omega_0 n(-\frac{T}{4})}]+[e^{-j\omega_0 n(\frac{T}{2})}-e^{-j\omega_0 n(\frac{T}{4})}]\}\\&=\frac{-2j}{n\omega_0 T}\sin\frac{n\omega_0 T}{2}\\&=-j\sin c\frac{n\omega_0 T}{2}\end{aligned}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}\quad \frac{n\omega_0 T}{2}=n\pi$$

$$|a_n|^2=(\sin c\frac{n\omega_0 T}{2})^2$$

第 2 题

设有四个平稳随机过程，已知其相关函数，求其功率谱密度函数:

（1） $R_{\xi}(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos\ 2\pi f_0\tau$， （$f_0$、 $\alpha$为常数， $\alpha>0$)

解（1）：

$e^{-\alpha|\tau|}$的傅立叶变换：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-j2\pi f)\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{(-\alpha-j2\pi f)\tau}d\tau\\&=\frac{1}{\alpha-j2\pi f}+\frac{1}{\alpha+j2\pi f}\\&=\frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}\end{aligned}$$

$\cos 2\pi f_0\tau=\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0\tau}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0\tau}$ 的傅立叶变换：

$$\frac{1}{2}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2}\delta(f-f_0)$$

功率谱密度是相关函数的傅立叶变换，等与上述两项傅立叶变换的卷积，为

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+[2\pi(f-f_0)]^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+[2\pi(f+f_0)]^2}$$

（2） $R_{\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}$， ($\sigma^2$、 $\alpha$为常数， $\alpha>0$)

解（2）： $R_{\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}$

做$R_{\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}$ 的傅立叶变换，得到相应的功率谱密度

$$\begin{aligned}S(f)&=\int R_{\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int\sigma^2e^{-\alpha\tau^2-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\sigma^2\int e^{-(\sqrt{\alpha}\tau-\frac{j2\pi}{2\sqrt{\alpha}})^2}d\tau\cdot e^{(\frac{j\pi f}{\sqrt{\alpha}})^2}\\&=\sigma^2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\cdot e^{-\frac{\pi^2f^2}{\alpha}}\end{aligned}$$

（3） $R_{\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau$， ($\sigma^2$、$\alpha$、$\beta$为常数，$\alpha>0$)

解（3）：

$\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}$ 的傅立叶变换，

$$\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$$

$\cos\beta\tau$ 的傅立叶变换，

$$\frac{1}{2}\delta(2\pi f-\beta)+\frac{1}{2}\delta(2\pi f+\beta)$$

功率谱密度是相关函数的傅立叶变换，等与上述两项傅立叶变换的卷积，为

$$\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2(f-\beta/2\pi)^2}{\alpha}}+\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2(f+\beta/2\pi)^2}{\alpha}}$$

（4） $R_\xi(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T_0} & (|\tau|\le T_0)\\ 0 & (|\tau|\le T_0)\end{cases}$

解（4）：

$$\begin{aligned}S(f)&=\int_{-T_0}^{T_0}(1-\frac{|\tau|}{T_0})e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-T_0}^{0}+\int_0^{T_0}(1-\frac{\tau}{T_0})e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_0^{T_0}(1-\frac{\tau}{T_0})2\cdot\cos 2\pi f\tau d\tau\\&=(1-\frac{\tau}{T_0})\frac{2\sin 2\pi f\tau}{2\pi f}\Big|_0^{T_0}-\int_0^{T_0}\frac{2\sin 2\pi f\tau}{2\pi f}(-\frac{1}{T_0})\tau d\tau\\&=\frac{-2T_0}{(2\pi fT_0)^2}\int_0^{T_0}d\cos 2\pi f\tau\\&=\frac{T_0}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\pi fT_0}{(\pi fT_0)^2}\\&=T_0(\frac{\sin\pi fT_0}{\pi fT_0})^2\end{aligned}$$

第 3 题

设某平稳随机过程的相关函数为 $R_\xi(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos 3\pi\tau$，求其功率谱密度。

解：

$4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau$ 的傅立叶变换，

$$\frac{4}{1+(2\pi f-1)^2}+\frac{4}{1+(2\pi f+1)^2}$$

$\cos 3\pi\tau$ 的傅立叶变换，

$$\frac{1}{2}\delta(2\pi f-3\pi)+\frac{1}{2}\delta(2\pi f+3\pi)$$

功率谱密度是相关函数的傅立叶变换，等与上述两项傅立叶变换的和，为

$$S(f)=\frac{4}{1+(2\pi f-1)^2}+\frac{4}{1+(2\pi f+1)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\delta(2\pi f-3\pi)+\frac{1}{2}\delta(2\pi f+3\pi)$$

第 4 题

设有二平稳随机过程，它们的功率谱密度分别为：

（1）$S_\xi(f)=\dfrac{(2\pi f)^2}{(2\pi f)^4+3(2\pi f)^2+2}$

（2）$S_\xi(f)=\dfrac{(2\pi f)^2+1}{(2\pi f)^4+5(2\pi f)^2+6}$

求其相应相关函数及其均方值。

解（1）：

功率谱密度函数可以写成

$$\begin{aligned}S_\xi(f)&=\frac{(2\pi f)^2}{(2\pi f)^4+3(2\pi f)^2+2}\\&=\frac{(2\pi f)^2}{[(2\pi f)^2+2][(2\pi f)^2+1]}\\&=\frac{2}{(2\pi f)^2+2}+\frac{-1}{(2\pi f)^2+1}\end{aligned}$$

$\dfrac{2}{(2\pi f)^2+2}$ 的傅立叶变换是

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

$\dfrac{-1}{(2\pi f)^2+1}$ 的傅立叶变换是

$$-\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

相关函数可以写成

$$R_\xi(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

均方值为

$$R_\xi(0)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

解（2）：

功率谱密度函数可以写成

$$S_\xi(f)=\frac{(2\pi f)^2+1}{(2\pi f)^4+5(2\pi f)^2+6}$$
$$=\frac{2}{(2\pi f)^2+3}+\frac{-1}{(2\pi f)^2+2}$$

$\frac{2}{(2\pi f)^2+3}$ 的傅立叶变换是

$$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$$

$\frac{-1}{(2\pi f)^2+2}$ 的傅立叶变换是

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

相关函数可以写成

$$R_\xi(\tau)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\tau|}-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

均方值为

$$R_\xi(0)=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}$$

第 5 题

设一平稳随机过程的功率谱密度如图题 5－5 所示，即

$$S_\xi(f)=\begin{cases}S_0 \quad (f_0-\Delta f<|f|<f_0+\Delta f)\\ 0 \ (\text{其他频率})\end{cases}$$

求其相应相关函数及其均方值。

解：

相关函数是

$$R_\xi(\tau)=\int S_\xi(f)e^{j2\pi f\tau}df$$
$$=S_0\int_{-f_0-\Delta f}^{-f_0+\Delta f}e^{j2\pi f\tau}df+S_0\int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f}e^{j2\pi f\tau}df$$

$$= S_0 \frac{1}{j2\pi\tau} e^{-j2\pi f_0 \tau} (e^{j2\pi\Delta f \tau} - e^{-j2\pi\Delta f \tau})$$

$$+ S_0 \frac{1}{j2\pi\tau} e^{j2\pi f_0 \tau} (e^{j2\pi\Delta f \tau} - e^{-j2\pi\Delta f \tau})$$

$$= 4S_0 \Delta f \sin c(2\pi\Delta f \tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$$

均方值为

$$R_\xi(0) = 4S_0 \Delta f$$

求线性系统输出的相关函数，已知系统的冲击响应。

第 6 题

设有线性时不变动态系统，其冲激响应为 h(t)。如果输入为一平稳随机过程 $\xi(t)$，它的相关函数为 $R_\xi(\tau)$，协方差函数为 $C_\xi(\tau)$，试证输出过程 $\eta(\tau)$ 的相关函数可以表示为 $R_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau - u) R_h(u) du$, 其中 $R_h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t-u)dt$。$R_h(u)$ 称为系统的相关函数，并证明 $D\eta(t) = Var\{\eta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(u) R_h(u) du$

证明：

按定义有

$$\eta(\tau) = \int \xi(u) h(\tau - u) du = \int \xi(\tau - u) h(u) du$$

$$R_\eta(t_1, t_2)$$

$$= E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$$

$$= E\left\{\int \xi(t_1 - u_1) h(u_1) du_1 \int \xi(t_2 - u_2) h(u_2) du_2\right\}$$

$$= \int\int E\left\{\xi(t_1 - u_1)\xi(t_2 - u_2)\right\} h(u_1)h(u_2) du_1 du_2$$

$$= \int\int R_\xi(t_1 - t_2 - u_1 + u_2) h(u_1) h(u_2) du_1 du_2$$

令 $\tau = t_1 - t_2 \quad u = u_1 - u_2$

$$= \int\int R_\xi(\tau - u) h(u_1) h(u - u_1) du_1 du$$

$$= \int R_\xi(\tau - u) R_h(u) du$$

即

$$R_h(u) = \int h(u_1) h(u - u_1) du_1$$

同理可证

$$D\eta(t) = Var\{\eta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(-u) R_h(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(u) R_h(u) du$$

其中

$C_\xi(u)$ 是偶函数。

第 7 题

设有一“平均电路”如图题 5－7 所示，即当输入为 x(t)时，平均电路的输出为

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(u)du$$

（1）试证该电路的冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{T} & (0\le t\le T)\\ 0 & (\text{其它时间})\end{cases}$$

并求第 6 题所定义的系统的相关函数；$R_h(\tau)$

如果该电路的输入为一平稳随机过程，其协方差函数为

$$C_\xi(\tau)=\begin{cases}\sigma_\xi^2(1-\frac{|\tau|}{T_0}) & (|\tau|\le T_0)\\ 0 & (|\tau|>T_0)\end{cases}$$

用上题的方法求输出过程 $\eta(\tau)$ 的方差 $D\eta(\tau)$。

解（1）:

由题意可得到

$$y(t)=\int h(t-u)x(u)du=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(u)du$$

比较两个积分式，可以得到

$$h(t-u)=1 \quad -T<u<0$$

$$h(t-u)=0$$

进一步有

$$h(t)=1 \quad 0\le t<T$$

$$h(t)=0$$

解（2）:

$$R_{hh}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t+\tau)\overline{h(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}h(t+\tau)h(t)dt$$

$$=\begin{cases}1-\frac{|\tau|}{T} & |\tau|<T\\ 0 & |\tau|\ge T\end{cases}$$

解（3）:

$$
\begin{aligned}
D\left[\eta(t)\right] &= E\left[\eta(t)\overline{\eta(t)}\right] \\
&= E\left[\int h(t-u)\left[\xi(u)-\mu_\xi(u)\right]du\overline{\int h(t-v)\left[\xi(v)-\mu_\xi(v)\right]dv}\right] \\
&= \iint h(t-u)\overline{h(t-v)}\cdot E\left\{\left[\xi(u)-\mu_\xi(u)\right]\overline{\left[\xi(v)-\mu_\xi(v)\right]}\right\}\cdot dudv \\
&= \iint h(t-u)\overline{h(t-v)}\cdot C_{\xi\xi}(u-v)\cdot dudv \\
&= \int C_{\xi\xi}(u-v)\int h(t-u)\overline{h(t-u+u-v)}du\cdot d(u-v) \\
&= \int C_{\xi\xi}(u-v)R_{hh}\left(-(u-v)\right)\cdot d(u-v) \\
&= \int C_{\xi\xi}(\tau)R_{hh}\left(-\tau\right)\cdot d\tau \\
&= \int \sigma_{\xi\xi}{}^2\left(1-\frac{|\tau|}{T_0}\right)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\cdot d\tau
\end{aligned}
$$

