中国科学院－中国科学技术大学
2003年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：信号与系统

说明：1. 本试卷共四大题，总分150分。

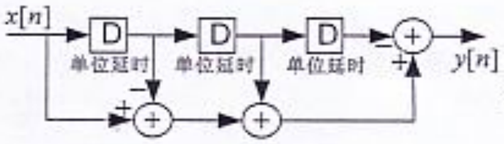
2. 请看清题意，特别是题目中的黑体字；题目中要求概画的图形包含得分，必须作图，并加必要的标注；若题目中明确写明用那种求解方法的，必须用指明的方法求解，若题目中没有限定求解方法的，可用任何正确的方法求解。

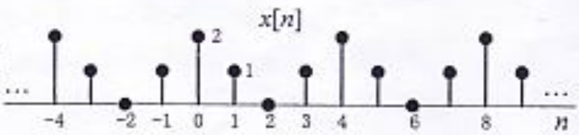
一、试求下列5个小题：（每小题15分，共75分）

1. 已知差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]-0.5y[n-2]=x[n]-x[n-3]$ 和非零起始条件 $y[-1]=2$，$y[-2]=-2$ 表示的起始不松弛的离散时间因果系统，试用**递推算法**分别计算出在 $\delta[n]$ 输入时，系统的输出 $y[n]$ 中的零输入响应 $y_{zi}[n]$，$n\geq 0$，和零状态响应 $y_{zs}[n]$。（**至少需分别递推计算出** $y_{zi}[n]$ 和 $y_{zs}[n]$ **的头4个序列值**）。

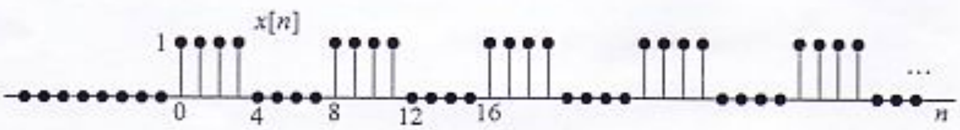
2. 已知连续时间LTI系统的单位冲激响应 $h(t)=\begin{cases}\left|\sin(\pi t/T)\right|, & |t|\leq T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$，概画出它的波形，求出系统频率响应 $H(\omega)$，概画出它的幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$。

3. 某数字滤波器的方框图如下图**左图**所示，试求它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，写出系统零、极点，并回答它是**IIR**、还是**FIR**滤波器？进一步，求出它对下图右图所示的周期输入信号 $\tilde{x}[n]$ 的响应或输出 $y[n]$。





4. 试求下图所示序列 $x[n]$ 的 **Z** 变换 $X(z)$，并概画出 $X(z)$ 的零、极点分布和收敛域。



5. 可以运用**一个** N 点 **FFT** 程序同时计算两个 N 点的不同实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 **DFT** $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$，试简述这一计算方法和计算框图，并推导相应的运算公式。

二、某个稳定的连续时间LTI系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s^2+0.5s-1.5)e^{2s}}$，（共20分）

1. 试确定其收敛域和零、极点分布，并求出该系统的单位冲激响应 $h(t)$；（10分）

2. 该系统因果（或能实现）吗？若不能实现，请设计一个与它的幅度频率特性完全相同的连续时间因果稳定滤波器，画出其用连续时间相加器、数乘器和积分器的并联实现结构的方框图或信号流图，并写出其微分方程表示。（10分）

三、试求下列两小题(共 20 分):

1. 某连续时间系统的输入输出信号变换关系为 $y(t)=\int_0^t x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，试确定该系统是否线性？是否时不变？是否因果？是否稳定？若是线性时不变系统，试求出它的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形。(9 分)

2. 现已知该系统的输入为 $x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_0\left(t-2n\right)$，其中 $x_0(t)=\begin{cases}\sin\pi t, & 0\le t\le 1\\ 0, & t<0,t>1\end{cases}$，试用时域卷积的方法求出系统的输出 $y(t)$，并概画出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形。(11 分)

四、两个连续时间实能量受限信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，已知 $x_1(t)$ 的最高频率分量为 2000 Hz，$x_2(t)$ 的最高频率分量为 1000 Hz。对于如下 $y_i(t)$，$i=1,2,3,4$，试求：(共 35 分)

a) $y_1(t)=x_1(t)x_2(t)$　　b) $y_2(t)=x_1(t)+x_2(t)\cos(6000\pi t)$

c) $y_3(t)=R_{x_1x_2}(t)$，即 $y_3(t)$ 是 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的互相关函数

d) $y_4(t)=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)$，其中 $h(t)=\begin{cases}4000, & |t|<0.125\text{ms}\\ 0, & |t|>0.125\text{ms}\end{cases}$

1. 若 $y_i(t)$，$i=1,2,3,4$，分别用周期冲激串抽样，试确定为确保它们不产生混叠(即临界抽样)，各自的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，$i=1,2,3,4$，是多少 ms。(18 分)

