2003年《信号与系统》研究生入学试题参考答案

中国科学院电子学研究所

一题

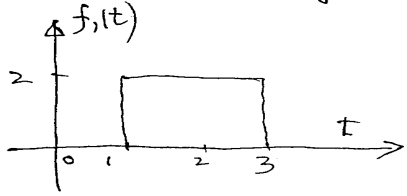
评分标准：①每小题结果不完全正确，但解题方法正确，思路明确，扣1—2分；

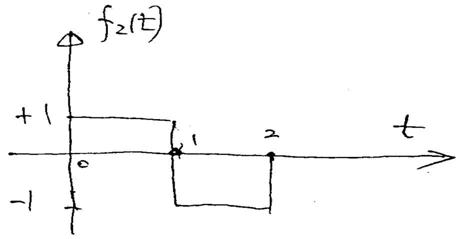
②每小题结果错误，但解题方法有可取之处，扣3—5分；

③对于基本错误的答案，若解题过程有正确步骤，得1—3分；

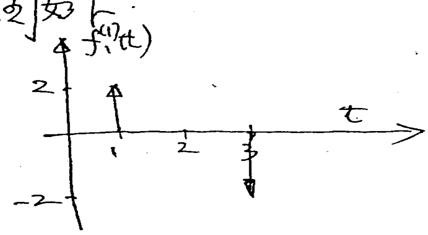
④对于要画出波形图的答题，若波形不能较好地反映出函数特征，或坐标轴、函数关键点没有正确标注，扣除1—4分。（此标准并适合其他大题中需要画图者）

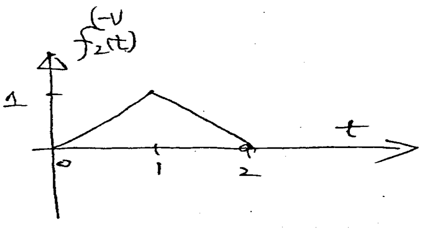
先画$f_1(t)$和$f_2(t)$的函数图





波形知，对$f_1(t)$求导可以得到由冲激函数$\delta(t)$表示的$f_1^{(1)}(t)$，则可以利用冲激函数的性质简化求解过程。因此先求出$f_1(t)$的导函数$f_1^{(1)}(t)$和$f_2(t)$的积分函数$f_2^{(-1)}(t)$波形图如下：



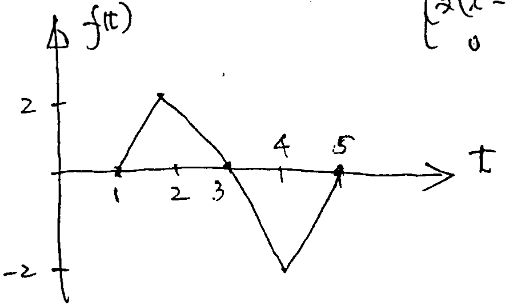


所以，$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)=2\left[\delta(t-1)-\delta(t-3)\right]*f_2^{(-1)}(t)$

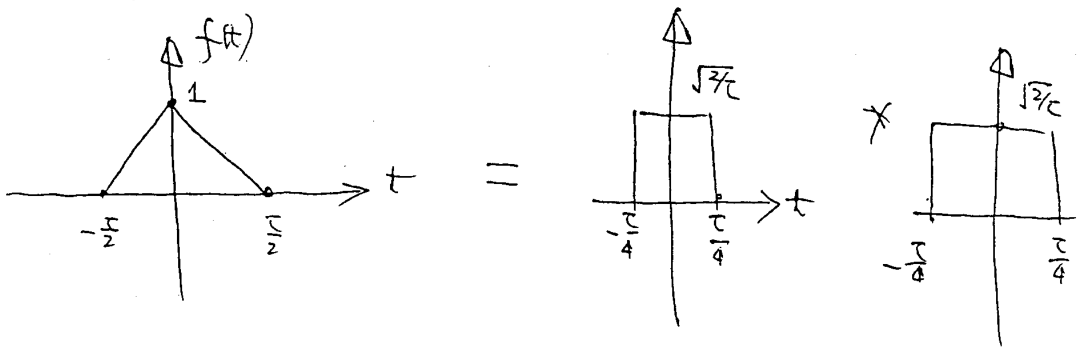
$$=2\delta(t-1)*f_2^{(-1)}(t)-2\delta(t-3)*f_2^{(-1)}(t)$$

$$=2f_2^{(-1)}(t-1)-2f_2^{(-1)}(t-3)=\begin{cases}2(t-1), & 1<t\le 2\\ -2(t-3), & 2<t\le 4\\ 2(t-5), & 4<t\le 5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

