



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

DICAAR

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA ELETTRICA INDUSTRIALE

# ANALISI MATEMATICA 2

*edited by*

***NICOLA FERRU***

***Unofficial Version***

***2022 - 2023***

[This page is intentionally left blank]

# Indice

0.1	Premesse...	7
0.2	Simboli	8
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1	tipologia in $\mathbb{R}$	9
1.1.1	Distanza	9
1.2	Intorno	9
1.2.1	Insieme chiuso	10
1.2.2	Insieme connesso	11
1.2.3	Insieme convesso	11
1.2.4	Coordinate Polari	11
1.2.5	Limiti e continuità	11
1.2.6	Continuità	11
1.2.7	Esistenza del limite	11
1.2.8	Teorema di esistenza dei valori intermedi	12
1.2.9	Teorema di Weierstrass	12
<b>2</b>	<b>Derivate Parziali</b>	<b>13</b>
2.1	Derivate parziali di primo grado	13
2.1.1	Significato geometrico	13
2.2	Derivata parziale seconde	14
2.2.1	Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)	14
2.3	Massimi e minimi relativi	14
2.3.1	Teorema di Fermat	15
<b>3</b>	<b>Differenziabilità</b>	<b>17</b>
3.0.1	Tutte le funzioni differenziali sono continue	18
3.0.2	Tutte le funzioni differenziali sono derivabili	18
3.0.3	Le funzioni con derivate parziali continue sono differenziabili	19
3.1	Significato geometrico del differenziale e piano tangente	19
3.1.1	Differenziale primo	19
3.1.2	Piano Tangente	19
3.1.3	Significato geometrico del differenziale primo	20
3.1.4	Funzioni composite	20
3.1.5	Funzione composta	21
3.1.6	Teorema della derivata della funzione composta	21
3.2	Teorema differenziabilità delle funzioni composite	22
3.3	Differenziale secondo	23
3.3.1	Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo	24



## Elenco delle tabelle



# Elenco delle figure

3.1	Rappresentazione grafica della conica . . . . .	24
-----	---	----

## 0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un'occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, così da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTeX insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

## 0.2 Simboli

Simbolo	Nome	Simbolo	Nome
$\in$	<b>Appartiene</b>	$\ni$ :	<b>Tale che</b>
$\notin$	<b>Non appartiene</b>	$\leq$	<b>Minore o uguale</b>
$\exists$	<b>Esiste</b>	$\geq$	<b>Maggiore o uguale</b>
$\exists!$	<b>Esiste unico</b>	$\alpha$	<b>alfa</b>
$\subset$	<b>Contenuto strettamente</b>	$\beta$	<b>beta</b>
$\subseteq$	<b>Contenuto</b>	$\gamma, \Gamma$	<b>gamma</b>
$\supset$	<b>Contenuto strettamente</b>	$\delta, \Delta$	<b>delta</b>
$\supseteq$	<b>Contiene</b>	$\epsilon$	<b>epsilon</b>
$\Rightarrow$	<b>Implica</b>	$\sigma, \Sigma$	<b>sigma</b>
$\Leftrightarrow$	<b>Se e solo se</b>	$\rho$	<b>rho</b>
$\neq$	<b>Diverso</b>		
$\forall$	<b>Per ogni</b>		



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 tipologia in R

#### 1.1.1 Distanza

- **R**:  $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- **R<sup>2</sup>**: Siano  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ , la loro distanza è  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- **R<sup>3</sup>**: Siano  $Q_1(x_2, y_2, z_2)$ , la loro distanza è  $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- **R<sup>4</sup>**: Siano  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$  e  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^D (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione  $R^n * R^n \rightarrow R^+ \cup \{0\}$  (ha come immagine al più nullo)

**Proprietà 1.** *questi sono vincolati dalle seguenti proprietà*

- $d(x, y) \geq 0$   $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$  la distanza è nulla se i due punti coincidono
- $d(x, y) = d(y, x)$  la distanza tra  $x$  e  $y$  uguale alla distanza da  $y$  a  $x$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  disuguaglianza triangolare.

