

# Appunti geometria

Nicola Ferru

23 febbraio 2023



# Indice

0.1	Premesse...	7
0.2	Simboli	8
<b>1</b>	<b>Vettori</b>	<b>9</b>
1.1	Spazio Vettoriale	9
<b>2</b>	<b>Numeri Complessi</b>	<b>11</b>
2.1	Operazioni con Numeri complessi	11
<b>3</b>	<b>Il determinante</b>	<b>13</b>
3.1	Richiami sulle permutazioni	13
3.2	La definizione di determinante	14
3.3	La formula di Laplace	16
3.4	Proprietà del determionante	18
<b>4</b>	<b>Applicazione lineari e prodotto di matrici</b>	<b>25</b>
4.1	Applicazioni lineari: definizione e esempi	25
4.2	Matrice associata a un'applicazione lineare	28
4.3	Iniettività e suriettività delle applicazioni lineari	33
4.3.1	Richiami generali	33
4.3.2	Suriettività delle applicazione lineari	35
4.3.3	Iniettività di applicazioni lineari	36



Elenco delle tabelle



# Elenco delle figure

4.1	$f : V_O^2 \rightarrow V_O^2$ . . . . .	25
4.2	$f(\vec{OP}) + f(\vec{OP}') = f(\vec{OP} + \vec{OP})$ . . . . .	26
4.3	$f(c\vec{OP}) = cf(\vec{OP})$ . . . . .	26
4.4	differenza tra iniettivo e suriettivo . . . . .	34

## 0.1 Premesse...

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un'occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti

## 0.2 Simboli

$\in$ Appartiene	$\Rightarrow$ Implica	$\beta$ beta
$\notin$ Non appartiene	$\iff$ Se e solo se	$\gamma$ gamma
$\exists$ Esiste	$\neq$ Diverso	$\Gamma$ Gamma
$\exists!$ Esiste unico	$\forall$ Per ogni	$\delta, \Delta$ delta
$\subset$ Contenuto strettamente	$\ni$ : Tale che	$\epsilon$ epsilon
$\subseteq$ Contenuto	$\leq$ Minore o uguale	$\sigma, \Sigma$ sigma
$\supset$ Contenuto strettamente	$\geq$ Maggiore o uguale	$\rho$ rho
$\supseteq$ Contiene	$\alpha$ alfa	



# Capitolo 1

## Vettori

### 1.1 Spazio Vettoriale

**Spazio Vettoriale 1.** *Uno spazio vettoriale reale ( $R$ -spazio vettoriale) è un insieme  $V$  in cui sono definite un'operazione di **SOMMA** tra elementi di  $V$  e un'operazione di **Prodotto tra un reale e un elemento di  $V$**  che soddisfano 8 proprietà:*

1. La somma è associativa quando  $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \quad (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ ;
2. La somma è commutativa quando  $\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. Esistenza elemento neutro  $0$  se e solo se  $\forall v \in V \quad v + 0 = 0 + v = v$
4. Esistenza opposto  $-v$  se e solo se  $\forall v \in V \quad v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. Il prodotto per uno scalare è assoluto quando  $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V \quad c_1(c_2v) = (c_1c_2)v$
6. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando  $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V \quad (c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$
7. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando  $\forall c \in R, \forall v_1, v_2 \in V \quad c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$
8. Esistenza elemento neutro  $1$  quando  $\forall v \in V \quad 1v = v$

**ES:**  $V_0^2 \quad V_0^3$

**ES:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x^2, \quad g(x) = e^x, \quad f(x) + g(x) = x^2 + e^x \quad 3f(x) = 3x^2$

**ES:**  $\mathbb{R}^n$  n-uple di numeri reali

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad C \in \mathbb{R} \quad c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

**ES:**  $\mathbb{R}_n[x]$  polinomi di grado  $\leq n$  nella variabile  $x$  a coefficiente reale

- $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
- $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$

**ES:**  $\mathbb{R}[x]$  polinomio di grado qualsiasi

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \\ c \in \mathbb{R}, \quad cp(x) &= ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \dots + ca_nx^n \end{aligned}$$



## Capitolo 2

# Numeri Complessi

**Numeri reali 1.** *Un numero complesso è definito come un numero della forma  $x + iy$ , con  $x$  e  $y$  numeri reali e  $i$  una soluzione dell'equazione  $x^2 = -1$  detta unità immaginaria. i numeri reali sono*

### 2.1 Operazioni con Numeri complessi

1. Modulo e distanza

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.1}$$

Il valore assoluto (modulo) ha proprietà queste proprietà:

$$|z + w| \geq |z| + |w|, \quad |zw| = |z||w|, \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Valide per tutti i numeri complessi  $z$  e  $w$ . La prima proprietà è una versione della disuguaglianza triangolare.



## Capitolo 3

# Il determinante

In questo capitolo introdurremo uno strumento alternativo alla riduzione a gradini per determinare se le righe (o le colonne) di una matrice siano dipendenti. Per poterne dare la definizione rigorosa, dobbiamo prima fare alcuni richiami sulle permutazioni.

### 3.1 Richiami sulle permutazioni

Dato l'insieme  $\{1, 2, \dots, n\}$  dei numeri naturali compresi tra 1 e  $n$ , per un certo  $n$ , una funzione da  $\{1, 2, \dots, n\}$  in se stesso associa a ogni elemento di  $\{1, 2, \dots, n\}$  un'immagine, scelta sempre all'interno di  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Se facciamo in modo che le immagini siano tutte diverse senza ripetizioni<sup>1</sup>, queste ci daranno ancora tutti gli elementi  $1, 2, \dots, n$  semplicemente disposti in un altro ordine, ovvero permutati. Si parla di *permutazione di  $n$  elementi*. Ad esempio, le seguenti rappresentano permutazioni di 4 elementi:

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 3 & 2 \rightarrow 4 \\ 3 \rightarrow 2 & 3 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 4 & 4 \rightarrow 1 \end{array}$$

L'insieme delle permutazioni di  $n$  elementi si denota  $S_n$ . Per ogni  $n$ , tale insieme contiene esattamente  $n! := n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$  (cioè  $n$  fattoriale) permutazioni: ad esempio, per  $n = 2$  abbiamo  $2! = 2 \cdot 1 = 2$  permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 1 \end{array}$$

(tra le permutazioni vi è sempre anche quella che associa a ogni elemento se stesso, detta permutazione identica<sup>2</sup>).

Per  $n = 3$  abbiamo invece  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{llllll} 1 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 2 & 1 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 3 & 1 \rightarrow 2 & 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 1 & 2 \rightarrow 3 & 2 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 3 & 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 & 3 \rightarrow 3 & 3 \rightarrow 2 & 3 \rightarrow 1 & 3 \rightarrow 1 & 3 \rightarrow 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array}$$

Si noti che  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$  scambiano tra loro due elementi lasciando fisso il terzo ( $p_2$  scambia tra loro 1 e 2,  $p_3$  scambia 2 e 3): in generale, una permutazione di questo tipo, che scambia tra loro è una trasposizione anche la prima permutazione di 4 elementi presentata all'inizio del paragrafo (scambia tra loro 2 e 3 lasciando fissi 1 e 4), mentre la seconda non lo è.

Benché non tutte le permutazioni siano trasposizioni, si può dimostrare che qualunque permutazione può essere realizzata eseguendo una sequenza di trasposizioni. Ad esempio, la permutazione  $p_5$  di sopra, che non è una trasposizione, può tuttavia essere ottenuta scambiando prima 1 e 2, e poi 1 e 3:

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \end{array}$$

<sup>1</sup> Si dice la funzione è *iniettiva*: una funzione iniettiva da un insieme finito in se stesso è automaticamente anche suriettiva, e quindi biiettiva. Richiameremo queste nozioni nel prossimo capitolo.

<sup>2</sup> Come funzione, si tratta della cosiddetta identità o funzione identica.

ovvero può essere ottenuta componendo 2 trasposizioni.

In generale, se il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data  $p$  è pari, si dice che  $p$  è una *permutazione pari*; se invece il numero di trasposizioni che servono per ottenere  $p$  è dispari, si dice che  $p$  è una *permutazione dispari*. Ad esempio,  $p_5$  è una permutazione pari, in quanto l'abbiamo ottenuta componendo 2 trasposizioni; è facile vedere che anche  $p_6$  è una permutazione pari, in quanto può essere ottenuta componendo due trasposizioni:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 3 \rightarrow 1 \\ 3 &\rightarrow 1 \rightarrow 2 \end{aligned}$$

Chiaramente, se una permutazione è già essa una trasposizione, allora essa è dispari (1 è un numero dispari).

Si noti che possono esserci più modi diversi di decomporre una permutazione come composizione di trasposizioni, ad esempio, la permutazione identica può essere vista o come risultato di 0 trasposizioni, oppure come risultato di 2 trasposizioni, ad esempio

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 2 \rightarrow 1 \\ 2 &\rightarrow 1 \rightarrow 2 \\ 3 &\rightarrow 3 \rightarrow 3 \end{aligned}$$

Tuttavia, si può dimostrare che il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data è o sempre pari o sempre dispari (nell'esempio, 0 o 2, comunque pari).

Si può allora definire il *segno*  $s(p)$  di una permutazione  $p$  come  $s(p) = +1$  se  $p$  è una permutazione pari. Siamo ora pronti a definire il determinante.

## 3.2 La definizione di determinante

Sia  $A$  una matrice che ha  $n$  righe e  $n$  colonne, per qualche  $n > 0$ : tali matrici si dicono *quadrato* e il numero  $n$  comune a righe e colonne si dice *l'ordine della matrice*. Il determinante associa a ogni matrice  $A$  quadrata di ordine  $n$  a entrate in un campo  $\mathbb{K}$  un elemento  $\det(A) \in \mathbb{K}$ , funzione delle sue entrate, per il quale vedremo che vale l'importante proprietà che  $\det(A) = 0$  se e solo se la matrice ha rango minore di  $n$ , ovvero se e solo se le righe (o le colonne) della matrice sono dipendenti.

**Definizione 1.** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  con entrate  $a_{ij}$ . Allora

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} s(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)} \quad (3.1)$$

In altre parole, il determinante di una matrice quadrata di ordine  $n$  è dato da una sommatoria che ha addendo per ogni permutazione  $p \in S_n$ : ognuno di questi addendi è un prodotto di entrate di  $A$  del tipo  $a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)}$ , con davanti un segno  $+$  o  $-$  a seconda che la permutazione  $p$  sia pari o dispari. Si noti che l'espressione  $a_{1p(1)}, a_{2p(2)}, \dots, a_{np(n)}$  è il prodotto di  $n$  entrate scelte nella matrice, una per ogni riga, con gli indici di colonna dati da  $p(1), p(2), \dots, p(n)$ : poiché una permutazione scambia gli indici  $1, 2, \dots, n$  senza ripetizioni, stiamo praticamente scegliendo un'entrata da ogni riga in modo però che le entrate scelte stiano anche su colonne diverse.

Per chiarire e illustrare la definizione precedente, consideriamo in particolare i casi  $n = 2$  e  $n = 3$ .

Sia  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  una matrice quadrata di ordine  $n = 2$ . Come abbiamo visto sopra ci sono solo due permutazioni dell'insieme  $\{1, 2\}$  (l'identità e la trasposizione che scambia 1 con 2) quindi nella sommatoria avremo solo due addendi, del tipo  $s(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)}$ : se  $p$  è l'identità, che come abbiamo osservato sopra è una permutazione pari e quindi  $s(p) = +1$  e l'addendo corrispondente sarà  $+a_{11}a_{22}$ : se  $p$  è la trasposizione che scambia 1 con 2, che è una permutazione dispari, si ha  $s(p) = -1$  e l'addendo corrispondente sarà  $-a_{12}a_{21}$ . Il determinante di una matrice quadrata  $A$  di ordine 2 risulta quindi essere

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3.2)$$

Nel caso di una matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  quadrata di ordine  $n = 3$ , la sommatoria avrà 6 addendi, tanti quante sono le permutazioni dell'insieme  $\{1, 2, 3\}$ , e per ognuna di queste permutazioni  $p$  l'addendo corrispondente sarà del tipo  $s(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)}$ . Più precisamente, avremo

- l'addendo  $+a_{11}a_{12}a_{33}$  corrispondente alla permutazione  $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3$  (cioè la permutazione identica, che è una permutazione pari)
- l'addendo  $-a_{11}a_{23}a_{32}$  corrispondente alla permutazione  $p(1) = 1, p(2) = 3, p(3) = 2$  (che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari)
- l'addendo  $+a_{12}a_{23}a_{31}$  corrispondente alla permutazione  $p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 1$  (che è una trasposizione dispari)
- l'addendo  $-a_{12}a_{21}a_{33}$  corrispondente alla permutazione  $p(1) = 2, p(2) = 1, p(3) = 3$  (che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari)
- l'addendo  $+a_{13}a_{21}a_{32}$  corrispondente alla permutazione  $p(1) = 3, p(2) = 1, p(3) = 2$  (che si può scrivere come composizione di due trasposizioni ed è quindi una permutazione pari)
- l'addendo  $-a_{13}a_{22}a_{31}$  corrispondente alla permutazione  $p(1) = 3, p(2) = 2, p(3) = 1$  (che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari)

e quindi si avrà, per una matrice  $A$  di ordine 3:

$$\det(A) = a_{11}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (3.3)$$

Ora, vedremo nel Paragrafo la dimostrazione del fatto che il determinante di una matrice quadrata di ordine  $n$  si annulla se e solo se la matrice ha  $n = 2$  e  $n = 3$ , usando le formule esplicite (3.2) e (3.3).

