



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

DICAAR

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA ELETTRICA INDUSTRIALE

# ANALISI MATEMATICA 2

*edited by*

***NICOLA FERRU***

*Unofficial Version*

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

# Indice

0.1	Premesse...	7
0.2	Simboli	8
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1	tipologia in $\mathbb{R}$	9
1.1.1	Distanza	9
1.2	Intorno	9
1.2.1	Insieme chiuso	10
1.2.2	Insieme connesso	11
1.2.3	Insieme convesso	11
1.2.4	Coordinate Polari	11
1.2.5	Limiti e continuità	11
1.2.6	Continuità	11
1.2.7	Esistenza del limite	11
1.2.8	Teorema di esistenza dei valori intermedi	12
1.2.9	Teorema di Weierstrass	12
<b>2</b>	<b>Derivate Parziali</b>	<b>13</b>
2.1	Derivate parziali di primo grado	13
2.1.1	Significato geometrico	13
2.2	Derivata parziale seconde	14
2.2.1	Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)	14
2.3	Massimi e minimi relativi	14
2.3.1	Teorema di Fermat	15
<b>3</b>	<b>Differenziabilità</b>	<b>17</b>
3.0.1	Tutte le funzioni differenziali sono continue	18
3.0.2	Tutte le funzioni differenziali sono derivabili	18
3.0.3	Le funzioni con derivate parziali continue sono differenziabili	19
3.1	Significato geometrico del differenziale e piano tangente	19
3.1.1	Differenziale primo	19
3.1.2	Piano Tangente	19
3.1.3	Significato geometrico del differenziale primo	20
3.1.4	Funzioni composite	20
3.1.5	Funzione composta	21
3.1.6	Teorema della derivata della funzione composta	21
3.2	Teorema differenziabilità delle funzioni composite	22
3.3	Differenziale secondo	23
3.3.1	Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo	24
3.3.2	Ricerca del massimo e del minimo assoluti	25
3.3.3	Metodo dei moltiplicatori di di Lagrange	27

<b>4</b>	<b>Integrali Doppi e tripli</b>	<b>29</b>
4.1	Domini normali (semplici)	29
4.1.1	Dominio normale rispetto all'asse $x$	29
4.1.2	Domini Polarmente normale	29
4.1.3	Definizione di integrale doppio	30
4.2	Somme di Riemann	31
4.2.1	Proprietà dell'integrale doppio	32
4.2.2	Formula di riduzione	32
4.2.3	Baricentro di un dominio normale	33
4.2.4	Domini normali in $R^3$	34
4.3	Integrali tripli	34
4.3.1	Formule di riduzione per gli integrali tripli	35
4.3.2	Significato geometrico degli integrali	36
4.3.3	Coordinate polari e coordinate cilindriche	36
4.3.4	Interazione per fette	36
4.3.5	Integrali curvilinei	36
4.3.6	Lunghezza di una curva	38
4.3.7	Lunghezza di una curva in forma cartesiana	39
4.3.8	Lunghezza di una curva polare	39
4.4	Ascissa Curvilinea	39
4.5	Integrale corvilineo	40
4.5.1	Definizione di integrale curvilineo	40
4.5.2	Baricentro di una curva	40
4.5.3	Superfici e integrali di superficie	41
4.5.4	Piano tangente e versore normale	41

## Elenco delle tabelle



# Elenco delle figure

3.1	Rappresentazione grafica della conica . . . . .	24
4.1	Decomposizione del rettangolo R . . . . .	30
4.2	Esempi di domini polarmente normali . . . . .	33
4.3	Baricentro di un dominio normale . . . . .	33
4.4	Differenza tra curva chiusa e aperta . . . . .	37

## 0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un'occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, così da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTeX insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

## 0.2 Simboli

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	<b>Appartiene</b>	$\ni$ :	<b>Tale che</b>
$\notin$	<b>Non appartiene</b>	$\leq$	<b>Minore o uguale</b>
$\exists$	<b>Esiste</b>	$\geq$	<b>Maggiore o uguale</b>
$\exists!$	<b>Esiste unico</b>	$\alpha$	<b>alfa</b>
$\subset$	<b>Contenuto strettamente</b>	$\beta$	<b>beta</b>
$\subseteq$	<b>Contenuto</b>	$\gamma, \Gamma$	<b>gamma</b>
$\supset$	<b>Contenuto strettamente</b>	$\delta, \Delta$	<b>delta</b>
$\supseteq$	<b>Contiene</b>	$\epsilon$	<b>epsilon</b>
$\Rightarrow$	<b>Implica</b>	$\sigma, \Sigma$	<b>sigma</b>
$\Leftrightarrow$	<b>Se e solo se</b>	$\rho$	<b>rho</b>
$\neq$	<b>Diverso</b>		
$\forall$	<b>Per ogni</b>		



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 tipologia in R

#### 1.1.1 Distanza

- $R$ :  $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- $R^2$ : Siano  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ , la loro distanza è  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- $R^3$ : Siano  $Q_1(x_2, y_2, z_2)$ , la loro distanza è  $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- $R^4$ : Siano  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$  e  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^D (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione  $R^n * R^n \rightarrow R^+ \cup \{0\}$  (ha come immagine al più nullo)

**Proprietà 1.** *questi sono vincolati dalle seguenti proprietà*

- $d(x, y) \geq 0$   $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$  la distanza è nulla se i due punti coincidono
- $d(x, y) = d(y, x)$  la distanza tra  $x$  e  $y$  uguale alla distanza da  $y$  a  $x$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  disuguaglianza triangolare.

### 1.2 Intorno

**Definizione 1.** *Insieme dei punti che distano da un punto  $P_0$  meno di un  $\delta$*

- $R$  Intervallo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ,  $P(x)$  generico punto  $d(P_0, P) < \delta$

$$|x - x_0| < \delta$$

- $R^2$

$$P_0(x_0, y_0)$$

$$P(x, y)$$

$$d(P_0, P) < \delta$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Cerchio di centro  $P_0$  e di perimetro  $\delta$  privato della circonferenza.

- $R^3$

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$Q(x, y, z)$$

$$d(Q, Q_0) < \delta$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro  $Q_0$  e raggio  $\delta$  privata della sua superficie.

**Punto interno**  $P_0$  è interno all'insieme  $D$  se:

$$\exists I_{P_0, \delta} \subset D \quad (1.1)$$

Esiste un intorno di  $P_0$  di ampiezza  $\delta$  incluso nell'insieme  $D$ , cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

**Punto esterno**  $P_0$  è esterno all'insieme  $D$  se è interno al complementare di  $D$ ,  $CD$

$$\exists I_{P_0, \delta} \subset CD \quad (1.2)$$

esiste un intorno di  $P_0$  di ampiezza  $\delta$  incluso nel complementare dell'interno  $D$

**Punto di frontiera**  $P_0$  è un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \rightarrow \text{frontiera dell'insieme } D \quad (1.3)$$

$\forall I_{F_D}$  in esso cadono punti di  $D$  e punti di  $CD$  qualunque intorno, in esso cadono punti dell'insieme  $D$  e del suo complementare.

**Punto di accumulazione**  $P_0$  è un punto di accumulazione se  $\forall I_{P_0}$  cade in un punto  $\in D$ , se cade un punto di  $D$  in  $I_{P_0}$ , allora ne cadono infiniti.

**Punto isolato**  $P_0$  è un punto isolato se  $\exists I_{P_0, \delta}$  in cui non cade nessun punto dell'insieme.

### Insieme Aperto

**Definizione 2.**  $A$  si dice aperto se  $\forall P \in A \exists I_P \subset A$  per qualunque punto di  $A$  esiste un intorno incluso in  $A$ , cioè ogni intorno di  $P$  è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni  
 $]a : b[; x^2 + y^2 < r^2$  cerchio senza circonferenza:

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{triangolo senza lati} \quad (1.4)$$

### 1.2.1 Insieme chiuso

**Definizione 3.**  $A$  si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiusura, che è formato dall'insieme teso più gli eventuali punti di accumulazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione.  $[a : b]; x^2 + y^2 \leq r^2$  cerchio più circonferenza:

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{triangolo con lati} \quad (1.5)$$

### 1.2.2 Insieme connesso

**Definizione 4.** un insieme  $A$  si dice connesso se e solo se  $\forall P_1, P_2 \subset A \exists \Gamma(P_1, P_2) \subset A$ .  $A$  è connesso se per qualunque  $P_1, P_2$  di  $A$  esiste una spezzata inclusa in  $A$

$A$  si dice **semplicemente connessa** se qualunque chiusa inclusa in  $A$  è frontiera dell'insieme.

### 1.2.3 Insieme convesso

**Definizione 5.** un insieme  $A$  si dice convesso se per ogni coppia di  $x, y \in A$  il segmento  $\overline{xy}$  è contenuto in  $A$

**Insiemi Limitati** In  $R$  :  $A$  è limitato se  $\forall x \in A : x \leq M$  **Insieme illimitato** In  $R$  :  $[2; +\infty[$  illimitato

$[-1; 1]$  limitato

$$\text{In } R^2 : \text{illimitato} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

In  $R^2$  :  $A$  è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq M \quad (1.6)$$

### 1.2.4 Coordinate Polari

**Definizione 6.** in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia  $P(x, y)$  un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiane  $X$  e  $y$  oppure le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ .

