Università degli Studi di Cagliari

DIEE

Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Elettronica e Informatica

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettrica

ALGEBRA E GEOMETRIA

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2021 - 2022

[This page is intentionally left blank]

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open souce e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

$\in$ Appartiene
$\notin$ Non appartiene
$\exists$ Esiste
$\exists!$ Esiste unico
$\subset$ Contenuto strettamente
$\subseteq$ Contenuto
$\supset$ Contenuto strettamente
$\supseteq$ Contiene
$\Rightarrow$ Implica
$\Longleftrightarrow$ Se e solo se
$\neq$ Diverso
$\forall$ Per ogni
$\ni$: Tale che
$\leq$ Minore o uguale
$\geq$ Maggiore o uguale
α alfa
β beta
γ gamma
Γ Gamma
δ, Δ delta
ϵ epsilon
σ, Σ sigma
ρ rho

Capitolo 1

Vettori

1.1 Spazio Vettoriale

Spazio Vettoriale 1. *Uno spazio vettoriale reale (R-spazio vettoriale) è un insieme V in cui sono definite un'operazione di* `SOMMA` *tra elementi di V e un'operazione di* `Prodotto tra un reale` *e un elemento di V che soddisfano 8 proprietà:*

1. La somma è associativa quando $\forall v_1,\ v_2,\ v_3 \in V\ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$;
2. La somma è commutativa quando $\forall v_1, v_2 \in V\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. Esistenza elemento neutro 0 se e solo se $\forall v \in V\ v + 0 = 0 + v = v$
4. Esistenza opposto $-v$ se e solo se $\forall v \in V\ v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. Il prodotto per uno scalare è assoluto quando $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V\ c_1(c_2 v) = (c_1 c_2)v$
6. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V\ (c_1 + c_2)v = c_1 v + c_2 v$
7. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando $\forall c \in R, \forall v_1, v_2 \in V\ c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$
8. Esistenza elemento neutro 1 quando $\forall v \in V\ 1v = v$

ES: $V_0^2\ V_0^3$

ES: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x^2,\ g(x) = e^x,\ f(x) + g(x) = x^2 + e^x\ 3f(x) = 3x^2$

ES: $\mathbb{R}^n$ n-uple di numeri reali

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad C \in \mathbb{R}\ c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

ES: $\mathbb{R}_n[x]$ polinomi di grado $\leq n$ nella variabile x a coefficiente reale

- $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
- $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$

ES: $\mathbb{R}[x]$ polinomio di grado qualsiasi

$$p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$
$$c \in \mathbb{R},\ cp(x) = ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2 + \cdots + ca_n x^n$$

Capitolo 2

Numeri Complessi

Numeri reali 1. *Un numero complesso è definito come un numero della forma $x+iy$, con x e y numeri reali e i una soluzione dell'equazione $x^2 = -1$ detta unità immaginaria. i numeri reali sono*

2.1 Operazioni con Numeri complessi

1. Modulo e distanza
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.1}$$
   Il valore assoluto (modulo) ha proprietà queste proprietà:
$$|z+w| \geq |z| + |w|, \ |zw| = |z||w|, \ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$
   Valide per tutti i numeri complessi z e w. La prima proprietà è una versione della disuguaglianza triangolare.

Capitolo 3

Il determinante

In questo capitolo introdurremo uno strumento alternativo alla riduzione a gradini per determinare se le righe (*o le colonne*) di una matrice siano dipendenti. Per poterne dare la definizione rigorosa, dobbiamo prima fare alcuni richiami sulle permutazioni.

3.1 Richiami sulle permutazioni

Dato l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ dei numeri naturali compresi tra 1 e n, per un certo n, una funzaione da $\{1, 2, \ldots, n\}$ in se stesso associa a ogni elemento di $\{1, 2, \ldots, n\}$ un'immagine, scelta sempre all'interno di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se facciamo in modo che le immagini siano tutte diverse senza ripetizioni[1], queste ci daranno ancora tutti gli elementi $1, 2, \ldots, n$ semplicemente disposti in un altro ordine, ovvero permutati. Si parla di *permutazione di n elementi.* Ad esempio, le seguenti rappresentano permutazioni di 4 elementi:

$$\begin{array}{ll} 1 \to 1 & 1 \to 3 \\ 2 \to 3 & 2 \to 4 \\ 3 \to 2 & 3 \to 2 \\ 4 \to 4 & 4 \to 1 \end{array}$$

L'insieme delle permutazioni di n elementi si denota S_n. Per ogni n, tale insieme contiene esattamente $n! := n(n-1)(n-2)\ldots 2*1$ (cioè *n fattoriale*) permutazioni: ad esempio, per $n = 2$ abbiamo $2! = 2*1 = 2$ permutazione possibili, ovvero

$$\begin{array}{ll} 1 \to 1 & 1 \to 2 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 \end{array}$$

(tra le permutazioni vi è sempre anche anche quella che associa a ogni elemento se stesso, detta permutazione identica[2]).
Per $n = 3$ abbiamo invece $3! = 3 * 2 * 1 = 6$ permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{cccccc} 1 \to 1 & 1 \to 2 & 1 \to 1 & 1 \to 3 & 1 \to 2 & 1 \to 3 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 & 2 \to 3 & 2 \to 2 & 2 \to 3 & 2 \to 1 \\ 3 \to 3 & 3 \to 3 & 3 \to 2 & 3 \to 1 & 3 \to 1 & 3 \to 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array}$$

Si noti che p_2, p_3 e p_4 scambiano trra loro due elementi lasciando fisso il terzo (p_2 scambia tra loro 1 e 2, p_3 scambia 2 e 3): in generale, una permutazione di questo tipo, che scambia tra loro è una trasposizione anche la prima permutazione di 4 elementi presentata all'inizio del paragrafo (`scambia tra loro 2 e 3 lasciando fissi 1 e 4`), mentre la seconda non lo è.
Benché non tutte le permutazioni siano trasposizioni, si può dimostrare che qualunque permutazione può essere realizzata eseguendo una sequenza di trasposizioni. Ad esempio, la permutazione p_5 di sopra, che non è una trasposizione, può tuttavia essere ottenuta scambiando prima 1 e 2, e poi 1 e 3:

$$\begin{array}{l} 1 \to 2 \to 2 \\ 2 \to 1 \to 3 \\ 3 \to 3 \to 1 \end{array}$$

[1] *Si dice la funzione è iniettiva:* una funzione iniettiva da un insieme finito in se stesso è automaticamente anche suriettiva, e quindi biiettiva. Richiameremo queste nozioni nel prossimo capitolo.
[2] Come funzione, si tratta della cosiddetta identità o funzione identica

ovvero può essere ottenuta componendo 2 trasposizioni.
In generale, se il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data p è pari, si pari, si dice che p è una *permutazione pari*; se invece il numero di trasposizioni che servono per ottenere p è dispari, si dice che p è una *permutazione dispari*. Ad esempio, p_5 è una permutazione pari, in quanto l'abbiamo ottenuta componendo 2 trasposizioni; è facile vedere che anche p_6 è una permutazione pari, in quanto può essere ottenuta componendo due trasposizioni:

$$\begin{array}{c} 1 \to 3 \to 3 \\ 2 \to 3 \to 1 \\ 3 \to 1 \to 2 \end{array}$$

Chiaramente, se una permutazione è già essa una trasposizione, allora essa è dispori (`1 è un numero dispari`).
Si noti che possono esserci più modi diversi di decomporre una permutazione come composizione di trasposizioni, ad esempio, la permutazione identica può essere vista o come risultato di 0 trasposizioni, oppure come risultato di 2 trasposizioni, ad esempio

$$\begin{array}{c} 1 \to 2 \to 1 \\ 2 \to 1 \to 2 \\ 3 \to 3 \to 3 \end{array}$$

Tuttavia, si pu'o dimostrare che il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data 'e o sempre pari o sempre dispari (*nell'esempio, 0 o 2, comunque pari*).
Si può allora definire il *segno s(p) di una permutazione* p come $s(p) = +1$ se p è una permutazione dispari.
Siamo ora pronti a definire il determinante.

3.2 La definizione di determinante

Sia A una matrice che ha n righe e n colonne, per qualche $n > 0$: tali matrici si dicono *quadrate* e il numero n comune a roghe e colonne si dice *l'ordine della matrice*. Il determinante associa a ogni matrice A quadrata di ordine n a entrate in un campo $\mathbb{K}$ un elemento $\det(A) \in \mathbb{K}$, funzione delle sue entrate, per il quale vedremo che vale l'importante proprietà che $\det(A) = 0$ se e solo se la matrice ha rango minore di n, ovvero se e solo se le righe (*o le colonne*) della matrice sono dipendenti.

Definizione 3.2.1. *Sia A una matrice quadrata di ordine n con entrate a_{ij}. Allora*

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} s(p) a_{1p(1)} a_{2p(n)} \tag{3.1}$$

In altrea parole, il determinante di una matrice quadrata di ordine n è dato da una sommatoria che ha addendo per ogni permutazione $p \in S_n$: ognuno di questi addendi è un prodotto di entrata di A del tipo $a_{1p(1)}\ a_{2p(2)}\ \dots a_{np(n)}$, con davanti un segno + o - a seconda che la permutazione p sia pari o dispari. Si noti che l'espressione $a_{1p(1)},\ a_{2p(2)},\ \dots, a_{np(n)}$ è il prodotto di n entrate scelte nella matrice, una per ogni riga, con gli indici di colonna dati da $p(1),\ p(2), \dots,\ p(n)$: poiché una permutazione scambia gli indici $1,\ 2, \dots,\ n$ senza ripetizioni, stiamo praticamente scegliendo un'entrata da ogni riga in modo però che le entrate scelte stiano anche su colonne diverse.

Per chiarire e illustrare la definizione precedente, consideriamo in particolare i casi $n = 2$ e $n = 3$.
Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine $n = 2$. Come abbiamo visto sopra ci sono solo due permutazioni dell'insieme $\{1, 2\}$ (`l'identità e la trasposizione che scambia 1 con 2`) quindi nella sommatoria avremo solo due addendi, del tipo $s(p)a_{1p(1)}a_{2p(2)}$: se p è l'identità, che come abbiamo osservato sopra è un permutazione pari e quindi $s(p) = +1$ e l'addendo corrispondente sarà $+a_{11}a_{22}$: se p è la trasposizione che scambia 1 con 2, che è una permutazione dispari, si ha $s(p) = -1$ e l'addendo corrispondente sarà $-a_{12}a_{21}$. Il determinante di una matrice quadrata A di ordine 2 risulta quindi essere

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3.2}$$

Nel caso di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ quadrata di ordine $n = 3$, la sommatoria avrà 6 addendi, tanti quante sono le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$, e per ognuna di queste permutazioni p l'addendo corrispondente sarà del tipo $s(p)a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$. Più precisamente, avremo

- l'addendo $+a_{11}a_{12}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3$ (cioè la permutazione identica, che è una permutazione pari)
- l'addendo $-a_{11}a_{23}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 3, p(3) = 2$ (che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari)
- l'addendo $+a_{12}a_{23}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2,\ p(2) = 3,\ p(3) = 1$ (che è una trasposizione dispari)
- l'addendo $-a_{12}a_{21}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2,\ p(2) = 1,\ p(3) = 3$ (che è una teasposizione e quindi una permutazione dispari)
- l'addento $+a_{13}a_{21}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3,\ p(2) = 1,\ p(3) = 2$ (che si può scrivere come composizione di due trasposizioni ed è quindi una permutazione pari)
- l'addendo $-a_{13}a_{22}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3,\ p(2) = 2,\ p(3) = 1$ (che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari)

e quindi si avrà, per una matrice A di ordine 3:

$$\det(A) = a_{11}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{3.3}$$

Ora, vedremo nel Paragrafo la dimostrazione del fatto che il determinante di una matrice quadratea di ordine n si annulla se e solo se la matrice ha $n = 2$ e $n = 3$, usando le farmule esplicite (3.2) e (3.3).
Nel caso di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ di ordine 2, essendoci solo proporzionali, ovvero diciamo che esiste un $c \in \mathbb{K}$ tale che $(a_{11}, a_{12}) = c(a_{21}a_{22})$, cioè

$$a_{11} = ca_{21},\ a_{12} = ca_{22} \tag{3.4}$$

Ma allora, moltiplicando (a entrambi i membri) la prima uguaglianza per a_{22} e la seconda per 21 si ha $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$ e $a_{12}a_{21} = ca_{21}a_{21}$, da cui vediamo che $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$: quindi $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, ovvero $\det(A) = 0$. Quindi se una matrice di ordine 2 ha le righe proporzionali, il suo determinante è zero.
Viceversa, supponiamo che il determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sia zero, ovvero

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \tag{3.5}$$

Supponendo per il momento che le entrate a_{21}, a_{22} della seconda riga non siano nulle, dividendo entrambi i membri della (3.5) per a_{21} e a_{22} otteniamo

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{3.6}$$

cioè si ha $\frac{a_{11}}{a_{21}} = c$ e $\frac{a_{12}}{a_{22}} = c$ per qualche $c \to \mathbb{K}$, da cui ritroviamo le uguaglianze (3.4), che a_{21} e a_{22} fossero entrambi diversi da zero: infatti, se ad esempio $a_{21} = 0$ allora la (3.5) diventa $a_{11}a_{22} = 0$, che equivale a dire che o $a_{11} = 0$ oppure $a_{22} = 0$: ma nel primo caso la matrice è della forma $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, nel secondo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e in entrambi i casi otteniamo sempre che le righe sono proporzionali.
Nel caso di matrici di ordine 3, dimostrare che il determinante si annulla *se e solo se* le righe sono dipendenti, non p difficile se ci aiutiamo con un'interpretazione geometrica: **infatti, prendiamo l'espressione (3.3) del determinante di una tale matrice e riscriviamola nel modo seguente:**

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \tag{3.7}$$

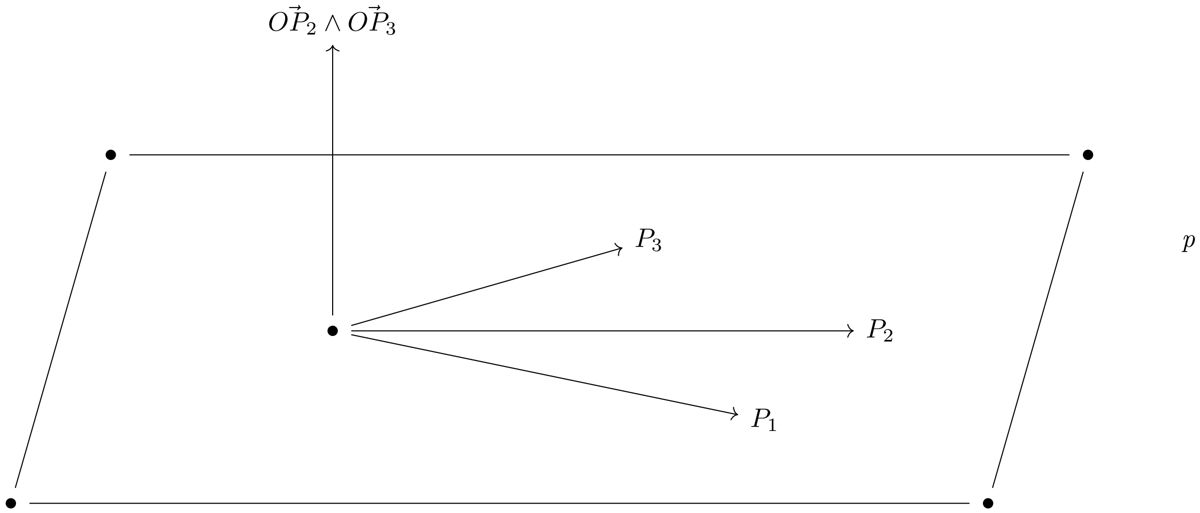
Ora, le tre quantità dentro le parentesi tonde non sono altro che le componenti del prodotto vettoriale dei due vettori di $\mathbb{R}^3$ dati dalla seconda e dalla terza riga della matrice:

$$R_2 \wedge R_3 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \wedge (a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, a_{23}a_{33} - a_{21}a_{33,21}, a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Quindi la (3.7), dal momento che moltiblica le componenti di $R_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ con le rispettive componenti di $R_2 \wedge R_3$ (la prima con la prima, la seconda con la seconda e la terza con la terza) e somma, non è nient'altro che quello che abbiamo chiamato prodotto scalare tra R_1 e $R_2 \wedge R_3$.
Quindi, dire che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla quivale a dire che le sue tre righe R_1, R_2, R_3 verificano l'uguaglianza.

$$R_1 * (R_2 \wedge R_3) = 0 \tag{3.8}$$

Ora, se fissiamo nello spazio V_O^3 dei vettori applicati nello spazio tridimensionali, le terne R_1, R_2, R_3 rappresenteranno le coordinate di tre vettori applicati $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ rispettivamente, e la (3.8) ci sta allora dicendo che il vettore $\vec{OP}_1$ è perpendicolare al vettore $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$ (*infatti, abbiamo dimostrato che due vettori dello spazio sono perperndicolari solo se il prodotto scalare tra le terne dele lorfo coordinate è zero*). Ma, essendo a sua volta $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$, per le proprietà del prodotto vettoriale, perpendicolare $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$ significa dire che anche $\vec{OP}_1$ deve stare sul piano p:



Quindi i tre vettori, stando sullo stesso piano, sono tra loro dipendenti, e concludiamo che sono dipendenti anche le terne R_1, R_2, R_3 delle loro coordinate[3]. Questo mostra come volevamo che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla se e solo se le sue riche R_1, R_2, R_3 sono dipendenti.
Nel paragrafo sulle proprietà del determinante, dimostreremo in modo puramente algebrico che questo fatto è vero per matrici di qualunque ordine. Prima di fare ciò, vediamo nel prossimo paragrafo un modo di calcolkare il determinante alternativo alla definizione, il cui utilizzo diretto richiederebbe di scrivere una sommaria che per una matrice di ordine n ha $n!$ addendi, tanti quanti le permutazioni di n elementi (si pensi che già per $n = 4$ abbiamo $4! = 24$ addendi).

3.3 La formula di Laplace

Allo scopo di calcolare il determinanete, useremo la cosiddetta *formula di Laplace*, per scrivere la quale abbiamo prime bisogno di dare la seguante

Definizione 3.3.1. *Sia A una matrice quadrata di ordine n: per ogni entrata a_{ij} di A, definiamo il cofattore di a_{ij}, denotato C_{ij}, come il determinante della matrice di ordine $n-1$ che si ottiene da A cancellando la riga i e la colonna j, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$*

Vediamo subito un esempio: consideriamo la matrice di ordine 3 seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

L'entrata a_{11} è uguale a 1: il suo cofattore C_{11} è, in base alla definizione <++>, il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna (ovviamente la riga e la colonna dell-entrata a_{11} presa in considerazione) moltiplicato per $(-1)^{1+1}$:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = (-1)^2 (5 * 9 - 6 * 8) = +(45 - 48) = -3$$

Invece, se per esempio prendiamo l'entrata $a_{23} = 6$, il suo cofattore C_{23} è il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene cancellando la seconda riga e la terza colonna (ovvero la riga e la colonna dell'entrata $(-1)^{2+3}$):

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = (-1)^5 (1 * 8 - 2 * 7) = -(8 - 14) = +6$$

[3]Ricordiamo che dei vettori in uno spazio vettoriale sono dipendenti se e solo se lo sono, le *n-uple* delle loro coordinate rispetto a una base scelta.

Siamo ora pronti a enunciare il seguante risultato, sche ci dà una formula per il calcolo del determinante di una matrice:

Proposizione 3.3.1. *Sia A una matrice di ordine n. Data una sua qualunque riga* $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ *o una qualunque colonna* $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, *si ha*

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} \tag{3.9}$$
$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} \tag{3.10}$$

La proposizione, che non dimostriamo, afferma quindi che il determinante di una matrice si può calcolare scegliendo una riga o una colonna, moltiplicando ogni elemento della riga o della colonna per il suo cofattore e sommando il tutto. La (3.9) e la (3.10) si dicono rispettivamente formula (o sviluppo) di Laplace secondo la i-esima riga e la la formula (o sviluppo) di Laplace secondo la j-esima colonna.
L'osservazione importante da fare sulla formula di Laplace è che essa esprime il determinante di una matrice di ordine n in funzione dei suoi cofattori, che sono, a parte il fattore $(-1)^{i+j}$, determinanti di matrici di ordine $n-1$: a loro volta, potremo poi calcolare ciascuno di questi cofattori riutilizzando la formula di Laplace, con la quale ci ridurremo a calcolare determinanti di matrici di oridne $n-2$, e così viam fino a che non arriveremo a matrici di ordine 2 per le quali la formula del determinante è particolarmente semplice da ricordare. Vediamo un esempio.

Esempio 3.3.1. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Scegliamo di sviluppare il determinante secondo Laplace rispetto alla terza riga, usando cioè la formula (3.9) nel caso $i = 3$:*

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}.$$

Per definizione di cofattori e tenendo conto che $a_{32} = a_{33} = 0$ (e quindi non abbiamo bisogno di calcolare i corrispondenti cofattori) si ha

$$\det(A) = 1 * (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 * (-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Ora, cisascuno dei due determinanti di ordine 3 che compaiono in questa uguaglianza può essere calcolato usando di nuovo la formula data. Ad esempio, se per il primo determinante scegliamo la terza colonna (quindi dobbiamo usare $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$) tenendo conto che $a_{13} = 0$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 * (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

dove il determinante di ordine 2 è stato calcolato usando la formula $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Analohgalmente, se per l'altro determinante scegliamo la prima riga (quindi dobbiamo usare $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$) tenendo conto che $a_{13} = 0$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 * (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 * (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Sostituendo questi risultati nella (3.11), si trova allora

$$\det(A) = 1 * (-1)^{3+1}(-1) + 1 * (-1)^{3+4} 2 = -3.$$

Nell'enunciato del Proposizione 3.3, è sottointeso il fatto che il risultato dello sviluppo ci darà sempre il determinante di A indipendentemente dalla riga o colonna scelta: questo è molto importante nella pratica in quanto ci consente, come visto anche nell-esempio, di scegliere se possibile righe o colonne in cui alcune in cui alcune entrate siano nulle, così da non dover calcolare i corrispondente cofattori.

