



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

DICAAR

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA ELETTRICA INDUSTRIALE

ANALISI MATEMATICA 2

edited by

NICOLA FERRU

Unofficial Version

2022 - 2023

[This page is intentionally left blank]

Indice

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| 0.1 | Premesse... | 5 |
| 0.2 | Simboli | 6 |
| 1 | Introduzione | 7 |
| 1.1 | tipologia in \mathbb{R} | 7 |
| 1.1.1 | Distanza | 7 |
| 1.2 | Intorno | 7 |
| 1.2.1 | Insieme chiuso | 8 |
| 1.2.2 | Insieme connesso | 9 |
| 1.2.3 | Insieme convesso | 9 |
| 1.2.4 | Coordinate Polari | 9 |
| 1.2.5 | Limiti e continuità | 9 |
| 1.2.6 | Continuità | 9 |
| 1.2.7 | Esistenza del limite | 9 |
| 1.2.8 | Teorema di esistenza dei valori intermedi | 10 |
| 1.2.9 | Teorema di Weierstrass | 10 |
| 2 | Derivate Parziali | 11 |
| 2.1 | Derivate parziali di primo grado | 11 |
| 2.1.1 | Significato geometrico | 11 |
| 2.2 | Derivata parziale seconde | 12 |
| 2.2.1 | Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione) | 12 |
| 2.3 | Massimi e minimi relativi | 12 |
| 2.3.1 | Teorema di Fermat | 13 |
| 3 | Differenziabilità | 15 |
| 3.0.1 | Tutte le funzioni differenziali sono continue | 16 |
| 3.0.2 | Tutte le funzioni differenziali sono derivabili | 16 |
| 3.0.3 | Le funzioni con derivate parziali continue sono differenziabili | 17 |
| 3.1 | Significato geometrico del differenziale e piano tangente | 17 |
| 3.1.1 | Differenziale primo | 17 |
| 3.1.2 | Piano Tangente | 17 |
| 3.1.3 | Significato geometrico del differenziale primo | 18 |
| 3.1.4 | Funzioni composite | 18 |
| 3.1.5 | Funzione composta | 19 |
| 3.1.6 | Teorema della derivata della funzione composta | 19 |
| 3.2 | Teorema differenziabilità delle funzioni composite | 20 |
| 3.3 | Differenziale secondo | 21 |
| 3.3.1 | Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo | 22 |
| 3.3.2 | Ricerca del massimo e del minimo assoluti | 23 |
| 3.3.3 | Metodo dei moltiplicatori di di Lagrange | 25 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------|-----------|
| 4 | Integrali Doppi e tripli | 27 |
| 4.1 | Domini normali (semplici) | 27 |
| 4.1.1 | Dominio normale rispetto all'asse x | 27 |
| 4.1.2 | Domini Polarmente normale | 27 |
| 4.1.3 | Definizione di integrale doppio | 28 |
| 4.2 | Somme di Riemann | 29 |
| 4.2.1 | Proprietà dell'integrale doppio | 30 |
| 4.2.2 | Formula di riduzione | 30 |
| 4.2.3 | Baricentro di un dominio normale | 31 |
| 4.2.4 | Domini normali in R^3 | 32 |
| 4.3 | Integrali tripli | 32 |
| 4.3.1 | Formule di riduzione per gli integrali tripli | 33 |
| 4.3.2 | Significato geometrico degli integrali | 34 |
| 4.3.3 | Coordinate polari e coordinate cilindriche | 34 |
| 4.3.4 | Interazione per fette | 34 |
| 4.3.5 | Integrali curvilinei | 34 |
| 4.3.6 | Lunghezza di una curva | 36 |
| 4.3.7 | Lunghezza di una curva in forma cartesiana | 37 |
| 4.3.8 | Lunghezza di una curva polare | 37 |
| 4.4 | Ascissa Curvilinea | 37 |
| 4.5 | Integrale corvilineo | 38 |
| 4.5.1 | Definizione di integrale curvilineo | 38 |
| 4.5.2 | Baricentro di una curva | 38 |
| 4.5.3 | Superfici e integrali di superficie | 39 |
| 4.5.4 | Piano tangente e versore normale | 39 |
| 4.5.5 | Orientazione di una superficie | 40 |
| 4.5.6 | Integrale Superficiale | 40 |
| 4.6 | Trasformazione integrali | 41 |
| 4.6.1 | Formule di Green-Gauss | 41 |
| 4.6.2 | Teorema della divergenza | 44 |
| 4.7 | Forma differenziali Lineari | 46 |
| 4.7.1 | Integrazione delle forme differenziali | 46 |
| 4.7.2 | Forme differenziali esatte | 46 |

Elenco delle figure

| | | |
|-----|------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Rappresentazione grafica della conica | 22 |
| 4.1 | Decomposizione del rettangolo R | 28 |
| 4.2 | Esempi di domini polarmente normali | 31 |
| 4.3 | Baricentro di un dominio normale | 31 |
| 4.4 | Differenza tra curva chiusa e aperta | 35 |
| 4.5 | Esempio della prima formula di Green-Gauss | 42 |

0.1 Premesse...

In questo repository, inoltre, sono disponibili le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra*; consiglio a tutte le persone che usufruiranno di questo lavoro, di dare un'occhiata alle dimostrazioni grafiche e stare attenti, in quanto nel tempo potranno essere presenti delle modifiche, così da apportare miglioramenti al contenuto degli stessi appunti. Solitamente il lavoro di revisione viene fatto tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che essendo un progetto volontario ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure essere presenti degli errori. Chiedo pertanto la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare eventuali correzioni. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source, pertanto vengono resi disponibili i sorgenti dei file LaTeX insieme ai PDF compilati.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

| Simbolo | Nome | Simbolo | Nome |
|-------------------|-------------------------------|------------------|--------------------------|
| \in | Appartiene | \ni : | Tale che |
| \notin | Non appartiene | \leq | Minore o uguale |
| \exists | Esiste | \geq | Maggiore o uguale |
| $\exists!$ | Esiste unico | α | alfa |
| \subset | Contenuto strettamente | β | beta |
| \subseteq | Contenuto | γ, Γ | gamma |
| \supset | Contenuto strettamente | δ, Δ | delta |
| \supseteq | Contiene | ϵ | epsilon |
| \Rightarrow | Implica | σ, Σ | sigma |
| \Leftrightarrow | Se e solo se | ρ | rho |
| \neq | Diverso | | |
| \forall | Per ogni | | |

Capitolo 1

Introduzione

1.1 tipologia in R

1.1.1 Distanza

- **R**: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- **R²**: Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza è $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- **R³**: Siano $Q_1(x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- **R⁴**: Siano $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in R^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a=1}^D (x_a y_a)^2}$$

La distanza è un'applicazione $R^n * R^n \rightarrow R^+ \cup \{0\}$ (ha come immagine al più nullo)

Proprietà 1. *questi sono vincolati dalle seguenti proprietà*

- $d(x, y) \geq 0$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$ la distanza è nulla se i due punti coincidono
- $d(x, y) = d(y, x)$ la distanza tra x e y uguale alla distanza da y a x
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ disuguaglianza triangolare.

1.2 Intorno

Definizione 1. *Insieme dei punti che distano da un punto P_0 meno di un δ*

- **R** Intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $P(x)$ generico punto $d(P_0, P) < \delta$

$$|x - x_0| < \delta$$

- **R²**

$$P_0(x_0, y_0)$$

$$P(x, y)$$

$$d(P_0, P) < \delta$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Cerchio di centro P_0 e di perimetro δ privato della circonferenza.

- R^3

$$Q_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$Q(x, y, z)$$

$$d(Q, Q_0) < \delta$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Sfera di centro Q_0 e raggio δ privata della sua superficie.

Punto interno P_0 è interno all'insieme D se:

$$\exists I_{P_0, \delta} \subset D \quad (1.1)$$

Esiste un intorno di P_0 di ampiezza δ incluso nell'insieme D , cioè l'interno contiene tutti i punti dell'insieme.

Punto esterno P_0 è esterno all'insieme D se è interno al complementare di D , CD

$$\exists I_{P_0, \delta} \subset CD \quad (1.2)$$

esiste un intorno di P_0 di ampiezza δ incluso nel complementare dell'interno D

Punto di frontiera P_0 è un punto di frontiera se

$$P_0 \in F_D \rightarrow \text{frontiera dell'insieme } D \quad (1.3)$$

$\forall I_{F_D}$ in esso cadono punti di D e punti di CD qualunque intorno, in esso cadono punti dell'insieme D e del suo complementare.

Punto di accumulazione P_0 è un punto di accumulazione se $\forall I_{P_0}$ cade in un punto $\in D$, se cade un punto di D in I_{P_0} , allora ne cadono infiniti.

Punto isolato P_0 è un punto isolato se $\exists I_{P_0, \delta}$ in cui non cade nessun punto dell'insieme.

Insieme Aperto

Definizione 2. A si dice aperto se $\forall P \in A \exists I_P \subset A$ per qualunque punto di A esiste un intorno incluso in A , cioè ogni intorno di P è formato da punti dell'insieme aperto è formato da punti interni
 $]a : b[; x^2 + y^2 < r^2$ cerchio senza circonferenza:

$$\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{triangolo senza lati} \quad (1.4)$$

1.2.1 Insieme chiuso

Definizione 3. A si dice chiuso se coincide con il suo insieme chiusura, che è formato dall'insieme teso più gli eventuali punti di accumulazione che non gli appartengono. Un insieme è chiuso quando contiene i suoi punti di accumulazione. $[a : b]; x^2 + y^2 \leq r^2$ cerchio più circonferenza:

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{triangolo con lati} \quad (1.5)$$

1.2.2 Insieme connesso

Definizione 4. un insieme A si dice connesso se e solo se $\forall P_1, P_2 \subset A \exists \Gamma(P_1, P_2) \subset A$. A è connesso se per qualunque P_1, P_2 di A esiste una spezzata inclusa in A

A si dice **semplicemente connessa** se qualunque chiusa inclusa in A è frontiera dell'insieme.

1.2.3 Insieme convesso

Definizione 5. un insieme A si dice convesso se per ogni coppia di $x, y \in A$ il segmento \bar{xy} è contenuto in A

Insiemi Limitati In R : A è limitato se $\forall x \in A : x \leq M$ **Insieme illimitato** In R : $[2; +\infty[$ illimitato

$[-1; 1]$ limitato

$$\text{In } R^2 : \text{illimitato} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

In R^2 : A è limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine

$$\exists M > 0 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq M \quad (1.6)$$

1.2.4 Coordinate Polari

Definizione 6. in molti casi è utile utilizzare una funzione in coordinate polari, sia $P(x, y)$ un punto nel piano; esso è individuato univocamente da una coppia di valori: le coordinate cartesiane X e y oppure le coordinate polari ρ e θ .

