Formulario Geometria

Nicola Ferru

8 luglio 2023

1 Prodotto scalare, norma di un vettore e prodotto vettoriale

Definizione 1.1 *Siano $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ e $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ due vettori. il loro prodotto scalare, denotato $\vec{u} \cdot \vec{v}$, è definito da*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \left(\sum_{i=1}^{3} u_i v_3\right) \tag{1}$$

La proprietà fondamentale del prodotto scalare è

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta \tag{2}$$

1.1 Norme di un vettore

Definizione 1.2 *La norma di un vettore $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ è una applicazione che a un vettore associa un numero reale*

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \vec{u} &\mapsto ||\vec{u}|| \end{aligned}$$

così definito:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{v_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

In modo equivalente possiamo esprimere la norma di un vettore in termini di prodotto scalare:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

infatti

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

1.2 Prodotto Vettoriale

Definizione 1.3 *Siano $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ e $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$. Il loro prodotto vettoriale (indicato $\vec{u} \wedge \vec{v}$, oppure $\vec{u} \times \vec{v}$) è il vettore definito da*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1]$$

2 Metodo di Cramer per sistemi lineari

Definizione 2.1 *Il **metodo di Cramer per sistemi lineari** è un procedimento per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari, e prevede di determinare le soluzioni dei sistemi lineari quadrati mediante il calcolo del determinante assoluto. Nel caso delle matrici 2x2:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1) \tag{3}$$

mentre, nel caso di una matrice 3x3:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = +a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 \tag{4}$$

Con un caso di matrice estesa che viene fatto nel seguente modo $\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right|$

3 Algoritmo di Gauss Jordan

4 Sviluppo di Laplace per determinanti

Definizione 4.1 *Si supponga di avere una matrice quadrata M di ordine n e di elementi m_{ij}. Si definiscono:*

- *La matrice M_{ij}, la sottomatrice (<u>di dimensione</u>) che si ottiene da M cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.*
- *Il valore $\det(M_{ij})$, detto minore complemento dell'elemento (i, j).*
- *Il valore $(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$, detto cofattore o complemento algebrico dell'elemento (i, j).*

Il primo teorema di Laplace afferma che il determinante di una matrice M di ordine n è pari alla somma dei prodotti degli elementi di una riga qualsiasi (<u>o una colonna qualsiasi</u>) per i rispettivi complementi algebrici. In formula:

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij} \tag{5}$$

indicando con i la riga, con j la colonna e considerando $i, j = 1, \ldots, n$.
Il secodno teorema di Laplace afferma che è sempre nulla la somma dei prodotti di una riga (o colonna) per i

complementi algebrici di un'altra riga (o colonna) della matrice stessa. In formula:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \ con \ i \neq k \tag{6}$$

(se $i = k$ è primo teorema e il risultato è diverso da zero).

5 Polinomio caratteristico di un'applicazione lineare

5.1 Polinomio caratteristico di una matrice

Definizione 5.1 *Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata è il determinante della differenza tra la matrice M di ordine n e una matrice identità dello stesso ordine Id_n moltiplicata per una variabile λ.*

$$p_M(\lambda) = det(M - \lambda \cdot Id_n) \tag{7}$$

5.2 Spazi vettoriali, sottospazi e basi

Definizione 5.2 *Un'applicazione lineare è associata a una matrice rappresentativa $A_{f,B,B}$ rispetto alla base B. Essendo un operatore lineare $f : V \to V$, la matrice $A_{f,B,B}$ è una matrice quadrata con un ordine uguale alla dimensione n di V.*

5.3 Autovalore e autovettore

Definizione 5.3 *Un vettore v dello spazio vettoriale V diverso dal vettore nullo è detto autovettore di un operatore lineare $(f : V \to V)$ se esiste uno scalare $\lambda \in K = R$, detto autovalore, tale che l'applicazione lineare $f(v)$ sia uguale a λv. $f(v) = \lambda v$*

$$V_\lambda = \{X \in \mathbb{R} : [A - \lambda I] \cdot X = \vec{0}\}$$

Sapendo che V_λ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$: sriveremo

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$$

Il nomero naturale $m_g(\lambda)$ è coincide con il numero di incognite libere del sistema geometrica dell'autovavlori λ. sappiamo che

$$m_g(\lambda) = n - p(A - \lambda I)$$

Osservazione 5.1 *Il sottospazio V_λ è detto autospazio associalto all'autovalore λ: i suoi elementi non nulli sono invece chiamato autovettori associati all'autovalore λ. Notiamo che ogni autovatore λ, essendo una radice di $P(\lambda)$ cioè di un polinomio di grado n, ha una sua molteplicità algebrica, denotata $m_a(\lambda)$.*