

inegalitatea $\omega < \omega_0$. În aceste condiții, e suficient să ne limităm numai la ramura din stânga a figurii 3.3. În conformitate cu experiența, pentru corpurile transparente există o legătură de dispersie normală:

$$n_{\text{violet}} > n_{\text{rosu}}.$$

Pentru această regiune de transparentă vom determina o formă simplă a relației de dispersie $n = n(\lambda)$. Pentru că $\omega \ll \omega_0$, se poate dezvolta expresia (3.66) în serie de puteri după $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$. Păstrând numai primii doi termeni din dezvoltare rezultă

$$n^2 \cong 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]. \quad (3.67)$$

Înlocuind

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \text{și} \quad \omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}, \quad (3.68)$$

avem

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (3.69)$$

cu

$$A = 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}; \quad \text{și} \quad B = \frac{Nq^2 \cdot 4\pi^2 c^2}{m\varepsilon_0 \omega_0^4}. \quad (3.70)$$

Pentru un domeniu de dispersie slabă, cu $\frac{B}{\lambda^2} \ll 1$, se găsește formula aproximativă

$$n \cong n_0 + \frac{C}{\lambda^2}. \quad (3.71)$$

Relația (3.71) este formula lui Cauchy, determinată experimental în 1830, înainte de elaborarea teoriei electromagnetice a luminii.

Observație. Dacă spectrul corpului studiat prezintă mai multe benzi de absorție, formula (3.66) se scrie:

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{N_k q_k^2}{\varepsilon_0 m_k} \frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \quad (3.72)$$

unde N_k este numărul de purtători de sarcină q_k și de masă m_k din unitatea de volum. Regiunile de transparentă sunt date atunci de condițiile $|\omega_{0k}^2 - \omega^2| > \Gamma_k \omega$, oriicare ar fi pulsărea proprie ω_{0k} .

Dispersia în regiunile de absorție. Dispersia anomală

În majoritatea cauzilor, în vecinătatea pulsărilor proprii mărimea χ_e este mult mai mică decât unitatea, așa încât indicele de refracție se

poate scrie

$$\tilde{n} = \sqrt{1 + \chi_e} \cong 1 + \frac{\chi_e}{2} = n' + i n''. \quad (3.73)$$

Înlocuind χ_e din (3.58) rezultă, prin identificare, expresiile pentru $n'(\omega)$ și $n''(\omega)$:

$$n'(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \quad (3.74)$$

$$n''(\omega) = \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}. \quad (3.75)$$

În vecinătatea pulsării de rezonanță, $\omega + \omega_0 \cong 2\omega$, așa încât:

$$n'(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{4m\varepsilon_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \quad (3.76)$$

$$n''(\omega) = \frac{Nq^2}{4m\varepsilon_0} \frac{\Gamma/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (3.77)$$

Dependența de pulsăre a mărimilor $n'(\omega)$ și $n''(\omega)$ în vecinătatea rezonanței este reprezentată grafic în figura 3.4.

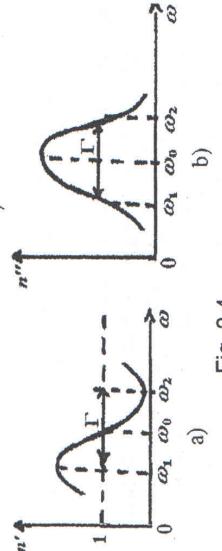


Fig. 3.4

Graficul (3.4a) este o curbată de dispersie. Viteza de fază a undei în mediul respectiv este c/n' , prin urmare indicele de refracție este $n' = R/\tilde{n}$. Se observă că în vecinătatea lui ω_0 se afilă o regiune pentru care $\frac{dn}{d\omega} < 0$, numită regiune de dispersie anomală.

Din relația (3.76) rezultă că

$$n''(\omega) = 1 \text{ pentru } \omega = \omega_0.$$

Derivatei funcții se anulează pentru două valori

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 - \omega_0 \Gamma \\ \omega_2^2 = \omega_0^2 + \omega_0 \Gamma \end{cases} \quad (3.78)$$

În cazul unei atenuări slabe ($\Gamma \ll \omega_0$), valorile corespunzătoare extremerelor sunt

$$\begin{cases} \omega_1 \equiv \omega_0 - \frac{\Gamma}{2} \\ \omega_2 \equiv \omega_0 + \frac{\Gamma}{2} \end{cases} \quad (3.79)$$

Pentru $\omega = \omega_0$, curba de absorbție $n''(\omega)$ prezintă un maxim pronuntat (fig. 3.4b). O curbă de acest tip se numește *lorentziană*; ea este simetrică în raport cu axa care trece prin maximul situat la $\omega = \omega_0$. Se observă că lărgimea curbei la seminățime este egală cu $\omega_2 - \omega_1 = \Gamma$.

Semnificația fizică a părții imaginare a indicelui de refracție este legată de absorbția undelor în mediu. Într-adevăr, în acest caz

$$\tilde{k} = \frac{\omega_0}{c} \tilde{n} = \frac{\omega_0}{c} (n' + i n'') \quad (3.80)$$

și alegând ca direcție de propagare axa Oz, câmpul electric asociat undei se va scrie

$$\tilde{E}(z) = \tilde{E}_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} n'' z\right) \exp\left(i \frac{\omega}{c} n' z\right). \quad (3.81)$$

Câmpul electric al undei scade exponential în timpul propagării în mediu, prin urmare n'' descrie amortizarea undei datorită absorbției. Lărgimea $\Delta\omega = \Gamma$ a curbei de absorbție arată întinderea zonei spectrale în jurul lui ω_0 , în care substanța absorbe puternic radiația.

Exemplu. Să considerăm un mediu care, într-un domeniu de absorbție, are $\varepsilon_r = 1 + i\sqrt{3}$ și $\mu_r = 1$ pentru o pulsărie dată, ω . Prin urmare

$$\tilde{n}^2 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}.$$

$$\tilde{n} = \sqrt{2} e^{i\pi/6} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} i \right) = 1.225 + 0.707 i$$

$$\tilde{k} = \tilde{n} \frac{\omega}{c} = 1.225 \frac{\omega}{c} + 0.707 i \frac{\omega}{c} \text{ m}^{-1}$$

Presupunem că unda se propagă după Oz, iar vectorul \tilde{E} este paralel

cu Ox. Atunci

$$\tilde{E} = E_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \tilde{u}_x = E_0 e^{-0.707 \omega z / c} e^{i(1.225 \omega z / c - \omega t)} \tilde{u}_x \text{ V/m}$$

Notând $\tilde{k} = |\tilde{k}| e^{i\theta} \tilde{u}_z$, calculăm $\tilde{B} = \frac{\tilde{k} \times \tilde{E}}{\omega}$:

$$\tilde{B} = \frac{|\tilde{k}| \tilde{E} e^{i\theta}}{\omega} \tilde{u}_z \times \tilde{u}_x = \frac{|\tilde{k}|}{c} \tilde{E} e^{i\pi/6} \tilde{u}_y = \frac{\sqrt{2}}{c} \tilde{E} e^{i\pi/6} \tilde{u}_y \text{ T.}$$

Se observă că amplitudinea undei scade exponential cu distanța, iar inducția magnetică este defazată față de câmpul electric cu $\pi/6$.

În realitate, aşa cum am menționat deja, atomii și moleculele au o mulțime de pulsări caracteristice ω_{0k} . Dacă pulsăria câmpului electromagnetic devine egală cu oricare dintre acestea, are loc o absorbție puternică a undei în mediu; prin urmare, absorbția în dielectrice are un caracter rezonant.

3.2.3. Bilanțul energiei electromagnetice în medii dielectrice

absorbante

Vom demonstra că în medii dielectrice datorită fenomenului de polarizare apare un curent suplimentar, numit *curent de polarizare*, având densitatea $\tilde{J}_P = \frac{\partial P}{\partial t}$. Într-un astfel de mediu, ecuația Maxwell-Ampère este

$$\operatorname{rot} \tilde{H} = \frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t}. \quad (3.82)$$

Primul termen există și în vid, iar cel de al doilea descrie substanța polarizată. Prin urmare, în procesul de polarizare a mediului puterea medie disipată în unitatea de volum este

$$\left\langle \frac{dP_{disip}}{dV} \right\rangle = \langle \tilde{J}_P \cdot \tilde{E} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\tilde{J}_P \cdot \tilde{E}^*). \quad (3.83)$$

Calculăm

$$\tilde{J}_P = -i\omega \tilde{P} = -i\omega \epsilon_0 \chi'_e \tilde{E} = -i\omega \epsilon_0 (\chi' + i\chi'') \tilde{E}. \quad (3.84)$$

Rezultă

$$\left\langle \frac{dP_{disip}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \chi'' |\tilde{E}_0|^2. \quad (3.85)$$

Prin urmare, energia cîmpului electromagnetic absorbită de mediu este disipată în procesul de polarizare. Pierderile dielectrice sunt proporționale cu partea imaginara χ'' a susceptibilității complexe.

Aplicații

1. Absorbția în lichide. Cuptorul cu microunde

La frecvențe joase, într-un lichid conținând molecule polare (cum este apa), este dominant mecanismul de polarizare de orientare. Expressia susceptibilității se obține din ecuația (3.59), punând condiția $\omega^2 \ll \omega\Gamma$, pentru că mecanismele de amortizare datorită vâscozității mediului sunt în acest caz dominante. Rezultă

$$\chi_{or}^{(or)}(\omega) = \chi^{(or)}(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - i\omega\Gamma} \quad (3.86)$$

Separând părțile reală și imaginară

$$\chi_{or}^{(or)} = \chi_{or}' + i\chi_{or}'' \quad (3.87)$$

obținem

$$\chi_{or}' = \chi^{(or)}(0) \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4 + \omega^2\Gamma^2} = \chi^{(or)}(0) \frac{1}{1 + \omega^2\tau_D^2}, \quad (3.88)$$

$$\chi_{or}'' = \chi^{(or)}(0) \frac{\omega\omega_0^2\Gamma}{\omega_0^4 + \omega^2\Gamma^2} = \chi^{(or)}(0) \frac{\omega\tau_D}{1 + \omega^2\tau_D^2} \quad (3.89)$$

cu

$$\tau_D = \frac{\Gamma}{\omega_0^2}, \quad (3.90)$$

timpul de relaxare Debye. În figura 3.5 sunt reprezentate dependențele funcțiilor χ_{or}' și χ_{or}'' de pulsăția ω .

