Appunti di Algebra e geometria

Nicola Ferru

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open souce e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

$\in$ Appartiene
$\notin$ Non appartiene
$\exists$ Esiste
$\exists!$ Esiste unico
$\subset$ Contenuto strettamente
$\subseteq$ Contenuto
$\supset$ Contenuto strettamente
$\supseteq$ Contiene

$\Rightarrow$ Implica
$\Longleftrightarrow$ Se e solo se
$\neq$ Diverso
$\forall$ Per ogni
$\ni$: Tale che
$\leq$ Minore o uguale
$\geq$ Maggiore o uguale
α alfa

β beta
γ gamma
Γ Gamma
δ, Δ delta
ϵ epsilon
σ, Σ sigma
ρ rho

Capitolo 1

Vettori

1.1 Spazio Vettoriale

Spazio Vettoriale 1. *Uno spazio vettoriale reale (R-spazio vettoriale) è un insieme V in cui sono definite un'operazione di* `SOMMA` *tra elementi di V e un'operazione di* `Prodotto tra un reale` *e un elemento di V che soddisfano 8 proprietà:*

1. La somma è associativa quando $\forall v_1,\ v_2,\ v_3 \in V\ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3);$
2. La somma è commutativa quando $\forall v_1, v_2 \in V\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. Esistenza elemento neutro 0 se e solo se $\forall v \in V\ v + 0 = 0 + v = v$
4. Esistenza opposto $-v$ se e solo se $\forall v \in V\ v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. Il prodotto per uno scalare è assoluto quando $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V\ c_1(c_2v) = (c_1c_2)v$
6. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V\ (c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$
7. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando $\forall c \in R, \forall v_1, v_2 \in V\ c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$
8. Esistenza elemento neutro 1 quando $\forall v \in V\ 1v = v$

ES: $V_0^2\ V_0^3$

ES: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x^2,\ g(x) = e^x,\ f(x) + g(x) = x^2 + e^x\ 3f(x) = 3x^2$

ES: $\mathbb{R}^n$ n-uple di numeri reali

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad C \in \mathbb{R}\ c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

ES: $\mathbb{R}_n[x]$ polinomi di grado $\leq n$ nella variabile x a coefficiente reale

- $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$
- $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$

ES: $\mathbb{R}[x]$ polinomio di grado qualsiasi

$$p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$
$$c \in \mathbb{R},\ cp(x) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \cdots + ca_nx^n$$

Capitolo 2

Numeri Complessi

Numeri reali 1. *Un numero complesso è definito come un numero della forma $x+iy$, con x e y numeri reali e i una soluzione dell'equazione $x^2 = -1$ detta unità immaginaria. i numeri reali sono*

2.1 Operazioni con Numeri complessi

1. Modulo e distanza

   $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.1}$$

   Il valore assoluto (modulo) ha proprietà queste proprietà:

   $$|z + w| \geq |z| + |w|, \; |zw| = |z||w|, \; \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

   Valide per tutti i numeri complessi z e w. La prima proprietà è una versione della disuguaglianza triangolare.

Capitolo 3

Il determinante

In questo capitolo introdurremo uno strumento alternativo alla riduzione a gradini per determinare se le righe (*o le colonne*) di una matrice siano dipendenti. Per poterne dare la definizione rigorosa, dobbiamo prima fare alcuni richiami sulle permutazioni.

3.1 Richiami sulle permutazioni

Dato l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ dei numeri naturali compresi tra 1 e n, per un certo n, una funzaione da $\{1, 2, \ldots, n\}$ in se stesso associa a ogni elemento di $\{1, 2, \ldots, n\}$ un'immagine, scelta sempre all'interno di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se facciamo in modo che le immagini siano tutte diverse senza ripetizioni[1], queste ci daranno ancora tutti gli elementi $1, 2, \ldots, n$ semplicemente disposti in un altro ordine, ovvero permutati. Si parla di *permutazione di n elementi.* Ad esempio, le seguenti rappresentano permutazioni di 4 elementi:

$$\begin{array}{ll} 1 \to 1 & 1 \to 3 \\ 2 \to 3 & 2 \to 4 \\ 3 \to 2 & 3 \to 2 \\ 4 \to 4 & 4 \to 1 \end{array}$$