### 1.2 Intorno

**Definizione 1.** *Insieme dei punti che distano da un punto  $P_0$  meno di un  $\delta$*

- **R** Intervallo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ,  $P(x)$  generico punto  $d(P_0, P) < \delta$

$$|x - x_0| < \delta$$

- **R<sup>2</sup>**

$$P_0(x_0, y_0)$$

$$P(x, y)$$

$$d(P_0, P) < \delta$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Cerchio di centro  $P_0$  e di perimetro  $\delta$  privato della circonferenza.

- $R^3$

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$Q(x, y, z)$$

$$d(Q, Q_0) < \delta$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro  $Q_0$  e raggio  $\delta$  privata della sua superficie.

**Punto interno**  $P_0$  è interno all'insieme  $D$  se:

$$\exists I_{P_0, \delta} \subset D \quad (1.1)$$

Esiste un intorno di  $P_0$  di ampiezza  $\delta$  incluso nell'insieme  $D$ , cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

**Punto esterno**  $P_0$  è esterno all'insieme  $D$  se è interno al complementare di  $D$ ,  $CD$

$$\exists I_{P_0, \delta} \subset CD \quad (1.2)$$

esiste un intorno di  $P_0$  di ampiezza  $\delta$  incluso nel complementare dell'interno  $D$

**Punto di frontiera**  $P_0$  è un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \rightarrow \text{frontiera dell'insieme } D \quad (1.3)$$

$\forall I_{F_D}$  in esso cadono punti di  $D$  e punti di  $CD$  qualunque intorno, in esso cadono punti dell'insieme  $D$  e del suo complementare.

**Punto di accumulazione**  $P_0$  è un punto di accumulazione se  $\forall I_{P_0}$  cade in un punto  $\in D$ , se cade un punto di  $D$  in  $I_{P_0}$ , allora ne cadono infiniti.

**Punto isolato**  $P_0$  è un punto isolato se  $\exists I_{P_0, \delta}$  in cui non cade nessun punto dell'insieme.

### Insieme Aperto

**Definizione 2.**  $A$  si dice aperto se  $\forall P \in A \exists I_P \subset A$  per qualunque punto di  $A$  esiste un intorno incluso in  $A$ , cioè ogni intorno di  $P$  è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni  
 $]a : b[; x^2 + y^2 < r^2$  cerchio senza circonferenza:

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{triangolo senza lati} \quad (1.4)$$

### 1.2.1 Insieme chiuso

**Definizione 3.**  $A$  si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiusura, che è formato dall'insieme stesso più gli eventuali punti di accumulazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione.  $[a : b]; x^2 + y^2 \leq r^2$  cerchio più circonferenza:

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{triangolo con lati} \quad (1.5)$$

### 1.2.2 Insieme connesso

**Definizione 4.** un insieme  $A$  si dice connesso se e solo se  $\forall P_1, P_2 \subset A \exists \Gamma(P_1, P_2) \subset A$ .  $A$  è connesso se per qualunque  $P_1, P_2$  di  $A$  esiste una spezzata inclusa in  $A$

$A$  si dice **semplicemente connessa** se qualunque chiusa inclusa in  $A$  è frontiera dell'insieme.

### 1.2.3 Insieme convesso

**Definizione 5.** un insieme  $A$  si dice convesso se per ogni coppia di  $x, y \in A$  il segmento  $\overline{xy}$  è contenuto in  $A$

**Insiemi Limitati** In  $R$  :  $A$  è limitato se  $\forall x \in A : x \leq M$  **Insieme illimitato** In  $R$  :  $[2; +\infty[$  illimitato

$[-1; 1]$  limitato

$$\text{In } R^2 : \text{illimitato} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

In  $R^2$  :  $A$  è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq M \quad (1.6)$$

### 1.2.4 Coordinate Polari

**Definizione 6.** in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia  $P(x, y)$  un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiane  $X$  e  $y$  oppure le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ .

