Algebra e geometria

Nicola Ferru

22 dicembre 2024

Indice

Prefazione

Capitolo 1

Vettori, coordinate e geometria

Uno degli argomenti su cui il corso si basa sono proprio i *vettori*. All'interno di questo capitolo saranno presenti nozioni e definizioni legate alla natura stessa di queste entità matematiche dai rudimenti ad alcuni spetti più avanzati.

1.1 Vettori Geometrici

Definizione 1.1.1. Un vettore geometrico applicato nel piano è un segmento orientato che va da un punto fisso O "Origine" verso un secondo punto P del piano, come mostrato nella figira 1.1:

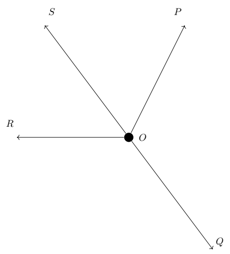


Figura 1.1: Esempio vettori geometrici

Analogamente, se il punto P (*e quindi il segmento*) è libero di variare in tutto lo spazio tridimensionale. In ambo i casi il vettore sarà denotato $\vec{OP}$ (*si denota che il punto finale P può anche uguale a O, ovvero il vettore può essere molto ravvicinato al punto O*).
Nota 1.1.1. *Il verso è indicata dalla simbolo freccia, graficamente la lunghezza e direzione del vettore implicano il modo in cui agisce nello spazio, ad esempio, se due vettori hanno direzioni opposte uno si sottrarrà potenzialmente al altro.*

Denotare che con V_O^2 l'unsieme dei vettori geometrici applicati in O nel piano, e con V_O^3 l'insieme dei vettori geometrici applicati in O liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale. I vettori orientati sono utilizzati infisica, dove vengono usati per rappresentare le forze applicate sul punto O.
Esempio 1.1.1. Si può immaginare che in O si trovi un oggetto sul quale viene esercitata una forza che lo "trascina" nella direzione e nel verso dati dalla freccia come evidenziato nella nota (1.1.1), mentre l'intensità della forza esercitata è rappresentata dlla lunghezza del segmento. Dal

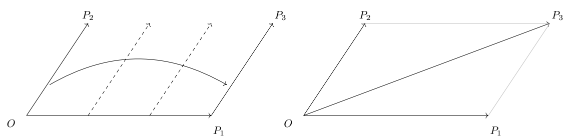


Figura 1.2: Somma vettoriale

momento che $\vec{OP}_3$ rappresenta la forza totale esercitata la forza totale esercitata su O quando si applicano contemporaneamente $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$, il meccanismo più immediato è associare l'operazione ad una addizione, infatti, essa viene scritta come:

$$\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 \tag{1.1}$$

La rappresentazione grafica è presente in figura 1.2 definisce in modo in cui un'operazione di somma sull'insieme di vettori geometrici (del piono o dello spazio) viene rappresentata.

Per i vettori che non hanno la stessa direzione, si denota che OP_3 è la direzionale del parallelogramma che ha OP_1 e OP_2 come lati (infatti, viene definita anche come *regola del parallelogramma*). Il motodo descrittivo funziona comunque anche per sommare due o più vettori che hanno la stessa direzione:

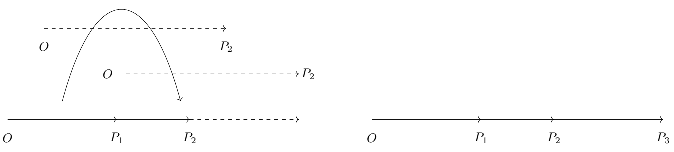


Figura 1.3: Regola del parallelogramma

Anche in questo caso vale la formula 1.1, infatti, graficamente la OP_3 è chiaramente frutto di una somma tra il segmento OP_1 e OP_2. Un'altra operazione è il prodotto del vettore per un numero reale: nel contesto delle forze, il concetto è quella di rappresentare una variazione dell'intensità e eventualmente del verso della forza rappresentata dal vettore.
Più precisamente, dati un vettore geometrico $\vec{OP}$ e un numero releale $c \in \mathbb{R}$, si può definire $c\vec{OP}$ come il vettore che sta sulla stessa retta a cui appartiene $\vec{OP}$, ma avente:

1. Stesso verso e lunghezza c volte la lunghezza di $\vec{OP}$, se c è positivo;
2. Verso opposto e lunghezza $-c$ volte quella di $\vec{OP}$, se c è negativo;
3. Lunghezza ulla se c=0, cioè $0\vec{OP} = \vec{OO}$.

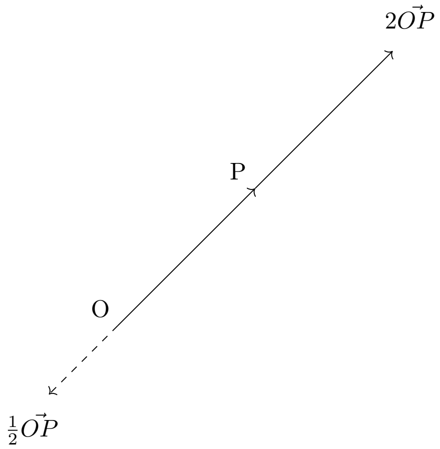


Figura 1.4: Prodotto vettoriale

Nel contesto dei vettori, i numeri reali si chiamano anche *scalari*.
Come si vedra nel ultima parte del capitolo, la nozione di vettore geometrico e le operazioni di somma tra vettori e prodotto di un vettore per un numero che appena definito saranno fornamentali per impostare e risolvere problemi geometrici nel piano e nello spazio. Per questo motivo, è necessario conoscere e mettere in evidenza le proprietà di cui godono tali operazioni che permettono di manipolare le espressioni e formule che coinvolgono i vettori. Si può verificare che valgono le seguenti:

1. La somma è *associativa*
$$(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) + \vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + (\vec{OP}_2 + \vec{OP}_3) \tag{1.2}$$
2. La somma è *commutativa*
$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_2 + \vec{OP}_1 \tag{1.3}$$
3. Il vettore $\vec{OO}$ funge da elemento neutro per la somma:
$$\vec{OP} + \vec{OO} = \vec{OO} + \vec{OP} = \vec{OP} \tag{1.4}$$
4. Per ogni vettore $\vec{OP}$, il vettore $(-1)\vec{OP}$ (ovvero il vettore che si ottiene da $\vec{OP}$ basterà invertire il verso, senza modificare direzione e lunghezza) è il suo inverso additivo o opposto

rispetto alla somma:
$$\vec{OP} + (-1)\vec{OP} = (-1)\vec{OP} + \vec{OP} = \vec{OO} \tag{1.5}$$

5. Dati due numeri reali c_1, c_2 e un vettore $\vec{OP}$, si ha
$$c_1(c_2\vec{OP}) = (c_1c_2)\vec{OP} \tag{1.6}$$
(*Una situazione molto similare alla proprietà associativa del prodotto*).
6. Per ogni vettore $\vec{OP}$, si ha
$$1\vec{OP} = \vec{OP} \tag{1.7}$$
(*ovvero il numero 1 funge da elemento neutro rispetto al prodotto per scalari*).
7. Dati due numeri reali c_1, c_2 ed un vettore $\vec{OP}$, si ha
$$(c_1 + c_2)\vec{OP} = c_1\vec{OP} + c_2\vec{OP} \tag{1.8}$$
8. Dati un numero reale c e due vettori $\vec{OP}$, $\vec{OP}$ si ha
$$c(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) = c\vec{OP}_1 + c\vec{OP}_2 \tag{1.9}$$

Lo sviluppo suggerisce che valga la proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri reale o rispetto alla somma di vettori.
Osservazione 1.1.1. Come esempio di applicazione delle proprietà appena elencate, è il caso di motrare che in un'uguaglianza tra vettori, esattamente come si fa in un'uguagliana tra numeri, si possono "spostare i vettori" da un membro all'altro cambiandoli di segno:
$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3 \to \vec{OP}_1 = \vec{OP}_3 - \vec{OP}_2$$
Dove, come nel caso dei numeri lo spostamento dall'altra parte dell'uguaglianza comporta il cambiamento di segno scritto come $\vec{OP}_3 - \vec{OP}_2$ che risulta essere la forma semplificata di $\vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$. Per vederlo, basterà sommare ad antrambi i membri di $\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3$ il vettore $(-1)\vec{OP}_2$:
$$(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) + (-1)\vec{OP}_2 = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
Applicando la propriatà associativa (1.2) a primo membro:
$$\vec{OP}_! + \left[\vec{OP}_2 + (-1)\vec{OP}_2\right] = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
Dopo aver fatto questo passaggio, sarà necessario applicare la proprietà (1.5) che afferma che $(-1)\vec{OP}_2$ è l'opposto di $\vec{OP}_2$:
$$\vec{OP}_2 + \vec{OO} = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
e infine va applicato la proprietà (1.4) che afferma che il vettore nullo funge da elemento neutro:
$$\vec{OP}_1 = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$
e con questo è stata confermata l'affermazione iniziale.

1.2 Coordinate

Considerando due vettori geometrici $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ nel piano, e si può supporre che $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ non abbiano la stessa dimensione.
Affermando che ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^2$ può essere ottenuto sommando multipli opportuni di $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$, ovvero:
$$\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$$
dove c_1, c_2 sono opportuni numeri reali. Infatti, questo può essere facilmente visto graficamente: come nel disegno seguente, prolungando i vettori $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ disegnando le due rette r_1 e r_2; proiettando quindi i punti P su r_1 seguendo la direzione parallela a $\vec{OP}_2$, e chiamando il punto proiettato Q_1: e chiamandolo punto proiettato Q_2.
Avendo costruito le due proiezioni parallelamente a $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ come lati e $\vec{OP}$ come diagonale, quindi per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $\vec{OP} = \vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$.

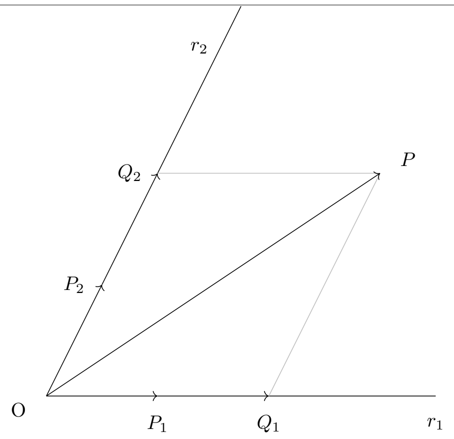


Figura 1.5: Costruzione grafica $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$

Ma dal momento che $\vec{OQ}_1$ si trova sulla stessa retta di $\vec{OP}_1$ per come è definito il prodotto dei vettori per i numeri realim esisterà un numero reale c_1 tale che $\vec{OQ}_1 = c_1\vec{OP}_1$ (dove c_1 dipende semplicemente dal rappotro tra la lunghezza di $\vec{OQ}_1$ e quella di $\vec{OP}_1$).
Si conclude che $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$. Si noti che nella situazione considerata nel disegno, $c_1, c_2 > 0$ in quanto $\vec{OQ}_1$ e $\vec{OQ}_2$ hanno lo stesso verso di $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ rispettivamente. In generale, la stessa costruzione può essere effettuata per qualunque vettore $\vec{OP}$ del piano e i coefficienti c_1 e c_2 potranno anche essere negativi[1] a seconda del quadrante nel quale si trova $\vec{OP}$, ovvero a seconda che la proiezione di P sulle rette r_1, r_2 cada dalla stessa parte o dalla parte opposta dei punti P_1 e P_2.

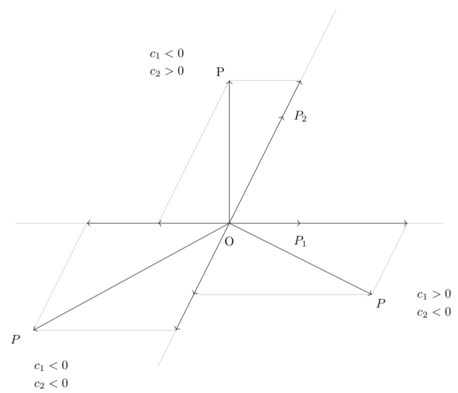


Figura 1.6: Condizione della formula $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ in base ai reali c_1, c_2

Definizione 1.2.1. La coppia (c_1, c_2) di numeri reali tale che $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ si dice la *coppia delle coordinate* del vettore $\vec{OP}$ rispetto ai vettori base $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2$.
Le coordinate c_1 e c_2 di un vettore dipendono chiaramente dalla scelta dei vettori base $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$, ma una volta che essi sono stati fissati seriveremo $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2)$, identificando di fatto il vettore con la coppia delle sua coordinate, e quindi l'insieme $\vec{V}_O^2$ con l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali.
Osservazione 1.2.1. Bisognerebbe porsi il problema dell'*unicità* di c_1 e c_2: se esistessero due modi diversi, diciamo $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ e $\vec{OP} = c_1'\vec{OP}_1 + c_2'\vec{OP}_2$, di decomporre $\vec{OP}$, non avremmo una e una spola coppia di numeri con cui identificarlo: in realtà, la costruzione grafica già suggerisce che l'unicità è garantita, ma si tornerà su tel questione nel paragrafo **??**.

Un risultato analogo a quello visto per i vettori nel piano può essere ottenuto anche nell'insieme V_O^3 dei vettori geometri nello spazio tridimensionale. In questo non si deve però partire da una coppia di vettori non allineati ma da una terna di vettori $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ e $\vec{OP}_3$ *che non siano tutti e tre sullo stesso piano*: alloram, è semplice vedere graficamente, utilizzando proiezioni come fatto nel caso di due vettori nel piano, che ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^3$ può essere scritto come combinazione $c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2 + c_3\vec{OP}_3$.

[1] Può essrere anche $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$: nel primo caso, si ha $\vec{OP} = c_2\vec{OP}_2$, nel secondo $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1$, cioè $\vec{OP}$ non sta all'interno di uno dei quadranti in cui le rette r_1, r_2 dividono il piano, ma sta sulla retta r_2 (se $\vec{OP} = c_2\vec{OP}_2$) o sulla retta r_1 (se $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1$).

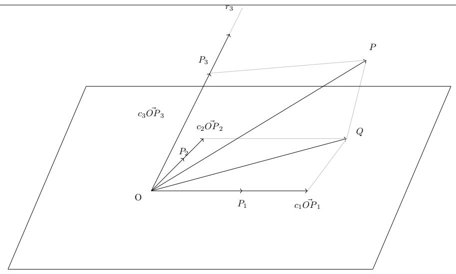


Figura 1.7: Vettori su spazio tridimensionale

Come rappresentato in figura 1.7, si proietta il punto su cui stanno $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ seguendo la direzione $\vec{OP}_3$ e si individua così un punto Q; proiettando poi P sulla retta r_3 parallelamente al vettore $\vec{OQ}$, risulta individuato un parallelogramma, che ci dice che $\vec{OP}$ si scrive come somma $\vec{OP} = \vec{OQ} + c_3\vec{OP}_3$ di $\vec{OQ}$ e di un opportuno multiplo $c_3\vec{OP}_3$ di $\vec{OP}_3$. A questo punto si osserva che $\vec{OQ}$, stando sul piano di $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ si scriverà come loro combinazione lineare $\vec{OQ} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2 + c_3\vec{OP}_3$. In modo analogo a quato già fatto per i vettori geometrico del piano, si può dire che:

Definizione 1.2.2. La terna (c_1, c_2, c_3) di numeri reali tale che $\vec{OQ} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2 + c_3\vec{OP}_3$ si dice la *terna delle coordinate* del vettore $\vec{OP}$ rispetto ai vettori di base $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$.

Come osservato per i vettori del piano, le coordinate c_1, c_2, c_3 di un vettore dipendono chiaramente dalla scelta dei vettori base $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$, ma una volta che essi sono stati fissati si potrà scrivere $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2, c_3)$, identificando di fatto il vettore con la terna delle sue coordinate, e quindi l'insieme $\vec{V}^2_O$ con l'insieme $\mathbb{R}^3$ della terna di numeri reali.

L'importanza delle coordinate consiste nel fatto che esse, permattendoci di rappresentare i vettori mediamente coppie o terne di numeri, permettano di tradurre in calcolo tra vettori: questa è un'importante semplificazione, in quanto è più semplice lavorare con numeri che con costruzioni o dimostrazioni di geometria eoclidea che sarebbero altrimenti necessarie per lavorare con i vettori, che sono oggetti (entità) geometrici. Per dare un idea più chiara delle affermazioni esposte precedentemente è necessario stimare questo importante risultato:

Proposizione 1.2.1. *Sia $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ una coppia di vettori base non allineati nell'insieme V^2_O. Le coordinate rispetto a $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ hanno le seguenti proprietà:*

1. *Se $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$ hanno coordinate rispettivamente (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2), le coordinate di $\vec{OP}+\vec{OP}'$ sono date dalla coppia $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$ ottenuta sommando componete per componente le coppie delle coordinate dei due vettori.*
2. *Se $\vec{OP}$ ha coordinate (x_1, x_2) e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2) ottenuta moltiplicando per c le coordinate di $\vec{OP}$.*

Dimostrazione. Il fatto che $\vec{OP}$ abbia coordinate (x_1, x_2) rispetto a $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ significa per definizione che $\vec{OP}' = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$, e analogamente il fatto che $\vec{OP}'$ abbia coordinate (x'_1, x'_2) significa che $\vec{OP}' = x'_1\vec{OP}_1 + x'_2\vec{OP}_2$. Ma allora

$$\vec{OP} + \vec{OP}' = (x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2) + (x'_1\vec{OP}_1 + x'_2\vec{OP}_2) =$$

Riordinando gli addendi e raccogliendoli diversamente sfruttando le proprietà associativa e commutativa della somma tra vettori

$$= (x_1\vec{OP}_1 + x'_1\vec{OP}_1) + (x_2\vec{OP}_2 + x'_2\vec{OP}_2) =$$

Sfruttando la proprietà 1.8 sia nella prima parentesi che nella saconda, effettuato il raggruppamento mettendo in evvidenza nel caso della prima parentesi $\vec{OP}_1$, mentre, nel caso del secondo mettendo in evvidenza $\vec{OP}_2$, il risultato sarà

$$= (x_1 + x'_1)\vec{OP}_1 + (x_2 + x'_2)\vec{OP}_2$$

Ma questo, per definizione di coordinate, significa proprio che le coordinate di $\vec{OP}+\vec{OP}'$ sono date dalla coppia $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$, come affermato nel punto 1 della Proposizione 1.2.1.

Per dimostrare la (2), bisogna partire sempre dal fatto che $\vec{OP}$ abbia coordinate (x_1, x_2) significa per definizione che $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$. Allora

$$c\vec{OP} = c(x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_1) =$$

Applicando la proprietà (1.9) otterremo la divisione in due gruppi di parentesi, con c messo in evidenza messi tra di loro in forma di addizione.

$$= c(x_1\vec{OP}_1) + c(x_2\vec{OP}_2) =$$

Applicando la proprietà (1.6) a entrambi gli addendi si otterrà:

$$= (cx_!)\vec{OP}_1 + (cx_2)\vec{OP}_2$$

Ma questo, per definizione di coordinate, ci dice proprio che le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2), come affermato nella (2) della Proposizione 1.2.1. □

Esempio 1.2.1. Per un esempio di quanto appena dimostrato, si prendano i vettori base $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ come nel disegno seguente, e si considerino i due $\vec{OQ}_1$ e $\vec{OQ}_2$

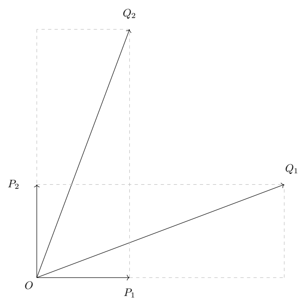


Figura 1.8: Rappresentazione grafica OQ_1 e OQ_2

Come si vede dalla figura (1.8), si ha $\vec{OQ}_1 = 2\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$ e $\vec{OQ}_1 = \vec{OP}_1 + 2\vec{OP}_2$, ovvero le coordinate $\vec{OP}_1$ sono date dalla coppia (2, 1).
Allora, in base alla (1) della Proposizione 1.2.1, la somma $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$ ha coordinate (*sempre rispetto a* $\vec{OP}_1$ *e* $\vec{OP}_2$) date da

$$\vec{OQ}_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \ \vec{OQ}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2 = \begin{vmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = (3, 3).$$

ovvero si ha $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2 = 3\vec{OP}_1 + 3\vec{OP}_2$. In effetti, questo può essere verificato graficamente costruendo con la regola del parallelogramma la somma $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$, come nella figura seguente

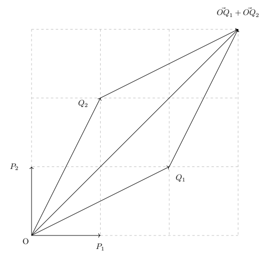


Figura 1.9: Rappresentazione grafica $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$

L'aspetto notevole è che si può dimostrare chi era il vettore $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$ (in coordinate) con un semplice conto aritmetico, anche prima di disegnarlo con la costruzione geometrica del parallelogramma.
Osservazione 1.2.2. Affermazioni del tutto analoghe a quelle della Proposizione 1.2.1 valgono anche nel caso dei vettori nello spazio. Più precisamente, si ha che fissata una terna $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ di vettori non complanari nell'insieme V_O^3 dei vettori dello spazio tridimensionale, allora le coordiante rispetto a tale terna di base hanno le seguenti proprietà:

1. Se $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$ hanno coordinate rispettivamete (x_1, x_2, x_3) e (x_1', x_2', x_3'), le coordinate di $\vec{OP}_1 + \vec{OP}_1'$ sono date dalla terna $(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$ ottenuta sommando componente per componente le terne delle coordiante dei due vettori.
2. Se $\vec{OP}$ ha coordinate (x_1, x_2, x_3) e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate, di $c\vec{OP}$ sono date dalla terna (cx_1, cx_2, cx_3) ottenuta moltiplicando per c le coordinate di $\vec{OP}$.

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella della Proposizione 1.2.1.

1.3 Lunghezze e angoli

Lavorare in coordiante rispetto a una base ci permette di tradurre numericamente costruzioni geometriche con i vettori e risolvere in modo più semplice problimi relativi ai vettori. Questo è quero qualunque sia la base scelta, tuttavia a seconda del problema specifico da risolvere, alcune basi possono essere più convenienti di altre, e in particolare quando si vuole rispondere, lavorando in coordinate, alle domande seguenti: "Quel'è la lunghezza di un vettore dato? quel'è l'angolo tra due vettori dati?
In tal caso, le basi più convenienti da usare, come visto, sono quelle formate da (due nel caso del piano, tre nel caso dello spazio) vettori ctra loro ortogonali e di lunghezza 1 (*rispetto a un'unità di misura scelta*). Tali basi si chiamano *ortonormale.*
Infatti, considerando una tale base nel piano

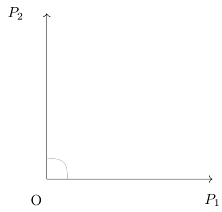


Figura 1.10: Base del piano

Ora, considerando un vettore $\vec{OP}$, di quale sono note le coordinate rispetto a tale base sono date da (x_1, x_2) (ovvero, per definizione di coordinate, $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$): è possibile calcolare la lunghezza del vettore $\vec{OP}$ a partire dalle coordinate? Per rispondere a tale domanda, bisogna considerare le seguenti figure, nel quale è rappresentata la decomposizione $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$

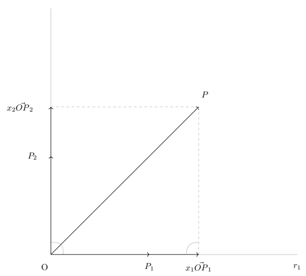


Figura 1.11: Base del piano con il vettore $\vec{OP}$

Dal momento che si è selto i vettori di base perpendicolari, quando si proietta P sulla retta r_1 che contiene $\vec{OP}_1$ sequendo la direzione $\vec{OP}_2$, tale proiezione incontra r_1 con un angolo di 90^o, e si viene quindi a formare un triangolo rettangolo (evidenziato nel figura 1.11) avente come ipotenusa proprio $\vec{OP}$ e al quele possiamo quindi applicare il teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza di $\vec{OP}$, che denoterà $|\vec{OP}|$.
A quasto scopo, c'e da notare che il cateto orizzontale di tale triangolo è dato dal vettore $x_1\vec{OP}_1$, e quindi la sua lunghezza è data dal prodotto di $x_!$ per la lunghezza di $\vec{OP}_1$: ma avendo scelto i vettori di base di lunghezza unitaria, questo implica che la lunghezza di tale cateto sia semplicemente x_1; per quello che riguarda il cateto verticale, esso per costruzione ha la stessa lunghezza del vettore $x_2\vec{OP}_2$, ovvero x_2 (in quanto $\vec{OP}_2$ ha lunqhezza 1). Quindi il teorema di Pitagora dice che $|\vec{OP}|^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

$$|\vec{OP}| = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{1.10}$$

che rappresenta la formula cercata, che ci dà la lunghezza di $\vec{OP}$ in funzione delle sue coordinate.
Si nota che nei ragionamenti svolti sono fontamentali per la scelta di una base fatta di vettori ortogonali (questo ha fatto comparire un triangolo rettangolo a cui viene applicato il teorema di Pitagora) e di lunghezza 1 (che ha permesso di esprimere le lunghezze dei cateti in funzione delle sole coordinate).
Dopo aver trattato del piano, adesso è necessario trattare lo spazio nella sua costruzione, infatti lo spazio trigonometrico è composto da una terna di vettori: $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ appartenenti all'insieme V_O^3 dei vettori applicati nello spazio tridimensionale:

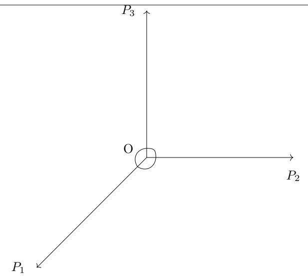


Figura 1.12: Costruzione grafica base spazio

Supponendo ora di avere un vettore $\vec{OP}$ e di volerne calcolare la lunghezza, si denota $|\vec{OP}|$, in fuzione delle sue coordinate x_1, x_2, x_3 rispetto alla base B scelta. Per definizione di coordintate, $\vec{OP}$ si decompone come somma $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$, come in figura 1.13.

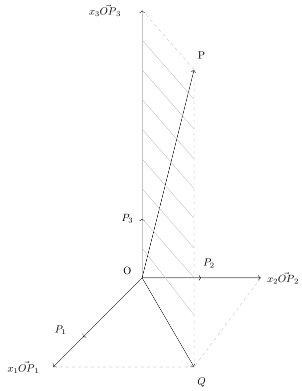


Figura 1.13: Base dello spazio con il vettore $\vec{OP}$

La decomposizione è stata ottenuta graficamente come segue: prima si proietta P perpendicolarmente sul piano su cui stanno P_1 e P_2 ottenendo il punto Q (l'angolo in Q quindi è retto, come messo in evidenza nella figura) e si ottiene un rettangolo, come campitura in grigio nella figura, che dice che $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3$; poi dal momento che $\vec{OQ}$ giace sul piano di $P_!$ e P_2 lo si può decomporre come $\vec{OQ} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$ (sempre sul piano retti in quanto $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ sono perpendicolari), e quindi $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3 = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$ come visto sopra.
Ora, essendo $\vec{OP}$ l'ipotenusa del triangolo OPQ rettangolo in Q, per il teorema di Pitagora si avrà

$$|OP|^2 = |OQ|^2 + |PQ|^2 \tag{1.11}$$

Ma da una parte, il segmento PQ, essendo un lato del rettangolo ombreggiato in figura, è lungo esattamente quanto il vettore $x_3\vec{OP}_3$, ovvere x_3 (in quanto $\vec{OP}$ ha lunghezza 1); dall'altra, OQ è la diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori $x_1\vec{OP}_1$ e $x_2\vec{OP}_2$ di lunghezza rispettivamente x_1 e x_2 (in quanto $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ hanno lunghezza 1), quindi sempre per il teorema di Pitagora si ha $|OP|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ovvero, se per la terna $x = (x_1, x_2, x_3)$ si utilizza la notazione $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,

$$|\vec{OP}| = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1.12}$$

che è la formula cercata, angolora della (1.10), per la lunghezza di un vettore geometrico $\vec{OP}$ dello spazio in funzione delle sue coordinate rispetto alla base scelta.
Ora, bisogna porsi il problema di calcolare l'angolo tra due vettori non nulli $\vec{OP}, \vec{OQ} \in V_O^3$ una volta note le loro coordinate rispetto a una base ortonormale. Supponendo che tali coordinate siano rispettivamente (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3).
Per un risultato di trigonometria, l'angolo θ tra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ è collegato alla lunghezza dei segmenti OP, OQ, PQ dalla formuala[2]

$$|\vec{PQ}|^2 + |OP|^2 + |OQ|^2 - 2\cos\theta |OP| \cdot |OQ| \tag{1.13}$$

[2] Si tratta di una sorta di "teorema di Pitagora per triangoli qualunque": infatti, se il trangolo è rettangolo in O, ovvero $\theta = \frac{\pi}{2}$, allora $\cos\theta = 0$ e la formula si riduce a $|\vec{PQ}|^2 = |OQ| + |OQ|^2$, il classico teorema di Pitagora.

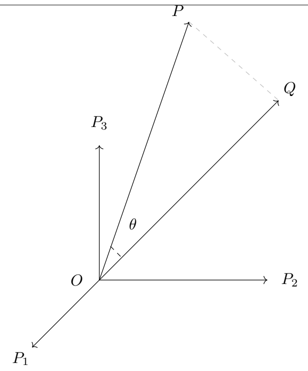


Figura 1.14: Triangolo OPQ

Ora, per la (1.12), si ha $|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e $|OQ| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$: per ricavare l'angolo θ tramte la formuala (1.14) resta da calcolare la lunghezza $|PQ|$. Dal momento che la formuala (1.12) consente di calcolare la lunghezza solo dei vettori applicati in O, sarà possibile tracciare il seguente disegno

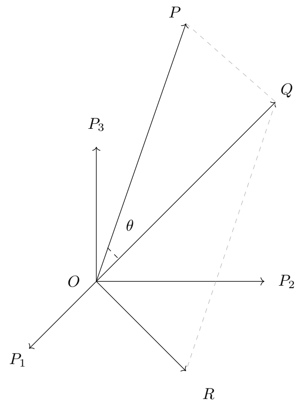


Figura 1.15: Triangolo OPQ e OQR

Il vettore $\vec{OR}$ parallelo al segmento PQ e avente la sua stessa lunghezza, ovvero $|PQ| = |\vec{OR}|$.
Ora, essendo $\vec{OR}$ parallelo a PQ e della stessa lunghezza, il quadrilattero di vertici O, R, P, Q è un parallelogramma che ha $\vec{OR}$ e $\vec{OP}$ come lati e $\vec{OQ}$ come diagonale: quindi, dalla definizione di somma tra vettori applicati, si ha $\vec{OQ} = \vec{OR} + \vec{OP}$, ovvero $\vec{OR} = \vec{OQ} - \vec{OP}$.
Per le proprietà telle coordinate viste nell'Osservazione 1.2.2, le coordinate di $\vec{OR} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ sono date dalle coordinate di $\vec{OQ}$ meno le coordinate di $\vec{OP}$, ovvero $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$, e quindi, dalla (1.10) si ha finalmente

$$|PQ| = |\vec{OR}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \tag{1.14}$$

La formula (1.12) diventa allora

$$\begin{gathered}(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = y_1^2 - x_1^2 + y_2^2 - x_2^2 + y_3^2 - x_3^2 \\ -2\cos\theta\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}\end{gathered} \tag{1.15}$$

Poiché il primo membro, per la formula del quadrato di binomio[3], è uguale a

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 + x_3^2 + y_3^2 - 2x_3y_3$$

semplificando con i quadrati a secondo membro rimane:

$$-2x_1y_1 + -2x_2y_2 - 2x_3y_3 = -2\cos\theta\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \tag{1.16}$$

ovvero, ricavando $\cos\theta$,

$$\cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \tag{1.17}$$

[3] Lo sviluppo del quadrato di binomio è $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$

che è finalmente la formula cercata che esprime l'angolo tra due vettori in funzione delle loro coordinate rispetto alla base data.
Con un calcolo analogo nel piano (dove non cambia nulla delle costruzioni fatte e dei passaggi svolti, salvo il fatto che abbiamo due coordinate anziché tre) si ottiene la formula analoga

$$\cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \tag{1.18}$$

Osservazione 1.3.1. Una volta ricavato il valore del coseno dell'angolo mediante la formula (1.17) [la (1.18) nel caso del piano], all'interno dell'intervallo $[0, 2\pi]$ avremo in generale *due* possibili valori di θ corrispondenti: ad esempio, se $\cos\theta = \frac{1}{2}$ allora $\theta = \frac{\pi}{3}$ oppure $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$. Questo riflette il fatto geometroco ovvio, illustrato dall'immagine

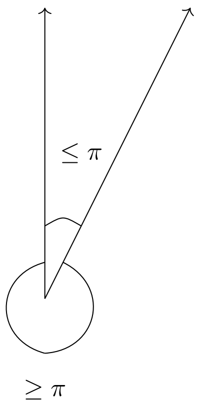


Figura 1.16: Angolo θ in base al suo valore

che due vettori individuano due angoli, uno minore o uguale a π e un altro maggiore o uguale a π. Per risolvere questa ambiguità, quando si parla di angolo tracciare due vettori d'ora in poi verrà inteso quello minore o uguale di π (il cosiddetto *angolo convesso*).
Esempio 1.3.1. Considerando ad esempio i vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ che rispetto a una terna ortonormale $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ hanno coordintate rispettivamente (1,0,1) e (1,-1,0) (in base alla definizione di coordinate, sono quindi $\vec{OP} = 1\vec{OP}_1 + 0\vec{OP}_2 + 1\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_3$ e $\vec{OQ} = 1\vec{OP}_1 + (-1)\vec{OP}_2 + 0\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2$). Allora l'angolo tra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$, in base alla formula (1.16), è dato da

$$\cos\theta = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

ovvero, dalla trigonometria, $\theta = \frac{\pi}{3}$ (in gradi, 60^o)
Le formule (1.17) e (1.18) ci forniscono anche un criterioper verificare in coordinate se due vettori sono perpendicolari: infati, l'angolo θ è $\frac{\pi}{2}$ (ovvero 90 gradi) se e solo se $\cos\theta = 0$, il che può essere vero solo se i numeratori della (1.17) e della (1.18) sono nulli.
Ad esempio, nello spazio, abbiamo che due vettori $\vec{OP} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{OQ} \equiv (y_1, y_2, y_3)$ sono perpendicolari se e solo se si verifica

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 \tag{1.19}$$

Ad esempio, i due vettori di coordinate (1,2,1) e (3,1,-5) sono perpendicolari in quanto

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 3 + 2 - 5 = 0$$

Osservazione 1.3.2. In base al criterio (1.19), il vettore nullo $\vec{OO}$ risulta essere perpendicolare a qualunque altro vettore $\vec{OP}$, in quanto le sue coordinate sono $(0, 0, 0)$ e, qualunque siano le cordinate (x_1, x_2, x_3) di $\vec{OP}$ si ottiene $x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$.
Tuttavia, si noti che le formule (1.17) e (1.18) sono applicabili per calcolrare un angolo solo se nessuno dei vettori è nulla, altrimenti una delle due radici a denominatore verrebbe $\sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$, e come è noto non è possibile dividere per zero.
Il numeratore che compare nella (1.17), o nella (1.18) nel caso del piano, può essere interpretato come una nuova operazione, una sorta di prodotto che date due terne (due coppie nel caso del piano)

di numero reali, dà come risultato un numero reale: si denota $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$[4], è possibile porre:

$$x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{1.20}$$

mentre, nel caso del piano sarà:

$$x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2$$

La (1.20) è un esempio di *prodotto scalare*, una nozione che vedremo più in generale in una dei prossimi capitoli (il nome viene dal fatto che si tratta di un'operazione il cui risultato è un numero reale, e come detto sopra nel contesto dei vettori i numeri reali si chiamano anche scalari).
Si noti che anche le formule (1.10) e (1.11) per calcolare in coordinate della lunghezza di un vettore (rispettivamente nel piano e nello spazio) possono essere espresse in termini del prodotto scalare: infatti, ad esempio per la (1.12) si ha, facendo riferimento alla (1.20),

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3} = \sqrt{x \cdot x}$$

Il prodotto scalre rappresenta qundi una sorta di "strumento di misura" tramite il quale si esprimono le misure della lunghezza e degli angoli tra vettori quando si lavora in coordinate: quindi, per manipolare espressioni che riquardano lunquezza e angolo e, come verrà fatto in capitoli successivi, ricavare le formule che coinvolgono in qualche modo queste nozioni (ad esempio, riflessioni, proiezioni ortogonali, etc.) è necessario conoscerne le proprietà algebriche.
Le proprietà più importanti, limitando al cso di $\mathbb{R}^3$ (tali proprietà saranno valide anche nel caso di $\mathbb{R}^2$, dove si ricavano nello stesso modo e l'unica differenza è che nelle formule non compare la terza componente)

1. Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa: infatti, si verifica immediatamente che

$$x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = y \cdot x$$

2. Come visto nel pagrafo precedente che se due vettori geometrici $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ nello spazio hanno coordinate date rispettivamente da due terne $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, allora la loro somma $\vec{OP} + \vec{OQ}$ ha coordinate dalla terna $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ che si ottiene sommando le rispettive componenti delle due terne: questo definisce un'operazione di somma tra le x e y, che prodotto scalare gode delle proprietà distributiva rispetto rispetto a tale somma, ovvero date tre terne $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3)$ valgono le

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \tag{1.21}$$

rispettivamente proprietà distributiva a destra e a sinistra.
Infatti, essendo $y + z = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$, dalla (1.20) si ha

$$x \cdot (y + z) = x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + x_3(y_3 + z_3) =$$

usando per ciascuno dei tre addendi la proprietà distributiva del prodotto di numeri reali rispetto alla somma

$$= x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 + x_3 y_3 + x_3 z_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = x \cdot y + x \cdot z$$

come si voleva.
Allo stesso modo (omettiamo quindi i dettagli) si verifica che vale anche la proprietà distributiva a sinistra, ovvero la seconda delle (1.21).

