Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettrica industriale

ANALISI MATEMATICA 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse. . .

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, cosi da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni . Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTex insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	**Appartiene**	$\ni$:	**Tale che**
$\notin$	**Non appartiene**	$\leq$	**Minore o uguale**
$\exists$	**Esiste**	$\geq$	**Maggiore o uguale**
$\exists!$	**Esiste unico**	α	**alfa**
$\subset$	**Contenuto strettamente**	β	**beta**
$\subseteq$	**Contenuto**	γ, Γ	**gamma**
$\supset$	**Contenuto strettamente**	δ, Δ	**delta**
$\supseteq$	**Contiene**	ϵ	**epsilon**
$\Rightarrow$	**Implica**	σ, Σ	**sigma**
$\Longleftrightarrow$	**Se e solo se**	ρ	**rho**
$\neq$	**Diverso**		
$\forall$	**Per ogni**		

Capitolo 1

Introduzione

1.1 tipologia in R

1.1.1 Distanza

- R: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- R^2: Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza è $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- R^3: Siano $Q_1(x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- R^4: Siano $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^{D} (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione $R^n * R^n \to R^+ \vee \{0\}$ (ha come immagine al più nullo)

Proprietà 1. *questi sono vincolati dalle sequenti proprietà*

- $d(x, y) \leq 0$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$ *la distanza è nulla se i due punti coincidono*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *la distanza tra x e y uguale alla distanza da y a x*
- $d(x, y) \geq d(x, y) + d(z, y)$ *disuguaglianza triangolare.*

1.2 Intorno

Definizione 1. *Insieme dei punti che distano da un punto P_0 meno di un δ*

- R Intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, P(x) generico punto $d(P_0, P) < \delta$

$$\boxed{|x - x_0| < \delta}$$

- R^2

$$P_0(x_0, y_0)$$
$$P(x, y)$$
$$d(P_0, P) < \delta$$
$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta}$$

Cerchio di cerntro P_0 e di perimetro δ privato della circonferenza.

- R^3

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$Q(x, y, z)$$
$$d(Q, Q_0) < \delta$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (x - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro Q_0 e raggio δ privata della sua superficie.

Punto interno P_0 è interno all'insieme D se:

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset D \tag{1.1}$$

Esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nell'insieme D, cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

Punto esterno P_0 è esterno all'insieme D se è interno al complementare di D, CD

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset CD \tag{1.2}$$

esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nel complementare dell'interno D

Punto di frontiera P_0 è un un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \rightarrow \text{frontiera dell'insieme D} \tag{1.3}$$

$\forall I_{F_D}$ in esso cadono punti di D e pinti di CD qualunque interno, in esso cadono punti dell'insieme D e del suo complementare.

Punto di accumulazione P_0 è un punto di accumulazione se $\forall I_{P_0}$ cade in un punto $\in D$, se cade un punto di D in I_{p_0}, allora ne cadono infiniti.

Punto isolato P_0 è un punto isolato se $\exists I_{P_0,\delta}$ in cui non cade nessun punto dell'insieme.

Insieme Aperto

Definizione 2. *A si dice aperto se $\forall P \in A$ $\exists I_p \subset A$ per qualunque punto di A esiste un interno incluso in A, cioè ogni intorno di P è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni $]a : b[$; $x^2 + y^2 < r^2$ cerchio senza circonferenza:*

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 & \textit{triangolo senza lati} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2.1 Insieme chiuso

Definizione 3. *A si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiususura, che è formato dall'insieme tesso più gli eventuali punti di accumunlazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione. $[a : b]; x^2 + y^2 \leq r^2$ cerchio più circonferenza:*

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 & \textit{tringolo con lati} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2.2 Insieme connesso

Definizione 4. *un insieme A si dice connesso se e solo se $\forall P_1, P_2 \subset A$ $\exists \Gamma i(P_1, P_2) \subset A$. A è connesso se per qualunque P_1, P_2 di A esiste una spezzata inclusa in in A*
A si dice semplicemente connessa se qualunque chiusa inclusa in A è frontiera dell'insieme.

1.2.3 Insieme convesso

Definizione 5. *un insieme A si dice convesso se per ogni coppia di $x, y \in A$ il segmento $\bar{xy}$ è contenuto in A*

Insiemi Limitati In R : A è limitato se $\forall x \in A$: $x \leq M$

$[-1; 1]$ limitato

In R^2 : A è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2 \leq M} \tag{1.6}$$

Insieme illimitato In R : $[2; +\infty[$ illimitato

$$InR^2 : illimitato \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

1.2.4 Coordinate Polari

Definizione 6. *in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia $P(x, y)$ un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiano X e y oppure le coordinate polari ρ e θ.*

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = e^3 \frac{\cos^2 \theta}{e^2} \tag{1.8}$$

1.2.5 Limiti e continuità

Definizione 7. *$f(x, y)$ una funzione definito in D e siano (x_0, y_0) punto di accumulazione per D*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \forall \xi > 0 \ \exists \delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0,y_0),\delta} / \{(x_0, y_0)\}, \forall (x, y) \in I | f(x, y) \tag{1.9}$$

Per qualunque $\xi > 0$ esiste un $\delta(\xi) > 0$ per cui qualunque intorno di (x_0, y_0) al più x_0, y_0 e per qualunque (x_0, y_0) di quast'intorno la funzione dista da i meno di ξ.

1.2.6 Continuità

Definizione 8. *Sia $f(x, y)$ definita in D, $f(x, y)$ si definisce continuo in $(x_0, y_0) \in D$*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{1.10}$$

1.2.7 Esistenza del limite

Definizione 9. *Calcolando il limite con f in forma polare esiste se non dipende da θ. È possibile calcolare il limite di f in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si* *considerino queli si ina generica retta.*

$$y = y_0 + m(x - x_0) \tag{1.11}$$

- *Se il limite dipende da m esso non siste.*
- *Se non dipende da m esite.*

1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

Teorema 1. *Sie $f(x, y)$ definita in un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ assume tutti i valori campresi fra il massimo ed il minimo di $f(x, y)$ su D*

1.2.9 Teorema di Weierstrass

Teorema 2. *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.*
Sia $f(x, y)$ una funzione continua in D e sia D un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ ha massimo e minimo assoluto in D.

