Exercice 1 (LP)

Soit $c \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in A^{n\times d}$. On considère les deux problèmes d'optimisation suivants :

$\min_x c^T x$ s.c $\begin{cases} Ax = b \\ -x \leq 0 \end{cases}$ (P)	$\max_y b^T y$ s.c $A^T y \leq c$ (D).

1

Le problème dual de (P)

* $\mathcal{L} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, \lambda, \nu) \longmapsto c^T x + \nu^T(Ax-b) - \lambda^T x$

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\nu) = (c^T + \nu^T A - \lambda^T)x - \nu^T b$$
$$= (c + A^T\nu - \lambda)^T x - \nu^T b$$

$$g(\lambda,\nu) = \begin{cases} -b^T\nu & \text{si } c + A^T\nu - \lambda = 0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème dual est donné par :

$$\max_{\nu,\lambda} -b^T\nu \quad \text{s.c} \begin{cases} c + A^T\nu - \lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \iff \max_\nu -b^T\nu \quad \text{s.c } A^T\nu + c \geq 0$$

* Simplication

En remplaçant $-\nu$ par ν, on a

$$\max_\nu -b^T\nu \quad \text{s.c } A^T\nu + c \geq 0 \iff \max_\nu b^T\nu \quad \text{s.c } -A^T\nu + c \geq 0$$

$$\iff \max_\nu b^T\nu \quad \text{s.c } A^T\nu \leq c \quad (D).$$

Donc le dual de (P) est (D)

2

Le problème dual de (D).

$$\max_y b^T y \quad \text{s.c } A^T y \leq c \iff \min_y -b^T y \quad \text{s.c } A^T y - c \leq 0$$

$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

$(y, \lambda) \longmapsto -b^T y + \lambda^T(A^T y - c)$

$$\mathcal{L}(y,\lambda) = (\lambda^T A^T - b^T)y - \lambda^T c$$
$$= (A\lambda - b)^T y - c^T\lambda$$

$$g(\lambda) = \begin{cases} -c^T\lambda & \text{si } A\lambda - b = 0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème dual est donné par :

$$\max -c^T\lambda \quad \text{s.c} \begin{cases} A\lambda = b \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \iff \min_\lambda c^T\lambda \quad \text{s.c} \begin{cases} A\lambda = b \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (P)$$

Donc le dual de (D) est (P)

③ Montrer que le problème est auto-Dual (Self-Dual)

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \nu) \longmapsto c^T x - b^T y - \lambda_1^T x + \lambda_2^T (A^T y - c) + \nu^T (Ax - b)$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \nu) = (c - \lambda_1 + A^T \nu)^T x + (A\lambda_2 - b)^T y - c^T \lambda_2 - b^T \nu$$

Donc :
$$g(\lambda_1, \lambda_2, \nu) = \begin{cases} -c^T\lambda_2 - b^T \nu & \text{si } A^T\nu + c - \lambda_1 = 0 \text{ et } A\lambda_2 - b = 0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le dual est donné par:

$$\max_{\lambda_1, \lambda_2, \nu} \; -c^T\lambda_2 - b^T\nu \quad \text{s.c} \begin{cases} A^T\nu + c - \lambda_1 = 0 \\ A\lambda_2 - b = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \iff \max_{\lambda_2, \nu} \; -c^T\lambda_2 - b^T\nu \quad \text{s.c} \begin{cases} A\lambda_2 = b \\ A^T\nu + c \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \quad (K)$$

Comme $\nu \in \mathbb{R}^n$, on peut remplacer ν par $-\nu$ dans (K) et on obtient:

$$\max_{\lambda_2, \nu} \; -c^T\lambda_2 + b\nu \quad \text{s.c} \begin{cases} A\lambda_2 = b \\ -A^T\nu + c \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \iff \min_{\lambda_2, \nu} \; c^T\lambda_2 - b\nu \quad \text{s.c} \begin{cases} A\lambda_2 = b \\ A^T\nu - c \leq 0 \\ \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

Et on obtient encore le problème de départ.

④

⊛ Pour montrer le premier point, il suffit de montrer que (x^*, y^*) est une solution optimal du problème (Self-Dual) si et seulement x^* est une solution optimale de (P) et y^* est une solution optimale de (D).

