

ANALOGE

A) METODE și RELAȚII DE COMPARAȚIE

Sistemele (circuitele) analogice care lucrau cu semnale analogice (fct. continue de timp) se numesc sisteme (circuitele) analogice (SA).

Analiza sistemelor (circuitelor) constă în det. răspunsurilor (mărimii efect) acutării semnalelor aplicate (mărimii excitației).

Cea mai generală metodă de determinare a răspunsurilor circuitelor analogice la semnale în ceea ce privește reacția sistemului

de ecuații integro-diferențiale care găsește comportarea circuitului.

Apoi se rezolvă acest sistem în raport cu răspunsurile cerute.

În cazul SAL este suficient să se stabilească răspunsurile partițiale la către un singur semnal, în final răspunsurile cerute rezultând prin însumarea răspunsurilor partițiale (prin principiul suprapunerii efectelor). Cum procedura de determinare a fiecărui dintr-un răspuns la un semnal este alegată, în ceea ce privește măsură, va fi suficient să ne ia în considerare numărul exercitul în care există un singur semnal $x(t)$, și un singur răspuns, $y(t)$.

În acest scop, plecând de la mult ec. integro-diferențială, se va obține (de exemplu, prin eliminarea succesiivă) o ecuație diferențială de ordinul N .

$$\sum_{m=0}^N a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \quad (1.1)$$

în care coeficienții a_{mm} , $m \in \{0, 1, \dots, N\}$ și b_i , $i \in \{0, 1, \dots, M\}$ sunt independenți de semnalul $x(t)$ și de răspunsul $y(t)$.

Atunci când, în plus, sistemul analogie liniar este "invariant în timp" (SAT) cu coef. constanti (nu depinde de timp)

Prima rezolvare a ec. (1.1) se obține după (1.2)

$$\{y(t) = y_0(t) + y_p(t) \quad (1.2)\}$$

$y_0(t)$ - soluția ec. omogenă

$y_p(t)$ - soluție particulară a ec (1.1)

Pentru determinarea lui $y_0(t)$ ne înțepe primă rezoluție ec.

caracteristică.

$$\sum_{m=0}^N a_m \lambda^m = 0 \quad (1.3)$$

Atunci când rădăciniile acestia, $\lambda_k, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ sunt distincte (simple) se scrie:

$$\{y_0(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{\lambda_k t} \quad (1.4)\}$$

sunt constante arbitrară care se vor determina din considerente fizice

Dacă există rădăcini multiple, de exemplu rădăcina λ_p , de ordin de multiplicitate m_p , contribuția fizică la soluția $y_0(t)$ va fi constituită dintr-un nr de termeni egal cu ordinul de multiplicitate; în exemplul considerat ac contribuție va fi:

$$\{(c_p + c_{p+1}t + \dots + c_{p+m_p-1}t^{m_p-1}) e^{\lambda_p t} \quad (1.5)\}$$

(I) METODA CONVOLUȚIEI

→ pentru SAI permită determinarea reăsponșului, $y(t)$, la orice semnal, $x(t)$, atunci când se cunoaște funcția pondere, $h(t)$, a sistemului, definită ca reăsponș al acestuia la impulsul Dirac, $\delta(t)$.

Răspunsul se obține printră convoluția dintre semnal și funcție

$$y(t) = [h * x](t) = [x * h](t) \quad (1.6)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Dim comutativitatea operațiilor de convoluție au rezultat cele două variante ale rel (1.6), iar adăugarea uneia dintre ele se face fără nădejde

Seama de formele de variație în timp ale funcțiilor $x(t)$ și $h(t)$, astfel încât să se utilizeze acea dintre integralele (1.7) care se calculează mai ușor.

Pentru determinarea directă, plecând de la definiție, a funcției pondere este uneori dificilă, poate fi mai comod să se calculeze funcția imediată, $a(t)$, definită ca răspuns al circuitului la semnalul trapezoidal unitate, $\alpha(t)$. Întrucât impulsul Dirac, $\delta(t)$, este derivata semnalului trapezoidal unitate, $\alpha(t)$, în cazul SAI, funcția pondere, $h(t)$, va rezulta ca derivată a funcției imediate, $a(t)$.

$$h(t) = a'(t) \quad (1.8)$$

În final, se aplică rel (1.4) pt a determina răspunsul cercet.

II METODA FOURIER

→ se bazează pe relația care se obține prin aplicarea transf Fourier echatiei (1.6)

$$Y(w) = X(w) \cdot H(w) \quad (1.9)$$

$X(w)$, $Y(w)$ sunt TF ale semnalului și respectiv răspunsului, iar $H(w)$ este TF a funcției pondere $h(t)$ și este constituie funcția de transfer Fourier.

Utilitatea practică a metodei transf Fourier se datoră că existenței unei proceduri prin care funcția de transfer Fourier poate fi calculată direct, fără a fi nevoie să se măsoare funcția pondere.

Această procedură se bazează pe faptul că răspunsul sistemului, $y_0(t)$, la o oscilație armonnică, se scrie sub formă complexă

$$x_0(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$y_0(t) = H(\omega_0) \cdot x_0(t) \quad (1.10)$$

Neei funcția de transfer Fourier poate fi determinată prin analiza circuitului în regim armonic, utilizând calculul fazorial, ca raport între fazorul răspunsului, $y_k(t)$, și fazorul semnalului $x_k(t)$.

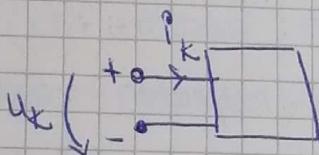
În consecință, metoda transformării Fourier presupune parcurgerea următoarelor etape:

ALGORITM METODA FOURIER

- se determină funcția de transfer Fourier, $H(w)$

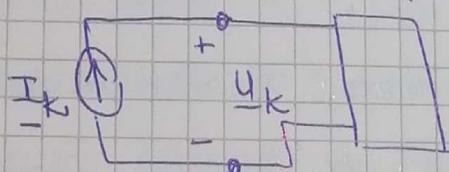
PAS 1 Procedura de determinare a funcției de transfer Fourier presupune să calculăm fazorul răspunsului (mărimea efect) în funcție de fazorul semnalului (mărimea cauză) \Rightarrow funcție de TF \Rightarrow răspunsul dintre ei și fazori.

Caculul acestei funcții de transfer Fourier care poate fi o admittanță / impedanță de intrare sau poate fi un factor de transfer în tensiune sau curent în ceea ce privește rețeaua (impedanța generală a rețelei independentă de tensiune sau curent corespunzător mărimii cauză). Procedul arigură că efectul calculat este produs numărul de a cecătă cauză.



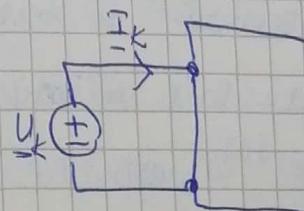
Y_{im} = admittanță de intrare

$$Z_{imk} = \frac{U_k}{I_k} \quad (\text{mărimea efect})$$



Y_{im} = admittanță de intrare

$$Y_{imk} = \frac{I_k}{U_k} \quad (\text{mărimea cauză})$$



Impedanța de transfer de la U_k la I_i : $Z_{T_{k_i}} = \frac{U_k}{I_i}$

admitanța de transfer de la I_k la I_i :

$$Y_{T_{k_i}} = \frac{I_k}{U_p}$$

$$H_{k_i} = \frac{U_k}{U_p}$$

\rightarrow funcția de transfer în tensiune de la U_k la I_i

PAS 2

• De ce calculare transformata Fourier a semnalului

$$X(w) = \int \{ x(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jw t} dt \quad (n.m)$$

în plus: $h(t) = L \{ x(t) \}$

$$a(t) = L \{ \pi(t) \}$$

SALP: $\pi(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}_+ \\ 1 & , t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

$$d'(t) = \frac{d \pi(t)}{dt}$$

$$y(t) = L \{ x(t) \} = x(t) + h(t)$$

$$y(t) = [x(t) + h(t)](t) = \int_{-\infty}^t [x(\tau) + h(\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [h(\tau) \times (t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \frac{d(t-\tau)}{dt} \cdot \frac{d(t-\tau)}{dt} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x'(t-\tau) d\tau = [h * x](t) - L \{ x'(t) \}$$

$$h(t) = L \{ \delta(t) \} = L \{ \frac{d \delta(t)}{dt} \} = \frac{d}{dt} L \{ \delta(t) \} = a'(t)$$

Serierea în complex a ecuației fara rezoluție
comportarea circuitului liniar (LT-Kirchhoff, Ec. curentelor ciclice, M.P.N.).

Nășă în circuit și generația comandă (corespunzătoare unor dispozitive active) atunci când se exploată mărimea care intervin în aceste generații în funcție de mărimea cauză de mecanismele sistemului de ecuații ali. După rezolvarea ecuațiilor, sistemul se va rezolva determinând

mărimea efect căutată, care raportată la mărimea căută va da $H(w) \rightarrow$ funcție de transfer F .

$$\left. \begin{array}{l} \text{m porturi} \\ \text{independente} \end{array} \right\} \begin{array}{l} Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + \dots + Z_{1m} I_m = (\underline{E}_1) \\ Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + \dots + Z_{2m} I_m = (\underline{E}_2) \\ \vdots \\ Z_{m1} I_1 + Z_{m2} I_2 + \dots + Z_{mm} I_m = E_m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mărimee căută} \\ \text{Tabel pe behivru} \end{array}$$

Obs P \rightarrow Procedura prezentată este valabilă în măsură în care circuitul este strict stabile

• I_m care este stabile în sens larg, cum arătat de $\nu H(w)$ întreim \Rightarrow impulsuri direcție $\delta(w-w_i)$. Aceste impulsuri nu au cum să apară în mod procedura prezentată anterior. I_m acice situații se poate calcula întâi funcția pondere $\tilde{h}(t)$ în $H(w)$, unde $H(w) \xrightarrow{\mathcal{F}} h(t)$ și se poate reevigă în ceea ce următorul circuitelor cauzale se evaluarea funcției de transfer Laplace $H(s)$ urmată de trecerea prin procedura cunoscută la $H(w)$

PAS 3 • Se determină transformata Fourier a răspunsului, $Y(w)$, utilizând relația (1.9) $Y(w) = H(w) \cdot X(w)$

PAS 4 • Se calculează răspunsul prin transformare Fourier inversă, $y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ Y(w) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(w) e^{jwt} dw$ (1.12)

În ultima etapă, era mai dificilă, un procedeu aplicabil în majoritatea cazurilor întâlnite în practică, unele prin a descompune transformata Fourier a răspunsului în sumă

$$\{ Y(w) = Y_d(w) + Y_r(w) \} \quad (1.13)$$

În care $Y_d(w)$ este partea care corespunde unor distribuții (conține impulzuri Dirac, sau prin inversare, conduce la apariție unor impulsuri alțipac), iar $Y_r(w)$ este partea regulată din TF, care îndeplinește condiția.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} Y_r(w) = 0 \quad (1.14)$$

Prințul termen poate fi de forma:

$$Y_d(w) = \sum_k a_k \delta(w - w_k) + \sum_i b_i e^{-jw\tau_i} \quad (1.15)$$

iar TF inversă se obține prin decumătare directă

$$y_d(t) = \sum_k a_k e^{jw_k t} + \sum_i b_i \delta(t - \tau_i) \quad (1.16)$$

Pentru calea transformării Fourier inverse, $y_r(t)$, a cărei de-al doilea termen, $Y_r(w)$, se pleacă de la relația (1.2). Se face schimbarea variabilei $w = \frac{1}{j} \pi$, modulând astfel conturul de integrare și obținând următoarea teoremă residuilor

$$y_r(t) = \begin{cases} -\sum r_d - \frac{1}{2} \sum r_p, & \text{pt } t < 0 \\ \sum r_s + \frac{1}{2} \sum r_i, & \text{pt } t > 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

unde $\sum r_d$, $\sum r_p$ și $\sum r_i$ reprezintă sumele residuilor funcției $Y_r(\frac{1}{j})e^{jt}$, respectiv, în polii din semiplanul stâng, în polii din semiplanul drept și în polii de pe axa reală

În final, avem în vedere linearitatea sistemului, rezultă că poate scrie sub forma

$$(y(t) = y_d(t) + y_r(t)) \quad (1.18)$$

III METODA LAPLACE

• se bazează pe relația care se obține prin aplicarea
TL (unilaterală) ecuației (1.6)

$$Y_L(w) = H_L(s) \cdot X_L(s) \quad (1.19) \quad \text{în care } X_L(s) \text{ și } Y_L(s)$$

sunt transformări Laplace unilaterale ale semnalului și, respectiv, reșpon-
selui, $H_L(s)$ este transformări Laplace unilaterală a funcției pondere,
iar] constituie funcția de transfer Laplace a circuitului.

