Algebra e geometria

Nicola Ferru

10 marzo 2024

Indice

Prefazione

Questo documento è soggetto alla proprietà di Nicola Ferru Aka NFVblog, il materiale è stato preso dalle lezioni di Geometria e algebra, le modalità di utilizzo e distribuzione sono scritte nel file LICENSE.

Capitolo 1

Vettori, coordinate e geometria

Uno degli argomenti su cui il corso si basa sono proprio i *vettori*. All'interno di questo capitolo saranno presenti nozioni e definizioni legate alla natura stessa di queste entità matematiche dai rudimenti ad alcuni spetti più avanzati.

1.1 Vettori Geometrici

Definizione 1.1.1. Un vettore geometrico applicato nel piano è un segmento orientato che va da un punto fisso O "Origine" verso un secondo punto P del piano, come mostrato nella figira 1.1:

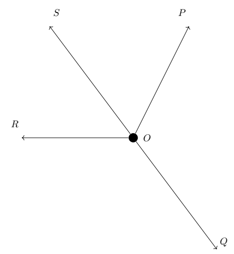

Figura 1.1: Esempio vettori geometrici

Analogamente, se il punto P (*e quindi il segmento*) è libero di variare in tutto lo spazio tridimensionale. In ambo i casi il vettore sarà denotato $\vec{OP}$ (*si denota che il punto finale P può anche uguale a O, ovvero il vettore può essere molto ravvicinato al punto O*).

Nota 1.1.1. *La direzione è indicata dalla simbolo freccia, graficamente la lunghezza e direzione del vettore implicano il modo in cui agisce nello spazio, ad esempio, se due vettori hanno direzioni opposte uno si sottrarrà potenzialmente al altro.*

Denotare che con V_O^2 l'unsieme dei vettori geometrici applicati in O nel piano, e con V_O^3 l'insieme dei vettori geometrici applicati in O liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale. I vettori orientati sono utilizzati infisica, dove vengono usati per rappresentare le forze applicate sul punto O.

Esempio 1.1.1. Si può immaginare che in O si trovi un oggetto sul quale viene esercitata una forza che lo "trascina" nella direzione e nel verso dati dalla freccia come evidenziato nella nota (1.1.1), mentre l'intensità della forza esercitata è rappresentata dlla lunghezza del segmento. Dal

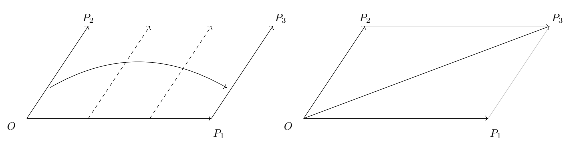

Figura 1.2: Somma vettoriale

momento che $\vec{OP}_3$ rappresenta la forza totale esercitata la forza totale esercitata su O quando si applicano contemporaneamente $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$, il meccanismo più immediato è associare l'operazione ad una addizione, infatti, essa viene scritta come:

$$\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 \tag{1.1}$$

La rappresentazione grafica è presente in figura 1.2 definisce in modo in cui un'operazione di somma sull'insieme di vettori geometrici (del piono o dello spazio) viene rappresentata.

Per i vettori che non hanno la stessa direzione, si denota che OP_3 è la direzionale del parallelogramma che ha OP_1 e OP_2 come lati (infatti, viene definita anche come *regola del parallelogramma*). Il motodo descrittivo funziona comunque anche per sommare due o più vettori che hanno la stessa direzione:

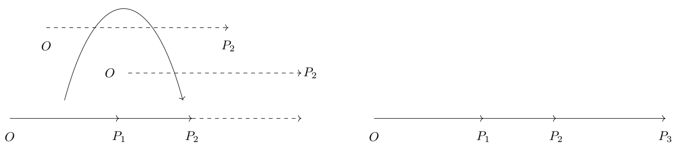

Figura 1.3: Regola del parallelogramma

Anche in questo caso vale la formula 1.1, infatti, graficamente la OP_3 è chiaramente frutto di una somma tra il segmento OP_1 e OP_2. Un'altra operazione è il prodotto del vettore per un numero reale: nel contesto delle forze, il concetto è quella di rappresentare una variazione dell'intensità e eventualmente del verso della forza rappresentata dal vettore.
Più precisamente, dati un vettore geometrico $\vec{OP}$ e un numero releale $c \in \mathbb{R}$, si può definire $c\vec{OP}$ come il vettore che sta sulla stessa retta a cui appartiene $\vec{OP}$, ma avente:

1. Stesso verso e lunghezza c volte la lunghezza di $\vec{OP}$, se c è positivo;
2. Verso opposto e lunghezza $-c$ volte quella di $\vec{OP}$, se c è negativo;
3. Lunghezza ulla se c=0, cioè $0\vec{OP} = \vec{OO}$.

