2006年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　信号与系统

说明：1. 本试卷共六大题，总共150分，答题全部做在考点下发的答题纸上。

2. 请看清每题的要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；若要求概画出图形的，必须作必要的标注。

一、试求解下列小题：(共 6 小题，每小题 10 分，合计 60 分)

1. 已知一个以微分方程 $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$ 表示的连续时间因果 LTI 系统，当其输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，试必须用时域方法求该系统的输出 $y(t)$，并概画出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形。

2. 稳定的连续时间 LTI 系统的频率响应为 $H(\omega)=\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}$，试求其单位阶跃响应 $s(t)$；

3. 已知序列值为 2、1、0、1 的 **4 点序列** $x[n]$，试计算 **8 点序列** $y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}$（其中 l 为整数）离散傅里叶变换 $Y(k)$，$k=0,1,2,3,4,5,6,7$。

4. 概画出离散时间序列 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$ 的序列图形，并求它的 Z 变换 $X(z)$，以及概画出 $X(z)$ 的零极点图和收敛域。

5. 某个实际测量系统（LTI 系统）的单位阶跃响应 $s(t)=(1-e^{t/\tau})u(t)$，τ 为系统的时间常数。显然，它不能瞬时响应被测信号的变化。试设计一个补偿系统，使得原测量系统与它级联后的输出信号，能对被测信号作出瞬时的响应，即能准确地表示被测信号。请给出你设计的补偿系统的特性（单位冲激响应或频率响应）。

6. 图 1.6 信号流图所示的数字滤波器，已知有始输入数字信号 $x[n]$ 的序列值依次为 4，1，2，0，−4，2，4 •••，试求该数字滤波器输出 $y[n]$ 的前 5 个序列值。

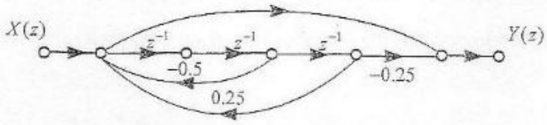


图 1.6

二、已知当输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，某连续时间因果 LTI 系统的输出信号为 $y(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$。试求：(每小题 10 分，共 20 分)

1. 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形；
2. 当该系统输入为 $x_1(t)=u(t)-u(t-1)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。

三、已知由差分方程 $y[n]+\dfrac{1}{4}y[n-1]-\dfrac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\dfrac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}x[n-k-1]$ 表示的因果数字滤波器（即离散时间因果 LTI 系统），试求：（共 20 分）

1. 该滤波器的系统函数 $H(z)$，并概画出其零极点图和收敛域；（8 分）
2. 该滤波器稳定吗？若稳定，概画出它的幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|$ 或 $|H(e^{j\Omega})|$，并指出它是什么类型的滤波器（低通、高通、带通、全通、最小相移等）；（6 分）
3. 画出它用离散时间三种基本单元构成的级联实现结构的方框图或信号流图；（6 分）

四、已知一个以微分方程 $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t-1)$ 和 $y(0_-)=1$ 的起始条件表示的连续时间因果系统，试求当输入为 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 时，该系统的输出 $y(t)$，并写出其中的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应分量 $y_{zi}(t)$，以及暂态响应和稳态响应分量。（15 分）

五、某因果数字滤波器的零、极点如图 5(a)所示，并已知其 $\tilde{H}(\pi)=-1$。试求：（共 15 分）

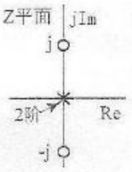


图 5(a)

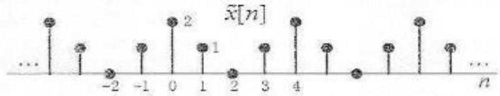


图 5(b)

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，且回答它是 IIR、还是 FIR 的什么类型(低通、高通、带通、带阻或全通)滤波器？（6 分）
2. 写出图 5(b)所示周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式，并求其离散傅里叶级数的系数；（5 分）
3. 该滤波器对周期输入 $\tilde{x}[n]$ 的响应 $y[n]$。（4 分）

