Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettrica industriale

ANALISI MATEMATICA 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, cosi da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni . Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTex insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	**Appartiene**	$\ni$:	**Tale che**
$\notin$	**Non appartiene**	$\leq$	**Minore o uguale**
$\exists$	**Esiste**	$\geq$	**Maggiore o uguale**
$\exists!$	**Esiste unico**	α	**alfa**
$\subset$	**Contenuto strettamente**	β	**beta**
$\subseteq$	**Contenuto**	γ, Γ	**gamma**
$\supset$	**Contenuto strettamente**	δ, Δ	**delta**
$\supseteq$	**Contiene**	ϵ	**epsilon**
$\Rightarrow$	**Implica**	σ, Σ	**sigma**
$\Longleftrightarrow$	**Se e solo se**	ρ	**rho**
$\neq$	**Diverso**		
$\forall$	**Per ogni**		

Capitolo 1

Introduzione

1.1 tipologia in R

1.1.1 Distanza

- R: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- R^2: Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza è $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- R^3: Siano $Q_1(x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- R^4: Siano $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^{D} (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione $R^n * R^n \to R^+ \vee \{0\}$ (ha come immagine al più nullo)

Proprietà 1. *questi sono vincolati dalle sequenti proprietà*

- $d(x, y) \leq 0$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$ *la distanza è nulla se i due punti coincidono*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *la distanza tra x e y uguale alla distanza da y a x*
- $d(x, y) \geq d(x, y) + d(z, y)$ *disuguaglianza triangolare.*

1.2 Intorno

Definizione 1. *Insieme dei punti che distano da un punto P_0 meno di un δ*

- R Intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, P(x) generico punto $d(P_0, P) < \delta$

$$\boxed{|x - x_0| < \delta}$$

- R^2

$$P_0(x_0, y_0)$$
$$P(x, y)$$
$$d(P_0, P) < \delta$$
$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta}$$

Cerchio di cerntro P_0 e di perimetro δ privato della circonferenza.

- R^3

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$Q(x, y, z)$$
$$d(Q, Q_0) < \delta$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (x - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro Q_0 e raggio δ privata della sua superficie.

Punto interno P_0 è interno all'insieme D se:

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset D \tag{1.1}$$

Esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nell'insieme D, cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

Punto esterno P_0 è esterno all'insieme D se è interno al complementare di D, CD

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset CD \tag{1.2}$$

esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nel complementare dell'interno D

Punto di frontiera P_0 è un un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \rightarrow \text{frontiera dell'insieme D} \tag{1.3}$$

$\forall I_{F_D}$ in esso cadono punti di D e pinti di CD qualunque interno, in esso cadono punti dell'insieme D e del suo complementare.

Punto di accumulazione P_0 è un punto di accumulazione se $\forall I_{P_0}$ cade in un punto $\in D$, se cade un punto di D in I_{p_0}, allora ne cadono infiniti.

Punto isolato P_0 è un punto isolato se $\exists I_{P_0,\delta}$ in cui non cade nessun punto dell'insieme.

Insieme Aperto

Definizione 2. *A si dice aperto se $\forall P \in A$ $\exists I_p \subset A$ per qualunque punto di A esiste un interno incluso in A, cioè ogni intorno di P è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni $]a : b[$; $x^2 + y^2 < r^2$ cerchio senza circonferenza:*

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 & \textit{triangolo senza lati} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2.1 Insieme chiuso

Definizione 3. *A si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiususura, che è formato dall'insieme tesso più gli eventuali punti di accumunlazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione. $[a : b]; x^2 + y^2 \leq r^2$ cerchio più circonferenza:*

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 & \textit{tringolo con lati} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2.2 Insieme connesso

Definizione 4. *un insieme A si dice connesso se e solo se $\forall P_1, P_2 \subset A$ $\exists \Gamma i(P_1, P_2) \subset A$. A è connesso se per qualunque P_1, P_2 di A esiste una spezzata inclusa in in A*
A si dice semplicemente connessa se qualunque chiusa inclusa in A è frontiera dell'insieme.

1.2.3 Insieme convesso

Definizione 5. *un insieme A si dice convesso se per ogni coppia di $x, y \in A$ il segmento $\bar{xy}$ è contenuto in A*

Insiemi Limitati In $R : A$ è limitato se $\forall x \in A : x \leq M$

$[-1; 1]$ limitato

In R^2 : A è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2 \leq M} \tag{1.6}$$

Insieme illimitato In $R : [2; +\infty[$ illimitato

$$InR^2 : illimitato \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

1.2.4 Coordinate Polari

Definizione 6. *in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia $P(x, y)$ un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiano X e y oppure le coordinate polari ρ e θ.*

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = e^3 \frac{\cos^2\theta}{e^2} \tag{1.8}$$

1.2.5 Limiti e continuità

Definizione 7. *$f(x, y)$ una funzione definito in D e siano (x_0, y_0) punto di accumulazione per D*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \forall\xi > 0\ \exists\delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0,y_0),\delta}/\{(x_0, y_0)\}, \forall(x, y) \in I|f(x, y) \tag{1.9}$$

Per qualunque $\xi > 0$ esiste un $\delta(\xi) > 0$ per cui qualunque intorno di (x_0, y_0) al più x_0, y_0 e per qualunque (x_0, y_0) di quast'intorno la funzione dista da i meno di ξ.

1.2.6 Continuità

Definizione 8. *Sia $f(x, y)$ definita in D, $f(x, y)$ si definisce continuo in $(x_0, y_0) \in D$*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{1.10}$$

1.2.7 Esistenza del limite

Definizione 9. *Calcolando il limite con f in forma polare esiste se non dipende da θ. È possibile calcolare il limite di f in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si* *considerino queli si ina generica retta.*

$$y = y_0 + m(x - x_0) \tag{1.11}$$

- *Se il limite dipende da m esso non siste.*
- *Se non dipende da m esite.*

1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

Teorema 1. *Sie $f(x, y)$ definita in un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ assume tutti i valori campresi fra il massimo ed il minimo di $f(x, y)$ su D*

1.2.9 Teorema di Weierstrass

Teorema 2. *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.*
Sia $f(x, y)$ una funzione continua in D e sia D un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ ha massimo e minimo assoluto in D.

Capitolo 2

Derivate Parziali

2.1 Derivate parziali di primo grado

Definizione 10. *Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita in un punto interno ad A Consideriamo un interno circolare di $P(x_0,y_0), I(x_0,y_0), \delta$, in netto sulla retta $y = y_0$ e incrementa la x_0 passante da x_0 a $x_0 + h$. Ho così un punto $P(x_0+h, y_0) \in A$.*
Definisco il rapporto di $f(x,y)$ nella sola x

$$\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \tag{2.1}$$

$f(x,y)$ si definisce derivabile parzialmente se $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l \in R$ reale e finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fx = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \tag{2.2}$$

Analogamente, considero un interno di $P(x_0,y_0), I(x_0,y_0), \delta$. Mi ruoto sulla retta $x = x_0$ e incremento la y_0 passando da y_0 a $y_0 + k$. Ho così un punto $P(x_0, y_0 + h) \in A$.
Definisco il rapporto ingrementale di $f(x,y)$ nella sola y

$$\frac{f(x_0+k,y_0) - f(x_0,y_0)}{k}$$

derivabile parzialmente se $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l \in R$ reale e finito.
Se in un punto (x, y) esistono entrambi le derivate parziale si dice che la funzione è derivabile in (x,y) inoltre se f è derivabile in ogni punto $(x,y) \in A$, si dice che f è derivabile in A.

2.1.1 Significato geometrico

- Lo derivata prima par parziale in P è $fx(x_0,y_0)$, è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x,y)$ con il piano $y = y_0$

- La derivata prima parziale in P, $fy(x_0,y_0)$ è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x,y)$ con il piano $x = x_0$

Se esistono entrambe allora le due rette tangenti alle sezioni della funzione individuano il piano tangente al solido nel punto $P(x_0,y_0,z)$

2.2 Derivata parziale seconde

Definizione 11. *Sia $f(x, y)$ una derivabile e siano definite in un deminio le due derivate parziali*

$$f_x(x, y) \quad f_y(x, y)$$

Tali funzioni passano a loro volta essere derivabili e si ottengono così le derivate seconde parziali di $f(x, y)$

$$f(x, y)$$

$$f_x(x, y) \qquad f_y(x, y)$$

$$f_{xx}(x, y) \quad f_{xy}(x, y) \quad f_{yx}(x, y) \quad f_{yy}(x, y)$$

$f_{yx}(x, y)$ derivata seconde pure $f_{yx}(x, y)$

f_{yx} derivata seconde resto f_{yx}

$f_{yx}(x, y)$

derivata prima rispetto a

y poi rispetto a rispetto a x

con n variabili si hanno n^2 derivate seconde parziali – Spesso le derivate seconde sono disposte in una matrice quadrata, detta `hessiana`, con il sinbolo D^2

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ n variabili} \rightarrow n * n \tag{2.3}$$

Se esistono le quanto derivate di f, nel punto (x,y), si dice che f è dirivabile due volte in (x, y). Se ciò accade $\forall (x, y) \in A$, f è derivabile due volte nell'insieme A.

2.2.1 Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)

Teorema 3. *Sia $f(x, y)$ definita in D e derivabile due volte $\forall (x, y) \in D$.*
Se le derivate seconde in (x_0, y_0) $f_{xy}(x_0, y_0)$ e $f_{yx}(x_0, y_0)$ sono continue in (x_0, y_0) allora risulta $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

In generale se vale il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana può essere scritta come

$$H = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$detH = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = f_{xx} * f_{yy} - (f_{yx})^2$

2.3 Massimi e minimi relativi

Definizione 12. *Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un insieme D, un punto $p_0(x_0, y_0) \in D$, si dice di massimo relativo per la funzione se esiste intorno circolare di P_0 per cui il valore assunto della funzione nei punti dell'interno è minore o uguale a quello assunto in P_0.*
Analogamente un punto $P_0(x_0, y_0)$ si dice di minimo relativo per la funzione se esiste un interno circolare di P_0 per cui il valore assunto dalla funzione nei punti dell'intorno è maggiore o uguale.

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \textit{Massimo relativo}$$
$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \textit{Minimo relativo}$$

2.3.1 Teorema di Fermat

Teorema 4. *Sia $f(x, y)$ derinita in D e derivabile in un punto $P_0(x_0, y_0)$*
Se in $P_0(x_0, y_0)$ $f(x, y)$ ha un massimo o un minimo relativo, allora le derivate prime parziali si annullano ($\nabla f = 0$ gradiente nullo). La pendenza della tangente è zaro un massimo o minimo.

