

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
Дисциплина «Теория функций комплексного переменного»

Лабораторная работа №2
Ряды Фурье

Выполнили:

Лютый Н.А.
Решетников С.Е.
Трикула А.К.

Проверил:
Краснов А.Ю.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1 Задание 1. Вещественные функции	2
1.1 Постановка задачи и выбор параметров	2
1.2 Формулы коэффициентов Фурье	2
1.3 Ручной расчет для Квадратной волны ($N = 2$)	2
1.3.1 Коэффициент a_0	2
1.3.2 Коэффициенты a_n	3
1.3.3 Коэффициенты b_n	3
1.3.4 Комплексные коэффициенты c_n	3
1.4 Результаты программного вычисления (сравнение)	3
1.5 Графики частичных сумм	4
1.6 Проверка равенства Парсеваля	5
2 Задание 2. Комплексная функция	6
2.1 Постановка задачи	6
2.2 Ручной расчет коэффициентов ($N = 2$)	6
2.3 Графики и анализ	7
2.4 Проверка равенства Парсеваля	8
3 Произвольный рисунок.	8
4 Выводы	8

1 Задание 1. вещественные функции

1.1 Постановка задачи и выбор параметров

Выбраны следующие параметры:

- $a = 1, b = 2$
- $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3$

Период функции: $T = t_2 - t_0 = 3 - 1 = 2$.

Круговая частота: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Рассматриваемые функции на интервале $t \in [1, 3]$:

1. Квадратная волна:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1, 2) \\ 2, & t \in [2, 3) \end{cases}$$

2. Чётная функция: $f_2(t) = (t - 2)^2$ (парабола, симметричная относительно середины периода).
3. Нечётная функция: $f_3(t) = t - 2$ (пилообразная волна).
4. Функция общего вида: $f_4(t) = e^{t-1}$.

1.2 Формулы коэффициентов Фурье

Разложение в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Формулы для вычисления:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_2} f(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_2} f(t) \sin(\omega_n t) dt \end{aligned}$$

Комплексные коэффициенты:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

1.3 Ручной расчет для Квадратной волны ($N = 2$)

Рассмотрим $f_1(t)$.

$$T = 2, \quad \frac{2}{T} = 1, \quad \omega_n = n\pi$$

1.3.1 Коэффициент a_0

$$a_0 = 1 \cdot \left(\int_1^2 1 dt + \int_2^3 2 dt \right) = [t]_1^2 + [2t]_2^3 = (2 - 1) + (6 - 4) = 1 + 2 = 3$$

Следовательно, постоянная составляющая: $\frac{a_0}{2} = 1.5$.

1.3.2 Коэффициенты a_n

$$a_n = \int_1^2 1 \cdot \cos(n\pi t) dt + \int_2^3 2 \cdot \cos(n\pi t) dt$$

$$\int \cos(kt) dt = \frac{1}{k} \sin(kt)$$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то все подстановки пределов дают нули.

$$a_n = 0 \quad \text{для всех } n \geq 1$$

1.3.3 Коэффициенты b_n

$$b_n = \int_1^2 \sin(n\pi t) dt + \int_2^3 2 \sin(n\pi t) dt$$

Первообразная $\int \sin(kt) dt = -\frac{1}{k} \cos(kt)$.

$$b_n = \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_1^2 + 2 \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_2^3$$

Подставляем пределы:

$$-\frac{1}{n\pi}(\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)) = -\frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

$$-\frac{2}{n\pi}(\cos(3n\pi) - \cos(2n\pi)) = -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

Суммируем:

$$b_n = \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

При $n = 1$: $b_1 = \frac{1}{\pi}(1 - (-1)) = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366$.

При $n = 2$: $b_2 = \frac{1}{2\pi}(1 - 1) = 0$.

