Algebra e geometria

Nicola Ferru

15 marzo 2024

Indice

Prefazione

Questo documento è soggetto alla proprietà di Nicola Ferru Aka NFVblog, il materiale è stato preso dalle lezioni di Geometria e algebra, le modalità di utilizzo e distribuzione sono scritte nel file LICENSE.

Capitolo 1

Vettori, coordinate e geometria

Uno degli argomenti su cui il corso si basa sono proprio i *vettori*. All'interno di questo capitolo saranno presenti nozioni e definizioni legate alla natura stessa di queste entità matematiche dai rudimenti ad alcuni spetti più avanzati.

1.1 Vettori Geometrici

Definizione 1.1.1. Un vettore geometrico applicato nel piano è un segmento orientato che va da un punto fisso O "Origine" verso un secondo punto P del piano, come mostrato nella figira 1.1:

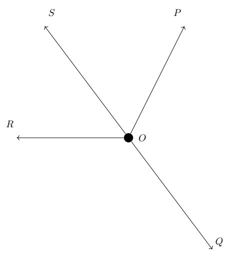

Figura 1.1: Esempio vettori geometrici

Analogamente, se il punto P (*e quindi il segmento*) è libero di variare in tutto lo spazio tridimensionale. In ambo i casi il vettore sarà denotato $\vec{OP}$ (*si denota che il punto finale P può anche uguale a O, ovvero il vettore può essere molto ravvicinato al punto O*).

Nota 1.1.1. *La direzione è indicata dalla simbolo freccia, graficamente la lunghezza e direzione del vettore implicano il modo in cui agisce nello spazio, ad esempio, se due vettori hanno direzioni opposte uno si sottrarrà potenzialmente al altro.*

Denotare che con V_O^2 l'unsieme dei vettori geometrici applicati in O nel piano, e con V_O^3 l'insieme dei vettori geometrici applicati in O liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale. I vettori orientati sono utilizzati infisica, dove vengono usati per rappresentare le forze applicate sul punto O.

Esempio 1.1.1. Si può immaginare che in O si trovi un oggetto sul quale viene esercitata una forza che lo "trascina" nella direzione e nel verso dati dalla freccia come evidenziato nella nota (1.1.1), mentre l'intensità della forza esercitata è rappresentata dlla lunghezza del segmento. Dal

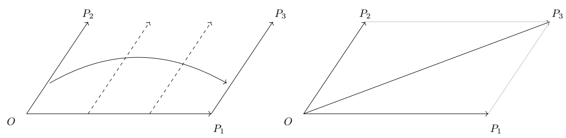

Figura 1.2: Somma vettoriale

momento che $\vec{OP}_3$ rappresenta la forza totale esercitata la forza totale esercitata su O quando si applicano contemporaneamente $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$, il meccanismo più immediato è associare l'operazione ad una addizione, infatti, essa viene scritta come:

$$\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 \tag{1.1}$$

La rappresentazione grafica è presente in figura 1.2 definisce in modo in cui un'operazione di somma sull'insieme di vettori geometrici (del piono o dello spazio) viene rappresentata.

Per i vettori che non hanno la stessa direzione, si denota che OP_3 è la direzionale del parallelogramma che ha OP_1 e OP_2 come lati (infatti, viene definita anche come *regola del parallelogramma*). Il motodo descrittivo funziona comunque anche per sommare due o più vettori che hanno la stessa direzione:

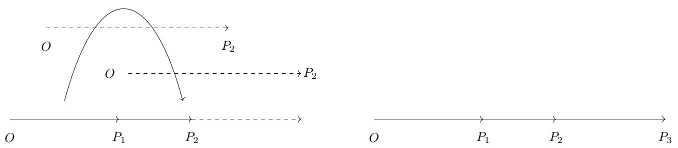

Figura 1.3: Regola del parallelogramma

Anche in questo caso vale la formula 1.1, infatti, graficamente la OP_3 è chiaramente frutto di una somma tra il segmento OP_1 e OP_2. Un'altra operazione è il prodotto del vettore per un numero reale: nel contesto delle forze, il concetto è quella di rappresentare una variazione dell'intensità e eventualmente del verso della forza rappresentata dal vettore.
Più precisamente, dati un vettore geometrico $\vec{OP}$ e un numero releale $c \in \mathbb{R}$, si può definire $c\vec{OP}$ come il vettore che sta sulla stessa retta a cui appartiene $\vec{OP}$, ma avente:

