Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettrica industriale

ANALISI MATEMATICA 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse. . .

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, cosi da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni . Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTex insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	**Appartiene**	$\ni$:	**Tale che**
$\notin$	**Non appartiene**	$\leq$	**Minore o uguale**
$\exists$	**Esiste**	$\geq$	**Maggiore o uguale**
$\exists!$	**Esiste unico**	α	**alfa**
$\subset$	**Contenuto strettamente**	β	**beta**
$\subseteq$	**Contenuto**	γ, Γ	**gamma**
$\supset$	**Contenuto strettamente**	δ, Δ	**delta**
$\supseteq$	**Contiene**	ϵ	**epsilon**
$\Rightarrow$	**Implica**	σ, Σ	**sigma**
$\Longleftrightarrow$	**Se e solo se**	ρ	**rho**
$\neq$	**Diverso**		
$\forall$	**Per ogni**		

Capitolo 1

Introduzione

1.1 tipologia in R

1.1.1 Distanza

- R: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- R^2: Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza è $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- R^3: Siano $Q_1(x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- R^4: Siano $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^{D} (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione $R^n * R^n \to R^+ \vee \{0\}$ (ha come immagine al più nullo)

Proprietà 1. *questi sono vincolati dalle seguenti proprietà*

- $d(x, y) \leq 0$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$ *la distanza è nulla se i due punti coincidono*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *la distanza tra x e y uguale alla distanza da y a x*
- $d(x, y) \geq d(x, y) + d(z, y)$ *disuguaglianza triangolare.*

1.2 Intorno

Definizione 1. *Insieme dei punti che distano da un punto P_0 meno di un δ*

- R Intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, P(x) generico punto $d(P_0, P) < \delta$

$$\boxed{|x - x_0| < \delta}$$

- R^2

$$P_0(x_0, y_0)$$
$$P(x, y)$$
$$d(P_0, P) < \delta$$
$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta}$$

Cerchio di cerntro P_0 e di perimetro δ privato della circonferenza.

- R^3

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$Q(x, y, z)$$
$$d(Q, Q_0) < \delta$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (x - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro Q_0 e raggio δ privata della sua superficie.

Punto interno P_0 è interno all'insieme D se:

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset D \tag{1.1}$$

Esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nell'insieme D, cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

Punto esterno P_0 è esterno all'insieme D se è interno al complementare di D, CD

$$\exists I_{P_0,\delta} \subset CD \tag{1.2}$$

esiste un interno di P_0 di ampiezza δ incluso nel complementare dell'interno D

Punto di frontiera P_0 è un un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \rightarrow \text{frontiera dell'insieme D} \tag{1.3}$$

$\forall I_{F_D}$ in esso cadono punti di D e pinti di CD qualunque interno, in esso cadono punti dell'insieme D e del suo complementare.

Punto di accumulazione P_0 è un punto di accumulazione se $\forall I_{P_0}$ cade in un punto $\in D$, se cade un punto di D in I_{p_0}, allora ne cadono infiniti.

Punto isolato P_0 è un punto isolato se $\exists I_{P_0,\delta}$ in cui non cade nessun punto dell'insieme.

Insieme Aperto

Definizione 2. *A si dice aperto se $\forall P \in A$ $\exists I_p \subset A$ per qualunque punto di A esiste un interno incluso in A, cioè ogni intorno di P è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni $]a:b[$; $x^2 + y^2 < r^2$ cerchio senza circonferenza:*

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 \qquad \textit{triangolo senza lati} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2.1 Insieme chiuso

Definizione 3. *A si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiususura, che è formato dall'insieme tesso più gli eventuali punti di accumunlazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione. $[a:b]; x^2 + y^2 \leq r^2$ cerchio più circonferenza:*

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 \qquad \textit{tringolo con lati} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2.2 Insieme connesso

Definizione 4. *un insieme A si dice connesso se e solo se $\forall P_1, P_2 \subset A\ \exists \Gamma i(P_1, P_2) \subset A$. A è connesso se per qualunque P_1, P_2 di A esiste una spezzata inclusa in in A*
A si dice semplicemente connessa se qualunque chiusa inclusa in A è frontiera dell'insieme.

