3.7 PROBLEME REZOLVATE

3.1.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 3.1.R-a, în care se cunosc $u(t) = 90\sqrt{2}\sin\omega t + 24\sqrt{2}\sin 3\omega t$ [V], R=100Ω, $\omega L = 8\Omega$, $1/\omega C = 72\Omega$ (pentru fundamentală). Se cer:

a) Să se determine valorile instantanee ale curenţilor $i(t)$ $i_L(t)$ $i_C(t)$.

b) Bilanţul puterilor şi factorul de putere.

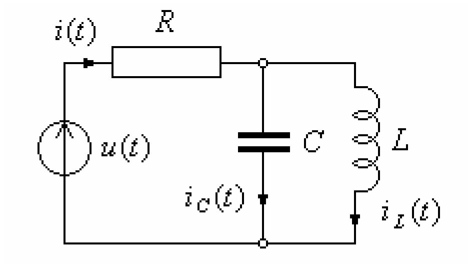


Fig.3.1.R-a

Observăm că tensiunea furnizată de sursă de alimentare conţine armonici de ordinul (1) şi (3), cu următoarele valori efective:

$$\underline{U}^{(1)} = 90\text{V} \qquad \underline{U}^{(3)} = 24\text{V}$$

Determinarea valorii instantanee a curenţilor

Impedanţele complexe echivalente pe armonici (1 si 3) sunt:

$$\underline{Z}_e^{(1)} = R + \frac{j\omega L\left(-\frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = 9(1+j) \qquad \underline{Z}_e^{(3)} = R + \frac{j3\omega L\left(-\frac{1}{3\omega C}\right)}{j3\omega L - \frac{j}{3\omega C}} = \infty$$

Expresia în complex a curenţilor prin sursa de alimentare $i(t)$ pentru fiecare armonică:

$$\underline{I}^{(1)} = \frac{\underline{U}^{(1)}}{\underline{Z}_e^{(1)}} = 5(1-j) = 5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-j\pi/4}\ \text{A} \qquad \underline{I}^{(3)} = \frac{\underline{U}^{(3)}}{\underline{Z}_e^{(3)}} = 0\text{A}$$

$$i^{(1)}(t) = 10\sin(\omega t - \pi/2)\ \text{A} \qquad i^{(3)}(t) = 0\text{A}$$

Curenţii prin bobina şi condensator pentru armonica (1) se determina folosind divizorul de curent:

$$\underline{I}_L^{(1)} = \underline{I}^{(1)} \frac{-\dfrac{1}{\omega C}}{j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}} = \frac{45}{8}(1+j) = \frac{45\sqrt{2}}{8}\mathrm{e}^{-j\pi/4} \quad \Rightarrow \quad i_L^{(1)}(t) = \frac{45}{5}\sin(\omega t - \pi/4)\ \mathrm{A}$$

$$\underline{I}_C^{(1)} = \underline{I}^{(1)} \frac{j\omega L}{j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}} = \frac{5}{8}(-1+j) = \frac{5\sqrt{2}}{8}\mathrm{e}^{j3\pi/4} \quad \Rightarrow \quad i_C^{(1)} = \frac{5}{4}\sin(\omega t + 3\pi/4)\ \mathrm{A}$$

Datorită faptului că pentru armonica (3) impedanța grupului *LC* paralel este infinită (rezonanța paralel), toată tensiunea de intrare este aplicată acestor elemente.

Prin urmare curenții prin bobină şi condensator vor fi:

$$\underline{I}_L^{(3)} = \frac{\underline{U}^{(3)}}{j3\omega L} = -j = \mathrm{e}^{-j\pi/2} \quad \Rightarrow \quad i_L^{(3)}(t) = \sqrt{2}\sin(3\omega t - \pi/2)\ \mathrm{A}$$

$$\underline{I}_C^{(3)} = \frac{\underline{U}^{(3)}}{\left(-\dfrac{j}{3\omega C}\right)} = j = \mathrm{e}^{j\pi/2} \quad \Rightarrow \quad i_C^{(3)}(t) = \sqrt{2}\sin(3\omega t + \pi/2)\ \mathrm{A}$$

Valorile instantanee ale curenților vor fi:

$$i(t) = i^{(1)}(t) + i^{(3)}(t) = 0 + 10\sin(\omega t - \pi/4) = 10\sin(\omega t - \pi/4)\ \mathrm{A}$$

$$i_L(t) = i_L^{(1)}(t) + i_L^{(3)}(t) = \frac{45}{4}\sin(\omega t - \pi/4) + \sqrt{2}\sin(3\omega t - \pi/2)\ \mathrm{A}$$

$$i_C(t) = i_C^{(1)}(t) + i_C^{(3)}(t) = \frac{5}{4}\sin(\omega t + 3\pi/4) + \sqrt{2}\sin(3\omega t + \pi/2)\ \mathrm{A}$$

Notă:

Circuitul dat este de tip "*buşon*" filtrând armonica de ordin trei a curentului, fiind îndeplinită condiția: $3\omega L = \dfrac{1}{3\omega C}$.

Rezultatul este valabil pentru o armonică de ordinul *n*, caz în care trebuie îndeplinită condiția: $n\omega L = \dfrac{1}{n\omega C}$ sau $n = \sqrt{\dfrac{X_C}{X_L}}$ (X_L, X_C fiind corespunzătoare fundamentalei).

<u>*Bilantul puterilor*</u>

Pentru a putea efectua bilantul puterilor evaluăm puterea activă şi reactivă consumată de elementele pasive de circuit, respectiv puterea activă şi reactivă furnizată de sursele (sursa) de alimentare.