1. Stesso verso e lunghezza c volte la lunghezza di $\vec{OP}$, se c è positivo;

2. Verso opposto e lunghezza $-c$ volte quella di $\vec{OP}$, se c è negativo;

3. Lunghezza ulla se c=0, cioè $0\vec{OP} = \vec{OO}$.

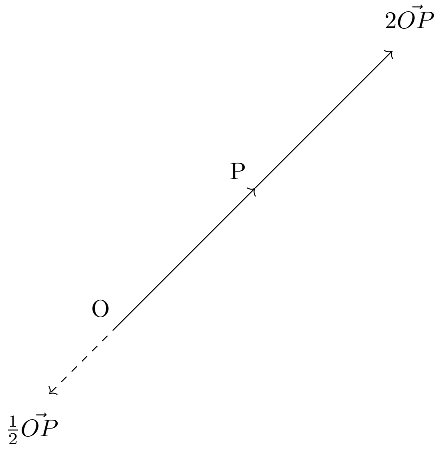

Figura 1.4: Prodotto vettoriale

Nel contesto dei vettori, i numeri reali si chiamano anche *scalari*.
Come si vedra nel ultima parte del capitolo, la nozione di vettore geometrico e le operazioni di somma tra vettori e prodotto di un vettore per un numero che appena definito saranno fornamentali per impostare e risolvere problemi geometrici nel piano e nello spazio. Per questo motivo, è necessario conoscere e mettere in evidenza le proprietà di cui godono tali operazionim che permettono di manipolare le espressioni e formule che coinvolgono i vettori. Si può verificare che valgono le seguenti:

1. La somma è *associativa*

$$(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) + \vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + (\vec{OP}_2 + \vec{OP}_3) \tag{1.2}$$

2. La somma è *commutativa*
$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_2 + \vec{OP}_1 \tag{1.3}$$

3. Il vettore $\vec{OO}$ funge da elemento neutro per la somma:
$$\vec{OP} + \vec{OO} = \vec{OO} + \vec{OP} = \vec{OP} \tag{1.4}$$

4. Per ogni vettore $\vec{OP}$, il vettore $(-1)\vec{OP}$ (ovvero il vettore che si ottiene da $\vec{OP}$ basterà invertire il verso, senza modificare direzione e lunghezza) è il suo inverso additivo o opposto rispetto alla somma:
$$\vec{OP} + (-1)\vec{OP} = (-1)\vec{OP} + \vec{OP} = \vec{OO} \tag{1.5}$$

5. Dati due numeri reali c_1, c_2 e un vettore $\vec{OP}$, si ha
$$c_1(c_2\vec{OP}) = (c_1c_2)\vec{OP} \tag{1.6}$$
(*Una situazione molto similare alla proprietà associativa del prodotto*).

6. Per ogni vettore $\vec{OP}$, si ha
$$1\vec{OP} = \vec{OP} \tag{1.7}$$
(*ovvero il numero 1 funge da elemento neutro rispetto al prodotto per scalari*).

7. Dati due numeri reali c_1, c_2 ed un vettore $\vec{OP}$, si ha
$$(c_1 + c_2)\vec{OP} = c_1\vec{OP} + c_2\vec{OP} \tag{1.8}$$

8. Dati un numero reale c e due vettori $\vec{OP}$, $\vec{OP}$ si ha
$$c(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) = c\vec{OP}_1 + c\vec{OP}_2 \tag{1.9}$$

Lo sviluppo suggerisce che valga la proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri reale o rispetto alla somma di vettori.

Osservazione 1.1.1. Come esempio di applicazione delle proprietà appena elencate, è il caso di motrare che in un'uguaglianza tra vettori, esattamente come si fa in un'uguagliana tra numeri, si possono "spostare i vettori" da un membro all'altro cambiandoli di segno:
$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3 \to \vec{OP}_1 = \vec{OP}_3 - \vec{OP}_2$$
Dove, come nel caso dei numeri lo spostamento dall'altra parte dell'uguaglianza comporta il cambiamento di segno scritto come $\vec{OP}_3 - \vec{OP}_2$ che risulta essere la forma semplificata di $\vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$. Per vederlo, basterà sommare ad antrambi i membri di $\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3$ il vettore $(-1)\vec{OP}_2$:
$$(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) + (-1)\vec{OP}_2 = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
Applicando la propriatà associativa (1.2) a primo membro:
$$\vec{OP}_! + \left[\vec{OP}_2 + (-1)\vec{OP}_2\right] = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
Dopo aver fatto questo passaggio, sarà necessario applicare la proprietà (1.5) che afferma che $(-1)\vec{OP}_2$ è l'opposto di $\vec{OP}_2$:
$$\vec{OP}_2 + \vec{OO} = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
e infine va applicato la proprietà (1.4) che afferma che il vettore nullo funge da elemento neutro:
$$\vec{OP}_1 = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
e con questo è stata confermata l'affermazione iniziale.