Capitolo 2

Derivate Parziali

2.1 Derivate parziali di primo grado

Definizione 10. *Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita in un punto interno ad A Consideriamo un interno circolare di $P(x_0, y_0), I(x_0, y_0), \delta$, in netto sulla retta $y = y_0$ e incrementa la x_0 passante da x_0 a $x_0 + h$. Ho così un punto $P(x_0 + h, y_0) \in A$.*
Definisco il rapporto di $f(x,y)$ nella sola x

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.1}$$

$f(x,y)$ si definisce derivabile parzialmente se $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l \in R$ reale e finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fx = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.2}$$

Analogamente, considero un interno di $P(x_0, y_0), I(x_0, y_0), \delta$. Mi ruoto sulla retta $x = x_0$ e incremento la y_0 passando da y_0 a $y_0 + k$. Ho così un punto $P(x_0, y_0 + h) \in A$.
Definisco il rapporto ingrementale di $f(x,y)$ nella sola y

$$\frac{f(x_0 + k, y_0) - f(x_0, y_0)}{k}$$

derivabile parzialmente se $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l \in R$ reale e finito.
Se in un punto (x,y) esistono entrambi le derivate parziale si dice che la funzione è derivabile in (x,y) inoltre se f è derivabile in ogni punto $(x,y) \in A$, si dice che f è derivabile in A.

2.1.1 Significato geometrico

- Lo derivata prima par parziale in P è $fx(x_0, y_0)$, è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x,y)$ con il piano $y = y_0$

- La derivata prima parziale in P, $fy(x_0, y_0)$ è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x,y)$ con il piano $x = x_0$

Se esistono entrambe allora le due rette tangenti alle sezioni della funzione individuano il piano tangente al solido nel punto $P(x_0, y_0, z)$

2.2 Derivata parziale seconde

Definizione 11. *Sia $f(x,y)$ una derivabile e siano definite in un deminio le due derivate parziali*

$$f_x(x,y) \quad f_y(x,y)$$

Tali funzioni passano a loro volta essere derivabili e si ottengono così le derivate seconde parziali di $f(x,y)$

$$f(x,y)$$

$$f_x(x,y) \qquad\qquad f_y(x,y)$$

$$f_{xx}(x,y) \quad f_{xy}(x,y) \quad f_{yx}(x,y) \quad f_{yy}(x,y)$$

$f_{yx}(x,y)$

derivata prima rispetto a

y poi rispetto a rispetto a x

$f_{yx}(x,y)$
$f_{yx}(x,y)$ derivata seconde pure

f_{yx}
f_{yx} derivata seconde resto

con n variabili si hanno n^2 derivate seconde parziali – Spesso le derivate seconde sono disposte in una matrice quadrata, detta `hessiana`, con il sinbolo D^2

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ n variabili} \rightarrow n * n \tag{2.3}$$

Se esistono le quanto derivate di f, nel punto (x,y), si dice che f è dirivabile due volte in (x,y). Se ciò accade $\forall(x,y) \in A$, f è derivabile due volte nell'insieme A.

2.2.1 Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)

Teorema 3. *Sia $f(x,y)$ definita in D e derivabile due volte $\forall(x,y) \in D$.*
Se le derivate seconde in (x_0,y_0) $f_{xy}(x_0,y_0)$ e $f_{yx}(x_0,y_0)$ sono continue in (x_0,y_0) allora risulta $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.

In generale se vale il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana può essere scritta come

$$H = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$det H = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = f_{xx} * f_{yy} - (f_{yx})^2$

2.3 Massimi e minimi relativi

Definizione 12. *Sia $f(x,y)$ una funzione definita in un insieme D, un punto $p_0(x_0,y_0) \in D$, si dice di massimo relativo per la funzione se esiste intorno circolare di P_0 per cui il valore assunto della funzione nei punti dell'interno è minore o uguale a quello assunto in P_0.*
Analogamente un punto $P_0(x_0,y_0)$ si dice di minimo relativo per la funzione se esiste un interno circolare di P_0 per cui il valore assunto dalla funzione nei punti dell'intorno è maggiore o uguale.

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall(x,y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \textit{Massimo relativo}$$
$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall(x,y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \quad \textit{Minimo relativo}$$

2.3.1 Teorema di Fermat

Teorema 4. *Sia $f(x, y)$ derinita in D e derivabile in un punto $P_0(x_0, y_0)$*
Se in $P_0(x_0, y_0)$ $f(x, y)$ ha un massimo o un minimo relativo, allora le derivate prime parziali si annullano ($\nabla f = 0$ gradiente nullo). La pendenza della tangente è zaro un massimo o minimo.