Osservazione 3.3.1. *Notiamo che l'espressione (3.7), che abbiamo usato per mostrare geometricamente che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti, non era altro che lo sviluppo di Laplace di tale determinante rispetto alla prima riga: infatti, ricordando la derinizione di determinante di una matrice di ordine 2, si trava*

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{12}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$$
$$a_{11}(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{32} & a_{32}\end{pmatrix}=$$
$$a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$$

3.4 Proprietà del determionante

In questo paragrafo dimostreremo finalmente che il determinante di una matrice A si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti. A questo scopo, iniziamo con l'enunciazione e dimostrazione tre importanti proprietà del determinante:

1. se A' si ottiene da A moltipricando una riga di A per $c \in \mathbb{K}$, allora $\det(A') = c\det(A)$
   Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix}5 & 10\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la prima riga per $c = 5$, ho $\det(A') = 5*4-10*3 = 5\det(A)$.
   In altre parole, se una riga di una matrice viene moltiplicata per una scala c, quando calcoliamo il determinante possiamo "portare fuori" questo scalare.
   In base alle definizione (<++>) di determinantem, il determinante della matrice A' in cui abbiamo moltiplicato tutti gli elementi della riga *i-esima* per c è $\det(A') = \sigma s(p)a_{1p(1)}\dots(ca_{ip(1)})\dots a_{np(n)}$: essendo il fattore c comune a tutti gli addendi della sommatoria, possiamo metterlo in evidenze in eveidenza alla somma e scivere $\det(A') = c\sigma s(p)a_{ip(n)}a_{1np(n)}$, ovvero $\det(A') = c\det(A)$, come volevamo.

2. supponiamo di sommare a una riga R_i di una matrice A una *n-upla* $v = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$. Allora, il determinante della nuova matrice A' così ottenuta vale

$$\det(A') = \det(A) + \det\begin{pmatrix}R_1\\ \dots\\ v\\ \dots\\ R_n\end{pmatrix} \tag{3.12}$$

   dove stiamo denotando con $\begin{pmatrix}R_1\\ \dots\\ v\\ \dots\\ R_n\end{pmatrix}$ la matrice ottenuta da A sostituendo v al posto della riga R_i.
   Possiamo anche scrivere

$$\det\begin{pmatrix}R_1\\ \dots\\ R_i+v\\ \dots\\ R_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}R_1\\ \dots\\ R_i\\ \dots\\ R_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}R_1\\ \dots\\ v\\ \dots\\ R_n\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

   Ad esempio, consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ e sommiamo alla sua seconda riga (2, 1) la coppia (1, 3), ottenendo $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Allora si ha proprio

$$\det(A') = \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \det(A) + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

   ovvero $-2 = -3 + 1$.

   Dimostrazione. Se $R_i = \begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\end{pmatrix}$ allora la riga i-esima della matrice A' è $R_i + v + \begin{pmatrix}a_{i1}+v_{i1} & a_{i2}+v_{i2} & \dots & a_{in}+v_{in}\end{pmatrix}$ In base alla definizione (<++>) di determi-

nante, si ha $\det(A') = \sum s(p)a_{ip(1)} \dots (a_{ip(i)} + v_{ip(i)}) \dots a_{np(n)} = \sum s(p)a_{ip(1)} \dots a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} +$
$\sum s(p)a_{ip(1)} \dots v_{ip(i)} \dots a_{np(n)}$ ovvero $\det(A) + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ v \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}$, come volevamo. □

3. se A' si ottiene da A scambiando tra loro due righe allora $\det(A') = -\det(A)$
   Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro la prima e la seconda riga, ho $\det(A) = 1*4 - 2*3 = -2$ e $\det(A') = 3*2 - 4*1 = +2$.

   Dimostrazione. Sia A' la matrice ottenuta da A scambiando la riga R_i con la R_j: quindi per ogni k si ha $a'_{ik} = a_{jk}$ e $a'_{jk} = a_{ik}$, mentre tutte le altre sono uguali a quelle di A.
   Quindi, in base alla (3.1), si ha

$$\det(A') = \sum_{p \in Sn} s(p)a'_{1p(1)} \dots a'_{ip(i)} \dots a'_{jp(j)} \dots a'_{np(n)} = \sum_{p \in Sn} s(p)a'_{1p(1)} \dots a'_{jp(j)} \dots a'_{ip(i)} \dots a'_{np(n)}. \tag{3.14}$$

   (in pratica, l'unica differenza tra la (3.14) e l'espressione del determinante di A è che in ogni addendo le entrate "centrali" habbi gli indici di riga i e j scambiati tra logo).
   Ora, allo scopo di dimostrare il risultato, riscriviamo la (3.14) come segue: consideriamo la trasposizione $\mathcal{T} \in S_n$ che scambia i con j e lascia invariati tutti gli altri elementi: quindi $j = \mathcal{T}(i),\ i = \mathcal{T}(j)$, e per tutti gli altri indici $k = \mathcal{T}(k)$.
   Allora possiamo scrivere

$$\det(A') = \sum_{p \in Sn} s(p)a_{1\mathcal{T}(1)} \dots a'_{jp\mathcal{T}(j)} \dots a'_{ip\mathcal{T}(i)} \dots a'_{np\mathcal{T}(n)} \tag{3.15}$$

   Ora, per un qualunque indice k, si ha che $p(\mathcal{T}(k))$ è il valore associato a k dalla permutazione $p\mathcal{T}$ che si ottiene componendo p con $\mathcal{T}$ (ovvero applicando, da destra, prima $\mathcal{T}$ e poi p). Tale permutazione è tale dispari, e di un numero pari di trasposizione (una in più di p), e analogamente se dispari di trasposizione, e allora $p\mathcal{T}$, sarà composta da un numero dispari di trasposizione (una in più di p), e analogamente se p è dispari vuol dire che si scrive come composizione di un numero di strasposizioni.
   Riassumendo, la (3.15), scambiando anche di ordine i due fattori centrali $a_{jp\mathcal{T}(j)}$ e $a_{ip\mathcal{T}(i)}$ in ogni addendo (il prodotto gode della proprietà commutativa) può essere scritta nel modo seguente

$$\det(A') = -\sum_{p \in S_n} s(p\mathcal{T})a_{1p\mathcal{T}(1)} \dots a_{ip\mathcal{T}(i)} \dots a_{jp\mathcal{T}(j)} \dots a_{np\mathcal{T}(n)} \tag{3.16}$$

   Ora, quest'ultima espressione, con il segno meno davanti, è uguale a quella del determinante di A a parte che in essa compare $p\mathcal{T}$ invece che p. Ma in realtà questo non cambia nulla, in quanto facciamo variare p tra tutti le permutazioni $p_1, p_2, \dots, p_{n!}$ di n elementi, $p_1\mathcal{T}, p_2\mathcal{T}, \dots, p_{n!}\mathcal{T}$ sono ancora *tutte* le permutazioni: per non esserlo, dovrebbe infatti succedere che $p_i\mathcal{T} = p_j\mathcal{T}$ allora $p_i\mathcal{T}\mathcal{T} = p_j\mathcal{T}\mathcal{T}$, ovvero, essendo $\mathcal{T}\mathcal{T} = id, p_i = p_j$.
   Quindi, a parte il segno, la (**3.16**) contiene esattamente un addendo per ogni permutazione, e otteniamo il risultato voluto. □

La proprietà (3) ha l'importante conseguenza che se una matrice ha due *righe uguali allora il suo determinante è nullo.*
Infatti, in base alla (3) se A' è ottenuta da A scambiando tra loro due righe allora $det(A') = -det(A)$, ma se le righe scambiate sono proprio le due righe uguali allora $A' = A$, da cui concludiamo $det(A) = -det(A)$, ovvero $det(A) = 0$. Combinando questo fatto con le proprietà (2) e (1) possiamo capire come si comporta il determinante quando eseguiamo operazioni elementari del terzo tipo: infatti, supponiamo che A' sia ottenuta da A sommanda alla sua *i-esima* riga R, la *j-esima* riga R_j moltiplicata per c, ovvero

$$A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i + cR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}.$$

Ma allora, per la proprietà (2) e la proprietà (1) ho

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i + cR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ cR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + c\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Ma mentre i primo addendo dopo l'ultima uguaglianza è il determinante della matrice A, il secondo addendo è nullo, in quanto determinante di una matrice con le righe uguali (compare due volte R_j). Quindi la (3.17) si legge come

$$\det(A') = \det(A) + 0 = \det(A).$$

Ora siamo finalmente pronti a dimostrare il

Teorema 3.4.1. *Una matrice A quadrata di ordine n ha rango n (ovvero ha le righe indipendenti) se e solo se $det(A) \neq 0$.*

Osservazione 3.4.1. *per sapere se n vettori di $\mathbb{R}'$ sono linearmente indipendenti oppure dipendenti, si dispongono le loro coordinate in una matrice e si calcola il determinante.*

- *Se* $\det \neq 0$*, allora i vettori sono lineari indipendenti.*
- *Se* $\det = 0$*, allora i vettori sono lineari dipendenti.*

Dimostrazione. Supponiamo che A abbia rango massimo n. Allora, come sappiamo, nella matrice A' si ottiene da A mediante operazioni elementari, e come abbiamo visto sopra le operazioni elementari o non modificano il determinante (*terzo tipo*) o lo cambiano di segno (prima tipo) o lo moltiplicano per un coefficiente non nullo (secondo tipo), si avrà $\det(A') = \pm c_1 \dots c_m \det(A)$, con $c_1, \dots, c_m \neq 0$, e per dimostrare che $\det(A') \neq 0$.
Poiché stiamo dicendo che matrice quadrata a gradini senza righe nulle, A' è della forma

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n-1} & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n-1} & a'_{2n} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

Triangolare superiore con elementi sulla diagonale tutti diversi da zero

con $a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{n-1n-1}, a'_{nn}$ tutti divensi da zero. Calcoliamo il determinante di A' sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima colonna: essendo a'_{11} l'unico elemento non nullo, si avrà

$$\det(A') = a'_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n-1} & a'_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 & \dots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

Se sviluppiamo ora il cofattore di nuovo secondo Laplace rispetto alla sua prima colonna, che ha come unico elemento non nullo a'_{22}, otteniamo

$$\det(A') = a'_{11}(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} a'_{33} & \dots & a'_{3n-1} & a'_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 & \dots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

e continuando a sviluppare sempre rispetto alla prima colonna otteniamo $\det(A') = a'_{11}a'_{12}\dots a'_{nn}$. Essendo come abbiamo detto qgli elementi $a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{nn}$ tutti non nulli, si ha, come volevamo, $\det(A') \neq 0$: la prima implicazione è dimostrata.

Osservazione 3.4.2. *il* det *diuna matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale*

Per quello che riguarda l'implicazione inversa se $\det(A) \neq 0$ allora A ha rango n, essa si dimostra facilmente per assurdo osservando che se A non avesse rango n, allora la matrice ridotta A' avrebbe una riga nulla, e sviluppando il suo determinante secondo Laplace proprio rispetto a quella riga otterremmo $\det(A') = 0$ (in quanto ogni sviluppo andrebbe moltiplicato per zero). ma poiché come abbiamo osservato nel dimostrare la prima implicazione il determinante della matrice ridotta è nullo se e solo se lo è quello della matrice di partenza, allora avremmo anche $\det(A) = 0$, contro l'ipotesi. □

Osservazione 3.4.3. *Nell'osservazione <++> abbiamo visto un modo per passare da equazioni parametriche di un piano alla sua equazione cartesiana mediante eliminazione dei parametri t e s per sostituzione. Vediamo ora che grazie al determinante esiste un procedimento più elegante: le equazioni parametriche (**??**) possono essere riscritte nel seguente modo:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima ugualianza ci dice che il vettore $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ si scrive come combinazione lineare di (l, m, n) e (l', m', n'), e quindi che la matrice

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & l & l' \\ y - y_0 & m & m' \\ z - z_0 & n & n' \end{pmatrix}$$

che ha tale vettore come colonne ha rango 2. Questo, per la proprietà appena dimostrata che afferma che una matrice quadrata di ordine n ha rango minore di n se e solo se il suo determinate è zero, equivale a dire che

$$\det\begin{pmatrix} x - x_0 & l & l' \\ y - y_0 & m & m' \\ z - z_0 & n & n' \end{pmatrix} = 0$$

Sviluppando questo determinante, si ottiene quindi un'equazione in x, y, z che è appunto l'equazione cartesiana del piano.

Esempio 3.4.1. *supponiamo che il piano abbia equazioni parametriche* $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t + 2s \\ z = 3 + t - s \end{cases}$.

Allora, la sua equazione cartesiana è data da

$$\det\begin{pmatrix} x - 1 & 1 & 1 \\ y - 2 & -1 & 2 \\ z - 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ovvero, sviuppando per sempio secondo Laplace rispetto alla prima colonna,

$$(x-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - (y-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (z-3)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

cioè, svolgendo i calcoli,

$$-(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=-x+2y+3z-12=0$$

Nel caso in cui il piano sia quello passante per tre punti non allineati di coordinate $(x_0,y_0,z_0),(x_1,y_1,z_1)$, (x_2,y_2,z_2)*, abbiamo visto nella (<++>) che in tal caso basta prendere* $(l,m,n)=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ *e* $(l',m',n')=(x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0)$*, e quindi la (<++>) diventa*

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{pmatrix}=0 \tag{3.18}$$

che ci da un modo per scrivere subito l'equazione cartesiana del piano che passa per i tre punti.

Osservazione 3.4.4. *Tutti le proprietà del determinante che abbiamo visto valide per operazioni sulle righe sono vere anche se effettuiamo le stesse operazione sulle colonne, ovvero:*

1. *se* A' *si ottiene da* A *moltiplicando una colonna di* A *per* $c\in\mathbb{K}$*, allora* $\det(A')=c\det(A)$

   Esempio 3.4.2. *se* $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ *e* $A'=\begin{pmatrix}5&2\\15&4\end{pmatrix}$ *è la matrice ottenuta da* A *moltiplicando la prima colonna per* $c=5$*, ho* $\det(A)=-2$ *e* $\det(A')=5\times4-10\times3=-10=5\det(A)$.

2. *se a una colonna* C_i *di una matrice* A *sommiamo una* n*-upla data* v *(scritta in colonna) si ha*

   $$\det(A')=\det(A)+\det\begin{pmatrix}C_i & \dots & v & \dots & C_n\end{pmatrix}$$

   Esempio 3.4.3. *se alla seconda colonna* C_2 *della matrice* $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$ *sommiamo la coppia* $v=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$*, ottenendo così* $C_2'=C_2+v=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$*, si ha*

   $$\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}$$

   come può verificato calcolando i determinanti (si ottiene $-2=-5+3$*).*

3. *se* A' *si ottiene da* A *scambiando tra loro due colonne, allora* $\det(A')=-\det(A)$

   Esempio 3.4.4. *se* $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ *e* $A'=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$ *è la matrice ottenuta da* A *scambiando tra loro la prima e la seconda colonna, ho* $\det(A)=1*4-2*3=-2$ *e* $\det(A')=2*3-1*4=+2$.

   Omettiamo la dimostrazione di queste tre proprietà.

Concludiamo questo capitolo mostrando come, benché non si possa calcolare il determinante di una matrice non quadrata, il determinante posso comunque essere usato per calcolare il rango di qualunque matrice. Più precisamente, data una matrice A*, chiamiamo sottomatrice di* A *una matrice che si ottiene da* A *scegliendo alcune righe e alcune colonne e cancellando le rimanenti.*

Esempio 3.4.5. *se* $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&2&2&3\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$*, allora scegliendo la prima e la terza riga, e tra la quarta colonna*[4] *si ottiene la sotto matrice* $\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$

Teorema 3.4.2. *Il rango di una matrice* A *è* k *se e solo se esiste una sottomatrice di* A *di ordine* k *con determinante diverso da zero e tutte le sotto matrici quatrate di ordine* $k+1$ *hanno determinante nullo.*

Esempio 3.4.6. *la sottomatrice di ordine 1 con determinante*[5] *diverso da zero, per esempio* $(a_{12})=(1)$*, e tutte le sue sottomatrici quadrate di ordine 2, ovvero* $\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&2\\0&6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$ *hanno, come si vede immediatamente, il determinante uguale a zero: in base al teorema* ***3.9*** *la matrice ha rango 1, come in effetti già si vede notando che le sue due righe sono proporzionali.*

[4] ovvero cancellando la seconda riga e le prime due colonne

[5] Una sottomatrice quadrata $A=(a)$ di ordine 1, che contiene una sola entrata, ha come determinante $\det A=(a)$.

In generale, per calcolare il rango di una matrice mediante il Teorema **3.9** basta iniziare a vedere se ci sono sottomatrici di ordine 1 con determinante diverso da zero (ovvero se c'è un'entrata non nulla); se non ne troviamo nessuna, concludiomo che il rango è zero; se ne troviamo almeno una, andiamo a vedere se ci sono sottomatrice di ordine 3 e così via. Lo svantaggio di tale metodo è che può risultare molto laborioso calcolare tutti i determinanti di tutte le sottomatrici di A, per i vari ordini. Tuttavia, esso può essere semplificato nel modo sequente, che ci consente di controllare solo alcune sottomatrici e non tutte. Più precisamente, data una sottomatrice quadrata A' di A ottenuta scegliendo k righe e k colonne, diciamo che una riga e una colonna a quelle già scelte per determinare A'.

Esempio 3.4.7. *nella matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *già vista sopra, la sottomatrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *è stata ottenuta scegliendo la prima e la terza riga, e la quanta; aggiungendo ad esempio la seconda riga e la prima colonna ottengo* $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*: quindi A'' si ottiene orlando A'. La matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*, che corrisponde a scegliere prima, seconda e la terza riga, e prima, seconda e terza colonna, non è invece ottenuta orlando A'.*

Ora, il teorema precendente può essere migliorato come segue.

Teorema 3.4.3. *(dei minimi orlati) Il rango di una matrice A è k se e solo se esiste una sottomatrice quadrata A' di A di ordine k con determinante diverso da zero e tutte le sottomatrici quadrate di ordine $k+1$ ottenute orlando A' hanno determinante nullo.*

Quindi per calcolare il rango di A possiamo procedere come seque: si inizia a vedere se ci sono sottomatrici di ordine 2 con determinante diverso da zero; se non ne traviamo nessuna, concludiamo che il rango è 1; se ne troviamo almeno una, diciamo A', andiamo a vedere se tra le sottomatrici di ordine 3 ottenute orlando A' (non è quindi necessario vederle tutte) c'è né sono con era 2, se ne troviamo almeno una, diciamo A'' andiamo a vedere quelle di ordine 4 che si ottengono orlando A'' e così via.

Esempio 3.4.8. *Calcoliamo il gango della matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *usando il Teorema 3.10: prendiamo la sottomatrice* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *di ordine 2 ottenuta scegliendo prima e seconda riga, e taerza e quarda colonna: essa ha determinante uguale a $1 \neq 0$, quindi il rango di A è almeno 2; per vedere se è 2 o 3, consideriamo le matrice di ordine 3 ottenute orlando A', ovvero* $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(ottenuta aggiungendo la teza riga e la seconda colonna) e* $A''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(ottenuta aggiungendo la teza riga e la prima colonna).*
Ora, da un calcolo diretto usando la sviluppo di Laplace (3.3) si vede che $\det(A'') = 0$ *e* $\det(A''') = 0$*, quindi concludiamo che il rango della matrice è 2.*

Capitolo 4

Applicazione lineari e prodotto di matrici

4.1 Applicazioni lineari: definizione e esempi

Inizieremo ora a parlare di funzioni tra spazi vettoriali. Ricordiamo che una funzione $f : X \to Y$ tra due insiemi X (detto *dominio*) e Y (detto *codominio*) è una legge che associa a ogni $x \in X$ un ben preciso elemento di Y, detto *immagine di* x e denotato $f(x)$.
Noi studiaeremo le funzioni $f : V \to W$ in cui dominio e codominio V e W sono spazi vettoriali su un certo campo $\mathbb{K}$, e in particolare studieremo quelle che soddisfano la seguente

Definizione 4.1.1. *Una funzione $f : V \to W$ tra spazi vettoriali si dice* `funzione lineare` *(o applicazione lineare) se verifica le due seguenti proprietà:*

$$f(v + v') = f(v) = f(v') \text{ per ogni } v, v' \in V \tag{4.1}$$

$$f(cv) = cf(v) \text{ per ogni } v \in V \text{ e ogni scalare } c \in \mathbb{K} \tag{4.2}$$

Limitarsi alla funzione lineare può sembrare molto restritivo:

Esempio 4.1.1. *si può vedere che se*[1] *$V = W = \mathbb{R}$, le uniche funzioni lineari $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono quelle del tipo $f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$ fissato.*

Tuttavia, vediamo subito che tra le applicazioni lineari vi sono funzioni di grante impotanza e utilità in geometria e nello sue applicazioni:

Esempio 4.1.2. *Dato lo spazio V_O^2 dei vettori geometrici applicati nel piano, consideriamo la funzione $f : V_O^2 \to V_O^2$ che associa a ogni vettore $\vec{OP}$ il vettore che si ottiene ruotando $\vec{OP}$ di un angolo θ fissato in senso antiorario attorno all'origine O,come nel disegno sequente Ora, come si vede nel disegno sequente,*

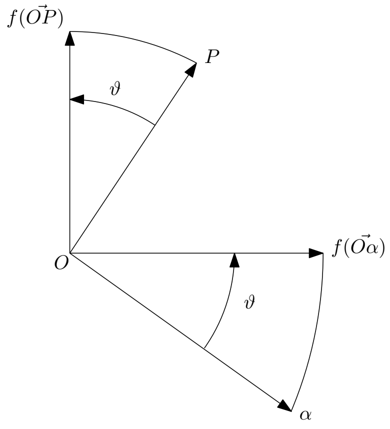


Figura 4.1: $f : V_O^2 \to V_O^2$

dati due vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$, sommarli e poi ruotare il vettore risultante oppure prima ruotarli e poi sommare i vettori ruotati è equivalente, ovvero

[1]Sappiamo che $\mathbb{R}^n$ è una spazio vettoriale di dimensione n, in particolare per $n = 1$ si ottiene $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (che risulta quindi spazio vettoriale come da dimostrazione 1).

