

Dimostrazioni



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

DICAAR

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTE E ARCHITETTURA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA ELETTRICA INDUSTRIALE

ANALISI MATEMATICA 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

0.1	Premesse...	7
0.2	Simboli	8
1	Introduzione	9
1.1	Massimi e minimi	9
1.2	limiti	10
1.2.1	Teoremi	10
2	Esercizi svolti	11
2.1	Teorema di Gauss e Stokes	11
3	Derivate parziali	13
3.1	Significato geometrico della derivata parziale prima	13
3.2	tipologia in \mathbb{R}	14
3.2.1	Distanza	14
3.3	Intorno	14

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un'occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, così da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTeX insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

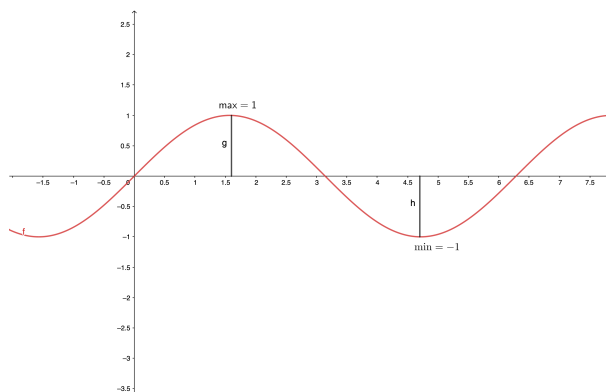
Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
\in	Appartiene	\ni :	Tale che
\notin	Non appartiene	\leq	Minore o uguale
\exists	Esiste	\geq	Maggiore o uguale
$\exists!$	Esiste unico	α	alfa
\subset	Contenuto strettamente	β	beta
\subseteq	Contenuto	γ, Γ	gamma
\supset	Contenuto strettamente	δ, Δ	delta
\supseteq	Contiene	ϵ	epsilon
\Rightarrow	Implica	σ, Σ	sigma
\Leftrightarrow	Se e solo se	ρ	rho
\neq	Diverso		
\forall	Per ogni		

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Massimi e minimi

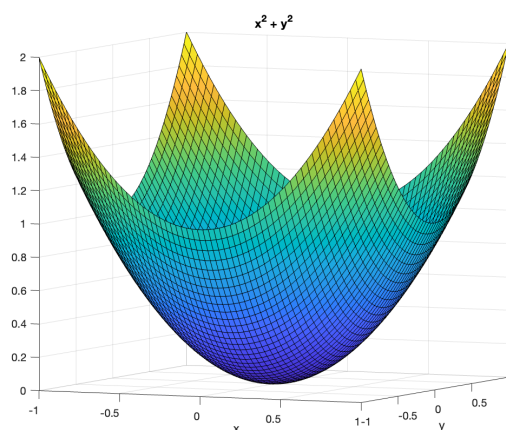
1. Max e min assoto → relativi prendendo come esempio la funzione sin



In questo caso il massimo assoluto e relativo della funzione è 1 e il minimo assoluto e relativo è -1, $\min(|x|) = 0$ e $\max(|x|) =$ (negli estremi frontiera).

Esempio 1. Prendendo la funzione con due incognite $z = x^2 + y^2$ e $z = 1$

1. *deminio* $0 \leq z \leq 1$



1.2 limiti

Definizione 1. *il limite finito è il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ ($\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$) se*

$$\forall \xi > 0 : \forall (x,y) \in I(x_0,y_0) \setminus \{x_0,y_0\}$$

$$\underbrace{|f(x,y) - L|}_{\text{Distanza}} < \xi$$

se $(x_0,y_0) \in D(f)$ ($\exists f(x_0,y_0)$)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \underbrace{f(x,y) - L}_{\text{Continua}}$$

tutti i polinomi sono funzioni continue

Esempio 2.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} (x^2 + y^2) e^{x^2 + y^2}$$

1.2.1 Teoremi

1. Unicità del limite

$$|l_2 - l_1| \leq ||$$

2. Teorema del confronto

3. teorema della permanenza del segno

4. teorema della composizione delle funzioni continue¹

in generale i teoremi sulle operazioni

Esempio 3. Dato $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \\ k \end{cases} \quad (x,y) = (0,0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \begin{cases} x = \rho \cos y \\ y = \rho \sin y \end{cases}$$

lim

¹se si vanno a comporre delle funzioni utilizzando due o più funzioni continue si otterrà sempre una funzione continua

Capitolo 2

Esercizi svolti

2.1 Teorema di Gauss e Stokes

Esercizio 1. Usando il teorema di Stokes, calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $\mathbf{F}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x, y, z) = (-x^2y, x^3 + z^2, \arctan e^{x+y+z})$$

attraverso la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

orientata secondo i versori uscenti dall'origine.