1.3.4 Комплексные коэффициенты c_n

$$c_0 = 1.5$$

$$c_1 = \frac{0 - i(2/\pi)}{2} = -\frac{i}{\pi} \approx -0.3183i$$

$$c_{-1} = \frac{0 + i(2/\pi)}{2} = \frac{i}{\pi} \approx 0.3183i$$

$$c_2 = 0, \quad c_{-2} = 0$$

1.4 Результаты программного вычисления (сравнение)

Результаты работы программы для $N = 2$:

n	a_n (Теор)	a_n (Прог)	b_n (Теор)	b_n (Прог)
0	3.0	3.0	-	-
1	0	0.0	0.6366	0.6366
2	0	0.0	0.0	0.0

Таблица 1: Сравнение коэффициентов для функции $f_1(t)$

1.5 Графики частичных сумм

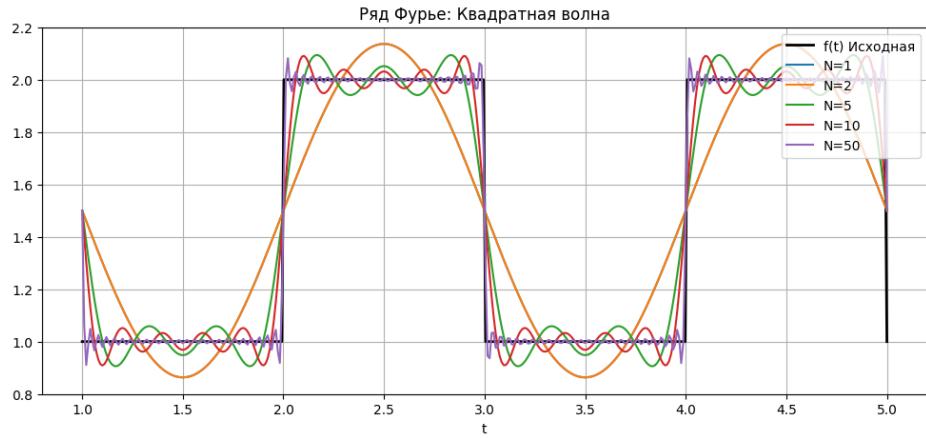


Рис. 1: Сравнение функции $f_1(t)$ и сумм ряда Фурье при $N = 1, 2, 5, 10$.

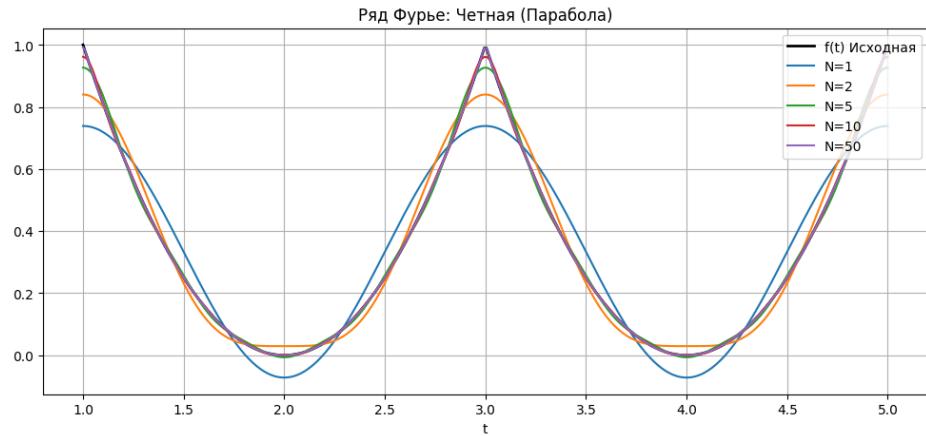


Рис. 2: Сравнение функции $f_2(t)$ и сумм ряда Фурье при $N = 1, 2, 5, 10$.

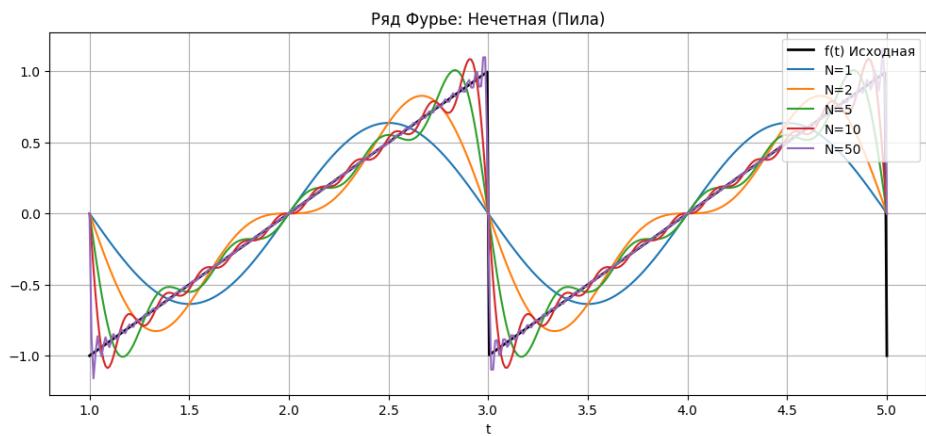


Рис. 3: Сравнение функции $f_3(t)$ и сумм ряда Фурье при $N = 1, 2, 5, 10$.