Metoda este aplicată în cazul semnalilor cauzale, pentru care
 $x(t) = x(t) \circ(t)$ și al SAI cauzale, pentru care $h(t) = h(t) \circ(t)$, ap-
ăr rezultă un reșpons causal, $y(t) = y(t) \circ(t)$, ceea ce va permite
calculul celor trei transformate Laplace unilaterale

în cazul SAI stătice în sens strict, pentru care $H_L(s)$ nu
are nici poli nici niște în semiplanul drept, nici pe axa imag, există rel:

$$H(w) = H_L(jw) \quad (1.20)$$

astfel încât funcția de transfer Laplace se va putea calcula
determinând în prealabil funcția de transfer Fourier, $H(w)$, în
care se va face ocazia substituția $w = \frac{s}{j}$. Mai mult, aceasta
schimbare de variabilă se poate efectua încă de la început, utilizând
în locul impedanțelor complexe jwL și $\frac{1}{jw}$ ale bobinilor și
condensatoarelor reale, respectiv impedanțele Laplace sL și $\frac{1}{sC}$, în
cazul în care respectivele bobină și condensator se află în condiții
iniziale nule.

Det. funcțiilor de transfer Laplace se va face astfel că să se
procedă de calcul a funcții de transfer Fourier, utilizând trans-
formarea Laplace în locul factorilor.

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad U_L(s) = \alpha \left\{ L \frac{di(t)}{dt} \right\} = - \alpha [s I_L(s) - i_L(0)]$$

Dacă $i_L(0) = 0 \Rightarrow U_L(s) = s I_L(s)$

Prin urmare, în cazul condiției inițiale mici, metoda TF presupune parcurgerea următoarelor etape:

PAS 1 1) se determină funcția de transfer Laplace, $H_L(s)$

PAS 2 2) se calculează transformata Laplace a semnalului

$$X_L(s) = \mathcal{L} \{ x(t) \} = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \quad (1.21)$$

PAS 3 3) se determină transformata Laplace a răspunsului, $Y_L(s)$, utilizând relația (1.19)

$$Y_L(s) = H_L(s) X_L(s)$$

PAS 4 4) se calculează răspunsul prin transformarea Laplace inversă

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ Y_L(s) \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Y_L(s) e^{st} ds \quad (1.22)$$

În ultima etapă, în cazul în care

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} Y_L(s) = 0 \quad (1.23)$$

pe un arc de cerc cu centru în origine, delimitat de intersecțiile sale cu dreapta de ecuație $\operatorname{Re}\{s\} = \omega$ și învățat în restul acestor dreptăți, răspunsul se scrie sub forma

$$y(t) = \sum_{p=1}^n \frac{\operatorname{Res}_{s=p}}{Y_L(s)} \{ Y_L(s) e^{\omega t} \} \quad (1.24)$$

Atunci când condiția (1.23) nu este îndeplinită se poate recurge la determinarea răspunsului prin calculul integral (1.22), sau la descompunerea transf $V_L(s)$ și la reconstituirea directă a transf deplasă inversive a unor dintre părți, le rezultate prin descompunere în cărți nu satisfac rel (1.23).

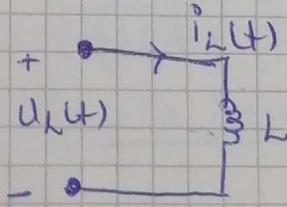
Purs 2

Să căzăvintă să află în condiții inițiale nule, și pot utiliza schemele echivalente ale bobinelor și condensatoarelor ideale care sunt parcurse de un curent nul, respectiv, au la borne o tensiune nulă la momentul $t=0$.

Astfel, o bobină ideală, de produsantă L , care la momentul $t=0$ este parcurse de un curent $i_L(0) \neq 0$ se poate înlocui cu o bobină ideală, de produsantă Laplace " $\frac{1}{sL}$ ", aflată în condiții inițiale nule, la care se adaugă, în serie, un generator ideal de tensiune, de valoare $-L\dot{i}_L(0)$, sau, în paralel, un generator ideal de curent, de valoare $\frac{i_L(0)}{s}$.

Similar, un condensator ideal, de capacitate C , care la momentul $t=0$ are la borne o tensiune $U_C(0) \neq 0$, se poate înlocui cu un condensator ideal, de produsantă Laplace $\frac{1}{sC}$, aflat în condiții inițiale nule, la care se adaugă, în serie, un generator ideal de tensiune, de valoare $\frac{U_C(0)}{s}$, sau, în paralel, un generator de curent de valoare $-CU_C(0)$.

După aceste înlocuiri toate bobinile și condensatoarele din circuitul echivalent se vor afla în condiții inițiale nule și se vor putea parcurge cele 4 etape ale metodei Laplace prezentate anterior.



$$i_L(0) \neq 0$$

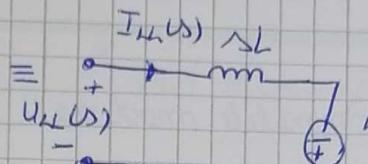
$$U_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt}$$

$$U_{LL}(s) = L \{ s I_{LL}(s) - i_L(0) \} = s L I_{LL}(s) - L i_L(0)$$

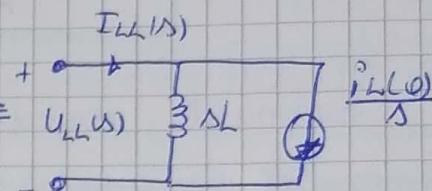
$$I_{LL}(s) = \frac{1}{sL} U_{LL}(s) + \frac{i_L(0)}{s} \quad \text{seh. paralel}$$

Schema

anterioară



Schema
serie



Schema
paralel

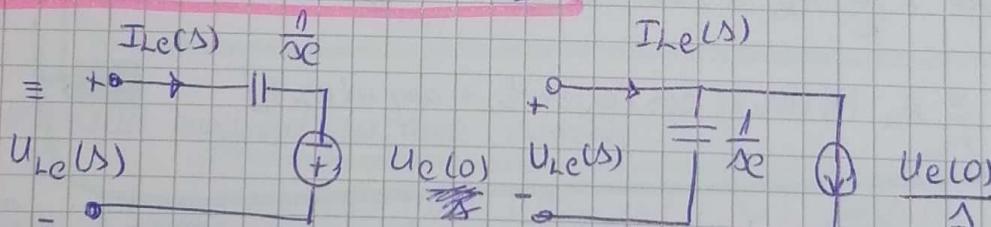
new

folosim condensatorul C

$$\begin{aligned} & U_C(t) \\ & + \xrightarrow{\text{C}} - \\ & U_C(t) \neq 0 \\ & i_C(t) = C \frac{d U_C(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$I_{LC}(s) = C [s U_{LC}(s) - U_C(0)] = s C U_{LC}(s) - C U_C(0)$$

$$U_{LC}(s) = \frac{1}{sC} I_{LC}(s) + \frac{U_C(0)}{s}$$



Schema
serie

CAP II: METODE SPECIFICE SEMNALELOR

PERIODICE SI MODULATE, PENTRU ANALIZA

SISTEMELOR ANALOGICE

(A) METODE SI RELATII DE CALCUL

METODA ARMONICA A SEMNALU

→ permite determinarea răspunsului sistemelor (circuitelor) analogice emisare și învariate în timp (SALI) atunci când semnalul este format dintr-o sumă de oscilații armonice:

$$x(t) = \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (2.1)$$

Semnalele periodice și semnalele modulate (în cazul în care semnalul modulator este o sumă de oscilații armonice) pot fi scrise sub forma (2.1).

Dacă circuitul este caracterizat prin funcția de transfer Fourier, $H(\omega)$, răspunsul la semnalul $x(t)$ este:

$$y(t) = \sum_k \frac{A_k}{2} [H(\omega_k) e^{j(\omega_k t + \phi_k)} + H(-\omega_k) e^{-j(\omega_k t + \phi_k)}] \quad (2.2)$$

În cazul SALI reale, adică al sistemelor pentru care funcția pondere pe valori reale, $H(j\omega) \in \mathbb{R}$, rezultă că $H(-\omega) = H^*(\omega)$ și răspunsul devine

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_k A_k H(\omega_k) e^{j(\omega_k t + \phi_k)} \right\} = \\ &= \sum_k A_k |H(\omega_k)| \cos[\omega_k t + \phi_k + \arg H(\omega_k)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ceea ce arată că ceea ce urmărește armonice din semnal, când însă amplitudinile și fazele sunt modificate, respectiv, de modulul și de argumentul funcției de transfer Fourier, evaluate la frecvențări componente.

Dacă scrierea răspunsului sub formele (2.2) sau (2.3) nu ridică dificultăți, totuși, atunci când numărul de termeni care trebuie luati în considerare în numele din relativile respective este mare, și se cere reprezentarea variației în timp a răspunsului, calculul sunt foarte laborioase.

De exemplu, dacă $x(t)$ este peribedă T și rel. (2.1) corespunde formei de armonie a seriei Fourier

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \quad \begin{aligned} Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{I_1} \quad U_1 = 0$$

$$\begin{aligned} U_1 &= (E_1) \\ U_2 &= (E_2) \\ Z_{12} &= \dots \\ Z_2 &= \dots \end{aligned}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (2.4)$$

$$\text{unde } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.5)$$

Răspunsul, în cazul cel mai simplu, al măsurătorilor reale, rezultă aplicând relația (2.3).

$$y(t) = A_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| H(k\omega) \cos[k\omega t + \varphi_k + \arg H(k\omega)] \quad (2.6)$$

Se observă că, pentru reprezentarea variației sale pe o perioadă volumul calculilor poate fi mare.

Dacă semnalul $x(t)$ este un semnal modulat de către o sumă de oscilații armonice,

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^m A_{mk} \cos(w_{mk}t + \varphi_{mk}) \quad (2.7)$$

dezvoltarea sa spectrală va putea fi scrisă sub forma (2.1)

De exemplu, în cazul modulației de amplitudine, introducând funcția de modulație, $f(t)$, proporțională cu semnalul modulator:

$$f(t) = k_f x_m(t) = \sum_{k=1}^m m_k \cos(w_{mk}t + \varphi_{mk}) \quad (2.8)$$

semnalul modulat va avea expresia

$$x(t) = A_0 [1 + f(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.9)$$

iar dezvoltarea sa spectrală va fi:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{k=1}^m \frac{m_k A_0}{2} \cos[(\omega_0 + w_{mk})t + \varphi_0 + \varphi_{mk}] + \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{m_k A_0}{2} \cos[(\omega_0 - w_{mk})t + \varphi_0 - \varphi_{mk}] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Convenind cărui cel mai simplu, al măsurătorii reali,

în punctul la semnalul din rel (2.10), calculat cu ajutorul formula-

rii (2.6) este $y(t) = A_0 |H(\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \arg H(\omega_0)] +$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k=1}^m |H(\omega_0 + w_{mk})| \frac{m_k A_0}{2} \cos[(\omega_0 + w_{mk})t + \varphi_0 + \varphi_{mk} + \arg H(\omega_0 + w_{mk})] \\ &+ \sum_{k=1}^m |H(\omega_0 - w_{mk})| \frac{m_k A_0}{2} \cos[(\omega_0 - w_{mk})t + \varphi_0 - \varphi_{mk} + \arg H(\omega_0 - w_{mk})] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aducerea exprimării (2.11) la forma de tipul

$$y(t) = b(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (2.12)$$

care să evidențieze primul intermediu din $b(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t))$, variațile în timp ale amplitudinii și fazei inițiale ale răspunsului, adică ale semnalelor modulatori din răspuns, măsură, de asemenea, un volum mare de calcul.