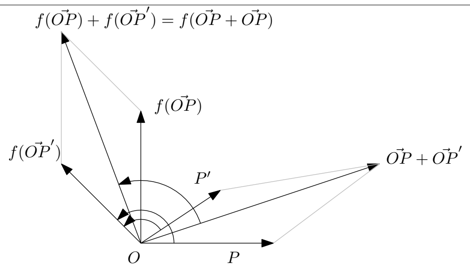


Figura 4.2: $f(\vec{OP}) + f(\vec{OP}^{'}) = f(\vec{OP} + \vec{OP})$

Quindi vale la

$$f(\vec{OP}) + f(\vec{OP}^{'}) = f(\vec{OP} + \vec{OP}) \tag{4.3}$$

che ci dice che questa funzione soddisfala proprietà (4.1) della Definizione 4.1
Analogamente, dato un vettore $\vec{OP}$ e un numero reale c, moltiplicare il vettore per c e poi ruotarlo e poi moltiplicarlo per c è equivalente: Quindi si ha

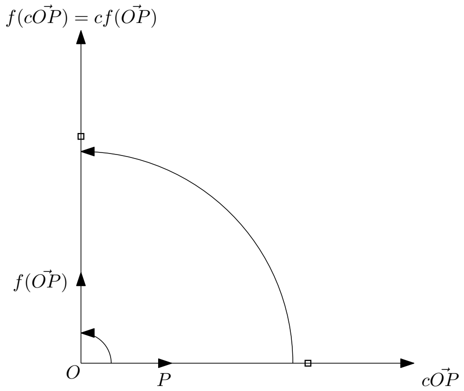
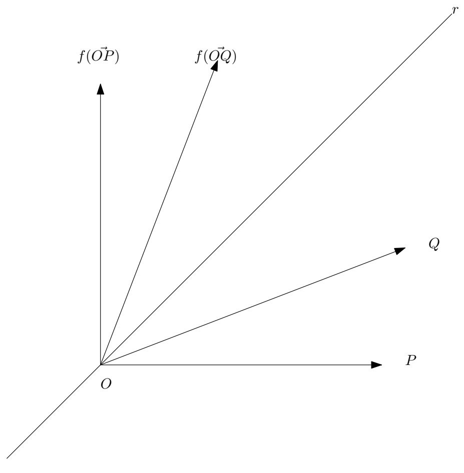


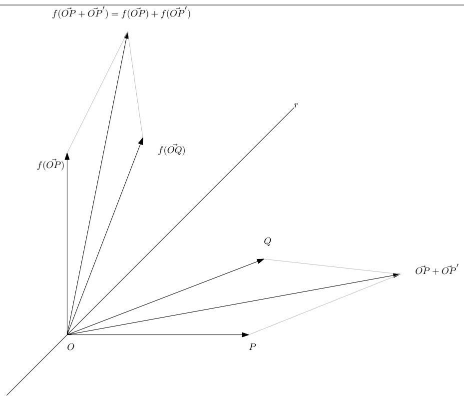
Figura 4.3: $f(c\vec{OP}) = cf(\vec{OP})$

$$f(c\vec{OP}) = cf(\vec{OP}) \tag{4.4}$$

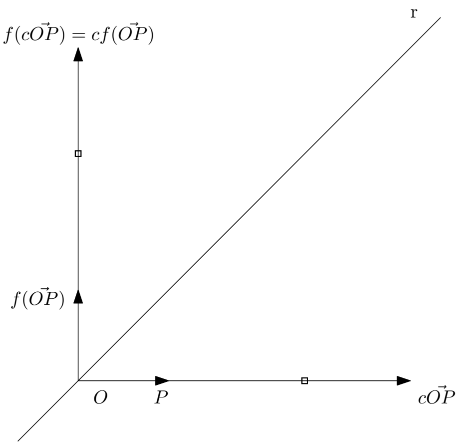
*che ci dice che questa funzione soddisfa anche la proprietà (**??**), della definizione 4.1 – Concludiamo quindi che le rotazioni attorno a O sono applicazioni lineari dallo spazio vettoriale V_O^2 in se stessso.*
Possiamo arrivare alla stessa conclusione anche per altre importanti trasformazioni geometriche: ad esempio, si consideri la riflessione rispetto a una retta r passante per O, che manda ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^2$ nel vettore simmetrico rispetto alla retta, come nel seguente disegno Allora, come già fatto per le rotazioni,



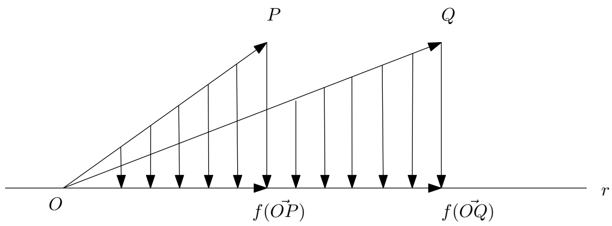
notiamo che, dati due vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OP}^{'}$, sommarli e poi riflettere il vettore risultante oppure prima rifletterli e poi sommare i vettori riflessi è equivalente



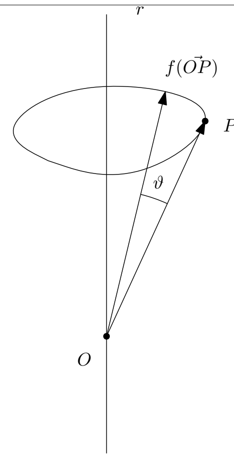
$f\left(\vec{OP}+\vec{OP}'\right) = f\left(\vec{OP}\right)+f\left(\vec{OP}'\right)$ *e dato uin vettore* $\vec{OP}$ *e un numero reale* c*, moltiplicatore il vettore per* c *e poi rifletterlo oppure prima rifletterlo e poi moltiplicarlo per* c *è equivalente*



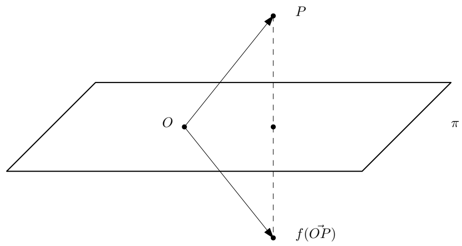
$f(c\vec{OP}) = cf(\vec{OP})$*: quindi concludiamo che anche la riflessione rispetto a una retta ce passa per* O*, avendo le proprietà entrambe le proprietà (4.1) richieste nella Definizione (4.1), è un'applicazione lineare* $f : V_O^2 \to V_O^2$.
Come terzo esempio esempio di applicazione lineare $V_O^2 \to V_O^2$ *citiamo la propiezione ortogonale, che proieta ortogonalmente i vettori su una retta fissata passante per* O.



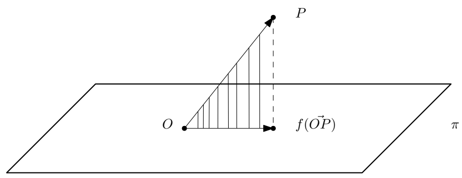
per la quale è difficile vedere che valgono ancora le proprieta citate in (4.1).
Analogamente a quanto visto per rotazioni, riflessioni e proiezioni nel piano, anche le corrispondenti trasformazioni $V_O^3 \to V_O^3$ *dello spazio tridimensionale come da proprietà (4.1) della Definizione 4.1 la rotazione di un angolo fissato* Θ *attorno a una retta data passante per* O *(detta ase della rotazione)*



la riflessione rispetto a un piano passante per O



e la proiezione ortogonale su un piano passante per l'origine O: (Quest'ultima può anche essere vista



come applicazione $f : V_O^3 \to V_O^2$ se vediamo il piano su cui proiettiamo come spazio vettoriale a se stante).

4.2 Matrice associata a un'applicazione lineare

Una delle caratteristiche fondamentali di un'applicazione lineare $f : V \to W$ è che, se gli spazi V e W hanno dimensione finita, allora f può essere rappresentata da una matrice.
Vediamo i dettagli: sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, e siamo $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ basi di V e W rispettivamente. Allora, come sappiamo ogni vettore $v \in V$ può essere identificato con una $n-$upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, quella delle sua coordinate rispetto alla base B_V (ovvero $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$), e analogamente ogni vettore $w \in W$ può rispetto alla base B_W (ovvero $w = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_mw_m$). Con questo identificazioni, la f può essere pensata come una funzione $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ che associa a ogni n-upla. Ci proponiamo di trovare l'espressione esplicita di tale funzione. A questo scopo, sia $(x_1, \dots, x_n)$ la n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$, ovvero come abbiamo ricevuto sopra $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Allora la sua immagine $f(v)$ sarà

$$f(v) = f(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) =$$

(usando le proprietà un'applicazione lineare)

$$= f(x_1v_1) + \cdots + f(x_nv_n) = x_1f(v_1) + \cdots + x_nf(v_n). \tag{4.5}$$

Ora, ciascuno dei vettori $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ che compare nella (**4.5**) appartiene al codominio W della funzione, e quindi potrà essere espresso come combinazione lineare dei vettori $w_1, w_2, \dots, w_m$ della base B_W fissata per W:

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \tag{4.6}$$

$$\vdots$$

$$f(v_1) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \tag{4.7}$$

Ora, sostituendo queste espressioni nella (**4.5**) si ottiene

$$f(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m) =$$

(svolgendo i conti e mettendo in evidenza i vettori)

$$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m \tag{4.8}$$

Questa uguaglianza ci sta dicendo che le coordinate del vettore $f(v)$ rispetto alla base $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ sono date da $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$ e quindi che, tradotta in coordinate, la nostra applicazione lineare può essere identificata con la funzione $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ che associa a ogni n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ la m-upla formata dai coefficienti che appiono nella (**4.8**), ovvero

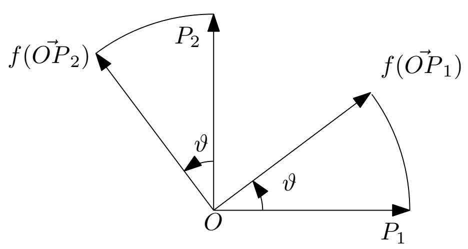
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

I coefficienti che compaiono nella (**4.9**) formano una matrice con m righe e n colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

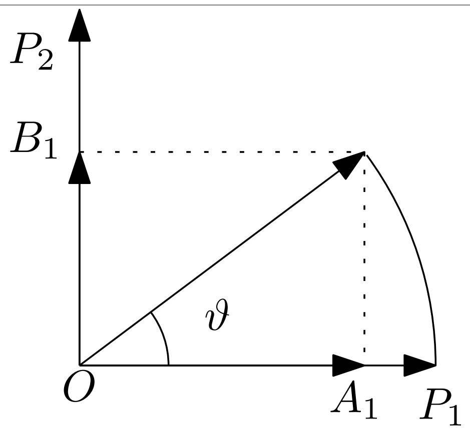
che chiamaremo la *matrice associata all'applicazione lineare rispetto alle basi* B_V *e* B_W. In base alle (**4.6**), ..., (**4.7**) tale matrice può essere definita come *la matrice che ha sulle colonne le coordinate dei vettori* $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ *(ovvero le immagini dei vettori della base* B_V *fissata nel dominio) rispetto alla base* B_W *fissata nel codominio.*
Denoteremo $M_{B_w B_V}(f)$ la matrice associata a un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi B_V e B_W.
Se dominio e codomio dell'applicazione coincidono, ovvero si ha una funzione linerare $f : V \to V$ (tale applicazione si dicono *endomorfismi*), allora è possibile fissare la stessa base B_V sia nel dominio che nel codominio, e calcolare la matrice associata $M_{B_w B_V}(f)$. Come vedremo, la matrice associata a un'applicazione lineare ci dà tutte le informazioni di cui abbiamo bisogno sull'applicazione, e usando gli strumenti imparati nei capitoli precedenti (*rango, determinante*) saremo in grado di capire molte proprietà della funzione data. Prima di fare ciò, vediamo subito alcuni esempi di calcolo della matrice associata.

Esempio 4.2.1. *1. Sia* $f : V_O^2 \to V_O^2$ *la rotazione attorno a* O *di un angolo fissato* Θ[2]. *Per calcolare la matrice associata, fissiamo una base* B *formata da due vettori* $= v_1 = \vec{OP}_1$ *e* $v_2 = \vec{OP}_2$ *dlla stessa lunghezza e perpendicolari tra loro, come nel disegno*



e determiniamo la matrice $M_B(f)$.
A questo scopo, come afferma la difinizione di matrice associata dobbiamo trovare le coordinate di $f(v_1)$ *e* $f(v_2)$ *rispetto a* B, *ovvero esprimere* $f(\vec{OP}_1)$ *e* $f(\vec{OP}_2)$ *come combinazione lineare* $x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$ *dei vetori della base* B. *Iniziamo con* $f(\vec{OP}_1)$: *come si vede nel disegno seguente*

[2] abbiamo visto nel nel paragrafo precedente si tratta di un'applicazione lineare



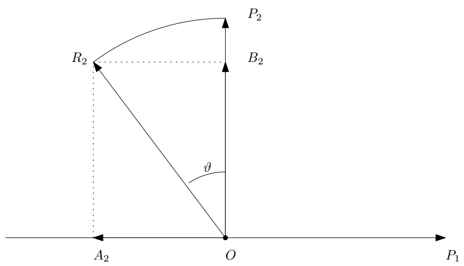
(nel quale stiamo denotando R_1 il punto finale del vettore ruotato $f(\vec{OP_1})$) si ottine $f(\vec{OP_1}) = \vec{OP_1} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1}$, essendo A_1 e B_1 le proiezioni ortogonali di R_1 sui vettori di base. Ora, chiaramente $\vec{OA_1} = x_1\vec{OP_1}$ e $\vec{OB_1} = x_2\vec{OP_2}$, dove x_1 è dato dal rapporto $\frac{|\vec{OA_1}|}{\vec{OP_1}}$ tra la lunghezza di $\vec{OA_1}$ e quella di $\vec{OP_1}$, mentre x_2 è dato dal rapporto $\frac{|\vec{OB_1}|}{\vec{OP_2}}$ tra la lunghezza di $\vec{OB_1}$ e quella di $\vec{OP_2}$. Ma essendo la lunghezza di $\vec{OP_1}$ uguale alla lunghezza di $\vec{OR_1} = f(\vec{OP_1})$[3] possimo dire che x_1 è uguale al rapporto tra la lunghezza del cateto $\vec{OA_1}$ e quella dell'ipotenusa $\vec{OP_1}$ del triangolo rettangolo OR_1A_1, ovvero (esendo il cateto in questione adiacente all'angolo), $x_1 = \cos\Theta$.
Analogamente, poiché $\vec{OP_1}$ ha la stessa lunghezza di $\vec{OP_1}$ e quindi di $\vec{OR_1}$, mentre $\vec{OB_1}$ ha la stessa lunghezza del segmento A_1R_1, si ha

$$x_2 = \frac{|\vec{OB_1}|}{|\vec{OP_2}|} = \frac{|A_1R_1|}{OR_1}$$

ovvere[4], $x_2 = \sin\Theta$. *Riassumendo,*

$$f(\vec{OP_1}) = \vec{OR_1} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = \cos\Theta\vec{OP_1} + \sin\Theta\vec{OP_2} \tag{4.10}$$

Ora, facciamo un ragionamento analogo per determinare $f(\vec{OP_2})$: come si vede nel disegno seguente



(nel quale stiamo denotando R_2 il punto finale del vettore ruotato $f(\vec{OPT})$) si ha $f(\vec{OP_2}) = \vec{OR_2} = \vec{OA_2} + \vec{OB_2}$. Ora, chiaramente $\vec{OA_2} = -x_1\vec{OP_1}$, dove x_1 è dato dal rapporto $\frac{|\vec{OA_2}|}{|\vec{OP_1}|}$ tra la lunghezza di $\vec{OA_2}$ e quella di $\vec{OP_1}$ (il segno meno è dovuto dal fatto che $\vec{OA_2}$ ha verso opposto rispetto a $\vec{OP_1}$) e $\vec{OB_2} = x_2\vec{OP_2}$, dove x_2 è dato dal rapporto $\frac{|\vec{OB_2}|}{|\vec{OP_2}|}$ tra la lunghezza di $\vec{OB_2}$ e quella di $\vec{OR_2}$. Ma essendo la lunghezza di $\vec{OP_1}$ uguale alla lunghezza di $\vec{OP_1}$ uguale alla lunghezza di $\vec{OP_2}$ e quindi di $\vec{OR_2} = f(\vec{OP_2})$ (sempre perché la rotazione non modifica la lunghezza dei vettori), mentre, la lunghezza di $\vec{OA_2}$ è uguale alla lunghezza del segmento R_2B_2, possiamo dire che x_1 è uguale al rapporto tra la lunghezza del cateto R_2B_2 e quella dell'ipotenusa OR_2 del triangolo rettangolo OR_2B_2, ovvero (essendo il cateto in questione opposto all'angolo), $x_2 = \cos\Theta$.
Riassumendo,

$$f(\vec{OP_2}) = \vec{OR_2} = \vec{OA_2} + \vec{OB_2} = -\sin\Theta\vec{OP_1} + \cos\Theta\vec{OP_2} \tag{4.11}$$

[3]La rotazione non modifca la lunghezza dei vettore, essi restano inveriati anche se cambiano la loro angolazione.
[4]Essendo il rapporto tra il cateto A_1R_1, opposto all'angolo Θ, e l'ipotenusa OR_1 del triangolo rettangolo OR_1A_1

*Quindi, (**4.10**) e (**4.11**) ci dicono che la matrice associata a f rispetto a B avrà sulla prima colonna* $(\cos\Theta, \sin\Theta)$[5] *e sulla seconda colonna* $(-\sin\Theta, \cos\Theta)$ *(le coordinate di $f(\vec{OP})$ rispetto a B), ovvero*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

*Come visto nel (**4.9**), abbiamo allora che la rotazione, in coordinate, si traduce nella funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da*

$$(x_1, x_2) \mapsto (\cos\Theta x_1 - \sin\Theta x_2, \sin\Theta x_1 + \cos\Theta x_2) \tag{4.13}$$

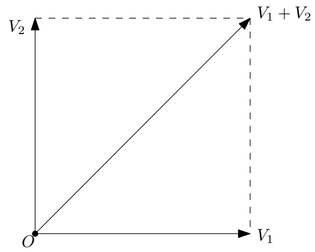
Ad esempio, scegliamo $\Theta = \frac{\pi}{4}$ e sostituiamo in (4.12) *e* (4.13), *ottenendo rispettivamente (si ricordi che $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

e anche

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2, \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2\right) \tag{4.14}$$

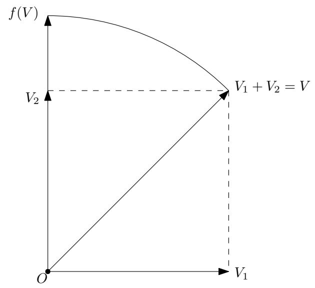
Per illustrare come questa semplice funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresenti effettivamente la rotazione di $\frac{\pi}{4}$, prendiamo ad esempio il vettore $v = v_1 + v_2$, che come si vede nel disegno seguente coincide con la diagonale del quadrato che ha v_1 e v_2 come lati:



*Tale vettore ha quindi come coordinate rispetto a B la coppia $(x_1, x_2) = (1, 1)$. In base alla (**4.14**), le coordinate di $f(v)$ rispetto a B sono date da*

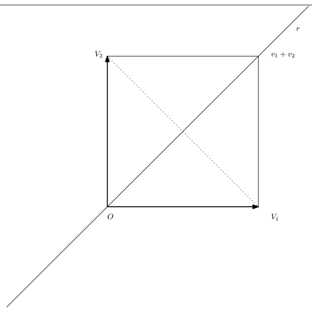
$$\frac{\pi}{4} * 1 - \frac{\pi}{4} * 1, \frac{\pi}{4} * 1 + \frac{\pi}{4} * 1 = (0, \sqrt{2})$$

ovvero deve essere $f(v) = 0v_1 + \sqrt{2}v_2 = \sqrt{2}v_2$.
In effetti, tale risultato ottenuto analicamente in coordinate è confermato dall'analisi grafica, che ci dice che il vettore $f(v)$ che si ottiene ruotando la diagonale v del quadrato di $\frac{\pi}{4}$ è proprio proporzionale al vettore v_2 e la sua lunghezza è proprio $\sqrt{2}$ volte la lunghezza di v_2 (in quasto v coincideva con la diagonale del quadrato di lati v_1 e v_2):



2. *Sia $V = V_O^2$ lo spazio vettoriale dei vettori applicati in un punto O nel piano e sia $f : V_o^2 \to V_O^2$ la proiezione ortogonale su una retta fizzata r passante per O*[6]*.*
   Ora, notiamo che quando proiettiamo v_1 ortogonalmente su r, otteniamo un vettore v che sta sulla retta ed è lungo come metà della diagonale del quadrato i cui lati sono v_1 e v_2: essendo tale diagonale, per definizione di somma tra vettori, coincidente con $v_1 + v_2$, abbiamo quindi che $f(v_1) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$; analogamente, come si vede dal disegno, anche proiettando v_2 sulla retta di ottiene lo stesso vettore v, quindi si ha anche $f(v_2) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$. Si vede

[5] le coordinate di $f(\vec{OP_1})$ rispetto a B
[6] abbiamo visto nel paragrafo precedente che si tratta di un'applicazione lineare



quindi che le coordinate di $f(v_1)$ rispetto a B sono $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, e anche le coordnate di $f(v_2)$ rispetto a B sono $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$: disponendo tali coordinate rispettivamente sulla prima e sulla seconda colonna, come previsto dalla difinizione di matrice associata, si ottiene

$$M_B(f)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

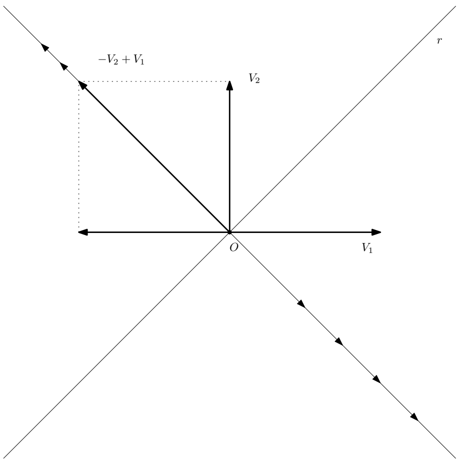
e la funzione $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ corrispondente

$$(x_1,x_2)\mapsto\left(\tfrac{1}{2}x_1+\tfrac{1}{2}x_2,\tfrac{1}{2}x_1+\tfrac{1}{2}x_2\right) \tag{4.15}$$

ci dà una rappresentazione in coordinarte della proiezione.
Ad esempio, il vettore $v=-v_1+v_2$, che ha coordinate $(-1,1)$ rispetto a B, viene mandata in base alla ***(4.15)*** *nel vettore di coordinate*

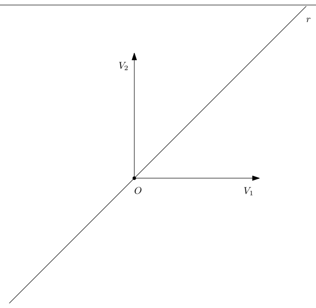
$$\left[\tfrac{1}{2}(-1)+\tfrac{1}{2}1,\tfrac{1}{2}(-1)+\tfrac{1}{2}1\right]=(0,0)$$

ovvero nel vettore nullo $\vec{OO}$. Infatti, come si vede dal seguente disegno, tale vettore appartiene alla retta passante per O e ortogonale a r, e i vettori che giacciono su questa retta vengono chiaramnte proiettati sul vettore nullo $\vec{OO}$.