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

per capire, facciamo un esempio

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \equiv f(\rho, \theta) = \rho^3 \frac{\cos^2 \theta}{e^2} \quad (1.8)$$

1.2.5 Limiti e continuità

Definizione 7. $f(x, y)$ una funzione definito in D e siano (x_0, y_0) punto di accumulazione per D

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \quad \forall \xi > 0 \exists \delta_{(E)} > 0 : \forall I_{(x_0, y_0), \delta} \setminus \{(x_0, y_0)\}, \forall (x, y) \in I \setminus \{(x_0, y_0)\} | f(x, y) - l < \xi \quad (1.9)$$

Per qualunque $\xi > 0$ esiste un $\delta(\xi) > 0$ per cui qualunque intorno di (x_0, y_0) al più x_0, y_0 e per qualunque (x_0, y_0) di quast'intorno la funzione dista da l meno di ξ .

1.2.6 Continuità

Definizione 8. Sia $f(x, y)$ definita in D , $f(x, y)$ si definisce **continuo** in $(x_0, y_0) \in D$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1.10)$$

1.2.7 Esistenza del limite

Definizione 9. Calcolando il limite con f in forma polare esiste se non dipende da θ . È possibile calcolare il limite di f in forma cartesiano nel segmento nodo. Anziché considerare tutti i punti dell'interno, si

considerino quella di una generica retta.

$$y = y_0 + m(x - x_0) \quad (1.11)$$

- Se il limite dipende da m esso *non esiste*.
- Se non dipende da m *esiste*.

1.2.8 Teorema di esistenza dei valori intermedi

Teorema 1. Sia $f(x, y)$ definita in un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ assume tutti i valori compresi fra il massimo ed il minimo di $f(x, y)$ su D

1.2.9 Teorema di Weierstrass

Teorema 2. Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che ammette massimo e minimo assoluto.

Sia $f(x, y)$ una funzione continua in D e sia D un insieme chiuso e limitato. Allora $f(x, y)$ ha massimo e minimo assoluto in D .

Capitolo 2

Derivate Parziali

2.1 Derivate parziali di primo grado

Definizione 10. Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un punto interno ad A . Consideriamo un intorno circolare di $P(x_0, y_0)$, $I(x_0, y_0)$, δ , in netto sulla retta $y = y_0$ e incrementa la x_0 passando da x_0 a $x_0 + h$. Ho così un punto $P(x_0 + h, y_0) \in A$. Definisco il rapporto di $f(x, y)$ nella sola x

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2.1)$$

$f(x, y)$ si definisce **derivabile parzialmente** se $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$ reale e finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2.2)$$

Analogamente, considero un intorno di $P(x_0, y_0)$, $I(x_0, y_0)$, δ . Mi ruoto sulla retta $x = x_0$ e incremento la y_0 passando da y_0 a $y_0 + k$. Ho così un punto $P(x_0, y_0 + k) \in A$. Definisco il rapporto incrementale di $f(x, y)$ nella sola y

$$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

derivabile parzialmente se $\exists \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = l \in \mathbb{R}$ reale e finito.

Se in un punto (x, y) esistono entrambi le derivate parziali si dice che la funzione è **derivabile** in (x, y) inoltre se f è derivabile in ogni punto $(x, y) \in A$, si dice che f è derivabile in A .

2.1.1 Significato geometrico

- La derivata prima parziale in P è $f_x(x_0, y_0)$, è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x, y)$ con il piano $y = y_0$
- La derivata prima parziale in P , $f_y(x_0, y_0)$ è la tangente alla curva che si crea intersecando $f(x, y)$ con il piano $x = x_0$

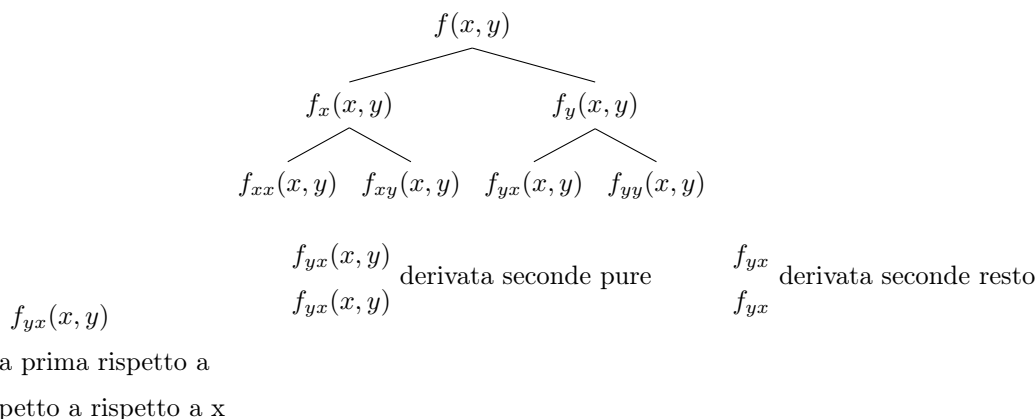
Se esistono entrambe allora le due rette tangenti alle sezioni della funzione individuano il piano tangente al solido nel punto $P(x_0, y_0, z)$

2.2 Derivata parziale seconde

Definizione 11. Sia $f(x, y)$ una derivabile e siano definite in un dominio le due derivate parziali

$$f_x(x, y) \quad f_y(x, y)$$

Tali funzioni passano a loro volta essere derivabili e si ottengono così le derivate seconde parziali di $f(x, y)$



con n variabili si hanno n^2 derivate seconde parziali – Spesso le derivate seconde sono disposte in una matrice quadrata, detta **hessiana**, con il simbolo D^2

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ n variabili} \rightarrow n * n \quad (2.3)$$

Se esistono le quanto derivate di f , nel punto (x, y) , si dice che f è derivabile due volte in (x, y) . Se ciò accade $\forall (x, y) \in A$, f è derivabile due volte nell'insieme A .

2.2.1 Teorema di Schwarz (Dell'invertibilità dell'ordine di derivazione)

Teorema 3. Sia $f(x, y)$ definita in D e derivabile due volte $\forall (x, y) \in D$.

Se le derivate seconde in (x_0, y_0) $f_{xy}(x_0, y_0)$ e $f_{yx}(x_0, y_0)$ sono continue in (x_0, y_0) allora risulta $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

In generale se vale il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana può essere scritta come

$$H = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\det H = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = f_{xx} * f_{yy} - (f_{yx})^2$$

2.3 Massimi e minimi relativi

Definizione 12. Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un insieme D , un punto $p_0(x_0, y_0) \in D$, si dice di **massimo relativo** per la funzione se esiste intorno circolare di P_0 per cui il valore assunto della funzione nei punti dell'interno è minore o uguale a quello assunto in P_0 .

Analogamente un punto $P_0(x_0, y_0)$ si dice di **minimo relativo** per la funzione se esiste un intorno circolare di P_0 per cui il valore assunto dalla funzione nei punti dell'interno è maggiore o uguale.

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \text{Massimo relativo}$$

$$\exists I_{(x,y),\delta} : \forall (x, y) \in I_{(x,y),\delta} \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \text{Minimo relativo}$$

2.3.1 Teorema di Fermat

Teorema 4. Sia $f(x, y)$ definita in D e derivabile in un punto $P_0(x_0, y_0)$

Se in $P_0(x_0, y_0)$ $f(x, y)$ ha un massimo o un minimo relativo, allora le derivate prime parziali si annullano ($\nabla f = 0$ gradiente nullo). La pendenza della tangente è zero un massimo o minimo.

Gradiente

Sia $f(x, y)$ una funzione derivabile in un punto (x, y) , cioè esistano in (x, y) le due derivate parziali f_x e f_y .

Si definisce **gradiente** di $f(x, y)$ nel punto (x, y) : il vettore ∇f le cui componenti sono le derivate parziali di $f(x, y)$.

$$\nabla f(x, y) \equiv (f_x(x, y); f_y(x, y)) \quad (2.4)$$

Massimi e minimi – condizione necessaria

Definizione 13. Se $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di massimo/minimo relativo il gradiente è nullo. Così di massimo o minimo relativo interni al dominio della funzione f vanno ricercati tra i punti che annullano la funzione f . Pertanto un punto critico per una funzione derivabile è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.

Capitolo 3

Differenziabilità

Definizione 14. Sia $f(x, y)$ definita in D e $P_0(x_0, y_0) \in D$. In P_0 , $z = f(x_0, y_0)$, incremento la x_0 di un h e la y_0 di un k .

Così passo da $P_0(x_0, y_0)$ a $P(x_0 + h, y_0 + k)$. La funzione avrà avuto un certo incremento

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Si definisce **differenziale** in $P_0(x_0, y_0)$ se $\exists A, B \in \mathbb{R} : f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$, cioè se esistono due costanti reali A e B per cui l'incremento di $f(x, y)$ che si ha passando da P_0 a P si può riscrivere come somma di una parte lineare $Ah + Bk$ e di un infinitesimo di ordine superiore a $\sqrt{h^2 + k^2}$ (distanza di P_0 da P).

Se $f(x, y)$ ammette derivate prime parziali le due costanti A e B sono:

$$\begin{cases} A = f_x(x_0, y_0) \\ B = f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

e il differenziale diventa

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (3.1)$$

Esempio 1. verificare che $z = xy$ è differenziale $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, se z è differenziale $\rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ dove

$$\begin{cases} A = f_x(x_0, y_0) \\ B = f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

se z è derivabile in (x_0, y_0) .

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{(x_0 + h)(y_0 + k)}_{\text{Sostituisco}} = x_0 y_0 + x_0 k + y_0 h + hk$$

$$\begin{array}{lll} f_x = y & f_x(x_0, y_0) = y_0 & f_y = x \\ f \text{ è derivabile in } (x_0, y_0) & A = y_0 & f_y(x_0, y_0) = x_0 \\ & & B = x_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ x_0 y_0 + x_0 k + y_0 h + hk - x_0 y_0 &= y_0 h + x_0 k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ hk &= o(\sqrt{h^2 + k^2}) \end{aligned}$$

detto quindi dimostrare che $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ e poi passo alle coordinate polari:

$$\begin{aligned} h &= \rho \cos \theta \\ k &= \rho \sin \theta \\ e^2 &= h^2 + k^2 \\ h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, \rho &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\cancel{\rho} \cos \theta * \cancel{\rho} \sin \theta}{\cancel{\rho}^2} \quad z = xy \text{ differenziale } \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

3.0.1 Tutte le funzioni differenziali sono continue

Sia $f(x, y)$ differenziabile (x_0, y_0) , allora $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Ip:

$f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th:

$f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Se $f(x_0, y_0)$ è continua in (x_0, y_0)

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0$$

Calcolo il limite a destra per $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \underbrace{Ah}_0 + \underbrace{Bk}_0 + \underbrace{o(\sqrt{h^2 + k^2})}_0 = 0 \text{ per cui } f(x, y) \text{ è continua in } (x_0, y_0)$$

□

3.0.2 Tutte le funzioni differenziali sono derivabili

Sia $f(x, y)$ differenziabile in un punto (x_0, y_0) . Allora $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Ip:

$f(x, y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Th:

$f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Poiché $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) vale la relazione

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

divido entrambi per h e calcolo il limite per $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x} = \underbrace{\frac{Ah + o(\sqrt{h^2})}{h}}_A$$

$$f_x(x_0, y_0) = A$$

Analogamente si dimostra che $f_y(x_0, y_0) = B$. Quindi dato che esistono f_x e f_y in (x_0, y_0) , $f(x, y)$ è derivabile in (x_0, y_0) e in oltre $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$ □

Esercizio 1. Dimostrare che $z = x^2 = y^2$ è differenziabile in $(1;1)$ - Per definire

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = (1 + h)^2 = (1 + k)^2 \quad f(x_0, y_0) = 1 + 1 = 2$$

$$A = f(1, 1) = |2x|_{x=1} = 2 \quad B = f_y(1, 1) = |2y|_{y=1} = 2$$

$$\text{Così ho } (1 + h)^2 + (1 + k)^2 - 2 = 2h + 2k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$h^2 + k^2 = o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$h = e \cos \theta$$

$$k = e \sin \theta$$

$$e^2 = h^2 + k^2$$

$$k \rightarrow 0, h \rightarrow 0, e \rightarrow 0$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{e^2}{|e|} = 0 \rightarrow z = x^2 + y^2 \text{ è differenziabile in } (1, 1)$$

3.0.3 Le funzioni con derivate parziali continue sono differenziabili

Definizione 15. Sia $f(x, y)$ definita in D_1 e sia derivabile in D . Sono f_x e f_y continue in D , allora $f(x, y)$ è differenziale in D .