3. Visto nel paragrafo precedente che se un vettore geometrico $\vec{OP}$ nello spazio ha coordinate date dalla terna $x = (x_1, x_2, x_3)$, allora il prodotto $c\vec{OP}$ del vettore per un numero $c \in \mathbb{R}$ ha coordinate date della terna x per c: posto $cx = (cx_1, cx_2, cx_3)$, ci chiediamo come si comporta il prodotto scalare rispetto a questa operazione (che quindi non è nient'altro per un vettore), ovvero cosa se date due terne $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ e un numero $c \in \mathbb{R}$ eseguiamo i prodotti scalare $(cx) \cdot y$ oppure $x \cdot (cx)$. Si verifica facilmente che si ha

$$(cx) \cdot y = c(x \cdot y), \quad x \cdot (cy) = c(x \cdot y) \tag{1.22}$$

Infatti, essendo $cx = (cx_1, cx_2, cx_3)$, per la (1.20) si ha

$$(cx) \cdot y = cx_1 y_1 + cx_2 y_2 + cx_3 y_3 =$$

[4] nel caso del piano, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$

mettendo in evidenza c che compare in tutti e tre gli addendi

$$= c(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = c(x \cdot y)$$

come volevamo. Allo stesso modo (omettiamo quindi i dettagli) si verifica la seconda delle (1.22).

Vediamo ora che in $\mathbb{R}^3$ è possibile introdurre anche un'altra operazione molto utile in geometria ma anche in altre ma anche in altre applicazioni (soprattutto in fisica), il *prodotto vettoriale*, che date due terne di numeri reali dà come risultato non uno scalare (come nel caso del prodotto scalare) ma una nuova terna (che rappresenta in cordinate un nuovo vettore, da cui il nome). La definizione è la seguente: se $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ allora si pone

$$x \wedge y := (x_2y_3 - x_3y_2, x_2y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \tag{1.23}$$

Ad esempio, se $x = (1, 2, 3)$ e $y = (2, 5, -1)$ si ha

$$x \wedge y := (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5, 3 \cdot 2 - 1, 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2) = (-17, 7, 1)$$

Il motivo di questa particolare definizione è che si vuole che la terna $x \wedge y$ rappresenti (in coordinate rispetto a una base ortonormale) un vettore che è perpendicolare sia al vettore rappresentato da x che a quello rappresentato da y.

Per verificare che effevamente è così, basta usare il criterio di perpendicolarità visto nella (1.19), cioè moltiplicare le rispettive componenti di x e $x \wedge y$ (la prima con la prima, la seconda con la seconda, la terza con la terza) e sommare:

$$\begin{gathered} x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = \\ x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 - x_2x_1y_3 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 = 0 \end{gathered}$$

in quanto come si vede facilmente tutti i termini si semplificano.

Analogamente, per verificare che anche il vettore di coordiante y è perpendicolare al vettore rappresentato dal prodotto vettoriale $x \wedge y$:

$$\begin{gathered} y_1(x_2y_3 - x_3y_2) + y_2(x_3y_1 - x_1y_3) + y_3(x_1y_2 - x_2y_1) = \\ y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2 - y_2x_1y_3 + y_3x_1y_2 - y_3x_2y_1 = 0 \end{gathered}$$

come si voleva.

Come abbiamo già fatto per il prodotto scalare, vediamo le più importanti proprietà algebriche dell'operazione di prodotto vettoriale: iniziamo con il segnalare subito che esso *non* è commutativo, ma si ha

$$x \wedge y = -y \wedge x$$

ovvero quando combiamo l'ordine dei fattori il risultato cambia di segno (ovvero otteniamo una terna con le componenti di segno opposto). Ad esempio, per i due vettori $x = (1, 2, 3)$ e $y = (2, 5, -1)$ per cui sopra abbiamo già calcolato $x \wedge y = (-17, 7, 1)$, si ha

$$y \wedge x = (5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2, -1 \cdot 3, 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1) = (17, -7, -1).$$

Ancora, nella manipolazione di espressioni e formule che coinvolgono il prodotto vettoriale è necessario fare attenzione al fatto che esso *non* è neanche associativo, cioè in generale si ha

$$x \wedge (y \wedge z) \neq (x \wedge y) \wedge z$$

Ad esempio, se prendiamo $x = (1, 0, 0)$ e $y = z = (0, 1, 0)$, si vede facilmente che $x \wedge y = (0, 0, 1)$ e $(x \wedge y) \wedge z = (-1, 0, 0)$, mentre dall'altra si ha $y \wedge z = (0, 0, 0)$ e $x \wedge (y \wedge z) = (0, 0, 0)$.

Ancora, esattamente come abbiamo fatto nella (1.21) per il prodotto scalare, verifichiamo che anche il prodotto vettoriale gode di proprietà distributiva (*sia a destra che a sinistra*) rispetto alla somma di terne definite $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2x_3 + y_3)$, ovvero

$$x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z, \quad (x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z \tag{1.24}$$

Ad esempio, verificando la prima (la seconda è analoga): essendo $y + x = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$, per definizione di prodotto vettoriale si ha

$$x \wedge (y + z) = [x_2 \cdot (y_3 + z_3) - x_3 \cdot (y_2 + z_2), x_3 \cdot (y_1 + z_1) - x_1 \cdot (y_3 + z_3), x_1 \cdot (y_2 + z_2) \\ -x_2(y_1 + z_1)] =$$

Svolgendo i calcoli per ognuna delle tre componenti

$$= (x_2y_3 + x_2z_3 - x_3y_2 - x_3z_2, x_3y_! + x_2z_1 - x_1y_3 - x_1z_3, x_1y_2 + x_1z_2 - x_2y_1 - x_2z_1) =$$
$$(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2z_3 - x_3z_2, x_3z_1 - x_1z_3, x_1z_2 - x_2z_1)$$

ovvero proprio $x \wedge y + x \wedge z$, come voluto. Infine, si verifica che vale un'analoga della (1.22) anche per il prodotto vettoriale, ovvero

$$x \wedge (cy) = c(x \wedge y), \quad (cx) \wedge y = c(x \wedge y) \tag{1.25}$$

Ad esempio, si verifica la prima (la seconda è analoga): essendo $cy = (cy_!, cy_2, cy_3)$, per definizione di prodotto vettoriale si ha

$$x \wedge (cy) = (x_2(cy_3) - x_3(cy_2), x_3(cy_1) - x_1(cy_3), x_1(cy_2) - x_2(cy_1)) =$$

mettendo in evidenza il c in ognuna delle componenti

$$= (c(x_2y_3 - x_3y_2), c(x_3y_1 - x_1y_3), c(x_1y_2 - x_2y_1)) =$$

ovvero proprio $c(x \wedge y)$, come voluto.
È stato detto che il prodotto vettoriale $v \wedge y$ di due terne $x, y \in \mathbb{R}^3$ dà le coordinate di un vettore perpendicolare a entrambi i vettori rappresentati da x e da y, e che quindi trova sulla retta rappresentata nella figura seguente:

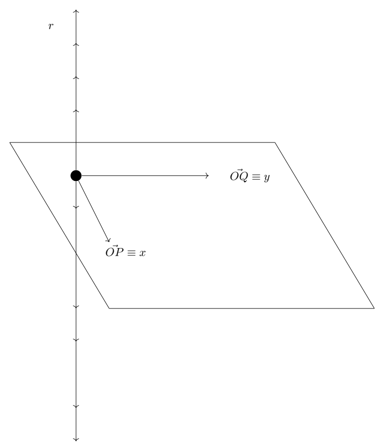


Figura 1.17: Prodotto vettoriale $v \wedge y$

Conoscendo quindi la direzione di tale vettore, per determinarlo completamente bisogna trovarne lunghezza e verso.
Per quello che riguarda la lunghezza, per calcolarla basterà utilizzare la formula (1.11). In base a tale formula e alla (1.23), si ha

$$|x \wedge y|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

Svolgendo i conti (omettendo i passaggi), non è difficile vedere che tale espressione è uguale a

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

ovvero, ricordando la notazione di prodotto scalare introdotta nella (1.20)

$$|x|^2 \cdot |y|^2 - (x \cdot y)^2$$

Riscrivendo questa espressione come[5]

$$|x|^2 \cdot |y|^2 \left(1 - \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^2 \cdot |y|^2}\right)$$

[5]Supponendo che sia x che y siano diverse dalla terna nulla (0,0,0), altrimenti non potrebbe porre $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ o $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ a denominatore. Del rsto, se x o y fossero uguali alla terna nulla, il problema di calcolare la lughezza di $x \wedge y$ non si porrebbe perché in quel caso dalla definizione di prodotto vettoriale si vedrebbe subito che anche $x \wedge y$ sarebbe la terna nulla, e quindi la lunghezza del vettore corrispondente sarebbe zero.

e ricordando che in alla (1.17) si ha $\cos\theta = \frac{x\cdot y}{|x|\cdot|y|}$ (dove θ è l'angolo formato dai vettori rappresentati da x e y) concludendo che

$$|x\wedge y|^2 = |x|^2\cdot|y|^2(1-\cos^2\theta) = |x|^2\cdot|y|^2\sin^2\theta$$

(dove viene utilizzata l'identità trigonometrica $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$), ovvero, estraendo la radice a entrambi i membri,

$$|x\wedge y| = |x|\cdot|y|\sin\theta \tag{1.26}$$

che è finalmente una formula semplice per la lunghezza vettoriale rappresentato in coordinate da $x\wedge y$, in funzione della lunghezza $|x|$ del vettore rappresentato da x, della lunghezza $|y|$ del vettore rappresentato da y e dell'angolo θ formato da questi due vettori[6].
ale formula dice ad esempio che $|x\wedge y| = 0$ (ovvero $x\wedge y = (0,0,0)$ rappresenta il vettore nullo $\vec{OO}$) esattamente quando $\sin\theta = 0$ ovvero, come dice la trigonometria, quando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ (180 gradi). Come si vede nella figura seguente

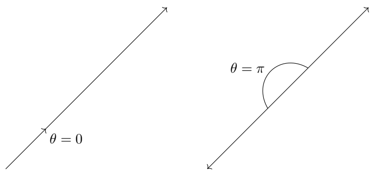


Figura 1.18: Caso in cui $\theta = 0$ e il caso in cui l'angolo $\theta = \pi$

questo equivale a dire che i vettori sono allineati. In altre parole, si deduce che $x\wedge y = (0,0,0)$ solo quando le terne x e y sono una multipla dell'altra (ovvero proporzionali).
Conoscendo direttamente e lunghezza del vettore rappresentato da $x\wedge y$, per il verso sono possibili solo due possibilità:

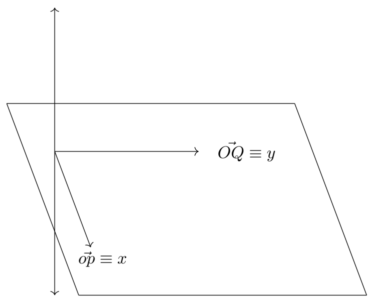


Figura 1.19: Vettore OQ e OP parallele ad x e y

In realtà il verso del vettore rappresentato da $x\wedge y$ non è determinabile in modo univoco, ma dipende da quale base ortonormale è stato scelto per tradurre i vettori in coordinate.

1.4 Spazi vettoriali

Come visto, i vettori geometrici sono degli oggetti che possono essere sommati tra loro e moltiplicati per un numero reale, ed è usando queste operazioni e le proprietà (1.2)-(1.9) che esse soddisfano che siano riusciti a introdurre importanti concetti, come quello di coordinate, ricavandone importanti proprietà.
Il fatto notevole è che in matematica e nelle sue applicazioni esistono molti altri insiemi, composti da elementi di natura molto diversa dai vettori geometrici, che si comportano tuttavia in modo analogo a questi ultimi, ovvero che possono essere in un certo senso sommati tra loro e moltiplicati per un numero reale, e che soddisfano proprietà analoghe a quelle viste nelle (1.2)-(1.9).
Ad esempio, si consideri l'insieme di tutte le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: chiaramente, due funzioni possono essere sommate tra loro per ottenere una nuova funzione (es. se $f(x) = x^2$, e $g(x) = e^x$, la funzione che a ogni $x\in\mathbb{R}$ associa x^2+e^x costituisce una nuova funzione, che può essere pensata come la somma $f+g$), e una funzione può essere moltiplicata per un numero reale per ottenere una nuova

[6] Si noti che estraendo la radice è stato scritto $\sin\theta$, invece del vettore assoluto $|\sin\theta|$ perché, supponendo che θ rappresenti l'angolo convesso tra i due vettori (si veda l'Osservazione 1.3.1), vale $\theta\in[0,\pi]$ e quindi $\sin\theta\leq 0$.

funzione (ad esempio, data $f(x) = x^2$, la funzione che a ogni $x \in \mathbb{R}$ associa $2x^2$ può essere pensata come la funzione $2f$).
Queste operazioni, come è facile verificare, soddisfano le proprietà analoghe alle (1.2)-(1.9) viste per i vettori geometrici: ad esempio, è chiaro che la somma di funzioni gode della proprietà commutativa (facendo riferimento all'esempio di sopra, $x^2 + e^x = e^x + x^2$); o ancora, per quello che riguarda la proprietà (1.4), esiste una funzione che funge da elemento neutro per la somma (la funzione costante uguale a zero) e così via per tutte le altre proprità.
Un altro esempio di insieme che si comporta in modo analogo ai vettori geometrici, che è di fondamentale importanza in matematica e come si vedrà in particolare in questo corso, è quello dell'*insieme delle n-uple di numeri reali.*
Dato un numero naturale positivo n, una n-uple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è una sequenza ordinata di n numero reali $x_1, x_2, x_n \in \mathbb{R}$: ad esempio, per $n = 2$ e $n = 3$ si ottengono rispettivamente le coppie (x_1, x_2) e le terne (x_1, x_2, x_3), che abbiamo già introdotto parlando di coordinate di vettori geometrici già introdotto parlando di coordinate di vettori geometrici nel piano o nello spazio tridimensionale. Lungi dal rappresentare una generalizzazione astratta delle coppie o delle terne senza più significato concreto o utilità, le n-uple possono modellizzare oggetti e situazioni "reali" le più diverse tra loro: ad esempio, in fisica ogni evento dello spaziotempo è rappresentato da una 4-upla (x_1, x_2, x_3, x_4), dove le prime tra componenti x_1, x_2, x_3 sono le coordinate del punto in cui avviene l'evento e l'ultima componete x_4 ci dice in quale istante di tempo esso avviene; ancora, la configurazione di un braccio meccanico con n giunture può essere rappresentata da un n-upla in cui ogni componente ci dice l'angolo che formano i bracci nella giuntura corrispondente; oppure, se si avesse un mercato composto da 10 merci, la situazione dei prezzi in quel mercato può essere rappresentata da una 10-upla $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ in cui ciascuna componente indica il prezzo della merce corrispondente (x_1 della prima merce, x_2 della seconda, e così via).
Ora, sull'insieme delle n-uple di numeri reali, che si denota $\mathbb{R}^n$, si può definire un'operazione di somma tra due n-uple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sommando componente per componente

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n + y_n) \tag{1.27}$$

e un'operazione di prodotto di un numero reale $c \in \mathbb{R}$ per una n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ moltiplicando per c tutte le componenti della n-upla:

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) := (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \tag{1.28}$$

nel caso delle coppie o delle terne, queste due operazioni sono proprio quelle che traducono in coordinate, come affermano la Proposizione 1.2.1 e l'Osservazione 1.2.2, la somma e il prodotto per uno scalare di vettori geometrici.
Come è facile vedere, queste due operazioni verificano proprietà analoghe alle proprietà (1.2)-(1.9) che hanno somma e prodotto per un numero reale dei vettori geometrici. Ad esempio, sempre in riferimento alla proprietà (1.4), la n-upla che funge da elemento neutro per la somma è la n-upla $(0, 0, \dots, 0)$ che ha tutte le componenti nulle, in quanto chiaramente

$$(x_!, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{1.29}$$

In altre parole, la n-upla $(0, 0, \dots, 0)$ ha in $\mathbb{R}^n$ lo stesso ruolo che il vettore $\vec{OO}$ ha nell'insieme dei vettori applicati o la funzione costante uguale a zero nell'insieme delle funzioni.
Queste analogie suggeriscono che si può dare una definizione generale, astratta, che comprenda come casi particolari gli esempi appena visti. Il vantaggio di tale impostazione è che può esser studiato una volta per tutte le proprietà di questi insiemi senza doverle vedere nei singoli casi: un teorema dimostrato in generale nel caso astratto risulta poi vero per tutti gli esempi di questo tipo di struttura.
Definizione 1.4.1. Uno *spazio vettoriale reale (o $\mathbb{R}-$spazio vettoriale)* è un insieme su cui siano definite un'operazione di somma tra gli elementi di V e un'operazione di prodotto tra numeri reali e elementi di V in modo che siano soddisfatte le seguenti proprità:

1. La somma è *associativa*, cioè per ogni $v_1, v_2, v_3 \in V$ si ha

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

2. La somma e *commutativa*, cioè per ogni $v_1, v_2 \in V$ si ha

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

3. Esiste un elemento di V, denotato $\bar{0}$ e chiamato *vettore nullo*, tale che
$$v + \bar{0} = \bar{0} + v = v$$
(ovvero $\bar{0}$ è l'elemento neutro per la somma data su V)
4. Per ogni $v \in V$, l'elemento $(-1)v$ è il suo *opposto rispetto alla somma* o inverso additivo:
$$v + (-1)v = (-1)v + v = \bar{0}$$
5. Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, vale
$$c_1(c_2 v) = (c_1 c_2)v$$
6. Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, vale
$$c_1(c_2 v) = (c_1 c_2)v$$
7. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ e ogni $v_1, v_2 \in V$, vale
$$c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$$
8. Per ogni $v \in V$, si ha
$$1v = v$$

Gli elementi di uno spazio vettoriale V si chiamano *vettori*; per contrapposizione,in questo contesto i numeri reali si chiamano anche *scalari*.
Un vettore cv ottenuto moltiplicando v per uno scalare c si dice *proporzionale a* v o multipo di v.
Quindi sono spazi vettoriali reali gli insiemi V_O^2 e V_o^3 dei vettori geometrici rispettivamente limitati nel piano o liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale, l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple di numeri reali, e l'insieme di tutte le funzioni reali di variabile reale.
Osservazione 1.4.1. Come già visto nel caso particolare dei vettori, grazie alla proprità (1)-(8) di sopra è possibile manipolare le espressioni contenenti vettori nel modo in cui manipolare solitamente le espressioni algebriche tra numeri, e in particolare ad esempio in uno spazio vettoriale si possono "spostare i vettori" da un membro all'altro di un'ugualianza cambiandoli di segno. Più precisamente, da un'espressione del tipo $v_1 + v_2 = v_3$ si può passare a $v_1 = v_3 - v_2$ nel modo seguente:
sommando a entrambi i membri di $v_1 + v_2 = v_3$ in vettore $(-1)v_2$:
$$(v_1 + v_2) + (-1)v_2 = v_3 + (-1)v_2$$
Applicando la proprità associativa della somma (la 1 della Definizione 1.4.1) a primo memebro:
$$v_1 + (v_2 + (-1)v_2) = v_3 + (-1)v_2$$
Applicando la proprità 4 che afferma che $(-1)v_2$ è l'opposto di v_2:
$$v_1 + \bar{0} = v_3 + (-1)v_2$$
e infine applicando la 3 che definisce che il vettore nullo funge da elemento neutro:
$$v_1 = v_3 + (-1)v_2.$$

Per un altro esempio di proprietà vera nel caso dei vettori geometrici e che in realtà vale in qualunque spazio vettoriale, consideriamo la $0\vec{OP} = \vec{OO}$, che discendeva dalla definizione stessa di prodotto di un numero reale per un vettore geometrico: infatti, dal momento che in generale $c\vec{OP}$ denota un vettore avente lunghezza uguale a $|c|$ volte la lunghezza di $\vec{OP}$, questo implica che $0\vec{OP}$ abbia lunghezza zero, e quindi sia il vettore geometrico $\vec{OO}$ "schiacciato" sul punto O.
Ebbene, bisogna motrare che in realtà l'uguaglianza analoga $0v = \bar{0}$ vale per ogni vettore v di un qualunque spazio vettoriale V: infatti, si ha
$$0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v = \bar{0}$$
dove nella seconda uguaglianza è stato sfruttata la proprietà 6 della Definizione 1.4.1, nella terza ugualianza invece è stata la proprietà 8 e nell'ultima uguaglianza la proprietà 4.
QUindi, il fatto che moltiplicando per 0 un vettore si ottenga il vettore nullo si rivela essere una proprietà che non dipende da come si definisce il prodotto nello specifico caso ma semplicemente dalle proprietà algebriche della definizione generale di spazio vettoriale.

Osservazione 1.4.2. Nella definizione di spazio vettoriale data sopra è stato supposto che gli elementi dello spazio V possono essere moltiplicati per numeri reali, e per questo motivo si è parlato in termini di spazio vettoriale *reale*.
Analogamente, esistono gli spazi vettoriali *complessi*, per i quali la definizione è identica a quella data nella Definizione 1.4.1 con l'unica differenza che i vettori possono essere moltiplicati per numeri complessi anziché reali.
Ricordando che in numero complesso è un'espressione del tipo $a + bi$, essendo a, b numeri reali e i un nuovo numero, detto *unità immaginaria*, con la proprietà (non soddisfatta da nussun numero reale) che $i^2 = -1$.
Ad esempio, $2 + 3i, \pi\sqrt{2}i$ sono numeri complessi; dato un numero complesso $z = a + bi$, il numero reale a si dice *parte reale* di z, mentre il numero reale b (essendo il coefficente davanti all'unità immaginaria) si dice *parte immaginaria* di z. La parte immaginaria b può anche uguale a zero: in tale caso il numero complesso $a + bi$ coincide con il numero reale a (quindi ogni numero reale può essere pensato come un particolare numero complesso con parte immaginaria nulla). L'insieme dei numeri complessi si denota $\mathbb{C}$.
I numeri complessi possono essere sommati semplicemente sommando le rispettive parti reali e immaginarie. Ad esempio

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i = 6 + 8i.$$

Per moltiplicare due numeri complessi, basta prima eseguire il prodotto come se si trattasse di un'espressione algebrica letterale in cui la i è una indeterminata

$$(2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5i + 3i \cdot 4 + 3i \cdot 5i = 8 + 10i + 12i + 15i^2$$

e poi semplificarla ricordando che $i^2 = -1$ e sommando i termini simili:

$$8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 + 22i - 15 = -7 + 22i.$$

Non è difficile vedere che le operazioni di somma e prodotto così definite verificano le usuali proprietàverificate da somma e prodotto di numeri reali: proprietà associativa e commutativa, esistenza di elemeni neutri (il numero 0, con la proprietà che $z + 0 = 0 + z = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, e il numero 1, con la proprietà che $z1 = 1z = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$), proprietà distributiva.
Inoltre, esattamente come succede per i numeri reali, ogni numero complesso $a + bi$ diverso da zero (ovvero per cui a e b non sono entrambi nulli) ammette un inverso moltiplicativo, ovvero un numero complesso che moltiplicato per $a + bi$ dà come risultato 1. Più precisamente, l'inverso di $a + bi$ e il numero complesso

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Per verificare tale affermazione, è sufficiente moltiplicare tra loro $a+bi$ e $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ e verificare che il risultato sia uguale a 1. Riscrivendo $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ come $\frac{a+bi}{a^2+b^2}$ si vede subito che

$$a + bi \cdot \frac{a + bi}{a^2 + b^2} = \frac{(a + bi)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 i^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

(nella seconda uguaglianza è stata utilizzata l'identità notevole $(X+Y)(X-Y) = X^2 - Y^2$, mentre nella terza il fatto che $i^2 = -1$).
Ad esempio, se $a + bi = 2 + 3i$, ovvero $a = 2, b = 3$, si ha $a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ e quindi

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

è l'inverso di $2+3i$.
Riassumendo, i numeri complessi hanno quindi in comune con i numeri reali le sequenti proprietà:

1. La somma e il prodotto godono entrambi delle proprietà associativa e communitativa
2. Esiste un elemento neutro per le somme e un elemento neutro per il prodotto
3. ogni elemento a ammette un inverso additivo $-a$, tale che $a+(-a)=(-a)+a=0$
4. ogni numero a *diverso da* 0 ammette un inverso moltiplicativo a^{-1}, tale che $aa^{-1}=a^{-1}a=1$
5. vale la proprietà distributiva

Un qualunque insieme numerico le cui operazioni di somma e prodotto godano di queste proprietà si dice un *campo numerico* (o semplicemente campo). Solitamente un campo si denota come la lettera $\mathbb{K}$. Dal momento che per la maggior parte della nastra trattazione degli spazi vettoriali, che siano reali o complessi, si utilizzerà solo il fatto che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi, ovvero hanno le proprietà dette, non c'è nessun motivo nelle dimostrazioni che verranno portate di distinguere tra il caso complesso e quello reale: si può tranquillamente parlare di *spazio vettoriale definito su un campo* $\mathbb{K}$ e dimostrare le formule supponendo che gli scalari appartengano a $\mathbb{K}$, che potrebbe essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ senza che questo modifichi nulla rispetto alle dimostrazioni stesse.
L'esempio più importante di spazio vettoriale complesso è l'insieme $\mathbb{C}$ di tutte le n-uple $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ di numeri complessi $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$, sul quale le operazioni di somma di n-uple e prodotto di una n-upla per uno scalare sono definite esattamente come in $\mathbb{R}$

$$(z_1,z_2,\ldots,z_n)+(w_1,w_2,\ldots,w_n):=(z_1+w_1,z_2+w_2,\ldots,z_n+w_n) \tag{1.30}$$

$$c(z_1,z_2,\ldots,z_n):=(cz_1,cz_2,\ldots,cz_n) \tag{1.31}$$

con l'unica differenza che ora lo scalare c appartiene al campo dei numeri complessi.

Ora, verra mostrato come alcune delle più importanti nozioni viste per i vettori geometrici, e in particolare quella di coordinate, possono essere date in qualunque spazio vettoriale.
Ricordando che nello spazio V_O^2 dei vettori applicati nel piano, il punto di partenza della definizione di coordinate consiste nel mostrare che, fissati due vettori $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ non allineati, qualunque vettore $\vec{OP}\in V_O^2$ si può scrivere come loro combinazione $\vec{OP}=x_1\vec{OP}_1+x_2\vec{OP}_2$. Analogamente, nello spazio tridimensionale, per poter definire le coordinate si mostra che, fissati tre vettori $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ e $\vec{OP}_3$ non appartenenti a uno stesso piano, qualunque vettore $\vec{OP}\in V_O^3$ può essere scritto come $\vec{OP}=x_1\vec{OP}_1+x_2\vec{OP}_2+v_3\vec{OP}_3$.
A parte il diverso numero di vettori che serve per ottenere le coordinate in V_O^2 e in V_O^3, in entrambi i casi il punto di partenza è la possibilità di ottenere qualunque vettore dello spazio combinando un numero finito di vettori dati. Questo suggerisce la sequente definizione per un generico spazio vettoriale (definito su un qualunque campo $\mathbb{K}$):
Definizione 1.4.2. Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale. Dei vettori $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$ si dicono *generatori di* V se ogni vettore $v\in V$ si può scrivere come

$$v=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n$$

per certi coefficienti $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{K}$.
Un'espressione del tipo $x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n$ si dice *combinazione lineare dei vettori* $v_1,v_2,\ldots,v_n$ sono generatori di V se ongi vettore dello spazio si può scrivere come loro combinazione lineare. Si dice anche che $v_1,v_2,\ldots,v_n$ *generano* V. Quindi, nello spazio V_O^2 due vettori non allineati danno un insieme di generatori; nello spazio V_O^3 un insieme di generatori è invece dato da tre vettori che non stiano sullo stesso piano.

La Definizione 1.4.2 potrebbe far pansare che a questo punto si possano definire le coordinate di un vettore v in uno spazio vettoriale V rispetto a un insieme di generatori fissato $v_1,\ldots,v_n$ semplicemente come i coefficienti $x_1,x_2,\ldots,x_n$ che appaiono nella combinazione lineare $v=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n$, ovvero ricalcando la definizione 1.1.1 e 1.2.2 date negli spazi V_O^2 e V_O^3.
In realtà, questo non è possibile in quanto sussiste un problema di unicità:
La Definizione 1.4.2, da sola, non garantisce che i coefficienti $x_1,x_2,\ldots,x_n$ che servono per decomporre un vettore dato v come $v=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n$ di $v_1,v_2,\ldots,v_n$ siano univocamente determinati. In generale, infatti, un vettore può essere scritto in più modi diversi come combinazione di vettori dati: ad esempio, nello spazio $V=\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali, consideriamo i vettori

$$v_1=(1,0),\quad v_2=(0,1),\quad v_3=(1,1)$$

e il vettore $v = (3, 2)$.
Ad esempio, si hanno le seguenti, differenti decomposizioni di v come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3:

$$(3, 2) = 2(1, 0) + 1(0, 1) + 1(1, 1)$$
$$(3, 2) = 4(1, 0) + 3(0, 1) + (-1) \cdot (1, 1)$$

Il motivo per cui questo problema non si è verificato quando abbiamo definito le coordinate negli spazi V_O^2 e V_O^3 usando rispettivamente una coppia di vettori non allineati o a una terna di vettori non complanari, è che tali insiemi di generatori hanno una proprietà aggiuntiva rispetto alla Definizione 1.4.2: si tratta di *insiemi di generatori minimali*, in un senso che ora bisogna precisare ed illugtrare.
Come si vedere nel disegno seguente, se dall'insieme di generatori di V_O^2 costituito da una coppia $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2$ di vettori non allineati eliminando uno qualunque dei due vettori, il vettore rimanente non genera più lo spazio, in quanto con esso riusciamo a ottenere (prendendo i suoi multipli) sonlo i vettori che stanno sulla retta a cui esso appartiene.