Nel caso di una matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  di ordine 2, essendoci solo proporzionali, ovvero diciamo che esiste un  $c \in \mathbb{K}$  tale che  $(a_{11}, a_{12}) = c(a_{21}, a_{22})$ , cioè

$$a_{11} = ca_{21}, \quad a_{12} = ca_{22} \quad (3.4)$$

Ma allora, moltiplicando (a entrambi i membri) la prima uguaglianza per  $a_{22}$  e la seconda per  $a_{21}$  si ha  $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$  e  $a_{12}a_{21} = ca_{21}a_{21}$ , da cui vediamo che  $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$ : quindi  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ , ovvero  $\det(A) = 0$ . Quindi se una matrice di ordine 2 ha le righe proporzionali, il suo determinante è zero.

Viceversa, supponiamo che il determinante  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  sia zero, ovvero

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \quad (3.5)$$

Supponendo per il momento che le entrate  $a_{21}, a_{22}$  della seconda riga non siano nulle, dividendo entrambi i membri della (3.5) per  $a_{21}$  e  $a_{22}$  otteniamo

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (3.6)$$

cioè si ha  $\frac{a_{11}}{a_{21}} = c$  e  $\frac{a_{12}}{a_{22}} = c$  per qualche  $c \in \mathbb{K}$ , da cui ritroviamo le uguaglianze (3.4), che  $a_{21}$  e  $a_{22}$  fossero entrambi diversi da zero: infatti, se ad esempio  $a_{21} = 0$  allora la (3.5) diventa  $a_{11}a_{22} = 0$ , che equivale a dire che o  $a_{11} = 0$  oppure  $a_{22} = 0$ : ma nel primo caso la matrice è della forma  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ ,

nel secondo  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , e in entrambi i casi otteniamo sempre che le righe sono proporzionali.

Nel caso di matrici di ordine 3, dimostrare che il determinante si annulla se e solo se le righe sono dipendenti, non è difficile se ci aiutiamo con un'interpretazione geometrica: **infatti, prendiamo l'espressione (3.3) del determinante di una tale matrice e riscriviamola nel modo seguente:**

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (3.7)$$

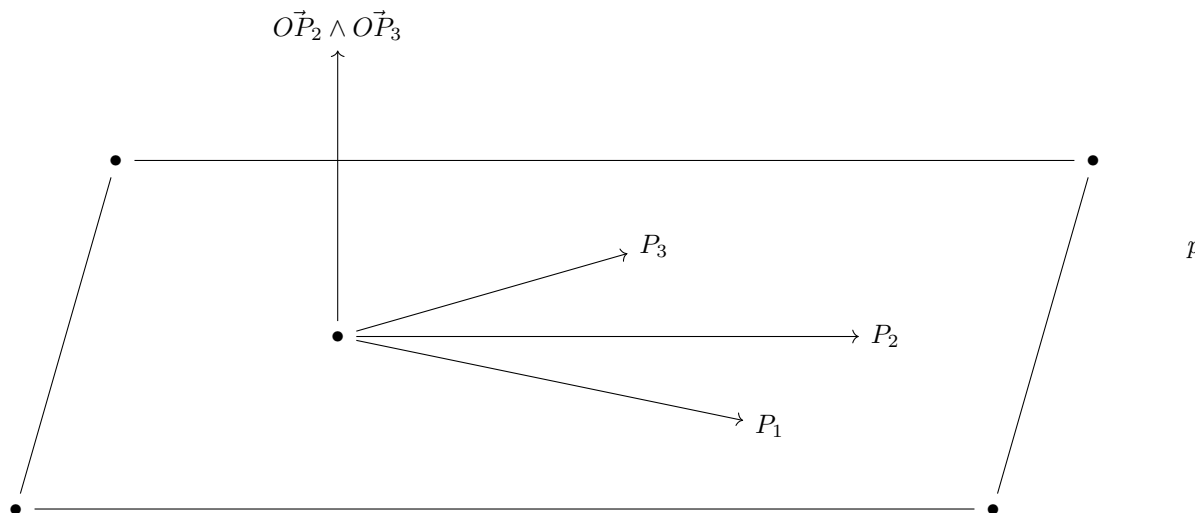
Ora, le tre quantità dentro le parentesi tonde non sono altro che le componenti del prodotto vettoriale dei due vettori di  $\mathbb{R}^3$  dati dalla seconda e dalla terza riga della matrice:

$$R_2 \wedge R_3 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \wedge (a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Quindi la (3.7), dal momento che moltiplica le componenti di  $R_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$  con le rispettive componenti di  $R_2 \wedge R_3$  (la prima con la prima, la seconda con la seconda e la terza con la terza) e somma, non è nient'altro che quello che abbiamo chiamato prodotto scalare tra  $R_1$  e  $R_2 \wedge R_3$ . Quindi, dire che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla equivale a dire che le sue tre righe  $R_1, R_2, R_3$  verificano l'uguaglianza.

$$R_1 * (R_2 \wedge R_3) = 0 \quad (3.8)$$

Ora, se fissiamo nello spazio  $V_O^3$  dei vettori applicati nello spazio tridimensionali, le terne  $R_1, R_2, R_3$  rappresenteranno le coordinate di tre vettori applicati  $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$  rispettivamente, e la (3.8) ci sta allora dicendo che il vettore  $\vec{OP}_1$  è perpendicolare al vettore  $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$  (infatti, abbiamo dimostrato che due vettori dello spazio sono perpendicolari solo se il prodotto scalare tra le terne delle loro coordinate è zero). Ma, essendo a sua volta  $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$ , per le proprietà del prodotto vettoriale, perpendicolare  $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$  significa dire che anche  $\vec{OP}_1$  deve stare sul piano  $p$ :



Quindi i tre vettori, stando sullo stesso piano, sono tra loro dipendenti, e concludiamo che sono dipendenti anche le terne  $R_1, R_2, R_3$  delle loro coordinate<sup>3</sup>. Questo mostra come volevamo che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla se e solo se le sue righe  $R_1, R_2, R_3$  sono dipendenti.

Nel paragrafo sulle proprietà del determinante, dimostreremo in modo puramente algebrico che questo fatto è vero per matrici di qualunque ordine. Prima di fare ciò, vediamo nel prossimo paragrafo un modo di calcolare il determinante alternativo alla definizione, il cui utilizzo diretto richiederebbe di scrivere una sommatoria che per una matrice di ordine  $n$  ha  $n!$  addendi, tanti quanti le permutazioni di  $n$  elementi (si pensi che già per  $n = 4$  abbiamo  $4! = 24$  addendi).

### 3.3 La formula di Laplace

Allo scopo di calcolare il determinante, useremo la cosiddetta *formula di Laplace*, per scrivere la quale abbiamo prime bisogno di dare la seguente

**Definizione 2.** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ : per ogni entrata  $a_{ij}$  di  $A$ , definiamo il cofattore di  $a_{ij}$ , denotato  $C_{ij}$ , come il determinante della matrice di ordine  $n - 1$  che si ottiene da  $A$  cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$ , moltiplicato per  $(-1)^{i+j}$

Vediamo subito un esempio: consideriamo la matrice di ordine 3 seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

L'entrata  $a_{11}$  è uguale a 1: il suo cofattore  $C_{11}$  è, in base alla definizione  $\langle ++ \rangle$ , il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna (ovviamente la riga e la colonna dell'entrata  $a_{11}$  presa in considerazione) moltiplicato per  $(-1)^{1+1}$ :

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = (-1)^2 (5 * 9 - 6 * 8) = +(45 - 48) = -3$$

Invece, se per esempio prendiamo l'entrata  $a_{23} = 6$ , il suo cofattore  $C_{23}$  è il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene cancellando la seconda riga e la terza colonna (ovvero la riga e la colonna dell'entrata  $(-1)^{2+3}$ ):

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = (-1)^5 (1 * 8 - 2 * 7) = -(8 - 14) = +6$$

<sup>3</sup>Ricordiamo che dei vettori in uno spazio vettoriale sono dipendenti se e solo se lo sono, le  $n$ -uple delle loro coordinate rispetto a una base scelta.



Siamo ora pronti a enunciare il seguente risultato, che ci dà una formula per il calcolo del determinante di una matrice:

**Proposizione 1.** Sia  $A$  una matrice di ordine  $n$ . Data una sua qualunque riga  $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$  o

una qualunque colonna  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ , si ha

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} \quad (3.9)$$

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} \quad (3.10)$$

La proposizione, che non dimostriamo, afferma quindi che il determinante di una matrice si può calcolare scegliendo una riga o una colonna, moltiplicando ogni elemento della riga o della colonna per il suo cofattore e sommando il tutto. La (3.9) e la (3.10) si dicono rispettivamente formula (o sviluppo) di Laplace secondo la  $i$ -esima riga e la formula (o sviluppo) di Laplace secondo la  $j$ -esima colonna.

L'osservazione importante da fare sulla formula di Laplace è che essa esprime il determinante di una matrice di ordine  $n$  in funzione dei suoi cofattori, che sono, a parte il fattore  $(-1)^{i+j}$ , determinanti di matrici di ordine  $n-1$ : a loro volta, potremo poi calcolare ciascuno di questi cofattori riutilizzando la formula di Laplace, con la quale ci ridurremo a calcolare determinanti di matrici di ordine  $n-2$ , e così via fino a che non arriveremo a matrici di ordine 2 per le quali la formula del determinante è particolarmente semplice da ricordare. Vediamo un esempio.

**Esempio 1.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Scegliamo di sviluppare il determinante secondo Laplace rispetto

alla terza riga, usando cioè la formula (3.9) nel caso  $i = 3$ :

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}.$$

Per definizione di cofattori e tenendo conto che  $a_{32} = a_{33} = 0$  (e quindi non abbiamo bisogno di calcolare i corrispondenti cofattori) si ha

$$\det(A) = 1 * (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 * (-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Ora, ciascuno dei due determinanti di ordine 3 che compaiono in questa uguaglianza può essere calcolato usando di nuovo la formula data. Ad esempio, se per il primo determinante scegliamo la terza colonna (quindi dobbiamo usare  $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ ) tenendo conto che  $a_{13} = 0$ , si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 * (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

dove il determinante di ordine 2 è stato calcolato usando la formula  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Analogamente, se per l'altro determinante scegliamo la prima riga (quindi dobbiamo usare  $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ ) tenendo conto che  $a_{13} = 0$ , si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 * (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 * (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Sostituendo questi risultati nella (3.11), si trova allora

$$\det(A) = 1 * (-1)^{3+1}(-1) + 1 * (-1)^{3+4}2 = -3.$$

Nell'enunciato della Proposizione 3.3, è sottinteso il fatto che il risultato dello sviluppo ci darà sempre il determinante di  $A$  indipendentemente dalla riga o colonna scelta: questo è molto importante nella pratica in quanto ci consente, come visto anche nell'esempio, di scegliere se possibile righe o colonne in cui alcune entrate siano nulle, così da non dover calcolare i corrispondenti cofattori.

**Osservazione 1.** Notiamo che l'espressione (3.7), che abbiamo usato per mostrare geometricamente che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti, non era altro che lo sviluppo di Laplace di tale determinante rispetto alla prima riga: infatti, ricordando la definizione di determinante di una matrice di ordine 2, si trova

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ a_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \\ a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

### 3.4 Proprietà del determinante

In questo paragrafo dimostreremo finalmente che il determinante di una matrice  $A$  si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti. A questo scopo, iniziamo con l'enunciazione e dimostrazione tre importanti proprietà del determinante:

1. se  $A'$  si ottiene da  $A$  moltiplicando una riga di  $A$  per  $c \in \mathbb{K}$ , allora  $\det(A') = c \det(A)$

Ad esempio, se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  è la matrice ottenuta da  $A$  moltiplicando la prima riga per  $c = 5$ , ho  $\det(A') = 5 * 4 - 10 * 3 = 5 \det(A)$ .