Gradiente

Sia $f(x, y)$ una funzione derivabile in un punto (x,y), cioè esistano in (x,y) le due derivate parziali f_x e f_y.
Si definisce gradiente di f(x,y) nel punto (x,y): i vettore ∇f le cui componenti sono le derivate parziali di f(x,y).

$$\nabla f(x, y) \equiv (f_x(x, y); f_y(x, y)) \tag{2.4}$$

Massimi e minimi – condizione necessaria

Definizione 13. *Se $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di massimo/minimo relativo il gradiente è nullo. Così di massimo o minimo relativo interni al dominio della funzione f vanno ricercati tra i punti che annullano la funzione f. Pertanto un punto critico per una funzione derivabile e un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.*

Capitolo 3

Differenziabilità

Definizione 14. *Sia $f(x,y)$ definita in D e $P_0(x_0,y_0) \in D$. In $P_0, z = f(x_0,y_0)$, incremento la x_0 di un h e la y_0 di un k.*
Così passo da $P_0(x_0,y_0)$ a $P(x_0+h,y_0+k)$. La funzione avrà avuto un certo incremento

$$f(x+h,y_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)$$

Si definisce differenziale in $P_0(x_0,y_0)$ se $\exists A,B \in R : f(x_0+h,y_0+k)-f(x_o,y_0) = Ah+Bk+o(\sqrt{h^2+k^2})$, cioè se esistono due costanti reali A e B per cui l'increm,ento di $f(x,y)$ che si ha passando da P_0 a P si può riscrivere come somma di una parte lineare $Ah+Bk$ e di un infinitesimo di ordine superiore a $\sqrt{h^2+k^2}$ (distanza di P_0 da P).
Se $f(x,y)$ ammette derivate prime parziali le due costanti A e B sono:

$$\begin{cases} A = fx(x_0,y_0) \\ B = fy(x_0,y_0) \end{cases}$$

e il differenziale diventa

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \tag{3.1}$$

Esempio 1. *verificare che $z = xy$ è differenziale $\forall(x_0;y_0) \in R^2$, se z è differenziale*
$\rightarrow f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$ dove

$$\begin{cases} A = fx(x_0,y_0) \\ B = fy(x_0,y_0) \end{cases}$$

se z è derivabile in (x_0,y_0).

$$f(x_0+h,y_0+k) = \underbrace{(x_0+h)(y_0+k)}_{Sostituisco} = x_0y_0 + x_0k + y_0h + hk$$

$f_x = y\ fx(x_0,y_0) = y_0$	$f_y = x$	$f_y(x_0,y_0) = x_0$
f è derivabile in (x_0,y_0)	$A = y_0$	$D = x_0$

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$\cancel{x_0}y_0 + \cancel{x_0}k + hk - \cancel{x_0}y_0 = \cancel{y_0}h + \cancel{x_0}k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$hk = o(\sqrt{h^2+k^2})$$

detto quindi dimostrare che $\lim_{h\to 0 k\to 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ *e poi passo alle coordinate polari:*

$$\begin{aligned} h &= \rho\cos\theta \\ k &= \rho\sin\theta \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}\cos\theta * \cancel{\rho} sin\theta}{\cancel{\rho}^2} \qquad z = xy \text{ defferenziale } \forall(x_0, y_0) \in R^2 \\ e^2 &= h^2 + k^2 \\ h \to 0, k &\to 0, \rho \to 0 \end{aligned}$$

3.0.1 Tutte le funzioni differenziali sono continue

Sia $f(x, y)$ differenziabile (x_0, y_0), allora $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Ip:

$f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th:

$f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Se $f(x_0, y_0)$ è continua in (x_0, y_0)

$$\lim_{h\to 0\ k\to 0} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0$$

Calcolo il limite a destra per $h \to 0$ $k \to 0$

$$\lim_{h\to 0\ k\to 0} \underbrace{Ah}_{0} + \underbrace{Bk}_{0} + o\underbrace{(\sqrt{h^2 + k^2})}_{0} = 0 \text{ per cui } f(x, y) \text{ è continua in } (x_o, y_0)$$

□

3.0.2 Tutte le funzioni differenziali sono derivabili

Sia $f(x, y)$ differenziabile in un punto (x_0, y_0). Allora $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Ip:

$f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th:

$f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

divido entrambi per h e calcolo il limite per $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = fx} = \underbrace{\frac{Ah + o(\sqrt{h^2})}{h}}_{A}$$

$fx(x_0, y_0) = A$
Analogamente si demostra che $f_y(x_0, y_0) = B$. Qundi dato che esistono f_x e f_y in (x_0, y_0), $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0) e in oltre $A = fx(x_0, y_0)$, $B = fy(x_0, y_0)$ □

Esercizio 1. *Dimostrare che* $z = x^2 = y^2$ *è differenziabile in (1;1) – Per definire*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah = Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$f(x_0+h, y_0+k) = (1+h)^2 = (1+k)^2$ $\quad$ $f(x_0, y_0) = 1+1 = 2$

$A = f(1,1) = |2x|_{x=1} = 2$ $\quad$ $B = f_y(1,1) = |2y|_{y=1} = 2$

Così ho $(1+h)^2 + (1+k)^2 - 2 = 2h + 2k + o(\sqrt{h^2+k^2})$

$$h^2 + k^2 = o(\sqrt{h^2+k^2})$$

devo dimostrare che $\lim_{h\to 0\ k\to 0} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ *pasando a coordinate polari*

$$h = e\cos\theta$$
$$k = e\sin\theta$$
$$e^2 = h^2 + k^2$$
$$k \to 0, h \to 0, p \to 0$$

$\lim_{e\to 0} \frac{e^2}{|e|} = 0 \to z = x^2 + z^2$ *è differeziabile in (1,1)*

3.0.3 Le funzioni con derivate parziali continue sono diferenziabili

Definizione 15. *Sia $f(x,y)$ definita in D_1 e sia derivabile in D. Sono f_x e f_y continue in D, allora $f(x,y)$ è differenziale in D.*

Condizione sufficiente per la differenzialità

Definizione 16. *Affinché una funzione sia differenziabile in (x_0, y_0) basta che in (x_0, y_0) abbia derivate. In questo modo per determinare se una funzione è differenziabile in un punto si calcola le derivate parziali in quel punto, se esistono la funzione è differenziabile, in caso contrario non è derivabile.*

Esempio 2. *Dimostrare che $z = \sqrt{x^2+y^2}$ non è differenziabile in (0;0)*

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad D : x^2+y^2 > 0$$
$$z_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad D : x^2+y^2 > 0$$

Sia z_x sia z_y sono definite per $x^2+y^2 > 0$ cioè nei punti esterni al cerchio di centro (0,0) e 1, frontiera eclusa. Il punto (0,0) è interno al cerchio, quindi in esso $f(x,y)$ non è derivabile. Per cui in punto (0,0) f(x,y) non è neanche differenziabile.

3.1 Significato geometrico del differenziale e piano tengente

3.1.1 Differenziale primo

È la parte lineare nella definizione di differenziale

$$f(x,y) \text{ definita in } D \quad (x_0, y_0) \in D$$

$f(x,y)$ differenziale in (x_0, y_0) se

$$f(x_0+h, y_0+_k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}_{\text{parte lineare}} + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

3.1.2 Piano Tangente

La $f(x,y)$ una funzione derivabile in (x_0, y_0), il piano tangente alla funzione (x_0, y_0, z_0) ha equazione:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$\vec{n}$ direzione ortogonale al piano tangente, è unitario

$$\vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

poiché $\nabla f(f_x, f_y)$ $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 \rightarrow \vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1+|\nabla f|}}$

Esempio 3. $z = x^2 + y^2$ *(1,1)*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z_0 = f(1,1) = 1 + 1 = 2 \quad z - 2 = 2(x-1) + 2(y-1) \quad \begin{array}{l} f_x = 2x|_{1_{ii}} = 2 \\ f_y = 2y|_{1_{ii}} = 2 \end{array}$$

3.1.3 Significato geometrico del differenziale primo

Passando da P_0 a P $f(x)$ si incrementa da $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$ – Il differenziale primo dy indica la variazione che subisce la retta tangente passando da P_0 a P.
L'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ si approssima sempre più con dy per incrementi $h \rightarrow 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x)(x - x_0) - f(x_0) + o|x|$$

L'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ differisce dal valore $f'(x)(x - x_0)$ [retta tangente] per un $o|x|$, $o|x|$ ci da l'errore.

3.1.4 Funzioni composite

Definizione 17. *Sia $x(t)$ E $y(t)$ due funzioni reali definite al variare in un intervallo I di R. $t \in T \leq R$ corrisponde il punto $(x(t), y(t))$*

$$\begin{cases} x = x(t) & \textit{Rappresenta nel piano una currva in frontiera} \\ y = y(t) & \textit{Parametrica} \end{cases}$$

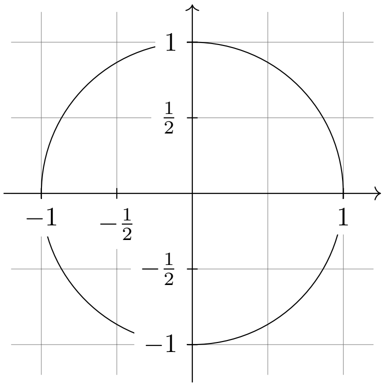
Al variare di $t \in I \leq R$
$x = x(t), y = y(t)$ descrive una curva γ nel piano

Esempio 4.

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = t+1 \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad \begin{cases} x = \Gamma\cos t \\ y = \Gamma\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$y = (t-1)+2 = x+2 \qquad r^2\cos t + r^2\sin^2 t = r^2$$

circonferenza con certro nel origine e raggio r



$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = r^2$$

Se si ha $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ *al variare di* $t \in T \leq R$ *si ha una curva nello spazio.*

Esempio 5. $\begin{cases} x = \Gamma\cos t \\ y = \Gamma\sin t \\ z = Kt \end{cases}$ *elica circolare*

3.1.5 Funzione composta

Definizione 18. *Sia* γ *la curva* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in I < R$ *di codominio B*
$I \to B$
Sia f(x,y) definita in A
$t \in f(x(t), y(t))$ *se il codominio di* γ *coincide con il codomio di* $f(x,y)$, *cioè* $B \leq A$

3.1.6 Teorema della derivata della funzione composta

Definizione 19. *Sia* γ *la curva di punti* $(x(t), y(t))$ *e sia derivabile in un intervallo I (cioè esistono)*
Sia f(x,y) differenziabile in x(t)
Allora la funzione conposta da $F(t) = f(x(t), y(t))$ *è derivabile in I e la sua derivata prima vale:*

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \tag{3.2}$$

$$(\nabla f * \Gamma'(t)) \quad \nabla f \equiv (f_x; f_y) \quad \Gamma' \equiv (x'(t); y'(t))$$

Ipotesi $\gamma \equiv (x(t), y(t))$ *derivabile in I*
$f(x,y)$ *differenziale in x(t)*

Tesi $F(t) = f(x(t), y(t))$ *derivabile in I*
$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$

Dimostrazione. Devo dimostrare che $\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = F'(t) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$
Scrivo l'incremento di F(t) per un h

$$F(t+h) - F(t) = f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)]$$ Per definizione di funzione composta F(t)

Poiché f(x,y) è differenziabile si ha

$$f[x(t+h),y(t+h)]-f[x(t),y(t)] = f_x \underbrace{[x(t),y(t)]}_{fx} \underbrace{[x(t+h)-x(t)]}_{h} + f_y \underbrace{[x(t+h)-y(t+h)]}_{fy} \underbrace{[y(t+h)-y(t)]}_{k}$$
$$+o\left(\sqrt{\underbrace{[x(t+h)-x(t)]^2}_{h^2}+\underbrace{[y(t+h)-y(t)]^2}_{k^2}}\right)$$