3. *Come ultimo esempio, prendiamo come funzione $f:V_O^2\to V_O^2$ la riflessione rispetto a una retta fissata r passante per O, ovvero l'endomorfismo che associa a ogni vettore $\vec{OP}$ il suo simmetrico rispetto a r[7]. Per calcolane la matrice associata $M_B(f)$, consideriamo la stessa base $B=\{v_1,v_2\}$ usata nell'esempio precedente.*

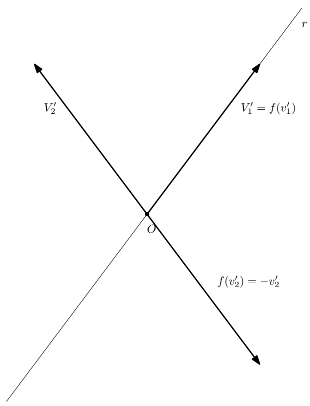
[7]Sappiamo dal primo paragrafo che si tratta di un'applicazione lineare



e notiamo che quando riflettiamo v_1 rispetto a r otteniamo v_2, ovvero $f(v_1) = v_2$, analogamente quando riflettiamo v_2 rispetto a r, otteniamo v_1 ovvero $f(v_2) = v_1$.
Quindi, riscrivendo $f(v_1) = v_2$ come $f(v_1) = 0v_1 + 1v_2$ vediamo che le coordinate di $f(v_1)$ rispetto a B sono $(0, 1)$, e analogamente riscrivendo $f(v_2) = v_1$ come $f(v_1) = 1v_1 + 0v_2$ vediamo che le coordinate di $f(v_2)$ rispetto a B sono $(1, 0)$: disponendo tale coordinate in colonna, come previsto dalla definizione della matrice associata, si ottiene

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se dato sempre lo stesso endomorfismo, consideriamo invece la base $B' = \{v_1', v_2'$ come nel disegno seguente allora si ha che $f(v_1') = v_1'$ (il vettore v_1' sta sulla retta e quindi la riflessione rispetto alla



retta lo lascia invariato) e $f(v_2') = -v_2'$ (il vettore v_2' è perpen dicolare alla fetta quindi riflettendolo esso cambia verso), cioè $f(v_1') = 1v_1' + 0v_2'$ e $f(v_2) = 0v_1' + (-1)v_2'$ e quindi

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo esempio illustra il fatto, ovvio che la matrice associata dipenda dalla scelta delle basi.

4.3 Iniettività e suriettività delle applicazioni lineari

Il primo problema che affronteremo sulla applicazioni lineari è determinare quando una tale funzione è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

4.3.1 Richiami generali

Ricordiamo che una funzione $f : A \to B$ tra due insiemi A e B si dice *suriettiva* se ogni elemento del codominio B risulta essere immagine di qualche elemento di A (ovvero, se per ogni $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$).
Ad esempio, delle funzioni rappresentate nel seguente disegno, la prima non è suriettiva[8], mentre, la seconda si. Un modo alternativo di dire che una funzione èsuriettiva è fare riferimento alla cosidetta *immagine* $I_m(f)$ di f: per definizione, l'immagine di una funzione $f : A \to B$ è il sottoinsieme di B costituito da futti gli elementi che sono immagine di qualche elemento di A (in riferimento ai disegni, quegli elementi "raggiunti da una freccia che provviene da A"), ovvero

$$I_m(f) = \{b \in B | b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\}$$

[8] L'elemento $c \in B$ non è immagine di nessun elemento di A

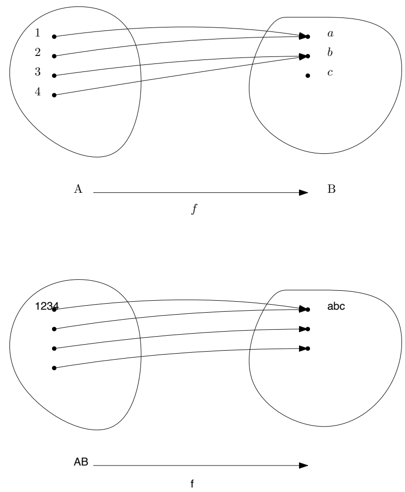
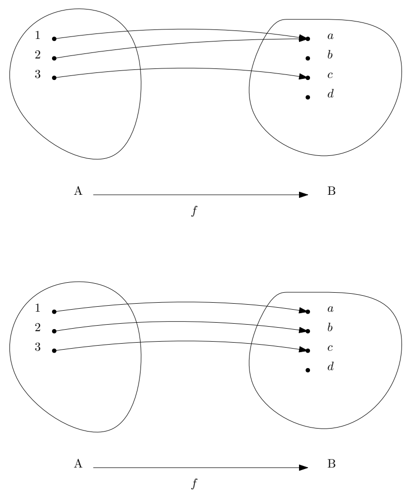


Figura 4.4: differenza tra iniettivo e suriettivo

Ad esempio, la funzione sopra nel disegno precedente ha $I_m(f) = \{a, b\}$, mentre la funzione sotto ha $I_m(f) = \{a, b, c\}$ç una funzione è suriettiva esattamente quando $I_m(f) = B$, ovvero l'immagine coincide con tutto il codominio[9].



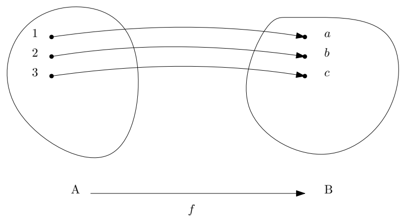
La nozione di iniettività può essere riformata tramite il concetto di *controimmagine*: dato un elemento b del codomiono B, la sua controimmagine, denotata $f^{-1}(b)$, è l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno b come immagine, ovvero

$$f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}$$

Dal momento che una funzione è iniettiva quando non esistono dhe elementi diversi che hanno la stessa immagine, dire che una funzione è iniettiva quivale a dire che tutte le controimmagini che non siano vuote[10] hanno un solo elemento.
Ad esempio, per la funzione sofra nel disegno precedente si ha $f^{-1}(a) = \{1, 2\}, f^{-1}(b) = \emptyset, f^{-1}(c) = \{3\}$: essa non è iniettiva in quanto la controimmagine di a ha due elementi.
Per la funzione sotto, invece, si ha $f^{-1}(a) = \{1\}, f^{-1}(b) = \{2\}, f^{-1}(c) = \{3\}, f^{-1}(d) = \emptyset$: essa è iniettiva in quanto le controimmagini non vuote hanno tutte un solo elemento.
Infine, una funzione si dice *biiettiva* se è sia inittiva che suriettiva. Ad esempio, la funzione rappresentata nel sequente disegno è biiettiva.

[9] Dire $I_m(f) = B$ significa in effetti dire che ogni elemento di B è immagine di quelche elemento di A

[10] se la funzione non è suriettiva, ci saranno elementi $b \in B$ tali che non esiste nessun $a \in A$ con $f(a) = b$ e quindi la cui controimmagine $f^{-1}(b)$ non ha elementi.



4.3.2 Suriettività delle applicazione lineari

Abbiamo detto che una funzione $f : A \to B$ è suriettiva se e solo se per ogni elemento di $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$, ovvero equivalentemente se e solo se la sua immagine $I_m(f)$ coincide con tutto il codominio.
Nel caso di un'applicazione lineare $f : V \to W$, vale la seguente importante

Proposizione 4.3.1. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $I_m(f)$ è un sottospazio vettoriale di W.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che $I_m(f)$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari. Per la prima proprietà dobbiamo prendere $w, w' \in I_m(f)$ e vedere se $w + w' \in I_m(f)$. Ora, se $w, w' \in I_m(f)$, per definizione di $I_m(f)$ significa che esistono un vettore $v \in V$ tale che $w = f(v)$ e un vettore $v' \in V$ tale che $w' = f(v')$ e un vettore $v' \in V$ tale che $w = f(v)$ e un vettore $v' \in V$ tale che $w' \in f(v')$. Ma allora, sfruttando il fatto che f è lineare, si ha

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v * v')$$

che ci dice che anche $w + w'$ è immagine di un elemento del dominio (cioè $v + v'$) e quindi $w + w' \in m(f)$. Per la chiusura rispetto al prodotto per scalari, dobbiamo verificare che se $w \in I_m(f)$ e $c \in \mathbb{K}$, allora $cw \in I_m(f)$. Ma, come prima, se $w \in I_m(f)$ allora per definizione di $I_m(f)$ esiste un vettore $v \in V$ tale che $w = f(v)$, e quindi, usando sempre il fatto che f è linerare,

$$cw = cf(v) = f(cv)$$

che ci dice che anche cw è immagine di un elemento del dominio (cioè cv) e quindi $cw \in I_m(f)$. □

Il fatto che $I_m(f)$ sia un sottospazio vettoriale ci dice che per determinarla possiamo trovarne un sistema di generatori o una base. Questo si fa facilmente grazie alla seguente

Proposizione 4.3.2. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e siamo $v_1, \dots, v_n$ generatori V. Allora le immagini $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $I_m(f)$ (in simboli, $I_m(f) = [f(v_1), \dots, f(v_n)]$)*

Dimostrazione. Per definizione di generatori, dobbiamo verificare che ogni vettori $w \in I_m(f)$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$. Ora, sappiamo che un vettore $w \in I_m(f)$ è tale che $w \in f(v)$ per qualche $v \in V$. Ma essendo per ipotesi $v_1, \dots, v_n$ generatori di V, il vettore v potrà essere scrittocome loro combinazione lineare $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Quindi, sfruttando la linearità di f si ha

$$w = f(v) = f(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + \cdots + x_nf(v_n)$$

che dimostra prprio che w si scrive come combinazione lineare di $f(v_1), \dots, f(v_n)$, come volevamo. □

A questo punto, per determinare se un'applicazione lineare $f : V \to W$ è suriettiva, basta scegliere dei generatori $v_1, \dots, v_n$ di V, prendere le loro immagini $f(v_1), \dots, f(v_n)$ che, come abbiamo appena visto, formano un insieme di generatori di $I_m(f)$, e poi estrarre da quest'ultimo insieme una base eliminando

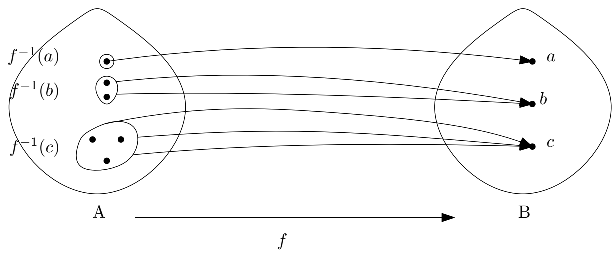
gli eventuali vettori che sono dipendenti dai rimanenti: contando i vettori della base ottenuta, sapremo la dimensione di $I_m(f)$ e quindi f sarà suriettiva se e solo se[11] $dim(I_m(f)) = dim(W)$.
Vediamo come tale criterio di suriettività si rivela particolarmente utile e di semplice applicazione nel caso dell'applicazioni lineare $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ determinata da una matrice A, ovvero della forma data dalla (4.9)[12].
Ora, se come generatori del dominio $V = \mathbb{K}^n$ scegliamo i vettori della base canonica $v_1 = (1.0. \dots, 0), v_2 = (0, 1, \dots, 0), v_n = (0, 0, \dots, 1)$, dalla (4.9) si ha

$$f(v_1) = L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, f(v_2) = L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, f(v_n) = L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

cioè $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sono le colonne $C_1, C_2, \dots, C_n$ della matrice A che determina l'applicazione. Quindi, in base alla Proposizione **2**, si ha $I_m(f) = \{C_1, c_2, \dots, C_n\}$ e la funzione è suriettiva se e solo se $dim\{C_1, C_2, \dots, C_n\} = dim(\mathbb{K}^m) = m$. Ma poiché la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di una metrice è per definizione il suo rango, concludiamo che *un'applicazione del tipo (4.9) è suriettiva se e solo se il rango di A è uguale a m.*

4.3.3 Iniettività di applicazioni lineari

Mentre nel caso della suriettività abbiamo visto che per verificare se una funzione f è suriettiva basta controllare un solo sottoinsieme del codomonio (l'immagine $I_m(f)$), in generale per verificare se f è iniettiva dobbiamo a priori controllare tutte le controimmagini degli elementi del codominio e verificare che queste, quando non sono vuote, hanno un solo elemento.
Ora, per una generica funzione $f : A \to B$ le controimmagini degli elementi di B sono sottoinsiemi del tutto indipendenti tra loro: come nel seguente disegno



può accadere che un elemento abbia controimmagine costituine costituita da un solo elemento ma altri abbiamo controimmagine costituita da più elementi. Vedremo ora invece che le applicazioni lineari hanno il particolare comportamento per cui le controimmagini degli elementi di B, se non sono vuote, o sono *tutte* costituite da un solo elemento (nel quel caso la funzione non è iniettiva): quindi basta controllare una sola controimmagine non vuota per capire come sono fatte tutte le altre. Più precisamente abbiamo la seguente

Proposizione 4.3.3. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora valgono i seguenti fatti:*

(i) *la controimmagine $f^{-1}(\bar{0}) = \{v \in V | f(v) = \bar{0}\}$ del vettore nullo di W è un sottomatrice vettoriale di V (detto nucleo di f denotato $N(f)$)*

(ii) *per ogni $w_0 \in W$, la controimmagine $f^{-1}(w_0)$ di w_0, non è vuota, è un sottospazio affine di V, e più precisamente*

$$f^{-1}(w_0) = v_0 + N(f) = \{v_0 + n | n \in N(f)\}$$

dove v_0 è un qualunque elemento fissato d $f^{-1}(w_0)$.

Dimostrazione. Per dimostrare (i), iniziamo con l'osservare che il nucleo di f non è mai vuoto, in quanto il vettore nullo di V (che, con un abuso di notazione, denotiamo ancora $\bar{0}$) è sicuramente tale che $f(\bar{0}) = \bar{0}$: infatti, possiamo il vettore nullo $\bar{0}$ di V come $0v$ (dove v è un qualunque vettore di V) e quindi, sfruttando la linearità di f, si ha $f(\bar{0}) = f(0v) = 0f(v) = \bar{0}$.
Siano v, v' due vettori di $N(f)$, cioè $f(v) = \bar{0}$. Allora, essendo f lineare,

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

[11] Questa affermazione è giustificato dal fatto, che non abbiamo dimostrato, che se S è un sottospazio vettoriale di una spazio vettoriale V, allora $dim(S) \leq dim(V)$ e le dimensioni coincidono se e solo se $S = V$.
[12] Come sappiamo, ogni applicazione lineare puo'essere identificata con una tale funzione grazie alla matrice associata

e quindi anche $v+v' \in N(f)$: questo ci dice che $N(f)$ è chiuso rispetto alla somma. Dati invece un vettore v del nucleo[13] e uno scalare $c \in \mathbb{K}$, allora, sempre per la linearità di f,

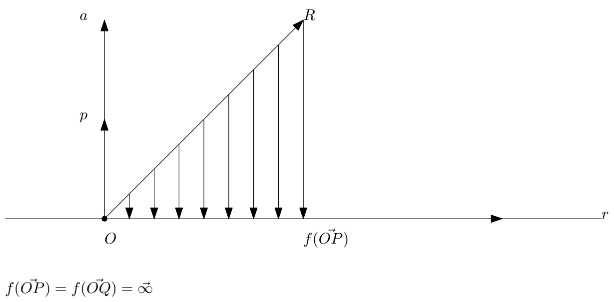
$$f(cv) = cf(v) = c\bar{0} = \bar{0}$$

ovvero $cv \in N(f)$: questo ci dice che $N(f)$ chiuso rispetto al prodotto per scalari – La *(i)* è dimostrata.
Per dimostrare la *(ii)*, ovvero l'ugualianza $v = N(f) = f^{-1}(w_0)$, dobbiamo dimostrare che ogni elemento di $v_0 + N(f)$ sta nella controimmagine $f^{-1}(w_0)$ appartiene a $v_0 + N(f)$ (ovvero l'inclusione opposta $f^{-1}(w_0)$). Per dimostrare la prima inclusione, consideriamo il generico elemento di $v_0 = N(f)$, cioè, per definizione di sottospazio affine, un vettore v del tipo $v = v_0 + n$, con $n \in N(f)$. Allora

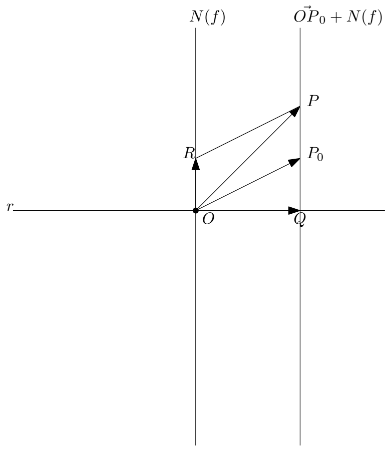
$$f(v) = f(v_0 + n) = f(v_0) + f(n) = f(v_0) = \bar{0} = f(v_0) = w_0$$

(nella seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che f è lineare, nella terza il fatto che n appartiene al nucleo di f e quindi $f(n) = \bar{0}$). Abbiamo dimostrato che $f(v) = w_0$, cioè v appartiene alla controimmagine $f^{-1}(w_0)$ di w_0, come volevamo.
Per dimostrare la seconda inclusione, consideriamo un qualunque elemento v della controimmagine di w_0, cioè $f(v) = w_0$. Essendo $w_0 = f(v_0)$, si ha quindi $f(v) = f(v_0)$, da cui, portando a primo membro, $f(v) - f(v_0) = \bar{0}$. Essendo f lineare, quest'ultima uguaglianza può essere riscritta $f(v - v_0) = \bar{0}$, il che ci dice che il vettore $v - v_0$ appartiene al nucleo $N(f)$ di f. Ma allora, osservando che chiaramente $v = v_0 + (v - v_0)$, vediamo che v si decompone proprio come somma di v_0 e di un elemento del nucleo $N(f)$, $v \in v_0 + N(f)$, come volevamo. □

La proposizione appena dimostrata afferma in pratica che tutte le controimmagini non vuote di un'applicazione lineari f sono "copie" o traslati del nucleo $N(f)$: per illustrare ciò, consideriamo ad esempio lo spazio V_0^2 dei vettori nel piano applicati in = e l'applicazione lineare $f : V_O^2 \to V_O^2$ data dalla proiezione ortogonale su una retta r fissata.
Come si vede, un vettore viene proiettato sul vettore nullo $\vec{OO}$ (cioè appartiene al nucleo $N(f)$ della funzione) se e solo se appartiene alla retta passante per O e ortogonale a r, come i vettori $\vec{OP}.\vec{OQ}$ del disegno sequente



Ma, come sappiamo, i vettori che stanno su una retta per O formano un sottospazio vettoriale: questo conferma che il nucleo N(f) è un sottospazio vettoriale. Per verificare ora che le contro immagini non vuote sono copie traslati del nucleo, consideriamo come nel disegno seguente



Un qualunque vettore $\vec{OP}$ che stia nell'immagine di f, diciamo $\vec{OQ} = f(\vec{OP}_0)$: la sua controimmagine, oltre che da $\vec{OP}_0$, è data da tutti i vettori $\vec{OP}$ che vengono proiettati su $\vec{OQ}$, cioè, come si vede nel disegno, tutti i vettori che hanno secondo estremo sulla retta ortogonale a r e passante per Q.