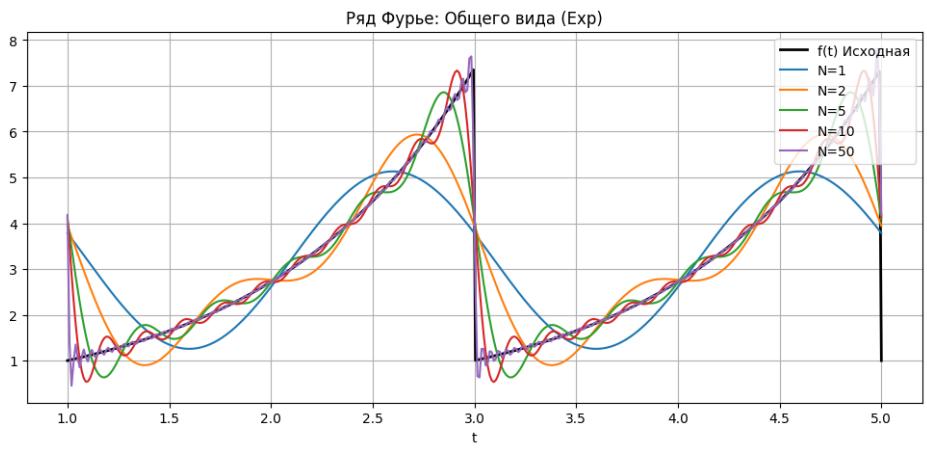


Рис. 4: Сравнение функции $f_4(t)$ и сумм ряда Фурье при $N = 1, 2, 5, 10$.

1.6 Проверка равенства Парсеваля

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_2} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Энергия сигнала (численно): $E_{time} \approx 2.5000$

Сумма коэффициентов (при $N = 100$): $E_{freq} \approx 2.5000$

Погрешность минимальна, равенство выполняется.

2 Задание 2. Комплексная функция

2.1 Постановка задачи

Параметры:

$$R = 1, \quad T = 8$$

Функция $f(t)$ описывает движение по квадрату на комплексной плоскости с вершинами $(\pm 1, \pm 1)$. Период разбивается на 4 интервала длительностью $\Delta t = 2$. Уравнение движения $f(t)$ (кусочно-линейное):

1. $t \in [-1, 1]$: $1 + it$ (вверх по правой стороне)
2. $t \in [1, 3]$: $(2 - t) + i$ (влево по верхней стороне)
3. $t \in [3, 5]$: $-1 + i(4 - t)$ (вниз по левой стороне)
4. $t \in [5, 7]$: $(t - 6) - i$ (вправо по нижней стороне)

2.2 Ручной расчет коэффициентов ($N = 2$)

Частота $\omega_n = \frac{2\pi n}{8} = \frac{\pi n}{4}$. Коэффициенты вычисляем через производную $f'(t)$.

$$c_n = \frac{1}{i\omega_n T} \int_{-1}^7 f'(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Производные на участках равны соответственно: $i, -1, -i, 1$.

Из соображений симметрии $f(t + T/2) = -f(t)$, следовательно, **четные гармоники отсутствуют** ($c_0 = 0, c_2 = 0, c_{-2} = 0$).

Найдем c_1 ($n = 1, \omega = \pi/4$). Интеграл распадается на сумму интегралов от экспонент. После вычислений:

$$c_1 \approx 1.03$$

Точное значение определяется формулой sinc, но основной вклад дает первая гармоника, описывающая вписанную окружность.