六、图 6 所示的连续时间信号抽样传输系统，已知系统的输入信号 $x(t)=\dfrac{\sin^2(4\pi\times10^3 t)}{\pi^2 t^2}$，抽样间隔 $T=0.1$ ms，图 6 中的信道滤波器是一个实的升余弦滚降带通滤波器，其频率响应 $H_{BP}(f)$ 如图 6(a)所示。试求：（共 20 分）

1. $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 以及 $x_p(t)$、$y(t)$ 的频谱 $X_p(\omega)$、$Y(\omega)$；（12 分）
2. 试设计由系统输出 $y(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的系统，画出该恢复系统的方框图，并给出其中所用系统的系统特性（例如，滤波器的频率响应等）。（8 分）

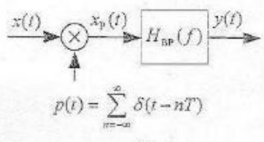


图 6

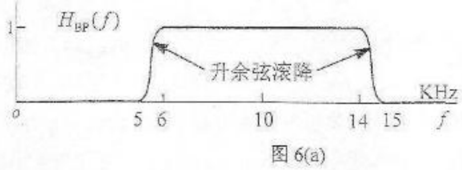


图 6(a)

试题名称：　　　　　　　　　　信号与系统

一、试求解下列小题：(共 6 小题，每小题 10 分，合计 60 分)

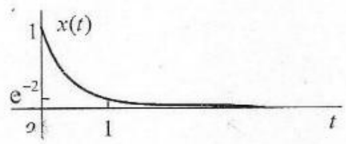
1. 已知一个以微分方程$\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$表示的连续时间因果 LTI 系统，当其输入信号为$x(t)=u(t)-u(t-2)$时，试必须用时域方法求该系统的输出$y(t)$，并概画出$x(t)$和$y(t)$的波形。

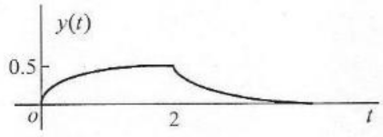
解答： 先依据一阶因果 LTI 系统的微分方程，直接写出其单位冲激响应为$h(t)=e^{-2t}u(t)$，或通过其系统函数$H(s)=\dfrac{1}{s+2}$，$\mathrm{Re}(s)>-2$，反变换求得$h(t)=e^{-2t}u(t)$。　　(2 分)

然后，用时域方法、即卷积的方法求系统的输出$y(t)$为

$$y(t)=x(t)*h(t)=e^{-2t}u(t)*[u(t)-u(t-2)]=\frac{1-e^{-2t}}{2}u(t)-\frac{1-e^{-2(t-2)}}{2}u(t-2)\qquad(6\text{ 分})$$

$x(t)$和$y(t)$的波形概画如下：　　(2 分)





如果本题用变换域方法求出正确结果得一半分（5 分）

2. 某稳定的连续时间 LTI 系统的频率响为$H(\omega)=\dfrac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}$，试求其单位阶跃响应$s(t)$；

解答：可以用两种不同方法求解：

解法一，先用反傅里叶变换由$H(\omega)$求得系统的单位冲激响应$h(t)$，再对$h(t)$积分求得系统的单位阶跃响应$s(t)$，即

$$H(\omega)=\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{e^{-1}}{j\omega+1}e^{-j\omega}\qquad(1\text{ 分})$$

对上式求反傅里叶变换，得到：$h(t)=e^{-t}u(t)-e^{-1}e^{-(t-1)}u(t-1)$　　(3 分)

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=h(t)*u(t)=e^{-t}u(t)*u(t)-e^{-1}e^{-(t-1)}u(t-1)*u(t)$$

$$=(1-e^{-t})u(t)-e^{-1}[1-e^{-(t-1)}]u(t-1)\qquad(6\text{ 分})$$

解法二，先由系统的频率响应$H(\omega)$写出其系统函数及其收敛域，即

$$H(s)=\frac{1-e^{-1}e^{-s}}{s+1},\ \mathrm{Re}(s)>-1\qquad(1\text{ 分})$$

那么，$s(t)$的拉氏氏变换即为$S(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-s}}{s(s+1)}$，$\mathrm{Re}(s)>0$ （2分）

对$S(s)$部分分式展开，即$S(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-s}}{s(s+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-s}+\dfrac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-s}$