Puterea activă este consumată de rezistența *R* din circuit:

$$P_c = R(I^{(1)^2} + I^{(3)^2}) = 450 \text{ W}$$

Puterea reactivă este consumată de grupul LC pentru fiecare armonică:

$$Q_c = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I^{(1)^2} + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right) I^{(3)^2} = 450 \text{ VAR}$$

Puterile debitate de sursele (sursa) de alimentare sunt:

$$P_d = U^{(1)} I^{(1)} \cos\varphi^{(1)} + U^{(3)} I^{(3)} \cos\varphi^{(3)} \qquad Q_d = U^{(1)} I^{(1)} \sin\varphi^{(1)} + U^{(3)} I^{(3)} \sin\varphi^{(3)}$$

În relațiile de mai sus defazajele sunt:

$$\varphi^{(1)} = \varphi_U^{(1)} - \varphi_I^{(1)} = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \varphi^{(3)} = \varphi_U^{(3)} - \varphi_I^{(3)} = 0 - 0 = 0$$

Prin urmare puterile debitate vor fi:

$$P_d = 450 \text{ W} \equiv P_c \qquad Q_d = 450 \text{ VAR} \equiv Q_c$$

Puterea aparentă a sursei de alimentare este: $S = UI$, unde:

$$U = \sqrt{U^{(1)^2} + U^{(3)^2}} = \sqrt{8676} \qquad I = \sqrt{I^{(1)^2} + I^{(3)^2}} = \sqrt{50} \qquad S = UI = \sqrt{433800} \approx 659\text{VA}$$

Puterea deformantă este:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{29281} \approx 171 \text{ VAD}$$

Factorul de putere va fi: $k_P = \dfrac{P}{S} = 0.86$.

3.2.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 3.2.R-a, în care se cunosc $u(t) = 60 + 120\sqrt{2}\sin\omega t + 60\sqrt{2}\sin 3\omega t$ [V], R_1=R_2=R_3=3Ω, $\omega L_1 = 3\Omega$, $1/\omega C_1 = 9\Omega$, $\omega L_2 = 1\Omega$, $1/\omega C_3 = 9\Omega$ (pentru fundamentala). Se cer:

a) Să se determine valoarea instantanee a curentului /curenților $i(t)$.
b) Bilanțul puterilor şi factorul de putere.
c) Factorul de distorsiune al curentului prin sursa de alimentare.

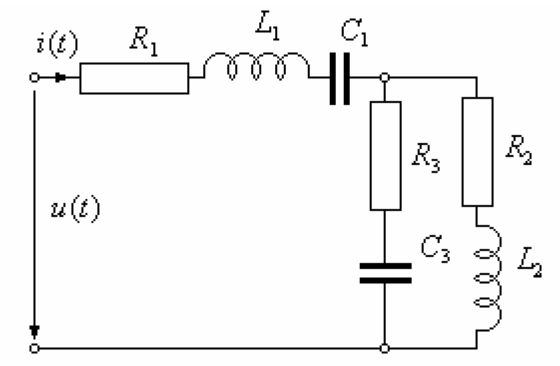


Fig.3.2.R-a

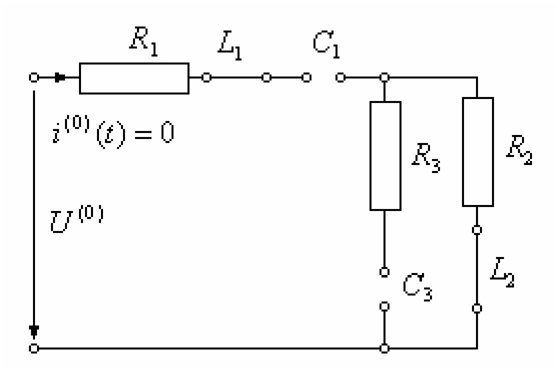


Fig.3.2.R-b

Pentru armonica de ordin (0) –componenta de curent continuu a tensiunii – $U^{(0)} = 60\text{V}$ valoarea curentului corespunzător este $I^{(0)} = 0\text{ A}$, datorită prezenței condensatorului C_1 care întrerupe circuitul.(Fig.3.2.R-b).

Pentru componentele de curent alternativ ale tensiunii de alimentare observăm că grupul de elemente (R_2, L_2) si (R_3, L_3) formează un circuit complet aperiodic, adică are o impedanță ce nu depinde de pulsație şi are valoarea egală cu valoarea rezistenței de pe cele două laturi.

Se poare uşor demonstra că în cazul circuitelor ce conțin grupuri (R, L) si (R, C) serie sau paralel conectate, fie paralel, fie serie, şi este îndeplinită condiția $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ impedanța acestora pentru orice frecvență este *R*. (Fig.3.2.R-c).

Prin urmare, se poate echivala circuitul cu un circuit serie format numai din bobina L_1, condensatorul C_1 si rezistența $R = R_1 + R_2 = \Omega$.(Fig.3.2.R-d).

Aşadar, pentru armonica de ordinul *k* vom avea în complex valoarea curentului:

$$\underline{I}^{(k)} = \frac{\underline{U}^{(k)}}{R_1 + R_2 + j\left(k\omega L_1 - \frac{1}{k\omega C_1}\right)}$$

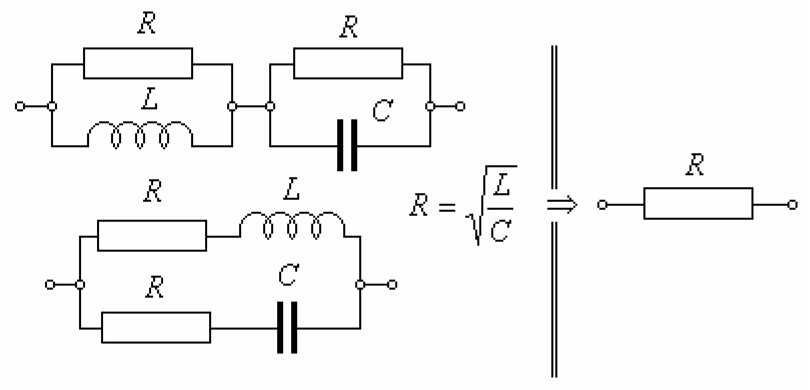


Fig.3.2.R-c

Circuite aperiodice.

