



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

DIEE

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA ED ELETTRONICA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA ELETTRICA INDUSTRIALE

# ANALISI MATEMATICA 2

*edited by*

*NICOLA FERRU*

*Unofficial Version*

*2022 - 2023*

[This page is intentionally left blank]

# Indice

0.1	Premesse...	7
0.2	Simboli	8
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1	tipologia in $\mathbb{R}$	9
1.1.1	Distanza	9
1.2	Intorno	10
1.2.1	Insieme chiuso	11
1.2.2	Insieme connesso	11
1.2.3	Insieme convesso	11
1.2.4	Coordinate Polari	11
1.2.5	Limiti e continuità	12
1.2.6	Continuità	12
1.2.7	Esistenza del limite	12
1.2.8	Teorema di esistenza dei valori intermedi	12
1.2.9	Teorema di Weierstrass	12
<b>2</b>	<b>Derivate Parziali</b>	<b>13</b>
2.1	Derivate parziali di primo grado	13
2.1.1	Significato geometrico	13
2.2	Derivata parziale seconde	14
2.2.1	Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)	14
2.3	Massimi e minimi relativi	14
2.3.1	Teorema di Fermat	15
<b>3</b>	<b>Differenziabilità</b>	<b>17</b>
3.0.1	Tutte le funzioni differenziali sono continue	18
3.0.2	Tutte le funzioni differenziali sono derivabili	18
3.0.3	Le funzioni con derivate parziali continue sono differenziabili	19
3.1	Significato geometrico del differenziale e piano tangente	19
3.1.1	Differenziale primo	19
3.1.2	Piano Tangente	19
3.1.3	Significato geometrico del differenziale primo	20
3.1.4	Funzioni composite	20
3.1.5	Funzione composta	21
3.1.6	Teorema della derivata della funzione composta	21
3.2	Teorema differenziabilità delle funzioni composite	22
3.3	Differenziale secondo	23
3.3.1	Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo	24
3.3.2	Ricerca del massimo e del minimo assoluti	25
3.3.3	Metodo dei moltiplicatori di di Lagrange	27

<b>4</b>	<b>Integrali Doppi e tripli</b>	<b>29</b>
4.1	Domini normali (semplici)	29
4.1.1	Dominio normale rispetto all'asse $x$	29
4.1.2	Domini Polarmente normale	29
4.1.3	Definizione di integrale doppio	30
4.2	Somme di Riemann	31
4.2.1	Proprietà dell'integrale doppio	32
4.2.2	Formula di riduzione	32
4.2.3	Baricentro di un dominio normale	33
4.2.4	Domini normali in $R^3$	34
4.3	Integrali tripli	34
4.3.1	Formule di riduzione per gli integrali tripli	35
4.3.2	Significato geometrico degli integrali	36
4.3.3	Coordinate polari e coordinate cilindriche	36
4.3.4	Interazione per fette	36
4.3.5	Integrali curvilinei	36
4.3.6	Lunghezza di una curva	38
4.3.7	Lunghezza di una curva in forma cartesiana	39
4.3.8	Lunghezza di una curva polare	39
4.4	Ascissa Curvilinea	39
4.5	Integrale corvilineo	40
4.5.1	Definizione di integrale curvilineo	40
4.5.2	Baricentro di una curva	40
4.5.3	Superfici e integrali di superficie	41
4.5.4	Piano tangente e versore normale	41
4.5.5	Orientazione di una superficie	42
4.5.6	Integrale Superficiale	42
4.6	Trasformazione integrali	43
4.6.1	Formule di Green-Gauss	43
4.6.2	Teorema della divergenza	46
4.7	Forma differenziali Lineari	48
4.7.1	Integrazione delle forme differenziali	48
4.7.2	Forme differenziali esatte	49
4.7.3	Forma differenziali chiusa	49
4.7.4	Condizioni necessarie affinché una forma differenziale sia esatta	50
4.8	Funzione potenziale	51
4.8.1	Condizioni sufficiente affinché una forma differenziale lineare sia Esatta	52
4.8.2	Condizione necessaria e sufficiente	52
4.8.3	Teorema di Stokes (o del rotore)	52
<b>5</b>	<b>Successioni e serie</b>	<b>55</b>
5.1	Successioni di costanti	55
5.2	Limite di successioni	55
5.2.1	Limite finito di una successione	55
5.3	Successioni Limitatre, illimitate, crescenti e decrescenti	55
5.3.1	Operazioni algebriche e teoremi sui limiti di successioni	56
5.3.2	Serie numeriche	56
5.3.3	Cordizione necessaria affinché una serie converga	56
5.4	Particolari tipi di serie	56
5.4.1	Assoluta e semplice convergenza	57
5.5	Criteri per determinare il carattere di una serie	57

5.5.1	Criterio del confronto . . . . .	57
5.5.2	Criterio del rapporto . . . . .	57
5.5.3	Criterio della radice . . . . .	58
5.5.4	Criterio del confronto asintotico . . . . .	58
5.5.5	Criterio di Leibniz – Serie a termini alterni . . . . .	58
5.5.6	Successioni di funzioni . . . . .	59
5.5.7	Criterio di Weierstrass – condizione sufficiente per l’uniforme convergenza . . . . .	59
5.6	Teoremi di invertibilità del passaggio al limite . . . . .	60
5.6.1	Teorema – “Invertibilità del limite” . . . . .	60
5.6.2	Teorema – “Invertibilità della derivata” . . . . .	60
5.6.3	Teorema – “Invertibilità dell’integrale” . . . . .	60
5.7	Serie di potenze . . . . .	60
5.7.1	Raggio di convergenza . . . . .	60
5.7.2	Criteri per determinare l’intervallo di convergenza . . . . .	61
5.7.3	Serie derivata di una serie di potenze – uniforme convergenza delle serie di potenze . . . . .	61
5.7.4	Serie di Taylor e Mac Laurin . . . . .	61
5.7.5	Serie di Fourier . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>63</b>
6.1	Equazioni differenziali a variabili separabili . . . . .	63
6.1.1	Proprietà generali delle equazioni differenziali lineari . . . . .	64
6.1.2	Equazioni differenziali lineari del primo ordine . . . . .	64
6.1.3	Equazioni differenziali di Bernoulli (non lineari, I ordine) . . . . .	65
6.1.4	Equazioni differenziali di Clairaut (Non lineare, I ordine) . . . . .	66
6.2	Problema di Cauchy . . . . .	67
6.2.1	Teorema di Peano (Esistenza di soluzioni) . . . . .	67
6.2.2	Teorema di Cauchy (esistenza e unicità locale) . . . . .	67
6.2.3	Equazioni differenziali lineari di ordine $N$ . . . . .	68
6.2.4	Equazioni differenziali lineari omogenee . . . . .	69
6.2.5	Equazioni lineari complete . . . . .	69



# Elenco delle figure

1.1	distanza monodimensionale . . . . .	9
1.2	distanza bidimensionale . . . . .	9
1.3	distanza tridimensionale . . . . .	9
3.1	Rappresentazione grafica della conica . . . . .	24
4.1	Decomposizione del rettangolo R . . . . .	30
4.2	Esempi di domini polarmente normali . . . . .	33
4.3	Baricentro di un dominio normale . . . . .	33
4.4	Differenza tra curva chiusa e aperta . . . . .	37
4.5	Esempio della prima formula di Green-Gauss . . . . .	44

## 0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un'occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, così da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTeX insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

## 0.2 Simboli

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	<b>Appartiene</b>	$\ni$ :	<b>Tale che</b>
$\notin$	<b>Non appartiene</b>	$\leq$	<b>Minore o uguale</b>
$\exists$	<b>Esiste</b>	$\geq$	<b>Maggiore o uguale</b>
$\exists!$	<b>Esiste unico</b>	$\alpha$	<b>alfa</b>
$\subset$	<b>Contenuto strettamente</b>	$\beta$	<b>beta</b>
$\subseteq$	<b>Contenuto</b>	$\gamma, \Gamma$	<b>gamma</b>
$\supset$	<b>Contenuto strettamente</b>	$\delta, \Delta$	<b>delta</b>
$\supseteq$	<b>Contiene</b>	$\epsilon$	<b>epsilon</b>
$\Rightarrow$	<b>Implica</b>	$\sigma, \Sigma$	<b>sigma</b>
$\Leftrightarrow$	<b>Se e solo se</b>	$\rho$	<b>rho</b>
$\neq$	<b>Diverso</b>		
$\forall$	<b>Per ogni</b>		



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 tipologia in R

#### 1.1.1 Distanza

- $R^1$ :  $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$

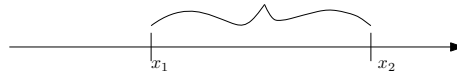


Figura 1.1: distanza monodimensionale

- $R^2$ : Siano  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ , la loro distanza è  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

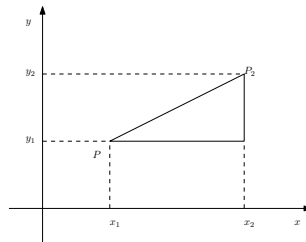


Figura 1.2: distanza bidimensionale

- $R^3$ : Siano  $Q_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $Q_2(x_2, y_2, z_2)$ , la loro distanza è  $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

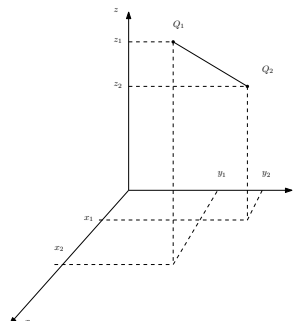


Figura 1.3: distanza tridimensionale

- $R^n$ : Siano  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$  e  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^n (x_a - y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione  $R^n * R^n \rightarrow R^+ \cup \{0\}$  (ha come immagine al più nullo)

**Proprietà 1.** *questi sono vincolati dalle seguenti proprietà*

- $d(x, y) \leq 0$   $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$  la distanza è nulla se i due punti coincidono
- $d(x, y) = d(y, x)$  la distanza tra  $x$  e  $y$  uguale alla distanza da  $y$  a  $x$
- $d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$  disuguaglianza triangolare.

## 1.2 Intorno

**Definizione 1.** *Insieme dei punti che distano da un punto  $P_0$  meno di un  $\delta$*

- $R$  Intervallo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ,  $P(x)$  generico punto  $d(P_0, P) < \delta$

$$\boxed{|x - x_0| < \delta}$$

- $R^2$

$$P_0(x_0, y_0)$$

$$P(x, y)$$

$$d(P_0, P) < \delta$$

$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta}$$

Cerchio di centro  $P_0$  e di perimetro  $\delta$  privato della circonferenza.

- $R^3$

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$Q(x, y, z)$$

$$d(Q, Q_0) < \delta$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro  $Q_0$  e raggio  $\delta$  privata della sua superficie.

**Punto interno**  $P_0$  è interno all'insieme  $D$  se:

$$\exists I_{P_0, \delta} \subset D \quad (1.1)$$

Esiste un intorno di  $P_0$  di ampiezza  $\delta$  incluso nell'insieme  $D$ , cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

**Punto esterno**  $P_0$  è esterno all'insieme  $D$  se è interno al complementare di  $D$ ,  $CD$

$$\exists I_{P_0, \delta} \subset CD \quad (1.2)$$

esiste un intorno di  $P_0$  di ampiezza  $\delta$  incluso nel complementare dell'interno  $D$

**Punto di frontiera**  $P_0$  è un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \rightarrow \text{frontiera dell'insieme } D \quad (1.3)$$

$\forall I_{F_D}$  in esso cadono punti di  $D$  e punti di  $CD$  qualunque intorno, in esso cadono punti dell'insieme  $D$  e del suo complementare.

**Punto di accumulazione**  $P_0$  è un punto di accumulazione se  $\forall I_{P_0}$  cade in un punto  $\in D$ , se cade un punto di  $D$  in  $I_{P_0}$ , allora ne cadono infiniti.

**Punto isolato**  $P_0$  è un punto isolato se  $\exists I_{P_0, \delta}$  in cui non cade nessun punto dell'insieme.

### Insieme Aperto

**Definizione 2.**  $A$  si dice aperto se  $\forall P \in A \exists I_P \subset A$  per qualunque punto di  $A$  esiste un intorno incluso in  $A$ , cioè ogni intorno di  $P$  è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni  $]a : b[; x^2 + y^2 < r^2$  cerchio senza circonferenza:

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{triangolo senza lati} \quad (1.4)$$

#### 1.2.1 Insieme chiuso

**Definizione 3.**  $A$  si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiusura, che è formato dall'insieme teso più gli eventuali punti di accumulazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione.  $[a : b]; x^2 + y^2 \leq r^2$  cerchio più circonferenza:

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{tringolo con lati} \quad (1.5)$$

#### 1.2.2 Insieme connesso

**Definizione 4.** un insieme  $A$  si dice connesso se e solo se  $\forall P_1, P_2 \in A \exists \Gamma(P_1, P_2) \subset A$ .  $A$  è connesso se per qualunque  $P_1, P_2$  di  $A$  esiste una spezzata inclusa in  $A$

$A$  si dice **semplicemente connessa** se qualunque chiusa inclusa in  $A$  è frontiera dell'insieme.

#### 1.2.3 Insieme convesso

**Definizione 5.** un insieme  $A$  si dice convesso se per ogni coppia di  $x, y \in A$  il segmento  $\overline{xy}$  è contenuto in  $A$

**Insiemi Limitati** In  $R : A$  è limitato se  $\forall x \in A : x \leq M$  **Insieme illimitato** In  $R : [2; +\infty[$  illimitato

$[-1; 1]$  limitato

$$\text{In } R^2 : \text{illimitato} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

In  $R^2 : A$  è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq M \quad (1.6)$$

#### 1.2.4 Coordinate Polari

**Definizione 6.** in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia  $P(x, y)$  un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiane  $X$  e  $y$  oppure le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ .

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = e^3 \frac{\cos^2 \theta}{e^2} \quad (1.8)$$

### 1.2.5 Limiti e continuità

**Definizione 7.**  $f(x, y)$  una funzione definito in  $D$  e siano  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \quad \forall \xi > 0 \exists \delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0, y_0), \delta} / \{(x_0, y_0)\}, \forall (x, y) \in I | f(x, y) \quad (1.9)$$

Per qualunque  $\xi > 0$  esiste un  $\delta(\xi) > 0$  per cui qualunque intorno di  $(x_0, y_0)$  al più  $x_0, y_0$  e per qualunque  $(x_0, y_0)$  di quast'intorno la funzione dista da  $l$  meno di  $\xi$ .

### 1.2.6 Continuità

**Definizione 8.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$ ,  $f(x, y)$  si definisce *continuo* in  $(x_0, y_0) \in D$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1.10)$$

### 1.2.7 Esistenza del limite

**Definizione 9.** Calcolando il limite con  $f$  in forma polare esiste se non dipende da  $\theta$ . È possibile calcolare il limite di  $f$  in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si considerino quelli su una generica retta.

$$y = y_0 + m(x - x_0) \quad (1.11)$$

- Se il limite dipende da  $m$  esso *non esiste*.
- Se non dipende da  $m$  *esiste*.

### 1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

**Teorema 1.** Sia  $f(x, y)$  definita in un insieme chiuso e limitato. Allora  $f(x, y)$  assume tutti i valori compresi fra il massimo ed il minimo di  $f(x, y)$  su  $D$

### 1.2.9 Teorema di Weierstrass

**Teorema 2.** Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.

Sia  $f(x, y)$  una funzione continua in  $D$  e sia  $D$  un insieme chiuso e limitato. Allora  $f(x, y)$  ha massimo e minimo assoluto in  $D$ .

## Capitolo 2

# Derivate Parziali

### 2.1 Derivate parziali di primo grado

**Definizione 10.** Sia  $f(x, y)$  una funzione di due variabili definita in un punto interno ad  $A$ . Consideriamo un intorno circolare di  $P(x_0, y_0)$ ,  $I(x_0, y_0)$ ,  $\delta$ , in netto sulla retta  $y = y_0$  e incrementa la  $x_0$  passando da  $x_0$  a  $x_0 + h$ . Ho così un punto  $P(x_0 + h, y_0) \in A$ . Definisco il rapporto di  $f(x, y)$  nella sola  $x$

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2.1)$$

$f(x, y)$  si definisce **derivabile parzialmente** se  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$  reale e finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2.2)$$

Analogamente, considero un intorno di  $P(x_0, y_0)$ ,  $I(x_0, y_0)$ ,  $\delta$ . Mi ruoto sulla retta  $x = x_0$  e incremento la  $y_0$  passando da  $y_0$  a  $y_0 + k$ . Ho così un punto  $P(x_0, y_0 + k) \in A$ . Definisco il rapporto incrementale di  $f(x, y)$  nella sola  $y$

$$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

**derivabile parzialmente** se  $\exists \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = l \in \mathbb{R}$  reale e finito.

Se in un punto  $(x, y)$  esistono entrambi le derivate parziali si dice che la funzione è **derivabile** in  $(x, y)$  inoltre se  $f$  è derivabile in ogni punto  $(x, y) \in A$ , si dice che  $f$  è derivabile in  $A$ .