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = \rho^3 \frac{\cos^2 \theta}{e^2} \quad (1.8)$$

### 1.2.5 Limiti e continuità

**Definizione 7.**  $f(x, y)$  una funzione definito in  $D$  e siano  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \quad \forall \xi > 0 \exists \delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0, y_0), \delta} \setminus \{(x_0, y_0)\}, \forall (x, y) \in I \setminus \{(x_0, y_0)\} | f(x, y) \quad (1.9)$$

Per qualunque  $\xi > 0$  esiste un  $\delta(\xi) > 0$  per cui qualunque intorno di  $(x_0, y_0)$  al più  $x_0, y_0$  e per qualunque  $(x_0, y_0)$  di quast'intorno la funzione dista da  $l$  meno di  $\xi$ .

### 1.2.6 Continuità

**Definizione 8.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$ ,  $f(x, y)$  si definisce **continuo** in  $(x_0, y_0) \in D$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1.10)$$

### 1.2.7 Esistenza del limite

**Definizione 9.** Calcolando il limite con  $f$  in forma polare esiste se non dipende da  $\theta$ . È possibile calcolare il limite di  $f$  in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si

considerino quella di una generica retta.

$$y = y_0 + m(x - x_0) \quad (1.11)$$

- Se il limite dipende da  $m$  esso *non esiste*.
- Se non dipende da  $m$  *esiste*.

### 1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

**Teorema 1.** Sia  $f(x, y)$  definita in un insieme chiuso e limitato. Allora  $f(x, y)$  assume tutti i valori compresi fra il massimo ed il minimo di  $f(x, y)$  su  $D$

### 1.2.9 Teorema di Weierstrass

**Teorema 2.** Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.

Sia  $f(x, y)$  una funzione continua in  $D$  e sia  $D$  un insieme chiuso e limitato. Allora  $f(x, y)$  ha massimo e minimo assoluto in  $D$ .

## Capitolo 2

# Derivate Parziali

### 2.1 Derivate parziali di primo grado

**Definizione 10.** Sia  $f(x, y)$  una funzione di due variabili definita in un punto interno ad  $A$ . Consideriamo un intorno circolare di  $P(x_0, y_0)$ ,  $I(x_0, y_0)$ ,  $\delta$ , in netto sulla retta  $y = y_0$  e incrementa la  $x_0$  passando da  $x_0$  a  $x_0 + h$ . Ho così un punto  $P(x_0 + h, y_0) \in A$ . Definisco il rapporto di  $f(x, y)$  nella sola  $x$

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2.1)$$

$f(x, y)$  si definisce **derivabile parzialmente** se  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$  reale e finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2.2)$$

Analogamente, considero un intorno di  $P(x_0, y_0)$ ,  $I(x_0, y_0)$ ,  $\delta$ . Mi ruoto sulla retta  $x = x_0$  e incremento la  $y_0$  passando da  $y_0$  a  $y_0 + k$ . Ho così un punto  $P(x_0, y_0 + k) \in A$ . Definisco il rapporto incrementale di  $f(x, y)$  nella sola  $y$

$$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

**derivabile parzialmente** se  $\exists \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = l \in \mathbb{R}$  reale e finito.

Se in un punto  $(x, y)$  esistono entrambi le derivate parziali si dice che la funzione è **derivabile** in  $(x, y)$  inoltre se  $f$  è derivabile in ogni punto  $(x, y) \in A$ , si dice che  $f$  è derivabile in  $A$ .

#### 2.1.1 Significato geometrico

- La derivata prima parziale in  $P$  è  $f_x(x_0, y_0)$ , è la tangente alla curva che si crea intersecando  $f(x, y)$  con il piano  $y = y_0$
- La derivata prima parziale in  $P$ ,  $f_y(x_0, y_0)$  è la tangente alla curva che si crea intersecando  $f(x, y)$  con il piano  $x = x_0$

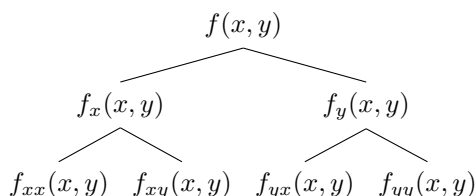
Se esistono entrambe allora le due rette tangenti alle sezioni della funzione individuano il piano tangente al solido nel punto  $P(x_0, y_0, z)$