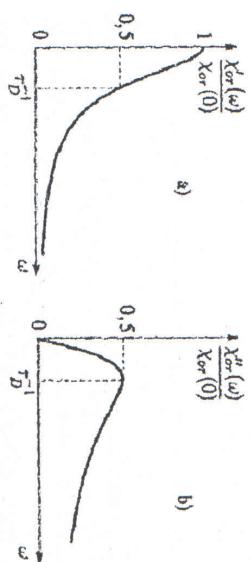


Fig 3.5

Puterea absorbită de mediu fiind proporțională cu mărimea χ_{or}'' , va fi maximă pentru pulsăția $\omega = \frac{1}{\tau_D}$ (graficul 3.5b). Pe acest fenomen se bazează funcționarea cupitorului cu microunde. Un generator emite un semnal sinusoidal cu frecvență de 2,45 GHz (lungimea de undă $\lambda_0 \approx 12,2$ cm, în domeniul microundelor). Energia electromagnetică absorbită de material crește agitația moleculelor și deci temperatură acestuia. Rezultă că energia disipată de forțele de fricare în procesul de orientare a moleculelor este utilizată pentru încălzirea alimentelor.

2. Spectrometria de absorbție

Pentru că energia electromagnetică medie absorbită de mediu este proporțională cu $\chi'' = 2n''$ (relația 3.73), ea va fi maximă pentru pulsăjile proprii ω_0 caracteristice mediului dielectric (fig. 3.5b). Prin urmare apare un fenomen de absorbiție rezonantă de energie. Studiul experimental al fenomenului permite determinarea pulsăjilor proprii ale mediului.

3.2.4 Legea cerului albastru

Pe baza teoriei microscopice a lui Lorentz se poate determina dependența de frecvență a intensității luminii solare împăriști de către atomii neutri din atmosferă. Vom demonstra că radiația albastră este împăriștită mai puternic decât radiația roșie; aceasta este motivul pentru care celul este albastru.

Să considerăm un electron dintr-un atom, pus în mișcare oscilatoare forțată de cîmpul electric al undei electromagnetic progressive emisă de o sursă. Alegem ca direcție de propagare axa Oz, prin urmare cîmpul electric al undei este situat în planul xOy. Studiem numai componenta E_x a cîmpului electric (componenta E_y va conduce la rezultat similar). Mai mult, vom considera o undă monocromatică (deci o singură componentă Fourier a luminii "albe"). Atunci intensitatea cîmpului electric $E_x(t)$ în locul în care se află atomul este dată de

$$E_x = E_0 \cos \omega t. \quad (3.91)$$

Presupunem că suntem într-o regiune de transparentă a mediului, prin urmare pulsăția ω este mult diferită de pulsăția proprie ω_0 , astă încăt amortizarea poate fi neglijată. Atunci ecuația de mișcare a electronului este

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + qE_x. \quad (3.92)$$

În regim permanent, $x(t)$ reprezintă o oscilație armonică cu pulsată ω : $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ și înlocuind în ecuația (3.92) rezultă

$$x(t) = -\frac{qE_x(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (3.93)$$

Orică sarcină electrică punctiformă q în mișcare accelerată emite radiație electromagnetică. La distanțe mari de sarcină, puterea medie radiată în toate direcțiile are expresia

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \langle a^2(t) \rangle \quad (3.94)$$

unde $a(t)$ este accelerarea, iar simbolul $\langle \dots \rangle$ reprezintă media temporală. Dacă sarcina electrică are o mișcare armonică, radiația rezultată se numește radiație de dipol electric. Atunci, pentru oscilația descrisă de ecuația (3.93) avem

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \quad (3.95)$$

și înlocuind în relația (3.94) se obține

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 \langle x^2(t) \rangle \quad (3.96)$$

sau

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 \frac{e^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \langle E_x^2(t) \rangle. \quad (3.97)$$

În atmosferă, electronii atomici au frecvențe proprii $v_0 \approx 10^{17}$ Hz (în domeniul ultraviolet), în timp ce frecvențele din spectrul vizibil sunt de ordinul 10^{14} Hz. Prin urmare, pentru radiații din domeniul vizibil $\omega_0 \gg \omega$ și puterea radiată de dipol este proporțională cu puterea patrată a pulsării

$$P \sim \omega^4 \quad \text{sau} \quad P \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (3.98)$$

Expresia (3.98) se numește "legea de difuzie Rayleigh" sau "legea cerului albastru". Conform acestei relații, în atmosferă sunt difuzate puternic radiațiile violet, indigo, albastru, în timp ce radiațiile din domeniul roșu, portocaliu și galben sunt slab împărtășite (tabelul I).

Tabel I

Culoarea	λ (nm)
violet	400-440
albastru	440-500
verde	500-570
galben	570-590
orange	590-610
roșu	610-700

Pe de altă parte, sensibilitatea ochiului uman depinde de lungimea de undă a radiației luminoase observate, fiind maximă pentru radiația verde (fig. 3.6). Se observă că în domeniul undelor cu frecvențe mari, ochiul este mai sensibil la radiația albastră, prin urmare în lumina împărtășită vom percepe ca dominantă radiația albastră. Observăm că

$$\frac{\lambda_{rosu}}{\lambda_{albastru}} = \frac{6500\text{Å}}{4500\text{Å}} \equiv 1,4, \quad \text{iар} \quad 1,4^4 \equiv 4 \text{ ori} \quad (3.99)$$

Astfel, conform relației (3.99), lumina albastră este împărtășită de 4 ori mai puternic decât lumina roșie; de aceea cerul este albastru.

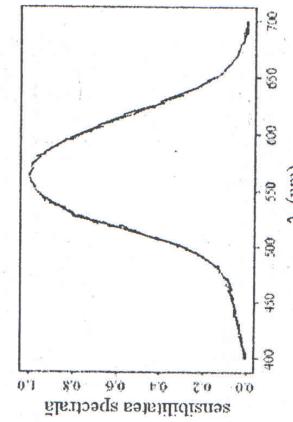


Figura 3.6

Dar, dacă privim direct soarele la amiază, el este galben. Să observăm că procesul de difuzie constă în absorția undei electromagnetice, urmată de reemisie ei în toate direcțiile, prin urmare, la ochi ajunge numai lumina care nu este împărtășită. Fiind mai puțin difuzate, la observator ar trebui să ajungă radiația emisă de soare cu lungimi de undă mari (rosu, orange, galben). Teoria cuantică a radiației termice demonstrează însă că spectrul de emisie al unei surse depinde de temperatură acesteia. Pentru soare, cu $T_s \approx 5000$ K,

densitatea spectrală de energie emisă este maximă pentru radiația galbenă (fig. 3.7).

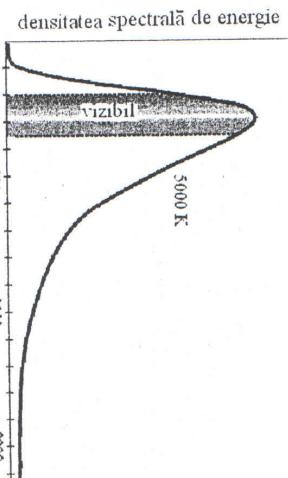


Figura 3.7

Prin urmare, la amiază soarele este galben datorită propagării directe a radiației galbene, dominantă în spectrul de emisie. La apus, lumina care ajunge la observator traversează o distanță mai mare în atmosferă ($D > d$), așa încât difuzia devine importantă. Radiația galbenă (cu frecvență mai mare) este difuzată mai puternic și lumina care ajunge la observator este roșe-portocalie. Apusul este cu atât mai roșu cu cât în atmosferă sunt mai multe particule difuzante; suflul din aer (emis de sursele poluanțe) contribuie la observarea unor apusuri frumoase (deși, în realitate, el constituie o mare problemă pentru mediu).

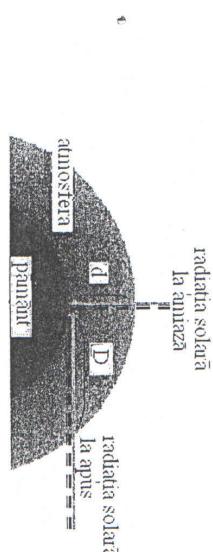


Figura 3.8

Difuzia Rayleigh se poate pune în evidență și cu ajutorul montajului experimental reprezentat în figura 3.9. Pe traectoria luminii albe, între o diafragmă circulară (obiect) și imaginea sa pe un ecran de observație, se interpune o cuvă cu soluție de bisulfat de sodiu. Adăugând acid clorhidric, se obțin prin precipitare particule fine de sulf, care determină creșterea difuziei luminii și deci a intensității radiației

albastre observate într-o direcție perpendiculară pe direcția de propagare.

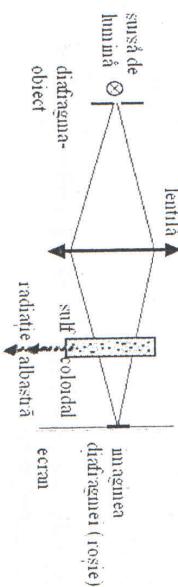


Figura 3.9

În același timp, pe ecran se observă imaginea fasciculului transmis, din care a dispărut prin împărtiere albastru, așa încât rămâne de culoare roșe-galbenă (ca și în cazul apusului de soare).