Condizione sufficiente per la differenzialità

Definizione 16. Affinché una funzione sia differenziabile in (x_0, y_0) basta che in (x_0, y_0) abbia derivate. In questo modo per determinare se una funzione è differenziabile in un punto si calcola le derivate parziali in quel punto, se esistono la funzione è differenziabile, in caso contrario non è derivabile.

Esempio 2. Dimostrare che $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ non è differenziabile in $(0; 0)$

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D : x^2 + y^2 > 0$$

$$z_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D : x^2 + y^2 > 0$$

Sia z_x sia z_y sono definite per $x^2 + y^2 > 0$ cioè nei punti esterni al cerchio di centro $(0, 0)$ e 1, frontiera esclusa. Il punto $(0, 0)$ è interno al cerchio, quindi in esso $f(x, y)$ non è derivabile. Per cui in punto $(0, 0)$ $f(x, y)$ non è neanche differenziabile.

3.1 Significato geometrico del differenziale e piano tangente

3.1.1 Differenziale primo

È la parte lineare nella definizione di differenziale

$$f(x, y) \text{ definita in } D \quad (x_0, y_0) \in D$$

$f(x, y)$ differenziale in (x_0, y_0) se

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k}_{\text{parte lineare}} + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

3.1.2 Piano Tangente

La $f(x, y)$ una funzione derivabile in (x_0, y_0) , il piano tangente alla funzione (x_0, y_0, z_0) ha equazione:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

\vec{n} direzione ortogonale al piano tangente, è unitario

$$\vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

poiché $\nabla f(f_x, f_y) \quad |\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 \rightarrow \vec{n} = \frac{(-f_{x_i} - f_{y_i} 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$

Esempio 3. $z = x^2 + y^2 \quad (1, 1)$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z_0 = f(1, 1) = 1 + 1 = 2 \quad z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1) \quad f_x = 2x|_{1,1} = 2$$

$$f_y = 2y|_{1,1} = 2$$

3.1.3 Significato geometrico del differenziale primo

Passando da P_0 a P $f(x)$ si incrementa da $f(x_0)$ a $f(x_0 + h)$ – Il differenziale primo dy indica la variazione che subisce la retta tangente passando da P_0 a P .

L'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ si approssima sempre più con dy per incrementi $h \rightarrow 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x)(x - x_0) - f(x_0) + o|x|$$

L'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ differisce dal valore $f'(x)(x - x_0)$ [retta tangente] per un $o|x|$, $o|x|$ ci dà l'errore.

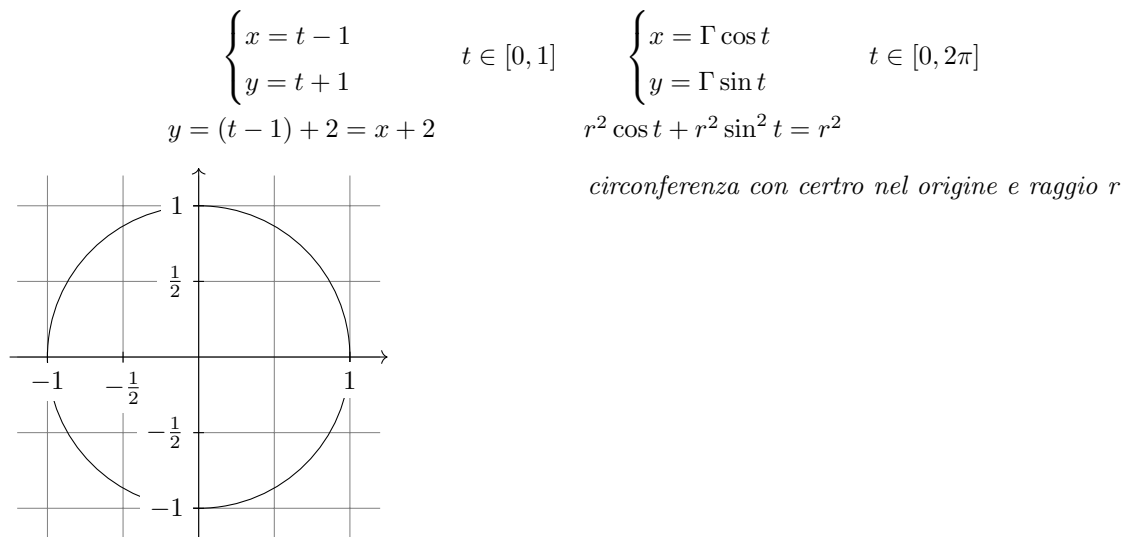
3.1.4 Funzioni composite

Definizione 17. Sia $x(t)$ e $y(t)$ due funzioni reali definite al variare in un intervallo I di \mathbb{R} . $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ corrisponde il punto $(x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x = x(t) & \text{Rappresenta nel piano una curva in frontiera} \\ y = y(t) & \text{Parametrica} \end{cases}$$

Al variare di $t \in I \subseteq \mathbb{R}$

$x = x(t), y = y(t)$ descrive una curva γ nel piano

Esempio 4.

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = r^2$$

Se si ha $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ al variare di $t \in T \leq R$ si ha una curva nello spazio.

Esempio 5. $\begin{cases} x = \Gamma \cos t \\ y = \Gamma \sin t \\ z = Kt \end{cases}$ elica circolare

3.1.5 Funzione composta

Definizione 18. Sia γ la curva $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subset R$ di codominio B

$I \rightarrow B$

Sia $f(x, y)$ definita in A

$t \in f(x(t), y(t))$ se il codominio di γ coincide con il codominio di $f(x, y)$, cioè $B \subseteq A$

3.1.6 Teorema della derivata della funzione composta

Definizione 19. Sia γ la curva di punti $(x(t), y(t))$ e sia derivabile in un intervallo I (cioè esistono)

Sia $f(x, y)$ differenziabile in $x(t)$

Allora la funzione composta da $F(t) = f(x(t), y(t))$ è derivabile in I e la sua derivata prima vale:

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \quad (3.2)$$

$$(\nabla f * \Gamma'(t)) \quad \nabla f \equiv (f_x; f_y) \quad \Gamma' \equiv (x'(t); y'(t))$$

Ipotesi $\gamma \equiv (x(t), y(t))$ derivabile in I

$f(x, y)$ differenziabile in $x(t)$

Tesi $F(t) = f(x(t), y(t))$ derivabile in I

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

Dimostrazione. Devo dimostrare che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$

Scrivo l'incremento di $F(t)$ per un h

$$F(t+h) - F(t) = f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)] \quad \text{Per definizione di funzione composta } F(t)$$

Poiché $f(x, y)$ è differenziabile si ha

$$f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)] = f_x \underbrace{[x(t), y(t)]}_{f_x} \underbrace{[x(t+h) - x(t)]}_h + f_y \underbrace{[x(t+h) - y(t+h)]}_{f_y} \underbrace{[y(t+h) - y(t)]}_k + o \left(\sqrt{\underbrace{[x(t+h) - x(t)]^2}_{h^2} + \underbrace{[y(t+h) - y(t)]^2}_{k^2}} \right)$$

Divido entrambi i membri per h e calcolo il $\lim_{h \rightarrow 0}$

I membro

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x(t+h), y(t+h)] - f[x(t), y(t)]}{h} = F'(t)$$

II membro

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} f_x[x(t), y(t)] \underbrace{\left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right]}_{x'(t)} + \lim_{h \rightarrow 0} f_y[x(t+h) - y(t+h)] \underbrace{\left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right]}_{y'(t)} \\ & + \lim_{h \rightarrow 0} o \left(\underbrace{\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2}}_0 \right) \\ & F' = f_x[x(t), y(t)]x'(t) + f_y[x(t), y(t)]y'(t) \end{aligned}$$

□

Esempio 6.

$$z = x^2 y \quad \begin{cases} x(t) = -t & F(t) = z(x(t), y(t)) = -t^2 * t = -t^3 \\ y(t) = t & F'(t) = z' = -3t^2 \end{cases}$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = -3t^2$$

3.2 Teorema differenziabilità delle funzioni composite

Teorema 5. Siano $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n funzioni in k variabili $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ \dots \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{cases} \quad (3.3)$$

Componiamo le funzioni ottenendo la funzione composta

$$f[x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)]$$

Siano $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$ n funzioni definite in un insieme aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano derivabili parzialmente rispetto a t_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ una funzione definita in A contenente in codominio $x(D)$ e sia f differenziabile in A . Allora la funzione composta $F(t) = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)$ è derivabile parzialmente rispetto a t_i ($i = 1, 2, \dots, k$) nel punto t .

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) + \frac{\partial x_i}{\partial t_i}(t) \text{ (si somma sugli inasci ripetuti)}$$

Inoltre, se f e $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$ sono di classe C^1 , anche $F = f(x(t)) \in C^1$ ed è quindi differenziabile.