再对$S(s)$进行反拉氏变换，得到系统的单位阶跃响应$s(t)$，即

$$s(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})u(t)-\mathrm{e}^{-1}[1-\mathrm{e}^{-(t-1)}]u(t-1)$$ （7分）

3. 已知序列值为 2、1、0、1 的 **4** 点序列$x[n]$，试计算 **8** 点序列$y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}$（其中$l$为整数）离散傅里叶变换$Y(k)$，$k=0$，1，2，3，4，5，6，7。

解答：先用 DFT 公式，或 4 点 DFT 的矩阵计算式，即

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}nk}=\sum_{n=0}^{3}x[n](-\mathrm{j})^{nk}=2+(-\mathrm{j})^{k}+(-\mathrm{j})^{3k},\qquad k=0、1、2、3$$ （3分）

或者，$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-\mathrm{j}&-1&\mathrm{j}\\1&-1&1&-1\\1&\mathrm{j}&-1&-\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ （或 3 分）

求得$x[n]$的 4 点 DFT 为：$X(0)=4,\ X(1)=2,\ X(2)=0,\ X[3]=2$ （2分）

由于$y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}=x_{(2)}[n]$，因此，$\tilde{Y}(\Omega)=\tilde{X}(2\Omega)$，其中$\tilde{Y}(\Omega)$和$\tilde{X}(\Omega)$分别是$y[n]$和$x[n]$的离散时间傅里叶变换（DTFT），再依据 DFT 与 DTFT 之间的关系，可以求得$y[n]$的 8 点 DFT 为

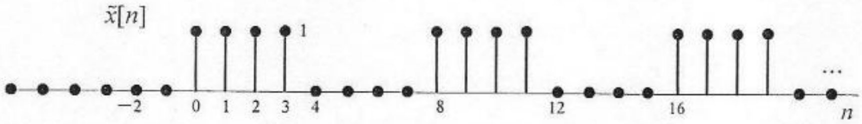
$Y(0)=X(0)=4,\ Y(1)=X(1)=2,\ Y(2)=X(2)=0,\ Y(3)=X(3)=2$

$Y(4)=X(0)=4,\ Y(5)=X(1)=2,\ Y(6)=X(2)=0,\ Y(7)=X(3)=2$ （5分）

本题也可以先求出 8 点序列$y[n]$的序列值，然后求其 8 点 DFT。

4. 概画出离散时间序列$x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}u[n-4k]$的序列图形，并求它的 Z 变换$X(z)$，以及概画出$X(z)$的零极点图和收敛域。

解答：$x[n]$的序列图形为： （2分）



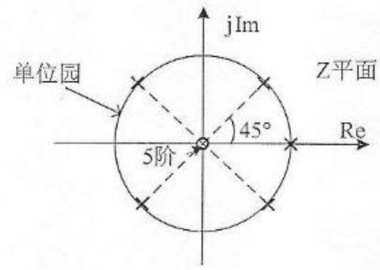
由上图，$x[n]$可改写为

$x[n]=(u[n]-u[n-4])*\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-8k]$，其 Z 变换 $X(z)$ 为

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}(1-z^{-4})\frac{1}{1-z^{-8}}=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})}，收敛域为：|z|>1。\qquad (6分)$$

或者，直接对 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$ 求 Z 变换，得到

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{-4k}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-4})^k=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})}，\ |z|>1 \qquad (或 6 分)$$



$X(z)$ 得零极点右下图所示。(**2 分**)

5. 某个实际测量系统（LTI 系统）的单位阶跃响应 $s(t)=(1-e^{-t/\tau})u(t)$，τ 为系统的时间常数。显然，它不能瞬时响应被测信号的变化。试设计一个补偿系统，使得原测量系统与它级联后的输出信号，能对被测信号作出瞬时的响应，即能准确地表示被测信号。请给出你设计的补偿系统的特性（单位冲激响应或频率响应）。

解答：根据题意，要设计的补偿系统就是该实际测量系统（因果 LTI 系统）的逆系统。为此，先求该实际测量系统的系统函数 $H(s)$，它的 $s(t)$ 的拉氏变换 $S(s)$ 为

$$S(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+(1/\tau)}=\frac{1/\tau}{s[s+(1/\tau)]},\qquad \mathrm{Re}(s)>0 \qquad (2分)$$

