Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettrica industriale

ANALISI MATEMATICA 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, cosi da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni . Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTex insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	**Appartiene**	$\ni$:	**Tale che**
$\notin$	**Non appartiene**	$\leq$	**Minore o uguale**
$\exists$	**Esiste**	$\geq$	**Maggiore o uguale**
$\exists!$	**Esiste unico**	α	**alfa**
$\subset$	**Contenuto strettamente**	β	**beta**
$\subseteq$	**Contenuto**	γ, Γ	**gamma**
$\supset$	**Contenuto strettamente**	δ, Δ	**delta**
$\supseteq$	**Contiene**	ϵ	**epsilon**
$\Rightarrow$	**Implica**	σ, Σ	**sigma**
$\Longleftrightarrow$	**Se e solo se**	ρ	**rho**
$\neq$	**Diverso**		
$\forall$	**Per ogni**		

Capitolo 1

Introduzione

1.1 tipologia in R

1.1.1 Distanza

- R: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- R^2: Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza è $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- R^3: Siano $Q_1(x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- R^4: Siano $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^{D} (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione $R^n * R^n \to R^+ \vee \{0\}$ (ha come immagine al più nullo)

Proprietà 1. *questi sono vincolati dalle sequenti proprietà*

- $d(x, y) \leq 0$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$ *la distanza è nulla se i due punti coincidono*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *la distanza tra* x *e* y *uguale alla distanza da* y *a* x
- $d(x, y) \geq d(x, y) + d(z, y)$ *disuguaglianza triangolare.*

1.2 Intorno

Definizione 1. *Insieme dei punti che distano da un punto* P_0 *meno di un* δ

- R Intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, P(x) generico punto $d(P_0, P) < \delta$

$$\boxed{|x - x_0| < \delta}$$

- R^2

$$P_0(x_0, y_0)$$
$$P(x, y)$$
$$d(P_0, P) < \delta$$
$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta}$$

Cerchio di cerntro P_0 e di perimetro δ privato della circonferenza.

- R^3

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$Q(x, y, z)$$
$$d(Q, Q_0) < \delta$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (x - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro Q_0 e raggio δ privata della sua superficie.

Punto interno P_0 è interno all'insieme D se:

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset D \tag{1.1}$$

Esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nell'insieme D, cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

Punto esterno P_0 è esterno all'insieme D se è interno al complementare di D, CD

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset CD \tag{1.2}$$

esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nel complementare dell'interno D

Punto di frontiera P_0 è un un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \to \text{frontiera dell'insieme D} \tag{1.3}$$

$\forall I_{F_D}$ in esso cadono punti di D e pinti di CD qualunque interno, in esso cadono punti dell'insieme D e del suo complementare.

Punto di accumulazione P_0 è un punto di accumulazione se $\forall I_{P_0}$ cade in un punto $\in D$, se cade un punto di D in I_{p_0}, allora ne cadono infiniti.

Punto isolato P_0 è un punto isolato se $\exists I_{P_0,\delta}$ in cui non cade nessun punto dell'insieme.

Insieme Aperto

Definizione 2. *A si dice aperto se $\forall P \in A$ $\exists I_p \subset A$ per qualunque punto di A esiste un interno incluso in A, cioè ogni intorno di P è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni* $]a : b[;$ $x^2 + y^2 < r^2$ *cerchio senza circonferenza:*

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 & \textit{triangolo senza lati} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2.1 Insieme chiuso

Definizione 3. *A si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiususura, che è formato dall'insieme tesso più gli eventuali punti di accumunlazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione.* $[a : b]; x^2 + y^2 \leq r^2$ *cerchio più circonferenza:*

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 & \textit{tringolo con lati} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2.2 Insieme connesso

Definizione 4. *un insieme A si dice connesso se e solo se $\forall P_1, P_2 \subset A\ \exists \Gamma i(P_1, P_2) \subset A$. A è connesso se per qualunque P_1, P_2 di A esiste una spezzata inclusa in in A*
A si dice semplicemente connessa se qualunque chiusa inclusa in A è frontiera dell'insieme.