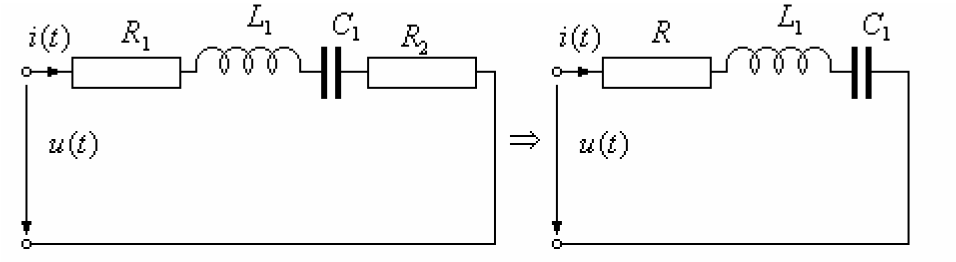


Fig.3.2.R-d Echivalare circuit.

Pentru armonica (1) k=1 vom obține:

$$\underline{I}^{(1)} = 10(1+j) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\pi/4} \quad \Rightarrow \quad i^{(1)}(t) = 20\sin(\omega t + \pi/4)\ \mathrm{A}$$

Pentru armonica (3) k=3 vom obține:

$$\underline{I}^{(3)} = 5(1-j) = 5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-j\pi/4} \quad \Rightarrow \quad i^{(3)}(t) = 10\sin(3\omega t - \pi/4)\ \mathrm{A}$$

Aşadar, curentul căutat este:

$$i(t) = i^{(1)}(t) + i^{(3)}(t) = 20\sin(\omega t + \pi/4) + 10\sin(\omega t - \pi/4)\ \mathrm{A}$$

Valorile efective ale curentului şi tensiunii nesinusoidale sunt:

$$I = \sqrt{I^{(0)} + I^{(1)2} + I^{(3)2}} = 5\sqrt{10}\ \mathrm{A} \qquad U = \sqrt{U^{(0)} + U^{(1)2} + U^{(3)2}} = 60\sqrt{6}\ \mathrm{V}$$

Bilanțul puterilor

Pentru a putea efectua bilanțul puterilor evaluăm puterea activă şi reactivă consumată de elementele pasive de circuit, respectiv puterea activă şi reactivă furnizată de sursele (sursa) de alimentare.

Puterea activă este consumată de rezistențele R_1 si R_2 :

$$P_c = (R_1 + R_2)\left(I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(3)2}\right) = 1500\ \mathrm{W}$$

Puterea reactivă este consumată pentru fiecare armonică:

$$Q_c = \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)I^{(1)2} + \left(3\omega L_1 - \frac{1}{3\omega C_1}\right)I^{(3)2} = -900\ \mathrm{VAR}$$

Puterile debitate de sursele (sursa) de alimentare sunt:

$$P_d = U^{(1)} I^{(1)} \cos\varphi^{(1)} + U^{(3)} I^{(3)} \cos\varphi^{(3)} \qquad Q_d = U^{(1)} I^{(1)} \sin\varphi^{(1)} + U^{(3)} I^{(3)} \sin\varphi^{(3)}$$

În relațiile de mai sus defazajele sunt:

$$\varphi^{(1)} = \varphi_U^{(1)} - \varphi_I^{(1)} = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \qquad \varphi^{(3)} = \varphi_U^{(3)} - \varphi_I^{(3)} = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Prin urmare puterile debitate vor fi:

$$P_d = 1500 \text{ W} \equiv P_c \qquad Q_d = -900 \text{ VAR} \equiv Q_c$$

Puterea aparentă a sursei de alimentare:

$$S = UI = 600\sqrt{15} \approx 2324 \text{ VA}$$

Puterea deformantă este:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \approx 1990 \text{ VAD}$$

Factorul de putere va fi: $k_P = \dfrac{P}{S} = 0.707$.

Factorul de distorsiune al curentului

Pentru a putea evalua factorul de distorsiune trebuie să determinăm valoarea reziduului deformant I_d al curentului precum şi componenta sa alternativă I_a .

$$I_d = \sqrt{I^2 - I^{(1)2}} = 5\sqrt{2} \qquad I_a = \sqrt{I^2 - I^{(0)2}} = 5\sqrt{10}$$

Prin urmare, valoarea coeficientului de distorsiune este:

$$k_{D_i} = \frac{I_d}{I_a} = \frac{\sqrt{I^2 - I^{(1)2}}}{\sqrt{I^2 - I^{(0)2}}} = 0.707$$

3.3.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 3.3.R-a, în care se cunosc $e(t) = 3 + 12\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/2)$ [V], $j(t) = 10\sqrt{2}\sin 3\omega t$ R=3Ω, $\omega L = 2\Omega$, $1/\omega C = 6\Omega$ (pentru fundamentală). Se cer:

a) Să se determine valoarea instantanee şi factorul de distorsiune pentru curentul ce străbate sursa de tensiune $i(t)$.

b) Puterea activă şi reactivă consumată, respectiv debitată de circuit.

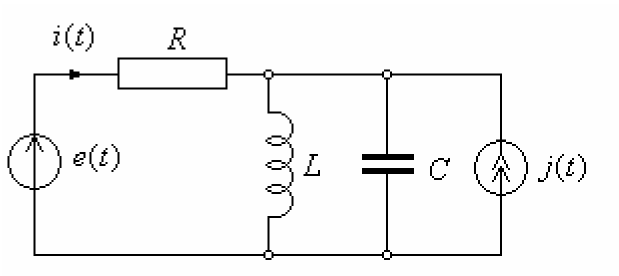


Fig.3.3.R-a

Deoarece circuitul conţine două surse de energie (una de tensiune şi una de curent) de diverse pulsaţii, vom rezolva problema, având în vedere liniaritatea elementelor de circuit, folosind metoda suprapunerii efectelor (superpoziţiei).

Vom considera prin urmare mai întâi prezenţa sursei de tensiune în cazul în care sursa de curent este pasivizată, iar apoi prezenţa sursei de curent în cazul în care sursa de tensiune este pasivizată.