1.2.3 Insieme convesso

Definizione 5. *un insieme A si dice convesso se per ogni coppia di $x, y \in A$ il segmento $\bar{xy}$ è contenuto in A*

Insiemi Limitati In R : A è limitato se $\forall x \in A$: $x \leq M$

$[-1; 1]$ limitato

In R^2 : A è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2 \leq M} \tag{1.6}$$

Insieme illimitato In R : $[2; +\infty[$ illimitato

$$InR^2 : illimitato \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

1.2.4 Coordinate Polari

Definizione 6. *in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia $P(x, y)$ un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiano X e y oppure le coordinate polari ρ e θ.*

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = e^3 \frac{\cos^2\theta}{e^2} \tag{1.8}$$

1.2.5 Limiti e continuità

Definizione 7. *$f(x, y)$ una funzione definito in D e siano (x_0, y_0) punto di accumulazione per D*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \forall \xi > 0\ \exists \delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0,y_0),\delta} / \{(x_0, y_0)\}, \forall (x, y) \in I | f(x, y) \tag{1.9}$$

Per qualunque $\xi > 0$ esiste un $\delta(\xi) > 0$ per cui qualunque intorno di (x_0, y_0) al più x_0, y_0 e per qualunque (x_0, y_0) di quast'intorno la funzione dista da i meno di ξ.

1.2.6 Continuità

Definizione 8. *Sia $f(x, y)$ definita in D, $f(x, y)$ si definisce continuo in $(x_0, y_0) \in D$*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{1.10}$$

1.2.7 Esistenza del limite

Definizione 9. *Calcolando il limite con f in forma polare esiste se non dipende da θ. È possibile calcolare il limite di f in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si* *considerino queli si ina generica retta.*

$$y = y_0 + m(x - x_0) \tag{1.11}$$

- *Se il limite dipende da m esso non siste.*
- *Se non dipende da m esite.*

1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

Teorema 1. *Sie $f(x, y)$ definita in un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ assume tutti i valori campresi fra il massimo ed il minimo di $f(x, y)$ su D*

1.2.9 Teorema di Weierstrass

Teorema 2. *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.*
Sia $f(x, y)$ una funzione continua in D e sia D un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ ha massimo e minimo assoluto in D.

Capitolo 2

Derivate Parziali

2.1 Derivate parziali di primo grado

Definizione 10. *Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un punto interno ad A*
Consideriamo un interno circolare di $P(x_0, y_0), I(x_0, y_0), \delta$, in netto sulla retta $y = y_0$ e incrementa la x_0 passante da x_0 a $x_0 + h$. Ho così un punto $P(x_0 + h, y_0) \in A$.
Definisco il rapporto di $f(x, y)$ nella sola x

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.1}$$

$f(x, y)$ si definisce derivabile parzialmente se $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l \in R$ reale e finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fx = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.2}$$

Analogamente, considero un interno di $P(x_0, y_0), I(x_0, y_0), \delta$. Mi ruoto sulla retta $x = x_0$ e incremento la y_0 passando da y_0 a $y_0 + k$. Ho così un punto $P(x_0, y_0 + h) \in A$.
Definisco il rapporto ingrementale di $f(x, y)$ nella sola y

$$\frac{f(x_0 + k, y_0) - f(x_0, y_0)}{k}$$

derivabile parzialmente se $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = l \in R$ reale e finito.
Se in un punto (x, y) esistono entrambi le derivate parziale si dice che la funzione è derivabile in (x,y) inoltre se f è derivabile in ogni punto $(x, y) \in A$, si dice che f è derivabile in A.

2.1.1 Significato geometrico

- Lo derivata prima par parziale in P è $fx(x_0, y_0)$, è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x, y)$ con il piano $y = y_0$

- La derivata prima parziale in P, $fy(x_0, y_0)$ è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x, y)$ con il piano $x = x_0$

Se esistono entrambe allora le due rette tangenti alle sezioni della funzione individuano il piano tangente al solido nel punto $P(x_0, y_0, z)$

2.2 Derivata parziale seconde

Definizione 11. *Sia $f(x,y)$ una derivabile e siano definite in un deminio le due derivate parziali*

$$f_x(x,y) \quad f_y(x,y)$$

Tali funzioni passano a loro volta essere derivabili e si ottengono così le derivate seconde parziali di $f(x,y)$

$$f(x,y)$$

$$f_x(x,y) \qquad\qquad f_y(x,y)$$

$$f_{xx}(x,y) \quad f_{xy}(x,y) \quad f_{yx}(x,y) \quad f_{yy}(x,y)$$

$\begin{matrix} f_{yx}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) \end{matrix}$ derivata seconde pure $\qquad$ $\begin{matrix} f_{yx} \\ f_{yx} \end{matrix}$ derivata seconde resto