Gradiente

Sia $f(x, y)$ una funzione derivabile in un punto (x,y), cioè esistano in (x,y) le due derivate parziali f_x e f_y.
Si definisce gradiente di f(x,y) nel punto (x,y): i vettore ∇f le cui componenti sono le derivate parziali di f(x,y).

$$\nabla f(x, y) \equiv (f_x(x, y); f_y(x, y)) \tag{2.4}$$

Massimi e minimi – condizione necessaria

Definizione 13. *Se $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di massimo/minimo relativo il gradiente è nullo. Così di massimo o minimo relativo interni al dominio della funzione f vanno ricercati tra i punti che annullano la funzione f. Pertanto un punto critico per una funzione derivabile e un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.*

Capitolo 3

Differenziabilità

Definizione 14. *Sia $f(x,y)$ definita in D e $P_0(x_0,y_0) \in D$. In $P_0, z = f(x_0,y_0)$, incremento la x_0 di un h e la y_0 di un k.*
Così passo da $P_0(x_0,y_0)$ a $P(x_0+h,y_0+k)$. La funzione avrà avuto un certo incremento

$$f(x+h,y_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)$$

Si definisce differenziale in $P_0(x_0,y_0)$ se $\exists A,B \in R : f(x_0+h,y_0+k)-f(x_o,y_0) = Ah+Bk+o(\sqrt{h^2+k^2})$, cioè se esistono due costanti reali A e B per cui l'increm,ento di $f(x,y)$ che si ha passando da P_0 a P si può riscrivere come somma di una parte lineare $Ah+Bk$ e di un infinitesimo di ordine superiore a $\sqrt{h^2+k^2}$ (distanza di P_0 da P).
Se $f(x,y)$ ammette derivate prime parziali le due costanti A e B sono:

$$\begin{cases} A = fx(x_0,y_0) \\ B = fy(x_0,y_0) \end{cases}$$

e il differenziale diventa

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \tag{3.1}$$

Esempio 1. *verificare che $z = xy$ è differenziale $\forall(x_0;y_0) \in R^2$, se z è differenziale*
$\rightarrow f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$ dove

$$\begin{cases} A = fx(x_0,y_0) \\ B = fy(x_0,y_0) \end{cases}$$

se z è derivabile in (x_0,y_0).

$$f(x_0+h,y_0+k) = \underbrace{(x_0+h)(y_0+k)}_{Sostituisco} = x_0y_0 + x_0k + y_0h + hk$$

$f_x = y \ fx(x_0,y_0) = y_0$	$f_y = x$	$f_y(x_0,y_0) = x_0$
f *è derivabile in* (x_0,y_0)	$A = y_0$	$D = x_0$

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$\cancel{x_0}y_0 + \cancel{x_0}k + hk - \cancel{x_0}y_0 = \cancel{y_0}h + \cancel{x_0}k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$hk = o(\sqrt{h^2+k^2})$$

detto quindi dimostrare che $\lim_{h\to 0 k\to 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ *e poi passo alle coordinate polari:*

$$h = \rho\cos\theta$$
$$k = \rho\sin\theta \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}\cos\theta * \cancel{\rho} sin\theta}{\cancel{\rho}^2} \qquad z = xy \text{ defferenziale } \forall(x_0, y_0) \in R^2$$
$$e^2 = h^2 + k^2$$
$$h \to 0, k \to 0, \rho \to 0$$

3.0.1 Tutte le funzioni differenziali sono continue

Sia $f(x, y)$ differenziabile (x_0, y_0), allora $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Ip:

$f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th:

$f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Se $f(x_0, y_0)$ è continua in (x_0, y_0)

$$\lim_{h\to 0\ k\to 0} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0$$

Calcolo il limite a destra per $h \to 0\ k \to 0$

$$\lim_{h\to 0\ k\to 0} \underbrace{Ah}_{0} + \underbrace{Bk}_{0} + o\underbrace{(\sqrt{h^2 + k^2})}_{0} = 0 \text{ per cui } f(x, y) \text{ è continua in } (x_o, y_0)$$

□

3.0.2 Tutte le funzioni differenziali sono derivabili

Sia $f(x, y)$ differenziabile in un punto (x_0, y_0). Allora $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Ip:

$f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th:

$f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

divido entrambi per h e calcolo il limite per $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=fx} = \underbrace{\frac{Ah + o(\sqrt{h^2})}{h}}_{A}$$

$fx(x_0, y_0) = A$
Analogamente si demostra che $f_y(x_0, y_0) = B$. Qundi dato che esistono f_x e f_y in (x_0, y_0), $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0) e in oltre $A = fx(x_0, y_0)$, $B = fy(x_0, y_0)$ □

Esercizio 1. *Dimostrare che* $z = x^2 = y^2$ *è differenziabile in (1;1) – Per definire*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah = Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$f(x_0+h, y_0+k) = (1+h)^2 = (1+k)^2$ $\quad f(x_0, y_0) = 1+1 = 2$

$A = f(1,1) = |2x|_{x=1} = 2$ $\quad B = f_y(1,1) = |2y|_{y=1} = 2$

Così ho $(1+h)^2 + (1+k)^2 - 2 = 2h + 2k + o(\sqrt{h^2+k^2})$

$$h^2 + k^2 = o(\sqrt{h^2+k^2})$$

devo dimostrare che $\lim_{h\to 0\ k\to 0} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ *pasando a coordinate polari*

$$h = e\cos\theta$$
$$k = e\sin\theta$$
$$e^2 = h^2 + k^2$$
$$k \to 0, h \to 0, p \to 0$$

$\lim_{e\to 0} \frac{e^2}{|e|} = 0 \to z = x^2 + z^2$ *è differeziabile in (1,1)*

3.0.3 Le funzioni con derivate parziali continue sono diferenziabili

Definizione 15. *Sia* $f(x,y)$ *definita in* D_1 *e sia derivabile in* D*. Sono* f_x *e* f_y *continue in* D*, allora* $f(x,y)$ *è differenziale in* D*.*

Condizione sufficiente per la differenzialità

Definizione 16. *Affinché una funzione sia differenziabile in* (x_0, y_0) *basta che in* (x_0, y_0) *abbia derivate. In questo modo per determinare se una funzione è differenziabile in un punto si calcola le derivate parziali in quel punto, se esistono la funzione è differenziabile, in caso contrario non è derivabile.*

Esempio 2. *Dimostrare che* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *non è differenziabile in (0;0)*

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad D: x^2+y^2 > 0$$
$$z_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad D: x^2+y^2 > 0$$