[13] quindi $f(v) = \bar{0}$

Ognuno di tali vettori $\vec{OP}$ si decompone copme somma di $\vec{OP}_0$ più un vettore $\vec{OR}$ appartenente al nucleo $N(f)$: quindi, come previsto dalla Proposizione <++>, la controimmagine $f^{-1}(\vec{OQ})$ è dato dal sottospazio affine $\vec{OP}_0 + N(f)$, traslato della ortogonale a r e passante per O che rappresenta il nucleo. La Proposizione <++> ha come immediato corollario il seguente criterio necessario e sufficiente di iniettivi per un'applicazione lineare:

Corollario 4.3.1. *Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $N(f) = \{\bar{0}\}$.*

Dimostrazione. Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se la controimmagine di ongi elemento $w_0 \in W$, se non è vuota[14], contiene un solo elemento. Ma poiché, come abbiamo visto nella proposizione, la controimmagine di ogni elemento w_0 dell'immagine è del tipo $v_0 + N(f)$, allora questa conterrà un solo elemento v_0 esattamente quando il nucleo contiene il solo vettore nullo $\bar{0}$m cioè $N(f) = \{\bar{0}\}$. □

Notiamo che il fatto che il nucleo sia un sottospazio vettoriale ci ditce che possiamo parlare di base e dimensione del nucleo, e che possiamo riformulare il criterio di inietività per un'applicazione lineare f con segue: f *iniettiva se e solo se* $\dim(N(f)) = 0$ (infatti, un sottospazio ha dimensioni 0 se e solo se è $\bar{0}$). Riassumendo quando visto finora, abbiamo dimostrato che per verificare l'applicazione lineare f si deve guardare la dimensione $\dim(N(f))$ del nucleo $N(f)$ di f, mentre per verificare la suriettività di f si deve guardare la dimensione $\dim(I_m(f))$ dell'immagine $I_m(f)$ di f.
Vediamo ora che in realtà è sufficiente calcolare calcolare una sola di queste dimensione per determinare automaticamente anche l'altra. Infatti, queste dimensioni sono collegare dalla formula del seguente risultato, detto anche *teorema della dimensione* o *teorema nullità più rango.*

Teorema 4.3.1. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con* $\dim(V)$ *finita. Allora*

$$\dim(N(f)) + \dim(I_m(f)) = \dim(V). \tag{4.16}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\dim(N(f)) = s$ e sia $v_1, \dots, v_s$ una base di $N(f)$. Se $\dim(V) = n$, allora possiamo[15] aggiungere alla base del nucleo $n-s$ vettori $v_{s+1}, \dots, v_n$ in modo che $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ sia una base di V.
Ora, dimostreremo che che le imagini $f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$ di questi ultimi $n - s$ vettori formano una base di $I_m(f)$: questo implicherà che $\dim(I_m) = n - s$, che assieme a $\dim(N(f)) = s$ e $\dim V = n$ ci dà $\dim(N(f)) + \dim(I_m(f)) = s + (n - s) = n = \dim(V)$, cioè la formula.
Per dimostrare che $\{f(v_s + 1), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $I_m(f)$, dobbiamo dimostrare che i vettori generano $I_m(f)$ e sono linearmente indipendenti. In effeti, noi sappiamo che $v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n$ una base ee quind un insieme di generatori di V, le immagini $f(v_1), \dots, f(v_s), f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$ generano $I_m(f)$; ma in questi generatori i primi $f(v_1), \dots, f(v_s)$ sono uguali al vettore nullo $\bar{0}$, in quanto $v_1, \dots, v_s$ sono vettori della base del nucleo fissata inizialmente. Quindi possiamo eliminarli dalla lista $f(v_1), \dots, f(v_s), f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$ dei generatori, concludendo che per generare $I_m(f)$ bastano $f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$, che è quello che volevamo.
Ora dimostriamo che $f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti. Bobbiamo dimostrare che se $c_{s+1}f(v_{s+1}) + \dots + c_n f(v_n) = \bar{0}$ allora $c_{s+1} = 0, \dots, c_n = 0$.
In effetti, sfruttando il fatto che f è lineare possiamo riscrivere l'uguaglianza $c_{s+1}f(v_{s+1}) + \dots + c_n f(v_n) = \bar{0}$ come $f(c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_n v_n) = \bar{0}$: ma questa uguaglianza ci dice che il vettore $c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_n v_n$ appartiene al nucleo $N(f)$, e quindi esso può essere scritto come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_s$ (che del nucleo costituiscono una base):

$$c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_n v_n = c_1 v_1 + \dots + c_s v_s.$$

Portando tutto a primo membro in questa uguaglianza si ottiene

$$c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_n v_n - c_1 v_1 - \dots - c_s v_s = \bar{(}0)$$

ovvero una combinazione lineare uguale al vettore nullo dei vettori $v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n$: essendo questi vettori indipendenti (sono i vettori che formano la base completata di V) necessariamente tutti i coefficiente $c_1, \dots, c_s, c_{s+1}, \dots, c_n$ sono uguale a zero, e in particolare $c_{s+1} = 0, \dots, c_n = 0$, che è quello che si restava da dimostrare.

□

[14] Cosa che succede se w_0 non st nell'immagine dell'applicazione
[15] Data una base di un sottospazio, questa possa sempre essere completata a una base di tutto lo spazio aggiungendo dei vettori è in effetti un teorema detto *teorema del completamento*.

Teorema di completamento a base

Teorema 4.3.2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n definito su un campo $\mathbb{K}$ e siano $v_1, v_2, \ldots, v_p$, vettori linearmente indipendenti $V m$ con $p < n$.*
Esistono allora $n-p$ vettori $w_1, w_2, \ldots, w_{n-p}$ tali che l'insieme

$$\left(v_1, v_2, \ldots, v_p, w_1, w_2, \ldots, w_{n-p}\right)$$

sia una base di V.

Dimostrazione. Sia E il sottospazio vettoriale di V generato dai linearmente indipendenti $v_1, v_2, \ldots, v_p$, cioè $E := Span(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ – Osserviamo che i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_p$ non possono generare tutto lo spazio V.
Se così fosse, $v_1, v_2, \ldots, v_p$ costituirebbero un sistema di generatori linearmnte indipenti di V, e quindi ne formerebbero una base. Di conseguenza sarebbe $p = n$, ma ciò contraddirebbe l'ipotesi $p < n$.
La precedente osservazione assicura l'esistenza di un vettore $w_1 \in V$ tale che $w_1 \notin E$. Dal momento che

$$w_1 \notin E := Span(v_1, v_2, \ldots, v_p)$$

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_p$, w_1 sono linearmente indipendenti. E

$$E := Span(v_1, v_2, \ldots, v_p) \subset Span(v_1, v_2, \ldots, v_p)$$

Ora:

- se $p + 1 = n = \dim(V)$ allora i vettori

  $$v_1, v_2, \ldots, v_p, w_1$$

  costituiscono una base di V. Essi infatti formano un insieme di generatori V linearmnte indipententi, e ciò conclude la dimostrazione.

- Se, invece, $p + 1 < m$ possiam,o ripetere quanto fatto poc'anzi e trovare un altro vettore $w_2 \in V$ tale che $w_2 \notin E$ e tale che i $p + 2$ vettori

  $$v_1, v_2, \ldots, v_p, w_1, w_2$$

  siano linearmente indipendenti.

Continuando in questo modo, dopo $n-p$ passi si compone una base di V che contiene i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_p$, ed è proprio quanto volevamo dimostrare. □

Vediamo ora alcune notevoli conseguenze della formula (**4.16**):

Corollario 4.3.2. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con $\dim(V)$ finita. Allora valgono le tre seguenti:*

(1) *se $\dim(V) > \dim(W)$ allora f non è iniettiva*

(2) *se $\dim(V) < \dim(W)$ allora f non è suriettiva*

(3) *se $\dim(V) = \dim(W)$ allora f è iniettiva se e solo se è suriettiva*

Dimostrazione. Dimostriamo la (1). Per assurdo, se la funzione f fosse iniettiva, il suo nucleo, come abbiamo visto nel corollario 2, sarebbe nullo, ovvero $\dim(N(f)) = 0$. Sostituendo questo nella formula (4.16), avremmo $\dim(V) = \dim(I_m(f))$. Ma essendo $I_m(f)$ un sottospazio di W, la sua dimensione è sicuramente minore o uguale a $\dim(W)$, e quindi concluderemmo $\dim(V) \leq \dim(W)$, contro l'ipotesi che $\dim(V) > \dim(W)$. Quindi f non può essere iniettiva.
Per dimostrare la (2), supponiamo per assurdo che la funzione f sia suriettiva: allora, essendo $I_m(f) = W$, avremmo $\dim(I_m(f)) = \dim(N(f))$ che, sostituita nella formula (4.16), ci dà $\dim(V) = \dim(W) + \dim(N(f))$. Poiché $\dim(N(f))$ è un numero reale positivo o nullo, questa ugualianza implica $\dim(V) \geq \dim(W)$, contro l'ipotesi che $\dim(V) < \dim(W)$. Quindi f non può essere suriettiva.
Infine, dimostriamo la (3). Se f è iniettiva, $dim(N(f)) = 0$ e quindi la formula (4.16) si riduce a $\dim(I_m(f)) = \dim(V)$. Essendo per ipotesi la dimensione di V uguale a quella di W, questo significa che $\dim(I_m(f)) = \dim(W)$, che implica che f è iniettiva.
Vicersa, se f è suriettiva, $\dim(I_m(f)) = \dim(W)$ e quindi la formula (4.16) si riduce a $\dim(V) = \dim(N(f)) + \dim(W)$. Essendo per ipotesi la dimensione di V uguale a quella di W, il primo membro $\dim(V)$ si semplifica con l'addendo $\dim(W)$ del secondo membro, e quindi rimane $0 = \dim(N(f))$, che implica che f è iniettiva. □

Ad esempio, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non può mai essere iniettiva (ma può essere suriettiva); un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ non è sicuramente suriettiva (ma può essere iniettiva); un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o è contemporaneamente iniettiva e suriettiva oppure nessuno dei due casi previsti: basta mostrare che vale una delle due proprietà e automaticamente varrà anche l'altra. Ora, supponiamo di aver determinato grazie ai risultati precedenti che un'applicazione lineare f data è biiettiva[16]: nel prossimo paragrafo ci porremo (e risolveremo) il problema di determinazione la sua *inversa*.

4.4 Composizione di applicazioni, inversa e prodotto di matrici

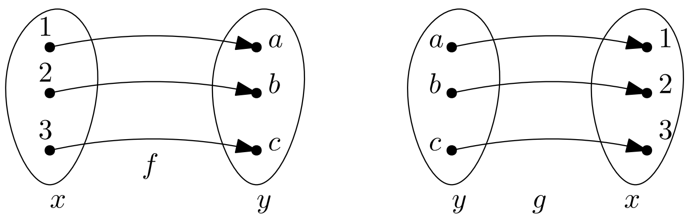
Ricordiamo che, data una funzione $f : X \to Y$ tra due insiemi, questa si dice *invertibile* se esiste una funzione $g : Y \to X$ (detta appunto l'inversa di f) tale che

$$f \circ g = id_y, \quad g \circ f = id_x \tag{4.17}$$

dove stiamo denotando con id la funzione che manda ogni elemento in sestessa[17] e con il simbolo $\circ$ la composizione di funzioni, ovvero l'operazione che consiste nell'applicazione prima una funzione e poi l'altra: $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, tale che che *il codominio della prima coincida con il dominio della seconda*, allora, per ogni elemento $x \in X$, possiamo applicare prima f ottenendo $f(x) \in Y$, e poi del momento che Y è anche il dominio della g possiamo applicare la g a $f(x)$, ottenendo $g(f(x))$. In questo modo otteniamo una nuova funzione che associa a ogni elemento di X un elemento di Z:

$$\underset{x \to g(f(x))}{f : x \to Z}$$

(si nota che a causa dell'ordine in cui appaiono le funzioni in $g(f(x))$, la nuova funzione ottenuta si denota $f \circ f$ e si legge "g composto f", benché si intenda che stiamo applicando prima la f e poi la g).
Quindi le (4.17) significano cheuna funzione $f : X \to Y$ è invertibile se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in X$ e $f(g(y)) = y$ per ogni $y \in Y$.
Ora, si può vedere che le uniche funzioni f invertibili sono quelle biiettive. Ad esempio, consideriamo $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ e le funzione $f : X \to Y$ tale che $f(1) = a$, $f(2) = b$ e $f(3) = c$: si tratta chiaramente di una funzione biiettiva, che ha come inversa la funzione $g : Y \to X$ rappresentata nel disegno seguente:



Infatti, come si vede subito, si ha

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 1$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 2$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(c) = 3$$

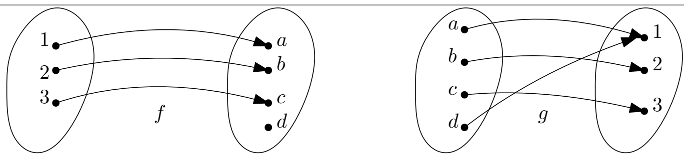
Ovvero $g \circ f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ è la funzione che manda ogni elemento dell'insieme $X = \{1, 2, 3\}$ in se stesso (ovvero la funzione identica id_x di X) e analogamente

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(1) = a$$
$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(2) = b$$
$$(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(3) = c$$

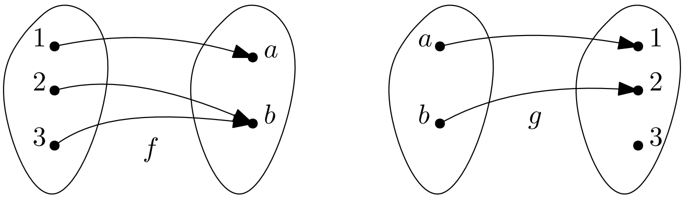
ovvero $f \circ g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ è la funzione che manda ogni elemento dell'insieme $Y = \{a, b, c\}$ in se stesso (cioè è la funzione identica id_Y).
Per giustificare l'affermazione che le funzioni biiettive sono le sole a essere invertibili, consideriamo ad esempio la funzione f rappresentata nel seguente disegno, che è iniettiva non suriettiva (quindi non è biiettiva)

[16] Biettiva = sia iniettiva che suriettiva

[17] Più precisamente, id_X è la funzione $X \to X$ che manda ogni elemento di di x in se stesso e id_Y denota la funzione $Y \to Y$ che manda ogni elemento di Y in se stesso.



Si vede subito che $g \circ f$ è la funzione identica di $\{1, 2, 3\}$, ma $f \circ g$ non è la funzione identica di $\{a, b, c, d\}$ in quanto pur essendo $f(g(a)) = f(1) = a$, $f(g(b)) = f(2) = b$ e $f(g(c)) = f(3) = c$, si ha $f(g(d)) = f(1) = a$, ovvero $f \circ g$ non manda d in se stesso.
SI osserva che non c'è alcun modo di modificare g in modo che $f \circ g$ mandi ogni elemento di $\{a, b, c, d\}$ in se stesso: qualunque valore assegniato a d non sarà mai $f(g(d)) = d$, perché $g(d)$ dovrebbe essere un elemento di $\{1, 2, 3\}$ che viene mandato da f in d.
In altre parole, il motivo per cui l'ugualianza $f \circ g = id$ non può mai essere verificata è la non suriettività è la non suriettività di f. Si dice che f ha un'**inversa sinistra** ($g \circ f = id$ è verificato) ma non ammette un'**inversa destra** (cioè la $f \circ g = id$ non può valere per nessuna g).
Analogamente, si prendano $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ e $g : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ definite come nel seguente disegno



Allora, si vede subito che $f \circ g$ è la funzione identica di $\{a, b\}$, ma $g \circ f$ non è la funzione identica di $\{1, 2, 3\}$ in quanto pur essendo $g(f(1)) = g(a) = 1$ e $g(f(2)) = g(b) = 2$, ovvero $g \circ f$ non manda 3 in se stesso.
Si osservi che anche qui non c'è alcun modo di modificare g : se avessimo posto $g(b) = 3$ avremmo sì ottenuto $g(f(3)) = g(b) = 3$ ma stavolta sarebbe stato $g(f(2)) = g(b) = 3$, ovvero $g \circ f$ non avrebbe mandato 2 in se stesso: come si vede, il problema stavolta è che f manda i due elementi 2 e 3 entrambi in b, quindi necessariamente $g(f(2))$ e $g(f(3))$ saranno uguali e non potranno mai essere il primo 2 e il secondo 3. In altre parole, il motivo per cui non iniettività di f : la f ha cioè un'inversa destra ma non un'inversa sinistra.

Esempio 4.4.1. *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$, non essendo né iniettiva*[18] *né suriettiva*[19] *non ha né inversa sinistra né inversa destra. In effetti, la condidata ad essere inversa di f, la radice quadrata $g(x) = \sqrt{x}$, da una parte non soddisfa $g(f(x)) = x$ se x è negativo perché in tal caso $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, e $|x| \neq x$ se x è negativo ($|-2| = +2 \neq -2$); dall'altra parte $f(g(y)) = y$ non ha senso se y è negativo in quanto in tal caso $g(y) = \sqrt{y}$ non è neanche un numero reale. Per eliminare i due problemi (e rendere g l'inversa di f) bisogna togliere i numeri negativi sia dal dominio che del codominio di f, ovvero restringerla a una funzione $f : \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\leq 0}$, dove $\mathbb{R}_{\leq 0}$ denota l'insieme dei numeri non negativi: ma così facendo in effetti facciamo proprio in modo che diventi una funzione biiettiva (ora non ci sono due elementi del dominio con lo stesso quadrato, e ogni elemento del codominio è quadrato di qualcosa).*

Ora, come abbiamo detto sopra ci poniamo il problema di calcolare, se esiste, l'inversa di un'applicazione lineare data. Prima di fare ciò, dal momento che l'inversa è definita tramite la composizione, dobbiamo vedere cosa succede quando si compongono due applicazioni lineari. In particolare, poiché ogni applicazione lineare può essere sempre tradotto (lavorando in coordinate) in una funzione del tipo (4.9), vedremo cosa succede quando si compongono due applicazioni di questo tipo.
Più precisamente, consideriamo $f = L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

$$\begin{matrix} V \to W \\ \dim(V) = n \\ \dim(W) = m \\ L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \end{matrix} \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

[18]Due numeri uno l'opposto dell'altro hanno lo stesso quadrato
[19]I numeri non sono quadrati di nessuno numero reale

e $g = L_B : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$

$$\begin{array}{c} Z \to V \\ \dim(Z) = p \\ L_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \end{array} \quad g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2p}y_p \\ \vdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{np}y_p \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

$$f \circ g : \quad \begin{array}{c} \mathbb{K}^p \xrightarrow{g} \mathbb{K}^n \xrightarrow{f} \mathbb{K}^m \\ y \mapsto g(y) \mapsto f(g(y)) \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} A & \textit{matrice} & m \times m & \textit{associata ad} & f \\ B & // & m \times p & // & g \\ AB & // & m \times p & // & f \circ g \end{array}$$

In base a quello appena visto, la composizione $f \circ g$ può essere può essere calcolata in quento il codominio di g, ovvero $\mathbb{K}^n$, è anche il dominio di f. Si ha:

$$\begin{aligned} (f \circ g) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} &= f \left(g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2p}y_p \\ \vdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{np}y_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p) + \cdots + a_{1n}(b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{np}y_p) \\ a_{21}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p) + \cdots + a_{2n}(b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{np}y_p) \\ \vdots \\ a_{m1}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p) + \cdots + a_{mn}(b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{np}y_p) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.20}$$

(raccogliendo $y_1, y_2, \ldots, y_p$)

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1})y_1 + (a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2})y_2 + \cdots + (a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np})y_p \\ (a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1})y_1 + (a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2})y_2 + \cdots + (a_{21}b_{1p} + \cdots + a_{2n}b_{np})y_p \\ \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1})y_1 + (a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2})y_2 + \cdots + (a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np})y_p \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Da quest'ultima espressione vediamo che la composizione $f \circ g$ è ancora una funzione del tipo (4.9), cioè è determinata da una matrice C, e più precisamente

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \ldots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \ldots & a_{21}b_{1p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ & \vdots & & \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \ldots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Ora, notiamo che le entrate c_{i1} di tale matrice sono tutte espressioni del tipo

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{4.23}$$

in cui il primo indice dell'entrata di A è fisso e sempre uguale a i, il secondo indice dell'entrata di B è fisso e sempre uguale a j mentre gli indici "interni"[20] variano da 1 a n[21]. Vedere il prodotto tra matrici (<++>).

Definizione 4.4.1. *La matrice C le cui entrate sono date dalla (4.23) si chiama prodotto di A per B, e si scrive $C = AB$.*

In pratica, abbiamo definito il prodotto di due matrici A e B in modo che la matriece $C = AB$ ottenuta sia la matrice che determina la composizione $L_A \circ L_B$ della funzione determinate da A e B. Ricordando che la composizione $L_A \circ L_B$ delle due funzione L_A e L_B può essere fatta solo sotto opportune condizioni[22] si osserva di conseguenza che anche il prodotto di due metrici può essere fatto solo sotto opportune condizioni: più precisamente, del momento che la matrice di L_A ha m righe e n colonne, mentre la matrice B di L_B ha n righe e p colonne, vediamo che si possono moltiplicare tra loro due matrici A e B (in quest'ordine) se e solo se *il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B*: in tal caso, il

[20] il secondo dell'ntrata di A e il primo dell'entrata di B

[21] usando la notazione di sommatoria, potremmo quindi scrivere $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

[22] il codominio di $L_B : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ deve essere uguale al dominio di $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

risultato AB è una matrice con m righe e n colonne. Se denotiamo $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici con m righe e n colonne [23], possiamo allora scrivere che

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}),\ B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in M_{m,p}(\mathbb{K})$$

il prodotto di matrici dato dalla Dimostrazione 4 si chiama anche **prodotto righe per colonna**: il motivo è che nell'espressione (4.23) della generica entrata di posto $i\ j$ appaiono tute e sole le entrate con primo indice i di A e tutte e sole le entrate con secondo indice con primo indice i di A e tutte e sole le entrate con secondo indice j di B: dal momento che il primo indice ci dice in che riga siamo, e il secondo in che colonna, questo significa che per calcolare l'entrata di posto $i\ j$ di AB dobbiamo prendere la riga i-esima di A, la j-esima colonna di B, moltiplicare tra di loro le entrate corrispondenti e sommare il tutto

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \dots & \\ \dots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix}$$

Esempio 4.4.2. *Consideriamo le due matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} M_{2,4}(\mathbb{R})$$

In base a quello che abbiamo detto, le due matrici possono essere moltiplicate e il risultato AB sarà una matrice 3 per 4.
Per trovare l'entrata di AB che sta nella prima riga e prima colonna si prendono la prima riga di $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, la prima colonna di $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, *se ne moltiplicano gli elementi corrispondenti e si somma il risultato:* $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$. *Quindi nella prima riga, seconda colonna di AB c'è 4 – Facendo questo calcolo su tutte le entrate, si vede che*

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -2 & 4 \\ 35 & 13 & -5 & 14 \\ 33 & 12 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

per maggiori chiarimento riferirsi a (<++>)

Esempio 4.4.3. *Come abbiamo visto nel (4.12), la matrice associata alla rotazione f di angolo Θ in senso antiorario attorno a O rispetto a una base ortogonale di V_O^2 è $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: la funzione $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinata da A, che manda (x_1, x_2) in $(\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2, \sin\theta x_1, \cos\theta x_2)$, è la traduzione in coordinate di f. Analogamente, se g denota la rotazione di angolo $\emptyset$, la traduzione in coordinate j sarà data dalla funzione L_B determinata dalla matrice $B = \begin{pmatrix} \cos\emptyset & -\sin\emptyset \\ \sin\emptyset & \cos\emptyset \end{pmatrix}$. Dal momento che il prodotto di matrici ci dà la composizione della applicazioni corrispondenti, se moltiplichiamo A e B otteniamo la matrice in coordinate la composizione delle due rotazioni: infatti*

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\emptyset & -\sin\emptyset \\ \sin\emptyset & \cos\emptyset \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\emptyset - \sin\theta\sin\emptyset & -\cos\theta\sin\emptyset - \sin\theta\cos\emptyset \\ \cos\theta\cos\emptyset + \cos\sin\emptyset & -\sin\theta\sin\emptyset + \cos\theta\cos\emptyset \end{pmatrix} =$$

(in base alle note formule di trigonometria per il coseno e il seno della somma e della differenza tra due angoli)

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \emptyset) & -\sin(\theta + \emptyset) \\ \sin(\theta + \emptyset) & \cos(\theta + \emptyset) \end{pmatrix}$$

che è ancora una matrice di rotazione ma relativa all'angolo $\theta + \emptyset$: questo era prevedibile in quanto la composizione non fa altro che applicare una rotazione di angolo $\emptyset$ seguita da una rotazione di angolo θ. In un capitolo successivo faremo lo stesso per calcolare la composizione di due rotazioni nello spazio, dove il risultato è molto meno prevedibile e intuitivo che nel caso del piano.