第 8 题

设有线性时不变系统，它的冲激响应为 $h(t)=e^{-\beta t}U(t)$，其中 $\beta$ 为常数， $\beta>0$，U(t)为阶跃函数。如果系统的输入为一宽平稳随机过程，它的相关函数为 $R_\xi(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$，求输入输出间的互相关函数 $R_{\xi\eta}(\tau)$。设 $\alpha=3,\beta=1$,画出 $R_{\xi\eta}(\tau)$。问 $R_{\xi\eta}(\tau)$ 是否对称于 $\tau=0$ 的轴？

解：

计算输入和输出的互相关函数，

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= E\{\xi(t_1)\eta(t_1-\tau)\} \\
&= E\{\xi(t_1)\int \xi(t_1-\tau-u)h(u)du \\
&= \int R_{\xi\xi}(\tau+u)h(u)du \\
&= \int e^{-\alpha|\tau+u|}\cdot e^{-\beta u}U(u)du \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha|\tau+u|}\cdot e^{-\beta u}du
\end{aligned}
$$

设 $\tau>0$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= \int_0^\infty e^{-\alpha|\tau+u|}\cdot e^{-\beta u}du \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cdot e^{-\alpha u-\beta u}du \\
&= e^{-\alpha\tau}\frac{1}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

设 $\tau<0$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau+u|}\cdot e^{-\beta u}du \\
&= \int_0^{-\tau} e^{\alpha(\tau+u)}\cdot e^{-\beta u}du + \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\alpha(\tau+u)}\cdot e^{-\beta u}du \\
&= e^{\alpha\tau}\int_0^{-\tau} e^{(\alpha-\beta)u}du + e^{-\alpha\tau}\int_{-\tau}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)u}du \\
&= e^{\alpha\tau}\frac{1}{\alpha-\beta}(e^{-(\alpha-\beta)\tau}-1) + e^{-\alpha\tau}\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)\tau}
\end{aligned}
$$

显然它们是关于$\tau = 0$不对称的。

第 9 题

设有理想延时电路（见图题 5－9）,如果该电路的输入为宽平稳随机过程$\xi(t)$,其相关函数为$R_{\xi}(\tau)$，求：输出过程$\eta(\tau)$的相关函数$R_{\eta}(\tau)$；输入输出间的互相关函数$R_{\xi\eta}(\tau)$。

解（1)：

输入$\xi(t)$，输出$\eta(t)=\xi(t-a)$。

输入相关函数

$$R_{\xi}(\tau)=E\{\xi(t)\xi(t-\tau)\}$$

输出相关函数

$$R_{\eta}(\tau)=E\{\eta(t)\eta(t-\tau)\}=E\{\xi(t-a)\xi(t-\tau-a)\}=R_{\xi}(\tau)$$

解（2)：

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} \\
&= E\{\xi(t_1)\xi(t_2-a)\} \\
&= R_{\xi}(t_1-t_2+a) \\
&= R_{\xi}(\tau+a)
\end{aligned}
$$

随机分析

第 10 题

设有一宽平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)=A\cos\tau \quad (-\infty<\tau<\infty)$，（A 为常数）其均值为零,试证$\xi(t)$是无限可导的,且$R_{\xi}(\tau)=R_{\dot\xi}(\tau)=R_{\ddot\xi}(\tau)=\cdots\cdots=R_{\xi^{(n)}}(\tau)=\cdots$

解：

因为$R_{\xi}(\tau)=A\cos\tau \quad (-\infty<\tau<\infty)$是无限可导的，因此$\xi(t)$是无限可导的。

$$R_{\xi}(\tau)=A\cos\tau \quad (-\infty<\tau<\infty)$$

$$R_{\dot{\xi}}(\tau)=\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}R_{\xi}(t_1-t_2)=-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}R_{\xi}(\tau)=A\cos\tau$$

$$R_{\ddot{\xi}}(\tau)=\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}R_{\dot{\xi}}(t_1-t_2)=-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}R_{\dot{\xi}}(\tau)=A\cos\tau$$

……

$$R_{\xi^{(n)}}(\tau)=\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}R_{\xi^{k-1}}(t_1-t_2)=-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}R_{\xi^{k-1}}(\tau)=A\cos\tau$$

$$\therefore R_{\xi}(\tau)=R_{\dot{\xi}}(\tau)=R_{\ddot{\xi}}(\tau)=\cdots\cdots=R_{\xi^{(n)}}(\tau)=\cdots$$

## 第 11 题

设有实平稳随机$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)$，试证明$R_{\xi}(0)-R_{\xi}(\tau)\geq\frac{1}{4^n}[R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^n\tau)]$

证明：

设该过程的功率谱密度为 s(f)。

利用不等式可知对$n\geq1$，有

$$\cos^2(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)+1\geq 2\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)$$

于是有$\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos^2(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)+1]df\geq2\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$

所以$\int_0^{\infty}s(f)\bullet[2\cos^2(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)+2]df\geq4\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$

再利用倍角公式$\cos(2\pi f\cdot 2^{n}\tau)=2\cos^2(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)-1$

可得$\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n}\tau)+3]df\geq4\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$

即有$\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n}\tau)]df+3\int_0^{\infty}s(f)df\geq4\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$

由于该过程是实平稳过程，因此可知：

$$R_{\xi}(2^n\tau)=2\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n}\tau)]df, R_{\xi}(0)=2\int_0^{\infty}s(f)df, R_{\xi}(2^{n-1}\tau)=2\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$$

于是$R_{\xi}(2^n\tau)+3R_{\xi}(0)\geq4R_{\xi}(2^{n-1}\tau)$

即有$4R_{\xi}(0)-4R_{\xi}(2^{n-1}\tau)\geq R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^n\tau)$，$n\geq1$

从而$R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^{n-1}\tau)\geq\frac{1}{4}[R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^n\tau)]$，$n\geq1$

于是可得$R_{\xi}(0)-R_{\xi}(\tau)\geq\frac{1}{4^n}[R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^n\tau)]$证毕

## 相关函数和功率谱密度分析

第 12 题

试证明表题 5－12 中相应的功率谱密度表达式的正确性。表中 $\xi(t)$ 代表平稳随机过程，$R_\xi(\tau)$ 代表 $\xi(t)$ 的相关函数，$S_\xi(f)$ 代表 $\xi(t)$ 的功率谱密度。

（1）过程 $a\xi(t)$，相关函数 $|a|^2 R_\xi(\tau)$，功率谱密度 $|a|^2 S_\xi(f)$

（2）过程 $\frac{d\xi(t)}{dt}$，相关函数 $-\frac{d^2R_\xi(\tau)}{d\tau^2}$，功率谱密度 $(2\pi f)^2 S_\xi(f)$

（3）过程 $\frac{d^n\xi(t)}{dt^n}$，相关函数 $(-1)^n\frac{d^{(2n)}R_\xi(\tau)}{d\tau^{2n}}$，功率谱密度 $(2\pi f)^{2(n)} S_\xi(f)$

（4）过程 $\xi(t)e^{\pm j2\pi f_0\tau}$，相关函数 $R_\xi(t)e^{\pm j2\pi f_0\tau}$，功率谱密度 $S_\xi(f\mp f_0)$

解（1）：

$$R_\eta(t_1-t_2)=E\{a\xi(t_1)\cdot a\xi(t_2)\}=a^2R_\xi(\tau)$$
$$S_\eta(f)=a^2S_\xi(f)$$

解（2）：

$$\begin{aligned}R_\eta(t_1-t_2)&=E\{\frac{d\xi(t_1)}{dt_1}\frac{d\xi(t_2)}{dt_2}\}\\&=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_\xi(t_1-t_2)=-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}R_\xi(\tau)\end{aligned}$$
$$S_\eta(f)=(2\pi f)^2S_\xi(f)$$

解（3）：

$$\begin{aligned}R_\eta(t_1-t_2)&=E\{\frac{d^n\xi(t_1)}{dt_1{}^n}\frac{d^n\xi(t_2)}{dt_2{}^n}\}\\&=\frac{\partial^{2n}}{\partial t_1{}^n\partial t_2{}^n}R_\xi(t_1-t_2)\\&=(-1)^n\frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}}R_\xi(\tau)\end{aligned}$$
$$S_\eta(f)=(2\pi f)^{2n}S_\xi(f)$$

解（4）：

$$\begin{aligned}R_\eta(t_1-t_2)&=E\{\xi(t_1)e^{\pm j2\pi f_0t_1}\xi(t_2)e^{\mp j2\pi f_0t_2}\}\\&=R_\xi(t_1-t_2)e^{\pm j2\pi f_0(t_1-t_2)}\\&=R_\xi(\tau)e^{\pm j2\pi f_0\tau}\end{aligned}$$
$$S_\eta(f)=S_\xi(f\mp f_0)$$

线性系统输出的相关函数、功率谱密度函数，已知系统的组成电路和频率响应。

第 13 题

设有平稳随机过程 $\xi(t)$,它的样本函数如图题 5－13（a）所示。每个脉冲的宽度为 $\Delta$，

幅度为$\frac{1}{\Delta}$，即每个脉冲的面积为 1，而脉宽$\Delta \to 0$；脉冲的出现规律符合泊松分布，即单位时间内出现的平均脉冲个数为$\lambda$，不相交叠的时间间隔内出现的脉冲数是相互独立的，$p(n,T)=\frac{(\lambda T)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda T}, n=0,1,2,\cdots$；每个脉冲的极性可正可负，出现正或负的概率各为$\frac{1}{2}$，不同脉冲出现正或负是相互统计独立的。

（1）求此随机过程的相关函数$R_{\xi}(\tau)$；

（2）求它的功率谱密度$S_{\xi}(f)$；

（3）若把该随机信号送入积分电路，求其输出$\eta(\tau)$的样本函数。输出随机信号的功率谱密度$S_{\eta}(f)$为何（电路如图题 5－13（b）所示）？

解（1）：

首先考虑$\Delta$有限的情况，

$|\tau|<\Delta$

$\xi(t)$以概率$\lambda\Delta$取样于脉冲上，

$\xi(t)$以概率$(1-\lambda\Delta)$取样于脉冲外

$\xi(t)$在取样于脉冲外，对相关函数的贡献为零，

$\xi(t),\xi(t-\tau)$不在同一个脉冲上，对相关函数的贡献为零，

$\xi(t),\xi(t-\tau)$在同一个脉冲上的概率是，$\left[1-\frac{|\tau|}{\Delta}\right]$

相应的相关函数是，$R_{\xi\xi}(\tau)=E\left\{\xi(t)\xi(t-\Delta)\right\}=\lambda\Delta\cdot\left[1-\frac{|\tau|}{\Delta}\right]\cdot\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$

$|\tau|>\Delta$

$\xi(t),\xi(t-\tau)$不在同一个脉冲上，对相关函数的贡献为零，

这时有

$E\{\xi(t)\xi(t-\Delta)\}=0$

因此有相关函数

$$R_{\xi\xi}(\tau)=E\left\{\xi(t)\xi(t-\Delta)\right\}=\lambda\Delta\cdot\left[1-\frac{|\tau|}{\Delta}\right]\cdot\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$$