波形图如下：



先画出f(t)波形图：



将f(t)看成两个同样矩形脉冲的卷积。而矩形脉冲的傅氏变换对为

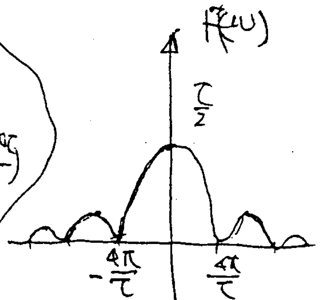
$$G_\tau(t)\longleftrightarrow\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega/2}=\tau\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

上图中脉宽为 $\frac{\tau}{2}$ 的矩形脉冲的傅氏变换对为

$$\sqrt{\frac{2}{\tau}}\cdot G_{\frac{\tau}{2}}(t)\longleftrightarrow\sqrt{\frac{2}{\tau}}\left(\frac{\tau}{2}\right)\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot\frac{\tau}{2}}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{2}}\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

根据傅氏变换的时域卷积性质，可得f(t)的傅氏变换为

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{\tau}{2}}\,Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\cdot\sqrt{\frac{\tau}{2}}\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)=\frac{\tau}{2}\cdot Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$，频谱如下



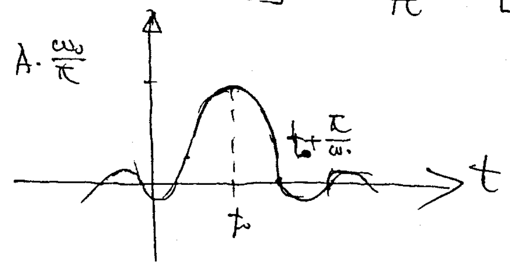
3. 已知 $F(\omega)=|F(\omega)|e^{+j\varphi(\omega)}=Ae^{-j\omega_0 t}$， $|\omega|\le\omega_0$

根据定义：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

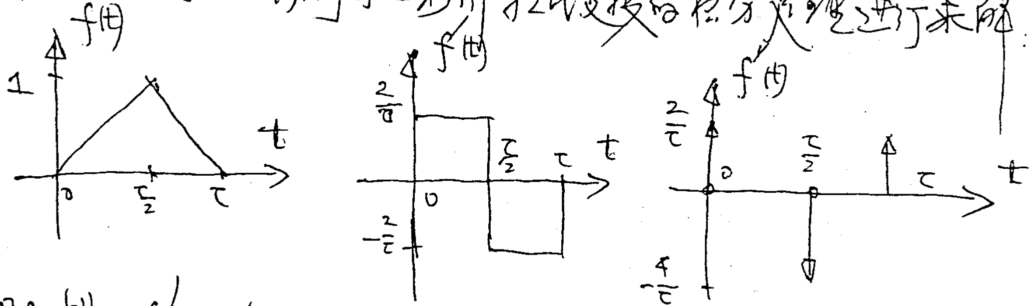
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}Ae^{-j\omega_0 t}\cdot e^{j\omega t}d\omega=\frac{A}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$=A\cdot\frac{\omega_0}{\pi}Sa[\omega_0(t+t_0)]=A\frac{\omega_0}{\pi}Sa[\omega_0(t-t_0)]$$

波形图：



画出函数波形图可知该函数为三角脉冲，若对其进行二次求导可得到由冲激函数表示的二次导函数，则可以利用拉氏变换的积分定理进行求解.



则 $g^{(-1)}(t)=f'(t)$，$g^{(-2)}(t)=f(t)$

令 $g(t)=f''(t)$，由图可知，$g(t)$各次积分的初始值有 $g^{(-1)}(0_-)=g^{(-2)}(0_-)=0$

由拉氏变换的积分定理可知：

$$\mathcal{L}[g^{(-2)}(t)]=\frac{1}{s^2}G(s)+\frac{1}{s^2}g^{(-1)}(0_-)+\frac{1}{s}g^{(-2)}(0_-)=\frac{1}{s^2}G(s)$$