该实际测量系统的系统函数为：$H(s)=s\times S(s)=\dfrac{1/\tau}{s+(1/\tau)}$，　$\mathrm{Re}(s)>-\dfrac{1}{\tau}$　(**2 分**)

要求的补偿系统的系统函数为：$H_I(s)=\tau[s+(1/\tau)]$，收敛域为有限 S 平面。(**4 分**)
其频率响应为：$H_I(\omega)=\tau[\mathrm{j}\omega+(1/\tau)]$，或单位冲激响应为：$h_I(t)=\delta(t)+\tau\delta'(t)$　(**2 分**)

6. 图 1.6 信号流图所示的数字滤波器，已知有始输入数字信号 $x[n]$ 的序列值依次为 4，1，2，0，−4，2，4 •••，试求该数字滤波器输出 $y[n]$ 的前 5 个序列值。

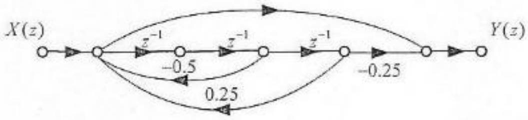


图 1.6

解答：先写出该因果数字滤波器的系统函数，再由此写出其差分方程表示，然后，利用差分方程的后推算法，逐个计算出已知有始输入 $x[n]$ 时的滤波器输出的前 5 个序列值。

该因果数字滤波器的系统函数为：$H(z)=\dfrac{1-0.25z^{-3}}{1+0.5z^{-2}-0.25z^{-3}}$ （3 分）

该因果数字滤波器的系统函数差分方程为：

$y[n]+0.5y[n-2]-0.25y[n-3]=x[n]-0.25x[n-3]$ （1 分）

其后推方程为：$y[n]=x[n]-0.25x[n-3]-0.5y[n-2]+0.25y[n-3]$ （1 分）

代入已知的有始输入 $x[n]$ 的序列值，且假定起始时刻为 0 时刻，求得 $y[n]$ 的前 5 个序列值分别为：

$y[0]=4,\quad y[1]=1,\quad y[2]=2-0.5\times4=0$

$y[3]=0-0.25\times4-0.5\times1+0.25\times4=-0.5$

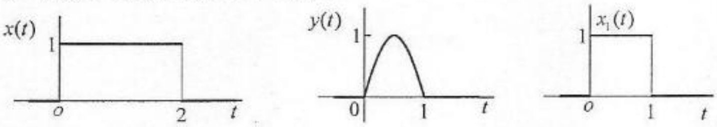
$y[4]=-4-0.25\times1-0.5\times0+0.25\times1=-4$ （5 分）

由于系统是因果 LTI 系统，所以对于输入可以认为是从 0 开始，也可以认为是从大于 0 的某个时刻开始，但是，前 5 个序列值应该是不变的。

二、已知当输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，某连续时间因果 LTI 系统的输出信号为 $y(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$。试求：（每小题 10 分，共 20 分）

1. 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形；
2. 当该系统输入为 $x_1(t)=u(t)-u(t-1)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。

解答： $x(t)$、$y(t)$ 和 $x_1(t)$ 的波形如下图所示。



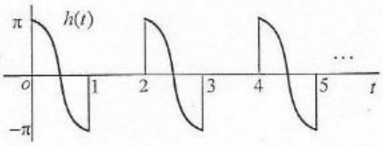
1. 先求系统的单位阶跃响应 $s(t)$，再对 $s(t)$ 微分得到其单位冲激响应 $h(t)$。

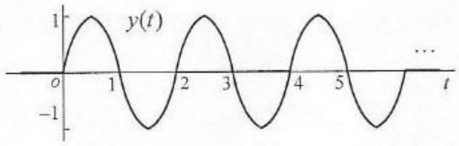
由上图的 $x(t)$ 可得 $u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(t-2k)$，根据 LTI 系统的性质，对应输出 $s(t)$ 为：

$$s(t)=\sum_{k=0}^{\infty}y(t-2k)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\pi(t-k)u(t-k)$$ （6分）

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\pi\cos[\pi(t-k)]u(t-k)$$ （3分）

