



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

DIEE

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA ED ELETTRONICA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA ELETTRICA INDUSTRIALE

Fisica 1 & 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2021 - 2022

[This page is intentionally left blank]

Indice

0.1	Premesse...	7
0.2	Simboli	7
I	fisica 1	9
1	Grandezze fisiche e unità di misura	11
1.1	Sistema internazionale delle unità di misura	11
2	L'Energia	13
2.1	Lavoro	13
2.1.1	Lavoro di più forza costanti sullo stesso corpo	13
2.1.2	Lavoro di una forza variabile unidimensionale	14
2.1.3	Teorema dell'Energia Cinetica (caso unidimensionale forza costante)	16
2.1.4	Lavoro di una forza variabile in 3 dimensioni	16
2.2	Teorema dell'energia cinetica	17
2.3	Lavoro ed energia	18
2.4	Forze conservative	18
3	I moti	21
3.1	Moto di Roto-Traslario	21
3.1.1	Rotolamento Puro	23
3.1.2	Attrito Volvente	24
4	Modelli atomici	25
4.1	Modello atomico di Bohr-Sommerfeld	25
II	Fisica 2	27
5	programma	29
5.1	Base	29
5.2	Argomenti aggiuntivi	29
6	La legge di Coulomb	31
6.1	Introduzione	31
6.1.1	La carica elettrica	31
6.1.2	Carica indotta	32
6.2	Legge di Coulomb	32
6.2.1	Unità do misura	33
6.2.2	La costante dielettrica del vuoto	33
6.2.3	Forze multiple	33
6.3	Teorema del guscio	33
6.4	La quantizzazione della carica	33

6.5	La conservazione della carica	33
6.6	Verifica	33
7	Campi elettrici	35
7.1	L'aspetto fisico	35
7.2	Il campo elettrico	35
7.3	Linee di campo elettrico	35
7.4	Altro esempio delle linee di campo	36
7.5	Campo \vec{E} di una carica puntiforme	36
7.6	Il principio di sovrapposizione	36
7.7	Verifica	36
7.7.1	Soluzione	37
7.8	Campo \vec{E} di un dipolo elettrico	37
7.9	Misura della carica elementare	38
7.9.1	Millikan 1910	38
7.10	Prodotto scalare	38
7.11	Prodotto vettoriale	38
7.12	Dipolo in un campo elettrico	38
7.13	Energia potenziale di un dipolo elettrico	39
7.14	Problema	40
8	La legge di Gauss	41
8.1	L'aspetto fisico	41
8.2	La superficie Gaussiana	41
8.3	Il flusso elettrico	41
8.4	Cilindro in campo uniforme	42
8.5	La legge di Gauss	42
8.6	La legge di Gauss e di Coulomb	42
8.6.1	Problema svolto	43
8.7	Un conduttore carico isolato	43
8.7.1	Problema svolto	43
8.8	Gauss per simmetria cilindrica	44
8.9	Gauss per simmetria piana	44
8.10	Gauss per simmetria sferica	44
9	Potenziale elettrico	45
9.1	L'aspetto fisico	45
9.2	Il potenziale elettrico	45
9.3	Unità di misura	45
9.4	Il potenziale elettrico	45
9.5	Superfici equipotenziali	45
9.6	Calcolo del potenziale, dato \vec{E}	46
9.7	Potenziale di una carica puntiforme	46
9.8	Insieme di cariche puntiformi	46
9.8.1	problema	46
9.9	Potenziale di un dipolo elettrico	47
9.10	Potenziale di una distribuzione continua	47

Elenco delle tabelle

1.1	Unità fondamentali del sistema internazionale	11
1.2	Prefissi per le unità SI ^a	11

Elenco delle figure

2.1	Forze costanti e elastiche	15
2.2	Forza elastica	15
2.3	Forza costante	16
2.4	Forza vettoriale in 3 dimensioni	16
2.5	Forza conservative	18
2.6	Forza conservative	18
2.7	Forza gravitazionale	19
2.8	Forza elastica	19
3.1	Sistema di riferimento per il moto Roto-Traslario	21
3.2	Esempio del disco appoggiato su un piano	22
3.3	Rotolamento puro	23
3.4	Esempio del disco appoggiato su un piano	24
8.1	Due cariche di intensità uguale, ma di segno opposto	42

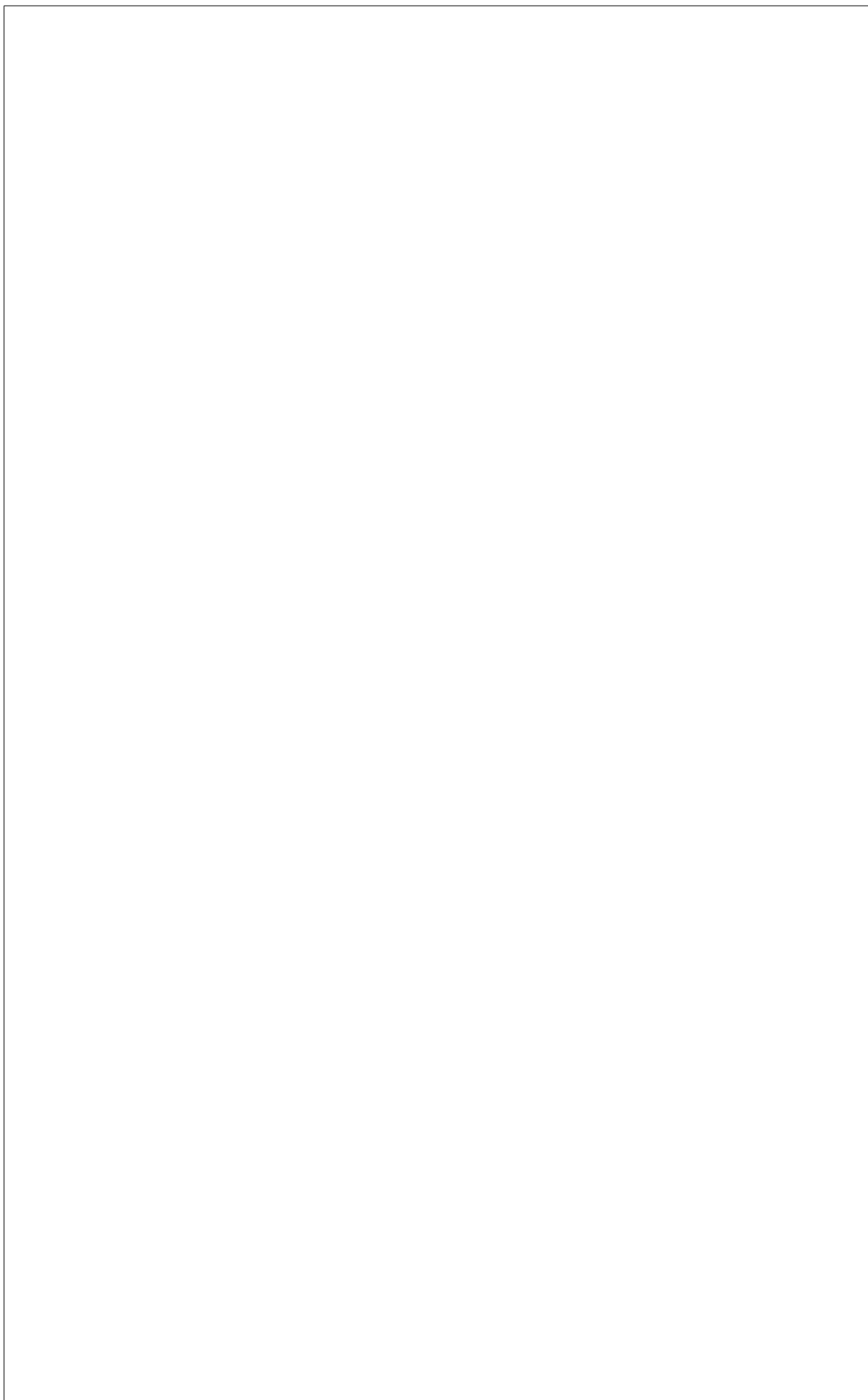
0.1 Premesse...

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un'occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica.

Cordiali saluti

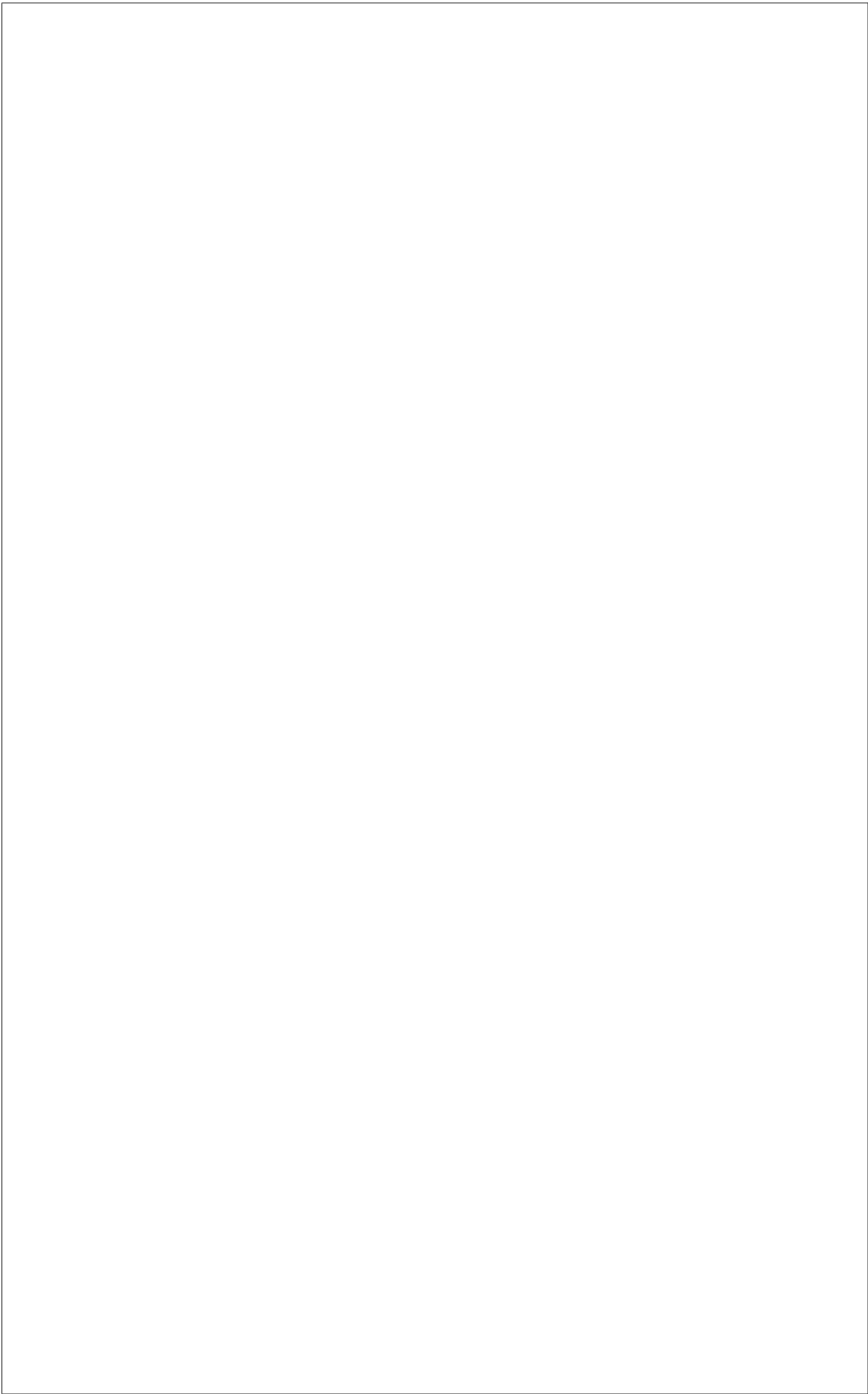
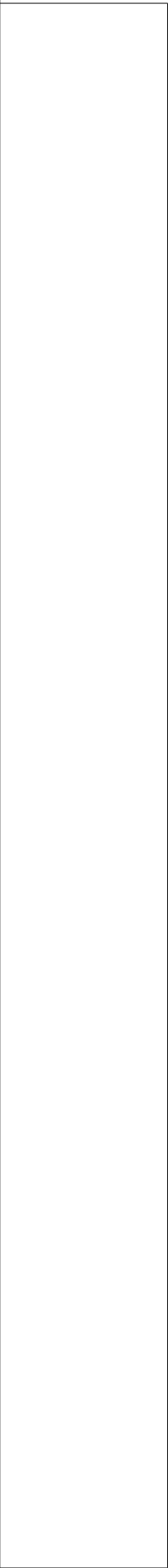
0.2 Simboli