#### 2.1.1 Significato geometrico

- Lo derivata prima par parziale in  $P$  è  $f_x(x_0, y_0)$ , è la tangente alla curva che si crea intersecando  $f(x, y)$  con il piano  $y = y_0$
- La derivata prima parziale in  $P$ ,  $f_y(x_0, y_0)$  è la tangente alla curva che si crea intersecando  $f(x, y)$  con il piano  $x = x_0$

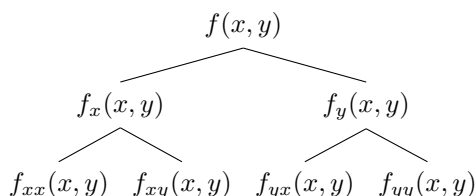
Se esistono entrambe allora le due rette tangenti alle sezioni della funzione individuano il piano tangente al solido nel punto  $P(x_0, y_0, z)$

## 2.2 Derivata parziale seconde

**Definizione 11.** Sia  $f(x, y)$  una derivabile e siano definite in un dominio le due derivate parziali

$$f_x(x, y) \quad f_y(x, y)$$

Tali funzioni passano a loro volta essere derivabili e si ottengono così le derivate seconde parziali di  $f(x, y)$



$$\begin{array}{ccc}
 f_{yx}(x, y) & \text{derivata seconde pure} & f_{yx} \\
 f_{yx}(x, y) & & f_{yx}
 \end{array}$$

derivata prima rispetto a

y poi rispetto a rispetto a x

con  $n$  variabili si hanno  $n^2$  derivate seconde parziali – Spesso le derivate seconde sono disposte in una matrice quadrata, detta **hessiana**, con il simbolo  $D^2$

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ n variabili} \rightarrow n * n \quad (2.3)$$

Se esistono le quanto derivate di  $f$ , nel punto  $(x, y)$ , si dice che  $f$  è derivabile due volte in  $(x, y)$ . Se ciò accade  $\forall (x, y) \in A$ ,  $f$  è derivabile due volte nell'insieme  $A$ .

### 2.2.1 Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)

**Teorema 3.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e derivabile due volte  $\forall (x, y) \in D$ .

Se le derivate seconde in  $(x_0, y_0)$   $f_{xy}(x_0, y_0)$  e  $f_{yx}(x_0, y_0)$  sono continue in  $(x_0, y_0)$  allora risulta  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ .

In generale se vale il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana può essere scritta come

$$H = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\det H = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = f_{xx} * f_{yy} - (f_{yx})^2$$

## 2.3 Massimi e minimi relativi

**Definizione 12.** Sia  $f(x, y)$  una funzione definita in un insieme  $D$ , un punto  $p_0(x_0, y_0) \in D$ , si dice di **massimo relativo** per la funzione se esiste intorno circolare di  $P_0$  per cui il valore assunto della funzione nei punti dell'interno è minore o uguale a quello assunto in  $P_0$ .

Analogamente un punto  $P_0(x_0, y_0)$  si dice di **minimo relativo** per la funzione se esiste un intorno circolare di  $P_0$  per cui il valore assunto dalla funzione nei punti dell'intorno è maggiore o uguale.

$$\begin{array}{ll}
 \exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} & f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \text{Massimo relativo} \\
 \exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} & f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \text{Minimo relativo}
 \end{array}$$

### 2.3.1 Teorema di Fermat

**Teorema 4.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e derivabile in un punto  $P_0(x_0, y_0)$

Se in  $P_0(x_0, y_0)$   $f(x, y)$  ha un massimo o un minimo relativo, allora le derivate prime parziali si annullano ( $\nabla f = 0$  gradiente nullo). La pendenza della tangente è zero un massimo o minimo.

#### Gradiente

Sia  $f(x, y)$  una funzione derivabile in un punto  $(x, y)$ , cioè esistano in  $(x, y)$  le due derivate parziali  $f_x$  e  $f_y$ .

Si definisce **gradiente** di  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y)$ : il vettore  $\nabla f$  le cui componenti sono le derivate parziali di  $f(x, y)$ .

$$\nabla f(x, y) \equiv (f_x(x, y); f_y(x, y)) \quad (2.4)$$

#### Massimi e minimi – condizione necessaria

**Definizione 13.** Se  $P_0(x_0, y_0)$  è un punto di massimo/minimo relativo il gradiente è nullo. Così di massimo o minimo relativo interni al dominio della funzione  $f$  vanno ricercati tra i punti che annullano la funzione  $f$ . Pertanto un punto critico per una funzione derivabile è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.





## Capitolo 3

# Differenziabilità

**Definizione 14.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e  $P_0(x_0, y_0) \in D$ . In  $P_0, z = f(x_0, y_0)$ , incremento la  $x_0$  di un  $h$  e la  $y_0$  di un  $k$ .

Così passo da  $P_0(x_0, y_0)$  a  $P(x_0 + h, y_0 + k)$ . La funzione avrà avuto un certo incremento

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Si definisce **differenziale** in  $P_0(x_0, y_0)$  se  $\exists A, B \in \mathbb{R} : f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ , cioè se esistono due costanti reali  $A$  e  $B$  per cui l'incremento di  $f(x, y)$  che si ha passando da  $P_0$  a  $P$  si può riscrivere come somma di una parte lineare  $Ah + Bk$  e di un infinitesimo di ordine superiore a  $\sqrt{h^2 + k^2}$  (distanza di  $P_0$  da  $P$ ).

Se  $f(x, y)$  ammette derivate prime parziali le due costanti  $A$  e  $B$  sono:

$$\begin{cases} A = f_x(x_0, y_0) \\ B = f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

e il differenziale diventa

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (3.1)$$

**Esempio 1.** verificare che  $z = xy$  è differenziale  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , se  $z$  è differenziale  $\rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$  dove

$$\begin{cases} A = f_x(x_0, y_0) \\ B = f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

se  $z$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$ .

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{(x_0 + h)(y_0 + k)}_{\text{Sostituisco}} = x_0 y_0 + x_0 k + y_0 h + hk$$

$$\begin{array}{lll} f_x = y & f_x(x_0, y_0) = y_0 & f_y = x \\ f \text{ è derivabile in } (x_0, y_0) & A = y_0 & f_y(x_0, y_0) = x_0 \\ & & B = x_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ x_0 y_0 + x_0 k + y_0 h + hk - x_0 y_0 &= y_0 h + x_0 k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ hk &= o(\sqrt{h^2 + k^2}) \end{aligned}$$

detto quindi dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$  e poi passo alle coordinate polari:

$$\begin{aligned} h &= \rho \cos \theta \\ k &= \rho \sin \theta \\ e^2 &= h^2 + k^2 \\ h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, \rho &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\cancel{\rho} \cos \theta \cancel{\rho} \sin \theta}{\cancel{\rho}^2} \quad z = xy \text{ differenziale } \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

### 3.0.1 Tutte le funzioni differenziali sono continue

Sia  $f(x, y)$  differenziabile  $(x_0, y_0)$ , allora  $f(x, y)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

**Ip:**

$f(x, y)$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$

**Th:**

$f(x, y)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Se  $f(x_0, y_0)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0$$

Calcolo il limite a destra per  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \underbrace{Ah}_0 + \underbrace{Bk}_0 + \underbrace{o(\sqrt{h^2 + k^2})}_0 = 0 \text{ per cui } f(x, y) \text{ è continua in } (x_0, y_0)$$

□

### 3.0.2 Tutte le funzioni differenziali sono derivabili

Sia  $f(x, y)$  differenziabile in un punto  $(x_0, y_0)$ . Allora  $f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$

**Ip:**

$f(x, y)$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$

**Th:**

$f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

divido entrambi per  $h$  e calcolo il limite per  $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x} = \underbrace{\frac{Ah + o(\sqrt{h^2})}{h}}_A$$

$$f_x(x_0, y_0) = A$$

Analogamente si dimostra che  $f_y(x_0, y_0) = B$ . Quindi dato che esistono  $f_x$  e  $f_y$  in  $(x_0, y_0)$ ,  $f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$  e in oltre  $A = f_x(x_0, y_0)$ ,  $B = f_y(x_0, y_0)$  □

**Esercizio 1.** Dimostrare che  $z = x^2 = y^2$  è differenziabile in  $(1;1)$  – Per definire

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= (1 + h)^2 = (1 + k)^2 & f(x_0, y_0) &= 1 + 1 = 2 \\ A = f(1, 1) &= |2x|_{x=1} = 2 & B = f_y(1, 1) &= |2y|_{y=1} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Così ho } (1 + h)^2 + (1 + k)^2 - 2 = 2h + 2k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$h^2 + k^2 = o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$\begin{aligned} \text{devo dimostrare che } \lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= 0 \text{ passando a coordinate polari} & h &= e \cos \theta \\ & & k &= e \sin \theta \\ & & e^2 &= h^2 + k^2 \\ & & k \rightarrow 0, h \rightarrow 0, p \rightarrow 0 & \\ \lim_{e \rightarrow 0} \frac{e^2}{|e|} &= 0 \rightarrow z = x^2 + y^2 \text{ è differenziabile in } (1, 1) \end{aligned}$$

### 3.0.3 Le funzioni con derivate parziali continue sono differenziabili

**Definizione 15.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D_1$  e sia derivabile in  $D$ . Sono  $f_x$  e  $f_y$  continue in  $D$ , allora  $f(x, y)$  è differenziale in  $D$ .

**Condizione sufficiente per la differenzialità**

**Definizione 16.** Affinché una funzione sia differenziabile in  $(x_0, y_0)$  basta che in  $(x_0, y_0)$  abbia derivate. In questo modo per determinare se una funzione è differenziabile in un punto si calcola le derivate parziali in quel punto, se esistono la funzione è differenziabile, in caso contrario non è derivabile.

**Esempio 2.** Dimostrare che  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  non è differenziabile in  $(0; 0)$

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & D : x^2 + y^2 > 0 \\ z_y &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & D : x^2 + y^2 > 0 \end{aligned}$$

Sia  $z_x$  sia  $z_y$  sono definite per  $x^2 + y^2 > 0$  cioè nei punti esterni al cerchio di centro  $(0, 0)$  e 1, frontiera esclusa. Il punto  $(0, 0)$  è interno al cerchio, quindi in esso  $f(x, y)$  non è derivabile. Per cui in punto  $(0, 0)$   $f(x, y)$  non è neanche differenziabile.

## 3.1 Significato geometrico del differenziale e piano tangente

### 3.1.1 Differenziale primo

È la parte lineare nella definizione di differenziale

$$f(x, y) \text{ definita in } D \quad (x_0, y_0) \in D$$

$f(x, y)$  differenziale in  $(x_0, y_0)$  se

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k}_{\text{parte lineare}} + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

### 3.1.2 Piano Tangente

La  $f(x, y)$  una funzione derivabile in  $(x_0, y_0)$ , il piano tangente alla funzione  $(x_0, y_0, z_0)$  ha equazione:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\vec{n}$  direzione ortogonale al piano tangente, è unitario

$$\vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

poiché  $\nabla f(f_x, f_y) \quad |\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 \rightarrow \vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$

**Esempio 3.**  $z = x^2 + y^2 \quad (1, 1)$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\begin{aligned} z_0 = f(1, 1) = 1 + 1 = 2 \quad z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1) \quad f_x = 2x|_{1,1} = 2 \\ f_y = 2y|_{1,1} = 2 \end{aligned}$$

### 3.1.3 Significato geometrico del differenziale primo

Passando da  $P_0$  a  $P$   $f(x)$  si incrementa da  $f(x_0)$  a  $f(x_0 + h)$  – Il differenziale primo  $dy$  indica la variazione che subisce la retta tangente passando da  $P_0$  a  $P$ .

L'incremento  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  si approssima sempre più con  $dy$  per incrementi  $h \rightarrow 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x)(x - x_0) - f(x_0) + o|x|$$

L'incremento  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  differisce dal valore  $f'(x)(x - x_0)$  [retta tangente] per un  $o|x|$ ,  $o|x|$  ci dà l'errore.

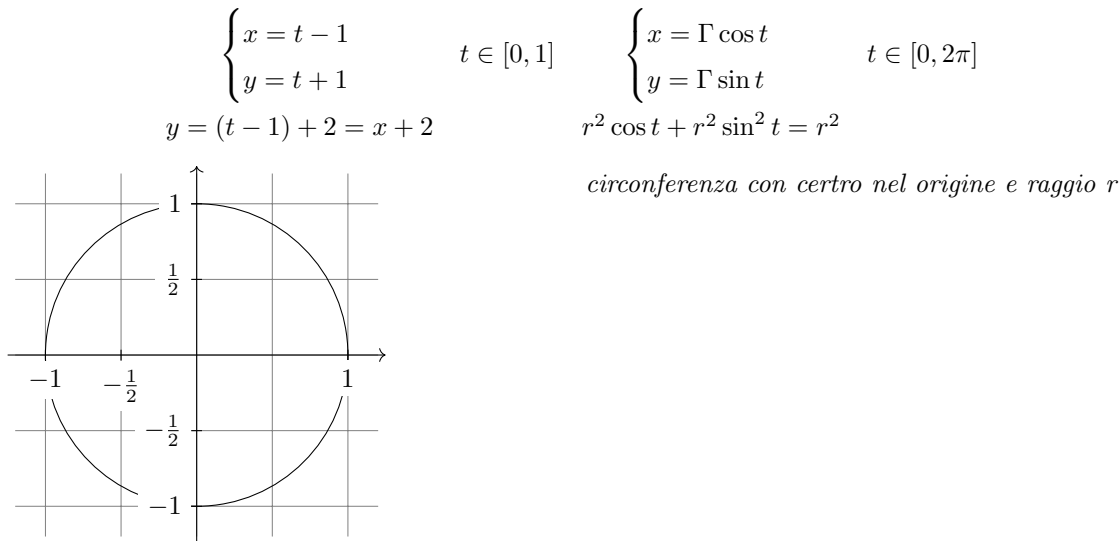
### 3.1.4 Funzioni composite

**Definizione 17.** Sia  $x(t)$  e  $y(t)$  due funzioni reali definite al variare in un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ .  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  corrisponde il punto  $(x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x = x(t) & \text{Rappresenta nel piano una curva in frontiera} \\ y = y(t) & \text{Parametrica} \end{cases}$$

Al variare di  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$

$x = x(t), y = y(t)$  descrive una curva  $\gamma$  nel piano

**Esempio 4.**

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = r^2$$

Se si ha  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$  al variare di  $t \in T \leq R$  si ha una curva nello spazio.

**Esempio 5.**  $\begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \\ z = Kt \end{cases}$  elica circolare

**3.1.5 Funzione composta**

**Definizione 18.** Sia  $\gamma$  la curva  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subset R$  di codominio  $B$

$I \rightarrow B$

Sia  $f(x, y)$  definita in  $A$

$t \in f(x(t), y(t))$  se il codominio di  $\gamma$  coincide con il codominio di  $f(x, y)$ , cioè  $B \subseteq A$

**3.1.6 Teorema della derivata della funzione composta**

**Definizione 19.** Sia  $\gamma$  la curva di punti  $(x(t), y(t))$  e sia derivabile in un intervallo  $I$  (cioè esistono)

Sia  $f(x, y)$  differenziabile in  $x(t)$

Allora la funzione composta da  $F(t) = f(x(t), y(t))$  è derivabile in  $I$  e la sua derivata prima vale:

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \quad (3.2)$$

$$(\nabla f * \Gamma'(t)) \quad \nabla f \equiv (f_x; f_y) \quad \Gamma' \equiv (x'(t); y'(t))$$

**Ipotesi**  $\gamma \equiv (x(t), y(t))$  derivabile in  $I$

$f(x, y)$  differenziabile in  $x(t)$

**Tesi**  $F(t) = f(x(t), y(t))$  derivabile in  $I$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

*Dimostrazione.* Devo dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$

Scrivo l'incremento di  $F(t)$  per un  $h$

$$F(t+h) - F(t) = f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)] \text{ Per definizione di funzione composta } F(t)$$

Poiché  $f(x,y)$  è differenziabile si ha

$$\begin{aligned} f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)] &= f_x \underbrace{[x(t), y(t)]}_{f_x} \underbrace{[x(t+h) - x(t)]}_h + f_y \underbrace{[x(t+h) - y(t+h)]}_{f_y} \underbrace{[y(t+h) - y(t)]}_k \\ &\quad + o \left( \sqrt{\underbrace{[x(t+h) - x(t)]^2}_{h^2} + \underbrace{[y(t+h) - y(t)]^2}_{k^2}} \right) \end{aligned}$$

Divido entrambi i membri per  $h$  e calcolo il  $\lim_{h \rightarrow 0}$

**I membro**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)]}{h} = F'(t)$$

**II membro**

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f_x[x(t), y(t)] \underbrace{\left[ \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right]}_{x'(t)} &+ \lim_{h \rightarrow 0} f_y[x(t+h) - y(t+h)] \underbrace{\left[ \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right]}_{y'(t)} \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} o \left( \underbrace{\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2}}_0 \right) \\ F' &= f_x[x(t), y(t)]x'(t) + f_y[x(t), y(t)]y'(t) \end{aligned}$$

□

**Esempio 6.**

$$z = x^2 y \quad \begin{cases} x(t) = -t & F(t) = z(x(t), y(t)) = -t^2 * t = -t^3 \\ y(t) = t & F'(t) = z' = -3t^2 \end{cases}$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = -3t^2$$

## 3.2 Teorema differenziabilità delle funzioni composite

**Teorema 5.** Siano  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  funzioni in  $k$  variabili  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ \dots \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{cases} \quad (3.3)$$

Componiamo le funzioni ottenendo la funzione composta

$$f[x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)]$$

Siano  $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$   $n$  funzioni definite in un insieme aperto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e siano derivabili parzialmente rispetto a  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Sia  $f(x_1, \dots, x_n)$  una funzione definita in  $A$  contenente in codominio  $x(D)$  e sia  $f$  differenziabile in  $A$ . Allora la funzione composta  $F(t) = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)$  è derivabile parzialmente rispetto a  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) nel punto  $t$ .