$h(t)$ 的波形如左下图所示： （1分）





说明：本小题也可以用拉氏变换方法做，得到同样结果。

2. 根据上面 $x_1(t)$ 和 $x(t)$ 的波形，$x_1(t)$ 可以写成 $x(t)$ 的如下时移线性组合：

$$x_1(t)=x(t)-x(t-1)+x(t-2)-x(t-3)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x(t-k)$$ （3分）

利用 LTI 系统的性质，相应输出 $y_1(t)$ 应该为：$y_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y(t-k)$ （6分）

$y_1(t)$ 波形如右上图所示。（1分）

说明：本小题也可以用拉氏变换方法做，得到同样结果。

三、已知由差分方程 $y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x[n-k-1]$ 表示的因果数字滤波器（即离散时间因果 LTI 系统），试求：（共 20 分）

1. 该滤波器的系统函数 $H(z)$，并概画出其零极点图和收敛域；（8分）
2. 该滤波器稳定吗？若稳定，概画出它的幅频响应 $\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$ 或 $\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|$，并指出它是什么类型的滤波器（低通、高通、带通、全通、最小相移等）；（6分）
3. 画出它用离散时间三种基本单元构成的级联实现结构的方框图或信号流图；（6分）

解答：

1. 差分方程可以写成：

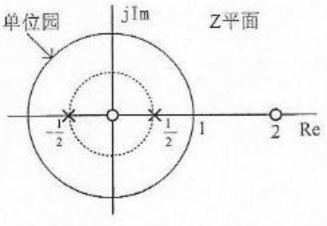
$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*x[n-k-1]$$ （2分）

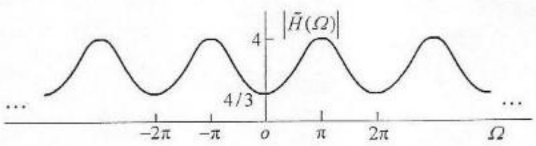
对上面方程两边取 Z 变换，得到

$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z)=\left(1-z^{-1}-\frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)X(z)$$

则有：$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$，收敛域为：$|z|>\dfrac{1}{2}$ （5分）

其零极点如左下图所示。（1分）



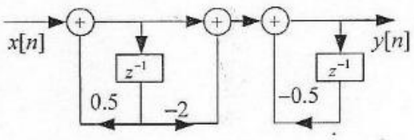


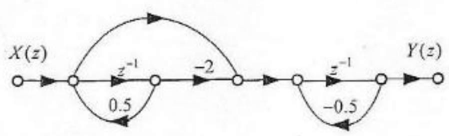
2. 因为收敛域包含单位圆，该滤波器稳定。 （1分）

该系统相当于一个一阶全通滤波器 $H_{1AP}(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ 与一个一阶高通滤波器 $H_2(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ 的级联，因此，它是一个高通滤波器。 （2分）

它的幅频响应为 $|\tilde{H}(\Omega)|=\tilde{H}_{1AP}(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)=2\left|\dfrac{1}{1+e^{-j\Omega}}\right|$，其图形如右上图所示。（3分）

3. 该系统的级联实现结构的方框图或信号流图如下： （6分）





四、已知一个以微分方程 $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t-1)$ 和 $y(0_-)=1$ 的起始条件表示的连续时间因果系统，试求当输入为 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 时，该系统的输出 $y(t)$，并写出其中的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应分量 $y_{zi}(t)$，以及暂态响应和稳态响应分量。（15分）

解答：先求零输入响应 $y_{zi}(t)$，它满足的方程和起始条件为

$$\frac{dy_{zi}(t)}{dt}+2y_{zi}(t)=0,\quad y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$$

对上式用单边拉氏变换，求得 $y_{zi}(t)$ 的像函数为 $Y_{uzi}(s)=\dfrac{1}{s+2}$。

经过单边反拉氏变换，得到零输入响应为：$y_{zi}(t)=e^{-2t}$，$t\geq 0$ （4分）

再求零状态响应 $y_{zs}(t)$，对它而言，系统就成为如下微分方程表示的因果 LTI 系统：

$$\frac{\mathrm{d}y_{zs}(t)}{\mathrm{d}t}+2y_{zs}(t)=x(t)*\delta(t-1) \qquad \text{(1分)}$$

