UNDE

Undă → propagarea oscilațiilor

Undă plană NEATENUATĂ: toate particulele situate într-un plan ⊥ pe direcția de propagare a undei oscilează IDENTIC, unda s.n PLANĂ

c – viteza de propagare

Sursa de osc produce: $\xi(t, \delta=0) = f(t)$

Un pct aflat în planul δ ⊥ pe dir de propagare: $\xi(t,\delta)=f(t-\Delta t)=f\left(t-\frac{\delta}{c}\right)$

↓ undă plană PROGRESIVĂ, care se propagă în sensul + al axei $O\delta$

Δt → timpul necesar ca osc să ajungă la dist δ de origine

$$\boxed{\Delta t = \frac{\delta}{c}}$$

• Unde PROGRESIVE: în sensul pozitiv al axei (+)

$$\xi(t,\delta)=f(t-\Delta t)=\xi(t-\Delta t,\delta=0)=\boxed{f\left(t-\frac{\delta}{c}\right)} = f(u_+) \quad c>0$$

• Unde REGRESIVE: în sensul neg. al axei (−)

$$\xi(t,\delta) = f(t-\Delta t) = \boxed{f\left(t+\frac{\delta}{c}\right)} = f(u_-) \quad c<0$$

(+) $u_+ = t - \frac{\delta}{c}$ ← elongația dep de u → faza undei

(−) $u_- = t + \frac{\delta}{c}$

Cond u = const: $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{v_{f+} = c} \\ \boxed{v_{f-} = -c} \end{array} \right.$ vitezele de fază

$\boxed{\delta = \vec{r} \cdot \vec{n}}$ // $\vec{n}$ vect unitate în sensul dir. de propagare

$$\xi(t,\vec{r}) = f\left(t \mp \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{c}\right)$$ − progr, + regr.

• Undă plană monocromatică (progr)

$$\xi(t,x) = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) = A\cos\omega\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}$ $\boxed{\lambda = cT}$ distanța parcursă de undă într-o perioadă

|| lung. de undă / per. spațială

$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}$

Nr. de undă: $\boxed{k=\frac{2\pi}{\lambda}}$ $\boxed{\omega = kc}$

* dacă se propagă într-o dir. oarecare:

$$\xi(t,\vec{r}) = A\cos\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

$\vec{k} = \vec{n} \cdot k = \vec{n}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}\cdot\vec{n}$ vectorul de undă

$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ ← $\left\{ \begin{array}{l} \text{lung undă } \lambda \\ \text{direcția de propagare} \end{array} \right.$

FAZA UNDEI: $\phi(t,\vec{r}) = \omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}$

Supraf. de undă → FAZĂ CONST ⇒ $d\phi = 0 \Rightarrow \vec{K}d\vec{r} = 0$

Viteza: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\boxed{\text{Viteza de fază}}$: $|\vec{v_f}| = \left|\frac{d\vec{r_u}}{dt}\right| = \frac{\omega}{K} = c$ $\qquad \vec{r_u} = \frac{(\vec{r}\cdot\vec{K})}{|\vec{K}|}\cdot\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}$

ECUAȚIA UNDELOR $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$

EC. UNDELOR PLANE: $\boxed{\Delta\xi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0}$

unde $\Delta\xi = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{\text{op. Laplace}}\xi$ $\qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{m_x^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$

$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} \; \vdots \; m_y$

$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} \; \vdots \; m_z$

atât pentru u_+, cât și pt u_-

$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\Box$ op. d'Alembert

$\Rightarrow \boxed{\Box\xi = 0}$

$\boxed{\text{INTENSITATEA}}$ = $\boxed{\text{S medie a fluxului de energie}}$!!!

37 → ec. Helmoltz: $\Delta f + K^2 f = 0$

- $I = c\,w = c\,\frac{\rho_0 \omega^2 A^2}{2}$
- $I = \frac{1}{2}\rho c\, u_{max}^2$

$\boxed{u_{max} = \omega A = 2\pi\nu A}$

$[I]_{SI} = \frac{W}{m^2}$

Undă sferică fără abs: $\frac{I_2}{I_1} = \frac{r}{r}$ ... r

• cu abs: $r_2 > r_1 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$

• unde coerente: ac ν, K, dif de fază ct

Svolumică de E_p = Svol de E_c → în fază

$v(t,x) = \frac{\partial\xi}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - Kx)$

$w_c = w_p = \frac{1}{2}\rho_0 A^2\omega^2\sin^2(\omega t - Kx)$

$w = w_c + w_p = \rho_0 A^2\omega^2\sin^2(\omega t - Kx)$

↓ Svol. de ENERGIE

$\Phi = \frac{dW}{dt}$ fluxul de energie prin S

$\Phi = \frac{dW}{dt} = \frac{\langle w\rangle dV}{dt} = Sc\langle w\rangle$

$[\Phi]_{SI} = \frac{J}{s} = W$

$i = \frac{d\Phi}{dS_\perp} = \frac{dW}{dt\,dS_\perp} = c\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho_0 A^2\omega^2 c = \rho_0 c\langle v^2\rangle$

densitatea fluxului de energie $[i]_{SI} = \frac{W}{m^2}$

$= \frac{\rho_0 v^2}{2}$ ... $\frac{1}{2}\varepsilon\xi$ ... $\sigma\xi$ ... w ... $[m$ ... $\boxed{2m}$ ... $m =$ ... ple ... are)

(37) Unde armonice
Ec. Helmoltz.