~~而 $G(s)=\mathcal{L}[f''(t)]=1$~~

而$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$，应用时移特性可得

$$G(s)=\frac{2}{\tau}-\frac{4}{\tau}e^{-\frac{s\tau}{2}}+\frac{2}{\tau}e^{-s\tau}=\frac{2}{\tau}(1-e^{-\frac{s\tau}{2}})^2$$

从而得所求拉氏变换函数为

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[g^{(-2)}(t)]=\frac{1}{s^2}\cdot G(s)=\frac{2}{\tau}\cdot\frac{(1-e^{-\frac{s\tau}{2}})^2}{s^2}$$

六、设$x_1(n)=a^n u(n)$，则知有 $X_1(z)=\frac{z}{z-a}$ $|z|>a$，

根据z变换的性质有

$$X(z)=z\cdot\int_z^\infty\frac{X_1(z)}{z^2}dz=z\cdot\int_z^\infty\frac{dz}{z(z-a)}=\frac{z}{a}\ln\frac{z}{z-a}，$$

且收敛域为 $|z|>a$。

第二题：

1. 先求$f_s(t)$的傅里叶频谱函数（8分）

题给系统为一时域采样系统，且采样信号 $s(t)$ 为三角脉冲序列，可以表示为：

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_\tau(t-nT_s)=s_\tau(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

式中，$s_\tau(t)$为中心坐标$t=0$，脉宽为τ，高度为1的三角脉冲函数。考虑到第一题第3题的结果，知$s_\tau(t)$的傅氏变换为$\frac{\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$，则可以得到采样信号$f_s(t)$的频谱函数为

$$S(\omega)=\frac{\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa^2(\frac{n\omega_s\tau}{4})\delta(\omega-n\omega_s)$$

其，

由题图2(b)知，采样输出信号是f(t)和s(t)的乘积。根据傅里叶变换的频域卷积定理有：

$$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*S(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\frac{\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa^2\left(\frac{n\omega_s\tau}{4}\right)\delta(\omega-n\omega_s)$$

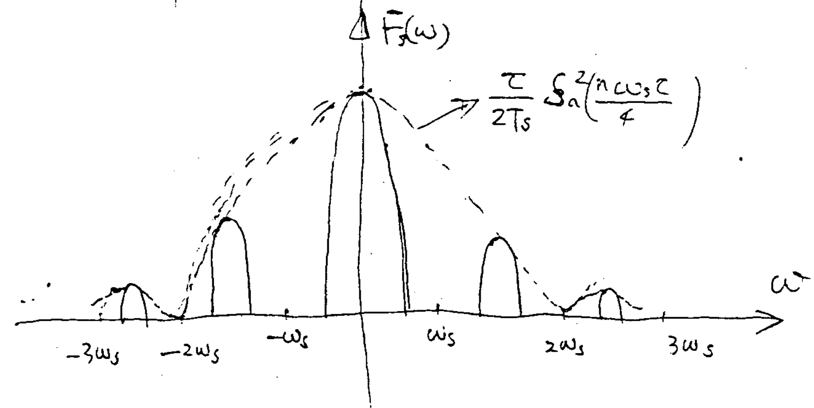
$$=\frac{\tau}{2T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa^2\left(\frac{n\omega_s\tau}{4}\right)\cdot F(\omega)*\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$=\frac{\tau}{2T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa^2\left(\frac{n\omega_s\tau}{4}\right)F(\omega-n\omega_s)$$

画频谱图（7分）。

由上述结果可知，采样输出信号频谱为输入信号频谱的无限个频移组成，各个频移的角频率为 $n\omega_s$（$n=0,\pm1,\pm2,\dots$），它们的振幅随 $Sa^2\left(\frac{n\omega_s\tau}{4}\right)$ 变化，即输出信号频谱振幅包络线为单个三角脉冲的频谱图。

图形如下：



（5分）若希望从 $f_s(t)$ 中无失真地恢复输入信号，

根据 Nyquist 定理，采样间隔 $\omega_s \ge 2\omega_m$，或 $T_s \le \frac{\pi}{\omega_m}$，

所选用的理想低通滤波器可以为：

$$H(\omega)=\begin{cases}2T_s, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