$f_{yx}(x,y)$

derivata prima rispetto a

y poi rispetto a rispetto a x

con n variabili si hanno n^2 derivate seconde parziali – Spesso le derivate seconde sono disposte in una matrice quadrata, detta `hessiana`, con il sinbolo D^2

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ n variabili} \rightarrow n * n \tag{2.3}$$

Se esistono le quanto derivate di f, nel punto (x,y), si dice che f è dirivabile due volte in (x,y). Se ciò accade $\forall (x,y) \in A$, f è derivabile due volte nell'insieme A.

2.2.1 Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)

Teorema 3. *Sia $f(x,y)$ definita in D e derivabile due volte $\forall (x,y) \in D$.*
Se le derivate seconde in (x_0,y_0) $f_{xy}(x_0,y_0)$ e $f_{yx}(x_0,y_0)$ sono continue in (x_0,y_0) allora risulta $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.

In generale se vale il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana può essere scritta come

$$H = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$detH = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = f_{xx} * f_{yy} - (f_{yx})^2$

2.3 Massimi e minimi relativi

Definizione 12. *Sia $f(x,y)$ una funzione definita in un insieme D, un punto $p_0(x_0,y_0) \in D$, si dice di massimo relativo per la funzione se esiste intorno circolare di P_0 per cui il valore assunto della funzione nei punti dell'interno è minore o uguale a quello assunto in P_0.*
Analogamente un punto $P_0(x_0,y_0)$ si dice di minimo relativo per la funzione se esiste un interno circolare di P_0 per cui il valore assunto dalla funzione nei punti dell'intorno è maggiore o uguale.

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x,y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \textit{Massimo relativo}$$
$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x,y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \quad \textit{Minimo relativo}$$

2.3.1 Teorema di Fermat

Teorema 4. *Sia $f(x,y)$ derinita in D e derivabile in un punto $P_0(x_0, y_0)$*
Se in $P_0(x_0, y_0)$ $f(x,y)$ ha un massimo o un minimo relativo, allora le derivate prime parziali si annullano ($\nabla f = 0$ gradiente nullo). La pendenza della tangente è zaro un massimo o minimo.

Gradiente

Sia $f(x,y)$ una funzione derivabile in un punto (x,y), cioè esistano in (x,y) le due derivate parziali f_x e f_y.
Si definisce gradiente di f(x,y) nel punto (x,y): i vettore ∇f le cui componenti sono le derivate parziali di f(x,y).

$$\nabla f(x,y) \equiv (f_x(x,y); f_y(x,y)) \tag{2.4}$$

Massimi e minimi – condizione necessaria

Definizione 13. *Se $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di massimo/minimo relativo il gradiente è nullo. Così di massimo o minimo relativo interni al dominio della funzione f vanno ricercati tra i punti che annullano la funzione f. Pertanto un punto critico per una funzione derivabile e un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.*

Capitolo 3

Differenziabilità

Definizione 14. *Sia $f(x,y)$ definita in D e $P_0(x_0,y_0) \in D$. In $P_0, z = f(x_0,y_0)$, incremento la x_0 di un h e la y_0 di un k.*
Così passo da $P_0(x_0,y_0)$ a $P(x_0+h,y_0+k)$. La funzione avrà avuto un certo incremento

$$f(x+h,y_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)$$

Si definisce differenziale *in $P_0(x_0,y_0)$ se $\exists A,B \in R : f(x_0+h,y_0+k)-f(x_o,y_0) = Ah+Bk+o(\sqrt{h^2+k^2})$, cioè se esistono due costanti reali A e B per cui l'increm,ento di $f(x,y)$ che si ha passando da P_0 a P si può riscrivere come somma di una parte lineare $Ah+Bk$ e di un infinitesimo di ordine superiore a $\sqrt{h^2+k^2}$ (distanza di P_0 da P).*
Se $f(x,y)$ ammette derivate prime parziali le due costanti A e B sono:

$$\begin{cases} A = fx(x_0,y_0) \\ B = fy(x_0,y_0) \end{cases}$$

e il differenziale diventa

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \tag{3.1}$$

Esempio 1. *verificare che $z = xy$ è differenziale $\forall(x_0;y_0) \in R^2$, se z è differenziale $\rightarrow f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$ dove*

$$\begin{cases} A = fx(x_0,y_0) \\ B = fy(x_0,y_0) \end{cases}$$

se z è derivabile in (x_0,y_0).