Sia z_x *sia* z_y *sono definite per* $x^2 + y^2 > 0$ *cioè nei punti esterni al cerchio di centro (0,0) e 1, frontiera eclusa. Il punto (0,0) è interno al cerchio, quindi in esso* $f(x,y)$ *non è derivabile. Per cui in punto (0,0) f(x,y) non è neanche differenziabile.*

3.1 Significato geometrico del differenziale e piano tengente

3.1.1 Differenziale primo

È la parte lineare nella definizione di differenziale

$$f(x,y) \text{ definita in } D \quad (x_0, y_0) \in D$$

$f(x,y)$ differenziale in (x_0, y_0) se

$$f(x_0+h, y_0+_k) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}_{\text{parte lineare}} + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

$$df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

3.1.2 Piano Tangente

La $f(x,y)$ una funzione derivabile in (x_0, y_0), il piano tangente alla funzione (x_0, y_0, z_0) ha equazione:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$\vec{n}$ direzione ortogonale al piano tangente, è unitario

$$\vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

poiché $\nabla f(f_x, f_y)$ $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 \rightarrow \vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1+|\nabla f|}}$

Esempio 3. $z = x^2 + y^2$ *(1,1)*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z_0 = f(1,1) = 1 + 1 = 2 \quad z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1) \quad \begin{aligned} f_x &= 2x|_{1_{ii}} = 2 \\ f_y &= 2y|_{1_{ii}} = 2 \end{aligned}$$

3.1.3 Significato geometrico del differenziale primo

Passando da P_0 a P $f(x)$ si incrementa da $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$ – Il differenziale primo dy indica la variazione che subisce la retta tangente passando da P_0 a P.
L'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ si approssima sempre più con dy per incrementi $h \rightarrow 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x)(x - x_0) - f(x_0) + o|x|$$

L'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ differisce dal valore $f'(x)(x - x_0)$ [retta tangente] per un $o|x|$, $o|x|$ ci da l'errore.

3.1.4 Funzioni composite

Definizione 17. *Sia $x(t)$ E $y(t)$ due funzioni reali definite al variare in un intervallo I di R. $t \in T \leq R$ corrisponde il punto $(x(t), y(t))$*

$$\begin{cases} x = x(t) & \textit{Rappresenta nel piano una currva in frontiera} \\ y = y(t) & \textit{Parametrica} \end{cases}$$

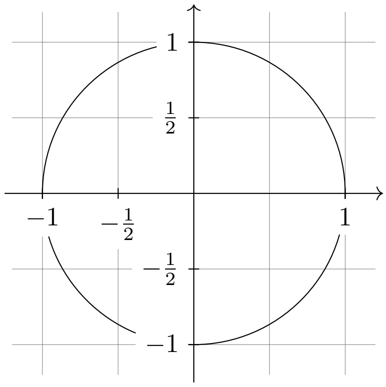
Al variare di $t \in I \leq R$
$x = x(t), y = y(t)$ descrive una curva γ nel piano

Esempio 4.

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = t+1 \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad \begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$y = (t-1)+2 = x+2 \qquad r^2 \cos t + r^2 \sin^2 t = r^2$$

circonferenza con certro nel origine e raggio r



$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = r^2$$

Se si ha $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ *al variare di* $t \in T \leq R$ *si ha una curva nello spazio.*

Esempio 5. $\begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \\ z = Kt \end{cases}$ *elica circolare*

3.1.5 Funzione composta

Definizione 18. *Sia* γ *la curva* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in I < R$ *di codominio B*
$I \to B$
Sia f(x,y) definita in A
$t \in f(x(t), y(t))$ *se il codominio di* γ *coincide con il codomio di* $f(x,y)$*, cioè* $B \leq A$

3.1.6 Teorema della derivata della funzione composta

Definizione 19. *Sia* γ *la curva di punti* $(x(t), y(t))$ *e sia derivabile in un intervallo I (cioè esistono)*
Sia f(x,y) differenziabile in x(t)
Allora la funzione conposta da $F(t) = f(x(t), y(t))$ *è derivabile in I e la sua derivata prima vale:*

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \tag{3.2}$$

$$(\nabla f * \Gamma'(t)) \quad \nabla f \equiv (f_x; f_y) \quad \Gamma' \equiv (x'(t); y'(t))$$

Ipotesi $\gamma \equiv (x(t), y(t))$ *derivabile in I*
$f(x,y)$ *differenziale in x(t)*

Tesi $F(t) = f(x(t), y(t))$ *derivabile in I*
$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$

Dimostrazione. Devo dimostrare che $\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = F'(t) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$
Scrivo l'incremento di F(t) per un h

$F(t+h) - F(t) = f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)]$ Per definizione di funzione composta F(t)

Poiché f(x,y) è differenziabile si ha

$$f[x(t+h),y(t+h)]-f[x(t),y(t)] = f_x \underbrace{[x(t),y(t)]}_{fx}\underbrace{[x(t+h)-x(t)]}_{h} + f_y \underbrace{[x(t+h)-y(t+h)]}_{fy}\underbrace{[y(t+h)-y(t)]}_{k}$$
$$+o\left(\sqrt{\underbrace{[x(t+h)-x(t)]^2}_{h^2}+\underbrace{[y(t+h)-y(t)]^2}_{k^2}}\right)$$

Divido entrambi i membri per h e calcolo il $\lim_{h\to 0}$

I membro

$$\lim_{h\to 0}\frac{f[x(t+h),y(t+h)]-f[x(t),y(t)]}{h} = F'(t)$$

II membro

$$\lim_{h\to 0} fx[x(t),y(t)]\underbrace{\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right]}_{x'(t)} + \lim_{h\to 0} f_y[x(t+h)-y(t+h)]\underbrace{\left[\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right]}_{y'(t)}$$
$$+\lim_{h\to 0} o\underbrace{\left(\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2}\right)}_{0}$$

$$F' = f_x[x(t),y(t)]x'(t) + f_y[x(t),y(t)]y'(t)$$

□

Esempio 6.

