Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambiente e Architettura

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettrica industriale

ANALISI DI SISTEMI

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

1 Introduzione all'Automazione **9**

1.1 Sommario . . . 9

1.2 Automatica e definizione di sistema . . . 9

1.2.1 Problemi principali . . . 9

1.3 Sistemi ad avanzamento temporale . . . 10

2 Modelli matematici dei sistemi **11**

2.1 Modello matematico . . . 11

2.2 Modello IU per un sistema SISO . . . 11

2.2.1 Modello IU per un sistema MIMO (r ingressi e p uscite) . . . 12

2.2.2 Modello VS per sistemi SISO . . . 12

2.2.3 Modello VS per un sistema MIMO . . . 12

2.3 Modello VS e sua rappresentazione schematica . . . 13

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione all'Automazione

1.1 Sommario

- Automatica e Sistemi
- Problemi affrontati dall'Automatica
- Classificazione dei Sistemi

1.2 Automatica e definizione di sistema

Definizione 1. *l'Automatica si occupa di studiare i sistemi e il loro controllo*

- $\alpha\upsilon\tau o\mu\alpha\upsilon\zeta$ *in greco: "che si muove da solo"*
- *automaton in latino: "macchina che opera da sola";*

Nota 1. *Il sistema per definizione del manuale dell'IEEE è un insieme di elementi che cooperano per svolgere una funzione altrimenti impossibile per ciascuno dei singoli componenti.*

Gli esempi più classici di sistema sono:

- automibile, impianto termico, circuito elettrico;
- il corpo umano e l'ecosistema (per esempio Molentargius)
- un sistema economico (per esempio il mercato azionario)
- un programma di calcolatore

L'automatica ricerca leggi generali (dunque astratte) che possono essere usate in svariati dominii applicativi

1.2.1 Problemi principali

- Modellazione;
- identificazione;
- Analisi;
- Controllo;
- Ottimizzazione;
- Diagnosi di guasto.

1.3 Sistemi ad avanzamento temporale

Nei sistemi ad avanzamento temporale (**SAT**) il comportamento del sistema è descritto da segnali ossia funzioni reali della variabile indipendente di tempo t.
Se la variabile tempo varia continuità si parla di **SAT** a tempo continuo, mentre, se essa prende valori in un insieme discreto si parla di **SAT** a tempo discreto.
Nel caso particolare dei sistemi a tempo discreto, è possibile identificare la sotto-classe dei sistemi in cui anche i segnali in gioco, e non solo la variabile tempo, assumono valori discreti.

Esempio 1. *prendiamo l'esempio di un serbatoio che possiede due sensori di controllo, un per il troppo pieno e un per controllare il minimo. L'equazione che governa questo sistema è*

$$\frac{d}{dt}V(t) = q_1(t) - q_2(t) \tag{1.1}$$

Se le misure di volume e di portata sono disponibili solo ogni T unità di misura del tempo, si considerano le variabili a tempo discreto

$$V(k) = V(kT), \quad q_1(k) = q_1(kT), \quad q_2(k) = q_2(kT), \quad k = 0, 1, \dots$$

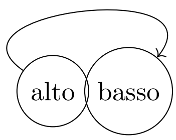
Posto $\Delta t = T$, approssimando la derivata con il rapporto incrementale

$$\frac{d}{dt}V(t) \approx \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{(k+1) - V(k)}{T}$$

e moltiplicando ambo i membri per T la precedente equazione differenziale diventa una equazione alle differenze:

$$V(k+1) - V(k) = Tq_1(k) - Tq_2(k)$$

il modello prevede 3 stati che variano in base al livello del liquido contenuto all'interno del serbatorio, infatti, il grafo che ne uscirà fuori è:



Capitolo 2

Modelli matematici dei sistemi

2.1 Modello matematico

Un **modello matematico** descrive una relazione che lega fra loro le grandezze che descrivono il comportamento di un sistema.

Definizione 2. *Il modello Ingresso-Uscita (IU) descrive il legame fra le uscita $y(t)$ (e le sue derivate) e l'ingresso $u(t)$ (e le derivate) sotto forma di una equazione differenziale. Alle volte viene utilizzato con la sua definizione inglese (Input/Output model) o modello I/O.*

Definizione 3. *Il modello in Variabili di stato (VS) descrive come*

1. *L'evoluzione dello stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dipende dallo stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e dall'ingresso $u(t)$ (**equazione di stato**).*

2. *l'uscita $y(t)$ dipende dallo stato di $x(t)$ e dall'ingresso $u(t)$ (trasformazione di uscita)*