Ec. undelor: $\boxed{\Delta\xi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0}$ EC. DIF. LINIARĂ OMOGENĂ

soluții: $\xi_1(t,\vec{r}),\ \xi_2(t,\vec{r})$

$\Rightarrow$ orice comb. liniară $\boxed{\xi(t,\vec{r}) = \alpha_1 \xi_1(t,\vec{r}) + \alpha_2 \xi_2(t,\vec{r})}$

e soluție (principiul superpoziției)

* Considerăm unda $\xi(t,\vec{r}) \to$ produsul $R(\vec{r})$ și $T(t)$

$T(t) = Ae^{\pm i\omega t}$

$$\xi(t,\vec{r}) = A\cdot R(\vec{r})e^{\pm i\omega t},\ A\in\mathbb{C}$$

ec undelor devine $\Rightarrow$

$$\Delta\left(A\cdot R(\vec{r})e^{i\omega t}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\cdot R(\vec{r})e^{i\omega t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(e^{\pm i\omega t}\right) = -\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \Delta R(\vec{r})\cdot e^{\pm i\omega t} - \frac{1}{c^2}R(\vec{r})(-\omega^2)e^{\pm i\omega t} = 0$$

$$\Delta R(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}R(\vec{r}) = 0$$

Not $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

$\Rightarrow \Delta R + k^2 R = 0$

$$\xi(t,\vec{r}) = \underset{\text{regresiv}}{Ae^{i(\omega t+\vec{k}\cdot\vec{r})}} + \underset{\text{progresiv}}{Be^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}} + \underset{\text{progresiv}}{Ce^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}}$$

$$+ \underset{\text{regresiv}}{De^{-i(\omega t+\vec{k}\cdot\vec{r})}} = \underbrace{E_{AD}\cos(\omega t+\vec{k}\cdot\vec{r})}_{\text{undă plană regresivă}} + \underbrace{F_{BC}\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}_{\text{undă plană progresivă}}$$

* Pt unde sferice:

$$\xi(t,\vec{r}) = \underbrace{\frac{A}{r}\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}_{\frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)} + \underbrace{\frac{B}{r}\cos(\omega t+\vec{k}\cdot\vec{r})}_{\frac{B}{2}\cos(\omega t + kr)}$$

unde DIVERGENTE (se propagă DE LA sursa punctiformă)

unde CONVERGENTE (se propagă SPRE sursa punctiformă)

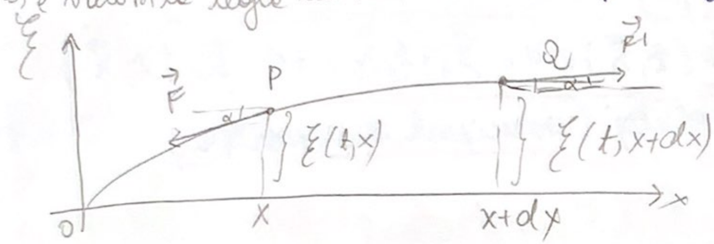
38 Coarda vibrantă

→ coarda = elastică, omogenă și absolut flexibilă

$\vec{F}$ tg la coardă

∄ forțe transversale de forfecare, ci doar LONGITUDINALE

⇒ e valabilă legea lui Hooke $\sigma = E \cdot \varepsilon$, $\sigma = \frac{F}{S}$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$



• P: $tg\,\alpha = \frac{d\,\xi(t,x)}{dx}$ • Q: $tg\,\alpha' = \frac{d}{dx}\xi(t, x+dx)$

$F\cos\alpha = F'\cos\alpha'$ $\cos\alpha \cong 1$ $\cos\alpha' \cong 1$ ⇒ $\boxed{F = F'}$

$$\boxed{dR_\xi = F dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$ REZULTANTA

Forța R_ξ acț asupra PQ : lung: dx

vol: $dV = S dx$

masa: $dm = \rho dV = \rho S dx$

$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

PII: $dm \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dR_\xi$

$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = ct = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$