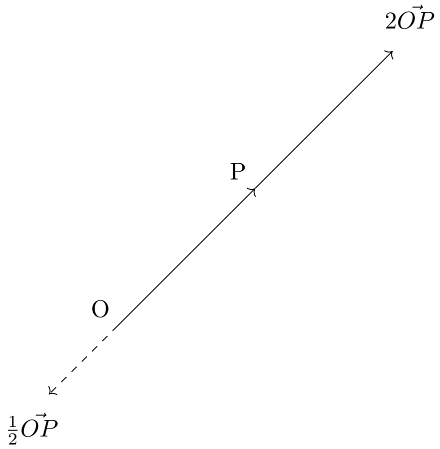

Figura 1.4: Prodotto vettoriale

Nel contesto dei vettori, i numeri reali si chiamano anche *scalari*.
Come si vedra nel ultima parte del capitolo, la nozione di vettore geometrico e le operazioni di somma tra vettori e prodotto di un vettore per un numero che appena definito saranno fornamentali per impostare e risolvere problemi geometrici nel piano e nello spazio. Per questo motivo, è necessario conoscere e mettere in evidenza le proprietà di cui godono tali operazionim che permettono di manipolare le espressioni e formule che coinvolgono i vettori. Si può verificare che valgono le seguenti:

1. La somma è *associativa*

$$(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) + \vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + (\vec{OP}_2 + \vec{OP}_3) \tag{1.2}$$

2. La somma è *commutativa*
$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_2 + \vec{OP}_1 \quad (1.3)$$

3. Il vettore $\vec{OO}$ funge da elemento neutro per la somma:
$$\vec{OP} + \vec{OO} = \vec{OO} + \vec{OP} = \vec{OP} \quad (1.4)$$

4. Per ogni vettore $\vec{OP}$, il vettore $(-1)\vec{OP}$ (ovvero il vettore che si ottiene da $\vec{OP}$ basterà invertire il verso, senza modificare direzione e lunghezza) è il suo inverso additivo o opposto rispetto alla somma:
$$\vec{OP} + (-1)\vec{OP} = (-1)\vec{OP} + \vec{OP} = \vec{OO} \quad (1.5)$$

5. Dati due numeri reali c_1, c_2 e un vettore $\vec{OP}$, si ha
$$c_1(c_2\vec{OP}) = (c_1c_2)\vec{OP} \quad (1.6)$$
(*Una situazione molto similare alla proprietà associativa del prodotto*).

6. Per ogni vettore $\vec{OP}$, si ha
$$1\vec{OP} = \vec{OP} \quad (1.7)$$
(*ovvero il numero 1 funge da elemento neutro rispetto al prodotto per scalari*).

7. Dati due numeri reali c_1, c_2 ed un vettore $\vec{OP}$, si ha
$$(c_1 + c_2)\vec{OP} = c_1\vec{OP} + c_2\vec{OP} \quad (1.8)$$

8. Dati un numero reale c e due vettori $\vec{OP}$, $\vec{OP}$ si ha
$$c(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) = c\vec{OP}_1 + c\vec{OP}_2 \quad (1.9)$$

Lo sviluppo suggerisce che valga la proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri reale o rispetto alla somma di vettori.

Osservazione 1.1.1. Come esempio di applicazione delle proprietà appena elencate, è il caso di motrare che in un'uguaglianza tra vettori, esattamente come si fa in un'uguagliana tra numeri, si possono "spostare i vettori" da un membro all'altro cambiandoli di segno:
$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3 \rightarrow \vec{OP}_1 = \vec{OP}_3 - \vec{OP}_2$$
Dove, come nel caso dei numeri lo spostamento dall'altra parte dell'uguaglianza comporta il cambiamento di segno scritto come $\vec{OP}_3 - \vec{OP}_2$ che risulta essere la forma semplificata di $\vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$. Per vederlo, basterà sommare ad antrambi i membri di $\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3$ il vettore $(-1)\vec{OP}_2$:
$$(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) + (-1)\vec{OP}_2 = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
Applicando la propriatà associativa (1.2) a primo membro:
$$\vec{OP}_! + \left[\vec{OP}_2 + (-1)\vec{OP}_2\right] = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
Dopo aver fatto questo passaggio, sarà necessario applicare la proprietà (1.5) che afferma che $(-1)\vec{OP}_2$ è l'opposto di $\vec{OP}_2$:
$$\vec{OP}_2 + \vec{OO} = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
e infine va applicato la proprietà (1.4) che afferma che il vettore nullo funge da elemento neutro:
$$\vec{OP}_1 = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
e con questo è stata confermata l'affermazione iniziale.