3.3. Dispersia și absorția în medii conductoare

Definim conductoarea ca fiind substanțele în care un câmp static poate crea o deplasare ordonată de sarcini electrice (exemplu: metalele, plasma, electrolitii). Conductoarele sunt caracterizați de existența unor purtători de sarcină care se mișcă aproape liberi. În metale este vorba de electronii de conducție, în plasmă despre electroni și ioni, iar în electroliti purtătorii de sarcină sunt ionii.

a) Conductivitatea complexă a metalelor

Conform modelului Drude-Lorentz, în prezența unui câmp electric extinții electronilor liberi ai unui metal capătă o mișcare orientată în direcția câmpului, căreia își opun ciocnirile cu ionii rețelei cristaline, care determină amortizarea mișcării electronice. Ecuatia de mișcare a electronului într-un metal sub acțiunea câmpului electric al undei electromagnetice va fi

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -m \frac{\vec{V}}{\tau} - e\vec{E} \quad (3.100)$$

unde $\vec{F} = -m \frac{\vec{V}}{\tau}$ este forța de rezistență, care ia în considerare disipația energiei prin ciocniri, τ fiind timpul mediu dintre două ciocniri consecutive ale electronului. Sub acțiunea unei unde armonice

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.101)$$

viteza electronului trebuie să urmărească variațiile câmpului, așa încât căutăm soluții de forma

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.102)$$

și înlocuind în ecuația (3.100), rezultă expresia amplitudinii \tilde{V}_0

$$\tilde{V}_0 = -\frac{e\tilde{E}_0}{m\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)} \quad (3.103)$$

Densiitatea curentului de conductie este $\tilde{J} = -Ne\tilde{V}$ și pentru că \tilde{V} este o mărime complexă, putem scrie

$$\tilde{J} = -Ne\tilde{V} = \tilde{\sigma}\tilde{E}. \quad (3.104)$$

De aici rezultă conductivitatea complexă a mediului

$$\tilde{\sigma} = \frac{Ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} = \sigma(0) \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (3.105)$$

unde $\sigma(0) = \frac{Ne^2\tau}{m}$ este conductivitatea statică a metalului.

Observație. Densiitatea de curent de conductie este proporțională cu polarizarea de deplasare a electronilor liberi:

$$\tilde{J} = -Ne\tilde{V} = \frac{d\tilde{P}}{dt} = -i\omega\tilde{P} = -i\omega\epsilon_0\chi_e\tilde{E} \quad (3.106)$$

și comparând cu legea lui Ohm, rezultă

$$\tilde{\sigma} = -i\omega\epsilon_0\chi_e \quad (3.107)$$

Valoarea complexă a conductivității electrice implică apariția unui defazaj între curentul electric și câmpul electric aplicat. Valoarea acestui defazaj este

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\sigma''}{\sigma'} = \operatorname{arctg}(\omega\tau); \quad (3.108)$$

dependența de pulsăția undei incidente este reprezentată în fig.3.10.

Se observă că dacă pulsăția undei incidente ω crește, defazajul între curent și câmpul electric crește. În aproximarea frecvențelor joase $\theta \approx 0$, prin urmare curentul de conductie este în fază cu câmpul electric aplicat, dar pentru frecvențe

mari cei doi vectori sunt în quadratură.

Din relația (3.105) putem calcula

$$\sigma' = R\tilde{\sigma} = \sigma(0) \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (3.109a)$$

și respectiv

$$\sigma'' = Im\tilde{\sigma} = \sigma(0) \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}. \quad (3.109b)$$

Figura 3.11 reprezintă $\sigma'/\sigma(0)$ și $\sigma''/\sigma(0)$ în funcție de pulsăția ω .

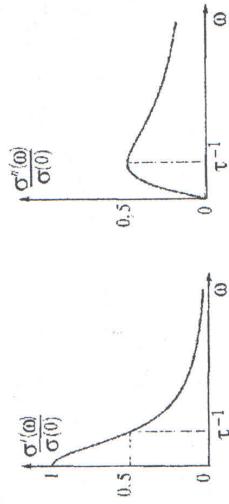


Figura 3.11

Se observă că aproximarea $\tilde{\sigma} = \sigma(0)$ este valabilă dacă $\omega \ll \omega_c = \frac{1}{\tau}$; pentru metale, τ este de ordinul 10^{-14} s. Prin urmare, conductivitatea electrică este reală și constantă dacă $\omega \ll 10^{14}$ rad/s. În domeniul optic ($\omega \approx 10^{15}$ rad/s), pulsăția depășește valoarea critică și aproximarea nu mai este valabilă; în schimb, ea poate fi aplicată în cazul microondelor și al undelor radio, cu pulsății $\omega < 10^{10}$ rad/s. Puterea medie dissipată prin efect Joule într-un conductor este proporțională cu partea reală a conductivității complexe pentru că

$$<\tilde{J}_c \cdot \tilde{E}> = \frac{1}{2} R\operatorname{Re}(\tilde{E} \cdot \tilde{J}_c^*) = \frac{1}{2} \sigma' |\tilde{E}_0|^2. \quad (3.110)$$

Așa cum rezultă din figura 3.11a, absorția în metale este maximă în regimul stationar și rămâne importantă până la pulsății $\omega \leq 1/\tau$.

Dispersia în metale

Teoria microscopică prezentată în paragraful 3.2, pentru dielectrici poate fi aplicată și la metale, cu o modificare. În metale, conductia este asigurată de electronii liberi; în acest caz, inexistența fontelor de legătură la un atom anumit va însemna absența termenului $-kT$ în ecuația de mișcare a electronului. Prin urmare, formula pentru susceptivitatea electrică la metale este obținută din relația (3.58), în

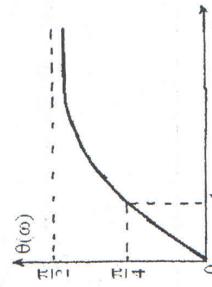


Figura 3.10

care $\omega_0 = 0$:

$$\chi_e = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 - i/\omega\Gamma} \quad (3.111)$$

Aceasta este numai contribuția electronilor de conductie, termen dominant în cazul metalelor. Mai mult, acum știm că factorul de amortizare Γ este determinat de timpul dintre două ciocniri consecutive în rețeaua cristalină, $\Gamma = \frac{1}{\tau}$.

Definind pulsulația plasmelor, $\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}$, relația (3.111) poate fi scrisă sub forma

$$\chi_e = \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 - i\omega/\tau} \quad (3.112)$$

înălcită încât indicele de refracție complex al unui metal are expresia

$$\tilde{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 + i/\omega\tau)} \quad (3.113)$$

Pentru metale, $\omega_p \approx 10^{16}$ rad/s, în timp ce $\tau \approx 10^{-14}$ s; Prin urmare, $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p$ și putem distinge următoarele domenii spectrale de interes:

- (1) $\omega < \frac{1}{\tau} \approx 10^{14}$ rad/s: domeniul static până la infraroșu îndepărtat. Conductivitatea σ a metalului este reală, și din relația (3.113) obținem

$$\tilde{n}^2 \equiv i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} = e^{i\pi/2} \quad (3.114)$$

sau

$$\tilde{n}(\omega) = \omega_p \sqrt{\frac{\tau}{\omega}} e^{i\pi/4} = \omega_p \sqrt{\frac{\tau}{\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \quad (3.115)$$

Această situație (pentru care $R\tilde{n} = Im \tilde{n}$) a fost deja studiată: unda electromagnetică este atenuată puternic prin efectul pelicular.

- (2) $\omega > \frac{1}{\tau}$; în acest caz ecuația (3.113) devine

$$\tilde{n}^2 \equiv 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \quad (3.116)$$

Sunt posibile două situații:

- (2a) $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p \approx 10^{16}$ rad/s: domeniul infraroșu și vizibil.

Indicele de refracție este pur imaginar:

$$\tilde{n}(\omega) \equiv i \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.117)$$

În capitolul următor vom vedea că această însemnă reflexia totală a undei electromagneticice pe suprafață metalului.

- (2b) $\frac{1}{\tau} \gg \omega$, dar $\omega > \omega_p$: domeniul ultraviolet și al razelor X.

Indicele de refracție este real, dar mai mic decât unitatea:

$$n(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.118)$$

Se observă că n tinde către 1 dacă $\omega \gg \omega_p$. În această limită a frecvențelor foarte înalte, metalul, ca și dielectricii, nu poate "urmări" semnalul electromagnetic; mediu este practic transparent pentru undele electromagneticice.

b) Plasma

Modelul lui Drude-Lorentz poate fi aplicat și în cazul unei plasme

fără ciocniri, cum este ionosfera, considerând $\omega_0 = \Gamma = 0$.

Plasma este un gaz ionizat, constând din ioni și electroni liberi distribuți într-o regiune din spațiu. Ionosfera – un strat superior al atmosferei – este un exemplu de astfel de plasma. Ionizarea unei molecule de aer se produce prin absorția unei cuante de lumină ultravioletă emisă de soare. Densitatea ioniilor și a electronilor liberi este maximă de la circa 200 km până la 400 km deasupra suprafeței pământului. La înălțimi mai mari, densitatea descrește pentru că densitatea moleculelor neutre de aer care pot fi ionizate descrește. La înălțimi mai mici densitatea plasmelor este mică, pentru că radiația ultravioletă a fost deja absorbită în cea mai mare parte.

În acest caz, conductivitatea electrică devine pur imaginară

$$\sigma(\omega) = i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \quad (3.119)$$

iar permittivitatea electrică este reală

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (3.120)$$

În tabelul următor sunt date câteva valori tipice ale mărimii ω_p .