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = \rho^3 \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} \quad (1.8)$$

### 1.2.5 Limiti e continuità

**Definizione 7.**  $f(x, y)$  una funzione definita in  $D$  e siano  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \quad \forall \xi > 0 \exists \delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0, y_0), \delta} \setminus \{(x_0, y_0)\}, \forall (x, y) \in I \setminus \{(x_0, y_0)\} | f(x, y) - l < \xi \quad (1.9)$$

Per qualunque  $\xi > 0$  esiste un  $\delta(\xi) > 0$  per cui qualunque intorno di  $(x_0, y_0)$  al più  $x_0, y_0$  e per qualunque  $(x_0, y_0)$  di quell'intorno la funzione dista da  $l$  meno di  $\xi$ .

### 1.2.6 Continuità

**Definizione 8.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$ ,  $f(x, y)$  si definisce **continuo** in  $(x_0, y_0) \in D$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1.10)$$

### 1.2.7 Esistenza del limite

**Definizione 9.** Calcolando il limite con  $f$  in forma polare esiste se non dipende da  $\theta$ . È possibile calcolare il limite di  $f$  in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si

considerino quelli di una generica retta.

$$y = y_0 + m(x - x_0) \quad (1.11)$$

- Se il limite dipende da  $m$  esso *non esiste*.
- Se non dipende da  $m$  *esiste*.

### 1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

**Teorema 1.** Sia  $f(x, y)$  definita in un insieme chiuso e limitato. Allora  $f(x, y)$  assume tutti i valori compresi fra il massimo ed il minimo di  $f(x, y)$  su  $D$

### 1.2.9 Teorema di Weierstrass

**Teorema 2.** Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.

Sia  $f(x, y)$  una funzione continua in  $D$  e sia  $D$  un insieme chiuso e limitato. Allora  $f(x, y)$  ha massimo e minimo assoluto in  $D$ .

## Capitolo 2

# Derivate Parziali

### 2.1 Derivate parziali di primo grado

**Definizione 10.** Sia  $f(x, y)$  una funzione di due variabili definita in un punto interno ad  $A$ . Consideriamo un intorno circolare di  $P(x_0, y_0)$ ,  $I(x_0, y_0)$ ,  $\delta$ , in netto sulla retta  $y = y_0$  e incrementa la  $x_0$  passando da  $x_0$  a  $x_0 + h$ . Ho così un punto  $P(x_0 + h, y_0) \in A$ . Definisco il rapporto di  $f(x, y)$  nella sola  $x$

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2.1)$$

$f(x, y)$  si definisce **derivabile parzialmente** se  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$  reale e finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2.2)$$

Analogamente, considero un intorno di  $P(x_0, y_0)$ ,  $I(x_0, y_0)$ ,  $\delta$ . Mi ruoto sulla retta  $x = x_0$  e incremento la  $y_0$  passando da  $y_0$  a  $y_0 + k$ . Ho così un punto  $P(x_0, y_0 + k) \in A$ . Definisco il rapporto incrementale di  $f(x, y)$  nella sola  $y$

$$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

**derivabile parzialmente** se  $\exists \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = l \in \mathbb{R}$  reale e finito.

Se in un punto  $(x, y)$  esistono entrambi le derivate parziali si dice che la funzione è **derivabile** in  $(x, y)$  inoltre se  $f$  è derivabile in ogni punto  $(x, y) \in A$ , si dice che  $f$  è derivabile in  $A$ .

#### 2.1.1 Significato geometrico

- La derivata prima parziale in  $P$  è  $f_x(x_0, y_0)$ , è la tangente alla curva che si crea intersecando  $f(x, y)$  con il piano  $y = y_0$
- La derivata prima parziale in  $P$ ,  $f_y(x_0, y_0)$  è la tangente alla curva che si crea intersecando  $f(x, y)$  con il piano  $x = x_0$

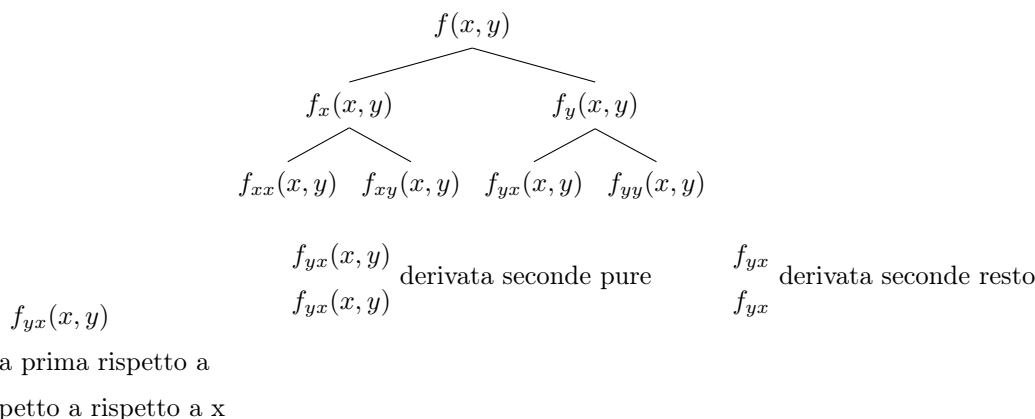
Se esistono entrambe allora le due rette tangenti alle sezioni della funzione individuano il piano tangente al solido nel punto  $P(x_0, y_0, z)$

## 2.2 Derivata parziale seconde

**Definizione 11.** Sia  $f(x, y)$  una derivabile e siano definite in un dominio le due derivate parziali

$$f_x(x, y) \quad f_y(x, y)$$

Tali funzioni passano a loro volta essere derivabili e si ottengono così le derivate seconde parziali di  $f(x, y)$



con  $n$  variabili si hanno  $n^2$  derivate seconde parziali – Spesso le derivate seconde sono disposte in una matrice quadrata, detta **hessiana**, con il simbolo  $D^2$

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ n variabili} \rightarrow n * n \quad (2.3)$$

Se esistono le quanto derivate di  $f$ , nel punto  $(x, y)$ , si dice che  $f$  è derivabile due volte in  $(x, y)$ . Se ciò accade  $\forall (x, y) \in A$ ,  $f$  è derivabile due volte nell'insieme  $A$ .

### 2.2.1 Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)

**Teorema 3.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e derivabile due volte  $\forall (x, y) \in D$ .

Se le derivate seconde in  $(x_0, y_0)$   $f_{xy}(x_0, y_0)$  e  $f_{yx}(x_0, y_0)$  sono continue in  $(x_0, y_0)$  allora risulta  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ .

In generale se vale il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana può essere scritta come

$$H = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\det H = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = f_{xx} * f_{yy} - (f_{yx})^2$$

## 2.3 Massimi e minimi relativi

**Definizione 12.** Sia  $f(x, y)$  una funzione definita in un insieme  $D$ , un punto  $p_0(x_0, y_0) \in D$ , si dice di **massimo relativo** per la funzione se esiste intorno circolare di  $P_0$  per cui il valore assunto della funzione nei punti dell'interno è minore o uguale a quello assunto in  $P_0$ .

Analogamente un punto  $P_0(x_0, y_0)$  si dice di **minimo relativo** per la funzione se esiste un intorno circolare di  $P_0$  per cui il valore assunto dalla funzione nei punti dell'interno è maggiore o uguale.

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \text{Massimo relativo}$$

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \text{Minimo relativo}$$

### 2.3.1 Teorema di Fermat

**Teorema 4.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e derivabile in un punto  $P_0(x_0, y_0)$

Se in  $P_0(x_0, y_0)$   $f(x, y)$  ha un massimo o un minimo relativo, allora le derivate prime parziali si annullano ( $\nabla f = 0$  gradiente nullo). La pendenza della tangente è zero un massimo o minimo.

#### Gradiente

Sia  $f(x, y)$  una funzione derivabile in un punto  $(x, y)$ , cioè esistano in  $(x, y)$  le due derivate parziali  $f_x$  e  $f_y$ .

Si definisce **gradiente** di  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y)$ : il vettore  $\nabla f$  le cui componenti sono le derivate parziali di  $f(x, y)$ .

$$\nabla f(x, y) \equiv (f_x(x, y); f_y(x, y)) \quad (2.4)$$

#### Massimi e minimi – condizione necessaria

**Definizione 13.** Se  $P_0(x_0, y_0)$  è un punto di massimo/minimo relativo il gradiente è nullo. Così di massimo o minimo relativo interni al dominio della funzione  $f$  vanno ricercati tra i punti che annullano la funzione  $f$ . Pertanto un punto critico per una funzione derivabile è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.





## Capitolo 3

# Differenziabilità

**Definizione 14.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e  $P_0(x_0, y_0) \in D$ . In  $P_0$ ,  $z = f(x_0, y_0)$ , incremento la  $x_0$  di un  $h$  e la  $y_0$  di un  $k$ .