## 2.2 Derivata parziale seconde

**Definizione 11.** Sia  $f(x, y)$  una derivabile e siano definite in un dominio le due derivate parziali

$$f_x(x, y) \quad f_y(x, y)$$

Tali funzioni passano a loro volta essere derivabili e si ottengono così le derivate seconde parziali di  $f(x, y)$



$$\begin{array}{ccc}
 f_{yx}(x, y) & \begin{array}{c} f_{yx}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) \end{array} \text{ derivata seconde pure} & \begin{array}{c} f_{yx} \\ f_{yx} \end{array} \text{ derivata seconde resto}
 \end{array}$$

derivata prima rispetto a

y poi rispetto a rispetto a x

con  $n$  variabili si hanno  $n^2$  derivate seconde parziali – Spesso le derivate seconde sono disposte in una matrice quadrata, detta **hessiana**, con il simbolo  $D^2$

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ n variabili} \rightarrow n * n \quad (2.3)$$

Se esistono le quanto derivate di  $f$ , nel punto  $(x, y)$ , si dice che  $f$  è derivabile due volte in  $(x, y)$ . Se ciò accade  $\forall (x, y) \in A$ ,  $f$  è derivabile due volte nell'insieme  $A$ .

### 2.2.1 Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)

**Teorema 3.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e derivabile due volte  $\forall (x, y) \in D$ .

Se le derivate seconde in  $(x_0, y_0)$   $f_{xy}(x_0, y_0)$  e  $f_{yx}(x_0, y_0)$  sono continue in  $(x_0, y_0)$  allora risulta  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ .

In generale se vale il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana può essere scritta come

$$H = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\det H = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = f_{xx} * f_{yy} - (f_{yx})^2$$

## 2.3 Massimi e minimi relativi

**Definizione 12.** Sia  $f(x, y)$  una funzione definita in un insieme  $D$ , un punto  $p_0(x_0, y_0) \in D$ , si dice di **massimo relativo** per la funzione se esiste intorno circolare di  $P_0$  per cui il valore assunto della funzione nei punti dell'interno è minore o uguale a quello assunto in  $P_0$ .

Analogamente un punto  $P_0(x_0, y_0)$  si dice di **minimo relativo** per la funzione se esiste un intorno circolare di  $P_0$  per cui il valore assunto dalla funzione nei punti dell'interno è maggiore o uguale.

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \text{Massimo relativo}$$

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \text{Minimo relativo}$$

### 2.3.1 Teorema di Fermat

**Teorema 4.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e derivabile in un punto  $P_0(x_0, y_0)$

Se in  $P_0(x_0, y_0)$   $f(x, y)$  ha un massimo o un minimo relativo, allora le derivate prime parziali si annullano ( $\nabla f = 0$  gradiente nullo). La pendenza della tangente è zero un massimo o minimo.

#### Gradiente

Sia  $f(x, y)$  una funzione derivabile in un punto  $(x, y)$ , cioè esistano in  $(x, y)$  le due derivate parziali  $f_x$  e  $f_y$ .

Si definisce **gradiente** di  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y)$ : il vettore  $\nabla f$  le cui componenti sono le derivate parziali di  $f(x, y)$ .

$$\nabla f(x, y) \equiv (f_x(x, y); f_y(x, y)) \quad (2.4)$$

#### Massimi e minimi – condizione necessaria

**Definizione 13.** Se  $P_0(x_0, y_0)$  è un punto di massimo/minimo relativo il gradiente è nullo. Così di massimo o minimo relativo interni al dominio della funzione  $f$  vanno ricercati tra i punti che annullano la funzione  $f$ . Pertanto un punto critico per una funzione derivabile è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.





## Capitolo 3

# Differenziabilità

**Definizione 14.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D$  e  $P_0(x_0, y_0) \in D$ . In  $P_0$ ,  $z = f(x_0, y_0)$ , incremento la  $x_0$  di un  $h$  e la  $y_0$  di un  $k$ .

