$[2,6) \sim [3,12]$

1) Leiduvad injektsioonid $f: [2,6) \to [3,12]$ ja $g: [3,12] \to [2,6)$

$f(x) = 2x$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ - on injektiivne

$g(x) = \frac{x}{3} + 1$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{3} + 1 = \frac{x_2}{3} + 1 \Rightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$ - on injektiivne.

Järelikult $[2,6) \sim [3,12]$

2) Konstrueerime järgmised bijektsioonid:

$[2,6) \xrightarrow{f} [0,1) \xrightarrow{g} [0,1] \xrightarrow{h} [3,12]$

• $f: [2,6) \to [0,1)$

Kasutades sirge võrrandit: $\begin{cases} 0 = 2k + b \\ 1 = 6k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$y = kx + b$

$f(x) = \frac{x-2}{4}$

Näitame et f on bijektiivne:

Inj: $\frac{x_1 - 2}{4} = \frac{x_2 - 2}{4} \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$ - on injektiivne

Sür: $\forall y \in [0,1)$ jaoks $\exists x \in [2,6)$, nii et $y = \frac{x-2}{4}$

Järelikult on f bijektiivne

• $g: [0,1) \to [0,1]$

$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, \text{ kui } x = \frac{1}{n}, n \geq 2, n \in \mathbb{N} \\ x, \text{ kui } x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$

Näitame, et g on bijektiivne:

Inj: $\frac{1}{n_1 - 1} = \frac{1}{n_2 - 1} \Rightarrow n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$ - on injektiivne.

Sür: $\forall y \in [0,1]$ jaoks $\exists x \in [0,1)$, nii et $y = \frac{1}{n-1}$, kui $x = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$ $n \in \mathbb{N}$

$g(x) = x$, korral tegemist on samasusteisendusega, mis on alati nii injektiivne, kui ka sürjektiivne. Järelikult g on bijektiivne

$\cdot h: [0,1] \to [3,12]$

Kasutades sirge võrrandit: $\begin{cases} 3 = b \\ 12 = k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ k = 9 \end{cases}$

$y = kx + b$

$h(x) = 9x + 3$

Näitame, et h on bijektiivne:

Inj: $9x_1 + 3 = 9x_2 + 3 \Rightarrow 9x_1 = 9x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ - injektiivne

Sür: $\forall y \in [3,12]$ jaoks $\exists x \in [0,1]$ nii, et $y = 9x + 3$ - on sürjektiivne

Järelikult on h bijektiivne.

Loengukonspektis olev järeldus 6.42 ütleb, et bijektiivsete funktsioonide kompositsioon on samuti bijektiivne. Seega võime võtta bijektsiooniks $s(x) = (h \circ g \circ f)(x)$, järelikult on hulgad $[2,6)$ ja $[3,12]$ ekvivalentsed, ehk sama võimsusega.