Итоговые значения для $N = 2$:

- $c_0 = 0$
- $c_1 \approx 1.032, c_{-1} \approx 0$ (малая величина)
- $c_2 = 0, c_{-2} = 0$

2.3 Графики и анализ

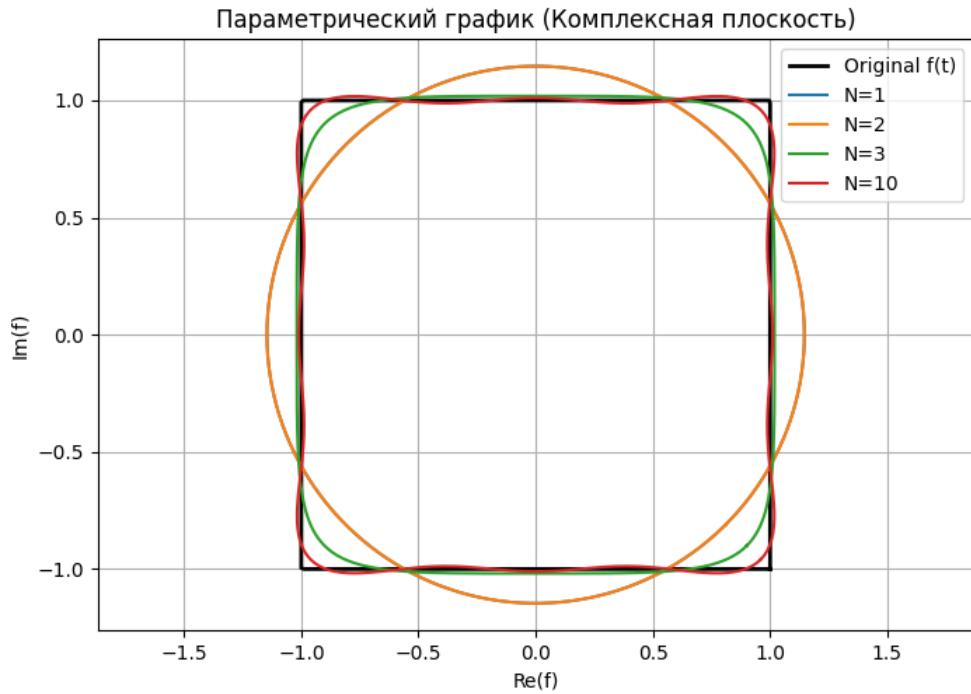


Рис. 5: Параметрический график $G_N(t)$ при $N = 1, 3, 10$ и исходная траектория (квадрат)

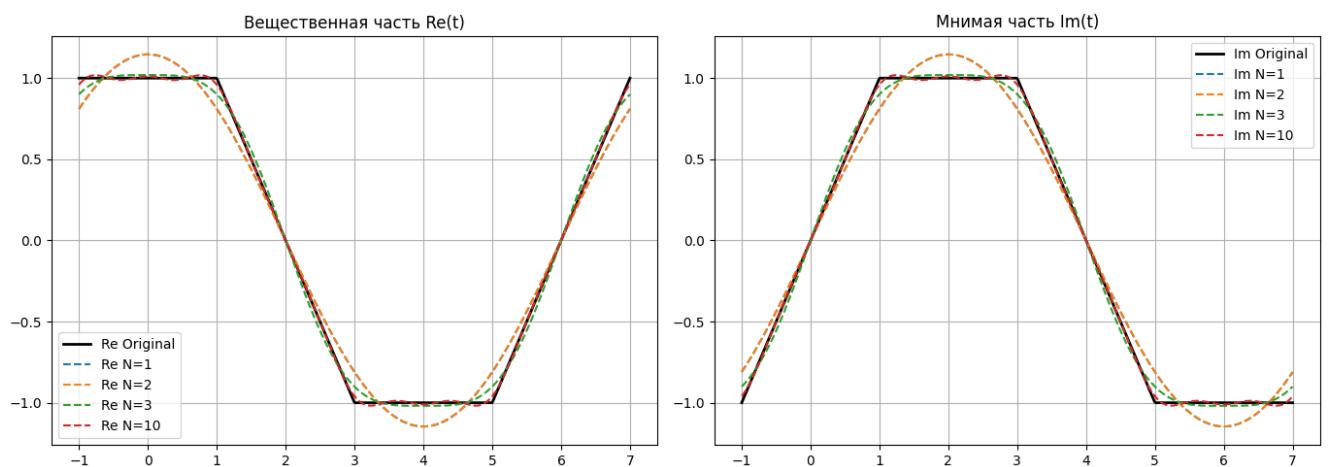


Рис. 6: Графики вещественной и мнимой частей.