Così passo da  $P_0(x_0, y_0)$  a  $P(x_0 + h, y_0 + k)$ . La funzione avrà avuto un certo incremento

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Si definisce **differenziale** in  $P_0(x_0, y_0)$  se  $\exists A, B \in \mathbb{R} : f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ , cioè se esistono due costanti reali  $A$  e  $B$  per cui l'incremento di  $f(x, y)$  che si ha passando da  $P_0$  a  $P$  si può riscrivere come somma di una parte lineare  $Ah + Bk$  e di un infinitesimo di ordine superiore a  $\sqrt{h^2 + k^2}$  (distanza di  $P_0$  da  $P$ ).

Se  $f(x, y)$  ammette derivate prime parziali le due costanti  $A$  e  $B$  sono:

$$\begin{cases} A = f_x(x_0, y_0) \\ B = f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

e il differenziale diventa

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (3.1)$$

**Esempio 1.** verificare che  $z = xy$  è differenziale  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , se  $z$  è differenziale  $\rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$  dove

$$\begin{cases} A = f_x(x_0, y_0) \\ B = f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

se  $z$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$ .

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{(x_0 + h)(y_0 + k)}_{\text{Sostituisco}} = x_0 y_0 + x_0 k + y_0 h + hk$$

$$\begin{array}{lll} f_x = y & f_x(x_0, y_0) = y_0 & f_y = x \\ f \text{ è derivabile in } (x_0, y_0) & A = y_0 & f_y(x_0, y_0) = x_0 \\ & & B = x_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ x_0 y_0 + x_0 k + y_0 h + hk - x_0 y_0 &= y_0 h + x_0 k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ hk &= o(\sqrt{h^2 + k^2}) \end{aligned}$$

detto quindi dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$  e poi passo alle coordinate polari:

$$\begin{aligned} h &= \rho \cos \theta \\ k &= \rho \sin \theta \\ e^2 &= h^2 + k^2 \\ h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, \rho &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = 0 \quad z = xy \text{ differenziale } \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

### 3.0.1 Tutte le funzioni differenziali sono continue

Sia  $f(x, y)$  differenziabile  $(x_0, y_0)$ , allora  $f(x, y)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

**Ip:**

$f(x, y)$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$

**Th:**

$f(x, y)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Se  $f(x_0, y_0)$  è continua in  $(x_0, y_0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0$$

Calcolo il limite a destra per  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \underbrace{Ah}_0 + \underbrace{Bk}_0 + \underbrace{o(\sqrt{h^2 + k^2})}_0 = 0 \text{ per cui } f(x, y) \text{ è continua in } (x_0, y_0)$$

□

### 3.0.2 Tutte le funzioni differenziali sono derivabili

Sia  $f(x, y)$  differenziabile in un punto  $(x_0, y_0)$ . Allora  $f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$

**Ip:**

$f(x, y)$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$

**Th:**

$f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

divido entrambi per  $h$  e calcolo il limite per  $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x} = \underbrace{\frac{Ah + o(\sqrt{h^2})}{h}}_A$$

$$f_x(x_0, y_0) = A$$

Analogamente si dimostra che  $f_y(x_0, y_0) = B$ . Quindi dato che esistono  $f_x$  e  $f_y$  in  $(x_0, y_0)$ ,  $f(x, y)$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$  e in oltre  $A = f_x(x_0, y_0)$ ,  $B = f_y(x_0, y_0)$  □

**Esercizio 1.** Dimostrare che  $z = x^2 = y^2$  è differenziabile in  $(1;1)$  - Per definire

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = (1 + h)^2 = (1 + k)^2 \quad f(x_0, y_0) = 1 + 1 = 2$$

$$A = f(1, 1) = |2x|_{x=1} = 2 \quad B = f_y(1, 1) = |2y|_{y=1} = 2$$

$$\text{Così ho } (1 + h)^2 + (1 + k)^2 - 2 = 2h + 2k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$h^2 + k^2 = o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$h = e \cos \theta$$

$$k = e \sin \theta$$

$$e^2 = h^2 + k^2$$

$$k \rightarrow 0, h \rightarrow 0, e \rightarrow 0$$

devo dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$  passando a coordinate polari

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{e^2}{|e|} = 0 \rightarrow z = x^2 + y^2 \text{ è differenziabile in } (1, 1)$$

### 3.0.3 Le funzioni con derivate parziali continue sono differenziabili

**Definizione 15.** Sia  $f(x, y)$  definita in  $D_1$  e sia derivabile in  $D$ . Sono  $f_x$  e  $f_y$  continue in  $D$ , allora  $f(x, y)$  è differenziale in  $D$ .