Così passo da  $P_0(x_0, y_0)$  a  $P(x_0 + h, y_0 + k)$ . La funzione avrà avuto un certo incremento

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Si definisce **differenziale** in  $P_0(x_0, y_0)$  se  $\exists A, B \in \mathbb{R} : f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ , cioè se esistono due costanti reali  $A$  e  $B$  per cui l'incremento di  $f(x, y)$  che si ha passando da  $P_0$  a  $P$  si può riscrivere come somma di una parte lineare  $Ah + Bk$  e di un infinitesimo di ordine superiore a  $\sqrt{h^2 + k^2}$  (distanza di  $P_0$  da  $P$ ).

Se  $f(x, y)$  ammette derivate prime parziali le due costanti  $A$  e  $B$  sono:

$$\begin{cases} A = f_x(x_0, y_0) \\ B = f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

e il differenziale diventa

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (3.1)$$

**Esempio 1.** verificare che  $z = xy$  è differenziale  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , se  $z$  è differenziale  $\rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$  dove

$$\begin{cases} A = f_x(x_0, y_0) \\ B = f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

se  $z$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$ .

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{(x_0 + h)(y_0 + k)}_{\text{Sostituisco}} = x_0 y_0 + x_0 k + y_0 h + hk$$

$$\begin{array}{lll} f_x = y & f_x(x_0, y_0) = y_0 & f_y = x \\ f \text{ è derivabile in } (x_0, y_0) & A = y_0 & f_y(x_0, y_0) = x_0 \\ & & B = x_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ x_0 y_0 + x_0 k + y_0 h + hk - x_0 y_0 &= y_0 h + x_0 k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ hk &= o(\sqrt{h^2 + k^2}) \end{aligned}$$

detto quindi dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$  e poi passo alle coordinate polari:

$$\begin{aligned} h &= \rho \cos \theta \\ k &= \rho \sin \theta \\ e^2 &= h^2 + k^2 \\ h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, \rho &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\cancel{\rho} \cos \theta * \cancel{\rho} \sin \theta}{\cancel{\rho}^2} \quad z = xy \text{ differenziale } \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

### 3.0.1 Tutte le funzioni differenziali sono continue

Sia  $f(x, y)$  differenziabile  $(x_0, y_0)$ , allora  $f(x, y)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

**Ip:**

$f(x, y)$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$

**Th:**

$f(x, y)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Se  $f(x_0, y_0)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0$$

Calcolo il limite a destra per  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \underbrace{Ah}_0 + \underbrace{Bk}_0 + \underbrace{o(\sqrt{h^2 + k^2})}_0 = 0 \text{ per cui } f(x, y) \text{ è continua in } (x_0, y_0)$$

□

### 3.0.2 Tutte le funzioni differenziali sono derivabili

Sia  $f(x, y)$  differenziabile in un punto  $(x_0, y_0)$ . Allora  $f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$

**Ip:**

$f(x, y)$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$

**Th:**

$f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

divido entrambi per  $h$  e calcolo il limite per  $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x} = \underbrace{\frac{Ah + o(\sqrt{h^2})}{h}}_A$$

$$f_x(x_0, y_0) = A$$

Analogamente si dimostra che  $f_y(x_0, y_0) = B$ . Quindi dato che esistono  $f_x$  e  $f_y$  in  $(x_0, y_0)$ ,  $f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$  e in oltre  $A = f_x(x_0, y_0)$ ,  $B = f_y(x_0, y_0)$  □

**Esercizio 1.** Dimostrare che  $z = x^2 = y^2$  è differenziabile in  $(1;1)$  – Per definire

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = (1 + h)^2 = (1 + k)^2 \quad f(x_0, y_0) = 1 + 1 = 2$$

$$A = f(1, 1) = |2x|_{x=1} = 2 \quad B = f_y(1, 1) = |2y|_{y=1} = 2$$

$$\text{Così ho } (1 + h)^2 + (1 + k)^2 - 2 = 2h + 2k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$h^2 + k^2 = o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$h = e \cos \theta$$

$$k = e \sin \theta$$

$$e^2 = h^2 + k^2$$

$$k \rightarrow 0, h \rightarrow 0, e \rightarrow 0$$

devo dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$  passando a coordinate polari

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{e^2}{|e|} = 0 \rightarrow z = x^2 + y^2 \text{ è differenziabile in } (1, 1)$$

### 3.0.3 Le funzioni con derivate parziali continue sono differenziabili

**Definizione 15.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D_1$  e sia derivabile in  $D$ . Sono  $f_x$  e  $f_y$  continue in  $D$ , allora  $f(x, y)$  è differenziale in  $D$ .

**Condizione sufficiente per la differenzialità**

**Definizione 16.** Affinché una funzione sia differenziabile in  $(x_0, y_0)$  basta che in  $(x_0, y_0)$  abbia derivate. In questo modo per determinare se una funzione è differenziabile in un punto si calcola le derivate parziali in quel punto, se esistono la funzione è differenziabile, in caso contrario non è derivabile.

**Esempio 2.** Dimostrare che  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  non è differenziabile in  $(0; 0)$

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D : x^2 + y^2 > 0$$

$$z_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D : x^2 + y^2 > 0$$

Sia  $z_x$  sia  $z_y$  sono definite per  $x^2 + y^2 > 0$  cioè nei punti esterni al cerchio di centro  $(0, 0)$  e 1, frontiera esclusa. Il punto  $(0, 0)$  è interno al cerchio, quindi in esso  $f(x, y)$  non è derivabile. Per cui in punto  $(0, 0)$   $f(x, y)$  non è neanche differenziabile.

## 3.1 Significato geometrico del differenziale e piano tangente

### 3.1.1 Differenziale primo

È la parte lineare nella definizione di differenziale

$$f(x, y) \text{ definita in } D \quad (x_0, y_0) \in D$$

$f(x, y)$  differenziale in  $(x_0, y_0)$  se

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k}_{\text{parte lineare}} + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

### 3.1.2 Piano Tangente

La  $f(x, y)$  una funzione derivabile in  $(x_0, y_0)$ , il piano tangente alla funzione  $(x_0, y_0, z_0)$  ha equazione:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\vec{n}$  direzione ortogonale al piano tangente, è unitario

$$\vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

poiché  $\nabla f(f_x, f_y) \quad |\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 \rightarrow \vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$

**Esempio 3.**  $z = x^2 + y^2 \quad (1, 1)$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z_0 = f(1, 1) = 1 + 1 = 2 \quad z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1) \quad f_x = 2x|_{1,1} = 2$$

$$f_y = 2y|_{1,1} = 2$$

### 3.1.3 Significato geometrico del differenziale primo

Passando da  $P_0$  a  $P$   $f(x)$  si incrementa da  $f(x_0)$  a  $f(x_0 + h)$  – Il differenziale primo  $dy$  indica la variazione che subisce la retta tangente passando da  $P_0$  a  $P$ .

L'incremento  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  si approssima sempre più con  $dy$  per incrementi  $h \rightarrow 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x)(x - x_0) - f(x_0) + o|x|$$

L'incremento  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  differisce dal valore  $f'(x)(x - x_0)$  [retta tangente] per un  $o|x|$ ,  $o|x|$  ci dà l'errore.

### 3.1.4 Funzioni composite

**Definizione 17.** Sia  $x(t)$  e  $y(t)$  due funzioni reali definite al variare in un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ .  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  corrisponde il punto  $(x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x = x(t) & \text{Rappresenta nel piano una curva in frontiera} \\ y = y(t) & \text{Parametrica} \end{cases}$$

Al variare di  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$

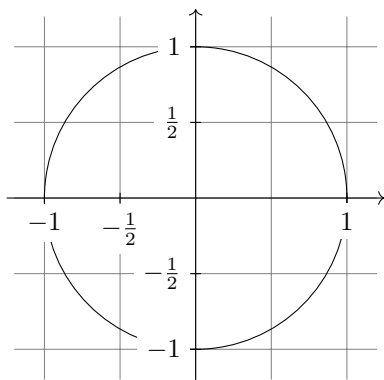
$x = x(t), y = y(t)$  descrive una curva  $\gamma$  nel piano

**Esempio 4.**

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad \begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$y = (t - 1) + 2 = x + 2 \quad r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t = r^2$$

circonferenza con centro nell'origine e raggio  $r$



$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = r^2$$

Se si ha  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$  al variare di  $t \in T \leq R$  si ha una curva nello spazio.