1.2.3 Insieme convesso

Definizione 5. *un insieme A si dice convesso se per ogni coppia di $x, y \in A$ il segmento $\bar{xy}$ è contenuto in A*

Insiemi Limitati In $R : A$ è limitato se $\forall x \in A : x \leq M$

$[-1; 1]$ limitato

In R^2 : A è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2 \leq M} \tag{1.6}$$

Insieme illimitato In $R : [2; +\infty[$ illimitato

$$InR^2 : illimitato \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

1.2.4 Coordinate Polari

Definizione 6. *in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia $P(x, y)$ un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiano X e y oppure le coordinate polari ρ e θ.*

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = e^3 \frac{\cos^2 \theta}{e^2} \tag{1.8}$$

1.2.5 Limiti e continuità

Definizione 7. *$f(x, y)$ una funzione definito in D e siano (x_0, y_0) punto di accumulazione per D*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \forall \xi > 0\ \exists \delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0,y_0),\delta} / \{(x_0, y_0)\}, \forall (x, y) \in I | f(x, y) \tag{1.9}$$

Per qualunque $\xi > 0$ esiste un $\delta(\xi) > 0$ per cui qualunque intorno di (x_0, y_0) al più x_0, y_0 e per qualunque (x_0, y_0) di quast'intorno la funzione dista da i meno di ξ.

1.2.6 Continuità

Definizione 8. *Sia $f(x, y)$ definita in D, $f(x, y)$ si definisce continuo in $(x_0, y_0) \in D$*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{1.10}$$

1.2.7 Esistenza del limite

Definizione 9. *Calcolando il limite con f in forma polare esiste se non dipende da θ. È possibile calcolare il limite di f in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si* *considerino queli si ina generica retta.*

$$y = y_0 + m(x - x_0) \tag{1.11}$$

- *Se il limite dipende da* m *esso non siste.*
- *Se non dipende da* m *esite.*

1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

Teorema 1. *Sie* $f(x, y)$ *definita in un insieme chiuso e limitato. Allora* $f(x, y)$ *assume tutti i valori campresi fra il massimo ed il minimo di* $f(x, y)$ *su* D

1.2.9 Teorema di Weierstrass

Teorema 2. *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.*
Sia $f(x, y)$ *una funzione continua in* D *e sia* D *un insieme chiuso e limitato. Allora* $f(x, y)$ *ha massimo e minimo assoluto in* D.

Capitolo 2

Derivate Parziali

2.1 Derivate parziali di primo grado

Definizione 10. *Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un punto interno ad A Consideriamo un interno circolare di $P(x_0, y_0), I(x_0, y_0), \delta$, in netto sulla retta $y = y_0$ e incrementa la x_0 passante da x_0 a $x_0 + h$. Ho così un punto $P(x_0 + h, y_0) \in A$.*
Definisco il rapporto di $f(x, y)$ nella sola x

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.1}$$

$f(x, y)$ si definisce derivabile parzialmente se $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l \in R$ reale e finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fx = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.2}$$

Analogamente, considero un interno di $P(x_0, y_0), I(x_0, y_0), \delta$. Mi ruoto sulla retta $x = x_0$ e incremento la y_0 passando da y_0 a $y_0 + k$. Ho così un punto $P(x_0, y_0 + h) \in A$.
Definisco il rapporto ingrementale di $f(x, y)$ nella sola y

$$\frac{f(x_0 + k, y_0) - f(x_0, y_0)}{k}$$

derivabile parzialmente se $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l \in R$ reale e finito.
Se in un punto (x, y) esistono entrambi le derivate parziale si dice che la funzione è derivabile in (x,y) inoltre se f è derivabile in ogni punto $(x, y) \in A$, si dice che f è derivabile in A.