In altre parole, se una riga di una matrice viene moltiplicata per una scala  $c$ , quando calcoliamo il determinante possiamo “portare fuori” questo scalare.

In base alla definizione ( $< ++ >$ ) di determinatem, il determinante della matrice  $A'$  in cui abbiamo moltiplicato tutti gli elementi della riga  $i$ -esima per  $c$  è  $\det(A') = \sigma s(p) a_{1p(1)} \dots (ca_{ip(1)}) \dots a_{np(n)}$ : essendo il fattore  $c$  comune a tutti gli addendi della sommatoria, possiamo metterlo in evidenza in evidenza alla somma e scrivere  $\det(A') = c \sigma s(p) a_{ip(n)} a_{1np(n)}$ , ovvero  $\det(A') = c \det(A)$ , come volevamo.

2. supponiamo di sommare a una riga  $R_i$  di una matrice  $A$  una  $n$ -upla  $v = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ . Allora, il determinante della nuova matrice  $A'$  così ottenuta vale

$$\det(A') = \det(A) + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

dove stiamo denotando con  $\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$  la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo  $v$  al posto della riga  $R_i$ .

Possiamo anche scrivere

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + v \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Ad esempio, consideriamo la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  e sommiamo alla sua seconda riga  $(2, 1)$  la coppia  $(1, 3)$ , ottenendo  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Allora si ha proprio

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det(A) + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ovvero  $-2 = -3 + 1$ .

*Dimostrazione.* Se  $R_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$  allora la riga  $i$ -esima della matrice  $A'$  è  $R_i + v = (a_{i1} + v_{i1} \ a_{i2} + v_{i2} \ \dots \ a_{in} + v_{in})$ . In base alla definizione ( $< ++ >$ ) di determi-

nante, si ha  $\det(A') = \sum s(p)a_{ip(1)} \dots (a_{ip(i)} + v_{ip(i)}) \dots a_{np(n)} = \sum s(p)a_{ip(1)} \dots a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} + \sum s(p)a_{ip(1)} \dots v_{ip(i)} \dots a_{np(n)}$  ovvero  $\det(A) + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ , come volevamo.  $\square$

3. se  $A'$  si ottiene da  $A$  scambiando tra loro due righe allora  $\det(A') = -\det(A)$

Ad esempio, se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  è la matrice ottenuta da  $A$  scambiando tra loro la prima e la seconda riga, ho  $\det(A) = 1 * 4 - 2 * 3 = -2$  e  $\det(A') = 3 * 2 - 4 * 1 = +2$ .

*Dimostrazione.* Sia  $A'$  la matrice ottenuta da  $A$  scambiando la riga  $R_i$  con la  $R_j$ : quindi per ogni  $k$  si ha  $a'_{ik} = a_{jk}$  e  $a'_{jk} = a_{ik}$ , mentre tutte le altre sono uguali a quelle di  $A$ .

Quindi, in base alla (3.1), si ha

$$\det(A') = \sum_{p \in S_n} s(p)a'_{1p(1)} \dots a'_{ip(i)} \dots a'_{jp(j)} \dots a'_{np(n)} = \sum_{p \in S_n} s(p)a'_{1p(1)} \dots a'_{jp(j)} \dots a'_{ip(i)} \dots a'_{np(n)}. \quad (3.14)$$

(in pratica, l'unica differenza tra la (3.14) e l'espressione del determinante di  $A$  è che in ogni addendo le entrate "centrali" habbi gli indici di riga  $i$  e  $j$  scambiati tra loro).

Ora, allo scopo di dimostrare il risultato, riscriviamo la (3.14) come segue: consideriamo la trasposizione  $\mathcal{T} \in S_n$  che scambia  $i$  con  $j$  e lascia invariati tutti gli altri elementi: quindi  $j = \mathcal{T}(i)$ ,  $i = \mathcal{T}(j)$ , e per tutti gli altri indici  $k = \mathcal{T}(k)$ .

Allora possiamo scrivere

$$\det(A') = \sum_{p \in S_n} s(p)a_{1\mathcal{T}(1)} \dots a'_{jp\mathcal{T}(j)} \dots a'_{ip\mathcal{T}(i)} \dots a'_{np\mathcal{T}(n)} \quad (3.15)$$

Ora, per un qualunque indice  $k$ , si ha che  $p(\mathcal{T}(k))$  è il valore associato a  $k$  dalla permutazione  $p\mathcal{T}$  che si ottiene componendo  $p$  con  $\mathcal{T}$  (ovvero applicando, da destra, prima  $\mathcal{T}$  e poi  $p$ ). Tale permutazione è tale dispari, e di un numero pari di trasposizione (una in più di  $p$ ), e analogamente se dispari di trasposizione, e allora  $p\mathcal{T}$ , sarà composta da un numero dispari di trasposizione (una in più di  $p$ ), e analogamente se  $p$  è dispari vuol dire che si scrive come composizione di un numero di trasposizioni. Riassumendo, la (3.15), scambiando anche di ordine i due fattori centrali  $a_{jp\mathcal{T}(j)}$  e  $a_{ip\mathcal{T}(i)}$  in ogni addendo (il prodotto gode della proprietà commutativa) può essere scritta nel modo seguente

$$\det(A') = - \sum_{p \in S_n} s(p\mathcal{T})a_{1p\mathcal{T}(1)} \dots a_{ip\mathcal{T}(i)} \dots a_{jp\mathcal{T}(j)} \dots a_{np\mathcal{T}(n)} \quad (3.16)$$

Ora, quest'ultima espressione, con il segno meno davanti, è uguale a quella del determinante di  $A$  a parte che in essa compare  $p\mathcal{T}$  invece che  $p$ . Ma in realtà questo non cambia nulla, in quanto facciamo variare  $p$  tra tutti le permutazioni  $p_1, p_2, \dots, p_{n!}$  di  $n$  elementi,  $p_1\mathcal{T}, p_2\mathcal{T}, \dots, p_{n!}\mathcal{T}$  sono ancora tutte le permutazioni: per non esserlo, dovrebbe infatti succedere che  $p_i\mathcal{T} = p_j\mathcal{T}$  allora  $p_i\mathcal{T}\mathcal{T} = p_j\mathcal{T}\mathcal{T}$ , ovvero, essendo  $\mathcal{T}\mathcal{T} = id$ ,  $p_i = p_j$ .

Quindi, a parte il segno, la (3.16) contiene esattamente un addendo per ogni permutazione, e otteniamo il risultato voluto.  $\square$

La proprietà (3) ha l'importante conseguenza che se una matrice ha due *righe uguali* allora il suo determinante è nullo.

Infatti, in base alla (3) se  $A'$  è ottenuta da  $A$  scambiando tra loro due righe allora  $\det(A') = -\det(A)$ , ma se le righe scambiate sono proprio le due righe uguali allora  $A' = A$ , da cui concludiamo  $\det(A) = -\det(A)$ , ovvero  $\det(A) = 0$ . Combinando questo fatto con le proprietà (2) e (1) possiamo capire come si comporta il determinante quando eseguiamo operazioni elementari del terzo tipo: infatti, supponiamo che  $A'$  sia ottenuta da  $A$  sommando alla sua  $i$ -esima riga  $R_i$ , la  $j$ -esima riga  $R_j$  moltiplicata per  $c$ , ovvero

$$A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i + cR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}.$$

Ma allora, per la proprietà (2) e la proprietà (1) ho

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i + cR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ cR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Ma mentre il primo addendo dopo l'ultima uguaglianza è il determinante della matrice  $A$ , il secondo addendo è nullo, in quanto determinante di una matrice con le righe uguali (compare due volte  $R_j$ ). Quindi la (3.17) si legge come

$$\det(A') = \det(A) + 0 = \det(A).$$

Ora siamo finalmente pronti a dimostrare il

**Teorema 1.** Una matrice  $A$  quadrata di ordine  $n$  ha rango  $n$  (ovvero ha le righe indipendenti) se e solo se  $\det(A) \neq 0$ .

**Osservazione 2.** per sapere se  $n$  vettori di  $\mathbb{R}^n$  sono linearmente indipendenti oppure dipendenti, si dispongono le loro coordinate in una matrice e si calcola il determinante.

- Se  $\det \neq 0$ , allora i vettori sono lineari indipendenti.
- Se  $\det = 0$ , allora i vettori sono lineari dipendenti.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $A$  abbia rango massimo  $n$ . Allora, come sappiamo, nella matrice  $A'$  si ottiene da  $A$  mediante operazioni elementari, e come abbiamo visto sopra le operazioni elementari o non modificano il determinante (*terzo tipo*) o lo cambiano di segno (*prima tipo*) o lo moltiplicano per un coefficiente non nullo (*secondo tipo*), si avrà  $\det(A') = \pm c_1 \dots c_m \det(A)$ , con  $c_1, \dots, c_m \neq 0$ , e per dimostrare che  $\det(A') \neq 0$ .

Poiché stiamo dicendo che matrice quadrata a gradini senza righe nulle,  $A'$  è della forma

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n-1} & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n-1} & a'_{2n} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Triangolare superiore con} \\ \text{elementi sulla diagonale tutti} \\ \text{diversi da zero} \end{array}$$

con  $a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{n-1n-1}, a'_{nn}$  tutti diversi da zero. Calcoliamo il determinante di  $A'$  sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima colonna: essendo  $a'_{11}$  l'unico elemento non nullo, si avrà

$$\det(A') = a'_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n-1} & a'_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 & \dots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

Se sviluppiamo ora il cofattore di nuovo secondo Laplace rispetto alla sua prima colonna, che ha come unico elemento non nullo  $a'_{22}$ , otteniamo

$$\det(A') = a'_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a'_{33} & \cdots & a'_{3n-1} & a'_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 & \cdots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

e continuando a sviluppare sempre rispetto alla prima colonna otteniamo  $\det(A') = a'_{11}a'_{12} \cdots a'_{nn}$ . Essendo come abbiamo detto qgli elementi  $a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{nn}$  tutti non nulli, si ha, come volevamo,  $\det(A') \neq 0$ : la prima implicazione è dimostrata.

**Osservazione 3.** *il det di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale*

Per quello che riguarda l'implicazione inversa se  $\det(A) \neq 0$  allora  $A$  ha rango  $n$ , essa si dimostra facilmente per assurdo osservando che se  $A$  non avesse rango  $n$ , allora la matrice ridotta  $A'$  avrebbe una riga nulla, e sviluppando il suo determinante secondo Laplace proprio rispetto a quella riga otterremmo  $\det(A') = 0$  (in quanto ogni sviluppo andrebbe moltiplicato per zero). ma poiché come abbiamo osservato nel dimostrare la prima implicazione il determinante della matrice ridotta è nullo se e solo se lo è quello della matrice di partenza, allora avremmo anche  $\det(A) = 0$ , contro l'ipotesi.  $\square$

**Osservazione 4.** *Nell'osservazione  $<++>$  abbiamo visto un modo per passare da equazioni parametriche di un piano alla sua equazione cartesiana mediante eliminazione dei parametri  $t$  e  $s$  per sostituzione. Vediamo ora che grazie al determinante esiste un procedimento più elegante: le equazioni parametriche (??) possono essere riscritte nel seguente modo:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima uguaglianza ci dice che il vettore  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  si scrive come combinazione lineare di  $(l, m, n)$  e  $(l', m', n')$ , e quindi che la matrice

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & l & l' \\ y - y_0 & m & m' \\ z - z_0 & n & n' \end{pmatrix}$$

che ha tale vettore come colonne ha rango 2. Questo, per la proprietà appena dimostrata che afferma che una matrice quadrata di ordine  $n$  ha rango minore di  $n$  se e solo se il suo determinante è zero, equivale a dire che

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & l & l' \\ y - y_0 & m & m' \\ z - z_0 & n & n' \end{pmatrix} = 0$$

Sviluppando questo determinante, si ottiene quindi un'equazione in  $x, y, z$  che è appunto l'equazione cartesiana del piano.

