Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambiente e Architettura

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettrica industriale

ANALISI MATEMATICA 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, cosi da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni . Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTex insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

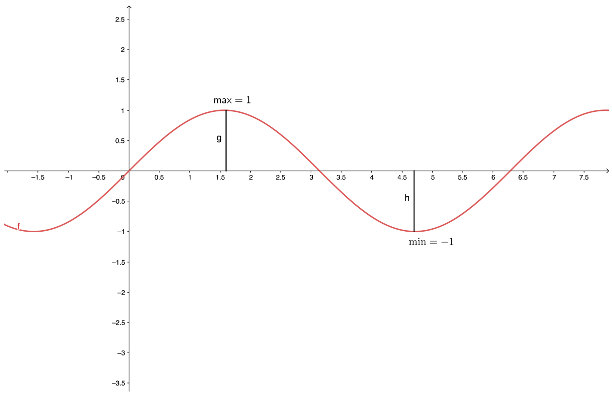
Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	**Appartiene**	$\ni$:	**Tale che**
$\notin$	**Non appartiene**	$\leq$	**Minore o uguale**
$\exists$	**Esiste**	$\geq$	**Maggiore o uguale**
$\exists!$	**Esiste unico**	α	**alfa**
$\subset$	**Contenuto strettamente**	β	**beta**
$\subseteq$	**Contenuto**	γ, Γ	**gamma**
$\supset$	**Contenuto strettamente**	δ, Δ	**delta**
$\supseteq$	**Contiene**	ϵ	**epsilon**
$\Rightarrow$	**Implica**	σ, Σ	**sigma**
$\Longleftrightarrow$	**Se e solo se**	ρ	**rho**
$\neq$	**Diverso**		
$\forall$	**Per ogni**		

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Massimi e minimi

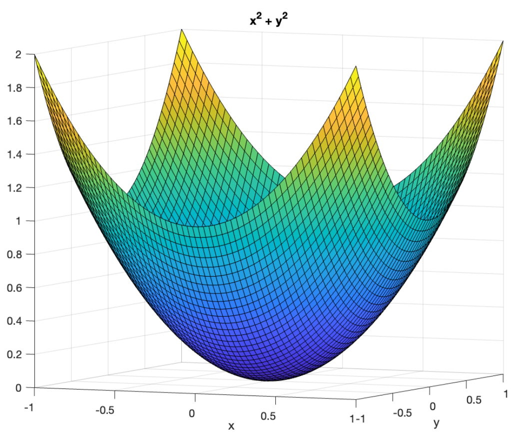
1. Max e min assoto →relativi prendendo come esempio la funzione sin



In questo caso il massimo assoluto e relativo della funzione è 1 e il minimo assoluto e relativo è -1, $\min(|x|) = 0$ e $\max(|x|) =$ (negli estremi frontiera).

Esempio 1. *Prendendo la funzione con due incognite* $z = x^2 + y^2$ *e* $z = 1$

1. *deminio* $0 \leq z \leq 1$



1.2 limiti

Definizione 1. *il limite finito è il limite di f(x,y) per* $(x,y) \to (x_0, y_0)$ $(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L)$ *se* $\forall \xi > 0 : \forall (x,y) \in I(x_0, y_o)/\{x_0, y_0\}$

$$\underbrace{|f(x,y) - L|}_{Distanza} < \xi$$

se $(x_0, y_0)\xi D(f)$ $(\exists f(x_0, y_0))$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \underbrace{f(x,y) - L}_{Continua}}$$

tutti i polinomi sono funzioni continue

Esempio 2.

$$\lim_{(x,y)\to+\infty}(x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$$

1.2.1 Teoremi

1. Unicità del limite

$$|l_2 - l_1| \leq ||$$

2. Teorema del confronto

3. teorema della permanenza del segno

4. teorema della composizione delle funzioni continue[1]

in generale i teoremi sulle operazioni

Esempio 3. *Dato* $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \begin{cases} x = \rho \cos y \\ y = \rho \sin y \end{cases}$$

$$\lim$$

[1]se si vanno a comporre delle funzioni utilizzando due o più funzioni continue si otterrà sempre una funzione continua

Capitolo 2

Esercizi svolti

2.1 Teorema di Gauss e Stokes

Esercizio 1. *Usando il teorema di Stokes, calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale* $\boldsymbol{F}$*:*$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ *definito da*

$$F(x,y,z) = \left(-x^2y, x^3 + z^2, \arctan e^{x+y+s}\right)$$

attraverso la superficie

$$\sum : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

orientata secondo i versori uscenti dall'origine.