1.2 Coordinate

Considerando due vettori geometrici $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ nel piano, e si può supporre che $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ non abbiano la stessa dimensione.
Affermando che ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^2$ può essere ottenuto sommando multipli opportuni di $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$, ovvero:
$$\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$$
dove c_1, c_2 sono opportuni numeri reali.

Infatti, questo può essere facilmente visto graficamente: come nel disegno seguente, prolungando i vettori $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ disegnando le due rette r_1 e r_2; proiettando quindi i punti P su r_1 seguendo la direzione parallela a $\vec{OP}_2$, e chiamando il punto proiettato Q_1: e chiamandolo punto proiettato Q_2.

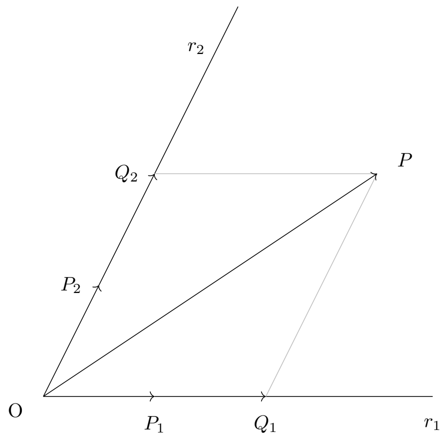

Figura 1.5: Costruzione grafica $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$

Avendo costruito le due proiezioni parallelamente a $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ come lati e $\vec{OP}$ come diagonale, quindi per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $\vec{OP} = \vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$.
Ma dal momento che $\vec{OQ}_1$ si trova sulla stessa retta di $\vec{OP}_1$ per come è definito il prodotto dei vettori per i numeri realim esisterà un numero reale c_1 tale che $\vec{OQ}_1 = c_1\vec{OP}_1$ (dove c_1 dipende semplicemente dal rappotro tra la lunghezza di $\vec{OQ}_1$ e quella di $\vec{OP}_1$).
Si conclude che $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$. Si noti che nella situazione considerata nel disegno, $c_1, c_2 > 0$ in quanto $\vec{OQ}_1$ e $\vec{OQ}_2$ hanno lo stesso verso di $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ rispettivamente. In generale, la stessa costruzione può essere effettuata per qualunque vettore $\vec{OP}$ del piano e i coefficienti c_1 e c_2 potranno anche essere negativi[1] a seconda del quadrante nel quale si trova $\vec{OP}$, ovvero a seconda che la proiezione di P sulle rette r_1, r_2 cada dalla stessa parte o dalla parte opposta dei punti P_1 e P_2.

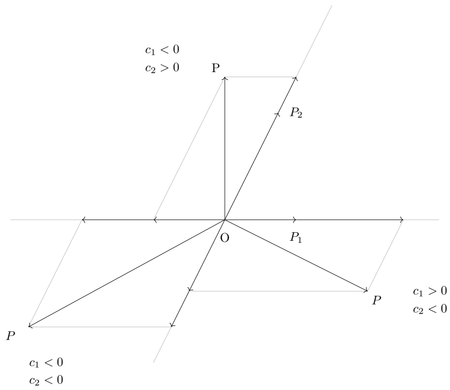

Figura 1.6: Condizione della formula $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ in base ai reali c_1, c_2

Definizione 1.2.1. La coppia (c_1, c_2) di numeri reali tale che $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ si dice la *coppia delle coordinate* del vettore $\vec{OP}$ rispetto ai vettori base $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2$.
Le coordinate c_1 e c_2 di un vettore dipendono chiaramente dalla scelta dei vettori base $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$, ma una volta che essi sono stati fissati seriveremo $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2)$, identificando di fatto il vettore con la coppia delle sua coordinate, e quindi l'insieme $\vec{V}^2_O$ con l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali.