**Condizione sufficiente per la differenzialità**

**Definizione 16.** Affinché una funzione sia differenziabile in  $(x_0, y_0)$  basta che in  $(x_0, y_0)$  abbia derivate. In questo modo per determinare se una funzione è differenziabile in un punto si calcola le derivate parziali in quel punto, se esistono la funzione è differenziabile, in caso contrario non è derivabile.

**Esempio 2.** Dimostrare che  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  non è differenziabile in  $(0; 0)$

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D : x^2 + y^2 > 0$$

$$z_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D : x^2 + y^2 > 0$$

Sia  $z_x$  sia  $z_y$  sono definite per  $x^2 + y^2 > 0$  cioè nei punti esterni al cerchio di centro  $(0, 0)$  e 1, frontiera esclusa. Il punto  $(0, 0)$  è interno al cerchio, quindi in esso  $f(x, y)$  non è derivabile. Per cui in punto  $(0, 0)$   $f(x, y)$  non è neanche differenziabile.

## 3.1 Significato geometrico del differenziale e piano tangente

### 3.1.1 Differenziale primo

È la parte lineare nella definizione di differenziale

$$f(x, y) \text{ definita in } D \quad (x_0, y_0) \in D$$

$f(x, y)$  differenziale in  $(x_0, y_0)$  se

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k}_{\text{parte lineare}} + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

### 3.1.2 Piano Tangente

La  $f(x, y)$  una funzione derivabile in  $(x_0, y_0)$ , il piano tangente alla funzione  $(x_0, y_0, z_0)$  ha equazione:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\vec{n}$  direzione ortogonale al piano tangente, è unitario

$$\vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

poiché  $\nabla f(f_x, f_y) \quad |\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 \rightarrow \vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$

**Esempio 3.**  $z = x^2 + y^2 \quad (1, 1)$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z_0 = f(1, 1) = 1 + 1 = 2 \quad z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1) \quad f_x = 2x|_{1,1} = 2$$

$$f_y = 2y|_{1,1} = 2$$

### 3.1.3 Significato geometrico del differenziale primo

Passando da  $P_0$  a  $P$   $f(x)$  si incrementa da  $f(x_0)$  a  $f(x_0 + h)$  – Il differenziale primo  $dy$  indica la variazione che subisce la retta tangente passando da  $P_0$  a  $P$ .

L'incremento  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  si approssima sempre più con  $dy$  per incrementi  $h \rightarrow 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x)(x - x_0) - f(x_0) + o|x|$$

L'incremento  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  differisce dal valore  $f'(x)(x - x_0)$  [retta tangente] per un  $o|x|$ ,  $o|x|$  ci dà l'errore.

### 3.1.4 Funzioni composite

**Definizione 17.** Sia  $x(t)$  e  $y(t)$  due funzioni reali definite al variare in un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ .  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  corrisponde il punto  $(x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x = x(t) & \text{Rappresenta nel piano una curva in frontiera} \\ y = y(t) & \text{Parametrica} \end{cases}$$

Al variare di  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$

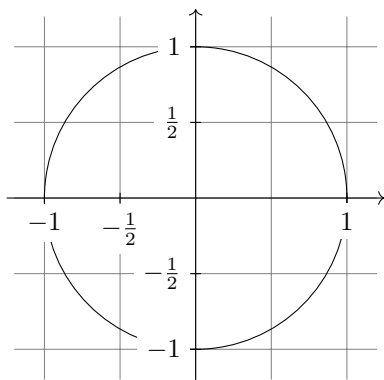
$x = x(t), y = y(t)$  descrive una curva  $\gamma$  nel piano

**Esempio 4.**

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad \begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$y = (t - 1) + 2 = x + 2 \quad r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t = r^2$$

circonferenza con centro nell'origine e raggio  $r$



$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = r^2$$

Se si ha  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$  al variare di  $t \in T \leq R$  si ha una curva nello spazio.