**Esempio 5.**  $\begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \\ z = Kt \end{cases}$  elica circolare

**3.1.5 Funzione composta**

**Definizione 18.** Sia  $\gamma$  la curva  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subset R$  di codominio  $B$

$I \rightarrow B$

Sia  $f(x, y)$  definita in  $A$

$t \in f(x(t), y(t))$  se il codominio di  $\gamma$  coincide con il codominio di  $f(x, y)$ , cioè  $B \subseteq A$

**3.1.6 Teorema della derivata della funzione composta**

**Definizione 19.** Sia  $\gamma$  la curva di punti  $(x(t), y(t))$  e sia derivabile in un intervallo  $I$  (cioè esistono)

Sia  $f(x, y)$  differenziabile in  $x(t)$

Allora la funzione composta da  $F(t) = f(x(t), y(t))$  è derivabile in  $I$  e la sua derivata prima vale:

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \quad (3.2)$$

$$(\nabla f * \Gamma'(t)) \quad \nabla f \equiv (f_x; f_y) \quad \Gamma' \equiv (x'(t); y'(t))$$

**Ipotesi**  $\gamma \equiv (x(t), y(t))$  derivabile in  $I$

$f(x, y)$  differenziabile in  $x(t)$

**Tesi**  $F(t) = f(x(t), y(t))$  derivabile in  $I$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

**Dimostrazione.** Devo dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$

Scrivo l'incremento di  $F(t)$  per un  $h$

$$F(t+h) - F(t) = f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)] \quad \text{Per definizione di funzione composta } F(t)$$

Poiché  $f(x, y)$  è differenziabile si ha

$$f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)] = \underbrace{f_x[x(t), y(t)]}_{f_x} \underbrace{[x(t+h) - x(t)]}_h + \underbrace{f_y[x(t+h), y(t+h)]}_{f_y} \underbrace{[y(t+h) - y(t)]}_k + o\left(\sqrt{\underbrace{[x(t+h) - x(t)]^2}_{h^2} + \underbrace{[y(t+h) - y(t)]^2}_{k^2}}\right)$$

Divido entrambi i membri per  $h$  e calcolo il  $\lim_{h \rightarrow 0}$

**I membro**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)]}{h} = F'(t)$$

**II membro**

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} f_x[x(t), y(t)] \underbrace{\left[ \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right]}_{x'(t)} + \lim_{h \rightarrow 0} f_y[x(t+h), y(t+h)] \underbrace{\left[ \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right]}_{y'(t)} \\ & + \lim_{h \rightarrow 0} o\left(\underbrace{\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2}}_0\right) \\ & F' = f_x[x(t), y(t)]x'(t) + f_y[x(t), y(t)]y'(t) \end{aligned}$$

□

**Esempio 6.**

$$z = x^2 y \quad \begin{cases} x(t) = -t & F(t) = z(x(t), y(t)) = -t^2 * t = -t^3 \\ y(t) = t & F'(t) = z' = -3t^2 \end{cases}$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = -3t^2$$

### 3.2 Teorema differenziabilità delle funzioni composite

**Teorema 5.** Siano  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  funzioni in  $k$  variabili  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ \dots \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{cases} \quad (3.3)$$

Componiamo le funzioni ottenendo la funzione composta

$$f[x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)]$$

Siano  $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$   $n$  funzioni definite in un insieme aperto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e siano derivabili parzialmente rispetto a  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Sia  $f(x_1, \dots, x_n)$  una funzione definita in  $A$  contenente in codominio  $x(D)$  e sia  $f$  differenziabile in  $A$ . Allora la funzione composta  $F(t) = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)$  è derivabile parzialmente rispetto a  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) nel punto  $t$ .

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) + \frac{\partial x_i}{\partial t_i}(t) \text{ (si somma sugli indici ripetuti)}$$

Inoltre, se  $f$  e  $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$  sono di classe  $C^1$ , anche  $F = f(x(t)) \in C^1$  ed è quindi differenziabile.

$h = k = 2$  coordinate polari

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \varphi \\ t_2 = \varphi \end{cases} \quad f(x, y) \quad \begin{cases} x = x(\varphi, \varphi) \\ y = y(\varphi, \varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x} x \rho + \frac{\partial f}{\partial y} y \rho = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} x \rho + \frac{\partial f}{\partial y} y \rho = \frac{\partial f}{\partial x} (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} (\rho \sin \varphi) \end{aligned}$$

### 3.3 Differenziale secondo

**Definizione 20.**  $d^2 f$  è il differenziale del differenziale primo

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d(f_x h + f_y k) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x h + f_y k)h + \frac{\partial}{\partial x}(f_x h + f_y k)k = \\ &= (f_{xx} h + f_{xy} k)h + (f_{xy} h + f_{yy} k)k = f_{xx} h^2 + f_{xy} kh + f_{xy} hx + f_{yy} k^2 \end{aligned}$$

Se  $f(x, y) \in C^2$  (derivate parziali II continue) vale il teorema di Schwarz (2.2.1), cioè  $f_{yx} = f_{xy}$  - Il differenziale secondo allora diventa

$$d^2 f = f_{xx} h^2 + 2f_{xy} hk + f_{yy} k^2$$

Per ipotesi il gradiente è nullo  $\Delta f(x_0, y_0) = 0$  cioè  $\nabla f(x_0, y_0) \equiv (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \equiv (0, 0)$  ovvero le derivate parziali prime sono nulle  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$  - Ciò comporta l'annullarsi del differenziale primo

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k = 0 * h + 0 * k = 0$$

Per cui nella formula di Taylor si ha:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad \text{Forme quadratiche}$$

Il segno di  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  è lo stesso di  $\frac{1}{2!} d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ , cioè è lo stesso differenziale secondo. Per ipotesi  $\det H_p(x_0, y_0) > 0$ , ( $f(x, y) \in C_A^2 \Rightarrow$  vale il teorema di Schwarz)

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

Ciò implica per definizione che la forma quadratica associata ad  $H_p(x_0, y_0)$  è positiva tutto ciò implica  $d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) > 0$

Per cui  $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$

$$\text{cioè } f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad \text{definizione di Minimo relativo (2.3)}$$

quindi  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo relativo

Analogamente, se  $f(x_0, y_0) < 0$  si dimostra che  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo relativo (2.3)

### 3.3.1 Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo

Sia  $f(x, y)$  definita in  $A$ ,  $f(x, y) \in C_A^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$

Se  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

$$\det H_F(x_0, y_0) \begin{cases} > 0 \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 & \text{Minimo relativo} \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 & \text{Massimo relativo} \end{cases} \\ < 0 & \text{Punto di sella (non sono presenti Max e min)} \\ = 0 & \text{Non si vsa se sono presenti Max o min} \end{cases}$$

**Esempio 7.** *Massimi e minimi*

1.  $z = x^2 + y^2$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{in } (0, 0) \quad \nabla f = 0 \text{ può MAX o MIN}$$

$$\det H_f = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

2. *Semisuperfici sferica*  $z = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{-x}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \end{cases} \quad \text{dominio } D \quad x^2 + y^2 < \Gamma^2$$

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (0, 0) \leftarrow D \text{ può esserci un Max e un Min}$$

Verifico e trovo che  $\det H > 0$   $f_{xx} < 0$  : in  $(0, 0)$  è presente il Max.

3. *Cono*  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

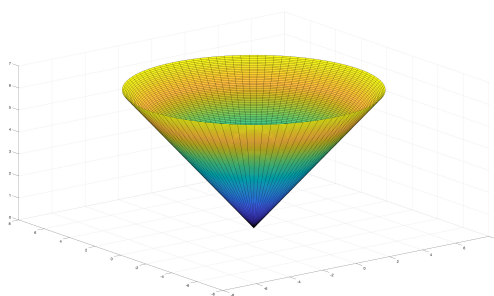


Figura 3.1: Rappresentazione grafica della conica

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Nota 1.** sarebbe  $(0,0)$  ma il dominio delle derivate  $x^2 + y^2 > 0$  cioè  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$  in  $(0, 0)$  non è derivabile.

Sappiamo<sup>1</sup> che in  $(0, 0)$  c'è un **minimo assoluto**

<sup>1</sup>si vede geometricamente



$$4. z = x^4 + y^4$$

$$\begin{cases} z_x = 4x^3 = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{in } (0,0) \text{ può esserci Max/Min relativo}$$

$$\det H = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} f_{xx}(0,0) &= 12x^2|_{0,0} = 0 \\ f_{yy}(0,0) &= 12y^2|_{0,0} = 0 \end{aligned}$$

$\det H = 0 \rightarrow$  non so se in  $(0,0)$  c'è un massimo o un minimo relativo.

Per definire se esiste un massimo o un minimo relativo uso:

$$\begin{aligned} \min f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad 0 \leq x^4 + y^4 \quad x^4 + y^4 \geq 0 \quad \underline{SI} \quad \forall (x, y) \text{ risulta da } x^4 + y^4 \geq 0(0,0) \min \\ \max f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad 0 \geq x^4 + y^4 \quad x^4 + y^4 \leq 0 \quad \underline{NO} \end{aligned}$$

### 3.3.2 Ricerca del massimo e del minimo assoluti

Condizioni sufficienti per l'esistenza del Massimo e del minimo assoluto

#### Teorema di Weierstrass

**Teorema 6.** Sia  $f(x,y)$  definita in  $D$ ,  $i$  continua in  $D$  chiuso e limitato, allora il minimo e massimo assoluto in  $D$ .

**Ipotesi:**

$$f \in C_D^0$$

**Tesi:**  $\exists \min$  con  $m = f(x_1, y_1), M = f(x_2, y_2)$  tale che  $m \leq f(x, y) \leq M$

$D$  chiuso e limitato

**Ricerca dei punti di Massimo e minimo assoluti:**

- nei punti di massimo o minimo relativo;
- nei punti di non derivabilità;
- nei punti di frontiera.

Vanno ricercati quindi nei seguenti modi:

1.  $\nabla f = 0$  dove il gradiente si annulla;
2.  $\nexists \nabla f$  dove il gradiente non esiste;
3. sulla  $FD$  sulla frontiera.