Osservazione 1.2.1. Bisognerebbe porsi il problema dell'*unicità* di c_1 e c_2: se esistessero due modi diversi, diciamo $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ e $\vec{OP} = c'_1\vec{OP}_1 + c'_2\vec{OP}_2$, di decomporre $\vec{OP}$, non

[1]Può essrere anche $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$: nel primo caso, si ha $\vec{OP} = c_2\vec{OP}_2$, nel secondo $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1$, cioè $\vec{OP}$ non sta all'interno di uno dei quadranti in cui le rette r_1, r_2 dividono il piano, ma sta sulla retta r_2 (se $\vec{OP} = c_2\vec{OP}_2$) o sulla retta r_1 (se $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1$).

avremmo una e una spola coppia di numeri con cui identificarlo: in realtà, la costruzione grafica già suggerisce che l'unicità è garantita, ma si tornerà su tel questione nel paragrafo **??**.

Un risultato analogo a quello visto per i vettori nel piano può essere ottenuto anche nell'insieme V_O^3 dei vettori geometri nello spazio tridimensionale. In questo non si deve però partire da una coppia di vettori non allineati ma da una terna di vettori $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$ e $\vec{OP_3}$ *che non siano tutti e tre sullo stesso piano*: alloram, è semplice vedere graficamente, utilizzando proiezioni come fatto nel caso di due vettori nel piano, che ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^3$ può essere scritto come combinazione $c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2} + c_3\vec{OP_3}$.

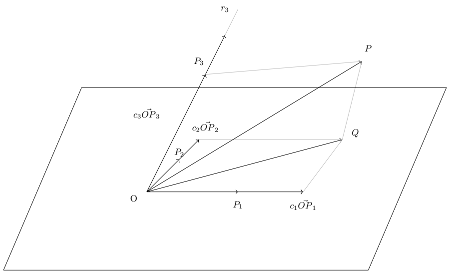

Figura 1.7: Vettori su spazio tridimensionale

Come rappresentato in figura 1.7, si proietta il punto su cui stanno $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ seguendo la direzione $\vec{OP_3}$ e si individua così un punto Q; proiettando poi P sulla retta r_3 parallelamente al vettore $\vec{OQ}$, risulta individuato un parallelogramma, che ci dice che $\vec{OP}$ si scrive come somma $\vec{OP} = \vec{OQ} + c_3\vec{OP_3}$ di $\vec{OQ}$ e di un opportuno multiplo $c_3\vec{OP_3}$ di $\vec{OP_3}$. A questo punto si osserva che $\vec{OQ}$, stando sul piano di $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ si scriverà come loro combinazione lineare $\vec{OQ} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2} + c_3\vec{OP_3}$. In modo analogo a quato già fatto per i vettori geometrico del piano, si può dire che:

Definizione 1.2.2. Ka terna (c_1, c_2, c_3) di numeri reali tale che $\vec{OQ} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2} + c_3\vec{OP_3}$ si dice la *terna delle coordinate* del vettore $\vec{OP}$ rispetto ai vettori di base $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$.

Come osservato per i vettori del piano, le coordinate c_1, c_2, c_3 di un vettore dipendono chiaramente dalla scelta dei vettori base $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$, ma una volta che essi sono stati fissati si potrà scrivere $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2, c_3)$, identificando di fatto il vettore con la terna delle sue coordinate, e quindi l'insieme $\vec{V}_O^2$ con l'insieme $\mathbb{R}^3$ della terna di numeri reali.
L'importanza delle coordinate consiste nel fatto che esse, permattendoci di rappresentare i vettori mediamente coppie o terne di numeri, permettano di tradurre in calcolo tra vettori: questa è un'importante semplificazione, in quanto è più semplice lavorare con numeri che con costruzioni o dimostrazioni di geometria eoclidea che sarebbero altrimenti necessarie per lavorare con i vettori, che sono oggetti (entità) geometrici. Per dare un idea più chiara delle affermazioni esposte precedentemente è necessario stimare questo importante risultato:

Proposizione 1.2.1. *Sia $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$ una coppia di vettori base non allineati nell'insieme V_O^2. Le coordinate rispetto a $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$ hanno le seguenti proprietà:*

1. *Se $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$ hanno coordinate rispettivamente (x_1, x_2) e (x_1', x_2'), le coordinate di $\vec{OP} + \vec{OP}'$ sono date dalla coppia $(x_1 + x_1', x_2 + x_2')$ ottenuta sommando componete per componente le coppie delle coordinate dei due vettori.*