**Esempio 5.**  $\begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \\ z = Kt \end{cases}$  elica circolare

**3.1.5 Funzione composta**

**Definizione 18.** Sia  $\gamma$  la curva  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subset R$  di codominio  $B$

$I \rightarrow B$

Sia  $f(x, y)$  definita in  $A$

$t \in f(x(t), y(t))$  se il codominio di  $\gamma$  coincide con il codominio di  $f(x, y)$ , cioè  $B \subseteq A$

**3.1.6 Teorema della derivata della funzione composta**

**Definizione 19.** Sia  $\gamma$  la curva di punti  $(x(t), y(t))$  e sia derivabile in un intervallo  $I$  (cioè esistono)

Sia  $f(x, y)$  differenziabile in  $x(t)$

Allora la funzione composta da  $F(t) = f(x(t), y(t))$  è derivabile in  $I$  e la sua derivata prima vale:

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \quad (3.2)$$

$$(\nabla f * \Gamma'(t)) \quad \nabla f \equiv (f_x; f_y) \quad \Gamma' \equiv (x'(t); y'(t))$$

**Ipotesi**  $\gamma \equiv (x(t), y(t))$  derivabile in  $I$

$f(x, y)$  differenziabile in  $x(t)$

**Tesi**  $F(t) = f(x(t), y(t))$  derivabile in  $I$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

**Dimostrazione.** Devo dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$

Scrivo l'incremento di  $F(t)$  per un  $h$

$$F(t+h) - F(t) = f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)] \quad \text{Per definizione di funzione composta } F(t)$$

Poiché  $f(x, y)$  è differenziabile si ha

$$f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)] = \underbrace{f_x[x(t), y(t)]}_{f_x} \underbrace{[x(t+h) - x(t)]}_h + \underbrace{f_y[x(t+h), y(t+h)]}_{f_y} \underbrace{[y(t+h) - y(t)]}_k + o\left(\sqrt{\underbrace{[x(t+h) - x(t)]^2}_{h^2} + \underbrace{[y(t+h) - y(t)]^2}_{k^2}}\right)$$

Divido entrambi i membri per  $h$  e calcolo il  $\lim_{h \rightarrow 0}$

**I membro**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)]}{h} = F'(t)$$

**II membro**

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} f_x[x(t), y(t)] \underbrace{\left[ \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right]}_{x'(t)} + \lim_{h \rightarrow 0} f_y[x(t+h), y(t+h)] \underbrace{\left[ \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right]}_{y'(t)} \\ & + \lim_{h \rightarrow 0} o\left(\underbrace{\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2}}_0\right) \\ & F' = f_x[x(t), y(t)]x'(t) + f_y[x(t), y(t)]y'(t) \end{aligned}$$

□

**Esempio 6.**

$$z = x^2 y \quad \begin{cases} x(t) = -t & F(t) = z(x(t), y(t)) = -t^2 * t = -t^3 \\ y(t) = t & F'(t) = z' = -3t^2 \end{cases}$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = -3t^2$$

### 3.2 Teorema differenziabilità delle funzioni composite

**Teorema 5.** Siano  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  funzioni in  $k$  variabili  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ \dots \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{cases} \quad (3.3)$$

Componiamo le funzioni ottenendo la funzione composta

$$f[x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)]$$

Siano  $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$   $n$  funzioni definite in un insieme aperto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e siano derivabili parzialmente rispetto a  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Sia  $f(x_1, \dots, x_n)$  una funzione definita in  $A$  contenente in codominio  $x(D)$  e sia  $f$  differenziabile in  $A$ . Allora la funzione composta  $F(t) = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)$  è derivabile parzialmente rispetto a  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) nel punto  $t$ .