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) + \frac{\partial x_i}{\partial t_i}(t) \quad (\text{si somma sugli indici ripetuti})$$

Inoltre, se  $f$  e  $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$  sono di classe  $C^1$ , anche  $F = f(x(t)) \in C^1$  ed è quindi differenziabile.

$h = k = 2$  coordinate polari

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \varphi \\ t_2 = \varphi \end{cases} \quad f(x, y) \quad \begin{cases} x = x(\varphi, \varphi) \\ y = y(\varphi, \varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \\ f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} x \rho + \frac{\partial f}{\partial y} y \rho = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} x \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} y \varphi = \frac{\partial f}{\partial x} (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} (\rho \sin \varphi) \end{aligned}$$

### 3.3 Differenziale secondo

**Definizione 20.**  $d^2 f$  è il differenziale del differenziale primo

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d(f_x h + f_y k) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x h + f_y k)h + \frac{\partial}{\partial x}(f_x h + f_y k)k = \\ &= (f_{xx} h + f_{xy} k)h + (f_{xy} h + f_{yy} k)k = f_{xx} h^2 + f_{xy} kh + f_{xy} hx + f_{yy} k^2 \end{aligned}$$

Se  $f(x, y) \in C^2$  (derivate parziali II continue) vale il teorema di Schwarz (2.2.1), cioè  $f_{yx} = f_{xy}$  - Il differenziale secondo allora diventa

$$d^2 f = f_{xx} h^2 + 2f_{xy} hk + f_{yy} k^2$$

Per ipotesi il gradiente è nullo  $\Delta f(x_0, y_0) = 0$  cioè  $\nabla f(x_0, y_0) \equiv (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \equiv (0, 0)$  ovvero le derivate parziali prime sono nulle  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$  - Ciò comporta l'annullarsi del differenziale primo

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k = 0 * h + 0 * k = 0$$

Per cui nella formula di Taylor si ha:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad \text{Forme quadratiche}$$

Il segno di  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  è lo stesso di  $\frac{1}{2!} d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ , cioè è lo stesso differenziale secondo. Per ipotesi  $\det H_p(x_0, y_0) > 0$ , ( $f(x, y) \in C_A^2 \Rightarrow$  vale il teorema di Schwarz)

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

Ciò implica per definizione che la forma quadratica associata ad  $H_p(x_0, y_0)$  è positiva tutto ciò implica  $d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) > 0$

Per cui  $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$

$$\text{cioè } f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad \text{definizione di Minimo relativo (2.3)}$$

quindi  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo relativo

Analogamente, se  $f(x_0, y_0) < 0$  si dimostra che  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo relativo (2.3)

### 3.3.1 Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo

Sia  $f(x, y)$  definita in  $A$ ,  $f(x, y) \in C_A^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$

Se  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

$$\det H_F(x_0, y_0) \begin{cases} > 0 \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ Minimo relativo} \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ Massimo relativo} \end{cases} \\ < 0 \text{ Punto di sella (non sono presenti Max e min)} \\ = 0 \text{ Non si vsa se sono presenti Max o min} \end{cases}$$

**Esempio 7.** *Massimi e minimi*

1.  $z = x^2 + y^2$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ in } (0, 0) \nabla f = 0 \text{ può MAX o MIN}$$

$$\det H_f = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

2. *Semisuperfici sferica*  $z = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{-x}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \end{cases} \text{ dominio } D \ x^2 + y^2 < \Gamma^2$$

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} (0, 0) \leftarrow D \text{ può esserci un Max e un Min}$$

Verifico e trovo che  $\det H > 0$   $f_{xx} < 0$  : in  $(0, 0)$  è presente il Max.

3. *Cono*  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

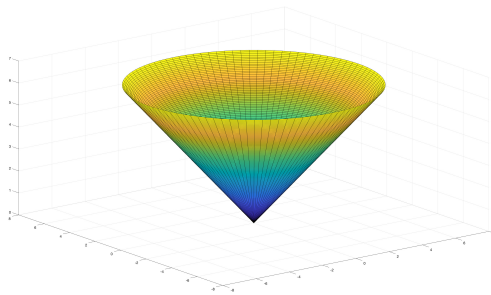


Figura 3.1: Rappresentazione grafica della conica

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Nota 1.** sarebbe  $(0,0)$  ma il dominio delle derivate  $x^2 + y^2 > 0$  cioè  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$  in  $(0, 0)$  non è derivabile.

Sappiamo<sup>1</sup> che in  $(0, 0)$  c'è un *minimo assoluto*

<sup>1</sup>si vede geometricamente



$$4. z = x^4 + y^4$$

$$\begin{cases} z_x = 4x^3 = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{in } (0,0) \text{ può esserci Max/Min relativo}$$

$$\det H = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} f_{xx}(0,0) &= 12x^2|_{0,0} = 0 \\ f_{yy}(0,0) &= 12y^2|_{0,0} = 0 \end{aligned}$$

$\det H = 0 \rightarrow$  non so se in  $(0,0)$  c'è un massimo o un minimo relativo.

Per definire se esiste un massimo o un minimo relativo uso:

$$\begin{aligned} \min f(x_0, y_0) &\leq f(x, y) & 0 \leq x^4 + y^4 & \quad x^4 + y^4 \geq 0 & \quad \underline{SI} \quad \forall (x, y) \text{ risulta da } x^4 + y^4 \geq 0(0,0) \min \\ \max f(x_0, y_0) &\geq f(x, y) & 0 \geq x^4 + y^4 & \quad x^4 + y^4 \leq 0 & \quad \underline{NO} \end{aligned}$$

### 3.3.2 Ricerca del massimo e del minimo assoluti

Condizioni sufficienti per l'esistenza del Massimo e del minimo assoluto

#### Teorema di Weierstrass

**Teorema 6.** Sia  $f(x,y)$  definita in  $D$ ,  $i$  continua in  $D$  chiuso e limitato, allora il minimo e massimo assoluto in  $D$ .

**Ipotesi:**

$$f \in C_D^0$$

**Tesi:**  $\exists \min$  con  $m = f(x_1, y_1), M = f(x_2, y_2)$  tale che  $m \leq f(x, y) \leq M$

$D$  chiuso e limitato

**Ricerca dei punti di Massimo e minimo assoluti:**

- nei punti di massimo o minimo relativo;
- nei punti di non derivabilità;
- nei punti di frontiera.

Vanno ricercati quindi nei seguenti modi:

1.  $\nabla f = 0$  dove il gradiente si annulla;
2.  $\exists \nabla f$  dove il gradiente non esiste;
3. sulla  $FD$  sulla frontiera.

#### Studio sulla frontiera

Sia  $\xi$  una superficie definita in un insieme  $D$  e sia  $FD$  la sua frontiera

La frontiera  $FD$  è una curva<sup>2</sup> e suoi punti limitano l'iperbole  $\xi$ .

Possiamo definire la frontiera in forma parametrica

$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

---

<sup>2</sup>o insieme di curve

Calcolo la funzione  $f(x, y)$  sui punti della frontiera

$$f(x, y) \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t)) \text{ funzione di 1 variabile} \quad (3.4)$$

studio del massimo e minimo per  $F(t) = 0 \begin{cases} F'' > 0 \text{ min} \\ F'' < 0 \text{ max} \end{cases}$

Calcolo i valori della funzione nei punti di Massimo/minimo e li confronto con i valori Massimo/minimo relativi nel dominio e i valori nei punti di non derivabilità. La frontiera può anche essere in forma cartesiana

$$y = y(x) \quad a \leq x \leq b \quad (3.5)$$

Calcolo la funzione nei punti della frontiera e procedo come visto prima  $f(x, y) \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t))$

**Esempio 8.** Determinare il massimo e il minimo assoluto di  $f(x, y) = 1 + 2x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$  in  $D : \{x^2 + y^2 \leq \Delta\}$

$$1. \nabla f = 0$$

$$2. \nabla f$$

$$3. FD$$

$$1. \nabla f(x, y) = 0 \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \begin{cases} 4x + \frac{x}{|x|} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\nabla f = 0$  in  $(0, 0)$  che non è nel C.E. delle derivate parziali per cui  $\nabla f \neq 0 \forall (x, y) \in A$  A dominio  $f_x$  e  $f_y$

$$2. \nabla f \text{ le derivate parziali perime sono definite } \forall (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 0 \text{ cioè in } R^2 - \{0, 0\}$$

$$(0, 0) \text{ pnto di non derivabilità } f(0, 0) = 1$$

$$3. FD$$

$$D : \{x^2 + y^2 \leq 4\} \quad FD : x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Calcolo  $f(x, y)$  sui punti di frontiera

$$f(x, y) = F(t) = 1 + 2(2 \cos t)^2 + \sqrt{(2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} = 1 + 8 \cos^2 t + 2 = 3 + 8 \cos^2 t$$

$$\text{Calcolo } F(t) \text{ agli estremi } t \in [0; 2\pi] \quad F(0) = 3 + 8 = 11 \quad F(2\pi) = 3 + 8 = 11$$

Studio del massimo e del minimo di  $F(t)$

$$F'(t) = 0 \quad 16 \cos t (\sin t) = -16 \sin t \cos t = 0 \quad t = 0 \quad t = \pi \quad t = \frac{\pi}{2} t = \frac{3}{2}\pi$$

$$F''(t) = 16(\cos t \cos t - \sin t \sin t) = 16(\sin^2 t - \cos^2 t)$$

$$\text{Ottenuti mettendo a } F(t) \text{ e valori } \begin{cases} F''(\pi) = 16(-1) = -16 < 0 \text{ max su } FD & F(\pi) = 3 + 8 = 11 \\ \text{dove ci dovrebbero essere un} & \\ \text{massimo e un minimo} & \begin{cases} F''(\frac{\pi}{2}) = 16(-1) = -16 > 0 \text{ min su } FD & F(\frac{\pi}{2}) = 3 \\ F''(\frac{3\pi}{2}) = 16(-1) = -16 < 0 \text{ min su } FD & F(\frac{3\pi}{2}) = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Ho ottenuto i seguenti valori

1.  $(x, y) \equiv (0, 0)$  il min è 1 e viene assunto in  $(0, 0)$
11.  $t = 0, \pi, 2\pi$  il max è 11 e viene assunti in  $\begin{cases} x = 2 \cos 0 \\ y = 2 \sin 0 \end{cases}$
3.  $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$   $\begin{cases} x = 2 \cos \pi \\ y = 2 \sin \pi \end{cases} \quad (-2, 0) \quad \begin{cases} x = 2 \cos 2\pi \\ y = 2 \sin 2\pi \end{cases} \quad (2, 0)$

### 3.3.3 Metodo dei moltiplicatori di di Lagrange

Nel caso in cui  $g(x, y) = 0$  non definisca una funzione implicata, per trovare i massimi e minimi vincolati si introduce una funzione ausiliaria, detta lagrangiana, così definita:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (3.6)$$

$F(x, y, \lambda)$  è combinazione lineare delle funzioni  $f(x, y)$  E  $g(x, y)$  – Il parametro  $\lambda$  prende il nome di **Moltiplicatore di Lagrange**. I punti di massimo vincolati sono quelli in cui il gradiente di  $F(x, y, z)$  si annulla ovvero...

$$\nabla F_{(x,y,z)} = 0 \begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) \\ F_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Si risolve questo sistema di tre equazioni in tre variabili e il valore massimo della funzione è calcolata nei punti soluzioni è il massimo calcolato e il valore minimo della funzione calcolata nei punti soluzione è il massimo vincolato.



## Capitolo 4

# Integrali Doppi e tripli

### 4.1 Domini normali (semplici)

**Definizione 21.** *I domini delle funzioni a più variabili possono presentare una forma di regolarità per cui è possibile delimitare la regione da intervalli e grafici di funzione. Si parla quindi di dominio semplice o normale rispetto alla variabile delimitabile da un intervallo. La normalità di un dominio è molto importante in molte definizioni di integrale multiplo e della sua risoluzione tramite le formule di riduzione. Inoltre la presenza di un dominio regolare permette ulteriori teoremi e formule d'integrazione, come le formule di Gauss-Green, il teorema della divergenza e il teorema del rotore.*

#### 4.1.1 Dominio normale rispetto all'asse $x$

Il dominio  $A$  si definisce **normale** rispetto all'asse  $x$  se è così definito:

$$A = \begin{cases} a \leq x \leq b & x \text{ varia in un intervallo} \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) & y \text{ varia tra due funzioni di } x \end{cases} \quad (4.1)$$

**Esempio 9.**

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$$

Il dominio  $B$  si definisce **normale** rispetto all'asse  $x$  se è così definito:

$$A = \begin{cases} c \leq y \leq d & y \text{ varia in un intervallo} \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) & x \text{ varia tra due funzioni di } y \end{cases} \quad (4.2)$$

**Esempio 10.**

$$D = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y < x < \sqrt{y} \end{cases}$$

#### 4.1.2 Domini Polarmente normale

Il dominio  $C$  si definisce polarmente normale se è costantemente definito:

$$C = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \rho(\theta) \leq \varphi_2(\theta) \end{cases} \quad (4.3)$$

**Esempio 11.**

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad (4.4)$$

l'angolo varia tra  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$ , il segmento  $\varphi$  dipende dall'angolo

$$\begin{aligned}\theta = 0 & \text{ è } \max \varphi = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \text{ è } \min \varphi = 0 \\ \varphi = 2 \cos \theta & \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2 \cos \theta \end{cases}\end{aligned}$$

corona circolare  $\varphi = r$   $\varphi = R$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ r \leq \varphi \leq R \end{cases}$$

### 4.1.3 Definizione di integrale doppio

**Definizione 22.** Sia  $f(x,y)$  una funzione limitata nel rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , coordinata in  $[a, b]$  e di seconda coordinata in  $[c, d]$ . Deconpongo regolarmente gli intervalli  $[a, b]$  e  $[c, d]$ ,

decomponendo  $[a, b]$  si ha  $D_1 = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$

decomponendo  $[c, d]$  si ha  $D_2 = \{y_0 = c, y_1, y_2, \dots, y_n = d\}$

Il prodotto cartesiano  $D = D_1 * D_2$  è una semidivisione del rettangolo  $R$

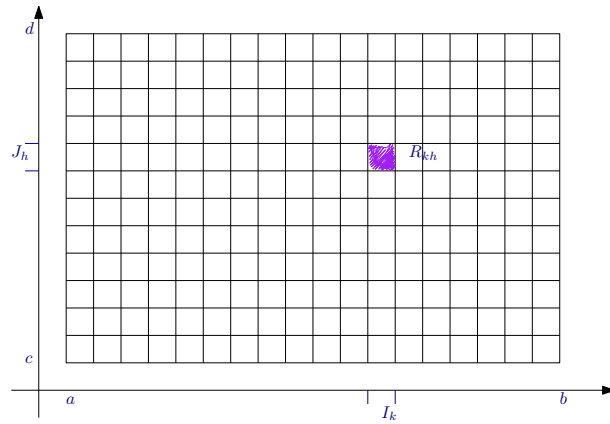


Figura 4.1: Decomposizione del rettangolo  $R$

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \text{ in } D_1 (k = 1, \dots, n)$$

$$J_h = [y_{h-1}, y_h] \text{ in } D_2 (h = 1, \dots, n)$$

Il prodotto cartesiano  $I_k * J_h$  individua il generico subrettangolo  $R_{kh}$  della semidivisione.

Prendo un generico punto del subrettangolo  $R_{kh}(x_k, y_h)$  e faccio il seguente prodotto:

$$f(x_k, y_h) * \text{mis} R_{kh} \text{ con } \text{mis} R_{kh} = \text{mis} I_k * \text{mis} J_h \text{ area del subrettangolo}$$

Con l'integrale doppio considero il volume del parallelepipedo.

Geometricamente considera il rettangolo  $R_{kh}$  e la parte di superficie  $f(x, y)$  che vi si presenta il prodotto  $f(x_i, y_n) * \text{mis} R_{kh}$  è il volume del parallelepipedo di base  $R_{kh}$  e altezza  $f(x_k, y_h)$ .

