Formulario Geometria

Nicola Ferru

5 luglio 2023

1 Prodotto scalare, norma di un vettore e prodotto vettoriale

Definizione 1.1 *Siano $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ e $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ due vettori. il loro prodotto scalare, denotato $\vec{u} \cdot \vec{v}$, è definito da*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \left(\sum_{i=1}^{3} u_i v_3 \right) \tag{1}$$

La proprietà fondamentale del prodotto scalare è

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta \tag{2}$$

Esempio 1.1

$$\begin{aligned}
\vec{u} \left(\frac{7}{3}; -6; 2k \right) \\
\vec{v} \left(-3k; -\frac{1}{2}; k \right) \\
\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{7}{\cancel{3}}(-\cancel{3}k) + (-\cancel{6})(-\frac{1}{2}) + (2k)(k) = 0 \\
-7k + 3 + 2k^2 = 0 \\
2k^2 - 7k + 3 = 0 \\
\Delta k = -7^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25 \\
k_{\frac{1}{2}} = \frac{+7 \pm \sqrt{23}}{4} = \begin{cases} \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

1.1 Norme di un vettore

Definizione 1.2 *La norma di un vettore $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ è una applicazione che a un vettore associa un numero reale*

$$\begin{aligned}
|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\
\vec{u} \mapsto ||\vec{u}||
\end{aligned}$$

così definito:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{v_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

In modo equivalente possiamo esprimere la norma di un vettore in termini di prodotto scalare:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

infatti

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

1.2 Prodotto Vettoriale

Definizione 1.3 *Siano $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ e $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$. Il loro prodotto vettoriale (indicato $\vec{u} \wedge \vec{v}$, oppure $\vec{u} \times \vec{v}$) è il vettore definito da*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1]$$

Esempio 1.2 *Siano $\vec{u} = [1, 2, 1]$, $\vec{v} = [6, -4, 1]$.*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4), 1 \cdot 6 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 6] = [6, 5, -16]$$

2 Metodo di Cramer per sistemi lineari

Definizione 2.1 *Il **metodo di Cramer per sistemi lineari** è un procedimento per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari, e prevede di determinare le soluzioni dei sistemi lineari quadrati mediante il calcolo del determinante assoluto. Nel caso delle matrici 2x2:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1) \tag{3}$$

mentre, nel caso di una matrice 3x3:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = +a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 \tag{4}$$

Con un caso di matrice estesa che viene fatto nel seguente modo $\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right.$

1. Prendendo una matrice $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1) - (5 \cdot 2) = 3 - 10 = -7$.

2. Questo era un esempio di matrici 3x3

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix} = +2 \cdot 9 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 - 1 \cdot 9 \cdot 5 = 23$$

3 Algoritmo di Gauss Jordan

4 Sviluppo di Laplace per determinanti

5 Polinomio caratteristico di un'applicazione lineare