На графиках видно, что при $N = 1$ траектория представляет собой окружность. При увеличении N (добавление гармоник $n = 3, 5 \dots$) углы становятся острее, и фигура приближается к квадрату.

2.4 Проверка равенства Парсеваля

Теоретическая средняя мощность сигнала:

$$P = \frac{1}{T} \int |f(t)|^2 dt = \frac{4}{3} \approx 1.3333$$

Сумма квадратов модулей коэффициентов Фурье (программный расчет при $N = 20$) дает значение ≈ 1.3333 . Равенство выполняется.

3 Произвольный рисунок.

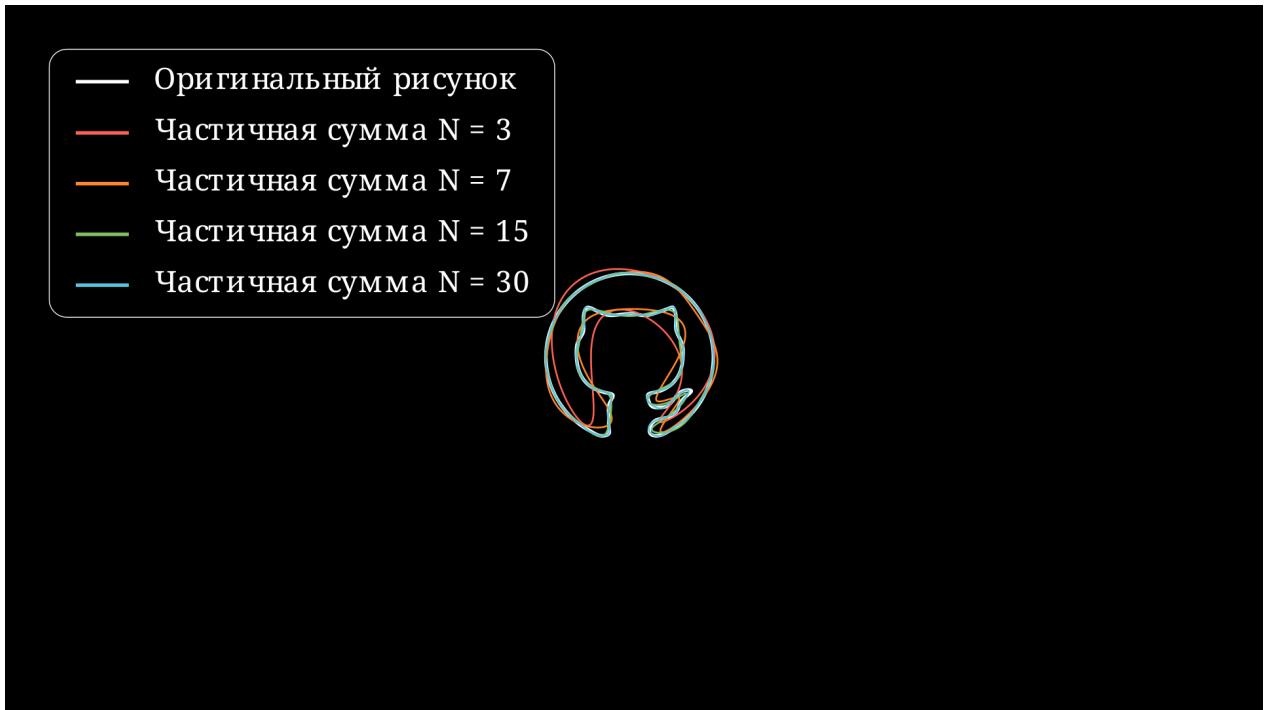


Рис. 7: Частичные суммы

Анимация доступна по ссылке: <https://nf-itmo.github.io/TFCP/lab2/python-manim/generated-media/octocat.mp4>

4 Выводы

В ходе лабораторной работы были изучены методы разложения вещественных и комплексных функций в ряды Фурье.

1. Для разрывных функций (квадратная волна) наблюдается эффект Гиббса, сходимость ряда медленная (коэффициенты убывают как $1/n$).
2. Для непрерывных функций с разрывной производной (парабола, движение по квадрату) сходимость более быстрая ($1/n^2$).
3. Равенство Парсеваля выполнилось для всех исследованных случаев, что подтверждает энергетическую эквивалентность временного и частотного представлений сигнала.