如果$\Delta\to 0$，

$R_{\xi}(\tau)$是$\delta$函数。

解（2）：

如果相关函数是$1-\frac{|\tau|}{T_0}$，相应的功率谱是$T_0[\sin c(\pi f T_0)]^2$。

考虑到$\xi(t)$相关函数是

$$R_{\xi\xi}(\tau)=E\{\xi(t)\xi(t-\Delta)\}=\lambda\Delta\cdot\left[1-\frac{|\tau|}{\Delta}\right]\cdot\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$$

相应的功率谱是

$\lambda[\sin c(\pi\ f\ \Delta)]^2$。

如果再考虑$\Delta\to 0$，

相应的功率谱是白的，是$\lambda$。

解（3）：

首先考虑理想积分器的情形

其次考虑一阶低通滤波器的情形

在脉冲持续时间内电容充电，幅度达到$\dfrac{1}{\Delta}$。

在脉冲结束后，电容以 RC 时间常数放电。

再研究输出功率谱

输入功率谱　$\lambda$

低通滤波器频率响应$|H(j\omega)|^2=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$　$\alpha=\dfrac{1}{RC}$

低通滤波器输出功率谱$\dfrac{\lambda\alpha^2}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$

第 14 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$,它的样本函数如图题 5－14 所示。每个脉冲的波形为负指数波形，即$ke^{-k(t-u)}U(t-u)$，u 为脉冲出现时刻，它符合泊松分布规律，且单位时间内出现的平均脉冲个数为$\lambda=1$。求证$\xi(t)$的功率谱密度$S_\xi(f)$为$S_\xi(f)=\dfrac{k^2}{(2\pi f)^2+k^2}$。

解（待补充）：

解：

每个脉冲波形是：$ke^{-k(t-u)}U(t-u)$，相当于典型的脉冲波形经过 RC 低通滤波器（题 5.13）

激励信号是$\delta$脉冲，它的功率谱是白的。

低通滤波器传递函数是$|H(j2\pi f)|=\dfrac{k^2}{(2\pi f)^2+k^2}$

因此$\xi(t)$的功率谱是$S_\xi(f)=\dfrac{k^2}{(2\pi f)^2+k^2}$

求线性系统输出的功率谱密度函数，系统的组成电路和频率响应。

第 15 题

设有图题 5－15 所示的线性反馈系统，其中 h(t)、k(t)分别为两个方块的冲激响应，H(jf)、K(jf)分别为其相应的转移函数，e(t)代表误差信号，即输入信号和反馈信号之差。如果在输入端送入的信号是一平稳随机过程 $\xi(t)$ ,在系统中又进入一平稳随机过程（即噪声）n(t),若 $\xi(t)$ 和 n(t)间是相关的，又是联合平稳的，求：

（1）输出端 $\eta(\tau)$ 功率谱密度 $S_\eta(f)$；

（2）在相减器输出端获得的误差信号 e(t)的功率谱密度 $S_e(f)$。

解（1）：

由题设知：

$$e(t)=\xi(t)-\eta(t)$$
$$\eta(t)=[e(t)*h(t)+n(t)]*k(t)$$

转换到频域，求解输入输出信号的关系有，

$$F_e(j2\pi f)=F_\xi(j2\pi f)-F_\eta(j2\pi f)$$
$$\begin{aligned}F_\eta(j2\pi f)&=[F_e(j2\pi f)\cdot H(j2\pi f)+F_n(j2\pi f)]\cdot K(j2\pi f)\\&=F_\xi(j2\pi f)\cdot H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)\\&\quad-F_\eta(j2\pi f)\cdot H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)\\&\quad+F_n(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}F_\eta(j2\pi f)&=F_\xi(j2\pi f)\frac{H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}\\&\quad+F_n(j2\pi f)\frac{K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}\\&=F_\xi(j2\pi f)H_1(j2\pi f)+F_n(j2\pi f)H_2(j2\pi f)\end{aligned}$$
$$H_1(j2\pi f)=\frac{H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$
$$H_2(j2\pi f)=\frac{K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$
$$\eta(t)=\xi(t)\otimes h_1(t)+n(t)\otimes h_2(t)$$
$$\eta(t)=\xi(t)\otimes h_1(t)+n(t)\otimes h_2(t)$$
$$\eta(t-\tau)=\xi(t-\tau)\otimes h_1(t-\tau)+n(t-\tau)\otimes h_2(t-\tau)$$

计算输出信号的相关函数

$$\begin{aligned}E\left[\eta(t)\eta(t-\tau)\right]&=\xi(t)\otimes h_1(t)\cdot\xi(t-\tau)\otimes h_1(t-\tau)\\&\quad+n(t)\otimes h_2(t)\cdot\xi(t-\tau)\otimes h_1(t-\tau)\\&\quad+\xi(t)\otimes h_1(t)\cdot n(t-\tau)\otimes h_2(t-\tau)\\&\quad+n(t)\otimes h_2(t)\cdot n(t-\tau)\otimes h_2(t-\tau)\end{aligned}$$

$$E[\eta(t)\eta(t-\tau)]=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(u)R_{h_1h_1}(\tau-u)du+\int_{-\infty}^{\infty}R_{n\xi}(u)R_{h_2h_1}(\tau-u)du$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi n}(u)R_{h_1h_2}(\tau-u)du+\int_{-\infty}^{\infty}R_{nn}(u)R_{h_2h_2}(\tau-u)du$$
$$S_{\eta\eta}(f)=S_{\xi\xi}(f)H_1(f)\overline{H_1(f)}+S_{n\xi}(f)H_2(f)\overline{H_1(f)}$$
$$+S_{\xi n}(f)H_1(f)\overline{H_2(f)}+S_{nn}(f)H_2(f)\overline{H_2(f)}$$

同理可计算出

$$S_{ee}(f)=S_{\xi\xi}(f)H_3(f)\overline{H_3(f)}+S_{n\xi}(f)H_4(f)\overline{H_3(f)}$$
$$+S_{\xi n}(f)H_3(f)\overline{H_4(f)}+S_{nn}(f)H_4(f)\overline{H_4(f)}$$

其中

$$H_1(j2\pi f)=\frac{H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$
$$H_2(j2\pi f)=\frac{K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$

第 16 题

设有图题 5－16 所示的乘法器，它的两个输入为$\xi(t)$和$\eta(\tau)$，$\xi(t)$和$\eta(\tau)$为相互统计独立的平稳随机过程，$\zeta(t)$为其输出。求$\zeta(t)$的相关函数和它的功率谱密度。给定$\xi(t)$的相关函数为$R_\xi(\tau)$，其功率谱密度为$S_\xi(f)$，$\eta(\tau)$的相关函数为$R_\eta(\tau)$，相应的功率谱密度为$S_\eta(f)$。

解：由题设知：$\zeta(t)=\xi(t)\eta(t)$

输出的相关函数是，

$$\begin{aligned}R_\zeta(t_1,t_2)&=E\{\xi(t_1)\eta(t_1)\xi(t_2)\eta(t_2)\}\\&=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}\\&=R_\xi(t_1-t_2)R_\eta(t_1-t_2)\\&=R_\xi(\tau)R_\eta(\tau)\end{aligned}$$

输出的功率谱密度是

$$\begin{aligned}S_\zeta(f)&=\int R_\zeta(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int S_\xi(f_1)S_\eta(f-f_1)df_1\end{aligned}$$

第 17 题

设有图题 5－17A 所示的调制器，它的两个输入为$\xi(t)$和$\eta(\tau)$。$\xi(t)$为零均值的平稳随机过程，其功率谱密度为$S_\xi(f)$，当｜f｜>$f_c$ 时$S_\xi(f)$＝0，（见图题 5－17B）。$\eta(\tau)=\cos(2\pi f_0+\theta)$，其中 $f_0$ 为常数，$\theta$是均匀分布于$(0,2\pi)$上的随机变量。$\xi(t)$和$\theta$是

相互统计独立的。调制器的输出$\zeta(t)=\xi(t)\ \eta(\tau)=\xi(t)\ \cos(2\pi f_0+\theta)$。试证明：

（1）输出过程为平稳随机过程，其相关函数为

$$R_\zeta(\tau)=\frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos(2\pi f_0\tau);$$

（2）其输出功率谱密度为下式，并画出$S_\zeta(f)$。

$$S_\zeta(f)=\frac{1}{4}\{S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0)\},$$

解（1）：

计算输出的均值：

$$\begin{aligned}E\{\zeta(t)\}&=E\{\xi(t)\cos(2\pi f_0+\theta)\}\\&=E\{\xi(t)\}E\{\cos(2\pi f_0t+\theta)\}\\&=0\end{aligned}$$

计算输出的相关函数：

$$\begin{aligned}&E\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\}\\&=E\{\xi(t_1)\cos(2\pi f_0+\theta)\xi(t_2)\cos(2\pi f_0+\theta)\}\\&=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}E\{\cos(2\pi f_0t_1+\theta)\xi(t_2)\cos(2\pi f_0t_2+\theta)\}\\&=R_\xi(t_1-t_2)E\{\frac{1}{2}\cos 2\pi f_0(t_1-t_2)+\frac{1}{2}\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\theta]\}\\&=\frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\end{aligned}$$

解（2）：

改写输出的相关函数，

$$\begin{aligned}&E\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\}\\&\quad=\frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\\&\quad=\frac{1}{4}R_\xi(\tau)e^{j2\pi f_0\tau}+\frac{1}{4}R_\xi(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}\end{aligned}$$

对输出信号的相关函数作付利叶变换

$$S_\zeta(f)=\frac{1}{4}\{S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0)\},$$

第 18 题

设有随机过程$\eta(t)=a\cos[\omega_0t-\phi(t)+\theta]$,其中 a 和$\omega_0=2\pi f_0$为常数，$\theta$为均匀分布于$[0,2\pi]$上的随机变量，$\phi(t)$为平稳随机过程，$\phi(t)$和$\theta$是相互统计独立的，试证明：（1）

$R_\eta(t_1,t_2)=\dfrac{a^2}{2}\mathrm{Re}\{\exp(j\omega_0\tau)E[\exp(j\varphi(t_2)-j\varphi(t_1))]\}$其中$t_1-t_2=\tau$，Re{ }指实部。

（2）又如果 $\phi(t)=b\cos(\omega_m t+\theta^{'})$，其中 $\omega_m=2\pi f_m$,b 为常数，$\theta^{'}$ 为均匀分布于 $[0,2\pi]$ 上的随机变量，$\theta$ 和 $\theta^{'}$ 是相互统计独立的，利用关系式 $\exp\{jz\cos\theta\}=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}2j^n J_n(z)\cos n\theta$，其中 $J_0$,$J_n$ 为贝塞尔函数，求 $R_\eta(\tau)$。