[23] Entrate appartenenti al campo $\mathbb{K}$

Vediamo ora le proprietà fondamentali del prodotto di matrici.

In primo luogo, è importatnte osservare che tale prodotto *non goode della proprietà commutativa*, ovvero, date due matrici A e B, e ammesso che si possano[24] eseguire entrambi i prodotti AB e BA, quindi non saranno in generale uquali. Ad esempio, siamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Allora, per definizione di prodotto righe per colonne vediamo che

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 17 & 8 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$$

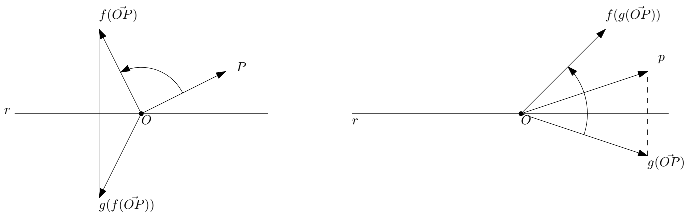
ovvero $AB \neq BA$ – per il prodotto tra matrici vedere (<++>).

Osservazione 4.4.1. *Il motivo della non commutatività in generale del prodotto di due matrici A e B è che, come sappiamo, tale prodotto rappresentala composizione delle applicazioni L_A e L_B corrispondenti, e la composizione di funzioni non gode in generale della proprietà commutativa: ad esempio, date le due funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x + 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(x) = x^2$$

si ha $f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$ mentre $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$, e quindi $f \circ g \neq g \neq f$.

Per un esempio geometrico, si considerino la funzione $f : V_O^2 \to V_O^2$ che ruota ogni vettore del piano applicato in O di 90^o in senso antiorario, e la funzione $g : V_O^2 \to V_O^2$ che riflette ogni vettore attorno a una retta r passante per O: allora, come si vede nel seguente disegno, applicare prima la rotazione f poi la riflessione g oppure viceversa porta in generale a risultati diversi (ovvero $f \circ g \neq g \circ f$).



Per quello che riguarda invece la proprietà associativa, si può dimostrare che questa vale, ovvero $(AB)C = A(BC)$. Ad esempio, siamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$$
$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$$

Osservazione 4.4.2. *l'associatività del prodotto di matrici si spiega facilmente ricordando che tale prodotto rappresenta la composizione delle funzioni corrispondenti, ovvero $(AB)C$ rappresenta $(L_A \circ L_B) \circ L_C$ mentre $A(BC)$ rappresenta $L_A \circ (L_B \circ L_C)$. Ma è facile vedere che la composizione di funzioni gode della propriet'a associativa: infatti, applicando $(f \circ g) \circ h$ a x otteniamo $(f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$, e analogamente applicando $f \circ (g \circ h)$ a x otteniamo sempre $f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$, ovvero $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*

Ci chiediamo ora se il porodotto di matrice ammetta un elemento neutro che svolga lo stesso ruolo che svolge il numero 1 per il prodotto tra numeri, per cui si ha $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ per ogni numero a. La risposta è affermativa: più precisamente, per ogni n consideriamo la matrice con n righe e n colonne seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

[24] Ad esempio, se $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{2,4}(\mathbb{R})$, il prodotto AB che BA ma si tratta di due matrici di tipo diverso. Ad esempio, se $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ si possono eseguire entrambi i prodotti, ma $AB \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ mentre $BA \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

ovvero la matrice che ha 1 nelle entrate con stesso indice di riga e di colonna ($a_{11}, a_{22}, etc.$) e 0 in tutte le altre entrate. Tale matrice si chiama *matrice identica di ordine n e e si denota* I_n. Ad esempio,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione 4.4.3. *In generale, data una matrice quadrata di ordine n, le entrate a_{11}, a_{22}, a_{nn} che hanno lo stesso indice di riga e di colonna formano la cosiddetta diagonale della matrice. la matrice identica I_n può essere quindi descritta come la matrice che ha 1 sulla diagonale e 0 nelle altre entrate. Le entrate di I_n si denotano solitamente con il simbolo δ_{ij}, detto delta di Kroneeker*[25]*. Ora, si puà verificare che, per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha*

$$AI_n = A, \ I_m A = A.$$

e quindi la matrice identica svolge esattametne il ruolo di elemento neutro per il prodotto righe per colonne. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Osservazione 4.4.4. *Si noti che la matrice indetica I_n non è nient'altro che la matrice che determina la funzione identica $id_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}?n$ che manda ongi elemento in se stesso: infatti,*

$$id_{\mathbb{K}^n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \\ 0x_1 + 1x_2 + \cdots + 0x_n \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_n \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Questo spiega perché tale matrice sia l'elemento neutro per il prodotto, in quanto il prodotto tra matrici rappresenta la composizione delle applicazioni corrispondenti e la funzione identica è esattamente l'elemento neutro per la composizione.

Continuando con l'analogo con il prodoto tra numeri, vogliamo ora esaminare la questione dell'esistenza la questione *dell'esistenza dell'inverso*: come sappiamo, nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ per pgni numero a diverso da zero esiste un numero b tale che $ab - ba = 1$, detto appunto inverso di a (e denotato a^{-1}).
Nel caso delle matrici, verremmo quindi capire se data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ esiste una matrice[26] $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AB = I_m$ e $BA = I_n$. Tuttavia, se una tale B esiste, dal momento che il prodotto di A e B corrisponde alla composizione della applicazione lineare $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ e si ha $L_A \circ L_B = id$ e $L_B \circ L_A = id$, ovvero la funzione L_A deve essere invertibile. Ma allora, come abbiamo visto in 4.4, $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ deve essere biiettiva, il che in base al Corollario <++> è possibile solo se il dominio e il codominio hanno la stessa dimensione, ovvero solo se $m = n$.
Riassumendo, abbiamo mostrato che il problema dell'inverso si pone solo per matrici che hanno stesso numero di righe e di colonne, ovvero solo se $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Tali matrici si dicono *quadrate* e il numero n comune di righe e colonne si dice *ordine della matrice*. Per semplicità, l'insieme $M_{n,n}(\mathbb{K})$ si denota $M_n(\mathbb{K})$. Diamo allora la seguente

Definizione 4.4.2. *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ quadrata di ordine n si dice invertibile se matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ tale che*

$$AB = I_n, \quad BA = I_n \tag{4.26}$$

In tal caso, B si chiama matrice inversa di A e si denota A^{-1}.

- Una matrice invertibile si può anche chiamare `NON SINGOLARE`
- Una matrice non invertibile si può anche chiamare `SINGOLARE`

[25] Il delta di Kronecker è una funzione di due variabili, di solito solo numeri interi non negativi. La funzione è 1 se le variabili sono uguali e 0 atrimenti: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$ o con l'uso di staffe Iverson: $\delta_{ij} = [i = j]$ dove il delta di Kronecker δ_{ij} è una funzione a tratti delle variabili i e j.

[26] la scelta del numero di righe e di colonne di B è obbligata se vogliamo poter eseguire sia il prodotto AB che quello BA

Dimostriamo ora il seguente risultato, che ci dice che, contrariamente a quello che accade nel campo dei numeri reali dove l'unità numero non invertibile è lo zero, nell'insieme delle matrici, anche limitandosi alle sole matrici quadrate, ci sono molte matrici non invertibili:

Teorema 4.4.1. *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se il rango di A è uguale a n.*

Dimostrazione. Come abbiamo ricordato poco prima della Definizione <++>, l'invertibilità di A, ovvero l'esistenza di una matrice B tale che $AB = BA = I_n$, equivale a dire $L_A \circ L_B = L_B \circ L_A = id$, ovvero che L_A è invertibile[27] e quindi biiettiva. Quindi ci basta dimostrare L_A sia biiettivo se e solo se il rango di A è n. Ora, come abbiamo visto nel Corollario <++>, una funzione lineare in cui dominio e codominio abbiano la stessa dimensione[28] iniettiva se e solo se è suriettiva, ovvero basta una delle due proprietà per avere anche l'altra entrambe le proprietà (e quindi la biiettività) è necessaria e sufficiente che una delle due venga soddisfatta. Quindi, possiamo dire che L_A è biiettiva solo se è suriettiva. Ma come abbiamo visto in 4.3.1, L_A è suriettiva se e solo se il rango di A è n. □

Vediamo ora come si calcola l'inversione di una matrice A, suponendo che questa esita (cioè che A sia invertibile).
Quindi siamo pronti a trattare il primo metodo d'inversione di una matrice: sappiamo che trovare l'inversa di A equivale a trovare una matrice B tale che $AB = I_n$ (senza dever verificare anche $BA = I_n$), ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Tenuto conto della dimostrazione di prodotto righe per colonne, vediamo che moltplicando le riche di A per la prima colonna di B deve essere

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} = 0 \end{cases}$$

ovvero la prima colonna di B soddisfa il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

con matrice dei coefficienti uguale a A e termini noti uguali alla prima colonna della matrice identica.
Analogamente, moltiplicando le righe di A per la seconda colonna di B si vede che devono essere soddisfatte le sequenti

$$\begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2} = 1 \\ \dots \\ a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \dots + a_{nn}b_{n2} = 0 \end{cases}$$

ovvero la seconda colonna di B deve soddisfare il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

[27] Volendo essere rigorosi, essere rigorosi, $L_A \circ L_B = L_B \circ L_A = id$ implica chiaramente che L_A sua invertibile, ma viceversa il fatto che L_A sia invertibile implica solo che esista una funzione g tale che $g \circ L_A = L_A \circ g = id$, che a priori non sappiamo se è della forma $g = L_B$ per qualche matrice B. In realtà, si può dimostrare che g deve necessariamente essere di quella forma, e quindi otteniamo anche l'implicazione opposta per cui L_A invertibile implica che esiste una matrice B per cui $g \circ L_A \circ L_B = L_B \circ L_A = id$ (e quindi $AB = BA = I_n$).

[28] e $L_A : \mathbb{K}^n \in \mathbb{K}^n$ verifica questa condizione

sempre con matrice dei coefficienti uguale a A ma stavolta con temini noti uguali alla matrice identica, e così via possiamo ragionare allo stasso fino all'ultima colonna di B che dovrà soddisfare

$$\begin{cases} a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} = 0 \\ a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} = 1 \\ \dots \\ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} = 0 \end{cases}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 1 \end{cases} \tag{4.29}$$

Riassumendo, si ha $AB = I_n$ se e solo se le colonne $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \dots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$ sono soluzione rispettivamente degli n sistemi (4.27), (4.28), ..., (4.29).

Come sappiamo, per risolvere un sistema basta scriverne la matrice completa, composta da matrice dei coefficienti delle incognite e colonne dei termini noti, e ridurla a gradini mediamente operazioni elementari sulle righe. Poiché i sistemi (4.27), (4.28), ..., (4.29) hanno tutti la stessa matrice dei coefficienti, cioè A, e differiscono solo per i termini noti, possiamo risolverli tutti contemporaneamente eseguendo le stesse operazioni elementari: a questo scopo, basta scriver la matrice

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \tag{4.30}$$

ottenuta affiacando tutti i termini noti dei sistemi (4.27), (4.28), ..., (4.29) e risolverli contemporaneamente con una sola riduzione[29].

Vediamo subito un esempio: dato la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, verifichiamo se essa è invertibile e, in caso affermativo, calcoliamo l'inversa. Come detto sopra, affianchiamo a tale matrice la matrice identica dello stesso ordine

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

che rappresenta i due sistemi le cui soluzioni sono le colonne della matrice inversa, e iniziamo con l'applicare il procedimeto di riduzione a gradini: a questo scopo basta il singolo passaggio

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \tag{4.31}$$

da cui vediamo che, dopo la riduzione a gradini, ad A non si annulla nessuna riga e quindi, come abbiamo detto sopra, A è invertibile.

La prima colonna dell'inversa B di A è data dalla soluzione del sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_2 = 1 \end{cases} \tag{4.32}$$

ovvero, come si vede risolvendo dal basso, la coppia $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, che è quindi la prima colonna della matrice inversa. Analogamente, la seconda colonna dell'inversa B di A è data della soluzione del sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_2 = 1 \end{cases} \tag{4.33}$$

ovvero, come si vede risolvendo dal basso, la coppia $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, che è quindi la seconda colonna della matrice inversa. In conclusione, l'inversa dell matrice A è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

[29] chiaramente, in base al Teorema <++> la matrice A è invertibile se e solo se in seguito a tale riduzione non si annullarà nessuna delle sue righe

Infatti, si verifica subito con un calcolo che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

concordemente con la definizione di inversa.
Per evitare di scrivere e risolvere separatamente i sistemi (4.32) e (4.33), e trovare invece in modo più diretto la matrice inversa, si può procedere come segue. Dopo per effettuato la riduzione a gradini in (4.31), si applicano ulteriori operazioni elementari fino a trasformare la matrice A del blocco di sinistra nella matrice identica: a questo punto nel blocco di destra si legge direttamente l'inversa. Per vederlo, riprendiamo da (4.31) e facciamo comparire prima uno zero in posizione 1 2 eseguendo

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

e applichiamo poi a ogni riga l'operazione elementare del secondo tipo che consiste nel dividerla per l'elemento che si trova sulla diagonale:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 \to (1/3)R_1 \\ R_2 \to (1/3)R_2}}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \tag{4.34}$$

Come si vede la matrice identica che avevamo affiancato ad A si è trasformata nella matrice inversa di A già trovata sopra.
Per capire perché, ricordiamo che le operazioni elementari che stiamo eseguendo servono a risolvere contemporaneamente poi ci danno come soluzione le colonne della matrice inversa: ma allora, riducendo la matrice A[30] alla matrice identica come in (4.34) non non stiamo facendo altro che ridurre i due sistemi alla forma

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e cioè far comparire direttamente le soluzioni cercate (che sono proprio le colonne della matrice inversa).
Vediamo un altro esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Iniziamo con il trasformare la matrice $(A|I_n)$ in una matrice a gradini

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to 2R_3 + R_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Il fatto che non si sia annullata nessuna riga nel blocco di sinistra ci dice che la matrice A è invertibile.
Ora, come spiegato sopra, faciamo comparire zeri sopra la diagonale, effettuando una sorta di riduzione a gradini "all'incontrario", dal basso verso l'altro e da destra verso sinistra[31]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to 2R_2 + R_3 \\ R_1 \to 2R_1 - R_3}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & \mathbf{0} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & \mathbf{0} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & \mathbf{0} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & \mathbf{0} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{R_1 \to 2R_1 - R_3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & \mathbf{0} & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

[30] cioè la matrice dei coefficienti di tali sistemi
[31] in ogni passaggio, mettiamo in evidenza in grasseto i nuivi zeri che facciamo comparire

Infatti, dividiamo ogni riga per l'elemento sulla diagonale applicando operazioni elementari del secondo tipo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 \to (1/4)R_1 \\ R_1 \to (1/4)R_2 \\ R_3 \to (1/4)R_3}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vediamo ora un modo alternativo per calcolare l'inversa di una matrice invertibile, basato sul determinante e sulla nozione di cofattore, vista nel precedente capitolo.
Abbiamo visto nel Teorema <++> che una matrice A di ordine n è invertibile se e solo se il suo rango è n. Ma come sappiamo dal Teorema <++>, questo equivale ad avere $\det(A) \neq 0$. Dimostriamo ora la seguente

Proposizione 4.4.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice invertibile[32]. Allora la sua inversa A^{-1} è data da*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & & \dots & \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

dove C_{ij} indica il cofattore di a_{ij}, e $\frac{1}{\det(A)}$ davanti alla matrice dei cofattori significa che ogni entrata di tale matrice deve essere moltiplicato per $\frac{1}{\det(A)}$.

Osservazione 4.4.5. *A proposito della disposizione dei cofattori nella (4.35), si noti che i cofattori delle entrate della prima riga di A sono nella prima colonna della (4.35), i cofattori delle entrate della della seconda riga di A sono nella seconda colonna della (4.35), e così via.*

Esempio 4.4.4. *Calcoliamo l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.*

I cofattori sono

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad C_{23} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$C_{11} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3.$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{2n} & C_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

dove il determinante di A è stato calcolato sviluppandolo secondo Laplace rispetto alla tesza riga, usando i cofattori già calcolati:

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -3$$

Osservazione 4.4.6. *Osservando che la 4.35, nel caso $n = 2$, diventa la semplice formula*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

[32] ovvero con $\det(A) \neq 0$

in quanto i cofattori sono semplicemente $C_{11} = (-1)^{1+1}a_{22},\ C_{12} = (-1)^{1+2}a_{21}, C_{21} = (-1)^{2+1}a_{12}$, $C_{22} = (-1)^{2+2}a_{11}$ *(ricordiamo che il determinante di una matrice di ordine 1 si definisce come il valore della sua unica entrata). In pratica, a parte dividere per il determinante, la matrice inversa si ottiene scambiando tra loro i due elementi sulla diagonale e cambiando di segno le restanti entrate.*

Esempio 4.4.5. *Applichiamo la (4.36) al caso della matrice che rappresenta una rotazone di angolo* θ *nel piano, ovvero* $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$*: si ha*

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(per l'identità $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ *e le formule trigonometriche per il seno e il coseno dell'opposto di un angolo)*

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

che è ancora una matrice di rotazione, quella associata alla rotazione di angolo $-\theta$*, che è l'inversa della rotazione di angolo* θ[33]*.*
In effetti, in generale, la matrice A^{-1} *inversa di una matrice* A *data rappresenta la funzione della funziona inversa della funzione* $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *determinante da* A*: infatti, come sappiamo la composizione* $L_A \circ L_{A^{-1}} = id$ *(e analogamente* $L_{A^{-1}} \circ L_A = id$*).*

Vediamo ora che la formula (4.35) per il calcolo dell'inversa può essere utilizzata per ricavare un modo alternativo alla riduzione a gradini per risolvere certi sistemi di equazioni lineari.
A tale scopo, osserviamo prima che un generico sistema lineare di m equazioni in n incognite.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.37}$$

può essere riscitto in forma molto più concisa grazie al prodotto di matrici. Più precisamente, se denotiamo con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ la matrice dei coefficiati del sistema, con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice[34] che ha come entrate le incognite, e con $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ la matrice[35] che ha come entrate i termini noti del sistema si ha, svolgendo il prodotto righe per colonne, che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

E quindi il sistema (4.37) può essere riscritto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ovvero nella semplice forma

$$Ax = b. \tag{4.38}$$

[33] se applichiamo prima una e poi l'altra il vettore torna alla posizione iniziale
[34] costituita da una sola colonna
[35] sempre costituita da una sola colonna

Ora, supponiamo che la matrice A dei coefficienti del sistema sia quadrata di ordine n (quindi il sistema ha n equazioni e n incognite) e che abbia determinante diverso da zero. Allora A è invertibile e possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza (4.38) a sinistra per l'inversa A^{-1}:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

Tenendo conto che il prodotto di matrici gode della proprietà associativa, questo può essere riscritto come

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$

ovvero, visto che per definizione di inversa $A^{-1}A = I_n$,

$$I_n x = A^{-1}b$$

e quindi, essendo I_n elemento neutro per il prodotto,

$$x = A^{-1}b \tag{4.39}$$

Quindi la soluzione x di un sistema con stesso numero di equazione e di incognita e matrice dei coefficienti con determinante con determinante diverso da zero può essere trovata mediante la (4.39).

