Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettrica industriale

ANALISI MATEMATICA 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, cosi da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni . Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTex insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	**Appartiene**	$\ni$:	**Tale che**
$\notin$	**Non appartiene**	$\leq$	**Minore o uguale**
$\exists$	**Esiste**	$\geq$	**Maggiore o uguale**
$\exists!$	**Esiste unico**	α	**alfa**
$\subset$	**Contenuto strettamente**	β	**beta**
$\subseteq$	**Contenuto**	γ, Γ	**gamma**
$\supset$	**Contenuto strettamente**	δ, Δ	**delta**
$\supseteq$	**Contiene**	ϵ	**epsilon**
$\Rightarrow$	**Implica**	σ, Σ	**sigma**
$\Longleftrightarrow$	**Se e solo se**	ρ	**rho**
$\neq$	**Diverso**		
$\forall$	**Per ogni**		

Capitolo 1

Introduzione

1.1 tipologia in R

1.1.1 Distanza

- R: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- R^2: Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza è $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- R^3: Siano $Q_1(x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- R^4: Siano $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^{D} (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione $R^n * R^n \rightarrow R^+ \vee \{0\}$ (ha come immagine al più nullo)

Proprietà 1. *questi sono vincolati dalle sequenti proprietà*

- $d(x, y) \leq 0$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$ *la distanza è nulla se i due punti coincidono*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *la distanza tra x e y uguale alla distanza da y a x*
- $d(x, y) \geq d(x, y) + d(z, y)$ *disuguaglianza triangolare.*

1.2 Intorno

Definizione 1. *Insieme dei punti che distano da un punto P_0 meno di un δ*

- R Intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, P(x) generico punto $d(P_0, P) < \delta$

$$\boxed{|x - x_0| < \delta}$$

- R^2

$$P_0(x_0, y_0)$$
$$P(x, y)$$
$$d(P_0, P) < \delta$$
$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta}$$

Cerchio di cerntro P_0 e di perimetro δ privato della circonferenza.

- R^3

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$Q(x, y, z)$$
$$d(Q, Q_0) < \delta$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (x - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro Q_0 e raggio δ privata della sua superficie.

Punto interno P_0 è interno all'insieme D se:

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset D \tag{1.1}$$

Esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nell'insieme D, cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

Punto esterno P_0 è esterno all'insieme D se è interno al complementare di D, CD

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset CD \tag{1.2}$$

esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nel complementare dell'interno D

Punto di frontiera P_0 è un un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \to \text{frontiera dell'insieme D} \tag{1.3}$$

$\forall I_{F_D}$ in esso cadono punti di D e pinti di CD qualunque interno, in esso cadono punti dell'insieme D e del suo complementare.

Punto di accumulazione P_0 è un punto di accumulazione se $\forall I_{P_0}$ cade in un punto $\in D$, se cade un punto di D in I_{p_0}, allora ne cadono infiniti.

Punto isolato P_0 è un punto isolato se $\exists I_{P_0,\delta}$ in cui non cade nessun punto dell'insieme.

Insieme Aperto

Definizione 2. *A si dice aperto se $\forall P \in A$ $\exists I_p \subset A$ per qualunque punto di A esiste un interno incluso in A, cioè ogni intorno di P è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni $]a : b[$; $x^2 + y^2 < r^2$ cerchio senza circonferenza:*

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 & \textit{triangolo senza lati} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2.1 Insieme chiuso

Definizione 3. *A si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiususura, che è formato dall'insieme tesso più gli eventuali punti di accumunlazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione. $[a : b]; x^2 + y^2 \leq r^2$ cerchio più circonferenza:*

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 & \textit{tringolo con lati} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2.2 Insieme connesso

Definizione 4. *un insieme A si dice connesso se e solo se $\forall P_1, P_2 \subset A\ \exists \Gamma i(P_1, P_2) \subset A$. A è connesso se per qualunque P_1, P_2 di A esiste una spezzata inclusa in in A*
A si dice semplicemente connessa se qualunque chiusa inclusa in A è frontiera dell'insieme.

1.2.3 Insieme convesso

Definizione 5. *un insieme A si dice convesso se per ogni coppia di $x, y \in A$ il segmento $\bar{xy}$ è contenuto in A*

Insiemi Limitati In $R : A$ è limitato se $\forall x \in A$: $x \leq M$

$[-1; 1]$ limitato

In R^2 : A è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2 \leq M} \tag{1.6}$$

Insieme illimitato In R : $[2; +\infty[$ illimitato

$$InR^2 : illimitato \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

1.2.4 Coordinate Polari

Definizione 6. *in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia $P(x, y)$ un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiano X e y oppure le coordinate polari ρ e θ.*

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = e^3 \frac{\cos^2\theta}{e^2} \tag{1.8}$$

1.2.5 Limiti e continuità

Definizione 7. *$f(x, y)$ una funzione definito in D e siano (x_0, y_0) punto di accumulazione per D*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \forall\xi > 0\ \exists\delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0,y_0),\delta}/\{(x_0, y_0)\}, \forall(x, y) \in I|f(x, y) \tag{1.9}$$

Per qualunque $\xi > 0$ esiste un $\delta(\xi) > 0$ per cui qualunque intorno di (x_0, y_0) al più x_0, y_0 e per qualunque (x_0, y_0) di quast'intorno la funzione dista da i meno di ξ.

1.2.6 Continuità

Definizione 8. *Sia $f(x, y)$ definita in D, $f(x, y)$ si definisce continuo in $(x_0, y_0) \in D$*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{1.10}$$

1.2.7 Esistenza del limite

Definizione 9. *Calcolando il limite con f in forma polare esiste se non dipende da θ. È possibile calcolare il limite di f in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si* *considerino queli si ina generica retta.*

$$y = y_0 + m(x - x_0) \tag{1.11}$$

- *Se il limite dipende da m esso non siste.*
- *Se non dipende da m esite.*

1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

Teorema 1. *Sie $f(x, y)$ definita in un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ assume tutti i valori campresi fra il massimo ed il minimo di $f(x, y)$ su D*

1.2.9 Teorema di Weierstrass

Teorema 2. *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.*
Sia $f(x, y)$ una funzione continua in D e sia D un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ ha massimo e minimo assoluto in D.

Capitolo 2

Derivate Parziali

Definizione 10. *Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un punto interno ad A Consideriamo un interno circolare di $P(x_0, y_0), I(x_0, y_0), \delta$*