Svolgimento 1. Il teorema di Stokes assicura che il flusso $\phi_\Sigma(\text{rot } F)$ del rotore di F attraverso la calotta orientata Σ coincide con il lavoro del campo F lungo il bordo $\Gamma(\Sigma)$ di Σ orientato coerentemente con Σ (cioè secondo il verso di un osservatore che, disposto come il campo normale che orienta Σ , percorre $\Gamma(\Sigma)$ vedendo Σ alla sua sinistra)

La superfocoe Σ è la semisfera di centro l'origine e raggio 2 contenuta nel semispazio $z \geq 0$ e dunque il suo bordo $\Gamma = \Gamma(\Sigma)$ è la circonferenza del piano xy di centro l'origine e raggio 2, che ammette la rappresentazione parametrica

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \\ z = 0 \end{cases}$$

Tale rappresentazione risulta coerente con l'orientamento di σ , in quanto, al crescere di t , il punto $\gamma = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$ si muove lungo Γ come in figura. Dunque, poiché

$$F(\gamma(t)) = F(2 \cos t, 2 \sin t, 0) = (-8 \cos^2 t \sin t, 8 \cos^3 t, \arctan e^{2 \cos t + 2 \sin t}), \gamma'(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, 0),$$

si ha

$$\phi(\text{rot } F) = \int_\Sigma F * dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) * \gamma'(t) dt = \int (16 \cos^2 t + 16 \cos^4 t) dt = 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 16 \left[\frac{t + \cos t \sin t}{2} \right]_0^{2\pi} = 16\pi.$$

Esercizio 2. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (\sin(x^2 + z) - 2yz, 2xy + \sin(y^2 + z), \sin(x^2 + y^2))$$

lungo la circonferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

percorso in modo che la proiezione sul piano xy giri in senso orario (rispetto ad un osservatore disposto come l'asse z).

Svolgimento 2. Vista l'espressione del campo, il calcolo dipende dal lavoro richiesto non pare agevole. D'altra parte, risulta

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(x^2 + z) - 2yz & 2xz + \sin(y^2 + z) & \sin(x^2 + y^2) \end{vmatrix}$$

Capitolo 3

Derivate parziali

Definizione 2. Sia D un insieme aperto di \mathbb{R}^2 e $f(x, y)$ definita in D . Consideriamo il punto $(x_0, y_0) \in D$ e un suo interno $D_\delta(x_0, y_0) \subset D$. Consideriamo il punto $(x_0 + h, y_0) \in D$, $h \in \mathbb{R}$. Costruiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \quad (3.1)$$

Si usano anche i simboli

Definizione di Derivata parziale rispetto a x .

Se esiste finito il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$, definiamo la funzione derivabile rispetto a x in (x_0, y_0) .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (3.2)$$

Si estendono le regole di derivazione sia per le operazioni che per le funzioni elementari e composte.

Esercizio 3. Calcolare $f_x(4, 1)$ con $f(x, y) = \log(x - y^2)$

$$f_x(4, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x - 1) - \ln 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)}{h}$$

(si è utilizzato il limite notevole: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, (*)) oppure,

$$f_x(4, 1) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln(x - 1) - \log(3)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3} \frac{\ln \frac{x-1}{3}}{\frac{x-4}{3}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3} \frac{\ln\left(1 + \frac{x-4}{3}\right)}{\frac{1}{3}},$$

dove è stato utilizzato il limite notevole (*)

3.1 Significato geometrico della derivata parziale prima

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ che giace sul piano $y = y_0$, analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ che giace sul piano $x = x_0$.

Indichiamo con $\Delta f = (f_x, f_y)$ che chiamiamo gradiente di f , il vettore di componenti le derivate parziali prime (rispetto alla direzioni degli assi x e y). Si dimostra che se non è nullo, il vettore gradiente $\Delta f = (f_x, f_y)$, (con f differenziabile) indica la direzione di massima pendenza di f .

Esempio 4. Se consideri la funzione

$$f(x, y) = x + 2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

si ottiene:

$$f_x = 1 \quad f_y = 2, \quad \text{costante su } \mathbb{R}$$

$$\nabla f = (1, 2),$$

ed seprime la direzione e il verso nel piano di base x, y in cui conviene muoversi per ottenere il massimo incremento della funzione f (a parità di percorsi nel piano x, y).

3.2 tipologia in \mathbb{R}

3.2.1 Distanza

- R : $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- R^2 : Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza è $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- R^3 : Siano $Q_1(x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- R^4 : Siano $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^D (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (ha come immagine al più nullo)

Proprietà 1. *questi sono vincolati dalle seguenti proprietà*

- $d(x, y) \geq 0$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$ la distanza è nulla se i due punti coincidono
- $d(x, y) = d(y, x)$ la distanza tra x e y uguale alla distanza da y a x
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ disuguaglianza triangolare.

3.3 Intorno

Definizione 3. *Insieme dei punti che distano da un punto P_0 meno di un δ*

- R Intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $P(x)$ generico punto $d(P_0, P) < \delta$

$$|x - x_0| < \delta$$

- R^2

$$P_0(x_0, y_0)$$

$$P(x, y)$$

$$d(P_0, P) < \delta$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$