L'insieme delle permutazioni di n elementi si denota S_n. Per ogni n, tale insieme contiene esattamente $n! := n(n-1)(n-2)\ldots 2*1$ (cioè *n fattoriale*) permutazioni: ad esempio, per $n = 2$ abbiamo $2! = 2*1 = 2$ permutazione possibili, ovvero

$$\begin{array}{ll} 1 \to 1 & 1 \to 2 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 \end{array}$$

(tra le permutazioni vi è sempre anche anche quella che associa a ogni elemento se stesso, detta permutazione identica[2]).
Per $n = 3$ abbiamo invece $3! = 3 * 2 * 1 = 6$ permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{cccccc} 1 \to 1 & 1 \to 2 & 1 \to 1 & 1 \to 3 & 1 \to 2 & 1 \to 3 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 & 2 \to 3 & 2 \to 2 & 2 \to 3 & 2 \to 1 \\ 3 \to 3 & 3 \to 3 & 3 \to 2 & 3 \to 1 & 3 \to 1 & 3 \to 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array}$$

Si noti che p_2, p_3 e p_4 scambiano trra loro due elementi lasciando fisso il terzo (p_2 scambia tra loro 1 e 2, p_3 scambia 2 e 3): in generale, una permutazione di questo tipo, che scambia tra loro è una trasposizione anche la prima permutazione di 4 elementi presentata all'inizio del paragrafo (`scambia tra loro 2 e 3 lasciando fissi 1 e 4`), mentre la seconda non lo è.
Benché non tutte le permutazioni siano trasposizioni, si può dimostrare che qualunque permutazione può

[1] *Si dice la funzione è iniettiva:* una funzione iniettiva da un insieme finito in se stesso è automaticamente anche suriettiva, e quindi biiettiva. Richiameremo queste nozioni nel prossimo capitolo.
[2] Come funzione, si tratta della cosiddetta identità o funzione identica

essere realizzata eseguendo una sequenza di trasposizioni. Ad esempio, la permutazione p_5 di sopra, che non è una trasposizione, può tuttavia essere ottenuta scambiando prima 1 e 2, e poi 1 e 3:

$$\begin{array}{c} 1 \to 2 \to 2 \\ 2 \to 1 \to 3 \\ 3 \to 3 \to 1 \end{array}$$

ovvero può essere ottenuta componendo 2 trasposizioni.
In generale, se il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data p è pari, si pari, si dice che p è una *permutazione pari*; se invece il numero di trasposizioni che servono per ottenere p è dispari, si dice che p è una *permutazione dispari*. Ad esempio, p_5 è una permutazione pari, in quanto l'abbiamo ottenuta componendo 2 trasposizioni; è facile vedere che anche p_6 è una permutazione pari, in quanto può essere ottenuta componendo due trasposizioni:

$$\begin{array}{c} 1 \to 3 \to 3 \\ 2 \to 3 \to 1 \\ 3 \to 1 \to 2 \end{array}$$

Chiaramente, se una permutazione è già essa una trasposizione, allora essa è dispori (`1 è un numero dispari`).
Si noti che possono esserci più modi diversi di decomporre una permutazione come composizione di trasposizioni, ad esempio, la permutazione identica può essere vista o come risultato di 0 trasposizioni, oppure come risultato di 2 trasposizioni, ad esempio

$$\begin{array}{c} 1 \to 2 \to 1 \\ 2 \to 1 \to 2 \\ 3 \to 3 \to 3 \end{array}$$

Tuttavia, si pu'o dimostrare che il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data 'e o sempre pari o sempre dispari (*nell'esempio, 0 o 2, comunque pari*).
Si può allora definire il *segno s(p) di una permutazione* p come $s(p) = +1$ se p è una permutazione dispari.
Siamo ora pronti a definire il determinante.

3.2 La definizione di determinante

Sia A una matrice che ha n righe e n colonne, per qualche $n > 0$: tali matrici si dicono *quadrate* e il numero n comune a roghe e colonne si dice *l'ordine della matrice*. Il determinante associa a ogni matrice A quadrata di ordine n a entrate in un campo $\mathbb{K}$ un elemento $\det(A) \in \mathbb{K}$, funzione delle sue entrate, per il quale vedremo che vale l'importante proprietà che $\det(A) = 0$ se e solo se la matrice ha rango minore di n, ovvero se e solo se le righe (*o le colonne*) della matrice sono dipendenti.