\in Appartiene	\Rightarrow Implica	β beta
\notin Non appartiene	\Leftrightarrow Se e solo se	γ gamma
\exists Esiste	\neq Diverso	Γ Gamma
$\exists!$ Esiste unico	\forall Per ogni	δ, Δ delta
\subset Contenuto strettamente	\ni : Tale che	ϵ epsilon
\subseteq Contenuto	\leq Minore o uguale	σ, Σ sigma
\supset Contenuto strettamente	\geq Maggiore o uguale	ρ rho
\supseteq Contiene	α alfa	



Parte I

física 1



Capitolo 1

Grandezze fisiche e unità di misura

In fisica, una grandezza è la proprietà di un fenomeno, corpo o sostanza, che può essere espressa quantitativamente mediante un numero e un riferimento (ovvero che può essere misurata quantitativamente). by [Wikipedia](#)

Grandezza	Nome	Simbolo
Tempo	secondo	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Quantità di materiale	mole	mol
Temperatura termodinamica	kelvin	K
Corrente elettrica	ampere	A
Intensità luminosa	candela	cd

Tabella 1.1: Unità fondamentali del sistema internazionale

Per una questione di comodità di lettura esistono i multipli delle unità di misura e vengono indicati con dei prefissi che consente di ridurre il numero di cifre, rendere più veloce la lettura e la scrittura.

Fattore	Prefisso	Simbolo	Fattore	Prefisso	Simbolo
10^{18}	exa-	E	10^{-1}	deci-	d
10^{15}	peta-	P	10^{-2}	centi-	c
10^{12}	tera-	T	10^{-3}	milli-	m
10^9	giga-	G	10^{-6}	micro-	μ
10^6	mega-	M	10^{-9}	nano-	<i>n</i>
10^3	kilo-	k	10^{-12}	pico-	<i>p</i>
10^2	etto-	h	10^{-15}	femto-	<i>f</i>
10^1	deca-	da	10^{-18}	atto-	<i>a</i>

Tabella 1.2: Prefissi per le unità SI^a

1.1 Sistema internazionale delle unità di misura

Il sistema internazionale di unità di misura (in francese: *Système international d'unités*), abbreviato in S.I. (pronunciato esse-i), è il più diffuso sistema di unità di misura. Nei paesi anglosassoni sono ancora impiegate delle unità consuetudinarie, un esempio sono quelle statunitensi. La difficoltà culturale nel passaggio della popolazione da un sistema all'altro è essenzialmente legato a radici storiche. Il sistema internazionale impiega per la maggior parte unità del sistema metrico decimale nate nel contesto della rivoluzione francese: le unità S.I. hanno gli stessi nomi e praticamente la stessa grandezza pratica delle unità metriche. Il sistema è un sistema tempo-lunghezza massa che è stato inizialmente chiamato Sistema MKS, per distinguerlo dal similare Sistema CGS. Le sue unità di misura erano infatti metro, chilogrammo e secondo invece che centimetro, grammo, secondo. By [Wikipedia](#)

Capitolo 2

L'Energia

2.1 Lavoro

Definizione 1. Il lavoro è definito come il prodotto della forza per lo spostamento del suo punto di applicazione. Esso è quindi uno scalare

$$L = \vec{F} * \vec{s} = Fs \cos \theta \quad (2.1)$$

In cui θ è l'angolo più piccolo formato tra la forza e lo spostamento

$$\begin{array}{ll} \text{Dimensioni:} & [L] = [F][L] = [MLT^{-2}][l] = [ML^2T^{-2}] \\ \text{Unità in misura:} & Kgm^2s^{-2} = \text{Joule simbolo (J)} \end{array}$$

$$L = \vec{F} * \vec{s} = Fs \cos \theta$$

$$\begin{array}{lll} L > 0 & \Rightarrow \cos \theta > 0 & \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ L = 0 & \Rightarrow \cos \theta = 0 & \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ L < 0 & \Rightarrow \cos \theta < 0 & \Rightarrow \theta > \frac{\pi}{2} \end{array}$$

2.1.1 Lavoro di più forza costanti sullo stesso corpo

Il lavoro totale è la somma di tutti i lavori fatti dalle forze (costanti) che agiscono sul sistema considerato.

$$L_T = \vec{F}_1 * \vec{s} + \dots + \vec{F}_n * \vec{s} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i * \vec{s} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) * \vec{s} \quad \vec{R} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right)$$

\vec{R} = Risultante delle Forze

Esempio 1. Calcolare il lavoro fatto dalla forza agente su una cassa di massa $m=50.0Kg$ trascinata, per una distanza di 6,00 metri su un piano liscio, mediante una corda con tensione T pari a 200N che forma un angolo di $35,0^\circ$ con l'asse delle x .

$$L_T = L_{\vec{N}} + L_{\vec{T}_y} + L_{\vec{T}_x}$$

$$\begin{cases} \vec{N} \\ \vec{T}_y \\ \vec{P} \end{cases} \text{ sono tutte perpendicolari allo spostamento } \vec{s} \Rightarrow L_N + L_{\vec{T}_y} + L_P = 0$$

$$L_T = L_{\vec{T}_x} = \vec{T}_x * \vec{s} = Ts \cos \theta = 200N * 6m * 0,82 \cong \boxed{983 \text{ joule}}$$

Esempio 2. Calcolare il lavoro fatto dalle forze agenti su una cassa massa $m = 50\text{Kg}$ trascinata, per una distanza di 6 metri su un piano scabro (attrito $\mu = 0,15$), mediante una corda con tensione T pari a 200N che forma un angolo di 35° con l'asse delle x .

Forza d'attrito

$$f_d = \mu_d N' = \mu_d (mg - T_y) \Rightarrow f_d = \mu_d [mg - T \sin 35^\circ] = 56,4 \text{ Newton}$$

Lavoro Totale

$$L_T = L_{\vec{N}} + L_{\vec{T}_y} + L_{\vec{T}_x} + L_{\vec{P}} + L_{\vec{f}_d}$$

$$\begin{cases} \vec{N} \\ \vec{T}_y \\ \vec{P} \end{cases} \text{ sono tutte perpendicolare allo spostamento } \vec{s} \Rightarrow L_N + L_{\vec{T}_y} + L_{\vec{P}} = 0$$

$$L_T = L_{\vec{T}_x} + L_{\vec{f}_d} = \vec{T}_x * \vec{s} + \vec{f}_d * \vec{s} = [T \cos \theta s \cos 0^\circ + f_d s \cos \pi]$$

$$L_T = \{(200 * 0,82 * 6 * 1) + [56,4 * 6 * (-1)]\} \text{ Joule} \cong \boxed{646J}$$

2.1.2 Lavoro di una forza variabile unidimensionale

Definizione 2. La forza varia della posizione¹. Ogni volta che passiamo da una posizione x_i a quella x_j la forza varia e compie il lavoro. Se x_i è molto prossimo a x_j la forza varierà poco e quindi possiamo definire il lavoro elementare come:

$$dL = \vec{F} * \Delta \vec{x} = F \Delta x \text{ La forza è compresa tra i valori che essa assume in } x_i \text{ e } x_j.$$

Il lavoro si ottiene sommando i lavori infinitesimi fatti dalla forza durante lo spostamento del suo punto di applicazione x_1 e x_2 e quindi coincide con l'area L .

$$L_T = \sum_{i=1}^N dL = F_i dx \text{ Se } \Delta x \rightarrow 0, \text{ invece } L_T = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Il lavoro di una forza rappresenta quindi l'area² della regione al disotto della curva che rappresenta la variazione della forza in funzione dello spostamento, regione celeste nella figura sotto.

¹Come ad esempio in una molla stirata in una direzione

²attenzione L ha le dimensioni di una forza per una lunghezza

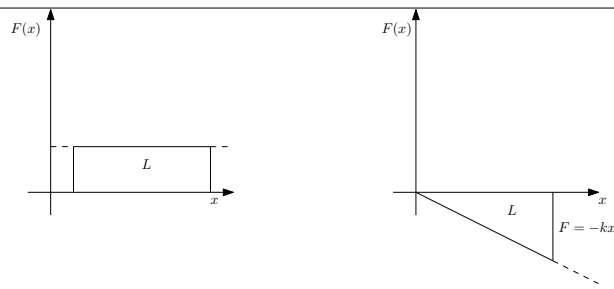


Figura 2.1: Forze costanti e elastiche

Nota 1. Nel caso della figura a sinistra si tratta di una forza costante, mentre, quella di destra è una forza elastica, come si vede nel caso della prima si presenta come un rettangolo che per l'appunto mantiene un'intensità costante, mentre nel caso del secondo, ha un andamento che segue la funzione $F = -kx$

Lavoro della forza variabile prodotta dalle molle (Forza elastica)

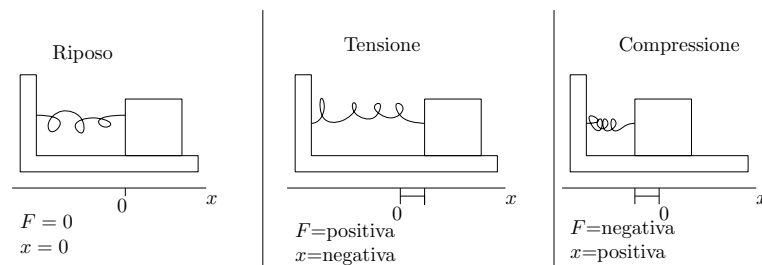


Figura 2.2: Forza elastica

$$L_T = \int_0^x \vec{F}_x * d\vec{x} = \int_0^x (-kx)dx = -1/2kx^2 \quad (2.2)$$