## 4.2 Somme di Riemann

Definisco le somme di Riemann  $\sum_{k=h=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_h) * R_{kh}$  ciò rappresenta la somma di tutti i volumi dei parallelepipedi di base  $R_{kh}$  e altezza  $f(x_k, y_h)$  che si possono ottenere nel rettangolo  $R$ . Infittisco le decomposizioni  $D_1$  e  $D_2$  ( $m \rightarrow \infty; n \rightarrow \infty$ ), ottenendo così un numero sempre maggiore di subrettangoli di ampiezza via via minore.

$$misR_{kn} = misI_k * misI_n = \frac{b-a}{m} * \frac{d-c}{n} \rightarrow 0 \text{ per } m, n \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

Con l'infittirsi della decomposizione, aumenta la precisione con cui ciascun parallelepipedo approssima il volume sotto al grafico delle funzione in ogni  $R_{kh}$ .

Al limite, le somme di Riemann daranno il volume sotto al grafico della funzione in un certo rettangolo (in generale dominio).

Se esiste finito  $\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \sum_{h=k=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$  tale limite è definito integrale doppio di  $f(x, y)$  nel dominio  $R = [a, b] * [c, d]$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \sum_{h=k=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_n) * misR_{kh} \quad (4.6)$$

### Somme superiori e somme inferiori

**Definizione 23.** È possibile definire l'integrale doppio anche con le somme superiori e le somme inferiori

$$\text{Somme inferiori } s(f, R) = \sum \inf_{R_{kh}} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$$

prendo il minimo valore che la funzione assume nel subrettangolo  $R_{kh}$  e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per difetto individuato dalla funzione.

$$\text{Somme superiori } s(f, R) = \sum \sup_{R_{kh}} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$$

prendo il massimo valore che la funzione assume nel subrettangolo  $R_{kh}$  e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per eccesso quello individuato dalla funzione all'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono, le somme superiori decrescono. Le somme superiori e le somme inferiori convergono ad uno stesso valore, detto integrale doppio<sup>1</sup>

$$\lim s = \lim S = \iint_R f(x, y) dx dy$$

---

<sup>1</sup>è il valore sotto al grafico della funzione

### 4.2.1 Proprietà dell'integrale doppio

$$\text{Linearità} \quad \begin{cases} 1) \iint_D [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx * dy + \iint_D f_2(x, y) dx * dy \\ 2) \iint_D \alpha f_1(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f_1(x, y) dx * dy \end{cases}$$

$$\text{Assitività} \quad 3) \text{ Sia } D = D_1 \cup D_2 \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx * dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx * dy$$

$$\text{Monotonia} \quad \begin{cases} 4) \text{ Sia } f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \\ \quad \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx * dy \\ 5) \text{ Sia } D_1 \subset D \\ \quad \iint_{D_1} f(x, y) dx dy < \iint_D f(x, y) dx * dy \\ 6) |\iint_D f(x, y) dx dy| \leq \iint_D |f(x, y)| dx * dy \end{cases}$$

### 4.2.2 Formula di riduzione

- Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  un dominio normale rispetto all'asse x

$$A = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$$

$$\text{Allora } \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right)$$

calcolo prima  $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$  che è una funzione della sola  $x$   $\rho(x)$

$$\text{per calcolo } \int_a^b \rho(x) dx$$

- Dominio polarmente normale  
Effettua un cambio di coordinate, passando dalle coordinate cartesiane a quelle polari

$$\text{L'integrale doppio è } \iint_D f(x, y) dx dy$$

Passando alle coordinate polari

$$\begin{aligned} \text{del dominio } D(x, y) \text{ passerò al dominio } D'(\varphi, \theta) & \begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \end{cases} \\ \text{della funzione } f(x, y) \text{ passerò al dominio } f(\varphi, \theta) & \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

e da differenziali  $dx dy$  passerò ai differenziali  $d\varphi d\theta$ .

Si dimostra che nel passaggio ad altre coordinate il differenziale è  $|j| d\varphi d\theta$ , dove  $|j|$  è il determinante della **matrice Jacobiana** che contiene le derivate parziali prime

$$|J| = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\theta \\ y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} \rightarrow |J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\varphi \sin \theta \\ \sin \theta & \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = \varphi \cos^2 \theta + \varphi \sin^2 \theta = \varphi \quad (4.7)$$

Per cui passando da  $dx dy$  alle coordinate polari avrò  $\varphi d\varphi d\theta$  così l'integrale doppio diventa:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi, \theta) \varphi d\varphi d\theta$$



## Esempi di domini polarmente normali

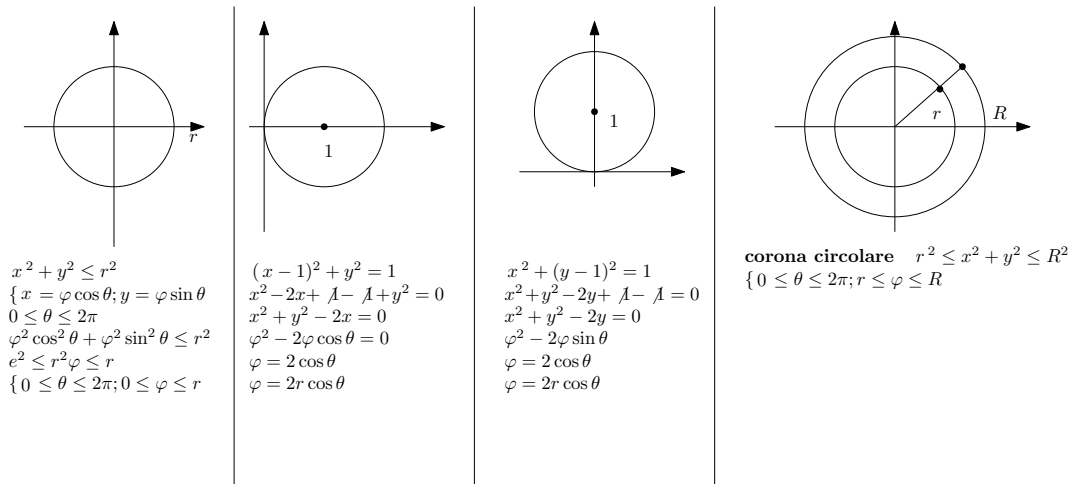


Figura 4.2: Esempi di domini polarmente normali

## 4.2.3 Baricentro di un dominio normale

**Definizione 24.** Sia  $D$  un dominio normale del piano. Si definisce **baricentro del dominio**  $D$  il punto di coordinate  $(x_0, y_0)$  tale che:

$$x_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D x dx dy \quad y_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D y dx dy$$

$\text{mis}D$ : misura (area) del dominio  $D$ .

**Esempio 12.** calcolare il baricentro del dominio  $D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$\text{mis}D = A_{\text{rettangolo}} = 2 * 1 = 2$$

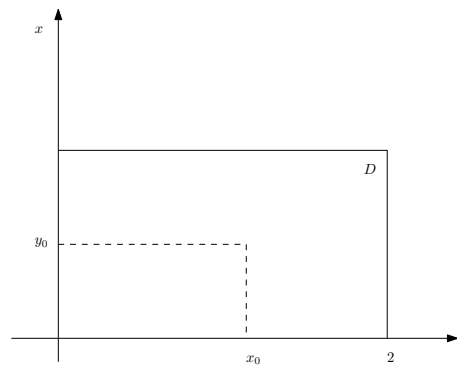
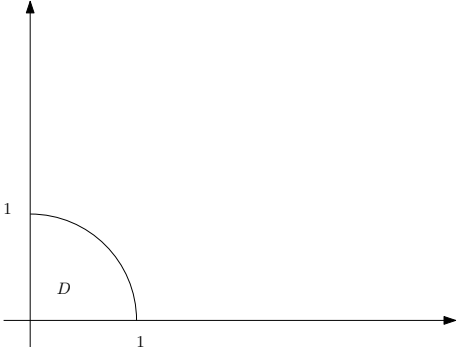


Figura 4.3: Baricentro di un dominio normale

$$x_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D x dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 x dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx |xy|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D y dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4} |x|_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Calcolare il baricentro del dominio  $D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$



$$D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 1 \end{cases} \quad \text{mis} D = \frac{\pi}{4}$$

$$x_0 = \frac{1}{\text{mis} D} \iint_D x dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \varphi^2 \cos \theta d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\varphi^3}{3} \cos \theta \right|_0^1$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos \theta d\theta = \frac{4}{3\pi} |\sin \theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}$$

$$y_0 = \frac{1}{\text{mis} D} \iint_D y dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \varphi^2 \sin \theta d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\varphi^3}{3} \sin \theta \right|_0^1$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi} * \frac{1}{3} |-\cos \theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}$$

#### 4.2.4 Domini normali in $R^3$

**Definizione 25.** Il dominio  $V$  definisce normale rispetto al piano  $xy$  se si può così descrivere:

$$\begin{cases} (x, y) \in D & \text{normale} & (x, y) \text{ appartengono ad un dominio normale di } R^2 \\ \alpha(x, y) & \leq z \leq \beta(x, y) & z \text{ è compresa tra funzioni di } x \text{ e } y \end{cases}$$

$\forall (x, y) \in D$  incontro prima la superficie minorante e per la superficie maggiorante.

### 4.3 Integrali tripli

**Definizione 26.** Sia  $f(x, y, z)$  una funzione limitata in un insieme  $V$ , considero il parallelepipedo

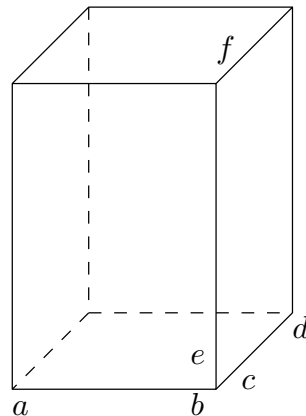
$$V = [a, b] * [c, d] * [e, f]$$

Decompongo regolarmente  $[a, b], [c, d], [e, f]$

rispettivamente in  $n, m, k$

intervalli  $I_n = [x_0 = a, \dots, x_n = b],$

$l_m = [y_0 = c, \dots, y_m = d], l_k = [z_0 = e, \dots, z_k = f]$



Il prodotto cartesiano  $I_n * I_m * I_k$  individua il generico subparallelepipedo  $V_{n,m,k}$ .

Definisco le somme di Riemann:  $\sum f(x, y, z) * misV_{n,m,k}^2$

All'infittirsi delle decomposizioni le somme di Riemann convergono ad uno stesso valore, tale valore è definito **integrale triplo** di  $f(x, y, z)$  in  $V$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum f(x, y, z) misV_{n,m,k} = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Oppure, definisco le somme inferiori e le somme superiori

$$\begin{aligned} \text{Somme inferiori} & \quad \sum misV_{n,m,k} * \min_{V_{n,m,k}} f(x, y, z) \\ \text{Somme superiori} & \quad \sum misV_{n,m,k} * \max_{V_{n,m,k}} f(x, y, z) \end{aligned}$$

All'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono mentre le somme superiori decrescono. Se convergono ad uno stesso valore, tale valore è definito **integrale triplo** di  $f(x, y, z)$  in  $V$

$$\lim s(f, V) = \lim S(f, V) = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

### 4.3.1 Formule di riduzione per gli integrali tripli

Sia  $g(x, y)$  integrabile in un dominio normale  $V$

$$V = \begin{cases} \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio  $D$  è normale rispetto all'asse  $x$

$$V = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio  $D$  è normale rispetto all'asse  $y$

$$V = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio  $D$  è polarmente normale

$$V = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta) \\ \alpha(\varphi, \theta) \leq z \leq \beta(\varphi, \theta) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \varphi d\varphi \int_{\alpha(\varphi, \theta)}^{\beta(\varphi, \theta)} f(\varphi, \theta, z) dz$$

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) & \rightarrow \alpha(\varphi, \theta) \\ \beta(x, y) & \rightarrow \beta(\varphi, \theta) \\ f(x, y, z) & \rightarrow f(\varphi, \theta, z) \\ dx dy dz & \rightarrow \rho d\theta d\varphi dz \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> $misV_{n,m,k}$ : misura il volume del parallelepipedo

### 4.3.2 Significato geometrico degli integrali

$$\begin{array}{ll} \int & \text{area} \\ \iint & \text{volume} \\ \iiint & \text{nessun significato geometrico} \end{array}$$

### 4.3.3 Coordinate polari e coordinate cilindriche

$$(x, y) \rightarrow (\varphi, \theta)$$

$$\begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \end{cases} \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \det J = \varphi$$

**coordinate cilindriche**  $(x, y, z) \rightarrow (\varphi, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \det J = \varphi$$

**coordinate sferiche**

$$\begin{cases} x = \varphi \sin \theta \cos \alpha \\ y = \varphi \sin \theta \sin \alpha \\ z = \varphi \cos \theta \end{cases}$$

### 4.3.4 Interazione per fette

Considera un volume  $V$  e lo interseco con un piano  $z = k$ . Così ottengo una sezione  $S_z$

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Al variare di  $z$  tra due valori, cioè facendo variare  $S_z$  in funzione di  $z$  descrivo il volume  $V$ .

**Esempio 13.**

$$\int_0^1 S_z dz$$

$S_z$  è un cerchio di raggio  $R(z)$  che dipende da  $z$

$$\begin{aligned} z &= 1 - x^2 - y^2 & x^2 + y^2 &= 1 - z \\ R^2 &= 1 - z & R(z) &= \sqrt{1 - z} \end{aligned}$$

$$S_z = \pi R^2 = \pi(1 - z)$$

$$\iint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \pi(1 - z) dz$$

### 4.3.5 Integrali curvilinei

**Curve in  $R^2$  e in  $R^3$**

**Definizione 27.** Si definisce *curva* una coppia del tipo  $(\gamma, \Gamma)$  con

$$\vec{F}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots) \quad t \in [a, b]$$

si tratta di un'applicazione  $R \rightarrow R^n$  ad un valore di  $t$  associa  $n$  valori  
Le curve possono essere:

- In forma cartesiana 
$$\begin{aligned} z &= f(x, y) & (R^3) \\ y &= f(x) & (R^2) \end{aligned} \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$
- In forma polare  $\varphi = \varphi(\theta) \quad \varphi = 2r \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- In forma parametrica 
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Nello spazio una curva è l'intersezione tra due superfici.

Ogni curva ha anche un **sostegno**, che è il suo grafico nel piano o nello spazio.

Una curva si definisce **chiusa** se

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \text{ se } \vec{F}(a) = \vec{F}(b) \quad \begin{aligned} x(a) &= x(b) \\ y(a) &= y(b) \end{aligned}$$

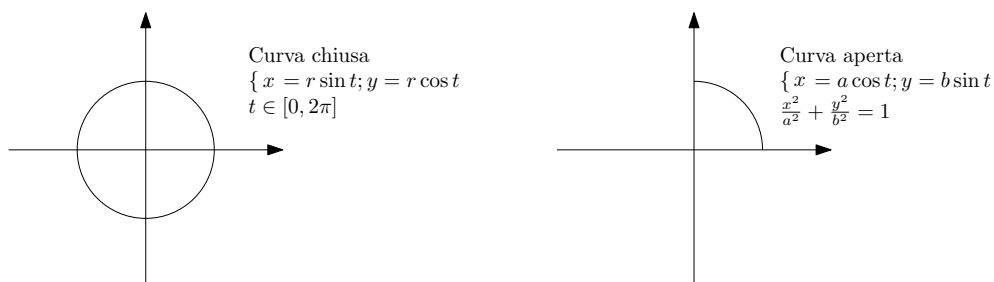
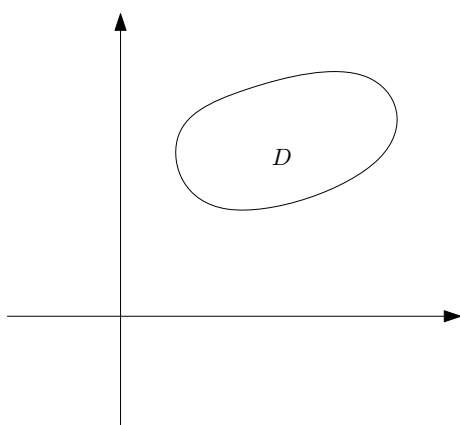


Figura 4.4: Differenza tra curva chiusa e aperta

Una curva chiusa la **frontiera** di un dominio



$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.8)$$

Una curva si definisce **semplice** se presi due qualunque  $t_1 \neq t_2$  risulta  $\vec{F}(t_1) \neq \vec{F}(t_2)$  cioè

$$\begin{cases} x(t_1) \neq x(t_2) \\ y(t_1) \neq y(t_2) \\ z(t_1) \neq z(t_2) \end{cases}$$

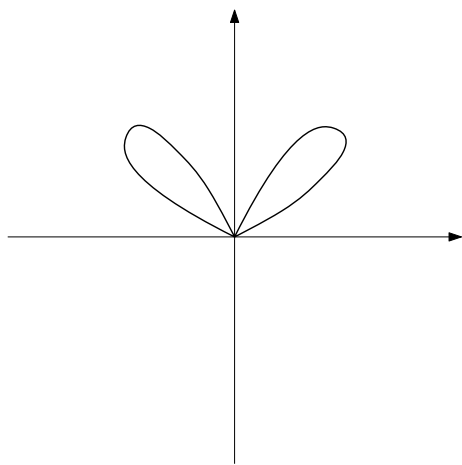
Curva semplice  $\gamma \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \quad y = \sqrt{x} \quad \gamma \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad y = x^2$  Curva non semplice<sup>3</sup>

Una curva è **regolare** se è di classe  $C^1$  e le sue derivate prime non sono mai nulle contemporaneamente

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \vec{F}(t) \in C' \quad r'(t) = (x', y', z'(t) \dots) \neq (0, 0, 0 \dots) \\ t \in [a, b]$$

Curva regolare

$$\gamma z(t) = \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad z'(t) = \begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{non sono mai nulle} \\ \text{contemporaneamente} \end{matrix}$$



$$r(t) = \begin{cases} x = t(1-t^2)^2 \\ y = t^2(1-t^2) \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

Una curva è **regolare a tratti** se è l'unione di curve regolari

$$\gamma r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad \text{in } x = 0 \text{ c'è una cuspide perciò non è regolare } y = \sqrt[3]{x^2}$$

$r(t)$  può però essere vista come l'unione di due curve regolari

$$\gamma' r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 0]$$

$$\gamma'' r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

sostegno nel II quadrante

$$\gamma = \gamma' \vee \gamma''$$

### 4.3.6 Lunghezza di una curva

**Definizione 28.** Sia la curva  $\gamma$  di equazione  $\vec{F}(t)$ , essa si definisce **rettificabile** se esiste finito l'estremo superiore della poligonale  $L(p)$  al variare della decomposizione.

$$\sup_D L(\Delta) \tag{4.9}$$

---

<sup>3</sup> $t_1 \neq t_2$  ho due stessi valori della curva

Suddivido la curva in tanti segmenti che formano la poligonale  $L(D)$ . All'infittirsi la poligonale approssimo sempre segue la lunghezza della curva.