VITEZA DE PROPAGARE A UNDELOR TRANSV. ÎN COARDA VIBRANTĂ

$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

VITEZA DE PROPAGARE A UNDELOR LONGITUDINALE ÎN SOLIDE

$c_{ts} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

VITEZA DE PROPAGARE A UNDELOR TRANSV. ÎN SOLIDE

G = modulul de forfecare (modul de elasticitate transversal)

$\boxed{G \cong 0{,}4E}$

* $\rho S = \frac{M}{V} S = \frac{M}{LS} \cdot S = \frac{M}{L} \overset{not}{=} \rho_l$ (dens. liniară de masă) $\boxed{c = \sqrt{\frac{FL}{M}}}$

⇒ $c_t = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ → $\mu = \rho_l$ (masa unității de lungime)

* în fluide: $c_{lf} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ → presiunea în fluid

* c sunet aer $= \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = c_0\sqrt{1+\alpha\theta}$

c_0 → v. sunetului în aer la 0°C

(40) Unde sferice monocromatice

- faza: $\varphi(t,r) = \omega t - Kr$

→ Puterea sursei punctiforme = fluxul de energie prin + supraf sferică centrată în sursă: $P = \Phi = \underset{\text{int.}}{\langle i \rangle} S = \underset{\text{Vol de eng.}}{\langle w \rangle} c S = ct = \langle w \rangle c \cdot 4\pi r^2$

$A^2 r^2 = ct$; $A^2 \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow A \sim \frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{\xi(t,r) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - Kr)}$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\xi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\xi) = 0$$

$\iff r\xi(t,r) = A\cos(\omega t - Kr)$

UNDĂ SFERICĂ MONOCROMATICĂ

(41) Absorbția

În procesul propagării: energia → căldură $\boxed{\searrow i \ \searrow w \ \searrow A}$

$\boxed{dA = -m A dx}$ m = constanta de atenuare a amplitudinii

$[m]_{SI} = m^{-1}$

$A = A_0 e^{-mx}$

$\xi(t,x) = A_0 e^{-mx}\cos(\omega t - Kx)$

$\langle i \rangle = \langle i_0 \rangle e^{-2mx}$ $2m$ coef. de absorbție al mediului

* Pt o undă sferică: $\xi(t,r) = \frac{A_0}{r} e^{-mr}\cos(\omega t - Kr)$

Not $I = \langle i \rangle \Rightarrow \boxed{I(r) = \frac{I_0}{r^2} e^{-2mr}}$

→ FĂRĂ absorbție: $\boxed{\underbrace{\frac{I_2}{I_1}}_{\text{intensități}} = \underbrace{\frac{r_1^2}{r_2^2}}_{\text{distanțe de la sursa punctiformă}}}$

→ CU absorbție: $\boxed{\frac{I_2}{I_1} < \frac{r_1^2}{r_2^2}}$

Ex: Det. coef. de abs al mediului dacă int. undei sferice scade de 7 ori atunci când r crește de 2 ori, de la 5 la 10 m.

$I(r) = \frac{I_0}{r^2} e^{-2mr}$ $\quad I_1 = \frac{I_0}{r_1^2} e^{-2mr_1}$ $\quad I_2 = \frac{I_0}{r_2^2} e^{-2mr_2}$

$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} e^{-2m(r_2 - r_1)} \Rightarrow 2m(r_2 - r_1) = \ln\frac{I_1 r_1^2}{I_2 r_2^2}$

$\Rightarrow \boxed{2m = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\frac{I_1 r_1^2}{I_2 r_2^2}} = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{4} \simeq 0{,}112$

a energiei | HEISENBERG

(42) INTERFERENȚA UNDELOR

→ oscilație rezultantă: $\xi(t,P) = \xi_1(t,r_1) + \xi_2(t,r_2)$

$$\xi(t,P) = A_1\cos(\omega t - Kr_1) + A_2\cos(\omega t - Kr_2)$$

→ diferența de fază: $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega t - Kr_2) - (\omega t - Kr_1) = K(r_1 - r_2) = K\Delta r$

→ amplitudinea: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\Phi}$

$\Delta\Phi = K\Delta r = K(r_1 - r_2) = (\omega t - Kr_2) - (\omega t - Kr_1)$

- $\boxed{\Delta\Phi = 0} \Rightarrow \cos\Delta\Phi = 1$ $A = A_1 + A_2$ MAXIME de interf. (osc în FAZĂ)
- $\boxed{\Delta\Phi = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \cos\Delta\Phi = 0$ $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ osc. în QUADRATURĂ, ampl MEDIE
- $\boxed{\Delta\Phi = \pi} \Rightarrow \cos\Delta\Phi = -1$ $A = |A_1 - A_2|$ MINIMUL de interf (OPOZIȚIE de fază)

• $\Delta\Phi = 0, 2\pi \ldots$ $K\Delta r = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ $\frac{2\pi}{\lambda}\Delta r = 2m\pi \Leftrightarrow \boxed{\Delta r = m\lambda}$