Divido entrambi i membri per h e calcolo il $\lim_{h\to 0}$

I membro

$$\lim_{h\to 0}\frac{f[x(t+h),y(t+h)]-f[x(t),y(t)]}{h} = F'(t)$$

II membro

$$\lim_{h\to 0} fx[x(t),y(t)] \underbrace{\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right]}_{x'(t)} + \lim_{h\to 0} f_y[x(t+h)-y(t+h)] \underbrace{\left[\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right]}_{y'(t)}$$
$$+\lim_{h\to 0} o\underbrace{\left(\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2}\right)}_{0}$$

$$F' = f_x[x(t),y(t)]x'(t) + f_y[x(t),y(t)]y'(t)$$

□

Esempio 6.

$$z = x^2y \qquad \begin{cases} x(t) = -t & F(t) = z(x(t),y(t)) = -t^2 * t = -t^3 \\ y(t) = t & F'(t) = z' = -3t^2 \end{cases}$$

$$F'(t) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_x(x(t),y(t))y'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = -3t^2$$

3.2 Teorema differenziabilità delle funzioni composite

Teorema 5. *Siano $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n funzioni in k variabili $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1,t_2,\dots,t_k) \\ x_2 = x_2(t_1,t_2,\dots,t_k) \\ \dots \\ x_n = x_n(t_1,t_2,\dots,t_k) \end{cases} \tag{3.3}$$

Componiamo le funzioni ottenendo la funzione composita

$$f[x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k)]$$

Siano $(x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k))$ n funzioni definite in un insieme aperto $D \leq R^n$ e siano derivabili parzialmente rispetto a t_i $(i = 1,2,\dots,k)$.
Sia $f(x_1,\dots,x_n)$ una funzione definita in A contenente in codominio $x(D)$ e sia f differenziabile in A
Allora la funzione composita $F(t) = x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k)$ è derivabile parzialmente rispetto a $t_i(i = 1,2,\dots,k)$ nel punto t.

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) + \frac{\partial x_i}{\partial t_i}(t) \text{ (si somma sugli inasci ripetuti)}$$

Inoltre, se f *e* $(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k))$ *sono di classe* C^1*, anche* $F = f(x(t)) \in c^1$ *ed è quindi differenziabile.*

$$\hbar = k = 2 \text{ coordinate polari}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \varphi \\ t_2 = \varphi \end{cases} \quad f(x,y) \quad \begin{cases} x = x(\varphi, \varphi) \\ y = y(\varphi, \varphi) \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}x\rho + \frac{\partial f}{\partial y}y\rho = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}x\rho + \frac{\partial f}{\partial y}y\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\sin\varphi)$$

3.3 Differenziale secondo

Definizione 20. d^2f *è il differenziale del differenziale primo*

$$d^2f = d(df) = d(f_xh + f_yk) = \frac{\partial}{\partial x}(f_xh + f_yk)h + \frac{\partial}{\partial x}(f_xh + f_yk)k =$$
$$= (f_{xx}h + f_{xy}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k = f_{xx}h^2 + f_{xy}khx + f_{xy}hx + f_{yy}k^2$$

Se $f(x,y) \in c^2$ *(derivate parziali II continue) vale il teorema di Schwarz (2.2.1), cioè* $fyx = fxy$ *– Il differenziale secondo allora diventa*

$$d^2f = fxxh2 + 3fxyhk + fyyk^2$$

Per ipotesi il gradiente è nulla $\Delta f(x_0, y_0) = 0$ *cioè* $\nabla f(x_0, y_0) \equiv (f_x(x_0, y_0), fy(x_0, y_0)) \equiv (0,0)$ *ovvero le derivate parziali prime sono nulle* $fx(x_0, y_0) = 0$, $fy(x_0, y_0) = 0$ *– Ciò comporta l'annullarsi del differenziale primo*

$$df(x_0, y_0) = fx(x_0, y_0)h + fy(x_0, y_0)k = 0 * h + 0 * k = 0$$

Per cui nella foruma di Taylor si ha:

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \text{ Forme quadratiche}$$

Il segno di $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ *è lo stesso di* $\frac{1}{2!}d^2f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$*, cioè è lo stesso differenziale secondo.*
Per ipotesi $detHp(x_0, y_0) > 0$*,* $(f(x,y) \in C^2_A \Rightarrow$ *vale il teorema di Schwarz)*

$$\begin{vmatrix} fxx(x_0, y_0) & fxy(x_0, y_0) \\ fyx(x_0, y_0) & fyy(x_0, y_0) \end{vmatrix} = fxx * fyy - fxy^2 > 0$$

e $fxx(x_0, y_0) > 0$
Ciò implica per definizione che la forma quadratica associata ad $Hp(x_0, y_0)$ *è positiva tutto ciò implica* $d^2f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) > 0$
Per cui $f(x,y) - f(x_0, y_0) > 0$

$$\text{cioè } f(x,y) > f(x_0, y_0) \qquad \text{difinizionidi di Minimo relativo (2.3)}$$

quindi (x_0, y_0) *è un punto di muinimo relativo*
Analogamente, se $f(x_0, y_0) < 0$ *si dimosta che* (x_0, y_0) *è un punto di massimo relatovo (2.3)*

3.3.1 Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo

Sia $f(x,y)$ definita in A, $f(x,y) \in C^2_A$, $(x_0,y_0) \in A$
Se $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

$$detH_F(x_0,y_0)\begin{cases} > 0 \begin{cases} fxx(x_0,y_0) > 0 \text{ Minimo relativo} \\ fxx(x_0,y_0) < 0 \text{ Massimo relativo} \end{cases} \\ < 0 \text{ Punto di sella } (\underline{\text{non sono presenti Max e min}}) \\ = 0 \text{ Non si vsa se sono presenti Max o min} \end{cases}$$

Esempio 7. *Massimi e minimi*

1. $z = x^2 + y^2$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} zx = 0 \\ zy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad in(0,0)\ \nabla f = 0 \text{ può MAX o MIN}$$

$$detH_f = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{zy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

2. *Semisuperfici sferica* $z = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{-x}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \end{cases} \qquad \text{dominio } D\ x^2 - y^2 < \Gamma^2$$

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (0,0) \leftarrow D \text{ può esserci un Max e un Min}$$

Verifico e trovo che $detH > 0$ $f_{xx} < 0 : in(0,0)$ *è presente il Max.*

3. *Cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

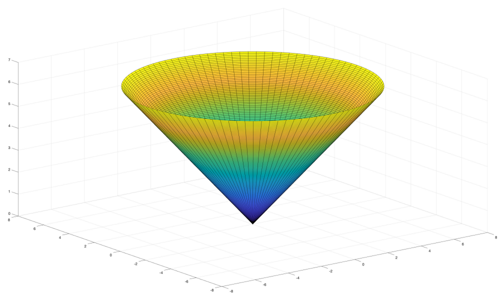


Figura 3.1: Rappresentazione grafica della conica

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Nota 1. *sarebbe (0,0) ma il dominio delle derivate* $x^2 + y^2 > 0$ *cioè* $\forall (x,y) \in R^2 - \{0,0\}$ *in (0,0) non è derivabile.*

Sappiamo[1] *che in (0,0) c'è un minimo assoluto*

[1] si vede geometricamente

4. $z = x^4 + y^4$

$$\begin{cases} z_x = 4x^3 = 0 \\ z_y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \textit{in (0,0) può esserci Max/Min relativo}$$

$$detH = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} f_{xx}(0,0) = 12x^2|_{0,0} = 0 \\ f_{xx}(0,0) = 0 \\ f_{yy}(0,0) = 12y^2|_{0,0} = 0 \end{matrix}$$

$detH = 0 \rightarrow$ non so se in (0,0) c'è un massimo o un minimo relativo.
Per definire se esiste un massimo o un minimo relativo uso:

$$\begin{matrix} \min f(x_0, y_0) \leq f(x,y) & 0 \leq x^4 + y^4 & x^4 + y^4 \geq 0 & \underline{SI}\ \forall(x,y)\ \textit{risulta da}\ x^4 + y^4 \geq 0(0,0) \min \\ \max f(x_0, y_0) \geq f(x,y) & 0 \geq x^4 + y^4 & x^4 + y^4 \leq 0 & \underline{NO} \end{matrix}$$

3.3.2 Ricerca del massimo e del minimo assoluti

Condizioni sufficienti per l'essistenza del Massimo e del minimo assoluto

Teorema di Weierstrass

Teorema 6. *Sia f(x,y) definita in D, i continua in D chiuso e limitato, allora il minimo e massimo assoluto in D.*

Ipotesi:

$$f \in C^0_D$$

D chiuso e limitato

Tesi: $\exists \min$ *con* $m = f(x_1, y_1), M = f(x_2, y_2)$ *tale che* $m \leq f(x,y) \leq M$

Ricerca dei punti di Massimo e minimo assoluti:

- *nei punti di massimo o minimo relativo;*
- *nei punti di non derivabilità;*
- *nei punti di frontiera.*

Vanno ricercati quindi nei seguenti modi:

1. $\nabla f = 0$ *dove il gradiente si annulla;*
2. $\exists \nabla f$ *dove il gradiente non esite;*
3. *sulla FD sulla frontiera.*

Studio sulla frontiera

Sia ξ una superficie definita in un insieme D e sia FD la mia frontiera
La frontiera FD è una curva[2] e suoi punti linitano l'iperbole ξ.
Possiamo definire la frontiera in forma parametrica

$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

[2] o insieme di curve

Calcolo la funzione $f(x,y)$ sui punti della frontiera

$$f(x,y) \to F(t) = f(x(t), y(t)) \text{ funzione di 1 variabile} \tag{3.4}$$

studio del massimo e minimo per $F(t) = 0 \begin{cases} F'' > 0 \min \\ F'' < 0 \max \end{cases}$

Calcolo i valori della funzione nei punti di Massimo/minimo e li confronto con i valori Massimo/minimo relativi nel dominio e i valori nei punti di non derivabilità. La frontiera può anche essere in forma cartesiana

$$y = y(x) \quad a \le x \le b \tag{3.5}$$

Calcolo la funzione nei punti della frontiera e procedo come visto prima $f(x,y) \to F(t) = f(x(t), y(t))$

Esempio 8. *Determinare il massimo e il mino assoluto di* $f(x,y) = 1+2x^2+\sqrt{x^2+y^2}$ *in* $D : \{x^2+y^2 \le \Delta\}$

1. $\nabla f = 0$
2. $\nexists \nabla f$
3. FD

1. $\nabla f(x,y) = 0 \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + \frac{x}{|x|} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\nabla f = 0$ *in (0,0) che non è nel C.E. delle derivate parziali per cui* $\nabla f \ne 0 \ \forall (x,y) \in A$ *A dominio* f_x *e* f_y

2. $\nexists \nabla f$ *le derivate parziali perime sono definite* $\forall (x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \ne 0$ *cioè in* $R^2 - \{0,0\}$

$$(0,0) \text{ pnto di non derivabilità } f(0,0) = 1$$

3. *FD*

$$D : \{x^2+y^2 \le 4\} \qquad FD : x^2+y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Calcolo $f(x,y)$ *sui punti di frontiera*

$$f(x,y) = F(t) = 1 + 2(2\cos t)^2 + \sqrt{(2\cos t)^2 + (2\sin t)^2} = 1 + 8\cos^2 t + 2 = 3 + 8\cos^2 t$$

