Manuale base GNU/Octave

Nicola Ferru

21 giugno 2023

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Definizione 1. *GNU/Octave è un applicativo per il calcolo matriciale che consente di svilgere tutte le operazioni base e non solo a riguardo, dallo somma, divisione, moltiplicazioni e sottrazioni tra matrici, calcolo del determinante, del grado e tanto altro.*

1.1 Pacchetti e impostazioni base

1.1.1 Pacchetti

Nome	**Descrizione**
fuzzy-logic-toolkit	Un toolkit di logica fuzzy per lo più compatibile con MATLAB per Octave
symbolic	Aggiunge funzionalità di calcolo simbolico a GNU Octave
Circuit Simulator (OCS)	Risolvere equazioni di circuiti elettrici DC e transitori.
Control	Strumenti CACSD (*Computer-Aided Control System Design*) per GNU Octave, basati sulla libreria SLICOT.
instrument-control	Funzioni I/O di basso livello per interfacce seriali, i2c, parallele, tcp, gpib, vxi11, udp e usbtmc.

Tabella 1.1: pacchetti utili

1.1.2 Impostazioni e formati

Nome	**Descrizione**	**Visuale**
rat	Aspetto rateo (invece dei numeri reali rende numeri frazionari)	1/2
short	Formato breve a decimale fisso con 4 cifre dopo la virgola. (*default*)	0.5000
long	Formato lungo a decimale fisso con 15 cifre dopo la virgola per i valori doppi e 7 cifre dopo la virgola per i valori singoli.	0.500000000000000
shortE	Formato breve in annotazione scientiica con 4 cifre dopo la virgola	5.0000e-01
longE	Formato lungo a decimale fisso con 15 cifre dopo la virgola per i valori doppi e 7 cifre dopo la virgola per i valori singoli.	5.000000000000000e-01
shortG	Formato breve, decimale fisso o notazione scientifica, a seconda di quale sia più compatto, con un totale di 5 cifre.	0.5000
longG	Formato lungo a decimali fissi o notazione scientifica, qualunque sia il più compatto, con un totale di 15 cifre per i valori doppi e 7 cifre per i valori singoli.	0.500000000000000
shortEng	Breve notazione ingegneristica (l'esponente è un multiplo di 3) con 4 cifre dopo la virgola.	500.0000e-003
longEng	Notazione ingegneristica lunga (l'esponente è un multiplo di 3) con 15 cifre significative.	500.000000000000000e-003
+	Formato positivo/negativo con caratteri +, - e vuoti visualizzati per elementi positivi, negativi e zero.	+
bank	Formato valuta con 2 cifre dopo la virgola.	0.50
hex	Rappresentazione esadecimale di un numero binario a doppia precisione.	3fe0000000000000

Tabella 1.2: Impostazioni e formati

Capitolo 2

Funzioni base

2.1 Addizioni e sottrazioni tra matrici

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

Calcolare $2A - 3B$ e $3A - 2B$, per svolgerlo non è complesso, infatti, il primo step è moltiplicare le matrici per il valore presente esternamente e poi fare la sottrazione tra matrici, il risultato è il seguente:

$$\begin{aligned} 2A - 3B = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 \cdot 4 & -3 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 & -3 \cdot 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -12 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

stessa cosa ma con valori inversi

$$3A - 2B = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}$$

2.1.1 Soluzione per Octave o Mathlab

```
%% Prima operazione
A = [ 2, 0; 3, -1]; % Crea la prima matrice
B= [ 4, -1; 1, 2]; % Crea la seconda matrice
ris = 2*A-3*B; % svolge la prima operazione (2A-3B).
ris % stampa il risultato

%% seconda operazione
ris =3*A-2*B;
ris
```

Listing 2.1: svolgimento di una sottrazione tra matrici 2x2

Stampa a schermo

```
ris =


  -8   3
   3  -8


ris =


  -2   2
   7  -7
```

2.2 Determinante di una matrice

Un operazione molto utile è il determinante della matrice, fondamentale per lavorare su questa categoria di strutture, per calcolarlo non è difficile, in programmi come GNU/Octave e anche Matlab este la funzione **det**(M), che fa il classico svolgimento, prendendo un esempio concreto:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

Partendo da questa base dobbiamo fare la sequente operazione

$$\det(A) = \det \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 8 = 12 - 40 = -28 \tag{2.3}$$

Quindi il determinante della matrice 2x2 A è -28, questo è anche il metodo che potete utilizzare su octave per fare la verifica del valore ottenuto con la funzione già pronta.

