



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

DICAAR

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTE E ARCHITETTURA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA ELETTRICA INDUSTRIALE

ANALISI DI SISTEMI

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

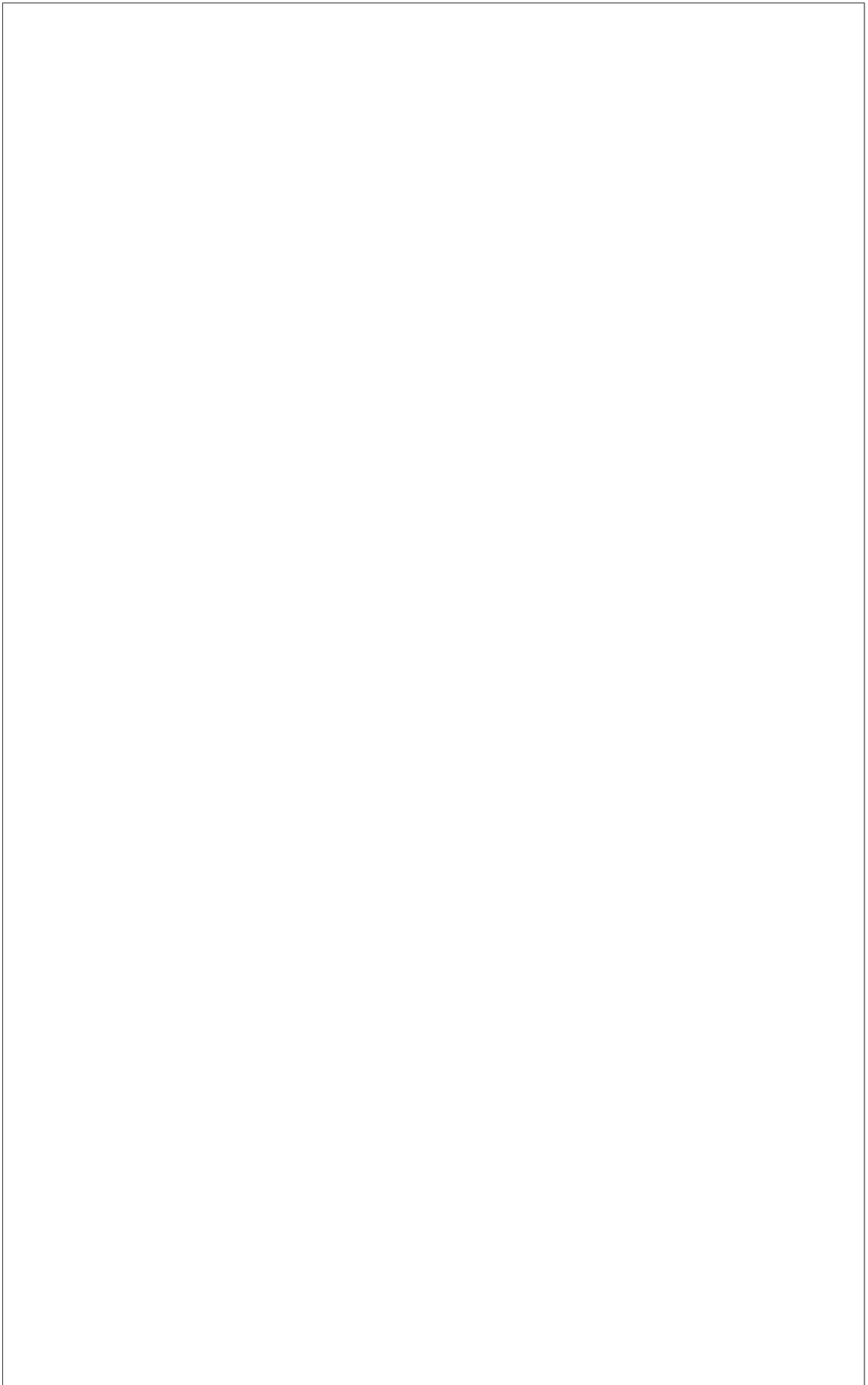
[This page is intentionally left blank]

Indice

1	Introduzione all'Automazione	9
1.1	Sommario	9
1.2	Automatica e definizione di sistema	9
1.2.1	Problemi principali	9
1.3	Sistemi ad avanzamento temporale	10
2	Modelli matematici dei sistemi	11
2.1	Modello matematico	11
2.2	Modello IU per un sistema SISO	11
2.2.1	Modello IU per un sistema MIMO (r ingressi e p uscite)	12
2.2.2	Modello VS per sistemi SISO	12
2.2.3	Modello VS per un sistema MIMO	12
2.3	Modello VS e sua rappresentazione schematica	12

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure



Capitolo 1

Introduzione all'Automazione

1.1 Sommario

- Automatica e Sistemi
- Problemi affrontati dall'Automatica
- Classificazione dei Sistemi

1.2 Automatica e definizione di sistema

Definizione 1. *l'Automatica si occupa di studiare i sistemi e il loro controllo*

- *αὐτοματὺς in greco: “che si muove da solo”*
- *automaton in latino: “macchina che opera da sola”;*

Nota 1. *Il sistema per definizione del manuale dell'IEEE è un insieme di elementi che cooperano per svolgere una funzione altrimenti impossibile per ciascuno dei singoli componenti.*

Gli esempi più classici di sistema sono:

- automobile, impianto termico, circuito elettrico;
- il corpo umano e l'ecosistema (per esempio Molentargius)
- un sistema economico (per esempio il mercato azionario)
- un programma di calcolatore

L'automatica ricerca leggi generali (dunque astratte) che possono essere usate in svariati domini applicativi

1.2.1 Problemi principali

- Modellazione;
- identificazione;
- Analisi;
- Controllo;
- Ottimizzazione;
- Diagnosi di guasto.