→ Soient x^* et y^* respectivement des solutions optimales de (P) et (D)

Posons $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, Ax = b, \ x \geq 0\}$, $A_2 = \{y \in \mathbb{R} \,/\, A^T y \leq c\}$.

On a: $\begin{cases} x^* \in A_1 \\ \text{et} \\ c^T x^* \leq c^T x, \ \forall x \in A_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} y^* \in A_2 \\ \text{et} \\ b^T y^* \geq b^T y, \ \forall y \in A_2 \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} (x^*, y^*) \in A_1 \times A_2 \\ c^T x^* - b^T y^* \leq c^T x - b^T y \quad \forall (x, y) \in A_1 \times A_2 \end{cases}$$

Donc (x^*, y^*) est une solution optimal de (self dual).

← Soit (x^*, y^*) une solution optimal de (self-dual)
Supposons par absurde que x^* n'est pas une solution optimale (P) ou que y^* n'est pas une solution optimale (D). Sans nuire à la généralité supposons que x^* ne soit pas une solution de (P).
Soit x_1^* une solution optimale de (P).

On a: $\begin{cases} x_1^*, x^* \in A_1 \\ \text{et} \\ c^T x_1^* < c^T x^* \end{cases} \implies \begin{cases} c^T x_1^* - b^T y^* < c^T x^* - b^T y^* \\ (x_1^*, y^*) \in A_1 \times A_2 \end{cases}$ ce qui contredit le fait que (x^*, y^*) une solution optimale de (Self-dual)

⊛ Montrons que la valeur optimal de (Self-Dual) est exactement 0.

(D) est un problème convexe (la fonction et les contraintes sont linéaire). Comme le problème (Self-Dual) est soluble et borné (par hypothèse), (D) est également soluble et borné.

Le dual de (D) est (P), en utilisant la propriété de dualité forte du programme linéaire (D), on a:

Comme x^* est solution de (D), (i.e. $p^* = c^T x^*$) et que y^* est la solution de son dual (i.e. $d^* = b^T y^*$),

$$p^* = d^* \iff c^T x^* = b^T y^* \iff \underline{c^T x^* - b^T y^* = 0}$$

Exercice 2

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème:

$$\min_x \|Ax-b\|_2^2 + \|x\|_1 \qquad (RLS)$$

1) Calcul du conjugué de la fonction $x \longmapsto \|x\|_1$ (noté f^*)

Soit $y \in \mathbb{R}^d$.

⊕ S'il existe $j \in \{1,\dots,d\}$ tel que $y_j > 1$, en choisissant x de la forme $x_j = t$ et $x_i = 0$ pour $i \neq j$ avec $t > 0$. On a

$$y^T x - \|x\|_1 = \sum_{i=1}^d y_i x_i - \sum_{i=1}^d |x_i| = (y_j - 1)t \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty, \text{ Donc } f^*(y) = +\infty.$$

⊕ S'il existe $j \in \{1,\dots,d\}$ tel que $y_j < -1$, en choisissant x de la forme $x_j = t$ et $x_i = 0$ pour $i \neq j$ avec $t < 0$, on a:

$$y^T x - \|x\|_1 = t y_j + |t| = t\underbrace{(y_j - 1)}_{<0} \xrightarrow[t \to -\infty]{} +\infty, \text{ Donc } f^*(y) = +\infty$$

⊕ Si $\|y\|_\infty = \max_{j\in\{1,\dots,d\}} |y_j| \leq 1$, on a:

$$\begin{aligned} y^T x - \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^d x_i y_i - \sum_{i=1}^d |x_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^d |x_i y_i| - \sum_{i=1}^d |x_i| \\ &\leq \|y\|_\infty \sum_{i=1}^d |x_i| - \sum_{i=1}^d |x_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^d |x_i| - \sum_{i=1}^d |x_i| = 0 \end{aligned}$$

En particulier pour $x = 0_{\mathbb{R}^d}$ on obtient l'égalité. Donc $f^*(y) = 0$.

