

Rudimenti di Matematica:

Polinomi e prodotti notevoli

Nicola Ferru

17 maggio 2023

1 Monomio

Un monomio è un'espressione algebrica costituita da un coefficiente e una parte letterale dove tra le lettere compaiono moltiplicazione e elevamenti a potenza aventi esponente naturale¹. Ad esempio

$$2x; \quad -x^n; \quad x^2y \quad (1)$$

Nota bene 1 *In caso di esponente pari il monomio anche se con segno negativo, nello sviluppo cambierà segno diventando positivo.*

2 Binomio

In matematica i binomi vengono definiti come la somma di due monomi.

$$(a + b) \quad (2)$$

Ogni lettera indica sempre un numero reale o complesso, le variabili sono scritte sempre in minuscolo, al contrario delle costanti che, che invece, vanno sempre in maiuscolo.

2.1 Quadrato

Il quadrato di un binomio si svolge nel seguente modo:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \quad (3)$$

Nota bene 2 *Quando l'esponente è pari i due prodotti sono sempre positivi, mentre, i doppi prodotti risentono del segno del polinomio di origine. Ad esempio:*

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \quad (4)$$

¹Numero naturale = numeri che vengono utilizzati per contare o ordinare, senza virgola.

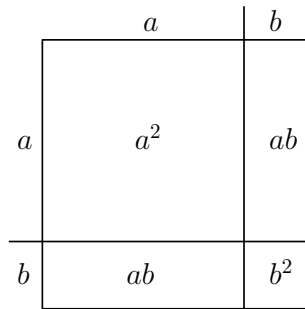


Figura 1: dimostrazione grafica dell'identità

Ma prendiamo un caso reale per poter constatare gli effetti reali dello sviluppo, infatti, andremo a sostituire a e b con dei un valore e un incognita.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 9 + 6x$$

Andando a riordinarla per grado di x il risultato finale sarà: $x^2 + 6x + 9$

2.2 Cubo

Il cubo di binomio è composto dal cubo del primo monomio, più il triplo del prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, più il triplo del prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo, più il cubo del secondo monomio. Quindi lo svolgimento sarà il seguente:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (5)$$

mentre, nel caso in cui il segno del secondo monomio risulti essere negativo, il risultato finale sarà:

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 \rightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (6)$$

Come nel caso precedente (3) andiamo a sostituire a e b con dei valori e delle costanti:

$$(x + 2)^3 = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x \rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

2.3 Esponente superiore al 3

Nel caso in cui il binomio viene elevato con un valore superiore al 3 la formula che viene applicata è la seguente:

$$(a + b)^n = a^n + C_{n,1}a^{n-1}b + C_{n,2}a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n,n-1}ab^{n-1} + b^n \quad (7)$$

devo i $C_{n,1}a^{n-1}b, C_{n,2}a^{n-2}b^2, \dots$ sono i coefficienti binomiali ottenibili tramite il Triangolo di Tartaglia.

Facciamo un l'esempio, prendiamo un binomio elevendolo per 4, infatti, in questo caso lo sviluppo sarà il seguente:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad (8)$$

2.4 Scomposizione di un binomio

Per scomporre un binomio il metodo più semplice è il seguente:

1. Si mette in evidenza il fattor comune;
2. Si divide per il fattor comune;
3. se può essere ulteriormente diviso lo si divide in due binomi, più il monomio che ne rimaneva dal fattor comune.

Ad esempio

$$\frac{5}{4}b - 125b^3 \quad (9)$$

Per prima cosa andiamo a cercare il fattor comune, che in questo caso è $5b$ e lo mettiamo in evidenza

$$= 5b \cdot \left(\frac{1}{4} - 25b^2 \right)$$

Visto che all'interno delle parentesi tonde è ancora presente un grado due quindi può essere ulteriormente separato effettuiamo la seguente separazione:

$$5b \cdot \left(\frac{1}{2} + 5b \right) \left(\frac{1}{2} - 5b \right)$$

Quindi il risultato finale è composto da un monomio e un prodotto tra binomi.

2.4.1 Il triangolo di Tartaglia

$n = 0$						1						
$n = 1$						1		1				
$n = 2$					1		2		1			
$n = 3$				1		3		3		1		
$n = 4$			1		4		6		4		1	
$n = 5$		1		5		10		10		5		1
$n = 6$	1		6		15		20		15		6	1

Tabella 1: Triangolo di Tartaglia

Il triangolo di Tartaglia (*anche detto triangolo di pascal*) è una delle disposizione geometrica dei coefficienti binomiali, ossia dei coefficienti di sviluppo del binomio (2) elevato a una qualsiasi potenza n , a forma di triangolo.

3 Trinomio

Un trinomio è un polinomio composto da tre termini; in altre parole una somma tra tre monomi. Ad esempio $a + b + c$.

$$(x - x_1)(x - x_2) \quad (10)$$

dove x_1 e x_2 sono due numeri reali tali che: $x_1 + x_2 = s$ e $x_1 x_2 = p$.