Metoda determinării, sub forma compactă, a răspunsului la semnalele periodice

→ permite optimarea direcției variației în timp a răspunsului în interiorul perioadei $t \in (0, T)$

Se consideră un semnal sau care și străbate stătă, caracterizat de funcția de transfer Laplace, $H_L(s)$, la intrarea căruia se aplică un semnal $x(t)$, periodic cu perioada T . Se notează cu $x_0(t)$ un semnal identic cu $x(t)$ în interiorul perioadei $t \in (0, T)$ și nul în afara acestui interval.

$$x_0(t) = x(t) [G(t) - \bar{v}(t-T)] \quad (2.13)$$

cu căruia transformata Laplace unilaterală este

$$X_{L0}(s) = \int_0^\infty x_0(t) e^{-st} dt = \int_0^T x(t) e^{-st} dt \quad (2.14)$$

cunoscută și sub numele de transformata Weidlich a semnalului periodic $x(t)$.

Exprimă răspunsul, $y(t)$, al circuitului la semnalul periodic $x(t)$ are în limită perioadei $t \in (0, T)$ forma:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ X_{L0}(s) H_L(s) \right\} - \sum_{\text{rez}} \begin{cases} \text{rez.} \\ \text{în polul} \\ \text{eui } H_L(s) \end{cases} \left\{ \frac{x_{L0}(s) H_L(s) e^{st}}{s - \text{rez.}} \right\} \quad (2.15)$$

$$x_0(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$y_0(t) = L \{ x_0(t) \} = H(w_0) x_0(t) = H(w_0) e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\omega_k t} e^{j\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j\omega_k t} e^{-j\omega_0 t}$$

$$y(t) = L \{ x(t) \} = L \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\omega_k t} e^{j\omega_0 t} \right\} + L \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j\omega_k t} e^{-j\omega_0 t} \right\}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\omega_k t} L \{ e^{j\omega_0 t} \} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j\omega_k t} L \{ e^{-j\omega_0 t} \}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\omega_k t} H(w_k) e^{j\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j\omega_k t} H(-w_k) e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} \left[H(w_k) e^{j(\omega_0 t + \varphi_k)} + H(-w_k) e^{-j(\omega_0 t + \varphi_k)} \right] \quad (2.2)$$

$$y(t) = [h * x](t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$h(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow [H(-w) - H^*(w)]$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} \left[H(w_k) e^{j(\omega_0 t + \varphi_k)} + H^*(w_k) e^{-j(\omega_0 t + \varphi_k)} \right]$$

Suma de 2 nr complex conjugate.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} \operatorname{Re} \{ H(w_k) e^{j(\omega_0 t + \varphi_k)} \}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \operatorname{Re} \{ |H(w_k)| e^{j \arg H(w_k)} e^{j(\omega_0 t + \varphi_k)} \}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cdot |H(w_k)| \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{j[\arg H(w_k) + (\omega_0 t + \varphi_k)]} \right\} \quad (2.3)$$

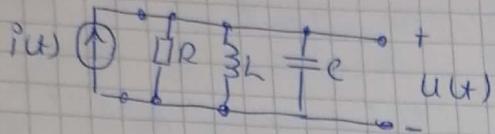
$\cos[\omega_0 t + \varphi_k + \arg H(w_k)]$

Pb 1 Unui circuit derivatie RLC î se aplică semnalul MA

$i(t) = I_0(1 + \operatorname{meas} \omega_m t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, cunoscând R_p , freu de rezonanță ($\omega_r = \omega_0$), factorul de calitate Q pt circuit, precum și

Capitolul este $\omega_m \ll \omega_0$.

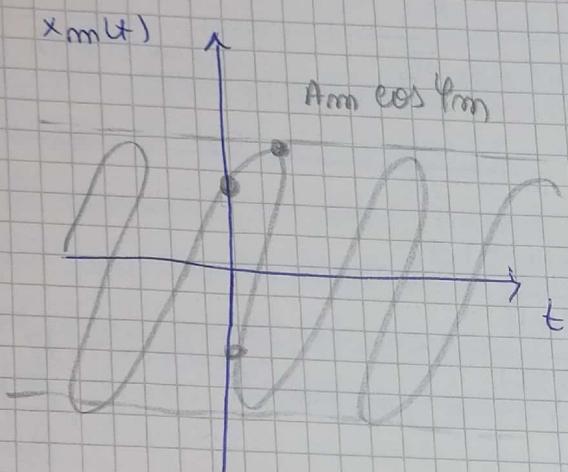
Să se determine formulele mărimii de la formele circuitului (alt) - ?



$$x_{MA}(t) = A_0 [1 + m \cos(\omega_m t + \varphi_m)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x_m(t) = A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m)$$

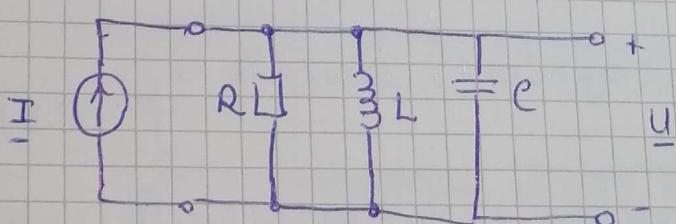
$$m = k_A \cdot A_m$$



$$i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{m I_0}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_m)t + \varphi_0] + \frac{m I_0}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_m)t + \varphi_0].$$

PAS 1 Parințăm circuitul și introducem mărimea căutată

$$H(\omega) = \frac{U}{I} = Z(\omega)$$



$$\frac{1}{Z} = Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

$$Y = G + jB$$

$$G = \frac{1}{R}; \quad B = j \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C \right)$$

la rezonanță $B=0$, $Y_L = G = \frac{1}{R}$

$$W_R E - \frac{1}{W_R L} = 0 \Rightarrow W_R = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$$

$$Y = Q \left(n + \frac{j \cdot B}{G} \right) \quad \frac{B}{G} = \underline{\underline{\Sigma}}$$

$$\circ \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{G} \left(we - \frac{1}{w_L} \right) = \frac{C}{G} \frac{w_R}{w_L} \left(\frac{w}{w_R} - \frac{1}{w_L} \right)$$

$$\underline{\underline{\frac{C}{G} \frac{w_R}{w_L}}} = R \quad w_R C = Q$$

$$\underline{\underline{E = Q \left(\frac{w}{w_R} - \frac{w_R}{w} \right)}}$$

$$\underline{\underline{Q = \frac{R}{|X_R|} = \frac{R}{\left| -\frac{1}{w_R C} \right|} = w_R C R}}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{Y} = \frac{1}{G(1+j\Sigma)}}} \Rightarrow \underline{\underline{Z(w) = \frac{R}{n+jQ \left(\frac{w}{w_R} - \frac{w_R}{w} \right)}}$$

$$\underline{\underline{Z(-w) = \frac{R}{1+jQ \left(-\frac{w}{w_R} - \frac{w_R}{-w} \right)} = \frac{R}{1-jQ \left(\frac{w}{w_R} - \frac{w_R}{w} \right)} = Z^*(w)}}$$

Apliic formula (2,3)

$$\circ \quad u(t) = I_0 |Z(w_0)| \cos(w_0 t + \varphi_0 + \arg Z(w_0)) + \frac{m I_0}{2} |Z(w_0 + w_m)|$$

$$\circ \quad \cos[(w_0 + w_m)t + \varphi_0 + \arg Z(w_0 + w_m)] + \frac{m I_0}{2} |Z(w_0 - w_m)|.$$

$$\circ \quad \cos[(w_0 - w_m)t + \varphi_0 + \arg Z(w_0 - w_m)].$$

$$w_0 - w_m, \quad w_0, \quad w_0 + w_m$$

$$w_0 - w_R = 0$$

$$w_0 \pm w_m - w_R \approx w_m$$

$$\left| \frac{w_m}{w_R} \right| = \left| \frac{w_m}{w_0} \right| \ll 1$$

$$w = w_R + \delta w \quad |\delta w| \ll w_R$$

$$\left| \frac{\delta(w)}{w_R} \right| \ll 1$$

$$\left| \frac{\epsilon}{\omega} = Q \left(\frac{\omega_r + \delta\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_r + \delta\omega} \right) \right| = Q \left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega_r} - \frac{1}{1 + \frac{\delta\omega}{\omega_r}} \right)$$

$\bullet \quad \frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad |x| < 1$

$$\epsilon \approx Q \left[\left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega_r} \right) - \left(1 - \frac{\delta\omega}{\omega_r} \right) \right] \Rightarrow \boxed{\epsilon = Q \cdot 2 \frac{\delta\omega}{\omega_r}}$$

seu

$$\boxed{\epsilon \approx 2Q \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}}$$

formula de rezonanță normală.

$$Z(\omega) \approx \frac{R}{1 + 2Q \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \right)}$$

$$|Z(\omega)| \approx \frac{R}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \right)^2}}$$

$$\arg Z(\omega) = - \arg \operatorname{tg} \frac{2Q \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}}{\omega_r}$$

$$u(t) = I_0 R \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{m I_0}{2} \frac{R}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\omega_m}{\omega_0})^2}} [\cos(\omega_0 + \omega_m)t +$$

$$+ \varphi_0 - \arctg \frac{2Q \frac{\omega_m}{\omega_0}}{\omega_0}] + \frac{m I_0}{2} \frac{R}{1 + (2Q \frac{\omega_m}{\omega_0})^2} \cos[(\omega_0 - \omega_m)t + \varphi_0 +$$

$$+ \arctg \frac{2Q \frac{\omega_m}{\omega_0}}{\omega_0}]$$

$$u(t) \rightarrow x_{MA}(t) \quad A_0 \rightarrow RI_0, m \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\omega_m}{\omega_0})^2}},$$

$$, \varphi_m \rightarrow -\arctg \frac{2Q \frac{\omega_m}{\omega_0}}{\omega_0}$$

$$i(t) \rightarrow x_{MA}(t) \quad A_0 \rightarrow I_0, \varphi_m \rightarrow 0$$

$$u(t) = RI_0 \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\omega_m}{\omega_0})^2}} \cos(\omega_m t - \arctg \frac{2Q \frac{\omega_m}{\omega_0}}{\omega_0}) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\omega_m}{\omega_0})^2}} < m ; \varphi'_m = -\arctg \frac{2Q \frac{\omega_m}{\omega_0}}{\omega_0}$$

Curs 3

[Pb 1] Un semnal în timp având variație din fig 1 se aplică circuitului de variație RC având schema din fig 2. Să se determine $U_2(t)$, să se rezolve problema în cazul în care același semnal se aplică la intrarea circuitului de derivație din figura 3.

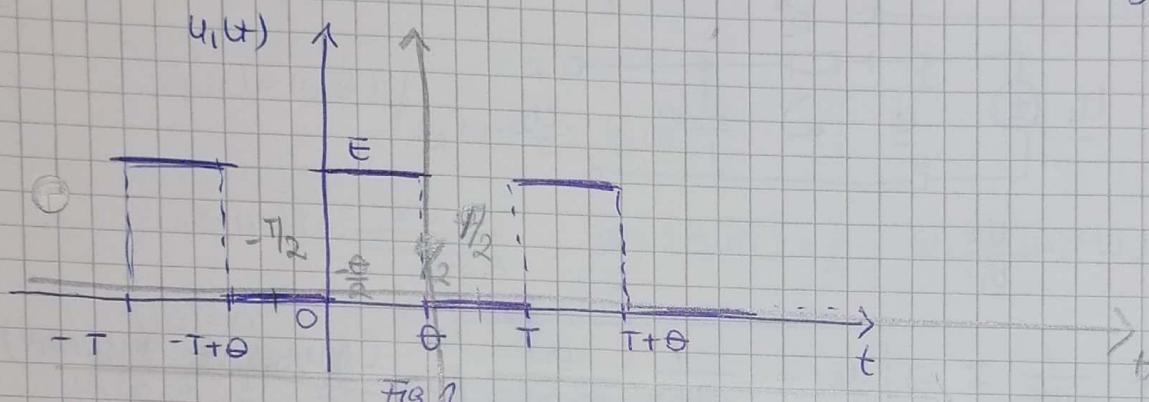


Fig 1.