	$N_0(m^{-3})$	$\omega_p(\text{rad/s})$
metal	$8 \cdot 10^{28}$	$1,6 \cdot 10^{16}$
semiconductor (tip n)	10^{23}	$1,8 \cdot 10^{13}$
ionosferă	10^{11}	$1,8 \cdot 10^7$

c) În cazul general, într-un mediu absorbtiv pierderile sunt determinate atât de procesele de conducție electrică, cât și de polarizarea mediului. Prin urmare, susceptibilitatea electrică va fi suma a doi termenii, unul care descrie polarizarea sarcinilor legate, și altul deplasarea sarcinilor libere. Presupunem parametrii (ω_p, Γ) diferenți pentru cei doi termeni și utilizând relația (3.107) putem scrie

$$\chi = \chi_d + \chi_c = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} - \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_0}. \quad (3.121)$$

Putem defini o permisivitate electrică efectivă a mediului

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi) = \varepsilon_d(\omega) - \frac{\sigma}{i\omega}, \quad (3.122)$$

primul termen caracterizează proprietățile de dielectric, cel de al doilea se referă la proprietățile de conductor. Notând

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \quad (3.123)$$

observăm că

$$\tilde{J}_{total} = \tilde{J}_c + \tilde{J}_d = \sigma \tilde{E} - i\omega \tilde{\varepsilon}_d \tilde{E} = -i\omega \tilde{\varepsilon} \tilde{E}. \quad (3.124)$$

Prin urmare, puterea medie disipată în unitatea de volum este

$$\left\langle \frac{dP_{disip}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{2} R_e \left[\tilde{J}_{total} \cdot \tilde{E}^* \right] = \frac{1}{2} \omega \varepsilon''(\omega) |\tilde{E}|^2. \quad (3.125)$$

Presupunem un mediu dielectric cu pierderi; conductivitatea electrică poate fi considerată reală pentru un domeniu larg de frecvențe, iar $\tilde{\varepsilon}_d(\omega) = \varepsilon'_d(\omega) + i\varepsilon''_d(\omega)$. Atunci, egalând părțile reale și imaginare în ecuația (3.122), obținem:

$$\tilde{\varepsilon}'(\omega) = \varepsilon'_d(\omega); \tilde{\varepsilon}''(\omega) = \varepsilon''_d(\omega) + \frac{\sigma(\omega)}{\omega}. \quad (3.126)$$

Observăm că în expresia puterii medii disipate putem separa pierderile determinante de conducție și de procesul de polarizare

$$\left\langle \frac{dP_{disip}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{2} (\sigma(\omega) + i\omega \varepsilon''_d(\omega)) |\tilde{E}|^2. \quad (3.127)$$

Pentru a analiza structura undei electromagneticice într-un astfel de mediu, vom defini un vector de propagare complex, având modulul

$$\tilde{k} = \alpha + i\beta / 2 = \omega \sqrt{\mu(\varepsilon' + i\varepsilon'')} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \quad (3.128)$$

Ca și în §3.1, comportarea mediului este determinată de valoarea raportului

$$t = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\sigma + i\omega \varepsilon''}{i\omega \varepsilon_d} \quad (3.129)$$

În acest caz definim mediu cu absorbție slabă, respectiv mediu cu absorbție puternică, prin condițile $t <> 1$, respectiv $t > 1$. Un mediu dielectric slab absorbat are o conductivitate σ mică și $\varepsilon_d \approx 0$, în timp ce un conductor bun este caracterizat de valori mari ale lui σ , iar permisivitatea electrică este reală. Pentru aceste cazuri extreme, regăsim rezultatele obținute în paragrafele anterioare.

Exemplu

E1. Un cupitor cu microonde, cu frecvență de lucru de 2,45 GHz, este utilizat pentru a decongela un aliment având permisivitatea $\varepsilon_d = (4+i)\varepsilon_0$ F/m. Determinați adâncimea de pătrundere a undei în mediu și calculați atenuarea relativă a intensității câmpului electric la o distanță de 1 cm de suprafață. Aceleiași întrebări pentru $\varepsilon_d = (45+15i)\varepsilon_0$ F/m.

Rezolvare. În vid, modulul vectorului de undă are valoarea $k_0 = \frac{\omega}{c} = 51,31 \text{ m}^{-1}$. În mediu studiat, $\tilde{k} = k_0 \sqrt{\varepsilon_d / \varepsilon_0}$. Obținem

$$\tilde{k} = \alpha + i\beta / 2 = 51,31 \sqrt{4+i} = 51,31(2,02 + 0,25i) = 103,41 + 12,73i \text{ m}^{-1}$$

respectiv

$$\tilde{k} = 51,31 \sqrt{45+15i} = 51,31(6,80 + 1,10i) = 348,84 + 56,61i \text{ m}^{-1}$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (3.120)$$

În tabelul următor sunt date câteva valori tipice ale mărimii ω_p .

	$N_0(m^{-3})$	$\omega_p(\text{rad/s})$
metal	$8 \cdot 10^{28}$	$1,6 \cdot 10^{16}$
semiconductor (tip n)	10^{23}	$1,8 \cdot 10^{13}$
ionosferă	10^{11}	$1,8 \cdot 10^7$

c) În cazul general, într-un mediu absorbtiv pierderile sunt determinate atât de procesele de conductie electrică, cât și de polarizarea mediului. Prin urmare, susceptibilitatea electrică va fi suma a doi termenii, unul care descrie polarizarea sarcinilor legate, și altul deplasarea sarcinilor libere. Presupunem parametrii (ω_p, Γ) diferenți pentru cei doi termeni și utilizând relația (3.107) putem scrie

$$\chi = \chi_d + \chi_c = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} - \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_0}. \quad (3.121)$$

Putem defini o permisivitate electrică efectivă a mediului

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi) = \varepsilon_d(\omega) - \frac{\sigma}{i\omega}, \quad (3.122)$$

primul termen caracterizează proprietățile de dielectric, cel de al doilea se referă la proprietățile de conductor. Notând

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega),$$

observăm că

$$\tilde{J}_{total} = \tilde{J}_c + \tilde{J}_d = \sigma \tilde{E} - i\omega \tilde{\varepsilon}_d \tilde{E} = -i\omega \tilde{\varepsilon} \tilde{E}. \quad (3.124)$$

Prin urmare, puterea medie disipată în unitatea de volum este

$$\left\langle \frac{dP_{disip}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{2} R_e \left[\tilde{J}_{total} \cdot \tilde{E}^* \right] = \frac{1}{2} \omega \varepsilon(\omega) |\tilde{E}|^2. \quad (3.125)$$

Presupunem un mediu dielectric cu pierderi; conductivitatea electrică poate fi considerată reală pentru un domeniu larg de frecvențe, iar $\tilde{\varepsilon}_d(\omega) = \varepsilon'_d(\omega) + i\varepsilon''_d(\omega)$. Atunci, egalând părțile reale și imaginare în ecuația (3.122), obținem:

$$\tilde{\varepsilon}'(\omega) = \varepsilon'_d(\omega); \tilde{\varepsilon}''(\omega) = \varepsilon''_d(\omega) + \frac{\sigma(\omega)}{\omega}. \quad (3.126)$$

Observăm că în expresia puterii medii disipate putem separa pierderile determinante de conductie și de procesul de polarizare

$$\left\langle \frac{dP_{disip}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{2} (\sigma(\omega) + \omega \varepsilon''_d(\omega)) |\tilde{E}|^2. \quad (3.127)$$

Pentru a analiza structura undei electromagneticice într-un astfel de mediu, vom defini un vector de propagare complex, având modulul

$$\tilde{k} = \alpha + i\beta / 2 = \omega \sqrt{\mu(\varepsilon' + i\varepsilon'')} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \quad (3.128)$$

Ca și în §3.1, comportarea mediului este determinată de valoarea raportului

$$t = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\sigma + i\omega \varepsilon''}{i\omega \varepsilon_d} \quad (3.129)$$

În acest caz definim mediu cu absorbție slabă, respectiv mediu cu absorbție puternică, prin condițile $t <> 1$, respectiv $t >> 1$. Un mediu dielectric slab absorbat are o conductivitate σ mică și $\varepsilon_d \approx 0$, în timp ce un conductor bun este caracterizat de valori mari ale lui σ , iar permisivitatea electrică este reală. Pentru aceste cazuri extreme, regăsim rezultatele obținute în paragrafele anterioare.

Exemple

E1. Un cupitor cu microonde, cu frecvență de lucru de 2,45 GHz, este utilizat pentru a decongela un aliment având permisivitatea $\varepsilon_d = (4+i)\varepsilon_0$ F/m. Determinați adâncimea de pătrundere a undei în mediu și calculați atenuarea relativă a intensității câmpului electric la o distanță de 1 cm de suprafață. Aceleiași întrebări pentru $\varepsilon_d = (45+15i)\varepsilon_0$ F/m.

Rezolvare. În vid, modulul vectorului de undă are valoarea $k_0 = \frac{\omega}{c} = 51,31 \text{ m}^{-1}$. În mediu studiat, $\tilde{k} = k_0 \sqrt{\varepsilon_d / \varepsilon_0}$. Obținem

$$\tilde{k} = \alpha + i\beta / 2 = 51,31 \sqrt{4+i} = 51,31(2,02 + 0,25i) = 103,41 + 12,73i \text{ m}^{-1}$$

respectiv

$$\tilde{k} = 51,31 \sqrt{45+15i} = 51,31(6,80 + 1,10i) = 348,84 + 56,61i \text{ m}^{-1}.$$

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (3.120)$$

În tabelul următor sunt date câteva valori tipice ale mărimei ω_p .

	$N_0 (\text{m}^{-3})$	$\omega_p (\text{rad/s})$
metal	$8 \cdot 10^{28}$	$1,6 \cdot 10^{16}$
semiconductor (tip n)	10^{23}	$1,8 \cdot 10^{13}$
ionosfera	10^{11}	$1,8 \cdot 10^7$

c) În cazul general, într-un mediu absorbant pierderile sunt determinate atât de procesele de conducție electrică, cât și de polarizarea mediului. Prin urmare, susceptibilitatea electrică va fi suma a doi termeni, unul care descrie polarizarea sarcinilor legate, și altul deplasarea sarcinilor libere. Presupunem parametrii (ω_p, Γ) diferenți pentru cei doi termeni și utilizând relația (3.107) putem scrie

$$\chi = \chi_d + \chi_c = \frac{\omega_{dp}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} - \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_0}. \quad (3.121)$$

Putem defini o **permisivitate electrică efectivă** a mediului

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi) = \varepsilon_d(\omega) - \frac{\sigma}{i\omega}; \quad (3.122)$$

primul termen caracterizează proprietățile de dielectric, cel de al doilea se referă la proprietățile de conductor.