$$f(x_0+h,y_0+k) = \underbrace{(x_0+h)(y_0+k)}_{Sostituisco} = x_0y_0 + x_0k + y_0h + hk$$

$f_x = y$ $fx(x_0,y_0) = y_0$	$f_y = x$	$f_y(x_0,y_0) = x_0$
f *è derivabile in* (x_0,y_0)	$A = y_0$	$D = x_0$

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$\cancel{x_0y_0} + \cancel{x_0k} + hk - \cancel{x_0y_0} = \cancel{y_0h} + \cancel{x_0k} + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$hk = o(\sqrt{h^2+k^2})$$

detto quindi dimostrare che $\lim_{h\to 0 k\to 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ *e poi passo alle coordinate polari:*

$$h = \rho\cos\theta$$
$$k = \rho\sin\theta \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}\cos\theta * \cancel{\rho} sin\theta}{\cancel{\rho}^2} \qquad z = xy \text{ defferenziale } \forall (x_0, y_0) \in R^2$$
$$e^2 = h^2 + k^2$$
$$h \to 0, k \to 0, \rho \to 0$$

3.0.1 Tutte le funzioni differenziali sono continue

Sia $f(x, y)$ differenziabile (x_0, y_0), allora $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Ip:
$f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th:
$f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Se $f(x_0, y_0)$ è continua in (x_0, y_0)

$$\lim_{h\to 0\ k\to 0} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0$$

Calcolo il limite a destra per $h \to 0$ $k \to 0$

$$\lim_{h\to 0\ k\to 0} \underbrace{Ah}_{0} + \underbrace{Bk}_{0} + o\underbrace{(\sqrt{h^2 + k^2})}_{0} = 0 \text{ per cui } f(x, y) \text{ è continua in } (x_o, y_0)$$

□

3.0.2 Tutte le funzioni differenziali sono derivabili

Sia $f(x, y)$ differenziabile in un punto (x_0, y_0). Allora $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Ip:
$f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th:
$f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

divido entrambi per h e calcolo il limite per $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = fx} = \underbrace{\frac{Ah + o(\sqrt{h^2})}{h}}_{A}$$

$fx(x_0, y_0) = A$
Analogamente si demostra che $f_y(x_0, y_0) = B$. Qundi dato che esistono f_x e f_y in (x_0, y_0), $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0) e in oltre $A = fx(x_0, y_0)$, $B = fy(x_0, y_0)$ □

Esercizio 1. *Dimostrare che* $z = x^2 = y^2$ *è differenziabile in (1;1) – Per definire*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah = Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$f(x_0+h, y_0+k) = (1+h)^2 = (1+k)^2$ $\quad f(x_0, y_0) = 1+1 = 2$

$A = f(1,1) = |2x|_{x=1} = 2$ $\quad B = f_y(1,1) = |2y|_{y=1} = 2$

Così ho $(1+h)^2 + (1+k)^2 - 2 = 2h + 2k + o(\sqrt{h^2+k^2})$

$$h^2 + k^2 = o(\sqrt{h^2+k^2})$$

devo dimostrare che $\lim_{h\to 0\ k\to 0} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ *pasando a coordinate polari*

$$h = e\cos\theta$$
$$k = e\sin\theta$$
$$e^2 = h^2 + k^2$$
$$k \to 0, h \to 0, p \to 0$$

$\lim_{e\to 0} \frac{e^2}{|e|} = 0 \to z = x^2 + z^2$ *è differeziabile in (1,1)*

3.0.3 Le funzioni con derivate parziali continue sono diferenziabili

Definizione 15. *Sia* $f(x,y)$ *definita in* D_1 *e sia derivabile in* D. *Sono* f_x *e* f_y *continue in* D, *allora* $f(x,y)$ *è differenziale in* D.