Esempio 3. Calcolare il lavoro fatto dalla forza elastica di una molla avente $k = 450 \frac{N}{m}$ quando essa è stirata di 15 cm rispetto alla sua posizione di riposo.

$$L_{F_e} = -1/2kx^2 = -0,5 * 450 \frac{N}{m} * (0,15m)^2 = -5,06Nm = -5,06J \quad (2.3)$$

2.1.3 Teorema dell'Energia Cinetica (caso unidimensionale forza costante)

Consideriamo una forza \vec{F} costante che agisce su un corpo di massa m che sposta il suo punto di applicazione di una quantità \vec{s}

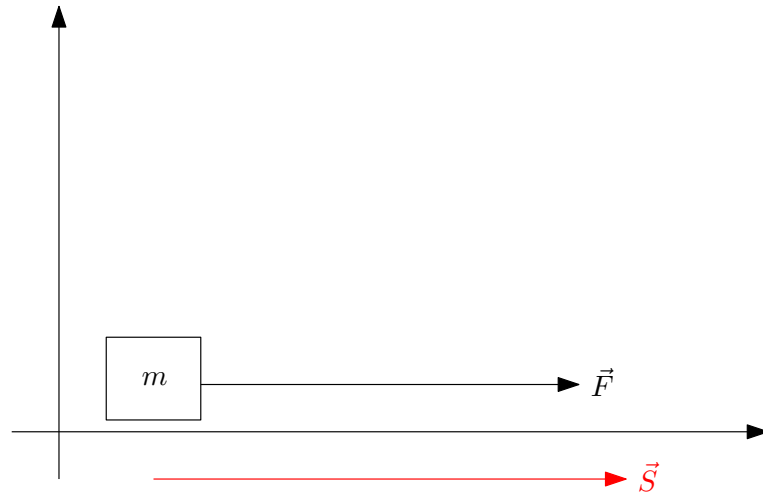


Figura 2.3: Forza costante

$$F = ma \quad a = \frac{F}{m} = \text{costante} \Rightarrow \text{Moto naturalmente accelerato} \quad (2.4)$$

Abbiamo quindi che $v_2^2 + 2a(x_2 - x_1)$ ³

$$L = \vec{F} * F s \cos 0 = ma(x_2 - x_1) = m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)} (x_2 - x_1) \quad (2.5)$$

Teorema 1. *In fisica, il teorema dell'energia cinetica (o teorema lavoro-energia, o teorema delle forze vive) afferma che se un corpo possiede un'energia cinetica iniziale e una forza agisce su di esso effettuando un lavoro, l'energia cinetica finale del corpo è uguale alla somma dell'energia cinetica iniziale e del lavoro compiuto dalla forza lungo la traiettoria del moto.*

$$L = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1 = K_f - K_i = \Delta K \quad (2.6)$$

2.1.4 Lavoro di una forza variabile in 3 dimensioni

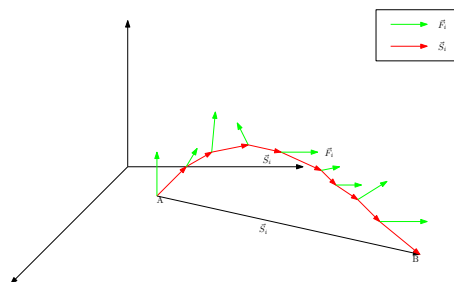


Figura 2.4: Forza vettoriale in 3 dimensioni

³Dove $(x_2 - x_1)$ è il modulo dello spostamento

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \quad \begin{array}{l} \text{Spostamento totale} \\ \text{come limite della spezzata per} \\ N \rightarrow \infty \end{array}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

Quindi si può dire che $L_T = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i * \vec{s}_i \rightarrow L_T = \int_A^B \vec{F} * d\vec{S}$, se e solo se $|\vec{s}_i| \rightarrow 0$

Teorema dell'energia cinematica tridimensionali

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\begin{aligned} L &= \int \vec{F} * d\vec{s} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{x_1}^{x_2} m a_x dx + \int_{y_1}^{y_2} m a_y dy + \int_{z_1}^{z_2} m a_z dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv_x}{dt} dx + \int_{y_1}^{y_2} m \frac{dv_y}{dt} dy + \int_{z_1}^{z_2} m \frac{dv_z}{dt} dz = \int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} m v_x dv_x + \int_{v_{y_1}}^{v_{y_2}} m v_y dv_y + \int_{v_{z_1}}^{v_{z_2}} m v_z dv_z \\ &= \frac{1}{2} m [v_x^2]_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} + \frac{1}{2} m [v_y^2]_{v_{y_1}}^{v_{y_2}} + \frac{1}{2} m [v_z^2]_{v_{z_1}}^{v_{z_2}} = \frac{1}{2} m [v_{x_2}^2 - v_{x_1}^2] + \frac{1}{2} m [v_{y_2}^2 - v_{y_1}^2] + \frac{1}{2} m [v_{z_2}^2 - v_{z_1}^2] \\ &= \frac{1}{2} m [v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2 + v_{z_2}^2] - \frac{1}{2} m [v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2] = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \end{aligned}$$

Quindi alla fine il risultato è

$$L = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Il lavoro fatto dalla forza (*risultante*) applicata al sistema è quindi legato alla variazione della velocità del sistema durante l'applicazione della forza stessa.

2.2 Teorema dell'energia cinetica

Definizione 3. *L'energia cinetica è l'energia che possiede un corpo per il movimento che ha o che acquista: equivale al lavoro necessario per portare un corpo da una velocità nulla a una velocità nota. Quando un corpo di massa m varia la sua velocità, con questa varia anche la sua energia cinetica. Il lavoro equivale a questa variazione di energia cinetica. L'energia cinetica quindi è associata alla massa e alla velocità di un corpo in movimento. L'energia cinetica che possiede un corpo di massa m nel suo moto di caduta è uguale al lavoro compiuto per fermarsi.*

Matematicamente, l'energia cinetica è $K = \frac{1}{2} m v^2$ - Il lavoro totale fatto dalle forze che agiscono sul sistema considerato, è uguale alla variazione della sua energia cinetica:

$$L_T = L = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = K_2 - K_1 = K_f - K_i = \Delta K$$

L'energia cinetica è uno scalare che ha le stesse dimensioni del Lavoro. Si misura quindi in Joule (J)

$$[K] = [ML^2T^{-2}] \quad \text{Unità di misura: Joule (J)}$$

Lavoro ed Energia cinetica

$$L_T > 0 \Rightarrow \Delta K > 0 \quad v_f > v_i \quad \text{Il sistema accelera}$$

$$L_T = 0 \Rightarrow \Delta K = 0 \quad v_f = v_i \quad \text{La velocità del sistema rimane invariata}$$

$$L_T < 0 \Rightarrow \Delta K < 0 \quad v_f < v_i \quad \text{Il sistema decelera}$$

2.3 Lavoro ed energia

Esempio 4. Un blocco di massa $m = 5\text{kg}$ viaggia con velocità costante pari a $7,6 \frac{m}{s}$

1. Qual'è la sua energia cinetica?

2. Quale lavoro totale è stato necessario fornirgli, se esso era inizialmente fermo, per portarlo a quella velocità?

3. Quale lavoro totale è necessario per rallentarlo sino alla velocità di $4 \frac{m}{s}$?

1. energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0,5 \times 5\text{kg} \times \left(7,6 \frac{m}{s}\right)^2 = 140,6 \text{Joule} \cong 140,6 \text{J}$$

2. Lavoro totale:

$$L_T = \Delta K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}mv_1^2 = [0,5 \times 5\text{kg} \times (7,6 \frac{m}{s})] = 40 \text{J} - 141 \text{J} = -101 \text{J}$$

2.4 Forze conservative

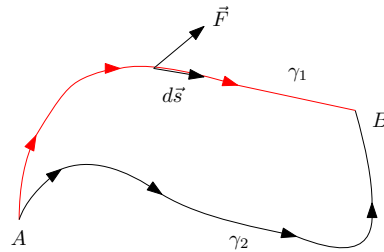


Figura 2.5: Forza conservativa

Per una forza risulta che:

$$L_{\gamma_1, A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} * d\vec{s} = L_{\gamma_2, A \rightarrow B} \quad (2.7)$$

è se il lavoro per andare da A a B non dipende dal corso seguito, allora diciamo che la forza è Conservativa.

Se una forza è conservativa si ottiene anche che:

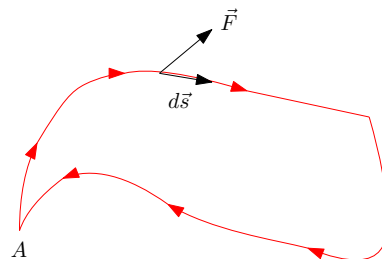


Figura 2.6: Forza conservativa

$$L_{A \rightarrow A} = \oint \vec{F} * d\vec{s} = 0 \quad (2.8)$$

Esempio 5. *Forza peso (forza gravitazionale)*

Qualunque percorso $A \rightarrow B$ che unisce due punti, può essere approssimato da una spezzata opportuna

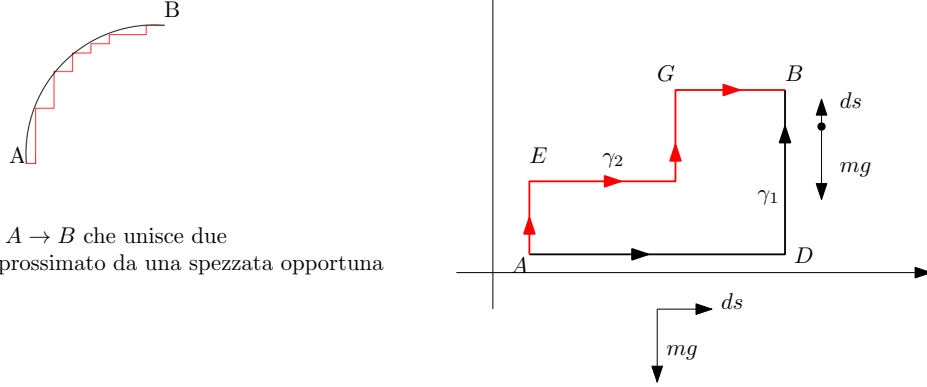


Figura 2.7: Forza gravitazionale

$$L_{\gamma_1, A \rightarrow B} = \int_{y_a}^{y_b} (-mg) dy + \int_{y_a}^{y_b} (-mg) dy = -mg(y_b - y_a) \quad (2.9)$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} L_{\gamma_2, A \rightarrow B} &= \int_{y_a}^{y_b} (-mg) dy = \int_{y_a}^{y_f} (-mg) dy + \int_{y_f}^{y_g} (-mg) dy + \int_{y_g}^{y_b} (-mg) dy = -mg(y_b - y_a) \\ &= \int_{y_a}^{y_b} (-mg) dy = -mg(y_b - y_a) \end{aligned}$$

Conclusioni: $L_{\gamma_1, A \rightarrow B} = L_{\gamma_2, A \rightarrow B}$ La Forza peso (forza gravitazionale) è conservativa!