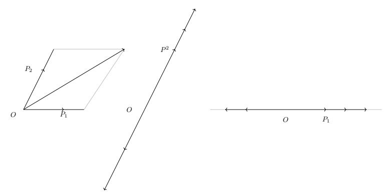


Figura 1.20: Esempi di generatori di V_O^2

Analogamente, nello spazio V_O^3 dei vettori geometrici liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale, se dall'insieme di generatori costituito da una terna $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ di vettori non complanari eliminiamo anche un solo vettore, i due vettori rimanenti non generano più lo spazio: ad esempio, eliminando $\vec{OP}_3$, le combinazioni lineari dei due vettori restanti $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ ci danno solo i vettori $\vec{OP}$ che stanno sul piano p del disegno

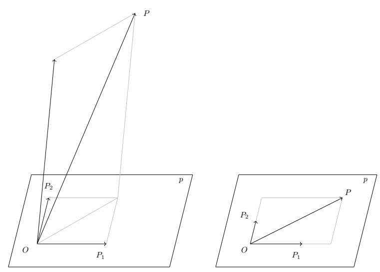


Figura 1.21: Esempi di generatori di V_O^2 e in V_O^3

È in questo senso che tali sistemi di generatori sono minimali: in essi, nessun vettore è superfluo, nessuno può esser eliminato senza perdere la proprietà generale tra poco che è esattamente questa proprietà che garantisce l'unicità dei coefficienti della combinazione lineare in cui si decompone un vettore dato (e che ci consente quindi di definire in modo univoco le coordinate), ma prima è necessario chiarere meglio il concetto di minimalità di un insieme generatori non minimale possono essere eliominati e quali no. Per questo è d'aiuto un esempio considerando nello spazio V_O^3 quattro vettori come nella figura seguente in cui OP_1, OP_2, OP_3 appartengono a uno stesso piano, e OP_4 si trova invece fuori da questo piano.
Da una parte, si può vedere che un qualunque vettore di V_O^3 può essere scritto come combinazione di questi quattro vettori, che costituiscono quindi un insieme di generatori in V_O^3, dall'altra, non si trata di un insieme di generatori minimali nel senso spiegato sopra, in quanto alcuni vettori possono essere eliminati e i restanti continuano a generare lo spazio: ad esempio, è possibile eliminare OP_1 e gli altri tre continueranno ad esistere e a generare spazio; lo stesso accade con OP_2 e OP_3 mentre, se viene eliminato OP_4 i vettori restanti OP_1, OP_2, OP_3 non saranno più un insieme di generatori (trovandosi tutti su uno stesso piano, le kiri combinazioni darebbero solamente vettori che appartengono ancola a questo piano e non tutti quelli dello spazio).
Quindi, se un insieme di generatori non è minimale, è importante capire quali vettori possono essere effettivamente eliminati da esso. Il seguente risultato risponde proprio a questa domanda.

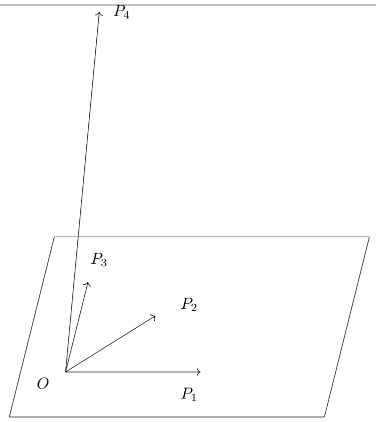


Figura 1.22: Esempio di generatori non minimale in V_O^3

Proposizione 1.4.1. *Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ generatori dello spazio vettoriale V. L'insieme $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ è ancora un insieme di generatori se e solo se v_i si può scrivere come combinazione dei rimanenti.*

Dimostrazione. è necessario dimostrare due implicazioni:

1. Se v_i è combinazione di $v_1, \dots, v_{n-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ allora bastano $v_1, \dots, v_{n-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ per generare V.
2. Se $v_1, \dots, v_{n-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ sono generatori di V allora V_i si scrive come loro combinazione lineare.

Bisona osservare che la seconda implicazione è ovvia, in quanto dire che $v_1, \dots, v_{n-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ sono generatori di V significa che ogni vettori di V si scrive come loro combinazione lineare, e questo sarà in particolare vero per v_i.
Per dimostrare invece la prima implicazione, bisogna supporre che v_i si scriva come combinazione degli altri vettori di $\{v_1, \dots, v_n\}$, ovvero che esistano dei coefficienti $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v_1 = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n \tag{1.32}$$

e per cercare di dimostrare che $v_1, \dots, v_{n-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ generano V, ovvere ogni $v \in V$ si scrive come loro cambinazione lineare. Sapendo che tutti i vetotri $v_1, \dots, v_n$ (compreso v_i) generano V, ovvero che ogni vettore v dello spazio V si scrive come loro combinazione lineare:

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_{i-1} v_{i-1} + c_i v_i + \cdot + c_n v_n \tag{1.33}$$

Ma allora, sostituendo la (1.32) nella (1.33), si ottiene

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_{i-1} v_{i-1} + c_i (a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n) + \dots + c_n v_n \tag{1.34}$$

ovvero, facendo i conti e mettendo in evidenza i vettori,

$$v = (c_1 + c_i a_1) v_1 + \dots + (c_{i-1} + c_i a_{i-1}) v_{i-1} + (c_{i+1} + c_i a_{i+1}) v_{i+1} + \dots + (c_n + c_i a_n) v_n \tag{1.35}$$

e cui bisogna vedere che ogni v dello spazio si riesce a scrivere come combinazione di $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1} m \dots, v_n$: questo dimostra che bastano tali vettori a generare lo spazio. □

Capitolo 2

Sistemi di equazioni lineari e matrici

Per definire rigorosamente cosa si intenda per equazione lineare (o equazione di 1^o grado) e scrivere il generico esempio di equazione lineare, si trova prima una notazione conveniente per denotare tali equazioni.
Infatti, per non avere limitazioni sul numero delle incognite, non è possibile continuare a indicarle con le lettere dell'alfabeto $x, y, z, etc.$, che sono in numero limitato, ma verrà utilizzata sempre la stessa lettera, tradizionalmente la x con degli indicatori numerici che consentono di quale incognita si tratta: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con, dove n è un numero naturale. Facendo un esempio di strutturate in questo modo, si otterrà una situazione di questo tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.1}$$

dove $b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono elementi di un campo (solitamente, il campo dei numeri reali o quello dei complessi) che svolgono il ruolo rispettivamente di termine noto e coefficienti delle incognite (per ogni incognita x_i, bisogna denotare il suo coefficiente con una lettera, a_i con lo stesso indice dell'incognita).
Dare una soluzione dell'equazione (2.1) significa trovare degli elementi del campo, ovvero dei numeri, che sostituiti alle incognite rendano l'ugualianza vera.
Ad esempio, nell'equazione lineare in due incognite $x_1 - x_2 = 1$ a coefficienti nel campo dei reali $\mathbb{R}$, ponendo $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ si ottiene l'ugualianza vera $2 - 1 = 1$, mentre ad esempio ponendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ si ottiene $1 - 2 = 1$ che è falsa.
Da questo semplice esempio si vede come dare una soluzione dell'equazione $x_1 - x_2 = 1$ significa non solo dare *due* valori numerici, da sostituire alle due incognite dell'equazione, ma è necessario precisare quale valore vada sostituito alla prima incognita e quale alla seconda, ovvero specificare in quale ordine stiamo prendendo questi due elementi.

La soluzione data di tale equazione può essere pensata e scritta come una *coppia ordinata* di numeri, che è possibile denotare in (2.1). La coppia (2,1) è una soluzione dell'equazione $x_1 - x_2 = 1$, mentre la caoppia (1,2) non lo è.
Analogamente, per un'equazione con 3 incognite, una sua soluzione sarà data da una terna ordinata (3,2,1) è una sua soluzione, in quanto sostituendo $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$ si ottiene l'uguaglianza vera $3 - 2 + 1 = 2$; la terna (2,1,3) invece, non è una sua soluzione.

In generale, per equazioni con n incognite si dovrebbe utilizzare n-uple ordinate $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$: possiamo allora dare la seguente:
Definizione 2.0.1. Data un'equazione lineare $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ in n incognita a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$, si dice *soluzione* dell'equazione una n-upla ordinata $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di elementi di $\mathbb{K}$ tale che sostituendo v_1 al posto di x_1, v_2 al posto di x_2 etc. fino a x_n l'equazione risulta verificata (ovvero l'ugualianza $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = b$ risulta vera).

Ora, un *sistema di equazioni lineari* è semplicemente un insieme di equazioni lineari.
Per scrivere un generio tale sistema, per risolvere un problema di notazione simile a quello affrontato quando è stato scritta la generica equazione lineare, ovvero è necessaria una notazione efficace per indicare i diversi coefficienti delle incognite delle incognite nelle diverse equazioni del sistema.
A questo scopo, nell'espressione della generica equazione lineare $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, la seconda $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ e così via.
Allora, il generico sistema di equazioni lineari con n incognite e m equazioni (il numero di incognite

può anche essere diverso dal numero di equazioni, perciò li si indica con due lettere diverse) sarà

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{oppure,} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

In (2.2) è presente la soluzione dell'equazione, sia in forma matriciale $Ax = b$ che in forma sistemica – Visto ciò è possibile dare la seguente

Definizione 2.0.2. Una soluzione del sistema (2.2) è una n-uple $(v_1, v_2 \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ che è soluzione comune di tutte le equazioni del sistema.

nel prossimo paragrafo varrà affrontato un algoritmo che consente di determinare tutte le soluzione di un sistema. In particolare, si scoprirà che possono verificarsi solo le seguenti tre possibilità[1]:

- il sistema non ha nessuna soluzione
- il sistema ha una sola soluzione
- il sistema ha infinite soluzioni

Prima di entrare nei dettagli, è necessario vedere un esempio di ciascuna di queste possibilità, con l'obiettivo di iniziare a capire le ragioni per cui essere possono verificarsi.

Non è difficile essibire un esempio di sistema con infinite soluzioni. Ad esempio, considerando il seguente sistema formato da una sola equazione in due incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Una soluzione del sistema è una coppia di numeri reali tali che la loro somma dà come risultato zero: questo significa che i numeri devono essere uno l'opposto dell'altro, e quindi scelto un qualunque $t \in \mathbb{R}$, la coppia $(t, -t)$ è una soluzione: le soluzioni sono quindi infinite, tante quanti i numeri reali.

Fatto ciò è possibile alla $x_1 + x_2 = 0$ un'altra condizione, ottenendo quindi un sistema di due equazioni, ad esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi le coppie che soddisfano non solo la prima equazione, cioè come detto tette quelle del tipo $(t, -t)$, ma anche la seconda, che afferma semplicemente che $x_1 = x_2$, cioè i due elementi della coppia devono essere non solo opposti ma ache uguali tra loro. Ma l'unico numero reale uguale al suo opposto è lo zero, e quindi il sistema ha come unica soluzione la coppia (0,0). Questo esempio suggerisce che in generale più equazioni ci sono in un sistema, maggiori sono i vincoli che imponendo sulle incognite e quindi meno n-uple ci saranno che soddisfano tutte le condizioni siano sufficienti a ottenere una sola soluzione.

Tuttavia, è facile fare un altro esempio che mostra che questa prima impressione non è del tutto esatta: considerando il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Ora, è immediato vedere che le soluzioni $(t, -t)$ della prima equazionde soddisfano tutte anche la seconda, quindi il sistema continua ad avere le infinite soluzioni $(t, -t)$. Quest accade perché la seconda equazione è in realtà del tutto equivalente alla prima [mettendo in evidenza il 2, si può riscrivere $2x_1 + 2x_2 = 0$ come $2(x_1 + x_2) = 0$, ovvero, dividendo per 2, proprio la prima equazione] e non aggiunge nessun nuovo vincolo sulle incognite: si tratta di un'equazione superflua, la cui presenza o meno non cambia l'insieme delle soluzioni.

Le equazioni superflue presenti in un sistema possono essere tuttavia molto meno evidenti che nel caso appena visto. Ad esempio, consideriando il sitema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \tag{2.5}$$

[1] Questo è un fatto caratteristico delle equazioni lineari: per una generica equazione possono verificarsi anche altri casi, ad esempio l'equazione $x^2 = 9$ ha due soluzione, $x = 3$ e $x = -3$.

Una qualunque terna (x_1, x_2, x_3) che verifica le due equazioni soddisfa necessariamente anche l'ugualianza che si ottiene sommandole membro a membro, ovvero

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (2x_1 + x_2 + 3x_3) = 1 + 2$$

cioè, svolgendo i conti,

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3$$

Essendo tale equazione una conseguenza delle prime due, aggiungerla al sistema non modifica l'insieme delle soluzioni: in altre parole, il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \tag{2.6}$$

contiene un'equazione superflua, dipendente dalla altre, certamente meno evidente a pria vista che nel caso del sistema (2.4).

Naturalmente, equazioni superflue possono essere ottenute anche con combinazioni più complicate della somma delle prime due equazioni, ad esempio sempre in riferimento al sistema (2.5), una terna che soddisfi le due equazioni necessariamente soddisfa anche l'ugualianza

$$5(x_1 + x_2 + x_3) + (-3)(2x_1 + x_2 + 3x_3) = 5 \cdot +(-3) \cdot 2 \tag{2.7}$$

cioè, svolgendo i conti,

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1$$

ovvero anche nel sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases} \tag{2.8}$$

la terza equazione è superflua, in un modo forse ancora meno evidente.

Per quello che riguarda i sistemi senza soluzioni, è abbastanza semplice esivirne uno. Ad esempio, il sistema di due equazioni in due incognite seguente

$$x_1 + x_2 = 0x_1 + x_2 = 1$$

è evidentemente privo di soluzioni, in questo se la somma di due numeri è uguale a 0 non può certamentet nello stesso tempo essere uguale a 1. In altre parole, le due equazioni del sono tra loro incompatibili, ovvero esprimono condizioni contradditorie. Per questo motivo, un sistema che non ha soluzioni si dice *incompatibile* (e per contro, si dirà *compatibile* un sistema che ha almeno una soluzione). Per questo motivo, un sistema che non ha soluzioni si dice *incompatibile* (e per contro, si dirà *compatibile* un sistema che ha almeno una soluzione). Analogamente a quanto fatto sopra per le equazioni superflue, si possono costruire esempi di sistemi in cui l'incompatibilità di una equazione con le altre non e così evidente come nel semplice sistema precedente. Ad esempio, prendiamo sempre come punto di partenza il sistema (2.5). Come visto sopra, una terna che soddisfi le due equazioni membro a membro.

Ma allora, se modifichiamo solo il termine noto di quest'ultima uguaglianza, si ottiene una che è incompanibile con le altre due: ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} \tag{2.9}$$

non ha soluzioni, perché per una qualunque terna che soddisfi le prime due equaioni si deve avere che $3x_1 + 2x_2 + 4x_3$ è uguale a 3, e non a 5.

Osservazione 2.0.1. Un sistema di equazioni in cui i termini noti siano tutti uguali a zero (un tale sistema si dice *omogeneo*) ha sempre almeno la soluzione $(0, 0, \ldots, 0)$, in quanto ponendo tutte le incognite uguali a zero si ottengono uguaglianza vere. Quindi i sistemi omogenei sono sempre compatibili. Vedremo più avanti altre importanti caratteristiche dei sistemi omogenei che li distinguono dai sistemi non omogenei.

2.1 Matrice di un sistema lineare

Per conoscere un sistema è necessario conoscere, equazione per equazione, quali sono i coefficienti che moltiplicano ogni singola incognita e i termini noti. Quindi, se, dato un sistema, si scrive una tabella di numeri disposti in righe e in colonne in modo che in ogni riga ci siano i coefficienti delle incognite di una certa equazione (ordinati secondo l'ordine scelto delle incognite) e il termine noto, tale tabella conterrà tutte le informazioni che servono sul sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \tag{2.10}$$

può essere rappresentato dalla tabella

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

questa viene chiamata in gergo, *matrice completa del sistema.*

Definizione 2.1.1. Una matrice A ad elementi reali è una tabella di numeri reali, detti le sue *entrate*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

scritti su righe e colonne: se la matrice ha m righe e n colonne, si dice che A ha dimensione $m \times n$ oppure si può affermare che sia di tipo $m \times n$ o si può anche dire che appartiene a $\mathbb{R}^{m\times n}$. Se la matrice è ad elementi complessi, si può affermare che A appartiene a $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Indicando gli elementi della matrice con a_{ij} oppure $(A)_{ij}$ utilizzando due indici in basso, dove i è l'*indice di riga* (dice in quale riga si trova e va da 1 a m) e j è *l'indice di colonna* (dice in quale colonna si trova e va da 1 a n). Si dice anche che a_{ij} è l'entrata di posto ij.

Esempio 2.1.1. *Matrice* con 3 righe e 4 colonne

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & \pi & 0 \\ 10 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & \sqrt{2} & -3 & 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Definizione 2.1.2. Per **trasposta** della matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ si intende, la matrice che si indica con $A^T \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ che si ottiene da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Esempio 2.1.2. Perndendo una matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, si otterrà un $A^T \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(che appare come se fosse stata specchiata e ruotata di 90^o)

Definizione 2.1.3. Per **sottomatrice** $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ di una matrice $\mathbb{R}^{m\times n}$ si intende, la matrice in cui elementi appartengono a p righe e q colonne di A.

Esempio 2.1.3.

$$\begin{bmatrix} 6 & \pi & 0 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è una sottomatrice della matrice dell'Esempio 2.1.1 scegliendo prima e seconda riga e prima, terza e quarta colonna.

Osservazione 2.1.1. se una matrice ha una sola dimensione $(n \times 1)$ vengono definiti anche vettori.

Definizione 2.1.4. Una matrice di tipo $n \times n$, anche chiamata *matrice quadrata* ed il numero n prende il nome di *ordine* della matrice. Gli elementi $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$ costituiscono la *diagonale principale* della matrice.

Una sottomatrice quadrata di $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ viene anche definita **minore estratto da** A. Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è quadrata, il **minore complementare** dell'elemento a_{ij} di A è il minore di ordine $n-1$ che si ottiene cancellando da A la riga e la colonna a cui appartiene a_{ij} (cancellando riga i e colonna j).

Nell'ambito delle **matrici quadrate**, hanno particolare importanza i seguenti tipi matrici:

- *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$, cioè $A = A^T$;
  Esempio 2.1.4.
  $$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & -12 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$
- *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$; si noti che gli elementi della diagonale principale devono essere nulli, perché deve valere $a_{ii} = -a_{ii}$ ma se un numero reale è uguale al suo opposto deve essere per forza 0;
  Esempio 2.1.5.
  $$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 7 & -2 \\ -7 & \mathbf{0} & 1 \\ 2 & -1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
- *triangolare superiore* se $a_{in} = 0$ per $i > j$;
  Esempio 2.1.6.
  $$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ \mathbf{0} & 11 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5 \end{bmatrix} \qquad a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$$
- *triangolare inferiore* se $a_{ij} = 0$ per $i < j$;
  Esempio 2.1.7.
  $$\begin{bmatrix} 3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -7 & 5 & \mathbf{0} \\ 12 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$
- *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$.
  Esempio 2.1.8.
  $$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$
  In particolare, se gli elementi diagonali sono uguali a 1, tale matrice si chiama **matrice identità** e si indica col simbolo I (o I_n se si vuole evidenziare il suo ordine)
  $$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> eye(4)
ans =

Diagonal Matrix

1   0   0   0
0   1   0   0
0   0   1   0
0   0   0   1
```

Listing 2.1: generare una matrice identità in GNU/Octave

Definizione 2.1.5. La **traccia** di una matrice quadrata A è il numero dato dalla somma degli elementi sulla diagonale
$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Esempio 2.1.9. La traccia della matrice dell'Esempio 2.1.4 è $\operatorname{tr}(A) = 3 - 2 - 12 + 6 = -5$.

Considerando una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definizione 2.1.6. Una matrice viene detta **a gradini** se dalla prima all'ultima riga, il primo elemento non nullo di ogni riga compare con un indice di colonna sempre più grande. Il primo elemento non nullo di ogni riga è chiamato *pivot*.

Esempio 2.1.10.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

è una matrice a gradini. I suoi *pivot* sono 7 nella prima seconda, 4 nella seconda, 6 nella terza, nell'ordine, sulla prima, seconda e quarta colonna (indice di colonna viene incrementato più si scende nella matrice).

Esempio 2.1.11.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

non è a gradini. Il primo elemento non nullo della terza riga sta nella stessa colonna del primo elemento nullo della seconda riga.

Esempio 2.1.12.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

non è a gradini. Il primo elemento non nullo della riga sta in una colonna di indice più piccolo del primo elemento non nullo della seconda riga.

Esempio 2.1.13. Altri esempi di matrici a gradini sono le diagonali e le matrici triangolari superiori con gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero.

2.2 Operazioni tra matrici

2.2.1 Somma di matrici

Siano A e B, due matrici dello stesso tipo $m \times n$. Gli elementi della matrice $A+B$, anche detta **somma** di A e B, si ottengono sommando elementi aventi lo stesso posto in A e B, cioè

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Esempio 2.2.1.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A+B = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Proprietà: siano $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, valgono le seguenti

Proprietà commutativa $A + B = B + A$

Proprietà associativa $(A + B) + C = A + (B + C)$

La matrice nulla O (formata da tutti zeri) è tale che $A + O = O + A = A$

La matrice di $-A$ (opposta di A) i cui elementi sono gli opposti dei relativi elementi di A è tale che $A + (-A) = O$

La **differenza** tra matrice dello stesso tipo è definita da

$$A - B = A + (-B)$$

2.2.2 Prodotto di uno scalare per una matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Il **prodotto** di λ per A è la matrice λA i quali elementi sono ottenuti moltiplicando per λ i corrispondenti elementi di A, cioè

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Esempio 2.2.2.

$$3 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 12 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Proprietà siano $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
4. $1A = A$

Osservazione 2.2.1. L'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ dotato delle operazioni di somma di matrici e prodotto di uno scalare per una matrice è uno spazio vettoriale.

2.2.3 Prodotto di matrici (righe per colonne)

Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ (il numero di colonne in A coincidono con il numero di righe in B) il **prodotto** delle matrici A e B è la matrici

$$AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

il cui elemento generico è dato da

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, p \tag{2.12}$$

cioè la matrice prodotta ha numero di righe pari a quello della matrice di sinistra e numero di colonne pari a quello della matrice di destra, e il suo generico elemento è la somma dei prodotti degli elementi della riga di posto i nella matrice A per i corrispondenti elementi della colonna di posto j nella matrice B. Ecco come diventa la formula (2.12) se $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ e $B \in \ \times$, andando a scrivre gli elementi della matrice prodotto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{AB} \quad \begin{array}{l} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ c_{21} = a_{23}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{array} \tag{2.13}$$

Esempio 2.2.3. Prodotto tra una matrice A di tupo 2×3 una B di tipo 3×2

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 3\cdot 9 & 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + 5\cdot 4 + 3\cdot 9 & 4\cdot 2 + 3\cdot 3 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 23 \\ 25 & 11 \end{bmatrix}$$

La matrice prodotto è di tipo 2×2. Riportando questa operazione su GNU/Octave:

```
A = [ 4 5 3; 2 3 1 ];
B = [ 2 3; 4 1; 9 2 ];
C=A*B;
disp (C);
```

Listing 2.2: moltiplicazione riga per colonna

Osservazione 2.2.2. Se ha senseo calcolare AB, in generale non può avere senso calcolare BA. Nell'Esempio 2.2.3 ha senso calcolare BA.

Osservazione 2.2.3. Anche se entrambi i prodotti possono si possono eseguire, come avviene ad esempio A e B sono quadrate dello stesso ordine, in genere

$$AB \neq BA$$

da questo si deduce che il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa.

Esempio 2.2.4.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ \frac{11}{2} & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare se $AB = BA$, qualunque sia la matrice A di ordine n, allora $B = \lambda I_n$.

Proprietà purché le operazioni indicate abbiano senso (*in base alle dimostrazioni delle matrici*), valgono le sequenti

1. $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(\lambda B) = \lambda(AB)$, $(\lambda A)B = \lambda(AB)$

Osservazione 2.2.4. Nel prodotto tra matrici non vale la *legge di annullamento del prodotto*[2]. Quindi si può ottenere la matrice nulla $AB = O$ anche se A e B non sono matrici nulle. per esempio

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osservazione 2.2.5. Se la matrice A è quadrata, ha senso $A^2 = AA, A^3 = AAA, A^P = AA \cdot A$, detta *potenza p-esima* della matrice A. Inoltre se I_n è la matrice identità di ordine n, vale $AI_n = I_nA = A$.

Proposizione 2.2.1. *Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, Allora vale*

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Dimostrazione.

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kj}$$
$$(B^T A^T) = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{jk} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{jk}$$

e le due espressioni sono uguali perché prodotto di due scalari è communtativo. □

2.3 Il determinante

Data una matrice quadrata di ordine n a entrate in un campo $\mathbb{K}$ (che può essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ad essa si associa un numero appartenente a $\mathbb{K}$, detto **determinante** della metrice, che è funzione delle sue entrate

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se la matrice ha ordine $n \leq 3$, il suo determinente è così definito:

- per $n = 1$, $\det(A)$ coincide con l'unico elemento della matrice;
- per $n = 2$, si pone
$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
- per $n = 3$, si pone

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Per estendere la definizione di determinante al caso n generale, è necessaria una premessa sulle permutazioni.

[2]Se due numeri a e b danno prodotto zero $ab = 0$, allora almeno uno dei fattori è zero.

2.4 Permutazioni

Dato l'insieme $\{1, 2, \cdots, n\}$ dei numeri naturali compresi tra 1 e n, una funzione da questo insieme in se stesso associa ad ogni elemento di $\{1, 2, \ldots, n\}$ un immagine, scelta sempre all'interno di $\{1, 2, \cdots, n\}$. Se le immagini sono tutte diverse zenza ripetizioni, queste saranno ancora tutti gli elementi $1, 2, \ldots, n$ semplicemente disposti in un altro ordine, ovvero permutati. Si tratta allor di **permutazione di n elementi**.

Esempio 2.4.1. Le seguenti rappresentano permutazioni di 4 elementi:

$$\begin{array}{ll} 1 \to 1 & 1 \to 3 \\ 2 \to 3 & 2 \to 4 \\ 3 \to 2 & 3 \to 2 \\ 4 \to 4 & 4 \to 1 \end{array}$$

L'insieme delle permutazioni di n eleemnti si denota S_n. Per ogni n, tale insieme contiene esattamente $n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ (cioè n fattoriale) permutazioni: ad esempio per $n = 2$ si ottiene $2 \cdot 1 = 2$ permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{ll} 1 \to 1 & 1 \to 2 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 \end{array}$$

Tra le permutazioni, vi è sempre anche quella che associa a ogni elemento se stesso, detta *permutazione identica.*

Per $n = 3$ si ottiene invece $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ 1 \to 1 & 1 \to 2 & 1 \to 1 & 1 \to 3 & 1 \to 2 & 1 \to 3 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 & 2 \to 3 & 2 \to 2 & 2 \to 3 & 2 \to 1 \\ 3 \to 3 & 3 \to 3 & 3 \to 2 & 3 \to 1 & 3 \to 1 & 3 \to 2 \end{array}$$

Si noti che p_2, p_3 e p_4 scambiano tra loro due elementi fisso il terzo (p_2 scambia tra loro 1 e 2, p_3 scambia loro 2 e 3, p_4 scambia tra loro 1 e 3): in genere, una permutazione di questo tipo, che scambia tra loro due elementi lasciando fissi tutti gli altri elementi presentata nell'esempio **??**, (scambia tra loro 2 e 3 lasciando fissi 1 e 4), mentre la seconda non lo è. Benché non tutte le permutazioni sieno trasposizioni, qualunque realizzata eseguendo può esssere ottenuta come composizione di trasposizioni, ovvero può essere permutazione può essere ottenuta come composizioni di trasposizioni, ovvero può essere realizzata eseguendo una sequenza di trasposizioni. Ad esempio, la permutazione p_5 di sopra, che non è una trasposizione, può tuttavia essere ottenuta scambiando prima 1 e 2, e poi 1 e 3, cioè componentdo 2 trasposizioni:

$$\begin{array}{c} 1 \to 2 \to 2 \\ 2 \to 1 \to 3 \\ 3 \to 3 \to 1 \end{array}$$

In genere, se il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione p è pari, si dice che p è una **permutazione pari**, se invece, il numero di trasposizioni che servono per ottenere p è dispari, si dice che p sia una **permutazione dispari**. Ad esempio, p_5 è una permutazione pari, in quanto è stato ottenuto componendo 2 trasposizioni.

Osservazione 2.4.1. Se una permutazione è già essa una trasposizione, allora essa è dispari (1 è un numero dispari).

Osservazione 2.4.2. Possono esserci più modi diversi di decomporre una permutazione come composizione di trasposizioni, ad esempio, la permutazione identica può essere vista o come risultato di 0, oppure come risultato di 2 trasposizioni

$$\begin{array}{c} 1 \to 2 \to 1 \\ 2 \to 1 \to 2 \\ 3 \to 3 \to 3 \end{array}$$

Tuttavia, si può dimostrare che il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data è o sempre pari o sempre dispari (nell'esempio, 0 o 2, comunque pari).

Si può allora definire il **segno** $s(p)$ di una permutazione p come

- $s(p) = +1$ se p è una permutazione pari;
- $s(p) = -1$ se p è una permutazione dispari.

2.4.1 Determinante

Definizione 2.4.1. Sia A una matrice quadrata di ordine n con entrate a_{ij}. Il determinante è definito da

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} s(p) \cdot a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} \tag{2.14}$$

Il determinante è dato da una sommatoria che ha un addendo per ogni permutazione $p \in S_n$: ognuno di questi addendi è un prodotto di entrate di A del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$, con davanti un $+$ o $-$ a seconda che la permutazione p sia pari o dispari. Si noti che l'espressione $a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$ è il prodotto di n entrate scelte nella matrice, una per scambia gli undici $1, 2, \dots, n$ senza ripetizioni, si sceglie un'entrata da ogni riga che le entrate scelte stiano anche su colonne diverse.

Per chiarire la definizione, si prende i casi $n = 2$ e $n = 3$.

Sia $n = 2$ e $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Dell'insieme $\{1, 2\}$ ci sono 2 permutazioni (l'identità e la trasposizione 1 con 2), quindi nella sommatoria (2.14) ci saranno solo due addendi, del tipo $s(p)$ e $a_{1p(1)}a_{2p(2)}$:

- se p è l'identità (permutazione pari) si ha $s(p) = +1$, l'addendo corrispondente sarà $+a_{12}a_{21}$.
- se p è la trasposizione che scambia 1 con 2 (permutazione dispari), si ha $s(p) = -1$ e l'addendo corrispondente sarà $-a_{12}a_{21}$.

Quindi il determinante risulta essere $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Sia $n = 3$ e $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ sono $3! = 6$, quindi la sommatiria (2.14) avrà il addendi: per ognuna di queste permutazioni p l'addendo corrispondente sarà del tipo $s(p) \cdot a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$. Più precisamente si avranno gli addendi:

- $+a_{11}a_{22}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3$ (permutazione identica, che è una permutazione pari)
- $-a_{11}a_{23}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 3, p(3) = 2$ (una trasposizione, non per altro è una permutazione dispari)
- $+a_{12}a_{21}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 1$ (composizione di due trasposizioni, quindi permutazione pari)
- $-a_{13}a_{21}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2, p(2) = 1, p(3) = 3$ (composiziondе di due trasposizioni, non per altro è una permutazione dispari)
- $+a_{13}a_{21}a_{32}$ corrispondente ala permutazione $p(1) = 3, p(2) = 1, p(3) = 2$ (è una composizione di due trasposizioni, quindi una permutazione pari)
- $-a_{13}a_{22}a_{31}$ corrisponde alla permutazione $p(1) = 3, p(2) = 2, p(3) = 1$ (una trasposizione, quindi una permutazione dispari).

Quindi il determinante risulta essere

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

È necessario introdurre un metodo per calcolare il determiannte, alternativo alla definizione, il cui utilizzo diretto richiederebbe di scrivere una sommatoria che per una matrice di ordine n a $n!$ addendi, tanti quanti le permutazioni di n elementi (si pensi che già per $n = 4$ abbiamo $4! = 24$ addendi). Allo scopo di calcolare il determinante, verrà utilizzata la *formula di Laplace.*

2.4.2 Formula di Laplace

Osservazione 2.4.3. Per calcolare il prodotto vettoriale tra due vettori x e y non è necessario studiare a emoria la formula, perché si può ricavare calcolando il determinante di una matrice 3×3. Tale matrice si costruisce in questo modo:

- nella prima riga bisogna disporre le lettere i, j, k, che indicano i versori della base canonica in $\mathbb{R}^3$;
- nella seconda riga le coordinate del vettore x;
- nella terza riga le coordinate del vettore y.

Calcolando il determinante (sviluppando Laplace secndo la prima riga), si ottiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} - (x_1y_3 - x_3y_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}$$

che sono proprio le coordinate del vettore $x \wedge y = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_1y_3 - x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$

2.4.3 Proprietà del determinante

Proprietà 2.4.1. *Il determiannte di una matrice è uguale a quello della sua trasposta*

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Esempio 2.4.2.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -2(5+6) = -22$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = -2(5+6) = -22$$

Proprietà 2.4.2. *Il determinante di una matrice triangolare (inferiore o superiore) è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

Il perticolare, anche il determiannte di una matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.

Esempio 2.4.3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 16 & -50 \\ 0 & 1 & 2022 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = -10$$

Proprietà 2.4.3. *Se gli elementi di una riga o di una collona sono moltiplicati per uno stesso numero $c \in \mathbb{R}$, il determinante dato da $c\det(A)$*

$$\begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Esempio 2.4.4.

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Se viene moltiplicata la prima colonna per 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 12 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2(6-5) = 2 = 2\det(A)$$

Proprietà 2.4.4. *Se gli elementi di una riga o di una colonna sono somma di due addendi, il determinante è la somma dei determinanti delle due matrici che si ottengono da A sostiduendo agli elementi della colonna in questione i primi o i secondi addendi (e lasciando fissi gli altri)*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Esempio 2.4.5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli elementi della seconda colonna sono somma di due addendi. Il determinante a sinitra è 17. Mentre a destra $10 + 7$.

Proprietà 2.4.5. *Scambiando fra loro due righe o due colonne di una matrice, il corrispondente cambia di segno.*
Esempio 2.4.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Scambio seconda e terza riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 6 = -1$$

Proprietà 2.4.6. **??** *Il determinante di una matrice con due righe o due colonne uguali è nullo. Infatti lo scambio di tali righe (o colonne) non altera il determinante, ma per la Proprietà 2.4.5 deve essere* $\det(A) = -\det(A)$, *quindi* $\det(A) = 0$.
Proprietà 2.4.7. **??** *Se agli elementi di una riga si sommano gli elementi di un'altro riga moltiplicata per un numero, il determinante non cambia. In particolare se* $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se per esempio alla seconda riga sommiamo la terza riga moltiplicata per un numero c, si ottiene la matrice

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ca_{31} & a_{22} + ca_{32} & a_{23} + ca_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Quindi, applicacndo prima la Proprietà 2.4.4 poi la Proprietà 2.4.3, si ottiene

$$\det(A') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det(A) + c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det(A)$$

tenuto conto che il determinante di una matrice con due righe uguali è nullo.
Proprietà 2.4.8. *Se sono nulli tutti gli elementi di una riga o di una colonna,* $\det(A) = 0$.
Esempio 2.4.7. Sviluppando la formula di Laplace sulla riga con tutti zeri, si vede che $\det(A) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = -0 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Proprietà 2.4.9. *Il determinate di una matrice è nullo se e solo se una sue riga (o colonna) è combinazione lineare delle altre righe (o colonne). Segue dalle precedenti proprietà, infatti, supponendo che la terza riga sia combinazione lineare delle altre due*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_1a_{11} + c_2a_{21} & c_1a_{12} + c_2a_{22} & c_1a_{13} + c_2a_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_1a_{11} & c_1a_{12} & c_1a_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_2a_{21} & c_2a_{22} & c_2a_{23} \end{bmatrix} =$$

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 0$$

in quanto ci sono due righe uguali.
Esempio 2.4.8. Calcolatore il determinante della matrice, cercando di applicare le proprietà, in modo da semplificare il calcolo

$$\begin{bmatrix} ad + 4 & c + 7 & 4b + 5 & 5a \\ 2b + 1 & bc + 1 & b + 1 & a \\ 3d - 4 & -2d + 6 & bd + 2 & 2a \\ -2c & 3c & c & ac \end{bmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Soluzione. bisogna ricondursi al calcolo del determinante di una matrice triangolare

$$abc^2 \begin{bmatrix} ad & 1 & 4 & 5 \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & d & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = a^2b^2c^2d^2$$

□

Il concetto di matrice è di fondamentale importanza e compatirà in molti contesti in questo corso. Nel contesto dei sistemi di equazioni lineari, non solo la matrice completa costituisce una "*fotografia*" fedele di un sistemi e contiene tutte le informazioni necessarie a determinarlo, ma sarà anche l'oggetto sul ci si focalizzerà all'interno del percorso.
Per motivi che verranno speficicati in seguito, sarà importante prendere in considerazione anche la matrice che contiene solo i coefficienti delle incognite, senza l'ultima colonna formata dai termini noti: si ottiene così la cosiddetta *matrice dei coefficienti del sistema.* Ad esempio, la matrice dei coefficienti del sistema (2.10) è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Ora, rappresentare un sistema mediante la sua matrice completa consente di identiicare ogni sua equazione con una n-upla: la generica equazione, diciarando la i-esima

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \tag{2.16}$$

è rappresentata nella matrice completa dall'i-esima riga R_i

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i \end{pmatrix}$$

e questa riga può a sua volta essere pensata come la $n+1$-upla $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$ (dove $\mathbb{K}$ è campo dei coefficienti delle equazioni). Queste corrispondenza è tale che qualunque delle equazioni del sistema, corrisponde a una combinazione lineare delle righe corrispondenti, viste come elementi di $\mathbb{K}^{n+1}$, si ottiene

$$c(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = cb_i$$

ovvero, svolgendo i conti a primo membro, la nuova equazione

$$ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \cdots + ca_{in}x_n = cb_i$$

e tale equazione corrisponde alla $(x+1)-$upla

$$cR_i = (ca_{i1}, ca_{i1_2}, \cdots, ca_{in}, cb_i)$$

ottenuta moltiplicando la $(n+1)-$uple $R_i = (a_{i1}, a_{i1_2}, \cdots, a_{in}, b_1)$ (che rappresenta l'equazione originale) per c.
Allo stesso modo, se si sommano membro a membro l'equazione (2.16) per un'altra equazione $a_{j1}x_1 + a_{j2} + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$ del sistema, si ottiene

$$a_{i1}x_1 + a_{i2} + \cdots + a_{in}x_n + a_{j1}x_1 + a_{j2} + \cdots + a_{jn}x_n = b_i + b_j$$

ovvero, raccoglendo gli addendi che contengono la stessa incognita, messa in evidenza,

$$(a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n = b_i + b_j$$

si ottiene una nuova equazione rappresentata dalla $n+1$-upla

$$R_i + R_j = (a_{i1} + a_{j1}, a_{i2} + a_{j2}, \cdots, a_{in} + a_{jn}b_i + b_j)$$

che si ottiene sommando le $n+1-$uple $R_i = (a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}, b_j)$ che rappresentavano le due equazioni originali. Quindi, eseguendo più in generale una combinazione di due o più equazioni di un sistema, rappresentate dalle righe $R_1, R_2, \ldots, R_m \in \mathbb{K}^{n+1}$, l'equazione ottenuta corrisponderà corrisponderà a una combinazione

$$c_1R_1 + c_2R_2 + \cdots + c_{in}R_{in}$$

delle righe corrispondenti.
Ad esempio, nel sistema (2.5), se come visto in (2.7) moltiplicando (membro a membro) la prima equazione per 5 e poi bisogna sommare alla seconda moltiplicata per -3, ottenendo la nuova equazione $-x_2 + 2x_2 + 4x_3 = -1$. Nella matrice completa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

l'operazione corrispondente non è nient'altro che la combinazione lineare

$$5R_1 + (-3)R_2 = 5(1,1,1,1) + (-3)(2,1,3,2) = (-1,2,-4,-1)$$

delle sue due righe (viste come elementi di $\mathbb{R}^4$).
Inoltre, se una terna (x_1, x_2, x_3) soddisfa il sistema (2.5), essa soddisferà anche l'equazione $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1$, e in generale soddisferà tutte le possibile equazioni che si corrispondono alle combinazioni lineari delle righe R_1 e R_2 della matrice completa.
In generale, dato un sistema di m equazioni in n incognite, con matrice completa avente come righe $R_1, R_2, \ldots, R_m$, una $n-$upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ che soddisfa il sistema verifica anche tutte le equazioni corrispondenti alle $(n+1)-$uple del tipo $c_1R_1 + c_2R_2 + \cdots + c_mR_m$, ovvero quelle appartenenti al sottospazio

$$(R_1, R_2, \cdots, R_m)$$

generato dalle righe $R_1, R_2, \cdots, R_m$ (viste come elementi di $\mathbb{K}^{n+1}$), in quanto per definizione tale sottospazio è formato proprio da tutte le combinazioni lineari $c_1R_1 + c_2R_2 + \cdots + c_mR_m$.
Da queste osservazioni si può dedurre il seguente riguente risultato, che ci fornisce un criterio sufficiente perché due sistemi siano *equivalenti*, ovvero abbiano le stesse soluzioni:
Proposizione 2.4.1. *Siano dati due sistemi di equazioni lineari in n incognite, il primo con matrice completa formata dalle righe $R_1, R_2, \cdots, R_m$ e il secondo con matrice complate formata dalle righe $R_1, R_2, \cdots, R_i$. Se*

$$(R_1, R_2, \cdots, R_m) = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \cdots, \bar{R}_i)$$

allora i due sistemi sono equivalenti.

Dimostrazione. Se una $n-$upla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una soluzione del primo sistema, allora essa verifica tutte le sue equazioni, rappresentate dalle righe $R_1, R_2, \ldots, R_m$ della sua matrice completa, rappresentate dalle sua matrice completa. Come osservato sopra, essa verifica allora anche tutte le equazioni corrispondenti alle $(n+1)$-upla uguale a $(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_4)$, come affermato nell'ipotesi, x verifica quindi tutte quindi tutte le equazioni corrispondenti alle $(n+1)-$uple del sottospazio $\langle \bar{R}_1, \bar{R}_2 \ldots, \bar{R}_4 \rangle$, e in particolare[3] $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_4$, stesse, che rappresentano le equazioni del secondo sistema: quindi x è soluzione anche del secondo sistema.
Viceversa[4], se una n-upla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una soluzione del secondo sistema, allora essa verifica tutte le sue equazioni, Quindi essa verifica allora anche tutte le equazioni corrispondenti alla $(n+1)-$uple contenute nel sottospazio $\langle \bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, R_t \rangle$. Essendo tale sottospazio uguale a $\langle R_1, R_2, \ldots, R_m \rangle$, e in particolare $R_1, R_2, \ldots, R_m$ stesse, che rappresentano le equazioni del primo sistema: quindi x è soluzione anche del primo sistema. □

I metodo che useremo per risolvere un sistema, consiste proprio nel trasformare il sistema dato in un sistema equivalente più semplice, nel quale verranno eliminate tutte le equazioni superflue (che si ottengoo come combinazione delle altre).

2.5 L'algoritmo di eliminazione di Gauss-Jordan (o di riduzione a gradini)

Il metodo che vedremo ora per risolvere un qualunque sistema con m equazioni lineari in n incognite può essere spiegato come una generalizzazione dei metodi tradizionalmente usati per la risoluzione

[3] All'interno del sottospazio $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ generato da un insieme di vettori e costituito come da tutte le combinazioni lineari $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ ci sono sempre anche i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$m stessi, in quanto ciascuno di loro può essere espresso come combinazione lineare: $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$, $v_2 = 0v_1 + 1v_2 + \cdots + 0v_n$, e così via.

[4] Dimostrare che i due sistemi hanno le stesse soluzioni significa dimostrare che l'insieme delle soluzioni del primo è uguale all'insieme delle soluzioni del secondo, ovvero (come previsto dalla definizione di ugualianza di insiemi) che ogni n-upla che è soluzione del primo sistema è soluzione anche del secondo, e viceversa ogni n-upla soluzione del secondo sistema è anche soluzione del prima.

dei sistemi di due equazioni in due incognite. Per ricordare quali sono questi metodi, prendiamo ad esempio il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

Solitamente, per risolvere tale sistema si ricava una delle incognite in funzioni dell'altra usando una delle due equazioni, ad esempio dalla prima equazione si trova $x_1 = -x_2$, e si sostituisce l'espressione così ottenuta nell'altra equazione:

$$-(-x_2) + x_2 = 1$$

ovvero

$$2x_2 = 1$$

In questo modo, è stato *eliminato* la prima incognita dalla seconda equazione che è diventata una semplice equazione di primo grado con una sola incognita, che ha come soluzione $x_2 = \frac{1}{2}$. A questo punto, per ricavare x_1 basta sostituire il valore ottenuto di x_2 nella prima equazione, ovvero

$$x_1 + \frac{1}{2} = 0 \to x_1 = -\frac{1}{2}.$$

Quello che ha permesso di semplificare il sistema è stato quindi aver ridotto il numero di incognite presenti in una delle equazioni. Allo stesso risultato si può arrivare, equivalentemente, ad esempio sommando membro a membro le due equazioni se $x_1 + x_2 = 0$ e $-x_1 + x_2 = 1$ allora

$$(x_1 + x_2) + (-x_1 + x_2) = 0 + 1$$

ovvero, facendo i conti, si ottiene come sopra $2x_2 = 1$.
Questo secondo metodo, apparentemente più artificioso, in realtà si rivela più semplice se si lavora sulla matrice completa del sistema invece, che sulle equazioni. Infatti, la matrice completa del sistema (2.18) è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Sommare membro a membro le due equazioni equivale a sommare tra loro le due: sostituendo poi tale somma alla seconda riga originale si ottiene, senza dover maneggiare le incognite e dover fare sostituzioni o semplificazioni.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

che corrisponde proprio al sitema ridotto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

risolvibile come visot sopra risolvendo prima l'equazione con una sola incognita.
Questo stesso procedimento di eliminazione di incognite, realizzato lavorando sulle righe della matrice completa, funziona in realtà per risolvere qualunque sistema, qualunque sia il numero di equazioni e il numero di incognite. Più precisamente, l'obbiettivo è avere il minor numero numero di incognite possibile per garantire un risultato.
Se, per definire un criterio, si segne di eliminarle di seguito l'odine $x_1, x_2, \ldots, x_n$, questo significa che le righe della matrice completa inizino con un numero sempre maggiore di zero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

nella quale le righe iniziano con un numero sempre maggiore di zeri, ha come sistema corrispondente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_3 = 5 \end{cases}$$

che ha la proprietà desiderata che le sue equazioni presentano un numero decrescente di incognite.
Dopo questo è possibile rare la seguente

Definizione 2.5.1. Una matrice si dice a gradini se, andando dalla prima all'ultima, ogni riga inizia con un numero sempre maggiore di zeri.
Il primo elemento non nullo in ogni riga di una matrice a gradini si chiama *pivot.*

In altre parole, una matrice è a gradini se in ogni riga il primo elemento non nullo compare con un indice di colonna sempre più grande. Ad esempio, delle matrici seguenti

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

la prima è a gradini gradini perché i suoi pivot (7 nella prima riga, 4 nella seconda e 6 nella terza) si trovano, nell'ordine, sulla prima, seconda e quarta colonna (indice di colonna sempre più grande), mentre le altre no (nella seconda, il primo elemento non nullo della terza riga sta nella stessa colonna del primo elemento non nullo della seconda riga; nella terza matrice, il primo elemento non nullo della terza riga sta in una colonna di indice più piccolo del primo elemento non nullo della seconda riga). Un sistema si dice a gradini se la sua matrice completa è una matrice a gradini.
Il procedimento che descritto qui di seguito è chiamato *metodo di riduzione a gradini* o, dal momento che consiste nell'eliminare incognite, *metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.*
Il procedimento di riduzione a gradoni, oltre a semplificare il sistema, fa emergere anche le eventuali incompatibilità e le eventuali equazioni superflue presenti nel sistema.
Per trasformare un sistema in un sistema a gradini, trasformeremo la sua matrice completa in una matrice a gradini tramite le seguenti operazioni slle sue righe, dette *operazioni elementari di primo, secondo terzo tipo*:

primo tipo Scambiare tra loro due righe della matrice ($R_i \leftrightarrow R_j$)

secondo tipo Moltiplicare una riga della matrice per un coefficiente non nullo ($R_i \to cR_i$, con $c \neq 0$)

terzo tipo Sommare a una riga della matrice un'altra riga moltiplicata per un numero qualunque ($R_i = R_i + dR_j$)

Il fatto importante è che tali operazioni, che modificano le righe, corrispondono a modificare le equazioni del sistema *in modo però da non cambiare l'insieme delle soluzioni,* come dimostra il seguente risultato, corollario delle Proposizione 2.4.1:
Proposizione 2.5.1. *Se vengono effettuate operazioni elementari di primo, secondo e terzo tipo sulla matrice completa di un sistema, la matrice trasformata è la matrice completa di un sistema equivalente a quello iniziale (ovvero avente le stesse soluzioni del sistema iniziale).*

Dopo questo, verrà illustrato come mediante l'uso delle tre operazioni elementari, ogni sistema possa essere trasformato in un sistema a gradini: sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

La matrice completa del generico sistema (2.2).
L'algoritmo inizia come segue: se la prima entrata a_{11} della prima riga è uguale a zero, le si scambia tra loro nelle due righe (applicando quindi un'operazione elementare del primo tipo) in modo da garantire che la nuova entrata a_{11} sia diversa da zero. Fatto ciò, si applica alla matrice (2.21) le seguenti operazioni elementari (del terzo tipo) sulle righe $R_2, \ldots, R_m$ dalla seconda all'ultima:

$$\begin{gathered} R_2 \to R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1 \\ R_3 \to R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1 \\ \vdots \\ R_m \to R_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} R_1 \end{gathered}$$

(si noti che le operazioni si possono applicare proprio perché $a_{11} \neq 0$). Queste trasformazioni rendono sicuramente uguale a zero la prima entrata di ogni riga dalla secomnda in poi, e eventualmente potrebbero aver annullato anche altre entrate, ovvero trasformano la matrice (2.21) in una matrice seguente tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & \dots & 0 & a'_{3k} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a'_{mk} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

si può supporre che la seconda riga sia quella che inizia con il minor numero di zeri, con $a'_{2k} \neq 0$. A questo punto, si ripete quanto fatto nella prima parte della trasformazione, applicando stavolta alle righe dalla terza in poi le trasformazioni elementari del terzo tipo

$$\begin{gathered} R_3 \to R_3 - \tfrac{a'_{3k}}{a'_{2k}} R_2 \\ \vdots \\ R_m \to R_m - \tfrac{a'_{mk}}{a'_{2k}} R_2 \end{gathered}$$

che sono tali da annullare la prima entrata non nulla dalla terza riga in poi, ovvero da trasformare la matrice in una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a''_{mn} & b''_m \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

In questo modo si può trasformare la matrice del sitema in una matrice ogni riga inizia con un numero sempre maggiore di zeri, ovvero nella matrice a gradini voluta, e il sistema corrispondente sarà equivalente al sistema iniziale in quanto la trasmissione è stata effettuata con operazioni elementari. Il modo migliore di capire questo procedimento è con un esempio.

Esempio 2.5.1. Sia

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \tag{2.24}$$

il sistema con matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \tag{2.25}$$

Ora, è possibile trasformare tale matrice in una matrice a gradini usando le operazioni elementari, in modo da ottenere un sistema a gradini equavalente al sistema (2.24).

Ricordando che, in base alla definizione di matrice a gradini, visto che il primo elemento a_{11} della prima riga è diverso da zero, e sta nella prima colonna, i primi elementi diversi da zero della seconda e della terza riga non possono essere anche loro nella prima colonna: in altre parole, è mecessario trasformare la matrice in modo che a_{21} e a_{31} siano uguali a zero.

Ottenendo sicuramente lo scopo se si applicano anche le operazioni elementari del terzo tipo $R_2 \to R_2 + R_1$ e $R_3 \to R_3 + R_1$: infatti,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

La matrice trasformata non è ancora una matrice a gradini in quanto il primo elemento non nullo della terza riga si trova in corrispondenza della stessa colonna (la seconda) del primo elemento non nullo nella seconda riga: è decessario che $a_{32} = 0$ (diventi nullo). A questo scopo, basta applicare l'operazione elementare $R_3 \to R_3 - R_2$: così facendo si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

E alla fine di questo processo si otterà come sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_3 = -3 \end{cases} \tag{2.26}$$

corrispondente alla matrice trasformata è, equivalente al sistema originale (2.24), quindi trovando la sua risoluzione trovando la soluzione del sistema (2.24).

$$2x_2 - 2x_3 = 1 \to 2x_2 = 1 + 2x_3 = 1 + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \to x_2 = -\frac{1}{4}$$

e analogamente, sostituendo i valori di x_2 e x_3 così ottenuti nella prima equazione si trova

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \to x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = 2$$

Avendo quindi la terna $\left(2, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{3}{4}\right)$ è l'unica soluzione del sistema (2.26), ovvero del sistema iniziale (2.24).

La riduzione a gradini non solo semplifica il sitema grazie alla eliminazione di incognite, ma mette anche in evidenza eventuali "equazioni superflue" e incompatibilità tra le equazioni.

Esempio 2.5.2. Considerando il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \tag{2.27}$$

che ha come matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \tag{2.28}$$

Come fatto per il sistema precedente, trasformando tale matrice in una matrice a gradini mediante operazioni elementari.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Notare che la terza riga dalla matrice trasformata corrisponde all'equazione $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, ovvero $0 = -1$: poiché questa uguaglianza è falza, non esiste nessuna terna che soddisfi le tre condizioni del sistema ridotto corrispondente, ovvero tale sistema non ha soluzioni. Questo, in virtù dell'equivalenza tra il sistema originale e quello ridotto, questo indica che il sistema di partenza non ha soluzioni, ovvero è incompatibile.