2. 若对 $y_i(t)$，$i=1,2,3$，分别用上述各自求得的 $T_{i\max}$ 进行周期冲激串抽样，得到各自的已抽样信号 $y_{1P}(t)$、$y_{2P}(t)$ 和 $y_{3P}(t)$。试问：你能从 $y_{iP}(t)$，$i=1,2,3$ 中，分别同时无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 吗？对于能无失真恢复的 $y_{iP}(t)$，试画出由它们分别恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的无失真变种的系统框图。(9 分)

3. 若对 $y_4(t)$ 用 1. 小题确定的 $T_{4\max}$ 进行周期冲激串抽样，得到的已抽样信号 $y_{4P}(t)$ 会出现什么情况?试从时域(即 $y_{4P}(t)$ 的波形或表达式)，或者从频域(即 $y_{4P}(t)$ 的频谱 $Y_{4P}(\omega)$)，说明其原因。为避免出现这样的问题(即为了在对 $y_4(t)$ 抽样的同时，必须在其已抽样信号中同时无失真地保存 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的信息)，请说明你可用什么方法来避免这一问题。(8 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称：　信号与系统

一、本题包括 5 个小题：（每小题 15 分，共 75 分）

1. 先求零输入响应 $y_{zi}[n]$，$n\ge 0$，它是在当前输入 $x[n]=0$ 时，仅有非零起始条件造成的那部分输出，它应满足齐次方程 $y_{zi}[n]-0.5y_{zi}[n-1]-0.5y_{zi}[n-2]=0$，它的后推方程为

$$y_{zi}[n]=0.5(y_{zi}[n-1]+y_{zi}[n-2]) \qquad (1.1\text{-}1) \qquad \text{(到此得 3 分)}$$

由于系统是因果系统，仅有当前输入 $x[n]=\delta[n]$ 造成的零状态响应 $y_{zs}[n]=0$，$n<0$，故 $y_{zi}[-1]=y[-1]=2$，$y_{zi}[-2]=y[-2]=-2$。用它们并按照后推方程(1.1-1)，可以逐个递推出 $y_{zi}[n]$，$n\ge 0$，按此计算出 $y_{zi}[n]$ 的头 4 个序列值如下：（这一段得 1 分）

$y_{zi}[0]=0.5(y_{zi}[-1]+y_{zi}[-2])=0.5(2-2)=0$ （该值和以下 3 个序列值每个得 1 分）

$y_{zi}[1]=0.5(y_{zi}[0]+y_{zi}[-1])=0.5(0+2)=1$

$y_{zi}[2]=0.5(y_{zi}[1]+y_{zi}[0])=0.5(1+0)=0.5$

$y_{zi}[3]=0.5(y_{zi}[2]+y_{zi}[1])=0.5(0.5+1)=0.75$，依此类推，计算出 $y_{zi}[4]$、$y_{zi}[5]$ …

再求当前输入 $x[n]=\delta[n]$ 造成的零状态响应 $y_{zs}[n]$，它就是原差分方程表示的因果 LTI 系统的单位冲激响应，且 $y_{zs}[n]=0$，$n<0$，只要用如下后推方程，逐个递推出 $y_{zs}[n]$，$n\ge 0$。

$$y_{zs}[n]=\delta[n]-\delta[n-2]+0.5(y_{zs}[n-1]+y_{zs}[n-2]) \qquad (1.1\text{-}2) \qquad \text{(这一段得 3 分)}$$

由此递推出 $y_{zs}[n]$ 的头 4 个序列值如下：（以下 4 个序列值每个得 1 分）

$y_{zs}[0]=\delta[0]-\delta[-2]+0.5(y_{zs}[-1]+y_{zs}[-2])=1-0+0.5(0+0)=1$

$y_{zs}[1]=\delta[1]-\delta[-1]+0.5(y_{zs}[0]+y_{zs}[-1])=0-0+0.5(1+0)=0.5$

$y_{zs}[2]=\delta[2]-\delta[0]+0.5(y_{zs}[1]+y_{zs}[0])=0-1+0.5(0.5+1)=-0.25$

$y_{zs}[3]=\delta[3]-\delta[1]+0.5(y_{zs}[2]+y_{zs}[1])=0-0+0.5(-0.25+0.5)=0.125$

依此类推，计算出 $y_{zs}[4]$、$y_{zs}[5]$ …

2. $h(t)=\begin{cases}|\sin(\pi t/T)|, & |t|\le T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$ 的波形如图 1.1-1 所示，（画对 $h(t)$ 的波形得 2 分）

系统的频率响应 $H(\omega)$（即 $h(t)$ 的傅里叶变换）可以用多种方法求，这里举出两种方法的求解：

方法 1：对图 1.2-1 所示的 $h(t)$ 波形求它的一次微分 $h'(t)$ 和二次微分 $h''(t)$，得到 $h'(t)$ 和 $h''(t)$ 的波形分别如图 1.2-2 和图 1.2-3 所示。（画对 $h'(t)$ 和 $h''(t)$ 的波形共得 4 分）