Se la curva  $\vec{F}(t)$  è di classe  $c^1$  allora essa è **rettificabile**

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.10)$$

e la sua lunghezza vale  $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 + \dots} dt$

### 4.3.7 Lunghezza di una curva in forma cartesiana

Se la curva  $\gamma$  nella forma  $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$  ha come sostegno il grafico di  $y = f(x)$

La lunghezza della curva è  $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

### 4.3.8 Lunghezza di una curva polare

Se la curva è nella forma

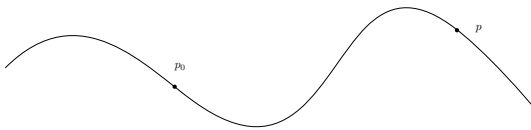
$$\begin{cases} e = e(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

La sua lunghezza vale:

$$L_\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\varphi^2(\theta) + [\varphi'(\theta)]^2} d\theta$$

## 4.4 Ascissa Curvilinea

È possibile effettuare cambiamenti di parametri per descrivere una curva. Fra tutte le rappresentazioni parametriche di una curva regolare ha particolare **importanza** geometrica quella che **l'ascissa curvilinea**. Prendiamo una curva  $\gamma$  di  $R^2$  e un suo punto  $P_0$



Ad ogni punto  $P$  della curva associamo un valore  $S(P)$  che è uguale alla lunghezza dell'arco di curva congiungente  $P_0$  e  $P$

Così definendo una corrispondenza biunivoca tra i punti della curva e i punti di un certo intervallo  $[a, b]$ , cosicché se  $S(p_1) = a$   $S(p_2) = b$  la lunghezza dell'arco congiungente  $P_1$  con  $P_2$  è  $|b - a|$

Sia  $(\gamma, \vec{r}(t))$  una curva regolare; definiamo l'ascissa curvilinea<sup>4</sup> come:

$$S(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau$$

Per il teorema del calcolo integrale

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} & S(t) &\text{ è integrabile} \\ S'(t) &= \frac{ds}{dt} & S &: [a, b] \rightarrow [0, L] \end{aligned}$$

---

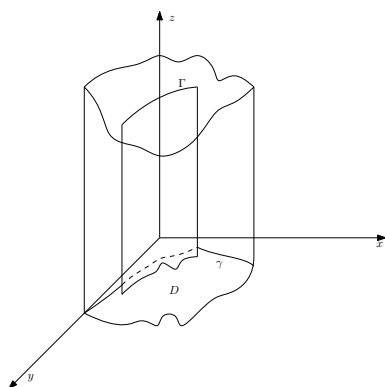
<sup>4</sup>o lunghezza d'arco

La lunghezza della curva così vale:

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \int dS \quad (4.11)$$

## 4.5 Integrale corvilineo

Prendiamo una funzione  $f(x,y)$  definita in un insieme  $D$  e una curva  $\gamma$  interno a  $D$ .



Calcoliamo la funzione nella curva  $\gamma$  e determiniamo una curva  $\Gamma$  dello spazio.

L'area delimitata dal cilindro di basi  $\gamma$  e  $\Gamma$  se  $f(x,y) > 0$  è il valore dell'integrale curvilineo di  $f(x,y)$  esteso a  $\gamma$ .

### 4.5.1 Definizione di integrale curvilineo

Data una curva regolare  $(\gamma, \vec{r}(t))$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.12)$$

e una funzione  $f(x,y,z) \in \mathbb{C}$  – definita in  $D_1$  con la curva inclusa  $D$ , si definisce **integrale curvilineo** di  $f(x,y,z)$  esteso alla curva

$$\int_{\gamma} f(x,y,z) ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] * \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

### 4.5.2 Baricentro di una curva

Si definisce **baricentro di una curva** quel punto di coordinate  $(x_0, y_0)$  per cui

$$x_0 = \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} x ds \quad y_0 = \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} y ds \quad \text{con } L_{\gamma} \text{ lunghezza della curva } \gamma$$

**Esempio 14.**

$$\gamma = \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} L_{\gamma} &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3 \cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t} * \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \sin t dt \\ &= \left| \frac{3 \sin^2 t}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} x ds = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = -\frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -4 \sin t * \cos^4 t dt \\ y_0 &= \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} y ds = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^2 t + \cos t dt = \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^4 t \cos t dt = \frac{1}{10} \left| \sin^5 t \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$



### 4.5.3 Superfici e integrali di superficie

#### Superfici

**Definizione 29.** Sia definisce **superficie** in  $R^3$  una coppia  $(\Sigma, r)$  dove  $\Sigma$  è il sostegno (grafico)  $\in R^3$  ed  $r$  è la parametrizzazione  $d\Sigma, r \in \mathbb{C}_A^0$ .

$A$  insieme aperto connesso di  $R^2$  per cui  $r(A) = \Sigma$ ,  $r$  calcolata nei punti di  $A$  e da la superficie.  $r$  è un'applicazione vettoriale  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = x(u, v)\vec{L} + y(u, v)\vec{J} + z(u, v)\vec{K}$  ( $u, v \in A$   $R^2 \rightarrow R^3$  ad ogni punto di  $A$  del piano, associo un punto di  $\Sigma$  nello spazio).

Una superficie si dice **semplice**  $\vec{r}(u, v)$  è 1-1, cioè se  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  sono 1-1 (cioè biunivoche, invertite) – Una superficie si dice **regolare a tratti** se è firmata dall'unione di un numero finito di superfici di classe  $C^1$  regolari.

Una superficie è di classe  $C_A^k$  se  $\vec{r}(u, v) \in C_A^k$  cioè  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \in C_A^k$

Una superficie si dice **regolare** se  $\vec{r}(u, v) \in C^1$  e la matrice delle derivate parziali prime ha rango 2

Una superficie si dice **chiusa** se è limitata e il suo bordo è l'insieme vuoto (non ha bordo).

**Teorema 7.** Le superfici cartesiane di classe  $C^1$  sono regolari:

**Esempio 15.**

Superficie sferica:  $z = \pm\sqrt{R^2 + x^2 - y^2}$   $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  definita su  $D : \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Superficie corta:  $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$

### 4.5.4 Piano tangente e versore normale

Prendiamo un dominio  $A \subset R^2$  e un suo punto  $P(u_0, v_0)$ . Prendo due linee in  $A$  passanti per  $P$ , sulla superficie  $\Sigma$  ho due curve.

Sia  $\vec{r}(u, v)$  l'equazione della superficie  $\Sigma$  e siano  $\vec{r}(u_0, v)$  e  $\vec{r}(u, v_0)$  le curve che si chiamano linee coordinate superficie<sup>5</sup>, i vettori tangenti alle linee coordinate sono

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$$

$$\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

Se il prodotto vettoriale non è nullo, i vettori sono linearmente ma pendenti, quindi il rango di quel-

la matrice è 2. Allora possiamo dire una superficie  $\sigma$  è regolare se e solo se  $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \neq 0$ , cioè esiste il **piano tangente**.  $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$  è un vettore ortogonale al piano contenente  $\vec{r}_u$  e  $\vec{r}_v$  che è il **piano tangente** alla superficie.

La sua equazione è:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \text{ in } P(x_0, y_0, z_0)$$

Per avere il **versore normale** si divide il prodotto vettoriale per la sua lunghezza.

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}$$

In forma cartesiana

$$\vec{r}(u, v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad r_u = r_x = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ f_x \end{cases} \quad r_v = r_y = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ f_y \end{cases}$$

<sup>5</sup>(u,v) si chiamano coordinate locali

Il prodotto vettoriale

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k} = (-f_x; -f_y; 1)$$

il versore normale

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y}{\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\|}$$

#### 4.5.5 Orientazione di una superficie

Sia  $\Sigma$  una superficie regolare ( $\vec{r} \in e', P(M) = 2$ ), si sceglia il versore normale in modo che vanando con continuità lungo una curva chiusa  $\gamma$  inclusa in  $\Sigma_1$  possa ritornare alla posizione iniziale in conseguenza della scelta del versore normale in conseguenza della scelta del versore normale. Una superficie cartesiana è orientabile.

Orientamenti possibili sono: versore normale  $\vec{n}$  rivolto verso l'alto o il verso basso.

#### Area di una superficie

Sia  $\Sigma$  una superficie regolare. Si definisce **area della superficie**  $\Sigma$  il numero reale non negativo definito da

$$S = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_A \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv = \iint_A \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

$A, B, C$  componenti del prodotto vettoriale,  $d\sigma$  elemento infinitesimo di area.

Se la superficie  $\Sigma$  è in forma cartesiana  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ )

L'area di  $\Sigma$  è

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

Se la superficie  $\Sigma$  è data in forma implicita  $F(x, y) = 0$

Con  $F_z = 0$  per il teorema del Din è localmente esplicitabile in  $z = f(x, y)$

L'area di  $\sigma$  è:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2} dx dy$$

#### 4.5.6 Integrale Superficiale

Sia  $h(x, y, z)$  una funzione definita e continua in un insieme  $V \subset R^3$  e sia  $\Sigma$  una superficie inclusa in  $V$ , che si proietta in un dominio piano  $D$ . Si definisce **integrale superficiale** della funzione  $h(x, y, z)$  esteso alla superficie  $\Sigma$ :

$$\iint_{\Sigma} h(x, y, z) d\sigma = \iint_A h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

Se la superficie  $\Sigma$  è in forma cartesiana

$$\iint_{\Sigma} h(x, y, z) d\sigma = \iint_A h(x, y, z(u, v)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

## 4.6 Trasformazione integrali

### 4.6.1 Formule di Green-Gauss

#### Prima formula - teorema

**Definizione 30.** Sia  $f(x, y)$  continua in un insieme  $D$ , sia  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (derivata parziale rispetto a  $x$ ) continua in  $D$ , sia  $D$  normale rispetto all'asse  $y$  e sia la sua frontiera  $F_0$  una curva regolare a tratti. Allora vale la seguente relazione

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{FD} f(x, y) dy$$

$FD$ : frontiera percorsa nel verso positivo

**Ipotesi:**

$$f(x, y) \in C_D^0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \in C_D^0$$

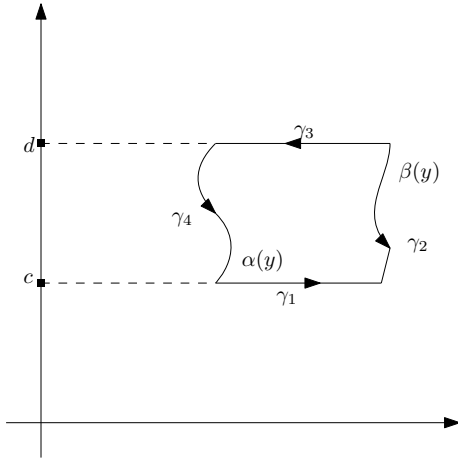
$$D \text{ normale rispetto all'asse } y \quad D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \end{cases}$$

$F_D$  regolare a tratti

**Tesi:**

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f(x, y) dy$$

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x, y) \in C_D^0$  e  $\frac{\partial f}{\partial x} \in C_D^0$ , esse sono integrabili in  $D$ . Il dominio  $D_1$  che è normale rispetto all'asse  $y$ , può essere descritto come



$$D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \end{cases} \quad \text{e la sua frontiera è} \quad FD = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

Sviluppiamo I e II membro della tesi

**I membro**

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_c^d [f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)] dy$$

$$N.B. \quad \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = [f(x, y)]_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} = f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)$$

**II membro**  $F_D : \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$$\int_{+FD} f(x, y) dy = \int_{\gamma_1} f(x, y) dy + \int_{\gamma_2} f(x, y) dy + \int_{\gamma_3} f(x, y) dy + \int_{\gamma_4} f(x, y) dy \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 : y = c \quad dy = 0 \\ \gamma_2 = \begin{cases} x = \beta(y) \\ y \in [c, d] \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \gamma_3 : y = d \quad dy = 0 \\ \gamma_4 = \begin{cases} x = \alpha(y) \\ y \in [d, c] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{+FD} f(x, y) dy &= \int_{\gamma_2} f(x, y) dy + \int_{\gamma_4} f(x, y) dy \\ \int_{\gamma_2} f(x, y) dy &= \int_c f[\beta, y] dy \quad \int_{\gamma_4} f(x, y) dy = \int_d^c f[\alpha(y), y] dy = - \int_c^d f[\alpha(y), y] dy \\ \int_{+FD} f(x, y) dy &= \int_c^d f[\alpha(y), y] dy - \int_c^d f[\alpha(y), y] dy = \int_c^d f[\alpha(y), y] - f[\alpha(y), y] dy \end{aligned}$$

Si è così dimostrata la tesi

Per cui con questa **formula di Green-Gauss** un integrale doppio – sotto opportune ipotesi – si può trasformare in un integrale curvilineo esteso alla frontiera del dominio di integrazione

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f(x, y) dy$$

□

**Esempio 16.** Calcolare  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2}}$  con  $D = \begin{cases} xy \leq \frac{1}{4} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$f(x, y) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad \rightarrow \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{+FD} \arcsin x dy \quad F_D = F_D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

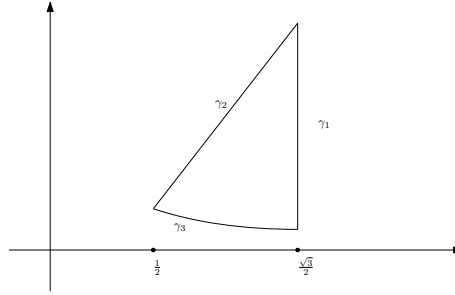


Figura 4.5: Esempio della prima formula di Green-Gauss

$$\begin{aligned} \gamma_1 : x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \in \left[ \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \right] \quad \int_{\gamma_1} \arcsin x dy &= 0 \quad \text{poiché } dy = 0 (y = \cos t) \\ \gamma_2 : y = x \quad x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \quad \text{da percorrere "al contrario"} \quad dy &= d(x) = 1 dx \\ - \int_{\gamma_2} \arcsin x dy &= - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx = - \left[ x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = - \left[ x \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2} dx \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= - \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \right] = - \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ \gamma_3 : y = \frac{1}{4x} \quad x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \quad dy &= -\frac{1}{4x} \quad \int_{\gamma_3} \arcsin x dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \left( \frac{1}{4x} dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} \arcsin x dy &= - \int_{\frac{\sqrt{3}}{6}}^{\frac{1}{2}} = y \arcsin \frac{1}{4y} dy = y \arcsin \frac{1}{4y} - \int y * \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{16}y^2}} (-\frac{1}{4y^2}) dy \\ &= y \arcsin \left( \frac{1}{4y} \right) - \int -\frac{1}{4y} \frac{1}{\sqrt{\frac{16y^2-1}{16y^2}}} dy\end{aligned}$$

Si risolve con la sostituzione  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{x^2-a^2} = a \tan t \\ \sqrt{y^2 - \frac{1}{16}} &= \frac{1}{4} \tan t\end{aligned}$$