Evidentemente tra le equazioni del sistema di partenza vi era una incompatibilità non evidente che il procedimento di riduzione a gradini ha fatto emergere: infatti, se si moltiplica membro a membro la prima equazione per 2 e si sottrae la seconda equazione si ottiene

$$2(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1 - x_2 - x_3) = 2 \cdot 1 - 0$$

ovvero, svolgendo i calcoli, $x_1+3x_2+3x_3 = 2$. Quasta condizione, che è conseguenza delle prime due equazioni ed è quindi soddisfatta da qualunque terna le soddisfi, è chiaramente incompatibile con la terza equazione; il procedimento di riduzione a gradini ha messo alla luce questa incompatibilità trasformandola nell'incompatibilità evidente $0 = -1$.

Considerando ora come ultimo esempio il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \tag{2.29}$$

che ha come matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right) \tag{2.30}$$

Applicando operazioni elementari per ridurre a gradini,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{array}\right) \tag{2.31}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.32}$$

In questo caso avviene un qualcosa di particolare, infatti, la terza equazione del sistema si annulla come, si evince dalla $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, ovvero $0 = 0$.
Quindi trasformando da matrice a sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \tag{2.33}$$

Benché non sia rimasta un'equazione con una sola incognita come nel primo sistema appena risolto, è possibile comunque progedere nel seguente modo:
Bisogna ricavare x_2 dalla seconda equazione:

$$-3x_2 - 2x_3 = -1 \to -3x_2 = 2x_3 - 1 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3} \tag{2.34}$$

e sostituendo l'espressione ottenuta nella prima equazione per ricavare x_1:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \to x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \left(9\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}\right) - 3x_3 = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}x_3. \tag{2.35}$$

Ora, qualunque valore $t \in \mathbb{R}$ assegnando a x_3, la (2.34) e la (2.35) dice che se si pone $x_2 = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$ e $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}t$, le equazioni del sistema saranno soddisfatte, ovvero si otterrà una soluzione. Espresso in altri termini, le soluzioni del sistema sono esattamente tutte le terne del tipo $\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{3}t, -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}, t\right)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$: il sistema ha quindi infinite soluzioni.
Più precisamente, dal momento che le infinite soluzioni del sistema dipendono da un solo parametro libero t, si dice che il sistema ha "infinito alla uno" (si scrive ∞^1) soluzioni.
In genere, è possibile dare la seguente
Definizione 2.5.2. Un sistema di equazioni lineari ha ∞^k soluzioni se l'espressione generale della sua soluzione dipende da k parametri liberi.

Nell'ultimo esempio esposto, la riduzione ha eliminato delle tre equazioni del sistema riducendola all'identità $0 = 0$. In effetti, non è difficile vedere che la terza equazione $x_1 - 5x_2 - x_3 = -1$ era un'equazione "superflua", o più precisamente dipendente dalle altre due: come si vede nella matrice completa (2.31), la terza riga, che la rappresenta, è combinazione delle altre due:

$$(1, -5, -1, -1) = -(1, 1, 3, 1) + 2(1, -2, 1, 0)$$

In effetti, non è difficile vedere che una matrice a gradini, escluse le righe nulle, non ha più righe dipendenti (e quindi le equazioni non nulle di un sistema ridotto a gradini sono sicuramente indipendenti):
Proposizione 2.5.2. *Le righe non nulle di una matrice ridotta a gradini sono linearmente indipendenti*

Dimostrazione. Per definizione di matrice a gradini le sue righe saranno del tipo

$$\begin{aligned} R_1 = (a_{11}, \dots), &\quad a_{11} \neq 0 \\ R_2 = (0, \dots, 0, a_{2k}, \dots,), &\quad a_{2k} \neq 0 \\ R_3 = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, a_{3j}, \dots,), &\quad a_{3j} \neq 0 \\ \vdots & \end{aligned}$$

con $k > 1, j > k$ etc, ovvero in ogni riga il primo elemento non nullo compare via via con secondo indice sempre più grande.
Ora, per dimostrare che tali righe sono indipendenti basta supporre che tali righe sono indipendenti basta supporre che

$$c_1(a_{11}, \dots) + c_2(0, \dots, 0, a_{2k}, \dots,) + c_3(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, a_{3j}, \dots,) + \dots = (0, \dots, 0) \tag{2.36}$$

e dimostrare che i coefficenti c_1, c_2, c_3, etc. Devono essere necessariamente tutti nulli.
Andando a guardare cosa significa l'uguaglianza (2.36) vedendo che nella prima entrata rimane solo $c_1 a_{11} = 0$: ma, essendo per ipotesi $a_{11} \neq 0$, necessariamente deve essere $c_1 = 0$. Quindi, la (2.36) si riduce a

$$c_2(0, \ldots, 0, a_{2k}, \ldots,) + c_3(0, \ldots, 0, 0, \ldots, a_{3j}, \ldots,) + \cdots = (0, \ldots, 0) \tag{2.37}$$

Ora, guardando la k-esima entrata di questa relazione (cioè la prima diversa da zero nella seconda riga): dal momento che tutte le righe successive alla seconda hanno la prima entrata diversa da zero con indice più alto, si ottiene $c_2 a_{2k} = 0$, che, essendo $a_{2k} \neq 0$, dice che $c_2 = 0$.
Dunque la (2.37) si riduce a

$$c_3(0, \ldots, 0, 9, \ldots, a_{3j}, \ldots,) + \cdots = (0, \ldots, 0)$$

e, continuando a ragionare in questo modo, si vedranno tutti i coefficenti c_i si devono annullare, e quindi non può esistere una combinazione lineare delle righe uguale al vettore nullo e con coefficienti non tutti nulli, ovvero le righe sono indipendenti. $\square$

Osservazione 2.5.1. Quando si effettuano delle operazioni elementari sulle righe di una matrice, si possono considerare anche le trasformazioni del tipo $R_i \to cR_i + dR_j$, purché il coefficiente c per cui bisogna moltiplicare la riga R_i in modo che sostituendo non sia zero: infatti, benché tale trasformazione non sia una delle tre operazioni elementari, essa può essere pensata come il risultato dell'applicando alla riga R_i l'operazione elementare del secondo tipo $R_i \to cR_i$ (con $c \neq 0$ come previsto) e poi applicando alla nuova riga cR_i così ottenuta l'operazione elementare del terzo tipo $cR_i = cR_i + dR_j$.
Il procedimento di riduzione a gradini, che è stato utilizzato come strumento di risoluzione di un sistema, in realtà è sostanzialmente un motodo che stabilisce se dei vettori sono indipendenti. Infatti, più precisamente, si riscontrano i seguenti fatti:

1. Il procedimento non modifica lo spazio generato dalle righe, ovvero se $R_1, R_2, \ldots, R_m$ sono le righe della matrice iniziale, e $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_m$ sono le righe della matrice trasformata, allora $(R_1, R_2, \ldots, R_m) = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_m)$;
2. le righe non nulle alla fine del procedimento formano un insieme di vettori indipendenti.

Quindi, se le righe non nulle dopo la riduzione sono le prime l, ovvero $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, R_i$, dal fatto che queste sono indipendenti deducendo che consituiscono una base del sottospazio da loro generato, e quindi

$$\dim(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_i) = l;$$

ma poiché il sottospazio generato non cambia, si può concludere che

$$\dim(R_1, R_2, R_m) = l.$$

Il numero di righe non nulle rimaste dopo la riduzione a gradini ci dà quindi la dimensione dello spazio generato dalle righe iniziali: in uno spazio di dimensione l ci sono al massimo l vettori indipendenti, e le restanti di righe non nulle rimaste dopo la riduzione dimostra che quante righe indipendenti aveva la matrice prima della riduzione. Questa informazione, giustifica la seguente
Definizione 2.5.3. Il massimo numero di righe indipendenti di una matrice A si chiama il *rango per righe* di A.
Quindi la riduzione a gradini definisce un modo per calcolare la dimensione di uno spazio e per definizione di uno spazio e per verificare se delle n-uple date siano indipendenti.
Ad esempio, considerando le seguenti 4-uple

$$(1, 1, 2, 1,), \quad (1, 2, 1, 0), \quad (1, -1, 4, 3), \quad (2, 1, 1, 0) \tag{2.38}$$

vedendo di determinare se esse siano o meno indipendenti. Disponendo 4-uple a formare le righe di una matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

riducendo a gradini seguendo il procedimento di eliminazione (come definito nei paragrafi precedenti)

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&2&1&0\\1&-1&4&3\\2&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1\\R_4\to R_4-2R_1}]{}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&-1\\0&-2&2&2\\0&-1&-3&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\to R_3+2R_2\\R_4\to R_4+R_2}]{}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&-4&-3\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_4\leftrightarrow R_3]{}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&-1\\0&0&-4&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{2.39}$$

l'ultimo scambio di righe è stato necessario per portare la matrice nella forma a gradini.
Dopo la riduzione sono la riduzione sono rimaste 3 righe nulle, ovvero il rango della matrice è 3: nell'insieme iniziale vi erano allora 3 righe indipendenti e una quarta dipendente dalle altre (quindi le 4-uple non erano linearmente indipendenti).
In particolare, è possibile affermare che il vettore da escludere se si vuole estrarre un insieme di vettori indipendenti dai quattro vettori dati era il terzo, *corrispondente alla riga annullata dalla riduzione*. Infatti, per arrivare all'annullamento di tale riga in primo luogo è stato eseguito $R_2 \to R_2 - R_1$ e $R_3 \to R_3 - R_1$, e poi sommando alla (ottenuta) terza riga $R_3 - R_1$ la (ottenuta) seconda riga $R_2 - R_1$ moltiplicata per 2, ovvero

$$(R_3 - R_1) + 2(R_2 - R_1) = 0$$

Svolgendo i conti, questa uguaglianza dice che $R_3 - 3R_1 + 2R_2 = 0$, ovvero

$$R_3 = 3R_1 - 2R_2$$

che conferma che la terza riga è scrivibile come combinazione delle altre. Il fatto appena illustrato in questo è vero in genere: se una riga si annula in seguito all'algoritmo di riduzione a gradini allora essa era esprimibile come combinazione delle altre. Infatti, nel corso delle riduzione a gradini bisogna trasformare da prima tutte le righe dalla seconda in poi combinandole con la prima

$$R_2 \to R_2 + c_2R_1, \quad R_3 \to R_3 + c_3R_1, \ldots, R_m \to R_m + c_mR_1$$

Ne secondo passaggio, ogni riga così trasformata viene combinata con la seconda riga:

$$R_k \to (R_k + c_kR_1) + c_k'(R_2 + c_2R_!) = R_k + (c_kc_k'c_2)R_1 + c_k'R_2$$

e così via: a ogni passaggio la riga R_k viene combinata con una in più delle righe precedenti, fino a che o non bisogna più modificarlo perché si inizia ad utilizzarla per ridurre le successive, oppure essa si annulla: in tal caso si arriva quindi a una relazione del tipo:

$$R_k + d_1R_1 + d_2R_2 + \cdots + d_jR_j = 0$$

ovvero $R_k = -d_1R_1 - d_2R_2 - \cdots - d_jR_j$, che dice che la riga R_k che si è annullata era combinazione lineare delle altre righe.
Osservazione 2.5.2. l'affermazione secondo cui le righe che si annullano sono combinazione lineare delle altre è vera quando si segue l'algoritmo di riduzione a gradini, ma in generale se una riga si annulla dopo una serie qualunque di operazioni elementari non è detto che sia combinazione lineare delle altre. Ad esempio, si consideri la seguente sequenza di operazioni elementari (che non segue i passi dell'algoritmo di riduzione a gradini)

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{}\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2+R_3]{}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\\1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\\-2&0\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_3\to R_3+2R_1]{}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\\0&0\end{bmatrix}$$

a seguito della quale la terza riga si annulla, pur non essendo combinazione lineare delle altre: non c'è nessun modo di esprimere (0,1) come combinazione di (1,0) e (2,0)[5].
La Definizione 2.5.3 suggerisce che si può definire anche il *rango per colonne* di una matrice come il numero massimo di colonne linearmente indipendenti[6]. Tuttavia vale la seguente

[5] si noti che non sono stati fatti scambi di riga
[6] ovvero la dimensione dello spazio generato dalle colonne

Proposizione 2.5.3. *Per una qualunque matrice, il rango per righe coincide con il rango per colonne.*
Non dimostrando la proposizione 2.5.3, ma è possibile illustrarla con un semplice esempio: nella matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

la seconda riga R_2 è evidentemente dipendente dalle altre, in quanto $R_2 = 2R_1$ (se si volesse far apparire anche la terza riga in questa relazione di dipendenza, si potra scrivere $R_2 = 2R_1 + 0R_3$). Per il risultato appena citato, allora anche una delle colonne della matrice deve essere dipendente dalle altre: in effetti, si ha

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

che era molto meno evidente della relazione di dipendenza esistente tra righe. Come ulteriore esempio, si considerino le stesse $4-$uple viste sopra in (2.38): grazie all'uguaglianza del rango del rango per righe e per colonne, in effetti i vettori possono essere disposti sia in colona che in riga, l'importante è scegliere se tutti i vettori devono essere disposti in un o nell'altro modo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango per righe di questa matrice, che possono essere calcolate con il procedimento di riduzione a gradini, è quindi uguale al rango per colonne della precedente, ovvero deve sempre essere uguale a 3. Infatti

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_3 \to R_4 - R_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_4 \leftrightarrow 4R_4 - 3R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Come previsto dall'uguaglianza del rango per righe o per colonne, come ottenuto che il rango della matrice è 3.
Si noti che, in questo caso, a dire quale vettore è combinazione degli altri è la posizione dei pivot nella matrice ridotta: poiché questi si trovano in prima, seconda e quarta colonna, i vettori da tenere sono il primo, il secondi e il quarto, mentre il terzo è da ecludere (come già sapendo dalla riduzione fatta sui vettori disposti in riga).
Infatti, se si segue la riduzione guardando solo le prime due colonne, dove si trovano i primi due pivot, si vede che il rango delle matrice è 2, il che dice che i primi due vettori sono indipendenti tra loro; se si guarda cosa succede solo alle prime tre colonne, si può notare che il rango è ancora d2 (in quanto la teza colonna non contiene pivot) e questo dice che il terzo vettore era allora combinazione dei primi due: è solo aggiungendo la quarta colonna, dove si trova il terzo pivot, che si ottiene una matrice di rango 3, il che significa che è il quarto vettore, contrariamente al terzo, ad essere indipendente dai primi due.
Facendo uso della nozione di rango, possono riassumere tutto quello che è ormai noto sulla risolubilià di un sistema e sul numero delle sue soluzioni nel seguente risultato, detto *teorema di Rouché-Capelli.*
Teorema 2.5.1. Un sistema di m equazioni lineari in n incognite è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa, e in tal caso il sistema ha ∞^{n-j} soluzioni (dove r denota il rango della matrice). In particolare, il sistema ha un'unica soluzione se e solo se $r = n$.

Dimostrazione. Come noto, un sistema è incompatibile se e solo se in seguito alla riduzione a gradini compaiono righe del tipo $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \mid b \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$.
Ma questo equivale a dire che nella matrice dei coefficienti si è annullata una riga in più che nella matrice completa, ovvero il rango (che, ricordando, è il numero di righe non nulle dopo la riduzione)

della matrice dei coefficienti è diverso (in particolare, minore) del rango della matrice completa. Questo dimostra la prima affermazione del teorema.
Per quello che riguarda la seconda affermazione, si sà che una volta ridotto il sistema si ricava la matrice incognita che compare in ogni equazione non nulla in funzione delle rimanenti. Se il rango della matrice è r, ci sono proprio r righe non nulle e quindi si ricavano, che sono $n-r$ e fungono da parametri liberi. Quindi la soluzione generale si scrive in funzione di $n-r$ parametri, ovvero il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni.
L'ultima affermazione del teorema discende dal fatto che la soluzione è unica quando non dipende da nessun parametro libero, ovvero $n-r=0$. □

Osservazione 2.5.3. Si noti che il teorema afferma che, hanno un'unica soluzione, i sistemi (compatibile) in cui il numero di incognite è uguale al numero di equazioni a patto che queste ultime siano indipendenti.

Prima di vedere alcune applicazioni geometriche di tutta la teoria dei sistemi e della riduzione vista, concludendo questa parte con due importanti risultati che mostrano come i sistemi omogenei hanno delle importanti caratteristiche che li distinguono dai sistemi in genrale:
Proposizione 2.5.4. *Dato un sistema omogeneo di m equazioni in n incognite a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$, valgono le seguenti:*

1. *se $s=(s_1,\dots,s_n)$ e $s'=(s'_1,\dots,s'_n)$ sono soluzioni del sistema, lo è anche $s+s'=(s_1+s'_1,\dots,s_n+s'_n)$;*
2. *se $s=(s_1,\dots,s_n)$ è una soluzone del sistema e $c\in\mathbb{K}$, allora lo è anche $cs=(cs_1,\dots,cs_n)$*

In altre parole, l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Dimostrazione. Sia $a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n=0$ la generica equazione del sistema. Il fatto che $s=(s_1,\dots,s_n)$ e $s'=(s'_1,\dots,s'_n)$ sono soluzioni del sistema significa che $a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}s_n=0$ e $a_{j1}s'_1+\cdots+a_{jn}s'_n=0$. Ma allora

$$\begin{aligned} a_{j1}(s_1+s'_1)+\cdots+a_{jn}(s_n+s'_n) = a_{j1}s'_1+\cdots+a_{jn}s_n+a_{jn}s'_n = \\ = a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}s'_1+a_{j1}s'_1+\cdots+a_{jn}s'_n=0+0=0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

ovvero anche $s+s'=(s_1+s'_1,\dots,s_n+s'_n)$ è soluzione: questo dimostra il primo punto. Per dimostrare il secondo punto invece, bisogna supporre che $s=(s_1,\dots,s_n)$ sia soluzione del sistema, ovvero $a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}s_n=0$ per la generica equazione, e bisogna osservare che

$$a_{j1}cs_1+\cdots+a_{jn}cs_n=c(a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}s_n)=c\cdot 0=0 \tag{2.42}$$

ovvero anche $cs=(cs_1,\cdots,cs_n)$ è soluzione, come affermato nel secondo punto. □

Nel caso di sistemi non omogenei, ovvero quelli che hanno almeno un'equazione $a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}x_n=b_j$ con $b_j\neq 0$, i passaggi visti sopra non sono più applicabili in questi casi: ad esempio, il calcolo (2.41) diventerebbe

$$\begin{aligned} a_{j1}(s_1+s'_1)+\cdots+a_{jn}(s_n+s'_n) = a_{j1}s_1+a_{j1}s'_1+\cdots+a_{jn}s_n+a_{jn}s'_n = \\ = a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}s'_1+\cdots+a_{jn}s'_n=b_j+b_j=2b_j \end{aligned}$$

e quindi $s+s'=(s_1+s'_1,\dots,s_n+s'_n)$ non risolve più l'equazione $a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n=b$ ma l'equazione $a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}b_n=cb_j$ (di nuovo, chiamate diversa se $b_j=0$).
Quindi per i sistemi non omogenei non è possibile affermare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale; tuttavia, vale il seguente risultato che descrive comunque la struttura dell'insieme delle sue soluzioni:
Proposizione 2.5.5. *Dato un sistema non omegeneo di m equazioni in n incognite a coefficienti in un compo $\mathbb{K}$, l'insieme delle sue soluzioni si ottiene sommando a una sua soluzione particolare le soluzioni del sistema omogeneo associato*[7].

Dimostrazione. Sia $s=(s_1,\cdots,s_n)$ una soluzione particolare del sistema non omogeneo e $(w_1,\dots,w_n)$ una soluzione del sistema omogeneo associato. Questo significa che $a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}s_n=b_j$ e che $a_{j1}w_1+\cdots+a_{jn}w_n=0$. Ma allora

$$\begin{aligned} a_{j1}(s_1+w_1)+\cdots+a+a_{jn}(s_n+w_n) = a_{j1}s_1+a_{j1}w_1+\cdots+a_{jn}s_n+a_{jn}w_n = \\ = a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}w_n+a_{jn}s_n+a_{j1}w_1+\cdots+a_{jn}w_n+b_j+0=b_j \end{aligned}$$

[7] ovvero il sistema che si ottiene ponendo tutti i termini noti uguali a zero

ovvero anche $s+w=(s_1+w_1,\cdots,s_n+w_n)$ è soluzione del sistema non omogeneo: questo mostra che sicuramente sommando a una soluzione particolare del sistema una soluzione del suo sistema omogeneo associato si ottiene ancora una soluzione del sistema (non omogeneo): per concludere la dimostrazione, bisogna mostrare che in questo modo si ottengono **tutte** le soluzioni del sistema non omogeneo.

$$\begin{aligned} a_{j1}(s_1'-s_1)+\cdots+a_{jn}(s_n'-s_n) &= a_{j1}s_1'-a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}s_n'-a_{jn}s_n = \\ &= a_{j1}s_1' = \cdots + a_{jn}s_n' - (a_{j1}s_1+\cdots+a_{jn}s_n) = b_j - b_j = 0 \end{aligned}$$

Questo mostra che $s'-s+(s_1'-s_1,\cdots,s_n's_n)$ è una soluzione del sistema omogeneo associato: poiché chiaramente $s'=s+('-s)$, questo dice che qualunque soluzione s' del sistema (non omogeneo) si può scrivere come somma della soluzione particolare s fissata fin dall'inizio più una soluzione del sistema omogeneo associato, come voluto. $\square$

Esempio 2.5.3. Si consideri il sistema omogeneo seguente:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases} \tag{2.43}$$

Con un solo passaggio

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-2R_1]{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

riducendo a gradini la sua matrice[8] e lo riducendo al sistema a gradini equivalente

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ -x_2-x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

che è possibile risolvere dal basso: posto $x_3=t$ e $x_4=s$, la seconda equazione darà $x_2=-t-3s$, e sostituendo nella prima si otterrà la seguente equazione

$$x_1=-x_2-x_3-x_4=t+3s-t-s=2s.$$

Le soluzioni del sistema sono quindi tutte e sole le 4-uple della tipologia:

$$(2s,-t-3s,t,s), \quad t,s\in\mathbb{R}.$$

e l'insieme di tali 4-uple costituisca un sottospazio vettoriale (di $\mathbb{R}^4$) si può mettere in evidenza riscrivendo la soluzione generale nella forma seguente:

$$(2s,-t-3s,t,s)=t(0,-1,1,0)+s(2,-3,0,1)$$

uguaglianza dalla quale si vede che la generica soluzione è combinazione lineare dei vettori $(0,-1,1,0)$ e $(2,-3,0,1)$: in altre parole, l'insieme delle soluzioni coincide con il sotto sistema

$$\langle(0,-1,1,0),(2,-3,0,1)\rangle$$

generato da tali vettori.
Per un esempio di sistema non omogeneo, si consideri ad esempio il sistema

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=3 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4&=5 \end{aligned}$$

che ha come sistema omogeneo associato proprio il 2.43 appena risolto. Anche qui, con un solo passaggio

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-2R_1]{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

riducendo a gradini la sua matrice completa trasformandolo nel sistema a gradini equivalente $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=3 \\ -x_2-x_3-3x_4=-1 \end{cases}$, che è possibile risolvere dal basso: posto $x_3=t$ e $x_4=s$, la seconda

[8] Si noti che sono stati riportati i termini noti: infatti, essendo questi **tutti** uguali a zero, qualunque operazione elementare applicando alle righe rimarranno uguali a zero, quindi non è necessario scriverli.

equazione darà $x_2 = 1 - t - 3s$, e sostituendo nella prima si ottiene $x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 = 3 - 1 + t + 3s - t - s = 2 + 2s$. Le soluzioni del sistema sono quindi tutte e sole le 4−uple del tipo $(2 + 2s, t - t - 3s, t, s)$, al variare di $t, s \in \mathbb{R}$. Allora, si vede che tale soluzione generale può essere decomposta come

$$(2 + 2s, 1 - t - 3s, t, s) = (2, 1, 0, 0) + (2s, -t - 3s, t, s)$$

ovvero come previsto dalla Proposizione 2.5.5, come somma della soluzione particolare $(2, 1, 0, 0)$[9] più le 4-uple del tipo (2s,-t-3s,t,s), che sono proprio le soluzioni del suo sistema omogeneo associato (2.43).
Per una questione di pura logica è giusto ripescare un concetto dalle rimembranze dell'esame di Matematica Analisi 1, con la seguente
Osservazione 2.5.4. I teoremi appena visti hanno un analogo con quello che succede nel caso delle equazioni differenziali lineari, ovvero le equazioni del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t)$$

Infatti, anche per tali equazioni si dimostra che la soluzione generale si trova sommando una soluzione particolare a una soluzione dell'equazione omogenea associata $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$, il cui insieme delle soluzioni è, esattamente come accade per i sistemi omogenei, un sottospazio vettoriale[10].
Ad esempio, l'equazione $y'' + y = t^2$ ha come soluzione generale $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t^2 - 2$, dove è facile vedere che $t^2 - 2$ è una sua soluzione particolare, mentre $c_1 \cos t + c_2 \sin t$ è, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y'' + y = 0$ (quindi, l'insieme delle soluzioni di tale equazione omogenea è il sottospazio vettoriale generato dalle funzioni $\cos t$ e $\sin t$).
Esattamente come nel caso dei sistemi, quindi, si riesce a esprimere tutte le (infinite) soluzioni di un'equazione semplicemente usando una soluzione particolare e due soluzioni (indipendenti) dell'equazione omogenea.

In genere, in uno spazio vettoriale V, un sottoinsieme $S \subseteq V$ ottenuto sommando un vettore fissato v^0 a tutti i vettori di un sottospazio vettoriale W dato (scrivendo in forma $S = v^0 + W$) si chiama anche *sottospazio affine*.
Quindi, avendo dimostrato che l'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo compatibile di m equazioni in n incognite e coefficienti in $\mathbb{K}$ è in sottospazio affine di K^n. Un altro esempio di sottospazio affine, è quello dato dall'insieme S dei vettori $\vec{OP} \in V_O^3$ il cui secondo estremo P appartiene a un piano π' fissato *non* passante per O.
Infatti, bisogna constatare (come da figura) che, fissato un vettore $\vec{OP}_0 \in S$, qualunque altro $\vec{OP} \in S$ si può scrivere come somma di $\vec{OP}_0$ e di un vettore $\vec{OQ}$ che giace sul piano π parallelo a π' e passante per O, ovvero $S = \vec{OP}_0 + W$, dove W è l'insieme dei vettori giacciono su π (che, come si evince, è un sottospazio vettoriale).

Con un ragionamento e un disegno analogo, si può vedere che l'insieme dei vettori $\vec{OP}$ il cui secondo estremo P sta su una retta non passante per O è un sottospazio affine.
Ispirati da questi esempi, si dice spesso che un sottospazio affine è *il traslato di un sottospazio vettoriale.*

2.6 Qualche applicazione geometrica

È il caso di esporre alcuni problemi geometrici che possono essere risolti grazie al procedimento di riduzione a gradini e al concetto di rango.
Ad esempio, considerando due rette r e r' di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \quad , \quad r' : \begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases} \tag{2.44}$$

e supponendo di velor determinare se esse hanno punti in comune. Dal momento che i punti di una retta espressa in equazioni cartesiane sono proprio le soluzioni del sistema formato dalle due equazioni, i punti comuni alle due rette sono dati dalle soluzioni comuni a tutte e quattro le

[9] quella che si ottiene ponendo $t = s = 0$
[10] In questo caso dello spazio delle funzioni

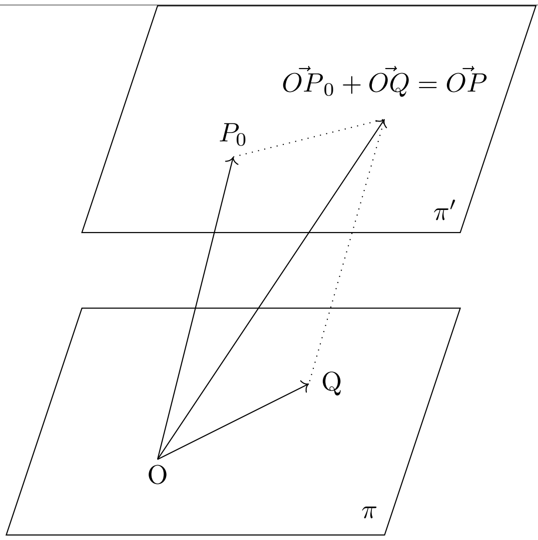


Figura 2.1: Dimostrazione grafica di $S = \vec{OP}_0 + W$

equazioni delle due rette, ovvero le soluzioni del sistema

$$r : \begin{cases} x + y + x = 2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - y - 2z = -2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases} \tag{2.45}$$

Riducendo la matrice completa si ottine

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to 3R_3 - 2R_2 \\ R_4 \to 3R_4 + 2R_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to 7R_4 + R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Quindi il sistema è compatibile e, essendosi annullata una riga, la matrice ha rango 3, quindi avendo 3 incognite in base a quanto detto nel Teorema 2.5.1 è presente solo una soluzione, viene trovata risolvendo il sistema ridotto corrispondente

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -3y - z = 1 \\ -7z = -14 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene $z = 2$, che sostituito nella seconda dà

$$-3y = z + 1 = 2 + 1 = 3$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è data dalla terna $(1, -1, 2)$, che sono le coordinate del punto in cui si incontrano le due rette. Supponendo invece che le rette siano

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + -z = 1 \end{cases} \quad , \quad r' : \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \tag{2.46}$$

e supponendo anche di voler determinare se esse hanno punti in comune. Come sopra, si mette insieme le quattro equazioni e si riduce la matrice completa del sistema così ottenuto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to 7R_4 + 2R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \tag{2.47}$$

Essendo il sistema incompatibile (l'ultima riga corrisponde all'uguaglianza falsa $0 = 7$) è possibile dedurre che le due rette non hanno punti in comune.

Ora, mentre nel piano due rette non hanno punti in comune sono neccessariamente parallele, nello spazio tridimensionale questo non è più vero: come si vede nella seguente figura, grazie alla dimensione extra rispetto al piano, possono trovarsi su piani paralleli e quindi non incontrarsi pur avendo la stessa direzione.

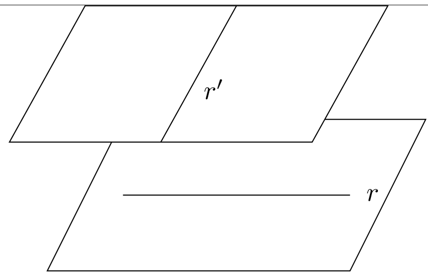


Figura 2.2: Rette su piani paralleli

In tal caso si dice che le rette sono *sghembe*. Adesso è il caso di vedere come sia possibile determinare se le rette sono *sghembe* oppure `parallele` senza fare ulteriori conti, ma sfruttando la riduzione già svolta. Infatti, le due rette che non hanno punti in comune sono parallele se e solo se quando le si trasla parallelamente a se stesse sull'origine esse risultano coincidere (ovvero hanno infiniti punti in comune), mentre sono sghembe se e solo se quando le si trasla parallelamente a se stesse sull'origine esse hanno in comune un solo punto, l'origine stessa: adesso è il caso di trattare il problema di capire

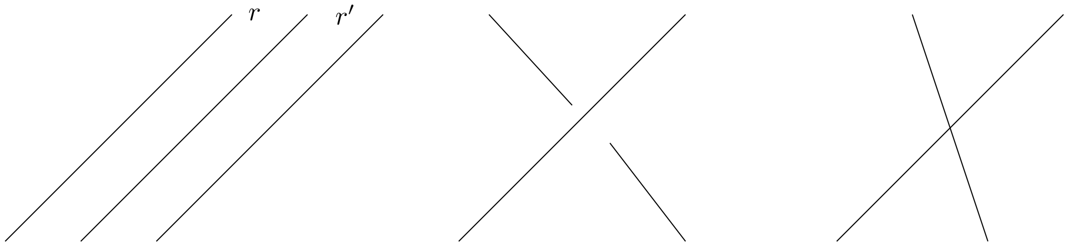


Figura 2.3: Differenza tra parallele e sghembe

se le due rette hanno la stessa direzione nel problema di determinare un'intersezione (tra le rette traslate). Ora, per traslare una retta espressa in equazioni cartesiane, parallelamente a se stessa, basta modificare i termini noti delle equazioni lasciando invariati i primi membri[11]: in particolare, si ottiene la traslazione sull'origine se si va apporre i termini noti uguali a zero (in quanto in tal caso le le equazioni risultato soddisfatte dalla terna $x = 0, y = 0, z = 0$, che sono le coordinate dell'origine, il che significa che la retta traslata è proprio quella che passa per l'origine). Nel caso delle equazioni delle due rette r e r' data da (2.46), le rette trasla sull'origine sono rappresentate dalle equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Per determinare se tali rette traslate hanno infiniti punti in comune o uno solo, ovvero come visto sopra, se le rette di partenza erano rispettivamente parallele o sghembe, bisogna risolvere il sistema che si ottiene mettendo insieme le quattro equazioni,

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 2x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} ,$$

che ha come matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Ora, per ridurre a gradini questa matrice verranno applicato esattamente le stesse operazioni usate per ridurre la (2.47), che differisce da essa solo per il fatto di avere tutti i termini noti uguali

[11] Infatti, modificando solo il noto dell'equazione $ax + by + cz = d$ di un piano si ottiene un piano parallelo in quanto non si avrà cambiato la normale al piano, data dalla terna (a, b, c). Poiché una retta è intersezione di due piani, modificando i termini noti delle due equazioni si sta muovendo parallelamente a se stessi i piani e quindi muovendo parallamente a se stessa la retta.

a zero: l'unica differenza sarà che i termini noti rimarranno sempre nulli qualunque operazione elementare è necessario applicare, e quindi, senza dover riscrivere il processo prima visto, sapendo che si arriverà alla stessa matrice ridotta ma con l'ultima colonna (quuella dei termini noti) tutta nulla, ovvero

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Guardando questa matrice, che rappresenta ora un sistema compatibile con 3 incognite e rango 3, si conclude che traslando le rette sull'origine si avrà solo una soluzione (l'origine stessa) e quindi le rette di partenza non erano parallele.