Donc le conjugué de la fonction $x \longmapsto \|x\|_1$ est donné par:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (x^T y - \|x\|_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\|_\infty \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

2)

Posons $y = Ax - b$, (RLS) devient

$$\min_{x,y} \|y\|_2^2 + \|x\|_1$$
$$\text{s.c } y = Ax - b$$

⊕ $$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,y,\nu) &= \|y\|_2^2 + \|x\|_1 + \nu^T(y - Ax + b) \\ &= \|y\|_2^2 + \nu^T y + \|x\|_1 - \nu^T A x + \nu^T b \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + \nu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}\nu.$$

$$\begin{aligned} \inf_y \mathcal{L}(x,y,\nu) &= \mathcal{L}(x, y^*, \nu) \\ &= \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 - \frac{1}{2}\nu^T\nu + \|x\|_1 - \nu^T A x + \nu^T b \\ &= \|x\|_1 - \nu^T A x + \nu^T b - \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\nu) = \inf_{x,y} \mathcal{L}(x,y,\nu) &= \inf_x \mathcal{L}(x, y^*, \nu) \\ &= \inf_x \{\|x\|_1 - \nu^T A x\} + \nu^T b - \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 \\ &= \inf_x \{-((A^T\nu)^T x - \|x\|_1)\} + \nu^T b - \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 \\ &= -\sup_x \{(A^T\nu)^T x - \|x\|_1\} + \nu^T b - \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 \\ &= -f^*(A^T\nu) + \nu^T b - \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 \\ &= \begin{cases} \nu^T b - \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 & \text{si } \|A^T\nu\|_\infty \leq 1 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où
$$g(\nu) = \begin{cases} \nu^T b - \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 & \text{si } \|A^T\nu\|_\infty \leq 1 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème dual est donné par:

$$\boxed{\begin{aligned} &\max_\nu \ \nu^T b - \frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 \\ &\text{s.c : } \|A^T\nu\|_\infty \leq 1 \end{aligned}}$$

avec $\|y\|_\infty = \max_{j\in\{1,\dots,d\}} |y_j|$

Exercice 3

(1)

Expliquons le pourquoi resoudre (Sep 2) entraine la resolution de (Sep 1).

- Soit (z^*, w^*) une solution optimal de (Sep 2).

on a : $z_i^* \geq 1 - y_i (w^{*T} x_i)$ et $z_i^* \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $z_i^* \geq 0$ et $z_i^* > 1 - y_i (w^{*T} x_i)$.
On peut toujours choisir z_i^{**} positif et très proche de z_i^* tel que $z_i^{**} \geq 0$ et $z_i^* > z_i^{**} \geq 1 - y_i (w^{*T} x_i)$.

En posant $z^{**} = (z_1^*, \dots, z_{i-1}^*, z_i^{**}, z_{i+1}^*, \dots, z_n^*)$

on a :
$$\begin{cases} \frac{1}{n\tau} \mathbb{1}^T z^{**} + \frac{1}{2} \|w^*\| = \frac{1}{n\tau} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z_j^* + \frac{1}{n\tau} z_i^{**} + \frac{1}{2} \|w^*\| < \frac{1}{n\tau} \mathbb{1}^T z^* + \frac{1}{2} \|w^*\| \\ \text{et} \\ z^{**} \geq 0, \quad z_j^{**} \geq 1 - y_j (w^{*T} x_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Ce qui contredit le fait que (w^*, z^*) une solution optimal de (Sep 2).

Ainsi, si $z_i^* > 0$ alors $z_i^* = 1 - y_i (w^{*T} x_i)$, par consequent,

$z_i^* = \max(0, 1 - y_i (w^{*T} x_i))$.

Ce qui montre que (Sep 2) est equivalent au probleme suivant :

$$\min_w \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \max(0, 1 - y_i (w^T x_i)) + \frac{1}{2} \|w\|_2^2$$

$$\Leftrightarrow \min_w \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(w, x_i, y_i) + \frac{\tau}{2} \|w\|_2^2 \quad (\text{car } \tau > 0)$$

D'où (Sep 2) $\Leftrightarrow$ (Sep 1).