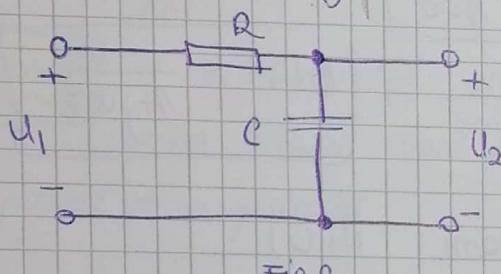


Fig 2

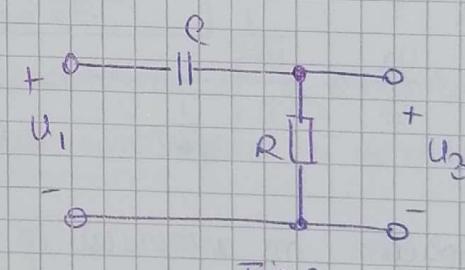


Fig 3

Se deosebește semnalul cu $\frac{\theta}{2}$

$$x(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} u_1(t + \frac{\theta}{2})$$

$$x(t) = \frac{E}{2} + \sum_k [c_k \cos(k\omega t) + s_k \sin(k\omega t)] \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} E \cos(k\omega t) dt = \frac{4E}{T} \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \Big|_0^{T/2} = \frac{4E}{T} \frac{\sin(k\pi)}{k\omega} = \frac{4E}{T} \frac{\sin(k\pi)}{k\pi}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{2E}{k\pi} \sin(k\pi - \frac{\theta}{2})$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(k\pi - \frac{\theta}{2})}{k\pi} = \frac{\sin(-\frac{\theta}{2})}{\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\theta}{2}}$$

$$c_0 = c_k \Big|_{k=0} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\theta}{2}} = \frac{E \cdot 2\pi \sin(\frac{\theta}{2})}{\pi \cdot \frac{\theta}{2}} = \frac{2E}{\pi} \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\theta}{2}}$$

$$x(t) = E \frac{\theta}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E}{k\pi} \sin\left(\frac{k\omega\theta}{2}\right) \cos(k\omega t)$$

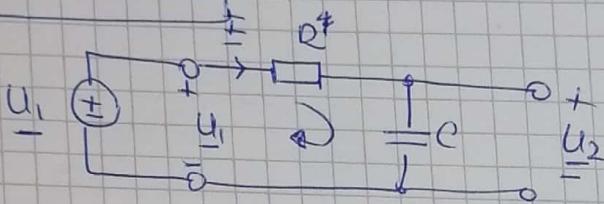
$$u_1(t) = x(t - \frac{\theta}{2}) \rightarrow u_1(t) = E \frac{\theta}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E}{k\pi} \sin\left(\frac{k\omega\theta}{2}\right) \cos[k\omega(t - \frac{\theta}{2})]$$

RC

functie de oscilatie

PAS 1 Panivizăm circuitul V_m calculăm $H(w)$

Metoda sine amplitudine



$$H_2(w) = \frac{U_2}{U_1}$$

$$\underline{U}_2 \neq \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \underline{U}_2 = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{\underline{U}_1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (\text{Divizor de tensiune})$$

$$H_2(w) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega C(R + \frac{1}{j\omega C})} = H_2(w) = \frac{1}{1 + j\omega C}$$

PAS 2 Aplicăm în armonică în calculăm $u_2(t)$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega C} = H_2^*(j\omega) \rightarrow \text{proprietatea de conjugare}$$

$$(H_2(-\omega) = H_2^*(\omega))$$

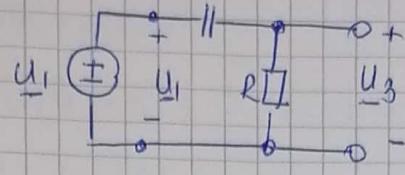
$$|H_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C)^2}}$$

$$\arg\{H_2(j\omega)\} = 0 - \arctg \frac{\omega C}{1} = -\arctg \frac{\omega C}{1}$$

$$u_2(t) = E \frac{\theta}{T} H_2(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E}{k\pi} \sin\left(k\omega \frac{\theta}{2}\right) |H_2(j\omega)| \cos\left[k\omega t - k\omega \frac{\theta}{2} + \arg\{H_2(j\omega)\}\right]$$

$$u_2(t) = E \frac{\theta}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E}{k\pi} \sin\left(k\omega \frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (k\omega C)^2}} \cdot \cos\left[k\omega t - k\omega \frac{\theta}{2} - \arctg(k\omega C)\right]$$

Pentru fig 3:



$$H_3(w) = \frac{U_3}{U_1}$$

$$U_3 = \frac{R}{\frac{1}{jwC} + R} \cdot U_1$$

$$H_3(w) = \frac{R}{\frac{1}{jwC} + R} = \frac{jwRC}{1+jwRC} = \frac{jw\zeta}{1+jw\zeta}$$

$$U_3(t) = U_2(t) / H_2(w) \rightarrow H_3(w)$$

$$|H_3(w)| = \frac{w\zeta}{\sqrt{1+(w\zeta)^2}} ; \arg \{H_3(w)\} = \frac{\pi}{2} - \arctg w\zeta$$

$$\cdot H_3(0) = 0$$

$$U_3(t) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2E}{K\pi} \sin \left(\frac{K\cdot 2\theta}{2} \right) \cdot \frac{K\cdot 2\zeta}{\sqrt{1+(K\cdot 2\zeta)^2}} \cos \left[K\cdot 2t - K\cdot 2\theta + \frac{\pi}{2} + \arctg(w\zeta) \right]$$

obs P M. ARMONICĂ are dezavantajul de a avea un volum relativ mare pe calculul cămădorim să determinăm reăspunsul pe o perioadă.

METODA DE DETERMINARE COMPACTĂ A RASPUNSULUI
CAUZĂRE SI STABILIRE LA SEMNALE PERIODICE

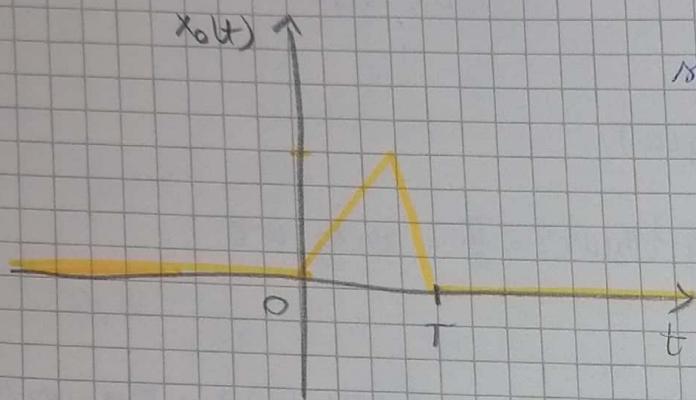
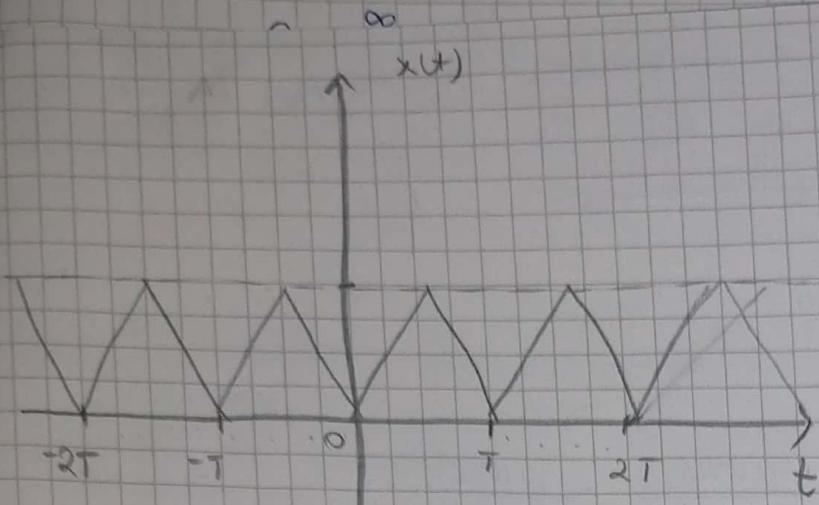
$$x(t), y(t) = L \{ x(t) \}, t \in [0, T]$$

$$x_o(t) = x(t) [\Gamma(t) - \Gamma(t-T)]$$

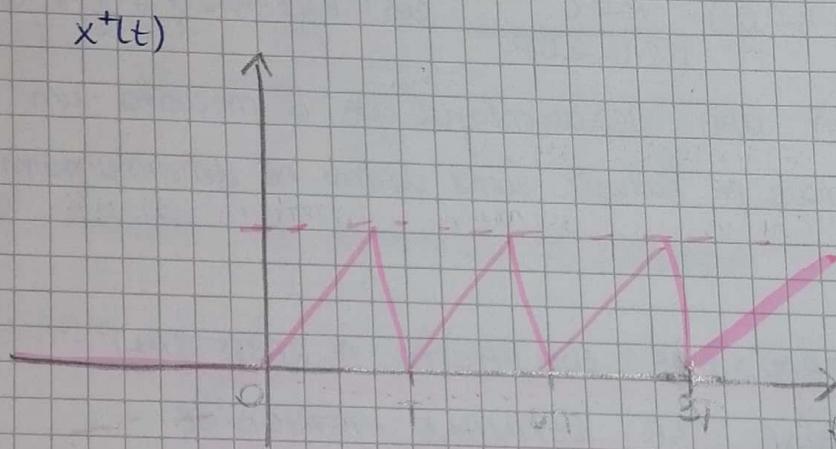
$$\boxed{x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x_o(t-KT)} \quad \text{periodizarea lui } x_o(t)$$

sau

$$\begin{cases} x^+(t) = x(t) \cdot \Gamma(t) & (x^+(t) \text{ este } x(t) \text{ cănd } t \geq 0) \\ x^+(t) = \sum_{K=0}^{\infty} x_o(t-KT) \end{cases}$$



simuloul $x_0(t)$ este doar pe 0 perioada



$$y^+(t) = L \{ x^+(t) \}$$

Pentru o corepunzatoare regimului permanent a lui $y^+(t)$ este identica cu raspunsul $y(t)$ pt $t > 0$.

Reg permanent $y^+(t) = y(t)$ $t > 0$

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad \left\{ \Rightarrow y^+(t) < 0, \quad t < 0 \right.$$

$$x^+(t) = 0, \quad t < 0 \quad \left\{ \Rightarrow y^+(t) = L \{ x^+(t) \} \right.$$

$$y^+(t) = [h * x^+](t) \quad \text{Aplie. TL} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_L^+(s) = H_L(s) \cdot X_L^+(s)$$

$$X_L^+(s) = \mathcal{L} \{ x^+(t) \} = \mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x_0(t-kT) \right\}$$

$$\mathcal{L} \{ x_0(t) \} = X_{L_0}(s)$$

$$X_L^+(s) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{L_0}(s) e^{-kTs} \Rightarrow X_L^+(s) = X_{L_0}(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs}$$

$$(e^{-Ts})^k$$

$$|e^{-Ts}| = 1, \text{ dar } |e^{-Ts}| = |e^{-T\operatorname{Re}s}| \underbrace{|e^{-jT\operatorname{Im}s}|}_{1} = e^{-T\operatorname{Re}s}$$

$$e^{-T\operatorname{Re}s} < 0 \Rightarrow -\operatorname{Re}s < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}s > 0$$

$$\Rightarrow X_L^+(s) = \frac{X_{L_0}(s) \cdot 0}{1 - e^{-Ts}}, \quad \operatorname{Re}s > 0$$

$$Y_L^+(s) = \frac{X_{L_0}(s) \cdot H_L(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

$$1 - e^{-Ts} = 0 \Rightarrow \text{polii } \lambda_k = jk \frac{2\pi}{T}, k \in \mathbb{Z}$$

$H_L(s)$ = poli în remanentul stări

poli simple pe axa imaginäră (stabilitate în sens larg)

$$y^+(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ Y_L^+(s) \}$$

$$\text{seu} \quad y^+(t) = \sum_{\substack{\text{polii lui} \\ H_L(s) \text{ dum} \\ \text{remanent}}} \left[\operatorname{Res} \frac{X_{L_0}(s) \cdot H_L(s)}{1 - e^{-Ts}} e^{st} \right] \tau(t) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ \lambda_k = jk \frac{2\pi}{T}}} \left[\operatorname{Res} \frac{X_{L_0}(s) \cdot H_L(s)}{1 - e^{-Ts}} e^{st} \right] \tau(t)$$

$\lambda_k = jk \frac{2\pi}{T}$
 $k \in \mathbb{Z}$
 în polii lui
 $H_L(s)$ de pe
 axa Imag

$$P_{m_{K_0}-1}(t) e^{-\alpha_K t} e^{jw_K t} r(t) \rightarrow \text{contribuția pol}$$

$$\alpha_K = -\alpha_K + j\omega_K (\alpha_K \geq 0)$$

de ordinul de multiplicitate

$$m_K$$

$t \rightarrow \infty$ acești termeni se anulează rapid \Rightarrow regim transitoriu