#### Studio sulla frontiera

Sia  $\xi$  una superficie definita in un insieme  $D$  e sia  $FD$  la mia frontiera

La frontiera  $FD$  è una curva<sup>2</sup> e suoi punti limitano l'iperbole  $\xi$ .

Possiamo definire la frontiera in forma parametrica

$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

<sup>2</sup>o insieme di curve

Calcolo la funzione  $f(x, y)$  sui punti della frontiera

$$f(x, y) \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t)) \text{ funzione di 1 variabile} \quad (3.4)$$

studio del massimo e minimo per  $F(t) = 0 \begin{cases} F'' > 0 \text{ min} \\ F'' < 0 \text{ max} \end{cases}$

Calcolo i valori della funzione nei punti di Massimo/minimo e li confronto con i valori Massimo/minimo relativi nel dominio e i valori nei punti di non derivabilità. La frontiera può anche essere in forma cartesiana

$$y = y(x) \quad a \leq x \leq b \quad (3.5)$$

Calcolo la funzione nei punti della frontiera e procedo come visto prima  $f(x, y) \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t))$

**Esempio 8.** Determinare il massimo e il mino assoluto di  $f(x, y) = 1 + 2x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$  in  $D : \{x^2 + y^2 \leq \Delta\}$

1.  $\nabla f = 0$

2.  $\nabla f$

3.  $FD$

$$1. \nabla f(x, y) = 0 \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \begin{cases} 4x + \frac{x}{|x|} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\nabla f = 0$  in  $(0, 0)$  che non è nel C.E. delle derivate parziali per cui  $\nabla f \neq 0 \forall (x, y) \in A$  A dominio  $f_x$  e  $f_y$

2.  $\nabla f$  le derivate parziali perime sono definite  $\forall (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 0$  cioè in  $R^2 - \{0, 0\}$

$$(0, 0) \text{ pnto di non derivabilità } f(0, 0) = 1$$

3.  $FD$

$$D : \{x^2 + y^2 \leq 4\} \quad FD : x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Calcolo  $f(x, y)$  sui punti di frontiera

$$f(x, y) = F(t) = 1 + 2(2 \cos t)^2 + \sqrt{(2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} = 1 + 8 \cos^2 t + 2 = 3 + 8 \cos^2 t$$

Calcolo  $F(t)$  agli estremi  $t \in [0; 2\pi]$   $F(0) = 3 + 8 = 11$   $F(2\pi) = 3 + 8 = 11$

Studio del massimo e del minimo di  $F(t)$

$$F'(t) = 0 \quad 16 \cos t (\sin t) = -16 \sin t \cos t = 0 \quad t = 0 \quad t = \pi \quad t = \frac{\pi}{2} t = \frac{3\pi}{2}$$

$$F''(t) = 16(\cos t \cos t - \sin t \sin t) = 16(\sin^2 t - \cos^2 t)$$

Ottenuti mettendo a  $F(t)$  e valori  $\begin{cases} F''(\pi) = 16(-1) = -16 < 0 \text{ max su } FD & F(\pi) = 3 + 8 = 11 \\ \text{dove ci dovrebbero essere un} & \\ \text{massimo e un minimo} & \begin{cases} F''(\frac{\pi}{2}) = 16(-1) = -16 > 0 \text{ min su } FD & F(\frac{\pi}{2}) = 3 \\ F''(\frac{3\pi}{2}) = 16(-1) = -16 < 0 \text{ min su } FD & F(\frac{3\pi}{2}) = 3 \end{cases} \end{cases}$

Ho ottenuto i seguenti valori

1.  $(x, y) \equiv (0, 0)$  il min è 1 e viene assunto in  $(0, 0)$
11.  $t = 0, \pi, 2\pi$  il max è 11 e viene assunti in  $\begin{cases} x = 2 \cos 0 \\ y = 2 \sin 0 \end{cases}$
3.  $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$   $\begin{cases} x = 2 \cos \pi \\ y = 2 \sin \pi \end{cases} (-2, 0) \quad \begin{cases} x = 2 \cos 2\pi \\ y = 2 \sin 2\pi \end{cases} (2, 0)$

### 3.3.3 Metodo dei moltiplicatori di di Lagrange

Nel caso in cui  $g(x, y) = 0$  non definisca una funzione implicata, per trovare i massimi e minimi vincolati si introduce una funzione ausiliaria, detta lagrangiana, così definita:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (3.6)$$

$F(x, y, \lambda)$  è combinazione lineare delle funzioni  $f(x, y)$  E  $g(x, y)$  – Il parametro  $\lambda$  prende il nome di **Moltiplicatore di Lagrange**. I punti di massimo vincolati sono quelli in cui il gradiente di  $F(x, y, z)$  si annulla ovvero...

$$\nabla F_{(x,y,z)} = 0 \begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) \\ F_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Si risolve questo sistema di tre equazioni in tre variabili e il valore massimo della funzione è calcolata nei punti soluzioni è il massimo calcolato e il valore minimo della funzione calcolata nei punti soluzione è il massimo vincolato.



## Capitolo 4

# Integrali Doppi e tripli

### 4.1 Domini normali (semplici)

**Definizione 21.** *I domini delle funzioni a più variabili possono presentare una forma di regolarità per cui è possibile delimitare la regione da intervalli e grafici di funzione. Si parla quindi di dominio semplice o normale rispetto alla variabile delimitabile da un intervallo. La normalità di un dominio è molto importante in molte definizioni di integrale multiplo e della sua risoluzione tramite le formule di riduzione. Inoltre la presenza di un dominio regolare permette ulteriori teoremi e formule d'integrazione, come le formule di Gauss-Green, il teorema della divergenza e il teorema del rotore.*

#### 4.1.1 Dominio normale rispetto all'asse $x$

Il dominio  $A$  si definisce **normale** rispetto all'asse  $x$  se è così definito:

$$A = \begin{cases} a \leq x \leq b & x \text{ varia in un intervallo} \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) & y \text{ varia tra due funzioni di } x \end{cases} \quad (4.1)$$

**Esempio 9.**

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$$

Il dominio  $B$  si definisce **normale** rispetto all'asse  $x$  se è così definito:

$$A = \begin{cases} c \leq y \leq d & y \text{ varia in un intervallo} \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) & x \text{ varia tra due funzioni di } y \end{cases} \quad (4.2)$$

**Esempio 10.**

$$D = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y < x < \sqrt{y} \end{cases}$$

#### 4.1.2 Domini Polarmente normale

Il dominio  $C$  si definisce polarmente normale se è costantemente definito:

$$C = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \rho(\theta) \leq \varphi_2(\theta) \end{cases} \quad (4.3)$$

**Esempio 11.**

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad (4.4)$$

l'angolo varia tra  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$ , il segmento  $\varphi$  dipende dall'angolo

$$\begin{aligned}\theta = 0 & \text{ è } \max \varphi = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \text{ è } \min \varphi = 0 \\ \varphi = 2 \cos \theta & \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2 \cos \theta \end{cases}\end{aligned}$$

corona circolare  $\varphi = r$   $\varphi = R$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ r \leq \varphi \leq R \end{cases}$$

### 4.1.3 Definizione di integrale doppio

**Definizione 22.** Sia  $f(x,y)$  una funzione limitata nel rettangolo  $R = [a,b] \times [c,d]$ , coordinata in  $[a,b]$  e di seconda coordinata in  $[c,d]$ . Deconpongo regolarmente gli intervalli  $[a,b]$  e  $[c,d]$ ,

decomponendo  $[a,b]$  si ha  $D_1 = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$

decomponendo  $[c,d]$  si ha  $D_2 = \{y_0 = c, y_1, y_2, \dots, y_n = d\}$

Il prodotto cartesiano  $D = D_1 * D_2$  è una semidivisione del rettangolo  $R$

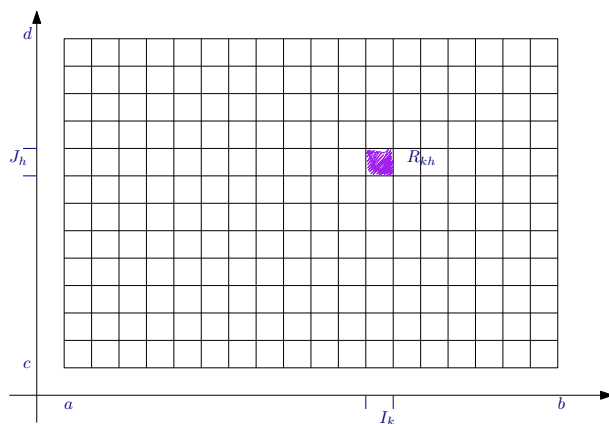


Figura 4.1: Decomposizione del rettangolo R

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \text{ in } D_1 (k = 1, \dots, n)$$

$$J_h = [y_{h-1}, y_h] \text{ in } D_2 (h = 1, \dots, n)$$

Il prodotto cartesiano  $I_k * J_h$  individua il generico subrettangolo  $R_{kh}$  della semidivisione.