Adesso, è il caso di vedere cosa potrebbe capitare se le rette sono pallele, prendendo il seguente esempio

$$r : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \quad , \quad r' : \begin{cases} 2x+3z=3 \\ x+3y=-3 \end{cases} \tag{2.49}$$

Allo scopo di controllare se le rette hanno punti in comune, come visto nel caso precedente, è necessario andare a costituire un singolo sistema composto dai due sistemi di partenza r e r', il risultato sarà il seguente:

$$r_{tot} : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+3z=3 \\ x+3y=-3 \end{cases}$$

Da questo è possibile dedurre che la matrice completa di questo sistema sarà:

$$\begin{gathered} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2}]{} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to 2R_4 + 5R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{gathered} \tag{2.50}$$

Come si vede, da una partte le rette non hanno punti in comune in quanto la teza riga corrisponde all'uguaglianza falsa $0 = 2$; dall'altra parte, il sistema formato dalle due rette traslate sull'origine, ovvero con termini noti nulli, avrebbe come matrice ridotta la stessa matrice ottenuta ora ma con l'ultima colonna composta da zeri, ovvero

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Che rappresenta la matrice di un sistema ridotto compatibile con 3 incognite e rango 2, quindi infinite soluzioni: questo significa che le due rette, traslate sull'origine, hanno infiniti punti in comune, ovvero coincidono, e quindi le due rette di partenza, prima della traslazione, erano parallele.
Osservazione 2.6.1. Per rette date in equazioni parametriche verificate se esse sono parallele o meno è immediata, in quento come già definito in precedenza, nel equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

un vettore che rappresenta la direzione della retta è dato dalla terna (l, m, n) dei coefficenti di t (questo è scrivibile maticamente anche in forma $\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$): basta quindi confrontare i due vettori così ottenuti per ognuna delle due rette, che avranno la stessa direzione se tali vettori sono proporzionali. Nel caso in cui le rette siano date in equazioni cartesiane, si può passare alle parametriche semplicemente risolvendo i sistemi dati dalle cartesiane stesse. Ad esempio, per le rette viste sopra in (2.49), riducendo la matrice completa delle cartesiane di r si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

ovvero il sistema ridotto $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y+z=-1 \end{cases}$, da cui ponendo $z=t$ si ricava $-2y=-1-t$ (ovvero $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$) e $x=1-y-z=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)-t=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t$ quindi r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases} \tag{2.51}$$

Analogamente, riduzione la matrice completa delle cartesiane di r' ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to 2R_2 - R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

ovvero il sistema ridotto $\begin{cases} 2x+3z=3 \\ 6y-3z=-9 \end{cases}$, da cui ponendo $z=t$ si ricava $6y=-9+3t$ (ovvero $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t$) e $2x=3-3z=3-3t$, ovvero $x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t$: quindi r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t \\ y=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases} \tag{2.52}$$

Confrontando i coefficienti di t nelle parametriche (2.51) e (2.52), si vede che le rette hanno entrambe direzione rappresentata dal vettore di coordinate $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1\right)$, e quindi sono parallele[12].

Osservazione 2.6.2. Nel caso in cui si voglia fare il passaggio inverso, ovvero passare da parametriche a cartesiane, nel caso della retta basta ricavare il parametro t da una delle espressioni che compongono le parametriche e sostituirlo nelle altre. Ad esempio, se la retta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=1-3t \end{cases}$$

si può ricavare $t=1-x$ dalla prima che, sostituita nelle altre, da $y=2+(1-x)=3-x$ e $1-3(1-x)=-2+3x$. allora è anche possibile affermare che la retta ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x=1+t+s \\ y=2+t-s \\ z=3-2t-s \end{cases}$$

si può ricavare $t=x-1-s$ dalla prima che, sostituita nelle altre, dà $y=2+(x-1-s)-s=1+x-2s$ e $z=3-2(x-1-s)-s=5-2x+s$; ricavano poi s da questa seconda espressione, ovvero $s=z+2x+s$; ricavano poi s da questa seconda espressione, ovvero $s=z+2x-5$, è possibile sostituire nell'altra ottenendo $y=1+x-2(z+2x-5)=11-3x-2z$, ovvero $3x+y+2z=11$, che è l'equazione cartesiana del piano. Nel capicolo successivo verrà illustrato un metodo più elegante e efficiente per arrivare allo stesso risultato.

Un altro problema geometrico che può essere risolto con l'aiuto delle tecniche viste a proposito della risoluzione dei sistemi è il seguente: supponendo di avere una retta data in equazioni cartesiane

$$\begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \end{cases} \tag{2.53}$$

Come visto nel capitolo precedente quando si tratta di ricavare tali equazioni, la (2.53) sta semplicemente dicendo che la retta data è intersezione del piano dato dall'equazione cartesiana $Ax+By+$

[12]Si noti che le rette hanno la stessa direzione, che non esclude il caso in cui esse siano parallele coincidenti, ovvero che le equazioni cartesiane date rappresentassero in realtà la stessa retta.

$Cz = D$ e dal piano di equazione cartesiana $Ax+By+Cz = D$ e dal piano di equazione cartesiana $A'x + B'y + C'z = D'$: le due equazioni che compongono le cartesiane sono quindi le equazioni di due particolari piani che contengono la retta. Per determinare tutti i piani che contengono la retta, bisogna esporre la seguente

Proposizione 2.6.1. *La generica equazione cartesiana del piano che contiene la retta (2.53) è data da*

$$\alpha(Ax + By + Cz - D) + \beta(A'x + B'y + C' - D') = 0 \tag{2.54}$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Bisogna iniziare con l'osservare che se un piano ha equazione della forma (2.54), allora esso contiene la retta. Infatti, dire che una retta è contenuta in un piano significa che se un punto appartiene anche al piano: ma se un punto appartiene alla retta, allora le sue coordinate (x, y, z) soddisfano entrambe le equazioni $Ax + By + Cz = D$ e $A'x + B' + C'z = D'$ della retta, e quindi

$$\alpha(Ax + By + Cz - D) + \beta(A'x + B'y + C'z - D') = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

ovvero (x, y, z) soddisfa anche l'equazione (2.54), cioè il punto appartiene al piano rappresentato da tale equazione. Questo dimostra che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'equazione (2.54) rappresenta un piano che contiene la retta. Viceversa, bisogna essere sicuri che qualche piano che contenga la retta può essere rappresentato nella forma (2.54). Per vederlo, bisogna osservere che un generico piano di equazione $A''x+B''y+C'' = D''$ contiene tutta la retta sta anche sul piano, ovvero se e solo se ogni terna che soddisfa le equazioni $Ax+By+Cz = D$ e $A'x+B'y+C' = D'$ soddisfa automaticamente anche l'equazione $A''x + B''y + C'' = D''$ del piano. In altre parole, nel sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = B \\ A'x + B'y + C' = D' \\ A''x + B''y + C'' = D'' \end{cases}$$

che si ottiene mettendo insieme tutte le cartesiane, la terza equazione è superfluo ovvero dipendente dalle altre. A livello della matrice completa

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{vmatrix}$$

questo si traduce nel fatto che la terza riga deve essere combinazione lineare delle altre due, ovvero devono esistere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{vmatrix} A'' & B'' & C'' & D'' \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} A & B & C & D \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} A' & B' & C' & D' \end{vmatrix}$$

ovvero

$$A'' = \alpha A + \beta A', \quad B'' = \alpha B + \beta B', \quad C'' = \alpha C + \beta C', \quad D'' = \alpha D + \beta D'$$

Quindi l'equazione $A''x + B''y + C'' = D''$ si riscrive

$$(\alpha A + \beta A')x + (\alpha B + \beta B')y + (\alpha C + \beta C')z = \alpha D + \beta D'$$

che, si vede facilmente svolgendo i conti e confrontando, equivale proprio alla (2.54). □

Esempio 2.6.1. Data la retta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

si determini il piano π che contiene r e passa per il punto P_0 di coordinate $(1, 1, 1)$. Determinando prima tutti i piani che contengono r, che secondo la Proposizione 2.6.1 sono dati al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dall'equazione

$$\alpha(x + y + z - 1) + \beta(x - y + 2z) = 0. \tag{2.55}$$

da cui $\alpha = -\beta$. Sostituendo questa relazione nella (2.6.1), si ottiene

$$-\beta(x + y + z - 1) + \beta(x - y + 2z) = 0$$

ovvero, svolgendo i calcli,

$$-2y + z + 1 = 0.$$

Al variare del parametro β, queste equazioni rappresentano tutte lo stesso piano (il piano π cercato) in quanto si tratta di equazioni proporzionali, tutte equivalenti: dividendo per il parametro β (o, equivalentemente, scegliendo per esempio $\beta = 1$), possiamo allora scrivere che π ha equazione cartesiana

$$-2y + z + 1 = 0.$$

Se, invece del passaggio per il punto, nel caso in cui si impone per esempio che il piano, oltre a contenere r, fosse parallelo a un altro piano, ad esempio quello di equazione cartesiana $x+2y+3z = -1$, bisogna procesere come segue. Come visto nel capitolo precedente, due piani $Ax+By+Cz = D$ e $A'x+B'y+C'z = D'$ sono paralleli se e solo se le terne (A, B, C) e (A', B', C') sono proporzionali, in quanto rappresentano le coordinate di vettori normali (perpendicolari) ai piani. In realtà, paiché c'è la libertà di moltiplicare l'equazione di un piano per qualunque coefficiente senza che il piano venga modificato, si può sempre far che sia $(A, B, C) = (A', B', C')$. Allora, poiché svolgendo i calcoli nella (2.55), il generico piano che contiene r è della forma

$$(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y + (\alpha + 2\beta)z - \alpha = 0, \tag{2.56}$$

la condizione di parallelism,o tra questo piano e il piano di equazione $x + 2y + 3z = -1$ è

$$(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha + 2\beta) = (1, 2, 3)$$

ovvero, trasponendo questo modello in forma sistemica ordinata:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 2 \\ \alpha - 2\beta = 3 \end{cases}$$

Per trovare il piano dato, basta quindi risolvere tale sistema e sostituire valori di α e β trovati nella equazione (2.56). In questo caso, si vede riducendo a gradini la sua matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_1 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

il sistema è incompatible e quindi la condizione di parallelismo non può essere soddisfatta: tra i piani che contengono la retta r, non ne esiste nessuno che è parallelo al piano dato.

Esempio 2.6.2. Date le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad , \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

bisogna determinare, se esiste, il piano che le contiene. Come fatto precedente, il generico piano che contiene r_1 ha equazione

$$\alpha_1(x + y + z - 3) + \beta_1(x - 2y + z) = 0$$

ovvero, espresso in altra forma:

$$(\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_1 - 2B_1)y + (\alpha_1 + \beta_1)z - 3\alpha_1 = 0 \tag{2.57}$$

mentre il generico piano che contiene r_2 ha equazione

$$\alpha_2(2x + y + z - 2) + \beta(x - y - z + 1) = 0$$

ovvero

$$(2\alpha_2 + \beta_2)x + (\alpha_2 - \beta_2)y + (-2\alpha_2 + \beta_2)z + (-2\alpha_2 + \beta_2) = 0. \tag{2.58}$$

Per trovare, se siste, il piano che contiene entrambe le rette basta vedere se osistono valori di $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ tali che la (2.57) e la (2.58) sono uguali: uguagliando i coeffcienti di x, y, z e il temine noto in tali equazioni si ottiene

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_1 - 2\beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_1 + \beta_1 = -\alpha_2 - \beta_2 \\ -3\alpha_1 = -1\alpha_2 + \beta_2 \end{cases}$$

ovvero il sistema omogeneo di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 = -\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -3\alpha_1 = -1\alpha_2 + \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha sicuramente sempre la soluzione $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, ma se si sostituiscono tali valori nella (2.57) e la (2.58) ottenendo $0 = 0$, che non è l'equazione di un piano: quindi per l'esistenza del piano che contiene entrambe le rette deve esistere una soluzione non nulla di tale sistema. Riducendo a gradini la sua matrice dei coefficienti si trova

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_1 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice ha rango 3 il sistema ha sicuramente altre soluzioni oltre alla 4-uple nulla $(0, 0, 0, 0)$, quindi esiste il piano che contiene le rette. Per trovarlo, basta risolvere il sistema, che ridotto precedentemente alla forma equivalente

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 - 2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -3\beta_1 + \alpha_2 + 3\beta_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Però non è necessario determinare completamente la soluzione del sistema: infatti, l'ultima equazione non nulla dà il valore di α_2 (in funzione di β_2), mentre le prime due i valori α_1 e β_1 (sempre in forma di β_2): se si sostituisce i valori α_1 e β_1 così trovati nella (2.57) o quello di α nella (2.58) ottenendo lo stesso piano (il sistema esprimendo porprio la condizione che i due piani sono uguali), quindi per trovarlo basta determinare solo α_2 dall'ultima equazione non nulle $2\alpha_2 + 2\beta_2 = 0$ senza dover risolvere le altre due. Questa equazione dà $\alpha_2 = \frac{2}{3}\beta_2$ che sostituita nella (2.58) da

$$\left(-\frac{4}{3}\beta_2 + \beta_2\right) x + \left(-\frac{2}{3}\beta_2 - \beta_2\right) y + \left(\frac{2}{3}\beta_2 - \beta_2\right) z + \left(\frac{4}{3}\beta_2 + \beta_2\right) = 0$$

ovvero

$$-\frac{1}{3}\beta_2 x + \frac{5}{3}\beta_2 y - \frac{1}{3}\beta_2 z + \frac{7}{3}\beta_2 = 0$$

Dividendo per β_2 e moltiplicando per -3 si ottiene infine

$$x + 5y + z - 7 = 0$$

che è l'equazione del piano cercato.

Il procedimento di riduzione a gradini è uno strumento non solo per risolvere un sistema ma più in generale per scoprire se delle n-uple sono linearmente indipendenti e in caso negativo, per individuare le n-uple che sono combinazione delle altre. A sua volta questo contente di determinare se sono indipendenti i vettori in un qualunque spazio vettoriale: infatti, basta fissare una base, rappresentare i vettori mediante le n-uple delle loro coordinate e poi controllare se sono indipendenti tali n-uple mediante una semplice riduzione a gradini.

Esempio 2.6.3. Fissata una base $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ dello spazio tridimensionale dei vettori applicati V_O^3, si dica se i tre vettori applicati

$$\begin{aligned} v_1 &= \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + \vec{OP}_3 \\ v_2 &= 3\vec{OP}_1 + 4\vec{OP}_2 + 5\vec{OP}_3 \\ v_3 &= -\vec{OP}_1 + 2\vec{OP}_2 + 5\vec{OP}_3 \end{aligned}$$

formano ancora una base. Tre vettori in uno spazio di dimensione 3 formano una base se e solo se sono indipendenti: per determinare l'indipendenza di v_1, v_2, v_3 basta considerare le terne $(1, 2, 3), (3, 4, 5), (-1, 2, 5)$ delle loro coordinate rispetto alla base di partenza OP_1, OP_2, OP_3 e determinare equivalentemente se esse sono indipendenti in $\mathbb{R}$.

Costruendo la matrice che ha tali terne come righe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

e effetuando una riduzione a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_4 + R_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendosi annullata la terza riga, significa che questa era combinazione delle prime due: quindi le tre terne non sono indipendenti e non lo sono neanche i vettori applicati v_1, v_2, v_3 da esse rappresentate (tali vettori giacevano quindi su uno stesso piano).

2.7 Due integrazioni sul determinante

2.7.1 Complanarità di rette in parametriche

Siano r e r' due rette, date in equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad , \quad r' : \begin{cases} x = x_0' + a't \\ y = y_0' + b't \\ z = z_0' + c't \end{cases} \tag{2.59}$$

Allora r e r' sono complanari se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x_0 - x_0' & y_0 - y_0' & z_0 - z_0' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 0 \tag{2.60}$$

Infatti, due rette sono complanari solo se sono o parallele o incidenti in un punto: nel caso in cui esse siano parallele, i loro vettori direttori $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$[13] sono proporzionali, e quindi il determinante (2.60) è zero perché la seconda e la terza riga delle matrice sono proporzionali e quindi dipendenti (e il determinante di una matrice con le righe dipendenti, si annulla). Nel caso in cui le rette in cui le rette siano incidenti in un punto, invece, dal momento che le parametriche di una retta danno i punti della retta al variare del parametro, esisteranno un valore di t da sostituire nella prima delle (2.59) e un valore di t' da sostituire della (2.59) per i quali si ottiene lo stesso punto (quello in comune alle due rette), ovvero per tali valori si ha

$$\begin{cases} x_0 + at = x_0' + a't' \\ y_0 + bt = y_0' + b't' \\ z_0 + ct = z_0' + c't' \end{cases} \tag{2.61}$$

È possibile riscrivere queste uguaglianze come

$$\begin{cases} x_0 - x_0' = -at + a't' \\ y_0 - y_0' = -bt + b't' \\ z_0 - z_0' = -ct + c't' \end{cases}$$

ovvero accorparle nella forma vettoriale

$$(x_0 - x_0', y_0 - y_0', z_0 - z_0') = -(a, b, c) + t'(a', b', c') \tag{2.62}$$

Questa uguaglianza sta allora dicendo che, nella matrice che compare nella (2.60), la prima riga è combinazione lineare delle altre due: di nuovo, il determinante è allora zero in quanto il determinante di una matrice con le righe dipendenti è nullo.
Questo conclude la dimostrazione del fatto che se le rette sono complanari allora vale la 2.60. Viceversa, se il determinante si annulla allora i casi sono due:

[13] Che si vedono dai coefficienti di t nelle parametriche

1. La seconda e la terza riga (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali, e le rette sono parallele, essendo tali righe i vettori direttori delle rette.
2. Se le rette non sono proporzionali, quando il determinante nullo e quindi le righe dipendenti necessariamentela prima riga $(x_0 - x_0', y_0 - y_0', z_0 - z_0')$ deve essere combinazione lineare di (a, b, c) e (a', b', c'): questo, ripetendo a ritroso i passaggi fatti per passare dalla (2.62) alla (2.61) mostra che le rette devono avere un punto in comune.

2.7.2 Regola di Sarrus

La regola di Sarrus è un metodo, alternativo allo svolgimento di Laplace, per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

La regola di Sarrus funziona come segue: aggiungendo alla matrice data due colonne ripetendo, dopo la terza, la sua prima e la sua seconda colonna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

In questa matrice con cinque colonne è possibile mettere in evidenza tre "diagonali"

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \mathbf{a_{31}} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \mathbf{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & \mathbf{a_{21}} \end{bmatrix}, \tag{2.65}$$

e tre "antidiagonali"

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mathbf{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & \mathbf{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \mathbf{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{31} & a_{21} \end{bmatrix}. \tag{2.66}$$

Il determinate della matrice risulta essere allora uguale al prodotto degli elementi della prima diagonale più il prodotto degli elementi della seconda diagonale più il prodotto degli elementi della terza diagonale, meno il prodotto degli elementi della prima antidiagonale meno il prodotto degli elementi della seconda antidiagonale meno il prodotto degli elementi della terza antidiagonale:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Infatti, si potrebbe verificare che gli addendi di questa uguaglianza coincidono con quelli previsti dalla definizione di determinante mediante sommatoria e permutazioni (la regola di Sarrus dà quindi semplicemente un modo pratico di ottenere quegli stessi addetti, con i segni corretti, senza ricorrere alla definizione).

Bisogna sottolineare il fatto che la regola di Sarrus non può essere applicata a matrici di ordine superiore a 3.

Capitolo 3

Applicazioni lineari e prodotti di matrici

3.1 Applicazioni lineari: definizione ed esempi

In questo paragrafo si parlerà di funzioni tra spazi vettoriali. Ricordando che una funzione $f : X \to Y$ tra due insiemi X (detto *dominio*) e Y (detto *codominio*) è una legge che associa a ogni $x \in X$ un ben preciso elemento di Y, detto *immagine di* x e denotato $f(x)$. Tipicamente vengono trattate le funzioni $f : V \to W$ in cui dominio e codominio sono, corrispettivamente, V e W, spazi vettoriali su un certo campo $\mathbb{K}$, e in particolare si andrà a studiare quello che soddisfa la seguente

Definizione 3.1.1. Una funzione $f : V \to W$ tra spazi vettoriali si dice *funzione lineare* (o *applicazione lineare*) se verifica le due seguenti proprietà:

$$f(v + v') = f(v) + f(v') \text{ per ogni } v, v' \in V \tag{3.1}$$

$$f(cv) = cf(v) \text{ per ogni } v \in V \text{ e ogni scalare } c \in \mathbb{K} \tag{3.2}$$

Limitarsi, alla funzione lineare può essere molto restrittivo: ad esempio, si può vedere che se[1] $V = W = \mathbb{R}$, le uniche funzioni lineari $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono quelle del tipo $f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$ fissato. Tuttavia, bisogna notare che tra le applicazioni lineari vi sono funzioni di grande importanzia e utilità in geometria e nelle sue applicazioni:

Esempio 3.1.1. Dato lo spazio V_O^2 dei vettori geometrici applicati nel piano, considerando la funzione $f : V_O^2 \to V_O^2$ che associa a ongi vettore $\vec{OP}$ il vettore che si ottiene ruotado $\vec{OP}$ di un angolo θ fissato in senso antiorario attorno all'origine O, come nella figura seguente

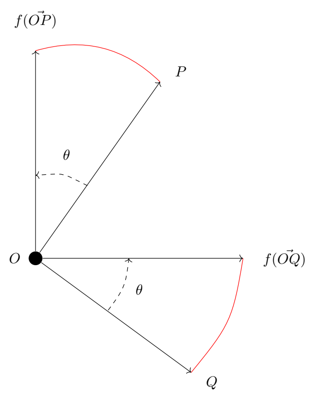


Figura 3.1: Funzione $f : V_O^2 \to V_O^2$ associata ai vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OP}$

Come si vede nella figura seguente, dati due vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$, sommarli e poi ruotare il vettore risultante oppure prima ruotarli e poi sommare i vettori ruotati è equivalente, ovvero

[1] Sapendo che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale di dimensione n, in particolare per $n = 1$ si ottiene $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (che risulta quindi uno spazio vettoriale di dimensione unitaria o $dim = 1$)

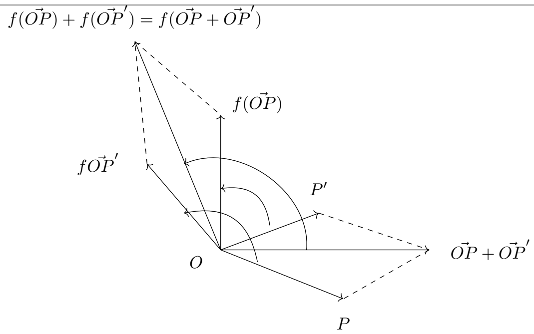


Figura 3.2: Cosa accade se si ruota e sommano i vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$

Quindi vale la formula, già acclarata

$$f(\vec{OP}) + f(\vec{OP}') = f(\vec{OP} + \vec{OP}') \tag{3.3}$$

che dice che questa funzione soddisfa la proprietà (3.1). Analoramente, dato un vettore $\vec{OP}$ e un numero reale c, moltiplicare il vettore per c e poi ruotarlo oppure prima ruotarlo e poi moltiplicarlo per c è equivalente:

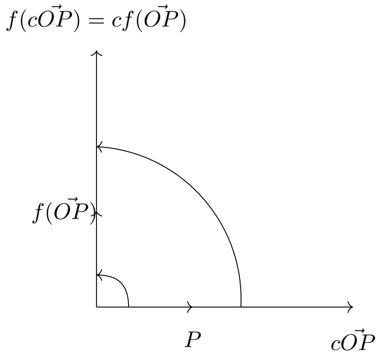


Figura 3.3: Moltiplicazione tra il vettore $\vec{OP}$ e un numero reale c

Quindi si ha, l'equivalenza:

$$f(c\vec{OP}) = cf(\vec{OP}) \tag{3.4}$$

che afferma, in modo abbastanza esplicito che, questa funzione anche la proprietà (3.2) della Definizione 3.1.1. E si conclude quindi, che le rotazioni attorno a O sono applicazioni lineari dallo spazio vettoriale V_O^2 in se stesso.
È possibile raggiungere la stessa conclusione anche per altre importanti trasformazioni geometriche; ad esempio, si consideri la riflessione rispetto a una retta r passante per O, che manda ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^2$ nel vettore sommetrico rispetto alla retta, come da figura

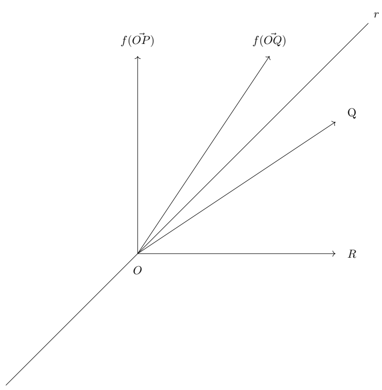


Figura 3.4: Metodo alternativo per dimostrare la funzione 3.1 mediante retta

Allora, Come già fatto per le rotazioni, si nota che, dati due vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OP}'$, sommarli e poi riflettere il vettore risultante oppure prima rifletterli e poi sommare i vettori riflessi è equivalente

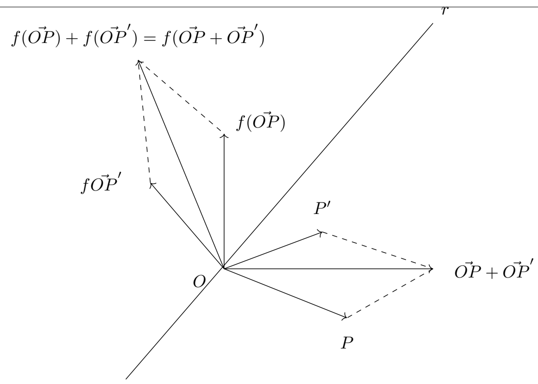


Figura 3.5: Metodo alternativo per dimostrare la funzione 3.2 mediante retta

e quindi anche in questo caso si otterà una formula identica alla 3.3. Dato un vettore $\vec{OP}$ e un numero reale c, moltiplicare il vettore per c e poi rifletterlo oppure prima rifletterlo e poi moltiplicarlo per c è equivalente

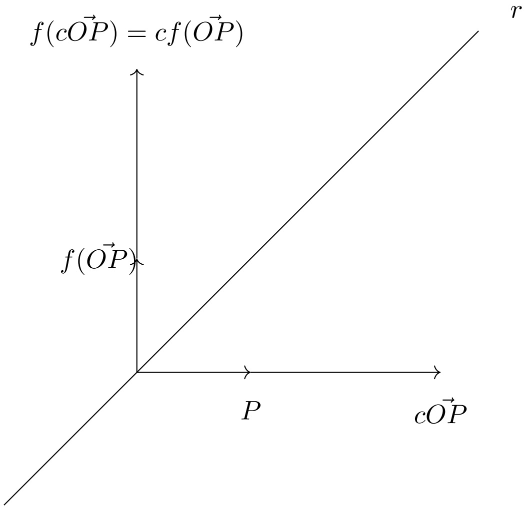


Figura 3.6: Metodo alternativo per dimostrare la funzione 3.3 mediante retta

quindi, la formula è identica alla 3.4, quindi è possibile concludere che anche la riflessione rispetto a una retta che passa per O, avendo le proprietà (3.1) e (3.2) richieste nella Definizione 3.1.1, è un'applicazione lineare $f : V_O^2 \to V_O^2$.
Come terzo esempio di applicazione lineare $V_O^2 \to V_O^2$ bisogna citare la proiezione ortogonale, che proietta ortogonalmente i vettori su una retta fissata passante per O.

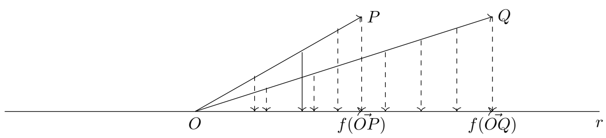


Figura 3.7: Retta con vettori proiettanti ortogonalmente per O

per la quale non è difficile vedere che valgono anche le proprietà (3.1) e (3.2). Analogamente a quanto visto per rotazioni, riflessioni e proiezioni nel piano, anche le corrispondenti trasformazioni $V_O^3 \to V_O^3$ dello spazio tridimensionale V_O^3 sono applicazioni lineari; più precisamente, si può motrare che soddisfano le proprietà (3.1) e (3.2) della Definizione 3.1.1 la rotazione di un angolo fissato θ attorno a una retta data passante per O (detta anche *asse della rotazione*).

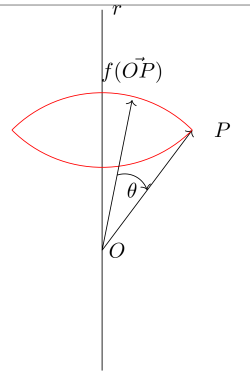


Figura 3.8: La rotazione di un angolo fissato θ (asse della rotazione)

la riflessione rispetto a un piano passante per O

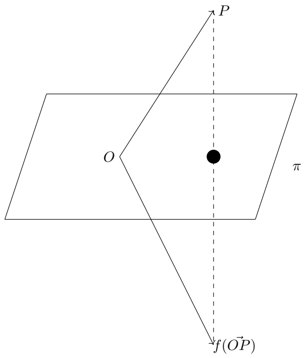


Figura 3.9: Riflessione rispetto a un piano passante per O

e la proiezione ortogonale su un piano passante per l'origine O:

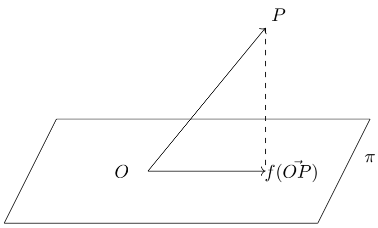


Figura 3.10: Proiezione ortogonale su un piano passante per l'origine O

3.2 Matrice associata a un'applicazione lineare

Una delle caratteristiche fondamentali di un'applicazione lineare $f : V \to W$ è che, se gli spazi V e W hanno dimensione finita, allora f può essere rappresentata da una matrice.
I Dettagli: sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, e siano $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ basi di V e W rispettivamente. Allora, ogni vettore $v \to V$ può essere identificato con un n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, quella delle sue coordinate rispetto alla base B_V, ovvero

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n), \tag{3.5}$$

e analogamente ogni vettore $w \in W$ può essere identificato con una m-upla $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, quella delle sue coordinate rispetto alla base B_W, ovvero

$$w = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_mw_m. \tag{3.6}$$

Con queste identificazioni, la f può essere pensata come una funzione $\mathbb{K}^n \to$ che associa a ogni n-uple una m-upla.

L'obbiettivo a questo punto, è quello di esplicitare la funzione, a tale scopo, sia $(x_1, \ldots, x_n)$ la n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$, ovvero come visto riportato prima, nella formula (3.5). Allora la sua immagine $f(v)$ sarà

$$f(v) = f(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = f(x_1v_1) + \cdots + f(x_nv_n) = x_1f(v_1) + \cdots + x_nf(v_n). \tag{3.7}$$

Ora, ciascuno dei vettori $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ che compare nella (3.7) appartiene al codominio W della funzione, e quindi potrà essere espresso come combinazione lineare dei vettori $w_1, \ldots, w_m$ della base B_W fissata per W:

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \tag{3.8}$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{nm}w_m \tag{3.9}$$

Ora, sostituendo queste espressioni nella (3.6) si ottiene

$$\begin{aligned} f(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m) = \\ = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m \end{aligned} \tag{3.10}$$

Questa uguaglianza sta dicendo che le coordinate del vettore $f(v)$ respetto alla base $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ sono date da $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$ e quindi che, tradotta in coordinate, la nostra applicazione lineare può essere identificata con la funzione $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ che associa a ogni n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ la m-upla formata dai coefficienti che appaiono nella (3.10), ovvero

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

I coefficienti che compaiono nella 3.11 formano una matrice con m righe e n colonne

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

la *matrice associata all'applicazione lineare rispetto alle basi* B_V e B_W. In base alle (3.10),...,(3.11) tale matrice può essere definita come *la matrice ha sulle colonne le coordinate dei vettori* $f(v_1), \ldots, f(v_n)$[2] *rispetto alla base* B_W *fissata nel codominio.* Si denota che $M_{B_wB_v}(f)$ la matrice associata a un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi B_V e B_W. Se dominio e codominio dell'applicazione coincidono, ovvero ha una funzione lineare $f : V \to V$ (tali applicazioni si dicono *endomorfismi*), allora è possibile fissare la stessa base B_V sia nel dominio che nel codominio, e calcolare la matrice associata $M_{B_wB_v}(f)$: in tal caso, per brevità la si denota semplicamente $M_{B_v}(f)$. In generale, data A, si richiamerà la *funzione determinante* A *la funzione definita dalla 3.11*, e la si denota come L_A.

La matrice associata a un'applicazione lineare dà tutte le informazioni necessarie sull'applicazione, e usando gli strumenti imparati nei capitoli precedenti (rango, determinante) sarà possibile denotare molte proprietà della funzione data. Ma prima di esplorare questo aspetto è giusto, fare un esempio di quello finora esposto.

[2]Ovvero le immagini dei vettori della base B_v fissato nel dominio

Esempio 3.2.1. Questo esempio sarà esposto per punti per un semplice fattore di comodità, quindi...

1. Sia $f : V_O^2 \to V_O^2$ la rotazione attorno a O di un angolo fissato θ, come già esposto nei paragrafi precedenti.
   Per calcolare la matrice associata, bisogna fissare una base B formata da due vettori $v_1 = \vec{OP_1}$ e $v_2 = \vec{OP_2}$ della stessa lunghezza e perpendicolari tra loro, come da figura e si determina la

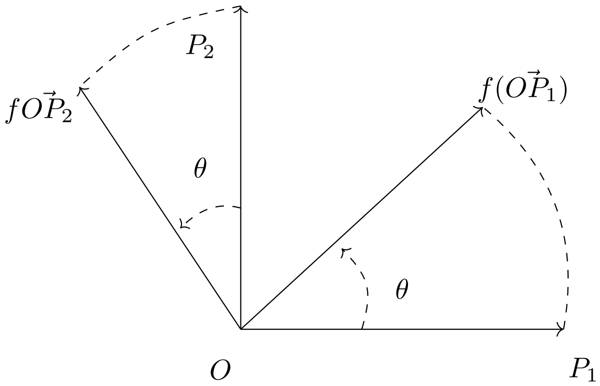


Figura 3.11: Base B formata da due vettori v_1 e v_2 formati da $\vec{OP}$

matrice $M_B(f)$.
A questo scopo, come afferma la definizione di matrice associata, bisogna trovare le coordinate di $f(v_1)$ e $f(v_2)$ rispetto a B, ovvero esprimere $f(\vec{OP_1})$ e $f(\vec{OP_2})$ come combinazone lineare $x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}$ dei vettori della base B. Partendo con $f(\vec{OP_1})$: come si vede dalla figura

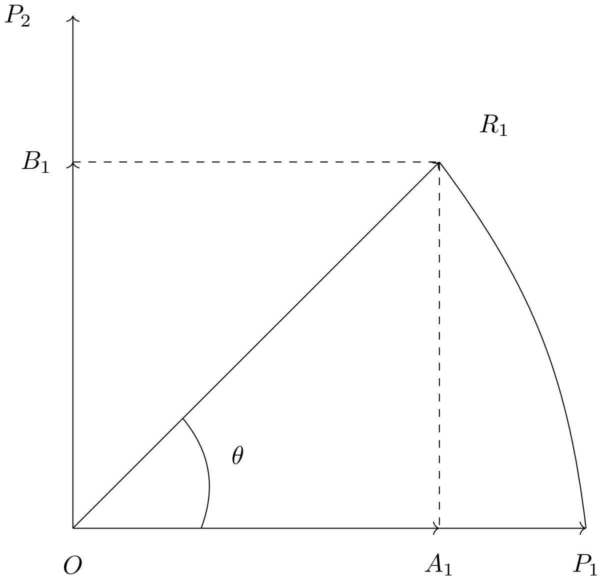


Figura 3.12: Sviluppo di $f(\vec{OP_1})$

si ha quindi $f\left(\vec{OP_1}\right) = \vec{OP_1} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1}$, essendo A_1 e B_1 le proiezioni ortogonali di R_1 sui vettori di base. Ora, chiaramente $\vec{OA_1} = x_1\vec{OP_1}$ e $\vec{OB_1} = x_2\vec{OP_2}$, dove x_1 è dato dal rapporto $\frac{|\vec{OA_1}|}{|\vec{OP_1}|}$ tra la lunghezza di $\vec{OA_1}$ e quella di $\vec{OP_2}$. Ma essendo la lunghezza di $\vec{OP_1}$ uguale alla lunghezza di $\vec{OR_1} = f(\vec{OP_1})$, è possibile affermare che x_1 è uguale al rapporto tra la lunghezza del cateto $\vec{OA_1}$ e quella dell'ipotenusa $\vec{OP_1}$ del triangolo rettangolo OR_1A_1, ovvero, $x_1 = \cos\theta$.
In modo analogo, poiché $\vec{OP_2}$ ha la stessa lunghezza di $\vec{OP_1}$ e quindi di $\vec{OR_1}$, ha la stessa lunghezza del segmento A_1R_1, si ha che

$$x_2 = \frac{|\vec{OB_1}|}{|\vec{OP_2}|} = \frac{|A_1R_1|}{|OR_1|},$$

ovvero, $x = \sin\theta$. Riassumento,

$$f(\vec{OP_1}) = \vec{OR_1} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = \cos\theta\vec{OP_1} + \sin\theta\vec{OP_2} \tag{3.12}$$

Per svolgere $f(\vec{OP_2})$, basterà fare l'analogo ragionamento

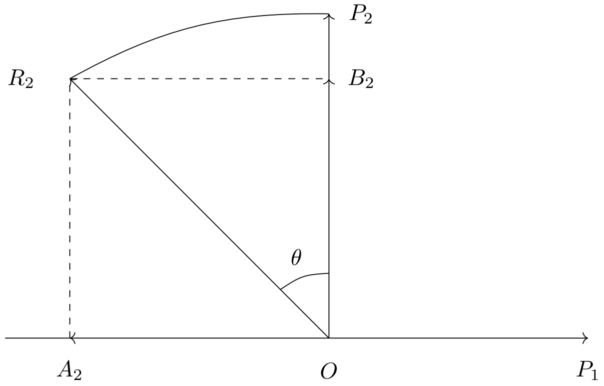


Figura 3.13: Sviluppo di $f(\vec{OP_2})$

si ha $f(\vec{OP_2}) = \vec{OP_2} = \vec{OA_2} + \vec{OB_2}$. chiaramente, $\vec{OA_2} = -x_1\vec{OP_1}$, dove x_1 è dato dal rapporto $\frac{|\vec{OA_2}|}{|\vec{OP_1}|}$ tra la lunghezza di $\vec{OA_2}$ e quella di $\vec{OP_1}$ e $\vec{OB_2} = x_2\vec{OP_2}$, dove x_2 è dato dal rapporto $\frac{|\vec{OB_2}|}{|\vec{OP_2}|}$ tra la lunghezza di $\vec{OB_2}$ e quindi $\vec{OR_2} = f(\vec{OP_2})$, mentre, la lunghezza di $\vec{OA_2}$ è uguale alla lunghezza del segmento R_2B_2, è possibile affermare che x_1 è uguale al rapporto tra la lunghezza del cateto R_2B_2 e quella dell'ipotenusa OR_2 del triangolo rettangolo OR_2B_2, ovvero, $x_2 = \cos\theta$.