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) + \frac{\partial x_i}{\partial t_i}(t) \text{ (si somma sugli inasci ripetuti)}$$

Inoltre, se  $f$  e  $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$  sono di classe  $C^1$ , anche  $F = f(x(t)) \in C^1$  ed è quindi differenziabile.

$h = k = 2$  coordinate polari

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \varphi \\ t_2 = \varphi \end{cases} \quad f(x, y) \quad \begin{cases} x = x(\varphi, \varphi) \\ y = y(\varphi, \varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x} x \rho + \frac{\partial f}{\partial y} y \rho = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} x \rho + \frac{\partial f}{\partial y} y \rho = \frac{\partial f}{\partial x} (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} (\rho \sin \varphi) \end{aligned}$$

### 3.3 Differenziale secondo

**Definizione 20.**  $d^2 f$  è il differenziale del differenziale primo

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d(f_x h + f_y k) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x h + f_y k)h + \frac{\partial}{\partial x}(f_x h + f_y k)k = \\ &= (f_{xx}h + f_{xy}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k = f_{xx}h^2 + f_{xy}kh + f_{xy}hx + f_{yy}k^2 \end{aligned}$$

Se  $f(x, y) \in C^2$  (derivate parziali II continue) vale il teorema di Schwarz (2.2.1), cioè  $f_{yx} = f_{xy}$  - Il differenziale secondo allora diventa

$$d^2 f = f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2$$

Per ipotesi il gradiente è nullo  $\Delta f(x_0, y_0) = 0$  cioè  $\nabla f(x_0, y_0) \equiv (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \equiv (0, 0)$  ovvero le derivate parziali prime sono nulle  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$  - Ciò comporta l'annullarsi del differenziale primo

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k = 0 * h + 0 * k = 0$$

Per cui nella formula di Taylor si ha:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad \text{Forme quadratiche}$$

Il segno di  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  è lo stesso di  $\frac{1}{2!}d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ , cioè è lo stesso differenziale secondo. Per ipotesi  $\det H_p(x_0, y_0) > 0, (f(x, y) \in C_A^2 \Rightarrow$  vale il teorema di Schwarz)

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

Ciò implica per definizione che la forma quadratica associata ad  $H_p(x_0, y_0)$  è positiva tutto ciò implica  $d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) > 0$

Per cui  $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$

$$\text{cioè } f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad \text{definizione di Minimo relativo (2.3)}$$

quindi  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo relativo

Analogamente, se  $f(x_0, y_0) < 0$  si dimostra che  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo relativo (2.3)

### 3.3.1 Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo

Sia  $f(x, y)$  definita in  $A$ ,  $f(x, y) \in C_A^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$

Se  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

$$\det H_F(x_0, y_0) \begin{cases} > 0 \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 & \text{Minimo relativo} \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 & \text{Massimo relativo} \end{cases} \\ < 0 & \text{Punto di sella (non sono presenti Max e min)} \\ = 0 & \text{Non si vsa se sono presenti Max o min} \end{cases}$$

**Esempio 7.** *Massimi e minimi*

1.  $z = x^2 + y^2$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{in } (0, 0) \quad \nabla f = 0 \text{ può MAX o MIN}$$

$$\det H_f = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

2. *Semisuperfici sferica*  $z = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{-x}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}} \end{cases} \quad \text{dominio } D \quad x^2 + y^2 < c^2$$

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (0, 0) \leftarrow D \text{ può esserci un Max e un Min}$$

Verifico e trovo che  $\det H > 0$   $f_{xx} < 0$  : in  $(0, 0)$  è presente il Max.

3. *Cono*  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

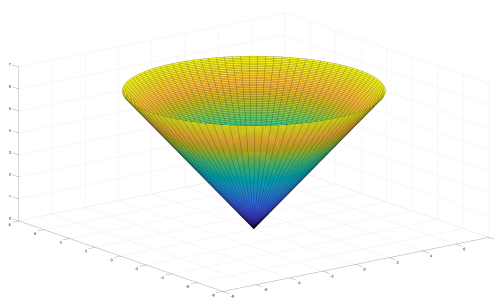


Figura 3.1: Rappresentazione grafica della conica

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$