1) <u>Considerăm sursa de tensiune (sursa de curent pasivizată)</u>

În acest caz observăm că sursa de tensiune $e(t) = 3 + 12\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/2)$, conţine două armonici, o armonică de ordin (0) (curent continuu) $E^{(0)} = 3$ V şi una de ordinul (1) (curent alternativ) $\underline{E}^{(1)} = 12\,\mathrm{e}^{j\pi/2} = 12j$ V.

Pentru fiecare dintre aceste armonici ale sursei de tensiune vom determina curentul prin sursa de tensiune.

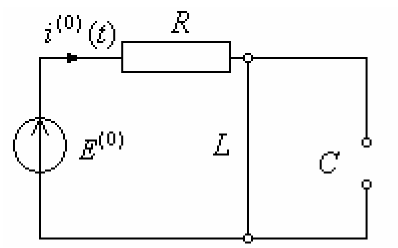


Fig.3.3.R-b

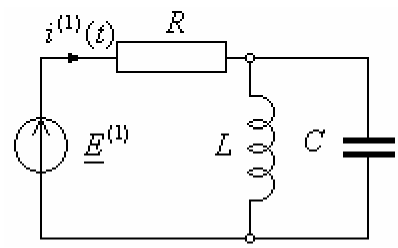


Fig.3.3.R-c

Pentru cazul în care k=0 curentul este (Fig.3.3.R-b):

$$i^{(0)} = \frac{E^{(0)}}{R} = 1\ \text{A}$$

Pentru cazul în care k=1 curentul este (Fig.3.3.R-c):

$$\underline{I}^{(1)} = \frac{\underline{E}^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = 3(1+j); \quad \underline{Z}^{(1)} = R + \frac{j\omega L\left(-\dfrac{j}{\omega C}\right)}{j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}} = \frac{3}{2}(1-j)$$

Deci, valoarea în domeniul timp a curentului prin sursa de tensiune este:

$$i^{(1)}(t) = 4\sin(\omega t + \pi/4)\ \text{A}$$

Este util de determinat în această etapă şi curenţii de armonică (1) care străbat bobina şi condensatorul deoarece vor fi folosiţi în evaluarea puterilor consumate.

Folosind divizorul de curent, curenţii prin bobină şi condensator vor fi:

$$\underline{I}_L^{(1)} = \underline{I}^{(1)} \frac{\left(-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}} = 3(1+j) = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\pi/4} \qquad \underline{I}_C^{(1)} = \underline{I}^{(1)} \frac{j\omega L}{j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}} = -(1+j) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j5\pi/4}$$

2) Considerăm sursa de curent (sursa de tensiune pasivizată)

Sursa de curent prezintă numai o singură componentă de armonică (3) care injectează în circuitul paralel RLC un curent de armonică (3) $\underline{J} = 10$ A (Fig.3.3.R-d).

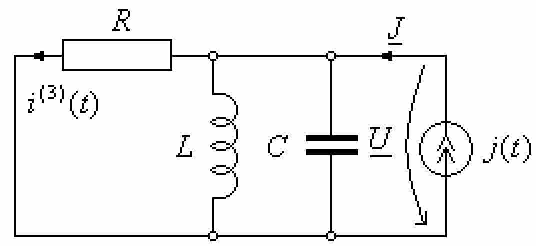


Fig.3.3.R-d

Pentru a putea determina curenţii prin elementele de circuit va trebui să evaluăm tensiunea la bornele acestora care este comună (elementele fiind conectate în paralel); în plus această tensiune este şi tensiunea la bornele sursei de curent.

$$\underline{U} = \underline{J}/\underline{Y} = 15(1-j) = 15\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4} \quad \Rightarrow \quad u^{(3)}(t) = 30\,sin(3\omega t - \pi/4)\ \text{V} \ \text{ unde:}$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{j3\omega L} + \frac{1}{-\dfrac{1}{3\omega C}} = \frac{1+j}{3}\ \mathrm{S}$$

Curentul prin rezistența R va fi :

$$\underline{I}^{(3)} = \frac{\underline{U}}{R} = 5(1-j) = 5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-j\pi/4} \quad \Rightarrow \quad i^{(3)}(t) = 10\sin(3\omega t - \pi/4)\ \mathrm{A}$$

De menționat că acest curent are sensul contrar celor de armonică (0) si (1); din această cauză el va fi adăugat cu semnul minus la curentul total.

Ca şi în cazul pasivizării sursei de curent determinăm şi curenții prin bobină şi condensator pentru această armonică:

$$\underline{I}_L^{(3)} = \frac{\underline{U}}{j3\omega L} = \frac{5}{2}(-1-j) = \frac{5}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j5\pi/4} \qquad \underline{I}_C^{(3)} = \frac{\underline{U}}{-\dfrac{j}{3\omega C}} = \frac{15}{2}(1+j) = \frac{15}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\pi/4}$$

Aşadar, valoarea în instantaneu a curentlui prin sursa de tensiune este:

$$i(t) = i^{(0)}(t) + i^{(1)}(t) - i^{(3)}(t) = 1 + 4\sin(\omega t + \pi/4) - 10\sin(3\omega t - \pi/4)\ \mathrm{A}$$

Folosind proprietatea $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$, expresia în instantaneu a curentului *i(t)* este:

$$i(t) = i^{(0)}(t) + i^{(1)}(t) - i^{(3)}(t) = 1 + 4\sin(\omega t + \pi/4) + 10\sin(3\omega t + 3\pi/4)\ \mathrm{A}$$

Pentru a putea evalua factorul de distorsiune trebuie să determinăm valoarea efectiva a curentului I , valoarea reziduului deformant I_d , precum şi componenta sa alternativă I_a .

$$I_d = \sqrt{I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(3)2}} = \sqrt{59}\ \mathrm{A}$$

$$I_d = \sqrt{I^2 - I^{(0)2} - I^{(1)2}} = 5\sqrt{2}\ \mathrm{A} \qquad I_a = \sqrt{I^2 - I^{(0)2}} = \sqrt{58}\ \mathrm{A}$$

Prin urmare, valoarea coeficientului de distorsiune este:

$$k_{D_i} = \frac{I_d}{I_a} = \frac{\sqrt{I^2 - I^{(0)2} - I^{(1)2}}}{\sqrt{I^2 - I^{(0)2}}} = 0.92$$

Bilanțul puterilor

Pentru a putea efectua bilanțul puterilor evaluăm puterea activă şi reactivă consumată de elementele pasive de circuit *RLC* respectiv puterea activă şi reactivă furnizată de sursele de alimentare – sursa de tensiune respectiv, sursa de curent.