## Seconda formula di Green-Gauss

**Teorema 8.** Sia  $f(x,y)$  continua in un insieme  $D$ , sia  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continua in  $D$ , sia  $D$  un dominio normale rispetto all'asse  $x$  e sia la sua frontiera  $F_D$  una curva regolare a tratti. Allora vale la seguente relazione

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+F_D} f(x,y) dx \quad (4.14)$$

**Ipotesi**

$F_D$  regolare a tratti

$$\begin{aligned}f(x,y) &\in C_D^0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\in C_D^0\end{aligned}$$

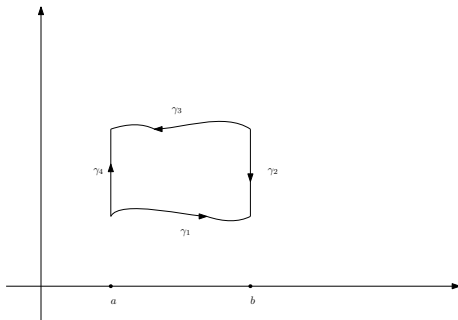
**Tesi**

$D$  normale rispetto all'asse  $x$

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+F_D} f(x,y) dx$$

$$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Purché  $f(x,y) \in C_D^0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} \in C_D^0$ , esse sono integrali in  $D$ . Il dominio  $D_1$  che è normale rispetto all'asse  $x$  può essere descritto come



$$D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases} \quad \text{e la sua frontiera è} \quad F_D = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \wedge \gamma_4$$

Sviluppiamo I e II membro della tesi  $\int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = [f(x,y)]_{y=g(x)}^{y=h(x)} = f[x, h(x)] - f[x, g(x)]$

**I membro**

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f[x, h(x)] - f[x, g(x)] dx$$

**II membro**

$$\int_D f(x,y) dx = \int_{\gamma_1} f(x,y) dx + \int_{\gamma_2} f(x,y) dx + \int_{\gamma_3} f(x,y) dx + \int_{\gamma_4} f(x,y) dx$$

$$\gamma_2 : \quad x = b \quad y \in [g(b), h(b)] dx = 0$$

$$\gamma_4 : \quad x = a \quad y \in [g(a), h(a)] dx = 0$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 : \quad y &= g(x) \quad x \in [a, b] & \int_{\gamma_1} f(x, y) dx &= \int_a^b f[x, g(x)] dx \\ \gamma_3 : \quad y &= h(x) \quad x \in [b, a] & \int_{\gamma_3} f(x, y) dx &= - \int_a^b f[x, h(x)] dx\end{aligned}$$

per cui

$$\int_{+FD} f(x, y) dx = \int_a^b f[x, g(x)] dx - \int_a^b f[x, h(x)] dx = \int_a^b f[x, g(x)] - f[x, h(x)] dx$$

combiando di segno si dimostra la tesi

con questa formula di **Green-Gaun** un integrale doppio – sotto opportune ipotesi – si può trasformare in un integrale curvilineo hteso alla frontiera del dominio di integrazione.

$$\iint \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{FD} f(x, y) dx$$

□

#### 4.6.2 Teorema della divergenza

**Definizione 31.** Sia  $\vec{F} \equiv (f(x, y), g(x, y)) \in C'_D$  funzione vettoriale, si definisce **divergenza** di  $\vec{F}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad \begin{array}{l} \text{derivata rispetto } \partial x \text{ della prima componente più derivata} \\ \text{rispetto a } \partial y \text{ della seconda componente} \end{array}$$

#### Teorema della divergenza

**Teorema 9.** Sia  $\vec{F} \equiv (f(x, y), g(x, y)) \in C'_0$  e sia  $D$  un dominio normale<sup>6</sup>, con la sua frontiera  $F_D$  regolare a tratti, vale la seguente relazione:

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \int_{+FD} \vec{F} * \vec{n} ds \quad \text{con } \vec{n} \text{ versore normale a } F_D$$

**Ipotesi:**

**Tesi:**

$$\vec{F} \equiv (f(x, y), g(x, y)) \in C'_0$$

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \int_{+FD} \vec{F} * \vec{n} ds$$

$D$  normale rispetto ad entrambi gli assi  $F_D$  regolare a tratti.

*Dimostrazione.*

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dy \quad \text{per definizione divergenza}$$

Dalle ipotesi valgono le due formule di **Green-Gauss**

$$\iint \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f(x, y) dy \quad : \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+FD} g(x, y) dx$$

Devo così dimostrare che  $f(x, y) dx - g(x, y) dy = \vec{F} * \vec{n} ds$

Ricavo il versore normale  $\vec{n}$ :  $F_D$  regolare a tratti ed è quindi esprimibile come unione di curve regolari di espressione parametrica

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad \exists x'(t).y'(t) \text{ perché la curva è regolare.}$$

---

<sup>6</sup>rispetto ad entrambi gli assi

Il vettore tangente  $\vec{t} = (x'(t), y'(t))$ , scambiando le componenti e cambiandone una di segno si ottiene il vettore normale  $(y'(t), -x'(t))$ ; dividendo per la norma  $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$  si ha il versore normale  $\vec{n}$

$$\vec{n} \equiv \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} : \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right)$$

Svolgo ora il prodotto scalare  $\vec{F} * \vec{n} ds$ , ricordando che  $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$

$$\vec{F} \equiv (f(x, y), g(x, y))$$

$$\vec{F} * \vec{n} ds = \left( \frac{f(x, y)y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} - \frac{g(x, y)x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= dx \\ y'(t) &= dy \end{aligned} \quad \vec{F} * \vec{n} ds = f(x, y)dy - g(x, y)dx$$

Quindi

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \int_{+FD} f(x, y)dy - g(x, y)dx \quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Il teorema della divergenza (4.6.2) vale anche in  $R^3$ , in forma vettoriale

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_{+\Sigma} \vec{F} * \vec{n} ds \quad \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

□

**Esempio 17.** calcolare utilizzando il teorema della divergenza  $\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy$  con  $\vec{F} \equiv (-2x^3y; \frac{1}{2}xy)$ ,  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = -\frac{2x^3y}{\partial x} + \frac{-\frac{1}{2}xy}{\partial y} = -6x^2y - \frac{1}{2}x$$

$$\iint_D (-6x^2y - \frac{1}{2}x) dx dy = \int_{+FD} f(x, y)dy + g(x, y)dx = \int_{+FD} -2x^2y dy + \frac{1}{2}xy dx$$

$$FD : x^2 + y^2 = 1 \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{aligned} dx &= -\sin t dt \\ dy &= \cos t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} -2 \cos^3 t \sin t \cos t dt + \frac{1}{2} \cos t \sin t (-\sin t) dt &= + \int_0^{2\pi} \left( -2 \cos^4 t \sin t + \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t \right) \\ &= \left| -\frac{2}{5} \cos^5 t - \frac{7}{6} \sin^3 t \right|_0^{2\pi} = -\frac{2}{5} - 0 + \frac{2}{5} - 0 = 0 \end{aligned}$$

### Applicazioni della formula di Green-Gauss

Rimandi teorici a partire da (4.6.1) – Calcolo dell'area di dominio piani

Ricordando le formule di **Green-Gauss**  $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f(x, y) dy$  :  $\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+FD} f(x, y) dx$  nella formula dell'area  $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$  o  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$  per cui  $f(x, y) = x$  o  $f(x, y) = y$

Si ha così  $A = \iint_D dx dy = \int_{+FD} x dy = - \int_{+FD} y dx \rightarrow \int_{+FD} x dy - \int_{+FD} y dx = 2 \iint_D dx dy$  si ha:

$$A = \frac{1}{2} \int_{+FD} x dy - y dx$$

**Esempio 18.** Calcolare l'area del dominio delimitato dall'ellisse con semiassi  $a$  e  $b$

$$F_D : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} dx = -a \sin t \\ dy = b \cos t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint dx dy &= \frac{1}{2} \int_{+FD} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t (b \cos t) - b \sin t (-a \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t + ab \sin^2 t = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = ab\pi \end{aligned}$$

## 4.7 Forma differenziali Lineari

Si definisce differenziale lineare  $\omega$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\Rightarrow \omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy \\ \mathbb{R}^3 &\Rightarrow \omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz \end{aligned}$$

### 4.7.1 Integrazione delle forme differenziali

**Definizione 32.** Sia  $\omega$  una forma differenziale continua in un insieme  $D^7$  e sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti contenuta in  $D$ , di equazioni parametriche  $\gamma \equiv (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$ . Si definisce **integrale della forma differenziale esteso alla curva  $\gamma$**

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega ds &= \int_{\gamma} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) \\ &\quad + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt \end{aligned}$$

L'integrale rettilineo che va tra gli estremi su cui è preso  $t$

La funzione  $F \equiv [F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)]$  viene calcolata sui punti della curva  $\gamma^8$

$$I \text{ differenziali sono } \begin{cases} dx = x'(t) \\ dy = y'(t) \\ dz = z'(t) \end{cases}$$

Le **proprietà delle forme differenziali lineari** derivano dalle proprietà degli integrali curvilinei

- Linearità:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_1 + \omega_2 ds &= \int_{\gamma} \omega_1 ds + \int_{\gamma} \omega_2 ds \\ \alpha \int_{\gamma} \omega ds &= \int_{\gamma} \alpha \omega ds \end{aligned}$$

- Additività:

$$\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \quad \int_{\gamma} \omega ds = \int_{\gamma_1} \omega ds + \int_{\gamma_2} \omega ds + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega ds$$

<sup>7</sup>ivi integrabile

<sup>8</sup>funzione composta



### 4.7.2 Forme differenziali esatte

**Definizione 33.** Sia  $\omega$  una forma differenziabile, essa si dice **esatta**, se esiste una funzione  $f(x, y, z)$ <sup>9</sup> tale che il suo differenziale primo sia  $\omega$

$$\omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz \text{ è esatto se } \exists f(x, y, z) : df = \omega$$

poiché  $df = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + f_z(z - z_0)$

$$\text{se } \omega \text{ è esatta } \begin{cases} F_1(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ F_2(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y} \\ F_3(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

### 4.7.3 Forma differenziali chiusa

In  $R^2$ : consideriamo una forma differenziale  $\omega$  in  $R^2$  esatta

$$\omega = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$$

Per definizione di forma differenziale esatta

$$\exists f(x, y) : df = \omega \quad \text{cioè } F_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad F_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Con  $f(x, y) \in C^2$  derivo  $F_1$  rispetto a  $y$  e  $F_2$  rispetto  $\partial x$  – Così vale il teorema di Schwarz (2.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx}$$

$$f_{xy} = f_{yx} \rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Se è vera tale relazione, la forma differenziale si dice **chiusa**.

In  $R^3$ : Definiamo primo il rotore di una funzione vettoriale di classe  $C'$

Sia  $F \equiv (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ . Il rotore di  $F$  è il determinante:

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \vec{k}$$

Consideriamo ora una forma differenziale lineare  $\omega$  in  $R^3$

$$\omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

$$\text{con } F \equiv (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

$\omega$  è chiusa se  $\text{rot} F = 0$

$$\text{rot} \vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \vec{k}$$

$\text{rot} \vec{F}$  è un vettore, è nullo quando tutte le sue componenti sono nulle.

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

<sup>9</sup>detta **funzione potenziale**

#### 4.7.4 Condizioni necessarie affinché una forma differenziale sia esatta

Se  $\omega$  è esatta allora è chiusa

**Condizione necessaria:** Affinché  $\omega$  sia esatta è che deve essere chiusa

cioè se  $\omega$  non è chiusa può essere esatta, invece, se  $\omega$  non è chiusa sicuramente non è esatta

$$R^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad R^2 \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

$$\text{Dimostrazione. Per definizione } \operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} l & j & k \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Se  $\omega$  è esatta

esiste la funzione potenziale  $f(x, y, z)$  tale che  $df = \omega$ , per cui  $F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ ;  $F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ ;  $F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$  da cui

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} l & j & k \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\vec{l} - (f_{zx} - f_{xz})\vec{j} + (f_{yx} - f_{xy})\vec{k}$$

Se  $f(x, y, z) \in C^2$  vale il teorema di Schwarz (2.2.1), così tutte le componenti di  $\operatorname{rot} F$  sono nulle  $\operatorname{rot} F = 0$  □

#### Proprietà delle forme differenziale lineari esatte

**Teorema 1** - L'integrale curvilineo di una forma differenziale lineare esatta non dipende dalla curva (percorso) ma solo dagli estremi

Sia  $\omega$  esatta in un insieme  $V$  e sia  $\gamma \subset V$  un arco di curva regolare di estremi  $P_0$  e  $P_1$  allora

$$\int_{\gamma} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = f(P_1) - f(P_0)$$

**Ipotesi:**

$\omega$  esatta in  $V$

**Tesi:**

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = f(P_1) - f(P_0)$$

$$\gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad \text{regolare} \\ \gamma \subset V$$

*Dimostrazione.* Per definizione di integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t)) + F_2(x(t), y(t), z(t)) + F_3(x(t), y(t), z(t))]dt$$

per ipotesi  $\omega$  è esatta, per cui esiste una funzione potenziale tale che  $df = \omega$  da cui si ha:

$$F_1(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))$$

$$F_2(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))$$

$$F_3(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))$$

L'integrale diventa  $\int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t)) + F_2(x(t), y(t), z(t)) + F_3(x(t), y(t), z(t))]dt$

Per il teorema della derivata della funzione composta, l'espressione da integrare è  $\frac{\partial f}{\partial t}(x(t), y(t), z(t))$  per cui  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x(t), y(t), z(t)) dt = \left| f(x(t), y(t), z(t)) \right|_a^b = f(P_1) - f(P_0)$  con  $\begin{matrix} P_0(x(a), y(a), z(a)) \\ P_1(x(b), y(b), z(b)) \end{matrix}$   $\square$

**Teorema 2** - Sia  $\omega$  una forma differenziale lineare continua in un insieme  $A$  aperto connesso.

Le seguenti affermazioni sono vere:

- a)  $\omega$  è esatta in  $A$
- b) per  $\forall \gamma \subset A$  chiusa  $\int_{\gamma} \omega = 0$
- c) se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

## 4.8 Funzione potenziale

**Definizione 34.** Se  $\omega$  è esatta, esiste una funzione  $f(x, y)$ , detta **funzione potenziale**, tale che il suo differenziale eguaglia  $\omega$

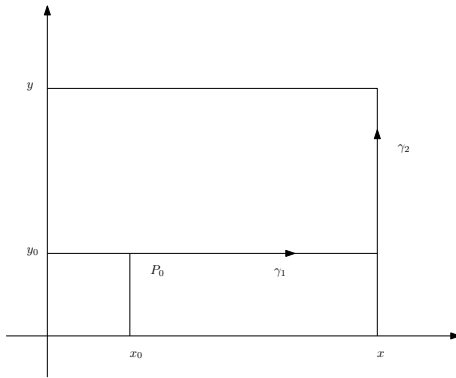
$$df = \omega$$

$f(x, y)$  è definita a meno di una costante, infatti  $df(x, y) = d(f(x, y) + k)$  con  $\omega$  esatta, la funzione potenziale si trova con

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$$

Poiché  $\omega$  è esatta, quest'integrale curvilineo non dipende dal percorso, ma solamente dagli estremi.

Per cui considero un percorso semplice su cui integrare i segmenti paralleli agli assi



$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 & \gamma_1 dy &= 0 \\ & & \gamma_2 dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\gamma_1} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \int_{\gamma_2} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \\ &= \int_{x_0}^x F_1(t, y_0) dt + F_2(t, y_0) dy + \int_{y_0}^y F_1(x_0, m) dx + F_2(x_0, m) dm = \int_{x_0}^x F_1(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y F_2(x_0, m) dm \end{aligned}$$

### 4.8.1 Condizioni sufficiente affinché una forma differenziale lineare sia Esatta

**Definizione 35.** Sia  $\omega$  una differenziale chiusa in un insieme  $A$  semplicemente connesso. Allora  $\omega$  è esatta in  $A$ .

**Ipotesi:**

$\omega$  è chiusa in  $A$

$A$  semplicemente connesso

**Tesi:**

$\omega$  è esatta in  $A$

Prendo una qualunque curva  $\gamma$  chiusa in  $A$ , poiché  $A$  è semplicemente connesso, ogni  $\gamma$  è frontiera di un sottoinsieme  $A'$  di  $A$ .

Per cui  $\int_{\gamma} \omega = \int_{+FA'} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$  – Per il teorema della divergenza (4.6.1)

$$\int_{+FA'} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \iint_{A'} -\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} dx dy + \iint_A \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} dx dy$$

Per ipotesi  $\omega$  è chiusa cioè  $\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$

Per cui si ha:

$$\iint_{A'} -\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} dx dy + \iint_A \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} dx dy = 0$$

ovvero  $\int_{\gamma} \omega = 0$  l'integrale per stato calcolato scegliendo una qualunque  $\gamma$  chiusa in  $A$ . Tale il risultato è una caratteristica delle forme differenziali lineari esatte, per cui si può concludere che  $\omega$  è esatta in  $A$ .