(2)

- Dual de (Sep. 2).

$$\mathcal{L}(z, w, \lambda, \pi) = \frac{1}{n\tau} \mathbb{1}^T z + \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (1 - y_i (w^T x_i) - z_i) - \pi^T z$$

$$= \frac{1}{n\tau} \mathbb{1}^T z + \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i (w^T x_i) - \lambda^T z - \pi^T z$$

$$= \left(\frac{1}{n\tau} \mathbb{1} - \lambda - \pi\right)^T z + \frac{1}{2} \|w\|_2^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i (w^T x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(z, w, \lambda, \pi)}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(z, w, \lambda, \pi)}{\partial w} = 0 \Rightarrow w^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i$$

$$\inf_w \mathcal{L}(z, w, \lambda, \pi) = \mathcal{L}(z, w^*, \lambda, \pi)$$

$$= \left(\frac{1}{n\tau} \mathbb{1} - \lambda - \pi\right)^T z + \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \left[\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k x_k \right)^T x_i \right] + \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$= \left(\frac{1}{n\tau} \mathbb{1} - \lambda - \pi\right)^T z - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

D'où
$$g(\lambda, \pi) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 & \text{si } \frac{1}{n\tau} \mathbb{1} - \lambda - \pi = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{1}^T \lambda - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 & \text{si } \frac{1}{n\tau} \mathbb{1} - \lambda - \pi = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème dual est donné par :

$$\max_{\lambda, \pi} \mathbb{1}^T \lambda - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 \quad \text{s.c} \begin{cases} \frac{1}{n\tau} \mathbb{1} - \lambda - \pi = 0 \\ \pi \geq 0, \lambda \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \max_{\lambda} \mathbb{1}^T \lambda - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 \quad \text{s.c} \begin{cases} \frac{1}{n\tau} \mathbb{1} - \lambda \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\lambda} \frac{1}{n\tau} \mathbb{1}^T \lambda - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 \quad \text{s.c} \begin{cases} \frac{1}{n\tau} - \lambda_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{\lambda} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 \quad \text{s.c} \begin{cases} \frac{1}{n\tau} - \lambda_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\max \frac{1}{n\tau} \mathbb{1}^T \lambda - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i \right\|_2^2 \quad \text{s.c} \begin{cases} \frac{1}{n\tau} - \lambda_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases}}$$

Exercise 4 (Robust linear programming)

Montrons que le problème : $\begin{array}{l} \min_x c^T x \\ \text{s.c } \sup_{a\in \mathcal{P}} a^T x \leq b \end{array}$ (D) (avec $x\in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{P} = \{a \mid C^T a \leq d\}$) est équivalent au problème :

$$\min c^T x$$
$$\text{s.c} \begin{cases} d^T z \leq b \\ C^T z = x \\ z \geq 0 \end{cases} \quad (D')$$

Si $F(x)$ est la valeur optimale du problème, $\max_{a\in \mathcal{P}} a^T x$ alors (D) et équivalent au problème : $\begin{array}{l} \min_x c^T x \\ \text{s.c } F(x) \leq b \end{array}$

- Considerons donc le problème suivant :

$$\begin{array}{l} \max_a a^T x \\ \text{s.c } C^T a \leq d \end{array} \iff \begin{array}{l} \min_a -a^T x \\ \text{s.c } C^T a \leq d \end{array} \quad (P)$$

- Le langragien de (P) :

$$\mathcal{L}(a,\lambda) = -a^T x + \lambda^T (C^T a - d)$$
$$= (-x^T + \lambda^T C^T) a - \lambda^T d$$
$$= (C\lambda - x)^T a - \lambda^T d$$

$$g(\lambda) = \begin{cases} -\lambda^T d & \text{si } C\lambda - x = 0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le dual de (P) est :

$$\begin{array}{l} \max -\lambda^T d \\ \text{s.c} \begin{cases} C\lambda - x = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \end{array} \iff \begin{array}{l} \min_\lambda d^T \lambda \\ \text{s.c} \begin{cases} C\lambda = x \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l} \min_z d^T z \\ \text{s.c} \begin{cases} Cz = x \\ z \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (P').$$

En utilisant la <u>propriété de dualité forte</u> du programme linéaire (P), $F(x)$ est la valeur optimale de (P) si et seulement si $F(x)$ est aussi la valeur optimale de (P'). C'est-à-dire si et seulement s'il existe z tel que :

$$F(x) = d^T z, \quad Cz = x \quad \text{et} \quad z \geq 0$$

D'où (D) est équivalent à (D').