对上式取拉氏变换或单边拉氏变换，并代入 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 的拉氏变换像函数 $X(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$，求得零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的拉氏变换像函数为：

$$Y_{zs}(s)=\frac{2}{(s+2)(s^2+4)}\mathrm{e}^{-s}$$

利用上式中有理函数的部分分式展开，即 $\dfrac{2}{(s+2)(s^2+4)}=\dfrac{0.5}{s^2+4}-\dfrac{0.25s}{s^2+4}+\dfrac{0.25}{s+2}$，

得到：$Y_{zs}(s)=\left(\dfrac{0.5}{s^2+4}-\dfrac{0.25s}{s^2+4}+\dfrac{0.25}{s+2}\right)\mathrm{e}^{-s}$

最后，反拉氏变换求得零状态响应 $y_{zs}(t)$，即

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{4}[\sin 2(t-1)]u(t-1)-\frac{1}{4}[\cos 2(t-1)]u(t-1)+\frac{1}{4}e^{-2(t-1)}u(t-1) \qquad \text{(9分)}$$

系统全响应 $y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$ 为：

$$y(t)=0.25\{[\sin 2(t-1)]u(t-1)-[\cos 2(t-1)]u(t-1)+\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)\}+\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

其中，暂态响应 $y_{暂态}(t)$ 和稳态响应 $y_{稳态}(t)$ 分别为：

$$y_{暂态}(t)=0.25\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)+\mathrm{e}^{-2t}u(t) \qquad \text{(1分)}$$

$$y_{稳态}(t)=0.25\{[\sin 2(t-1)]u(t-1)-[\cos 2(t-1)]u(t-1)\} \qquad \text{(1分)}$$

五、某因果数字滤波器的零、极点如图 5(a)所示，并已知其 $\tilde{H}(\pi)=-1$。试求：（共 **15** 分）

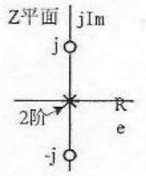


图 5(a)

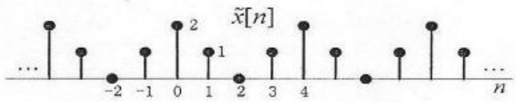


图 5(b)

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，且回答它是 IIR、还是 FIR 的什么类型(低通、高通、带通、带阻或全通)滤波器？（**6** 分）
2. 写出图 5(b)所示周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式，并求其离散傅里叶级数的系数；（**5** 分）
3. 该滤波器对周期输入 $\tilde{x}[n]$ 的响应 $y[n]$。（**4** 分）

解答：

1. 由该因果滤波器的零极点图，可以写出它的系统函数为：

$H(z)=H_0(1+z^{-2})$，$|z|>0$，其中，H_0 为常数，它可由已知的 $\tilde{H}(\pi)=-1$ 求得，即 $\tilde{H}(\pi)=H_0(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi})=2H_0=-1$，求得 $H_0=-0.5$。因此，滤波器的系统函数为：

$H(z)=-0.5(1+z^{-2})$，$|z|>0$　　（4 分）

该滤波器是 FIR 滤波器，且是带阻滤波器。　　（2 分）

2. 周期为 4 的周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式为：

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{2\delta[n-4k]+\delta[n-4k-1]+\delta[n-4k-3]\}$$　　（1 分）

可以用两种方法求得 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}_k$：

一种方法：周期为 4 的 $\tilde{x}[n]$ 也可以写成：$\tilde{x}[n]=1+\cos(\frac{\pi}{2}n)=1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}n}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}3n}$

因此，它的离散傅里叶级数系数也是周期为 4 的系数序列 $\tilde{X}_k$，其一个周期内的系数分别为：

$\tilde{X}[0]=1,\ \tilde{X}[1]=0.5,\ \tilde{X}[2]=0,\ \tilde{X}[3]=0.5$　　（4 分）

另一种方法是直接用周期为 4 的离散傅里叶级数分析公式计算，即

$\tilde{X}_k=\sum_{n=0}^{3}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/4)n}=\sum_{n=0}^{3}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(\pi/2)n}$，得到同样的结果。　　（或 4 分）