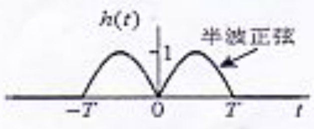


图1.2-1

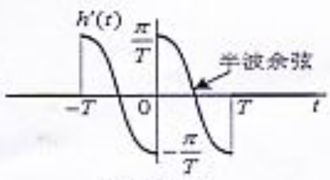


图1.2-2

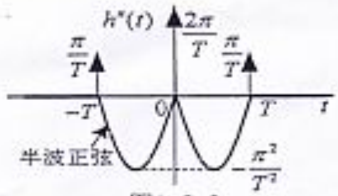


图1.2-3

由图 1.1-3 可以写出 $h''(t)$ 的表达式如下：

$$h''(t)=(\pi/T)[\delta(t+T)+2\delta(t)+\delta(t-T)]-(\pi^2/T^2)h(t) \qquad (1.2\text{-}1) \qquad \text{(得 2 分)}$$

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

对上式等号两边取傅里叶变换，并利用傅里叶变换的微分性质，则有

$(\mathrm{j}\omega)^2 H(\omega)=(\pi/T)[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}]-(\pi^2/T^2)H(\omega)$ (1.2-2) （得3分）

由上式，进一步可得到

$$H(\omega)=\frac{(\pi/T)[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}]}{(\pi/T)^2-\omega^2}=\frac{(\pi/T)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}})^2}{(\pi/T)^2-\omega^2}=\frac{(\pi/T)\cos^2(\omega T/2)}{(\pi/T)^2-\omega^2}$$

$$=\frac{(\pi/T)[1+\cos(\omega T)]}{(\pi/T)^2-\omega^2}$$ (1.2-3) （得2分）

方法2：$h(t)$可以写成如下表达式：

$$h(t)=\sin\left[\frac{\pi}{T}(t+T)\right]+2\sin\left[\frac{\pi}{T}t\right]+\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-T)\right]$$ (1.2-4)（写出本式得2分）

由于 $\sin(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$，$\mathrm{Re}\{s\}>0$， （写出本式得3分）

利用拉氏变换的时移性质，(1.1-4)式表示的$h(t)$的拉氏变换像函数$H(s)$如下，且$h(t)$是有限持续期的时间函数，$H(s)$的收敛域至少是有限S平面，即有

$$H(s)=\frac{(\pi/T)(\mathrm{e}^{sT}+2+\mathrm{e}^{-sT})}{s^2+(\pi/T)^2}，\ s\in\text{有限 S 平面}$$ (1.2-5) （得3分）

$H(s)$的收敛域包含虚轴，故$h(t)$的傅里叶变换$H(\omega)$为

$$H(\omega)=H(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{(\pi/T)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}{(\mathrm{j}\omega)^2+(\pi/T)^2}=\frac{(\pi/T)\cos^2(\omega T/2)}{(\pi/T)^2-\omega^2}$$

$$=\frac{(\pi/T)[1+\cos(\omega T)]}{(\pi/T)^2-\omega^2}$$ (1.2-6) （得3分）

上式的结果与(1.2-3)式的结果相同。

说明：还可以用其他方法求$H(\omega)$，如果用傅里叶正变换公式，通过积分运算，或者利用傅里叶变换其他性质，只要正确求得与(1.2-3)式同样结果，都可得到10分

进一步，由(1.2-3)式可以概画出系统的幅频响应$|H(\omega)|$和相频响应$\varphi(\omega)$如下：

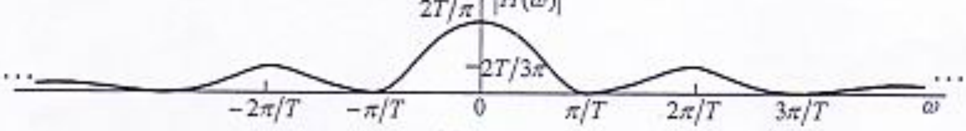


图1.2-4

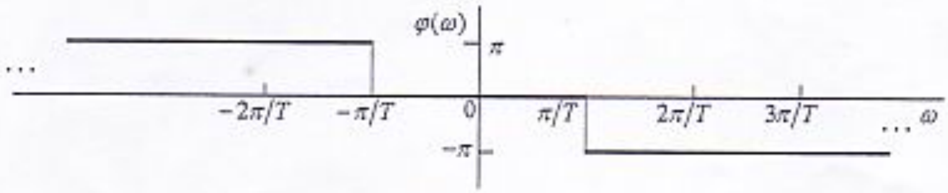


图1.2-5

（画对$|H(\omega)|$和$\varphi(\omega)$得2分）

3. 由于离散时间单位延时的系统函数为 z^{-1}，因此，本小题滤波器的系统函数为

$H(z)=1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}=(1-z^{-1})(1+z^{-2})$，$|z|>0$ (1.3-1)

(以上求对得 **4** 分)

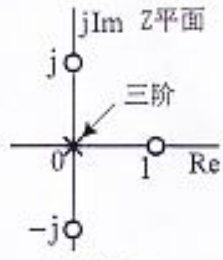


图 1.3-1

本系统有三个零点，即$z_{1,2}=\pm\mathrm{j}$ 或 $z_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\pi/2}$，只有一个三阶极点，即 $p=0$。零、极点分布见图 1.3-1。 (零、极点写对或画对得 **2** 分)