1.2 Coordinate

Considerando due vettori geometrici $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ nel piano, e si può supporre che $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ non abbiano la stessa dimensione.
Affermando che ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^2$ può essere ottenuto sommando multipli opportuni di $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$, ovvero:
$$\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$$
dove c_1, c_2 sono opportuni numeri reali.

Infatti, questo può essere facilmente visto graficamente: come nel disegno seguente, prolungando i vettori $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ disegnando le due rette r_1 e r_2; proiettando quindi i punti P su r_1 seguendo la direzione parallela a $\vec{OP}_2$, e chiamando il punto proiettato Q_1: e chiamandolo punto proiettato Q_2.

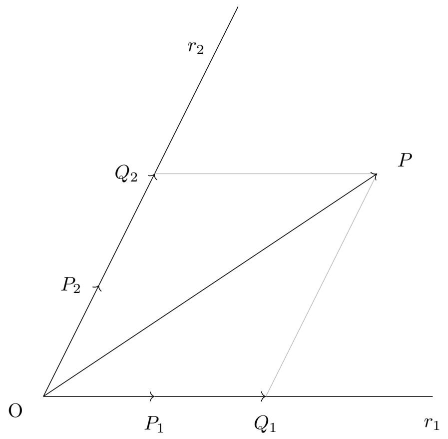

Figura 1.5: Costruzione grafica $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$

Avendo costruito le due proiezioni parallelamente a $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ come lati e $\vec{OP}$ come diagonale, quindi per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $\vec{OP} = \vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$.
Ma dal momento che $\vec{OQ}_1$ si trova sulla stessa retta di $\vec{OP}_1$ per come è definito il prodotto dei vettori per i numeri realim esisterà un numero reale c_1 tale che $\vec{OQ}_1 = c_1\vec{OP}_1$ (dove c_1 dipende semplicemente dal rappotro tra la lunghezza di $\vec{OQ}_1$ e quella di $\vec{OP}_1$).
Si conclude che $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$. Si noti che nella situazione considerata nel disegno, $c_1, c_2 > 0$ in quanto $\vec{OQ}_1$ e $\vec{OQ}_2$ hanno lo stesso verso di $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ rispettivamente. In generale, la stessa costruzione può essere effettuata per qualunque vettore $\vec{OP}$ del piano e i coefficienti c_1 e c_2 potranno anche essere negativi[1] a seconda del quadrante nel quale si trova $\vec{OP}$, ovvero a seconda che la proiezione di P sulle rette r_1, r_2 cada dalla stessa parte o dalla parte opposta dei punti P_1 e P_2.

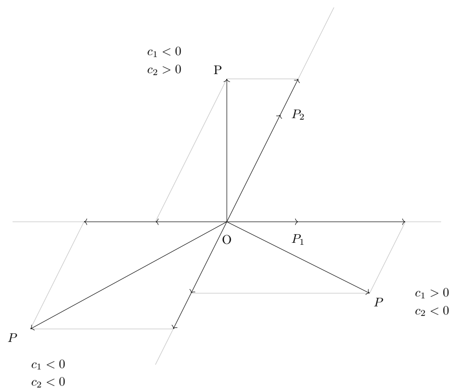

Figura 1.6: Condizione della formula $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ in base ai reali c_1, c_2

Definizione 1.2.1. La coppia (c_1, c_2) di numeri reali tale che $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ si dice la *coppia delle coordinate* del vettore $\vec{OP}$ rispetto ai vettori base $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2$.
Le coordinate c_1 e c_2 di un vettore dipendono chiaramente dalla scelta dei vettori base $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$, ma una volta che essi sono stati fissati seriveremo $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2)$, identificando di fatto il vettore con la coppia delle sua coordinate, e quindi l'insieme $\vec{V}_O^2$ con l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali.

Osservazione 1.2.1. Bisognerebbe porsi il problema dell'*unicità* di c_1 e c_2: se esistessero due modi diversi, diciamo $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ e $\vec{OP} = c_1'\vec{OP}_1 + c_2'\vec{OP}_2$, di decomporre $\vec{OP}$, non

[1] Può essrere anche $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$: nel primo caso, si ha $\vec{OP} = c_2\vec{OP}_2$, nel secondo $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1$, cioè $\vec{OP}$ non sta all'interno di uno dei quadranti in cui le rette r_1, r_2 dividono il piano, ma sta sulla retta r_2 (se $\vec{OP} = c_2\vec{OP}_2$) o sulla retta r_1 (se $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1$).

avremmo una e una spola coppia di numeri con cui identificarlo: in realtà, la costruzione grafica già suggerisce che l'unicità è garantita, ma si tornerà su tel questione nel paragrafo **??**.