2.1.1 Significato geometrico

- Lo derivata prima par parziale in P è $fx(x_0, y_0)$, è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x, y)$ con il piano $y = y_0$

- La derivata prima parziale in P, $fy(x_0, y_0)$ è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x, y)$ con il piano $x = x_0$

Se esistono entrambe allora le due rette tangenti alle sezioni della funzione individuano il piano tangente al solido nel punto $P(x_0, y_0, z)$

2.2 Derivata parziale seconde

Definizione 11. *Sia $f(x,y)$ una derivabile e siano definite in un deminio le due derivate parziali*

$$f_x(x,y) \quad f_y(x,y)$$

Tali funzioni passano a loro volta essere derivabili e si ottengono così le derivate seconde parziali di $f(x,y)$

$$f(x,y)$$

$$f_x(x,y) \qquad\qquad f_y(x,y)$$

$$f_{xx}(x,y) \quad f_{xy}(x,y) \quad f_{yx}(x,y) \quad f_{yy}(x,y)$$

$f_{yx}(x,y)$
$f_{yx}(x,y)$ derivata seconde pure

f_{yx}
f_{yx} derivata seconde resto

$f_{yx}(x,y)$
derivata prima rispetto a
y poi rispetto a rispetto a x

con n variabili si hanno n^2 derivate seconde parziali – Spesso le derivate seconde sono disposte in una matrice quadrata, detta `hessiana`, con il sinbolo D^2

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ n variabili} \rightarrow n * n \tag{2.3}$$

Se esistono le quanto derivate di f, nel punto (x,y), si dice che f è dirivabile due volte in (x,y). Se ciò accade $\forall (x,y) \in A$, f è derivabile due volte nell'insieme A.

2.2.1 Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)

Teorema 3. *Sia $f(x,y)$ definita in D e derivabile due volte $\forall (x,y) \in D$.*
Se le derivate seconde in (x_0,y_0) $f_{xy}(x_0,y_0)$ e $f_{yx}(x_0,y_0)$ sono continue in (x_0,y_0) allora risulta $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.

In generale se vale il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana può essere scritta come

$$H = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$det H = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = f_{xx} * f_{yy} - (f_{yx})^2$

2.3 Massimi e minimi relativi

Definizione 12. *Sia $f(x,y)$ una funzione definita in un insieme D, un punto $p_0(x_0,y_0) \in D$, si dice di massimo relativo per la funzione se esiste intorno circolare di P_0 per cui il valore assunto della funzione nei punti dell'interno è minore o uguale a quello assunto in P_0.*
Analogamente un punto $P_0(x_0,y_0)$ si dice di minimo relativo per la funzione se esiste un interno circolare di P_0 per cui il valore assunto dalla funzione nei punti dell'intorno è maggiore o uguale.

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x,y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \textit{Massimo relativo}$$
$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x,y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \quad \textit{Minimo relativo}$$

2.3.1 Teorema di Fermat

Teorema 4. *Sia $f(x,y)$ derinita in D e derivabile in un punto $P_0(x_0,y_0)$*
Se in $P_0(x_0,y_0)$ $f(x,y)$ ha un massimo o un minimo relativo, allora le derivate prime parziali si annullano ($\nabla f = 0$ gradiente nullo). La pendenza della tangente è zaro un massimo o minimo.

