中国科学院研究生院
2010年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：信号与系统

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1． 简答题（30分，每小题各6分）

（1） 简述无失真传输的频率响应条件；

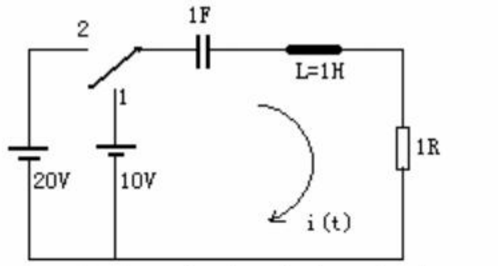
（2） 写出 $R(\omega)$，$X(\omega)$ 的希尔伯特变换；

（3） 写出周期信号 $E\cos\omega_o t$ 的自相关函数和功率谱；

（4） 写出卷机运算：$f(t)*f(t)$，其中 $f(t)=u(t-1)-u(t-2)$，并画出结果图形；

（5） 简述 IIR 和 FIR，并分析他们之间结构的区别。

2.（20分）电路图如下所示，已知在 $t=0$ 以前开关位于"1"，此时电路已进入稳态；当 $t=0$ 时刻，开关自"1"转至"2"。



（1） 试从物理概念判断 $i(0^-)$，$i'(0^-)$和 $i(0^+)$，$i'(0^+)$；

（2） 写出 $t>0$ 时间内描述系统的微分方程式，求 $i(t)$ 的完全响应；

（3） 写出一个方程式，可在 $-\infty<t<+\infty$ 时间内描述系统，根据此式，利用 δ 函数匹配法判断起始跳变，并与（1）问对照。

3.（20分）已知离散系统的差分方程为：$y(n)-\dfrac{1}{3}y(n-1)=x(n)$。

（1）试求系统函数 $H(z)$和单位样值（冲激）响应 $h(n)$；

（2）若系统的零状态响应为 $y(n)=3\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\}u(n)$，试求激励信号 $x(n)$；

（3）画出系统函数 $H(z)$的零极点分布图和幅频响应特性；

（4）画出系统的结构框图。

4.（10分）已知系统的阶跃响应为 $g(t)=1-e^{-2t}$。

（1）试求网络函数 $H(s)$；

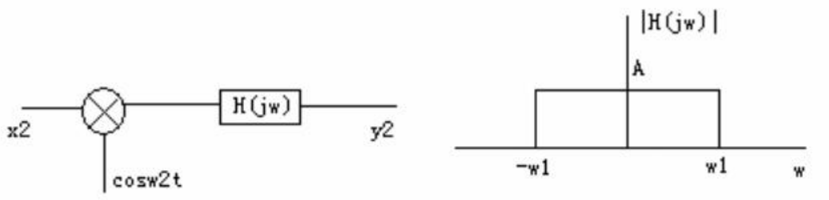
（2）已知响应为 $y(t)=1-e^{-2t}-te^{-2t}$，试求激励信号 $x(t)$。

5.（20分）已知 $X_1(\omega)=\cos\omega$，$|\omega|\le\dfrac{\pi}{2}$；$X_2(\omega)=X_1(\omega+\omega_o)+X_1(\omega-\omega_o)$。

（1）试求傅里叶逆变换 $x_1(t)$，$x_2(t)$；

（2）试求对 $x_2(t)$ 进行抽样的最低抽样频率；

（3）如下图所示：



若 $y_2(t)=x_1(t)$，试求 A，ω_1，ω_2。

6.（15 分）某系统的单位样值响应为 $h(n)=a^n u(n)$，其中 $0<a<1$。若激励信号为 $x(n)=u(n)-u(n-N)$，试利用 Z 变换法求响应 $y(n)$。

7.（20 分）已知理想低通滤波器的网络函数为 $H(j\omega)=e^{j\omega t_o}$，$|\omega|<\omega_o$。

（1）试求 $h(t)$；

（2）若输入为 $\dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1 t}$，试求输出信号。

8.（15 分）已知线性时不变系统的状态方程和输出方程为：

$$\begin{cases}\lambda'(t)=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\lambda(t)+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}e(t)\\ r(t)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}\lambda(t)\end{cases}$$