Definizione 1. *Sia A una matrice quadrata di ordine n con entrate a_{ij}. Allora*

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} s(p) a_{1p(1)} a_{2p(n)} \tag{3.1}$$

In altrea parole, il determinante di una matrice quadrata di ordine n è dato da una sommatoria che ha addendo per ogni permutazione $p \in S_n$: ognuno di questi addendi è un prodotto di entrata di A del tipo $a_{1p(1)}\ a_{2p(2)}\ \dots a_{np(n)}$, con davanti un segno + o - a seconda che la permutazione p sia pari o dispari. Si noti che l'espressione $a_{1p(1)},\ a_{2p(2)},\ \dots, a_{np(n)}$ è il prodotto di n entrate scelte nella matrice, una per ogni riga, con gli indici di colonna dati da $p(1),\ p(2), \dots,\ p(n)$: poiché una permutazione scambia gli indici $1,\ 2, \dots,\ n$ senza ripetizioni, stiamo praticamente scegliendo un'entrata da ogni riga in modo però che le entrate scelte stiano anche su colonne diverse.

Per chiarire e illustrare la definizione precedente, consideriamo in particolare i casi $n = 2$ e $n = 3$. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine $n = 2$. Come abbiamo visto sopra ci sono solo due permutazioni dell'insieme $\{1, 2\}$ (`l'identità e la trasposizione che scambia 1 con 2`) quindi nella sommatoria avremo solo due addendi, del tipo $s(p)a_{1p(1)}a_{2p(2)}$: se p è l'identità, che come abbiamo osservato sopra è un permutazione pari e quindi $s(p) = +1$ e l'addendo corrispondente sarà $+a_{11}a_{22}$: se p è la trasposizione che scambia 1 con 2, che è una permutazione dispari, si ha $s(p) = -1$ e l'addendo corrispondente sarà $-a_{12}a_{21}$. Il determinante di una matrice quadrata A di ordine 2 risulta quindi essere

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3.2}$$

Nel caso di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ quadrata di ordine $n = 3$, la sommatoria avrà 6 addendi, tanti quante sono le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$, e per ognuna di queste permutazioni p l'addendo corrispondente sarà del tipo $s(p)a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$. Più precisamente, avremo

- l'addendo $+a_{11}a_{12}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3$ (`cioè la permutazione identica, che è una permutazione pari`)

- l'addendo $-a_{11}a_{23}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 3, p(3) = 2$ (`che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari`)

- l'addendo $+a_{12}a_{23}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2,\ p(2) = 3,\ p(3) = 1$ (`che è una trasposizione dispari`)

- l'addendo $-a_{12}a_{21}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2,\ p(2) = 1,\ p(3) = 3$ (`che è una teasposizione e quindi una permutazione dispari`)

- l'addento $+a_{13}a_{21}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3,\ p(2) = 1,\ p(3) = 2$ (`che si può scrivere come composizione di due trasposizioni ed è quindi una permutazione pari`)

- l'addendo $-a_{13}a_{22}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3,\ p(2) = 2,\ p(3) = 1$ (`che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari`)

e quindi si avrà, per una matrice A di ordine 3:

$$\det(A) = a_{11}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{3.3}$$

Ora, vedremo nel Paragrafo la dimostrazione del fatto che il determinante di una matrice quadratea di ordine n si annulla se e solo se la matrice ha $n = 2$ e $n = 3$, usando le farmule esplicite (`3.2`) e (`3.3`). Nel caso di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ di ordine 2, essendoci solo proporzionali, ovvero diciamo che esiste un $c \in \mathbb{K}$ tale che $(a_{11}, a_{12}) = c(a_{21}a_{22})$, cioè

$$a_{11} = ca_{21},\ a_{12} = ca_{22} \tag{3.4}$$

Ma allora, moltiplicando (`a entrambi i membri`) la prima uguaglianza per a_{22} e la seconda per 21 si ha $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$ e $a_{12}a_{21} = ca_{21}a_{21}$, da cui vediamo che $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$: quindi $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, ovvero $\det(A) = 0$. Quindi se una matrice di ordine 2 ha le righe proporzionali, il suo determinante è zero.
Viceversa, supponiamo che il determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sia zero, ovvero