Calcolo $F(t)$ *agli estremi* $t \in [0; 2\pi]$ $F(0) = 3+8 = 11$ $F(2\pi) = 3+8 = 11$
Studio del massimo e del minimo di $F(t)$

$$F'(t) = 0 \quad 16\cos t(\sin t) = -16\sin t\cos t = 0 \quad t = 0 \quad t = \pi \quad t = \frac{\pi}{2} t = \frac{3}{2}\pi$$

$$F''(t) = 16(\cos t\cos t - \sin t\sin t) = 16(\sin^2 t - \cos^2 t)$$

Ottenuti mettendo a F(t) e valori dove ci dovrebbero essere un massimo e un minimo $\begin{cases} F''(\pi) = 16(-1) = -16 < 0 \ \max \ su\ FD & F(\pi) = 3+8 = 11 \\ F''(\frac{\pi}{2}) = 16(-1) = -16 > 0 \ \min \ su\ FD & F(\frac{\pi}{2}) = 3 \\ F''(\frac{3\pi}{2}) = 16(-1) = -16 < 0 \ \min \ su\ FD & F(\frac{3\pi}{2}) = 3 \end{cases}$

Ho ottenuto i sequenti valori

1. $(x, y) \equiv (0, 0)$ *il* min *è 1 e viene assunto in (0,0)*

11. $t = 0, \pi, 2\pi$ *il* max *è 11 e viene assunti in* $\begin{cases} x = 2\cos 0 \\ y = 2\sin 0 \end{cases}$

3. $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ $\begin{cases} x = 2\cos \pi \\ y = 2\sin \pi \end{cases}$ $(-2, 0)$ $\begin{cases} x = 2\cos 2\pi \\ y = 2\sin 2\pi \end{cases}$ $(2, 0)$

3.3.3 Metodo dei moltiplicatori di di Lagrange

Nel caso in cui $g(x, y) = 0$ non definisca una funzione implicata, per trovare i massimi e minimi vincolati si introduce una funzione ausiliaria, detta lagrangiana, così definita:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \tag{3.6}$$

$F(x, y, \lambda)$ è combinazione lineare delle funzioni $f(x, y)$ E $g(x, y)$ – Il parametro λ prende il nome di Moltiplicatore di Lagrange. I punti di massimo vincolati sono quelli in cui il gradiente di $F(x, y, z)$ si annulla ovvero...

$$\nabla F_{(x,y,z)} = 0 \begin{cases} F_x = fx(x, y) + \lambda g_x(x, y) \\ F_y = fx(x, y) + \lambda g_y(x, y) \\ F_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Si risolve questo sistema di tre equazioni in tre variabili e il valore massimo della funzione è calcolata nei punti soluzioni è il massimo calcolato e il valore minimo della funzione calcolata nei punti soluzione è il massimo vincolato.

Capitolo 4

Integrali Doppi e tripli

4.1 Domini normali (semplici)

Definizione 21. *I domini delle funzioni a più variabili possono presentare una forma di regolarità per cui è possibile delimitare la regione da intervalli e grafici di funzione. Si parla quindi di dominio semplice o normale rispetto alla variabile delimitabile da un intervallo. La normalità di un dominio è molto importante in molte definizioni di integrale multiplo e della sua risoluzione tramite le formule di riduzione. Inoltre la presenza di un dominio regolare permette ulteriori teoremi e formule d'integrazione, come le formule di Gauss-Green, il teorema della divergenza e il teorema del rotore.*

4.1.1 Dominio normale rispetto all'asse x

Il dominio A si definisce normale rispetto all'asse x se è così definito:

$$A = \begin{cases} a \leq x \leq b & x \text{ valria in un intervallo} \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) & y \text{ varia tra due funzioni di } x \end{cases} \tag{4.1}$$

Esempio 9.

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$$

Il dominio B si definisce normale rispetto all'asse x se è così definito:

$$A = \begin{cases} c \leq y \leq d & y \text{ valria in un intervallo} \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) & x \text{ varia tra due funzioni di } y \end{cases} \tag{4.2}$$

Esempio 10.

$$D = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y < x < \sqrt{y} \end{cases}$$

4.1.2 Domini Polarmente normale

Il dominio C si definisce polarmente normale se è costantemente definito:

$$C = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \varphi(\theta) \leq \varphi_2(\theta) \end{cases} \tag{4.3}$$

Esempio 11.

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \tag{4.4}$$

l'angolo varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$*, il segmento* φ *dipende dall'angolo*

$$\theta = 0 \text{ è } \max\varphi = 2$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ è } \min\varphi = 0$$
$$\varphi = 2\cos\theta \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\cos\theta \end{cases}$$

corona circolare $\varphi = r$ $\varphi = R$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ r \le \varphi \le R \end{cases}$$

4.1.3 Definizione di integrale doppio

Definizione 22. *Sia f(x,y) una funzione limitata nel rettangolo* $R = [a,b]x[c,d]$*, coordinata in* $[a,b]$ *e di seconda coordinata in* $[c,d]$ *Deconpongo regolarmante gli intervalli* $[a,b]$ *e* $[c,d]$*,*

$$decomponendo\ [a,b]\ si\ ha \quad D_1 = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$$
$$decomponendo\ [c,d]\ si\ ha \quad D_1 = \{y_0 = a, y_1, y_2, \ldots, y_n = d\}$$

Il prodotto cartesiano $D = D_1 * D_2$ *è una semidivisione del rettangolo R*

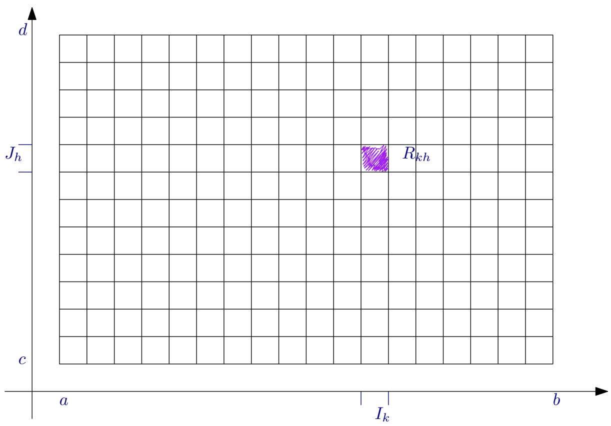


Figura 4.1: Decomposizione del rettangolo R

$$I_k = [x_{k-1}, x_k]\ in\ D_1(k = 1, \ldots, n)$$
$$J_h = [y_{h-1}, y_h]\ in\ D_2(h = 1, \ldots, n)$$

Il prodotto cartesiano $I_k * J_h$ *individua il generico subrettangolo* R_{kh} *della semidivisione.*
Prendo un generico punto del subrettangolo $R_{kh}(x_k, y_h)$ *e faccio il seguente prodotto:*

$$f(x_k, y_h) * misR_{kh}\ con\ misR_{kh} = misI_k * misJ_h\ area\ del\ subrettangolo$$

Con l'integrale doppio consudero il volume del parallelepipedo.
Geometricamente considera il pettangolo R_{kh} *e la parte di superficie* $f(x,y)$ *che vi si presenta il prodotto* $f(x_i, y_n) * misR_{kh}$ *è il volume del parallelepipedo di base* R_{kh} *e altezza* $f(x_k, y_h)$*.*

4.2 Somme di Riemann

Definisco le somme di Riemann $\sum_{k=h=1}^{k=m\ h=n} f(x_k, y_h) * R_{kh}$ ciò rappresenta la somma di tutti i volumi dei parallelepipedi di base R_{kh} e altezza $f(x_k, y_h)$ che si possono ottenere nel rettangolo R.
Infittisco le decomposizioni D_1 e $D_2(m \to \infty; n \to \infty)$, ottenendo così un numero sempre maggiore di subrettangoli di ampiezza via via minore.

$$misR_{kn} = misI_k * misI_n = \frac{b-a}{m} * \frac{d-c}{n} \to 0 \text{ per } m, n \to \infty \tag{4.5}$$

Con l'infittirsi della decomposizione, aumenta la precisione con cui ciascun parallelepipedo approssima il volume sotto al grafico delle funzione in ogni R_{kh}.
Al limite, le somme di Riemann daranno il volume sotto al grafico della funzione in un certo rettangolo (in generale dominio).
Se esiste finito $\lim_{n\to\infty\ m\to\infty} \sum_{h=k=1}^{k=m\ h=n} f(x_k.y_n) * misR_{kh}$ tale limite è definito ingrale doppio di f(x,y) nel dominio $R = [a, b] * [c, d]$

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty\ m\to\infty} \sum_{h=k=1}^{k=m\ h=n} f(x_k.y_n) * misR_{kh} \tag{4.6}$$

Somme superiori e somme inferiori

Definizione 23. *È possibile definire l'integrale doppio anche con le somme superiori e le somme inferiori*

$$Somme\ inferiori\ s(f,R) = \sum inf_{R_{kh}} f(x_k.y_n) * misR_{kh}$$

prendo il minimo valore che la funzione assume nel subrettangolo R_{kh} e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per difetto individuato dalla funzione.

$$Somme\ superiori\ s(f,R) = \sum sup_{R_{kh}} f(x_k.y_n) * misR_{kh}$$

prendo il massimo valore che la funzione assume nel subrettangolo R_{kh} e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per eccesso quello individuato dalla funzione all'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono, le somme superiori decrescono. Le somme superiori e le somme inferiori convergono ad uno stesso valore, detto integrale doppio[1]

$$\lim s = \lim S = \iint_R f(x,y)dxdy$$

[1] è il valore sotto al grafico della funzione

4.2.1 Proprietà dell'integrale doppio

$$\text{Linearità} \begin{cases} 1)\ \iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]dxdy = \iint_D f_1(x,y)dx * dy + \iint_D f_2(x,y)dx * dy \\ 2)\ \iint_D \alpha f_1(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f_2(x,y)dx * dy \end{cases}$$

Assitività 3) Sia $D = D_1 \cup D_2$ $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dx * dy + \iint_{D_2} f(x,y)dx * dy$

$$\text{Monotonia} \begin{cases} 4)\ \text{Sia } f(x,y) \le g(x,y)\ \forall (x,y) \in D \\ \quad \iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dx * dy \\ 5)\ \text{Sia } D_1 \subset D \\ \quad \iint_{D_1} f(x,y)dxdy < \iint_D f(x,y)dx * dy \\ 6) |\iint_D f(x,y)dxdy| \le \iint_D |f(x,y)|dx * dy \end{cases}$$

4.2.2 Formula di riduzione

- Sia $A \subset R^2$ un dominio normale rispetto all'asse x

$$A = \begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{cases}$$

  Allora $\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right)$
  calcolo prima $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ che è una funzione della sola x $\not b(x)$

$$\text{per calcolo} \int_a^b \not b(x)dx$$

- Dominio polarmente normale
  Effettua un cambio di coordinate, passando dalle coordinate cartesiane a quelle polari

$$\text{L'integrale doppio è} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

  Passando alle coordinate polari

$$\begin{matrix} \text{del dominio } D(x,y) \text{ passerò al dominio } D'(\varphi,\theta) \\ \text{della funzione } f(x,y) \text{ passerò al dominio } f(\varphi,\theta) \end{matrix} \begin{cases} x = \varphi\cos\theta \\ y = \varphi\sin\theta \end{cases} \qquad \varphi = \sqrt{x^2+y^2}$$