2.2 Modello IU per un sistema SISO

Definizione 4. *per sistema SISO si intende "Single-input single-output system", cioè un sistma con un solo ingresso e una sola uscita ed è meno complesso del sistema MIMO "Multiple-input multiple-output system" che invece possiende più interfaccie di input/output.*

$$h\left(\underbrace{y(t), \frac{d}{dt}, \ldots, \frac{d^n}{dt^n}y(t)}_{\text{uscita}}, \underbrace{u(t), \frac{d}{d5}(t), \frac{d}{dt}u(t)}_{\text{ingresso}}, t\right) = 0$$

n: grado massimo derivazione uscita = ordine del sistema
m: grado massimo derivazione ingreso
ovvero

$$h\left(\underbrace{y(t), \dot{y}, \ldots, y^{(n)}(t)}_{\text{uscita}}, \underbrace{u(t), \dot{u(t)}, \ldots, u(t)}_{\text{ingresso}}, t\right) = 0$$

2.2.1 Modello IU per un sistema MIMO (r ingressi e p uscite)

$$h_1\left(\underbrace{y_1(t),\dots,y_1^{(n_1)}(t)}_{\text{uscita 1}},\underbrace{u_1(t),\dots,u^{(m_1)}(t)}_{\text{ingresso 1}},\dots,\underbrace{u_r(t),\dots,u_r^{m_r}(t)}_{\text{ingresso r}},t\right)=0$$
$$\vdots$$
$$h_p\left(\underbrace{y_p(t),\dots,y_p^{(n_p)}(t)}_{\text{uscita p}},\underbrace{u_1(t),\dots,u^{(m_1)}(t)}_{\text{ingresso 1}},\dots,\underbrace{u_r(t),\dots,u_r^{m_r}(t)}_{\text{ingresso r}},t\right)=0$$

2.2.2 Modello VS per sistemi SISO

Detto

$$x(t)=\frac{d}{dt}x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}$$

vale

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) & = f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t),t)\\ \vdots & \vdots\\ \dot{x}_n & = f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t),t)\\ y(t) & = g(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t),t)\end{cases}$$

o, equivalentemente, in forma matriciale:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) & = f(x(t),u(t),t)\\ y(t) & = g(x_1(t),u(t),t)\end{cases}$$

2.2.3 Modello VS per un sistema MIMO

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) & = f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t),t)\\ \vdots & \vdots\\ \dot{x}_n & = f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t),t)\\ y(t) & = g(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t),t)\\ \vdots & \vdots\\ y_p & = g_p(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t),t)\end{cases}$$

L'equazione di stato è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, mentre la trasformazione di uscita è una equazione algebrica.

2.3 Modello VS e sua rappresentazione schematica

Nota 2. *in un modello VS l'equazione di stato ha n componenti (numero pari all'ordine del sistema) a prescindere dal fatto che il sistema sia SISO o MIMO*

$$SISO \begin{cases} \dot{x}_1(t) & = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) & = g(x_1(t), u(t), t) \end{cases}$$

$$MIMO \begin{cases} \dot{x}_1(t) & = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) & = g(x_1(t), u(t), t) \end{cases}$$

Esempio 2. *Circuito RC che ha un ingresso* $u(t) = v(t)$*, uno stato* $x(t) = v_c(t)$ *e uscita* $y(t) = i(t)$ *Ricavo* $v_R(t) = v(t) - v_C(t)$ *dalla (3) e sostituisco nella (1)*

Leggi dei componenti		
resistore (Ohm)	$v_R(t) = Ri(t)$	(1)
condensatore	$\dot{v}_C = \frac{1}{C} i(t)$	(2)
Leggi delle connessioni		
equazione dela maglia	$v(t) = v_c(t) + v_R(t)$	(3)

$$v(t) - v_C(t) = Ri(t) \quad (1')$$

Infatti ricavo i(t) dalla (1') e rimane

$$\begin{array}{rl} \dot{v}_C(t) = \frac{1}{C} i(t) & (2) \\ i(t) = -\frac{1}{R} v_C(t) + \frac{1}{R} v(t) & (1'') \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{rl} \dot{x}(t) = \frac{1}{C} y(t) & (2) \\ i(t) = -\frac{1}{R} x(t) + \frac{1}{R} u(t) & (1'') \end{array}$$

Per determinare il modello IU devo eliminare lo stato: ricavo $x(t) = u(t) - Ry(t)$ *dalla (1"), derivo e sostituisco in (2):*

$$\boxed{\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{R} \dot{u}(t)}$$

Per determinare il modello VS devo eluminare l'uscita y(t) dalla equazione di stato, sostituisco la (1") in (2)

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = & -\frac{1}{RC} x(t) + \frac{1}{RC} u(t) \\ y(t) = & -\frac{1}{R} x(t) + \frac{1}{R} u(t) \end{cases}}$$