Exercice 5

(1) $$\mathcal{L}(x,\lambda,\nu) = c^T x + \lambda^T(Ax-b) - \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i (1-x_i)$$
$$= c^T x + \lambda^T(Ax-b) - \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i^2$$
$$= c^T x + \lambda^T(Ax-b) - \nu^T x + x^T \operatorname{diag}(\nu)\, x$$
$$= x^T \operatorname{diag}(\nu)\, x + (c + A^T\lambda - \nu)^T x - b^T\lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\lambda,\nu)}{\partial x} = 2\operatorname{diag}(\nu)\, x + c + A^T\lambda - \nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\lambda,\nu)}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow x_i = -\frac{1}{2}\left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)/\nu_i \quad \text{si } \nu_i \neq 0$$

où A_i est la $i$ème colonne de A.

$$g(\lambda,\nu) = -b^T\lambda + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \nu_i \left[\left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)/\nu_i\right]^2 +$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)\left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)/\nu_i$$
$$= -b^T\lambda + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)^2/\nu_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)^2/\nu_i$$
$$= -b^T\lambda - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)^2/\nu_i$$

⊕ $\exists_{i \in \{1,\dots,n\}} \ / \ \nu_i < 0$, le $+\infty = \sup_{\nu_i} g(\lambda,\nu) \leq \sup_{\nu,\lambda} g(\lambda,\nu)$

Donc pour avoir un problème dual dont la valeur optimale finie, il faut se restreindre aux ν tels que $\nu_i > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$.

$$\max_{\lambda,\nu} \ -b^T\lambda - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)^2/\nu_i$$
$$\text{s.c} \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \nu > 0 \end{cases} \qquad (P)$$

on $\sup_{\nu_i \geq 0} \left(-\frac{\left(c_i + A_i^T\lambda - \nu_i\right)^2}{\nu_i}\right) = 4\max\{0, c_i + A_i^T\lambda\}$ (indication donnée)

(P) devient :
$$\boxed{\begin{aligned} &\max_{\lambda} \ -b^T\lambda + \sum_{i=1}^{n} \max\{0, c_i + A_i^T\lambda\} \\ &\text{s.c } \lambda \geq 0 \end{aligned}}$$

(2)

La relaxation linéaire est donnée par :

$$\min_x \ c^T x$$
$$\text{s.c} \begin{cases} Ax \leq b \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1 \dots n. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = c^T x + \lambda_1^T(Ax-b) - \lambda_2^T x + \lambda_3^T(x - \mathbb{1})$$
$$= (c + A^T\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)^T x - b^T\lambda_1 - \mathbb{1}^T\lambda_3$$

$$g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{cases} -b^T\lambda_1 - \mathbb{1}^T\lambda_3 & \text{si } c + A^T\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème dual est donné par :

$$\begin{aligned}&\max \ -b^T\lambda_1 - \mathbb{1}^T\lambda_3 \\ &\text{s.c} \begin{cases} c + A^T\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0 \end{cases}\end{aligned} \iff \begin{aligned}&\max \ -b^T\lambda_1 - \mathbb{1}^T\lambda_3 \\ &\text{s.c} \begin{cases} c + A^T\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned}&\max_{\lambda_1,\lambda_3} \ -b^T\lambda_1 - \mathbb{1}^T\lambda_3 \\ &\text{s.c} \begin{cases} \lambda_3 \geq -A^T\lambda_1 - c \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0 \end{cases}\end{aligned} \iff \begin{aligned}&\max_{\lambda,\mu} \ -b^T\lambda - \mathbb{1}^T\mu \\ &\text{s.c} \begin{cases} \mu \geq -A^T\lambda - c \\ \mu \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned}&\max_{\lambda,\mu} \ -b^T\lambda - \mathbb{1}^T\mu \\ &\text{s.c} \begin{cases} \mu_i \geq \max\{0, -A_i^T\lambda - c_i\} \\ \lambda \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned}&\max_{\lambda,\mu} \ -b^T\lambda - \mathbb{1}^T\mu \\ &\text{s.c} \begin{cases} \mu_i \geq -\min\{0, A_i^T\lambda + c_i\} \\ \lambda \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\iff \boxed{\begin{aligned} &\max_{\lambda} \ -b^T\lambda + \sum_{i=1}^{n} \min\{0, A_i^T\lambda + c_i\} \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned}}$$

Comme les problèmes lagrangian relaxation et LP relaxation ont le même dual, la borne inférieure obtenue avec ces deux problèmes est la même.