Condizione sufficiente per la differenzialità

Definizione 16. *Affinché una funzione sia differenziabile in* (x_0, y_0) *basta che in* (x_0, y_0) *abbia derivate. In questo modo per determinare se una funzione è differenziabile in un punto si calcola le derivate parziali in quel punto, se esistono la funzione è differenziabile, in caso contrario non è derivabile.*

Esempio 2. *Dimostrare che* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *non è differenziabile in (0;0)*

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad D: x^2+y^2 > 0$$
$$z_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad D: x^2+y^2 > 0$$

Sia z_x *sia* z_y *sono definite per* $x^2+y^2 > 0$ *cioè nei punti esterni al cerchio di centro (0,0) e 1, frontiera eclusa. Il punto (0,0) è interno al cerchio, quindi in esso* $f(x,y)$ *non è derivabile. Per cui in punto (0,0) f(x,y) non è neanche differenziabile.*

3.1 Significato geometrico del differenziale e piano tengente

3.1.1 Differenziale primo

È la parte lineare nella definizione di differenziale

$$f(x,y) \text{ definita in } D \quad (x_0, y_0) \in D$$

$f(x,y)$ differenziale in (x_0, y_0) se

$$f(x_0+h, y_0+_k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}_{\text{parte lineare}} + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

3.1.2 Piano Tangente

La $f(x,y)$ una funzione derivabile in (x_0, y_0), il piano tangente alla funzione (x_0, y_0, z_0) ha equazione:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$\vec{n}$ direzione ortogonale al piano tangente, è unitario

$$\vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

poiché $\nabla f(f_x, f_y)\ |\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 \to \vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1+|\nabla f|}}$

Esempio 3. $z = x^2 + y^2$ *(1,1)*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z_0 = f(1,1) = 1 + 1 = 2 \quad z - 2 = 2(x-1) + 2(y-1) \quad f_x = 2x|_{1_{ii}} = 2$$
$$f_y = 2y|_{1_{ii}} = 2$$

3.1.3 Significato geometrico del differenziale primo

Passando da P_0 a P $f(x)$ si incrementa da $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$ – Il differenziale primo dy indica la variazione che subisce la retta tangente passando da P_0 a P.
L'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ si approssima sempre più con dy per incrementi $h \to 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x)(x - x_0) - f(x_0) + o|x|$$

L'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ differisce dal valore $f'(x)(x - x_0)$ [retta tangente] per un $o|x|$, $o|x|$ ci da l'errore.

3.1.4 Funzioni composite

Definizione 17. *Sia $x(t)$ E $y(t)$ due funzioni reali definite al variare in un intervallo I di R. $t \in T \leq R$ corrisponde il punto $(x(t), y(t))$*

$$\begin{cases} x = x(t) & \textit{Rappresenta nel piano una currva in frontiera} \\ y = y(t) & \textit{Parametrica} \end{cases}$$

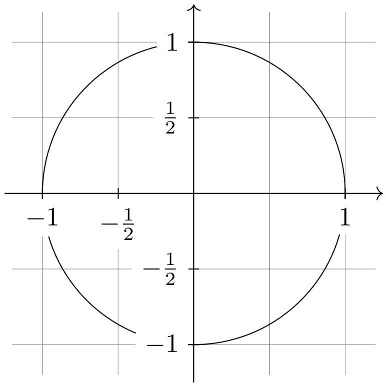
Al variare di $t \in I \leq R$
$x = x(t), y = y(t)$ descrive una curva γ nel piano

Esempio 4.

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \qquad \begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$y = (t - 1) + 2 = x + 2 \qquad r^2 \cos t + r^2 \sin^2 t = r^2$$

circonferenza con certro nel origine e raggio r



$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = r^2$$

Se si ha $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ *al variare di* $t \in T \leq R$ *si ha una curva nello spazio.*

Esempio 5. $\begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \\ z = Kt \end{cases}$ *elica circolare*

3.1.5 Funzione composta

Definizione 18. *Sia* γ *la curva* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in I < R$ *di codominio B*
$I \to B$
Sia f(x,y) definita in A
$t \in f(x(t), y(t))$ *se il codominio di* γ *coincide con il codomio di* $f(x, y)$*, cioè* $B \leq A$