**Esempio 2.** *supponiamo che il piano abbia equazioni parametriche* 
$$\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t + 2s \\ z = 3 + t - s \end{cases}.$$

Allora, la sua equazione cartesiana è data da

$$\det \begin{pmatrix} x - 1 & 1 & 1 \\ y - 2 & -1 & 2 \\ z - 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ovvero, sviluppando per sempio secondo Laplace rispetto alla prima colonna,

$$(x - 1) \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - (y - 2) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (z - 3) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

cioè, svolgendo i calcoli,

$$-(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = -x + 2y + 3z - 12 = 0$$

Nel caso in cui il piano sia quello passante per tre punti non allineati di coordinate  $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ , abbiamo visto nella  $(<++>)$  che in tal caso basta prendere  $(l, m, n) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$  e  $(l', m', n') = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ , e quindi la  $(<++>)$  diventa

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

che ci dà un modo per scrivere subito l'equazione cartesiana del piano che passa per i tre punti.

**Osservazione 5.** Tutti le proprietà del determinante che abbiamo visto valide per operazioni sulle righe sono vere anche se effettuiamo le stesse operazioni sulle colonne, ovvero:

1. se  $A'$  si ottiene da  $A$  moltiplicando una colonna di  $A$  per  $c \in \mathbb{K}$ , allora  $\det(A') = c \det(A)$

**Esempio 3.** se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$  è la matrice ottenuta da  $A$  moltiplicando la prima colonna per  $c = 5$ , ho  $\det(A) = -2$  e  $\det(A') = 5 \times 4 - 10 \times 3 = -10 = 5 \det(A)$ .

2. se a una colonna  $C_i$  di una matrice  $A$  sommiamo una  $n$ -upla data  $v$  (scritta in colonna) si ha

$$\det(A') = \det(A) + \det \begin{pmatrix} C_i & \dots & v & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

**Esempio 4.** se alla seconda colonna  $C_2$  della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  sommiamo la coppia  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ , ottenendo così  $C'_2 = C_2 + v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ , si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

come può verificato calcolando i determinanti (si ottiene  $-2 = -5 + 3$ ).

3. se  $A'$  si ottiene da  $A$  scambiando tra loro due colonne, allora  $\det(A') = -\det(A)$

**Esempio 5.** se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  è la matrice ottenuta da  $A$  scambiando tra loro la prima e la seconda colonna, ho  $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$  e  $\det(A') = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = +2$ .

Omettiamo la dimostrazione di queste tre proprietà.

Concludiamo questo capitolo mostrando come, benché non si possa calcolare il determinante di una matrice non quadrata, il determinante posso comunque essere usato per calcolare il rango di qualunque matrice. Più precisamente, data una matrice  $A$ , chiamiamo sottomatrice di  $A$  una matrice che si ottiene da  $A$  scegliendo alcune righe e alcune colonne e cancellando le rimanenti.

**Esempio 6.** se  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , allora scegliendo la prima e la terza riga, e tra la quarta colonna<sup>4</sup> si ottiene la sotto matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Teorema 2.** Il rango di una matrice  $A$  è  $k$  se e solo se esiste una sottomatrice di  $A$  di ordine  $k$  con determinante diverso da zero e tutte le sotto matrici quadrate di ordine  $k+1$  hanno determinante nullo.

**Esempio 7.** la sottomatrice di ordine 1 con determinante<sup>5</sup> diverso da zero, per esempio  $(a_{12}) = (1)$ , e tutte le sue sottomatrici quadrate di ordine 2, ovvero  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  hanno, come si vede immediatamente, il determinante uguale a zero: in base al teorema 3.9 la matrice ha rango 1, come in effetti già si vede notando che le sue due righe sono proporzionali.

<sup>4</sup>ovvero cancellando la seconda riga e le prime due colonne

<sup>5</sup>Una sottomatrice quadrata  $A = (a)$  di ordine 1, che contiene una sola entrata, ha come determinante  $\det A = (a)$ .

In generale, per calcolare il rango di una matrice mediante il Teorema 3.9 basta iniziare a vedere se ci sono sottomatrici di ordine 1 con determinante diverso da zero (ovvero se c'è un'entrata non nulla); se non ne troviamo nessuna, concludiamo che il rango è zero; se ne troviamo almeno una, andiamo a vedere se ci sono sottomatrice di ordine 3 e così via. Lo svantaggio di tale metodo è che può risultare molto laborioso calcolare tutti i determinanti di tutte le sottomatrici di  $A$ , per i vari ordini. Tuttavia, esso può essere semplificato nel modo seguente, che ci consente di controllare solo alcune sottomatrici e non tutte. Più precisamente, data una sottomatrice quadrata  $A'$  di  $A$  ottenuta scegliendo  $k$  righe e  $k$  colonne, diciamo che una riga e una colonna a quelle già scelte per determinare  $A'$ .

**Esempio 8.** nella matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  già vista sopra, la sottomatrice  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  è stata ottenuta scegliendo la prima e la terza riga, e la quarta; aggiungendo ad esempio la seconda riga e la prima colonna ottengo  $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ : quindi  $A''$  si ottiene orlando  $A'$ . La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , che corrisponde a scegliere prima, seconda e la terza riga, e prima, seconda e terza colonna, non è invece ottenuta orlando  $A'$ .

Ora, il teorema precedente può essere migliorato come segue.

**Teorema 3.** (dei minimi orlati) Il rango di una matrice  $A$  è  $k$  se e solo se esiste una sottomatrice quadrata  $A'$  di  $A$  di ordine  $k$  con determinante diverso da zero e tutte le sottomatrici quadrate di ordine  $k+1$  ottenute orlando  $A'$  hanno determinante nullo.

Quindi per calcolare il rango di  $A$  possiamo procedere come segue: si inizia a vedere se ci sono sottomatrici di ordine 2 con determinante diverso da zero; se non ne troviamo nessuna, concludiamo che il rango è 1; se ne troviamo almeno una, diciamo  $A'$ , andiamo a vedere se tra le sottomatrici di ordine 3 ottenute orlando  $A'$  (non è quindi necessario vederle tutte) c'è né sono con era 2, se ne troviamo almeno una, diciamo  $A''$  andiamo a vedere quelle di ordine 4 che si ottengono orlando  $A''$  e così via.

**Esempio 9.** Calcoliamo il rango della matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  usando il Teorema 3.10: prendiamo la sottomatrice  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  di ordine 2 ottenuta scegliendo prima e seconda riga, e terza e quarta colonna: essa ha determinante uguale a  $1 \neq 0$ , quindi il rango di  $A$  è almeno 2; per vedere se è 2 o 3, consideriamo le matrici di ordine 3 ottenute orlando  $A'$ , ovvero  $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (ottenuta aggiungendo la terza riga e la seconda colonna) e  $A''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (ottenuta aggiungendo la terza riga e la prima colonna).

Ora, da un calcolo diretto usando lo sviluppo di Laplace (3.3) si vede che  $\det(A'') = 0$  e  $\det(A''') = 0$ , quindi concludiamo che il rango della matrice è 2.





## Capitolo 4

# Applicazione lineari e prodotto di matrici

### 4.1 Applicazioni lineari: definizione e esempi

Inizieremo ora a parlare di funzioni tra spazi vettoriali. Ricordiamo che una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra due insiemi  $X$  (detto *dominio*) e  $Y$  (detto *codominio*) è una legge che associa a ogni  $x \in X$  un ben preciso elemento di  $Y$ , detto *immagine di  $x$*  e denotato  $f(x)$ .

Noi studieremo le funzioni  $f : V \rightarrow W$  in cui dominio e codominio  $V$  e  $W$  sono spazi vettoriali su un certo campo  $\mathbb{K}$ , e in particolare studieremo quelle che soddisfano la seguente

**Definizione 3.** Una funzione  $f : V \rightarrow W$  tra spazi vettoriali si dice **funzione lineare** (o **applicazione lineare**) se verifica le due seguenti proprietà:

$$f(v + v') = f(v) + f(v') \text{ per ogni } v, v' \in V \quad (4.1)$$

$$f(cv) = cf(v) \text{ per ogni } v \in V \text{ e ogni scalare } c \in \mathbb{K} \quad (4.2)$$

Limitarsi alla funzione lineare può sembrare molto restrittivo:

**Esempio 10.** si può vedere che se<sup>1</sup>  $V = W = \mathbb{R}$ , le uniche funzioni lineari  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono quelle del tipo  $f(x) = ax$ , con  $a \in \mathbb{R}$  fissato.

Tuttavia, vediamo subito che tra le applicazioni lineari vi sono funzioni di grande importanza e utilità in geometria e nelle sue applicazioni:

**Esempio 11.** Dato lo spazio  $V_O^2$  dei vettori geometrici applicati nel piano, consideriamo la funzione  $f : V_O^2 \rightarrow V_O^2$  che associa a ogni vettore  $\vec{OP}$  il vettore che si ottiene ruotando  $\vec{OP}$  di un angolo  $\theta$  fissato in senso antiorario attorno all'origine  $O$ , come nel disegno seguente. Ora, come si vede nel disegno seguente,



Figura 4.1:  $f : V_O^2 \rightarrow V_O^2$

dati due vettori  $\vec{OP}$  e  $\vec{OP}'$ , sommarli e poi ruotare il vettore risultante oppure prima ruotarli e poi sommare i vettori ruotati è equivalente, ovvero

<sup>1</sup>Sappiamo che  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , in particolare per  $n = 1$  si ottiene  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  (che risulta quindi spazio vettoriale come da dimostrazione 1).

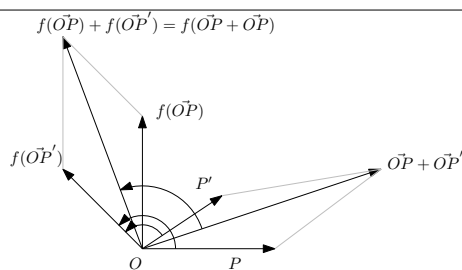


Figura 4.2:  $f(\vec{OP}) + f(\vec{OP}') = f(\vec{OP} + \vec{OP}')$

Quindi vale la

$$f(\vec{OP}) + f(\vec{OP}') = f(\vec{OP} + \vec{OP}') \quad (4.3)$$

che ci dice che questa funzione soddisfa la proprietà (4.1) della Definizione 4.1

Analogamente, dato un vettore  $\vec{OP}$  e un numero reale  $c$ , moltiplicare il vettore per  $c$  e poi ruotarlo e poi moltiplicarlo per  $c$  è equivalente: Quindi si ha

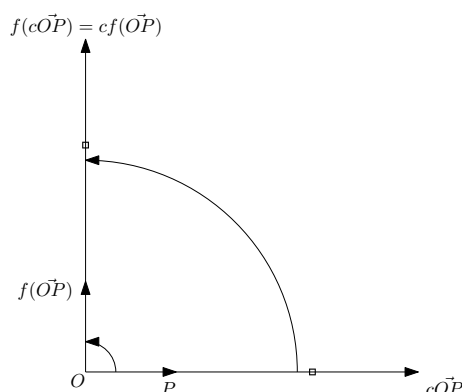
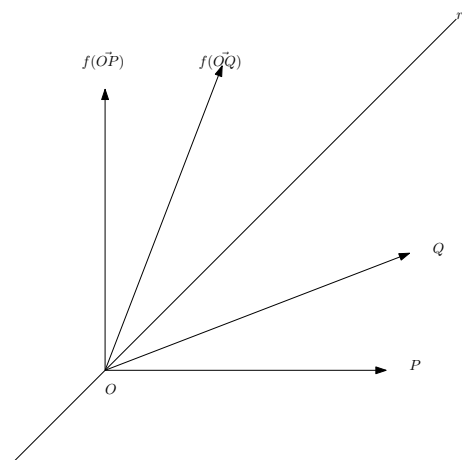


Figura 4.3:  $f(c\vec{OP}) = cf(\vec{OP})$

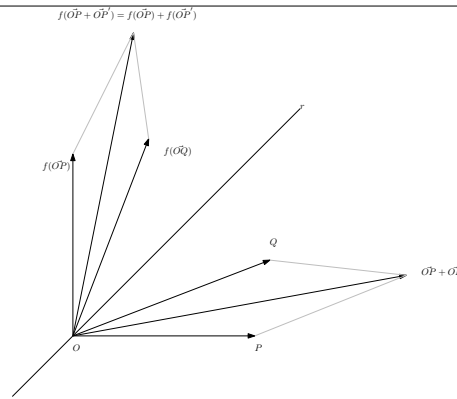
$$f(c\vec{OP}) = cf(\vec{OP}) \quad (4.4)$$

che ci dice che questa funzione soddisfa anche la proprietà (??), della definizione 4.1 – Concludiamo quindi che le rotazioni attorno a  $O$  sono applicazioni lineari dallo spazio vettoriale  $V_O^2$  in se stesso.