Puterea activă este consumată de rezistenta R :

$$P_c = R\left(I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(3)2}\right) = 177 \text{ W}$$

Puterea reactivă este consumată pentru fiecare armonică:

$$Q_c = \omega L I_L^{(1)2} + 3\omega L I_L^{(3)2} + \left(-\frac{1}{\omega C}\right) I_C^{(1)2} + \left(-\frac{1}{3\omega C}\right) I_C^{(3)2} = -126 \text{ VAR}$$

Puterile debitate de sursele de alimentare sunt:

Purerea activă debitată de sursa de tensiune:

$$P_e = E^{(0)} I^{(0)} + E^{(1)} I^{(1)} \cos\varphi^{(1)} = 27 \text{ W} \qquad \varphi^{(1)} = \varphi_E^{(1)} - \varphi_I^{(1)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Puterea activă debitată de sursa de curent:

$$P_j = UJ \cos\varphi^{(3)} = 150 \text{ W} \qquad \varphi^{(3)} = \varphi_U - \varphi_J = -\frac{\pi}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4}$$

Prin urmare, puterea totală activă debitată de sursele de alimentare este:

$$P_d = P_e + P_j = 27 + 150 = 177 \text{ W} \equiv P_c$$

Puterea reactivă debitată de sursa de tensiune:

$$Q_e = E^{(1)} I^{(1)} \sin\varphi^{(1)} = 24 \text{ VAR} \qquad \varphi^{(1)} = \varphi_E^{(1)} - \varphi_I^{(1)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Puterea reactivă debitată de sursa de curent:

$$Q_j = UJ \sin\varphi^{(3)} = -150 \text{ W} \qquad \varphi^{(3)} = \varphi_U - \varphi_J = -\frac{\pi}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4}$$

Puterea totală reactivă debitată de sursele de alimentare este:

$$Q_d = Q_e + Q_j = 24 - 150 = -126 \text{ W} \equiv Q_c$$

Bilanțul puterilor este sastisfacut; puterile totale active şi reactive consumate sunt egale cu puterile totale active şi reactive debitate.

Dacă se doresc puterile aparente şi deformante se calculează pentru fiecare sursă de energie în parte.

$$S_e = EI$$
$$E = \sqrt{E^{(0)2} + E^{(1)2}}$$
$$I = \sqrt{I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(3)2}}$$

$$S_j = UJ$$
$$U = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(3)2}}$$
$$J = J$$

Puterile deformante:

$$D_e = \sqrt{S_e^2 - P_e^2 - Q_e^2}$$

$$D_j = \sqrt{S_j^2 - P_j^2 - Q_j^2}$$

3.4.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 3.4.R-a, în care se cunosc $e(t) = 4E \sin \omega t$ [V], $E_0 = 2E$ [V], $R = \omega L = 1/\omega C$. Se cer:

a) Să se determine valorile instantanee ale curentului prin bobină şi tensiunii la bornele condensatorului $i_L(t)$ $u_C(t)$.
b) Indicațiile voltmetrului respectiv, ampermetrului (electrodinamice având impedanțele interne infinită respectiv, nulă).
c) Bilanțul puterilor (activă şi reactivă).

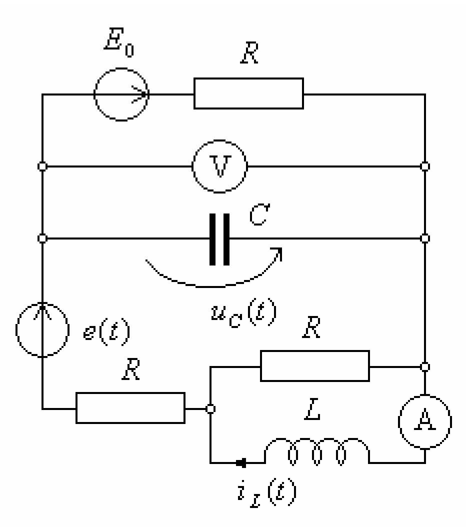


Fig.3.4.R-a

Datorită prezenței a două surse de energie – o sursă de tensiune continuă şi o sursă de tensiune alternativă vom rezolva circuitul prin metoda suprapunerii efectelor.

1) *Pasivizăm sursa de tensiune alternativa e(t).*

În acest caz curentul prin bobină respectiv, tensiunea la bornele condensatorului va fi (Fig.3.4.R-b):

$$I_L^{(0)} = \frac{E_0}{2R} = \frac{2E}{2R} = \frac{E}{R} \qquad\qquad U_C^{(0)} = -RI_L^{(0)} = -E$$

2) *Pasivizăm sursa de tensiune continuă E_0.*

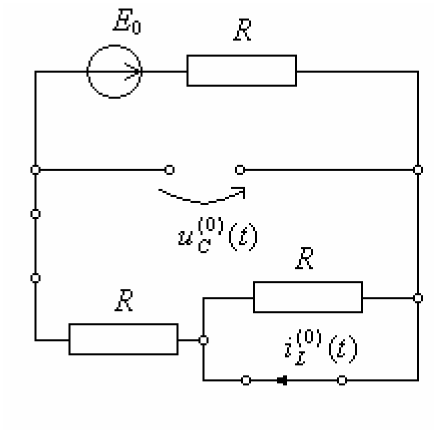


Fig.3.4.R-b

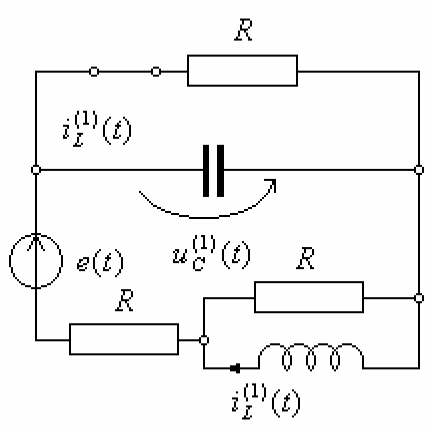


Fig.3.4.R-c

În acest caz (Fig.3.4.R-b) circuitul este unul de curent alternativ. Observăm că datorită egalității $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, grupul (R,L) respectiv (R,C) formează un circuit aperiodic (vezi. 3.2.R-c) de impedanță R.