3.1.6 Teorema della derivata della funzione composta

Definizione 19. *Sia* γ *la curva di punti* $(x(t), y(t))$ *e sia derivabile in un intervallo I (cioè esistono)*
Sia f(x,y) differenziabile in x(t)
Allora la funzione conposta da $F(t) = f(x(t), y(t))$ *è derivabile in I e la sua derivata prima vale:*

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \tag{3.2}$$

$$(\nabla f * \Gamma'(t)) \quad \nabla f \equiv (f_x; f_y) \quad \Gamma' \equiv (x'(t); y'(t))$$

Ipotesi $\gamma \equiv (x(t), y(t))$ *derivabile in I*
$f(x, y)$ *differenziale in x(t)*

Tesi $F(t) = f(x(t), y(t))$ *derivabile in I*
$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$

Dimostrazione. Devo dimostrare che $\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = F'(t) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$
Scrivo l'incremento di F(t) per un h

$F(t + h) - F(t) = f[x(t + h), y(t + h)] - f[x(t), y(t)]$ Per definizione di funzione composta F(t)

Poiché f(x,y) è differenziabile si ha

$$f[x(t+h),y(t+h)]-f[x(t),y(t)] = f_x \underbrace{[x(t),y(t)]}_{fx}\underbrace{[x(t+h)-x(t)]}_{h} + f_y \underbrace{[x(t+h)-y(t+h)]}_{fy}\underbrace{[y(t+h)-y(t)]}_{k}$$
$$+o\left(\sqrt{\underbrace{[x(t+h)-x(t)]^2}_{h^2}+\underbrace{[y(t+h)-y(t)]^2}_{k^2}}\right)$$

Divido entrambi i membri per h e calcolo il $\lim_{h\to 0}$

I membro

$$\lim_{h\to 0}\frac{f[x(t+h),y(t+h)]-f[x(t),y(t)]}{h} = F'(t)$$

II membro

$$\lim_{h\to 0} fx[x(t),y(t)]\underbrace{\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right]}_{x'(t)} + \lim_{h\to 0} f_y[x(t+h)-y(t+h)]\underbrace{\left[\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right]}_{y'(t)}$$
$$+\lim_{h\to 0} o\underbrace{\left(\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2}\right)}_{0}$$

$$F' = f_x[x(t),y(t)]x'(t) + f_y[x(t),y(t)]y'(t)$$

□

Esempio 6.

$$z = x^2 y \qquad \begin{cases} x(t) = -t & F(t) = z(x(t),y(t)) = -t^2 * t = -t^3 \\ y(t) = t & F'(t) = z' = -3t^2 \end{cases}$$

$$F'(t) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_x(x(t),y(t))y'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = -3t^2$$

3.2 Teorema differenziabilità delle funzioni composite

Teorema 5. *Siano $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n funzioni in k variabili $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1,t_2,\dots,t_k) \\ x_2 = x_2(t_1,t_2,\dots,t_k) \\ \dots \\ x_n = x_n(t_1,t_2,\dots,t_k) \end{cases} \tag{3.3}$$

Componiamo le funzioni ottenendo la funzione composita

$$f[x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k)]$$

Siano $(x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k))$ n funzioni definite in un insieme aperto $D \leq R^n$ e siano derivabili parzialmente rispetto a t_i $(i = 1, 2, \dots, k)$.
Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ una funzione definita in A contenente in codominio $x(D)$ e sia f differenziabile in A
Allora la funzione composita $F(t) = x_1(t_1,t_2,\dots,t_k), x_2(t_1,t_2,\dots,t_k), \dots, x_n(t_1,t_2,\dots,t_k)$ è derivabile parzialmente rispetto a $t_i(i = 1, 2, \dots, k)$ nel punto t.

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) + \frac{\partial x_i}{\partial t_i}(t) \text{ (si somma sugli inasci ripetuti)}$$

Inoltre, se f e $(x_1(t_1,t_2,\ldots,t_k), x_2(t_1,t_2,\ldots,t_k),\ldots,x_n(t_1,t_2,\ldots,t_k))$ sono di classe C^1, anche $F = f(x(t)) \in c^1$ ed è quindi differenziabile.

$$\hbar = k = 2 \text{ coordinate polari}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \varphi \\ t_2 = \varphi \end{cases} \quad f(x,y) \quad \begin{cases} x = x(\varphi,\varphi) \\ y = y(\varphi,\varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}x\rho + \frac{\partial f}{\partial y}y\rho = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}x\rho + \frac{\partial f}{\partial y}y\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\sin\varphi)$$