该滤波器是 FIR 滤波器 (回答正确得 **1** 分)

可以用变换域方法、或者时域方法求解在题图所示 $\tilde{x}[n]$ 输入时的滤波器输出 $y[n]$。

变换域方法： $\tilde{x}[n]$ 是周期 $N=4$ 的周期序列，它可以如下展开成离散傅里叶级数

$$\tilde{x}[n]=1+\cos(\pi n/2)=1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n/2}$$

由于离散时间 LTI 系统对复指数序列 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}$ 输入的响应为 $\tilde{H}(\Omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}$ 或 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}$，其中 $\tilde{H}(\Omega_0)=H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0})$ 是系统的频率响应，即 Z 平面单位圆上的系统函数， (得 **2** 分)

由(1.3-1)式表示的系统函数及其零、极点可知 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})=H(\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\pi/2})=0$， (得 **2** 分)

因此，滤波器在 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出 $y[n]$ 为

$$y[n]=1\times H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})+0.5\times H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2})+0.5\times H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2})=0$$ (得 **4** 分)

时域方法： 由题图所示的数字滤波器结构或(1.3-1)式表示的系统函数，可以求得滤波器的单位冲激响应 $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]+\delta[n-2]-\delta[n-3]$ (1.3-2) (得 **2** 分)

该滤波器在 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出为 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]$，它是一个与 $\tilde{x}[n]$ 相同周期的周期序列，可以用列表计算 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]$，计算表如下：

$h[n]$ \ $\tilde{x}[n]$	…	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	…
1		0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	
−1		0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	
1		0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	
−1		0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	

上表白色表格中每个反对角线行的数值相加就是 $y[n]$ 的响应序列值，由上表至少可以得到 $y[n]$ 的连续 9 个序列值都是零值，而 $y[n]$ 也是周期为 4 的周期序列，故所求的 $y[n]=0$，$-\infty<n<\infty$。这一结果与变换域方法求得的结果相同。 (得 **6** 分)

另外，还可以用其他的时域卷积方法，

例如，先得到(1.3-2)式，即 $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]+\delta[n-2]-\delta[n-3]$ (得 **2** 分)

再由题图所示的 $\tilde{x}[n]$ 波形，可写出 $\tilde{x}[n]$ 的表达式为

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2\delta[n-4k]+\delta[n-4k-1]+\delta[n-4k-3])$$ (1.3-3) (得**2**分)

计算 $\tilde{x}[n]$ 与 $h[n]$ 地卷积，得到 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]=0$ (得 **4** 分)

或者，利用卷积和运算的图解法，正确画出必要的有关图形，

也可以求得 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]=0$ (得 **8** 分)

4. $x[n]$可以写成为$x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$ （得3分）

因为$u[n] \xleftrightarrow{\ Z\ } \dfrac{1}{1-z^{-1}}$，$|z|>1$， （得2分）

利用Z变换的线性性质和时移性质，$x[n]$的Z变换为

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{-4k}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-4})^k$$

$$=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})},\ |z|>1 \qquad (1.4\text{-}1) \quad （得5分）$$

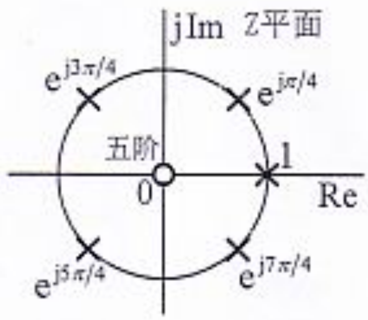


图 1.4-1

$X(z)$有4个一阶复极点$p_i=e^{j\frac{(2i-1)}{4}\pi}$，$i=1,2,3.4$，一个一阶实极点$p_5=1$；只有一个5阶零点$z=0$。$X(z)$在Z平面上的零、极点分布如图1.4-1所示。 （写对或画对零、极点得5分）

5. 由于N点的FFT程序可以计算一个N点复序列$x[n]$的DFT系数$X(k)$，因此，用一个N点FFT程序同时计算两个N点实序列$x_1[n]$和$x_2[n]$的DFT的方法如下：首先令：

$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1(k)$和$x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_2(k)$，及$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k)$

，把两个N点实序列$x_1[n]$和$x_2[n]$分别作为实部和虚部，构成一个N点复序列$x[n]$，即

$$x[n]=x_1[n]+jx_2[n] \qquad (1.5\text{-}1) \quad （得1分）$$

根据DFT的线性性质，则有

$$x[n]=x_1[n]+jx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k)=\text{DFT}\{x_1[n]\}+j\times\text{DFT}\{x_2[n]\}$$

$$=X_1(k)+jX_2(k) \qquad (1.5\text{-}2) \quad （得2分）$$

又上式右边可以看出：$X_1(k)$是$X(k)$的实部序列，$X_2(k)$是$X(k)$的实部序列，并根据DFT的有关对称性质，可以得到

$$X_1(k)=\text{Re}\{X(k)\}=0.5\{X(k)+X^*(N-k)\} \qquad k=0,1,2\cdots N-1 \quad (1.5\text{-}3) \quad （得4分）$$