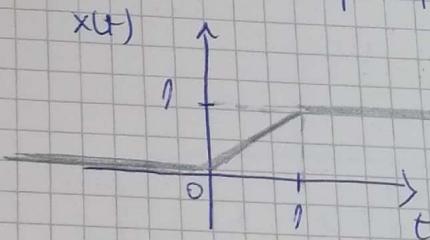
$$e^{jw_K t} r(t)$$

$$w_K = \frac{\alpha_K \omega}{T}$$

= Răspunsul 1:

[Pb 1] Răspunsul unui circuit SAW la semnalul treapta unitate este: $a(t) = (1 - e^{-t}) r(t)$

Să se determine răspunsul aceluiași circuit la semnalul a cărui variație în timp reprezintă în figura:



$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \in [0, 1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

$$a(t) = L\{r(t)\} \rightarrow \text{functia pondeliala}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = at + b \\ t=0 \Rightarrow y(0)=0 \\ t=1 \Rightarrow y(1)=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b=0 \\ a \cdot t + 0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y(t) = t$$

METODA CONVOLUȚIEI

$$h(t) = L\{r(t)\} \rightarrow \text{functia pondere}$$

$h(t) = a'(t) \rightarrow h(t)$ este derivata lui a , deoarece $r(t)$ este

derivat

h(t)

h(t)

x(t)

x(t)

x(t)

x(t)

y(t)

Notam:

y(t)

= S

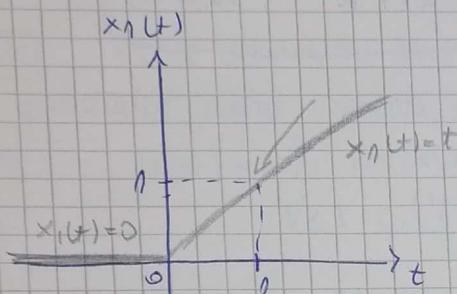
->

derivata lui $\sigma(t)$

$$y(t) = [h * x](t) = [x * h](t)$$

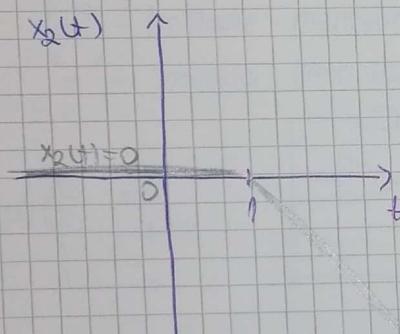
$$h(t) = e^{-t} \sigma(t) + (1 - e^{-t}) \delta(t) = e^{-t} \sigma(t) + \underbrace{(1 - e^{-t})}_{0} \delta(t) = e^{-t} \sigma(t)$$

$h(t) = 0, t < 0 \Rightarrow$ S.A.L. - causal



$$\underline{x_1(t) = t \sigma(t)}$$

se face
convolutia
intre h' si
 x_1



semnalul
 $x_2(t)$ trebuie sa
amulteze cu semnalul
 $x_1(t)$

$$\underline{x_2(t) = -(t-1) \sigma(t-1)}$$

$$\underline{\underline{[x_2(t) = -x_1(t-1) \sigma(t-1)]}}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-1)$$

$$y(t) = L\{x(t)\} = L\{x_1(t)\} - L\{x_1(t-1)\}$$

Notam: $y_1(t) = L\{x_1(t)\} \Rightarrow L\{x_1(t-1)\} = y_1(t-1)$ deoarece este un S.A.L.

$$\Rightarrow y(t) = y_1(t) - y_1(t-1)$$

$$y_1(t) = L\{x_1 * h\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) e^{-(t-\tau)} \sigma(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{-t} e^{\tau} \sigma(\tau) \sigma(t-\tau) d\tau \Rightarrow$$

$\sigma(\tau) \sigma(t-\tau) \neq 0, \tau \geq 0 \quad \leftarrow \tau \geq 0 \Leftrightarrow \tau \leq t.$

$$y_n(t) = \sigma(t) \int_0^t e^{-\tau} e^{\sigma(\tau)} d\tau \Rightarrow y_n(t) = e^{-t} \sigma(t) \int_0^t e^{\sigma(\tau)} d\tau$$

$$\Rightarrow y_n(t) = e^{-t} \sigma(t) [e^{\sigma(t)} - \int_0^t e^{\sigma(\tau)} d\tau] = e^{-t} \sigma(t) [t e^t - e^t + 1]$$

$$\Rightarrow y_n(t) = e^{-t} \sigma(t) (t e^t - e^t + 1) \Rightarrow y_n(t) = (t-1+e^{-t}) \sigma(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = (t-1+e^{-t}) \sigma(t) - (t-2+e^{-t+1}) \sigma(t-1)}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t-1+e^{-t} & , t \in [0, 1) \\ \underbrace{(t-1+e^{-t}) - (t-2+e^{-t+1})}_{(1-e)e^{-t}+1} & , t \geq 1 \end{cases}$$

$$t \in [0, 1) \Rightarrow y(t) = e^{-t} + t - 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) : y(0+0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) : y(1-0) = e^{-1}$$

$$y'(t) = -e^{-t} + 1 = 1 - e^{-t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y'(t) : y'(0+0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} y'(t) : y'(1-0) = 1 - e^{-1}$$

$$t \in [1, \infty) \Rightarrow y(t) = (1-e)e^{-t} + 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) : y(1+0) = (1-e)e^{-1} + 1 = e^{-1/2} - 1 = e^{-1}$$

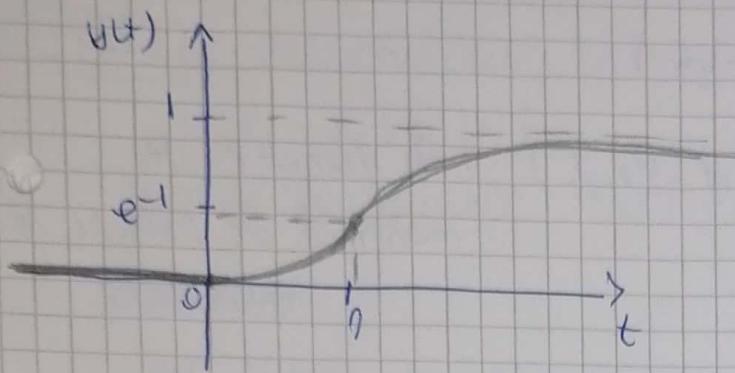
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) : \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$$

$$y'(t) = (e-1)e^{-t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y'(t) : y'(0+0) = (e-1)e^{-1} = 1 - e^{-1}$$

$$y''(t) = -(e-1)e^{-t} < 0 \Rightarrow \text{concave}$$

$$\overline{y''(t)} = e^{-t}$$



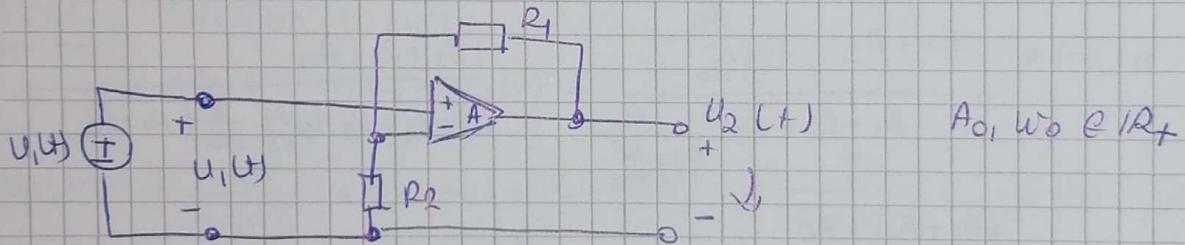
Pb2 Să se determine tensiunea $u_2(t)$ care se obține la ieșirea circuitului, având schema din figura atunci când la intrare

avem: $u_1(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t), & t \in (-\infty, 0) \\ 0, & t \in [0, \infty) \end{cases}$

Se cunoaște: $A(u) = \frac{A_0}{1 + j \frac{u}{\omega_0}}$ (amplificarea)

$u^+ - u^-$ - intrare măsurare

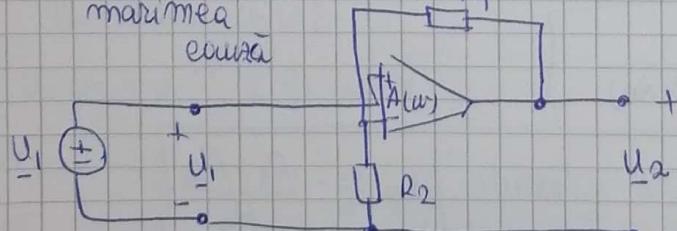
$u^- - u^+$ - intrare inversare



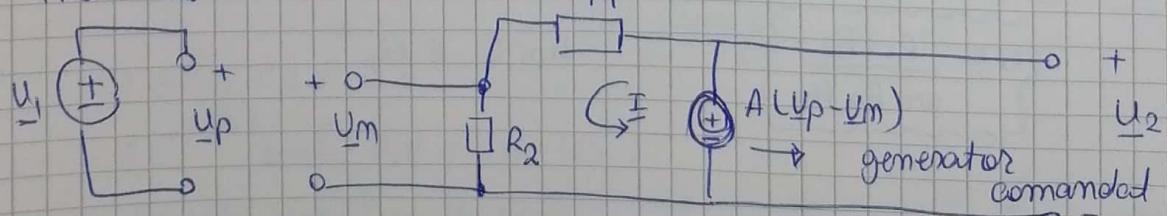
(PAS 1)

$$H(u) = \frac{u_2}{u_1} \rightarrow \text{mărimea efect}$$

mărimea curentă



PASIVARE



$$T_2 k_2 \underline{(R_1 + R_2) I} = A (\underline{U_p} - \underline{U_m})$$

Explicări: $\underline{U_p}, \underline{U_m} = f(\underline{U_1}, \underline{I})$ în funcție de mărimile de intrare și de măsurare

$$\circ \underline{U_p} = \underline{U_1}$$

$$\circ \underline{U_m} = \underline{I} R_2$$

$$(R_1 + R_2) \underline{I} = A \cdot \underline{U_1} - A \cdot \underline{I} R_2$$

$$(R_1 + R_2 + A R_2) \underline{I} = A \cdot \underline{U_1} \Rightarrow \underline{I} = \left(\frac{A}{R_1 + R_2 + A R_2} \right) \cdot \underline{U_1}$$

$$\bullet \underline{U_2} = (R_1 + R_2) \underline{I} = \frac{(R_1 + R_2) A}{R_1 + R_2 (A+1)} \cdot \underline{U_1}$$

$$H(w) = \frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot A}{R_1 + R_2 + R_2 A}$$

$$H(w) \approx \frac{R_1 + R_2 \frac{A_0}{1 + j \frac{w}{w_0}}}{R_1 + R_2 + R_2 \frac{A_0}{1 + j \frac{w}{w_0}}} = \frac{(R_1 + R_2) A_0}{R_1 + R_2 + R_2 A_0 + j \frac{w}{w_0} (R_1 + R_2)}$$

$$\Rightarrow H(w) = \frac{(R_1 + R_2) \cdot A_0}{(R_1 + R_2 + R_2 A_0)} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{w}{w_0} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_2 A_0} \right)}$$

pot neglijate

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{R_1 + R_2}{w_0 (R_1 + R_2 + R_2 A_0)}}$$

$$\boxed{H(w) = \frac{H_0}{1 + j \frac{w}{w_0 \gamma_0}}}$$

$$\text{unde } \boxed{H_0 \approx \frac{R_1 + R_2}{R_2}}$$

$$\boxed{\gamma_0 \approx \frac{R_1 + R_2}{w_0 R_2 A_0}}$$

$$H_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

PAS 2] Calculăm lină $U_1(w)$

$$U_1(w) = \mathcal{F}^{-1}\{u_1(t)\}$$

Se menține poate scrie $u_1(t) = [\underbrace{\pi - \sigma(t)}_{x_m(t)}] \cos(\omega_n t) \rightarrow$ impuls de măltă frecvență