2. *Se $\vec{OP}$ ha coordinate (x_1, x_2) e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2) ottenuta moltiplicando per c le coordinate di $\vec{OP}$.*

Dimostrazione. Il fatto che $\vec{OP}$ abbia coordinate (x_1, x_2) rispetto a $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$ significa per definizione che $\vec{OP}' = x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}$, e analogamente il fatto che $\vec{OP}'$ abbia coordinate (x_1', x_2') significa che $\vec{OP}' = x_1'\vec{OP_1} + x_2'\vec{OP_2}$. Ma allora

$$\vec{OP} + \vec{OP}' = (x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}) + (x_1'\vec{OP_1} + x_2'\vec{OP_2}) =$$

Riordinando gli addendi e raccogliendoli diversamente sfruttando le proprietà associativa e commutativa della somma tra vettori

$$= (x_1\vec{OP_1} + x_1'\vec{OP_1}) + (x_2\vec{OP_2} + x_2'\vec{OP_2}) =$$

Sfruttando la proprietà 1.8 sia nella prima parentesi che nella seconda, effettuato il raggruppamento mettendo in evvidenza nel caso della prima parentesi $\vec{OP}_1$, mentre, nel caso del secondo mettendo in evvidenza $\vec{OP}_2$, il risultato sarà

$$= (x_1 + x_1')\vec{OP}_1 + (x_2 + x_2')\vec{OP}_2$$

Ma questo, per definizione di coordinate, significa proprio che le coordinate di $\vec{OP} + \vec{OP}'$ sono date dalla coppia $(x_1 + x_1', x_2 + x_2')$, come affermato nel punto 1 della Proposizione 1.2.1.
Per dimostrare la (2), bisogna partire sempre dal fatto che $\vec{OP}$ abbia coordinate (x_1, x_2) significa per definizione che $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$. Allora

$$c\vec{OP} = c(x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_1) =$$

Applicando la proprietà (1.9) otterremo la divisione in due gruppi di parentesi, con c messo in evidenza messi tra di loro in forma di addizione.

$$= c(x_1\vec{OP}_1) + c(x_2\vec{OP}_2) =$$

Applicando la proprietà (1.6) a entrambi gli addendi si otterrà:

$$= (cx_!)\vec{OP}_1 + (cx_2)\vec{OP}_2$$

Ma questo, per definizione di coordinate, ci dice proprio che le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2), come affermato nella (2) della Proposizione 1.2.1. □

Esempio 1.2.1. Per un esempio di quanto appena dimostrato, si prendano i vettori base $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ come nel disegno seguente, e si considerino i due $\vec{OQ}_1$ e $\vec{OQ}_2$

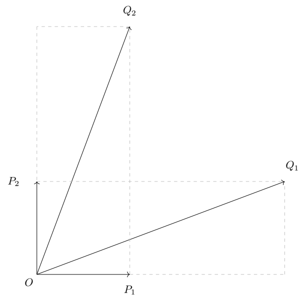

Figura 1.8: Rappresentazione grafica OQ_1 e OQ_2

Come si vede dalla figura (1.8), si ha $\vec{OQ}_1 = 2\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$ e $\vec{OQ}_1 = \vec{OP}_1 + 2\vec{OP}_2$, ovvero le coordinate $\vec{OP}_1$ sono date dalla coppia (2, 1).
Allora, in base alla (1) della Proposizione 1.2.1, la somma $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$ ha coordinate (*sempre rispetto a* $\vec{OP}_1$ *e* $\vec{OP}_2$) date da

$$\vec{OQ}_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \ \vec{OQ}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \to \quad \vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2 = \begin{vmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = (3, 3).$$

ovvero si ha $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2 = 3\vec{OP}_1 + 3\vec{OP}_2$. In effetti, questo può essere verificato graficamente costruendo con la regola del parallelogramma la somma $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$, come nella figura seguente

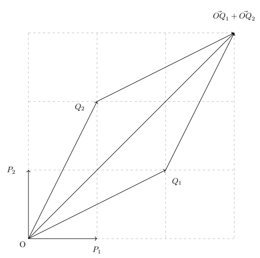

Figura 1.9: Rappresentazione grafica $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$

L'aspetto notevole è che si può dimostrare chi era il vettore $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$ (in coordinate) con un semplice conto aritmetico, anche prima di disegnarlo con la costruzione geometrica del parallelogramma.