ω_s

第三题：

1. 由已知的全响应表达式 $y(t)=(1-e^{-t}+3e^{-3t})u(t)$ 可以知道系统具有的特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-3$。应用梅森公式可得系统函数为

$$H(s)=\frac{1+cs^{-2}}{1-as^{-1}-bs^{-2}}=\frac{s^2+c}{s^2-as-b}$$

由 $H(s)$ 分母多项式得特征多项式为：$\lambda^2-a\lambda-b=(\lambda+1)(\lambda+3)=\lambda^2+4\lambda+3$

比较等式两端系数得：$a=-4$，$b=-3$

将 a, b 数值代入 $H(s)$ 表达式，得：$H(s)=\frac{s^2+c}{s^2+4s+3}$

又输入信号 $f(t)=u(t)$ 的拉氏变换象函数为 $F(s)=\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$

所以，系统零状态响应的象函数为：$Y_f(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{s^2+c}{s(s+1)(s+3)}$

式中极点 $s=0$ 由激励所导致，为强迫响应的极点，利用部分分式分解法可以求得强迫响应象函数为：

$$Y_p(s)=\frac{\frac{c}{3}}{s}\longleftrightarrow y_p(t)=\frac{c}{3}u(t)$$

再观察已知的全响应，知 $y_p(t)=u(t)$，所以有 $c=3$.

2. 将 c 的数值代入 $Y_f(s)$ 的表达式，得

$$Y_f(s)=\frac{s^2+3}{s(s+1)(s+3)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+3}$$

所以零状态响应 $y_f(t)=(1-2e^{-t}+2e^{-3t})u(t)$

故得系统零输入响应 $y_x(t)=y(t)-y_f(t)=(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$

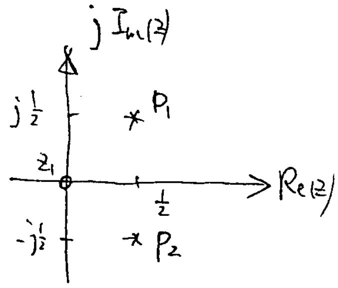
D,

第四题：

1、系统差分方程：$y(n)-y(n-1)+0.5y(n-2)=f(n-1)$

2、系统函数为：$H(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}=\dfrac{z}{z^2-z+0.5}$

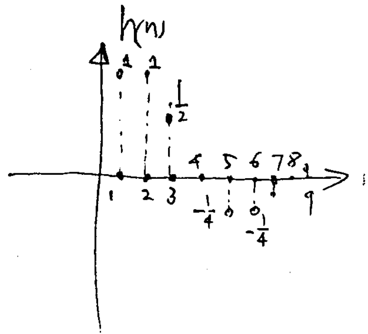
零点 $z_1=0$，极点 $p_{1,2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2}$，零极点图 ⇒



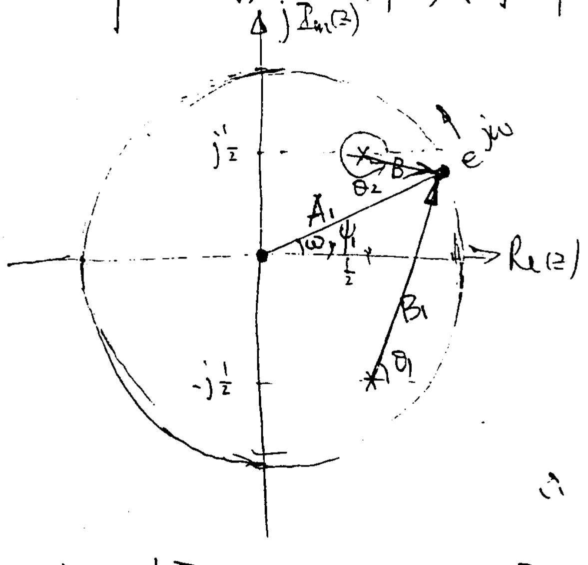
3、单位响应：$H(z)=\dfrac{z}{z^2-z+0.5}=\dfrac{jz}{z-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}}-\dfrac{jz}{z-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}}$

$\therefore\ h(n)=j\left[(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2})^n\right]$

$=2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n\sin\frac{\pi}{4}n\cdot u(n)$　　[波形]图 ⇒