3.3 Differenziale secondo

Definizione 20. *d^2f è il differenziale del differenziale primo*

$$d^2f = d(df) = d(f_xh + f_yk) = \frac{\partial}{\partial x}(f_xh + f_yk)h + \frac{\partial}{\partial x}(f_xh + f_yk)k =$$
$$= (f_{xx}h + f_{xy}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k = f_{xx}h^2 + f_{xy}khx + f_{xy}hx + f_{yy}k^2$$

Se $f(x,y) \in c^2$ (derivate parziali II continue) vale il teorema di Schwarz (2.2.1), cioè $fyx = fxy$ – Il differenziale secondo allora diventa

$$d^2f = fxxh2 + 3fxyhk + fyyk^2$$

Per ipotesi il gradiente è nulla $\Delta f(x_0,y_0) = 0$ cioè $\nabla f(x_0,y_0) \equiv (f_x(x_0,y_0), fy(x_0,y_0)) \equiv (0,0)$ ovvero le derivate parziali prime sono nulle $fx(x_0,y_0) = 0$, $fy(x_0,y_0) = 0$ – Ciò comporta l'annullarsi del differenziale primo

$$df(x_0,y_0) = fx(x_0,y_0)h + fy(x_0,y_0)k = 0 * h + 0 * k = 0$$

Per cui nella foruma di Taylor si ha:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \text{ Forme quadratiche}$$

Il segno di $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ è lo stesso di $\frac{1}{2!}d^2f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$, cioè è lo stesso differenziale secondo.
Per ipotesi $detHp(x_0,y_0) > 0$, ($f(x,y) \in C^2_A \Rightarrow$ vale il teorema di Schwarz)

$$\begin{vmatrix} fxx(x_0,y_0) & fxy(x_0,y_0) \\ fyx(x_0,y_0) & fyy(x_0,y_0) \end{vmatrix} = fxx * fyy - fxy^2 > 0$$

e $fxx(x_0,y_0) > 0$
Ciò implica per definizione che la forma quadratica associata ad $Hp(x_0,y_0)$ è positiva tutto ciò implica $d^2f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) > 0$
Per cui $f(x,y) - f(x_0,y_0) > 0$

$$\text{cioè } f(x,y) > f(x_0,y_0) \qquad \text{difiniziondi di Minimo relativo (2.3)}$$

quindi (x_0,y_0) è un punto di muinimo relativo
Analogamente, se $f(x_0,y_0) < 0$ si dimosta che (x_0,y_0) è un punto di massimo relatovo (2.3)

3.3.1 Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo

Sia $f(x,y)$ definita in A, $f(x,y) \in C^2_A$, $(x_0,y_0) \in A$
Se $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

$$detH_F(x_0,y_0)\begin{cases} >0 \begin{cases} fxx(x_0,y_0) > 0 \text{ Minimo relativo} \\ fxx(x_0,y_0) < 0 \text{ Massimo relativo} \end{cases} \\ <0 \text{ Punto di sella } (\underline{\text{non sono presenti Max e min}}) \\ =0 \text{ Non si vsa se sono presenti Max o min} \end{cases}$$

Esempio 7. *Massimi e minimi*

1. $z = x^2 + y^2$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} zx = 0 \\ zy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad in(0,0)\ \nabla f = 0 \text{ può } MAX \text{ o } MIN$$

$$detH_f = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{zy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

2. *Semisuperfici sferica* $z = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{-x}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \end{cases} \qquad dominio\ D\ x^2 - y^2 < \Gamma^2$$

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (0,0) \leftarrow D \text{ può esserci un Max e un Min}$$

Verifico e trovo che $detH > 0\ f_{xx} < 0 : in(0,0)$ *è presente il Max.*

3. *Cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

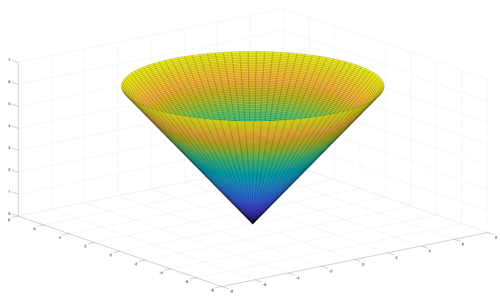


Figura 3.1: Rappresentazione grafica della conica

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Nota 1. *sarebbe (0,0) ma il dominio delle derivate* $x^2 + y^2 > 0$ *cioè* $\forall (x,y) \in R^2 - \{0,0\}$ *in (0,0) non è derivabile.*

