Formulario Geometria

Nicola Ferru

4 luglio 2023

1 Prodotto scalare, norma di un vettore e prodotto vettoriale

Definizione 1.1 *Siano $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ e $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ due vettori. il loro prodotto scalare, denotato $\vec{u} \cdot \vec{v}$, è definito da*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \left(\sum_{i=1}^{3} u_iv_3\right) \tag{1}$$

La proprietà fondamentale del prodotto scalare è

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \cos\theta \tag{2}$$

Esempio 1.1

$$\begin{aligned} \vec{u}\left(\frac{7}{3}; -6; 2k\right) \\ \vec{v}\left(-3k; -\frac{1}{2}; k\right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{7}{\cancel{3}}(-\ \cancel{3}k) + (-\ \cancel{6})(-\frac{1}{2}) + (2k)(k) = 0 \\ -7k + 3 + 2k^2 = 0 \\ 2k^2 - 7k + 3 = 0 \\ \Delta k = -7^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25 \\ k_{\frac{1}{2}} = \frac{+7 \pm \sqrt{23}}{4} = \begin{cases} \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

1.1 Norme di un vettore

Definizione 1.2 *La norma di un vettore $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ è una applicazione che a un vettore associa un numero reale*

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \vec{u} \mapsto ||\vec{u}|| \end{aligned}$$

così definito:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{v_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

In modo equivalente possiamo esprimere la norma di un vettore in termini di prodotto scalare:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

infatti

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Esempio 1.2 *Siano* $\vec{u} = [1, 2, 1]$, $\vec{v} = [6, -4, 1]$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4), 1 \cdot 6 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 6] = [6, 5, -16]$$

1.2 Prodotto Vettoriale

Definizione 1.3 *Siano* $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ *e* $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$*. Il loro prodotto vettoriale (indicato* $\vec{u} \wedge \vec{v}$*, oppure* $\vec{u} \times \vec{v}$*) è il vettore definito da*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1]$$

2 Metodo di Cramer per sistemi lineari

3 Algoritmo di Gauss Jordan

4 Sviluppo di Laplace per determinanti

5 Polinomio caratteristico di un'applicazione lineare