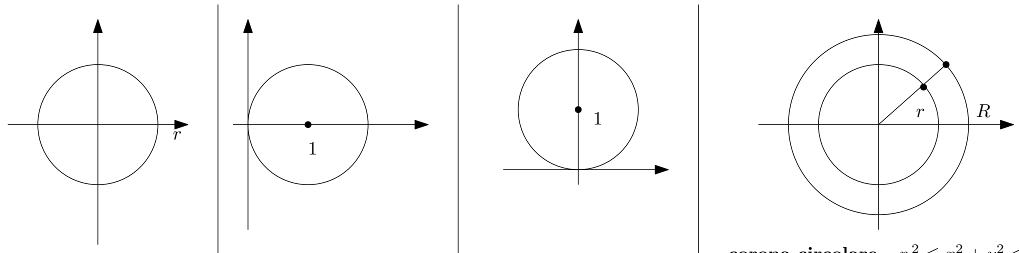
  e da differenziali $dxdy$ passerò ai differenziali $d\varphi d\theta$.
  Si dimostra che nel passaggio ad altre coordinate il differenziale è $|j|d\varphi d\theta$, dove $|j|$ è il determinante della matrice Jacobiana che contiene le derivate parziale prime

$$|J| = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\theta \\ y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} \to |J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & \varphi\cos\theta \end{vmatrix} = \varphi\cos^2\theta + \varphi\sin^2\theta = \varphi \tag{4.7}$$

  Per cui passando da $dxdy$ alle coordinate polari avrò $\varphi d\varphi d\theta$ così l'integrale doppio diventa:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi,\theta)\varphi d\varphi d\theta$$

Esempi di domini polarmente normali



$x^2 + y^2 \leq r^2$
$\{ x = \varphi \cos\theta; y = \varphi \sin\theta$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$
$\varphi^2 \cos^2\theta + \varphi^2 \sin^2\theta \leq r^2$
$e^2 \leq r^2 \varphi \leq r$
$\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \varphi \leq r$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$
$x^2 - 2x + \cancel{1} - \cancel{1} + y^2 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$
$\varphi^2 - 2\varphi\cos\theta = 0$
$\varphi = 2\cos\theta$
$\varphi = 2r\cos\theta$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$
$x^2 + y^2 - 2y + \cancel{1} - \cancel{1} = 0$
$x^2 + y^2 - 2y = 0$
$\varphi^2 - 2\varphi\sin\theta$
$\varphi = 2\cos\theta$
$\varphi = 2r\cos\theta$

corona circolare $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$
$\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi; r \leq \varphi \leq R$

Figura 4.2: Esempi di domini polarmente normali

4.2.3 Baricentro di un dominio normale

Definizione 24. *Sia D un demonio normale del piano. Si definisce baricentro del dominio D il punto di coordinate (x_0, y_0) tale che:*

$$x_0 = \frac{1}{misD} \iint_D xdxdy \quad y_0 = \frac{1}{misD} \iint_D ydxdy$$

$misD$: misura (`area`) del dominio D.

Esempio 12. *calcolare il baricertro del dominio* $D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$misD = A_{rettangolo} = 2 * 1 = 2$$

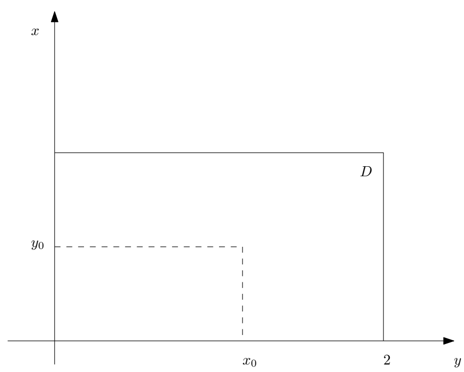
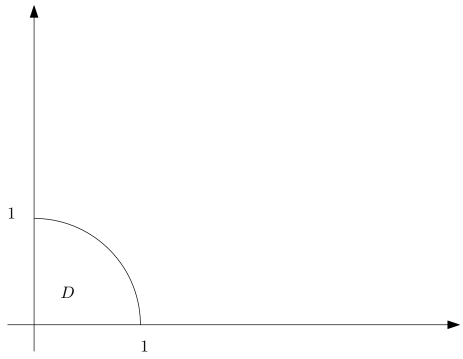


Figura 4.3: Baricentro di un dominio normale

$$x_0 = \frac{1}{misD} \iint_D xdxdy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 xdy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx |xy|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^2 xdx = \frac{1}{2} |\frac{x^2}{2}|_0^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} = 1$$
$$y_0 = \frac{1}{misD} \iint_D ydxdy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 ydy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4} |x| = \frac{1}{2}$$

Calocolare il baricentro del dominio $D = \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$



$$D = \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 1 \end{cases} \qquad misD = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{misD} \iint_D x dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \varphi^2 \cos\theta d\theta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\varphi^3}{3} \cos\theta \right|_0^1 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi \left| \sin\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi \\ y_0 &= \frac{1}{misD} \iint_D x dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \varphi^2 \sin\theta d\theta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\varphi^3}{3} \sin\theta \right|_0^1 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin\theta d\theta = \frac{4}{\pi} * \frac{1}{3} \left| -\cos\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

4.2.4 Domini normali in R^3

Definizione 25. *Il dominio* V *definisce normale rispetto al piano* xy *se si può così descrivere:*

$$\begin{cases} (x,y) \in D \quad \text{normale} & (x,y) \text{ appartengono ad un dominio normale di } R^2 \\ \alpha(x,y) \quad \le z \le \beta(x,y) & z \text{ è compresa tra funzioni di } x \text{ e } y \end{cases}$$

$\forall (x,y) \in D$ *incontro prma la superficie minorante e per la superficie maggiorante.*

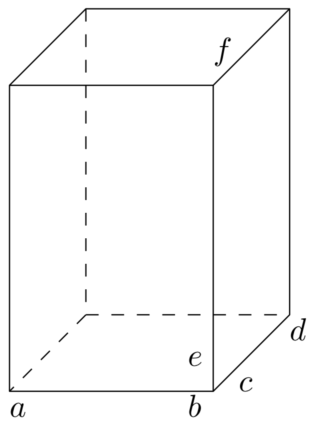
4.3 Integrali tripli

Definizione 26. *Sia* $f(x,y,z)$ *una funzione limitata in un insieme* V*, considero il parallelepipedo*

$$V = [a,b] * [c,d] * [e,f]$$

Decompongo regolarmente $[a,b], [c,d], [e,f]$
rispettivametne in n, mek
intervalli $I_n = [x_0 = a, \ldots, x_n = b]$,

$l_m = [y_0 = c, \ldots, y_m = d]$, $l_k = [z_0 = e, \ldots, z_k = f]$



Il prodotto cartesiano $I_n * I_n * I_k$ *individua il generico subparallelepipedo* $V_{n,m,k}$.

Definisco le somme di Riemann: $\sum f(x,y,z) * misV_{n,m,k}$[2]
All'infittirsi delle decomposizioni le somme di Riemann convergono ad uno stezzo valore, tale valore è definito integrale triplo di $f(x,y,z)$ in V

$$\lim_{m\to\infty\ n\to\infty\ k\to\infty} \sum f(x,y,z) misV_{n,m,k} = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

Oppure, definisco le somme inferiore e le somme superiori

$$\begin{array}{cc} \text{Somme inferiori} & \sum misV_{n,m,k} * \min_{V_{n,m,k}} f(x,y,z) \\ \text{Somme superiori} & \sum misV_{n,m,k} * \max_{V_{n,m,k}} f(x,y,z) \end{array}$$

All'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono mentre le somme superiori decrescono. Se convergono ad una stesso valore, tale valore è definito integrale triplo di $f(x,y,z)$ in V

$$\lim s(f,V) = \lim S(f,V) = \iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

4.3.1 Formule di riduzione per gli integrali tripli

Sia $g(x,y)$ integrabile in un dominio normale V

$$V = \begin{cases} \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y) \\ (x,y) \in D \end{cases} \qquad \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{a(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Se il dominio D è normale rispetto all'asse x

$$V = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y) \end{cases} \qquad \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_\theta^\theta dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Se il dominio D è normale rispetto all'asse y

$$V = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y) \end{cases} \qquad \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{a(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Se il dominio D è polarmente normale

$$V = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta) \\ \alpha(\varphi,\theta) \leq z \leq \beta(\varphi,\theta) \end{cases} \qquad \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \varphi d\varphi \int_{\alpha(\varphi,\theta)}^{\beta(\varphi,\theta)} f(\varphi,\theta,z)dz$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha(x,y) & \rightarrow & \alpha(\varphi,\theta) \\ \beta(x,y) & \rightarrow & \beta(\varphi,\theta) \\ f(x,y,z) & \rightarrow & f(\varphi,\theta,z) \\ dxdydz & \rightarrow & pd\theta d\varphi dz \end{array}$$

[2] $misV_{n,m,k}$: misura il volume del parallelepipedo

4.3.2 Significato geometrico degli integrali

$\int$	area
$\iint$	volume
$\iiint$	nessun significato geometrico

4.3.3 Coordinate polari e coordinate cilindriche

$(x, y) \to (\varphi, \theta)$

$$\begin{cases} x = \varphi \cos\theta \\ y = \varphi \sin\theta \end{cases} \qquad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \quad detJ = \varphi$$

coordinate alindriche $(x, y, z) \to (\varphi, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = \varphi \cos\theta \\ y = \varphi \sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad detJ = \varphi$$

coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \varphi \sin\theta \cos\alpha \\ y = \varphi \sin\theta \sin\alpha \\ z = \varphi \cos\theta \end{cases}$$

4.3.4 Interazione per fette

Considera un volume V e lo interseco con un piano $z = k$. Così ottengo una sezione S_z

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Al variare di z tra due valori, cioè facendo variare S_z in funzione di z descrivo il volume V.