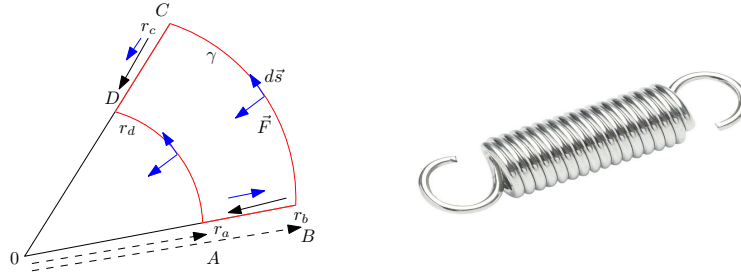
Esempio 6. *Forza Elastica*

Figura 2.8: Forza elastica

$$\begin{aligned} L_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F}_e * d\vec{s} = \int_{r_a}^{r_b} -kr dr = -\frac{1}{2}k[r_b^2 - r_a^2] \\ L_{B \rightarrow C} &= \int_B^C \vec{F}_e * d\vec{s} = 0 \\ L_{C \rightarrow D} &= \int_C^D \vec{F}_e * d\vec{s} = \int_{r_c}^{r_d} -kr dr = -\frac{1}{2}k[r_d^2 - r_c^2] = +\frac{1}{2}k[r_c^2 - r_d^2] \\ L_{D \rightarrow A} &= \int_D^A \vec{F}_e * d\vec{s} = 0 \end{aligned}$$

Essendo $r_c = r_b$ e $r_a = r_d$ si ha che:

$$L_{A \rightarrow A} = \oint_{\gamma} \vec{F} * d\vec{s} = L_{A \rightarrow B} + L_{B \rightarrow C} + L_{C \rightarrow D} + L_{D \rightarrow A} \quad (2.10)$$

Per questo motivo la forza elastica è conservativa

Capitolo 3

I moti

3.1 Moto di Roto-Traslario

Analizziamo il moto più generale di un sistema meccanico isolato, cioè privo di forze esterne.

$$M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \text{In assenza di forze esterne il centro di massa si muove di moto rettilineo univorme oppure sta fermo (in un sistema di riferimento inerziale)}$$

Posiamo studiare questo moto rispetto ad un sistema inerziale fermo dal quale osservare il moto del corpo rigido: Nel sistema $o'x'y'$ nell'energia cinetica sarà completamente rotazionale e quindi data da:

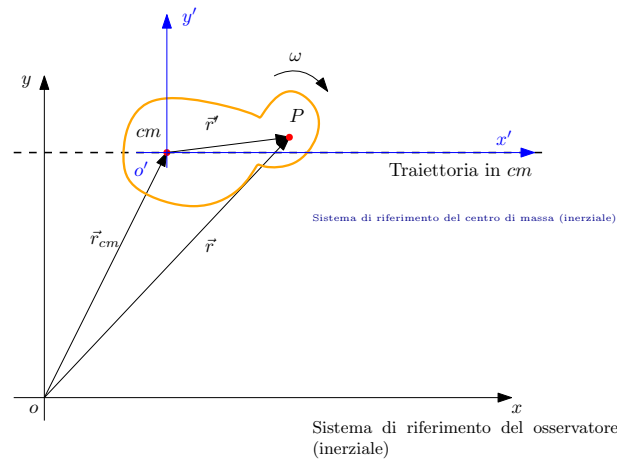


Figura 3.1: Sistema di riferimento per il moto Roto-Traslario

$$I_{cm} = \int r'^2 dm \quad \text{dove } I_{cm} \text{ il momento d'inezia del corpo per la rotazione attorno al } cm.$$

Nel sistema oxy , \vec{r}' può essere espresso come:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{cm} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{cm}$$

Scriviamo quindi l'energia cinetica del corpo rigido nel sistema di riferimento oxy :

$$K = \frac{1}{2} \sum \underbrace{m_i v^2}_{\text{corpo continuo}} \rightarrow K = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int (\vec{v}) * (\vec{v}) dm = \frac{1}{2} \int (\vec{v}' + \vec{v}_{cm}) * (\vec{v}' + \vec{v}_{cm}) dm \\
&= \frac{1}{2} \int \underbrace{v'^2}_{v' = \omega r'} dm + \frac{1}{2} \int \vec{v}' + \vec{v}_{cm} dm + \frac{1}{2} \int \vec{v}' + \vec{v}_{cm} dm + \frac{1}{2} \int v_{cm}^2 dm \\
&\quad \frac{1}{2} \omega' r'^2 dm + \vec{v}_{cm} dm * \underbrace{\int \vec{v}' dm}_{\text{vale 0}} + \frac{1}{2} v_{cm}^2 \underbrace{\int dm}_{\text{Massa totale M}} \\
&\quad \text{vedi nodo 1} \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\omega^2 \int r'^2 dm}_{\text{Momento d'inerzia}} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\
&\quad \text{rispetto al centro di} \\
&\quad \text{massa}
\end{aligned}$$

Quindi la formula finale è:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad (3.2)$$

Nota 2. $\int \vec{v}' dm$ rappresenta la velocità del cm nel sistema di riferimento. Essa è quindi nulla in tale riferimento.

L'energia cinetica di un corpo rigido¹ che ruota e trasla è data dalla:

Energia di Energia di rotazione
Energia cinetica = traslazione del + attorno al centro di
centro di massa massa

$$K = K_t + K_r \quad (3.3)$$

$$K = K_t + K_r = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad I_{cm} = \int r'^2 dm$$

Esempio 7. Un disco privo d'attrito è poggiato su un piano. Sulla periferia del disco è avvolto un sottile filo ideale che applica una forza costante di 10,0 N. La massa del disco è di 3,75 kg ed il suo raggio è di 0,440 m.

1. L'accelerazione angolare del disco;
2. L'accelerazione lineare del disco

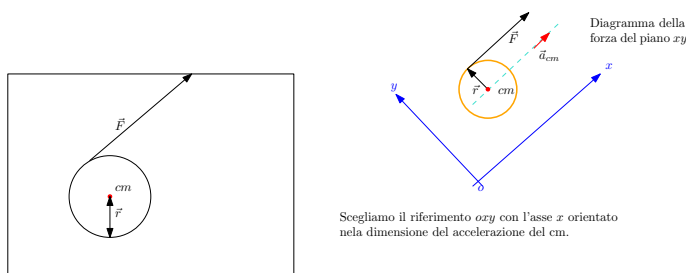


Figura 3.2: Esempio del disco appoggiato su un piano

¹o sistema di particelle

Applicando le leggi di Newton per la dinamica lineare e per quella rotazionale, abbiamo che:

$$\sum \vec{F}_x = M\vec{a}_{cm,x} \quad \rightarrow \quad \boxed{F = Ma_{cm}} \quad (3.4)$$

$$\sum \vec{F}_y = M\vec{a}_{cm,y} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{cm,y} = 0} \quad (3.5)$$

$$\sum \tau = I_{cm}\alpha \quad \rightarrow \quad rF = \frac{1}{2}Mr^2\alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2F}{Mr}} \quad (3.6)$$

Passando ai numeri abbiamo:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{cm} &= \frac{F}{M} = \left[\frac{10}{3,75} \right] m/s^2 = 2,66 m/s^2 \\ \alpha &= \frac{2F}{Mr} = \left[\frac{2 \times 10}{3,75 \times 0,44} \right] rad/s^2 = 12,1 rad/s^2 \end{aligned}}$$

Nota bene 1. l'accelerazione del centro di massa è orientata come la risultante delle forze.

Nota bene 2. Con questa scelta del riferimento, non vi sono forze lungo y

Nota bene 3. Polo per il calcolo dei momenti è nel cm. La rotazione è istante per istante attorno ad un asse passante per il centro di massa e perpendicolare al piano del disco.

3.1.1 Rotolamento Puro

Moto di rotolamento puro: avviene, per esempio quando abbiamo rotolamento senza strisciamento su una superficie con attrito²: In assenza di strisciamento lo spostamento Δs del centro di massa deve eguagliare

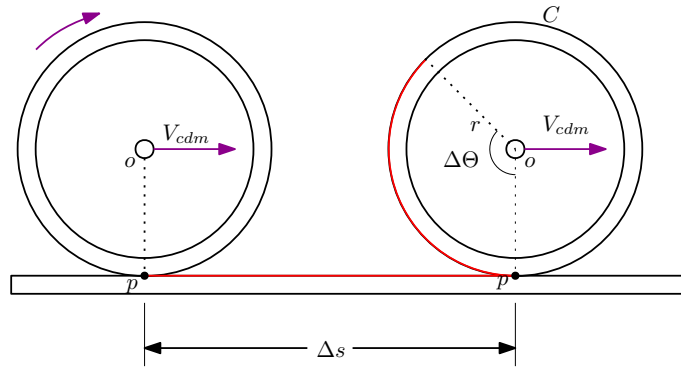


Figura 3.3: Rotolamento puro

lo spostamento $\Delta s'$ della circonferenza C di raggio r :

$$\Delta s = \Delta s' = r\Delta\vartheta$$

Poiché s è anche lo spostamento che subisce il centro di massa nel Δt abbiamo che

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \rightarrow v_{cm} = r\omega$$

Nel moto di rotolamento puro la velocità

$$\boxed{v_{cm} = r\omega}$$

periferica è uguale a quella del centro di massa.

Essendo la velocità del centro di massa correlata con correlata con quella periferica possiamo scrivere:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}[MR^2\omega^2] = \frac{1}{2}[MR^2 + I_{cm}]\omega^2 \quad (3.7)$$

²L'esempio più classico di questo moto può essere fatto prendendo una ruota di bicicletta o di automobile.

Oppure:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} \left[M v_{cm}^2 + I_{cm} \frac{v_{cm}^2}{R^2} \right] = \frac{1}{2} \left[M + \frac{I_{cm}}{R^2} \right] v_{cm}^2 \quad (3.8)$$

Esempio 8. Scrivere l'energia cinetica di un cilindro di raggio pari a 20.0cm e massa 15.5Kg che rotola senza strisciare su un piano orizzontale con velocità angolare pari a $2.85 \frac{rad}{s}$.

Utilizzando la (3.7) otteniamo:

$$I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$$

$$K = \frac{1}{2} [M R^2 + I_{cm}] \omega^2 = \frac{1}{2} \left[M R^2 + \frac{1}{2} M R^2 \right] \omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \left[1 + \frac{1}{2} \right] \omega^2 = \frac{3}{4} M R^2 \omega^2$$

$$K = [0.75 \times 15.5 \times (0.2)^2 \times (2.85)^2] J = 3.78 J$$

3.1.2 Attrito Volvente

Definizione 4. L'attrito volvente è differente dall'attrito. Nel moto roto-traslatorio l'attrito volvente si manifesta nel punto di contatto e nel caso del moto di rotolamento puro calcolato dalla risoluzione delle equazioni del moto.