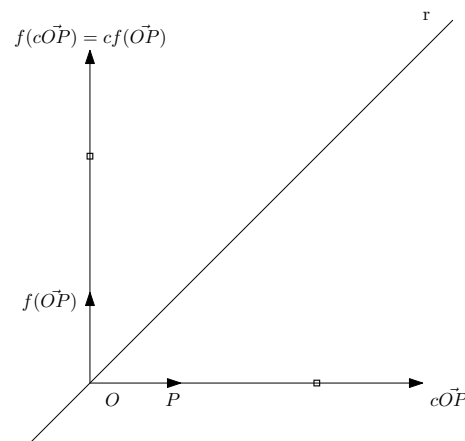
Possiamo arrivare alla stessa conclusione anche per altre importanti trasformazioni geometriche: ad esempio, si consideri la riflessione rispetto a una retta  $r$  passante per  $O$ , che manda ogni vettore  $\vec{OP} \in V_O^2$  nel vettore simmetrico rispetto alla retta, come nel seguente disegno Allora, come già fatto per le rotazioni,



notiamo che, dati due vettori  $\vec{OP}$  e  $\vec{OP}'$ , sommarli e poi riflettere il vettore risultante oppure prima rifletterli e poi sommare i vettori riflessi è equivalente

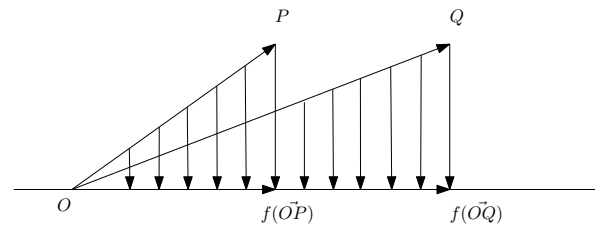


$f(\vec{OP} + \vec{OP}') = f(\vec{OP}) + f(\vec{OP}')$  e dato un vettore  $\vec{OP}$  e un numero reale  $c$ , moltiplicare il vettore per  $c$  e poi rifletterlo oppure prima rifletterlo e poi moltiplicarlo per  $c$  è equivalente



$f(c\vec{OP}) = cf(\vec{OP})$ : quindi concludiamo che anche la riflessione rispetto a una retta  $r$  che passa per  $O$ , avendo le proprietà entrambe le proprietà (4.1) richieste nella Definizione (4.1), è un'applicazione lineare  $f: V_O^2 \rightarrow V_O^2$ .

Come terzo esempio di applicazione lineare  $V_O^2 \rightarrow V_O^2$  citiamo la proiezione ortogonale, che proietta ortogonalmente i vettori su una retta fissata passante per  $O$ .

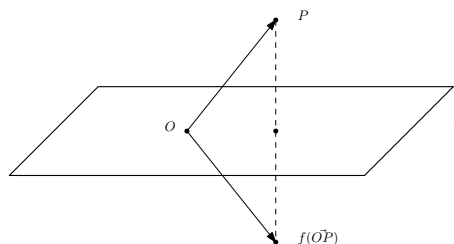


per la quale è difficile vedere che valgono ancora le proprietà citate in (4.1).

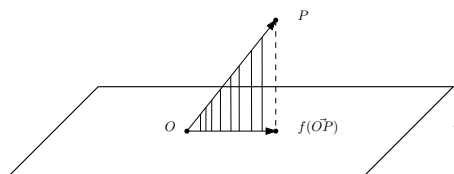
Analogamente a quanto visto per rotazioni, riflessioni e proiezioni nel piano, anche le corrispondenti trasformazioni  $V_O^3 \rightarrow V_O^3$  dello spazio tridimensionale come da proprietà (4.1) della Definizione 4.1 la rotazione di un angolo fissato  $\Theta$  attorno a una retta data passante per  $O$  (detta asse della rotazione)



la riflessione rispetto a un piano passante per  $O$



e la proiezione ortogonale su un piano passante per l'origine  $O$ : (Quest'ultima può anche essere vista



come applicazione  $f : V_O^3 \rightarrow V_O^2$  se vediamo il piano su cui proiettiamo come spazio vettoriale a se stante).

## 4.2 Matrice associata a un'applicazione lineare

Una delle caratteristiche fondamentali di un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è che, se gli spazi  $V$  e  $W$  hanno dimensione finita, allora  $f$  può essere rappresentata da una matrice.

Vediamo i dettagli: sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare, e siano  $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  basi di  $V$  e  $W$  rispettivamente. Allora, come sappiamo ogni vettore  $v \in V$  può essere identificato con una  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , quella delle sue coordinate rispetto alla base  $B_V$  (ovvero  $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ ), e analogamente ogni vettore  $w \in W$  può rispetto alla base  $B_W$  (ovvero  $w = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_m w_m$ ). Con queste identificazioni, la  $f$  può essere pensata come una funzione  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  che associa a ogni  $n$ -upla. Ci proponiamo di trovare l'espressione esplicita di tale funzione. A questo scopo, sia  $(x_1, \dots, x_n)$  la  $n$ -upla delle coordinate di un vettore  $v \in V$ , ovvero come abbiamo ricevuto sopra  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ . Allora la sua immagine  $f(v)$  sarà

$$f(v) = f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$$

(usando le proprietà un'applicazione lineare)

$$= f(x_1 v_1) + \dots + f(x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n). \quad (4.5)$$

Ora, ciascuno dei vettori  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  che compare nella (4.5) appartiene al codominio  $W$  della funzione, e quindi potrà essere espresso come combinazione lineare dei vettori  $w_1, w_2, \dots, w_m$  della base  $B_W$  fissata per  $W$ :

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \quad (4.6)$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \quad (4.7)$$

Ora, sostituendo queste espressioni nella (4.5) si ottiene

$$f(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m) =$$

(svolgendo i conti e mettendo in evidenza i vettori)

$$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m \quad (4.8)$$

Questa uguaglianza ci sta dicendo che le coordinate del vettore  $f(v)$  rispetto alla base  $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  sono date da  $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$  e quindi che, tradotta in coordinate, la nostra applicazione lineare può essere identificata con la funzione  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  che associa a ogni  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_n)$  la  $m$ -upla formata dai coefficienti che appaiono nella (4.8), ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

I coefficienti che compaiono nella (4.9) formano una matrice con  $m$  righe e  $n$  colonne

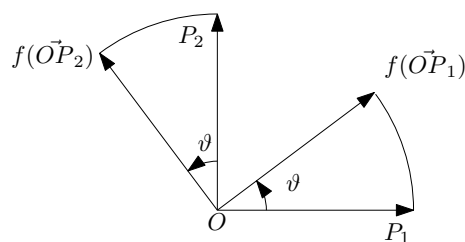
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

che chiameremo la *matrice associata all'applicazione lineare rispetto alle basi  $B_V$  e  $B_W$* . In base alle (4.6), ..., (4.7) tale matrice può essere definita come la *matrice che ha sulle colonne le coordinate dei vettori  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  (ovvero le immagini dei vettori della base  $B_V$  fissata nel dominio) rispetto alla base  $B_W$  fissata nel codominio*.

Denoteremo  $M_{B_W B_V}(f)$  la matrice associata a un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  rispetto alle basi  $B_V$  e  $B_W$ .

Se dominio e codominio dell'applicazione coincidono, ovvero si ha una funzione lineare  $f : V \rightarrow V$  (tale applicazione si dicono *endomorfismi*), allora è possibile fissare la stessa base  $B_V$  sia nel dominio che nel codominio, e calcolare la matrice associata  $M_{B_V B_V}(f)$ . Come vedremo, la matrice associata a un'applicazione lineare ci dà tutte le informazioni di cui abbiamo bisogno sull'applicazione, e usando gli strumenti imparati nei capitoli precedenti (*rango*, *determinante*) saremo in grado di capire molte proprietà della funzione data. Prima di fare ciò, vediamo subito alcuni esempi di calcolo della matrice associata.

**Esempio 12.** 1. Sia  $f : V_O^2 \rightarrow V_O^2$  la rotazione attorno a  $O$  di un angolo fissato  $\Theta^2$ . Per calcolare la matrice associata, fissiamo una base  $B$  formata da due vettori  $v_1 = \vec{OP}_1$  e  $v_2 = \vec{OP}_2$  della stessa lunghezza e perpendicolari tra loro, come nel disegno seguente



e determiniamo la matrice  $M_B(f)$ .

A questo scopo, come afferma la definizione di matrice associata dobbiamo trovare le coordinate di  $f(v_1)$  e  $f(v_2)$  rispetto a  $B$ , ovvero esprimere  $f(\vec{OP}_1)$  e  $f(\vec{OP}_2)$  come combinazione lineare  $x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$  dei vettori della base  $B$ . Iniziamo con  $f(\vec{OP}_1)$ : come si vede nel disegno seguente

<sup>2</sup>abbiamo visto nel paragrafo precedente si tratta di un'applicazione lineare



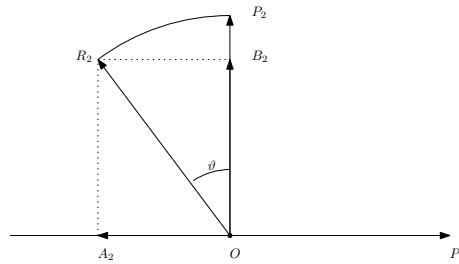
(nel quale stiamo denotando  $R_1$  il punto finale del vettore ruotato  $f(\vec{OP}_1)$ ) si ottiene  $f(\vec{OP}_1) = \vec{OR}_1 = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1$ , essendo  $A_1$  e  $B_1$  le proiezioni ortogonali di  $R_1$  sui vettori di base. Ora, chiaramente  $\vec{OA}_1 = x_1 \vec{OP}_1$  e  $\vec{OB}_1 = x_2 \vec{OP}_2$ , dove  $x_1$  è dato dal rapporto  $\frac{|\vec{OA}_1|}{|\vec{OP}_1|}$  tra la lunghezza di  $\vec{OA}_1$  e quella di  $\vec{OP}_1$ , mentre  $x_2$  è dato dal rapporto  $\frac{|\vec{OB}_1|}{|\vec{OP}_2|}$  tra la lunghezza di  $\vec{OB}_1$  e quella di  $\vec{OP}_2$ . Ma essendo la lunghezza di  $\vec{OP}_1$  uguale alla lunghezza di  $\vec{OR}_1 = f(\vec{OP}_1)$ <sup>3</sup> possiamo dire che  $x_1$  è uguale al rapporto tra la lunghezza del cateto  $\vec{OA}_1$  e quella dell'ipotenusa  $\vec{OP}_1$  del triangolo rettangolo  $OR_1A_1$ , ovvero (essendo il cateto in questione adiacente all'angolo),  $x_1 = \cos \Theta$ . Analogamente, poiché  $\vec{OP}_1$  ha la stessa lunghezza di  $\vec{OP}_1$  e quindi di  $\vec{OR}_1$ , mentre  $\vec{OB}_1$  ha la stessa lunghezza del segmento  $A_1R_1$ , si ha

$$x_2 = \frac{|\vec{OB}_1|}{|\vec{OP}_2|} = \frac{|A_1R_1|}{|OR_1|}$$

ovvero<sup>4</sup>,  $x_2 = \sin \Theta$ . Riassumendo,

$$f(\vec{OP}_1) = \vec{OR}_1 = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 = \cos \Theta \vec{OP}_1 + \sin \Theta \vec{OP}_2 \quad (4.10)$$

Ora, facciamo un ragionamento analogo per determinare  $f(\vec{OP}_2)$ : come si vede nel disegno seguente



(nel quale stiamo denotando  $R_2$  il punto finale del vettore ruotato  $f(\vec{OP}_2)$ ) si ha  $f(\vec{OP}_2) = \vec{OR}_2 = \vec{OA}_2 + \vec{OB}_2$ . Ora, chiaramente  $\vec{OA}_2 = -x_1 \vec{OP}_1$ , dove  $x_1$  è dato dal rapporto  $\frac{|\vec{OA}_2|}{|\vec{OP}_1|}$  tra la lunghezza di  $\vec{OA}_2$  e quella di  $\vec{OP}_1$  (il segno meno è dovuto dal fatto che  $\vec{OA}_2$  ha verso opposto rispetto a  $\vec{OP}_1$ ) e  $\vec{OB}_2 = x_2 \vec{OP}_2$ , dove  $x_2$  è dato dal rapporto  $\frac{|\vec{OB}_2|}{|\vec{OP}_2|}$  tra la lunghezza di  $\vec{OB}_2$  e quella di  $\vec{OR}_2$ . Ma essendo la lunghezza di  $\vec{OP}_1$  uguale alla lunghezza di  $\vec{OP}_1$  uguale alla lunghezza di  $\vec{OP}_2$  e quindi di  $\vec{OR}_2 = f(\vec{OP}_2)$  (sempre perché la rotazione non modifica la lunghezza dei vettori), mentre, la lunghezza di  $\vec{OA}_2$  è uguale alla lunghezza del segmento  $R_2B_2$ , possiamo dire che  $x_1$  è uguale al rapporto tra la lunghezza del cateto  $R_2B_2$  e quella dell'ipotenusa  $OR_2$  del triangolo rettangolo  $OR_2B_2$ , ovvero (essendo il cateto in questione opposto all'angolo),  $x_2 = \cos \Theta$ .