和 $$X_2(k)=\text{Im}\{X(k)\}=-0.5j\{X(k)-X^*(N-k)\} \qquad k=0,1,2\cdots N-1 \quad (1.5\text{-}4) \quad （得4分）$$

上面两式中的上标*表示取共轭运算（下同）。

用一个N点FFT程序同时计算两个N点实序列$x_1[n]$、$x_2[n]$的DFT $X_1(k)$、$X_2(k)$的计算框图如图1.5-1所示。

（画对得4分）

图 1.5-1

中国科学院 & 中国科学技术大学

2003年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

二、本题共20分

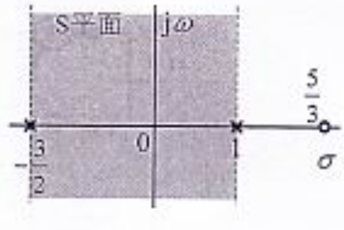


图 2.1-1

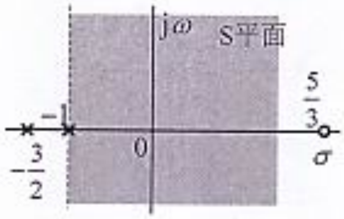


图 2.1-2

1. 该稳定LTI系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)}e^{-2s}$，

   它的零、极点如图2.1-1所示，由于系统稳定，系统函数的收敛域必须包含虚轴，故 $H(s)$ 的收敛域 R_h 为图2.1-1中灰色区域，即 $-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$。 **(到此得3分)**

   系统的单位冲激响应 $h(t)$ 是 $\{H(s),\ R_h\}$ 的反拉氏变换可以写成

   $H(s)=H_0(s)e^{-2s}$，$-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$ 其中，e^{-2s} 的反拉氏变换是 $\delta(t-2)$， **(得1分)**

   $H_0(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)}$，$-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$ 的反拉氏变换 $h_0(t)$ 可以用部分分式展开法求，

$$H_0(s)=\left\{\frac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)},\ -1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s-1.5},\ -1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{s-1},\ \mathrm{Re}\{s\}<1\right\}+\left\{\frac{2}{s+1.5},\ 1.5<\mathrm{Re}\{s\}\right\}$$ **(得3分)**

   利用拉氏变换对：$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}\{s\}>-a$

   和 $-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}\{s\}<-a$

   可以求得 $h_0(t)=2e^{-1.5t}u(t)-e^{t}u(-t)$ **(得2分)**

   再利用拉氏变换的时域卷积性质，求得

   $h(t)=h_0(t)*\delta(t-2)=2e^{-1.5(t-2)}u(t-2)-e^{t-2}u(-t+2)$ (2.1-1) **(得1分)**

2. 由(2.1-1)式可知，$h(t)\neq 0$，$t<0$，故这个连续时间LTI系统非因果，也就不可能用三种连续时间基本单元(相加器、数乘器和积分器)来实现。 **(得1分)**

   只要把图2.1-1中的 $s=1$ 的一阶极点移到 $s=-1$，收敛域改成 $\mathrm{Re}\{s\}>1$，如图2.1-2所示，就设计出与原系统幅频特性完全相同、且既因果又稳定，这个因果稳定滤波器的系统函数为

$$H_1(s)=\frac{3s-0.5}{(s+1)(s+1.5)},\ \mathrm{Re}\{s\}>1 \qquad (2.1\text{-}2)$$ **(得3分)**

   为了要把 $H_1(s)$ 用并联结构实现，需将上式的 $H_1(s)$ 部分分式展开成

$$H_1(s)=\frac{10}{s+1.5}-\frac{7}{s+1} \qquad (2.1\text{-}3)$$ **(得2分)**

   按照上式，本小题所要求的滤波器用连续时间数乘器、相加器和经济区组成的并联结构实现的，方框图或信号流图分别如图2.2-1或图2.2-2所示， **(只要画对其中一个得4分)**

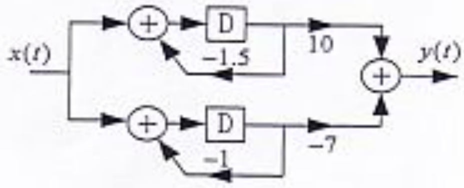


图 2.2-1　方框图

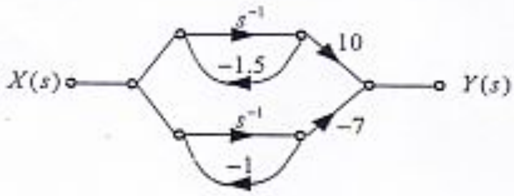


图 2.2-2　信号流图

三、本题共 20 分:

1. 系统输入输出关系可写为

$$y(t)=\int_0^1 x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau)-u(\tau-1)]x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*[u(t)-u(t-1)]$$ (得 3 分)

因此，它是一个 LTI 系统，即既满足线性，又满足时不变性。　(得 2 分)