Esempio 9. un disco (massa $m = 10kg$, raggio $R = 0.25m$) è sottoposto ad una forza di 22.5N come in figura. Il piano presenta dell'attrito ed il moto risultante è di rotolamento puro. Calcolare:

1. L'accelerazione angolare del disco;
2. L'accelerazione lineare del disco;
3. Il modulo f_a della forza d'attrito volvente.

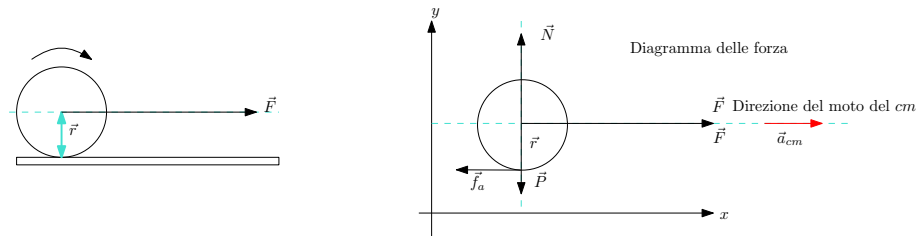


Figura 3.4: Esempio del disco appoggiato su un piano

Nota bene 4. il disco ruota di rotolamento puro quindi la forza \vec{F} trascina il disco senza sollevarlo dal piano

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x &= M \vec{a}_{cm,x} & \rightarrow & \boxed{F - f_a = M a_{cm}} \\ \sum \vec{F}_y &= M \vec{a}_{cm,y} & \rightarrow & \boxed{N = P - F} \\ \sum \tau &= I_{cm} \alpha & \rightarrow & \boxed{f_a = \frac{M r}{2} \alpha} \\ v_{cm} &= \omega r & \rightarrow & \boxed{a_{cm} = r \alpha} \end{aligned}$$

Nota bene 5. Polo per il calcolo dei momenti è nel cm

Capitolo 4

Modelli atomici

4.1 Modello atomico di Bohr-Sommerfeld

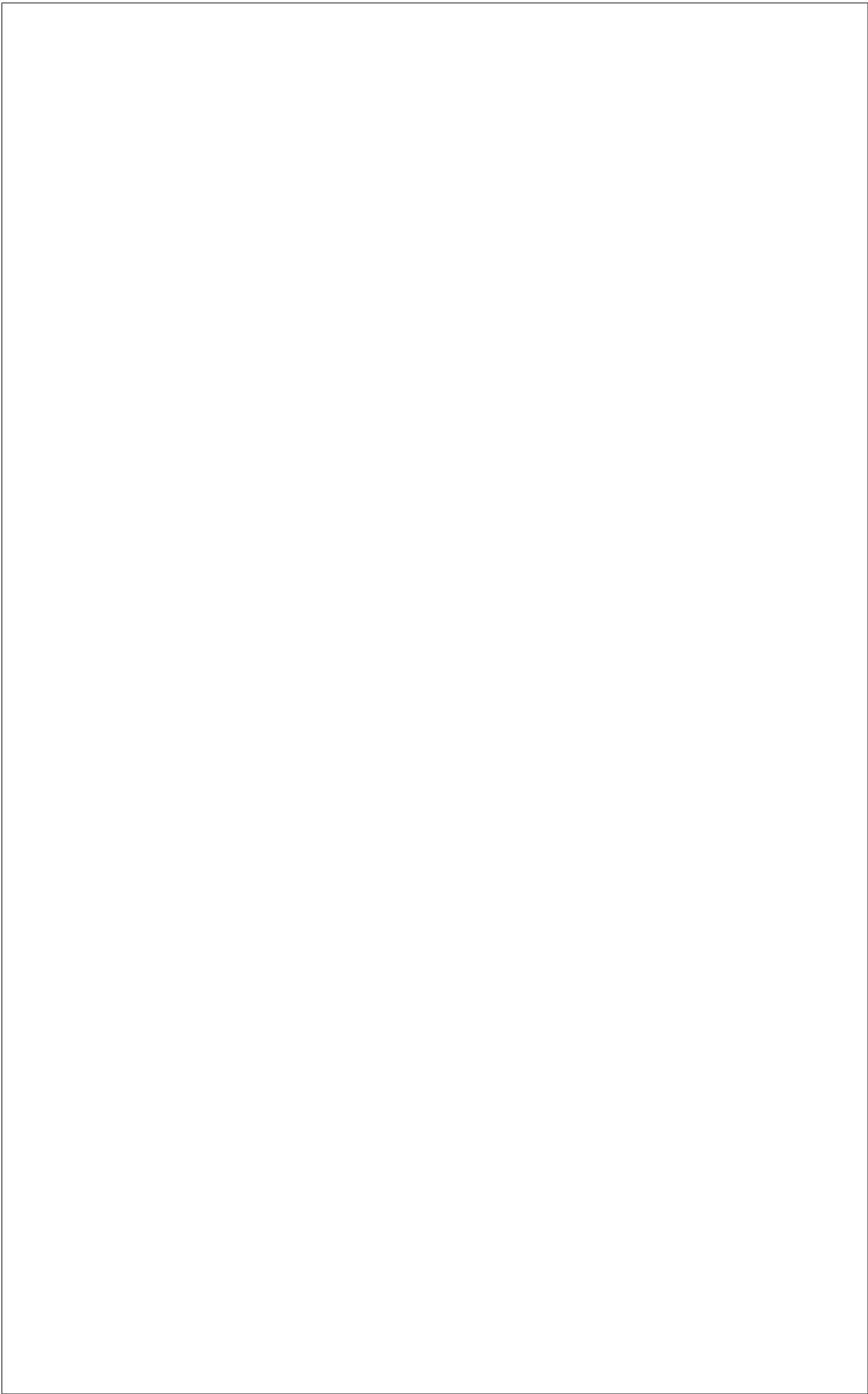
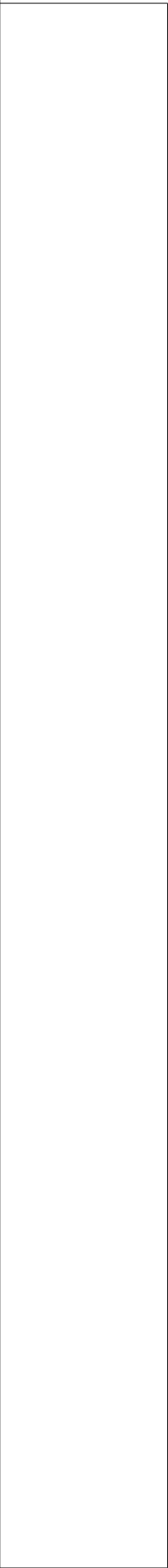
Il modello atomico proposto da Niels Bohr nel 1913, successivamente ampliato da Arnold Sommerfeld nel 1916, è la più famosa applicazione della quantizzazione dell'energia che, insieme alle spiegazioni teoriche sulla radiazione del corpo nero, sull'effetto fotoelettrico e sullo scattering Compton, e all'equazione di Schrödinger, costituiscono la base della meccanica quantistica.

Il modello, proposto inizialmente per l'atomo di idrogeno, riusciva anche a spiegare, entro il margine di errore statistico, l'esistenza dello spettro sperimentale. Bohr presenta così un modello dell'atomo, facendo intuire che gli elettroni si muovono su degli orbitali. *Questo modello viene ancora utilizzato nello studio dei Semiconduttori.*

By [Wikipedia](#)

Parte II

Fisica 2



Capitolo 5

programma

5.1 Base

- *Elettrostatica nel vuoto* - carica elettrica, legge di Coulomb, campo elettrico, teorema di Gauss e 1^a equazione di Maxwell, potenziale elettrico, dipolo elettrico, conduttori, capacità elettrica, sistemi di condensatori, collegamento in serie e in parallelo, energia del campo elettrostatico.
- *Corrente elettrica stazionaria* - resistenza elettrica e legge di Ohm, effetto Joule, forza elettromotrice e generatori elettrici, circuiti in corrente continua.
- *Magnetismo nel vuoto* - forza di Lorentz, vettore induzione magnetica, forze magnetica su una corrente, momento magnetico della spira percorsa da corrente, relazione tra momento meccanico e momento magnetico, campi generati da correnti stazionarie, legge di Biot e Savart (campo del filo indefinito, della spira circolare e del solenoide), 2^a equazione di Maxwell, teorema di Ampère.
- *Campi magnetici variabili nel tempo* - induzione elettromagnetica, legge di Faraday-Newmann, 3^a e 4^a equazione di Maxwell, autoinduzione, circuito RL, energia magnetica.
- *Onde* - equazione d'onda, tipi di onde, velocità di fase, equazioni delle onde elettromagnetiche e loro proprietà, onda piana e onde sferiche, energia di un'onda elettromagnetica e vettore di Poynting, spettro della radiazione elettromagnetica.

5.2 Argomenti aggiuntivi

- *Elettrostatica nella materia* - la costante dielettrica, interpretazione microscopica, suscettibilità elettrica.
- *Magnetismo nella materia* - vettori B, H e M, materiali paramagnetici, ferromagnetici, diamagnetici, legge di Curie, ciclo di isteresi.

--	--

Capitolo 6

La legge di Coulomb

6.1 Introduzione

L'elettromagnetismo costituisce il fondamento su cui sono costruiti i computer, le radio e televisori, le telecomunicazioni, illuminazioni ecc. L'elettromagnetismo spiega come gli atomi siano tenuti insieme, come avvengono i fulmini, le aurore e gli arcobaleni. Gli antichi filosofi greci scoprirono che l'ambra strofinata attrae pagliuzze sottili e che pietre magnetiche naturali attraggono pezzetti di ferro. Tra i tanti scienziati che svilupparono l'elettromagnetismo moderno, notiamo il fisico sperimentale Michael Faraday ed il teorico James Clerk Maxwell.

6.1.1 La carica elettrica

Una bacchetta di vetro strofinata con seta si **allontana** da un'altra bacchetta di vetro strofinata con della seta.

1. *Forza repulsiva* - Una bacchetta di vetro strofinata con della seta si *avvicina* ad una bacchetta di plastica strofinata con la pelle di camoscio.
2. *Forza attrattiva* - Le forze sono dovute alla **carica elettrica**.

Esistono due tipi di carica:

1. Carica positiva, contrassegnata con il segno +;
2. Carica negativa, contrassegnata con il segno -

Si definisce neutro un oggetto che ha le cariche positive e negative perfettamente bilanciate. Spostando la carica da un oggetto all'altro, si crea una carica in eccesso. L'oggetto può scaricarsi con scintille oppure con l'umidità dell'aria.

Le proprietà delle cariche

1. Le particelle cariche dello *stesso segno* si respingono;
2. Le particelle di carica opposta si attraggono;
3. Se strofiniamo il vetro con un panno di seta risulta in una *carica potenziale* nel vetro;
4. Strofinando della plastica con della pelle di camoscio si ottiene una *carica negativa* sulla stessa.