$h = k = 2$ coordinate polari

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \varphi \\ t_2 = \varphi \end{cases} \quad f(x, y) \quad \begin{cases} x = x(\varphi, \varphi) \\ y = y(\varphi, \varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x} x \rho + \frac{\partial f}{\partial y} y \rho = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} x \rho + \frac{\partial f}{\partial y} y \rho = \frac{\partial f}{\partial x} (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} (\rho \sin \varphi) \end{aligned}$$

3.3 Differenziale secondo

Definizione 20. $d^2 f$ è il differenziale del differenziale primo

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d(f_x h + f_y k) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x h + f_y k)h + \frac{\partial}{\partial x}(f_x h + f_y k)k = \\ &= (f_{xx}h + f_{xy}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k = f_{xx}h^2 + f_{xy}kh + f_{xy}hx + f_{yy}k^2 \end{aligned}$$

Se $f(x, y) \in C^2$ (derivate parziali II continue) vale il teorema di Schwarz (2.2.1), cioè $f_{yx} = f_{xy}$ - Il differenziale secondo allora diventa

$$d^2 f = f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2$$

Per ipotesi il gradiente è nullo $\Delta f(x_0, y_0) = 0$ cioè $\nabla f(x_0, y_0) \equiv (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \equiv (0, 0)$ ovvero le derivate parziali prime sono nulle $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ - Ciò comporta l'annullarsi del differenziale primo

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k = 0 * h + 0 * k = 0$$

Per cui nella formula di Taylor si ha:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad \text{Forme quadratiche}$$

Il segno di $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ è lo stesso di $\frac{1}{2!}d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$, cioè è lo stesso differenziale secondo. Per ipotesi $\det H_p(x_0, y_0) > 0$, ($f(x, y) \in C_A^2 \Rightarrow$ vale il teorema di Schwarz)

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

Ciò implica per definizione che la forma quadratica associata ad $H_p(x_0, y_0)$ è positiva tutto ciò implica $d^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) > 0$

Per cui $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$

$$\text{cioè } f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad \text{definizione di Minimo relativo (2.3)}$$

quindi (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo

Analogamente, se $f(x_0, y_0) < 0$ si dimostra che (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo (2.3)

3.3.1 Condizioni sufficiente per l'esistenza di minimo e massimo relativo

Sia $f(x, y)$ definita in A , $f(x, y) \in C_A^2$, $(x_0, y_0) \in A$

Se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

$$\det H_F(x_0, y_0) \begin{cases} > 0 \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 & \text{Minimo relativo} \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 & \text{Massimo relativo} \end{cases} \\ < 0 & \text{Punto di sella (non sono presenti Max e min)} \\ = 0 & \text{Non si vsa se sono presenti Max o min} \end{cases}$$

Esempio 7. *Massimi e minimi*

1. $z = x^2 + y^2$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{in } (0, 0) \quad \nabla f = 0 \text{ può MAX o MIN}$$

$$\det H_f = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

2. *Semisuperfici sferica* $z = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{-x}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{\Gamma^2 - x^2 - y^2}} \end{cases} \quad \text{dominio } D \quad x^2 + y^2 < \Gamma^2$$

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (0, 0) \leftarrow D \text{ può esserci un Max e un Min}$$

Verifico e trovo che $\det H > 0$ $f_{xx} < 0$: in $(0, 0)$ è presente il Max.

3. *Cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

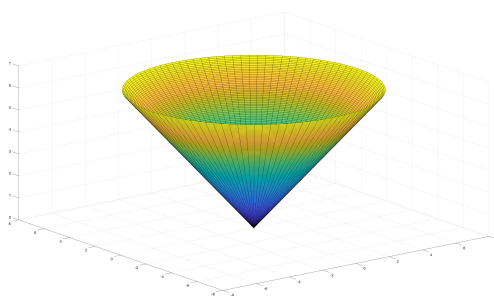


Figura 3.1: Rappresentazione grafica della conica

$$\nabla f = 0 \begin{cases} z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Nota 1. sarebbe $(0,0)$ ma il dominio delle derivate $x^2 + y^2 > 0$ cioè $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ in $(0, 0)$ non è derivabile.

Sappiamo¹ che in $(0, 0)$ c'è un **minimo assoluto**

¹si vede geometricamente

$$4. z = x^4 + y^4$$

$$\begin{cases} z_x = 4x^3 = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{in } (0,0) \text{ può esserci Max/Min relativo}$$

$$\det H = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} f_{xx}(0,0) &= 12x^2|_{0,0} = 0 \\ f_{yy}(0,0) &= 12y^2|_{0,0} = 0 \end{aligned}$$

$\det H = 0 \rightarrow$ non so se in $(0,0)$ c'è un massimo o un minimo relativo.

Per definire se esiste un massimo o un minimo relativo uso:

$$\begin{aligned} \min f(x_0, y_0) &\leq f(x, y) & 0 \leq x^4 + y^4 & \quad x^4 + y^4 \geq 0 & \quad \underline{SI} \quad \forall (x, y) \text{ risulta da } x^4 + y^4 \geq 0(0,0) \min \\ \max f(x_0, y_0) &\geq f(x, y) & 0 \geq x^4 + y^4 & \quad x^4 + y^4 \leq 0 & \quad \underline{NO} \end{aligned}$$

3.3.2 Ricerca del massimo e del minimo assoluti

Condizioni sufficienti per l'esistenza del Massimo e del minimo assoluto

Teorema di Weierstrass

Teorema 6. Sia $f(x,y)$ definita in D , i continua in D chiuso e limitato, allora il minimo e massimo assoluto in D .

Ipotesi:

$$f \in C_D^0$$

Tesi: $\exists \min$ con $m = f(x_1, y_1), M = f(x_2, y_2)$ tale che $m \leq f(x, y) \leq M$

D chiuso e limitato

Ricerca dei punti di Massimo e minimo assoluti:

- nei punti di massimo o minimo relativo;
- nei punti di non derivabilità;
- nei punti di frontiera.

Vanno ricercati quindi nei seguenti modi:

1. $\nabla f = 0$ dove il gradiente si annulla;
2. $\nexists \nabla f$ dove il gradiente non esiste;
3. sulla FD sulla frontiera.

Studio sulla frontiera

Sia ξ una superficie definita in un insieme D e sia FD la mia frontiera

La frontiera FD è una curva² e suoi punti limitano l'iperbole ξ .

Possiamo definire la frontiera in forma parametrica

$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

²o insieme di curve

Calcolo la funzione $f(x, y)$ sui punti della frontiera

$$f(x, y) \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t)) \text{ funzione di 1 variabile} \quad (3.4)$$

studio del massimo e minimo per $F(t) = 0 \begin{cases} F'' > 0 \text{ min} \\ F'' < 0 \text{ max} \end{cases}$

Calcolo i valori della funzione nei punti di Massimo/minimo e li confronto con i valori Massimo/minimo relativi nel dominio e i valori nei punti di non derivabilità. La frontiera può anche essere in forma cartesiana

$$y = y(x) \quad a \leq x \leq b \quad (3.5)$$

Calcolo la funzione nei punti della frontiera e procedo come visto prima $f(x, y) \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t))$

Esempio 8. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = 1 + 2x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ in $D : \{x^2 + y^2 \leq \Delta\}$

1. $\nabla f = 0$

2. ∇f

3. FD

$$1. \nabla f(x, y) = 0 \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \begin{cases} 4x + \frac{x}{|x|} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\nabla f = 0$ in $(0, 0)$ che non è nel C.E. delle derivate parziali per cui $\nabla f \neq 0 \forall (x, y) \in A$ A dominio f_x e f_y

2. ∇f le derivate parziali perime sono definite $\forall (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 0$ cioè in $R^2 - \{0, 0\}$

$(0, 0)$ pnto di non derivabilità $f(0, 0) = 1$

3. FD

$$D : \{x^2 + y^2 \leq 4\} \quad FD : x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Calcolo $f(x, y)$ sui punti di frontiera

$$f(x, y) = F(t) = 1 + 2(2 \cos t)^2 + \sqrt{(2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} = 1 + 8 \cos^2 t + 2 = 3 + 8 \cos^2 t$$

Calcolo $F(t)$ agli estremi $t \in [0; 2\pi]$ $F(0) = 3 + 8 = 11$ $F(2\pi) = 3 + 8 = 11$

Studio del massimo e del minimo di $F(t)$

$$F'(t) = 0 \quad 16 \cos t (\sin t) = -16 \sin t \cos t = 0 \quad t = 0 \quad t = \pi \quad t = \frac{\pi}{2} t = \frac{3\pi}{2}$$

$$F''(t) = 16(\cos t \cos t - \sin t \sin t) = 16(\sin^2 t - \cos^2 t)$$

Ottenuti mettendo a $F(t)$ e valori $\begin{cases} F''(\pi) = 16(-1) = -16 < 0 \text{ max su } FD & F(\pi) = 3 + 8 = 11 \\ \text{dove ci dovrebbero essere un} & \\ \text{massimo e un minimo} & \begin{cases} F''(\frac{\pi}{2}) = 16(-1) = -16 > 0 \text{ min su } FD & F(\frac{\pi}{2}) = 3 \\ F''(\frac{3\pi}{2}) = 16(-1) = -16 < 0 \text{ min su } FD & F(\frac{3\pi}{2}) = 3 \end{cases} \end{cases}$

Ho ottenuto i seguenti valori

1. $(x, y) \equiv (0, 0)$ il min è 1 e viene assunto in $(0, 0)$
11. $t = 0, \pi, 2\pi$ il max è 11 e viene assunti in $\begin{cases} x = 2 \cos 0 \\ y = 2 \sin 0 \end{cases}$
3. $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ $\begin{cases} x = 2 \cos \pi \\ y = 2 \sin \pi \end{cases} (-2, 0) \quad \begin{cases} x = 2 \cos 2\pi \\ y = 2 \sin 2\pi \end{cases} (2, 0)$

3.3.3 Metodo dei moltiplicatori di di Lagrange

Nel caso in cui $g(x, y) = 0$ non definisca una funzione implicata, per trovare i massimi e minimi vincolati si introduce una funzione ausiliaria, detta lagrangiana, così definita:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (3.6)$$

$F(x, y, \lambda)$ è combinazione lineare delle funzioni $f(x, y)$ E $g(x, y)$ – Il parametro λ prende il nome di **Moltiplicatore di Lagrange**. I punti di massimo vincolati sono quelli in cui il gradiente di $F(x, y, z)$ si annulla ovvero...

$$\nabla F_{(x,y,z)} = 0 \begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) \\ F_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Si risolve questo sistema di tre equazioni in tre variabili e il valore massimo della funzione è calcolata nei punti soluzioni è il massimo calcolato e il valore minimo della funzione calcolata nei punti soluzione è il massimo vincolato.

Capitolo 4

Integrali Doppi e tripli

4.1 Domini normali (semplici)

Definizione 21. *I domini delle funzioni a più variabili possono presentare una forma di regolarità per cui è possibile delimitare la regione da intervalli e grafici di funzione. Si parla quindi di dominio semplice o normale rispetto alla variabile delimitabile da un intervallo. La normalità di un dominio è molto importante in molte definizioni di integrale multiplo e della sua risoluzione tramite le formule di riduzione. Inoltre la presenza di un dominio regolare permette ulteriori teoremi e formule d'integrazione, come le formule di Gauss-Green, il teorema della divergenza e il teorema del rotore.*

4.1.1 Dominio normale rispetto all'asse x

Il dominio A si definisce **normale** rispetto all'asse x se è così definito:

$$A = \begin{cases} a \leq x \leq b & x \text{ varia in un intervallo} \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) & y \text{ varia tra due funzioni di } x \end{cases} \quad (4.1)$$

Esempio 9.

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$$

Il dominio B si definisce **normale** rispetto all'asse x se è così definito:

$$A = \begin{cases} c \leq y \leq d & y \text{ varia in un intervallo} \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) & x \text{ varia tra due funzioni di } y \end{cases} \quad (4.2)$$

Esempio 10.

$$D = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y < x < \sqrt{y} \end{cases}$$

4.1.2 Domini Polarmente normale

Il dominio C si definisce polarmente normale se è costantemente definito:

$$C = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \rho(\theta) \leq \varphi_2(\theta) \end{cases} \quad (4.3)$$

Esempio 11.