Prendo un generico punto del subrettangolo  $R_{kh}(x_k, y_h)$  e faccio il seguente prodotto:

$$f(x_k, y_h) * \text{mis} R_{kh} \text{ con } \text{mis} R_{kh} = \text{mis} I_k * \text{mis} J_h \text{ area del subrettangolo}$$

Con l'integrale doppio considero il volume del parallelepipedo.

Geometricamente considera il rettangolo  $R_{kh}$  e la parte di superficie  $f(x,y)$  che vi si presenta il prodotto  $f(x_k, y_h) * \text{mis} R_{kh}$  è il volume del parallelepipedo di base  $R_{kh}$  e altezza  $f(x_k, y_h)$ .

## 4.2 Somme di Riemann

Definisco le somme di Riemann  $\sum_{k=h=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_h) * R_{kh}$  ciò rappresenta la somma di tutti i volumi dei parallelepipedi di base  $R_{kh}$  e altezza  $f(x_k, y_h)$  che si possono ottenere nel rettangolo  $R$ .

Infittisco le decomposizioni  $D_1$  e  $D_2$  ( $m \rightarrow \infty; n \rightarrow \infty$ ), ottenendo così un numero sempre maggiore di subrettangoli di ampiezza via via minore.

$$misR_{kn} = misI_k * misI_n = \frac{b-a}{m} * \frac{d-c}{n} \rightarrow 0 \text{ per } m, n \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

Con l'infittirsi della decomposizione, aumenta la precisione con cui ciascun parallelepipedo approssima il volume sotto al grafico delle funzione in ogni  $R_{kh}$ .

Al limite, le somme di Riemann daranno il volume sotto al grafico della funzione in un certo rettangolo (in generale dominio).

Se esiste finito  $\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \sum_{h=k=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$  tale limite è definito integrale doppio di  $f(x, y)$  nel dominio  $R = [a, b] * [c, d]$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \sum_{h=k=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_n) * misR_{kh} \quad (4.6)$$

### Somme superiori e somme inferiori

**Definizione 23.** È possibile definire l'integrale doppio anche con le somme superiori e le somme inferiori

$$\text{Somme inferiori } s(f, R) = \sum \inf_{R_{kh}} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$$

prendo il minimo valore che la funzione assume nel subrettangolo  $R_{kh}$  e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per difetto individuato dalla funzione.

$$\text{Somme superiori } s(f, R) = \sum \sup_{R_{kh}} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$$

prendo il massimo valore che la funzione assume nel subrettangolo  $R_{kh}$  e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per eccesso quello individuato dalla funzione all'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono, le somme superiori decrescono. Le somme superiori e le somme inferiori convergono ad uno stesso valore, detto integrale doppio<sup>1</sup>

$$\lim s = \lim S = \iint_R f(x, y) dx dy$$

<sup>1</sup>è il valore sotto al grafico della funzione

### 4.2.1 Proprietà dell'integrale doppio

$$\text{Linearità} \quad \begin{cases} 1) \iint_D [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx * dy + \iint_D f_2(x, y) dx * dy \\ 2) \iint_D \alpha f_1(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f_1(x, y) dx * dy \end{cases}$$

$$\text{Assitività} \quad 3) \text{ Sia } D = D_1 \cup D_2 \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx * dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx * dy$$

$$\text{Monotonia} \quad \begin{cases} 4) \text{ Sia } f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \\ \quad \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx * dy \\ 5) \text{ Sia } D_1 \subset D \\ \quad \iint_{D_1} f(x, y) dx dy < \iint_D f(x, y) dx * dy \\ 6) |\iint_D f(x, y) dx dy| \leq \iint_D |f(x, y)| dx * dy \end{cases}$$

### 4.2.2 Formula di riduzione

- Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  un dominio normale rispetto all'asse  $x$

$$A = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$$

$$\text{Allora } \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right)$$

calcolo prima  $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$  che è una funzione della sola  $x$   $\rho(x)$

$$\text{per calcolo } \int_a^b \rho(x) dx$$

- Dominio polarmente normale

Effettua un cambio di coordinate, passando dalle coordinate cartesiane a quelle polari

$$\text{L'integrale doppio è } \iint_D f(x, y) dx dy$$

Passando alle coordinate polari

$$\begin{aligned} \text{del dominio } D(x, y) \text{ passerò al dominio } D'(\varphi, \theta) & \begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \end{cases} & \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{della funzione } f(x, y) \text{ passerò al dominio } f(\varphi, \theta) & \end{aligned}$$

e da differenziali  $dx dy$  passerò ai differenziali  $d\varphi d\theta$ .

Si dimostra che nel passaggio ad altre coordinate il differenziale è  $|j| d\varphi d\theta$ , dove  $|j|$  è il determinante della **matrice Jacobiana** che contiene le derivate parziali prime

$$|J| = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\theta \\ y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} \rightarrow |J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\varphi \sin \theta \\ \sin \theta & \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = \varphi \cos^2 \theta + \varphi \sin^2 \theta = \varphi \quad (4.7)$$

Per cui passando da  $dx dy$  alle coordinate polari avrò  $\varphi d\varphi d\theta$  così l'integrale doppio diventa:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi, \theta) \varphi d\varphi d\theta$$



## Esempi di domini polarmente normali

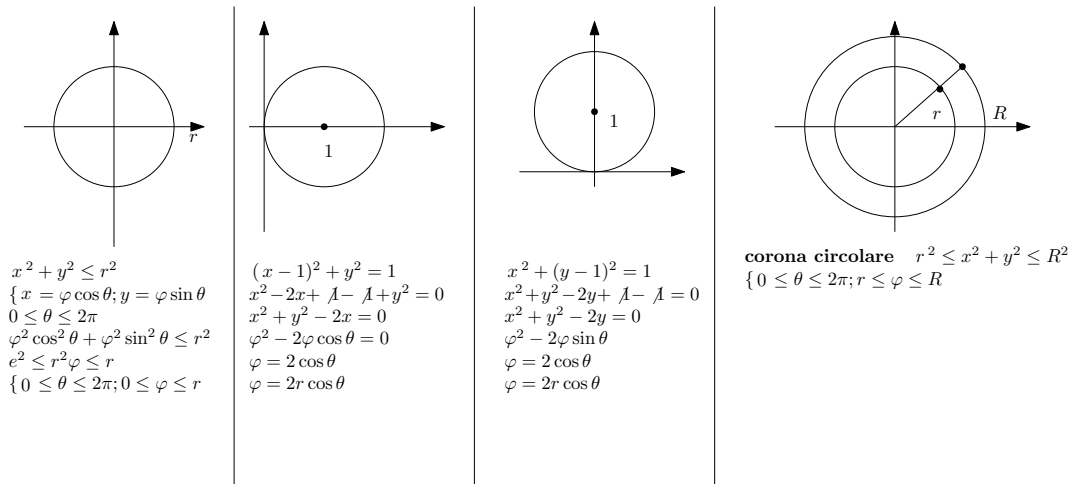


Figura 4.2: Esempi di domini polarmente normali

## 4.2.3 Baricentro di un dominio normale

**Definizione 24.** Sia  $D$  un dominio normale del piano. Si definisce **baricentro del dominio**  $D$  il punto di coordinate  $(x_0, y_0)$  tale che:

$$x_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D x dx dy \quad y_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D y dx dy$$

$\text{mis}D$ : misura (area) del dominio  $D$ .

**Esempio 12.** calcolare il baricentro del dominio  $D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$\text{mis}D = A_{\text{rettangolo}} = 2 * 1 = 2$$

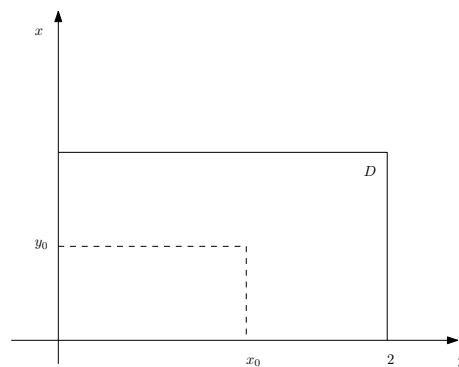
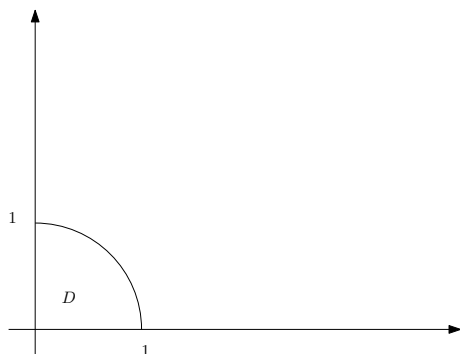


Figura 4.3: Baricentro di un dominio normale

$$x_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D x dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 x dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx |xy|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D y dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4} |x|_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Calcolare il baricentro del dominio  $D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$



$$D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 1 \end{cases} \quad \text{mis}D = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D x dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \varphi^2 \cos \theta d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\varphi^3}{3} \cos \theta \right|_0^1 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos \theta d\theta = \frac{4}{3\pi} |\sin \theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \\ y_0 &= \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D y dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \varphi^2 \sin \theta d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\varphi^3}{3} \sin \theta \right|_0^1 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi} * \frac{1}{3} |-\cos \theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

#### 4.2.4 Domini normali in $R^3$

**Definizione 25.** Il dominio  $V$  definisce normale rispetto al piano  $xy$  se si può così descrivere:

$$\begin{cases} (x, y) \in D & \text{normale} & (x, y) \text{ appartengono ad un dominio normale di } R^2 \\ \alpha(x, y) & \leq z \leq \beta(x, y) & z \text{ è compresa tra funzioni di } x \text{ e } y \end{cases}$$

$\forall (x, y) \in D$  incontro prima la superficie minorante e per la superficie maggiorante.