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \tag{3.5}$$

Supponendo per il momento che le entrate a_{21}, a_{22} della seconda riga non siano nulle, dividendo entrambi i membri della (3.5) per a_{21} e a_{22} otteniamo

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{3.6}$$

cioè si ha $\frac{a_{11}}{a_{21}} = c$ e $\frac{a_{12}}{a_{22}} = c$ per qualche $c \to \mathbb{K}$, da cui ritroviamo le uguaglianze (`3.4`), che a_{21} e a_{22} fossero entrambi diversi da zero: infatti, se ad esempio $a_{21} = 0$ allora la (3.5) diventa $a_{11}a_{22} = 0$, che equivale a dire che o $a_{11} = 0$ oppure $a_{22} = 0$: ma nel primo caso la matrice è della forma $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, nel secondo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e in entrambi i casi otteniamo sempre che le righe sono proporzionali.
Nel caso di matrici di ordine 3, dimostrare che il determinante si annulla *se e solo se* le righe sono dipendenti, non p difficile se ci aiutiamo con un'interpretazione geometrica: **infatti, prendiamo l'espressione (3.3) del determinante di una tale matrice e riscriviamola nel modo seguente:**

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \tag{3.7}$$

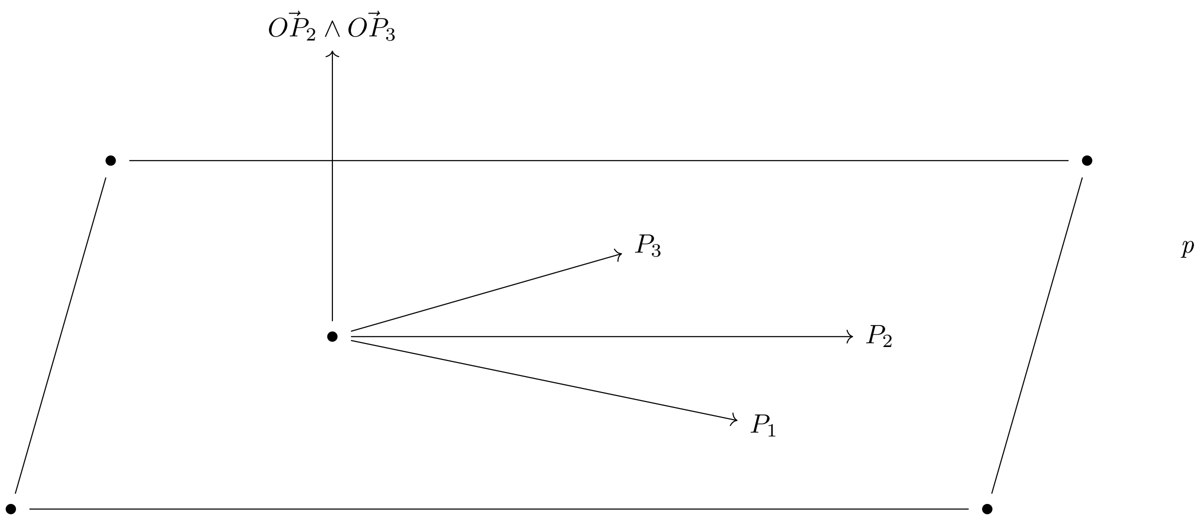
Ora, le tre quantità dentro le parentesi tonde non sono altro che le componenti del prodotto vettoriale dei due vettori di $\mathbb{R}^3$ dati dalla seconda e dalla terza riga della matrice:

$$R_2 \wedge R_3 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \wedge (a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, a_{23}a_{33} - a_{21}a_{33},_{21}, a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Quindi la (3.7), dal momento che moltiblica le componenti di $R_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ con le rispettive componenti di $R_2 \wedge R_3$ (`la prima con la prima, la seconda con la seconda e la terza con la terza`) e somma, non è nient'altro che quello che abbiamo chiamato prodotto scalare tra R_1 e $R_2 \wedge R_3$. Quindi, dire che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla quivale a dire che le sue tre righe R_1, R_2, R_3 verificano l'uguaglianza.