且这个 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)=u(t)-u(t-1)$，　(得 1 分)

其波形如图 3.1-1 所示，　(波形画对得 1 分)

由于 $h(t)=0$，$t<0$，故它是因果的 LTI 系统。　(得 1 分)

由图 3.1-1 可知，$h(t)$ 绝对可积，故它是稳定的 LTI 系统。　(得 1 分)

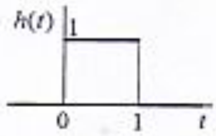


图 3.1-1

2. 已知系统的输入 $x(t)$ 为

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_0(t-2n)\text{，其中 } x_0(t)=\begin{cases}\sin\pi t, & 0\le t\le 1\\ 0, & t<0,t>1\end{cases}$$

它的波形如图 3.2-1 所示。(波形画对得 2 分) $x(t)$ 通过该系统的输出为

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*[u(t)-u(t-1)]=x(t)*u(t)-x(t)*u(t-1) \quad (3.2\text{-}1)$$ (得 2 分)

令: $y_0(t)=x(t)*u(t)$

$$=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

(上式得 1 分)

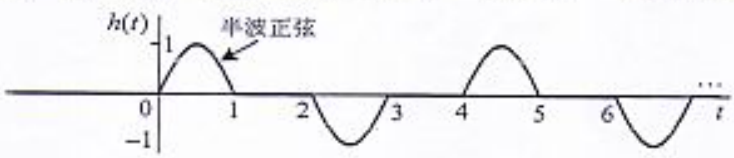


图 3.2-1

它的波形如图 3.2-2 所示

(波形画对得 1 分)

且有，

$x(t)*u(t-1)=y_0(t-1)$

(上式得 1 分)

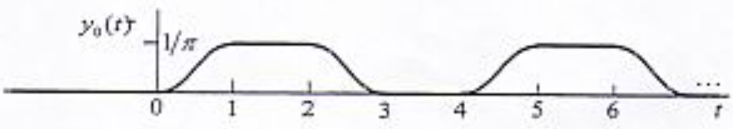


图 3.2-2

因此，系统输出 $y(t)$ 可表示为

$y(t)=y_0(t)-y_0(t-1)$

$y(t)$ 的波形如图 3.2-3 所示

(波形画对得 2 分)

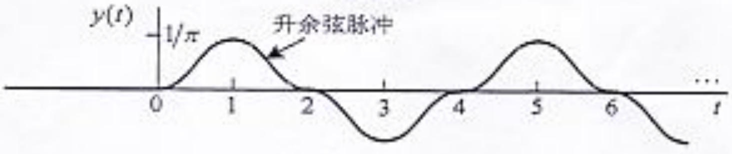


图 3.2-3

$y(t)$ 可写成 $y(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1-\cos\pi t)\left[u(t-2k)-u(t-2k-2)\right]$　(得 2 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

四、本题共 35 分

1. 令：$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的带限频谱分别为 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$，且有 $X_1(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi f_{M1}$，和 $X_2(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi f_{M2}$，其中，$f_{M1}=2000$ Hz，和 $f_{M2}=1000$ Hz。

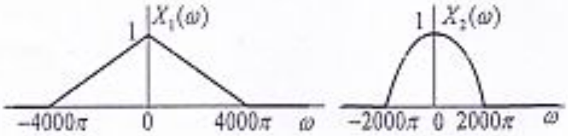


图 4.1-1

在本题下面的解题中，假设 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$ 分别具有图 4.1-1 所示的三角和半圆形频谱。

a) 对于 $y_1(t)=x_1(t)x_2(t)$，根据傅里叶变换的频域卷积性质，它的频谱 $Y_1(\omega)$ 也是带限频谱，

$Y_1(\omega)=(1/2\pi)X_1(\omega)*X_2(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi(f_{M1}+f_{M2})=6000\pi$ (4.1-1) (得 2 分)

因此，对 $y_1(t)$ 抽样不产生混叠的最大抽样间隔 $T_{1\max}=1/(2\times3000)=1/6$ ms (得 1 分)

b) 对于 $y_2(t)=x_1(t)+x_2(t)\cos(6000\pi t)$，它的傅里叶变换 $Y_2(\omega)$ 为

$Y_2(\omega)=X_1(\omega)+0.5[X_2(\omega+6000\pi)+X_2(\omega-6000\pi)]$ (4.1-2) (得 1 分)

它的频谱 $Y_2(\omega)$ 也是带限的，如图 4.1-2 所示。 ($Y_2(\omega)$ 画对得 1 分)

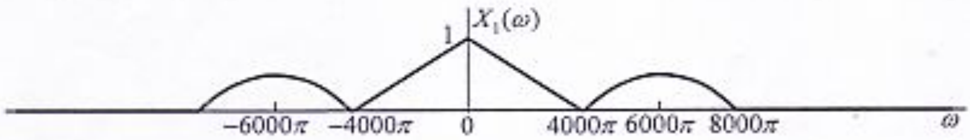


图 4.1-2

并有 $Y_2(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi(3000+f_{M2})=8000\pi$ (4.1-3) (得 1 分)