Notând

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \quad (3.123)$$

observăm că

$$\tilde{\varepsilon}_{total} = \tilde{\varepsilon}_c + \tilde{\varepsilon}_d = \sigma \tilde{E} - i\omega \varepsilon_d \tilde{E} = -i\omega \varepsilon \tilde{E}. \quad (3.124)$$

Prin urmare, puterea medie disipată în unitatea de volum este

$$\left\langle \frac{dP_{disip}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{2} Re \left[\tilde{\varepsilon}_{total} \cdot \tilde{E}^* \right] = \frac{1}{2} \omega \varepsilon''(\omega) |\tilde{E}|^2. \quad (3.125)$$

Presupunem un mediu dielectric cu pierderi; conductivitatea electrică poate fi considerată reală pentru un domeniu larg de frecvențe, iar $\varepsilon_d(\omega) = \varepsilon'_d(\omega) + i\varepsilon''_d(\omega)$. Atunci, egalând părțile reale și imaginare în ecuația (3.122), obținem:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'_d(\omega); \quad \varepsilon''(\omega) = \varepsilon''_d(\omega) + \frac{\sigma(\omega)}{\omega}. \quad (3.126)$$

Observăm că în expresia puterii medii disipate putem separa pierderile determinate de conducție și de procesul de polarizare

$$\left\langle \frac{dP_{disip}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{2} (\sigma(\omega) + \omega \varepsilon''_d(\omega)) |\tilde{E}|^2. \quad (3.127)$$

Pentru a analiza structura undei electromagneticice într-un astfel de mediu, vom defini un vector de propagare complex, având modulul

$$\tilde{k} = \alpha + i\beta / 2 = \omega \sqrt{\mu(\varepsilon' + i\varepsilon'')} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (3.128)$$

Ca și în §3.1, comportarea mediului este determinată de valoarea raportului

$$t = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma + \omega \varepsilon''_d}{\omega \varepsilon_d} \quad (3.129)$$

În acest caz definim mediul cu absorbtie slabă, respectiv mediul cu absorbtie puternică, prin condițiile $t << 1$, respectiv $t \gg 1$. Un **mediu dielectric slab absorbant** are o conductivitate σ mică și $\varepsilon_d'' \approx 0$, în timp ce un **conductor bun** este caracterizat de valori mari ale lui σ , iar permisivitatea electrică este reală. Pentru aceste cazuri extreme, regăsim rezultatele obținute în paragrafele anterioare.

Exemple

E1. Un cupitor cu microunde, cu frecvență de lucru de 2,45 GHz, este utilizat pentru a decongela un aliment având permisivitatea $\varepsilon_d = (4+i)\varepsilon_0$ F/m. Determinați adâncimea de pătrundere a unei în mediu și calculați atenuarea relativă a intensității câmpului electric la o distanță de 1 cm de suprafață. Aceleasi întrebări pentru $\varepsilon_d = (45+15i)\varepsilon_0$ F/m.

Rezolvare. În vid, modulul vectorului de undă are valoarea $k_0 = \frac{\omega}{c} = 51,31 \text{ m}^{-1}$. În mediu studiat, $\tilde{k} = k_0 \sqrt{\varepsilon_d / \varepsilon_0}$. Obținem

$$\tilde{k} = \alpha + i\beta / 2 = 51,31 \sqrt{4+i} = 51,31(2,02 + 0,25i) = 103,41 + 12,73 i \text{ m}^{-1}$$

respectiv

$$\tilde{k} = 51,31 \sqrt{45+15i} = 51,31(6,80 + 1,10i) = 348,84 + 56,61 i \text{ m}^{-1}.$$

Coefficienții de atenuare liniară și adâncimile de pătrundere sunt:

$$\beta = 25,46 \text{ m}^{-1}, \delta = 1/\beta = 3,93 \text{ cm}.$$

$$\beta = 113,22 \text{ m}^{-1}, \delta = 1/\beta = 0,89 \text{ cm}.$$

Calculăm raportul $E(z)/E(0) = e^{-\frac{\beta z}{2}}$, cu $z=1 \text{ cm}$, în cele două cazuri; valorile obținute sunt $0,88$ și respectiv $0,57$; prin urmare, la o distanță de un centimetru, intensitatea câmpului electric reprezentă 88% , respectiv 57% din valoarea la suprafața mediului.

E2. Pentru apă, coeficientul de atenuare liniară β este de aproximativ $0,01 \text{ m}^{-1}$ pentru $\lambda=380 \text{ nm}$ (violet), scade la o valoare minima de $0,0044 \text{ m}^{-1}$ pentru $\lambda=418 \text{ nm}$ (albastru) și crește până la $0,5 \text{ m}^{-1}$ pentru 600 nm (roșu). Adâncimea de pătrundere corespunzătoare este $\delta = 1/\beta = 100 \text{ m}$, $227,3 \text{ m}$ și respectiv 2 m .

În concluzie, teoria microscopică prezentată arată că:

(1) Propagarea unei unde armonice plane într-un mediu liniar, omogen, izotrop și disipativ este caracterizată de un indice de refracție complex, $\tilde{n} = n' + i n''$. Partea reală determină viteza de fază a undei $v = \frac{c}{n'}$; dacă \tilde{n} depinde de frecvență, mediu este dispersiv.

Fenomenul de dispersie poate fi utilizat pentru a realiza analiza spectrală a unei radiatii necunoscute, cu un spectrometru cu prismă de exemplu. În schimb, el reprezintă un inconvenient important în propagația semnalelor electromagnetice reale (care nu sunt monochromatic). Astfel, în comunicatiile prin fibre optice se alege pentru frecvența centrală a semnalului de transmis o valoare pentru care dispersia în fibră este minima.

Partea imaginară, n'' , determină absorția undei în mediu respectiv.

(2) Mediile dielectrice sunt în general transparente pentru radiații din infraroșu și vizibil. Diferitele mecanisme de polarizare (electronică, ionică și de orientare) determină absorții puternice în domeniul frecvențelor din infraroșu îndepărtat și ultraviolet.

(3) Un mediu conductor, caracterizat de o conductivitate complexă, absorbe puternic în domeniul frecvențelor mici. Conducătorii sunt opaci pentru radiații cu pulsări cuprinsă între $1/\tau$ și pulsulația plasmei, ω_p . Acest domeniu include spectrul vizibil pentru

majoritatea metalelor. În schimb, conductorii devin transparenti pentru pulsări superioare pulsării plasmei.

(4) Toate mediile sunt transparente în domeniul razelor X, cu $n \leq n_{vid}$.

(5) Într-un domeniu de transparență, structura undei plane monocromatice este identică cu cea din vid. Rezultatele obținute pentru propagarea în vid rămân valabile, cu condiția înlocuirii vitezei de propagare c cu $v = c/n$.

(6). Într-un domeniu spectral în care absorția nu este neglijabilă, puterea medie absorbită este proporțională cu partea imaginară a susceptivității electrice efective.

REFLEXIA ȘI REFRACTIA LUMINII

Atunci când o undă electromagnetică cade pe suprafața de separare a două medii cu proprietăți optice diferite, se constată apariția unei unde reflectate și a unei unde transmise (refractate). O asemenea comportare este impusă de condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă mărimele de stare ale câmpului electromagnetic pe suprafața de separare. Înăuntru se seamă de condițiile de continuitate pe această suprafață, pot fi deduse legile reflexiei și refracției. Aceste legi, demonstrate în optică cu ajutorul principiului lui Fermat, nu sunt în realitate decât consecințe ale ecuațiilor lui Maxwell.

4.1. Legile reflexiei și refracției

Fie $\Sigma \equiv xOy$ o suprafață plană care separă două medii dielectrice, omogene, izotrope, cu permisivități electrice relative ϵ_1 , respectiv ϵ_2 și permeabilități magnetice relative $\mu_1 = \mu_2$ (fig. 4.1).

Se consideră o undă luminosă plană, liniar polarizată, incidentă într-un punct O pe suprafața de separare și se postulează, în concordanță cu datele experimentale, apariția unei unde reflectate și a unei unde transmise. Cele trei unde sunt definite prin vectorii câmp electric

$$\vec{E}_i = \vec{A}_i \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) \quad (4.1)$$

$$\vec{E}_r = \vec{A}_r \exp(i\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t) \quad (4.2)$$

$$\vec{E}_t = \vec{A}_t \exp(i\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t) \quad (4.3)$$

unde $\vec{k}_p = k_p \vec{u}_p$, ($p = i, r, t$), versonii \vec{u}_p indicând direcțiile de propagare ale undelor. Considerând medile nedisipative, vitezele de propagare corespunzătoare vor fi $v_1 = c/n_1$, respectiv $v_2 = c/n_2$, unde $n_i = \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$ ($i = 1, 2$), sunt indicii de refacție ai celor două medii. În figura 4.1, \vec{u}_n este normala la suprafața Σ în punctul de incidentă, iar planul (\vec{u}_n, \vec{k}_i) se numește *plan de incidență*.

La interfața $z = 0$ trebuie îndeplinite condițiile la limită (§1.1) și anume continuitatea componentelor tangențiale ale intensității câmpului electric și magnetic ($E_{1t} = E_{2t}$; $H_{1t} = H_{2t}$), respectiv continuitatea componentelor normale ale inducțiilor electrice și magnetice ($D_{1n} = D_{2n}$; $B_{1n} = B_{2n}$).

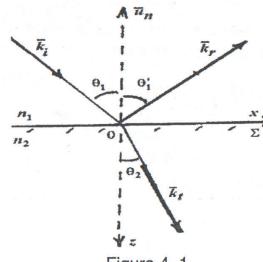


Figura 4.1

Aceste relații sunt o consecință a faptului că pe suprafața de separare dintre cele două medii dielectrice nu există curenti superficiali, respectiv distribuții superficiale de sarcini electrice.