解（1）：

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(t_1,t_2)&=E\left[\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\right]\\
&=E\left[a\cos[\omega_0 t_1-\phi(t_1)+\theta]a\cos[\omega_0 t_2-\phi(t_2)+\theta]\right]\\
&=a^2E_\theta E_\phi\left[\cos[\omega_0 t_1-\phi(t_1)+\theta+\omega_0 t_2-\phi(t_2)+\theta]\right]\\
&\quad a^2E_\theta E_\phi\left[\cos[\omega_0 t_1-\phi(t_1)+\theta-\omega_0 t_2+\phi(t_2)-\theta]\right]\\
&=a^2E_\phi\left[\cos[\omega_0 t_1-\phi(t_1)-\omega_0 t_2+\phi(t_2)]\right]\\
&=a^2E_\phi\left[\cos[(\omega_0 t_1-\omega_0 t_2)-(\phi(t_1)-\phi(t_2))]\right]\\
&=a^2\cos(\omega_0 t_1-\omega_0 t_2)\cdot E_\phi\left[\cos(\phi(t_1)-\phi(t_2))\right]\\
&\qquad+a^2\sin(\omega_0 t_1-\omega_0 t_2)\cdot E_\phi\left[\sin(\phi(t_1)-\phi(t_2))\right]\\
&=\frac{1}{2}a^2E_\phi\left[e^{j\omega_0(t_1-t_2)-\phi(t_1)+\phi(t_2)}+e^{-j\omega_0(t_1-t_2)+\phi(t_1)-\phi(t_2)}\right]\\
&=\frac{1}{2}a^2\,\mathrm{Re}\left[e^{j\omega_0(t_1-t_2)}\right]E_\phi\left[e^{-j\phi(t_1)+j\phi(t_2)}\right]
\end{aligned}
$$

解（2）（待补充）：

第 19 题

设有微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{dy(t)}{dt}+4y(t)+z(t)=\xi_1(t)\\
\dfrac{dz(t)}{dt}+9z(t)=\xi_2(t)
\end{cases}
$$

$\xi_1(t),\xi_2(t)$ 为平稳随机过程，而且是联合平稳的，已知

$$
S_{\xi_1}(f)=\frac{2\sigma_1^2}{(2\pi f)^2+1}
$$

$$
S_{\xi_2}(f)=\frac{4\sigma_2^2}{(2\pi f)^2+4}
$$

$$
S_{\xi_1\xi_2}(f)=\frac{2\pi a}{[(2\pi f)^2-2]^2+j2\pi f}
$$

求 y(t)、z(t)的功率谱密度 $S_y(f),S_z(f)$ 及其互谱密度 $S_{yz}(f)$。

解（待补充）:

根据微分方程（2），做付利叶变换有，

$$\left[j\cdot 2\pi f+9\right]\cdot F\left[z(t)\right]=F\left[\xi_2(t)\right]$$

$$F\left[z(t)\right]=\frac{1}{\left[j\cdot 2\pi f+9\right]}F\left[\xi_2(t)\right]$$

$$H_2(jf)=\frac{1}{j\cdot 2\pi f+9}$$

由此可以得到

$$S_z(f)=\left|\frac{1}{j2\pi f+9}\right|^2\cdot S_{\xi_2}(f)$$

$$=\frac{1}{[(2\pi f)^2+81]}\cdot\frac{4\sigma_2{}^2}{[(2\pi f)^2+4]}$$

根据微分方程（1），做付利叶变换有，

$$\left[\left(j\cdot 2\pi f\right)^2+2j\cdot 2\pi f+4\right]\cdot F\left[y(t)\right]=F\left[\xi_1(t)-z(t)\right]$$

$$F\left[y(t)\right]=\frac{1}{\left[\left(j\cdot 2\pi f\right)^2+2j\cdot 2\pi f+4\right]}F\left[\xi_1(t)-z(t)\right]$$

$$H_1(jf)=\frac{1}{\left[\left(j\cdot 2\pi f\right)^2+2j\cdot 2\pi f+4\right]}$$

由此可以得到

$$S_z(f)=\left|\frac{1}{\left[\left(j\cdot 2\pi f\right)^2+2j\cdot 2\pi f+4\right]}\right|^2\cdot S_{\xi_2-z}(f)$$

求 $S_{\xi_2-z}(f)$，先求 $R_{\xi_2-z}(\tau)$，

$$R_{\xi_1-z}(\tau)=E\left\{\left[\xi_1(t+\tau)-z(t+\tau)\right]\overline{\left[\xi_1(t)-z(t)\right]}\right\}$$

$$=E\left\{\xi_1(t+\tau)\overline{\xi_1(t)}-\xi_1(t+\tau)\overline{z(t)}-z(t+\tau)\overline{\xi_1(t)}+z(t+\tau)\overline{z(t)}\right\},$$

$$=R_{\xi_1,\xi_1}(\tau)-R_{\xi_1,z}(\tau)-R_{z,\xi_1}(\tau)+R_{z,z}(\tau)$$

再求 $S_{\xi_2-z}(f)$，

$$S_{\xi_1-z}(\tau)=F\left\{R_{\xi_1,\xi_1}(\tau)-R_{\xi_1,z}(\tau)-R_{z,\xi_1}(\tau)+R_{z,z}(\tau)\right\}$$

$$=S_{\xi_1,\xi_1}(f)-S_{\xi_1,\xi_2}(\tau)\overline{H_2(jf)}-S_{\xi_2,\xi_1}(\tau)H_2(jf)+\left|H_2(jf)\right|^2S_{\xi_2,\xi_2}(f),$$

$$S_{\xi_1-z}(\tau)=S_{\xi_1,\xi_1}(f)-S_{\xi_1,\xi_2}(\tau)\overline{H_2(jf)}-S_{\xi_2,\xi_1}(\tau)H_2(jf)+\left|H_2(jf)\right|^2S_{\xi_2,\xi_2}(f)$$

$$=$$

第 20 题

设有 $\frac{d\eta(t)}{dt}+\beta\eta(t)=t\xi(t)$ 所表示的动态系统，在 t=0 时动态系统加上信号 $t\xi(t)$，其中 $\xi(t)$ 是平稳随机过程，它的功率谱密度为 $S_\xi(f)=\sigma^2\frac{2\alpha}{(2\pi f)^2+\alpha^2}$，动态系统具有零初始状态。求在 t 时 $\eta(t)$ 的方差 D $\eta(t)$。题中 $\alpha$、$\beta$、$\sigma$ 均为常数。

解（待确认）：

由系统得微分方程得到系统的频率响应喝冲激响应：

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+\beta}$$

$$h(t)=\exp(-\beta t),\quad t\geq 0$$

系统输入的相关函数是，

$$\begin{aligned}
&E\{t_1t_2\xi(t_1)\xi(t_2)\}\\
&\quad=t_1t_2R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\\
&\quad=t_1t_2\sigma^2\exp[-\alpha|t_1-t_2|]
\end{aligned}$$

系统输出和它的均值是，

$$\eta(t)=\int_0^t h(t-u)u\xi(u)du$$

$$\begin{aligned}
&E\{\eta(t)\}\\
&\quad=\int_0^t h(t-u)uE\{\xi(u)\}du\\
&\quad=\int_0^t h(t-u)u\cdot 0\cdot du\\
&\quad=0
\end{aligned}$$

系统输出的方差是，

$$
\begin{aligned}
D\{\eta(t)\} &= R_{\eta\eta}(t,t) \\
&= E\left\{\int_0^t h(t-u)u\xi(u)du\int_0^t \overline{h(t-v)v\xi(v)}dv\right\} \\
&= \int_0^t h(t-u)\int_0^t \overline{h(t-v)}vu\cdot E\left[\xi(u)\overline{\xi(v)}\right]dvdu \\
&= \int_0^t h(t-u)\int_0^t \overline{h(t-v)}vuR_{\xi\xi}(u,v)dvdu \\
&= \int_0^t \exp[-\beta(t-u)]\int_0^t \exp[-\beta(t-v)]vu\sigma^2\exp[-\alpha|u-v|]dvdu \\
&= \sigma^2\int_0^t\int_0^t \exp[-\beta(2t-u-v)-\alpha|u-v|]vudvdu \\
&= \sigma^2\exp[-2\beta t]\int_0^t\int_0^t \exp[\beta(u+v)-\alpha|u-v|]vudvdu \\
&= \frac{1}{4}\sigma^2\exp[-2\beta t]\left\{\frac{2[1-\exp(-\alpha t)][\exp(2\beta t)(1-2\beta t+2\beta^2t^2)-1]}{\alpha\beta^3}-\right. \\
&\qquad \left.\frac{\exp(-\alpha t)[-1+\exp(2\beta t)][-2+2\exp(\alpha t)-2\alpha t-\alpha^2t^2]}{\beta\alpha^3}\right\}
\end{aligned}
$$

第 21 题

设有图题 5－21 所示的线性系统，图中 y(t)=x(t)-x(t-T)　$z(t)=\int_{-\infty}^{t}y(u)du$。（1）试求系统的转移函数 H(jf)；如果输入端的输入信号是白噪声，其相关函数为 $S_0\delta(\tau)$，（2）求输出随机过程的均方值。（利用关系式 $\int_0^\infty \frac{\sin^2\alpha x}{x^2}dx=|\alpha|\frac{\pi}{2}$）

解（待确认）：

首先确定系统输入和输出的关系：

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \int_{-\infty}^{t} y(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{t}\left[x(u)-x(u-T)\right]du \\
&= \int_{-\infty}^{t} x(u)du-\int_{-\infty}^{t} x(u-T)du \\
&= \int_{-\infty}^{t} x(u)du-\int_{-\infty}^{t-T} x(u-T)d(u-T) \\
&= \int_{-\infty}^{t} x(u)du-\int_{-\infty}^{t-T} x(v)d(u-T) \\
&= \int_{t-T}^{t} x(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)du
\end{aligned}
$$

系统是一个短时间平均器。它的冲击响应是

$$
h(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le T \\ 0 & otherwise\end{cases}
$$

考虑输入信号 $x(t)$ 为白噪声，相关函数和功率谱为

$$R_{xx}(\tau)=S_0\delta(\tau)$$

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}S_0\delta(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau=S_0$$

输出信号的相关函数是，

$$S_{zz}(f)=|H(jf)|^2S_{xx}(f)=[(-\frac{1}{2\pi f})^2+\pi^2\delta^2(f)]\cdot[(1-\cos 2\pi fT)^2+\sin^2(2\pi fT)]S_0$$

$$=[(-\frac{1}{2\pi f})^2+\pi^2\delta^2(f)]\cdot 4\sin^2(\pi fT)\cdot S_0=[\frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2}+\pi^2\delta^2(f)\cdot 4\sin^2(\pi fT)]\cdot S_0$$

所以输出的均方值为：

$$E\{z^2(t)\}=R_{zz}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{zz}(f)\cdot\exp(j2\pi ft)df\big|_{t=0}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2}+\pi^2\delta^2(f)\cdot 4\sin^2(\pi fT)]\cdot S_0df=\frac{S_0T}{2}$$

$$R_{zz}(\tau)=E\left[z(t)z(t-\tau)\right]$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)x(u)du\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau-v)x(v)dv\right]$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)h(t-\tau-v)x(u)x(v)dudv\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)h(t-\tau-v)R_{xx}(u-v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\alpha-v)h(t-\tau-v)R_{xx}(\alpha)d\alpha dv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\alpha-v)h(t-\tau-v)S_0\delta(\alpha)d\alpha dv$$

$$=S_0\int_{-\infty}^{\infty}h(t-v)h(t-\tau-v)dv$$

$$=S_0\int_{-\infty}^{\infty}h(\beta)h(\beta-\tau)d\beta$$

$$=S_0T\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T} & |\tau|\le T\\ 0 & |\tau|>T\end{cases}$$

$$E\{z^2(t)\}=R_{zz}(0)=S_0T$$

第 22 题

设有图题 5－22 所示的二个输入端、一个输出端的线性离散时间动态系统，它的充激响应是 $1\times 2$ 的矩阵 h(n,k)。当 $n\ge k$ 时 $h(n,k)=(\alpha^{n-k}\sin\frac{n\pi}{2},\alpha^{n-k}\cos\frac{n\pi}{2})$，当 n<k 时 $h(n,k)=(0,0)$，其中 $\alpha$ 为常数，且 $|\alpha|<1$（$|\alpha|<1$ 保证了系统的稳定性）。如果系统的输