Analogamente, poiché $\vec{OP_2}$ ha la stessa lunghezza di $\vec{OR_2}$, si ha che $x_2 = \frac{|\vec{OB_2}|}{|\vec{OP_2}|}$, che è il rapporto tra il cateto e l'ipotenusa del triangola rettangolo OB_2R_2, ovvero, $x_2 = \cos\theta$.

Riassumendo,

$$f(\vec{OP_1}) = \vec{OR_2} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = \sin\theta\vec{OP_1} + \cos\theta\vec{OP_2} \tag{3.13}$$

Quindi, (3.12) e (3.13) dicono che la matrice associata a f rispotto a B avrà sulla prima colonna $(\cos\theta, \sin\theta)$ e sulla seconda colonna $(-\sin\theta, \cos\theta)$, ovvero

$$M_B(f) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

In base a quanto visto nella (3.11), si ottiene allora che la rotazione, in cordinate, si traduce in funzione di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$(x_1, x_2) \to (\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2, \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2) \tag{3.15}$$

Ad esempio, scegliendo un angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e si sostituisce in (3.14) e (3.15), considerando che $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, si ottengono corrispettivamente;

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad e \quad (x_1, x_2) \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right) \tag{3.16}$$

Per illustrare come questa semplice funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresenti effettivamente la rotazione di $\frac{\pi}{4}$, è il caso di utilizzare un esempio, prendendo il vettore $v = v_1 + v_2$, che come si vede dalla figura seguente, coincide con la diagonale del quadrato che ha v_1 e v_2 come lati:

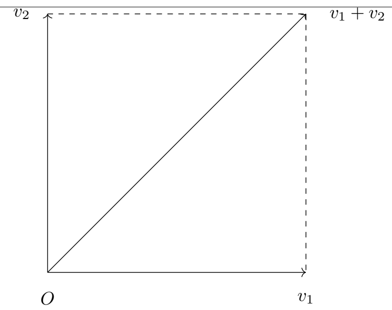


Figura 3.14: Quadrato composto da v_1 e v_2

Tale vettore ha quindi come coordinate rispettoa B la coppia $(x_1, x_2) = (1, 1)$. In base alla (3.16), le coordinate di $f(v)$ rispetto a B sono quindi date da

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1\right) = (0, \sqrt{2})$$

ovvero deve essere $f(v) = 0v_1 + \sqrt{2}v_2 = \vec{2}v_2$.

In effetti, tale risultato ottenuto analiticamente in coordinate è confermato dall'analisi grafica, che dice: il vettore $f(v)$ che si ottiene ruotando la sua lunghezza è proprio $\sqrt{2}$ volte la lunghezza di v_2:

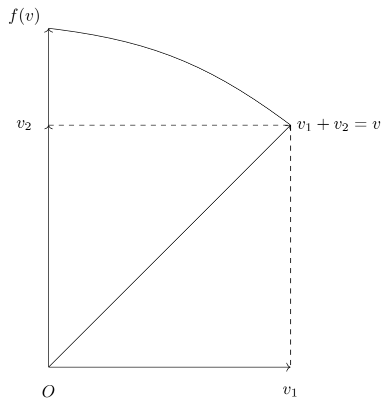


Figura 3.15: Quadrato composto da v_1 e v_2: analisi grafica

e con questo il primo punto è concluso.

2. Sia $V = V_O^2$ lo spazio vettoriale dei vettori applicati in un punto O nel piano e sia $V_O^2 \to V_O^2$ la proiezione ortogonale su una retta fissata r passante per O (in modo similare in quanto visto nella Figura 3.6).

   Per calcolarne la matrice associata $M_B(f)$, si fissa una base $B = \{v_1, v_2\}$ di V_O^2 come nella seguente figura

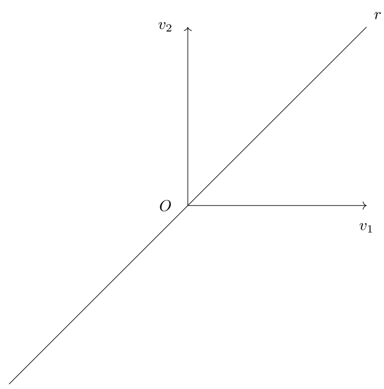


Figura 3.16: Calcolo della matrice associata $M_B(f)$ con $B = \{v_1, v_2\}$ di V_O^2

Poi, bisogna proiettare v_1 ortogonalmente su r, ottenendo un vettore v che sta sulla retta ed è lungo come metà dela diametro del quadrato in cui lati sono v_1 e v_2: essendo tale diagonale, per definizione di somma tra vettori, coincidente con $v_1 + v_2$, quindi si ha che $f(v_1) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$; analogamente, come si vede dalla figura, anche proiettando v_2 sulla retta si ottiene lo stesso vettore v, quindi si ha anche $f(v_2) = \frac{1}{2}(v_1+v_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

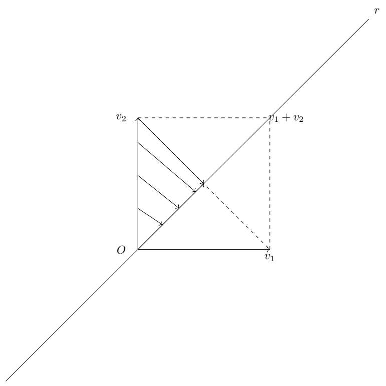


Figura 3.17: Proiezione v_1 e v_2 nella forma $v_1 + v_2$

Si vede quindi che le coordinate di $f(v_1)$ rispetto a B sono $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, e anche le coordiante di $f(v_2)$ rispetto a B sono $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: disponendo tali coordinate rispettivamente sulla prima e sulla seconda colonna, come previsto dalla definizione di matrice associata, si ottiene

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e la funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, corrisponde a

$$(x_1, x_2) \to \left(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right) \tag{3.17}$$

Quindi dà una rappresentazione in coordinate della proiezione.
Ad esempio, il vettore $v = -v_1 + v_2$, che ha coordinate $(-1, 1)$ rispetto a B, viene mandata in base alla (3.17) nel vettore di coordinate

$$\left(\tfrac{1}{2} \cdot (-1) + \tfrac{1}{2} \cdot 1, \tfrac{1}{2} \cdot (-1) + \tfrac{1}{2} \cdot 1\right) = (0, 0)$$

ovvero nel vettore nullo $\vec{OO}$. infatti, Come si vede nella figura seguente, tale vettore appartiene alla retta passante per O e ortogonale a r, e i vettori che giacciono su questa retta vengono chiaramente proiettati sul vettore nullo $\vec{OO}$.

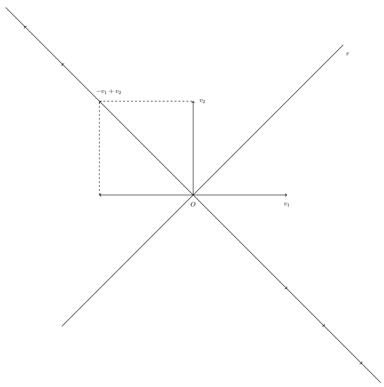


Figura 3.18: proiezione di $-v_1 + v_2$ e del vettore nullo $\vec{OO}$

3. Come ultimo esempio, si prende $f : V_O^2 \to V_O^2$ la riflessione rispetto a una retta fissata r passate per O, ovvero l'endomorfismo che associa ogni vettore $\vec{OP}$ il suo simmetrico rispetto a r.
   Per calcolarne la matrice associata $M_B(f)$, considerando la stessa base $B = \{v_1, v_2\}$ usata nell'esempio precedente

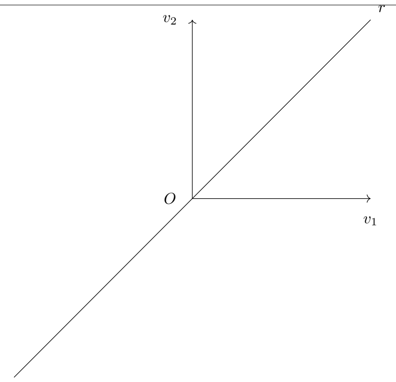


Figura 3.19: Calcolo della matrice associata $M_B(f)$ con $B = \{v_1, v_2\}$ di V_O^2

e si nota che quando si riflette v_1 rispetto a r ottenendo v_2, ovvero $f(v_1) = v_2$, e analogamente quando si riflette v_2 rispetto a r, ottenendo v_1, ovvero $f(v_2) = v_1$.
Quindi, riscrivendo $f(v_1) = v_2$ come $f(v_1) = 0v_1 + 1v_2$ si vede che le coordinate di $f(v_2)$ rispetto a B sono $(1, 0)$: disponendo tali coordinate in colonna, come previsto dalla definizione di matrice associata, si ottiene

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se, dato sempre lo stesso endomorfismo, consideriando invece la base $B' = \{v_1', v_2'\}$ come da figura

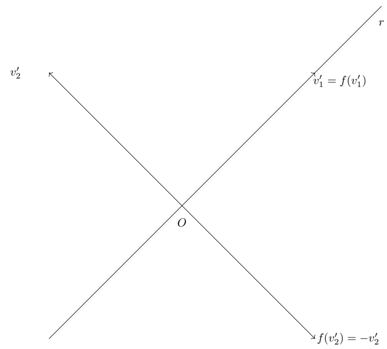


Figura 3.20: Esempio di endomosfismo con $B' = \{v_1', v_2'\}$

allora si ha che $f(v_1') = v_1'$ e $f(v_2') = -v_2'$, cioè $f(v_1') = 1v_1' + 0v_2'$ e $f(v_2) = 0v_1' + (-1)v_2'$ e quindi

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo esempio illustra il fatto oovvio che la matrice associata dipende dalla scelta delle basi.

3.3 Iniettività e suriettività di applicazioni lineari

Il primo problema che verrà affrontato sulle applicazionio lineari è determinare quanto una tale funzione è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

3.3.1 Richiemi generali

Ricordando che una funzione $f : A \to B$ tra due insiemi A e B si dice *suriettiva* se ogni elemento del codominio B risulta essere immagine di qualche elemento di A, ovvero, se per ogni $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Ad esempio, delle funzioni rappresentate nel seguente disegno, la prima non è suriettiva, la seconda invece sì.

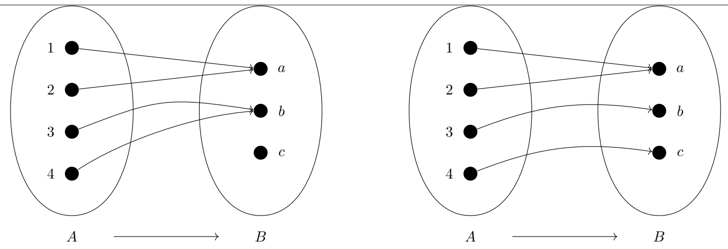


Figura 3.21: esempio di surietività

Un modo alternativo di dire che una funzione è suriettiva, è proprio quello di fare riferimento alla cosiddetta *immagine* $I_m(f)$ di f: per definizione, l'immagine di una funzione $f : A \to B$ è il sotoinsieme di B costituito da tutti gli elementi che sono immagine di qualche elemento di A[3], ovvero

$$I_m(f) = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\}$$

Ad esempio, la funzione a sinistra nella figura precedente ha $I_m(f) = \{a, b\}$, mentre la funzione a destra $I_m(f) = \{a, b, c\}$: una funzione è suriettiva esattamente quando $I_m(f) = B$, ovvero l'immagine coincide con tutto il codominio[4].

Una funzione $f : A \to B$ si dice invece *iniettiva* se non succede che due elementi diversi di A abbiano la stessa immagine[5]. Ad esempio, delle funzioni rappresentate nella seguente figura, la prima non è iniettiva[6], la seconda sì.

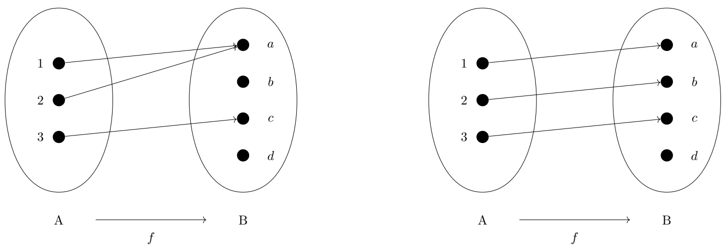


Figura 3.22: esempio di iniettività

La nozione di iniettività può essere riformulata tramite il concetto di *controimmagine*: dato un elemento b del codominio B, la sua controimmagine, denotata $f^{-1}(b)$, è l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno b come immagne, ovvero

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Dal momento che una funzione è iniettiva quando non esistono due elementi diversi che la stessa immagine, dire che tutte le controimmagine che non siano vuote[7] hanno un solo elemento.

Ad esempio per la funzione nella figura precedente si ha $f^{-1}(a) = \{1, 2\}, f^{-1}(d) = \varnothing, f^{-1}(c) = \{3\}$: essa non è iniettiva in quanto la controimmagine di a ha due elementi. Per la funzione a destra, invece, si ha $f^{-1}(a) = \{1\}, f^{-1}(b) = \{2\}, f^{-1}(c) = \{3\}, f^{-1}(d) = \varnothing$: essa è iniettiva in quanto le controimmagini non vuote hanno tutte un solo elemento. Infine, una funzione si dice invece *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva. Ad esempio, la funzione rappresentata nella seguente figura è biiettiva.

[3]In riferimento alle figure, quegli elemnti (raggiunti da una freccia che proviene da A'')

[4]dire $I_m(f) = B$ significa effetti dire che ogni elemento di B è immagine di elemento di A

[5]in formula, f è iniettiva se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_1)$ o equivalentemente $a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_1)$

[6]in quanto nonostante $1 \neq 2$ si ha $f(1) = f(2) = a$

[7]se la funzione non è suriettiva, ci saranno elementi $b \in B$ tali che non esiste nessun $a \in A$ con $f(a) = b$, e quindi la cui controimmagine $f^{-1}(b)$ non ha elementi.

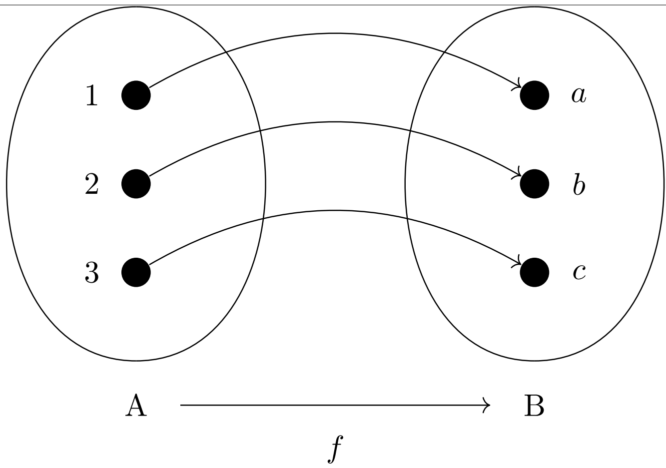


Figura 3.23: caso di biiettività

3.3.2 Suriettività di applicazioni lineari

avendo detto che una funzione $f : A \to B$ è suriettiva se e solo se per ogni elemento $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$, ovvero equivalentemente se e solo se la sua immagine $I_m(f)$ coincide con tutto il codominio. Quindi, per capire se un'applicazione è suriettiva, bisogna determinare l'insieme $I_m(f)$.
Nel csaso di un'applicazione lineare $f : V \to W$, vale la seguente importante

Proposizione 3.3.1. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $I_m(f)$ è un sottospazio vettoriale di W.*

Dimostrazione. Bisogna verificare che $I_m(f)$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari. Per la prima proprietà bisogni prevedere $w, w' \in I_m(f)$ e vedere se $w+w' \in I_m(f)$, per definizione di $I_m(f)$ e vedere se $w, w' \in I_m(f)$. Ora, se $w, w' \in I_m(f)$, per definizione di $I_m(f)$ significa che esistono un vettore $v \in V$ tale che $w = f(v)$ e un vettore $v' \in V$ tale $w' = f(v')$. Ma allora, sfruttando il fatto che f è lineare, si ha

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v')$$

che afferma, anche che $w + w'$ è immagine un elemento del dominio (cioè $v + v'$) e quindi $w + w' \in I_m(f)$. Per la chiusura rispetto al prodotto per scalari, bisogna verificare che se $w \in I_m(f)$ $c \in \mathbb{K}$, allora $cw \in I_m(f)$. Ma, come prima, se $w \in I_m(f)$ allora per definizione di $I_m(f)$ esiste un vettore $w = f(v)$, e quindi, usando sempre il fatto che f e lineare,

$$cw = cf(v) = f(cv)$$

che ci dice anche cw è immagine di un elemento del dominio (cioè cv) e quindi $cw \in I_m(f)$. □

Il fatto che $I_m(f)$ sia un sottospazio vettoriale ci dice che per dterminarla è possibile trovare un sistema di generatori o una base. Questo si fa facilmente grazie alla seguente

Proposizione 3.3.2. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e siano $v_1, \dots, v_n$ generatori di V. Allora le immagini $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $I_m(f)$*[8]

Dimostrazione. Per definizione di generatori, bisogna verificare che ogni vettore $w \in I_m(f)$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$. Si sa che un vettore $w \in I_m(f)$ è tale che $w = f(v)$ per qualche vettore $v \in V$. Ma essendo per ipotesi $v_1, \dots, v_n$ generatori di V, il vettore v potrà essere scritto come loro combinazione lineare $v = x_1v_2 + \cdots + x_nv_n$. Quindi, sfruttando la linearità di f si ha

$$w = f(v) = f(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + \cdot + x_nf(v_n)$$

che dimostra proprio che w si scrive come combinazione lineare di $f(v_1), \dots, f(v_n)$. □

[8] in simboli, $I_m(f) = (f(v_1), \dots, f(v_n))$

A questo punto, per definire se un'applicazione lineare $f : V \to W$ è suriettiva, basta scegliere dei generatori $v_1, \ldots, v_n$ di V, prendere le loro immagini $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ che, formano un insieme di generatori di $I_m(f)$, e poi estrarre da quest'ultima insieme una base eliminando gli eventuali vettori che sono dipendenti dai rimanenti: contando i vettori della base ottenuta, si saprà la dimensione di $I_m(f)$ e quindi f sarà se e solo se[9] $\dim(I_m(f)) = \dim(W)$.
È il caso di vedere come tale criterio di suriettività si rivela particolarmente utile e di semplice applicazione nel caso dell'applicazione nel caso dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ determinata da un matrice A, ovvero della forma data dalla (3.11). Ora, se come generatore del dominio $V = \mathbb{K}^n$ si scelgono i vettori della base canonica $v_1 = (1, 0, \ldots, 0), v_2 = (0, 1, \ldots, 0), v_n = (0, 0, \ldots, 1)$, dalla (3.11) si ha

$$f(v_1) = L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, f(v_2) = L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, f(v_n) = L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

cioè $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ sono le colonne $C_1, C_2, \ldots, C_n$ della matrice A che determina l'applicazione. Quindi, in base alla Proposizione 3.3.2, si ha $I_m(f) = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ e la funzione è suriettiva se e solo se $\dim(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \dim(\mathbb{K}^m) = m$. Ma poiché la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di una matrice è per definizione il suo rango, è possibile concludere che *un'applicazione del tipo (3.11) è suriettiva se e solo se il rango di A uguale a m.*

3.3.3 Iniettività di applicazioni lineari

Mentre, nel caso della suriettività si è visto che per verificare se una funzione f è suriettiva basta controllare un solo sottoinsieme del codominio[10], in generale per verificare se f e iniettiva bisogna controllare tutte le controimmagini degli elementi del codominio e verificare che queste, quando non sono vuote, hanno un solo elemento.
Ora, per una generica funzione $f : A \to B$ le controimmagine degli elementi di B sono sottoinsimi del tutto indipendenti tra loro: come nella seguente figura

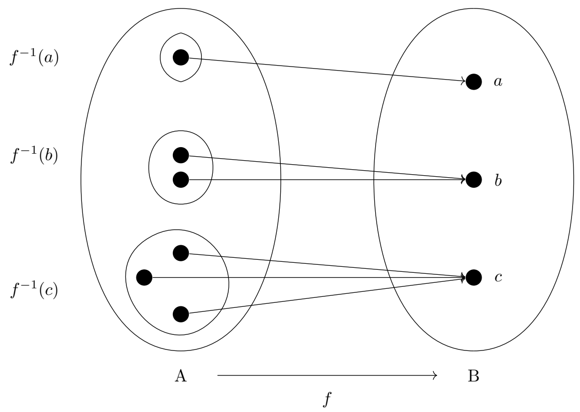


Figura 3.24: Iniettiità di applicazioni lineari

può accadere che un elemento abbia controimmagine costituita da un solo elemento ma altri abbiano controimmagine costituita da più elementi.
Mentre, le applicazione linari hanno il particolare comportamento per cui le controimmagini degli elementi di B, se non solo vuote, o sono *tutte* costituite da un solo elemento o hanno *tutti* più di un elemento: quindi basta controllare una sola controimmagine non vuota come sono fatte tutte le altre. Più precisamente si ha la sequente

Proposizione 3.3.3. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *la controimmagine $f^{-1}(\bar{0}) = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$ del vettore nullo di W è un sottospazio vettoriale di un sottospazio vettoriale V (detto nucleo di f e denotato $N(f)$)*
2. *per ogni $w_0 \in W$, la controimmagine $f^{-1}(w_0)$, se non è vuota, è sottospazio affine di V, e più precisamente*

$$f^{-1}(w_0) = v_0 N(f) = \{v_0 + n \mid n \in N(f)\}$$

[9] Questa affermazione è giustificata dal fatto, che non è stato possibile dimostrare, che se S è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V, allora $\dim(V)$ e le dimensioni ccoincidono se e solo se $S = V$.
[10] l'immagine $I_m(f)$

dove v_0 è un qualunque elemento fissato di $f^{-1}(w_0)$.

Dimostrazione. Per dimostrare il primo punto, bisogna osservare che il nucleo di f non è mai vuoto, in quanto il vettore nullo di V è sicuramente tale che $f(\bar{0}) = \bar{0}$: infatti, è possibile concepire il vettore nullo $\bar{0}$ di V come $0v$ e quindi, sfruttando la linearità di f, si ha $f(\bar{0}) = f(0v) = 0f(v) = \bar{0}$.
È il momento di dimostrare $N(f)$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari. Siano v, v' due vettori di $N(f)$, cioè $f(v) = \bar{0}$ e $f(v') = \bar{0}$. Allora, essendo f lineare,

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

e quindi anche $v + v' \in N(f)$: questo si dice che $N(f)$ è chiuso rispetto alla somma. Dati invece un vettore v del nucleo[11] e uno scalare $c \in \mathbb{K}$, allora, sempre per la linearità di f,

$$f(cv) = cf(v) = c\bar{0} = \bar{0}$$

ovvero $cv \in N(f)$: questo dice che $N(f)$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Con questo il punto 1 è stato dimostrato.
Per dimostrare il secondo punto, ovvero l'uguaglianza $v_0 + N(f) = f^{-1}(w_0)$, bisogna dimostrare che ogni elemento di $v_0 + N(f)$ sta nella controimmagine $f^{-1}(w_0)$ di w_0 (ovvero $v_0 + N \subseteq f^{-1}(w_0)$), e viceversa che ogni elemento di $f^{-1}(w_0)$ appartiene a $v_0 + N(f)$[12].
Per dimostrare la prima inclusione, considerando il generico elemento di $v_0 + N(f)$, cioè, per definizione di sottospazio affine, un vettore v del tipo $v = v_0 + n$, con $n \in N(f)$. Allora

$$f(v) = f(v_0 + n) = f(v_0) + f(n) = f(v_0) + \bar{0} = f(v_0) = w_0$$

Avendo quindi dimostrato che $f(v) = w_0$, cioè v appartiene alla controimmagine $f^{-1}(w_0)$ di w_0.
Per dimostrare la seconda inclusione, considerando un qualunque elemento v della controimmagine di w_0, cioè $f(v) = w_0$. Essendo $w_0 = f(v_0)$, si ha quindi $f(v) = f(v_0)$, da cui, portando a prima membro, $f(v) - f(v_0) = \bar{0}$. Essendo f lineare, quest'ultima uguaglianza può essere riscritta come $f(v - v_0) = \bar{0}$, il che dice che il vettore $v - v_0$ appartiene al nucleo $N(f)$ di f. Ma allora, osservando che chiaramente $v = v_0 + (v - v_0)$, vedendo che v si decompone proprio come somma di v_0 e di un elemento del nucleo $N(f)$, cioè $v \in v_0 + N(f)$. □

La proposizione appena dimostrata afferma in pratica che tutte le controimmagini non vuote di un'applicazione lineare f sono "copie" o traslati del nucleo $N(f)$: per illustrare ciò, si consideri ad esempio lo spazio V_o^2 dei vettori nel piano applicati in O e l'applicazione lineare $f : V_o^2 \to V_o^2$ data dalla proiezione su una retta r fissata.
Come si vede, un vettore viene proiettato sul vettore nullo $\vec{OO}$[13] se e solo se appartiene alla retta passante per O e ortogonale a r, come i vettori $\vec{OP}, \vec{OQ}$ della seguente figura Ma, i vettori che

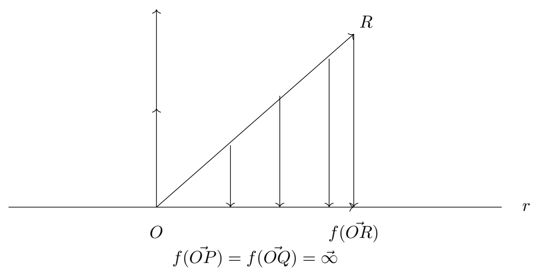


Figura 3.25: Proiezione sul vettore nullo $\vec{OO}$ mediante retta O

stanno su una retta per O formano un sottospazo vettoriale: questo conferma che il nucleo $N(f)$ è un sottospazio vettoriale.
Per verificare che le controimmagini non vuote sono copie o traslat del nucleo, considerando come nella figura seguente

[11] quindi $f(v) = \bar{0}$
[12] ovvero l'inclusione opposta $f^{-1}(w_0) \subseteq v_0 + N(f)$
[13] cioè appartiene al nucleo $N(f)$ della funzione

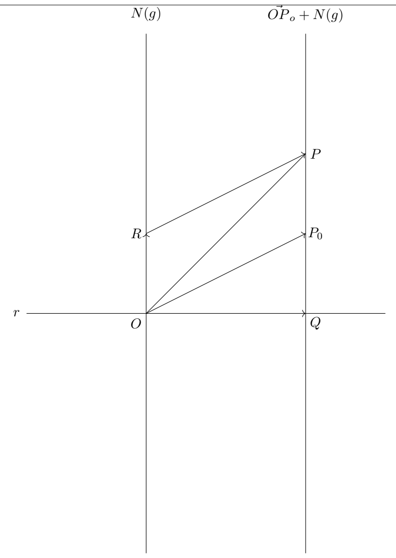


Figura 3.26: Immagine f con $\vec{OQ}, \vec{OR}, \vec{OP}$ e $\vec{OP}_0$

un qualunque vettore $\vec{OQ}$ che stia nell'immagine di f, definendo $\vec{OQ} = f(\vec{OP}_0)$: la sua controimagine, oltre che da $\vec{OP}_0$, è data da tutti i vettori $\vec{OP}$ che vengono proiettati su $\vec{OQ}$, cioè, come si vede nella figura, tutti i vettori che hanno secondo estremo sulla retta ortogonale a r e passante per Q.
Ognuno di tali vettori $\vec{OP}$ si decompone come somma di $\vec{OP}_0$ più un vettore $\vec{OR}$ appartenente al nucleo $N(f)$: quindi, come previsto dalla Proposizione 3.3.3, la controimmagine $f^{-1}(\vec{OP})$ è data dal sottospazio affine $\vec{OP}_0 + N(f)$, traslato della retta ortognonale a r e passante per O che rappresenta il nucleo. La Proposizione 3.3.3 ha come immediato corollario il seguente criterio necessario e sufficiente di iniettività per un'applicazione lineare:
Corollario 3.4. *Un'applicazione lineare* $f : V \to W$ *è iniettiva se e solo se* $N(f) = \{\bar{0}\}$.

Dimostrazione. Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se la controimmagine di ogni elemento $w_0 \in W$, se non è vuota[14], contiene un solo elemento. Ma poiché, come visto nella proposizione, la controimmagine di ogni elemento w_0 dell'immagine è del tipo $v_0 + N(f)$, allora questa conterrà un solo elemento v_0 esattamente quando il nucleo contiene il solo vettore nullo $\bar{0}$, cioè $N(f) = \{\bar{0}\}$. □

Si noti che il nucleo sia un sottospazio vettoriale dice che si può parlare di base e dimensione del nucleo, e che si possono riformulare il criterio di iniettività per un'applicazione lineare f come segue: f *è iniettiva se e solo se* $\dim(N(f)) = 0$[15].
Riassumendo quanto visto finora, come dimostrato per veriricare l'iniettività di un'applicazione lineare f si deve guardare la dimostrazione $\dim(N(f))$ del nucleo $N(f)$ di f, mentre per verificare la suiriettività di f si deve guardare la dimensione $\dim(I_m(f))$ dell'immagine $I_m(f)$ di f.
Una cosa che appare lampante è che in realtà sarà sufficiente calcolare una sola di queste dimensioni per determinare automaticamente anche l'altra. Infatti, queste dimensioni sono collegate dalla formula del sequente risultato, dove anche *teorema della dimensione* o *teorema nullità più rango.*
Teorema 3.4.1. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con $\dim(V)$ finita. Allora

$$\dim(N(f)) + \dim(I_m(f)) = \dim(V). \tag{3.18}$$

Dimostrazione. Supponendo che $\dim(N(f)) = s$ e sia $v_1, \ldots, v_s$ una base $N(f)$. Se $\dim(V) = n$, allora si può[16] aggiungere alla base del nucleo $n - s$ vettore $v_{s+1}, \ldots, v_n$ in modo che $\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ sia una base di V.
Ora, dimostrando che le immagini $f(v_{s+1}), \ldots, f(v_n)$ di questi ultimi $n - s$ vettori formano una base di $I_m(f)$:

Questo implicherà che $\dim(I_m(f) = n - s$, che assieme a $\dim(N(f)) = s$ e $\dim(V) = n$ dà $\dim(N(f)) + \dim(I_m(f)) = s + (n - s) + \dim(V)$, cioè la formula.

[14] cosa che succede se w_0 non sta nell'immagine dell'applicazione
[15] infatti, un sottospazio ha dimensione 0 se e solo se è $\{\bar{0}\}$
[16] Il fatto che data una base di un sottospazio, questa possa sempre essere completata a una base di tutto lo spazio aggiungendo dei vettori è in effetti un teorema detto *teorema del completamento*.

Per dimostrare che $\{f(v_{s+1}, \dots, f(v_n)\}$ è una base di $I_m(f)$, bisogna dimostrare che i vettori generano I e sono linearmente indipendenti. In effetti, sapendo che essendo $v_1, \dots, v_s, v_{s+1} \dots, v_n$ una base e quindi un insieme di generatori di V, le immagini $f(v_1), \dots, f(v_s), f(v_s+1), \dots, f(v_n)$ generatori $I_m(f)$; ma in questi generatori $f(v_1), \dots, f(v_s)$ sono uguali al vettore nullo $\bar{0}$, in quanto $v_1, \dots, v_s$ sono i vettori della base del nucleo fissata inzialmente. Quindi possono essere eliminati della lista $f(v_1), \dots, f(v_s), f(v_s+1), \dots, f(v_n)$ dei generatori, concludendo che per generare $I_m(f)$ bastano $f(v_s+1), \dots, f(v_n)$.
Ora dimostrando che $f(v_s+1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti. Bisogna dimostrare che se $c_{s+1}f(v_{s+1}) + \dots + c_n f(v_n) = \bar{0}$ allora $c_{s+1} = 0, \dots, c_n = 0$.
In effetti, sfruttando il fatto che f è lineare è possibile riscrivere l'uguaglianza $c_{s+1}f(v_{s+1}) + \dots + c_n f(v_n) = \bar{0}$ come $f(c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_n v_n) = \bar{0}$: ma questa uguaglianza dice che il vettore $c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_n v_n$ appartiene il nucleo $N(f)$, e quindi esso può esso può essere scritto come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_s$[17]:

$$c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_n v_n = c_1 v_1 + \dots + c_s v_s.$$

Portando tutto a primo membro in questa uguaglianza si ottiene

$$c_{s+1}v_{s+1} + \dots + c_n v_n - c_1 v_1 - \dots - c_s v_s = \bar{0}$$

ovvero una combinazione lineare uguale al vettore nullo dei vettori $v_1, \dots, v_s, v_{s+1} \dots, v_n$: essendo questi vettori indipendenti[18] necessariamente tutti i coefficianti $c_1, \dots, c_s, c_{s+1}, \dots, c_n$ sono uguali a zero, e in particolare $c_{s+1} = 0, \dots, c_n = 0$, che è quello che restava da dimostrare. □

Vedendo ora alcune notevoli conseguenze della formula (3.18):
Corollario 3.5. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con* $\dim(V)$ *finita. Allora valgono le tre seguenti*

(i) se $\dim(V) > \dim(W)$ *allora f non è iniettiva;*
(ii) se $\dim(V) < \dim(W)$ *allora f non è suriettiva;*
(iii) se $\dim(V) = \dim(W)$ *allora f è iniettiva se e solo se è suriettiva (`caso di biiettività`)*

Dimostrazione. Quei di seguito verrano dimostrati i tre punti definiti nel Corollario 3.5:

(i) Per assurdo, se la funzioni f fosse iniettiva, il suo nucleo, come visto nel Corollario, sasrebbe nullo, ovvero $\dim(N(f)) = 0$. Sostituendo questo nella formula (3.18), si avrà $\dim(V) = \dim(I_m(f))$. Ma essendo $I_m(f)$ un sottospazio di W, la sua dimensione è sicuramente minore o uguale a $\dim(W)$, contro l'ipotesi che $\dim(V) > \dim(W)$. Quindi f non può essere iniettiva.
(ii) Supponendo per assurdo che la funzione f sia suriettiva: allora, essendo $I_m(f) = W$, si avrà $\dim(I_m(f)) = \dim(W)$ che, sostituita nella formula (3.18), dà $\dim(V) = \dim(W) + \dim(N(f))$. Poiché $\dim(N(f))$ è un numero reale positivo o nullo, questa uguaglianza implica che $\dim(V) \leq \dim(W)$, contro l'ipotesi che $\dim(V) < \dim(W)$. Quindi f non può essere suiettiva.
(iii) Viceversa, se f è suriettiva, $\dim(V) = \dim(W)$ e quindi la formula (3.18) si riduce a $\dim(V) = \dim(N(f)) + \dim(W)$. Essendo per ipotesi la dimensione di V uguagle a quella di W, il primo membro $\dim(V)$ si semplifica con l'addendo $\dim(W)$ del secondo membro, e quindi rimane $= \dim(N(f))$, che implica che f è iniettiva.

□

Ad esempio, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non può mai essere iniettiva (ma può essere suriettiva); un'applicazionelineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ non è sicuramente suriettiva (ma può essere iniettiva); un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o è contemporaneamente iniettiva e suriettiva o nessuna della due: basta mostrare che vale una delle due proprietà e automaticamente varrà anche l'altra.
Ora, supponendo di aver determinato grazie ai risultati precedenti che un'applicazione lineare f data è biiettiva.

[17] che del nucleo costituiscono una base
[18] sono i vettori che formano la base completa di V

3.6 Composizione di applicazioni, inversa e prodotto di matrici

Ricordiamo che, data una funzione $f : X \to Y$ tra due insiemi, questa si dice *invertibile* se esiste una funzione $g : Y \to X$ (detta appunto l'inversa di f) tale che

$$f \circ g = id_y, \ g \circ f = id_x \tag{3.19}$$

e si denota che con id la funzione che manda ogni elemento in se stesso[19] e con il simbolo $\circ$ la composizione di funzioni, ovvero l'operazione che consiste nell'applicare prima una fuzione e poi l'altra: più precisamente, ricordiando che ogni volta che si hanno due funzioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, tali che *il codominio della prima coincida con il della seconda,* allora, per ogni elemento che Y è anche, per ogni elemento $x \in X$, si può applicare prima f ottenendo $f(x) \in Y$, e poi dal momento che Y è anche il dominio della g si può applicare la g a $f(x)$. In questo modo si ottiene una nuova funzione che associa a ogni elemento di X un elemento di Z:

$$\underset{x \to g(f(x))}{f : X \to Z}$$

Quindi, le (3.20) significano che una funzione $f : X \to Y$ è invertibile se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale $g(f(x)) = x \ x \in X$ e $f(g(y)) = y$ per ogni $y \in Y$.
Ora, si può vedere che le uniche funzioni di f invertibili sono quelle biiettive. Ad esempio, considerando $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ e la funzione $f : X \to Y$ biiettiva, che ha come inversa la funzione $g : Y \in X$ rappresentata nella figura:

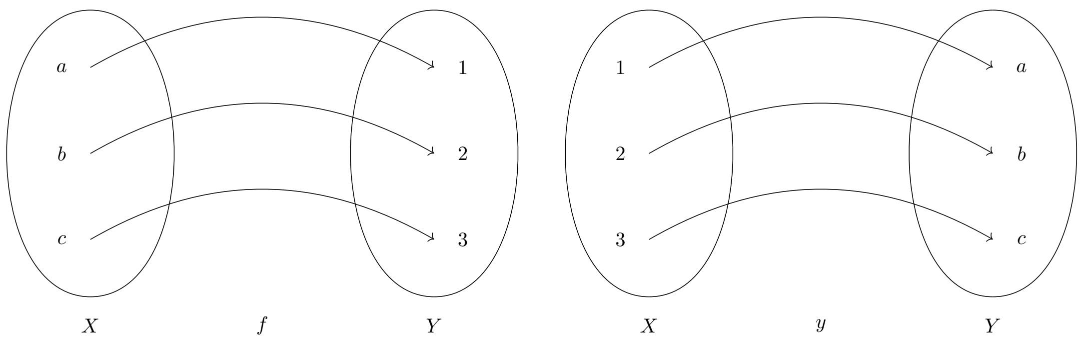


Figura 3.27: Funzione f inversa di $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b, c\}$

Infatti, come si vede fin da subito, si ha

$$\begin{gathered}(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 1 \\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 2 \\ (g \circ f(3) = g(f(3)) = g(c) = 3\end{gathered}$$

ovvero $g \circ f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ è la funzione che manda ogni elemento dell'insieme $X = \{1, 2, 3\}$ in se stesso (ovvero la funzione identica id_X di X) e analogamente

$$\begin{gathered}(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = a \\ (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = b \\ (g \circ f(c) = g(f(c)) = g(3) = c\end{gathered}$$

ovvero $g \circ f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ è la funzione che manda ogni elemento dell'insieme $Y = \{a, b, c\}$ in se stesso (cioè la funzione identica id_Y). Per giusticare l'affermazione che le funzioni biiettiva sono *le sole* a essere invertibili, considerando ad esempio la funzione f rappresentata nella seguente figura, che è iniettiva ma non suriettiva

[19] Più precisamente, id_x è la funzione $X \to X$ che manda ogni elemento di x in se stesso e id_y denota la funzione $Y \to Y$ che manda ogni elemento di Y in se stesso.

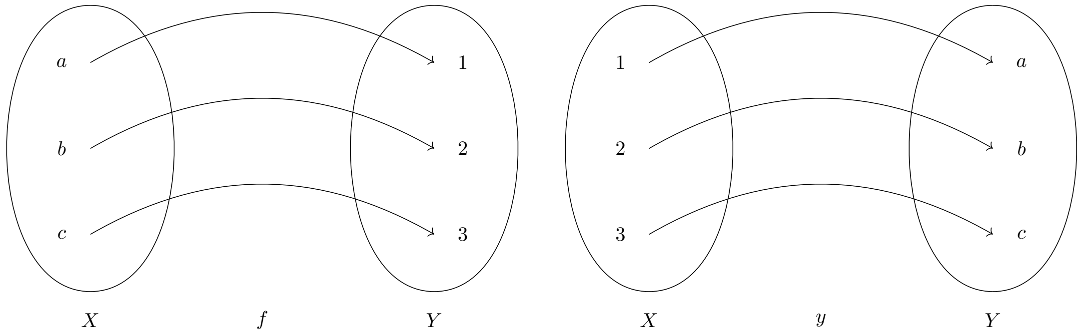


Figura 3.28: Funzione f non invertibile di $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b, c, d\}$

Si vede subito che $g \circ f$ è una funzione identica di $\{1, 2, 3\}$, ma $f \circ g$ non è una funzione identica di $\{a, b, c, d\}$ in quanto pur avendo

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 1$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 2$$
$$(g \circ f(3) = g(f(3)) = g(c) = 3$$

non si ha, invece,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = a$$
$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = b$$
$$(g \circ f(c) = g(f(c)) = g(3) = c$$

Come si evince, dalla Figura 3.28, è presente un equivalenza in più che rimanda ad un elemento già puntato del gruppo X, $f(g(d)) = f(1) = a$ ovvero $f \circ g$ non manda d in se stesso.

Si osservi che non c'è alcun modo di modificare g in modo che $f \circ g$ mandi ogni elemento di $\{a, b, c, d\}$ in se stesso: qualunque valore venga assegnato a d non sarà mai $f(g(d)) = d$, perché $g(d)$ dovrebbe essere un elemento mandato da f di d, ma non esiste nssun elemento di $\{1, 2, 3\}$ che viene mandato da f in d.
Espresso in altri termini, il modo per cui l'uguaglianza $f \circ g = id$ non può mai essere verificata è la non surietività d f. Si dice che f ha un'*inversa sinistra*[20] ma non ammette un'*inversa destra* (cioè la $f \circ g = id$ non può valere per nessuna g). Analogamente, si prendano $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ e $g : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ definite come dalla figura seguente

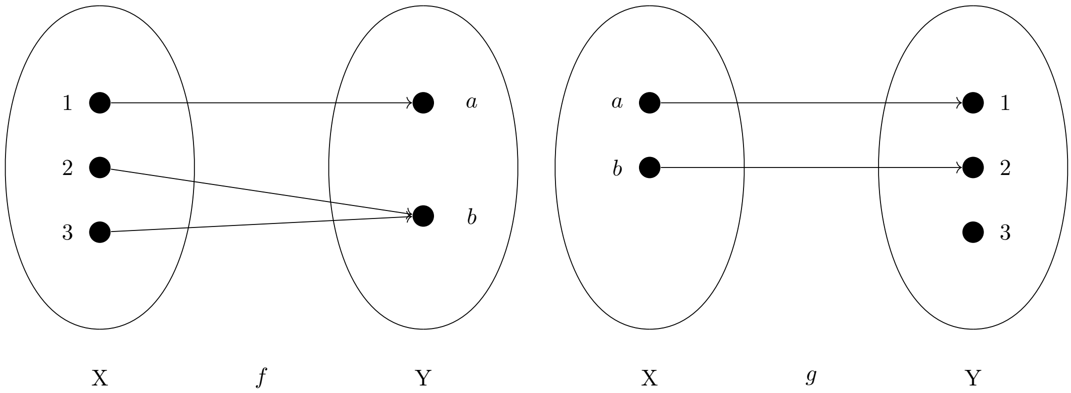


Figura 3.29: Funzione f non invertibile di $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b\}$

Anllora, si vede fin da subito che $f \circ g$ è una funzione identica di $\{a, b\}$, ma $g \circ f$ non è la funzione identica di $\{1, 2, 3\}$ in quanto pur essendo $g(f(1)) = g(a) = 1$ e $g(f(2)) = g(b) = 2$, si ha oltre tutto un $g(f(b)) = g(b) = 2$, ovvero $g \circ f$ non manda 3 in se stesso.
Si osservi che anche qui non c'è alcun modo di modificare g: se si avesse posto $g(b) = 23$ si otterrebbe $g(f(3)) = g(b) = 3$ ma stavolta sarebbe stato $g(f(2)) = g(b) = 3$ saranno uguali e non potranno mai essere il primo 2 e il secondo 3. In altri termini, il motivo per cui non esiste un'inversa sinistra di f è dovuto alla non iniettività di f: la f ha un'inversa sinistra.
Esempio 3.6.1. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$, non essendo nè iniettiva[21] nè suiettiva[22] non ha né inversa sinistra né inversa a destra. In efetti, la candidata ad essere inversa

[20] cioè $g \circ f = id$ è verificato
[21] due numeri uno l'opposto dell'altro hanno lo stesso quadrato
[22] i numeri negativi non sono quadrati di nessun numero reale

di f, la radice quadrata $g(x) = \sqrt{x}$, da una parte non soddisfatta $g(f(x)) = x$ se x è negativa perché in tal caso $g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, e $|x| \neq x$ se essa è negativa ($|-2| = +2 \neq -2$); dall'stra parte $f(g(y)) = y$ non ha senso se y è negativo in quanto in tal caso $g(y) = \sqrt{y}$ non è neanche un numero reale. Per eliminare i due problemi (e rendere g l'inversa di f) bisogna togliere i numeri negativi sia dal dominio che dal codominio di f, ovvero restringerla a una funzione $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dove $\mathbb{R}_{\geq 0}$ denota l'insieme dei numeri non negativi: ma così facendo in effetti si fa proprio in modo che diventi una funzione biiettiva[23].