Riassumendo,

$$f(\vec{OP}_2) = \vec{OR}_2 = \vec{OA}_2 + \vec{OB}_2 = -\sin \Theta \vec{OP}_1 + \cos \Theta \vec{OP}_2 \quad (4.11)$$

<sup>3</sup>La rotazione non modifica la lunghezza dei vettore, essi restano invariati anche se cambiano la loro angolazione.

<sup>4</sup>Essendo il rapporto tra il cateto  $A_1R_1$ , opposto all'angolo  $\Theta$ , e l'ipotenusa  $OR_1$  del triangolo rettangolo  $OR_1A_1$

Quindi, (4.10) e (4.11) ci dicono che la matrice associata a  $f$  rispetto a  $B$  avrà sulla prima colonna  $(\cos \Theta, \sin \Theta)^5$  e sulla seconda colonna  $(-\sin \Theta, \cos \Theta)$  (le coordinate di  $f(\vec{OP})$  rispetto a  $B$ ), ovvero

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Come visto nel (4.9), abbiamo allora che la rotazione, in coordinate, si traduce nella funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da

$$(x_1, x_2) \mapsto (\cos \Theta x_1 - \sin \Theta x_2, \sin \Theta x_1 + \cos \Theta x_2) \quad (4.13)$$

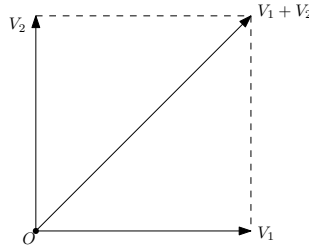
Ad esempio, scegliamo  $\Theta = \frac{\pi}{4}$  e sostituiamo in (4.12) e (4.13), ottenendo rispettivamente (si ricordi che  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

e anche

$$(x_1, x_2) \mapsto \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2, \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 \right) \quad (4.14)$$

Per illustrare come questa semplice funzione  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  rappresenti effettivamente la rotazione di  $\frac{\pi}{4}$ , prendiamo ad esempio il vettore  $v = v_1 + v_2$ , che come si vede nel disegno seguente coincide con la diagonale del quadrato che ha  $v_1$  e  $v_2$  come lati:

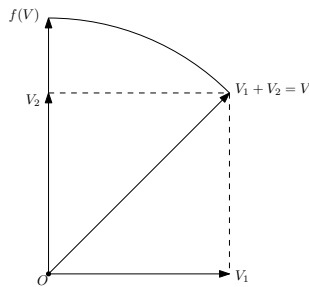


Tale vettore ha quindi come coordinate rispetto a  $B$  la coppia  $(x_1, x_2) = (1, 1)$ . In base alla (4.14), le coordinate di  $f(v)$  rispetto a  $B$  sono date da

$$\frac{\pi}{4} * 1 - \frac{\pi}{4} * 1, \frac{\pi}{4} * 1 + \frac{\pi}{4} * 1 = (0, \sqrt{2})$$

ovvero deve essere  $f(v) = 0v_1 + \sqrt{2}v_2 = \sqrt{2}v_2$ .

In effetti, tale risultato ottenuto analiticamente in coordinate è confermato dall'analisi grafica, che ci dice che il vettore  $f(v)$  che si ottiene ruotando la diagonale  $v$  del quadrato di  $\frac{\pi}{4}$  è proprio proporzionale al vettore  $v_2$  e la sua lunghezza è proprio  $\sqrt{2}$  volte la lunghezza di  $v_2$  (in questo  $v$  coincideva con la diagonale del quadrato di lati  $v_1$  e  $v_2$ ):



2. Sia  $V = V_O^2$  lo spazio vettoriale dei vettori applicati in un punto  $O$  nel piano e sia  $f: V_O^2 \rightarrow V_O^2$  la proiezione ortogonale su una retta fissata  $r$  passante per  $O$ <sup>6</sup>.

Ora, notiamo che quando proiettiamo  $v_1$  ortogonalmente su  $r$ , otteniamo un vettore  $v$  che sta sulla retta ed è lungo come metà della diagonale del quadrato i cui lati sono  $v_1$  e  $v_2$ : essendo tale diagonale, per definizione di somma tra vettori, coincidente con  $v_1 + v_2$ , abbiamo quindi che  $f(v_1) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ ; analogamente, come si vede dal disegno, anche proiettando  $v_2$  sulla retta si ottiene lo stesso vettore  $v$ , quindi si ha anche  $f(v_2) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ . Si vede

<sup>5</sup>le coordinate di  $f(\vec{OP}_1)$  rispetto a  $B$

<sup>6</sup>abbiamo visto nel paragrafo precedente che si tratta di un'applicazione lineare



quindi che le coordinate di  $f(v_1)$  rispetto a  $B$  sono  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , e anche le coordinate di  $f(v_2)$  rispetto a  $B$  sono  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ : disponendo tali coordinate rispettivamente sulla prima e sulla seconda colonna, come previsto dalla definizione di matrice associata, si ottiene

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e la funzione  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  corrispondente

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \quad (4.15)$$

ci dà una rappresentazione in coordinate della proiezione.

Ad esempio, il vettore  $v = -v_1 + v_2$ , che ha coordinate  $(-1, 1)$  rispetto a  $B$ , viene mandata in base alla (4.15) nel vettore di coordinate

$$\left[\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1, \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1\right] = (0, 0)$$

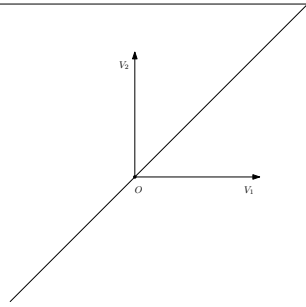
ovvero nel vettore nullo  $\vec{OO}$ . Infatti, come si vede dal seguente disegno, tale vettore appartiene alla retta passante per  $O$  e ortogonale a  $r$ , e i vettori che giacciono su questa retta vengono chiaramente proiettati sul vettore nullo  $\vec{OO}$ .



3. Come ultimo esempio, prendiamo come funzione  $f : V_O^2 \rightarrow V_O^2$  la riflessione rispetto a una retta fissata  $r$  passante per  $O$ , ovvero l'endomorfismo che associa a ogni vettore  $\vec{OP}$  il suo simmetrico rispetto a  $r$ <sup>7</sup>. Per calcolarne la matrice associata  $M_B(f)$ , consideriamo la stessa base  $B = \{v_1, v_2\}$  usata nell'esempio precedente.

<sup>7</sup>Sappiamo dal primo paragrafo che si tratta di un'applicazione lineare



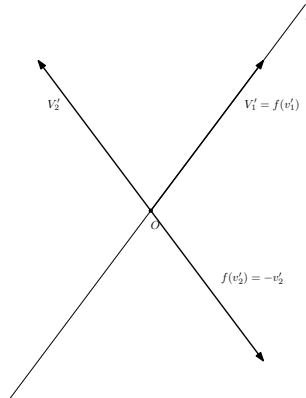


e notiamo che quando riflettiamo  $v_1$  rispetto a  $r$  otteniamo  $v_2$ , ovvero  $f(v_1) = v_2$ , analogamente quando riflettiamo  $v_2$  rispetto a  $r$ , otteniamo  $v_1$  ovvero  $f(v_2) = v_1$ .

Quindi, riscrivendo  $f(v_1) = v_2$  come  $f(v_1) = 0v_1 + 1v_2$  vediamo che le coordinate di  $f(v_1)$  rispetto a  $B$  sono  $(0, 1)$ , e analogamente riscrivendo  $f(v_2) = v_1$  come  $f(v_2) = 1v_1 + 0v_2$  vediamo che le coordinate di  $f(v_2)$  rispetto a  $B$  sono  $(1, 0)$ : disponendo tale coordinate in colonna, come previsto dalla definizione della matrice associata, si ottiene

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se dato sempre lo stesso endomorfismo, consideriamo invece la base  $B' = \{v'_1, v'_2\}$  come nel disegno seguente allora si ha che  $f(v'_1) = v'_1$  (il vettore  $v'_1$  sta sulla retta e quindi la riflessione rispetto alla



retta lo lascia invariato) e  $f(v'_2) = -v'_2$  (il vettore  $v'_2$  è perpendicolare alla retta quindi riflettendolo esso cambia verso), cioè  $f(v'_1) = 1v'_1 + 0v'_2$  e  $f(v'_2) = 0v'_1 + (-1)v'_2$  e quindi

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo esempio illustra il fatto, ovvio che la matrice associata dipenda dalla scelta delle basi.

## 4.3 Iniettività e suriettività delle applicazioni lineari

Il primo problema che affronteremo sulle applicazioni lineari è determinare quando una tale funzione è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

### 4.3.1 Richiami generali

Ricordiamo che una funzione  $f : A \rightarrow B$  tra due insiemi  $A$  e  $B$  si dice *suriettiva* se ogni elemento del codominio  $B$  risulta essere immagine di qualche elemento di  $A$  (ovvero, se per ogni  $b \in B$  esiste un  $a \in A$  tale che  $f(a) = b$ ).

Ad esempio, delle funzioni rappresentate nel seguente disegno, la prima non è suriettiva<sup>8</sup>, mentre, la seconda sì. Un modo alternativo di dire che una funzione è suriettiva è fare riferimento alla cosiddetta *immagine*  $I_m(f)$  di  $f$ : per definizione, l'immagine di una funzione  $f : A \rightarrow B$  è il sottoinsieme di  $B$  costituito da tutti gli elementi che sono immagine di qualche elemento di  $A$  (in riferimento ai disegni, quegli elementi "raggiunti da una freccia che proviene da  $A$ "), ovvero

$$I_m(f) = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\}$$

<sup>8</sup>L'elemento  $c \in B$  non è immagine di nessun elemento di  $A$

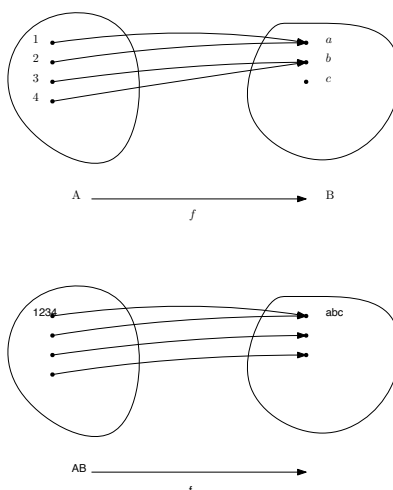
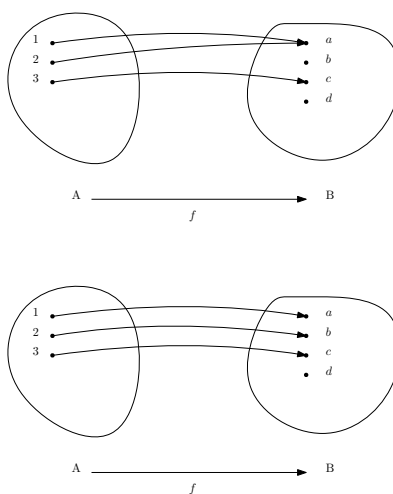


Figura 4.4: differenza tra iniettivo e suriettivo

Ad esempio, la funzione sopra nel disegno precedente ha  $I_m(f) = \{a, b\}$ , mentre la funzione sotto ha  $I_m(f) = \{a, b, c\}$ ; una funzione è suriettiva esattamente quando  $I_m(f) = B$ , ovvero l'immagine coincide con tutto il codominio<sup>9</sup>.



La nozione di iniettività può essere riformata tramite il concetto di *controimmagine*: dato un elemento  $b$  del codominio  $B$ , la sua controimmagine, denotata  $f^{-1}(b)$ , è l'insieme di tutti gli elementi di  $A$  che hanno  $b$  come immagine, ovvero

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Dal momento che una funzione è iniettiva quando non esistono due elementi diversi che hanno la stessa immagine, dire che una funzione è iniettiva equivale a dire che tutte le controimmagini che non siano vuote<sup>10</sup> hanno un solo elemento.