（1） 试检测系统的可控性和可观性；

（2） 试求可控与可观的状态变量个数；

（3） 求系统的输入—输出转移函数。

$s(t)=A\sin(2000\pi t)+\frac{1}{2}\cos(1800\pi t)-\frac{1}{2}\cos(2200\pi t)$

$R_{s}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(2000\pi\tau)+\frac{1}{8}\cos(1800\pi\tau)+\frac{1}{8}\cos(2200\pi\tau)$.

由于功率谱密度与自相关函数互成傅里叶变换关系：即有：

$$\mathcal{P}(\omega)=\frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega+2000\pi)+\delta(\omega-2000\pi)]$$
$$+\frac{1}{8}\pi[\delta(\omega+1800\pi)+\delta(\omega-1800\pi)]$$
$$+\frac{1}{8}\pi[\delta(\omega+2200\pi)+\delta(\omega-2200\pi)]$$

若信号通过 $\omega_0=2\pi f_T=2100\pi$ 的理想低通滤波器，则：

$$y(t)=A\sin(2000\pi t)+\frac{1}{2}\cos(1800\pi t).$$

自相关 $R_y(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(2000\pi\tau)+\frac{1}{8}\cos(1800\pi\tau)$

$$P_y=\frac{A^2}{2}+\frac{1}{8}.$$

859．2010年真题答案

一．简答：

(1) 无失真传输：$H(j\omega)=\left\{ Ke^{-j\omega t_0}\right.$． K, t_0为常数．

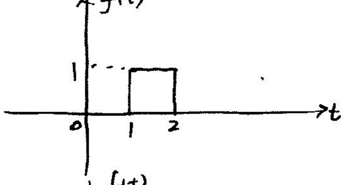
(2) 希尔伯特变换：若因果信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)=R(j\omega)+jX(j\omega)$，则有：

$$\begin{cases} X(\omega)=\dfrac{-1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda \\ R(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda \end{cases}$$

(3) $f(t)=E\cos\omega_0 t$ 的自相关函数及功率谱．

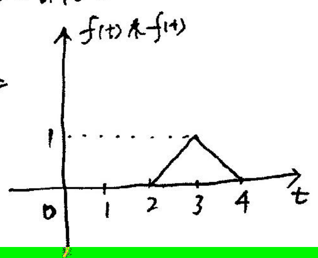
$$R_{ff}(\tau)=\frac{E^2}{2}\cos(\omega_0\tau).$$

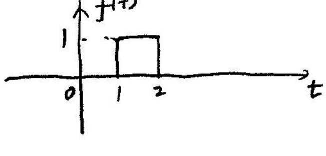
$$\mathcal{P}(\omega)=\frac{E^2}{2}\pi\{\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\}.$$



(4)．卷积运算：$f(t)=u(t-1)-u(t-2)$．

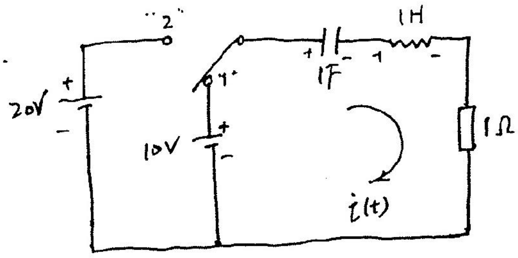
$f(t)*f(t)=$





5) 简答FIR与IIR之间的结构区别及定义. (四套).

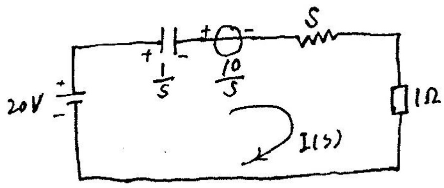
二.