Apl făcutea să scriem direct $x_m(t)$

$$\circ x_m(w) = \mathcal{F}^{-1}\{x_m(t)\} \Rightarrow U_1(w) = \frac{1}{2} x_m(w - \omega_n) + \frac{1}{2} x_m(w + \omega_n)$$

$$\circ x_m(w) = \mathcal{F}^{-1}\{\pi - \sigma(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1\} - \mathcal{F}^{-1}\{\sigma(t)\} = 2\pi \delta(w) - \pi \delta(w) \frac{1}{j\omega}$$

$$\circ x_m(w + \omega_n) = \pi \delta(w + \omega_n) - \frac{1}{j\omega}$$

$$U_1(w) = \frac{1}{2} \pi \delta(w - \omega_n) - \frac{1}{2} \frac{1}{j(w - \omega_n)} + \frac{1}{2} \pi \delta(w + \omega_n) - \frac{1}{2} \frac{1}{j(w + \omega_n)}$$

PAS 3] Calculăm $U_2(w)$

$$U_2(w) = H(w) \cdot U_1(w)$$

$$U_2(w) = \frac{\pi}{2} \frac{H_0}{\pi j\omega} \left[\delta(w - \omega_n) + \delta(w + \omega_n) \right] - \frac{1}{2} \frac{H_0}{\pi j\omega} \left[\frac{1}{j(w - \omega_n)} - \frac{1}{j(w + \omega_n)} \right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{U_{2d}(w)}$

PAS 4] Calculăm $u_2(t)$

$$u_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U_2(w)\}$$

prop de
SONDARE

$$U_{2d}(w) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{H_0}{\pi j\omega} \right) \delta(w - \omega_n) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{H_0}{\pi j\omega} \right) \delta(w + \omega_n)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{ct}$

nu depinde

de w

$$1 \xrightarrow{j\omega t} \text{ct}$$

$$ne^{j\omega t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{ct}$$

$$U_{2d}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U_{2d}(w)\} = \frac{1}{4} \frac{H_0}{\pi j\omega} e^{j\omega_n t} + \frac{1}{4} \frac{H_0}{\pi j\omega} e^{-j\omega_n t}$$

$$U_{2d}(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4} \frac{H_0}{1+jw_1 t} e^{jw_1 t} \right\} = \frac{H_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+(w_1 t)^2}} e^{jw_1 t} \right\}$$

(modul)

$$U_{2d}(t) = \frac{H_0}{2\sqrt{1+(w_1 t)^2}} \cos(w_1 t - \arctg w_1 t)$$

$$U_{2R}(t) = F^{-1} \{ U_{2R}(s) \}$$

$$\boxed{U_2(t) = U_{2d}(t) + U_{2R}(t)}$$

= Consultati 2 =

(Pb1)

$$U_2(t) = ?$$

Continuăm problema anterioră

Calculăm $U_{2R}(t)$

$$U_{2R}\left(\frac{s}{j}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-jw_1} + \frac{1}{s+jw_1} \right) \cdot \frac{H_0}{1+s^2} / \quad s_{1/2} = \pm jw_1 \in \text{axa imaj} \\ s_3 = -\frac{1}{2}$$

$\bullet t < 0$

$$U_{2R}(t) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \operatorname{poli} \operatorname{Res}_{s_k \text{ de}} \left\{ U_{2R}\left(\frac{s}{j}\right) e^{st} \right\}$$

pe axa
imaj

$$U_{2R}(t) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{s-jw_1} + \frac{1}{s+jw_1} \right) \cdot \frac{H_0}{1+s^2} (s-jw_1) e^{st} / s=jw_1 +$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s-jw_1} + \frac{1}{s+jw_1} \right) \cdot \frac{H_0}{1+s^2} (s+jw_1) e^{st} / s=-jw_1$$

$$= \frac{1}{4} \frac{H_0}{1+jw_1 s} e^{jw_1 t} + \frac{1}{4} \cdot \frac{H_0}{1+jw_1 s} e^{-jw_1 t}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{2R}(t) = U_{2d}(t)}$$

= Consultatari E=

t < 0

$$U_{2R}(t) = -U_{2d}(t) + \text{Re} \left\{ U_{2R} \left(\frac{1}{j} \right) e^{st} \right\} = -U_{2d}(t) - \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{s j w_1} \right. \\ \left. + \frac{1}{s j w_1} \right) \cdot \frac{H_0}{1 + \alpha^2} \cdot \left(s + \frac{1}{\alpha} \right) e^{st} / s = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow U_{2R}(t) = -U_{2d}(t) - \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha j w_1} + -\frac{1}{\alpha j w_1} \right) \frac{H_0 e^{-\frac{t}{\alpha}}}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{2R}(t) = -U_{2d}(t) - \frac{\frac{2}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha^2} + w_1^2} \frac{H_0 e^{-\frac{t}{\alpha}}}{\alpha}$$

$$\Rightarrow U_{2R}(t) = -U_{2d}(t) + \frac{H_0 e^{-\frac{t}{\alpha}}}{1 + w_1^2 \alpha^2}$$

dă t < 0

$$\circ U_2(t) = U_{2d}(t) + U_{2R}(t) = U_{2d}(t) + U_{2d}(t) = 2U_{2d}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_2(t) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + w_1^2 \alpha^2}} \cos(w_1 t - \arctg w_1 \alpha)}$$

dă t > 0

$$\circ U_2(t) = U_{2d}(t) + U_{2R}(t) = U_{2d}(t) - U_{2d}(t) + \frac{H_0 e^{-\frac{t}{\alpha}}}{1 + w_1^2 \alpha^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_2(t) = \frac{H_0 e^{-\frac{t}{\alpha}}}{1 + w_1^2 \alpha^2}}$$

$$U_2(t) = \begin{cases} \frac{H_0}{\sqrt{1 + w_1^2 \alpha^2}} \cos(w_1 t - \arctg w_1 \alpha), & t \in (-\infty, 0) \\ \frac{H_0}{1 + w_1^2 \alpha^2} e^{-\frac{t}{\alpha}}, & t \in [0, \infty) \end{cases}$$

$$U_2(t) = [1 - \gamma(t)] \frac{H_0}{\sqrt{1 + w_1^2 \alpha^2}} \cos(w_1 t - \arctg w_1 \alpha) + \gamma(t) \frac{H_0}{1 + w_1^2 \alpha^2} e^{-\frac{t}{\alpha}}$$

• limita la ntg

$$u_2(0-0) = \frac{H_0}{\sqrt{1+w_1^2\zeta^2}} \cos(\omega t + \arctg w_1 \zeta)$$

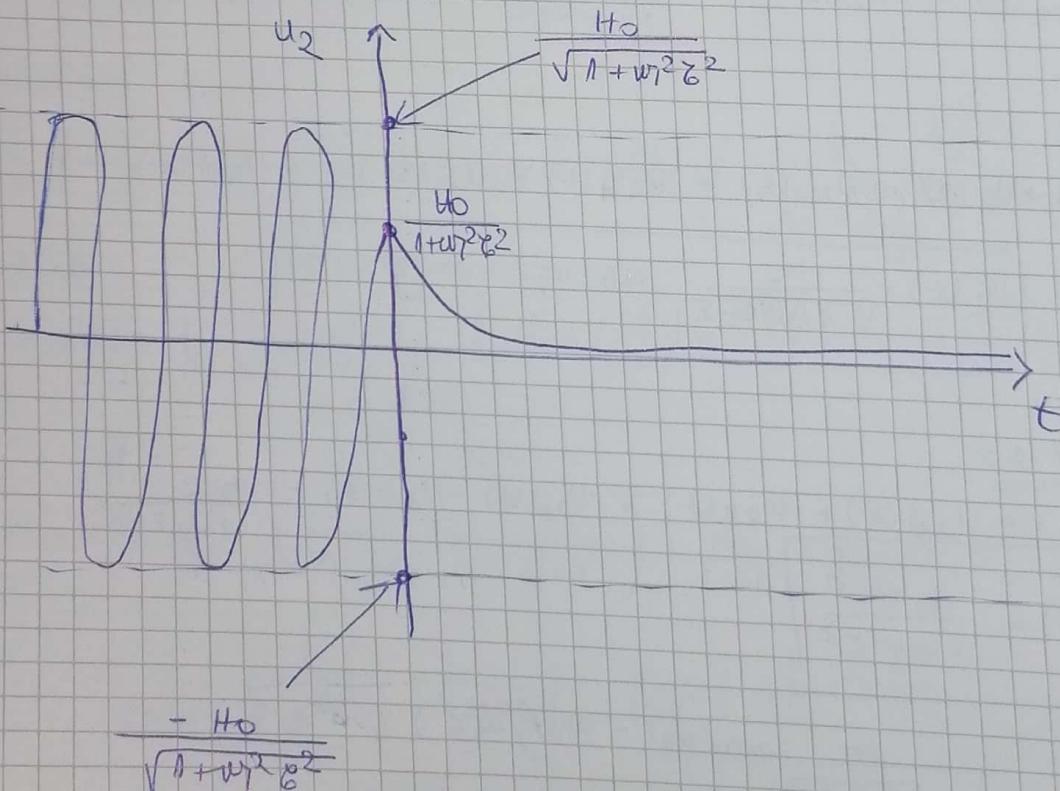
$$u_2(0-0) = \frac{H_0}{\sqrt{1+w_1^2\zeta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+w_1^2\zeta^2}}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$$

$$u_2(0-0) = \frac{H_0}{1+w_1^2\zeta^2}$$

• limita la dreapta

$$u_2(0+0) = \frac{H_0}{1+w_1^2\zeta^2}$$



Metoda Laplace

• [PB2] Să re решă problema precedentă aplicând metoda T-L.

$$u_1(t) = [(1 - \Delta t)] \cos w_1 t - \underbrace{\cos w_1 t}_{U_{sp}(t)} - \underbrace{\Delta t)} \underbrace{\cos w_1 t}_{U_m(t)}$$

$$H(w) = \frac{H_0}{1 + jw\zeta}$$

$$H(-w) = \frac{H_0}{1 + j(-w)\zeta} \quad \left. \right\} \Rightarrow H(-w) = H^*(w)$$

$$H^*(w) = \frac{H_0}{1 + (j/w)\zeta}$$

$$U_{sp}(t) = |H_0(w)| [\cos \angle w_1 t + \arg H(w)] = \frac{H_0}{\sqrt{1 + w_1^2 \zeta^2}} \cos w_1 t - \operatorname{ang} w_1$$

FUNCȚIA DE TRANSFER LAPLACE

ETAPA I $H_L(s) = H(j\omega) \Rightarrow \left. H_L(s) = \frac{H_0}{1 + s\zeta} \right\}$

ETAPA II $U_{Lm}(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \cos w_1 t \} = \frac{s}{s^2 + w_1^2}$

ETAPA III

$$U_{ham}(s) = H_L(s) U_{Lm}(s) = \frac{H_0 s}{(1 + s\zeta)(s^2 + w_1^2)} \quad / \quad \gamma_1 = -\frac{1}{\zeta}$$

$$U_{2m}(t) = \mathcal{E}^{-1} \{ U_{ham}(s) \} = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}_{s_k} \left\{ \frac{H_0 s}{(1 + s\zeta)(s^2 + w_1^2)} e^{s_1 t} \right\}$$

$$= \frac{H_0 s e^{s_1 t}}{2(\ln \frac{s}{s_1})(s^2 + w_1^2)} \left(0 + \frac{1}{\zeta} \right) \Big|_{s=-\frac{1}{\zeta}} \cdot \mathcal{F}(t) + \frac{H_0 s e^{s_1 t}}{(1 + s\zeta)(s_1 + jw_1)(s_1 - jw_1)} e^{s_1 t}$$

$$\bullet \quad \Re(s-jw_1) \cdot \mathcal{F}(t) + \frac{H_0 s e^{s_1 t}}{(1 + s\zeta)(s_1 - jw_1)(s_1 + jw_1)} \cdot \Re(s+jw_1) \Big|_{s=-jw_1} \cdot \mathcal{F}(t)$$

•

Metoda Laplace:

- [PB2] Să se rezolve problema precedentă aplicând metoda TL.

$$u_1(t) = [1 - \delta(t)] \cos w_1 t - \underbrace{\cos w_1 t}_{U_{1p}(t)} - \underbrace{\delta(t) \cos w_1 t}_{U_{1m}(t)}$$

$$H(w) = \frac{H_0}{1 + jw_1 \zeta}$$

$$H(-w) = \frac{H_0}{1 + j(-w_1 \zeta)} \quad \Rightarrow \quad H(-\omega) = H^*(\omega)$$

$$H^*(\omega) = \frac{H_0}{1 + (j\omega_1 \zeta)^2}$$

$$U_{1p}(t) = |H_1(\omega)| [\cos(\omega_1 t + \arg H(\omega))] = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \omega_1^2 \zeta^2}} \cos(\omega_1 t - \arctg \omega_1 \zeta)$$