### 4.8.2 Condizione necessaria e sufficiente

Il teorema precedente è condizione necessaria e sufficiente affinché una forma differenziale lineare  $\omega$  si esatta.

$$\omega \text{ è esatta in } A \Leftrightarrow \omega \text{ è chiusa in } A$$

$$\omega \text{ esatta in } A \Rightarrow \omega \text{ chiusa in } A$$

$$\omega \text{ chiusa in } A \Rightarrow \omega \text{ esatta in } A$$

### 4.8.3 Teorema di Stokes (o del rotore)

Con il teorema di Stokes – sotto opportune condizione – è possibile trasformare un integrale superficiale in un integrale curvilineo, esteso al bordo della superficie.

Sia  $F(x, y, z) \equiv (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$  un campo<sup>10</sup> vettoriale definito in un insieme  $V \subset R^3$ , sia  $F(x, y, z) \in C'_V$

Sia  $\Sigma$  una porzione di superficie  $\subset V$ ,  $\Sigma$  regolare, orientabile, dotata di bordo orientabile che sia una curva regolare o regolare a tratti.

$$\Sigma : \vec{r} = r(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad \vec{r}(u, v) \in C_D^2$$

Allora vale la seguente uguaglianza

$$\iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{F} * \vec{n}_e d\sigma = \int_{+B\Sigma} \vec{F} * \vec{t} ds$$

---

<sup>10</sup>o funzione

dove  $rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{l} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \vec{n}_e$  versore normale alla superficie  $\Sigma$   $n_e \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|} dr$  elemento differenziale d'area

$$M = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} dr = \sqrt{j_1^2 + j_2^2 + j_3^2}$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \quad J_2 = \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} \quad J_3 = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

$B\Sigma$  bprdp della superficie  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$\vec{t}$  versore tangente al bordo -  $ds$  coerente differenziale di lunghezza  $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$

**In forma cartesiana** La superficie  $\omega$  è  $\{z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ ,  $f(x, y) \in C^2$  - la direzione normale

$$n_e \equiv \left( \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}; \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right)$$

$$ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{l} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = A\vec{l} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

$$\iint_{\Sigma} rot F_0 n_e dv = \int_{+B\Sigma} F_0 t ds$$

$$\iint_A \frac{-Afx - Bfy + X}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} * \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \int_{+B\Sigma} \underbrace{F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz}_{\omega}$$

Il prodotto scalare  $\vec{F} * n_e$  è detto **flusso**

$\iint_{\Sigma} rot F_0 n_e dv$  Integrale del flusso del rotore attraverso la superficie  $\Sigma$

**Corollario 1**

**Definizione 36.** Sia  $n(x, y, z) \in C_V^2$ ,  $V \subset R^3$ , sotto le ipotesi di validità di Stokes (4.8.3)

$$\int_{+B\Sigma} \nabla n * t ds = 0$$

Infatti per il teorema di Stokes  $\int_{+B\Sigma} \nabla h * t ds = \iint_{\Sigma} rot \nabla h * n_e dv$

$$\nabla h = (h_x, h_y, h_z)$$

$$rot \nabla h = \begin{vmatrix} \vec{l} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = (h_{yx} - h_{xy})\vec{l} - (h_{zx} - h_{xz})\vec{j} + (h_{yz} - h_{zy})\vec{k}$$

$$rot \nabla h = 0$$

$$Da cui \int_{+B\Sigma} \nabla h * t ds = 0$$

**Corollario 2**

**Definizione 37.** *Sotto le validità del teorema di Stokes (4.8.3), date due superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  di equal bordo. Si ha*

$$\iint_{\Sigma_1} \text{rot} F_0 n_e dr_1 = \iint_{\Sigma_2} F_0 n_e dr_2$$

*Infatti per il teorema di Stokes*

**I membro**

$$\int_{+B\Sigma_1} F_0 t ds$$

**II membro**

$$\int_{+B\Sigma_2} F_0 t ds$$

*poiché  $B\Sigma_1 = B\Sigma_2$  per ipotesi, i due integrali sono uguali. Quindi il flusso del rotore non dipende dalla superficie ma dal bordo.*

# Capitolo 5

## Successioni e serie

### 5.1 Successioni di costanti

**Definizione 38.** Si definisce successione  $a_n$  una funzione in  $N$  (numeri naturali) e codominio in  $R$ .  
È possibile rappresentare una successione sul piano cartesiano, con l'asse delle ascisse  $N$  e quello delle ordinate  $R$ .

### 5.2 Limite di successioni

#### 5.2.1 Limite finito di una successione

**Definizione 39.** Si definisce limite finito della successione  $a_n$  ( $a_n$  converge) il numero reale  $\gamma$  tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \gamma \quad \forall \xi > 0, \exists P_\xi \in N : \forall n > P_\xi \quad |a_n - \gamma| < \xi$$

Una successione che per  $n \rightarrow \infty$  ha limite finito si dice **convergente**

#### Limite infinito di una successione

$b_n \rightarrow +\infty$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \quad \forall M > 0, \exists P_M : \forall n > P_M \quad b_n > M$$

Una successione che per  $n \rightarrow \infty$  ha infinito si dice **divergente** – Se una successione nè converge, nè diverge, diciamo che è **irregolare** o **indeterminata**, cioè non esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ .

### 5.3 Successioni Limitate, illimitate, crescenti e decrescenti

Limitata superiormente

$a_n$ è <b>limitata superiormente</b> se	$\exists k : \forall n \in N$	$a_n \leq k$
$a_n$ è <b>limitata inferiormente</b> se	$\exists h : \forall n \in N$	$a_n \geq h$
$a_n$ è <b>limitata</b> se	è limitata inferiormente e superiormente	
$a_n$ è <b>monotona crescente</b> se	$\forall n :$	$a_n < a_{n+1}$
$a_n$ è <b>monotona decrescente</b> se	$\forall n :$	$a_n > a_{n+1}$

### 5.3.1 Operazioni algebriche e teoremi sui limiti di successioni

**Definizione 40.** Poiché le successioni sono una particolare classe di funzioni si estendono le regole dell'algebra dei limiti e i teoremi studiati per le funzioni. nel calcolo di un limite, si può sostituire la successione con la funzione ad essa associata e calcolare il limite. Alle successioni **NON** si può applicare il teorema di De l'Hospital perché le successioni non hanno derivate. Nel calcolo di un limite si può sostituire la successione con la funzione ad essa associata e si può applicare il teorema di del'hospital alla funzione (non alla successione)

### 5.3.2 Serie numeriche

Una **aria** è una somma di infiniti numeri reali. Sia  $(a_n)$  una successione  $a_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Definiamo

$$\text{serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Sia  $(S_n)$  la successione delle somme parziali così definite

$$S_n = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, S_{n+1}, \dots)$$

$$\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \end{array} \quad \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} S \in \mathbb{R} \text{ (finito)} & \text{convergente} \\ \pm\infty & \text{divergente} \\ \# & \text{indeterminata} \end{cases}$$

### 5.3.3 Condizione necessaria affinché una serie converga

Sia  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie convergente, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**Condizione necessaria e sufficiente affinché esista il limite – criterio di Cauchy**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \Leftrightarrow \forall \xi > 0 \exists v_\xi : \forall p, q > v_\xi, p, q \leftarrow N$$

$$|a_p - a_q| < \xi$$

Esiste il limite della successione  $a_n$  se e solo se per ogni  $\xi > 0$  esiste un indice<sup>1</sup> tale che, presi due qualunque numeri naturali  $p$  e  $q$  maggiori di quell'indice la distanza tra gli elementi  $a_p$  e  $a_q$

## 5.4 Particolari tipi di serie

**Serie telescopica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1} \text{ Differenza tra due termini successivi}$$

**Serie armonica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ al variare di } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ la serie ha caratteri diversi } \begin{cases} \text{Converge} & \alpha > 1 \\ \text{Diverge} & \alpha \leq 1 \\ / & \alpha = 1 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>che dipende da  $\xi$



**Serie geometriche**

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  il rapporto tra un termine e il precedente è costante.

**5.4.1 Assoluta e semplice convergenza**

Serie a segno positivo

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  si definisce a termini di segno positivo se  $\forall n > \bar{n} \quad a_n > 0$   
finiti Termini negativi, infiniti termini positivi

Serie a segno negativo

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  si definisce a termini di segno positivo se  $\forall n > \bar{n} \quad b_n < 0$   
finiti Termini positivi, infiniti termini negativi

Sia a segno qualunque

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  si definisce a termini di segno qualunque se ha un termine infinito di termini a segno positivo e un numero infinito di termini a segno negativo

**Assoluta convergenza**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  si dice **assolutamente convergente** se converge  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$   
associata convergenza  $\Rightarrow$  semplice convergenza

Se una serie converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

**5.5 Criteri per determinare il carattere di una serie****5.5.1 Criterio del confronto**

Siano  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  due serie a termini positivi ( $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ )

Sia  $a_n \leq b_n$

- se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, allora  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge
- se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge, allora  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge

**5.5.2 Criterio del rapporto**

Sia  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie a termini positivi non nulli ( $a_n > 0$ )

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} l < 1 & \text{converge} \\ l > 1 & \text{diverge} \end{cases}$$

**Esempio 19.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad a_n = \frac{2^n}{n!} \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{2^n} = \frac{2 * 2^n}{(n+1) n!} * \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 \quad \text{converge}$$

### 5.5.3 Criterio della radice

Sia  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie a termine positivi ( $a_n \geq 0$ )

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l < 1 & \text{converge} \\ l > 1 & \text{diverge} \\ l = 1 & \text{caso dubbio} \end{cases}$$

**Esempio 20.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{converge}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$$

### 5.5.4 Criterio del confronto asintotico

Siano  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  due serie se  $a_n \sim b_n$  (asintotico) cioè  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0 \quad l \in \mathbb{R}$  -  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ha lo stesso carattere di  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

### 5.5.5 Criterio di Leibniz – Serie a termini alterni

Data la serie a termini alterni  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , con  $a_n \geq 0$ , Se  $a_n$  è decrescente ( $a_n > a_{n+1}$ )

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Allora la serie converge

**Esempio 21.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

1.  $a_n$  è decrescente?

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ?

$$\text{La serie converge } \begin{cases} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \Rightarrow n+1 \geq n & \text{vero} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 & \text{vero} \end{cases}$$

### 5.5.6 Successioni di funzioni

$f_n(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)$  **successione di funzioni**

**Esempio 22.**

$$f_n(x) = x^n(x, x^2 \dots x^n)$$

Si definisce **limite**  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  quella  $f(x)$  tale che  $\forall \xi > 0 \exists \nu_{\xi, x} \in N : \forall n > \nu_{(\xi, x)} :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \xi$$

$(f_n(x)), x \in I$  si definisce **semplicemente convergente** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{cioè } \forall \xi > 0 \exists \nu_{(\xi, x)} n \in N$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \xi$$

$(f_n(x)), x \in I$  si definisce **assolutamente convergente** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = f(x)$$

$(f_n(x)), x \in T$  si definisce **uniformemente convergente** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ uniformemente}$$

$$\text{cioè } \forall \xi > 0 \exists \nu(\xi) \in N : \forall n > \nu(\xi) |f_n(x) - f(x)| < \xi$$

Ovvero per  $n \rightarrow \infty$  c'è un indice  $\nu$  che dipende solo da  $\xi$  e poiché nella semplice convergenza l'indice  $\nu$  dipende sia da  $\xi$  sia da  $x$ , se  $f_n(x)$  è uniformemente convergente, preso un  $\forall x \in I$ , quindi sarà semplicemente convergente.

$(f_n(x)), x \in I$  si definisce **totalmente convergente** se

$$\sup_I |f_n(x)| \text{ converge}$$

cioè se gli estremi superiori della successione nell'intervallo  $I$  convergono.

### 5.5.7 Criterio di Weiestrass – condizione sufficiente per l'uniforme convergenza

**Definizione 41.** Data la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in I$ , se  $|f_n(x)|$  è più piccola di una successione numerica  $a_n$  a termini non negativi, e se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente, allora  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  è uniformemente convergente.

## 5.6 Teoremi di invertibilità del passaggio al limite

### 5.6.1 Teorema – “Invertibilità del limite”

**Teorema 10.** Sia  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  uniformemente convergente in  $I$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ ), sia  $x_0 \in I$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$$

### 5.6.2 Teorema – “Invertibilità della derivata”

**Teorema 11.** Sia  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  semplicemente convergente in  $I$ ; siano i termini di  $f_n(x)$  derivabili in  $I$ , sia  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  la serie delle derivate prime; se tale serie converge uniformemente in  $I$  allora

$$\frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d}{dx} f_n(x) \right]$$

### 5.6.3 Teorema – “Invertibilità dell’integrale”

**Teorema 12.** Sia  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  uniformemente convergente in  $I = [a, b]$  a  $S(x)$ , siano  $f_n(x)$  e  $S(x)$  integrabili in  $[a, b]$  allora:

$$\int_a^b \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

## 5.7 Serie di potenze

Una serie di potenze è del tipo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$

**Teorema 13.** Convergenza

Dota  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  convergente in  $x_0$ , allora essa converge in  $[-|x_0|, |x_0|]$  ( $\forall x : |x| < |x_0|$ )

**Teorema 14.** Divergenza

Dota  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  convergente in  $x_0$ , allora essa diverge  $\forall x : |x| > |x_0|$

### 5.7.1 Raggio di convergenza

Si definisce raggio di convergenza  $r$  qual numero reale

$$r = \sup \left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ convergente} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{estremo superiore dell'insieme delle } x \text{ per le} \\ \text{quali la serie converge} \end{array}$$

L'intervallo  $] -r; r[$  è detto **intervallo di convergenza**

### 5.7.2 Criteri per determinare l'intervallo di convergenza

#### Rapporto (D'Alembert)

Data  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$  allora il raggio di convergenza è

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{se } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & \text{se } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{se } \rho = +\infty \end{cases}$$

#### Radice

Data  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$  allora il raggio di convergenza è

$$r = \begin{cases} +\infty & \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$$

### 5.7.3 Serie derivata di una serie di potenze – uniforme convergenza delle serie di potenze

Data  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  la serie delle derivate di qualunque ordine ha lo stesso raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Una qualunque serie di potenze converge uniformemente in qualunque subintervallo dell'intervallo di convergenza.

### 5.7.4 Serie di Taylor e Mac Laurin

- Sia  $f(x)$  definita in un intervallo  $I$  e sia  $x_0 \in I$ .
- Sia  $f(x)$  sviluppabile in polinomi di Taylor.
- Si dimostra che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

posto  $x = 0$  si hanno le serie di Mac Laurin.

### 5.7.5 Serie di Fourier

Consideriamo una funzione periodica  $f(x), T = 2\pi$   $f(x) = f(x+T)$

**Definizione 42.** Si definisce serie di Fourier associata alla funzione  $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{cases}$$

**Teorema 15.** *Sia  $f(x)$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e sia regolare a tratti, allora la serie di Fourier converge a  $f(x)$  nei punti di continuità e alla semisomma del limite destro e sinistro nei punti di discontinuità.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Nei punti di continuità  $f(x)$  è  
approssimabile con una serie di funzioni trigonometriche.