入为离散时间的平稳正态过程

$$U(n)=\begin{pmatrix}u_1(n)\\u_2(n)\end{pmatrix}\quad(n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$$

其中

$$E\{U(n)\}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad R_{[UU]}(n_1,n_2)=\begin{pmatrix}2\gamma^{|n_1-n_2|} & (-\frac{\gamma}{3})^{|n_1-n_2|}\\(-\frac{\gamma}{3})^{|n_1-n_2|} & 2\gamma^{|n_1-n_2|}\end{pmatrix}$$

其中$\gamma$为常数，$|\gamma|<1, n_1, n_2=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$, 并且假定$|\gamma|\neq|\alpha|, |\gamma|\neq 3|\alpha|$。求输出过程 Z(n)的相关函数。

解（待补充）：

第 23 题

设有一线性系统，它的状态变量表示式为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\left(e^{-t^2},1\right)\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\quad(t\geq 0)$$

设状态矢量的初始值$\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}$是一对相互统计独立的标准化正态分布的随机变量，输入过程是平稳正态过程，均值为零，相关函数为$R_u(\tau)=\begin{cases}1-|\tau| & (|\tau|\leq 1)\\0 & (|\tau|>1)\end{cases}$且 u(t)和$\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}$是相互统计独立的。求该系统的状态转移矩阵$\phi(t_1,t_2)$,计算状态矢量$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$的方差矩阵$\sigma_x^2(t)$及输出过程 y(t)的方差$\sigma_y^2(t)$。

解（待补充）：

# 第六章　高斯过程

第 1 题

设 n 维正态分布随即变量各分量的均值为零，即，它的协方差矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ & & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ & & \cdots & & & & \cdots \\ & & & & n-2 & n-2 & n-2 \\ & & & & & n-1 & n-1 \\ & & & & & & n \end{bmatrix}$$

求它的概率密度函数。

解：

观察协方差矩阵，做线性变换

$$\begin{cases} w_1 = x_1 \\ w_2 = x_2 - x_1 \\ \cdots \qquad \cdots \\ w_k = x_k - x_{k-1} \\ \cdots \qquad \cdots \\ w_n = x_n - x_{n-1} \end{cases}$$

相应 w 的相关矩阵是单位矩阵。它的概率密度函数为

$$f_\xi\left(w_1, w_2, \cdots, w_n\right)$$
$$= \frac{2}{\left(2\pi\right)^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[w_1{}^2 + w_2{}^2 + w_3{}^2 + \cdots + w_n{}^2\right]\right\}$$

相应 x 的概率密度函数为

$$f_\xi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$
$$= \frac{2}{\left(2\pi\right)^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x_1{}^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(x_3 - x_2\right)^2 + \cdots + \left(x_n - x_{n-1}\right)^2\right]\right\}$$

第 2 题

$\xi, \eta$ 是相互统计独立的、正态分布的随即变量，且他们具有相同的概率密度 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$，

试求随机变量 $U = \alpha\xi + \beta\eta$ 和 $V = \alpha\xi - \beta\eta$ 间的相关函数以及 $U$ 、$V$ 的二维概率密度。

解：

正态分布的随机变量的线性变换仍服从正态分布，$\therefore$ $U$ 、$V$ 是正态分布的，

它们的均值、协方差是，

$$E[U]=E[\alpha\xi+\beta\eta]=(a+b)\mu$$
$$E[V]=E[\alpha\xi-\beta\eta]=(a-b)\mu$$

$$D[U]=\mathrm{cov}[UU]$$
$$=E\left[\left((\alpha\xi+\beta\eta)-(\alpha\mu+\beta\mu)\right)^2\right]$$

$$=\alpha\sigma^2+\beta\sigma^2$$

$$D[V]=\mathrm{cov}[VV]$$
$$=E\left[\left((\alpha\xi-\beta\eta)-(\alpha\mu-\beta\mu)\right)^2\right]$$

$$=\alpha\sigma^2+\beta\sigma^2$$

$$\mathrm{cov}[UV]=\mathrm{cov}[VU]$$

$$=E\left[\left((\alpha\xi+\beta\eta)-(\alpha\mu+\beta\mu)\right)\left((\alpha\xi-\beta\eta)-(\alpha\mu-\beta\mu)\right)\right]$$

$$=E\left\{\left[(\alpha\xi-\alpha\mu)+(\beta\eta-\beta\mu)\right]\left[(\alpha\xi-\alpha\mu)-(\beta\eta-\beta\mu)\right]\right\}$$
$$=E\left\{(\alpha\xi-\alpha\mu)^2-(\beta\eta-\beta\mu)^2\right\}$$
$$=\alpha^2\sigma^2-\beta^2\sigma^2$$

相应的协方差矩阵：

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\ (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\end{bmatrix}$$

相关系数：

$$r=(\alpha^2-\beta^2)\big/(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\sigma_U=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}\sigma$$

$$\sigma_V=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}\sigma$$

相应的二维概率密度：

$$f_{UV}(u,v)$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_U\sigma_V\sqrt{1-r^2}}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{u-\mu_U}{\sigma_U}\right)^2-2r\frac{u-\mu_U}{\sigma_U}\cdot\frac{u-\mu_V}{\sigma_V}+\left(\frac{u-\mu_V}{\sigma_V}\right)^2\right]\right\}$$

第 3 题

设有二维随机矢量 $\xi^{\tau}=(\xi_1 \quad \xi_2)$，其概率密度为

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

在椭圆

$$\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2=\lambda^2 \quad （\lambda\text{ 为常数}）上，$$

其概率密度为常数，因此称该椭圆为等概率椭圆。求随机变量 $(\xi_1,\xi_2)$ 落在等概率椭圆内的概率。

解：

考虑随机变量 $(\xi_1,\xi_2)$ 落在等概率椭圆内的概率，

$$\iint f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)dx_1dx_2$$

相应的积分区间是 $\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\le\lambda^2$ ，

考虑椭圆 $\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2=\lambda^2$

作变换，

$$y_1=\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}-r\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \qquad y_2=\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)$$

$$x_1=\sigma_1y_1+\mu_1+\frac{r\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\sigma_2y_2}{\sqrt{1-r^2}} \qquad x_2=\frac{\sigma_2y_2}{\sqrt{1-r^2}}+\mu_2$$

$$|J|=\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-r^2}}$$

有

$$y_1{}^2+y_2{}^2=\lambda^2$$

相应随机变量 $(\xi_1,\xi_2)$ 落在等概率椭圆内的概率，是

$$\iint\limits_{y_1^2+y_2^2<\lambda^2} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\{-\frac{1}{2(1-r^2)}[y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}]\} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-r^2}} dy_1 dy_2$$

作变换，

$$y_1 = \rho\cos\theta \quad \rho = \sqrt{y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$$

$$y_2 = \rho\sin\theta \quad \theta = tg^{-1}\frac{y_2}{y_1}$$

相应的积分，即落在等概率椭圆内的概率为

$$= \iint\limits_{\substack{\rho^2\le\lambda^2 \\ 0\le\theta\le 2\pi}} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-r^2} e^{-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}} \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= -\int_0^\lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}\right] d\left[-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}\right] d\theta$$

$$= -e^{-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}} \Big|_0^\lambda$$

$$= 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}}$$

第 4 题

设有 n 维的随机矢量 $\xi^\tau = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n)$ 服从正态分布，各分量的均值为 $E\{\xi_i) = \alpha, \quad i = 1,2,3,\cdots,n,$ 其协方差矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & & & & \\ & & & & & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

试求其特征函数。

解：

按照特征函数的定义，有

$$\phi_\xi(t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_n)$$

$$= \exp\left\{ jt^\tau\mu - \frac{1}{2}t^\tau Bt \right\}$$

$$= \exp\left\{ j\sum_{i=1}^n \alpha t_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma^2 t_i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha\sigma^2 t_i t_{i+1} + \sum_{i=2}^n \alpha\sigma^2 t_i t_{i-1} \right\}$$

第 5 题

n 维正态分布随机矢量 $\xi^\tau = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n)$，分量均值 $E\{\xi_i\} = i, \quad i = 1,2,3,\cdots,n,$

分量间的协方差为$b_{m,i}=n-|m-i|,\quad m,i=1,2,\cdots,n$设有随机变量$\eta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，求$\eta$的特征函数。

解：

随机变量$\eta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$的均值何方差是，

$$E\{\eta\}=E\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\}=\sum_{i=1}^{n}E\{\xi_i\}=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{(1+n)n}{2}=\mu_\eta$$

$$\begin{aligned}VAR\{\eta\}&=E\{(\eta-\mu_\eta)^2]\\&=E\{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_{\xi_i})\sum_{m=1}^{n}(\xi_i-\mu_{\xi_m})\}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}E\{(\xi_i-\mu_{\xi_i})(\xi_i-\mu_{\xi_m})\}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(n-|m-i|)\\&=n\cdot n+2\sum_{i=1}^{n-1}i^2\\&=n^2+2\frac{(1+n)(2n+1)n}{6}\\&=n^2+\frac{(1+n)(2n+1)n}{3}\\&=\sigma_\eta^2\end{aligned}$$

$\eta$的特征函数是

$$\begin{aligned}&\phi_\eta(t_1\quad t_2\quad\cdots\quad t_n)\\&=\exp\{jt^\tau\mu_\eta-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\}\end{aligned}$$

第 6 题

设有三维正态分布随机矢量$\xi^\tau=(\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3)$，其各分量的均值为零，即

$$E\{\xi_i)=0,\quad i=1,2,3$$

其协方差矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$$

其中$b_{11}=b_{22}=b_{33}=\sigma^2$，试求：

（1）$E\{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\}$；

（2）$E\{\xi_1{}^2\ \xi_2{}^2\ \xi_3{}^2\}$；

（3）$E\{(\xi_1{}^2-\sigma^2)\,(\xi_2{}^2-\sigma^2)\,(\xi_3{}^2-\sigma^2)\}$

解：

三维正态分布随机矢量$\xi^\tau=(\xi_1\quad \xi_2\quad \xi_3)$的特征函数是

$$
\begin{aligned}
&\phi_\xi(t_1\quad t_2\quad t_3)\\
&=\exp\{\frac{1}{2}t^\tau Bt\}\\
&=\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=j=1}^{n}b_{ij}t_it_j\}
\end{aligned}
$$

解（1）：

$$E\{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\}=\frac{\partial^3}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}\phi_\xi(t)=0$$