FUNCȚIA DE TRANSFER LAPLACE

ETAPA I $H_1(s) = H(j\omega) \Rightarrow H_1(s) = \frac{H_0}{s + \Delta \zeta}$

ETAPA II $U_{1,im}(s) = \Im \{ \tilde{U}_1(t) \cos \omega_1 t \} = -\frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$

ETAPA III

$$U_{1am}(s) = H_1(s) \quad U_{1m}(s) = \frac{H_0 s}{(s + \Delta \zeta)(s^2 + \omega_1^2)} \quad / \quad \gamma_1 = -\frac{1}{\zeta} \quad \gamma_2 = \pm j\omega_1$$

$$U_{2am}(t) = \delta^{-1} \{ U_{1am}(s) \} = \sum_{k=1}^3 \text{Res}_{\gamma_k} \left\{ \frac{H_0 s}{(s + \Delta \zeta)(s^2 + \omega_1^2)} e^{s t} \right\}$$

$$= \frac{H_0 \Delta e^{\Delta t}}{2(\Delta + \frac{1}{\zeta})(\Delta^2 + \omega_1^2)} \left(\Delta + \frac{1}{\zeta} \right) \Big|_{s=-\frac{1}{\zeta}} + \frac{H_0 \Delta e^{\Delta t}}{(s + \Delta \zeta)(s - j\omega_1)(s + j\omega_1)} \cdot \frac{H_0 \Delta e^{\Delta t}}{(s + \Delta \zeta)(s - j\omega_1)(s + j\omega_1)} \Big|_{s=-\frac{1}{\zeta}}$$

$$\bullet \quad \Re((\Delta + j\omega_1) \cdot \tilde{U}_1(t)) + \frac{H_0 \Delta e^{\Delta t}}{(s + \Delta \zeta)(s - j\omega_1)(s + j\omega_1)} \cdot \Re(j\omega_1) \Big|_{s=-\frac{1}{\zeta}}$$

)

Metoda Laplace:

[Pb2] Să se rezolve problema precedentă aplicând metoda T.L.

$$u_1(t) = [(1 - \Delta t)] \cos w_n t - \underbrace{\cos w_n t}_{U_{1p}(t)} - \underbrace{\sin t}_{U_{1m}(t)} \cos w_n t$$

$$H(w) = \frac{H_0}{1 + jw\zeta}$$

$$H(-w) = \frac{H_0}{1 + j(-w)\zeta} \quad \Rightarrow \quad H(-w) = H^*(w)$$

$$H^*(w) = \frac{H_0}{1 + (j)w\zeta}$$

$$u_{2p}(t) = |H(w)| \cos [w_n t + \arg H(w)] = \frac{H_0}{\sqrt{1 + w_n^2 \zeta^2}} \cos(w_n t - \arctg w_n \zeta)$$

FUNCȚIA DE TRANSFER LAPLACE

[ETAPA I] $H_L(\Delta) = H\left(\frac{\Delta}{j}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_L(\Delta) = \frac{H_0}{1 + \Delta \zeta} \end{array} \right\}$

[ETAPA II] $U_{L1m}(\Delta) = \mathcal{L} \{ F(t) \cos w_n t \} = \frac{j}{\Delta^2 + w_n^2}$

[ETAPA III]

$$U_{L2m}(\Delta) = H_L(\Delta) U_{L1m}(\Delta) = \frac{H_0 \Delta}{(1 + \Delta \zeta)(\Delta^2 + w_n^2)} \quad \left| \begin{array}{l} \gamma_1 = -\frac{1}{\zeta} \text{ de ex} \\ \gamma_2 = \pm jw \text{ de verificare} \end{array} \right.$$

$$U_{2m}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ U_{L2m}(\Delta) \} = \sum_{k=1}^3 \text{Res}_{\gamma_k} \left\{ \frac{H_0 \Delta}{(1 + \Delta \zeta)(\Delta^2 + w_n^2)} e^{\Delta t} \right\}$$

$$= \frac{H_0 \Delta e^{\Delta t}}{\zeta (\Delta + \frac{1}{\zeta})(\Delta^2 + w_n^2)} \left(\Delta + \frac{1}{\zeta} \right) \Big|_{\Delta = -\frac{1}{\zeta}} \cdot \sin t + \frac{H_0 \Delta e^{\Delta t}}{(1 + \Delta \zeta)(\Delta^2 + w_n^2)} \cdot \left(\Delta + jw \right) \Big|_{\Delta = -jw} \cdot \sin t$$

?

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{2m}(t) &= \frac{H_0(-\frac{1}{8}) e^{-\frac{t}{8}}}{\zeta(\frac{1}{8} + w_1^2)} r(t) + \frac{H_0 j w_1 e^{j w_1 t}}{(1+jw_1\zeta) \zeta j w_1} r(t) + \\ &+ \frac{H_0 (j w_1)}{(n-jw_1\zeta)(k+jw_1)} e^{-jw_1 t} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_{am}(t) &= -\frac{H_0 e^{-\frac{t}{8}}}{1+w_1^2 \zeta^2} r(t) + \frac{H_0 e^{j w_1 t}}{\zeta(1+jw_1\zeta)} r(t) + \frac{H_0 e^{-j w_1 t}}{\zeta(1-jw_1\zeta)} r(t) \\ \Rightarrow u_{2m}(t) &= -\frac{H_0 e^{-\frac{t}{8}}}{1+w_1^2 \zeta^2} r(t) + \frac{H_0}{\sqrt{1+w_1^2 \zeta^2}} \cos(w_1 t - \arctg w_1 \zeta) r(t) \end{aligned}$$

ETAPA IV

$$u_{2l}(t) = u_{2p}(t) - u_{2m}(t)$$

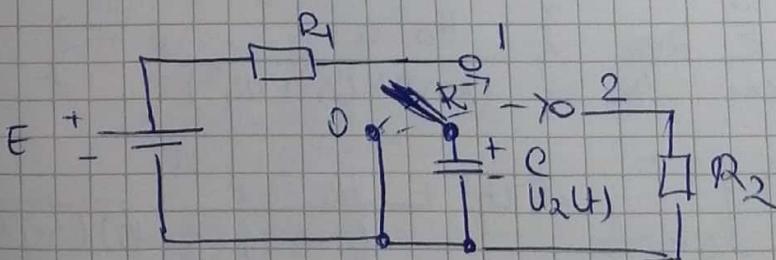
$$u_{2l}(t) = \frac{H_0}{\sqrt{1+w_1^2 \zeta^2}} [1-r(t)] \cos(w_1 t - \arctg w_1 \zeta) + \frac{H_0 e^{-\frac{t}{8}}}{1+w_1^2 \zeta^2} r(t)$$

Pb 3 În circuitul cu elemente polale din nouă schema din figură pămâla momentul $t=0$ când este treut pe poziția 1, comutatorul K era pe poziția 0.

Apoi la momentul $t=t_0$, comutatorul K este treut pe poziția 2.

Să se determine :

- $u_{2l}(t) = ?$ de la bornile condensatorului
- Reprezentăți grafic variația în timp a acestia

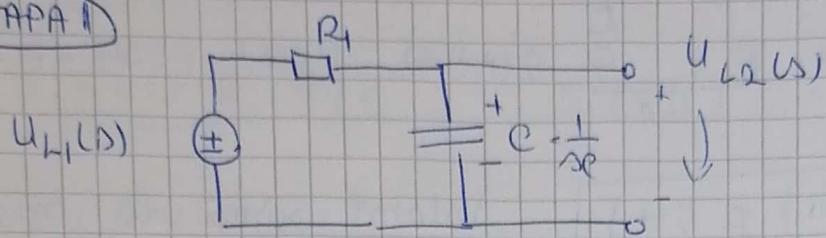


$$\begin{cases} u_{2l}(t) = 0 & \text{la } t = 0 \\ u_{2l}(0+0) = 0V \end{cases}$$

suntem în echipajele primitive 1.

Apl. cu Laplace în 4 etape

ETAPA 1



ETAPA 2

călcărul jet de transfer

$$H_L(s) = \frac{U_{L2}(s)}{U_{L1}(s)}$$

$$\circ U_{L2}(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot U_{L1}(s)$$

$$U_{L2}(s) = \frac{1}{sCR_1 + 1} \cdot U_{L1}(s)$$

$$\Rightarrow H_L(s) = \frac{\frac{1}{sCR_1 + 1} \cdot U_{L1}(s)}{U_{L1}(s)}$$

$$\Rightarrow H_L(s) = \frac{1}{sCn + 1}$$

$$\circ M_1(t) = E \bar{v}(t)$$

$$U_{L1}(s) = \frac{E}{s}$$

ETAPA 3

călcărăm $U_{L2}(s) = H_L(s) \cdot U_{L1}(s)$

$$U_{L2}(s) = \frac{E}{s} \cdot \frac{1}{sCn + 1}$$

$$\Rightarrow U_{L2}(s) = \frac{E}{s^2 C n + s} \Rightarrow U_{L2}(s) = \frac{E}{s(sCn + 1)}$$

au polii

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{C}$$

ETAPA 4

$$U_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ U_{L2}(s) \} = \sum_{k=1}^2 \text{Res} \left\{ U_{L2}(s) e^{st} \right\} \bar{v}(t)$$

$$\Rightarrow U_2(t) = \frac{E}{s(sCn + 1)} e^{st} \cdot s \bar{v}(t) \Big|_{s=0} + \frac{E}{s(sCn + 1)} e^{s\left(0 + \frac{1}{C}\right)} \Big|_{s=-\frac{1}{C}}$$

$$\Rightarrow u_2(t) = \frac{E e^{\sigma t}}{(\sigma \zeta_1 + 1)} \int_{\sigma=0}^{(U(t))} + \frac{E e^{\sigma t}}{\sigma \zeta_1} / \sigma = \frac{0.4}{\zeta_1}$$

$$u_2(t) = E U(t) + \frac{E e^{-\frac{t}{\zeta_1}}}{-\sigma} \quad (t \neq 0) \Rightarrow u_2(t) = E U(t) - E e^{-\frac{t}{\zeta_1}} \delta(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\zeta_1}}) E U(t)}$$

Vălările pînă la momentul $t=t_0$, după se mută conutatorul k (de la $t=0$ la $t=t_0$)
 $t \in [0, t_0]$

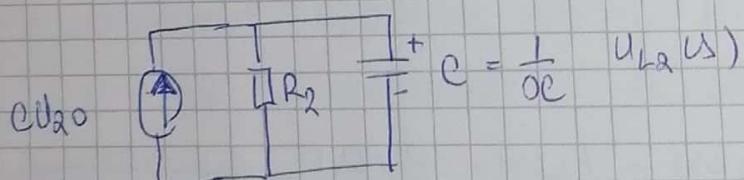
$$\text{d}a \quad t < 0 \Rightarrow u_2(t) = 0$$

K în poziția 2:

$$t' = t - t_0 \quad ; \quad t = t_0 \quad ; \quad t' = 0$$

$$u_2(t') \Big|_{t'=0} = u_2(t_0 - 0) = E (1 - e^{-\frac{t_0}{\zeta_1}}) = u_{20}$$

EТАПA V5.



$$U_{L2}(t) = C U_{20} \cdot \frac{R_2 \cdot \frac{1}{\sigma C}}{R_2 + \frac{1}{\sigma C}} \Rightarrow$$

$$\frac{R_2 \cdot \frac{1}{\sigma C}}{R_2 + \frac{1}{\sigma C}} = \Rightarrow U_{L2}(t) = C U_{20} \cdot \frac{R_2}{\sigma C R_2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{L2}(t) = C U_{20} \cdot \frac{R_2}{\sigma C R_2 + 1} \Rightarrow U_{L2}(t) = U_{20} \cdot \frac{R_2}{\sigma \zeta_2 + 1} =$$

$$= U_{20} \cdot \frac{1}{\sigma + \frac{1}{\zeta_2}} \Rightarrow$$

$$u_2(t') = \mathcal{L}^{-1} \{ U_{L2}(t) \} = U_{20} \frac{e^{\sigma t'}}{1 + \frac{1}{\sigma \zeta_2}} \Big|_{\sigma = \frac{1}{\zeta_2}} \Big|_{t' = t} =$$

$$\Rightarrow u_2(t') = u_{20} e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \sigma(t')$$