3. 由该滤波器零极点图可知：在频率 $\Omega=\pi/2$ 和 $\Omega=3\pi/2$ 处，频率响应为零，即

$\tilde{H}(\pi/2)=\tilde{H}(3\pi/2)=0$；而在频率 $\Omega=0$ 处，频率响应为 $\tilde{H}(0)=-1$，因此，滤波器当 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出 $y[n]$ 只有直流分量，即 $y[n]=-1$　　（4 分）

六、图 6 所示的连续时间信号抽样传输系统，已知系统的输入信号 $x(t)=\dfrac{\sin^2(4\pi\times10^3 t)}{\pi^2t^2}$，抽样间隔 $T=0.1$ ms，图 6 中的信道滤波器是一个实的升余弦滚降带通滤波器，其频率响应 $H_{\mathrm{BP}}(f)$ 如图 6(a)所示。试求：（共 20 分）

1. $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 以及 $x_{\mathrm{P}}(t)$、$y(t)$ 的频谱 $X_{\mathrm{P}}(\omega)$、$Y(\omega)$；（12 分）
2. 试设计由系统输出 $y(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的系统，画出该恢复系统的方框图，并给出其中所用系统的系统特性（例如，滤波器的频率响应等）。（8 分）

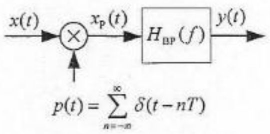


图 6

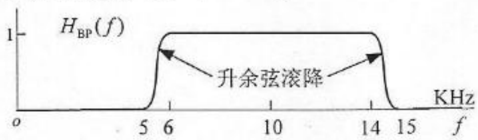


图 6(a)

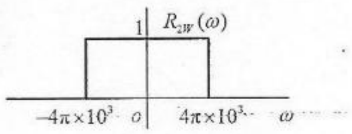
解答:

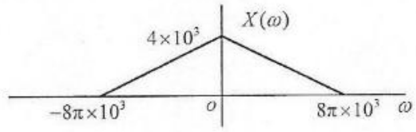
1. 输入信号 $x(t)=\dfrac{\sin^2(4\pi\times10^3t)}{\pi^2t^2}=\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}\times\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}$，

由于 $\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}\xleftrightarrow{\text{CFT}}R_{2W}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<2\times10^3\\ 0, & |\omega|>2\times10^3\end{cases}$（如左下图所示）　**(3分)**

利用傅里叶变换的频域卷积性质，可求得 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 为

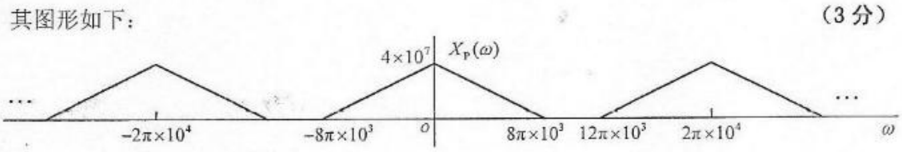
$X(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}R_{2W}(\omega)*R_{2W}(\omega)$，频谱图形如右下狱所示。　**(3分)**



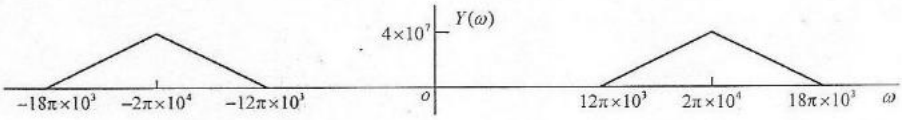


由于抽样间隔 $T=10^{-4}$ $x_P(t)$ 的频谱 $X_P(\omega)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\times2\pi\times10^4)$，

其图形如下:　**(3分)**



$y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)=X_P(\omega)H_{BP}(\omega)$，其频谱图形如下　**(3分)**



2. 由上图看出 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$ 是 $x(t)$ 正弦调制后的频谱，它可以写成

$Y(\omega)=2\times10^4\dfrac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi[\delta(\omega+2\pi\times10^4)+\delta(\omega-2\pi\times10^4)]$　**(2分)**

因此，可用正弦调制的相干解调恢复出 $x(t)$，这个恢复系统的方框图如左下图所示，其中的 $H_L(\omega)$ 是一个理想低通滤波器，其滤波特性如右下图所示。　**(6分)**