Svolgimento 1. *Il teorema di Stokes assicura che il flusso* ϕ_Σ *(rot* F*) del rotore di* F *attraverso la calotta orientata* $\sum$ *coincide con il lavoro del campo* F *lungo il bordo* $\Gamma(\sum)$ *di* $\sum$ *orientato coerentemente con* $\sum$ *(cioè secondo il verso di un osservatore che, disposto come il campo normale che orienta* $\sum$*, percorre* $\Gamma(\sum)$ *vedendo* $\sum$ *alla sua sinistra)*
La superfocoe Σ *è la semisfera di contro l'origine e raggio 2 contenuta nel semispazio* $z \geq 0$ *e dunque il suo bordo* $\Gamma = \Gamma(\Sigma)$ *è la circonferenza del piano* xy *di centro l'origine e raggio 2, che ammette la rappresentazione parametrica*

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \\ z = 0 \end{cases}$$

Tale rappresentazione risulta coerente con l'oriantamento di σ*, in quanto, al crescere di* t*, il punto* $\gamma = (2\cos t, \sin t, 0)$ *si muove lungo* Γ *come in figura. Dunque, poiché*

$$F(\gamma(t)) = F(2\cos t, 2\sin t, 0) = (-8\cos^2 t \sin t, 8\cos^3 t, \arctan e^{2\cos t + 2\sin t}), \gamma'(t) = (2\sin t, 2\cos t, 0),$$

si ha

$$\phi(rotF) = \int_\Sigma F{*}dP = \int_0^{2x} F(\gamma(t)){*}\gamma(t)dt = \int (16\cos^2 t + 16\cos^4 t)dt = 16\int_0^{2x} \cos^2 tdt = 16\left[\frac{t + \cos t \sin t}{2}\right]_0^{2x} = 16x.$$

Esercizio 2. *Calcolare il lavoro del campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = (\sin(x^2+z) - 2yz, 2xy + \sin(y^2+z), \sin(x^2+y^2))$$

lungo la circonferenza

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

percorso in modo che la proiezione sul piano xy giri in senso orario (rispetto ad un osservatore disposto come l'asse z).

Svolgimento 2. *Vista l'espressione del campo, il calcolo dipende dal lavoro richiesto non pare agevole. D'altra parte, risulta*

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(x^2+z) - 2yz & 2xz + \sin(y^2+z) & \sin(x^2+y^2) \end{vmatrix}$$

Capitolo 3

Derivate parziali

Definizione 2. *Sia D un insieme aperto di R^2 e $f(x,y)$ definita in D. Consideriamo il punto $(x_0,y_0)\subset D$ e un suo interno $D_\delta(x_0,y_0)\subset D$. Consideriamo il punto $(x_0+h,y_0)\in D$, $h\in\mathbb{R}$. Costruiamo il rapporto incrementale*

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}. \tag{3.1}$$

Si usano anche i simboli

Definizione di Derivata parziale rispetto a x.
Se esiste finito il $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=f_x(x_1,y_0)$, definiamo la funzione derivabile rispetto a x in (x_0,y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0). \tag{3.2}$$

Si estendono le regole di derivazione sia per le operazioni che per le funzioni elementari e composte.

Esercizio 3. *Calcolare $f_x(4,1)$ con $f(x,y)=\log(x-y^2)$*

$$f_x(4,1)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x-1)-\ln 3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{3}\right)}{h}$$

(si è utilizzato il limite notevole: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$, (*)) oppure,

$$f_x(4,1)=\lim_{x\to 4}\frac{\ln(x-1)-\log(3)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{3}\frac{\ln\frac{x-1}{3}}{\frac{x-4}{3}}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{3}\frac{\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right)}{\frac{1}{3}},$$

dove è stato utilizzato il limite notevole (*)

3.1 Significato geometrico della derivata parziale prima

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ che giace sul piano $y=y_0$, analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ che giace sul piano $x=x_0$.
Indichiamo con $\Delta f=(f_x,f_y)$ che chiamiamo gradiente di f, il vettore di componenti le derivate parziali prime (rispetto alla direzioni degli assi x e y). Si demostra che se non è nullo, il vettore gradiente $\Delta f=(f_x,f_y)$, (con f differenziabile) indica la direzione di massima pendenza di f.

Esempio 4. *Se consideri la funzione*

$$f(x,y)=x+2y,\quad (x,y)\in R^2$$

si ottiene:

$$f_x = 1 \qquad f_y = 2, \qquad \textit{costante su } \mathbb{R}$$
$$\nabla f = (1, 2),$$

ed seprime la direzione e il verso nel piano di base x, y in cui conviene muoversi per ottenere il massimo incremento della funzione f (a parità di percirsi nel piano x, y).