4、利用几何确定法画幅频图和相频图。

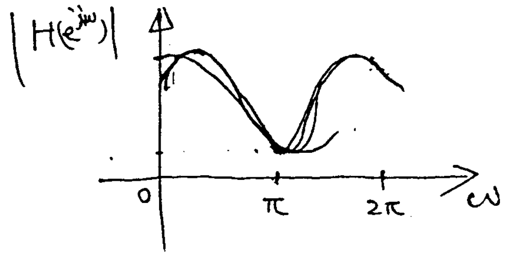


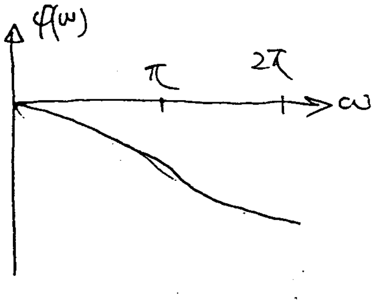
$\cancel{H(e^{j\omega})}\ H(z)=\dfrac{(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)}$

$H(e^{j\omega})=\dfrac{(e^{j\omega}-z_1)}{(e^{j\omega}-p_1)(e^{j\omega}-p_2)}=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi}$

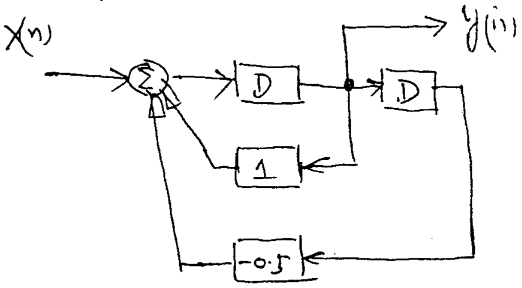
$\therefore\ |H(e^{j\omega})|=\dfrac{A_1}{B_1\cdot B_2}$，$\varphi(\omega)=\psi_1-\theta_1-\theta_2$

据上述几何关系，可画出幅频和相频曲线图如下





5、使用延时器最少的模拟框图为



习题

1 $X(z)=\sum_{n=0}^{3}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{3}z^{-n}=\frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}}$

2，频谱函数为 $X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

$$=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\cdot\frac{\sin 2\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

在单位圆上对X(z)进行均匀采样，即令

$$\omega=\frac{2\pi}{N}k,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中N为采样点数。代入$X(e^{j\omega})$得

$$X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$=e^{-j\frac{3\pi}{N}k}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{N}k}{\sin\frac{\pi}{N}k}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

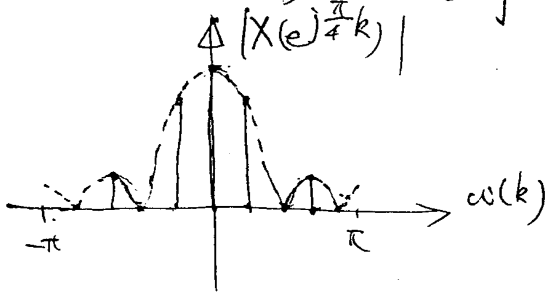
3. 取采样点数 $N=8$，可以得到离散化频谱函数为

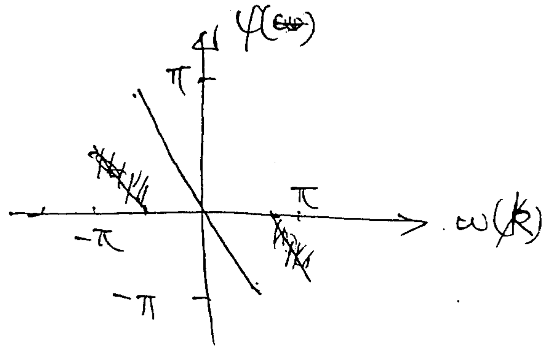
$$X(k)=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}$$

幅频 $|X(k)|=\left|\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}\right|$

相频 $\varphi(\omega)=-\frac{3}{8}\pi k+\arg\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}\right)$

$-\pi<\omega\le\pi$ 范围内的频谱特性图如下.