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad (4.4)$$

l'angolo varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, il segmento φ dipende dall'angolo

$$\begin{aligned}\theta = 0 & \text{ è } \max \varphi = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \text{ è } \min \varphi = 0 \\ \varphi = 2 \cos \theta & \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2 \cos \theta \end{cases}\end{aligned}$$

corona circolare $\varphi = r$ $\varphi = R$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ r \leq \varphi \leq R \end{cases}$$

4.1.3 Definizione di integrale doppio

Definizione 22. Sia $f(x,y)$ una funzione limitata nel rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$, coordinata in $[a,b]$ e di seconda coordinata in $[c,d]$. Deconpongo regolarmente gli intervalli $[a,b]$ e $[c,d]$,

decomponendo $[a,b]$ si ha $D_1 = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$

decomponendo $[c,d]$ si ha $D_2 = \{y_0 = c, y_1, y_2, \dots, y_n = d\}$

Il prodotto cartesiano $D = D_1 * D_2$ è una semidivisione del rettangolo R

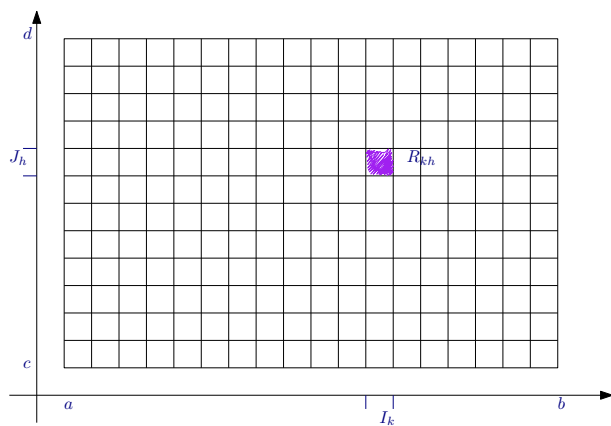


Figura 4.1: Decomposizione del rettangolo R

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \text{ in } D_1 (k = 1, \dots, n)$$

$$J_h = [y_{h-1}, y_h] \text{ in } D_2 (h = 1, \dots, n)$$

Il prodotto cartesiano $I_k * J_h$ individua il generico subrettangolo R_{kh} della semidivisione.

Prendo un generico punto del subrettangolo $R_{kh}(x_k, y_h)$ e faccio il seguente prodotto:

$$f(x_k, y_h) * \text{mis} R_{kh} \text{ con } \text{mis} R_{kh} = \text{mis} I_k * \text{mis} J_h \text{ area del subrettangolo}$$

Con l'integrale doppio considero il volume del parallelepipedo.

Geometricamente considera il rettangolo R_{kh} e la parte di superficie $f(x,y)$ che vi si presenta il prodotto $f(x_k, y_h) * \text{mis} R_{kh}$ è il volume del parallelepipedo di base R_{kh} e altezza $f(x_k, y_h)$.

4.2 Somme di Riemann

Definisco le somme di Riemann $\sum_{k=h=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_h) * R_{kh}$ ciò rappresenta la somma di tutti i volumi dei parallelepipedi di base R_{kh} e altezza $f(x_k, y_h)$ che si possono ottenere nel rettangolo R .

Infittisco le decomposizioni D_1 e D_2 ($m \rightarrow \infty; n \rightarrow \infty$), ottenendo così un numero sempre maggiore di subrettangoli di ampiezza via via minore.

$$misR_{kn} = misI_k * misI_n = \frac{b-a}{m} * \frac{d-c}{n} \rightarrow 0 \text{ per } m, n \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

Con l'infittirsi della decomposizione, aumenta la precisione con cui ciascun parallelepipedo approssima il volume sotto al grafico delle funzione in ogni R_{kh} .

Al limite, le somme di Riemann daranno il volume sotto al grafico della funzione in un certo rettangolo (in generale dominio).

Se esiste finito $\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \sum_{h=k=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$ tale limite è definito integrale doppio di $f(x, y)$ nel dominio $R = [a, b] * [c, d]$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \sum_{h=k=1}^{k=m, h=n} f(x_k, y_n) * misR_{kh} \quad (4.6)$$

Somme superiori e somme inferiori

Definizione 23. È possibile definire l'integrale doppio anche con le somme superiori e le somme inferiori

$$\text{Somme inferiori } s(f, R) = \sum \inf_{R_{kh}} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$$

prendo il minimo valore che la funzione assume nel subrettangolo R_{kh} e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per difetto individuato dalla funzione.

$$\text{Somme superiori } s(f, R) = \sum \sup_{R_{kh}} f(x_k, y_n) * misR_{kh}$$

prendo il massimo valore che la funzione assume nel subrettangolo R_{kh} e lo moltiplico per l'area di tale subrettangolo. Sommando ottengo un parallelepipedo, il cui volume approssima per eccesso quello individuato dalla funzione all'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono, le somme superiori decrescono. Le somme superiori e le somme inferiori convergono ad uno stesso valore, detto integrale doppio¹

$$\lim s = \lim S = \iint_R f(x, y) dx dy$$

¹è il valore sotto al grafico della funzione

4.2.1 Proprietà dell'integrale doppio

$$\text{Linearità} \quad \begin{cases} 1) \iint_D [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx * dy + \iint_D f_2(x, y) dx * dy \\ 2) \iint_D \alpha f_1(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f_1(x, y) dx * dy \end{cases}$$

$$\text{Assitività} \quad 3) \text{ Sia } D = D_1 \cup D_2 \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx * dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx * dy$$

$$\text{Monotonia} \quad \begin{cases} 4) \text{ Sia } f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \\ \quad \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx * dy \\ 5) \text{ Sia } D_1 \subset D \\ \quad \iint_{D_1} f(x, y) dx dy < \iint_D f(x, y) dx * dy \\ 6) |\iint_D f(x, y) dx dy| \leq \iint_D |f(x, y)| dx * dy \end{cases}$$

4.2.2 Formula di riduzione

- Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto all'asse x

$$A = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$$

$$\text{Allora } \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right)$$

calcolo prima $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ che è una funzione della sola x $\rho(x)$

$$\text{per calcolo } \int_a^b \rho(x) dx$$

- Dominio polarmente normale

Effettua un cambio di coordinate, passando dalle coordinate cartesiane a quelle polari

$$\text{L'integrale doppio è } \iint_D f(x, y) dx dy$$

Passando alle coordinate polari

$$\begin{aligned} \text{del dominio } D(x, y) &\text{ passerò al dominio } D'(\varphi, \theta) \quad \begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \end{cases} \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{della funzione } f(x, y) &\text{ passerò al dominio } f(\varphi, \theta) \end{aligned}$$

e da differenziali $dx dy$ passerò ai differenziali $d\varphi d\theta$.

Si dimostra che nel passaggio ad altre coordinate il differenziale è $|j| d\varphi d\theta$, dove $|j|$ è il determinante della **matrice Jacobiana** che contiene le derivate parziali prime

$$|J| = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\theta \\ y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} \rightarrow |J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\varphi \sin \theta \\ \sin \theta & \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = \varphi \cos^2 \theta + \varphi \sin^2 \theta = \varphi \quad (4.7)$$

Per cui passando da $dx dy$ alle coordinate polari avrò $\varphi d\varphi d\theta$ così l'integrale doppio diventa:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi, \theta) \varphi d\varphi d\theta$$

Esempi di domini polarmente normali

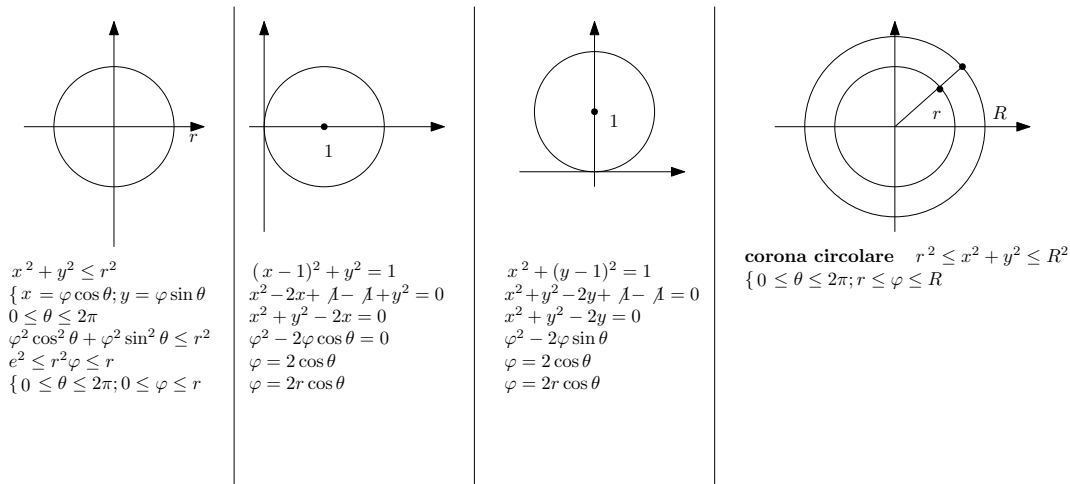


Figura 4.2: Esempi di domini polarmente normali

4.2.3 Baricentro di un dominio normale

Definizione 24. Sia D un dominio normale del piano. Si definisce **baricentro del dominio** D il punto di coordinate (x_0, y_0) tale che:

$$x_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D x dx dy \quad y_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D y dx dy$$

$\text{mis}D$: misura (area) del dominio D .

Esempio 12. calcolare il baricentro del dominio $D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$\text{mis}D = A_{\text{rettangolo}} = 2 * 1 = 2$$

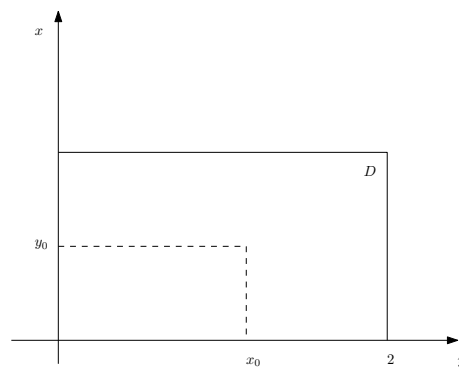
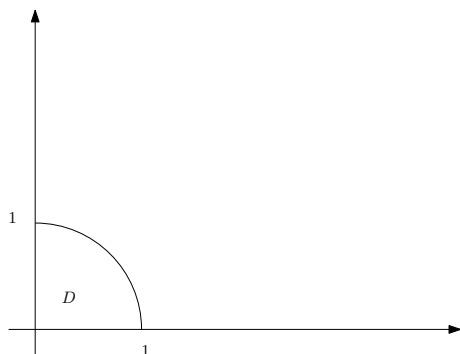


Figura 4.3: Baricentro di un dominio normale

$$x_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D x dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 x dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx |xy|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D y dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4} |x|_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Calcolare il baricentro del dominio $D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$



$$D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 1 \end{cases} \quad \text{mis}D = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D x dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \varphi^2 \cos \theta d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\varphi^3}{3} \cos \theta \right|_0^1 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos \theta d\theta = \frac{4}{3\pi} |\sin \theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \\ y_0 &= \frac{1}{\text{mis}D} \iint_D y dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \varphi^2 \sin \theta d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\varphi^3}{3} \sin \theta \right|_0^1 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi} * \frac{1}{3} |-\cos \theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

4.2.4 Domini normali in R^3

Definizione 25. Il dominio V definisce normale rispetto al piano xy se si può così descrivere:

$$\begin{cases} (x, y) \in D & \text{normale} & (x, y) \text{ appartengono ad un dominio normale di } R^2 \\ \alpha(x, y) & \leq z \leq \beta(x, y) & z \text{ è compresa tra funzioni di } x \text{ e } y \end{cases}$$

$\forall (x, y) \in D$ incontro prima la superficie minorante e per la superficie maggiorante.