Gradiente

Sia $f(x,y)$ una funzione derivabile in un punto (x,y), cioè esistano in (x,y) le due derivate parziali f_x e f_y.
Si definisce gradiente di f(x,y) nel punto (x,y): i vettore ∇f le cui componenti sono le derivate parziali di f(x,y).

$$\nabla f(x,y) \equiv (f_x(x,y); f_y(x,y)) \tag{2.4}$$

Massimi e minimi – condizione necessaria

Definizione 13. *Se $P_0(x_0,y_0)$ è un punto di massimo/minimo relativo il gradiente è nullo. Così di massimo o minimo relativo interni al dominio della funzione f vanno ricercati tra i punti che annullano la funzione f. Pertanto un punto critico per una funzione derivabile e un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.*

2.3.2 Differenziabilità

Definizione 14. *Sia $f(x,y)$ definita in D e $P_0(x_0,y_0) \in D$. In $P_0, z = f(x_0,y_0)$, incremento la x_0 di un h e la y_0 di un k.*
Così passo da $P_0(x_0,y_0)$ a $P(x_0+h, y_0+k)$. La funzione avrà avuto un certo incremento

$$f(x+h, y_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)$$

Si definisce differenziale in $P_0(x_0,y_0)$ se $\exists A, B \in R : f(x_0+h, y_0+k) - f(x_o, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$, cioè se esistono due costanti reali A e B per cui l'increm,ento di $f(x,y)$ che si ha passando da P_0 a P si può riscrivere come somma di una parte lineare $Ah+Bk$ e di un infinitesimo di ordine superiore a $\sqrt{h^2+k^2}$ (distanza di P_0 da P).
Se $f(x,y)$ ammette derivate prime parziali le due costanti A e B sono:

$$\begin{cases} A = fx(x_0,y_0) \\ B = fy(x_0,y_0) \end{cases}$$

e il differenziale diventa

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \tag{2.5}$$

Esempio 1. *verificare che $z = xy$ è differenziale $\forall (x_0; y_0) \in R^2$, se z è differenziale*
$\to f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$ dove

$$\begin{cases} A = fx(x_0,y_0) \\ B = fy(x_0,y_0) \end{cases}$$

se z è derivabile in (x_0,y_0).

$$f(x_0+h, y_0+k) = \underbrace{(x_0+h)(y_0+k)}_{Sostituisco} = x_0y_0 + x_0k + y_0h + hk$$

$f_x = y \; fx(x_0, y_0) = y_0$ $\quad f_y = x$ $\quad f_y(x_0, y_0) = x_0$
f *è derivabile in* (x_0, y_0) $\quad A = y_0$ $\quad D = x_0$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$\cancel{x}_0 y_0 + \cancel{x}_0 k + hk - \cancel{x}_0 y_0 = \cancel{y}_0 h + \cancel{x}_0 k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$hk = o(\sqrt{h^2+k^2})$$

detto quindi dimostrare che $\lim_{h\to 0 k\to 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ *e poi passo alle coordinate polari:*

$$h = \rho\cos\theta$$
$$k = \rho\sin\theta \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{e}\cos\theta * \cancel{e} sin\theta}{\cancel{e}^2} \qquad z = xy \;\; defferenziale \; \forall(x_0, y_0) \in R^2$$
$$e^2 = h^2 + k^2$$
$$h \to 0, k \to 0, \rho \to 0$$

2.3.3 Tutte le funzioni differenziali sono continue

Sia $f(x, y)$ differenziabile (x_0, y_0), allora $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Ip: $f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th: $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

Se $f(x_0, y_0)$ è continua in (x_0, y_0)

$$\lim_{h\to 0 \; k\to 0} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = 0$$

Calcolo il limite a destra per $h \to 0 \; k \to 0$

$$\lim_{h\to 0 \; k\to 0} \underbrace{Ah}_{0} + \underbrace{Bk}_{0} + o\underbrace{(\sqrt{h^2+k^2})}_{0} = 0 \text{ per cui } f(x, y) \text{ è continua in } (x_o, y_0)$$

□

2.3.4 Tutte le funzioni differenziali sono derivabili

Sia $f(x, y)$ differenziabile in un punto (x_0, y_0). Allora $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Ip: $f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th: $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

divido entrambi per h e calcolo il limite per $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=fx} = \underbrace{\frac{Ah + o(\sqrt{h^2})}{h}}_{A}$$

□