解（2）：

$$
\begin{aligned}
&E\{\xi_1^2\quad \xi_2^2\quad \xi_3^2\}\\
&=E\{\xi_1^2\}[E\{\xi_2^2\}E\{\xi_3^2\}+2E\{\xi_2\quad \xi_3\}E\{\xi_2\quad \xi_3\}]\\
&\quad +2E\{\xi_1\quad \xi_2\}[E\{\xi_1\quad \xi_2\}E\{\xi_3\xi_3\}+2E\{\xi_1\xi_3\}E\{\xi_2\quad \xi_3\}]\\
&\quad +2E\{\xi_1\xi_3\}[E\{\xi_1\xi_3\}E\{\ \xi_2\quad \xi_2\}+2E\{\xi_1\quad \xi_2\}E\{\xi_2\quad \xi_3\}]\\
&=\sigma^2\sigma^2\sigma^2+2\sigma^2b_{23}b_{23}+2b_{12}b_{12}\sigma^2+4b_{12}b_{23}b_{13}+2b_{13}b_{13}\sigma^2+4b_{12}b_{23}b_{13}\\
&=\sigma^6+2\sigma^2(b_{12}{}^2+b_{23}{}^2b_{31}{}^2)+8b_{12}b_{23}b_{31}
\end{aligned}
$$

解（3）：

$$
\begin{aligned}
&E\{(\xi_1^2-\sigma^2)\ \ (\xi_2^2-\sigma^2)\ \ (\xi_3^2-\sigma^2)\}\\
&=E\Big\{\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2-\sigma^6-\xi_1^2\xi_2^2\sigma^2-\xi_2^2\xi_3^2\sigma^2\\
&\qquad -\xi_1^2\xi_3^2\sigma^2+\xi_1^2\sigma^4+\xi_2^2\sigma^4+\xi_3^2\sigma^4\Big\}\\
&=\sigma^6+2\sigma^2(b_{12}{}^2+b_{23}{}^2b_{31}{}^2)+8b_{12}b_{23}b_{31}-\sigma^2\\
&\quad -(\sigma^2\sigma^2+2b_{12}b_{12})\sigma^2-(\sigma^4+2b_{23}b_{23})\sigma^2\\
&\quad -(\sigma^4+2b_{31}b_{31})\sigma^2+3\sigma^2\sigma^2\sigma^2\\
&=8b_{12}b_{23}b_{31}
\end{aligned}
$$

第 7 题

设三维概率密度随机变量$\boldsymbol{\xi}^T=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)$的概率密度为

$$f_{\xi}\left(x_1, x_2, x_3\right) = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2{x_1}^2 - x_1 x_2 + {x_1}^2 - 2x_1 x_3 + 4{x_3}^2\right)\right\}$$

（1）证明经过下述线性变换，得随机矢量$\boldsymbol{\eta}^T = \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则$\eta_1$、$\eta_2$、$\eta_3$是相互统计独立得随即变量。

（2）求 C 值。

解：

由题设$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

对于高斯分布的多维随机变量分布的概率密度函数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi} &= \left(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\eta}\right)^T \mathbf{B}^{-1} \left(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\eta}\right) \\ &= \boldsymbol{\eta}^T \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \mathbf{B}^{-1} \left(\mathbf{A}\right)^{-1} \boldsymbol{\eta} \end{aligned}$$

计算变换后$\boldsymbol{\eta}^T = \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}$的相关矩阵

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \mathbf{B}^{-1} \left(\mathbf{A}\right)^{-1}$$

由概率分布知：相关矩阵逆正比于

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{4}{7}\\ 0 & 1 & \frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0\\ 4/7 & 2/7 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1/2 & -1\\ -1/2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/4 & 4/7\\ 0 & 1 & 2/7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0\\ 4/7 & 2/7 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1/2 & 7/8 & 0\\ -1 & -1/4 & 24/7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 7/8 & 0\\ 0 & 0 & 24/7\end{bmatrix}$$

相应的线性变换雅克比行列式为 1。

$\eta_1$、$\eta_2$、$\eta_3$对应的概率密度函数是

$$|J|C\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2y_1{}^2+\frac{7}{8}y_2{}^2+\frac{24}{7}y_3{}^2\right)\right\}$$

因此$\eta_1$、$\eta_2$、$\eta_3$是线性独立的，它们的相关矩阵是：

$$\mathbf{B}_y=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 8/7 & 0\\ 0 & 0 & 7/24\end{bmatrix}\qquad \sigma_{y_1}=\frac{1}{2}\qquad \sigma_{y_2}=\frac{8}{7}\qquad \sigma_{y_3}=\frac{7}{24}$$

因而 $$C=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\sigma_{y_1}{}^2\sigma_{y_2}{}^2\sigma_{y_3}{}^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}(2\pi)^3}}$$

第 8 题

设$\xi_1,\xi_2$为相互统计独立、均值为零、方差为 1 的正态分布随机变量。定义二维随机矢量$\eta^\tau=(\eta_1\ \ \eta_2)=\begin{cases}(\xi_1\quad |\xi_2|) & \xi_1\ge 0\\ (\xi_1\quad -|\xi_2|) & \xi_1<0\end{cases}$，试证，

（1）$\eta_1$和$\eta_2$都是正态分布的；

（2）$\eta^{\tau}=(\eta_1\quad\eta_2)$不是二维正态分布。

证明（1）：

二维随机矢量$\eta^{\tau}=(\eta_1\quad\eta_2)$中的第一个分量$\eta_1=\xi_1$是正态分布随机变量。

再考虑$\eta_2$，它的分布取决于$\xi_1$。由于

$$\eta^{\tau}=(\eta_1\ \ \eta_2)=\begin{cases}(\xi_1\quad|\xi_2|) & \xi_1\ge 0\\ (\xi_1\quad -|\xi_2|) & \xi_1<0\end{cases}$$

$$\eta_2=\begin{cases}\xi_2 & (\xi_1\ge 0\ \ \xi_2>0)\\ -\xi_2 & (\xi_1\ge 0\ \ \xi_2<0)\\ -\xi_2 & (\xi_1<0\ \ \xi_2>0)\\ \xi_2 & (\xi_1<0\ \ \xi_2<0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\xi_2 & (\xi_1\xi_2\ge 0)\\ -\xi_2 & (\xi_1\xi_2<0)\end{cases}$$

当$\xi_1>0$（相应的概率为 1 / 2）相应的条件概率分布是

$$f(y_2\,|\,y_1\ge 0)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\dfrac{{y_2}^2}{2\sigma^2}) & y_2>0\\ 0 & y_2<0\end{cases}$$

当$\xi_1<0$（相应的概率为 1 / 2）相应的条件概率分布是

$$f(y_2\,|\,y_1\le 0)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\dfrac{{y_2}^2}{2\sigma^2}) & y_2<0\\ 0 & y_2>0\end{cases}$$

# 第七章 估值理论

1．设有信号 $s$，它是一随机变量，其均值为 0，方差为 $\sigma_s^2$，即 $E\{s\}=0$，$E\{s^2\}=\sigma_s^2$。设观测信号时有附加噪声 $n(t)$，其它是均值为零的白噪声，样本值为 $n_i$，$E\{n_i\}=0$，$E\{n_i n_j\}=0$，$i\neq j$，$E\{n_i^2\}=\sigma_n^2$，$i,j=1,2,\cdots$，$E\{sn_i\}=0$。于是得到的观测样本（即信号与附加白噪声样本之和）为 $\eta_i=s+n_i \quad (i=1,2,\cdots,k)$。现利用 k 个观测值 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$ 的线性组合估计 s，即设估值为 $\hat{s}=\sum_{i=1}^{k}a_i\eta_i$，若 $\hat{s}$ 是它的最小均方误差估值，求各 $a_i$ 之值，并求在最佳估值时的最小均方误差。

解：

本题中的 k 个观测值为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$，利用其线性组合估计 s，即估计值为 $\hat{s}=\sum_{i=1}^{k}a_i\eta_i$。

利用正交性原理，有：

$$E\{[s-\hat{s}]\eta_j\}=0 \quad j=1,2,\cdots,k$$

$$\Rightarrow E\{[s-\sum_{i=1}^{k}a_i\eta_i]\eta_j\}=0$$

$$\Rightarrow E\{s^2\}-\sum_{i=1}^{k}a_iE\{s^2\}-\sum_{i=1}^{k}a_iE\{n_in_j\}=0$$

$$\Rightarrow \sigma_s^2-\sum_{i=1}^{k}a_i\sigma_s^2-a_j\sigma_n^2=0$$

$$\Rightarrow a_j=\frac{\left(1-\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$$

可看出 $a_1=a_2=\cdots=a_j=\cdots=a_k$，则：

$$a_j=\frac{\left(1-ka_j\right)\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$$

$$\Rightarrow a_j=\frac{\sigma_s^2}{k\sigma_s^2+\sigma_n^2} \qquad j=1,2,\cdots,k$$

最佳估值时的最小均方误差为：

$$
\begin{aligned}
M.M.S.E &= E\{[s-\hat{s}]^2\} = E\{[s-\hat{s}]s\} \\
&= \sigma_s^2 - \frac{k\sigma_s^4}{k\sigma_s^2+\sigma_n^2} \\
&= \frac{\sigma_n^2\sigma_s^2}{k\sigma_s^2+\sigma_n^2}
\end{aligned}
$$

2．设有实平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_\xi(\tau)$。现考虑采用 $\xi(t)$、$\xi'(t)$、$\xi''(t)$ 的值对 $\xi(t+\lambda)$ 进行线性预测，其中 $\lambda>0$，即设 $\hat{\xi}(t+\lambda)=a_1\xi(t)+a_2\xi'(t)+a_3\xi''(t)$，为了获得最佳线性预测，求 $a_1$、$a_2$、$a_3$ 之值。若 $\lambda$ 很小，求 $a_1$、$a_2$、$a_3$ 的近似值及最小均方误差。

解：由正交性原理可得：

$$
\begin{cases}
E\{[\xi(t+\lambda)-\hat{\xi}(t+\lambda)]\xi(t)\}=0 \\
E\{[\xi(t+\lambda)-\hat{\xi}(t+\lambda)]\xi'(t)\}=0 \\
E\{[\xi(t+\lambda)-\hat{\xi}(t+\lambda)]\xi''(t)\}=0
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow\begin{cases}
E\{[\xi(t+\lambda)-a_1\xi(t)-a_2\xi'(t)-a_3\xi''(t)]\xi(t)\}=0 \\
E\{[\xi(t+\lambda)-a_1\xi(t)-a_2\xi'(t)-a_3\xi''(t)]\xi'(t)\}=0 \\
E\{[\xi(t+\lambda)-a_1\xi(t)-a_2\xi'(t)-a_3\xi''(t)]\xi''(t)\}=0
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow\begin{cases}
R_{\xi\xi}(\lambda)-a_1R_{\xi\xi}(0)-a_2R_{\xi'\xi}(0)-a_3R_{\xi''\xi}(0)=0 \\
R_{\xi\xi'}(\lambda)-a_1R_{\xi\xi'}(0)-a_2R_{\xi'\xi'}(0)-a_3R_{\xi''\xi'}(0)=0 \\
R_{\xi\xi''}(\lambda)-a_1R_{\xi\xi''}(0)-a_2R_{\xi'\xi''}(0)-a_3R_{\xi''\xi''}(0)=0
\end{cases}
$$