4.3 Integrali tripli

Definizione 26. Sia $f(x, y, z)$ una funzione limitata in un insieme V , considero il parallelepipedo

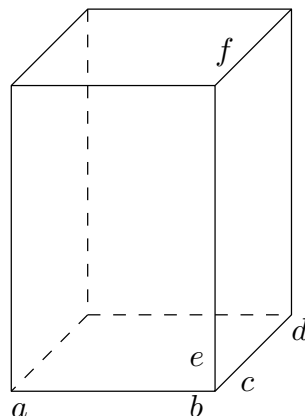
$$V = [a, b] * [c, d] * [e, f]$$

Decompongo regolarmente $[a, b], [c, d], [e, f]$

rispettivamente in n, m, k

intervalli $I_n = [x_0 = a, \dots, x_n = b],$

$$l_m = [y_0 = c, \dots, y_m = d], \quad l_k = [z_0 = e, \dots, z_k = f]$$



Il prodotto cartesiano $I_n * I_m * I_k$ individua il generico subparallelepipedo $V_{n,m,k}$.

Definisco le somme di Riemann: $\sum f(x, y, z) * misV_{n,m,k}^2$

All'infittirsi delle decomposizioni le somme di Riemann convergono ad uno stesso valore, tale valore è definito **integrale triplo** di $f(x, y, z)$ in V

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum f(x, y, z) misV_{n,m,k} = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Oppure, definisco le somme inferiori e le somme superiori

$$\text{Somme inferiori} \quad \sum misV_{n,m,k} * \min_{V_{n,m,k}} f(x, y, z)$$

$$\text{Somme superiori} \quad \sum misV_{n,m,k} * \max_{V_{n,m,k}} f(x, y, z)$$

All'infittirsi della decomposizione le somme inferiori crescono mentre le somme superiori decrescono. Se convergono ad uno stesso valore, tale valore è definito **integrale triplo** di $f(x, y, z)$ in V

$$\lim s(f, V) = \lim S(f, V) = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

4.3.1 Formule di riduzione per gli integrali tripli

Sia $g(x, y)$ integrabile in un dominio normale V

$$V = \begin{cases} \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio D è normale rispetto all'asse x

$$V = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio D è normale rispetto all'asse y

$$V = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Se il dominio D è polarmente normale

$$V = \begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta) \\ \alpha(\varphi, \theta) \leq z \leq \beta(\varphi, \theta) \end{cases} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \varphi d\varphi \int_{\alpha(\varphi, \theta)}^{\beta(\varphi, \theta)} f(\varphi, \theta, z) dz$$

$$\alpha(x, y) \rightarrow \alpha(\varphi, \theta)$$

$$\beta(x, y) \rightarrow \beta(\varphi, \theta)$$

$$f(x, y, z) \rightarrow f(\varphi, \theta, z)$$

$$dx dy dz \rightarrow \varphi d\varphi d\theta dz$$

² $misV_{n,m,k}$ misura il volume del parallelepipedo

4.3.2 Significato geometrico degli integrali

$$\begin{array}{ll} \int & \text{area} \\ \iint & \text{volume} \\ \iiint & \text{nessun significato geometrico} \end{array}$$

4.3.3 Coordinate polari e coordinate cilindriche

$$(x, y) \rightarrow (\varphi, \theta)$$

$$\begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \end{cases} \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \det J = \varphi$$

coordinate alindriche $(x, y, z) \rightarrow (\varphi, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = \varphi \cos \theta \\ y = \varphi \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \det J = \varphi$$

coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \varphi \sin \theta \cos \alpha \\ y = \varphi \sin \theta \sin \alpha \\ z = \varphi \cos \theta \end{cases}$$

4.3.4 Interazione per fette

Considera un volume V e lo interseco con un piano $z = k$. Così ottengo una sezione S_z

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Al variare di z tra due valori, cioè facendo variare S_z in funzione di z descrivo il volume V .

Esempio 13.

$$\int_0^1 S_z dz$$

S_z è un cerchio di raggio $R(z)$ che dipende da z

$$\begin{aligned} z &= 1 - x^2 + y^2 & x^2 + y^2 &= 1 - z \\ R^2 &= 1 - z & R(z) &= \sqrt{1 - z} \end{aligned}$$

$$S_z = \pi R^2 = \pi(1 - z)$$

$$\iint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \pi(1 - z) dz$$

4.3.5 Integrali curvilinei

Curve in R^2 e in R^3

Definizione 27. Si definisce *curva* una coppia del tipo (γ, Γ) con

$$\vec{F}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots) \quad t \in [a, b]$$

si tratta di un'applicazione $R \rightarrow R^n$ ad un valore di t associa n valori

Le curve possono essere:

- In forma cartesiana
$$\begin{aligned} z &= f(x, y) & (R^3) \\ y &= f(x) & (R^2) \end{aligned} \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$
- In forma polare $\varphi = \varphi(\theta) \quad \varphi = 2r \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- In forma parametrica
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Nello spazio una curva è l'intersezione tra due superfici.

Ogni curva ha anche un **sostegno**, che è il suo grafico nel piano o nello spazio.

Una curva si definisce **chiusa** se

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \text{ se } \vec{F}(a) = \vec{F}(b) \quad \begin{aligned} x(a) &= x(b) \\ y(a) &= y(b) \end{aligned}$$

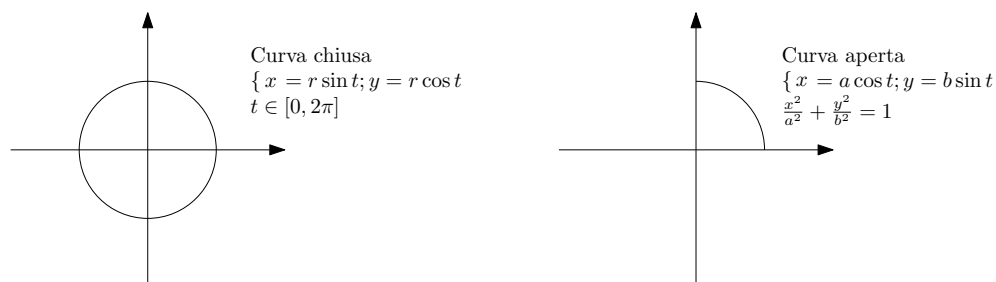
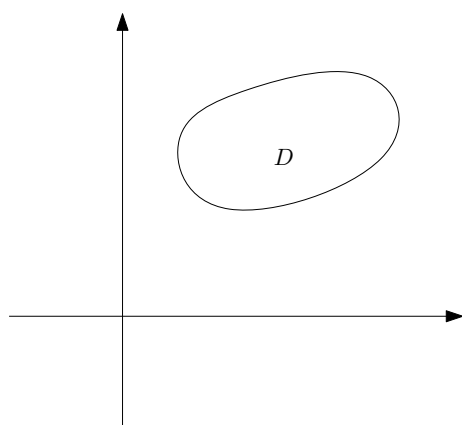


Figura 4.4: Differenza tra curva chiusa e aperta

Una curva chiusa la **frontiera** di un dominio



$$FD : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.8)$$

Una curva si definisce **semplice** se presi due qualunque $t_1 \neq t_2$ risulta $\vec{F}(t_1) \neq \vec{F}(t_2)$ cioè

$$\begin{cases} x(t_1) \neq x(t_2) \\ y(t_1) \neq y(t_2) \\ z(t_1) \neq z(t_2) \end{cases}$$

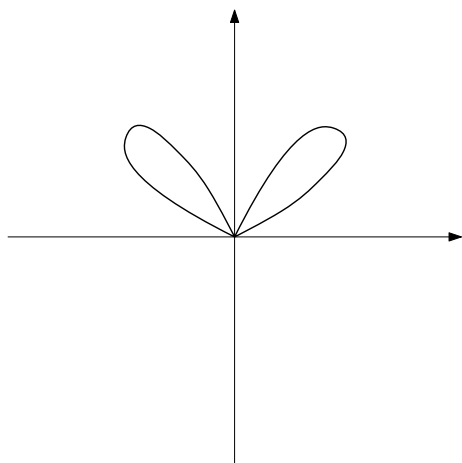
Curva semplice $\gamma \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \quad y = \sqrt{x} \quad \gamma \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad y = x^2$ Curva non semplice³

Una curva è **regolare** se è di classe c^1 e le sue derivate prime non sono mai nulle contemporaneamente

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \vec{F}(t) \in c' \quad r'(t) = (x', y', z'(t) \dots) \neq (0, 0, 0 \dots) \\ t \in [a, b]$$

Curva regolare

$$\gamma z(t) = \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad z'(t) = \begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{non sono mai nulle} \\ \text{contemporaneamente} \end{matrix}$$



$$r(t) = \begin{cases} x = t(1-t^2)^2 \\ y = t^2(1-t^2) \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

Una curva è **regolare a tratti** se è l'unione di curve regolari

$$\gamma r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad \text{in } x = 0 \text{ c'è una cuspide perciò non è regolare } y = \sqrt[3]{x^2}$$

$r(t)$ può però essere vista come l'unione di due curve regolari

$$\gamma' r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 0]$$

$$\gamma'' r(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

sostegno nel II quadrante

$$\gamma = \gamma' \vee \gamma''$$

4.3.6 Lunghezza di una curva

Definizione 28. Sia la curva γ di equazione $\vec{F}(t)$, essa si definisce **rettificabile** se esiste finito l'estremo superiore della poligonale $L(p)$ al variare della decomposizione.

$$\sup_D L(\Delta) \quad (4.9)$$

³ $t_1 \neq t_2$ ho due stessi valori della curva

Suddivido la curva in tanti segmenti che formano la poligonale $L(D)$. All'infittirsi la poligonale approssimo sempre segue la lunghezza della curva.