Condiția de continuitate a componentelor tangențiale ale câmpului electric se scrie:

$$(E_{tang,i} + E_{tang,r})|_{\Sigma} = E_{tang,t}|_{\Sigma} \quad (4.4)$$

sau

$$A_{ix} \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_i t) + A_{rx} \exp(i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_r t) = A_{tx} \exp(i\vec{k}_t \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_t t) \quad (4.5)$$

$$A_{iy} \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_i t) + A_{ry} \exp(i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_r t) = A_{ty} \exp(i\vec{k}_t \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_t t) \quad (4.6)$$

Pentru ca relațiile (4.5) și (4.6) să fie satisfăcute la orice moment t și pentru oricare $\vec{r}_{\Sigma} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$, trebuie ca argumentele celor trei exponentiale să fie egale:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_i t = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_r t = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_{\Sigma} - \omega_t t. \quad (4.7)$$

Condiția este satisfăcută și pentru origine, cu $\vec{r}_{\Sigma=0}$, de unde rezultă

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \quad (4.8)$$

adică în urma reflexiei și a refrației la suprafața de separație a doi dielectrici transparenti frecvența undei incidente nu se modifică.

Din relația (4.7) obținem

$$\vec{k}_i \cdot \vec{n}_\Sigma = \vec{k}_r \cdot \vec{n}_\Sigma = \vec{k}_t \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.9)$$

prin urmare componentele vectorilor $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t$ paralele cu suprafața Σ sunt egale. Dacă avem $k_{iy} = 0$, ca în figura 4.1, atunci și $k_{ry} = 0; k_{ty} = 0$; vectorii \vec{k}_i, \vec{k}_r și \vec{k}_t sunt coplanari și situați în planul de incidentă. Am obținut astfel prima lege a lui Descartes: *undele incidentă, reflectată și refractată sunt coplanare.*

Presupunând punctul de observație pe axa Ox , $\vec{n}_\Sigma = x\vec{u}_x$ și putem scrie

$$k_i \sin \theta_1 = k_r \sin \theta_1' = k_t \sin \theta_2. \quad (4.10)$$

Înlocuim $k = \frac{\omega}{v}$, prin urmare

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \theta_1 = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_1' = \frac{\omega}{v_2} \sin \theta_2, \quad (4.11)$$

de unde rezultă

$$\theta_1 = \theta_1' \quad (4.12)$$

și respectiv

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.13)$$

Am demonstrat astfel că:

Unghiuil de reflexie este egal cu unghiuil de incidență (a doua lege a lui Descartes)

Raportul sinusurilor unghiurilor de incidență și de refrație este o constantă caracteristică celor două medii (a treia lege a lui Descartes).

4.2. Formulele lui Fresnel

stabilesc relații cantitative între amplitudinile undelor care participă la procesele de reflexie – refrație.

Vectorii $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ ai fiecărei unde (incidentă, reflectată și refractată) formează un triedru drept. În general, vectorii \vec{E} și \vec{H} nu oscilează în planul de incidență, dar se pot descompune în două componente, una în planul de incidență și alta normală pe acest plan. De aceea, vom considera separat două unde, pentru care

- a) vectorul \vec{E} oscilează în planul de incidență (și atunci vectorul \vec{H} este perpendicular pe acest plan)
- b) vectorul \vec{E} oscilează într-un plan perpendicular pe planul de incidență (prin urmare \vec{H} este conținut în plan)

Procesele de reflexie–refracție se produc în mod independent pentru cele două tipuri de unde. Studiem mai întâi situația

a) pentru care **una incidentă este polarizată paralel cu planul de incidență** (fig. 4.2). Vom scrie condițiile de continuitate pentru componentele tangențiale ale vectorilor \vec{E} și \vec{H} , considerând câmpurile electrice ale undelor incidentă, reflectată și transmisă orientate ca în figura 4.2. Condiția de continuitate (4.5) și relațiile (4.7) conduc la

$$(A_{ix} + A_{rx})|_\Sigma = A_{tx}|_\Sigma \quad (4.14)$$

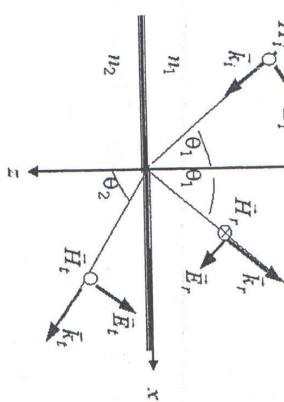


Fig. 4.2

Din condiția de continuitate pentru componentele tangențiale ale câmpului magnetic pe suprafața de separație Σ avem

$$(H_i - H_r)|_\Sigma = H_t|_\Sigma \quad (4.15)$$

Utilizând formulele (2.54) și (2.56), expresia intensității câmpului magnetic al undei incidente poate fi scrisă:

$$\tilde{H}_i = \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\mu_0 \mu_1 \omega} = \frac{1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \left(\frac{\omega}{v_1} \vec{u}_i \times \vec{E}_i \right) = \frac{1}{Z_1} (\vec{u}_i \times \vec{E}_i). \quad (4.16)$$

Prin urmare, amplitudinile câmpurilor magnetice sunt date de:

$$H_{im} = \frac{A_i}{Z_1}; \quad H_{rm} = \frac{A_r}{Z_1}; \quad H_{tm} = \frac{A_t}{Z_2} \quad (4.17)$$

$$A_i \cos \theta_1 + A_r \cos \theta_1 = A_t \cos \theta_2 \quad (4.18)$$

$$\frac{A_i - A_r}{Z_1} = \frac{A_t}{Z_2}. \quad (4.19)$$

Din sistemul de ecuații (4.18-4.19) rezultă formulele lui Fresnel pentru procesele de reflexie-refracție la interfața dintre două medii dielectrice transparente, pentru cazul în care vectorul \vec{E} oscilează paralel cu planul de incidentă:

$$\left(\frac{A_r}{A_i} \right)_\parallel = - \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{A_t}{A_i} \right)_\parallel = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}. \quad (4.21)$$

Pentru medii nemagnetice cu $\mu_1 = \mu_2 = 1$, se obține

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}. \quad (4.22)$$

Definind pentru unda E_\parallel coeficientul de reflexie, r_\parallel , și coeficientul de transmisie, t_\parallel ,

$$r_\parallel = \left(\frac{A_r}{A_i} \right)_\parallel; t_\parallel = \left(\frac{A_t}{A_i} \right)_\parallel \quad (4.23)$$

formulele lui Fresnel (4.20) și (4.21) devin

$$r_\parallel = - \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} \quad (4.24)$$

$$t_\parallel = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (4.25)$$

Aceste relații pot fi scrise în funcție de indicii de refacție n_1 și n_2 :

$$r_\parallel = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1}; t_\parallel = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} \quad (4.26)$$

pentru că $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.

Din relațiile (4.26) se observă că t_\parallel este real și pozitiv și prin urmare defazajul undei transmise este întotdeauna nul. Defazajul undei reflectate este dat de semnul lui r_\parallel ; dacă $r_\parallel < 0$, unda reflectată este defazată cu π .

În figura 4.3 este reprezentată variația coeficientului de reflexie cu unghiul de incidență θ_1 , în două cazuri: $n_2 < n_1$ și $n_2 > n_1$.

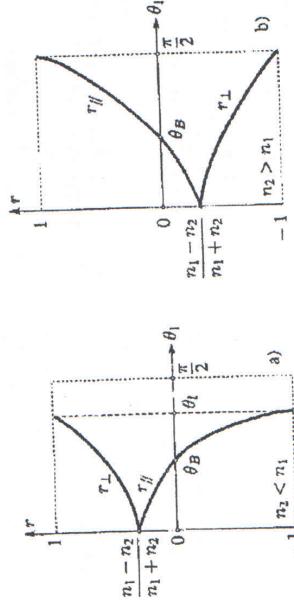


Fig. 4.3

b) *Unda incidentă este polarizată perpendicular pe planul de incidență*

Vom alege orientările vectorilor câmp electric după axa Oy ca în figura 4.4; această alegere dă în cazul particular al incidentei normale, rezultate identice cu cele obținute în cazul polarizării parallele, tratat anterior.

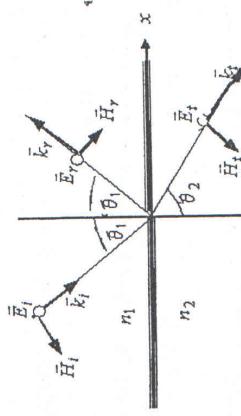


Fig. 4.4

Din condițiile de continuitate pentru componentele tangențiale ale câmpurilor pe suprafața Σ rezultă

$$(E_i + E_r)|_{\Sigma} = E_t|_{\Sigma} \quad (4.27)$$

$$(H_{ix} - H_{ix})|_{\Sigma} = H_{ix}|_{\Sigma} \quad (4.28)$$

dе unde

$$\begin{cases} A_i + A_r = A_t \\ A_i \cos \theta_1 - A_r \cos \theta_1 = A_t \cos \theta_2 \end{cases} \quad Z_1 \quad (4.29)$$

Din acest sistem rezultă a două pereche de relații Fresnel:

$$\begin{cases} \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \\ \frac{A_r}{A_i} = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \end{cases} \quad (4.30) \quad (4.31)$$

Pentru medii nemagnetice relațiile (4.30) și (4.31) devin

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (4.32)$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (4.33)$$

sau

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}; \quad t_{\perp} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}. \quad (4.34)$$

t_{\perp} fiind real și pozitiv, undă transmisă nu este defazată în schimb, r_{\perp} este real și negativ dacă $\theta_2 < \theta_1$, adică $n_2 > n_1$ (fig. 4.3b) și atunci undă reflecțată este defazată cu π .