2.2.1 Soluzione per Octave o Mathlab

```
%% Svolgimenti interattivo
A=[3, 5; 8, 4];
ris = det(A);
A

ris

%% svolgimento manuale
ver =  A(1)*A(4) - A(3)*A(2);
ver
```

Listing 2.2: svolgimento del determinante di una matrice 2x2

Stampa a schermo

```
A =

   3   5
   8   4

ris = -28
ver = -28
```

2.3 Matrice inversa

Un operazione fondamentale è proprio la matrice inversa che serve per diverse formule presenti nel percorso di Ingegneria. quindi per calcolare l'inversa basta utilizzare il comando **inv**(M), uno dei problemi che si può riscontrare in questo caso è il fatto che il risultato possa essere espresso in numeri reali, cosa non molto pratica, quindi per sistemare questo problema basta applicare il formato rateo, come speficicato sopra, infatti, esiste una funziona di formato chiamata rat che può essere attivata con il semplice comando **format rat** e il problema verra risolto. Ma il metodo migliore è quello di fare un esempio. Prendiamo una matrice 3x3

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 \\ 9 & 1 & 7 \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

La sua inversa sarà A^{-1} che sarà composta dei seguenti valori

2.4 Diagonale di una matrice

Un altra funzione che in Matlab e octave viene fatta in modo pratico e veloce è la stampa della diagonale. Infatti, dentro l'ambiente viene utilizzato il comando **diag**(M).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 20 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 13 & 7 \\ 10 & 39 & 37 & 5 \end{pmatrix}$$

Questo comando va a creare un vettore composto da i numeri presenti nella diagonale della matrice, in questo caso l'istruzione **diag**(A), selezionera i numeri scritti in rosso:

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{2} & 20 & 1 & 3 \\ 4 & \color{red}{9} & 12 & 0 \\ 6 & 4 & \color{red}{13} & 7 \\ 10 & 39 & 37 & \color{red}{5} \end{pmatrix}$$

e quindi $ans = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 13 & 5 \end{pmatrix}$, ovviamente questo accade nel caso base, perché il comando **diag** accetta al suo interno più di un parametri, infatti, se noi andiamo ad accodare al nominativo della matrice un numero possiamo ottenere le altre diagonali. Ed esempio se facciamo **diag**(A,1), il risultato sarà il seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 20 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 13 & 7 \\ 10 & 39 & 37 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi il vettore risultante sarà composto nel seguente modo $ans = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ da questo si denota che il parametro che andiamo a passare serve semplicemente a distanziarsi positivamente o negativamente dalla diagonale 0, quella che divide la matrice in due perfettamente. Nel caso in cui venga passato un parametro negativo, in questo caso il -1, **diag**(A,−1) il risultato sarà il seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 20 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 13 & 7 \\ 10 & 39 & 37 & 5 \end{pmatrix}$$

Nota Bene 1. *Il termine ans sta per Answer ed è il valore che viene salvato automaticamente dal calcolatore per rendelo, esso ha una funzione temporanea visto che verrà sovrascritto alla prossima operazione.*

2.4.1 Esempio in Matlab o Octave

```
A = [2, 20, 1, 3; 4, 9, 12, 0; 6, 4, 13, 7; 10, 39, 37, 5];

A
printf('_________________________\n');

diagZ = diag(A); % diagonale 0
diagZ

diagU = diag(A,1); % diagonale successiva
diagU

diagMU = diag(A,-1); % diagonale precedente
diagMU
```

Listing 2.3: Esempio di utilizzo della funzione `diag()`

Stampa a schermo

```
A =


    2   20    1    3
    4    9   12    0
    6    4   13    7
   10   39   37    5


------------------------
diagZ =


    2
    9
   13
    5

diagU =


   20
   12
    7

diagMU =


    4
    4
   37
```

2.5 Operazioni tra vettori e mattrici

Un'altra operazione tipica è la somma tra un vettore "matrice unidimensionale" e una matrice NxM, quindi anche qui ci sono dei matodi grafici di svolgimento, ma partiamo dalle basi, prendiamo un vettore A e una matrici v

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

2.5.1 Addizioni e sottrazioni tra matrici

Addizioni

non modo non molto dissimile a quello che avveniva con la somma tra mattrici, anche nella somma tra un vettore e una Matrice si va assomare i membri dell'uno per quelli dell'altra, in questo caso nello specifico la prima colonna della matrice è stata moltiplicata per il primo elemento del vettore, la seconda colonna per il secondo elemento e così via.

$$A + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3+2 & 4+3 & 5+4 \\ 3+1 & 4+5 & 5+7 \\ 3+9 & 4+8 & 5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 9 & 12 \\ 12 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

Sottrazioni

$$A - \vec{v} = \begin{pmatrix} 3-2 & 4-3 & 5-4 \\ 3-1 & 4-5 & 5-7 \\ 3-9 & 4-8 & 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5.2 Moltiplicazioni e divisioni

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 4\cdot 3 & 5\cdot 4 \\ 3\cdot 1 & 4\cdot 5 & 5\cdot 7 \\ 3\cdot 9 & 4\cdot 8 & 5\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 20 \\ 3 & 20 & 35 \\ 27 & 32 & 30 \end{pmatrix}$$

In questo caso l'ambiguità non sta nell'operazione in se e per se ma nella sintassi di matlab e Octave che presentano due diverse funzioni per la moltiplicazione e la divisione, la prima è `A*M` che serve a fare una moltiplicazioni tra matrici della stessa dimensione e poi c'è quella per che forza la condizione `A.*M` che funziona con matrici di dimensione anche differente.