Se la curva $\vec{F}(t)$ è di classe c^1 allora essa è **rettificabile**

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.10)$$

e la sua lunghezza vale $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 + \dots} dt$

4.3.7 Lunghezza di una curva in forma cartesiana

Se la curva γ nella forma $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$ ha come sostegno il grafico di $y = f(x)$

La lunghezza della curva è $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

4.3.8 Lunghezza di una curva polare

Se la curva è nella forma

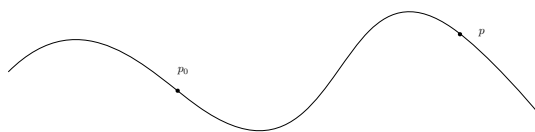
$$\begin{cases} e = e(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

La sua lunghezza vale:

$$L_\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\varphi^2(\theta) + [\varphi'(\theta)]^2} d\theta$$

4.4 Ascissa Curvilinea

È possibile effettuare cambiamenti di parametri per descrivere una curva. Fra tutte le rappresentazioni parametriche di una curva regolare ha particolare **importanza** geometrica quella che **l'ascissa curvilinea**. Prendiamo una curva γ di R^2 e un suo punto P_0



Ad ogni punto P della curva associamo un valore $S(P)$ che è uguale alla lunghezza dell'arco di curva congiungente P_0 e P

Così definendo una corrispondenza biunivoca tra i punti della curva e i punti di un certo intervallo $[a, b]$, cosicché se $S(p_1) = a$ $S(p_2) = b$ la lunghezza dell'arco congiungente P_1 con P_2 è $|b - a|$

Sia $(\gamma, \vec{r}(t))$ una curva regolare; definiamo l'ascissa curvilinea⁴ come:

$$S(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau$$

Per il teorema del calcolo integrale

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} & S(t) \text{ è integrabile} \\ S'(t) &= \frac{ds}{dt} & S : [a, b] \rightarrow [0, L] \end{aligned}$$

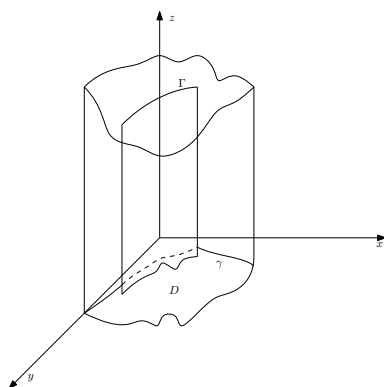
⁴o lunghezza d'arco

La lunghezza della curva così vale:

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \int ds \quad (4.11)$$

4.5 Integrale corvilineo

Prendiamo una funzione $f(x,y)$ definita in un insieme D e una curva γ interno a D .



Calcoliamo la funzione nella curva γ e determiniamo una curva Γ dello spazio.

L'area delimitata dal cilindro di basi γ e Γ se $f(x,y) > 0$ è il valore dell'integrale corvilineo di $f(x,y)$ esteso a γ .

4.5.1 Definizione di integrale corvilineo

Data una curva regolare $(\gamma, \vec{r}(t))$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.12)$$

e una funzione $f(x,y,z) \in \mathbb{C}$ – definita in D_1 con la curva inclusa D , si definisce integrale corvilineo di $f(x,y,z)$ esteso alla curva

$$\int_{\gamma} f(x,y,z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) * \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

4.5.2 Baricentro di una curva

Si definisce baricentro di una curva quel punto di coordinate (x_0, y_0) per cui

$$x_0 = \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} x ds \quad y_0 = \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} y ds \quad \text{con } L_{\gamma} \text{ lunghezza della curva } \gamma$$

Esempio 14.

$$\gamma = \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} L_{\gamma} &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} * \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t dt \\ &= \left| \frac{3\sin^2 t}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} x ds = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = -\frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \\ y_0 &= \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} y ds = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \frac{1}{10} \left| \sin^5 t \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

4.5.3 Superfici e integrali di superficie

Superfici

Definizione 29. Sia definisce **superficie** in R^3 una coppia (Σ, r) dove Σ è il sostegno (grafico) $\in R^3$ ed r è la parametrizzazione $d\Sigma, r \in \mathbb{C}_A^0$.

A insieme aperto connesso di R^2 per cui $r(A) = \Sigma$, r calcolata nei punti di A e da la superficie. r è un'applicazione vettoriale $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = x(u, v)\vec{L} + y(u, v)\vec{J} + z(u, v)\vec{K}$ ($u, v \in A$) $R^2 \rightarrow R^3$ ad ogni punto di A del piano, associo un punto di Σ nello spazio.

Una superficie si dice **semplice** $\vec{r}(u, v)$ è 1-1, cioè se $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono 1-1 (cioè biunivoche, invertite) – Una superficie si dice **regolare a tratti** se è firmata dall'unione di un numero finito di superfici di classe C^1 regolari.

Una superficie è di classe C_A^k se $\vec{r}(u, v) \in C_A^k$ cioè $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \in C_A^k$

Una superficie si dice **regolare** se $\vec{r}(u, v) \in C^1$ e la matrice delle derivate parziali prime ha rango 2

Una superficie si dice **chiusa** se è limitata e il suo bordo è l'insieme vuoto (non ha bordo).

Teorema 7. Le superfici cartesiane di classe C^1 sono regolari:

Esempio 15.

Superficie sferica: $z = \pm\sqrt{R^2 + x^2 - y^2}$ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ definita su $D : \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Superficie corta: $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$

4.5.4 Piano tangente e versore normale

Prendiamo un dominio $A \subset R^2$ e un suo punto $P(u_0, v_0)$. Prendo due linee in A passanti per P , sulla superficie Σ ho due curve.

Sia $\vec{r}(u, v)$ l'equazione della superficie Σ e siano $\vec{r}(u_0, v)$ e $\vec{r}(u, v_0)$ le curve che si chiamano linee coordinate superficie⁵, i vettori tangenti alle linee coordinate sono

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$$

$$\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

Se il prodotto vettoriale non è nullo, i vettori sono linearmente ma pendenti, quindi il rango di quel-

la matrice è 2. Allora possiamo dire una superficie σ è regolare se e solo se $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \neq 0$, cioè esiste il **piano tangente**. $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ è un vettore ortogonale al piano contenente \vec{r}_u e \vec{r}_v che è il **piano tangente** alla superficie.

La sua equazione è:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \text{ in } P(x_0, y_0, z_0)$$

Per avere il **versore normale** si divide il prodotto vettoriale per la sua lunghezza.

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}$$

In forma cartesiana

$$\vec{r}(u, v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad r_u = r_x = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ f_x \end{cases} \quad r_v = r_y = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ f_y \end{cases}$$

⁵(u,v) si chiamano coordinate locali

Il prodotto vettoriale

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k} = (-f_x; -f_y; 1)$$

il versore normale

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y}{\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\|}$$

4.5.5 Orientazione di una superficie

Sia Σ una superficie regolare ($\vec{r} \in e', P(M) = 2$), si sceglia il versore normale in modo che vanando con continuità lungo una curva chiusa γ inclusa in Σ_1 possa ritornare alla posizione iniziale in conseguenza della scelta del versore normale in conseguenza della scelta del versore normale. Una superficie cartesiana è orientabile.

Orientamenti possibili sono: versore normale \vec{n} rivolto verso l'alto o il verso basso.

Area di una superficie

Sia Σ una superficie regolare. Si definisce **area della superficie** Σ il numero reale non negativo definito da

$$S = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_A \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv = \iint_A \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

A, B, C componenti del prodotto vettoriale, $d\sigma$ elemento infinitesimo di area.

Se la superficie Σ è in forma cartesiana $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in D$)

L'area di Σ è

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

Se la superficie Σ è data in forma implicita $F(x, y) = 0$

Con $F_z \neq 0$ per il teorema del Din è localmente esplicitabile in $z = f(x, y)$

L'area di σ è:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2} dx dy$$

4.5.6 Integrale Superficiale

Sia $h(x, y, z)$ una funzione definita e continua in un insieme $V \subset R^3$ e sia Σ una superficie inclusa in V , che si proietta in un dominio piano D . Si definisce **integrale superficiale** della funzione $h(x, y, z)$ esteso alla superficie Σ :

$$\iint_{\Sigma} h(x, y, z) d\sigma = \iint_A h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

Se la superficie Σ è in forma cartesiana

$$\iint_{\Sigma} h(x, y, z) d\sigma = \iint_A h(x, y, z(u, v)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

4.6 Trasformazione integrali

4.6.1 Formule di Green-Gauss

Prima formula - teorema

Definizione 30. Sia $f(x, y)$ continua in un insieme D , sia $\frac{\partial f}{\partial x}$ (derivata parziale rispetto a x) continua in D , sia D normale rispetto all'asse y e sia la sua frontiera F_0 una curva regolare a tratti. Allora vale la seguente relazione

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{FD} f(x, y) dy$$

FD : frontiera percorsa nel verso positivo

Ipotesi:

$$f(x, y) \in C_D^0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \in C_D^0$$

$$D \text{ normale rispetto all'asse } y \quad D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \end{cases}$$

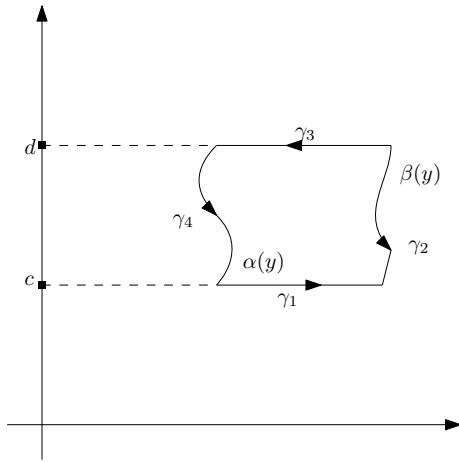
F_D regolare a tratti

Tesi:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f(x, y) dy$$

Dimostrazione. Poiché $f(x, y) \in C_D^0$ e $\frac{\partial f}{\partial x} \in C_D^0$, esse sono integrabili in D

Il dominio D_1 che è normale rispetto all'asse y , può essere descritto come



$$D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \end{cases} \quad \text{e la sua frontiera è} \quad FD = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

Sviluppiamo I e II membro della tesi

I membro

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_c^d [f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)] dy$$

$$N.B. \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = [f(x, y)]_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} = f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)$$

II membro $F_D : \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$$\int_{+FD} f(x, y) dy = \int_{\gamma_1} f(x, y) dy + \int_{\gamma_2} f(x, y) dy + \int_{\gamma_3} f(x, y) dy + \int_{\gamma_4} f(x, y) dy \quad (4.13)$$

$$\gamma_1 : y = c \quad dy = 0$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = \beta(y) \\ y \in [c, d] \end{cases}$$

$$\gamma_3 : y = d \quad dy = 0$$

$$\gamma_4 = \begin{cases} x = \alpha(y) \\ y \in [d, c] \end{cases}$$

$$\int_{+FD} f(x, y) dy = \int_{\gamma_2} f(x, y) dy + \int_{\gamma_4} f(x, y) dy$$

$$\int_{\gamma_2} f(x, y) dy = \int_c f[\beta, y] dy \quad \int_{\gamma_4} f(x, y) dy = \int_d^c f[\alpha(y), y] dy = - \int_c^d f[\alpha(y), y] dy$$

$$\int_{+FD} f(x, y) dy = \int_c^d f[\alpha(y), y] dy - \int_c^d f[\alpha(y), y] dy = \int_c^d f[\alpha(y), y] - f[\alpha(y), y] dy$$

Si è così dimostrata la tesi

Per cui con questa **formula di Green-Gauss** un integrale doppio – sotto opportune ipotesi – si può trasformare in un integrale curvilineo esteso alla frontiera del dominio di integrazione

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f(x, y) dy$$

□

Esempio 16. Calcolare $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2}}$ con $D = \begin{cases} xy \leq \frac{1}{4} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$f(x, y) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad \rightarrow \quad \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{+FD} \arcsin x dy \quad F_D = F_D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