第六题

1 状态方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)+2x_2(t)+f_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+f_1(t)\end{cases}$$

输出方程组：

$$\begin{cases}y_1(t)=x_1(t)+x_2(t)+f_1(t)\\ y_2(t)=-x_2(t)+f_1(t)\end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix}$$

、对状态方程组求拉氏变换得

$$\begin{cases} s X_1(s) = X_1(s) + 2 X_2(s) + F_2(s) \\ s X_2(s) = -X_2(s) + F_1(s) \end{cases}$$

从中解得:

$$(s+1) X_2(s) = F_1(s) \longrightarrow X_2(s) = \frac{1}{s+1} F_1(s)$$

$$(s-1) X_1(s) = 2 X_2(s) + F_2(s) = \frac{2}{s+1} F_1(s) + F_2(s)$$

$$X_1(s) = \frac{2}{(s-1)(s+2)} F_1(s) + \frac{1}{s-1} F_2(s) = \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) F_1(s) + \frac{1}{s-1} F_2(s)$$

同样,对输出方程组求拉氏变换得

$$\begin{cases} Y_1(s) = X_1(s) + X_2(s) + F_1(s) \\ Y_2(s) = -X_2(s) + F_1(s) \end{cases}$$

将 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 代入上式,得

$$Y_1(s) = X_1(s) + X_2(s) + F_1(s) = \underline{\frac{1}{s-1} F_1(s) - \frac{1}{s+1} F_1(s) + \frac{1}{s-1} F_2(s)} + \underline{\frac{1}{s+1} F_1(s) + F_1(s)}$$

$$= \frac{1}{s-1} F_1(s) + F_1(s) + \frac{1}{s-1} F_2(s)$$

$$= \frac{s}{s-1} F_1(s) + \frac{1}{s-1} F_2(s)$$

$$\therefore \ s Y_1(s) - Y_1(s) = s F_1(s) + F_2(s).$$

由此可写出微分方程: $\frac{d}{dt} y_1(t) - y_1(t) = \frac{d}{dt} f_1(t) + f_2(t)$

同样, $Y_2(s) = -X_2(s) + F_1(s) = -\frac{1}{s+1} F_1(s) + F_1(s) = \frac{s}{s+1} F_1(s)$

$$s Y_2(s) + Y_2(s) = s F_1(s)$$

$$\therefore \ \frac{d}{dt} y_2(t) + y_2(t) = \frac{d}{dt} f_1(t)$$

这一系统的微分方程组: $\begin{cases} \dot{y}_1(t) - y_1(t) = \dot{f}_1(t) + f_2(t) \end{cases}$

3、利用时域法求解系统状态及输出，首先利用 Cayley-Hamilton 定理求系统矩阵指数 $e^{\bar{A}t}$。

由状态方程知 $\bar{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，

特征多项式 $\det(\lambda\bar{I}-\bar{A})=\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2\\ 0 & \lambda+1\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)$

特征根为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$.

根据 Cayley-Hamilton 定理构造方程组 $\begin{cases}e^{\lambda_1 t}=c_0+c_1\lambda_1\\ e^{\lambda_2 t}=c_0+c_1\lambda_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_0+c_1=e^{t}\\ c_0-c_1=e^{-t}\end{cases}$

解得：$\begin{cases}c_0=\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\\ c_1=\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\end{cases}$，

则 $e^{\bar{A}t}=c_0\bar{I}+c_1\bar{A}=\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}e^{t} & e^{t}-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$

状态方程全解为 $\cancel{x(t)=\varphi(t)x(0)+\varphi(t)\cdot B*f(t)}$

$\bar{X}(t)=e^{\bar{A}t}\cdot\bar{X}(0)+e^{\bar{A}t}\cdot\bar{B}*\bar{f}(t)$

$=\begin{bmatrix}e^{t} & e^{t}-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^{t} & e^{t}-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}u(t)\\ \delta(t)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(e^{t}-e^{-t})*u(t)+e^{-t}*\delta(t)\\ e^{-t}*u(t)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2e^{t}+e^{-t}-2\\ 1-e^{-t}\end{bmatrix}$，$t\geq 0$

故，状态方程的零输入解为 $\bar{X}_x(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}\end{bmatrix}$，$t\geq 0$

〃 零状态解为 $\bar{X}_f(t)=\begin{bmatrix}2e^{t}+e^{-t}-2\\ 1-e^{-t}\end{bmatrix}$，$t\geq 0$

全解为 $\bar{X}(t)=\begin{bmatrix}2e^{t}+2e^{-t}-2 \ldots$

一页

P.

将上述状态解代入输出方程有

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{t}+2e^{-t}-2 \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{t}+2e^{-t}-2 \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{t}-1 \\ e^{-t}-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

对此，输出的零输入响应为 $\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$， $t \geq 0$

零状态响应为 $\begin{bmatrix} 2e^{t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$， $t \geq 0$

全响应为 $\begin{bmatrix} 2e^{t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$， $t \geq 0$