Osservazione 4.4.7. *Si noti che non abbiamo fatto altro che applicare gli stessi passaggi, normalmente sottointesi, che si applicano quando si vuole risolvere una semplice equazione di primo grado in una sola incognita $ax = b$. Infatti, ad esempio, se dobbiamo risolvere $2x = 3$ dividiamo entrambi i membri per 2, ovvero equivalentemente moltiplichiamo per l'inverso $\frac{1}{2}$ di 2 ottenendo $\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}3 = \frac{3}{2}$; per la proprietà associativa a primo membro si ha $\left(\frac{1}{2}2\right) x = \frac{3}{2}$ ovvero, essendo $\frac{1}{2}2 = 1$, si ha $1x = \frac{3}{2}$, che è la soluzione dell'equazione.*
L'unica differenza con il caso dei sistemi $Ax = b$ è che non sempre A è invertibile, mentre, a meno che a non sia zero, nell'equazione $ax = b$ tale ipotesi è sempre garantita.
Ora, se combiniamo la (4.39) con la formula per l'inversa (4.35), vediamo che la soluzione di un sistema con n equazioni e n incognite e matrice dei coefficienti invertibile è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{32} \\ & & \vdots & \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Quindi, come si vede, le componenti x_i della soluzione del sistema si ottengono moltiplicando le righe della matrice dei cofattori (divisa per il determinante di A) per la colonna dei termini noti:

$$x_1 = \frac{b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1}}{\det(A)}$$
$$x_2 = \frac{b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2}}{\det(A)}$$
$$\vdots$$

e in generale

$$x_2 = \frac{b_1C_{1i} + b_2C_{2i} + \cdots + b_nC_{ni}}{\det(A)} \tag{4.41}$$

Ora, se confrontiamo il numeratore della (4.41) con l'espressione del determinante di A calcolato con lo sviluppo di Laplace del determinente della matrice che si ottiene da A sostituendo i termini noti al posto della i-esima colonna.
In poche parole abbiamo riassunto il teorema di Cramer, illustrato qui sotto:

Teorema 4.4.2. *(*Teorema di Cramer*) Sia $Ax = b$ un sistema di n equazione lineari in n incognite, con $\det(A) \neq 0$ (cioè A è invertibile. Allora tale sistema ha un'unica soluzione $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le cui componenti sono date da*

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)},\ i = 1, \dots, n$$

dove B_i è la matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna dei termini noti b al posto della i-esima colonna di A.

Esempio 4.4.6. *Consideriamo il sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dei coefficienti del sistema ha determinante $\det(A) = -3$, quindi è invertibile e possiamo applicare il motodo di Cramer, ovvero abbiamo le componenti dell'unica soluzione date da

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$$
$$x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Per concludere quasta parte sull'inversa, mostriamo che, data una matrice invertibile A, vale la seguente

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \tag{4.42}$$

Quasta uguaglianza si dimostra come corollario del seguente, importante risultato, detto *teorema di Binet*:

Teorema 4.4.3. *Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ due matrici quadrate. Allora*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Non dimostriamo il teorema di Binet, ma illustriamolo con un esempio: se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, allora $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$, e si vede che $\det(A) = -2$, $\det(B) = 5$ e $\det(AB) = -10 = (-2) \cdot 5$, concordemente con il teorema di Binet.

Per dimostrazione la (**??**), basta applicare il teorema di Binet al caso $B = A^{-1}$:
allora abbiam

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

ovvero, tenuto conto che $AA^{-1} = I_n$,

$$\det(I_n) = \det(A)\det(A^{-1}) \tag{4.43}$$

Pra, è facile vedere che il determinante dela matrice identica I_n, per qualunque ordine n, è uguale a 1: infatti, basta applicare lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga.
Quindi la (4.43) diventa

$$1 = \det(A)\det(A^{-1})$$

che implica subito la (4.42).
Si presti comunque attenzione che la non commutatività del prodotto di matrici rende non valide alcune identità classiche dell'algebra numerica, come la formula per il quatrato di un binomio ($(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$) o il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Infatti, per matrici si ha

$$(A+B)^2 = (a+b)(a-b) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo usato la proprietà distributiva, che vale anche per matrici, ma non valendo la commutatività del prodotto non possiamo scrivere $AB + BA = 2AB$.
Analogamente,

$$(a+b)(a-b) = A^2 + AB + BA + B^2$$

e di nuovo non essendo valida la commutatività del prodotto di matrici non possiamo semplificare $-AB + BA$.

4.4.1 Ultime proprietà della matrice inversa

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dimostrazione.

$$\begin{array}{rc}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) \stackrel{?}{=} I & (B^{-1}A^{-1})(AB) \stackrel{?}{=} I \\
A(BB^{-1})A^{-1} & B(AA^{-1})B^{-1} \\
AIA^{-1} & B^{-1}IB \\
AA^{-1} = I & B^{-1}B = I
\end{array}$$

□

Capitolo 5

Autovalori e autovettori

In questo capotolo vedremo un'importante nozione dalle numerose applicazioni pratiche.

5.1 Definizione, esempi e applicazioni

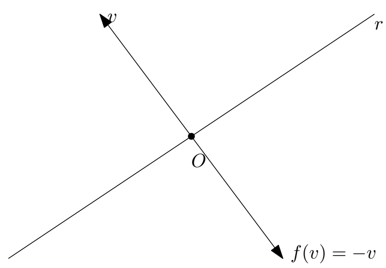
Definizione 5.1.1. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f : V \to V$ un endomorfismo*[1]*. Un vettore $v \neq \bar{0}$ di V si dice autovalore di f se si ha*

$$f(v) = \lambda v \tag{5.1}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$.
Il coefficiente numerico λ si dice autovalore relativo all'autovalore v.

In altre parole, un autovettore è un vettore non nullo che viene mandato dalla funzione in un suo multiplo. Notiamo che questo è sempre banalmente vero per il vettore nullo $\bar{0}$, in quento come sappiamo se f è lineare allora $f(\bar{0}) = \bar{0}$, e quindi l'uguaglianza $f(\bar{0}) = \lambda\bar{0}$ è verificata sempre per qualunque endomorfismo e qualunque scalare λ (è per questo motivo che questo caso banale viene escluso dalla Definizione 5.1.1).
Vediamo subito alcuni esempi di autovettori:

Esempio 5.1.1. *Sia $V = V_O^2$ lo spazio dei vettori geometrici applicati in un punto O del piano e sia $f : V_O^2 \to V_O^2$ la riflessione rispetto a una retta r che che passa per O. Quando riflettiamo un vettore $v = \vec{OP}$ perpendicolare alla retta r, il vettore viene mandato nel suo opposto*



ovvero $f(v) = -v = (-1)v$. Quindi tale vettore è un autovettore di f con autovalore associato -1.

Esempio 5.1.2. *Nel caso di endomorfismi $f = L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ del tipo 4.9 detterminati da una matrice quadrata $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, ovvero*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

[1]Ricordiamo che si dicono endomorfismi le applicazioni lineari in cui dominio e codominio sono uguali.

gli autovettori di L_A *si dicono anche autovalori e autovettori della matrice* A*. Ricordando che, in base alla definizione di prodotto di matrici, si ha*

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

e quindi $f(x) = Ax$*, un autovettore di* A *allora una* n*-upla* $x \in \mathbb{K}^n$ *non nulla tgale che*

$$A_x = \lambda x. \tag{5.4}$$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*, si ha*

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4x$$

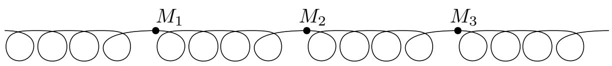
e quindi x *è un autovettore di* A *con autovalore associato* $\lambda = 4$*.*
Invece, per esempio, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *non è un autovettore di* A *in quanto*

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

e $(5, 7)$ *non è multiplo di* $(2, 1)$*.*

Prima di vedere come si calcolare autovalori e autovettori di un endomorfismo e di una matrice, citiamo alcune applicazioni pratiche di questa nozione:

1. Una massa collegata a una molla, se spostata dalla posizione di equilibrio, inizia a oscillare con una certa frequenza, dipendente dalla massa stessa e dalle caratteristiche fisiche della molla. Se invece, abbiamo più molle $M_1, M_2, M_3, \dots$, tutte collegate tra loro tramite delle molle,

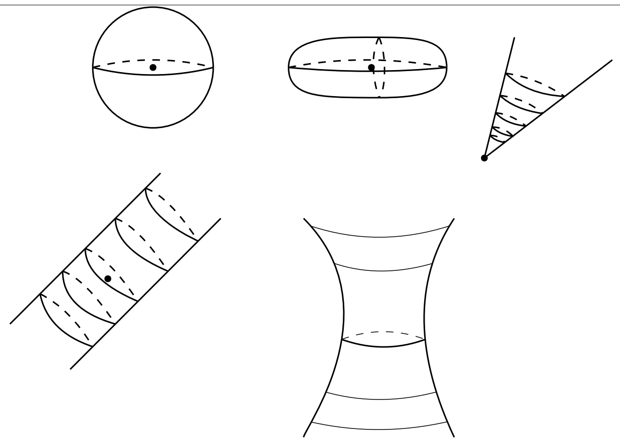
   l'oscillazione di ognuna di ognuna di esse dipende anche dalla posizione e dal movimento delle altre masse del sistema e bisogna quindi tener conto di tutte le interazioni reciproche. Si mostra che tali interazioni possono essere matrice ci danno le cosiddette *frequenze naturali di oscillazione del sistema:* il modo in cui il sistema oscilla è dato da una combinazione di queste frequenze tramite una formula che coinvolge anche gli autovettori corrispondenti.
   Questo esempio spiega perché l'insieme degli autovalori di una matrice A si chiama anche il suo *spttro* (prendendo in prestito la parola dall'espressione "spettro di frequenza")

2. Dato un corpo rigido nello spazio tridimensionale, possiamo far ruotare tale corpo e della distribuzione della massa in esso, eventualmente disomogenea, a seconda dell'asse che scegliamo la rotazione "non sarà stabile", ovvero ci saranno delle sollecitazioni esercitate sull'asse di rotazione che tendono a deviarlo. Vi sono tuttavia alcune direzioni con la proprieta che se facciamo ruotare il corpo attorno a esse allora tali sollecitazioni saranno nulle: gli assi con queste direzioni si dicono *principali d'inerzia.*
   Ebbene, si può vedere che il calcolo degli assi principali d'inerzia si riduce al calcolo degli autovettori di una opportuna matrice quadrata di ordine 3, costruita usando i dati distribuzione della massa nel corpo.

3. Abbiamo visto nel capitolo 4.1 come, fissato un sistema di riferimento nello spazio tridimensionale, un piano sia descritto da una generica equazione $Ax+By+Cz = D$ di primo grado in tre incognite, nel senso che i punti appartenenti al piano sono tutti e soli quelli le cui coordinate (x, y, z) verificano l'equazione.
   Ora, ci chiediamo cosa invece rappresenti una generica equazione di secondo grado nella tre incognite date, ovvero

   $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + L = 0 \tag{5.5}$$

   Si può dimostrare che le equazioni di questo tipo rappresentano superfici dette *quadriche* (tra le quali rientrano sfere, ellissoidi, iperboloidi, coni, cilindri)



e che, per capire quale tra queste superfici rappresenti l'equazione (5.5), bisogna calcolare gli autovalori di una matrice di ordine 4 costruita opportunamente dai coefficenti $A, B, C, \ldots, L$.
:w Inoltre, gli autovettori forniscono informazioni sulla posizione di tale superficie nello spazio, dicendoci ad esempio quali sono i suoi assi di simmetria.

5.2 Calcolo di autovalori e autovettori

Dato un endomorfismo $f : V \to V$, allo scopo di trovare tutti i suoi autovettori, ovvero i vettori $v \neq \bar{0}$ che soddifano la (5.1), basta lavorare in coordinate.
Più precisamente, fissiamo una base B qualunque dello spazio V e traduciamo l'ugualianza (5.1) in coordinate a B: se x denota la n-upla della coordinate di v (rispetto a B), disposte in colonna, allora

a) il vettore λv a secondo membro della (5.1) ha coordinate λx "come risulta della proprietà (<++>) che afferma che le coordinate di λv si ottengono moltiplicando per λ le coordinate di v"

b) il vettore $f(v)$ a primo membro della (5.1) ha coordinate (rispetto a B) che si ottengono moltiplicando la matrice $A = M_B(f)$ associata a f rispetto a B per le coordinate x di v è la matrice associata a f rispetto a B, come abbiamo visto nel paragrafo 4.2.

Quindi la (5.1) equivale in coordinate all'uguaglianza $Ax = \lambda x$, ovvero la (5.4): in altre parole, il problema di trovare gli autovettori della matrice A associata a f rispetto a una base fissata.
Dobbiamo allora solo vedere come si trovano gli autovettori e gli autovalori di una matrice A. Portando il secondo membro della $Ax = \lambda x$ a primo membro si ottiene $Ax - \lambda x = \bar{0}$: ricordando che $x = I_n x$ e riscrivendo tale uguaglianza come $Ax - \lambda I_n x = \bar{0}$, possiamo sfruttare la proprietà distributiva del prodotto di matrici e scrivere

$$(A - \lambda I_n)x = \bar{0}.$$

Abbiamo quindi trasformato il problema iniziale $f(v) = \lambda v$ in un sistema omogeneo di n equazioni in n incognite che ha $A - \lambda I_n$ come matrice dei coefficienti, nel senso che le soluzioni x di tale sistema sono proprio le coordinate (rispetto a B) dei vettori v tali che $f(v) = \lambda v$.
In particolare, noi siamo interessati all'esistenza di soluzioni non nulle di tale sistema, in quanto la soluzione nulla corrisponde al vettore nullo $v = \bar{0}$, che non è considerato un autovettore.
Ora, come sappiamo, un sistema compatibile $Mx = b$ in n in n incognite ha ∞^{n-r} soluzioni, essendo r il rango della matrice dei coefficienti M, e quindi ha una sola soluzione se e solo se il rango di M è uguale a n: nel caso del nostro sistema omogeneo $(A - \lambda I_n)x = \bar{0}$, esso ammetterà quindi altre soluzioni oltre quella nulla se e solo se il rango della sua matrice dei coefficienti $A - \lambda I_n$ è equivalentemente richiedendo che il suo determinente sia nullo.
Quindi, $i\lambda \in \mathbb{K}$ per cui esiste un vettore *non nullo* tale che $f(v) = \lambda v$ (cioè gli autovalori di f) sono esattamente quegli scalari per cui

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{5.6}$$

L'equazione (5.6), risolvendo la quale determiniamo l'insieme di tutti gli autovalori di f si dice *equazione caratteristica*, e l'espressione $\det(A - \lambda I_n)$ a primo membro di tale equazione, che come vedremo negli esempi[2] è un polinomio di grado $n = \dim(V)$ in λ, si dice *polinomio caratteristico*.
Una volta determinati i $\lambda \in \mathbb{K}$ per cui $\det(A - \lambda I_n) = 0$, cioè tali che il sistema $(A - \lambda I_n) = \bar{0}$ ha soluzioni non nulle, bisogna trovare tali soluzioni, che saranno esattamente le coordinate (rispetto a B) degli autovettori di f.

[2]si vede anche la fine del capitolo

Illustriamo subito tale procedimento con alcuni esempi.

Esempio 5.2.1. *Sia* $V = V_O^2$ *lo spazio dei vettori geometrici applicati in un punto* O *del piano e sia* $f : V_o^2 \to V_o^2$ *la riflessione rispetto a una retta fissata* r *passante per* O. *Nell'Esempio 5.1.2 abbiamo già dato un esempio di autovettore di* fm *determiniamoli ora tutti usando il metodo appena descritto.*
A questo scopo dobbiamo prima di tutto scegliere una base B *per poter lavorare in coordinate e scrivere la matrice* $A = M_B(f)$ *associata a* f *rispetto a* B. *Tale matrice è stata già calcolata, rispetto alla base* $B = \{v_1, v_2\}$ *raffigurata nell'Esempio 4.2.1, nel punto 3, dove abbiamo visto che* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Allora*

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

e quindi il polinomio caratteristico è dato da

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1.$$

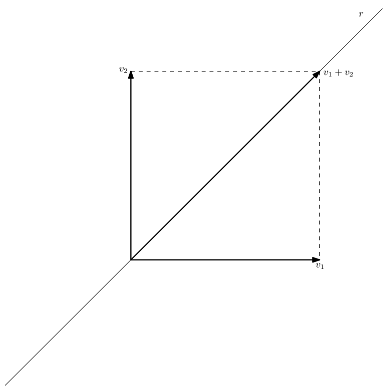
Gli autovalori di f sono quindi le radici reali di questo polinomio (V_O^2 è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e gli autovalori devono stare in $\mathbb{R}$), ovvero le soluzioni dell'equazione coratteristica $\lambda - 1 = 0$, che sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.
Quindi esistono dei vettori $v \in V$ non nulli per cui $f(v) = v$. Per determinarli, come abbiamo detto sopra, dobbiamo risolvere il sistema $(A - \lambda I_2)x = \bar{0}$ (con $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$), e le soluzioni di questo sistema ci daranno le coordinate di tali vettori rispetto alla base B. Sostituendo $\lambda = 1$ nella (5.7) si ha che $(A - \lambda I_2) = \bar{0}$ è

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni tutte e sole le coppie del tipo (t, t), al variare di $t \in \mathbb{R}$. Tali coppie sono quindi sono quindi le coordinate degli autovettori relativi a $\lambda = 1$ rispetto alla base $B = \{v_1, v_2\}$, che sono quindi tutti i vettori del tipo $tv_1 + tv_2 = f(v_1 + v_2)$, ovvero tutti i vettori proporzionali al vettore $v_2 + v_2$: è facile verificare graficamente come nel disegno seguente che tale vettore (come i suoi multipli) soddisfa proprio la proprietà $f(v) = v$, cioè la riflessione f lo lascia invariato[3].



Sostituando, invece $\lambda = -1$ nella (5.7) si ha che $(A - \lambda I_2) = \bar{0}$ è

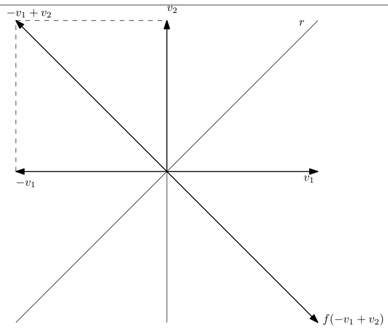
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni tutte e sole le coppie del tipo $(-t, t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Questo fatto poteva, in questo caso, essere dedotto direttamente dalla definizione di autovettore: poiché la rotazione cambia la direzione dei vettori, non manda nessun vettore v (come i suoi multipli) soddisfa proprio la proprietà $f(v) = -v$, cioè la riflessione f lo cambia di verso[4].

[3] in quento appartiene alla retta rispetto all quale stiamo riflettendo
[4] in quanto è perpendicolare alla retta di riflessione



(avevamo già osservato nell'Esempio 5.1.2 che i vettori perpendicolari all'asse di riflessione sono autovettori relativi all'autovalore -1).
Per un altro esempio di tipo geometrico, si consideri ad esempio la rotazione f di angolo θ sullo spazio dei vettori applicati in un punto O nel pieno.
Abbiamo visto nell'Esempio 4.2.1, nel punto 3, la matrice associata a f rispetto a una mase B costituita da due vettori ortogonali e della stessa lunghezza è $A = M_B(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Prendiamo per facilità il caso $\theta = \frac{\pi}{2}$, nel quale $(\cos\theta = 0, \sin\theta = 1)$ si ha $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Il polinomio caratteristico di f è quindi

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Poiché non esiste nessun $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda^2 + 1 = 0$, deduciamo che f non ha autovalori[5] (ovvero non ha autovettori).
Quasto fatto poteva, in questo caso, essere dedotto direttamente dalla definizone di autovettore: poiché la direzione dei vettori, non manda nessun vettore v (diverso dal vettore nullo) in un suo multiplo, cioè non può mai succedere che $f(v) = \lambda v$.

Osservazione 5.2.1. *Se vediamo la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *come matrice a entrate complesse e ci proponiamo di determinare i suoi autovalori e autovettori in* $\mathbb{C}$*, allora il suo polinomio caratteristico* $\lambda^2 + 1 = 0$ *ha le due soluzioni (quindi, autovalori della matrice)* $\lambda = +i$ *e* $\lambda = -i$.
Quindi possiamo determinarne i corrispondenti autovettori, che saranno elementi di $\mathbb{C}^2$*. Più in dettaglio, per* $\lambda = i$ *si ha che* $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} R_2 \to \overrightarrow{i}R_2 - R_1 \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, quindi gli autovettori sono le soluzioni dell'unica equazione* $ix_1 - x_2 = 0$*: ponendo* $x_2 = t$ *(dove* t *stavolta varia tra tutti i numeri complessi) si ha* $x_1 = \frac{1}{i}t$ *e quindi gli autovettori sono dati da tutte le coppie del tipo* $(\frac{1}{i}t, t)$*, al variare di* $t \in \mathbb{C}$.

Osservazione 5.2.2. *Si noti che in generale*

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

ovvero $A - \lambda I_n$ *è semplicemente la matrice* A *in cui abbiamo sottratto* λ *su tutta la diagonale.*

Nell'esempio della riflesssione, vediamo che l'insieme degli autovettori relativi a un dato autovalore coincide con l'insiame dei vettori che stanno su una retta per O (*per l'autovettore* $+1$*, la retta perpendicolare all'asse di riflessione*), e assieme al vettore nullo forma quindi un sottospazio vettoriale di V_O^2 (si vede nell'Esempio <++>). Questo è un fatto generale, ovvero dato un endomorfismo $f : V \to V$ e dato un autovalore λ, l'insieme

$$\{v \in V | f(v) = \lambda v\}$$

[5] Poiché V_O^2 è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, sono autovettori solo le soluzioni dell'equazione caratteristica che stanno in $\mathbb{R}$.

costituito dagli autovettori relativi a λ più il vettore nullo[6] è sottospazio vettoriale di V, detto *autospazio relativo all'autovalore* λ e denotano $V_\lambda(f)$.
Infatti, siamo $v_1, v_2 \in V_\lambda(f)$, ovvero $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$. Allora

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

(nella prima uguaglianza addiamo sfruttato il fatto che f è un'applicazione lineare), e quindi vediamo che anche il vettore somma $v_1 + v_2$ verifica la condizione $f(v) = \lambda v$, quindi appartiene a $V_\lambda(f)$: tale sottoinsieme è quindi chiuso rispotto alla somma.
Per verificare che è chiuso rispetto al prodotto per scalari, e quindi completare la dimostrazione che si tratta di un sottospazio, consideriamo un vettore $v \in V_\lambda(f)$ (cioè $f(v) = \lambda v$) e uno scalare $c \in \mathbb{K}$. Allora

$$f(cv) = cf(v) = c(\lambda v) = v(\lambda v) = (c\lambda)v = (\lambda c)v = \lambda(cv)$$

(nella prima uguaglianza addiamo sfruttato il fatto che f è un'applicazione lineare), e quindi vediamo anche il vettore cv verifica la condizione per appartenere a $V_\lambda(f)$, il che conclude la dimostrazione.
Vediamo ora alcuni esempi di calcolo di autovettori di matrici di ordine 3.