2.6 Rank

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 12 \\ 5 & 90 & 3 \end{pmatrix}$$

In questo caso il rango è 3, su octave o matlab, basta utilizzare il comando `rank(A)`.

2.7 Matrici Trasposte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Per fare la matrice trasposta, basta scambiare i valore di N e M quindi il risultato è

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Praticamente i valori sono stati scambiati tagliando per la diagonale, infatti, 2, 1 e 6 restano nelle stesse posizioni. In matlab e Octave esiste una funzione dedicata A.', che fa automaticamente l'operazione, ovviamente per sfruttare al massimo la matrice va salvata in una variabile.

```
octave:1> A = [2, 3, 4; 1, 5, 7; 9, 8,6]
A =


   2   3   4
   1   5   7
   9   8   6


octave:2> A'
ans =


   2   1   9
   3   5   8
   4   7   6
```

2.8 Autovettori e autovalori

Autovalori e autovettori costituiscono un aspetto fondamentale dello studio della diagonalizzabilità e della triangolarizzabilità di una matrice e sono alla base della costruzione della forma coninica di Jordan.

Definizione 2. *Si dice forma canonica di Jordan di una matrice quadrata A una particolare matrice a blocchi triangolari superiore e simile ad A. Viene solitamente indicata con J_A ed è caratterizzata dall'avere gli autovalori di A sulla diagonale principale (**diag**(A) in Octave), degli 0 o degli 1 sulla diagonale soprastante e tutti 0 altrove.*

2.9 Rouché-Capelli

La teoria dei sistemi (teorema di *Rouché-Capelli*) ci ha insegnato che ammette soluzioni non nulle se e solo se

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{2.6}$$

Posto $P(A - \lambda I)$, si può osservare che $P(\lambda)$ è un polinomio di grado n nella variabile $\lambda \in \mathbb{R}$; $P(\lambda)$ è detto polinomio caratteristico A. Le soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'equazione (2.6), cioè $P(\lambda) = 0$, sono dette *autovalore* di A,se λ è un autovalore di A, si può definire

$$V_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : [A - \lambda I] \cdot X = \vec{0}\}$$

Sappiamo che λ è un autovalore di $\mathbb{R}^n$: scriveremo

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$$

Il numero naturale $M_g(\lambda)$ è chiamato molteplicità geometrica dell'autovalore λ.

$$m_g(\lambda) = n - p(A - \lambda I)$$

In sostanza, $m_g(\lambda)$ coincide col numero di incognite libere del sistema omogeneo, come prescritto dal teorema di Rouché-Capelli. Il sottospazio V_λ è detto *autospazio* associato all'autovalore λ; i suoi elementi non nulli che ogni autovalore λ, essendo una radice di $P(\lambda)$, cioè di un polinomio di grado n, ha una sua moltiplicità algebrica, denotata $m_a(\lambda)$. Questo è il momento di eseguire alcuni esercizi per prendere confidenza con questi concetti.

2.9.1 Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \tag{2.7}$$

1. Determinare gli autovalori di A;
2. Per ogni λ, indicare $m_a(\lambda)$ e $m_g(\lambda)$;
3. Determinare una base degli eventuali autospazi.

Soluzione

1. Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = [A - \lambda I] = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Per risolvere il problema tocca trovare λ svolgendo il quadrato di binomio, $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, poi dobbiamo dobbiamo ricavare il Δ e poi in fine calcolare $\lambda_{1,2}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

Ne segue che A possiede un unico autovalore $\lambda_1 = 1$

2. Abbiamo

$$m_a(\lambda_1) = 2, \quad m_g(\lambda_1) = n - p(A - \lambda_1 I) =$$
$$= 2 - p \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 2 - 1 = 1$$

3. V_{λ_1} è definito come l'insieme delle soluzioni di

$$[A - \lambda_1 I] \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ora, $\dim V_{\lambda_1} = 1$, e una sua base è $\{{}^t[1,0]\}$.

```
% Autovalori e autovettori
A=[ 1 1; 0 1];
A
% svolgimento interattivo
ris = eig(A);
ris
% svogimento manuale
ris2 = (2+sqrt(4-4))/2
```

Listing 2.4: Svolgimento dell'autovalore

Stampa a schermo

```
A =


   1   1
   0   1


ris =


   1
   1


ris2 = 1
```