Cazuri particulare de incidență

1) În cazul incidenței normale ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), formulele lui Fresnel devin:

$$r_{\parallel} = r_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} \quad (4.35)$$

În acest caz, din relațiile (4.34) rezultă că pentru $n_1 > n_2$, A_r și A_i au același semn, prin urmare vectorii \vec{E}_i și \vec{E}_r oscilează în fază (în timp ce vectorii \vec{H}_i și \vec{H}_r au o diferență de fază egală cu π). Pentru $n_2 > n_1$, A_r și A_i sunt de semne contrare, prin urmare există un defazaj de π

între vectorii \vec{E}_i și \vec{E}_r , în timp ce vectorii \vec{H}_i și \vec{H}_r oscilează în fază. De observat că în ambele cazuri mărimele A_i și A_r au același semn: vectorul \vec{E}_i este întotdeauna în fază cu \vec{E}_r .

2) Pentru $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, din formula (4.24) rezultă că $r_{\parallel} = 0$; dacă undă incidentă este polarizată în planul de incidență, ea va fi în întregime transmisă. Acesta este cazul incidenței Brewster.

Din condițiile

$$\theta_B + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \cos \theta_B \quad (4.36)$$

rezultă

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.37)$$

relație numită legea lui Brewster.

Exemplu. Pentru interfața aer – sticlă ($n_1 = 1$ și $n_2 = 1.5$), unghiul Brewster este $\theta_B = \operatorname{arctg} \left(\frac{15}{1} \right) \equiv 57^\circ$, în timp ce în cazul interfeței sticlă–aer, $\theta'_B = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1.5} \right) \equiv 34^\circ$.

Apa are indicele de refracție $n_{\text{apa}} = 4/3$ în domeniul optic, prin urmare la interfața aer–apa, unghiul Brewster este $\theta_B = \operatorname{arctg} \left(\frac{1333}{1} \right) \equiv 53^\circ$, iar $\theta'_B = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1333} \right) \equiv 37^\circ$. În schimb, pentru undele radio $n_{\text{apa}} = 9$, prin urmare $\theta_B \approx 83.7^\circ$ și $\theta'_B \approx 6.3^\circ$. În cazul incidenței pe un material semiconductor, de exemplu la interfața aer–GaAs, cu $n=3.6$, $\theta_B = \operatorname{arctg}(3.6) \approx 74.48^\circ$.

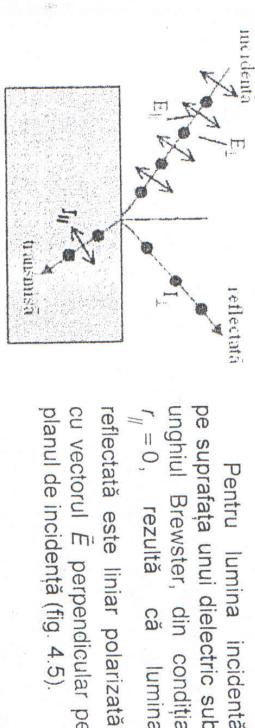


Fig. 4.5.

Exemple

E1. O undă plană monocromatică polarizată perpendicular pe planul de incidentă, se propagă într-un mediu dielectric ideal, cu $\mu = \mu_0$ și indice de refracție $n=2,8$. Unda este incidentă pe interfață cu aerul sub un unghi de 20° . Dacă amplitudinea câmpului electric al undei incidente este $A_i = 2 \cdot 10^{-6}$ V/m, calculați:

- 1) amplitudinile câmpului electric al undei reflectate și al undei transmise;
- 2) amplitudinile inducției magnetice pentru unda incidentă, reflectată și transmisă, B_{im}, B_m, B_{tr} .

Rezolvare

1) Din legea refracției $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ rezultă $\sin \theta_2 = 2,8 \sin 20^\circ$, de unde $\theta_2 = 73,27^\circ$. Se pot calcula coeficienții de reflexie și de transmisie:

$$r = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} = 0,8$$

și respectiv

$$t = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = 1,8.$$

Rezultă valorile pentru amplitudinea câmpului electric al undei reflectate, $A_r = r A_i = 1,6 \mu \text{V/m}$, și, respectiv pentru unda transmisă, $A_t = t A_i = 3,6 \mu \text{V/m}$.

2). Amplitudinea inducției magnetice a undei incidente are valoarea

$$B_{im} = \mu_0 H_{im} = \frac{A_i}{V_1} = \frac{A_i n_1}{C} = 18,7 \cdot 10^{-12} \text{ T}.$$

Pentru unda reflectată

$$B_{tr} = \frac{A_r}{V_1} = \frac{A_r n_1}{C} = 14,9 \cdot 10^{-12} \text{ T},$$

iar pentru unda transmisă

$$B_m = \frac{A_t}{V_2} = \frac{A_t n_1}{C} = 12 \cdot 10^{-12} \text{ T}.$$

E2. Se dă suprafața de separare aer-stică și o undă electromagnetică având $\omega = 3 \cdot 10^{15}$ rad/s sub incidentă $\theta_1 = 60^\circ$. Stîlind că indicele de refracție al sticlei este $n = \sqrt{3}$, să se scrie vectorii $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t$.

Rezolvare

Vectorii de undă pentru undele incidentă și reflectată sunt:

$$\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} \sin \theta_1 \vec{u}_x + \frac{\omega}{c} \cos \theta_1 \vec{u}_z;$$

$$\vec{k}_r = \frac{\omega}{c} \sin \theta_1 \vec{u}_x - \frac{\omega}{c} \cos \theta_1 \vec{u}_z.$$

Înlocuind valorile numerice obținem

$$\vec{k}_i = (0,87 \vec{u}_x + 0,5 \vec{u}_z) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1};$$

$$\vec{k}_r = (0,87 \vec{u}_x - 0,5 \vec{u}_z) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Calculăm unghiu de refracție, θ_2 :

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ.$$

În stică, viteza de fază a luminii este

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

șa încăt vectorul de propagare pentru unda transmisă

$$\vec{k}_t = \frac{\omega}{v} \sin \theta_2 \vec{u}_x + \frac{\omega}{v} \cos \theta_2 \vec{u}_z$$

are valoarea

$$\vec{k}_t = \sqrt{3}(0,5 \vec{u}_x + 0,87 \vec{u}_z) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

4.3. Conservarea energiei în procesele de reflexie – refrație

Se definesc factorul de reflexie R (reflectanță) și factorul de transmisie T (transmitanță) la suprafața de separație a două medii prin relațile:

$$R = \frac{d\Phi_r}{d\Phi_i}; \quad T = \frac{d\Phi_t}{d\Phi_i} \quad (4.38)$$

unde $d\Phi_i, d\Phi_r, d\Phi_t$ sunt fluxurile energetice - incident, reflectat și transmis – de un element de arie dA al suprafeței de separație, Σ . Media temporală a vectorului Poynting este

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\mu} \langle A^2 \rangle \bar{u}_k = \frac{1}{2} \frac{n}{c_0} A_r^2 \bar{u}_k \quad (4.39)$$

asta încât obținem

$$R = \frac{|\bar{u}_n \cdot \langle \bar{S}_r \rangle|}{|\bar{u}_n \cdot \langle \bar{S}_i \rangle|} = \frac{|\bar{u}_n \cdot \bar{u}_r A_r^2|}{|\bar{u}_n \cdot \bar{u}_i A_i^2|} = r^2 \quad (4.40)$$

respectiv

$$T = \frac{|\bar{u}_n \cdot \langle \bar{S}_r \rangle|}{|\bar{u}_n \cdot \langle \bar{S}_i \rangle|} = \frac{|\bar{u}_n \cdot \bar{u}_r A_r^2 n_2|}{|\bar{u}_n \cdot \bar{u}_i A_i^2 n_1|} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} r^2. \quad (4.41)$$

Pentru cele două tipuri de unde studiate se definesc factorii $R_{||}$, R_{\perp} , $T_{||}$

și T_{\perp} :

$$R_{||} = r_{||}^2 \quad \text{și} \quad T_{||} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{||}^2 \quad (4.42)$$

$$R_{\perp} = r_{\perp}^2 \quad \text{și} \quad T_{\perp} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{\perp}^2$$

Tinând seama de relațiile lui Fresnel se pot stabili ecuațiile

$$R_{||} + T_{||} = 1; \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1. \quad (4.43)$$

Dacă α_i este unghiul de polarizare al undei incidente (unghiul format de vectorul \bar{E}_i cu planul de incidentă) putem scrie:

$$R = R_{||} \cos^2 \alpha_i + R_{\perp} \sin^2 \alpha_i \quad (4.44)$$

$$T = T_{||} \cos^2 \alpha_i + T_{\perp} \sin^2 \alpha_i$$

asa încât

$$R + T = 1. \quad (4.45)$$

Aceasta este legea conservării energiei în procesele de reflexie-refracție.

În figura 4.6 este reprezentată dependența factorilor de reflexie $R_{||}, R_{\perp}$ de unghiul de incidentă θ_1 , pentru interfața aer-stică în cele două cazuri posibile: $n_2 < n_1$ și, respectiv, $n_2 > n_1$.

Să observăm că pentru $\theta_1 = \theta_B$, în ambele situații se obține $R_{||} = 0$.

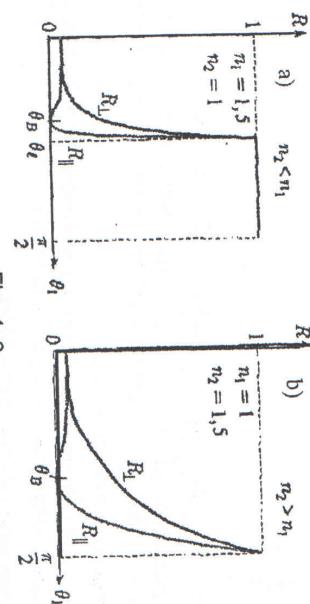


Fig. 4.6

Dacă $n_2 > n_1$, reflexia este foarte slabă, exceptând cazul incidentei razante pe suprafața Σ , ($\theta_1 \rightarrow \pi/2$), când factorii de reflexie $R_{||}$ și $R_{\perp} \rightarrow 1$. Acest rezultat este ușor de verificat în practică: o suprafață de sticla (sau suprafața apei cu $n_2 \approx 1,33$) este aproape transparentă, exceptând incidenta razantă unde se observă efectul de oglindă.