(1) $i(0_-)=0,\quad i'(0_-)=0$

$i(0^+)=0,\quad i'(0^+)=10A.$

(2) $V_c(0_-)=10V$



$$(s+1+\frac{1}{s})I(s)+\frac{10}{s}=F(s)$$

$$I(s)=\frac{F(s)-\frac{10}{s}}{s+1+\frac{1}{s}}$$

由于 $F(s)=\frac{20}{s}\quad\Rightarrow\quad I(s)=\frac{F(s)}{s+1+\frac{1}{s}}-\frac{\frac{10}{s}}{s+1+\frac{1}{s}}$

$$i''(t)+i'(t)+i(t)=f'(t)$$

$$I(s)=\frac{\frac{10}{s}}{s+1+\frac{1}{s}}=\frac{10}{s^2+s+1}=\frac{10}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$i(t)=\frac{20}{\sqrt{3}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cdot u(t)\qquad,\ t>0.$$

(3) $f(t)=10u(-t)+20u(t)$

$i''(t)+i'(t)+i(t)=f'(t)$，其中 $f(t)=10u(-t)+20u(t)$

$$\begin{cases} i(0_-)=0 \\ i'(0_-)=0 \end{cases},\quad \begin{cases} i(0^+)=0 \\ i'(0^+)=10 \end{cases}$$

$$f'(t)=-10\delta(t)+20\delta(t)=10\delta(t)$$

$$i''(t)+i'(t)+i(t)=10\delta(t)$$

$$\begin{cases} i''(t)=a\delta(t)+bu(t) \\ i'(t)=au(t) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=10 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} i_{zs}'(0)=10 \\ i_{zs}(0^+)=0 \end{cases}$$

$$i_{zs}'(0^+)=i'(0^+)-i'(0_-)=10$$

$$i_{zs}(0^+)=i(0^+)-i(0_-)=0$$

零输入响应：由特征方程：$\lambda^2+\lambda+1=0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$y_{zi}(t)=c_1e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}t}+c_2e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}t} \quad 由\begin{cases} i(0)=0 \\ i'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=0. \end{cases}$$

$$i_{zi}(t)=0.$$

零状态响应：由特征方程：$\lambda^2+\lambda+1=0$

$$y_{zs}(t)=C_1e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}t}+C_2e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}t} \quad 由\begin{cases} i_{zs}(0^+)=0 \\ i_{zs}'(0^+)=10 \end{cases} 得 \begin{cases} C_1=-\frac{10}{\sqrt{3}i} \\ C_2=\frac{10}{\sqrt{3}i} \end{cases}$$

$$i_{zs}(t)=\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot u(t)$$

$$i(t)=i_{zi}(t)+i_{zs}(t)=\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot u(t).$$

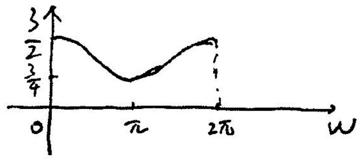
三. $H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$. $|z|>\frac{1}{3}$. $\quad h(n)=(\frac{1}{3})^n u(n)$.

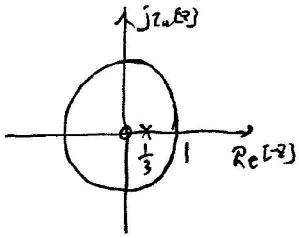
$$Y(z)=\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

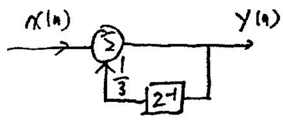
$$X(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\cdot(1-\frac{1}{3}z^{-1})=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x(n)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)=(\frac{1}{2})^n u(n-1).$$

$$H(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad H(e^{jw})=\frac{e^{jw}}{e^{jw}-\frac{1}{3}}$$







四. $G(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}=\frac{2}{s(s+2)}$, $X(s)=\frac{1}{s}$.

$$H(s)=\frac{G(s)}{X(s)}=\frac{2}{s+2}.$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}=\frac{s+4}{s(s+2)^2}$$

$$X(s)=\frac{Y(s)}{H(s)}=\frac{s+4}{s(s+2)^2}\times\frac{(s+2)}{2}=\frac{s+4}{2s(s+2)}=\frac{1}{s}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$\Rightarrow x(t)=(1-\frac{1}{2}e^{-2t})u(t)$$