$$R_1 * (R_2 \wedge R_3) = 0 \tag{3.8}$$

Ora, se fissiamo nello spazio V_O^3 dei vettori applicati nello spazio tridimensionali, le terne R_1, R_2, R_3 rappresenteranno le coordinate di tre vettori applicati $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ rispettivamente, e la (3.8) ci sta allora dicendo che il vettore $\vec{OP}_1$ è perpendicolare al vettore $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$ (*infatti, abbiamo dimostrato che due vettori dello spazio sono perperndicolari solo se il prodotto scalare tra le terne dele lorfo coordinate è zero*). Ma, essendo a sua volta $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$, per le proprietà del prodotto vettoriale, perpendicolare $\vec{OP}_2 \wedge \vec{OP}_3$ significa dire che anche $\vec{OP}_1$ deve stare sul piano p:



Quindi i tre vettori, stando sullo stesso piano, sono tra loro dipendenti, e concludiamo che sono dipendenti

anche le terne R_1, R_2, R_3 delle loro coordinate[3]. Questo mostra come volevamo che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla se e solo se le sue riche R_1, R_2, R_3 sono dipendenti.
Nel paragrafo sulle proprietà del determinante, dimostreremo in modo puramente algebrico che questo fatto è vero per matrici di qualunque ordine. Prima di fare ciò, vediamo nel prossimo paragrafo un modo di calcolkare il determinante alternativo alla definizione, il cui utilizzo diretto richiederebbe di scrivere una sommaria che per una matrice di ordine n ha $n!$ addendi, tanti quanti le permutazioni di n elementi (si pensi che già per $n = 4$ abbiamo $4! = 24$ addendi).

3.3 La formula di Laplace

Allo scopo di calcolare il determinanete, useremo la cosiddetta *formula di Laplace*, per scrivere la quale abbiamo prime bisogno di dare la seguante

Definizione 2. *Sia A una matrice quadrata di ordine n: per ogni entrata a_{ij} di A, definiamo il cofattore di a_{ij}, denotato C_{ij}, come il determinante della matrice di ordine $n-1$ che si ottiene da A cancellando la riga i e la colonna j, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$*

Vediamo subito un esempio: consideriamo la matrice di ordine 3 seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

L'entrata a_{11} è uguale a 1: il suo cofattore C_{11} è, in base alla definizione <++>, il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna (ovviamente la riga e la colonna dell-entrata a_{11} presa in considerazione) moltiplicato per $(-1)^{1+1}$:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = (-1)^2(5 * 9 - 6 * 8) = +(45 - 48) = -3$$

Invece, se per esempio prendiamo l'entrata $a_{23} = 6$, il suo cofattore C_{23} è il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene cancellando la seconda riga e la terza colonna (ovvero la riga e la colonna dell'entrata $(-1)^{2+3}$):

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = (-1)^5(1 * 8 - 2 * 7) = -(8 - 14) = +6$$

Siamo ora pronti a enunciare il seguante risultato, sche ci dà una formula per il calcolo del determinante di una matrice:

Proposizione 1. *Sia A una matrice di ordine n. Data una sua qualunque riga $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ o una qualungue colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, si ha*

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \tag{3.9}$$
$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \tag{3.10}$$

La proposizione, che non dimostriamo, afferma quindi che il determinante di una matrice si può calcolare scegliendo una riga o una colonna, moltiplicando ogni elemento della riga o della colonna per il suo

[3] Ricordiamo che dei vettori in uno spazio vettoriale sono dipendenti se e solo se lo sono, le *n-uple* delle loro coordinate rispetto a una base scelta.

cofattore e sommando il tutto. La (3.9) e la (3.10) si dicono rispettivamente formula (o sviluppo) di Laplace secondo la i-esima riga e la la formula (o sviluppo) di Laplace secondo la j-esima colonna.
L'osservazione importante da fare sulla formula di Laplace è che essa esprime il determinante di una matrice di ordine n in funzione dei suoi cofattori, che sono, a parte il fattore $(-1)^{i+j}$*, determinanti di matrici di ordine* $n-1$*: a loro volta, potremo poi calcolare ciascuno di questi cofattori riutilizzando la formula di Laplace, con la quale ci ridurremo a calcolare determinanti di matrici di oridne* $n-2$*, e così viam fino a che non arriveremo a matrici di ordine 2 per le quali la formula del determinante è particolarmente semplice da ricordare. Vediamo un esempio.*