Un risultato analogo a quello visto per i vettori nel piano può essere ottenuto anche nell'insieme V_O^3 dei vettori geometri nello spazio tridimensionale. In questo non si deve però partire da una coppia di vettori non allineati ma da una terna di vettori $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ e $\vec{OP}_3$ *che non siano tutti e tre sullo stesso piano*: alloram, è semplice vedere graficamente, utilizzando proiezioni come fatto nel caso di due vettori nel piano, che ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^3$ può essere scritto come combinazione $c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2 + c_3\vec{OP}_3$.

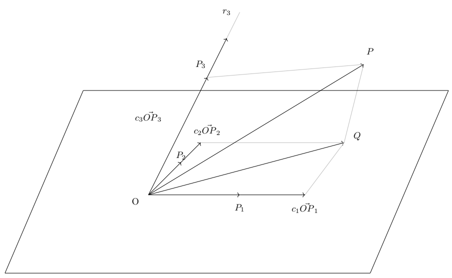

Figura 1.7: Vettori su spazio tridimensionale

Come rappresentato in figura 1.7, si proietta il punto su cui stanno $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ seguendo la direzione $\vec{OP}_3$ e si individua così un punto Q; proiettando poi P sulla retta r_3 parallelamente al vettore $\vec{OQ}$, risulta individuato un parallelogramma, che ci dice che $\vec{OP}$ si scrive come somma $\vec{OP} = \vec{OQ} + c_3\vec{OP}_3$ di $\vec{OQ}$ e di un opportuno multiplo $c_3\vec{OP}_3$ di $\vec{OP}_3$. A questo punto si osserva che $\vec{OQ}$, stando sul piano di $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ si scriverà come loro combinazione lineare $\vec{OQ} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2 + c_3\vec{OP}_3$. In modo analogo a quato già fatto per i vettori geometrico del piano, si può dire che:

Definizione 1.2.2. Ka terna (c_1, c_2, c_3) di numeri reali tale che $\vec{OQ} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2 + c_3\vec{OP}_3$ si dice la *terna delle coordinate* del vettore $\vec{OP}$ rispetto ai vettori di base $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$.

Come osservato per i vettori del piano, le coordinate c_1, c_2, c_3 di un vettore dipendono chiaramente dalla scelta dei vettori base $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$, ma una volta che essi sono stati fissati si potrà scrivere $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2, c_3)$, identificando di fatto il vettore con la terna delle sue coordinate, e quindi l'insieme $\vec{V}_O^2$ con l'insieme $\mathbb{R}^3$ della terna di numeri reali.
L'importanza delle coordinate consiste nel fatto che esse, permattendoci di rappresentare i vettori mediamente coppie o terne di numeri, permettano di tradurre in calcolo tra vettori: questa è un'importante semplificazione, in quanto è più semplice lavorare con numeri che con costruzioni o dimostrazioni di geometria eoclidea che sarebbero altrimenti necessarie per lavorare con i vettori, che sono oggetti (entità) geometrici. Per dare un idea più chiara delle affermazioni esposte precedentemente è necessario stimare questo importante risultato:

Proposizione 1.2.1. *Sia $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ una coppia di vettori base non allineati nell'insieme V_O^2. Le coordinate rispetto a $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ hanno le seguenti proprietà:*

1. *Se $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$ hanno coordinate rispettivamente (x_1, x_2) e (x_1', x_2'), le coordinate di $\vec{OP} + \vec{OP}'$ sono date dalla coppia $(x_1 + x_1', x_2 + x_2')$ ottenuta sommando componete per componente le coppie delle coordinate dei due vettori.*

2. *Se $\vec{OP}$ ha coordinate (x_1, x_2) e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2) ottenuta moltiplicando per c le coordinate di $\vec{OP}$.*

Dimostrazione. Il fatto che $\vec{OP}$ abbia coordinate (x_1, x_2) rispetto a $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ significa per definizione che $\vec{OP}' = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$, e analogamente il fatto che $\vec{OP}'$ abbia coordinate (x_1', x_2') significa che $\vec{OP}' = x_1'\vec{OP}_1 + x_2'\vec{OP}_2$. Ma allora

$$\vec{OP} + \vec{OP}' = (x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2) + (x_1'\vec{OP}_1 + x_2'\vec{OP}_2) =$$