因此，对 $y_2(t)$ 抽样不产生混叠的最大抽样间隔 $T_{2\max}=1/(2\times4000)=0.125$ ms (得 1 分)

c) 对于 $y_3(t)=R_{x_1x_2}(t)$，它的傅里叶变换 $Y_3(\omega)$ 为

$Y_3(\omega)=X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ (4.1-4) (得 2 分)

由于 $X_2^*(\omega)$ 不改变频谱的宽度，且两个相互重叠的带限频谱相乘，由窄的宽度决定，故

$Y_3(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi f_{M2}=2000\pi$ (4.1-5) (得 1 分)

因此，对 $y_3(t)$ 抽样不产生混叠的最大抽样间隔 $T_{3\max}=1/(2\times1000)=0.5$ ms (得 1 分)

d) 对于 $y_4(t)=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)$，

其中，令：$x_0(t)=x_1(t)*h(t)$，根据傅里叶变换的时域卷积性质，$x_0(t)$ 的频谱为

$X_0(\omega)=X_1(\omega)H(\omega)$，其中 $H(\omega)=\mathrm{Sa}(0.25\times10^{-3}\omega)$ 是 $h(t)$ 的傅里叶变换，(得 1 分)

$H(\omega)$ 和 $X_0(\omega)$ 分别如图 4.1-3 和图 4.1-4 所示。 ($H(\omega)$ 和 $X_0(\omega)$ 画对得 1 分)

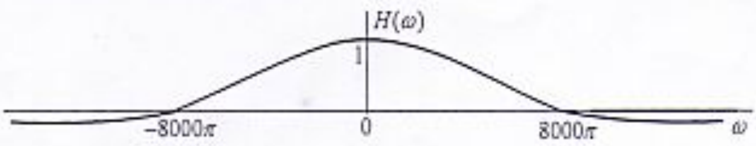


图 4.1-3

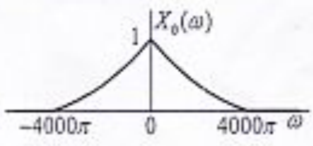


图 4.1-4

由此，并根据傅里叶变换的调制性质，$y_4(t)$ 的 $Y_4(\omega)$ 为 (下式写对得 2 分)

$Y_4(\omega)=0.5[X_0(\omega+8000\pi)+X_0(\omega-8000\pi)]+\mathrm{j}[X_2(\omega+8000\pi)-X_2(\omega+8000\pi)]$ (4.1-6)

上式中的实部和虚部分别如图 4.1-5 和图 4.1-6 所示，　　　　(画对得 1 分)

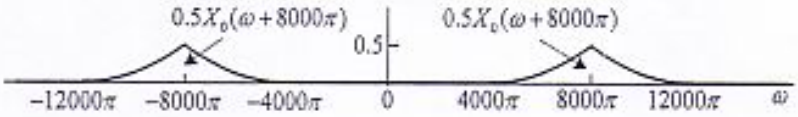


图 4.1-5

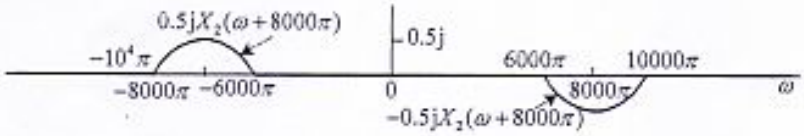


图 4.1-6

它们都是带限的带通频谱。因此，$y_4(t)$ 是一个带限的带通调制信号，在 2000 Hz 到 6000 Hz 之外没有谱分量，即

$$Y_4(\omega)=0,\ |\omega|<4000\pi \text{ 和 } |\omega|>12000\pi \qquad (4.1\text{-}7)$$　　(得 1 分)

根据带通抽样定理，对 $y_4(t)$ 抽样不产生混叠的最大抽样间隔为

$$T_{4\max}=\pi/8000\pi=0.125\ \text{ms} \qquad (4.1\text{-}8)$$　　(得 1 分)

2. 对 $y_i(t)$ 进行临界抽样，得到 $y_{iP}(t)$ 和它们的频谱 $Y_{iP}(\omega)$，$i=1,2,3$，如下：

$$y_{iP}(t)=y_i(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{i\max}) \text{ 和 } Y_{iP}(t)=\frac{1}{T_{i\max}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Y_i\left\{\omega-k\frac{2\pi}{T_{i\max}}\right\} \qquad (4.2\text{-}1)$$　　(得 1 分)

因此，都能用理想低通滤波器，从 $y_{iP}(t)$ 中无失真地恢复出 $y_i(t)$，$i=1,2,3$，　　(得 1 分)

a) 对于由 $y_{1P}(t)$ 恢复出的 $y_1(t)$，由于 $y_1(t)=x_1(t)x_2(t)$ 和 $Y_1(\omega)=(1/2\pi)X_1(\omega)*X_2(\omega)$，无论从时域或从频域上看，都无法从 $y_1(t)$ 恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 或它们的无失真变种，因此，不能从 $y_{1P}(t)$ 中分别无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。　　(得 1 分)

b) 对于由 $y_{2P}(t)$ 恢复出的 $y_2(t)$，由图 4.1-2 中 $y_2(t)$ 的频谱 $Y_2(\omega)$ 看出，可以从 $y_2(t)$ 中分别恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，因此能从 $y_{2P}(t)$ 中分别无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。　　(得 1 分)