Esempio 1. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Scegliamo di sviluppare il determinante secondo Laplace rispetto alla terza riga, usando cioè la formula (3.9) nel caso* $i = 3$*:*

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}.$$

Per definizione di cofattori e tenendo conto che $a_{32} = a_{33} = 0$ *(e quindi non abbiamo bisogno di calcolare i corrispondenti cofattori) si ha*

$$\det(A) = 1 * (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 * (-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Ora, cisascuno dei due determinanti di ordine 3 che compaiono in questa uguaglianza può essere calcolato usando di nuovo la formula data. Ad esempio, se per il primo determinante scegliamo la terza colonna (quindi dobbiamo usare $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$*) tenendo conto che* $a_{13} = 0$*, si ha*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 * (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

dove il determinante di ordine 2 è stato calcolato usando la formula $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$*. Analohgalmente, se per l'altro determinante scegliamo la prima riga (quindi dobbiamo usare* $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$*) tenendo conto che* $a_{13} = 0$*, si ha*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 * (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 * (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Sostituendo questi risultati nella (3.11), si trova allora

$$\det(A) = 1 * (-1)^{3+1}(-1) + 1 * (-1)^{3+4}2 = -3.$$

Nell'enunciato del Proposizione 3.3, è sottointeso il fatto che il risultato dello sviluppo ci darà sempre il determinante di A indipendentemente dalla riga o colonna scelta: questo è molto importante nella pratica in quanto ci consente, come visto anche nell-esempio, di scegliere se possibile righe o colonne in cui alcune in cui alcune entrate siano nulle, così da non dover calcolare i corrispondente cofattori.

Osservazione 1. *Notiamo che l'espressione (3.7), che abbiamo usato per mostrare geometricamente che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti, non era altro che lo sviluppo di Laplace di tale determinante rispetto alla prima riga: infatti, ricordando la* *derinizione di determinante di una matrice di ordine 2, si trava*

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{12}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$a_{11}(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{pmatrix} =$$
$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

3.4 Proprietà del determionante

In questo paragrafo dimostreremo finalmente che il determinante di una matrice A si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti. A questo scopo, iniziamo con l'enunciazione e dimostrazione tre importanti proprietà del determinante:

1. se A' si ottiene da A moltipricando una riga di A per $c \in \mathbb{K}$, allora $\det(A') = c\det(A)$
   Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la prima riga per $c = 5$, ho $\det(A') = 5 * 4 - 10 * 3 = 5\det(A)$.
   In altre parole, se una riga di una matrice viene moltiplicata per una scala c, quando calcoliamo il determinante possiamo "portare fuori" questo scalare.
   In base alle definizione ($<++>$) di determinantem, il determinante della matrice A' in cui abbiamo moltiplicato tutti gli elementi della riga *i-esima* per c è $\det(A') = \sigma s(p)a_{1p(1)} \dots (ca_{ip(1)}) \dots a_{np(n)}$: essendo il fattore c comune a tutti gli addendi della sommatoria, possiamo metterlo in evidenze in eveidenza alla somma e scivere $\det(A') = c\sigma s(p)a_{ip(n)}a_{1np(n)}$, ovvero $\det(A') = c\det(A)$, come volevamo.

2. supponiamo di sommare a una riga R_i di una matrice A una *n-upla* $v = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$. Allora, il determinante della nuova matrice A' così ottenuta vale

$$\det(A') = \det(A) + \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ v \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

   dove stiamo denotando con $\begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ v \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}$ la matrice ottenuta da A sostituendo v al posto della riga R_i.
   Possiamo anche scrivere

$$\det\begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i + v \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ v \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

   Ad esempio, consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e sommiamo alla sua seconda riga (2, 1) la coppia (1, 3), ottenendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Allora si ha proprio

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det(A) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ovvero $-2 = -3 + 1$.