$$z = x^2y \qquad \begin{cases} x(t) = -t & F(t) = z(x(t),y(t)) = -t^2 * t = -t^3 \\ y(t) = t & F'(t) = z' = -3t^2 \end{cases}$$

$$F'(t) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_x(x(t),y(t))y'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = -3t^2$$

3.2 Teorema differenziabilità delle funzioni composite

Teorema 5. *Siano $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n funzioni in k variabili $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1,t_2,\dots,t_k) \\ x_2 = x_2(t_1,t_2,\dots,t_k) \\ \dots \\ x_n = x_n(t_1,t_2,\dots,t_k) \end{cases} \tag{3.3}$$

Componiamo le funzioni ottenendo la funzione composita

$$f[x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k)]$$

Siano $(x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k))$ n funzioni definite in un insieme aperto $D \leq R^n$ e siano derivabili parzialmente rispetto a t_i $(i = 1, 2, \dots, k)$.
Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ una funzione definita in A contenente in codominio $x(D)$ e sia f differenziabile in A
Allora la funzione composita $F(t) = x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k)$ è derivabile parzialmente rispetto a $t_i(i = 1, 2, \dots, k)$ nel punto t.

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) + \frac{\partial x_i}{\partial t_i}(t) \text{ (si somma sugli inasci ripetuti)}$$

Inoltre, se f *e* $(x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k),\dots,x_n(t_1,t_2,\dots,t_k))$ *sono di classe* C^1*, anche* $F = f(x(t)) \in c^1$ *ed è quindi differenziabile.*

$$\hbar = k = 2 \text{ coordinate polari}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \varphi \\ t_2 = \varphi \end{cases} \quad f(x,y) \quad \begin{cases} x = x(\varphi,\varphi) \\ y = y(\varphi,\varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}x\rho + \frac{\partial f}{\partial y}y\rho = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$
$$\frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}x\rho + \frac{\partial f}{\partial y}y\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\sin\varphi)$$

3.3 Differenziale secondo

Definizione 20. d^2f *è il differenziale del differenziale primo*

$$d^2f = d(df) = d(f_xh + f_yk) = \frac{\partial}{\partial x}(f_xh + f_yk)h + \frac{\partial}{\partial x}(f_xh + f_yk)k =$$
$$= (f_{xx}h + f_{xy}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k = f_{xx}h^2 + f_{xy}khx + f_{xy}hx + f_{yy}k^2$$

Se $f(x,y) \in c^2$ *(derivate parziali II continue) vale il teorema di Schwarz (2.2.1), cioè* $fyx = fxy$ *– Il differenziale secondo allora diventa*

$$d^2f = fxxh2 + 3fxyhk + fyyk^2$$

Per ipotesi il gradiente è nulla $\Delta f(x_0,y_0) = 0$ *cioè* $\nabla f(x_0,y_0) \equiv (f_x(x_0,y_0), fy(x_0,y_0)) \equiv (0,0)$ *ovvero le derivate parziali prime sono nulle* $fx(x_0,y_0) = 0$, $fy(x_0,y_0) = 0$ *– Ciò comporta l'annullarsi del differenziale primo*

$$df(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k = 0 * h + 0 * k = 0$$

Per cui nella foruma di Taylor si ha:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \text{ Forme quadratiche}$$

Il segno di $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ *è lo stesso di* $\frac{1}{2!}d^2f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$*, cioè è lo stesso differenziale secondo.*
Per ipotesi $detHp(x_0,y_0) > 0$*, (*$f(x,y) \in C^2_A \Rightarrow$ *vale il teorema di Schwarz)*

$$\begin{vmatrix} fxx(x_0,y_0) & fxy(x_0,y_0) \\ fyx(x_0,y_0) & fyy(x_0,y_0) \end{vmatrix} = fxx * fyy - fxy^2 > 0$$

e $fxx(x_0,y_0) > 0$
Ciò implica per definizione che la forma quadratica associata ad $Hp(x_0,y_0)$ *è positiva tutto ciò implica* $d^2f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) > 0$
Per cui $f(x,y) - f(x_0,y_0) > 0$

$$\text{cioè } f(x,y) > f(x_0,y_0) \quad \text{difiniziondi di Minimo relativo (2.3)}$$

quindi (x_0,y_0) *è un punto di muinimo relativo*
Analogamente, se $f(x_0,y_0) < 0$ *si dimosta che* (x_0,y_0) *è un punto di massimo relatovo (2.3)*

3.3.1 Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo

Sia $f(x,y)$ definita in $A,\ f(x,y) \in C^2_A,\ (x_0,y_0) \in A$
Se $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

$$detH_F(x_0,y_0) \begin{cases} > 0 \begin{cases} fxx(x_0,y_0) > 0 \text{ Minimo relativo} \\ fxx(x_0,y_0) < 0 \text{ Massimo relativo} \end{cases} \\ < 0 \text{ Punto di sella } (\underline{\text{non sono presenti Max e min}}) \\ = 0 \text{ Non si vsa se sono presenti Max o min} \end{cases}$$

Esempio 7. *Massimi e minimi*

1. $z = x^2 + y^2$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} zx = 0 \\ zy = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad in(0,0)\ \nabla f = 0 \text{ può } MAX \text{ o } MIN$$

$$detH_f = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{zy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

2. *Semisuperfici sferica* $z = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{-x}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \end{cases} \qquad \text{dominio } D\ x^2 - y^2 < \Gamma^2$$

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (0,0) \leftarrow D \text{ può esserci un } Max \text{ e un } Min$$