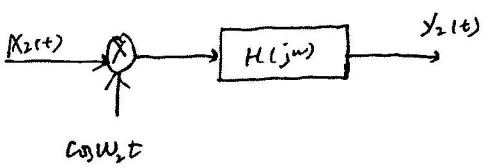
五. $X_1(w)=\begin{cases}\cos w, & |w|\le \frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

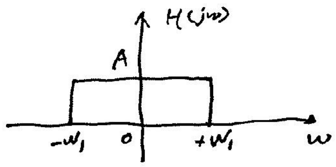
$X_2(w)=X_1(w+w_0)+X_1(w-w_0)$

$x_1(t)=\frac{1}{4}\left\{Sa\left[\frac{\pi}{2}(t+1)\right]+Sa\left[\frac{\pi}{2}(t-1)\right]\right\}$

$x_2(t)=2\cos w_0 t\cdot x_1(t)$

对 $x_2(t)$ 抽样而最低抽样频率 $w_s=2\left(w_0+\frac{\pi}{2}\right)$





为使 $y_2(t)=x_1(t)$. 试求 A, W_1, W_2.

只要使 $W_2=w_0$，使 $W_1=\frac{\pi}{2}$. $A=1$. 即可满足.

六. $h(n)=a^n u(n)$. $H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$. $|z|>a$

$X(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$.

$Y(z)=H(z)\cdot X(z)=\frac{1-z^{-N}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}=\left[\frac{a}{a-1}\cdot a^n u(n)+\frac{u(n)}{1-a}\right]-$

$\left[\frac{1}{1-a}+\frac{a}{a-1}a^{n-N}\right]u(n-N)$

七. $H(jw)=\begin{cases}e^{-j\varphi(w)}, & |w|<w_0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 $\varphi(w)=-t_0 w$

$\Rightarrow H(jw)=\begin{cases}e^{jwt_0}, & |w|<w_0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$h(t)=\frac{\sin w_0(t+t_0)}{\pi(t+t_0)}$.

当输入 $x(t)=\frac{\sin W_1 t}{\pi t}$ 时. 讨论:

1) 当 $w_1>w_0$ 时. $y(t)=\frac{\sin w_0(t+t_0)}{\pi(t+t_0)}$.

2) 当 $w_1\le w_0$ 时. $y(t)=\frac{\sin w_1(t+t_0)}{\pi(t+t_0)}$.

八. $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\0&-3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}e(t)$

$r(t)=[1\quad -1\quad 0]\,x(t)$.

检验可控性：$AB=\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\0&-3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-3\\-2\end{bmatrix}$，$A^2B=\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\0&-3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\9\\4\end{bmatrix}$

$$r(B\,\vdots\,AB\,\vdots\,A^2B)=r\left(\begin{bmatrix}2&-5&13\\1&-3&9\\1&-2&4\end{bmatrix}\right)=2\ \Rightarrow 不可控.$$

检验可观控：

$$CA=[1\quad -1\quad 0]\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\0&-3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=[-1\quad 1\quad -1]$$

$$CA^2=[-1\quad 1\quad -1]\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\0&-3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=[1\quad -1\quad 3]$$

$$\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&-1\\1&-1&3\end{bmatrix},\quad r\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=2.$$

有2个可控量，有2个可观量.

$$H(s)=C[sI-A]^{-1}B+D=[1\quad -1\quad 0]\begin{bmatrix}s+1&2&1\\0&s+3&0\\0&0&s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}[1\quad -1\quad 0]\begin{bmatrix}(s+2)(s+3)&-2(s+2)&-(s+3)\\0&(s+1)(s+2)&0\\0&0&(s+1)(s+3)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}[(s+2)(s+3)\quad -2(s+2)-(s+1)(s+2)\quad -(s+3)]\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}[2(s+2)(s+3)-2(s+2)-(s+1)(s+2)-(s+3)]$$

$$=\frac{1}{s+2}$$