Dimostrazione. Se $R_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ allora la riga i-esima della matrice A' è $R_i + v + \begin{pmatrix} a_{i1} + v_{i1} & a_{i2} + v_{i2} & \dots & a_{in} + v_{in} \end{pmatrix}$ In base alla definizione (<++>) di determinante, si ha $\det(A') = \sum s(p) a_{ip(1)} \dots (a_{ip(i)} + v_{ip(i)}) \dots a_{np(n)} = \sum s(p) a_{ip(1)} \dots a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} + \sum s(p) a_{ip(1)} \dots v_{ip(i)} \dots a_{np(n)}$ ovvero $\det(A) + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ v \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}$, come volevamo. □

3. se A' si ottiene da A scambiando tra loro due righe allora $\det(A') = -\det(A)$
   Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro la prima e la seconda riga, ho $\det(A) = 1 * 4 - 2 * 3 = -2$ e $\det(A') = 3 * 2 - 4 * 1 = +2$.

   Dimostrazione. Sia A' la matrice ottenuta da A scambiando la riga R_i con la R_j: quindi per ogni k si ha $a'_{ik} = a_{jk}$ e $a'_{jk} = a_{ik}$, mentre tutte le altre sono uguali a quelle di A.
   Quindi, in base alla (3.1), si ha

$$\det(A') = \sum_{p \in Sn} s(p) a'_{1p(1)} \dots a'_{ip(i)} \dots a'_{jp(j)} \dots a'_{np(n)} = \sum_{p \in Sn} s(p) a'_{1p(1)} \dots a'_{jp(j)} \dots a'_{ip(i)} \dots a'_{np(n)}. \tag{3.14}$$

(in pratica, l'unica differenza tra la (3.14) e l'espressione del determinante di A è che in ogni addendo le entrate "centrali" habbi gli indici di riga i e j scambiati tra logo).
Ora, allo scopo di dimostrare il risultato, riscriviamo la (3.14) come segue: consideriamo la trasposizione $\mathcal{T} \in S_n$ che scambia i con j e lascia invariati tutti gli altri elementi: quindi $j = \mathcal{T}(i),\ i = \mathcal{T}(j)$, e per tutti gli altri indici $k = \mathcal{T}(k)$.
Allora possiamo scrivere

$$\det(A') = \sum_{p \in Sn} s(p) a_{1\mathcal{T}(1)} \dots a'_{jp\mathcal{T}(j)} \dots a'_{ip\mathcal{T}(i)} \dots a'_{np\mathcal{T}(n)} \tag{3.15}$$

Ora, per un qualunque indice k, si ha che $p(\mathcal{T}(k))$ è il valore associato a k dalla permutazione $p\mathcal{T}$ che si ottiene componendo p con $\mathcal{T}$ (ovvero applicando, da destra, prima $\mathcal{T}$ e poi p). Tale permutazione è tale dispari, e di un numero pari di trasposizione (una in più di p), e analogamente se dispari di trasposizione, e allora $p\mathcal{T}$, sarà composta da un numero dispari di trasposizione (una in più di p), e analogamente se p è dispari vuol dire che si scrive come composizione di un numero di strasposizioni. Riassumendo, la (3.15), scambiando anche di ordine i due fattori centrali $a_{jp\mathcal{T}(j)}$ e $a_{ip\mathcal{T}(i)}$ in ogni addendo (il prodotto gode della proprietà commutativa) può essere scritta nel modo seguente

$$\det(A') = -\sum_{p \in S_n} s(p\mathcal{T}) a_{1p\mathcal{T}(1)} \dots a_{ip\mathcal{T}(i)} \dots a_{jp\mathcal{T}(j)} \dots a_{np\mathcal{T}(n)} \tag{3.16}$$

Ora, quest'ultima espressione, con il segno meno davanti, è uguale a quella del determinante di A a parte che in essa compare $p\mathcal{T}$ invece che p. Ma in realtà questo non cambia nulla, in quanto facciamo variare p tra tutti le permutazioni $p_1, p_2, \dots, p_{n!}$ di n elementi, $p_1\mathcal{T}, p_2\mathcal{T}, \dots, p_{n!}\mathcal{T}$ sono ancora *tutte* le permutazioni: per non esserlo, dovrebbe infatti succedere che □