Verifico e trovo che $detH > 0\ f_{xx} < 0 : in(0,0)$ *è presente il Max.*

3. *Cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

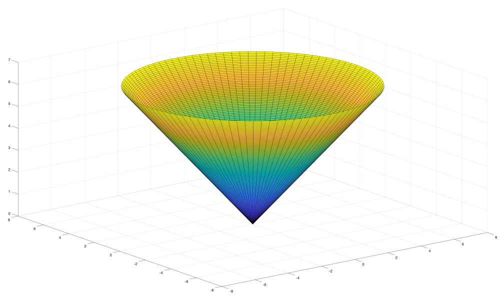


Figura 3.1: Rappresentazione grafica della conica

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Nota 1. *sarebbe (0,0) ma il dominio delle derivate* $x^2 + y^2 > 0$ *cioè* $\forall(x,y) \in R^2 - \{0,0\}$ *in (0,0) non è derivabile.*

Sappiamo[1] *che in (0,0) c'è un minimo assoluto*

[1] si vede geometricamente

4. $z = x^4 + y^4$

$$\begin{cases} z_x = 4x^3 = 0 \\ z_y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \textit{in (0,0) può esserci Max/Min relativo}$$

$$detH = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{c} f_{xx}(0,0) = 12x^2|_{0,0} = 0 \\ f_{xx}(0,0) = 0 \\ f_{yy}(0,0) = 12y^2|_{0,0} = 0 \end{array}$$

$detH = 0 \rightarrow$ non so se in (0,0) c'è un massimo o un minimo relativo.
Per definire se esiste un massimo o un minimo relativo uso:

$$\begin{array}{llll} \min f(x_0, y_0) \leq f(x,y) & 0 \leq x^4 + y^4 & x^4 + y^4 \geq 0 & \underline{SI}\ \forall (x,y)\ \textit{risulta da}\ x^4 + y^4 \geq 0 (0,0) \min \\ \max f(x_0, y_0) \geq f(x,y) & 0 \geq x^4 + y^4 & x^4 + y^4 \leq 0 & \underline{NO} \end{array}$$

3.3.2 Ricerca del massimo e del minimo assoluti

Condizioni sufficienti per l'essistenza del Massimo e del minimo assoluto

Teorema di Weierstrass

Teorema 6. *Sia f(x,y) definita in D, i continua in D chiuso e limitato, allora il minimo e massimo assoluto in D.*

Ipotesi:

$$f \in C^0_D$$

D chiuso e limitato

Tesi: $\exists \min$ *con* $m = f(x_1, y_1), M = f(x_2, y_2)$ *tale che* $m \leq f(x,y) \leq M$

Ricerca dei punti di Massimo e minimo assoluti:

- *nei punti di massimo o minimo relativo;*
- *nei punti di non derivabilità;*
- *nei punti di frontiera.*

Vanno ricercati quindi nei seguenti modi:

1. $\nabla f = 0$ *dove il gradiente si annulla;*
2. $\exists \nabla f$ *dove il gradiente non esite;*
3. *sulla FD sulla frontiera.*

Studio sulla frontiera

Sia ξ una superficie definita in un insieme D e sia FD la mia frontiera
La frontiera FD è una curva[2] e suoi punti linitano l'iperbole ξ.
Possiamo definire la frontiera in forma parametrica

$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

[2] o insieme di curve

Calcolo la funzione $f(x, y)$ sui punti della frontiera

$$f(x, y) \to F(t) = f(x(t), y(t)) \text{ funzione di 1 variabile} \tag{3.4}$$

studio del massimo e minimo per $F(t) = 0 \begin{cases} F'' > 0 \min \\ F'' < 0 \max \end{cases}$

Calcolo i valori della funzione nei punti di Massimo/minimo e li confronto con i valori Massimo/minimo relativi nel dominio e i valori nei punti di non derivabilità. La frontiera può anche essere in forma cartesiana

$$y = y(x) \quad a \leq x \leq b \tag{3.5}$$

Calcolo la funzione nei punti della frontiera e procedo come visto prima $f(x, y) \to F(t) = f(x(t), y(t))$

Esempio 8. *Determinare il massimo e il mino assoluto di* $f(x, y) = 1+2x^2+\sqrt{x^2 + y^2}$ *in* $D : \{x^2+y^2 \leq \Delta\}$

1. $\nabla f = 0$
2. $\nexists \nabla f$
3. FD

1. $\nabla f(x, y) = 0 \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + \frac{x}{|x|} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   $\nabla f = 0$ *in (0,0) che non è nel C.E. delle derivate parziali per cui* $\nabla f \neq 0$ $\forall (x, y) \in A$ *A dominio* f_x *e* f_y

2. $\nexists \nabla f$ *le derivate parziali perime sono definite* $\forall (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 0$ *cioè in* $R^2 - \{0, 0\}$

$$(0, 0) \text{ pnto di non derivabilità } f(0, 0) = 1$$

3. *FD*

$$D : \{x^2 + y^2 \leq 4\} \qquad FD : x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

   Calcolo $f(x, y)$ *sui punti di frontiera*

$$f(x, y) = F(t) = 1 + 2(2\cos t)^2 + \sqrt{(2\cos t)^2 + (2\sin t)^2} = 1 + 8\cos^2 t + 2 = 3 + 8\cos^2 t$$

   Calcolo $F(t)$ *agli estremi* $t \in [0; 2\pi]$ $F(0) = 3 + 8 = 11$ $F(2\pi) = 3 + 8 = 11$
   Studio del massimo e del minimo di $F(t)$

$$F'(t) = 0 \quad 16\cos t(\sin t) = -16\sin t\cos t = 0 \quad t = 0 \quad t = \pi \quad t = \tfrac{\pi}{2} t = \tfrac{3}{2}\pi$$

$$F''(t) = 16(\cos t\cos t - \sin t\sin t) = 16(\sin^2 t - \cos^2 t)$$

   Ottenuti mettendo a F(t) e valori dove ci dovrebbero essere un massimo e un minimo $\begin{cases} F''(\pi) = 16(-1) = -16 < 0 \ \max \ \textit{su FD} & F(\pi) = 3 + 8 = 11 \\ F''(\frac{\pi}{2}) = 16(-1) = -16 > 0 \ \min \ \textit{su FD} & F(\frac{\pi}{2}) = 3 \\ F''(\frac{3\pi}{2}) = 16(-1) = -16 < 0 \ \min \ \textit{su FD} & F(\frac{3\pi}{2}) = 3 \end{cases}$