Esempio 5.2.2. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico. Si ha

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 4 & 5-\lambda & -2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

(sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima riga)

$$= (5-\lambda)\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$(5-\lambda)[(5-\lambda)(2-\lambda) = 2] - [4(2-\lambda) + 4] - [4 - 2(5-\lambda)]$$

ovvero, svolgendo i calcoli,

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54$$

Si noti che, come abbiamo anticipato sopra, il polinomio caratteristico è un polinomio di grado uguale alla dimensione ndel dominio dell'endomorfismo, in questo caso uguale all'ordine della matrice A (ovvero 3) in quanto una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ determina un endomorfismo $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ di $\mathbb{K}$.
Per trovare le radici del polinomio caratteristico, ovvero le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = 0 \tag{5.8}$$

ricordiamo che, come si dimostra in algebra, se tra le soluzioni di un'equazione polinomiale e cofficenti interi vi sono numeri razionali, questi sono sicuramente della forma $\frac{a}{b}$ dove a è un divisore del termine noto 54, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm27, \pm54$.
Ad esempio, sostituendo $\lambda = 1$ nella (5.8) si trova

$$-1^3 + 12 \cdot 1^2 - 45 \cdot 1 + 54 = 20 \neq 0$$

e quindi 1 non è soluzione dell'equazione. Anche -1, come si vede subito, non è soluzione, mentre sostituendo $\lambda = 1$ si trova

$$-3^3 + 12 \cdot 3^2 - 45 \cdot 3 + 54 = -27 + 108 - 135 + 54 = 0$$

Quindi $\lambda = 3$ è soluzione dell'equazione caratteristica (ed è quindi un autovalore di A). Ora, una volta trovata una soluzione di un'equazione polinomiale, le altre possono essere grazie al seguente procedimento, che ci permette di ridurre l'equazione a una di grado più basso.
Il teorema di Ruffini afferma che se un polinomio P in λ di grado n ammette un certo valore λ_0 come radice, allora esso è divisibile per $\lambda - \lambda_0$, ovvero si ha che P si decompone come prodotto $P = (\lambda - \lambda_0)P'$ di $\lambda - \lambda_0$ per un polinomio P' di grado di grado $n-1$ (ovvero di 1 più basso rispetto al grado di P). A questo punto, l'equazione $P = 0$ equivale a $(\lambda - \lambda_0)P' = 0$, il che, per la legge di annullamento del prodotto, può

[6] Che soddissfa automaticamente la condizione $f(v) = \lambda v$ anche se per definizione non è un autovettore

essere vero solo in due casi: o $\lambda - \lambda_0 = 0$, cioè $\lambda = \lambda_0$ (che ci dà soluzione che già conoscevamo) oppure $p' = 0$: ci siamo quindi ridotti a risolvere un'equazione di grado più basso rispetto a quella iniziale.
Per applicare nell ratica questo metodo, bisogna conoscere un modo per trovare il fattore P' nella decomposizione $P = (\lambda - \lambda_0)P'$.
A questo scopo, si usa un algoritmo che desciviamo tramite l'esempio della nostra equazione (5.8), per cui $P = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54$: si inizia riportando, come nello schema seguente, i coefficienti che moltiplicano i monomi che moltiplicano i polinomio (de quello di grado più alto a quello di grado più basso) e in basso a sinistra la radice già trovata, ovvero $\lambda = 3$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -45 & 54 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Ora "abbassiamo", riportandolo nella riga in basso, il primo coefficiente del polinomio

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -45 & 54 \\ 3 & & & & \\ \hline & -1 & & & \end{array}$$

Moltiplichiamo il -1 così abbassato per la radice 3 riportiamo il risultato sotto il secondo coefficiente del polinomio

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -45 & 54 \\ 3 & & -3 & & \\ \hline & -1 & & & \end{array}$$

Ora, sommiamo 12 e -3, riportiamo il risultato nella riga in basso

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -45 & 54 \\ 3 & & -3 & & \\ \hline & -1 & 9 & & \end{array}$$

A questo punto l'algoritmo riparte: così come prima abbiamo moltriplicato -1 per la radice $\lambda = 3$, scriviamo il risultato nella colonna successiva sotto il -45, sommiamo e riportiamo e riportiamo nella riga in basso:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -45 & 54 \\ 3 & & -3 & 27 & \\ \hline & -1 & 9 & -18 & \end{array}$$

Come prevede l'algoritmo, ripartiamo: moltiplichiamo il -18 appena aggiunto nella riga in basso per $\lambda = 3$, scriviamo il risultato nella colonna successiva sotto il 54, sommiamo e riportiamo nella riga in basso:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -45 & 54 \\ 3 & & -3 & 27 & -54 \\ \hline & -1 & 9 & -18 & 0 \end{array}$$

L'ultimo 0 comparso è la conferma del fatto che abbiamo svolto i calcoli correttamente, e i tre coefficiente $-1, 9, -18$ ottenuti prima dello zero sono ordinati dal polinomio P' (di grado 2) tale che $P = (\lambda - 3)P'$, ordinati dal termine di grado più alto fino al termine noto, ovvero

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18)$$

A questo punto, come abbiamo detto sopra, l'equazione caratteristica ha come soluzioni, oltre a $\lambda = 3$, anche della matrice A sono $\lambda = 3$ e $\lambda = 6$ (con $\lambda = 3$ che si ripete due volte come solizione dell'equazione). POossiamo ora determinare gli autovettori corrispondenti, risolvendo il sistema omogeneo che ha $A - \lambda I_3$ come matrice dei coefficenti, prima con $\lambda = 3$ e poi con $\lambda = 6$.
Per $\lambda = 3$ si ha $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Riducendo tale matrice a gradini[7] si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[7] Ma basta anchje osservare che la seconad e la terza riga sono dipendenti dalla prima.

e quindi il sistema $(A-\lambda I_3)x=0$ *si riduce all'unica equazione* $2x_1+x_2-x_3=0$. *Posti allora* $x_2=t$ *e* $x_3=sm$ *si trova* $2x_1=-t+s$, *ovvero* $x_1=\frac{-t+s}{2}$. *Le soluzione del sistema, ovvero l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda=3$, *sono quindi tutte le terne del tipo*

$$\left(\tfrac{-t+s}{2},t,s\right)$$

al variare di $t,s\in\mathbb{R}$.

Analogamente, per $\lambda=6$ *si ha* $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\4&-1&-2\\2&1&-4\end{pmatrix}$.

Riducendo tale matrice a gradini si trova

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\4&-1&-2\\2&1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_2\to R_2+4R_1\\R_3\to R_3+2R_1}]{}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&3&-6\\0&3&-6\end{pmatrix}$$

Dividendo anche l'ultima riga per 3, vediamo che il sistema $2x_1+x_2-x_3=0$ *si riduce a* $\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}$

Posto $x_3=t$, *dalla seconda equazione si trova* $x_2=2t$, *e sostituendo nella prima* $-x_1+2t-t=0$. *ovvero* $x_1=t$. *Le soluzioni del sistema, ovvero l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda=3$, *sono quindi tutte le terne del tipo*

$$(t,2t,t)$$

al variare di $t\in\mathbb{R}$.

Questo esempio mostra che un autovalore λ_0 può presentarsi più volte come soluzione dell'equazione caratteristica: diamo allora la seguente, importante

Definizione 5.2.1. *Il numero di volte che l'autovalore* λ_0 *di un endomorfismo* f *compare come soluzione del polinomio caratteristico si dice moltiplicità algebrica di* λ_0*; si chiama, invece, moltiplicità algebrica di* λ_0 *la dimensione dell'autospazio* $V_{\lambda_0}(f)$ *relativo a* λ_0.

Osservazione 5.2.3. *Dal momento che, come è noto dall'algebra, un polinomio in* λ *ammette una radice* λ_0 *se e solo se nella sua scomposizione in fattori compare il fattore di primo grado* $(\lambda_0-\lambda)$ *(o* $(\lambda_0-\lambda)$*, il segno è indifferente), si ha che* λ *compare* k *volte come radice del polinomio caratteristico se e solo se nella sua scomposizione in fattori compare il fattore* $(\lambda_0-\lambda)^k$.

Ad esempio, è facile verificare con un calcolo diretto che il polinomio $-\lambda^3+12\lambda^2-45\lambda+54$, *ovvero il polinomio caratteristico dell'esempio appena visto, in cui* $\lambda=3$ *appere due volte come radice e* $\lambda=6$ *una volta sola, si decompone come prodotto* $(3-\lambda)^2(6-\lambda)$.

Per quello che riguarda la molteplicità geometrica di un autovettore λ_0, *essa risulta, invece di essere uguale a* $n-r$, *dove* n *è la dimensione del dominio* V *dell'endomorfismo*[8] *e* r *è rango di* $)(A-\lambda_0 I_n)$*: infatti, per definizione la molteplicità geometrica è la dimensione dell'autospazio relativo a* λ_0, *che si trova come insieme delle soluzioni del sistema omogeneo in* n *incognite* $(A-\lambda_0 I_n)x=0$. *Ma come sappiamo datta teoria dei sistemi (Proposizione <++>), un tale sistema ha* ∞^{n-r} *soluzioni (dove* r *è appunto il rango di* $(A-\lambda_0 I_n)$*), che significa che servono* $n-r$ *parametri per descriverne la soluzione generale. Se prendiamo l'esempio di qui sopra* $n-r=2$, *e l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda=3$ *è infatti, dato da tutti e soli i valori della forma* $\left(\frac{-t+s}{2},t,s\right)$ *(due parametri). Decomponendo allora tale vettore come somma della parte che contiene* t *e di quella che contiene* s

Esempio 5.2.3. *Sia*

$$A=\begin{pmatrix}3&\frac12&2\\-1&1&-1\\-1&-\frac12&0\end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico. Si ha

$$\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&\frac12&2\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-\frac12&-\lambda\end{pmatrix}=$$

(sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima riga)

$$=(3-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&-1\\-\frac12&-\lambda\end{pmatrix}-\frac12\det\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-\lambda\end{pmatrix}+2\det\begin{pmatrix}-1&1-\lambda\\-1&-\frac12\end{pmatrix}=$$

[8] Ovvero l'ordine della matrice, se stiamo parlando di autovalori di una matrice

(svolgendo i calcoli)

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

Come abbiamo spiegato nell'esempio precedente, le eventuali radici razionali vanno cercate tra i divisori del termine noto fratto i divisori del termine di grado più alto, quindi ± 1, ± 2.
Sostituendo $\lambda = 1$ *si trova*

$$-1 + 4 + 2 - 5 = 0$$

ovvero $\lambda = 1$ *è soluzione dell'equazione caratteristica (ed è quindi un autovalore di* A*). Per determinare le altre soluzioni, applichiamo l'algoritmo descritto nell'esempio precedente: disponiamo nello schema già visto i coefficienti che moltiplicano i monomi che compongono il polinomio, da quello di grado più alto a quello di grado più basso, e in basso a sinistra la radice già trovata, ovvero* $\lambda = 1$*:*

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Riportiamo nella riga in barro il primo coefficiente del polinomio

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & & & \\ \hline & -1 & & & \end{array}$$

Moltiplichiamo il -1 *così abbassato per la radice 1 e riportiamo il risultato sotto il secondo coefficiente del polinomio*

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & -1 & & \\ \hline & -1 & & & \end{array}$$

Ora, sommiamo 4 e -1, e riportiamo il risultato nella riga in basso

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & -1 & & \\ \hline & -1 & 3 & & \end{array}$$

Continuiamo ad aplicare l'algoritmo come descritto nell'esempio precedente:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & -1 & 3 & \\ \hline & -1 & 3 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & -1 & 3 & \\ \hline & -1 & 3 & -2 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

Come abbiamo detto, l'ultimo 0 comparso è la conferma del fatto che abnbiamo svolto i calcoli correttamente, e i calcoli correttamente, e i tre coefficiente -1, 3, -2 ottenuti prima dello zero sono proprio i coefficienti del polinomio P' *di grado 2 tale che* $P = (\lambda - 1)P'$*, ordinati dal termine di grado più alto fino al termine noto, ovvero*

$$-\lambda^2 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2)$$

A questo punto per trovare le altre radici del polinomio dobbiamo risolvere $-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$*: risolvendo con la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si trova che questo equazione ha come soluzioni* $\lambda = 1$ *e poi con* $\lambda = 2$.
Concludiamo che gli autovalori della matrice A *sono* $\lambda = 2$ *e* $\lambda = 1$*, con quest'ultimo che si ripete quindi due volte come soluzione dell'equazione (in base alla Definizione 5.2.1, esso ha quindi molteplicità algebrica 2).*

Per determinare gli autovettori corrispondenti, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo che ha $A - \lambda I_3$ come matrice dei coefficienti, prima con $\lambda = 1$ e poi con $\lambda = 2$.
Per $\lambda = 1$ si ha $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

Riducendo tale matrice a gradini a gradini si trova subito

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 2R_3 + R_1]{R_2 \to 2R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il sistema $(A - \lambda I_3)x = 0$ si riduce a $\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases}$ La seconda equazionme ci dice che $x_2 = 0$; posto $x_3 = t$ dalla prima equazione si trova $2x_1 + 2t = 0$, ovvero $x_1 = -t$. Le soluzioni del sistema, ovvero gli autovettori di A rilativi all'autovalore $\lambda = 1$, sono quindi tutte le terne del tipo

$$(-t, 0.t)$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$. Si noti quindi che benché la molteplicità algebrica di $\lambda = 1$ sia uguale a 2, la sua molteplicità geometrica è uguale a 1.

Completiamo l'esempio ricavando i restanti autovettori: per $\lambda = 2$ si ha invece $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

Riduciamo a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il sistema $(A - \lambda I_2)x = 0$ si riduce a $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ Posto $x_3 = t$, dalla secondo equazione si trova $-\frac{1}{2}x_2 + 2t = 0$, ovvero $x_2 = 2t$; sostituendo nella prima, si ha $x_1 + t + 2t = 0$, da cui $x_1 = -3t$. Le soluzione del sistema, ovvero l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$, è dato quindi tutte le terne del tipo

$$(-3t, 2t, t)$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Vediamo ora un ultimo esempio di una matrice di ordine 3 in cui tutte le molteplicità algebriche sono uguali a 1.

Esempio 5.2.4. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico. Dopo un calcolo diretto si ha

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 & -3 \\ -3 & -4-\lambda & 3 \\ -1 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

Come si vede subito con una sostituzione, $\lambda = 1$ è radice del polinomio.
Applichiamo l'algoritmo visto negli esempi precedenti per ottenere le altre radici:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & & & & \\ \hline & -1 & & & \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & & -1 & & \\ \hline & -1 & 1 & & \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & & -1 & 1 & \\ \hline & -1 & 1 & & \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Quindi

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$$

Dividendo anche la prioma riga per 3, si vede che il sistema $(A - \lambda I_3)x = 0$ si riduce a $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases}$
La seconda equazione ci dive che $x_2 = 0$; posto $x_3 = t$, dalla prima equazione si trova $x_1 - t = 0$, ovvero $x_2 = t$. Le soluzioni del sistema, ovvero l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$, è dato quindi tutte le terne del tipo

$$(t, 0, t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Per $\lambda = 2$ *si ha*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 2R_3 + R_1]{R_2 \to 2R_2 + 3R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dividendo anche la seconda riga per -3*, si vede che il sistema* $(A - \lambda I_2)x = 0$ *si riduce a* $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ *posto* $x_3 = t$*, la seconda equazione dice che* $x_2 = -t$*, e sostituendo nella prima si* $2x_1 - 3t - 3t = 0$*, da cui* $x_1 = 3t$*. Le soluzioni del sistema, ovvero l'autospazio relativo all'autovettore* $\lambda = 1$*, è dato quindi tutte le terne del tipo*

$$(3t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Infine, per $\lambda = -1$ *si ha*

$$(t, 0, t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Per $\lambda = 2$ *si ha*

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 5R_3 + R_1]{R_2 \to 5R_2 + 3R_1} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dividendo anche la sendo riga per 6, si vede che il sistema $(A - \lambda I_3)x = 0$ *si riduce a* $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ *posto* $x_3 = t$*, la seconda equazione dice che* $x_2 = t$*, e sostituendo nella prima si trova* $5_1 + 3t - 3t = 0$*, da cui* $x_1 = 0$*, è dato quindi tutte le terne del tipo*

$$(0, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 5.2.4. *Notiamo che quando riduciamo a gradini la matrice* $A - \lambda I_n$ *dopo*

Capitolo 6

Esercizi

6.1 Esercizio 1

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \qquad A/b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

6.1.1 Riduzione a gradini:

1^o **soluzione**

$$2\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - 2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} rg(A/b)=2 \\ \infty^{n-2g(A)} \to \infty^{3-2} = \infty^1 \end{array}$$

2^o **soluzione**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \quad \to \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-3z=-2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=\frac{2}{3}-z \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x=1\left(\frac{2}{3}-z\right)-z \\ y=\frac{2}{3}-z \end{cases} \quad = \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3}-z \end{cases} \quad \to z=t$$

A questo punto abbiamo V

$$V = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} - t, t\right) \quad \forall t \in \mathbb{K}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3}-t \\ z=t \end{cases} \quad \to \quad \text{parametriche della retta}$$

$$\begin{array}{c} n_1(1,1,1) \\ n_2(2,-3,-3) \end{array} \quad n_1 \wedge n_2 = (0,3,-3)$$

6.2 Esercizio 2

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

La matrice risulta essere già ridotta a gradini, quindi la matrice composta da una sola riga

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$y = t, \quad z = s, \quad x = 5 - t - 2s$$

$$\begin{cases} x = 5 - t - 2s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

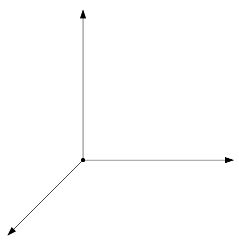
6.3 Esercizio 3

$$O\vec{P}_1, O\vec{P}_2, O\vec{P}_3$$

Partendo da questa base possiamo andare a svilupparlo nel seguente modo:

$$\begin{gathered} O\vec{P}_1 + O\vec{P}_2 - O\vec{P}_3 = v_1 \\ O\vec{P}_2 + O\vec{P}_3 = v_2 \\ O\vec{P}_1 - O\vec{P}_2 = v_3 \end{gathered}$$

Ad esempio,



v_1, v_2, v_3 sono ancora una base?

$$\begin{gathered} O\vec{P}_1 + O\vec{P}_2 - O\vec{P}_3 \equiv (1, 1, -1) \\ O\vec{P}_1 + O\vec{P}_3 \equiv (0, 1, 2) \\ O\vec{P}_1 - O\vec{P}_2 \equiv (1, -1, 0) \end{gathered}$$

Linearmente
indipendenti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + 2R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad rg(A) = 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Sistema non omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Sistema omogeneo

6.3.1 Sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} rg(A) = 2 \\ \dim(V) = 4 \end{matrix}$$

$$\infty^{4-2} \text{ soluzioni } \to \infty^2 \text{ soluzioni}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ -y - z - 3w = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ -y = z + 3w \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ y = -z - 3w \end{cases}$$

$z = t$, $w = s$

$$\begin{cases} x + y + t + s = 0 \\ y = -t - 3s \end{cases} \to \begin{cases} x = 2s \\ y = -t - 3s \end{cases}$$

Soluzione $\to (2s, -t - 3s, t, s) \to$ Sottospazio vettoriale di $||R^4|| \to (2s, -3s, 0, s) + (0, -t, t, 0)$

$\boxed{s(2, -3, 0, 1) + t(0, -1, 1, 0)} \to$ Soluzione generale

$< (2, -3, 0, 1)(0, -1, 1, 0) >$ base del sottospazio vettoriale generato

6.3.2 Sistema disomogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - 2R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ -y - z - 3w = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ y + z + 3w = 1 \end{cases}$$

$z = t$, $w = s$

$$\begin{cases} x = 3 - 1 + \cancel{t} + 3s - \cancel{t} - s \\ y = 1 - t - 3s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 1 - t - 3s \end{cases}$$

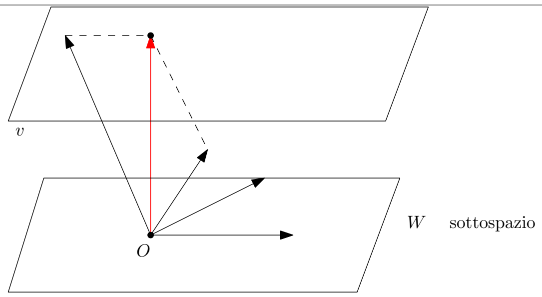
$$\begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 1 - t - 3s \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Soluzione $\to (2 + 2s, 1 - t - 3s, t, s)$

$(2, 1, 0, 0) + (2s, -3s, 0, s) + (0, -t, t, 0)$

$\boxed{(2, 1, 0, 0) + s(2s, -3s, 0, s) + t(0, -t, t, 0)} \to w =$ sottospazio vettoriale

$\boxed{v + w} \to$ sottospazio affine



6.4 Il Determinante

A matrice con $\left|\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{righe} \\ \text{colonne} \end{array}$ [1]

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Insieme delle matrici} \\ \text{con } m \text{ riche e } n \text{ colonne e} \\ \text{a entrate } w\mathbb{K} \end{array}$$

$$\text{es: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$M_n, n(\mathbb{R})$$

$$n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{solo se quadrata}$$

$$M_n \rightarrow \text{matrici quadrate di ordine } n$$

$$\boxed{A \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(A) \in \mathbb{K}}$$

$$A \text{ ha rango } n \text{ (massimo) quando } \det(A) \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Generica} \\ \text{matrice} \\ \text{quadrata} \end{array}$$

[1] matrice quadrata $n \cdot n$