Sappiamo[1] *che in (0,0) c'è un minimo assoluto*

[1] si vede geometricamente

4. $z = x^4 + y^4$

$$\begin{cases} z_x = 4x^3 = 0 \\ z_y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \textit{in (0,0) può esserci Max/Min relativo}$$

$$detH = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} f_{xx}(0,0) = 12x^2|_{0,0} = 0 \\ f_{xx}(0,0) = 0 \\ f_{yy}(0,0) = 12y^2|_{0,0} = 0 \end{matrix}$$

$detH = 0 \rightarrow$ *non so se in (0,0) c'è un massimo o un minimo relativo.*
Per definire se esiste un massimo o un minimo relativo uso:

$$\begin{matrix} \min f(x_0,y_0) \leq f(x,y) & 0 \leq x^4 + y^4 & x^4 + y^4 \geq 0 & \underline{SI}\ \forall(x,y) \textit{ risulta da } x^4 + y^4 \geq 0 (0,0) \min \\ \max f(x_0,y_0) \geq f(x,y) & 0 \geq x^4 + y^4 & x^4 + y^4 \leq 0 & \underline{NO} \end{matrix}$$

3.3.2 Ricerca del massimo e del minimo assoluti

Condizioni sufficienti per l'essistenza del Massimo e del minimo assoluto

Teorema di Weierstrass

Teorema 6. *Sia f(x,y) definita in D, i continua in D chiuso e limitato, allora il minimo e massimo assoluto in D.*

Ipotesi:

$$f \in C^0_D$$

D chiuso e limitato

Tesi: $\exists \min$ *con* $m = f(x_1, y_1), M = f(x_2, y_2)$ *tale che* $m \leq f(x,y) \leq M$

Ricerca dei punti di Massimo e minimo assoluti:

- *nei punti di massimo o minimo relativo;*
- *nei punti di non derivabilità;*
- *nei punti di frontiera.*

Vanno ricercati quindi nei seguenti modi:

1. $\nabla f = 0$ *dove il gradiente si annulla;*
2. $\exists \nabla f$ *dove il gradiente non esite;*
3. *sulla FD sulla frontiera.*

Studio sulla frontiera

Sia ξ una superficie definita in un insieme D e sia FD la mia frontiera
La frontiera FD è una curva[2] e suoi punti linitano l'iperbole ξ.
Possiamo definire la frontiera in forma parametrica

$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

[2] o insieme di curve

Calcolo la funzione $f(x,y)$ sui punti della frontiera

$$f(x,y) \to F(t) = f(x(t), y(t)) \text{ funzione di 1 variabile} \tag{3.4}$$

studio del massimo e minimo per $F(t) = 0 \begin{cases} F'' > 0 \,\mathrm{min} \\ F'' < 0 \,\mathrm{max} \end{cases}$

Calcolo i valori della funzione nei punti di Massimo/minimo e li confronto con i valori Massimo/minimo relativi nel dominio e i valori nei punti di non derivabilità. La frontiera può anche essere in forma cartesiana

$$y = y(x) \quad a \leq x \leq b \tag{3.5}$$

Calcolo la funzione nei punti della frontiera e procedo come visto prima $f(x,y) \to F(t) = f(x(t), y(t))$

Esempio 8. *Determinare il massimo e il mino assoluto di* $f(x,y) = 1+2x^2+\sqrt{x^2+y^2}$ *in* $D: \{x^2+y^2 \leq \Delta\}$

1. $\nabla f = 0$
2. $\nexists \nabla f$
3. FD

1. $\nabla f(x,y) = 0 \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + \frac{x}{|x|} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   $\nabla f = 0$ *in (0,0) che non è nel C.E. delle derivate parziali per cui* $\nabla f \neq 0$ $\forall (x,y) \in A$ A *dominio* f_x *e* f_y

2. $\nexists \nabla f$ *le derivate parziali perime sono definite* $\forall (x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \neq 0$ *cioè in* $R^2 - \{0,0\}$

$$(0,0) \text{ pnto di non derivabilità } f(0,0) = 1$$

3. *FD*