Ho ottenuto i sequenti valori

1. $(x, y) \equiv (0,0)$ *il* min *è 1 e viene assunto in (0,0)*

11. $t = 0, \pi, 2\pi$ *il* max *è 11 e viene assunti in* $\begin{cases} x = 2\cos 0 \\ y = 2\sin 0 \end{cases}$

3. $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ $\begin{cases} x = 2\cos\pi \\ y = 2\sin\pi \end{cases}$ $(-2, 0)$ $\begin{cases} x = 2\cos 2\pi \\ y = 2\sin 2\pi \end{cases}$ $(2, 0)$

3.3.3 Metodo dei moltiplicatori di di Lagrange

Nel caso in cui $g(x, y) = 0$ non definisca una funzione implicata, per trovare i massimi e minimi vincolati si introduce una funzione ausiliaria, detta lagrangiana, così definita:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \tag{3.6}$$

$F(x, y, \lambda)$ è combinazione lineare delle funzioni $f(x, y)$ E $g(x, y)$ – Il parametro λ prende il nome di Moltiplicatore di Lagrange. I punti di massimo vincolati sono quelli in cui il gradiente di $F(x, y, z)$ si annulla ovvero...

$$\nabla F_{(x,y,z)} = 0 \begin{cases} F_x = fx(x, y) + \lambda g_x(x, y) \\ F_y = fx(x, y) + \lambda g_y(x, y) \\ F_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Si risolve questo sistema di tre equazioni in tre variabili e il valore massimo della funzione è calcolata nei punti soluzioni è il massimo calcolato e il valore minimo della funzione calcolata nei punti soluzione è il massimo vincolato.

Capitolo 4

Integrali Doppi e tripli

4.1 Domini normali (semplici)

Definizione 21. *I domini delle funzioni a più variabili possono presentare una forma di regolarità per cui è possibile delimitare la regione da intervalli e grafici di funzione. Si parla quindi di dominio semplice o normale rispetto alla variabile delimitabile da un intervallo. La normalità di un dominio è molto importante in molte definizioni di integrale multiplo e della sua risoluzione tramite le formule di riduzione. Inoltre la presenza di un dominio regolare permette ulteriori teoremi e formule d'integrazione, come le formule di Gauss-Green, il teorema della divergenza e il teorema del rotore.*

4.1.1 Dominio normale rispetto all'asse x

Il dominio A si definisce normale rispetto all'asse x se è così definito:

$$A = \begin{cases} a \leq x \leq b & x \text{ valria in un intervallo} \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) & y \text{ varia tra due funzioni di } x \end{cases} \tag{4.1}$$

Esempio 9.

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$$

Il dominio B si definisce normale rispetto all'asse x se è così definito:

$$A = \begin{cases} c \leq y \leq d & y \text{ valria in un intervallo} \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) & x \text{ varia tra due funzioni di } y \end{cases} \tag{4.2}$$

Esempio 10.

$$D = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y < x < \sqrt{y} \end{cases}$$

4.1.2 Domini Polarmente normale

Il dominio C si definisce polarmente normale se è costantemente definito:

$$C = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \varphi(\theta) \leq \varphi_2(\theta) \end{cases} \tag{4.3}$$

Esempio 11.

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \tag{4.4}$$

l'angolo varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, il segmento φ dipende dall'angolo

$$\theta = 0 \text{ è } \max\varphi = 2$$
$$\theta = \tfrac{\pi}{2} \text{ è } \min\varphi = 0$$
$$\varphi = 2\cos\theta \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\cos\theta \end{cases}$$

corona circolare $\varphi = r$ $\varphi = R$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ r \le \varphi \le R \end{cases}$$

4.1.3 Definizione di integrale doppio

Definizione 22. *Sia f(x,y) una funzione limitata nel rettangolo $R = [a,b]x[c,d]$, coordinata in $[a,b]$ e di seconda coordinata in $[c,d]$ Deconpongo regolarmante gli intervalli $[a,b]$ e $[c,d]$,*

$$\textit{decomponendo } [a,b] \textit{ si ha} \quad D_1 = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$$
$$\textit{decomponendo } [c,d] \textit{ si ha} \quad D_1 = \{y_0 = a, y_1, y_2, \ldots, y_n = d\}$$

Il prodotto cartesiano $D = D_1 * D_2$ è una semidivisione del rettangolo R

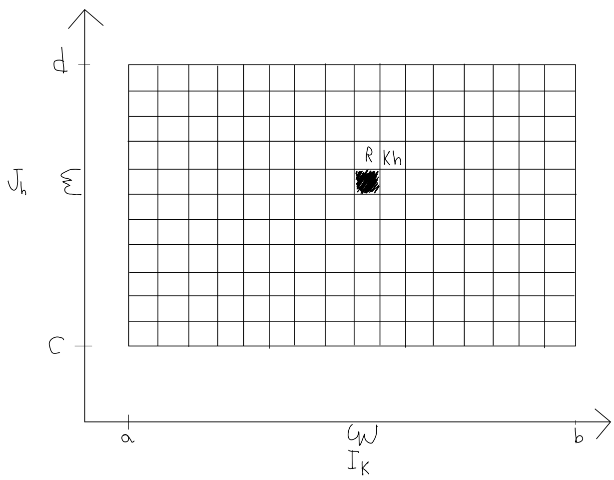


Figura 4.1: Decomposizione del rettangolo R

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \textit{ in } D_1(k = 1, \ldots, n)$$
$$J_h = [y_{h-1}, y_h] \textit{ in } D_2(h = 1, \ldots, n)$$

Il prodotto cartesiano $I_k * J_h$ individua il generico subrettangolo R_{kh} della semidivisione.
Prendo un generico punto del subrettangolo $R_{kh}(x_k, y_h)$ e faccio il seguente prodotto:

$$f(x_k, y_h) * misR_{kh} \textit{ con } misR_{kh} = misI_k * misJ_h \textit{ area del subrettangolo}$$

Con l'integrale doppio consudero il volume del parallelepipedo.
Geometricamente considera il pettangolo R_{kh} e la parte di superficie $f(x,y)$ che vi si presenta il prodotto $f(x_i, y_n) * misR_{kh}$ è il volume del parallelepipedo di base R_{kh} e altezza $f(x_k, y_h)$.