考虑到 $\xi(t)$ 为实平稳随机过程，应用公式 $R_{\xi^{(n)}\xi^{(m)}}(\tau)=(-1)^m\dfrac{d^{(m+n)}}{d\tau^{m+n}}R_\xi(\tau)$ 对上述方程组进行化简。并且考虑到实平稳随机过程的相关函数为偶函数，由于 $\xi'(t)$ 存在，则要求 $R_\xi(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处有二阶倒数存在，即要求 $R_\xi(\tau)$ 在 $\tau=0$ 是连续且可导的，因此 $R'_\xi(0)=0$；同理有 $R'''_\xi(0)=0$。所以上述方程组化简为如下形式：

$$\begin{cases} R_\xi(\lambda)-a_1R_\xi(0)-a_3R''_\xi(0)=0 \\ -R'_\xi(\lambda)+a_2R''_\xi(0)=0 \\ R''_\xi(\lambda)-a_1R''_\xi(0)-a_3R^{(4)}_\xi(0)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_1=\dfrac{R^{(4)}_\xi(0)R_\xi(\lambda)-R''_\xi(0)R''_\xi(\lambda)}{R^{(4)}_\xi(0)R_\xi(0)-\left(R''_\xi(0)\right)^2} \\ a_2=\dfrac{R'_\xi(\lambda)}{R''_\xi(0)} \\ a_3=\dfrac{R_\xi(0)R''_\xi(\lambda)-R''_\xi(0)R_\xi(\lambda)}{R^{(4)}_\xi(0)R_\xi(0)-\left(R''_\xi(0)\right)^2} \end{cases}$$

对相关函数进行泰勒级数展开，并且在$\lambda$很小时，有：

$$\begin{cases} R_\xi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}R^{(n)}_\xi(0)\dfrac{\lambda^n}{n!}\approx R_\xi(0)+R'_\xi(0)\lambda=R_\xi(0) \\ R'_\xi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}R^{(1+n)}_\xi(0)\dfrac{\lambda^n}{n!}\approx R'_\xi(0)+R''_\xi(0)\lambda=R''_\xi(0)\lambda \\ R''_\xi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}R^{(2+n)}_\xi(0)\dfrac{\lambda^n}{n!}\approx R''_\xi(0)+R'''_\xi(0)\lambda=R''_\xi(0) \end{cases}$$

所以得到$a_1$、$a_2$、$a_3$的近似值如下：

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=\lambda \\ a_3=0 \end{cases}$$

所以得到最佳线性预测的近似值为：$\hat{\xi}(t+\lambda)\approx\xi(t)+\lambda\xi'(t)$

此时的最小均方误差为：

$$\begin{aligned} M.M.S.E&=E\{[\xi(t+\lambda)-\hat{\xi}(t+\lambda)]^2\} \\ &=E\{[\xi(t+\lambda)-\xi(t)-\lambda\xi'(t)]\xi(t+\lambda)\} \\ &=R_\xi(0)-R_\xi(\lambda)-\lambda R_{\xi'\xi}(\lambda) \\ &=R_\xi(0)-R_\xi(\lambda)-\lambda R'_\xi(\lambda) \end{aligned}$$

6．设有按泊松分布出现的脉冲序列，单位时间内出现脉冲的平均次数为$\mu$，每一个脉冲的极性是正还是负是等概率的，每个脉冲的波形为

$$g(t)=\begin{cases} Ee^{-at} & (t\ge 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

由这组脉冲序列组成了一个随机过程 $\xi(t)$ 。现利用 $(-\infty, t)$ 内对该信号的观测值预测 $\xi(t+\lambda)$， $\lambda > 0$，求实现最佳预测的方法。

解：由于本例为纯预测问题，无噪声存在。

$$S_{ss}(\omega) = S_{\eta\eta}(\omega) = S_{s\eta}(\omega) = \frac{E^2}{\omega^2 + \alpha^2}$$ （求法见教材 P451 页习题 14）

$$S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right) = \frac{E^2}{\alpha^2 - p^2} = \frac{E^2}{(\alpha+p)(\alpha-p)}$$

分解 $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)$，使 $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right) = S_{\eta\eta}^{+}(p)S_{\eta\eta}^{-}(p)$，所以有：

$$\begin{cases} S_{\eta\eta}^{+}(p) = \dfrac{E}{\alpha+p} & \text{极点位于左半平面内} \\ S_{\eta\eta}^{-}(p) = \dfrac{E}{\alpha-p} & \text{极点位于右半平面内} \end{cases}$$

$$G(p) = \frac{S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\lambda}}{S_{\eta\eta}^{-}(p)} = \frac{\dfrac{E^2}{(\alpha+p)(\alpha-p)}e^{p\lambda}}{\dfrac{E}{\alpha-p}} = \frac{Ee^{p\lambda}}{\alpha+p} = G_1(p) + G_2(p)$$

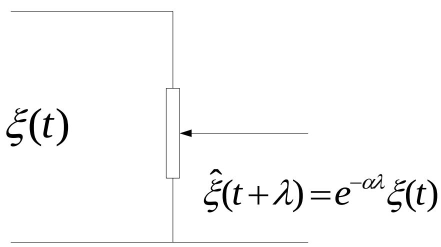
$G(p)$ 在左半平面内的极点为 $-\alpha$，在极点上的留数为：

$$\lim_{p\to-\alpha}(\alpha+p)\frac{Ee^{p\lambda}}{\alpha+p} = Ee^{-\alpha\lambda}$$

$$\hat{H}(p) = \frac{G_1(p)}{S_{\eta\eta}^{+}(p)} = \frac{Ee^{-\alpha\lambda}}{\alpha+p} \Big/ \frac{E}{\alpha+p} = e^{-\alpha\lambda}$$

$$\hat{h}(t) = e^{-\alpha\lambda}\delta(t)$$

$$\hat{\xi}(t+\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)\xi(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty}\hat{h}(\tau)\xi(t-\tau)d\tau = e^{-\alpha\lambda}\xi(t)$$



7．有一 RC 网络如图所示（图见教材 P652 页）。设 $\alpha=\dfrac{1}{RC}$，若网络的输入为 $\eta(t)=s(t)+n(t)$，其中 $s(t)$ 为信号 $s(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$，A 代表振幅，是一个常数，$\omega_0$ 代表角频率，也是一个常数，$\theta$ 代表相角，它是均匀分布于 $[0,2\pi]$ 间的随机变量。$n(t)$ 是零均值的白噪声，其功率密度为：$S_n(f)=N_0$（瓦/赫）。

试计算（1）信号的输入功率密度；

（2）信号的输入功率；

（3）信号的输出功率；

（4）噪声的输出功率；

（5）求输出信杂比。

解：

（1） 信号的相关函数和功率密度分别为：

$$
\begin{aligned}
R_{ss}(\tau) &= E\{s(t+\tau)s(t)\} = E[A\cos(\omega_0 t+\theta+\omega_0\tau)A\cos(\omega_0 t+\theta)] \\
&= E\left\{\frac{A^2}{2}[\cos(2\omega_0 t+\theta+\omega_0\tau)+\cos(\omega_0\tau)]\right\} \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)
\end{aligned}
$$

$S_{ss}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{ss}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\dfrac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$，其中 $\omega_0=2\pi f_0$，下同。

（2） 信号的输入功率为：$E\{s^2(t)\}=E\{A^2\cos^2(\omega_0 t+\theta)\}=\dfrac{A^2}{2}$

（3） 为了求信号的输出功率，先求出信号的输出功率谱密度，再积分即可。

易求得转移函数 $H(jf)=\dfrac{\alpha}{\alpha+j2\pi f}$，所以：$S_{Y_sY_s}(f)=S_{ss}(f)\cdot|H(jf)|^2$

信号的输出功率为：$\int_{-\infty}^{\infty}S_{Y_sY_s}(f)df=\dfrac{A^2\alpha^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\alpha^2+(2\pi f_0)^2}$

（4） $S_{Y_nY_n}(f)=S_{nn}(f)\cdot|H(jf)|^2=\dfrac{\alpha^2N_0}{\alpha^2+(2\pi f_0)^2}$

又因为有变换关系：　$S_{Y_nY_n}(f)=\dfrac{\alpha^2N_0}{\alpha^2+(2\pi f_0)^2}\leftrightarrow\dfrac{1}{2}\alpha N_0e^{-\alpha|\tau|}=R_{Y_nY_n}(\tau)$

所以噪声输出功率为：$R_{Y_nY_n}(0)=\frac{1}{2}\alpha N_0$

（5） 输出信杂比为$\frac{(3)}{(4)}$，即有：

$$\frac{\frac{A^2\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2+(2\pi f_0)^2}}{\frac{1}{2}\alpha N_0}=\frac{A^2\alpha}{N_0[\alpha^2+(2\pi f_0)^2]}$$

9．设有离散信号的模型$s(k+1)=\Phi s(k)+\Gamma w(k)$，其中$s(1)$为高斯随机变量，均值为$m_0$，方差为$P_0$，$\Phi$、$\Gamma$均为已知常数，$w(k),k=1,2,\cdots$是相互统计独立的零均值的高斯随机变量，方差为$\sigma_w^2$。观测过程为$\eta(k)=s(k)+n(k)\quad(k=1,2,\cdots)$，$n(k),k=1,2,\cdots$是相互统计独立的零均值的高斯随机变量，方差为$\sigma_n^2$。$n(k)$和$w(l)$是相互统计独立的。

（1）观测$\eta(1)$以估计$s(1)$，求$f_{s(1)/\eta(1)}(s_1/\eta_1)$；

解：因为有$\eta(1)=s(1)+n(1)$，所以：

$$\begin{cases}s(1)\propto N(m_0,P_0)\\ n(1)\propto N(0,\sigma_n^2)\\ \eta(1)\propto N(m_0,P_0+\sigma_n^2)\end{cases}$$

$\therefore f_{s(1)\eta(1)}(s_1,\eta_1)=\frac{1}{2\pi|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\tau}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$，其中：

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}s_1\\ \eta_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}m_0\\ m_0\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}P_0 & P_0-m_0^2\\ P_0-m_0^2 & P_0+\sigma_n^2\end{pmatrix}$

$$\therefore f_{s(1)\eta(1)}(s_1,\eta_1)=\frac{1}{2\pi\left(P_0\sigma_n^2+2P_0m_0^2-m_0^4\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{(s_1-m_0)^2(P_0+\sigma_n^2)-2(\eta_1-m_0)(s_1-m_0)(P_0-m_0^2)+P_0(\eta_1-m_0)^2}{2\left(P_0\sigma_n^2+2P_0m_0^2-m_0^4\right)}\right\}\quad\text{——（A 式）}$$

而 $f_{\eta(1)}(\eta_1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(P_0+\sigma_n^2)}}\exp\left\{-\dfrac{(\eta_1-m_0)^2}{2(P_0+\sigma_n^2)}\right\}$——（B 式），所以有：

$$f_{s(1)/\eta(1)}(s_1/\eta_1)=\frac{f_{s(1)\eta(1)}(s_1,\eta_1)}{f_{\eta(1)}(\eta_1)}=\frac{A\text{式}}{B\text{式}}$$