- dif de drum e un întreg de λ → osc în $\boxed{\text{FAZĂ}}$
  → interf. $\boxed{\text{CONSTRUCTIVĂ}}$
  → $\boxed{\text{MAXIM}}$ de interf

• $\Delta\Phi = (m + \frac{1}{2})\pi \Rightarrow \Delta r = (\frac{m}{2} + \frac{1}{4})\lambda$ $\boxed{\text{QUADRATURĂ}}$

• $\Delta\Phi = (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \Delta r = \frac{(2m+1)\lambda}{2}$ → $\boxed{\text{OPOZIȚIE}}$ de fază
  → interf. $\boxed{\text{DISTRUCTIVĂ}}$
  → ampl $\boxed{\text{MINIMĂ}}$

nr semiîntreg de lungimi de undă
// nr impar semiunde

(43)

• $\xi_1(t,x) = A_1\cos(\omega t - Kx)$ spre DREAPTA

• $\xi_2(t,x) = A_2\cos(\omega t - K(\underbrace{L+L-x}_{\text{drumul străbătut de undă}}) + \underbrace{\Delta\varphi}_{\text{schimbarea fazei undei după reflexie}}) = A_2\cos(\omega t + Kx + \beta)$

$\boxed{A_1 = A_2} \Rightarrow \xi(t,x) = \xi_1(t,x) + \xi_2(t,x) =$

$= A\cos(\omega t - Kx) + A\cos(\omega t + Kx + \beta) =$

$= 2A\cos(Kx + \frac{\beta}{2})\cos(\omega t + \frac{\beta}{2}) = A(x)\cos(\omega t + \frac{\beta}{2})$

$A(x) = 2A\left|\cos(Kx + \frac{\beta}{2})\right|$ $\xi_{min} = -A(x)$; $\xi_{max} = A(x)$

44 SURSE de unde (SEMNALE) de durată finită
Relație de incertitudine TIMP-FRECVENȚĂ

$\xi(t,x) = A\cos(\omega t - kx) = A e^{i(\omega t - kx)}$

→ Într-un pct al unui spațiu se produce oscilație: $\xi(t,x_0) = A_0 e^{i\omega_0 t}$

= Numai prin suprapunerea unor UNDE MONOCROMATICE ⇒ SEMNAL (suprapunere osc. dif ν)

$$\boxed{f(t) = \sum A_n e^{i\omega_n t}} \quad \boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega}$$ ← pt un spectru continuu

$A(\omega)$ – dens. spectrală a amplitudinii

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\omega t} dt$$

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum A_n e^{i(\omega_n - \omega)t} dt = \sum A_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_n-\omega)t} dt$$

$$= \sum A_n \delta(\omega_n - \omega)$$

$\delta(\omega_n - \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_n-\omega)} dt$ fcția δ a lui Dirac

$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

în ∀ pct osc $\xi(t,x_0) = \begin{cases} A_0 e^{i\omega_0 t} & |t| \le \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$

sau $\xi(t,x_0) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, \frac{\Delta t}{2}) \\ A_0 e^{i\omega_0 t}, & t \in [-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}] \\ 0, & t \in (\frac{\Delta t}{2}, \infty) \end{cases}$ constituie un semnal

$$A(\omega) = \frac{A_0 \Delta t}{2\pi} \frac{\sin\eta}{\eta} \qquad \eta = \frac{(\omega - \omega_0)\Delta t}{2} \in (-\pi, \pi)$$

$$W_0 \sim \frac{A_0^2 \Delta t^2}{4\pi^2} \quad \frac{\sin\eta}{\eta} \overset{not}{=} \operatorname{sinc}\eta \quad \text{SINUS CARDINAL}$$

$\boxed{\Delta\omega \cdot \Delta t \gtrsim 2\pi}$ REL. DE INCERTITUDINE ν-timp

Un semnal este mai pur spectral ($\Delta\omega \to 0$) cu cât durează mai mult ($\Delta t \gtrsim \frac{2\pi}{\Delta\omega}$) și invers.

45 Trenul de unde

= semnal care are o distribuție $A(\omega)$ f. grupată în jurul unei frecv. centrale ω_0

$\Delta\omega \ll \omega_0$

$\Delta k \ll k_0$

$A(\omega)$ semnificativă pt $\omega \in (\omega_0 - \Delta\omega; \omega_0 + \Delta\omega)$

ω_0 – frecv. undei purtătoare

$\Delta\omega \cdot \Delta t - \Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$

$\Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$

$\boxed{v_f = \frac{\omega}{k}}$

$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$ = vit. de grup = vit de propagare a energiei

$\boxed{\Delta k_\lambda \cdot \Delta x \gtrsim 2\pi}$

rel incertitudine poz-nr unde

$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim h}$

rel. incertitudine poz-impuls HEISENBERG