### 4.3 Integrali tripli

**Definizione 26.** Sia  $f(x, y, z)$  una funzione limitata in un insieme  $V$ , considero il parallelepipedo

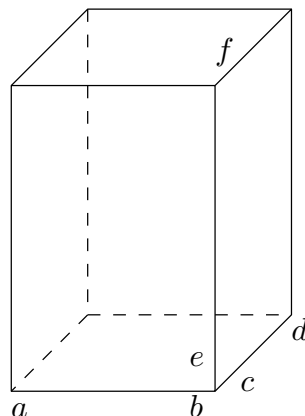
$$V = [a, b] * [c, d] * [e, f]$$

Decompongo regolarmente  $[a, b], [c, d], [e, f]$

rispettivamente in  $n, m, k$

intervalli  $I_n = [x_0 = a, \dots, x_n = b]$ ,

$l_m = [y_0 = c, \dots, y_m = d], l_k = [z_0 = e, \dots, z_k = f]$



Il prodotto cartesiano  $I_n * I_m * I_k$  individua il generico subparallelepipedo  $V_{n,m,k}$ .

Definisco le somme di Riemann:  $\sum f(x, y, z) \cdot \text{mis}V_{n,m,k}$ <sup>2</sup>

All'infittirsi delle decomposizioni le somme di Riemann convergono ad uno stesso valore, tale valore è definito **integrale triplo** di  $f(x, y, z)$  in  $V$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum f(x, y, z) \text{mis}V_{n,m,k} = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Oppure, definisco le somme inferiori e le somme superiori

$$\begin{aligned} \text{Somme inferiori} & \quad \sum \text{mis}V_{n,m,k} \cdot \min_{V_{n,m,k}} f(x, y, z) \\ \text{Somme superiori} & \quad \sum \text{mis}V_{n,m,k} \cdot \max_{V_{n,m,k}} f(x, y, z) \end{aligned}$$

All'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono mentre le somme superiori decrescono. Se convergono ad uno stesso valore, tale valore è definito **integrale triplo** di  $f(x, y, z)$  in  $V$

$$\lim s(f, V) = \lim S(f, V) = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

### 4.3.1 Formule di riduzione per gli integrali tripli

Sia  $g(x, y)$  integrabile in un dominio normale  $V$

$$V = \begin{cases} \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio  $D$  è normale rispetto all'asse  $x$

$$V = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio  $D$  è normale rispetto all'asse  $y$

$$V = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio  $D$  è polarmente normale

$$V = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta) \\ \alpha(\varphi, \theta) \leq z \leq \beta(\varphi, \theta) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \varphi d\varphi \int_{\alpha(\varphi, \theta)}^{\beta(\varphi, \theta)} f(\varphi, \theta, z) dz$$

$$\alpha(x, y) \rightarrow \alpha(\varphi, \theta)$$

$$\beta(x, y) \rightarrow \beta(\varphi, \theta)$$

$$f(x, y, z) \rightarrow f(\varphi, \theta, z)$$

$$dx dy dz \rightarrow \varphi d\varphi d\theta dz$$

<sup>2</sup> $\text{mis}V_{n,m,k}$  misura il volume del parallelepipedo

### 4.3.2 Significato geometrico degli integrali

$$\begin{array}{ll} \int & \text{area} \\ \iint & \text{volume} \\ \iiint & \text{nessun significato geometrico} \end{array}$$

### 4.3.3 Coordinate polari e coordinate cilindriche

$$(x, y) \rightarrow (\varphi, \theta)$$

$$\begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \end{cases} \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \det J = \varphi$$

**coordinate alindriche**  $(x, y, z) \rightarrow (\varphi, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \det J = \varphi$$

**coordinate sferiche**

$$\begin{cases} x = \varphi \sin \theta \cos \alpha \\ y = \varphi \sin \theta \sin \alpha \\ z = \varphi \cos \theta \end{cases}$$

### 4.3.4 Interazione per fette

Considera un volume  $V$  e lo interseco con un piano  $z = k$ . Così ottengo una sezione  $S_z$

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Al variare di  $z$  tra due valori, cioè facendo variare  $S_z$  in funzione di  $z$  descrivo il volume  $V$ .

**Esempio 13.**

$$\int_0^1 S_z dz$$

$S_z$  è un cerchio di raggio  $R(z)$  che dipende da  $z$

$$\begin{aligned} z &= 1 - x^2 + y^2 & x^2 + y^2 &= 1 - z \\ R^2 &= 1 - z & R(z) &= \sqrt{1 - z} \end{aligned}$$

$$S_z = \pi R^2 = \pi(1 - z)$$

$$\iint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \pi(1 - z) dz$$

### 4.3.5 Integrali curvilinei

**Curve in  $R^2$  e in  $R^3$**

**Definizione 27.** Si definisce *curva* una coppia del tipo  $(\gamma, \Gamma)$  con

$$\vec{F}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots) \quad t \in [a, b]$$

si tratta di un'applicazione  $R \rightarrow R^n$  ad un valore di  $t$  associa  $n$  valori

Le curve possono essere:

- In forma cartesiana 
$$\begin{aligned} z &= f(x, y) & (R^3) \\ y &= f(x) & (R^2) \end{aligned} \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$
- In forma polare  $\varphi = \varphi(\theta) \quad \varphi = 2r \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- In forma parametrica 
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Nello spazio una curva è l'intersezione tra due superfici.

Ogni curva ha anche un **sostegno**, che è il suo grafico nel piano o nello spazio.

Una curva si definisce **chiusa** se

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \text{ se } \vec{F}(a) = \vec{F}(b) \quad \begin{aligned} x(a) &= x(b) \\ y(a) &= y(b) \end{aligned}$$

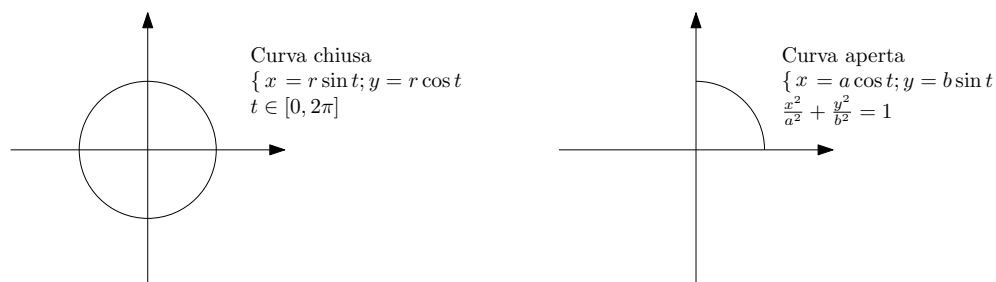
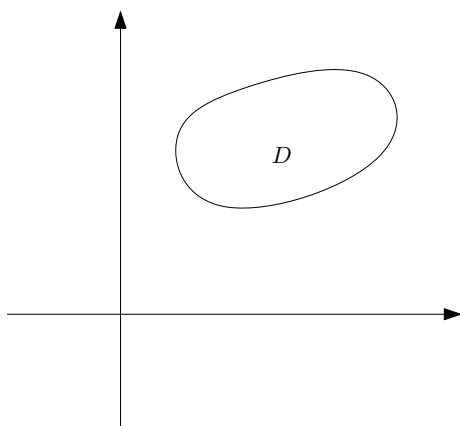


Figura 4.4: Differenza tra curva chiusa e aperta

Una curva chiusa la **frontiera** di un dominio



$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.8)$$

Una curva si definisce **semplice** se presi due qualunque  $t_1 \neq t_2$  risulta  $\vec{F}(t_1) \neq \vec{F}(t_2)$  cioè

$$\begin{cases} x(t_1) \neq x(t_2) \\ y(t_1) \neq y(t_2) \\ z(t_1) \neq z(t_2) \end{cases}$$

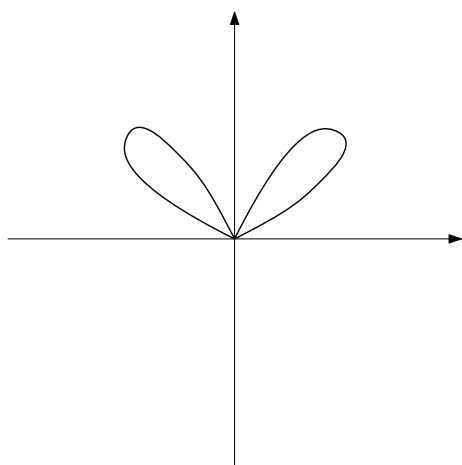
Curva semplice  $\gamma \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \quad y = \sqrt{x} \quad \gamma \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad y = x^2$  Curva non semplice<sup>3</sup>