3.2 tipologia in R

3.2.1 Distanza

- R: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- R^2: Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza è $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- R^3: Siano $Q_1(x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- R^4: Siano $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \in R^n$

  $$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^{D} (x_a y_a)^2}$$

  La distanza è un'applicazione $R^n * R^n \to R^+ \vee \{0\}$ (ha come immagine al più nullo)

Proprietà 1. *questi sono vincolati dalle sequenti proprietà*

- $d(x, y) \leq 0$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$ *la distanza è nulla se i due punti coincidono*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *la distanza tra x e y uguale alla distanza da y a x*
- $d(x, y) \geq d(x, y) + d(z, y)$ *disuguaglianza triangolare.*

3.3 Intorno

Definizione 3. *Insieme dei punti che distano da un punto P_0 meno di un δ*

- R Intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, P(x) generico punto $d(P_0, P) < \delta$

  $$\boxed{|x - x_0| < \delta}$$

- R^2

  $$P_0(x_0, y_0)$$
  $$P(x, y)$$
  $$d(P_0, P) < \delta$$
  $$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta}$$

  Cerchio di cerntro P_0 e di perimetro δ privato della circonferenza.

- R^3

  $$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$
  $$Q(x, y, z)$$
  $$d(Q, Q_0) < \delta$$
  $$\sqrt{(x - x_0)^2 + (x - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

  Sfera di centro Q_0 e raggio δ privata della sua superficie.

Punto interno P_0 è interno all'insieme D se:

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset D \tag{3.3}$$

Esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nell'insieme D, cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

Punto esterno P_0 è esterno all'insieme D se è interno al complementare di D, CD

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset CD \tag{3.4}$$

esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nel complementare dell'interno D

Punto di frontiera P_0 è un un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \rightarrow \text{frontiera dell'insieme D} \tag{3.5}$$

$\forall I_{F_D}$ in esso cadono punti di D e pinti di CD qualunque interno, in esso cadono punti dell'insieme D e del suo complementare.

Punto di accumulazione P_0 è un punto di accumulazione se $\forall I_{P_0}$ cade in un punto $\in D$, se cade un punto di D in I_{p_0}, allora ne cadono infiniti.

Punto isolato P_0 è un punto isolato se $\exists I_{P_0,\delta}$ in cui non cade nessun punto dell'insieme.

Insieme Aperto

Definizione 4. *A si dice aperto se $\forall P \in A$ $\exists I_p \subset A$ per qualunque punto di A esiste un interno incluso in A, cioè ogni intorno di P è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni $]a:b[$; $x^2 + y^2 < r^2$ cerchio senza circonferenza:*

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 & \textit{triangolo senza lati} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

3.3.1 Insieme chiuso

Definizione 5. *A si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiusussura, che è formato dall'insieme tesso più gli eventuali punti di accumunlazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione. $[a:b]; x^2 + y^2 \leq r^2$ cerchio più circonferenza:*

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 & \textit{tringolo con lati} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

3.3.2 Insieme connesso

Definizione 6. *un insieme A si dice connesso se e solo se $\forall P_1, P_2 \subset A$ $\exists \Gamma i(P_1, P_2) \subset A$. A è connesso se per qualunque P_1, P_2 di A esiste una spezzata inclusa in in A*
A si dice semplicemente connessa se qualunque chiusa inclusa in A è frontiera dell'insieme.

3.3.3 Insieme convesso

Definizione 7. *un insieme A si dice convesso se per ogni coppia di $x, y \in A$ il segmento $\bar{xy}$ è contenuto in A*

Insiemi Limitati In $R : A$ è limitato se $\forall x \in A : x \leq M$

$[-1; 1]$ limitato

In R^2 : A è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2 \leq M} \tag{3.8}$$

Insieme illimitato In $R : [2; +\infty[$ illimitato

$$InR^2 : illimitato \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

3.3.4 Coordinate Polari

Definizione 8. *in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia $P(x, y)$ un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiano X e y oppure le coordinate polari ρ e θ.*

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = e^3 \frac{\cos^2 \theta}{e^2} \tag{3.10}$$

3.3.5 Limiti e continuità

Definizione 9. *$f(x, y)$ una funzione definito in D e siano (x_0, y_0) punto di accumulazione per D*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \forall \xi > 0 \ \exists \delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0,y_0),\delta} / \{(x_0, y_0)\}, \forall (x, y) \in I | f(x, y) \tag{3.11}$$

Per qualunque $\xi > 0$ esiste un $\delta(\xi) > 0$ per cui qualunque intorno di (x_0, y_0) al più x_0, y_0 e per qualunque (x_0, y_0) di quast'intorno la funzione dista da i meno di ξ.

3.3.6 Continuità

Definizione 10. *Sia $f(x, y)$ definita in D, $f(x, y)$ si definisce continuo in $(x_0, y_0) \in D$*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = f(x_0, y_0) \tag{3.12}$$

3.3.7 Esistenza del limite

Definizione 11. *Calcolando il limite con f in forma polare esiste se non dipende da θ. È possibile calcolare il limite di f in forma cartesiano nel segmento nodo.*