Esempio 13.

$$\int_0^1 S_z dz$$

S_z è un cerchio di raggio $R(z)$ che depende da z

$$\begin{array}{cc} z = 1 - x^2 + y^2 & x^2 + y^2 = 1 - z \\ R^2 = 1 - z & R(z) = \sqrt{1 - z} \end{array}$$

$S_z = \pi R^2 = \pi(1 - z)$

$$\iint_T f(x, y, z) dxdydz = \int_0^1 \pi(1 - z) dz$$

4.3.5 Integrali curvilinei

Curve in R^2 e in R^3

Definizione 27. *Si definisce curva una coppia del tipo (γ, Γ) con*

$$\vec{F}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots)\ t \in [a, b]$$

si tratta di un'applicazione $R \to R^n$ ad un valore di t associo n valori
Le curve possono essere:

- *In forma cartesiana* $\begin{matrix} z = f(x,y) & (R^3) \\ y = f(x) & (R^2) \end{matrix} \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$

- *In forma polare* $\varphi = \varphi(\theta) \quad \varphi = 2r\cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

- *In forma parametrica* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Nello spazio una curva è l'intersezione tra due superfici.
Ogni curva ha anche un sostegno, che è il suo grafico nek piano o nello spazio.
Una curva si definisce chiusa se

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b] \;\; se \;\; \vec{F}(a) = \vec{F}(b) \quad \begin{matrix} x(a) = x(b) \\ y(a) = y(b) \end{matrix}$$

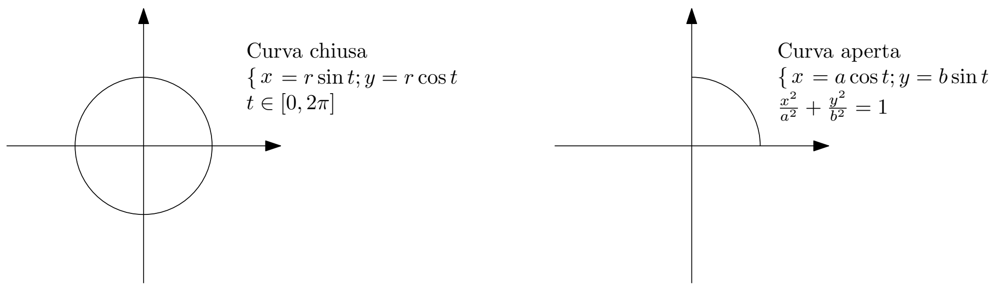
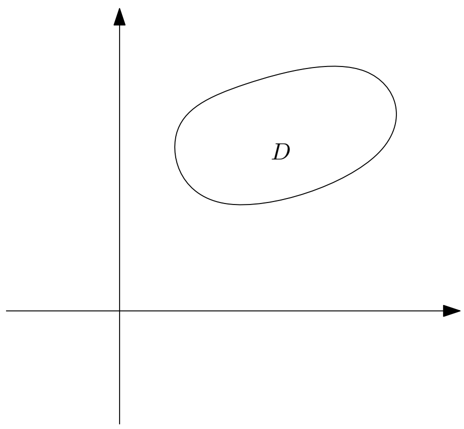


Figura 4.4: Differenza tra curva chiusa e aperta

Una curva chiusa la frontiera di un dominio



$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b] \tag{4.8}$$

Una curva si devinisce semplice se presi due qualunque $t_1 \neq t_2$ rusylta $\vec{F}(t_1) \neq \vec{F}(t_2)$ cioè

$$\begin{cases} x(t_1) \neq x(t_2) \\ y(t_1) \neq y(t_2) \\ z(t_1) \neq z(t_2) \end{cases}$$

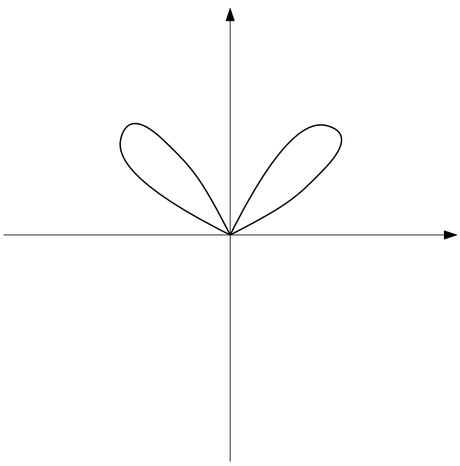
Curva semplice $\gamma\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \quad y = \sqrt{x}$ $\gamma\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad y = x^2$ *Curva non semplice*[3]

Una curva è regolare se è di classe c^1 e le sue derivate prime non sono mai nulle contemporaneamente

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{F}(t) \in c' \\ t \in [a, b] \end{matrix} r'(t) = (x', y', z'(t) \dots) \neq (0, 0, 0 \dots)$$

Curva regolare

$$\gamma z(t) = \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad f \in [-1, 1] \quad z'(t) = \begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases} \quad \begin{matrix} \textit{non sono mai nulle} \\ \textit{contemporaneamente} \end{matrix}$$



$$r(t) = \begin{cases} x = t(1 - t^2)^2 \\ y = t^2(1 - t^2) \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

Una curva è regolare a tratti se è l'unione di curve regolari

$$\gamma r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \textit{ in } x = 0 \textit{ c'è una cuspide perciò non è regolare } y = \sqrt[3]{x^2}$$

$r(t)$ può però essere vista come l'unione di che curve regolari

$$\gamma' r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 0]$$

$$\gamma'' r'' = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

sostegno nel II quadrante

$$\gamma = \gamma' \vee \gamma''$$

4.3.6 Lunghezza di una curva

Definizione 28. *Sia la curva γ di equazione $\vec{F}(t)$, essa si definisce rettificabile se esiste finito l'estremo superiore della poligonale $L(p)$ al variare della decomposizione.*

$$sup_D L(\Delta) \tag{4.9}$$

[3] $t_1 \neq t_2$ ho due stessi valori della curva

Suddivido la curva in tanti segmenti che formano la poligonale $L(D)$. All'infittirsi la poligonale approssimo sempre seguo la lunghezza della curva.
Se la curva $\vec{F}(t)$ è di classe c^1 allora essa è rettificabile

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \tag{4.10}$$

e la sua lunghezza vale $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z(t)]^2 + \dots dt}$

4.3.7 Lunghezza di una curva in forma cartesiana

Se la curva γ nella forma $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$ ha come sostegno il grafico di $y = f(x)$
La lunghezza della curva è $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

4.3.8 Lunghezza di una curva polare

Se le curve è nella forma

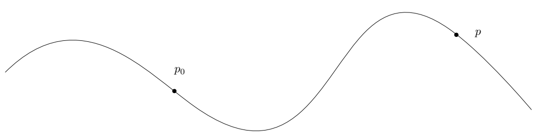
$$\begin{cases} e = e(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

La sua lunghezza vale:

$$L_\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\varphi^2(\theta) + [\varphi'(\theta)]^2} d\theta$$

4.4 Ascissa Curvilinea

È possibile effettuare combiamenti di parametri per descrivere una curva. Fra tutte le rappresentazioni parametriche di una curva regolare ha particolare **importanza** geometrica quella che l'ascissa curvilinea.
Prendiamo una curva γ di R^2 e un suo punto P_0



Ad ogni punto P della curva associamo un valore $S(P)$ che è uguale alla lunguezza dell'arco di curva congiungente P_0 e P
Così definendo una corrispondenza biurivoca tra i punti della curva e i punti di un certo intervallo $[a, b]$, cosiché se $S(p_1) = a$ $S(P_2) = b$ la lunqhezza dell'arco congiungente P_1 con P_2 è $|b - a|$

Sia $(\gamma, \vec{r}(t))$ una curva regolare; definiamo l'ascissa curvilinea[4] come:

$$S(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)] + [y'(\tau)]} d\tau$$

Per il teorema del calcolo integrale

$$S'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \quad S(t) \text{ è integrabile}$$
$$S'(t) = \frac{ds}{dt} \quad S : [a, b] \to [0, L]$$

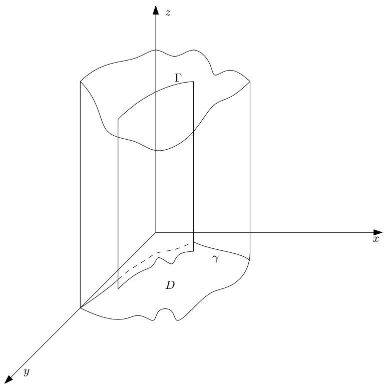
[4] o lunghezza d'arco

La lunghezza della curva così vale:

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \int dS \tag{4.11}$$

4.5 Integrale corvilineo

Prendiamo una funzione f(x,y) definita in un insieme D e una curva γ interno a D.



Calcoliamo la funzione nella curva γ e determiniamo una curva Γ dello spazio.
L'area delimitata dal cilindro di basi γ e Γ se $f(x,y) > 0$ è il valore dell'integrale curvilineo di $f(x,y)$ esteso a γ.

4.5.1 Definizione di integrale curvilineo

Data una curva regolare $(\gamma, \vec{r}(t))$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a,b] \tag{4.12}$$

e una funzione $f(x,y,z) \in \mathbb{C}-$ definita in D_1 con la curva inclusa D, si definisce integrale curvilineo di $f(x,y,z)$ esteso alla curva

$$\int_\gamma f(x,y,z)ds = \int_a^b f[x(t),y(t),z(t)] * \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

4.5.2 Baricentro di una curva

Si definisce baricentro di una curva quel punto di coordinate (x_0, y_0) per cui

$$x_0 = \frac{1}{L_\gamma}\int_\gamma xds \quad y_0 = \frac{1}{L_\gamma}\int_\gamma yds \quad \text{con } L_\gamma \text{ lunghezza della curva } \gamma$$

Esempio 14.

$$\gamma = \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$L_\gamma = \int_\gamma ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 + \cos t)^2}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 tdt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} * \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin tdt$$
$$= \left|\frac{3\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$x_0 = \frac{1}{L_\gamma}\int_\gamma xds = \frac{2}{3}3\cos^4 t \sin tdt = -\frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\sin t * \cos^4 tdt$$
$$y_0 = \frac{1}{L_\gamma}\int_\gamma yds = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 t + \cos tdt = \frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^4 t \cos tdt = \frac{1}{10}\left|\sin^5 t\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10}$$

4.5.3 Superfici e integrali di superficie

Superfici

Definizione 29. *Sia definizsce superfice in R^3 una coppia (Σ, r) dove Σ è il sostegno (grafico) $\in R^3$ ed r è la parametrizzazione $d\Sigma, r \in \mathbb{C}^0_{\dot{A}}$.*
$\dot{A}$ insieme aperto connesso di R^2 per cali $r(A) = \Sigma$, r calcolata nei punti di A e da la superficie. r è un'applicazione vettoriale $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = x(x,v)\vec{L} + y(u,v)\vec{J} + z(u,v)\vec{k}$ $(u,v) \in A$ $R^2 \to R^3$ ad ogni punto di A del piano, associo un punto di Σ nello spazio.
Una superficie si dice semplice $\vec{r}(u,v)$ è 1-1, cioè se $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ sono 1-1 (cioè biurivoche, invertite) – Una superficie si dice regolare a tratti se è firmata dall'unione di un numero finito di superfici di classe C^1 regolari.

Una superficie è di classe C^k_A se $\vec{r}(u,v) \in C^k_A$ cioè $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \in c^k_A$

Una superficie si dice vegolare se $\vec{r}(u,v) \in C'$ e la matrice delle derivate parziali prime ha rango 2
Una superficie si dice chiusa se è limitata e il suo bordo è l'insieme ruoto (non ha bordo).

Teorema 7. *Le superfici cartesiane di classe c^1 sono regolari:*

Esempio 15.

Superficie sferica: $z = \pm\sqrt{R^2 + x^2 - y^2}$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *definita su* $D : \{x^2 + y^2 \le R^2\}$

Superficie corta: $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$

4.5.4 Piano tangente e versore normale

Prendiamo un dominio $A < R^2$ e un suo punto $P(u_0, v_0)$. Prendo due linee in A passanti per P, sulla superficie Σ ho due curve.
Sia $\vec{r}(u,v)$ l'equazione della superficie Σ e siano $\vec{r}(u_0, v)$ e $\vec{r}(u, v_0)$ le surve che si chiamano linee coordinate superficie[5], i vettori tangenti alle linee coordinate sono

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$$
$$\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

Se il prodotto vettoriale non è nullo, i vettori sono linearmente ma pendenti, quindi il rango di quella matrice è 2. Allora possiamo dire una superficie σ è regolare se e solo se $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \neq 0$, cioè esiste il piano tangente. $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ e un vettore ortogonale al piano ccontenente $\vec{r}_u$ e $\vec{r}_v$ che è il piano tangente alla superficie.