1.3 Sistemi ad avanzamento temporale

Nei sistemi ad avanzamento temporale (**SAT**) il comportamento del sistema è descritto da segnali ossia funzioni reali della variabile indipendente di tempo t .

Se la variabile tempo varia continuità si parla di **SAT** a **tempo continuo**, mentre, se essa prende valori in un insieme discreto si parla di **SAT** a **tempo discreto**.

Nel caso particolare dei sistemi a tempo discreto, è possibile identificare la sotto-classe dei sistemi in cui anche i segnali in gioco, e non solo la variabile tempo, assumono valori discreti.

Esempio 1. *prendiamo l'esempio di un serbatoio che possiede due sensori di controllo, un per il troppo pieno e un per controllare il minimo. L'equazione che governa questo sistema è*

$$\frac{d}{dt}V(t) = q_1(t) - q_2(t) \quad (1.1)$$

Se le misure di volume e di portata sono disponibili solo ogni T unità di misura del tempo, si considerano le variabili a tempo discreto

$$V(k) = V(kT), \quad q_1(k) = q_1(kT), \quad q_2(k) = q_2(kT), \quad k = 0, 1, \dots$$

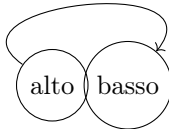
Posto $\Delta t = T$, approssimando la derivata con il rapporto incrementale

$$\frac{d}{dt}V(t) \approx \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(k+1) - V(k)}{T}$$

e moltiplicando ambo i membri per T la precedente equazione differenziale diventa una equazione alle differenze:

$$V(k+1) - V(k) = Tq_1(k) - Tq_2(k)$$

il modello prevede 3 stati che variano in base al livello del liquido contenuto all'interno del serbatoio, infatti, il grafo che ne uscirà fuori è:



Capitolo 2

Modelli matematici dei sistemi

2.1 Modello matematico

Un **modello matematico** descrive una relazione che lega fra loro le grandezze che descrivono il comportamento di un sistema.

Definizione 2. Il modello Ingresso-Uscita (IU) descrive il legame fra le uscita $y(t)$ (e le sue derivate) e l'ingresso $u(t)$ (e le derivate) sotto forma di una equazione differenziale. Alle volte viene utilizzato con la sua definizione inglese (Input/Output model) o modello I/O.

Definizione 3. Il modello in Variabili di stato (VS) descrive come

1. L'evoluzione dello stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dipende dallo stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e dall'ingresso $u(t)$ (**equazione di stato**).
2. l'uscita $y(t)$ dipende dallo stato di $x(t)$ e dall'ingresso $u(t)$ (trasformazione di uscita)

2.2 Modello IU per un sistema SISO

Definizione 4. per sistema SISO si intende “Single-input single-output system”, cioè un sistema con un solo ingresso e una sola uscita ed è meno complesso del sistema MIMO “Multiple-input multiple-output system” che invece possiede più interfacce di input/output.

$$h \left(\underbrace{y(t), \frac{d}{dt}, \dots, \frac{d^n}{dt^n} y(t)}_{\text{uscita}}, \underbrace{u(t), \frac{d}{dt} u(t), \dots, \frac{d^m}{dt^m} u(t)}_{\text{ingresso}}, t \right) = 0$$

n: grado massimo derivazione uscita = ordine del sistema

m: grado massimo derivazione ingresso

ovvero

$$h \left(\underbrace{y(t), \dot{y}, \dots, y^{(n)}(t)}_{\text{uscita}}, \underbrace{u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)}_{\text{ingresso}}, t \right) = 0$$

2.2.1 Modello IU per un sistema MIMO (r ingressi e p uscite)

$$\begin{aligned} h_1 \left(\underbrace{y_1(t), \dots, y_1^{(n_1)}(t)}_{\text{uscita 1}}, \underbrace{u_1(t), \dots, u^{(m_1)}(t)}_{\text{ingresso 1}}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_r)}(t)}_{\text{ingresso r}}, t \right) &= 0 \\ &\vdots \\ h_p \left(\underbrace{y_p(t), \dots, y_p^{(n_p)}(t)}_{\text{uscita p}}, \underbrace{u_1(t), \dots, u^{(m_1)}(t)}_{\text{ingresso 1}}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_r)}(t)}_{\text{ingresso r}}, t \right) &= 0 \end{aligned}$$

2.2.2 Modello VS per sistemi SISO

Detto

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

vale

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \\ \vdots &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \end{cases}$$

o, equivalentemente, in forma matriciale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

2.2.3 Modello VS per un sistema MIMO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \\ \vdots &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \\ \vdots &\vdots \\ y_p(t) &= g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \end{cases}$$

L'equazione di stato è un **sistema di equazioni differenziali del primo ordine**, mentre la trasformazione di uscita è una **equazione algebrica**.

2.3 Modello VS e sua rappresentazione schematica

Nota 2. in un modello VS l'equazione di stato ha n componenti (numero pari all'ordine del sistema) a prescindere dal fatto che il sistema sia SISO o MIMO

$$\begin{aligned} SISO & \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x_1(t), u(t), t) \end{cases} \\ MIMO & \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x_1(t), u(t), t) \end{cases} \end{aligned}$$