Prin urmare curentul prin circuit va fi:

$$\underline{I}^{(1)} = \frac{\underline{E}^{(1)}}{2R} = \frac{4E}{\sqrt{2}2R} = \frac{E}{R}\sqrt{2}$$

Pentru a determina curentul prin bobină respectiv, tensiunea pe condensator, vom aplica divizorul de curent:

$$\underline{I}_L^{(1)} = \underline{I}^{(1)}\frac{R}{R + j\omega L} = \frac{E(1-j)}{\sqrt{2}R} = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-j\pi/4} \qquad \underline{I}_C^{(1)} = \underline{I}^{(1)}\frac{R}{R - j/\omega C} = \frac{E(1+j)}{\sqrt{2}R} = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{j\pi/4}$$

Am folosit relația: $R = \omega L$ Am folosit relația: $R = 1/\omega C$

Expresia tensiunii la bornele condensatorului este:

$$\underline{U}_C = \left(-j/\omega C\right)\underline{I}_C^{(1)} = \frac{E(1-j)}{\sqrt{2}} = E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}$$

Valorile în instantaneu vor fi:

$$i_L^{(1)} = \frac{E}{R}\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/4) \qquad u_C^{(1)} = E\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/4)$$

Determinăm şi curentul prin rezistenţa aflată în paralel cu bobina notat $\underline{I}_{RL}^{(1)}$, respectiv curentul prin rezistenţa aflată în paralel cu condensatorul notat $\underline{I}_{RC}^{(1)}$.

$$\underline{I}_{RL}^{(1)} = \underline{I}^{(1)} - \underline{I}_L^{(1)} = \frac{E}{R\sqrt{2}}(1+j) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$$
$$\underline{I}_{RC}^{(1)} = \underline{I}^{(1)} - \underline{I}_C^{(1)} = \frac{E}{R\sqrt{2}}(1-j) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}$$

Curentul prin bobină şi tensiunea la bornele condensatorului vor fi:

$$i_L(t) = i_L^{(0)}(t) + i_L^{(1)}(t) = \frac{E}{R} + \frac{E}{R}\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/4) \text{ A}$$
$$u_C(t) = u_C^{(0)}(t) + u_C^{(1)}(t) = -E + E\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/4) \text{ V}$$

Indicaţia aparatelor de masură

Aparatele de masură indică valoarea efectivă a mărimilor de măsurat.
Voltmetrul va indica: $U_C = \sqrt{U_C^{(0)2} + U_C^{(1)2}} = \sqrt{E^2 + E^2} = E\sqrt{2}$ [V].
Ampermetrul va indica: $I_L = \sqrt{I_L^{(0)2} + I_L^{(1)2}} = \sqrt{\left(\frac{E}{R}\right)^2 + \left(\frac{E}{R}\right)^2} = \frac{E}{R}\sqrt{2}$ [A].

Bilanţul puterilor

Pentru a putea efectua bilanţul puterilor evaluăm puterea activă şi reactivă consumată de elementele pasive de circuit respectiv, puterea activă şi reactivă furnizată de sursele de alimentare.

Puterea activă este consumată de rezistenţele din circuit:

$$P_c = (R+R)I^{(0)2} + RI^{(1)2} + RI_{RL}^{(1)2} + RI_{RC}^{(1)2} = \frac{6E^2}{R} \text{ W}$$

Puterea reactivă consumată de bobină şi de condensator:

$$Q_c = \omega L I^{(1)2} - \frac{1}{\omega C} I^{(1)2} = 0 \text{ VAR}$$

Puterile debitate de sursele de alimentare sunt:
Puterile active debitate de sursa de curent continuu şi sursa de curent alternativ:

$$P_{E_0} = E_0 I^{(0)} = 2E\frac{E}{R} = \frac{2E^2}{R} \qquad P_e = E^{(1)} I^{(1)} \cos\varphi^{(1)} = \frac{4E}{\sqrt{2}}\frac{E\sqrt{2}}{R}1 = \frac{4E^2}{R}$$

$$\varphi^{(1)} = \varphi_e^1 - \varphi_i^{(1)} = 0$$

Activa debitată este:

$$P_d = P_{E_0} + P_e = \frac{6E^2}{R} \equiv P_c$$

Puterea reactivă este furnizată numai de sursa de alimentare de curent alternativ:

$$Q_d = Q_e = E^{(1)} I^{(1)} \sin\varphi^{(1)} = 0 = Q_c$$

Bilanțul puterilor a fost verificat.

3.5.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 3.5.R-a, în care se cunosc $e(t) = 40 + 20\sqrt{2}\cos 2\omega t$ [V]; $j(t) = 1 + 2\sqrt{2}\sin(2\omega t - \pi/2)$ [A]; $R_1 = R_4 = 20\Omega$; $\omega L_1 = \omega L_2 = \omega L_3 = 10\Omega$; $\omega L_{12} = \omega L_{23} = 5\Omega$; $1/\omega C_3 = 40\Omega$. Se cer:

a) Să se determine expresiile curenților prin laturi.
b) Bilanțul puterilor (activă şi reactivă).