La sua equazione è:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \text{ in } P(x_0, y_0, z_0)$$

Per avere il versore normale si divide il prodotto vettoriale per la sua lunghezza.

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{||\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v||}$$

In forma cartesiana

$$\vec{r}(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \qquad r_u = r_x = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ f_x \end{cases} \qquad r_v = r_y = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ f_y \end{cases}$$

[5](u,v) si chiamano coordinate locali

Il prodotto vettoriale

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{v} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + k = (-f_x; -f_y; 1)$$

il versore normale

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y}{||r_x \wedge r_y||}$$

4.5.5 Orientazione di una superficie

Sia Σ una superficie regolare ($\vec{r} \in e', P(M) = 2$), si scegla il versore normale in modo che vanando con continuità lungo una curva chiusa γ inclusa in Σ_1 possa ritornare alla posizione inziale in conseguenza della scelta del versore normale in conseguenza della scelta del versore normale. Una superficie cartesiana è orientabile.
Orientamenti possibili sono: versore normale $\vec{n}$ rivolto verso l'alto o il verso basso.

Area di una superficie

Sia Σ una superficie regolare. Si definisce area della superficie Σ il numero reale non negativo definito da

$$S = \iint_{\Sigma} do = \iint_{A} ||\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v dudv = \iint_{A} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

A, B, C componenti del prodotto vettoriale, d_o elemento infinitesimo di area.
Se la superficie Σ è in forma cartesiana $z = f(x, y)$ $(x, y) \in D$
L'area di Σ è

$$S = \iint_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$$

Se la superficie Σ è data in forma implicità $F(x, y) = 0$
Con $F_z = 0$ per il teorema del Din è localmente esplicitabile in $z = f(x, y)$
L'area di σ è:

$$S = \iint_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2} dxdy$$

4.5.6 Integrale Superficiale

Sia $h(x, y, z)$ una funzione definita e continua in un insieme $V \subset R^3$ e sia Σ una superficie inclusa in V, che si prosetta in un dominio piano D. Si definisce integrale superficiale della funzione $h(x, y, z)$ esteso alla superficie Σ:

$$\iint_{\Sigma} h(x, y, z) do = \iint_{A} h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) ||\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v|| dudv$$

Se la superficie Σ è in forma cartesiana

$$\iint_{\Sigma} h(x, y, z) do = \iint_{A} h(x, y, z(u, v)) \sqrt{1 + fx^2 + f_y^2} dxdy$$

4.6 Trasformazione integrali

4.6.1 Formule di Green-Gauss

Prima formula - teorema

Definizione 30. *Sia $f(x,y)$ continua in un insieme D, sia $\frac{\partial f}{\partial x}$ (derivata parziale rispetto a x) continua in D, sia D normale rispetto all'asse y e sia la sua frontiera F_0 una curva regolare a tratti*
Allora vale la seguente relazione

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{FD} f(x,y)dy$$

***FD**: frontiera percorsa nel verso positivo*

Ipotesi:

$f(x,y) \in C^o_D$

$\frac{\partial f}{\partial x} \in C^o_D$

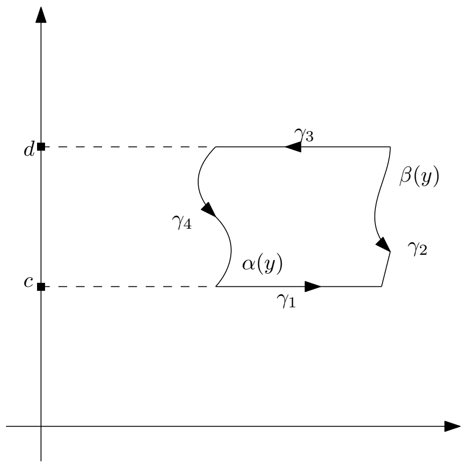
D normale rispetto all'asse y $\quad D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \end{cases}$

F_D *regolare a tratti*

Tesi:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+FD} f(x,y)dy$$

Dimostrazione. Poiché $f(x,y) \in C^o_D$ e $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^o_D$, esse sono integrabili in D
Il dominio D_1 che è normale ripsetto all'asse y, può essere descritto come



$D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \end{cases}$ e la sua frontiera è $FD = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

Sviluppiamo I e II membro della tesi

I membro

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_c^d f[\beta(y), y] - f[\alpha(y), y]dy$$

$$N.B. \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = |f(x,y)|_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} = f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)$$

II membro $F_D : \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$$\int_{+FD} f(x,y)dy = \int_{\gamma_1} f(x,y)dy + \int_{\gamma_2} f(x,y)dy + \int_{\gamma_3} f(x,y)dy + \int_{\gamma_4} f(x,y)dy \tag{4.13}$$

$$\gamma_1 : y = c \quad dy = 0 \qquad \gamma_3 : y = d \quad dy = 0$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = \beta(y) \\ y \in [c, d] \end{cases} \qquad \gamma_4 = \begin{cases} x = \alpha(y) \\ y \in [d, c] \end{cases}$$

$$\int_{+FD} f(x,y)dy = \int_{\gamma_2} f(x,y)dy + \int_{\gamma_4} f(x,y)dy$$

$$\int_{\gamma_2} f(x,y)dy = \int_c f[\beta, y]dy \quad \int_{\gamma_4} f(x,y)dy = \int_d^c f[\alpha(y), y]dy = -\int_c^d f[\alpha(y), y]dy$$

$$\int_{+FD} f(x,y)dy = \int_c^d f[\alpha(y), y]dy - \int_c^d f[\alpha(y), y]dy = \int_c^d f[\alpha(y), y] - f[\alpha(y), y]dy$$

Si è così dimostrata la tesi

Per cui con questa formula di Green-Gauss un integrale doppio – sotto opportune ipotesi – si può trasformare in un integrale curvilineo esteso alla frontiera del dominio di integrazione

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+F_D} f(x,y)dy$$

$\square$

Esempio 16. *Calcolare* $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2}}$ *con* $D = \begin{cases} xy \le \frac{1}{4} \\ x \ge 4 \\ 0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$f(x,y) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad \to \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{+F_D} \arcsin x dy \quad F_D = F_D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

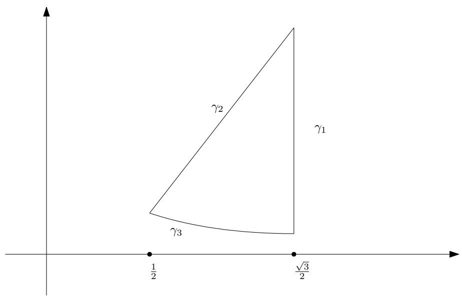


Figura 4.5: Esempio della prima formula di Green-Gauss

$$\gamma_1 : x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \in \left[\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right] \qquad \int_{\gamma_1} \arcsin x dy = 0 \qquad \textit{poiché } dy = 0 (y = \cos t)$$

$$\gamma_2 : y = x \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \textit{da percorrere "al contrario"} \qquad dy = d(x) = 1dx$$

$$-\int_{\gamma_2} \arcsin x dy = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx = -\left| x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\left| x \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2} dx \right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right] = -\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\gamma_3 : \quad y = \frac{1}{4x} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad dy = -\frac{1}{4x} \quad \int_{\gamma_3} \arcsin x dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \left(\frac{1}{4x} dx\right)$$

$$\int_{\gamma_3} \arcsin x dy = -\int_{\frac{\sqrt{3}}{6}}^{\frac{1}{2}} = y \arcsin \frac{1}{4y} dy = y \arcsin \frac{1}{4y} - \int y * \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{16}y^2}} \left(-frac14y^2\right) dy$$
$$= y \arcsin \left(\frac{1}{4y}\right) - \int -\frac{1}{4y} \frac{1}{\sqrt{\frac{16y^2-1}{16y^2}}} dy$$

Si risolve con la sostituzione $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$

$$x = \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$$
$$\sqrt{y^2 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \tan t$$

Seconda formula di Green-Gauss

Teorema 8. *Sia* $f(x,y)$ *continua in un insieme* D*, sia* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continua in* D*, sia* D *un dominio normale rispetto all'asse* x *e sia la sua frontiera* F_D *una curva regolarea tratti. Allora vale la seguente relazione*

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_{+FD} f(x,y)dx \tag{4.14}$$

Ipotesi

$$f(x,y) \in C_D^o$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \in C_D^0$$

D *normale rispetto all'asse* x

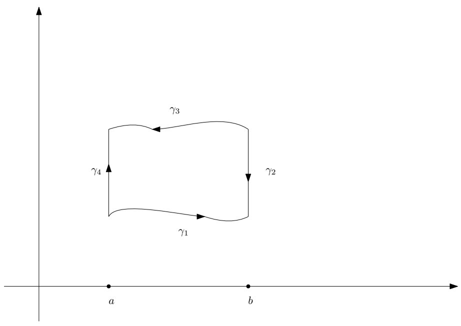
$$D : \begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{cases}$$

F_D *regolare a tratti*

Tesi

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_{+FD} f(x,y)dx$$

Dimostrazione. Purché $f(x,y) \in C_D^o$ e $\frac{\partial f}{\partial y} \in C_D^o$, esse sono integrali in D. Il dominio D_1 che è normale rospetto all'esse x può essere descritto come



$$D = \begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{cases}$$

e la sua frontiera è $F_D = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \wedge \gamma_4$

Svuluppiamo I e II membro della tesi $\int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = |f(x,y)|_{y=g(x)}^{y=h(x)} = f[x,h(x)] - f[x,g(x)]$

I membro

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f[x,h(x)] - f[x,g(x)]dx$$

II membro

$$\int_D f(x,y)dx = \int_{\gamma_1} f(x,y)dx + \int_{\gamma_2} f(x,y)dx + \int_{\gamma_3} f(x,y)dx + \int_{\gamma_4} f(x,y)dx$$

$$\gamma_2 : \quad x = b \quad y \in [g(b), h(b)] dx = 0$$
$$\gamma_4 : \quad x = a \quad y \in [g(a), b(a)] dx = 0$$

$$\gamma_1 : \quad y = g(x) \quad x \in [a,b] \quad \int_{\gamma_1} f(x,y)dx = \int_a^b f[x,g(x)]dx$$
$$\gamma_3 : \quad y = h(x) \quad x \in [b,a] \quad \int_{\gamma_3} f(x,y)dx = -\int_a^b f[x,h(x)]dx$$

per cui

$$\int_{+FD} f(x,y)dx = \int_a^b f[x,g(x)]dx - \int_a^b f[x,h(x)]dx = \int_a^b f[x,g(x)] - f[x,h(x)]dx$$

combiando di segno si dimostra la tesi
con questa formula di Green-Gaun un integrale doppio – sotto opportune ipotesi – si può trasformare in un integrale curvilineo hteso alla frontiera del dominio di integrazione.

$$\iint \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_{FD} f(x,y)dx$$

□

4.6.2 Teorema della divergenza

Definizione 31. *Sia $\vec{F} \equiv (f(x,y), g(x,y)) \in C'_D$ funzione vetoriale, si definisce divergenza di $\vec{F}$*

$$div\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$$ *derivata rispetto ∂x della prima componente più derivata rispetto a ∂y della seconda componente*

Teorema della divergenza

Teorema 9. *Sia $\vec{F} \equiv (f(x,y), g(x,y)) \in C'_0$ e sia D un dominio normale*[6]*, con la sua frontiera F_D regolare a tratti, vale la sequente relazione:*

$$\iint_D div\vec{F}dxdy = \int_{+FD} \vec{F} * \vec{n}ds \qquad \text{con } \vec{n} \text{ versore normale a } F_D$$

Ipotesi:

$$\vec{F} \equiv (f(x,y), g(x,y)) \in C'_0$$

D normale rispetto ad entrambi gli assi F_D regolare a tratti.