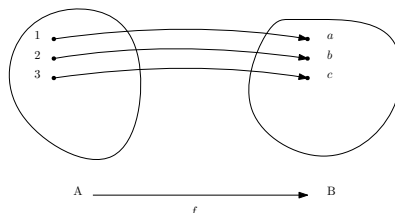
Ad esempio, per la funzione sopra nel disegno precedente si ha  $f^{-1}(a) = \{1, 2\}$ ,  $f^{-1}(b) = \emptyset$ ,  $f^{-1}(c) = \{3\}$ : essa non è iniettiva in quanto la controimmagine di  $a$  ha due elementi.

Per la funzione sotto, invece, si ha  $f^{-1}(a) = \{1\}$ ,  $f^{-1}(b) = \{2\}$ ,  $f^{-1}(c) = \{3\}$ ,  $f^{-1}(d) = \emptyset$ : essa è iniettiva in quanto le controimmagini non vuote hanno tutte un solo elemento.

Infine, una funzione si dice *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva. Ad esempio, la funzione rappresentata nel seguente disegno è biiettiva.

<sup>9</sup>Dire  $I_m(f) = B$  significa in effetti dire che ogni elemento di  $B$  è immagine di qualche elemento di  $A$

<sup>10</sup>se la funzione non è suriettiva, ci saranno elementi  $b \in B$  tali che non esiste nessun  $a \in A$  con  $f(a) = b$  e quindi la cui controimmagine  $f^{-1}(b)$  non ha elementi.



### 4.3.2 Suriettività delle applicazioni lineari

Abbiamo detto che una funzione  $f : A \rightarrow B$  è suriettiva se e solo se per ogni elemento di  $b \in B$  esiste un  $a \in A$  tale che  $f(a) = b$ , ovvero equivalentemente se e solo se la sua immagine  $I_m(f)$  coincide con tutto il codominio.

Nel caso di un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$ , vale la seguente importante

**Proposizione 2.** *Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $I_m(f)$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo verificare che  $I_m(f)$  è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari. Per la prima proprietà dobbiamo prendere  $w, w' \in I_m(f)$  e vedere se  $w + w' \in I_m(f)$ . Ora, se  $w, w' \in I_m(f)$ , per definizione di  $I_m(f)$  significa che esistono un vettore  $v \in V$  tale che  $w = f(v)$  e un vettore  $v' \in V$  tale che  $w' = f(v')$  e un vettore  $v' \in V$  tale che  $w = f(v)$  e un vettore  $v' \in V$  tale che  $w' \in f(v')$ . Ma allora, sfruttando il fatto che  $f$  è lineare, si ha

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v')$$

che ci dice che anche  $w + w'$  è immagine di un elemento del dominio (cioè  $v + v'$ ) e quindi  $w + w' \in I_m(f)$ . Per la chiusura rispetto al prodotto per scalari, dobbiamo verificare che se  $w \in I_m(f)$  e  $c \in \mathbb{K}$ , allora  $cw \in I_m(f)$ . Ma, come prima, se  $w \in I_m(f)$  allora per definizione di  $I_m(f)$  esiste un vettore  $v \in V$  tale che  $w = f(v)$ , e quindi, usando sempre il fatto che  $f$  è lineare,

$$cw = cf(v) = f(cv)$$

che ci dice che anche  $cw$  è immagine di un elemento del dominio (cioè  $cv$ ) e quindi  $cw \in I_m(f)$ .  $\square$

Il fatto che  $I_m(f)$  sia un sottospazio vettoriale ci dice che per determinarla possiamo trovarne un sistema di generatori o una base. Questo si fa facilmente grazie alla seguente

**Proposizione 3.** *Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e siano  $v_1, \dots, v_n$  generatori di  $V$ . Allora le immagini  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  generano  $I_m(f)$  (in simboli,  $I_m(f) = [f(v_1), \dots, f(v_n)]$ )*

*Dimostrazione.* Per definizione di generatori, dobbiamo verificare che ogni vettore  $w \in I_m(f)$  si può scrivere come combinazione lineare dei vettori  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ . Ora, sappiamo che un vettore  $w \in I_m(f)$  è tale che  $w = f(v)$  per qualche  $v \in V$ . Ma essendo per ipotesi  $v_1, \dots, v_n$  generatori di  $V$ , il vettore  $v$  potrà essere scritto come loro combinazione lineare  $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ . Quindi, sfruttando la linearità di  $f$  si ha

$$w = f(v) = f(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n)$$

che dimostra proprio che  $w$  si scrive come combinazione lineare di  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ , come volevamo.  $\square$

A questo punto, per determinare se un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è suriettiva, basta scegliere dei generatori  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$ , prendere le loro immagini  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  che, come abbiamo appena visto, formano un insieme di generatori di  $I_m(f)$ , e poi estrarre da quest'ultimo insieme una base eliminando gli eventuali vettori che sono dipendenti dai rimanenti: contando i vettori della base ottenuta, sapremo

la dimensione di  $I_m(f)$  e quindi  $f$  sarà suriettiva se e solo se<sup>11</sup>  $\dim(I_m(f)) = \dim(W)$ .

Vediamo come tale criterio di suriettività si rivela particolarmente utile e di semplice applicazione nel caso dell'applicazioni lineare  $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  determinata da una matrice  $A$ , ovvero della forma data dalla (4.9)<sup>12</sup>.

Ora, se come generatori del dominio  $V = \mathbb{K}^n$  scegliamo i vettori della base canonica  $v_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $v_n = (0, 0, \dots, 1)$ , dalla (4.9) si ha

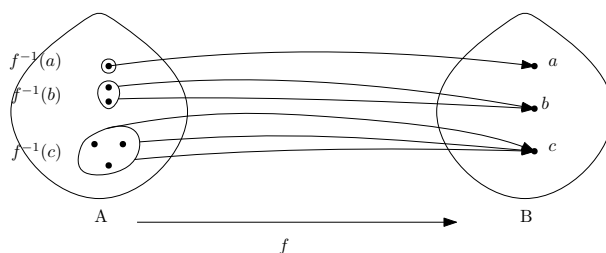
$$f(v_1) = L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, f(v_2) = L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, f(v_n) = L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

cioè  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  sono le colonne  $C_1, C_2, \dots, C_n$  della matrice  $A$  che determina l'applicazione. Quindi, in base alla Proposizione 2, si ha  $I_m(f) = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  e la funzione è suriettiva se e solo se  $\dim\{C_1, C_2, \dots, C_n\} = \dim(\mathbb{K}^m) = m$ . Ma poiché la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di una matrice è per definizione il suo rango, concludiamo che *un'applicazione del tipo (4.9) è suriettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .*

### 4.3.3 Iniettività di applicazioni lineari

Mentre nel caso della suriettività abbiamo visto che per verificare se una funzione  $f$  è suriettiva basta controllare un solo sottoinsieme del codominio (l'immagine  $I_m(f)$ ), in generale per verificare se  $f$  è iniettiva dobbiamo a priori controllare tutte le controimmagini degli elementi del codominio e verificare che queste, quando non sono vuote, hanno un solo elemento.

Ora, per una generica funzione  $f : A \rightarrow B$  le controimmagini degli elementi di  $B$  sono sottoinsiemi del tutto indipendenti tra loro: come nel seguente disegno



può accadere che un elemento abbia controimmagine costituita da un solo elemento ma altri abbiamo controimmagine costituita da più elementi. Vedremo ora invece che le applicazioni lineari hanno il particolare comportamento per cui le controimmagini degli elementi di  $B$ , se non sono vuote, o sono *tutte* costituite da un solo elemento (nel quel caso la funzione non è iniettiva): quindi basta controllare una sola controimmagine non vuota per capire come sono fatte tutte le altre. Più precisamente abbiamo la seguente

**Proposizione 4.** *Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora valgono i seguenti fatti:*

- (i) *la controimmagine  $f^{-1}(\bar{0}) = \{v \in V | f(v) = \bar{0}\}$  del vettore nullo di  $W$  è un sottomatrice vettoriale di  $V$  (detto nucleo di  $f$  denotato  $N(f)$ )*
- (ii) *per ogni  $w_0 \in W$ , la controimmagine  $f^{-1}(w_0)$  di  $w_0$ , non è vuota, è un sottospazio affine di  $V$ , e più precisamente*

$$f^{-1}(w_0) = v_0 + N(f) = \{v_0 + n | n \in N(f)\}$$

*dove  $v_0$  è un qualunque elemento fissato di  $f^{-1}(w_0)$ .*

**Dimostrazione.** Per dimostrare (i), iniziamo con l'osservare che il nucleo di  $f$  non è mai vuoto, in quanto il vettore nullo di  $V$  (che, con un abuso di notazione, denotiamo ancora  $\bar{0}$ ) è sicuramente tale che  $f(\bar{0}) = \bar{0}$ : infatti, possiamo il vettore nullo  $\bar{0}$  di  $V$  come  $0v$  (dove  $v$  è un qualunque vettore di  $V$ ) e quindi, sfruttando la linearità di  $f$ , si ha  $f(\bar{0}) = f(0v) = 0f(v) = \bar{0}$ .

Siano  $v, v'$  due vettori di  $N(f)$ , cioè  $f(v) = \bar{0}$ . Allora, essendo  $f$  lineare,

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

<sup>11</sup>Questa affermazione è giustificato dal fatto, che non abbiamo dimostrato, che se  $S$  è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale  $V$ , allora  $\dim(S) \leq \dim(V)$  e le dimensioni coincidono se e solo se  $S = V$ .

<sup>12</sup>Come sappiamo, ogni applicazione lineare può essere identificata con una tale funzione grazie alla matrice associata

e quindi anche  $v + v' \in N(f)$ : questo ci dice che  $N(f)$  è chiuso rispetto alla somma. Dati invece un vettore  $v$  del nucleo<sup>13</sup> e uno scalare  $c \in \mathbb{K}$ , allora, sempre per la linearità di  $f$ ,

$$f(cv) = cf(v) = c\bar{0} = \bar{0}$$

ovvero  $cv \in N(f)$ : questo ci dice che  $N(f)$  chiuso rispetto al prodotto per scalari – La (i) è dimostrata. Per dimostrare la (ii), ovvero l'uguaglianza  $v \in N(f) = f^{-1}(w_0)$ , dobbiamo dimostrare che ogni elemento di  $v_0 + N(f)$  sta nella controimmagine  $f^{-1}(w_0)$  appartiene a  $v_0 + N(f)$  (ovvero l'inclusione opposta  $f^{-1}(w_0) \subset v_0 + N(f)$ ). Per dimostrare la prima inclusione, consideriamo il generico elemento di  $v_0 + N(f)$ , cioè, per definizione di sottospazio affine, un vettore  $v$  del tipo  $v = v_0 + n$ , con  $n \in N(f)$ . Allora

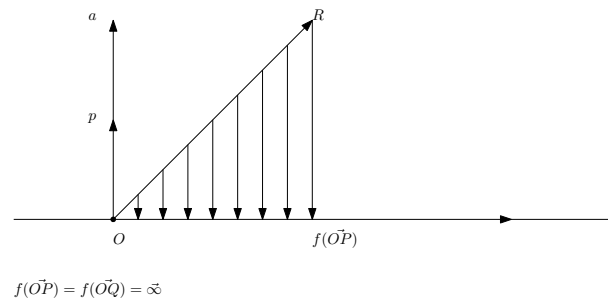
$$f(v) = f(v_0 + n) = f(v_0) + f(n) = f(v_0) = \bar{0} = f(v_0) = w_0$$

(nella seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che  $f$  è lineare, nella terza il fatto che  $n$  appartiene al nucleo di  $f$  e quindi  $f(n) = \bar{0}$ ). Abbiamo dimostrato che  $f(v) = w_0$ , cioè  $v$  appartiene alla controimmagine  $f^{-1}(w_0)$  di  $w_0$ , come volevamo.

