Formulario Geometria

Nicola Ferru

6 luglio 2023

1 Prodotto scalare, norma di un vettore e prodotto vettoriale

Definizione 1.1 *Siano* $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ *e* $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ *due vettori. il loro prodotto scalare, denotato* $\vec{u} \cdot \vec{v}$*, è definito da*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \left(\sum_{i=1}^{3} u_iv_3\right) \tag{1}$$

La proprietà fondamentale del prodotto scalare è

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta \tag{2}$$

1.1 Norme di un vettore

Definizione 1.2 *La norma di un vettore* $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *è una applicazione che a un vettore associa un numero reale*

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \vec{u} &\mapsto ||\vec{u}|| \end{aligned}$$

così definito:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{v_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

In modo equivalente possiamo esprimere la norma di un vettore in termini di prodotto scalare:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

infatti

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

1.2 Prodotto Vettoriale

Definizione 1.3 *Siano* $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ *e* $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$. *Il loro prodotto vettoriale (indicato* $\vec{u} \wedge \vec{v}$, *oppure* $\vec{u} \times \vec{v}$*) è il vettore definito da*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1]$$

2 Metodo di Cramer per sistemi lineari

Definizione 2.1 *Il* ***metodo di Cramer per sistemi lineari*** *è un procedimento per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari, e prevede di determinare le soluzioni dei sistemi lineari quadrati mediante il calcolo del determinante assoluto. Nel caso delle matrici 2x2:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1) \tag{3}$$

mentre, nel caso di una matrice 3x3:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = +a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 \tag{4}$$

Con un caso di matrice estesa che viene fatto nel seguente modo $\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right.$

3 Algoritmo di Gauss Jordan

4 Sviluppo di Laplace per determinanti

5 Polinomio caratteristico di un'applicazione lineare