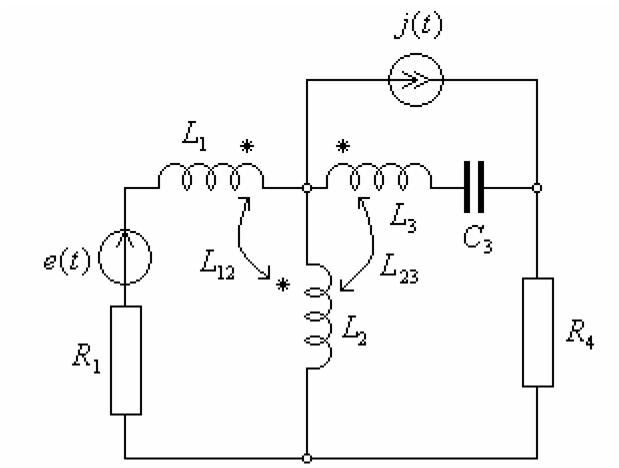


Fig.3.5.R-a

Pentru determinarea curenților se aplică teorema superpoziției.

Pentru determinarea componentelor de curent continuu, cu $E^{(0)} = 40\text{ V}$; $J^{(0)} = 1\text{ A}$ conform Fig.3.5.R-b rezultă:

$$I_1^{(0)} = \frac{E^{(0)}}{R_1} = 2\text{ A};\quad I_4^{(0)} = J^{(0)} = 1\text{ A};\quad I_2^{(0)} = I_1^{(0)} - I_4^{(0)} = 1\text{ A};\quad I_3^{(0)} = 0\text{ A}$$

Pentru determinarea componentelor pe armonica doi se utilizează metoda curenților ciclici cu următoarele surse de excitație:

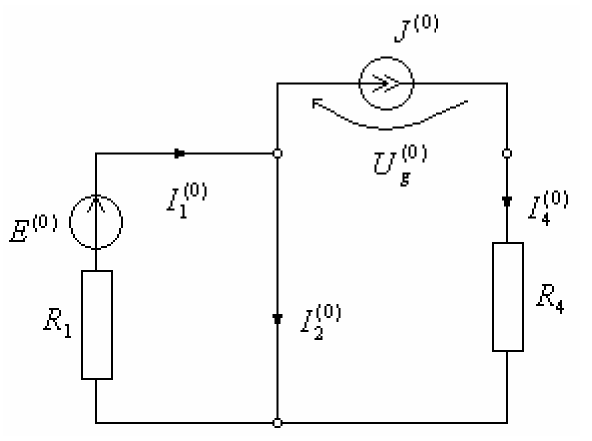
$$e^{(2)}(t) = 20\sqrt{2}\cos 2\omega t = 20\sqrt{2}\sin(2\omega t + \pi/2) \quad\Rightarrow\quad \underline{E}^{(2)} = 20\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = 20j\text{ V}$$
$$j^{(2)}(t) = 2\sqrt{2}\sin(2\omega t - \pi/2) \quad\Rightarrow\quad \underline{J}^{(2)} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = -2j\text{ A}$$

Adoptând pentru curenții ciclici sensurile ca în Fig.3.5.R-c ecuațiile vor fi:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}I_1^{'(2)} + \underline{Z}_{12}I_2^{'(2)} + \underline{Z}_{13}I_3^{'(2)} = \underline{E}_1^{'(2)} \\ \underline{Z}_{21}I_1^{'(2)} + \underline{Z}_{22}I_2^{'(2)} + \underline{Z}_{23}I_3^{'(2)} = \underline{E}_{21}^{'(2)} \\ \underline{Z}_{31}I_1^{'(2)} + \underline{Z}_{32}I_2^{'(2)} + \underline{Z}_{33}I_3^{'(2)} = \underline{E}_1^{'(3)} \end{cases}$$

Având în vedere că $\underline{Z}_{33} = \infty$, ultima ecuație este echivalentă cu $I_3^{'(2)} = \underline{J}^{(2)} = -2j\text{ A}$.
Astfel:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j(2\omega L_1 + 2\omega L_2 - 4\omega L_{12}) \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{12} = j(2\omega L_2 - 2\omega L_{12} - 2\omega L_{23}) \quad \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -j\omega L_{23}$$
$$\underline{Z}_{22} = R_4 + j\left(2\omega L_2 + 2\omega L_3 - \frac{1}{2\omega C_3} - 4\omega L_{23}\right) \quad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = j\left(2\omega L_3 - \frac{1}{2\omega C_3} - 2\omega L_{23}\right)$$
$$\underline{E}_1^{'(2)} = \underline{E}^{(2)} = 20j;\quad \underline{E}_2^{'(2)} = 0.$$



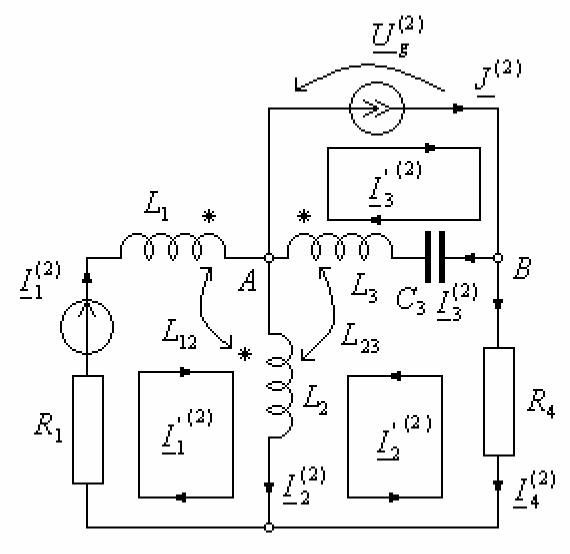


Fig.3.5.R-b

Fig.3.5.R-c

Numeric sistemul va deveni:

$$\begin{cases} 20(1+j)\underline{I}_1^{'(2)} = 20(1+j) \\ 20\underline{I}_2^{'(2)} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1^{'(2)} = 1 \\ \underline{I}_1^{'(2)} = 1 \end{cases} \quad \underline{I}_3^{'(2)} = -2j$$