Conduttori e isolanti

In natura esistono le seguenti tipologie di materiali:

- a) I conduttori - le cariche si muovono liberamente;
- b) Gli isolanti - le cariche non si muovono, per l'appunto restano isolate;
- c) I semiconduttori - le cariche si muovono, ma il materiale possiede un'alta resistenza;
- d) I superconduttori - le cariche si muovono senza incontrare ostacoli di sorta.

Particelle Cariche 1. *La materia composta di atomi. Gli atomi hanno un **nucleo** con*

- *Protoni - cariche positive;*
- *Elettroni - carica negativa.*

*La carica dell'elettrone e del protone hanno la stessa intensità ma segno opposto. Gli elettroni sono **attratti verso il nucleo**. Nei conduttori, alcuni elettroni sono liberi di muoversi, un isolante non ha elettroni liberi.*

6.1.2 Carica indotta

Una carica negativa *respinge* gli elettroni nel rame, risulta una carica positiva indotta vicino alla carica esterna. Risulta una **forza attrattiva** tra una carica negativa e un conduttore. Anche per una carica positiva ed un conduttore la forza risulta **attrattiva**.

6.2 Legge di Coulomb

Tra due cariche puntiformi esiste una *forza elettrostatica*. La forza è diretta *lungo la retta congiungente* le due cariche. Se le cariche sono della stessa polarità le stesse si respingono, invece, se sono di carica opposta, avviene un'attrazione tra le cariche.

Riassunto sui vettori

Componenti:

$$F_x = F \cos \theta; F_y = F \sin \theta \quad (6.1)$$

Modulo e angolo:

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \quad \tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (6.2)$$

Versore:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a} \quad (6.3)$$

Sommare:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \rightarrow F_x = F_{1x} + F_{2x}; F_y = F_{1y} + F_{2y} \quad (6.4)$$

La forza di una carica q_1 in presenza di un'altra q_2 è:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (6.5)$$

Dove $k = 8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}$ è la **costante di Coulomb** e \vec{r} è il vettore di lunghezza pari alla distanza q_2 a q_1 .

1. Se q_1 e q_2 hanno la stessa polarità, il prodotto $q_1 q_2$ è **positivo** e la forza è *repulsiva*.
2. Se q_1 e q_2 hanno la polarità **opposta**, il prodotto $q_1 q_2$ è **negativo** e la forza è *attrattiva*.

La forza è una coppia di azione-reazione: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

6.2.1 Unità di misura

L'unità di carica nel SI è il Coulomb (C). La derivata dell'unità fondamentale di corrente elettrica, **Ampere**. La corrente i è data dal rapporto $\frac{dq}{dt}$ con cui transita la carica q : $i = \frac{dq}{dt}$. Risulta $1C = 1As$

6.2.2 La costante dielettrica del vuoto

La costante di *Coulomb* viene anche espressa come $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ dove $\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ è la **costante dielettrica del vuoto**.

Così scriviamo $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$, o per ottenere il modulo $F = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

6.2.3 Forze multiple

Le forze elettrostatiche obbediscono al **principio di sovrapposizione**. Se molte particelle sono vicine alla carica q_1 , la forza netta è $\vec{F}_{1,net} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} + \dots + \vec{F}_{1n}$.

Attenzione: *somma vettoriale!*

6.3 Teorema del guscio

a) Primo teorema del guscio:

Una superficie sferica uniformemente carica attrae o respinge una carica esterna come se tutta la carica fosse concentrata nel suo centro.

b) Secondo teorema del guscio:

Uno carico posto all'interno di una superficie chiusa uniformemente carica non ne sente la forza.

6.4 La quantizzazione della carica

Qualunque carica q può essere scritta come $q = ne$ in cui $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ed è la carica elementare: $e = 1,602 * 10^{-19} C$

a) Il **protone** ha carica $+e$

b) L'**elettrone** ha carica $-e$

Il valore di e è così piccolo che normalmente la granularità non appare nei fenomeni di larga scala. Attraverso un filo con corrente di 1A passano circa $6,2 * 10^{18}$ elettroni al secondo.

6.5 La conservazione della carica

La carica elettrica è conservata - Lo strofinamento del vetro con un panno di seta non crea carica positiva, ma trasferisce elettroni dal vetro alla seta. Anche nei processi nucleari la carica totale rimane invariata.

6.6 Verifica

1. Indicare il verso della forza che agisce sul protone centrale

2. Ordinare i tre casi secondo i valori decrescenti del modulo della forza netta sull'elettrone.

Soluzione primo problema

$$q_1 = +e, q_2 = +2e, R = 2cm. \quad (6.6)$$

Calcolo la forza \vec{F}_{12}

$$F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{R^2} = k \frac{2e^2}{R^2} = \frac{8,99 * 10^9 * 2 * (1,6 * 10^{19})}{R^2} = 1,15 * 10^{-24} N \quad (6.7)$$

Quindi il valore finale è $\vec{F}_{12} = -(1,15 * 10^{-24} N)\hat{x}$

$$q_1 = +e, q_2 = +2e, q_3 = -2e, R = 2cm. \quad (6.8)$$

Calcolo la forza $\vec{F}_{1,net}$

$$F_{13} = k \frac{2e^2}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2} = 2,05 * 10^{-24} N \quad (6.9)$$

Quindi il valore che otteniamo è $F_{13} = (2,05 * 10^{-24} N)$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,net} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = -(1,15 * 10^{-24} N)\hat{x} + (2,05 * 10^{-24} N)\hat{x} \\ &= (0,90 * 10^{-24} N)\hat{y} = -(0,125 * 10^{-24} N)\hat{x} + (1,775 * 10^{-24} N)\hat{y} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Quindi il valore che otteniamo è $F_{1,net,x} = \sqrt{F_{1,net,x}^2 + F_{1,net,y}^2} = 1,78 * 10^{-24} N$

Soluzione secondo problema $q_1 = 8e, q_2 = -2e$. In che punto un protone è in equilibrio?

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= 0. \quad x > L. \quad \frac{kq_1e}{x^2} + \frac{kq_2e}{(x-L)^2} = 0 \\ \rightarrow \left(\frac{x-L}{x}\right) &= \frac{-q_2}{q_1} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{x-L}{x} = \frac{1}{4} \rightarrow x = 2L \end{aligned} \quad (6.11)$$

Capitolo 7

Campi elettrici

7.1 L'aspetto fisico

La forza elettrostatica tra 2 cariche sembra una “azione a distanza”

- Spiegazione alternativa:
La carica 1 crea un campo elettrico nello spazio circostante
La carica 2 sente l'effetto del campo 1
- vice versa:
La carica 2 crea un campo elettrico nello spazio circostante
La carica 1 sente l'effetti del campo 2

7.2 Il campo elettrico

- a) campo scalare: temperatura, pressione, densità
- b) campo vettoriale: velocità, accelerazione, forza

La forza \vec{F} su un **carica esplorativa** q_0 determina il campo elettrico \vec{E} :

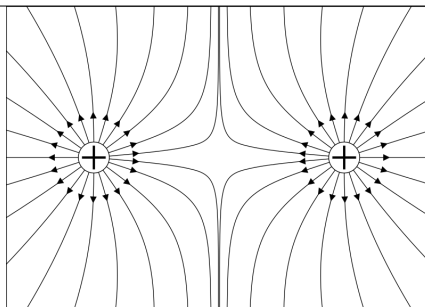
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (7.1)$$

\vec{E} è un campo vettoriale. Nel SI “Sistema Internazionale”, si esprime in N/C (o V/m)

7.3 Linee di campo elettrico

Per visualizzare \vec{E} , disegniamo delle linee:

- Il vettore \vec{E} è **tangente** alla linea
- La **densità** delle linee rappresenta $|\vec{E}|$
- Le linee **escono** dalle cariche positive
- Le linee **entrano** nelle cariche negative



7.4 Altro esempio delle linee di campo

Due cariche positive identiche

Sempre:

- Il vettore \vec{E} è tangente alla linea
- La densità delle linee rappresenta $|\vec{E}|$
- Le linee escono dalle cariche positive
- Le linee entrano nelle cariche negative

Il disegno stesso suggerisce l'idea di una repulsione

7.5 Campo \vec{E} di una carica puntiforme

Una carica esploratrice positiva q_0 attorno ad una *carica puntiforme* q sente una forza $\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\xi_0 r^2} \hat{r}$.

Per il campo \vec{E} troviamo:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\xi_0 r^2} \hat{r} \quad (7.2)$$

La direzione di \vec{E} è **radiale**

1. Per $q > 0$, il verso di \vec{E} è uscente
2. Per $q < 0$, il verso di \vec{E} è entrante

Per il **modulo**: $E = |\vec{E}| = \frac{|q|}{4\pi\xi_0 r^2}$

7.6 Il principio di sovrapposizione

In presenza di **più cariche**, le forze obbediscono al principio di sovrapposizione:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \cdots + \vec{F}_{0n} \quad (7.3)$$

Il principio di sovrapposizione vale anche per \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} + \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n \quad (7.4)$$

Il campo \vec{E} di più particelle cariche è la somma vettoriale dei singoli contributi

7.7 Verifica



Il disegno mostra un elettrone (e) e un protone (p) sull'asse x

- Indicare la direzione di E dovuta all'elettrone nel punto S e nel punto R
- Indicare la direzione di E dovuta al protone nel punto S e nel punto R

7.7.1 Soluzione

$$\begin{aligned}q_1 &= +2e \\q_2 &= -2e \\q_3 &= -4e\end{aligned}\tag{7.5}$$

Ovviamente il primo passo da fare è quello di ricavare \vec{E} nell'origine

$$E_1 = E_2 = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 d^2}\tag{7.6}$$

$$E_3 = \frac{4e}{4\pi\epsilon_0 d^2}\tag{7.7}$$

Ora ricaviamo E_x tramite una somma tra E_{1x} , E_{2x} e E_{3x} .

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos 30^\circ + \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos 30^\circ + \frac{4e}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos 30^\circ = \frac{8e}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos 30^\circ\tag{7.8}$$

$$E_x = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} = \frac{-2e}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos 30^\circ + \frac{-2e}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos 30^\circ + \frac{4e}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos 30^\circ = 0\tag{7.9}$$

7.8 Campo \vec{E} di un dipolo elettrico

Due particelle cariche, $-q$ e $+q$ separate da distanza d e sull'asse dipolare z . Il prodotto qd viene chiamato **momento di dipolo elettrico**: $p = qd$ e \vec{p} vettoriale.