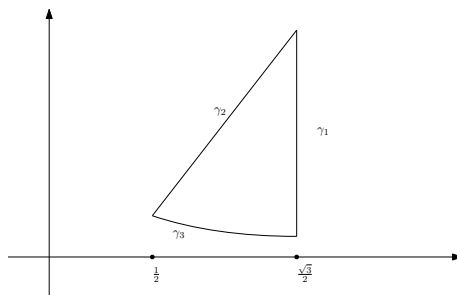


Figura 4.5: Esempio della prima formula di Green-Gauss

$$\begin{aligned} \gamma_1 : x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \in \left[\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \right] \quad \int_{\gamma_1} \arcsin x dy &= 0 \quad \text{poiché } dy = 0 (y = \cos t) \\ \gamma_2 : y = x \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \quad \text{da percorrere "al contrario"} \quad dy &= d(x) = 1 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_2} \arcsin x dy &= - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx = - \left| x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = - \left| x \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2} dx \right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \right] = - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\gamma_3 : y = \frac{1}{4x} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \quad dy = -\frac{1}{4x^2} \quad \int_{\gamma_3} \arcsin x dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \left(-\frac{1}{4x^2} dx \right)$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} \arcsin x dy &= - \int_{\frac{\sqrt{3}}{6}}^{\frac{1}{2}} = y \arcsin \frac{1}{4y} dy = y \arcsin \frac{1}{4y} - \int y * \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{16}y^2}} \left(-\frac{1}{4y^2}\right) dy \\ &= y \arcsin \left(\frac{1}{4y}\right) - \int -\frac{1}{4y} \frac{1}{\sqrt{\frac{16y^2-1}{16y^2}}} dy\end{aligned}$$

Si risolve con la sostituzione $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{x^2-a^2} = a \tan t \\ \sqrt{y^2 - \frac{1}{16}} &= \frac{1}{4} \tan t\end{aligned}$$

Seconda formula di Green-Gauss

Teorema 8. Sia $f(x,y)$ continua in un insieme D , sia $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua in D , sia D un dominio normale rispetto all'asse x e sia la sua frontiera F_D una curva regolare a tratti. Allora vale la seguente relazione

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+F_D} f(x,y) dx \quad (4.14)$$

Ipotesi

F_D regolare a tratti

$$\begin{aligned}f(x,y) &\in C_D^0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\in C_D^0\end{aligned}$$

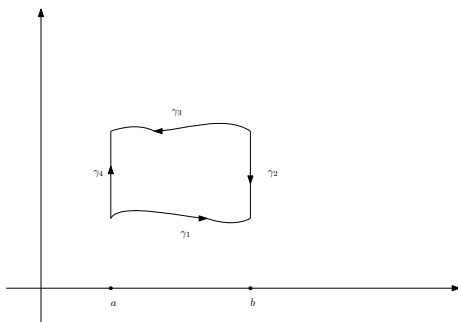
Tesi

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+F_D} f(x,y) dx$$

D normale rispetto all'asse x

$$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases}$$

Dimostrazione. Purché $f(x,y) \in C_D^0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} \in C_D^0$, esse sono integrali in D . Il dominio D_1 che è normale rispetto all'asse x può essere descritto come



$$D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases} \quad \text{e la sua frontiera è} \quad F_D = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \wedge \gamma_4$$

Sviluppiamo I e II membro della tesi $\int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = [f(x,y)]_{y=g(x)}^{y=h(x)} = f[x, h(x)] - f[x, g(x)]$

I membro

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f[x, h(x)] - f[x, g(x)] dx$$

II membro

$$\int_D f(x,y) dx = \int_{\gamma_1} f(x,y) dx + \int_{\gamma_2} f(x,y) dx + \int_{\gamma_3} f(x,y) dx + \int_{\gamma_4} f(x,y) dx$$

$$\gamma_2 : \quad x = b \quad y \in [g(b), h(b)] dx = 0$$

$$\gamma_4 : \quad x = a \quad y \in [g(a), h(a)] dx = 0$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 : \quad y &= g(x) \quad x \in [a, b] & \int_{\gamma_1} f(x, y) dx &= \int_a^b f[x, g(x)] dx \\ \gamma_3 : \quad y &= h(x) \quad x \in [b, a] & \int_{\gamma_3} f(x, y) dx &= - \int_a^b f[x, h(x)] dx\end{aligned}$$

per cui

$$\int_{+FD} f(x, y) dx = \int_a^b f[x, g(x)] dx - \int_a^b f[x, h(x)] dx = \int_a^b f[x, g(x)] - f[x, h(x)] dx$$

combiando di segno si dimostra la tesi

con questa formula di **Green-Gaun** un integrale doppio – sotto opportune ipotesi – si può trasformare in un integrale curvilineo hteso alla frontiera del dominio di integrazione.

$$\iint \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{FD} f(x, y) dx$$

□

4.6.2 Teorema della divergenza

Definizione 31. Sia $\vec{F} \equiv (f(x, y), g(x, y)) \in C'_D$ funzione vettoriale, si definisce **divergenza** di \vec{F}

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad \begin{array}{l} \text{derivata rispetto } \partial x \text{ della prima componente più derivata} \\ \text{rispetto a } \partial y \text{ della seconda componente} \end{array}$$

Teorema della divergenza

Teorema 9. Sia $\vec{F} \equiv (f(x, y), g(x, y)) \in C'_0$ e sia D un dominio normale⁶, con la sua frontiera F_D regolare a tratti, vale la seguente relazione:

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \int_{+FD} \vec{F} * \vec{n} ds \quad \text{con } \vec{n} \text{ versore normale a } F_D$$

Ipotesi:

Tesi:

$$\vec{F} \equiv (f(x, y), g(x, y)) \in C'_0$$

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \int_{+FD} \vec{F} * \vec{n} ds$$

D normale rispetto ad entrambi gli assi F_D regolare a tratti.

Dimostrazione.

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dy \quad \text{per definizione divergenza}$$

Dalle ipotesi valgono le due formule di **Green-Gauss**

$$\iint \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f(x, y) dy \quad : \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{+FD} g(x, y) dx$$

Devo così dimostrare che $f(x, y) dx - g(x, y) dy = \vec{F} * \vec{n} ds$

Ricavo il versore normale \vec{n} : F_D regolare a tratti ed è quindi esprimibile come unione di curve regolari di espressione parametrica

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad \exists x'(t).y'(t) \text{ perché la curva è regolare.}$$

⁶rispetto ad entrambi gli assi

Il vettore tangente $\vec{t} = (x'(t), y'(t))$, scambiando le componenti e cambiandone una di segno si ottiene il vettore normale $(y'(t), -x'(t))$; dividendo per la norma $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ si ha il versore normale \vec{n}

$$\vec{n} \equiv \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} : \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right)$$

Svolgo ora il prodotto scalare $\vec{F} * \vec{n} ds$, ricordando che $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$

$$\vec{F} \equiv (f(x, y), g(x, y))$$

$$\vec{F} * \vec{n} ds = \left(\frac{f(x, y)y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} - \frac{g(x, y)x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= dx \\ y'(t) &= dy \end{aligned} \quad \vec{F} * \vec{n} ds = f(x, y)dy - g(x, y)dx$$

Quindi

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \int_{+FD} f(x, y)dy - g(x, y)dx \quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Il teorema della divergenza (4.6.2) vale anche in R^3 , in forma vettoriale

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_{+\Sigma} \vec{F} * \vec{n} ds \quad \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

□

Esempio 17. calcolare utilizzando il teorema della divergenza $\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy$ con $\vec{F} \equiv (-2x^3y; \frac{1}{2}xy)$, $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = -\frac{2x^3y}{\partial x} + \frac{-\frac{1}{2}xy}{\partial y} = -6x^2y - \frac{1}{2}x$$

$$\iint_D (-6x^2y - \frac{1}{2}x) dx dy = \int_{+FD} f(x, y)dy + g(x, y)dx = \int_{+FD} -2x^2y dy + \frac{1}{2}xy dx$$

$$FD : x^2 + y^2 = 1 \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{aligned} dx &= -\sin t dt \\ dy &= \cos t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} -2 \cos^3 t \sin t \cos t dt + \frac{1}{2} \cos t \sin t (-\sin t) dt &= + \int_0^{2\pi} \left(-2 \cos^4 t \sin t + \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t \right) \\ &= \left| -\frac{2}{5} \cos^5 t - \frac{7}{6} \sin^3 t \right|_0^{2\pi} = -\frac{2}{5} - 0 + \frac{2}{5} - 0 = 0 \end{aligned}$$

Applicazioni della formula di Green-Gauss

Rimandi teorici a partire da (4.6.1) – Calcolo dell'area di dominio piani

Ricordando le formule di **Green-Gauss** $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f(x, y)dy$: $\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = -\int_{+FD} f(x, y)dx$ nella formula dell'area $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ o $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ per cui $f(x, y) = x$ o $f(x, y) = y$

Si ha così $A = \iint_D dx dy = \int_{+FD} x dy = -\int_{+FD} y dx \rightarrow \int_{+FD} x dy - \int_{+FD} y dx = 2 \iint_D dx dy$ si ha:

$$A = \frac{1}{2} \int_{+FD} x dy - y dx$$

Esempio 18. Calcolare l'area del dominio delimitato dall'ellisse con semiassi a e b

$$F_D : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} dx = -a \sin t \\ dy = b \cos t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint dx dy &= \frac{1}{2} \int_{+F_D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t (b \cos t) - b \sin t (-a \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t + ab \sin^2 t = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = ab\pi \end{aligned}$$

4.7 Forma differenziali Lineari

Si definisce differenziale lineare ω

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\Rightarrow \omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy \\ \mathbb{R}^3 &\Rightarrow \omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz \end{aligned}$$

4.7.1 Integrazione delle forme differenziali

Definizione 32. Sia ω una forma differenziale continua in un insieme D^7 e sia γ una curva regolare a tratti contenuta in D , di equazioni parametriche $\gamma \equiv (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$. Si definisce **integrale della forma differenziale esteso alla curva γ**

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega ds &= \int_{\gamma} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) \\ &\quad + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt \end{aligned}$$

L'integrale rettilineo che va tra gli estremi su cui è preso t

La funzione $F \equiv [F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)]$ viene calcolata sui punti della curva γ^8

$$I \text{ differenziali sono } \begin{cases} dx = x'(t) \\ dy = y'(t) \\ dz = z'(t) \end{cases}$$

Le **proprietà delle forme differenziali lineari** derivano dalle proprietà degli integrali curvilinei

- Linearità:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_1 + \omega_2 ds &= \int_{\gamma} \omega_1 ds + \int_{\gamma} \omega_2 ds \\ \alpha \int_{\gamma} \omega ds &= \int_{\gamma} \alpha \omega ds \end{aligned}$$

- Additività:

$$\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \quad \int_{\gamma} \omega ds = \int_{\gamma_1} \omega ds + \int_{\gamma_2} \omega ds + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega ds$$

4.7.2 Forme differenziali esatte

⁷ivi integrabile

⁸funzione composta