F22

ETAPA 8

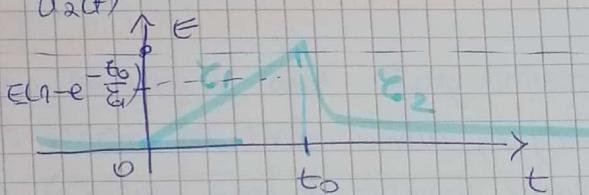
$$u_2(t) = E(n - e^{-\frac{t_0}{\tau_1}}) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_2}} \sigma(t-t_0) \quad t \in [t_0, \infty)$$

$$u_2(0-0) = 0$$

$$u_2(0+0) = 0$$

$$u_2(t_0-0) = E(n - e^{-\frac{t_0}{\tau_1}}).$$

$$u_2(t_0+0) = E(n - e^{-\frac{t_0}{\tau_1}}), n$$



Curs 4 → Metoda compactă

METODA COMPACTĂ

$$e^{\int R dt} \cdot \sigma(t) = e^{\int R dt} \sigma(t) \rightarrow \text{regim permanent}$$

Vom calcula răspunsul $y(t)$ ca regim permanent al lui $y^+(t)$

indirect extragând din $y^+(t)$ contribuția regimului transitoriu

evidențiat în rel (1).

$$y(t)|_{t \in [t_0, T]} = y^+(t)|_{t \in [t_0, T]}$$

$$= \sum_{\substack{\text{poli. fuzi.} \\ \text{din } H_2(s)}} \left[\frac{x_{L0}(s) + H_2(s)}{n - e^{-T_0}} e^{st} \right]_{t=t_0}^{t=T}$$

Reacția circuitului este causală, $y^+(t)$ când $t \in [t_0, T]$ va

rezulta doar ca răspuns la partea din $x'(t)$ situată între t_0 și T , adică $x_0(t)$.

$$y^+(t) \Big|_{t \in [0, T]}$$

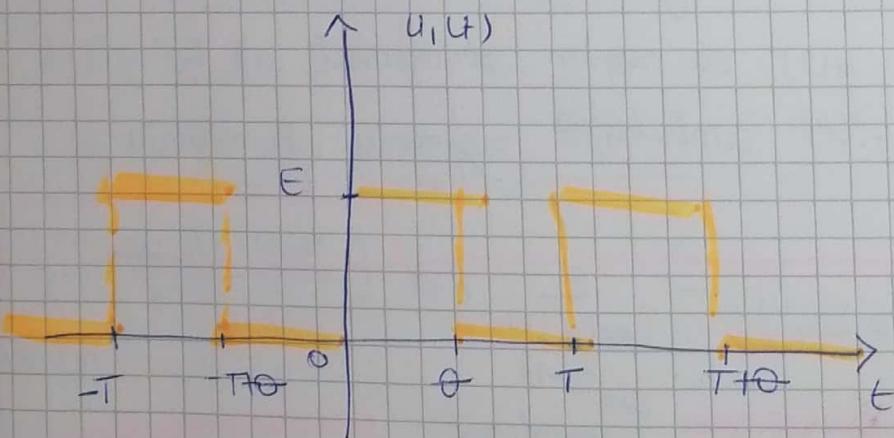
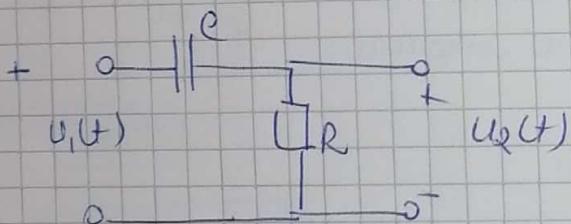
$$x^+(t) \Big|_{t \in [0, T]} = x_0(t)$$

$$y^+(t) \Big|_{t \in [0, T]} = L \{ x_0(t) \} \Big|_{t \in [0, T]} = \mathcal{L}^{-1} \{ x_0(s) \cdot H_L(s) \} \Big|_{t \in [0, T]}$$

$$y(t) \Big|_{t \in [0, T]} = \mathcal{L}^{-1} \{ x_0(s) \cdot H_L(s) \} \Big|_{t \in [0, T]} - \sum \text{Rez} \left[\frac{x_0(s) H_L(s)}{1 - e^{-Ts}} e^{sT} \right] + \text{termeni elintanti remanente}$$

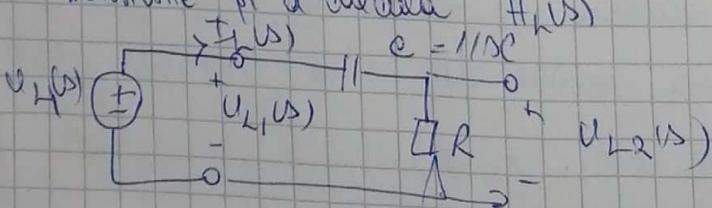
(3)

Pb1 Să se determine reprezentarea grafică a tensiunii $u_Q(t)$ al circuitalor, când schema reprezentată în fig 1, atunci când la intrare îi se aplică semnalul periodic când variația în timp reprezentată în fig 2.



{Pasi 1} → Parcurgim circuitul și aplicăm un generator ideal de

tenziune și o calculăm $H_L(s)$



$$H(s) = \frac{U_{L2}(s)}{U_L(s)}$$

$$I_2 | U_2$$

no determină cu unel dimbre
unul

$$U_2 = \frac{U_{L2}}{U_L} | I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{U_L}{+}$$

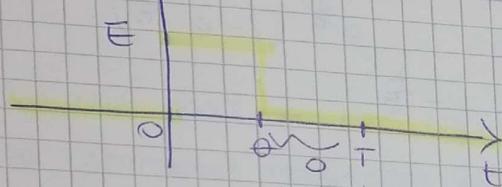
$$U_2 =$$

Divizor de tensiune

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{L2}(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} \cdot U_L(s) \\ \Rightarrow U_{L2}(s) = \frac{sCR}{sCR + 1} \cdot U_L(s) \end{array} \right.$$

$$H(s) = \frac{sCR}{sCR + 1} = \frac{G}{G + 1} \quad \left\{ G = R \cdot C \right\}$$

Pas 2: $U_{L0}(t)$



din asta avem că $U_{L0}(t) \in [0, \infty)$

$$U_{L0}(t) = \begin{cases} E, & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in (-\infty, 0] \cup \{0\} \end{cases}$$

$$U_{L0}(t) = E[\delta(t) - \delta(t-\theta)] \rightarrow \text{functie ferestă / Aplic Laplace}$$

$$\bullet U_{L0}(s) = E \cdot \frac{1}{s} - E \cdot \frac{1}{s} e^{-s\theta} \Rightarrow U_{L0}(s) = \frac{E}{s} (1 - e^{-s\theta})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{ U_{L0}(s) \cdot H(s) \} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{s} (1 - e^{-s\theta}) \cdot \frac{sG}{sG + 1} \right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ E(1 - e^{-s\theta}) \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{G}} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{s + \frac{1}{G}} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Ee^{-s\theta}}{s + \frac{1}{G}} \right\} \\ &= Ee^{-\frac{t}{G}} \delta(t) - Ee^{-\frac{(t-\theta)}{G}} \delta(t-\theta) \end{aligned}$$

$$\text{Avem polul: } \lambda_1 = -\frac{1}{G}$$

$$R_{\theta T} = -\frac{1}{6} \left[\frac{U_{H0}(s) + H_L(s)}{1 - e^{-sT}} e^{st} \right] = M = -\frac{1}{6} \left[\frac{\frac{E}{\theta} (1 - e^{-s\theta}) + \frac{sT}{s\theta + 1}}{1 - e^{-sT}} e^{st} \right]$$

$$= \frac{E(1 - e^{\frac{-\theta}{6}}) e^{-\frac{t}{6}}}{1 - e^{\frac{T}{6}}} \\ u_2(t) \Big|_{t \in [0, T]} = E e^{-\frac{t}{6}} - E e^{-\frac{(t-\theta)}{6}} + (t-\theta) - \frac{E(1 - e^{-\frac{\theta}{6}}) e^{-\frac{t}{6}}}{1 - e^{\frac{T}{6}}}$$

$\bullet t \in (0, \theta)$

$$\bullet u_2(t) = E \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t}{6}} - \frac{t}{6} e^{\frac{\theta}{6}}}{1 - e^{\frac{T}{6}}} = \frac{E e^{\frac{T}{6}} (1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{6}})}{e^{\frac{T}{6}} (1 - e^{-\frac{T}{6}})} - \frac{t}{6}$$

$$\Rightarrow u_2(t) = E \cdot \frac{1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{6}}}{1 - e^{-\frac{T}{6}}} e^{-\frac{t}{6}}$$

$\bullet t \in [0, T]$

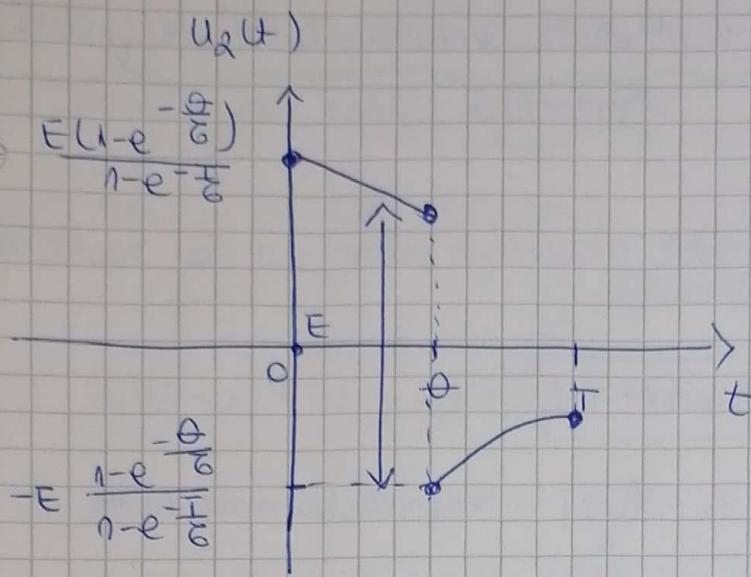
$$\bullet u_2(t) = -\frac{E (1 - e^{-\frac{\theta}{6}}) e^{-\frac{(t-\theta)}{6}}}{1 - e^{-\frac{T}{6}}}$$

limite la $s \rightarrow 0$:

$$u_2(\theta - 0) - u_2(\theta + 0) = E \cdot \frac{1 - e^{-\frac{(\theta-\theta)}{6}} - \frac{(\theta-\theta)}{6} e^{\frac{\theta}{6}}}{1 - e^{-\frac{T}{6}}} \\ = E \cdot \frac{(-e^{-\frac{\theta}{6}} + 1)}{1 - e^{-\frac{T}{6}}} = E$$

limita la $s \rightarrow \infty$

$$u_2(0+0) - u_2(0-0) = u_2(0+0) - u_2(T-0) = E \cdot \frac{1 - e^{-\frac{(T-\theta)}{6}}}{1 - e^{-\frac{T}{6}}} \cdot 1 + \\ + E \frac{1 - e^{-\frac{\theta}{6}}}{1 - e^{-\frac{T}{6}}} \cdot e^{-\frac{(T-\theta)}{6}} = E$$



DETERMINAREA SALI LA SEMNALE MODULATE

Răspunsul poate fi înțeles folosind transformarea Fourier.

Dacă semnalul modulator este o sumă de oscilații armonice (exemplu: semnal periodic sarcină), spectrul semnalului modulat este discret și se poate aplica metoda armonică. Această metodă nu este comodă în aplicații, atunci când spectrul semnalului modulator conține multe componente. (exemplu semnalele HA modulate de o sumă cu multe oscilații armonice însemnale MP, MF chiar în cazul modulației cu o singură oscilație armonică și produsele de modulație lăsării de frecvență).

De cele mai multe ori este necesar să se facă un terapie din care este calculat răspunsul întrucât se dorește determinarea mesajului transmis, care este conținut în variația amplitudinii, frecvenței sau fazelor inițiale a răspunsului. Cum aceasta operatie este laborioasă => se stabilește un procedeu capabil să determine direct variația amplitudinii, frecvenței sau fazelor răspunsului în funcție de variația amplitudinii frecuvenței sau fazelor semnalului modulator ca mijloc de transport al mesajului (portator).