Curenții prin circuit pentru această armonică (2) vor fi:

$$\underline{I}_1^{(2)} = \underline{I}_1^{'(2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad i_1^{(2)}(t) = \sqrt{2}\sin 2\omega t\,[\mathrm{A}]$$
$$\underline{I}_2^{(2)} = \underline{I}_1^{'(2)} + \underline{I}_2^{'(2)} = 2 \quad \Rightarrow \quad i_2^{(2)}(t) = 2\sqrt{2}\sin 2\omega t\,[\mathrm{A}]$$
$$\underline{I}_3^{(2)} = \underline{I}_2^{'(2)} + \underline{J}^{(2)} = 1 - 2j = \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j\,arctg}(-2)} \quad \Rightarrow \quad i_3^{(2)}(t) = \sqrt{10}\sin(2\omega t + \pi - \mathrm{arctg}\,2)\,[\mathrm{A}]$$
$$\underline{I}_4^{(2)} = -\underline{I}_2^{'(2)} = -1 \quad \Rightarrow \quad i_4^{(2)}(t) = \sqrt{2}\sin(2\omega t + \pi)\,[\mathrm{A}]$$

Expresiile curenților prin laturi şi valorile efective ale acestora sunt:

$$i_1(t) = I_1^{(0)} + i_1^{(2)}(t) = 2 + \sqrt{2}\sin 2\omega t\,[\mathrm{A}], \quad \text{cu } I_1 = \sqrt{5}\mathrm{A}$$
$$i_2(t) = I_2^{(0)} + i_2^{(2)}(t) = 1 + 2\sqrt{2}\sin 2\omega t\,[\mathrm{A}], \quad \text{cu } I_2 = \sqrt{5}\mathrm{A}$$
$$i_3(t) = I_3^{(0)} + i_3^{(2)}(t) = \sqrt{10}\sin(2\omega t + \pi - \mathrm{arctg}\,2)\,[\mathrm{A}], \quad \text{cu } I_3 = \sqrt{5}\mathrm{A}$$
$$i_4(t) = I_4^{(0)} + i_4^{(2)}(t) = i_4^{(2)}(t) = 1 + \sqrt{2}\sin(2\omega t + \pi)\,[\mathrm{A}], \quad \text{cu } I_4 = \sqrt{2}\mathrm{A}$$

Bilanțul puterilor

Pentru a putea efectua bilanțul puterilor evaluăm puterea activă şi reactivă consumată de elementele pasive de circuit respectiv, puterea activă şi reactivă furnizată de sursele de alimentare.

Puterea activă este consumată de rezistențele din circuit:

$$P_c = R_1 (I_1^{(0)\,2} + I_1^{(2)\,2}) + R_4 (I_4^{(0)\,2} + I_4^{(2)\,2}) = 140 \text{ W}$$

Puterea reactivă este consumată de bobină, condensator şi cuplajele magnetice numai în regimul de curent alternativ – armonica a doua:

$$Q_c = 2\omega L_1 I_1^{(2)\,2} + 2\omega L_2 I_2^{(2)\,2} + 2\omega L_3 I_3^{(2)\,2} - \frac{1}{2\omega C_3} I_3^{(2)\,2} - \\ - 4\omega L_{12} \Re e\left\{\underline{I}_1^{(2)} \underline{I}_2^{(2)*}\right\} - 4\omega L_{23} \Re e\left\{\underline{I}_2^{(2)} \underline{I}_3^{(2)*}\right\} = 20 \text{ VAR}$$

$$\Re e\left\{\underline{I}_1^{(2)} \underline{I}_2^{(2)*}\right\} = 2$$

$$\Re e\left\{\underline{I}_2^{(2)} \underline{I}_3^{(2)*}\right\} = 2$$

Pentru a putea evalua puterile debitate de sursele de alimentare trebuie calculate tensiunile la bornele sursei de curent pentru armonica de ordin (0) şi armonica de ordin (2).

Pentru armonica de ordin (0) tensiunea la bornele sursei de curent este egală cu căderea de tensiune la bornele rezistenței R_4 ; prin urmare:

$$U_g^{(0)} = R_4 I_4^{(0)} = 20 \text{ V}$$

Pentru armonica de ordin (2) tensiunea la bornele sursei de curent se determină aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff pe traseul *ABA* (Fig.3.5.R-c).

$$\underline{U}_g^{(2)} = j\left(2\omega L_3 - \frac{1}{2\omega C_3}\right)\underline{I}_4^{(2)} - 2j\omega L_{23} \underline{I}_2^{(2)} = -20j = 20\,\mathrm{e}^{-j\pi/2} \quad \Rightarrow \quad u_g^{(2)}(t) = 20\sqrt{2}\sin(2\omega t - \pi/2)$$

Puterile debitate de sursa de tensiune vor fi:

$$P_e = E^{(0)} I_1^{(0)} + E^{(2)} I_1^{(2)} \cos\varphi_e^{(2)} = 80 \text{ W}$$

$$Q_e = E^{(2)} I_1^{(2)} \sin\varphi_e^{(2)} = 20 \text{ VAR}$$

$$\varphi^{(2)} = \varphi_E^{(2)} - \varphi_{I_1}^{(2)} = \pi/2$$

Puterile debitate de sursa de tensiune vor fi:

$$P_j = U_g^{(0)} J^{(0)} + U_g^{(2)} J^{(2)} \cos\varphi_j^{(2)} = 60 \text{ W}$$

$$Q_j = U_g^{(2)} J^{(2)} \sin\varphi_j^{(2)} = 0 \text{ VAR}$$

$$\varphi_j^{(2)} = \varphi_{U_g}^{(2)} - \varphi_J^{(2)} = -\pi/2 - (-\pi/2) = 0$$

Puterile debitate :

$$P_d = P_e + P_j = 140 \text{ W} \equiv P_c$$

$$Q_d = Q_e + Q_j = 20 \text{ W} \equiv Q_c$$

Aşadar, bilanțul puterilor este verificat.