Ora, come spiegato sopra, si pone il problema di calcolare, se esiste, l'inversa di un applicazione lineare data. Prima di fare ciò, dal momento che l'inversa è definita tramite la composizione, bisogna vedere cosa succede quando si compongono due applicazioni lineari. In particolare, poiché ogni applicazione lineare può essere sempre tradotta in una formuala della tipologia (3.11), e adesso sarà possibile osservare cosa succede quando si compongono due applicazioni di questo tipo. Più nello specifico:

$$\begin{array}{c} V \to W \\ \dim(V) = n \\ \dim(W) = m \\ L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \end{array} \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Quindi dopo aver adattato la formula (3.11) alla $f = L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, bisogna adattarla alla $g = L_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$

$$\begin{array}{c} Z \to V \\ \dim(Z) = P \\ L_B = \mathbb{K}^P \to \mathbb{K}^n \end{array} \quad g\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ b_{21}y_2 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Quindi, in sostanza, è possibile dire che:

$$\begin{array}{rcl} f \circ g : & \mathbb{K}^P \xrightarrow{g} \mathbb{K}^n \xrightarrow{f} \mathbb{K}^m & A \text{ matrice } m \times n \text{ associata ad } f \\ & y \to g(y) \to f(g(y)) & B \text{ matrice } n \times p \text{ associata ad } g \\ & & AB \text{ matrice } m \times p \text{ associata ad } f \circ g \end{array}$$

In base a quanto appena visto, la composizione $f \circ g$ può essere calcolata in quanto il codominio di g, ovvero $\mathbb{K}^n$, è anche il dominio di f, Si ha, quindi

$$\begin{gathered} (f \circ g)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2p}y_p \\ \cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{np}y_p \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p) + \cdots + a_{1n}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{np}y_p) \\ a_{21}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p) + \cdots + a_{2n}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{np}y_p) \\ \vdots \\ a_{m1}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1p}y_p) + \cdots + a_{mn}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{np}y_p) \end{pmatrix} = \end{gathered} \tag{3.22}$$

La prossima cosa da fare è raggruppare per $y_1, y_2, \ldots, y_p$, ottenendo quindi:

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1})y_1 + (a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2})y_2 + \cdots + (a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np})y_p \\ (a_{21}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1})y_1 + (a_{21}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2})y_2 + \cdots + (a_{21}b_{1p} + \cdots + a_{2n}b_{np})y_p \\ \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1})y_1 + (a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2})y_2 + \cdots + (a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np})y_p \end{pmatrix}$$

Da quest'ultima espressione, è possibile vedere che la composizione $f \circ g$ è ancora una funzione del tipo (3.11), cioè determinata da una matrice C, e più precisamente

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ & \vdots & & \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

[23] non ci sono due elementi del dominio con lo stesso quadrato, e ogni elemento del codominio è quadrato di qualcosa

Ora, si può notare che le entrate c_{ij} di tale matrice sono tutte espressioni del tipo

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{3.24}$$

In parte, è stato definito il prodotto di due matrici A e B in modo che la matrice $C = AB$ ottenuta sia la matrice che determina la composizione $L_A \circ L_B$ delle funzioni determinate da A e B.
Ricordando che la composizione $L_A \circ L_B$ delle due funzioni L_A e L_B può essere fatta solo sotto opportune condizioni[24] si osserva di conseguenza che anche il prodotto di due matrice può essere fatto solo sotto opportune condizioni: più precisamente, dal momento che la matrice di L_A ha m righe e n colonne, mentre la matrice B di L_B ha n righe e p colonne, vediamo che si possono moltiplicare tra loro due matrici A e B (in quest'ordine) se e solo se *il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B*.

Esempio 3.6.2. Come visto nella (3.14), la matrice associata alle rotazione f di angolo θ in senso antiorario attorno a O rispetto a una base ortonormale di V_O^2 è $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: la funzione $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinata da A, che manda (x_1, x_2) in $(\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2, \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2)$, è la traduzione in coordinate di f.
Analogamente, se g denota la rotazione di angolo ϕ, la traduzione in coordinate di g sarà data della funzione L_B determinata dalla matrice $B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$. Dal momento che il prodotto di matrici dà la composizione delle applicazioni corrispondenti, se si moltiplicano A e B è possibile ottenere la matrice che rappresenta in coordinate la composizione delle due rotazioni: infatti

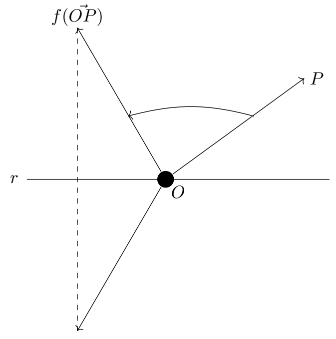
$$\begin{aligned} AB = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che è ancora una matrice di rotazione ma relativa al angolo $\theta + \phi$: questo era prevedibile in quanto la composizione non fa altro che applicare una rotazione di angolo ϕ seguita da una rotazione di angolo θ.

Osservazione 3.6.1. Il motivo della non commutatività in generale del prodotto di due matrici A e B è che, tale prodotto rappresenta la composizione delle applicazioni L_A e L_B corrispondenti, e la composizione di funzioni non gode in generale della proprietà commutativa: ad esempio, date le due funzioni

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$$

si ha $f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$, mentre, $g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$, e quindi $f \circ g \neq g \neq f$. Per un esempio geometrico, si considerino la funzione $f : V_O^2 \to V_O^2$ che ruota ogni vettore del piano applicato in O di 90 gradi in senso antiorario, e la funzione $g : V_O^2 \to V_O^2$che rifletta ogni vettore attorno a una retta r passante per O: allora, come si vede nella seguente figura, applicare prima la rotazione f e poi la riflessione g oppure viceversa porta in generale a risultati diversi (ovvero $f \circ g \neq g \circ f$)



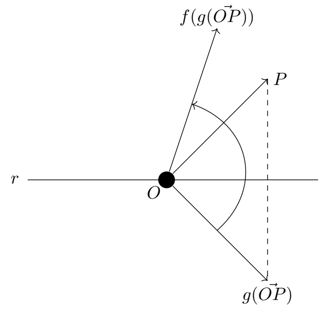


Figura 3.30: situazione di diseguglianza tra $f \circ g$ e $g \circ f$

Osservazione 3.6.2. l'associatività del prodotto di matrici si spiega facilmente ricordando che tale prodotto rappresenta la composizione delle funzioni corrispondenti, ovvero $(AB)C$ rappresenta $L_A \circ (L_B \circ L_C)$. Ma è facile vedere che la composizione di funzioni gode della proprietà associativa: infatti, applicando $(L_A \circ L_B) \circ h$ a x si ottiene $(f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$, e analogamente applicando $f \circ (g \circ h)$ a x ottenendo sempre $f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$, ovvero $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

[24] il codominio di $L_B : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ deve essere uguale al dominio di $L_A : \mathbb{K}^n \to K^m$

Ora, se il prodotto di matrici ammetta un elemento neutro che svolga la stesso ruolo che svolge il numero 1 per il prodotto tra numeri, per cui si ha $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ per ogni numero a. La risposta è affermativa: più precisamente, per ogni n considerando la matrice con n righe e n colonne seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

ovvero la matrice che ha 1 nelle entrate con stesso indice di riga e di colonne (a_{11}, a_{22}, etc.) e 0 in tutte le altre entrate. Tale matrice si chiama *matrice identica di ordine* n e si denota I_n. Ad esempio,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 3.6.3. In genere, data una matrice quadrata di ordine n, le entrate $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ che hanno stesso indice di riga e di colonna formano la cosiddetta *diagonale della matrice*. La matrice identica I_n può essere quindi descritta come la matrice che ha 1 sulla diagonale e 0 nelle altre entrate. Le entrate di I_n si denotano solitamente con il simbolo δ_{ij}, detto *delta di Kronecker*, che vale quindi 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.
Ora,si può verificare che, per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha

$$AI_n = A, \quad I_m A = A$$

l'ordine della matrice identica cambia perché deve essere tale che si possa svolgere il prodotto e quindi la quindi la matrice identica svolge esattamente il ruolo di elemento neutro per il prodotto righe per colonne. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Osservazione 3.6.4. Si noti che la matrice identica I_n non è nient'altro che la matrice che determina la funzione identica $id_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ che manda ogni elemento in se stesso: infatti,

$$id_{\mathbb{K}^n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \\ 0x_1 + 1x_2 + \cdots + 0x_n \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_n \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Questo spiega perché tale matrice sia l'elemento neutro per il prodotto, in quanto il prodotto tra matrici rappresenta la composizione delle applicazioni corrispondenti e la funzione identica è esattamente l'elemento neutro per la composizione.

Continuando con l'analogia con il prodotto tra numeri, è il caso ora di esaminare la questione *dell'esistenza dell'inverso*: nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ per ogni numero a diverso d zero esiste un numero b tale che $ab = ba = 1$, detto appunto inverso di a (e denotato a^{-1}). Nel caso delle matrici, quindi per capire se data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ esiste una matrice[25] $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AB = I_m$ e $BA = I_n$. Tuttavia, se una tale B esiste, dal momento che il prodotto di A e B corrisponde alla composizione delle applicazioni lineari $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ e $L_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ mentre la matrice identica corrisponde alla funzione identica, si ha $L_A \circ L_B = id$ e $L_B \circ L_A = id$, ovvero la funzione L_A deve essere invertibile. Riassumendo, come mostrato, il problema dell'inverso si pone solo per matrici che hanno stesso numero di righe e colonne, ovvero solo se $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Tali matrici si dicono *quadrate* e il numero n comune di righe e colonne si dice *ordine delle matrice*. Per semplicità, l'insieme $M_{n,n}(\mathbb{K})$ si denota $M_n(\mathbb{K})$.

[25] La scelta del numero di righe e colonne di B è obbligata se poter eseguire sia il prodotto AB che quello BA. Una matrice invertibile si può anche chiamare NON SINGOLARE, mentre, una matrice non invertibile si può anche chiamare SINGOLARE

Definizione 3.6.1. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata d ordine n si dice *invertibile* se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ tale che

$$AB = I_n, \quad BA = I_n \tag{3.27}$$

In tal caso, B si chiama *matrice inversa di* A e si denota A^{-1}. Bisogna, dimostrare il seguente risultato, contrariamente a quello che accade nel campo dei campo dei numeri reali dove l'unico numero non invertibile è lo zero, nell'insieme delle matrici, anche limitandosi alle sole matrici quadrate, ci sono molte matrici non invertibili:

Teorema 3.6.1. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se il rango di A è uguale a n.

Dimostrazione. Come ricordato poco fa nella Definizione 3.6.1, l'invertibilità di A, ovvero l'esistenza di una matrice B tale che $AB = BA = I_n$, equivale a dire $L_A \circ L_B = L_B \circ L_A = id$, ovvero che L_A è invertibile[26] e quindi biiettiva. Quindi ci basta dimostrare che L_A è biiettiva se e solo se il rango di A è n. Una un funzione lineare in cui dominio e codominio abbiano la stessa dimensione (e $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ verifica questa condizione) è iniettiva se e solo se è suriettiva, ovvero basta una delle due proprietà per avere anche l'altra: in altri termini, per avere entrambe le proprietà (e quindi la biiettività) è necessaria e sufficiente una delle due proprietà. Quindi, possiamo dire che L_A è biiettiva se e solo se e solo se è suriettiva. $\square$

Vediamo ora come si calcola l'inversa di una matrice A. supponendo che questa esista (cioè che A sia invertibile).

A questo punto siamo pronti a descrivere il primo metodo per la determinazione dell'inversa di una matrice: grazie all'osservazione preliminare appera fatta, se si sa che l'inversa di A equivale a trovare una matrice B tale che $AB = I_n$ (senza dover verificare anche $BA = I_n$), ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Tenuto conto della definizione di prodotto righe per colonne, vediamo che moltiplcando le righe di A per la prima colonna di B deve essere

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} = 0 \end{cases}$$

ovvero la prima colonna di B soddisfa il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 1 \\ a_{21}x_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

con matrice dei coefficienti uguale a A e termini noti uguali alla prima colonna della matrice identica. Analogamente, moltiplicando le righe di A per la seconda colonna di B si vede che devono essere soddisfatte le seguenti

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n2} = 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n2} = 1 \\ \dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n2} = 0 \end{cases}$$

ovvero la prima colonna di B soddisfa il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

[26] Per essere rigorosi, $L_A \circ L_B = L_B \circ L_A = id$ implica chiaramente che L_A sia invertibile, ma viceversa il fatto che L_A sia invertibile implica solo che esista una funzione g tale che $g \circ L_A = L_A \circ g = id$ che a priori non si sa se è della forma $g = L_B$ per qualche matrice B. In realtà, si può dimostrare che g deve essere necessariamente essere implica che esista una matrice B per cui $L_A \circ L_B = L_B \circ L_A = id$ (e quindi $AB = BA = I_n$).

sempre con matrice dei coefficienti uguale a A ma stavolta con termini noti uguali alla seconda colonna della matrice identica, e così via, è possibile ragionare allo stesso modo fino all'ultima colonna di B che dovrà soddisfare

$$\begin{cases} a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} = 0 \\ a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} = 1 \end{cases}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 1 \end{cases} \tag{3.30}$$

Riassumendo, si ha $AB = I_n$ se e solo se le colonne

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \dots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$$

sono soluzioni rispettivamente degli n sistemi della (3.28), (3.29), ..., (3.30). Per risolvere un sistema basta scriverne la matrice completa, composta da matrice dei coefficienti delle incognite e colonna dei termini noti, e ridurla a gradini madiante operazioni elementari sulle righe. Poiché i sistemi (3.28), (3.29), ..., (3.30) hanno tutti la stessa matrice dei coeffcienti, cioè A, e differiscono solo per i termini noti, è possibile risolverli tutti contemporaneamente eseguendo la stesse operazioni elementari: a questo scopo, basta scrivere la matrice

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \tag{3.31}$$

ottenuta affiancando tutti i termini noti dei sistemi (3.28), (3.29), ..., (3.30) e risolverli contemporaneamente con una sola riduzione[27].

Ad esempio: data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, verificando se essa è invertibile e, in caso affermativo, calcolando l'inversa. Come detto sopra, affiancando a tale matrice la matrice identità dello stesso ordine

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

che rappresenta i due sistemi le cui soluzioni le colonne della matrice inversa, e si inizia con l'applicare il procedimento di risoluzione a gradini: a questo scopo basta il singolo passaggio

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & cc-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \tag{3.32}$$

da cui si vede che, dopo la riduzione a gradini, ad A non si annulla nessuna riga e quindi, come detto sopra, A è invertibile.
La prima colonna dell'inversa B in A è data dalla soluzione del sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_2 = -1 \end{cases} \tag{3.33}$$

ovvero, come si vede risolvendo dal basso, la coppia $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, che è quindi la prima colonna della matrice inversa. Analogamente, la seconda colonna dell'inversa B di A è data dalla soluzione del sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_2 = 1 \end{cases} \tag{3.34}$$

[27] chiaramente, in base al Teorema 3.6.1 la matrice A è invertibile se e solo se in seguito a tale riduzione non si annullerà nessuna delle sue righe

ovvero, come si vede risolvendo dal basso, la coppia $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, che è quindi la seconda colonna della matrice inversa. In conclusione, l'inversa della matrice A è

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Infatti, si verifica subito con un calcolo che

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

concordemente con la definizione di inversa. Per evitare di scrivere e risolvere separatamente i sistemi (3.33) e (3.34) e trovare invece, in modo più diretto la matrice inversa, si può procedere come segue. Dopo aver effettuato la riduzione a gradini in (3.32), si applicano ulteriori operazioni elementari fino a trasformare la matrice A del blocco legge direttamente l'inversa. Per vederlo, bisogna riprendere da (3.32) e facciamo comparire prima uno zero in posizione 1 2 eseguendo

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{R_1\to 3R_1+R_2}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{array}\right)$$

e poi bisogna applicare a ogni riga l'operazione elementare del secondo tipo che consiste nel dividerla per l'elemento che si trovare sulla diagonale:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{R_1=\left(\frac{1}{3}\right)R_1\\ R_2=\left(\frac{1}{3}\right)R_2}}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right) \tag{3.35}$$

Come si vede dalla matrice identica che è stata affiancata ad A si è trasformata nella matrice inversa di A già trovata sopra.
Per capire il perché, bisogna ricorcare che le operazioni elementari che vengono qui svolte servono a risolvere contemporaneamente i sistemi che poi danno come soluzione le colonne della matrice inversa: ma allora, riducendo la matrice A alla matrice identica come in (3.35) non si sta facendo altro che ridurre i due sistemi alla forma

$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}\\ x_2=-\frac{1}{3}\end{cases},\quad\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}\\ x_2=\frac{1}{3}\end{cases}$$

e cioè far comparire direttamente le soluzioni cercate (*che sono proprio le colonne della matrice inversa*).
Un altro esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

La prima cosa da fare è quella di trasformare $(A|I_n)$ in una matrice a gradini, come prima andando ad affiancare la matrice per la sua identità:

$$(A|I_n)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{R_2\to R_2+R_1\\ R_3\to R_3-2R_1}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{R_3\to 2R_3+R_2}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2\end{array}\right)$$

Il fatto che non si sia annullata nessuna riga nel blocco di sinistra dice che la matrice A è invertibile.
Ora, come spiagato sompra, bisogna far comparire zeri sopra la diagonale, effettuando una sorta di riduzione a gradini "all'incontrario", dal basso verso l'alto e destra verso sinistra[28]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2\end{array}\right)\underset{\substack{R_2\to R_2+R_3\\ R_1\to 3R_1+R_3}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$\underset{R_1\to R_1-R_2}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2\end{array}\right)$$

[28]in ogni passaggio, bisogna mettere in evidenza in grassetto i nuovi zeri che si fanno comparire

Infine, si divide ogni riga per l'elemento sulla diagonale applicando operazioni elementari del secondo tipo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 \to \frac{1}{4}R_1 \\ R_1 \to \frac{1}{4}R_2 \\ R_3 \to -\frac{1}{4}R_3}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Un modo alternativo per calcolare l'inversa di una matrice invertibile, basato sul determinante e sulla notizoa di cofattore. Come visto nel Teorema 3.6.1 che una matrice A di ordine n è invertibile se e solo se il suo rango è n. Ma questo equivale ad avere $\det(A) \neq 0$. Quindi, è necessario dimostrare la seguente

Proposizione 3.6.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice invertibile (ovvero con $\det(A) \neq 0$). Allora la sua inversa A^{-1} è data da*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & & \vdots & \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

dove C_{ij} indica il cofattore di a_{ij}, e $\frac{1}{\det(A)}$ davanti alla matrice dei cofattori significa che ogni entrata di tale matrice deve essere moltiplicata per $\frac{1}{\det(A)}$.

Osservazione 3.6.5. A proposito delle disposizione dei cofattori nella (3.36), si notiche i cofattori delle entrate della prima *riga* di A sono nella prima *colonna* della (3.36), i cofattori delle entrate della seconda *riga* di A sono nella seconda *colonna* della (3.36), e così via.

Esempio 3.6.3. Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. I cofattori sono

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \\ C_{13} &= (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 \\ C_{22}&(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \\ C_{31} &= (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ C_{33} &= (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{32} \\ & & \vdots & \\ C_{13} & C_{23} & \dots & C_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

dove il determinanmte di A è stato calcolato sviluppandolo secondo Laplace rispetto alla terza riga, usando i cofattori già calcolati:

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -3$$

Osservazione 3.6.6. Osservando che la (3.36), nel caso $n = 2$, diventa la semplice formula

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

in quanto i cofattori sono semplicemente $C_{11} = (-1)^{1+1}a_{22}, C_{12} = (-1)^{1+2}a_{21}, C_{21} = (-1)^{2+1}a_{12}$, $C_{22} = (-1)^{2+2}a_{11}$, ricordando che il determinante di una metrice di ordine 1 si definisce come il valore della sua unica entrata. In pratica, a parte dividere per il determinante, la matrice inversa si ottiene scambiando tra loro i due elementi sulla diagonale e cambiando di segno le restanti entrate.

Esempio 3.6.4. Applicando la (3.37) al caso delle caso della matrice che rappresenta una rotazione di angolo θ nel piano, ovvero $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

per l'identità $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ e le formule trigonometriche per il seno e il coseno dell'opposto di un angolo

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

che è ancora una matrice di rotazione, quella associata alla rotazione di angolo $-\theta$, che è l'inversa della rotazione di angolo θ.

In effetti, in quenere, la matrice A^{-1} inversa di una matrice A data rappresenta la funzione inversa della funzione $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ determinante determinata da A: infatti, come sapendo la composizione $L_A \circ L_{A^{-1}}$ è la funzione determinata dal prodotto $AA^{-1} = I_n$, ovvero la funzione identica, cioè $L_A \circ L_{A^{-1}} = id$ (analogamente $L_{A^{-1}} \circ L_A = id$).

La formula (3.36) per il calcolo dell'inversa può essere utilizzata per ricavare un modo alternativo alla riduzione a gradini per risolvere certi sistemi di equazioni lineari.

A tale scopo, osservando prima che un generico sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.38}$$

può essere riscritto in forma molto più concisa grazie al prodotto di matrici. Più precisamente, se si denota con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti del sistema, con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice[29] che ha come entrate le incognite,

e con $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ la matrice, sempre costituita da una sola colonna, che ha come entrate i termini noti del sistema si ha, svolgendo il prodotto righe per colonne, che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

[29] costituita da una sola colonna

E quindi il sistema (3.38) può essere riscritto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ovvero nella semplice forma

$$Ax = b. \tag{3.39}$$

Supponendo che la matrice A dei coefficienti del sistema sia quadrata di ordine n (quindi il sistema ha equazioni e n incognite) e che abbia determinante diverso da zero. Allora A invertibile ed è possibile moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza (3.39) a sinistra per l'inversa A^{-1}:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

Tenendo conto che il prodotto di matrici gode della proprietà associativa, questo può essere riscritto come

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$

ovvero, visto che per definizione di inversa $A^{-1}A = I_n$, $I_n x = A^{-1}b$ e quindi, essendo I_n elemento neutro per il prodotto,

$$x = A^{-1}b \tag{3.40}$$

Quindi la soluzione x di un sistema di equazioni e di incognite e matrice dei coefficienti con determinante diverso da zero può essere trovata mediante la (3.40).

Osservazione 3.6.7. Si noti che non si è fatto altro che applicare gli stessi passaggi, normalmente sottointesi, che si applicano quando si vuole risolvere una semplice equazione di primo grado in una sola incognita $ax = b$. Infatti, ad esempio, se bisogna risolvere $2x = 3$, basta dividere entrambi i membri per 2, ovvero equivalentemente moltiplicando per l'inverso $\frac{1}{2}$ di 2 ottenendo $\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}3 = \frac{3}{2}$; per la proprietà associativa a primo membro si ha $(\frac{1}{2}2)x = \frac{3}{2}$ ovvero, essendo $\frac{1}{2}2 = 1$, si ha $1x = \frac{3}{2}$ cioè, essendo 1 elemento neutro per la moltiplicazione tra numeri, $x = \frac{3}{2}$, che è la soluzione dell'equazione.

L'unica differenza con il caso dei sistemi $Ax = b$ è che non sempre A è invertibile, mentre, a meno che a non sia zero, nel equazione $ax = b$ tale ipotesi è sempre garantita.

Se si combina la (3.40) con la formula per l'inverso (3.33), si vede che la soluzione di un sistema con n equazioni e n incognite, e matrice dei coefficianti invertibile è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ & & \vdots & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Quindi, come si vede, le componenti x_i della soluzione del sistema si ottengono moltiplicando le righe della matrice dei cofattori (*divisa per il determinante di* A) per la colonna dei termini noti:

$$x_1 = \frac{b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1}}{\det(A)}$$
$$x_2 = \frac{b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2}}{\det(A)}$$
$$\vdots$$

e in genere

$$x_i = \frac{b_1C_{1i} + b_2C_{2i} + \cdots + b_nC_{ni}}{\det(A)} \tag{3.42}$$

Se si confronta il numeratore della (3.42) con l'espressione del determinante del determinante di A calcolato con lo sviluppo di Laplace rispetto alla i-esima colonna

$$\det(A) = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$$

si vedrà che l'unica differenza è che al posto degli elementi $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ delle colonna i-esima di A si hanno i termini noti $b_1, b_2, \ldots, b_n$: in altri termini, tale numeratore coincide con lo sviluppo di Laplace del determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo i termini noti al posto della i-esima colonna.

Riassumendo, è stato dimostrato il seguente

Teorema 3.6.2. Sia $Ax = b$ un sistema di n equazioni lineari in n incognite, con $\det(A) \neq 0$ (cioè A è invertibile). Allora tale sistema ha un'unica soluzione $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le cui componenti sono date da

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{B_i})}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$

dove B_i è la matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna dei termini noti b al posto della i-esima colonna di A. Questo viene chiamato Teorema di Cramer

Esempio 3.6.5. Considerando il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dei coefficienti del sistema ha determinante $\det(A) = -3$, quindi è invertibile e si può applicare il metodo di Cramer, ovvero si hanno le componenti dell'unica soluzione date da

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Per concludere questa parte sull'inversa, mostrando che, data una matrice invertibile A, vale la seguente

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \tag{3.43}$$

Questa uguaglianza si dimostra come corollario del seguente, importante risultato, detto *teorema di Binet*:

Teorema 3.6.3. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ due matrici quadrate. Allora

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Non si dimostra il teorema di Binet, ma si illustra con un esempio: se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, allora $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$, e si vede che $\det(A) = -2, \det(B) = 5$ e $\det(AB) = -10 = (-2) \cdot 5$, concordemente con il teorema di *Binet.*

Per Dimostrare la (3.43), basta applicare il teorema al Binet al caso $B = A^{-1}$:

$$\det(AA^{-1} = \det(A)\det(A^{-1})$$

ovvero, tenuto conto che $AA^{-1} = I_n$,

$$\det(I_n) = \det(A)\det(A^{-1}) \tag{3.44}$$

Ora, è facile vedere che il determinante della matrice identica I_n, per qualunque ordine n, è uguale a 1: infatti, basta applicare lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga.

Quindi la (3.44) diventa

$$1 = \det(A)\det(A^{-1})$$

che implica subito la (3.43).

Si presti comunque attenzione che la non commutatività del prodotto di matrici rende non valide alcune identità classiche dell'algebra numerica, come la formula per il quadrato di un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

o il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Infatti, per matrici si ha

$$(A+B) = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Nella seconda uguaglianza si ha usato la proprietà distributiva, che vale anche per matrici, ma non valendo la commutatività del prodotto non può essere scritto come $AB + BA = 2AB$.
Analogamente, $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$ e di nuovo non essendo valida la commutatività del prodotto di matrici non si può semplicemente fare $-AB + BA$.

3.6.1 Ultime proprietà della matrice inversa

Per completezza è giusto aggiungere due proprietà che in questo capitolo, fino ad ora non sono state citate, sostanzialmente si tratta di due uguaglianze:

- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dimostrazione. Quindi, partendo dalla prima delle due affermazioni, bisogna partire dalla seguente situazione:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &\stackrel{?}{=} I \\ A(BB^{-1})A^{-1} \\ AIA^{-1} \\ AA^{-1} &= I \end{aligned}$$

Mentre, per il secondo punto, la situazione di partenza risulta la seguente:

$$\begin{aligned} (B^{-1}A^{-1})(AB) &\stackrel{?}{=} I \\ B^{-1}(A^{-1}A)B \\ B^{-1}IB \\ B^{-1}B &= I \end{aligned}$$

e con questo si sono dimostrati i due punti trattati. □

Capitolo 4

Autovalori e autovettori

In questo capitolo verranno introdotti e spiegati gli autovalore e gli autovettori, una parte fondamentale del programma di Algebra e geometria, più nello specifico si tratta di una nozione legata all'applicazione pratica.

4.1 Definizioni, esempi e applicazioni

Definizione 4.1.1. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f : V \to V$ un endomorfismo[1]. un vettore $V \neq \bar{0}$ di V si dice *autovettore di* f se si ha

$$f(v) = \lambda v \tag{4.1}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$. Il coefficiente numerico λ si dice *autovalore relativo all'autovettore* v.

In altri termini, un autovettore è un vettore non nullo che viene mandato dalla funzione in un suo multiplo. Notando che questo è sempre banalmente vero per il vettore nullo $\bar{0}$, in quanto come già trattato, se f è lineare allora $f(\bar{0}) = \bar{0}$, e quindi l'uguaglianza $f(\bar{0}) = \lambda\bar{0}$ è verificata sempre per qualunque endomorfismo e qualunque scalare λ.

Esempio 4.1.1. Sia $V = V_O^2$ lo spazio dei vettori geometrici applicati in un punto O del piano e sia $f : V_O^2$ la riflessione rispetto a una retta r che passa per O. Quando si riflette un vettore $v = \vec{OP}$ perpendicolare alla retta r, il vettore viene mandato nel suo opposto

[1] Ricordando che si dicono endomorfismi le applicazioni lineari in cui dominio e codominio sono uguali