（2）证明 $s(1)$ 的最佳估值 $\hat{s}(1)=m_0+P_1\dfrac{1}{\sigma_n^2}(\eta_1-m_0)$，其中 $P_1$ 是均方误差，它满足方程式

$$P_1^{-1}=P_0^{-1}+\frac{1}{\sigma_n^2}$$

证明：设 $\hat{s}(1)=A\eta_1+b$，其中 A 和 b 应满足：

$$\begin{aligned}A=C_{s_1\eta_1}C_{\eta_1\eta_1}^{-1}&=\frac{E\left\{(s_1-m_0)(\eta_1-m_0)\right\}}{P_0+\sigma_n^2}\\&=\frac{E\left\{s_1\eta_1\right\}-m_0^2}{P_0+\sigma_n^2}=\frac{E\left\{s_1^2\right\}-m_0^2}{P_0+\sigma_n^2}\\&=\frac{P_0}{P_0+\sigma_n^2}=\frac{P_1}{\sigma_n^2}\end{aligned}$$

$$b=E\{s_1\}-AE\{\eta_1\}=m_0-\frac{P_1}{\sigma_n^2}m_0$$

所以有：$\hat{s}(1)=m_0+P_1\dfrac{1}{\sigma_n^2}(\eta_1-m_0)$ 成立。

（3）观测 $\eta(2)$ 后以估计 $s(2)$，即利用 $\eta(1)$、$\eta(2)$ 两个观测值，证明

$$f_{s(2)/\eta(1)\eta(2)}(s_2/\eta_1\eta_2)=\frac{f_{\eta(2)/s(2)\eta(1)}(\eta_2/s_2\eta_1)\,f_{s(2)/\eta(1)}(s_2/\eta_1)}{f_{\eta(2)/\eta(1)}(\eta_2/\eta_1)}$$

证明：

$$f(s_2/\eta_1\eta_2)=\frac{f(s_2\eta_1\eta_2)}{f(\eta_1\eta_2)}=\frac{\dfrac{f(s_2\eta_1\eta_2)}{f(\eta_1)}\cdot\dfrac{f(s_2\eta_1)}{f(s_2\eta_1)}}{\dfrac{f(\eta_1\eta_2)}{f(\eta_1)}}=\frac{f(\eta_2/s_2\eta_1)\,f(s_2/\eta_1)}{f(\eta_2/\eta_1)}$$

（4）当给定 $\eta(1)$ 时，$s(2)$ 是一高斯随机变量，其均值为 $\Phi\hat{s}(1)$，方差为 $M_2$，

$$M_2=\Phi P_1\Phi+\Gamma\sigma_w^2\Gamma=\Phi^2P_1+\Gamma^2\sigma_w^2$$

解：当 $\eta(1)$ 给定时，$\hat{s}(1)$ 就定了，$s_2 = \Phi s_1 + \Gamma w_1$。此时，$E\{s_1\} = \hat{s}(1)$，

$D\{s_1\} = E\left\{(s_1 - \hat{s}_1)^2\right\} = P_1$，所以有：

$$\begin{cases} E\{s_2\} = \Phi E\{s_1\} = \Phi \hat{s}_1 \\ D\{s_2\} = \Phi^2 E\{s_1^2\} + \Gamma^2 \sigma_w^2 - \left(E\{s_2\}\right)^2 \\ \qquad\quad = \Phi^2 P_1 + \Phi^2 \hat{s}_1^2 + \Gamma^2 \sigma_w^2 - \Phi^2 \hat{s}_1^2 \\ \qquad\quad = \Phi^2 P_1 + \Gamma^2 \sigma_w^2 \\ \qquad\quad = M_2 \end{cases}$$

（5）证明 $\hat{s}(2) = \Phi \hat{s}(1) + P_2 \dfrac{1}{\sigma_n^2}(\eta_2 - \Phi \hat{s}(1))$，其中 $P_2^{-1} = M_2^{-1} + \dfrac{1}{\sigma_n^2}$，$P_2$ 是均方误差

$P_2 = E\{[s(2) - \hat{s}(2)]^2\}$

证明：因为 $\hat{s}(2) = A\eta_2 + b$，所以有：

$$\begin{cases} E\{(s_2 - \hat{s}_2)\eta_2\} = 0 \\ E\{s_2 - \hat{s}_2\} = 0 \end{cases}$$ ，可得：$$\begin{cases} A = \dfrac{M_2}{\sigma_n^2 + M_2} = \dfrac{P_2}{\sigma_n^2} \\ b = \dfrac{\sigma_n^2 \Phi \hat{s}_1}{\sigma_n^2 + M_2} = \dfrac{P_2 \Phi \hat{s}_1}{M_2} \end{cases}$$

所以有：$\hat{s}_2 = \dfrac{P_2}{\sigma_n^2}\eta_2 + \dfrac{P_2 \Phi \hat{s}_1}{M_2} = \dfrac{P_2}{\sigma_n^2}\eta_2 + \Phi \hat{s}_1 \left(1 - \dfrac{P_2}{\sigma_n^2}\right)$，而均方误差为：

$$\begin{aligned} & E\{(s_2 - \hat{s}_2)^2\} = E\{(s_2 - \hat{s}_2)s_2\} \\ & = E\{s_2^2\} - \frac{P_2}{\sigma_n^2} E\{\eta_2 s_2\} - \Phi \hat{s}_1 \left(E\{s_2\} - \frac{P_2}{\sigma_n^2} E\{s_2\}\right) \\ & = M_2 + \Phi^2 \hat{s}_1^2 - \frac{P_2}{\sigma_n^2}\left(M_2 + \Phi^2 \hat{s}_1^2\right) - \Phi^2 \hat{s}_1^2 + \frac{P_2}{\sigma_n^2} \Phi^2 \hat{s}_1^2 \\ & = M_2 - \frac{P_2}{\sigma_n^2} M_2 \\ & = P_2 \end{aligned}$$

（6） 利用数学归纳法求 $\hat{s}(k)$ 和 $P_k$，以 $\hat{s}(k-1)$ 和 $M_k$ 表示之。$\hat{s}(k)$ 代表 $s(k)$ 的最佳估值，

$P_k$ 代表 k 次最佳估值时的最小均方误差。

解：（数学归纳法略）因为有如下关系：

$$\begin{cases} E\{s_k\} = \Phi E\{s_{k-1}\} = \Phi \hat{s}_{k-1} \\ D\{s_k\} = \Phi^2 E\{s_{k-1}^2\} + \Gamma^2 \sigma_w^2 - \left(E\{s_k\}\right)^2 \\ \qquad = \Phi^2 P_{k-1} + \Phi^2 \hat{s}_{k-1}^2 + \Gamma^2 \sigma_w^2 - \Phi^2 \hat{s}_{k-1}^2 \\ \qquad = \Phi^2 P_{k-1} + \Gamma^2 \sigma_w^2 \end{cases}$$

所以有：$\hat{s}(k) = \dfrac{P_2}{\sigma_n^2}\eta_2 + \dfrac{P_2 \Phi \hat{s}_1}{M_2} = \Phi \hat{s}(k-1) + \dfrac{P_k}{\sigma_n^2}\left(\eta_k - \Phi \hat{s}(k-1)\right)$

其中 $P_k^{-1} = M_k^{-1} + \dfrac{1}{\sigma_n^2}$

10．设有信号 $s(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{RC} e^{\frac{t-t_0}{RC}} & (t \le t_0) \\ 0 & (t > t_0) \end{cases}$，在观测时，信号中混有白噪声，即

$\eta(t) = s(t) + n(t)$，$n(t)$ 为白噪声，其功率密度为 $N_0$，均值为零，$\eta(t)$ 代表观测值。

求在 $t = t_0$ 处获得最大输出信杂比的匹配滤波器，并画出匹配滤波器输出信号的波形。

解：输入信号的频谱为：

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{\frac{t-t_0}{RC}} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{RC} e^{\frac{t-t_0}{RC}} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{1 - j\omega RC} \exp(-j\omega t_0) \end{aligned}$$

匹配滤波器的转移函数为：

$$\begin{aligned} \hat{H}(j\omega) &= \frac{k}{N_0} \overline{S(j\omega)} e^{-j\omega t_0} \\ &= \frac{k}{N_0} \overline{\frac{1}{1 - j\omega RC} \exp(-j\omega t_0)} e^{-j\omega t_0} \\ &= \frac{k}{N_0} \frac{1}{1 + j\omega RC} \end{aligned}$$

$$\hat{h}(t) = \frac{k}{N_0} \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

11．设有一高频脉冲信号 $s(t)$，其包络为一方波，脉冲宽度为 $\tau_0$，载频为 $f_0\left(T_0=\frac{1}{f_0}\right)$。为了处理方便，设 $\frac{\tau_0}{T_0}=m$，$m$ 为整数，脉冲幅度为 1。在观测信号时，若观测到的高频脉冲中混有附加噪声，即 $\eta(t)=s(t)+n(t)$。若 $n(t)$ 为均值为零的白噪声，功率密度为 $N_0$，求在 $t=\tau_0$ 处获得最大输出信杂比的匹配滤波器。

解：设输入信号为：$s(t)=\sin(2\pi f_0 t)[u(t)-u(t-\tau_0)]$，则其频谱为：

$$\begin{aligned}
S(j\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt\\
&=\int_0^{\tau_0}\sin(2\pi f_0 t)e^{-j\omega t}dt\\
&=\int_0^{\frac{m}{f_0}}\frac{1}{2j}\left[e^{-j(\omega-\omega_0)t}-e^{-j(\omega+\omega_0)t}\right]dt\\
&=\frac{\omega_0}{\omega-\omega_0}\left(e^{-j\omega\tau_0}-1\right)
\end{aligned}$$

在 $t=\tau_0$ 处获得最大输出信杂比，则有：

$$\begin{aligned}
\hat{H}(j\omega)&=\frac{k}{N_0}\overline{S(j\omega)}e^{-j\omega\tau_0}\\
&=\frac{k}{N_0}\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}\left(e^{j\omega\tau_0}-1\right)e^{-j\omega\tau_0}\\
&=\frac{k}{N_0}\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}\left(1-e^{-j\omega\tau_0}\right)\\
&=-\frac{k}{N_0}S(j\omega)
\end{aligned}$$

$$\hat{h}(t)=-\frac{k}{N_0}s(t)=-\frac{k}{N_0}\sin(2\pi f_0 t)[u(t)-u(t-\tau_0)]$$

12．(缺最后一步推导)设有一高频脉冲串，每一个高频脉冲的参数与题 11 所给定的参数相同，脉冲串共有 $n$ 个脉冲。若在该高频脉冲串中混有白噪声 $n(t)$，即观测到的是 $\eta(t)=s(t)+n(t)$，$s(t)$ 代表脉冲串，$n(t)$ 为零均值的白噪声，功率密度为 $N_0$，求在

$t = t_0 = (n-1)T + \tau_0$ 处获得最大输出信杂比的匹配滤波器。其中 T 代表脉冲的重复周期。

解：因为有：

$$
\begin{aligned}
&s(t) \leftrightarrow S(j\omega) \\
&s(t-T) \leftrightarrow S(j\omega)e^{-j\omega T} \\
&\quad \vdots \\
&s[t-(n-1)T] \leftrightarrow S(j\omega)e^{-j\omega(n-1)T}
\end{aligned}
$$

所以：$\sum_{i=0}^{n-1} s(t-iT) \leftrightarrow S(j\omega)\sum_{k=0}^{n-1} e^{-jk\omega T}$

匹配滤波器的转移函数为：

$$
\hat{H}(j\omega) = \frac{k}{N_0}\overline{S(j\omega)\sum_{k=0}^{n-1} e^{-jk\omega T}}e^{-j\omega[(n-1)T+\tau_0]}
$$

13.（待做）推导最佳一步预测器中的递推公式（31）、（32）、（33）、（35）。