Una curva è **regolare** se è di classe  $c^1$  e le sue derivate prime non sono mai nulle contemporaneamente

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \vec{F}(t) \in c' \quad r'(t) = (x', y', z'(t) \dots) \neq (0, 0, 0 \dots) \\ t \in [a, b]$$

Curva regolare

$$\gamma z(t) = \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad z'(t) = \begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{non sono mai nulle} \\ \text{contemporaneamente} \end{matrix}$$



$$r(t) = \begin{cases} x = t(1-t^2)^2 \\ y = t^2(1-t^2) \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

Una curva è **regolare a tratti** se è l'unione di curve regolari

$$\gamma r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad \text{in } x = 0 \text{ c'è una cuspide perciò non è regolare } y = \sqrt[3]{x^2}$$

$r(t)$  può però essere vista come l'unione di due curve regolari

$$\gamma' r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 0]$$

$$\gamma'' r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

sostegno nel II quadrante

$$\gamma = \gamma' \vee \gamma''$$

#### 4.3.6 Lunghezza di una curva

**Definizione 28.** Sia la curva  $\gamma$  di equazione  $\vec{F}(t)$ , essa si definisce **rettificabile** se esiste finito l'estremo superiore della poligonale  $L(p)$  al variare della decomposizione.

$$\sup_D L(\Delta) \quad (4.9)$$

<sup>3</sup> $t_1 \neq t_2$  ho due stessi valori della curva

Suddivido la curva in tanti segmenti che formano la poligonale  $L(D)$ . All'infittirsi la poligonale approssimo sempre segue la lunghezza della curva.

Se la curva  $\vec{F}(t)$  è di classe  $c^1$  allora essa è **rettificabile**

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.10)$$

e la sua lunghezza vale  $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 + \dots} dt$

### 4.3.7 Lunghezza di una curva in forma cartesiana

Se la curva  $\gamma$  nella forma  $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$  ha come sostegno il grafico di  $y = f(x)$

La lunghezza della curva è  $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

### 4.3.8 Lunghezza di una curva polare

Se la curva è nella forma

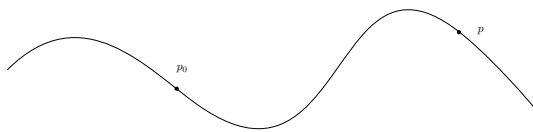
$$\begin{cases} e = e(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

La sua lunghezza vale:

$$L_\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\varphi^2(\theta) + [\varphi'(\theta)]^2} d\theta$$

## 4.4 Ascissa Curvilinea

È possibile effettuare cambiamenti di parametri per descrivere una curva. Fra tutte le rappresentazioni parametriche di una curva regolare ha particolare **importanza** geometrica quella che **l'ascissa curvilinea**. Prendiamo una curva  $\gamma$  di  $R^2$  e un suo punto  $P_0$



Ad ogni punto  $P$  della curva associamo un valore  $S(P)$  che è uguale alla lunghezza dell'arco di curva congiungente  $P_0$  e  $P$

Così definendo una corrispondenza biunivoca tra i punti della curva e i punti di un certo intervallo  $[a, b]$ , cosicché se  $S(p_1) = a$   $S(p_2) = b$  la lunghezza dell'arco congiungente  $P_1$  con  $P_2$  è  $|b - a|$

Sia  $(\gamma, \vec{r}(t))$  una curva regolare; definiamo l'ascissa curvilinea<sup>4</sup> come:

$$S(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau$$

Per il teorema del calcolo integrale

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} & S(t) \text{ è integrabile} \\ S'(t) &= \frac{ds}{dt} & S : [a, b] \rightarrow [0, L] \end{aligned}$$

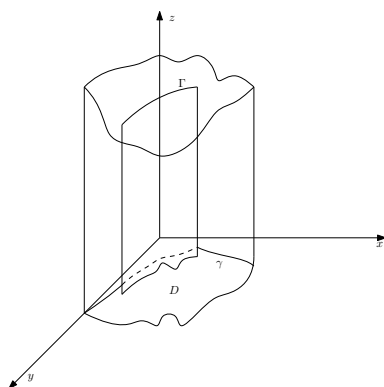
<sup>4</sup>o lunghezza d'arco

La lunghezza della curva così vale:

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \int ds \quad (4.11)$$

## 4.5 Integrale corvilineo

Prendiamo una funzione  $f(x,y)$  definita in un insieme  $D$  e una curva  $\gamma$  interno a  $D$ .



Calcoliamo la funzione nella curva  $\gamma$  e determiniamo una curva  $\Gamma$  dello spazio.

L'area delimitata dal cilindro di basi  $\gamma$  e  $\Gamma$  se  $f(x,y) > 0$  è il valore dell'integrale curvilineo di  $f(x,y)$  esteso a  $\gamma$ .

### 4.5.1 Definizione di integrale curvilineo

Data una curva regolare  $(\gamma, \vec{r}(t))$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.12)$$

e una funzione  $f(x,y,z) \in \mathbb{C}$  – definita in  $D_1$  con la curva inclusa  $D$ , si definisce **integrale curvilineo** di  $f(x,y,z)$  esteso alla curva

$$\int_{\gamma} f(x,y,z) ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] * \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

### 4.5.2 Baricentro di una curva

Si definisce **baricentro di una curva** quel punto di coordinate  $(x_0, y_0)$  per cui

$$x_0 = \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} x ds \quad y_0 = \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} y ds \quad \text{con } L_{\gamma} \text{ lunghezza della curva } \gamma$$

**Esempio 14.**

$$\gamma = \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} L_{\gamma} &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} * \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t dt \\ &= \left| \frac{3\sin^2 t}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} x ds = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = -\frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t * (-4\sin t) dt \\ y_0 &= \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} y ds = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t * 4\cos t dt = \frac{1}{10} \left| \sin^5 t \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$



### 4.5.3 Superfici e integrali di superficie

#### Superfici

**Definizione 29.** Sia definisce **superficie** in  $R^3$  una coppia  $(\Sigma, r)$  dove  $\Sigma$  è il sostegno (grafico)  $\in R^3$  ed  $r$  è la parametrizzazione  $d\Sigma, r \in C_A^0$ .

$A$  insieme aperto connesso di  $R^2$  per cui  $r(A) = \Sigma$ ,  $r$  calcolata nei punti di  $A$  e da la superficie.  $r$  è un'applicazione vettoriale  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = x(u, v)\vec{L} + y(u, v)\vec{J} + z(u, v)\vec{K}$  ( $u, v \in A$ )  $R^2 \rightarrow R^3$  ad ogni punto di  $A$  del piano, associa un punto di  $\Sigma$  nello spazio.

Una superficie si dice **semplice**  $\vec{r}(u, v)$  è 1-1, cioè se  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  sono 1-1 (cioè biunivoche, invertite) – Una superficie si dice **regolare a tratti** se è firmata dall'unione di un numero finito di superfici di classe  $C^1$  regolari.

Una superficie è di classe  $C_A^k$  se  $\vec{r}(u, v) \in C_A^k$  cioè  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \in C_A^k$

Una superficie si dice **regolare** se  $\vec{r}(u, v) \in C^1$  e la matrice delle derivate parziali prime ha rango 2

Una superficie si dice **chiusa** se è limitata e il suo bordo è l'insieme vuoto (non ha bordo).

**Teorema 7.** Le superfici cartesiane di classe  $C^1$  sono regolari:

**Esempio 15.**

Superficie sferica:  $z = \pm\sqrt{R^2 + x^2 - y^2}$   $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  definita su  $D : \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Superficie corta:  $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$

### 4.5.4 Piano tangente e versore normale

Prendiamo un dominio  $A \subset R^2$  e un suo punto  $P(u_0, v_0)$ . Prendo due linee in  $A$  passanti per  $P$ , sulla superficie  $\Sigma$  ho due curve.

Sia  $\vec{r}(u, v)$  l'equazione della superficie  $\Sigma$  e siano  $\vec{r}(u_0, v)$  e  $\vec{r}(u, v_0)$  le curve che si chiamano linee coordinate superficie<sup>5</sup>, i vettori tangenti alle linee coordinate sono

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$$

$$\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

Se il prodotto vettoriale non è nullo, i vettori sono linearmente indipendenti, quindi il rango di quel-

la matrice è 2. Allora possiamo dire una superficie  $\sigma$  è regolare se e solo se  $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \neq 0$ , cioè esiste il **piano tangente**.  $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$  è un vettore ortogonale al piano contenente  $\vec{r}_u$  e  $\vec{r}_v$  che è il **piano tangente** alla superficie.

La sua equazione è:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \text{ in } P(x_0, y_0, z_0)$$

Per avere il **versore normale** si divide il prodotto vettoriale per la sua lunghezza.

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}$$

In forma cartesiana

$$\vec{r}(u, v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad r_u = r_x = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ f_x \end{cases} \quad r_v = r_y = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ f_y \end{cases}$$

<sup>5</sup>(u,v) si chiamano coordinate locali

Il prodotto vettoriale

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k} = (-f_x; -f_y; 1)$$

il versore normale

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y}{\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\|}$$