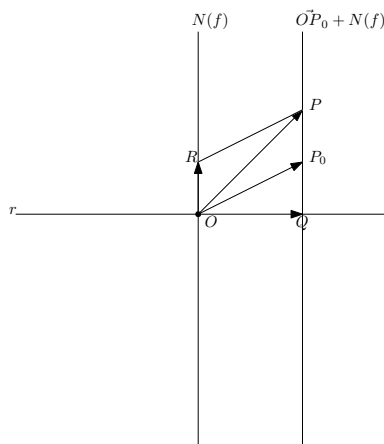
Per dimostrare la seconda inclusione, consideriamo un qualunque elemento  $v$  della controimmagine di  $w_0$ , cioè  $f(v) = w_0$ . Essendo  $w_0 = f(v_0)$ , si ha quindi  $f(v) = f(v_0)$ , da cui, portando a primo membro,  $f(v) - f(v_0) = \bar{0}$ . Essendo  $f$  lineare, quest'ultima uguaglianza può essere riscritta  $f(v - v_0) = \bar{0}$ , il che ci dice che il vettore  $v - v_0$  appartiene al nucleo  $N(f)$  di  $f$ . Ma allora, osservando che chiaramente  $v = v_0 + (v - v_0)$ , vediamo che  $v$  si decompone proprio come somma di  $v_0$  e di un elemento del nucleo  $N(f)$ ,  $v \in v_0 + N(f)$ , come volevamo.  $\square$

La proposizione appena dimostrata afferma in pratica che tutte le controimmagini non vuote di un'applicazione lineare  $f$  sono "copie" o traslati del nucleo  $N(f)$ : per illustrare ciò, consideriamo ad esempio lo spazio  $V_0^2$  dei vettori nel piano applicati in  $O$  e l'applicazione lineare  $f : V_0^2 \rightarrow V_0^2$  data dalla proiezione ortogonale su una retta  $r$  fissata.

Come si vede, un vettore viene proiettato sul vettore nullo  $\vec{OO}$  (cioè appartiene al nucleo  $N(f)$  della funzione) se e solo se appartiene alla retta passante per  $O$  e ortogonale a  $r$ , come i vettori  $\vec{OP}, \vec{OQ}$  del disegno seguente



Ma, come sappiamo, i vettori che stanno su una retta per  $O$  formano un sottospazio vettoriale: questo conferma che il nucleo  $N(f)$  è un sottospazio vettoriale. Per verificare ora che le controimmagini non vuote sono copie traslati del nucleo, consideriamo come nel disegno seguente



Un qualunque vettore  $\vec{OP}$  che stia nell'immagine di  $f$ , diciamo  $\vec{OQ} = f(\vec{OP}_0)$ : la sua controimmagine, oltre che da  $\vec{OP}_0$ , è data da tutti i vettori  $\vec{OP}$  che vengono proiettati su  $\vec{OQ}$ , cioè, come si vede nel disegno, tutti i vettori che hanno secondo estremo sulla retta ortogonale a  $r$  e passante per  $Q$ .

<sup>13</sup>quindi  $f(v) = \bar{0}$

Ognuno di tali vettori  $\vec{OP}$  si decompone come somma di  $\vec{OP}_0$  più un vettore  $\vec{OR}$  appartenente al nucleo  $N(f)$ : quindi, come previsto dalla Proposizione  $<++>$ , la controimmagine  $f^{-1}(OQ)$  è dato dal sottospazio affine  $\vec{OP}_0 + N(f)$ , traslato della ortogonale a  $r$  e passante per  $O$  che rappresenta il nucleo. La Proposizione  $<++>$  ha come immediato corollario il seguente criterio necessario e sufficiente di iniettività per un'applicazione lineare:

**Corollario 1.** *Un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è iniettiva se e solo se  $N(f) = \{\vec{0}\}$ .*

*Dimostrazione.* Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se la controimmagine di ogni elemento  $w_0 \in W$ , se non è vuota<sup>14</sup>, contiene un solo elemento. Ma poiché, come abbiamo visto nella proposizione, la controimmagine di ogni elemento  $w_0$  dell'immagine è del tipo  $v_0 + N(f)$ , allora questa conterrà un solo elemento  $v_0$  esattamente quando il nucleo contiene il solo vettore nullo  $\vec{0}$  cioè  $N(f) = \{\vec{0}\}$ .  $\square$

Notiamo che il fatto che il nucleo sia un sottospazio vettoriale ci dice che possiamo parlare di base e dimensione del nucleo, e che possiamo riformulare il criterio di iniettività per un'applicazione lineare  $f$  con segue:  *$f$  iniettiva se e solo se  $\dim(N(f)) = 0$*  (infatti, un sottospazio ha dimensioni 0 se e solo se è  $\vec{0}$ ). Riassumendo quando visto finora, abbiamo dimostrato che per verificare l'applicazione lineare  $f$  si deve guardare la dimensione  $\dim(N(f))$  del nucleo  $N(f)$  di  $f$ , mentre per verificare la suriettività di  $f$  si deve guardare la dimensione  $\dim(I_m(f))$  dell'immagine  $I_m(f)$  di  $f$ .

Vediamo ora che in realtà è sufficiente calcolare una sola di queste dimensioni per determinare automaticamente anche l'altra. Infatti, queste dimensioni sono collegate dalla formula del seguente risultato, detto anche *teorema della dimensione* o *teorema nullità più rango*.

**Teorema 4.** *Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare, con  $\dim(V)$  finita. Allora*

$$\dim(N(f)) + \dim(I_m(f)) = \dim(V). \quad (4.16)$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\dim(N(f)) = s$  e sia  $v_1, \dots, v_s$  una base di  $N(f)$ . Se  $\dim(V) = n$ , allora possiamo<sup>15</sup> aggiungere alla base del nucleo  $n-s$  vettori  $v_{s+1}, \dots, v_n$  in modo che  $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$  sia una base di  $V$ .

Ora, dimostreremo che le immagini  $f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$  di questi ultimi  $n-s$  vettori formano una base di  $I_m(f)$ : questo implicherà che  $\dim(I_m(f)) = n-s$ , che assieme a  $\dim(N(f)) = s$  e  $\dim V = n$  ci dà  $\dim(N(f)) + \dim(I_m(f)) = s + (n-s) = n = \dim(V)$ , cioè la formula.

Per dimostrare che  $\{f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)\}$  è una base di  $I_m(f)$ , dobbiamo dimostrare che i vettori generano  $I_m(f)$  e sono linearmente indipendenti. In effetti, noi sappiamo che  $v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n$  una base e quindi un insieme di generatori di  $V$ , le immagini  $f(v_1), \dots, f(v_s), f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$  generano  $I_m(f)$ ; ma in questi generatori i primi  $f(v_1), \dots, f(v_s)$  sono uguali al vettore nullo  $\vec{0}$ , in quanto  $v_1, \dots, v_s$  sono vettori della base del nucleo fissata inizialmente. Quindi possiamo eliminarli dalla lista  $f(v_1), \dots, f(v_s), f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$  dei generatori, concludendo che per generare  $I_m(f)$  bastano  $f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$ , che è quello che volevamo.

Ora dimostriamo che  $f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$  sono linearmente indipendenti. Dobbiamo dimostrare che se  $c_{s+1}f(v_{s+1}) + \dots + c_nf(v_n) = \vec{0}$  allora  $c_{s+1} = 0, \dots, c_n = 0$ .

In effetti, sfruttando il fatto che  $f$  è lineare possiamo riscrivere l'uguaglianza  $c_{s+1}f(v_{s+1}) + \dots + c_nf(v_n) = \vec{0}$  come  $f(c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_nv_n) = \vec{0}$ : ma questa uguaglianza ci dice che il vettore  $c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_nv_n$  appartiene al nucleo  $N(f)$ , e quindi esso può essere scritto come combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_s$  (che del nucleo costituiscono una base):

$$c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_nv_n = c_1v_1 + \dots + c_sv_s.$$

Portando tutto a primo membro in questa uguaglianza si ottiene

$$c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_nv_n - c_1v_1 - \dots - c_sv_s = \vec{0}$$

ovvero una combinazione lineare uguale al vettore nullo dei vettori  $v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n$ : essendo questi vettori indipendenti (sono i vettori che formano la base completata di  $V$ ) necessariamente tutti i coefficiente  $c_1, \dots, c_s, c_{s+1}, \dots, c_n$  sono uguali a zero, e in particolare  $c_{s+1} = 0, \dots, c_n = 0$ , che è quello che si restava da dimostrare.  $\square$

<sup>14</sup>Cosa che succede se  $w_0$  non sta nell'immagine dell'applicazione

<sup>15</sup>Data una base di un sottospazio, questa possa sempre essere completata a una base di tutto lo spazio aggiungendo dei vettori è in effetti un teorema detto *teorema del completamento*.

**Teorema di completamento a base**

**Teorema 5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  definito su un campo  $\mathbb{K}$  e siano  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , vettori linearmente indipendenti  $V$  con  $p < n$ .

Esistono allora  $n - p$  vettori  $w_1, w_2, \dots, w_{n-p}$  tali che l'insieme

$$(v_1, v_2, \dots, v_p, w_1, w_2, \dots, w_{n-p})$$

sia una base di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $E$  il sottospazio vettoriale di  $V$  generato dai linearmente indipendenti  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , cioè  $E := \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_p)$  – Osserviamo che i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_p$  non possono generare tutto lo spazio  $V$ .

Se così fosse,  $v_1, v_2, \dots, v_p$  costituirebbero un sistema di generatori linearmente indipendenti di  $V$ , e quindi ne formerebbero una base. Di conseguenza sarebbe  $p = n$ , ma ciò contraddirebbe l'ipotesi  $p < n$ .

La precedente osservazione assicura l'esistenza di un vettore  $w_1 \in V$  tale che  $w_1 \notin E$ . Dal momento che

$$w_1 \notin E := \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_p)$$

I vettori  $v_1, v_2, \dots, v_p, w_1$  sono linearmente indipendenti. E

$$E := \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_p) \subset \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_p, w_1)$$

Ora:

- se  $p + 1 = n = \dim(V)$  allora i vettori

$$v_1, v_2, \dots, v_p, w_1$$

costituiscono una base di  $V$ . Essi infatti formano un insieme di generatori  $V$  linearmente indipendenti, e ciò conclude la dimostrazione.

- Se, invece,  $p + 1 < n$  possiamo ripetere quanto fatto poc'anzi e trovare un altro vettore  $w_2 \in V$  tale che  $w_2 \notin E$  e tale che i  $p + 2$  vettori

$$v_1, v_2, \dots, v_p, w_1, w_2$$

siano linearmente indipendenti.

Continuando in questo modo, dopo  $n - p$  passi si compone una base di  $V$  che contiene i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , ed è proprio quanto volevamo dimostrare.  $\square$

Vediamo ora alcune notevoli conseguenze della formula (4.16):

**Corollario 2.** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare, con  $\dim(V)$  finita. Allora valgono le tre seguenti:

- (1) se  $\dim(V) > \dim(W)$  allora  $f$  non è iniettiva
- (2) se  $\dim(V) < \dim(W)$  allora  $f$  non è suriettiva
- (3) se  $\dim(V) = \dim(W)$  allora  $f$  è iniettiva se e solo se è suriettiva

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (1). Per assurdo, se la funzione  $f$  fosse iniettiva, il suo nucleo, come abbiamo visto nel corollario 2, sarebbe nullo, ovvero  $\dim(N(f)) = 0$ . Sostituendo questo nella formula (4.16), avremmo  $\dim(V) = \dim(I_m(f))$ . Ma essendo  $I_m(f)$  un sottospazio di  $W$ , la sua dimensione è sicuramente minore o uguale a  $\dim(W)$ , e quindi concluderemmo  $\dim(V) \leq \dim(W)$ , contro l'ipotesi che  $\dim(V) > \dim(W)$ . Quindi  $f$  non può essere iniettiva.

Per dimostrare la (2), supponiamo per assurdo che la funzione  $f$  sia suriettiva: allora, essendo  $I_m(f) = W$ , avremmo  $\dim(I_m(f)) = \dim(N(f))$  che, sostituita nella formula (4.16), ci dà  $\dim(V) = \dim(W) + \dim(N(f))$ . Poiché  $\dim(N(f))$  è un numero reale positivo o nullo, questa uguaglianza implica  $\dim(V) \geq \dim(W)$ , contro l'ipotesi che  $\dim(V) < \dim(W)$ . Quindi  $f$  non può essere suriettiva.

Infine, dimostriamo la (3). Se  $f$  è iniettiva,  $\dim(N(f)) = 0$  e quindi la formula (4.16) si riduce a  $\dim(I_m(f)) = \dim(V)$ . Essendo per ipotesi la dimensione di  $V$  uguale a quella di  $W$ , questo significa che  $\dim(I_m(f)) = \dim(W)$ , che implica che  $f$  è suriettiva.

Viceversa, se  $f$  è suriettiva,  $\dim(I_m(f)) = \dim(W)$  e quindi la formula (4.16) si riduce a  $\dim(V) = \dim(N(f)) + \dim(W)$ .  $\square$