- direzione: l'asse dipolare
- verso: da $-q$ a $+q$

Il campo \vec{E} sull'asse dipolare distante z dal centro del dipolo:

$$\begin{aligned}E &= E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(z + \frac{d}{2}\right)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 - \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \left(z + \frac{d}{2}\right)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2zd}{\left(\left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right)^2} \\&= \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 z^3} \left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^{-2}\end{aligned}\tag{7.10}$$

Per $z \gg d$ troviamo $E(z) = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 z^3}$, anche fuori dell'asse z , $E \propto r^{-3}$ per $r \gg d$

Materiale isolante (**e. g. plastica**). Raggio R , carica **superficiale** σ - Punto P sull'asse centrale, direzione z . Ogni anello ha carica $dq = \sigma 2\pi r dr$ e contribuisce a $dE = \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0 (4r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$E = \int_0^R \frac{z \sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (4r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left[\frac{(4r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R\tag{7.11}$$

Il risultato è $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$. Per $z \ll R$ troviamo $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Su una carica q in un campo elettrico esterno \vec{E} agisce una forza elettrostatica $\vec{F} = q\vec{E}$

- per $q > 0$, \vec{F} ha lo stesso orientamento di \vec{E}
- per $q < 0$, \vec{F} ha l'orientamento opposto di \vec{E}

NB: Una carica non sente il proprio campo elettrico esterno!

7.9 Misura della carica elementare

7.9.1 Millikan 1910

L'esperimento di Millikan per antonomasia è l'esperimento della goccia d'olio, il cui obiettivo, cioè misurare la carica elettrica dell'elettrone, fu raggiunto nel 1909. Il valore ricavato da Robert Millikan fu $4,774(5) \times 10^{-10}$ statcoulomb, equivalenti a $1,5924(17) \times 10^{-19}$ coulomb, minore dello 0,6% circa rispetto a quello oggi comunemente accettato, pari a $1,602176634 \times 10^{-19}$ coulomb.

[By Wikipedia](#)

Problema svolto

Una goccia con $m = 1,3 \times 10^{-10}$, $Q = -1,5 \times 10^{-13}C$ e $V_x = 18m/s$ attraverso una zona di lunghezza $L = 1,6cm$ e campo elettrico $E = 1,4 \times 10^6 N/C$ verso il basso, Qual'è la deflessione verticale?

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{EQ}{m} \left(\frac{L}{v_x} \right)^2 = 6,4 \times 10^{-4}m = 0,64mm \quad (7.12)$$

7.10 Prodotto scalare

Esistono due prodotti tra vettori: il prodotto scalare e il prodotto vettoriale.

Il prodotto scalare è appunto uno scalare (un **singolo numero**) funzione di due vettori, indicato con $s = \vec{A} * \vec{B}$ e perciò anche detto **dot product**. Operativamente, posto $|\vec{A}|$ il modulo del vettore \vec{A} , $|\vec{B}|$ il modulo del vettore \vec{B} , e α l'**angolo** compreso tra i due vettori, il prodotto scalare si calcola con

$$s = \vec{A} * \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha \quad (7.13)$$

Oppure equivalentemente, poste A_x ecc. le componenti dei vettori come la somma e i prodotti delle componenti omologhe

$$\vec{A} * \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (7.14)$$

L'interpretazione geometrica è che il prodotto scalare è la **proiezione** di uno dei due vettori sull'altro.

7.11 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è un vettore funzione di due vettori, è si indica con $\vec{V} = \vec{A} * \vec{B}$ oppure $\vec{V} = A2\vec{B}$. È anche detto **cross product**. Il modulo $|\vec{V}| = \vec{A} * \vec{B} \sin \theta$.

\vec{V} è **perpendicolare** a \vec{A} e a \vec{B} : $\vec{V} \perp |\vec{A}|$, $|\vec{V}| \perp |\vec{B}|$. Il verso di \vec{V} è determinato dalla regola della mano destra: girando le dita da \vec{A} a \vec{B} , il pollice indica il verso di \vec{V} . L'espressione esplicita è

$$\vec{V} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z} \quad (7.15)$$

oppure si ottiene del **determinante**:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (7.16)$$

7.12 Dipolo in un campo elettrico

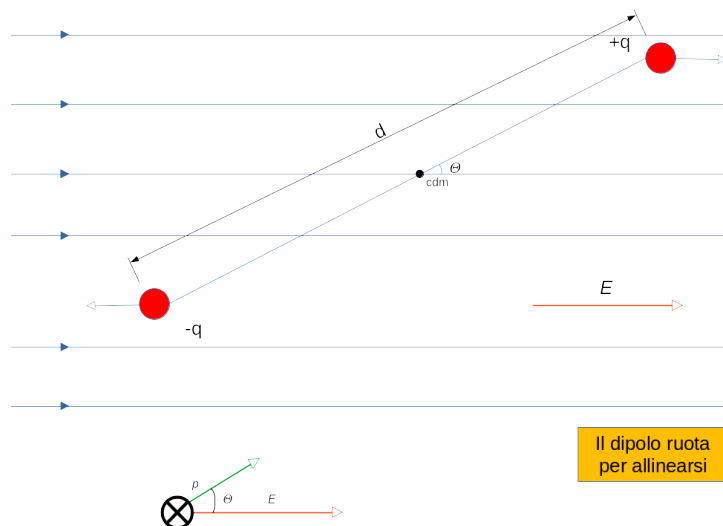
In acqua (H_2O), il lato ossigeno è leggermente più negativo di quello dell'idrogeno. Posto in un campo elettrico esterno \vec{E} , **si comporta come un dipolo generico. Il momento di dipolo elettrico \vec{p} è**

diretto lungo l'asse di simmetria della molecola e ha verso dalla carica negativa alla carica positiva.

$$p(H_2O) = 6,2 * 10^{-30} Cm \quad (7.17)$$

Dipolo rappresentato da due cariche $-q$ e $+q$ a distanza d . Il momento dipolo elettrico \vec{p} forma un angolo di T col campo elettrico esterno \vec{E} (uniforme)

$\vec{F}(+q)$ e $\vec{F}(-q)$ hanno intensità uguali e direzioni opposte. La forza netta è zero, ma esercitano un



momento torcente $\vec{\tau}$:

$$\tau = -Fd \sin T = -pE \sin T \quad (7.18)$$

(segno meno perché il verso è orario). In forma vettore: $\vec{\tau} = \vec{p} * \vec{E}$

7.13 Energia potenziale di un dipolo elettrico

L'energia potenziale U di un dipolo elettrico \vec{p} dipende dal suo *orientamento*. U è minimo quando \vec{p} è allineato con il campo \vec{E} - Nel minimo è in equilibrio: $|\vec{\tau}| = |p||E| \sin T = 0$. Scegliamo $U = 0$ per $T = 90^\circ$.

L'energia potenziale diventa

$$U = -L = \int_{90^\circ}^T \tau dT = \int_{90^\circ}^T pE \sin T dT = -pE \cos T \quad (7.19)$$

In forma vettoriale: $U = -\vec{p} * \vec{E}$

7.14 Problema

- a) A quale distanza si trovano i centri delle cariche positiva e negativa di una molecola d'acqua?

$$p = qd \rightarrow d = \frac{p}{q}$$

$$p(H_2O) = 10e = 1,6 * 10^{-30} C$$

$$q(H_2O) = 10e = 1,6 * 10^{-18} C$$

$$d = \frac{p}{q} = \frac{6,2 * 10^{-30} Cm}{1,6 * 10^{-18} C} = 3,9 * 10^{-12} m = 3,9 pm$$

- b) Qual'è la differenza di energia potenziale tra le orientazioni $T = 0^\circ$ e $T = 180^\circ$ in un campo esterno $E = 1,5 * 10^4 \frac{N}{C}$?

$$\Delta U = 2pE = 2 * 6,2 * 10^{-30} Cm * 1,5 * 10^3 \frac{N}{C} = 1,9 * 10^{-25} J \quad (7.20)$$

Capitolo 8

La legge di Gauss

8.1 L'aspetto fisico

Per calcolare il campo elettrico \vec{E} di una distribuzione di carica si può **sommare** (integrare). La procedura è *laboriosa*. Se esiste la simmetria, possiamo utilizzare un metodo più semplice che sfrutta la relazione tra carica e campo, la **legge di Gauss**

8.2 La superficie Gaussiana

Scegliamo una superficie Gaussiana (*cioè una superficie chiusa*) intorno ad una carica. Per la carica puntiforme, la **sfera** è la superficie più simmetrica. Le linee di campo intercettano la superficie.

- a) Per una carica Q il campo è $E = \frac{kQ}{r^2}$
- b) Per una carica $2Q$, più linee intercettano la superficie
- c) la carica è $-\frac{Q}{2}$

Serve una grandezza che **quantifica** quanto una superficie è attraversata da un campo.

8.3 Il flusso elettrico

Un campo \vec{E} attraversa un elemento di superficie $\Delta\vec{A}$ vettore di area ΔA : **perpendicolare alla superficie**.

Definizione del flusso elettrico $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = \vec{E} * \Delta\vec{A} = E\Delta A \cos T \quad (8.1)$$

Per l'intera superficie: $\phi = \sigma\vec{E} * \Delta\vec{A} = \int \vec{E} * d\vec{A}$ - Per una superficie chiusa, l'orientamento di $\Delta\vec{A}$ è uscente.

- \vec{E} uscente contribuisce $\Delta\phi > 0$
- \vec{E} entrante contribuisce $\Delta\phi < 0$
- $\vec{E} \parallel \Delta\vec{A}$ da $\Delta\phi = 0$

Il flusso netto di una superficie chiusa è

$$\phi = \oint \vec{E} * d\vec{A} \quad (8.2)$$

8.4 Cilindro in campo uniforme

Superficie gaussiana a forma di **cilindro** di raggio R . Campo elettrico \vec{E} **uniforme**, parallelo all'asse. Quanto vale il flusso netto?

$$\Phi = \oint \vec{E} * d\vec{A} = \int_a \vec{E} * d\vec{A} + \int_b \vec{E} * d\vec{A} + \int_c \vec{E} * d\vec{A} \quad (8.3)$$

- $\int_a \vec{E} * d\vec{A} = -\pi R^2 E$
- $\int_b \vec{E} * d\vec{A} = 0$
- $\int_c \vec{E} * d\vec{A} = \pi R^2 E$
- $\Phi = 0$

8.5 La legge di Gauss

Relazione tra il flusso Φ attraverso una superficie chiusa e la carica netta q_{int} racchiusa all'interno della superficie:

$$\xi_0 \Phi = q_{int} \quad \text{oppure} \quad \oint \vec{E} * d\vec{A} = q_{int} \quad (8.4)$$

- se q_{int} è positiva, il flusso netto è uscente
- se q_{int} è negativo, il flusso netto è entrante

Una carica esterna alla superficie può cambiare \vec{E} localmente, ma non influisce sul flusso totale.

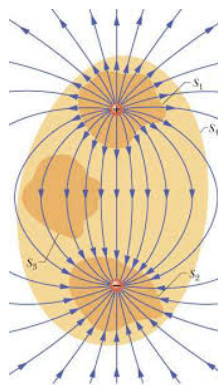


Figura 8.1: Due cariche di intensità uguale, ma di segno opposto

- S_1 : \vec{E} uscente in tutti i punti. Φ positivo, q_{int} negativa
- S_2 : \vec{E} entrante in tutti i punti. Φ negativa, q_{int} negativa
- S_3 Non racchiude nessuna carica. Ogni linea di campo che entra, esce, quindi $\Phi = 0$
- S_4 $q_{int} = Q - Q = 0$, quindi $\Phi = 0$

8.6 La legge di Gauss e di Coulomb

Racchiudiamo una **carica puntiforme** in una superficie sferica di raggio r . Per simmetria, il campo elettronico ha il medesimo modulo E su **tutti i punti della sfera**.