Tesi:

$$\iint_D div\vec{F}dxdy = \int_{+FD} \vec{F} * \vec{n}ds$$

Dimostrazione.

$$\iint div\vec{F}dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dxdy \quad \text{per definizione divergenza}$$

Dalle ipotesi valgono le due formule di *Green-Gauss*

$$\iint \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+FD} f(x,y)dy \quad : \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_{+FD} g(x,y)dx$$

Devo così dimostrare che $f(x,y)dx - g(x,y)dy = \vec{F} * \vec{n}ds$
Ricavo il versore normale $\vec{n}$: F_D regolare a tratti ed è quindi ed è quindi esprimibile come unione di curve regolari di espressione parametrica

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b] \quad \exists x'(t).y'(t) \text{ perché la curva è regolare.}$$

[6] rispetto ad entrambi gli assi

Il vettore tangente $\vec{t} = (x'(t), y'(t))$, scambiando le componenti e cambiandone una di segno si ottine il vettore normale $(y'(t), -x'(t))$; dividendo per la norma $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ si ha il versore normale $\vec{n}$

$$\vec{n} \equiv \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} : \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right)$$

Svolgo ora il prodotto scalere $\vec{F} * \vec{n} ds$, ricordando che $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$

$$\vec{F} \equiv (f(x,y), g(x,y))$$

$$\vec{F} * \vec{n} ds = \left(\frac{f(x,y)y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} - \frac{g(x,y)x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= dx \\ y'(t) &= dy \end{aligned} \qquad \vec{F} * \vec{n} ds = f(x,y)dy - g(g,y)dx$$

Quindi

$$\iint_D div\vec{F} dxdy = \int_{+FD} f(x,y)dy - g(x,y)dx \quad div\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Il teorema della divergenza (4.6.2) vale anche in R^3, in forma vettoriale

$$\iiint_V div\vec{F} dxdydz = \iint_{+\Sigma} \vec{F} * \vec{n} ds \quad \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

□

Esempio 17. *calcolare utilizzando il teorema della divergenza* $\iint_D div\vec{F} dxdy$ *con* $\vec{F} \equiv (-2x^3 y; \frac{1}{2}xy)$, $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$div\vec{F} = -\frac{2x^3 y}{\partial x} + \frac{-\frac{1}{2}xy}{\partial y} = -6x^2 y - \frac{1}{2}x$$

$$\iint_D (-6x^2 y - \frac{1}{2}x) dxdy = \int_{+FD} f(x,y)dy + g(x,y)dx = \int_{+FD} -2x^2 ydy + \frac{1}{2}xydx$$

$$FD : x^2 + y^2 = 1 \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{aligned} dx &= -\sin t dt \\ dy &= \cos t dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} -2\cos^3 t \sin t \cos t dt + \frac{1}{2} \cos t \sin t (-\sin t) dt = + \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^4 t \sin t + \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t \right)$$

$$= \left| -\tfrac{2}{5} \cos^5 t - \tfrac{7}{6} \sin^3 t \right|_0^{2\pi} = -\frac{2}{5} - 0 + \frac{2}{5} - 0 = 0$$

Applicazioni della formula di Green-Gauss

Rimandi teorici a partire da (4.6.1) – Calcolo dell'area di dominio piani
Ricordando le formule di `Green-Gauss` $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+FD} f(x,y)dy : \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_{+FD} f(x,y)dx$ nella formula dell'area $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ o $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ per cui $f(x,y) = x$ o $f(x,y) = y$
Si ha così $A = \iint_D dxdy = \int_{+FD} xdy = -\int_{+FD} ydx \rightarrow \int_{+FD} xdy - \int_{+FD} ydx = 2\iint_D dxdy$ si ha:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_{+FD} xdy - ydx}$$

Esempio 18. *Calcolare l'area del dominio delimitato dall'ellisse con semiassi a e b*

$$F_D : \begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{matrix} dx = a\sin t \\ dy = b\cos t \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \iint dxdy &= \frac{1}{2}\int_{+FD} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t(b\cos t) - b\sin t(-a\sin t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t + ab\cos^2 t + ab\sin^2 t = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = ab\pi \end{aligned}$$

4.7 Forma differenziali Lineari

Si definisce differenziale lineare ω

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow \omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$$
$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow \omega = F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$$

4.7.1 Integrazione delle forme differenziali

Definizione 32. *Sia ω una forma differenziale continua in un insieme D*[7] *e sia γ una curva regolare a tratti contenuta in D, di equazioni parametriche $\gamma \equiv (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]$. Si definisce integrale della forma differenziale esteso alla curva γ*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega ds = \int_\gamma F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz = \int_a^b F_1(x(t),y(t),z(t))x'(t) \\ +F_2(x(t),y(t),z(t))y'(t) + F_3(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt \end{aligned}$$

L'integrale rettilineo che va tra gli estremi su cui è preso t
La funzione $F \equiv [F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)]$ viene calcolata sui punti della curva γ[8]

$$\text{I differenziali sono} \begin{cases} dx = x'(t) \\ dy = y'(t) \\ dz = z'(t) \end{cases}$$

Le proprietà delle forme differenziali lineari derivano dalle proprietà degli integrali curvilinei

- Linearità:

$$\int_\gamma \omega_1 + \omega_2 ds = \int_\gamma \omega_1 ds + \int_\gamma \omega_2 ds$$
$$\alpha \int_\gamma \omega ds = \int_\gamma \alpha\omega ds$$

- Additività:

$$\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \quad \int_\gamma \omega ds = \int_{\gamma_1} \omega ds + \int_{\gamma_2} \omega ds + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega ds$$

[7] ivi integrabile
[8] funzione composita

4.7.2 Forme differenziali esatte

Definizione 33. *Sia ω una forma differenziabile, essa si dice esatta, se esiste una funzione $f(x,y,z)$*[9] *tale che il suo differenziale primo sia ω*

$$\omega = F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz \text{ è esatto se } \exists f(x,y,z) : df = \omega$$

poiché $df = fx(x-x_0) + fy(y-y_0) + fz(z-z_0)$

$$\text{se } \omega \text{ è esatta } \begin{cases} F_1(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ F_2(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y} \\ F_3(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

4.7.3 Forma differeniali chiusa

In R^2: consideriamo una forma differenziale ω in R^2 esatta

$$\omega = F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$$

Per definizione di forma differenziale esatta

$$\exists f(x,y) : df = \omega \quad \text{cioè } F_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad F_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Con $f(x,y) \in C^2$ derivo F, rispetto a y e F_2 rispetto ∂x – Così vale il teorema di Schwarz (2.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

$f_{xy} = f_{yx} \rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$
Se è vera tale relazione, la forma differenziale si dice chiusa.

In R^3: Definiamo primo il rotore di una funzione vettoriale di classe C'
Sia $F \equiv (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$. Il rotore di F è il determinante:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{l} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{l} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\vec{k}$$

Consideriamo ora una forma differenziale lineare ω in R^3

$$\omega = F_1(x,y,s)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$$
$$\text{con } F \equiv (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

ω è chiusa se $rotF = 0$

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{l} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\vec{k}$$

$rot\vec{F}$ è un vettore, è nullo quando tutte le sue componenti sono nulle.

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

[9] detta funzione potenziale

4.7.4 Condizioni necessarie affinché una forma differenziale sia esatta

Se ω è esatta allora è chiusa

Condizione necessaria: Affinché ω sia esatta è che deve essere chiusa
cioè se ω non è chiusa `può` essere esatta, invece, se ω non è chiusa sicuramente non è esatta

$$R^2 \; rot\vec{F} = 0$$

$$R^2 \; \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Dimostrazione. Per definizione $rotF = \begin{vmatrix} l & j & k \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$

Se ω è esatta
esiste la funzione potenziale $f(x, y, z)$ tale che $df = \omega$, per cui $F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}; F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}; F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$ da cui

$$rotF = \begin{vmatrix} l & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\vec{l} - (f_{zx} - f_{xz})\vec{j} + (f_{yx} - f_{xy})\vec{k}$$

Se $f(x, y, z) \in C^2$ vale il teorema di Schwarz (2.2.1), così tutte le componenti di $rotF$ sono nulle $rotF = 0$ □

Proprietà delle forme differenziale lineari esatte

Teorema 1 - L'integrale curvilineo di una forma differenziale lineare esatta non dipende dalla curva (percorso) ma solo dagli estremi
Sia *omega* esatta in un insieme V e sia $\gamma \subset V$ un arco di curva regolare di estremi P_0 e P_1 allora $\int_\gamma F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = f(P_1) - f(P_0)$

Ipotesi:

ω esatta in V

$$\gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [a, b] \quad \text{regolare} \\ z = z(t) \end{cases}$$
$$\gamma \subset V$$

Tesi:

$$\int_\gamma F_1dx + F_2dy + F_3 = f(P_1) - f(P_0)$$

Dimostrazione. Per definizione di integrale curvilineo

$$\int_\gamma F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t)) + F_2(x(t), y(t), z(t)) + F_3(x(t), y(t), z(t))]dt$$

per ipotesi ω è esatta, per cui esiste una funzione potenziale tale che $df = \omega$ da cui si ha:

$$F_1(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))$$
$$F_2(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))$$
$$F_3(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))$$

L'integrale diventa $\int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t)) + F_2(x(t), y(t), z(t)) + F_3(x(t), y(t), z(t))]dt$

Per il teorema della derivata della funzione composta, l'espressione da integralre è $\frac{\partial f}{\partial t}(x(t), y(t), z(t))$ per cui $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x(t), y(t), z(t))dt = \Big| f(x(t), y(t), z(t)) \Big|_a^d = f(P_1) - f(P_0)$ con $\begin{matrix} P_0(x(a), y(a), z(a)) \\ P_1(x(b), y(b), z(b)) \end{matrix}$ □

Teorema 2 - Sia ω una forma differenziale lineare continua in un insieme A aperto connsso. Le sequanti affermazioni sono vere:

a) ω è esatta in A

b) per $\forall \gamma \subset A$ chiusa $\int_\gamma \omega = 0$

c) se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenta si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

4.8 Funzione potenziale

Definizione 34. *Se ω è esatta, esiste una funzione $f(x,y)$, detta* *funzione potenziale**, tale che il suo differenziale eguaglia ω*

$$df = \omega$$

f(x,y) è definita a meno di una costante, infatti $df(x,y) = d(f(x,y) + k)$ con ω esatta, la funzione potenziale si triva con

$$f(x,y) = \int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$$

Poiché ω è esatta, quest'integrale curvilineo non dipende dal pecorso, ma sdamente dagli estremi.
Per cui considero un percorso semplice su cui integrare i segmenti paralleli agli assi