## Capitolo 6

# Equazioni differenziali ordinarie

**Definizione 43.** Si definisce equazione differenziale ordinaria un'equazione di tipo  $g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$  con  $y$  funzione di  $x$ . **Ordinaria:** Le derivate che compaiono nell'equazione sono di  $y(x)$ . L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate di  $y(x)$  compaiono nell'equazione. Risolvere un'equazione differenziale significa trovare la funzione  $y = y(x)$  che sostituita nell'equazione, con le sue derivate, rende l'uguaglianza un'identità. L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale è una famiglia di funzioni ed è detto **integrale generale**, che dipende da un parametro reale ( $c$ ). Attribuito un valore alla costante si ha un **integrale particolare**. Non sempre ogni soluzione dell'equazione differenziale è anche un integrale particolare. Ci sono casi di equazioni differenziali che ammettono anche integrali singolari<sup>1</sup>

### 6.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

**Definizione 44.** Un'equazione differenziale del primo ordine è detta a variabili separabili se può essere scritta nella forma

$$y' = f(x) * g(y)$$

**Esempio 23.**

$$y = 4xy^2 \quad f(x) = 4x \quad g(y) = y^2$$

**Svolgimento 1.** Se  $\exists y_0 : g(y_0) = 0 \Rightarrow y = y_0$  è soluzione  
Se esiste una costante che annulla  $g(y)$ ,  $y = y_0$  è soluzione

**Infatti**

$$(y_0)' = f(x) * \underbrace{g(y)}_{0 \text{ per ipotesi}}$$

derivata di costante

$$0 = f(x) * 0 \quad 0 = 0$$

Se  $g(y) \neq 0$  divido entrambi i membri per  $g(y)$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Poiché la derivata di una funzione si può esprimere come rapporto di differenziali

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{g(y)} \frac{1}{dx} = f(x) \text{ da cui } \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

---

<sup>1</sup>integrali non ottenibili per nessun valore della costante  $c$

Integrando membro a membro

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad \text{se} \quad G(y) = \left( \frac{1}{g(y)} \right)' \quad \text{e} \quad F(x) = f'(x)$$

$G(y) = F(x) + c$   $c \in \mathbb{R}$  - Se  $G(y)$  è invertibile ( $\exists G^{-1}(y)$ ) posso ricavare  $y$

$$y = G^{-1}(F(x) + c)$$

### 6.1.1 Proprietà generali delle equazioni differenziali lineari

$$\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y}_{\text{coefficienti}} = \underbrace{g(x)}_{\text{termine noto}} \quad \leftarrow \quad \text{se } g(x) = 0 \text{ si ha un'equazione differenziale omogenea}$$

Possiamo scrivere le equazioni differenziali come

$$\underbrace{L(y)}_{\substack{\text{operatore} \\ \text{lineare}}} = b(x)$$

### 6.1.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Integrale generale equazione differenziale del I ordine omogenea

$$y' - a(x)y = 0$$

$$y_0(x) = ce^{-A(x)} \quad c \in \mathbb{R} \quad A(x) \text{ primitiva di } a(x)$$

*Dimostrazione.*

$$y' - a(x)y = 0 \quad \text{moltiplico tutto per } e^{A(x)}$$

$$\underbrace{e^{A(x)}y' + a(x)e^{A(x)}y}_{\text{Derivata prodotto}} = 0$$

□

$$\begin{aligned} (e^{A(x)}y)' &= 0 && \text{derivata prima nulla} \Rightarrow \text{la funzione da derivare è costante} \\ e^{A(x)}y &= c && q = ce^{-A(x)} \end{aligned}$$

- Integrale equazioni differenziali lineari I ordine complete

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= b(x) \\ y_0(x) + \bar{y}(x) & \quad y_0(x) && \text{Integrale generale equazione differenziale omogenea associata} \\ & \quad \bar{y}(x) && \text{Integrale equazione completa} \end{aligned}$$

$$\bar{y}(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}b(x)dx$$



*Dimostrazione.* L'integrale particolare di  $y' + a(x)y = b(x)$  è del tipo  $\bar{y} = c(x)e^{-A(x)}$

$$\bar{y}' = c'(x)e^{-A(x)} - c(x) * a(x)e^{-A(x)}$$

sostituisco  $\bar{y}$  e  $\bar{y}'$  in  $c'(x)e^{-A(x)} - c(x)a(x)e^{-A(x)} + c(x)a(x)e^{-A(x)} = b(x)$

$$\begin{aligned} c'(x)e^{-A(x)} &= b(x) & c'(x) &= e^{-A(x)}b(x) \\ c(x) &= \int e^{A(x)}b(x)dx & \bar{y}(x) &= c(x) * e^{-A(x)} = \int e^{A(x)}b(x)dx \end{aligned}$$

L'integrale generale di  $y' + a(x)y = b(x)$  è

$$y_0(x) + \bar{y}(x) = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int e^{A(x)}b(x)dx = e^{-A(x)} \left( \int e^{A(x)}b(x)dx + c \right)$$

**Esempio 24.**

$$\begin{aligned} y' &= y & y' - y &= 0 & a(x) &= -1 & A(x) &= -x \\ y^{(x)} &= ce^{-A(x)} = ce^x \end{aligned}$$

□

### 6.1.3 Equazioni differenziali di Bernoulli (non lineari, I ordine)

Sono equazioni nella forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0, 1$$

Se  $\alpha > 0$   $y = 0$  è integrale singolare

Per  $y \neq 0$  divido per  $y^\alpha$

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x) \tag{6.1}$$

Pongo  $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$  e risolvo l'equazione differenziale lineare in  $z(x)$  e poi passo a  $y(x)$

**Esempio 25.**

$$y' - 2y = e^{-x}y^2 \quad y = 0 \quad \text{integrale singolare}$$

per  $y \neq 0$

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{y} = -e^{-x} \quad z(x) = \frac{1}{y(x)} : z'(x) = -\frac{1}{y^2} * y'$$

per cui si ha:  $z' + 2z = +e^{-x}$

$$\begin{aligned} a(x) &= 2 & A(x) &= 2x \\ b(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

$$z(x) = e^{-A(x)} \left[ \int e^{A(x)}b(x)dx + c \right] = e^{-2x} \left[ \int e^{2x}e^{-x}dx + c \right] = e^{-2x}(e^x + c)$$

$$z(x) = \frac{1}{y(x)} \quad y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{e^{-2x}} = \frac{1}{e^{-2x}(e^x + c)}$$

### 6.1.4 Equazioni differenziali di Clairaut (Non lineare, I ordine)

Sono equazione del tipo

$$y = xy + g(y') \quad y' \text{ compare dentro una funzione}$$

Si risolvono nel segno modo:

1. pongo  $y' = t(x)$
2. derivo entrambi i termini

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(x) + xy'' + g'(y')y''(x) \\ xy''(x) + g'(y')y''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Con la sostituzione si ha:

$$xt'(x)[x + g'(t(x))] = 0$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow t(x) = c \text{ (costante)} \quad t(x) = y'(x) = c \Rightarrow y(x) = xy'(x) + g(y'(x))$$

L'integrale generale è famiglia di rette  $y(x) = cx + g(c)$

$$x + g'(t(x)) = 0 \quad \begin{cases} x = -g'(t(x)) \\ y(x) = -g'(t(x))t(x) + g(t(x)) \end{cases} \quad \text{Integrale singolare}$$

È una curva

$$\begin{cases} x = -g'(t(x)) \\ y(x) = -g'(t(x))t(x) + g(t(x)) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{curva involuppo della famiglia di rette} \\ \text{Ogni retta } y(x) = cx + g(c) \text{ al variare di } c \in R, \\ \text{è tangente alla curva involuppo.} \end{array}$$

**Esempio 26.**

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2 \quad t(x) = y'(x)$$

$$\text{derivo } y' = y' + xy'' - \frac{2}{4}y'y''$$

$$xy'' - \frac{1}{2}y'y'' = 0$$

$$xt'(x) - \frac{t}{2}(x) * t'(x) = 0 \Rightarrow t'(x) \left( x - \frac{t(x)}{2} \right) = 0 \Rightarrow t(x) = 0 \Rightarrow t(x) = y'(x) = c, c \in R$$

da cui  $y(x) = cx - \frac{1}{4}c^2$  *Integrale generale*

$$x - \frac{t(x)}{2} \quad \begin{cases} x = \frac{t(x)}{2} \\ y = \frac{t^2(x)}{2} - \frac{1}{4}t^2(x) = \frac{1}{4}t^2(x) \end{cases} \quad \text{in forma cartesiana} \quad \begin{cases} t(x) = 2x \\ y = \frac{1}{4} * 4x^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = x^2 \text{ Integrale} \\ \text{singolare} \end{array}$$

## 6.2 Problema di Cauchy

**Definizione 45.** Sia  $f(x, y) : D \rightarrow R$ , con  $D \subseteq R^2$ ,  $D$  aperto  
*Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{condizione iniziale}$$

$y = y(x)$  è detta **soluzione locale**: esiste in un intorno di  $x_0$ , in cui  $y(x)$  è derivabile e tale che

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

**Esempio 27.**  $\begin{cases} y - y \tan x = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$  l'integrale generale è  $y(x) = \frac{1}{\cos x}(\sin x + c)$

Determino l'integrale particolare che soddisfi  $y(0) = 1$  ( $x = 0, y(x) = 1$ )

$$1 = \frac{1}{\cos 0}(\sin 0 + c) \Rightarrow c = 1 \quad y(x) = \frac{1}{\cos x}(\sin x + 1) \quad \begin{array}{l} \text{Soluzione del problema} \\ \text{di Cauchy} \end{array}$$

### 6.2.1 Teorema di Peano (Esistenza di soluzioni)

**Teorema 16.** Dato il problema di Cauchy  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Con  $f(x, y) : D \rightarrow R, D \subseteq R^2$  aperto e  $(x_0, y_0) \in D$

Se  $f(x, y)$  è continua in  $(x_0, y_0)$  allora il problema di Cauchy ammette almeno una soluzione definita in un intorno di  $x_0$

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(x) = 1 \end{cases} \quad f(x, y) = x\sqrt{y} \text{ è definita in } D = \{(x, y) \in R^2 : x \in R, y \geq 0\}$$

per cui è continua in  $(0, 1)$ . Per il teorema di Peano esiste almeno una soluzione

$$\begin{aligned} y' &= x\sqrt{y} & y &= 0 & \text{Integrale singolare} \\ \int \frac{dy}{\sqrt{y}} &= \int x dx & \frac{1}{2}\sqrt{y} &= \frac{x^2}{2} + c & \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + k \Rightarrow y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \\ y(0) &= 1 & 1 &= (k)^2 \quad k = \pm 1 & k = -1 \text{ non accettabile perché } \sqrt{y} = -1 \\ & & & & k = 1 \\ & & & & y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \text{ soluzione del problema di Cauchy} \end{aligned}$$

### 6.2.2 Teorema di Cauchy (esistenza e unicità locale)

**Definizione 46.** Dato il problema di Cauchy  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Se

**I)**  $f(x, y)$  è continua in un intorno  $I \times J \in R \times R$  di  $(x_0, y_0)$  ( $x_0 \in I, y_0 \in J$ )

II)  $f(x, y)$  è Lipschitziana rispetto a  $y$  uniformemente per  $x \in I$

$$\text{cioè} \quad \exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \begin{array}{l} \exists x \in I \\ \exists y_1, y_2 \in J \end{array}$$

Allora esiste un intorno  $A$  di  $x_0$  in cui  $y = y(x)$  è un'unica soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{array}{c} \exists \delta > 0 \quad \underbrace{\exists!}_{\substack{\text{esiste} \\ \text{una e} \\ \text{una sola}}} y = y(x_0) \end{array}$$

Con  $y : A = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in R$  e derivabile in  $A = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$L$  interno può essere solo sinistro o destro. Il teorema di Cauchy risolve il problema “in piccolo” cioè in un intorno di  $x_0$ .

### Corollario del teorema di Cauchy

**Definizione 47.** Sia  $f(x, y)$  una funzione derivabile parzialmente rispetto a  $y$ .

Se  $\frac{\partial f}{\partial y} \in C_A^o$  allora  $f(x, y)$  è lipschitziana rispetto a  $y$  in  $A$ .

Per cui

$$\begin{array}{l} \text{se } f(x, y) \text{ continua in } (x_0, y_0) \\ \text{e } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ continua in } I \times J \text{ intorno di } (x_0, y_0) \\ \text{allora } \exists! y = y(x) \text{ in } I \times J \text{ soluzione del problema di Cauchy,} \end{array}$$

**Esempio 28.**

$$\begin{cases} y' = |y| \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad f(x, y) = |y| \text{ continua in } (0, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} \quad \text{in } (0, 1) \text{ vale } 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \text{ continua} \Rightarrow f(x, y) \text{ lipschitziana}$$

Per il teorema di Cauchy in un intorno  $I \times J$  di  $(0, 1)$   $\exists! y = y(x)$  soluzione del problema di Cauchy.

### 6.2.3 Equazioni differenziali lineari di ordine N

Sia

$$L(y) = b(x) \text{ un'equazione differenziale lineare (L'operatore lineare)}$$

$$L(y) = 0 \text{ equazione omogenea associata}$$

Se  $y_0(x)$  è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e se  $\bar{y}(x)$  è un integrale particolare dell'equazione non omogenea, allora  $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$  è soluzione dell'equazione completa.

#### Equazione completa

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = b(x) \quad (6.2)$$

### 6.2.4 Equazioni differenziali lineari omogenee

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = 0 \quad (6.3)$$

L'integrale generale dell'equazione lineare omogenea è una combinazione lineare di  $n$  soluzioni linearmente indipendenti.

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (6.4)$$

Sono integrali particolari dell'equazione linearmente indipendenti.

L'indipendenza delle soluzioni  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  è data dal non annullarsi per  $\forall x \in I$  del determinante.

**Wronskiano**<sup>2</sup> così fatto:

	<b>Prima riga</b>	Soluzioni
$detW(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$	<b>Seconda riga</b>	Derivate prime delle soluzioni
	<b>Terza riga</b>	Derivate seconde delle soluzioni
	<b>ultima riga</b>	Derivate alla $N - 1$ delle soluzioni

Se  $detW(x) \neq 0 \forall x \in I$ , allora  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  sono linearmente indipendenti.

Come si determinano le soluzioni? Si introduce il polinomio caratteristico ad  $y^2 \rightarrow \lambda^n$

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \text{soluzione per } \lambda \text{ radice del polinomio.}$$

### 6.2.5 Equazioni lineari complete

1. Si determina l'integrale generale  $y_0(x)$  dell'equazione omogenea associata
2. Si determina un integrale particolare  $\bar{y}(x)$  dell'equazione non omogenea
3. L'integrale dell'equazione completa è  $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$

Come determinare un integrale particolare dell'equazione non omogenea

Metodo di somiglianza: osserva la forma del termine noto  $b(x)$

$$b(x) = e^{\gamma x} P_n(x) \quad P_n(x) \quad \text{polinomio di grado } n$$

Se  $\gamma$  non è radice dell'equazione caratteristica

$$\bar{y}(x) = e^{\gamma x} q_n(x) \quad q_n(x) \quad \text{polinomio di grado } n$$

se  $\gamma$  radice dell'equazione complessa, ne tengo conto e tengo conto delle della sua molteplicità.

$$\bar{y}(x) = e^{\gamma x} x^n q_n(x) \quad q_n(x) \quad n \text{ molteplicità}$$

**Esempio 29.**

$$y''' - 4y' = x$$

1. equazione omogenea associata  $y''' - 4y' = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, y_1 = e^{0x} = 1, y^{-2x}$

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

<sup>2</sup>è un determinante introdotto dal matematico polacco Josef Hoene-Wronski diffusamente utilizzato nello studio di equazioni differenziali. Consente frequentemente di mostrare l'indipendenza lineare di un insieme di soluzioni.

$$b(x) = x \rightarrow e^{\gamma x} = 1 q_n(x) \quad e^{\gamma x} = 1 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$q_n(x) = x \text{ grado } 1$$

$$\bar{y}(x) = x^n e^{\gamma x} q_n(x) = e^{0x}(ax + b) = (ax + b)x$$

$$\bar{y}(x) = ax^2 + bx$$

Ricavo  $a$  e  $b$

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2ax + b & \Rightarrow y''(x) &= 2a + b & y'''(x) &= 0 \\ y''' - 4y' &= x & 0 - 4(2ax + b) &= x & -8ax - 4b &= x \\ & & \begin{cases} -8a = 1 \\ -4b = 0 \end{cases} & \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 0 \end{cases} & \bar{y}(x) &= -\frac{1}{8}x^3 \end{aligned}$$

L'integrale generale è  $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2$

$b(x) = \sin \beta x P_n(x)$  o  $b(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x P_n(x)$   
se  $\alpha \pm i\beta$  non sono soluzione ell'equazione caratteristica

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} [q_n(x) \sin \beta x + r_n(x) \cos \beta x]$$

se  $\alpha \pm i\beta$  sono soluzione dell'equazione caratteristica, ne tengo conto e tengo conto della sua molteplicità

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} x^n [q_n(x) \sin \beta x + r_n(x) \cos \beta x]$$

**Esempio 30.**  $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$

$$1. \text{ equazione omogenea associata } y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad y_1 = e^x$$

$$\lambda_2 = 2 \quad y_2 = e^{2x}$$

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$b(x) = xe^{3x} \quad \Rightarrow e^{\gamma x} P_n(x) \Rightarrow \gamma = 3 \quad P_n(x) \text{ grado } 1$$

$$\bar{y}(x) = e^{3x} q_n(x) = e^{3x}(ax + b)$$

Trovare  $a$  e  $b$

$$\bar{y}'(x) = 3e^{3x}(ax + b) + e^{3x}(a)$$

$$y'' = 9e^{3x}(ax + b) + 3e^{3x}a + 3ae^{3x}$$

$$y'' - 3y' + 2x = xe^{3x} \quad 9e^{3x}(ax+b) + 6ae^{3x} - 2(3e^{3x}(ax+b) + e^{3x}a) + (e^{3x}(ax+b)) = xe^{3a}$$

$$9e^{3x} \nearrow (ax+b) + 6ae^{3x} - 9e^{3x} \nearrow (ax+b) - 3e^{3x}a + 2e^{3x}(ax+b) = xe^{3x}$$

$$\bar{y}(x) = e^{3x} \left( \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \right)$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} \quad 3a + 2(qx+b) = x \begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$+ e^{3x} \left( \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \right)$$

**Faccia un integrale particolare di  $L(y) = b(x)$**

$$\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

**Esempio 31.**

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda = \pm i$$

$$y_1 = e^{ix} = \cos x$$

$$y_2 = e^{-ix} = \sin x$$

$$y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x = 0$$

$$c_1'(x)(-\sin x) + c_2(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$c_1'(x) = \frac{1}{W(x)} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad c_2' = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$c_i'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad c_1(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$$

$$c_2(x) = \int dx = x$$

$$\bar{y}(x) = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