Osservazione 1.2.2. Affermazioni del tutto analoghe a quelle della Proposizione 1.2.1 valgono anche nel caso dei vettori nello spazio. Più precisamente, si ha che fissata una terna $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ di vettori non complanari nell'insieme V_O^3 dei vettori dello spazio tridimensionale, allora le coordiante rispetto a tale terna di base hanno le seguenti proprietà:

1. Se $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$ hanno coordinate rispettivamete (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3), le coordinate di $\vec{OP}_1 + \vec{OP}'_1$ sono date dalla terna $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3)$ ottenuta sommando componente per componente le terne delle coordiante dei due vettori.

2. Se $\vec{OP}$ ha coordinate (x_1, x_2, x_3) e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate, di $c\vec{OP}$ sono date dalla terna (cx_1, cx_2, cx_3) ottenuta moltiplicando per c le coordinate di $\vec{OP}$.

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella della Proposizione 1.2.1.

1.3 Lunghezze e angoli

Lavorare in coordiante rispetto a una base ci permette di tradurre numericamente costruzioni geometriche con i vettori e risolvere in modo più semplice problimi relativi ai vettori. Questo è quero qualunque sia la base scelta, tuttavia a seconda del problema specifico da risolvere, alcune basi possono essere più convenienti di altre, e in particolare quando si vuole rispondere, lavorando in coordinate, alle domande seguenti: "Quel'è la lunghezza di un vettore dato? quel'è l'angolo tra due vettori dati?
In tal caso, le basi più convenienti da usare, come visto, sono quelle formate da (due nel caso del piano, tre nel caso dello spazio) vettori ctra loro ortogonali e di lunghezza 1 (*rispetto a un'unità di misura scelta*). Tali basi si chiamano *ortonormale.*
Infatti, considerando una tale base nel piano

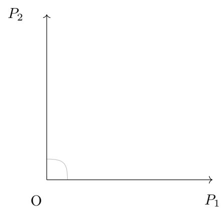

Figura 1.10: Base del piano

Ora, considerando un vettore $\vec{OP}$, di quale sono note le coordinate rispetto a tale base sono date da (x_1, x_2) (ovvero, per definizione di coordinate, $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$): è possibile calcolare la lunghezza del vettore $\vec{OP}$ a partire dalle coordinate? Per rispondere a tale domanda, bisogna considerare le seguenti figure, nel quale è rappresentata la decomposizione $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$

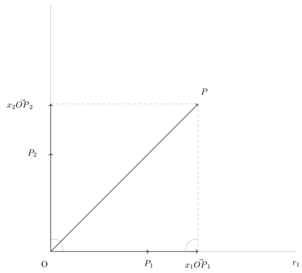

Figura 1.11: Base del piano con il vettore $\vec{OP}$

Dal momento che si è selto i vettori di base perpendicolari, quando si proietta P sulla retta r_1 che contiene $\vec{OP}_1$ sequendo la direzione $\vec{OP}_2$, tale proiezione incontra r_1 con un angolo di 90^o, e si viene quindi a formare un triangolo rettangolo (evidenziato nel figura 1.11) avente come ipotenusa proprio $\vec{OP}$ e al quele possiamo quindi applicare il teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza di $\vec{OP}$, che denoterà $|\vec{OP}|$.
A quasto scopo, c'e da notare che il cateto orizzontale di tale triangolo è dato dal vettore $x_1\vec{OP}_1$, e quindi la sua lunghezza è data dal prodotto di $x_!$ per la lunghezza di $\vec{OP}_1$: ma avendo scelto i vettori

di base di lunghezza unitaria, questo implica che la lunghezza di tale cateto sia semplicemente x_1; per quello che riguarda il cateto verticale, esso per costruzione ha la stessa lunghezza del vettore $x_2\vec{OP}_2$, ovvero x_2 (in quanto $\vec{OP}_2$ ha lunqhezza 1). Quindi il teorema di Pitagora dice che $|\vec{OP}|^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

$$|\vec{OP}| = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{1.10}$$

che rappresenta la formula cercata, che ci dà la lunghezza di $\vec{OP}$ in funzione delle sue coordinate. Si nota che nei ragionamenti svolti sono fontamentali per la scelta di una base fatta di vettori ortogonali (questo ha fatto comparire un triangolo rettangolo a cui viene applicato il teorema di Pitagora) e di lunghezza 1 (che ha permesso di esprimere le lunghezze dei cateti in funzione delle sole coordinate).
Dopo aver trattato del piano, adesso è necessario trattare lo spazio nella sua costruzione, infatti lo spazio trigonometrico è composto da una terna di vettori: $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ appartenenti all'insieme V_O^3 dei vettori applicati nello spazio tridimensionale:

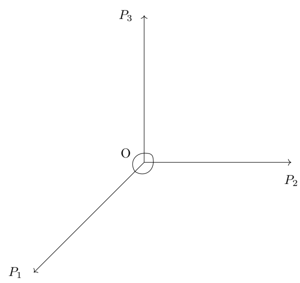

Figura 1.12: Costruzione grafica base spazio

Supponendo ora di avere un vettore $\vec{OP}$ e di volerne calcolare la lunghezza, si denota $|\vec{OP}|$, in fuzione delle sue coordinate x_1, x_2, x_3 rispetto alla base B scelta. Per definizione di coordintate, $\vec{OP}$ si decompone come somma $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$, come in figura 1.13.

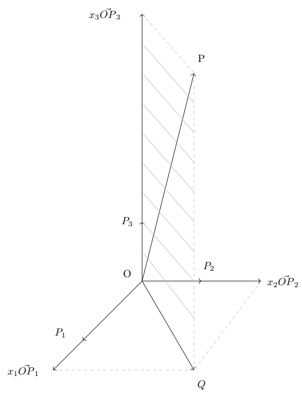

Figura 1.13: Base dello spazio con il vettore $\vec{OP}$

La decomposizione è stata ottenuta graficamente come segue: prima si proietta P perpendicolarmente sul piano su cui stanno P_1 e P_2 ottenendo il punto Q (l'angolo in Q quindi è retto, come messo in evidenza nella figura) e si ottiene un rettangolo, come campitura in grigio nella figura, che dice che $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3$; poi dal momento che $\vec{OQ}$ giace sul piano di P_1 e P_2 lo si può decomporre come $\vec{OQ} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$ (sempre sul piano retti in quanto $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ sono perpendicolari), e quindi $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3 = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$ come visto sopra.
Ora, essendo $\vec{OP}$ l'ipotenusa del triangolo OPQ rettangolo in Q, per il teorema di Pitagora si avrà

$$|OP|^2 = |OQ|^2 + |PQ|^2 \tag{1.11}$$

Ma da una parte, il segmento PQ, essendo un lato del rettangolo ombreggiato in figura, è lungo esattamente quanto il vettore $x_3\vec{OP}_3$, ovvere x_3 (in quanto $\vec{OP}$ ha lunghezza 1); dall'altra, OQ è la diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori $x_1\vec{OP}_1$ e $x_2\vec{OP}_2$ di lunghezza rispettivamente x_1 e x_2 (in quanto $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ hanno lunghezza 1), quindi sempre per il teorema di Pitagora si ha $|OP|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ovvero, se per la terna $x = (x_1, x_2, x_3)$ si utilizza la notazione

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,

$$|\vec{OP}| = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1.12}$$

che è la formula cercata, angolora della (1.10), per la lunghezza di un vettore geometrico $\vec{OP}$ dello spazio in funzione delle sue coordinate rispetto alla base scelta.
Ora, bisogna porsi il problema di calcolare l'angolo tra due vettori non nulli $\vec{OP}, \vec{OQ} \in V_O^3$ una volta note le loro coordinate rispetto a una base ortonormale. Supponendo che tali coordinate siano rispettivamente (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3).

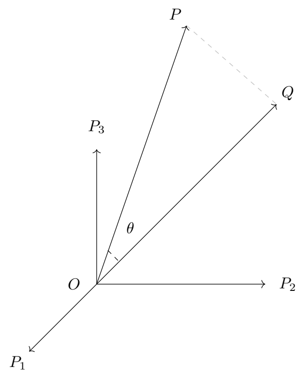

Figura 1.14: Triangolo OPQ

Per un risultato di trigonometria, l'angolo θ tra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ è collegato alla lunghezza dei segmenti OP, OQ, PQ dalla formuala[2]

[2]SI tratta di una sorta di "teorema di Pitagora per triangoli qualunque": infatti, se il trangolo è rettangolo in O, ovvero $\theta = \frac{\pi}{2}$, allora $\cos\theta = 0$ e la formula si riduce a $|\vec{PQ}|^2 = |OQ| + |OQ|^2$, il classico teorema di Pitagora.