Applichiamo Gauss:

$$\begin{aligned}\xi_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= q_{int} \\ \xi_0 E(4\pi r^2) &= q \\ E &= \frac{q}{4\pi\xi_0 r^2}\end{aligned}$$

Cioè, la legge di coulomb!

8.6.1 Problema svolto

Guscio sferica di raggio $R = 10\text{cm}$ - dotato di carica uniforme $Q = -16e$ - Al centro carica puntiforme $q = 5e$. Calcolare il campo \vec{E}

- nel punto P_1 a $r_1 = 6\text{cm}$
- nel punto P_2 a $r_2 = 12\text{cm}$

$$\begin{aligned}\xi_0 E_1(4\pi r_1^2) &= q \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\xi_0 r_1^2} = \frac{4e}{4\pi\xi_0(0,06\text{m})^2} = 2,0 * 10^{-6} \frac{N}{C} \text{ verso l'esterno} \\ \xi_0 E_2(4\pi r_2^2) &= q + Q \rightarrow \frac{q + Q}{4\pi\xi_0 r_2^2} = \frac{4e}{4\pi\xi_0(0,12\text{m})^2} = 1,1 * 10^{-6} \frac{N}{C} \text{ verso l'interno}\end{aligned}$$

8.7 Un conduttore carico isolato

Il campo elettrico all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico è *nullo*

se no, si spostano le cariche

Scegliamo una superficie gaussiana appena sotto la superficie. $E = 0 \rightarrow \phi = 0 \rightarrow q_{int} = 0$

L'eccesso di carica su un conduttore isolato si dispone totalmente sulla **superficie esterna**. Anche una superficie gaussiana che racchiude **una cavità** ha $E = 0 \rightarrow \phi = 0 \rightarrow q_{int} = 0$. La superficie di una cavità interna di un conduttore **non ha carica** in eccesso.

In generale, la carica *non* si distribuisce uniformemente sulla superficie di un conduttore. Però c'è una relazione diretta tra il **campo** E e la **densità di carica** σ . Considera un cilindro che racchiude un elemento di superficie - Il campo E è **perpendicolare** alla superficie

se no si sposta la carica

applicando Gauss: $\xi_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int} \rightarrow \xi_0 EA = \sigma A \rightarrow E = \frac{\sigma}{\xi_0}$

8.7.1 Problema svolto

Una carica puntiforme di $Q = -5\mu\text{C}$ è posta all'interno di un guscio sferico metallico di raggio interno R , spostato di una distanza $\frac{R}{2}$ dal centro.

- Qual'è la carica indotta?
- Qual'è l'andamento del campo interno ed esterno?

Q induce una carica positiva $+5\mu\text{C}$ di all'interno, distribuita in modo **non-uniforme**. Il campo all'interno è asimmetrico. La parete interna ha una carica di $-5\mu\text{C}$ distribuita in modo **uniforme**. Il campo esterno è simmetrico, come il campo di una carica puntiforme.

8.8 Gauss per simmetria cilindrica

Una bacchetta di plastica, di lunghezza infinita, densità di carica pari a $\lambda C/m$, Com'è il campo \vec{E} a distanza r ? Fruttare l'integrale è davvero faticoso... Appliciamo Gauss per la **superficie cilindrica** di altezza h . Per simmetria, \vec{E} ha direzione **radiale**.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int} \rightarrow \xi_0 E 2\pi h r = \lambda h \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \xi_0} \quad (8.5)$$

vake se la distanza dell'estremità è molto minore di r .

8.9 Gauss per simmetria piana

Una lamina isolante sottile, con una densità di carica superficiale $\sigma \frac{C}{m^2}$.

Superficie gaussiana: cilindro di base A . Per simmetria, \vec{E} perpendicolare alla lamina.

Applichiamo Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int} \rightarrow \xi_0 E 2A = \sigma A \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\xi_0}$

Concorda con il risultato trovato per il disco $E = \frac{\sigma}{2\xi_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$

Per una piastra conduttrice la carica si distribuisce sulla superficie. Senza campo esterno, la carica è uguale da ambi lati, $\sigma_1 = \sigma/2$. Identico, ma con verso di E opposto, per carica negativa. Messe una a cando all'altra, le cariche sono attratte verso l'interno. Il campo in mezzo diventa $E = \frac{2\sigma_1}{\xi_0} = \frac{\sigma}{\xi_0}$

8.10 Gauss per simmetria sferica

Con Gauss dimostriamo i 2 teoremi dei gusci. Guscio sferico di carica totale q e raggio R .

1. *Una superficie uniformemente carica attrae o respinge una carica esterna come se tutta la carica fosse concentrata nel suo centro.* Applicare Gauss alla superficie S_2 : $E = \frac{q}{4\pi\xi_0 r^2}$ per ($r > R$)
2. *Una carica posta all'interno di una superficie chiusa uniformemente carica non ne sente la forza.* Applicare Gauss alla superficie S_2 : $E = q_{int} = 0$ per ($r < R$)

Ogni distribuzione con simmetria sferica è una sovrapposizione di strati concentrici. Densità di carica ρ varia soltanto con r

$$E = \frac{q'}{4\pi\xi_0 r^2} \quad (8.6)$$

Per ρ uniforme e $r < R$

$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow q' = q \frac{r^3}{R^3} \quad (8.7)$$

per cui $E = \frac{qr}{4\pi\xi_0 R^3}$

Capitolo 9

Potenziale elettrico

9.1 L'aspetto fisico

La forza elettrostatica è **conservativa**, per cui, si può associarvi un'**energia potenziale**. La **conservazione** dell'energia meccanica semplifica molti calcoli. q_2 sente la **forza** \vec{F} di q_1 . Alla posizione di q_2 c'è un **campo** $\vec{E} = \vec{F}/q_2$ - q_2 ha un **energia potenziale** U dovuta a q_1 . Alla posizione di q_2 c'è un **potenziale elettrico** $V = \frac{U}{q_2}$ (Nota bene: grandezza scalare!)

9.2 Il potenziale elettrico

L'energia potenziale U : $U = 0$ a un **livello di riferimento**. Spostando, la forza conservativa compie un **lavoro** L . L'energia potenziale è $E = -L$. Scegliamo $U = 0$ a **carica esplorativa** q_0 viene trasportata da ∞ a P .

L_∞ è il lavoro svolto **dalla forza elettrica** per il trasporto. Il potenziale elettrico nel punto P : $V = \frac{-L_\infty}{q_0}$. Ad ogni posizione interno ad una carica è assegnato un potenziale elettrico.

9.3 Unità di misura

Il potenziale elettrico viene espresso in $\frac{J}{C}$ o V (**Volt**).

Figura anche in altre unità:

$$\text{Il campo elettrico } 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}$$

L'energia per il **sistema microscopici**: $1eV = 1,6 * 10^{-19}$

1eV è la differenza in energia di un elettrone che attraverso una differenza di potenziale di 1V

9.4 Il potenziale elettrico

Inversamente: una carica q in un potenziale elettrico V ha energia potenziale $U = qV$. Spostandosi in un campo elettrico da i e f abbiamo differenza di potenziale $\Delta V = V_f - V_i$. Per una carica q : $\Delta U = q\Delta V = q(V_f - V_i) = -L$, ΔV ΔU **non dipendono dal cammino** da i a f .

Possibile applicare la **conservazione dell'energia meccanica**: $U_i + K_i = U_f + K_f$ per cui $\Delta K = K_f - K_i = -q\Delta V$ - Se agisce sulla particella anche un'altra forza che compie un lavoro L_{app} , abbiamo $\Delta K = -q\Delta V + L_{app}$.

9.5 Superfici equipotenziali

L'insieme dei punti con lo **stesso potenziale** forma una superficie: La superficie equipotenziale. Spostando una carica tra due punti di una superficie equipotenziale, il campo elettrico **non compie lavoro**.

Spostamenti **sulla** superficie hanno $L = 0$, per cui $L = \vec{F} * \vec{d} = q \vec{E} * \vec{d} = qEd \cos \theta = 0 \rightarrow \theta = 90^\circ$

La superficie equipotenziale è perpendicolare a \vec{E}

- Per un campo uniforme: piani perpendicolari a \vec{E}
- Per un carica puntiforme: sfere concentriche

9.6 Calcolo del potenziale, dato \vec{E}

La Carica di prova q_0 si muove da i e f . Lavoro svolto da \vec{E} per spostamento $d\vec{s}$:

$$dL = \vec{F} * d\vec{s} = q_0 \vec{E} * d\vec{s} \quad (9.1)$$

Per cui $V_f - V_i = -\frac{L}{q_0} = -\int_i^f \vec{E} * d\vec{s}$

Non dipende dal percorso?

Per campo uniforme:

$$\Delta V = -\int_i^f \vec{E} * d\vec{s} = -E\Delta x \quad (9.2)$$

9.7 Potenziale di una carica puntiforme

Potenziale V per punto P a distanza R da carica q . $V = 0$ a distanza infinita. $V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} * d\vec{s}$.

Libertà di scelta per il cammino. Lungo la direzione radiale: $\vec{E} * d\vec{s} = E dr$
 $0 - V = -\int_R^\infty E dr = -\int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_R^\infty = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$
 per cui $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

- Carica positiva \leftrightarrow potenziale positivo
- Carica negativa \leftrightarrow potenziale negativo

Valido anche per distribuzione sferiche non-puntiforme

9.8 Insieme di cariche puntiformi

Il *principio di sovrapposizione* vale anche per V , Per n cariche, il potenziale netto sarà

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (9.3)$$

Nb: somma scalare!

9.8.1 problema

due protoni. Ordinare secondo i valori crescenti di V nel punto P

$$\begin{aligned} q_1 &= +12nC \\ q_2 &= -24nC \\ q_3 &= +31nC \\ q_4 &= +17nC \\ d &= 1,3m \end{aligned} \quad (9.4)$$

Qual'è il potenziale nel punto P?

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(12 - 24 + 31 + 17) * 10^{-9}}{\frac{1,3}{\sqrt{2}}} = 352V \quad (9.5)$$

9.9 Potenziale di un dipolo elettrico

Il potenziale in un punto arbitrario P a distanza r , angolo Θ :

$$V = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \quad (9.6)$$

Per $r \gg d$: $r_- - r_+ \approx d \cos \Theta$, $r_+ r_- \approx r^2$

$$\rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \Theta}{r^2} = \frac{p \cos \Theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ove \vec{p} è il momento dipolare – *il verso va da -q a +q*

9.10 Potenziale di una distribuzione continua

Per distribuzione continua dividiamo in infinitesimi dq . Ogni infinitesimo dq contribuisce $dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$,

$$\text{così } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^n \frac{q_i}{r_i} \text{ diventa } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$