Riordinando gli addendi e raccogliendoli diversamente sfruttando le proprietà associativa e commutativa della somma tra vettori

$$= (x_1\vec{OP}_1 + x_1'\vec{OP}_1) + (x_2\vec{OP}_2 + x_2'\vec{OP}_2) =$$

Sfruttando la proprietà 1.8 sia nella prima parentesi che nella saconda, effettuato il raggruppamento mettendo in evvidenza nel caso della prima parentesi $\vec{OP}_1$, mentre, nel caso del secondo mettendo in evvidenza $\vec{OP}_2$, il risultato sarà

$$= (x_1 + x_1')\vec{OP}_1 + (x_2 + x_2')\vec{OP}_2$$

Ma questo, per definizione di coordinate, significa proprio che le coordinate di $\vec{OP}+\vec{OP}'$ sono date dalla coppia $(x_1 + x_1', x_2 + x_2')$, come affermato nel punto 1 della Proposizione 1.2.1.
Per dimostrare la (2), bisogna partire sempre dal fatto che $\vec{OP}$ abbia coordinate (x_1, x_2) significa per definizione che $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$. Allora

$$c\vec{OP} = c(x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_1) =$$

Applicando la proprietà (1.9) otterremo la divisione in due gruppi di parentesi, con c messo in evidenza messi tra di loro in forma di addizione.

$$= c(x_1\vec{OP}_1) + c(x_2\vec{OP}_2) =$$

Applicando la proprietà (1.6) a entrambi gli addendi si otterrà:

$$= (cx_!)\vec{OP}_1 + (cx_2)\vec{OP}_2$$

Ma questo, per definizione di coordinate, ci dice proprio che le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2), come affermato nella (2) della Proposizione 1.2.1. □

Esempio 1.2.1. Per un esempio di quanto appena dimostrato, si prendano i vettori base $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ come nel disegno seguente, e si considerino i due $\vec{OQ}_1$ e $\vec{OQ}_2$

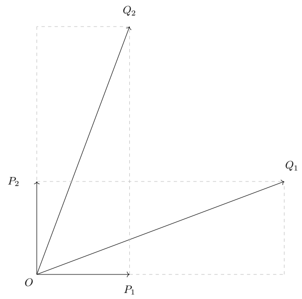

Figura 1.8: Rappresentazione grafica OQ_1 e OQ_2

Come si vede dalla figura (1.8), si ha $\vec{OQ}_1 = 2\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$ e $\vec{OQ}_1 = \vec{OP}_1 + 2\vec{OP}_2$, ovvero le coordinate $\vec{OP}_1$ sono date dalla coppia (2, 1).
Allora, in base alla (1) della Proposizione 1.2.1, la somma $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$ ha coordinate (*sempre rispetto a* $\vec{OP}_1$ *e* $\vec{OP}_2$) date da

$$\vec{OQ}_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \ \vec{OQ}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2 = \begin{vmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = (3, 3).$$

ovvero si ha $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2 = 3\vec{OP}_1 + 3\vec{OP}_2$. In effetti, questo può essere verificato graficamente costruendo con la regola del parallelogramma la somma $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$, come nella figura seguente

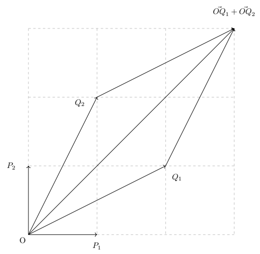

Figura 1.9: Rappresentazione grafica $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$

L'aspetto notevole è che si può dimostrare chi era il vettore $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$ (in coordinate) con un semplice conto aritmetico, anche prima di disegnarlo con la costruzione geometrica del parallelogramma.

Osservazione 1.2.2. Affermazioni del tutto analoghe a quelle della Proposizione 1.2.1 valgono anche nel caso dei vettori nello spazio. Più precisamente, si ha che fissata una terna $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ di vettori non complanari nell'insieme V_O^3 dei vettori dello spazio tridimensionale, allora le coordiante rispetto a tale terna di base hanno le seguenti proprietà:

1. Se $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$ hanno coordinate rispettivamete (x_1, x_2, x_3) e (x_1', x_2', x_3'), le coordinate di $\vec{OP}_1 + \vec{OP}_1'$ sono date dalla terna $(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$ ottenuta sommando componente per componente le terne delle coordiante dei due vettori.

2. Se $\vec{OP}$ ha coordinate (x_1, x_2, x_3) e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate, di $c\vec{OP}$ sono date dalla terna (cx_1, cx_2, cx_3) ottenuta moltiplicando per c le coordinate di $\vec{OP}$.

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella della Proposizione 1.2.1.