采用的方法如图 4.2-1 所示。

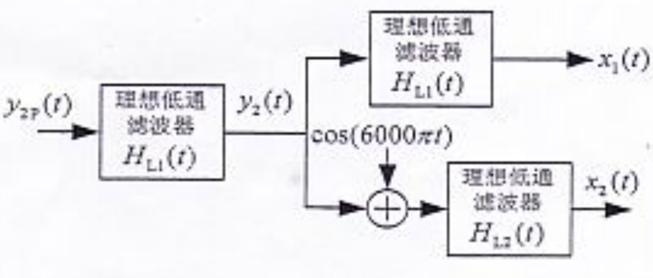


图 4.2-1

(图 4.2-1 画对和右边三式写对得 4 分)

在图 4.2-1 中：

$$H_{L0}(\omega)=\begin{cases}T_{2\max} & |\omega|<8000\pi\\ 0 & |\omega|>8000\pi\end{cases}$$

$$H_{L0}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<4000\pi\\ 0 & |\omega|>4000\pi\end{cases}$$

$$H_{L0}(\omega)=\begin{cases}2 & |\omega|<2000\pi\\ 0 & |\omega|>2000\pi\end{cases}$$

c) 对于由 $y_{3P}(t)$ 恢复出的 $y_3(t)$，由于 $y_3(t)=R_{x_1x_1}(t)$，或者 $Y_3(\omega)=X_1(\omega)X_2^*(\omega)$，无论从时域或从频域上看，都无法从 $y_3(t)$ 恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 或它们的无失真变种，因此，也不能从 $y_{3P}(t)$ 中分别无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。 (得 1 分)

3\. 对于 $y_4(t)=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)$，采用(4.1-8)式 $T_{4\max}=0.125\ \text{ms}$ 抽样不会发生抽样可能产生的混叠现象，但是，按照(4.1-8)式，无论从 $y_{4P}(t)$ 或其频谱 $Y_{4P}(\omega)$ 上看，已抽样信号 $y_{4P}(t)$ 中只包含了 $x_1(t)$ 的全部信息，而 $x_2(t)$ 的信息全部丢失了。 (得 2 分)

从时域得出上述结论的理由为： $y_{4P}(t)$ 可写成

$$y_{4P}(t)=\{[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{4\max})$$

$$=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{4\max})+x_2(t)\sin(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{4\max})$$

$$=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{i\max}) \qquad (4.2\text{-}2)$$ (得 2 分)

因为，当 $T_{4\max}=0.125\ \text{ms}$ 时，$\sin(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{4\max})=0$

或从频域上，按照(4.1-8)式，利用上面图 4.1-5 和图 4.1-6 中画出的 $Y_4(\omega)$ 的实部和虚部，可以画出 $Y_{4P}(\omega)$， $Y_4(\omega)$ 的实部经抽样后如图 4.2-2 所示，而 $Y_4(\omega)$ 的虚部经抽样后全部抵消成为零。因此，图 4.2-2 所示的计算 $Y_{4P}(\omega)$，其中只包含 $x_1(t)$ 的信息，而 $x_2(t)$ 没有了。 (或得 2 分)

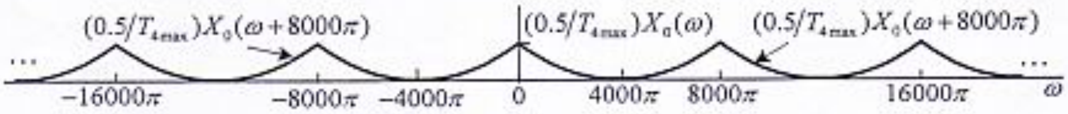


图 4.2-2

为了避免出现这样的问题，即为使 $y_4(t)$ 的已抽样信号中同时包含 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，可以采用把抽样率提高一倍的方法，即让 $T_{4\max}=62.5\mu\text{s}$，此时，$y_{4P}(t)$ 可写成

$$y_{4P}(t)=\{[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 62.5\mu s) \qquad (4.2\text{-}2)$$

由于 $\cos(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 62.5\mu s)=\cos(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 125\mu s)$

和 $\sin(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 62.5\mu s)=\sin(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 125\mu s-62.5\mu s)$

因此，分别对于 $y_4(t)$ 中的 $[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)$ 和 $x_2(t)\sin(8000\pi t)$ 来说，抽样率并没有提高，只是 $[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)$ 用到周期冲激串 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 125\mu s)$ 中 n 等于偶数的冲激，$x_2(t)\sin(8000\pi t)$ 用到周期冲激串 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 125\mu s)$ 中 n 等于奇数的冲激。这样就可 $y_{4P}(t)$ 中同时变换 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的信息，也可从 $y_{4P}(t)$ 中完全恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。 (得 4 分)