4.2 Somme di Riemann

Definisco le somme di Riemann $\sum_{k=h=1}^{k=m\ h=n} f(x_k, y_h) * R_{kh}$ ciò rappresenta la somma di tutti i volumi dei parallelepipedi di base R_{kh} e altezza $f(x_k, y_h)$ che si possono ottenere nel rettangolo R.
Infittisco le decomposizioni D_1 e $D_2(m \to \infty; n \to \infty)$, ottenendo così un numero sempre maggiore di subrettangoli di ampiezza via via minore.

$$misR_{kn} = misI_k * misI_n = \frac{b-a}{m} * \frac{d-c}{n} \to 0 \text{ per } m, n \to \infty \tag{4.5}$$

Con l'infittirsi della decomposizione, aumenta la precisione con cui ciascun parallelepipedo approssima il volume sotto al grafico delle funzione in ogni R_{kh}.
Al limite, le somme di Riemann daranno il volume sotto al grafico della funzione in un certo rettangolo (in generale dominio).
Se esiste finito $\lim_{n\to\infty\ m\to\infty} \sum_{h=k=1}^{k=m\ h=n} f(x_k.y_n) * misR_{kh}$ tale limite è definito ingrale doppio di f(x,y) nel dominio $R = [a, b] * [c, d]$

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \lim_{n\to\infty\ m\to\infty} \sum_{h=k=1}^{k=m\ h=n} f(x_k.y_n) * misR_{kh} \tag{4.6}$$

Somme superiori e somme inferiori

Definizione 23. *È possibile definire l'integrale doppio anche con le somme superiori e le somme inferiori*

$$\textit{Somme inferiori } s(f, R) = \sum inf_{R_{kh}} f(x_k.y_n) * misR_{kh}$$

prendo il minimo valore che la funzione assume nel subrettangolo R_{kh} e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per difetto individuato dalla funzione.

$$\textit{Somme superiori } s(f, R) = \sum sup_{R_{kh}} f(x_k.y_n) * misR_{kh}$$

prendo il massimo valore che la funzione assume nel subrettangolo R_{kh} e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per eccesso quello individuato dalla funzione all'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono, le somme superiori decrescono. Le somme superiori e le somme inferiori convergono ad uno stesso valore, detto integrale doppio[1]

$$\lim s = \lim S = \iint_R f(x, y)dxdy$$

[1]è il valore sotto al grafico della funzione

4.2.1 Proprietà dell'integrale doppio

$$\text{Linearità} \begin{cases} 1) \iint_D [f_1(x,y)+f_2(x,y)]dxdy = \iint_D f_1(x,y)dx*dy + \iint_D f_2(x,y)dx*dy \\ 2) \iint_D \alpha f_1(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f_2(x,y)dx*dy \end{cases}$$

Assitività 3) Sia $D = D_1 \cup D_2$ $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dx*dy + \iint_{D_2} f(x,y)dx*dy$

$$\text{Monotonia} \begin{cases} 4) \text{ Sia } f(x,y) \le g(x,y)\ \forall (x,y) \in D \\ \quad \iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dx*dy \\ 5) \text{ Sia } D_1 \subset D \\ \quad \iint_{D_1} f(x,y)dxdy < \iint_D f(x,y)dx*dy \\ 6) |\iint_D f(x,y)dxdy| \le \iint_D |f(x,y)|dx*dy \end{cases}$$

4.2.2 Formula di riduzione

- Sia $A \subset R^2$ un dominio normale rispetto all'asse x

  $$A = \begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{cases}$$

  Allora $\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right)$
  calcolo prima $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ che è una funzione della sola x $\not{b}(x)$

  $$\text{per calcolo } \int_a^b \not{b}(x)dx$$

- Dominio polarmente normale
  Effettua un cambio di coordinate, passando dalle coordinate cartesiane a quelle polari

  $$\text{L'integrale doppio è } \iint_D f(x,y)dxdy$$

  Passando alle coordinate polari

  $$\begin{matrix} \text{del dominio } D(x,y) \text{ passerò al dominio } D'(\varphi,\theta) \\ \text{della funzione } f(x,y) \text{ passerò al dominio } f(\varphi,\theta) \end{matrix} \begin{cases} x = \varphi\cos\theta \\ y = \varphi\sin\theta \end{cases} \quad \varphi = \sqrt{x^2+y^2}$$

  e da differenziali $dxdy$ passerò ai differenziali $d\varphi d\theta$.
  Si dimostra che nel passaggio ad altre coordinate il differenziale è $|j|d\varphi d\theta$, dove $|j|$ è il determinante della matrice Jacobiana che contiene le derivate parziale prime

  $$|J| = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\theta \\ y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} \to |J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & \varphi\cos\theta \end{vmatrix} = \varphi\cos^2\theta + \varphi\sin^2\theta = \varphi \quad (4.7)$$

  Per cui passando da $dxdy$ alle coordinate polari avrò $\varphi d\varphi d\theta$ così l'integrale doppio diventa:

  $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi,\theta)\varphi d\varphi d\theta$$