În cazul incidentei aer - GaAs, la incidentă normală $R = 0,319$; variația factorilor de reflexie, $R_{||}, R_{\perp}$, cu unghiul de incidentă este reprezentată în fig. 4.7.

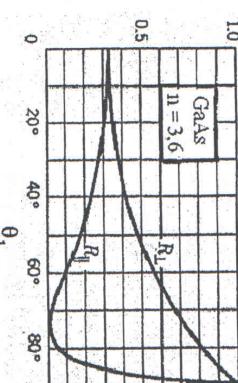


Fig. 4.7.

Observație. În literatura de specialitate există notația de undă p (sau undă TM) pentru cazul $E_{||}$, respectiv undă s (sau undă TE) pentru E_{\perp} .

4.4. Polarizarea luminii în procesele de reflexie – refracție

Definim gradul de polarizare al lumini

$$G_p = \frac{|I_{\parallel} - I_{\perp}|}{I_{\parallel} + I_{\perp}}$$

(4.46)

$I_{\parallel}(I_{\perp})$ fiind intensitatea undei cu vectorul \vec{E} situat în planul de incidentă (respectiv perpendicular pe acest plan). Pentru lumina naturală, $I_{\parallel} = I_{\perp}$ și $G_p = 0$; lumina, liniar polarizată are $G_p = 1$, iar lumina parțial polarizată are $0 < G_p < 1$.

Pentru lumina incidentă pe suprafața unui dielectric sub unghiul Brewster, unde reflectată are $G_p = 1$, pentru că $I_{\parallel} = 0$. Pentru unda transmisă, din formulele lui Fresnel obținem

$$\left| \frac{A_{\parallel}}{A_{\perp}} \right| = \left| \frac{t_{\parallel}}{t_{\perp}} \right| = \left| \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \right| \geq 1, \quad (4.47)$$

prin urmare $(t_{\parallel})_{\parallel} \sim A_{\parallel}^2$ este mai mare decât $(t_{\perp})_{\perp} \sim A_{\perp}^2$. Un calcul simplu dă pentru interfață aer - stică $\theta_1 = \theta_B$, $G_p = 0,075$. Din curbele de variație ale factorilor de reflexie se observă însă că pentru $\theta_1 = \theta_B$, fluxul de energie reflectată este mic, ceea mai mare parte din energia undei incidente regăsindu-se în unda transmisă. De exemplu, în cazul unghiului θ_B apă - $R_{\perp}(\theta_B) = 0,0783$, prin urmare în unda reflectată este numai 7,83% din puterea incidentă, iar pentru interfață aer - stică, $R_{\perp}(\theta_B) = 0,14$.

O metodă eficientă de obținere a luminișului liniar polarizat este utilizarea unor structuri multistrat, cu alternanță de indici de refracție mari, respectiv mici (fig. 4.8). După fiecare proces de refacție sub unghi Brewster, gradul de polarizare a luminișului crește.

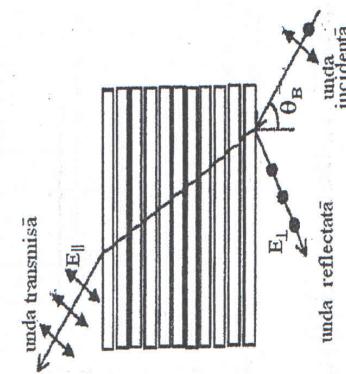


Fig. 4.8

Calculul arată că pentru $\theta_1 = \theta_B$, cu un set de 10 lame dielectrice transparente se obține pentru lumina transmisă gradul de polarizare $G_p \approx 1$.

O aplicatie interesantă a fenomenului de polarizare prin reflexie este **fereastră pentru laser la unghiul Brewster**. Să presupunem că avem un aparat în care este necesar să trimitem o rază de lumină printre fereastră de stică ($n = 1.5$). La incidentă normală, calculele dă pentru factorul de reflexie $R \approx 0,04$, prin urmare numai 92% din intensitatea luminișului incidentă este transmisă prin fereastră de stică (aproximativ 4% se pierde la fiecare suprafață). Acest lucru poate fi tolerabil în anumite situații, dar nu într-un laser cu gaz cu oglindile în afara ferestrelor, unde avem nevoie, poate, de o sută de traversări ale ferestrelor (deoarece $0,92^{100} \approx 0,0003$). O soluție inginoasă în acest caz este de a înclina fereastră astfel încât fasciculul de lumină să fie incident la unghiul Brewster (fig. 4.9 a). Componenta E_{\perp} este parțial reflectată și parțial transmisă (fig. 4.9 b). După un mare număr de transmisii prin fereastră, ea este aproape complet scoasă din fascicul datorită reflexiilor.

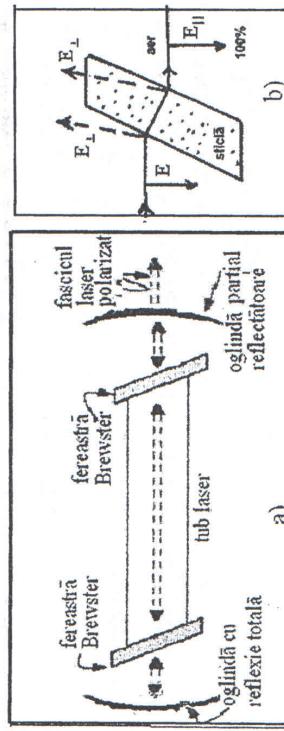


Fig. 4.9.

Pe de altă parte, componenta E_{\parallel} este complet transmisă, coeficientul de reflexie, r_{\parallel} , fiind nul pentru $\theta_1 = \theta_B$. Astfel, chiar după multe traversări ale ferestrei, această componentă a suferit pierderi neglijabile. Rezultatul net este că aproape jumătate din lumina incidentă este transmisă și lumina emisă de laser este 100% polarizată liniar. (Unele dispozitive laser nu folosesc ferestre Brewster – lumina lor nu este liniar polarizată).

4.5. Reflexia totală și unghiul limită

Dacă unda trece dintr-un mediu mai refringent într-un mediu mai puțin refringent ($n_1 > n_2$), se poate găsi un unghi de incidentă $\theta_1 = \theta$, numit *unghi limită* sau *critic*, pentru care $\theta_2 = \pi/2$, așa încât pentru $\theta_1 > \theta_l$, unda incidentă suferă un proces de *reflexie totală*.

Deși, așa cum vom arăta, $R = 1$ dacă $\theta_1 > \theta_l$, ar fi greșit să tragem concluzia că în fenomenul de reflexie totală unda nu pătrunde în mediu (2). Întradevar, pătrunderea undei în acest mediu trebuie să aibă loc în orice caz, pentru a fi satisfăcute ecuațiile de continuitate pentru componentele tangențiale ale câmpului electric, \bar{E} , și magnetic, \bar{H} . Vom demonstra că pentru $\theta_1 > \theta_l$, unda pătrunde în mediu al doilea, propagându-se de-a lungul suprafeței de separare a celor două medi. Unda transmisă va avea expresia:

$$\bar{E}_t = A_t \exp[i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)] = A_t \exp\left[i\left(\frac{\omega}{v_2} \bar{u}_t \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right], \quad (4.48)$$

cu

$$\bar{u}_t = \sin\theta_2 \bar{u}_x + \cos\theta_2 \bar{u}_z.$$

Cu notațiile din figura 4.2, relația $k_t = \frac{\omega}{v_2}$ se poate scrie

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2}. \quad (4.50)$$

Componenta k_{tx} poate fi calculată din condiția de continuitate pe suprafață Σ (ecuația (4.10)):

$$k_{tx} = k_{tx} = \frac{\omega}{v_1} \sin\theta_1 = \frac{\omega n_1}{c} \sin\theta_1, \quad (4.51)$$

așa încât

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1) \quad (4.52)$$

Dacă $\theta_1 > \theta_l$, rezultă

$$\sin\theta_1 > \sin\theta_l = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.53)$$

Prin urmare $k_z^2 < 0$. Notăm $k_{tz} = ik$ și înlocuind în ecuația (4.48), obținem

$$\bar{E}_t = A_t \exp(-\kappa z) \exp(i(k_{tx}x - \omega t)). \quad (4.54)$$

Câmpul electric al undei transmise este

$$\bar{E}_t = \bar{A}_t \exp\left[-z \frac{\omega}{v_2} \sqrt{\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right)^2 - 1}\right] \exp\left[i\left(\frac{\omega}{v_2} x \sin\theta_2 - \omega t\right)\right]. \quad (4.55)$$

În această expresie, termenul I definește amplitudinea unei unde II, care se propagă de-a lungul axei Ox , cu viteza $v_2 / \sin\theta_2$. Amplitudinea undei scade exponențial cu adâncimea de pătrundere, z , în mediu al doilea. Unda de amplitudine

$$A_t \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right)^2 - 1}\right], \quad (4.56)$$

care se propagă în mediu (2) paralel cu suprafața de separare se numește *unda evanescență*.

Pentru că intensitatea undei este proporțională cu pătratul amplitudinii avem:

$$I_t(z) = I_t(0) \exp[-\beta z] \quad (4.57)$$

cu

$$\beta = \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right)^2 - 1}, \quad (4.58)$$

iar adâncimea de pătrundere este

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - 1}{n_2^2} \right)^{1/2}. \quad (4.59)$$

Ordin de mărime. Pentru interfața sticlă–aer, cu $n_1 \approx 1.5$ și $n_2 \approx 1$, unghiul limită este $\theta_l = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = 41.2^\circ$. Atunci, pentru un unghi de incidentă $\theta_1 = 45^\circ > \theta_l$, valoarea adâncimii de pătrundere a undei este $\delta \approx 0.4\lambda$.

Prin urmare, unda evanescență există în mediu (2) doar într-un strat superficial, a cărui grosime este aproximativ egală cu lungimea de undă a radiatiei.

Prezența energiei electromagnetice în mediu (2) în vecinătatea interfeței poate fi pusă în evidență experimental, limitând grosimea acestui mediu la valori foarte mici, de ordinul lui δ ; se utilizează pentru

aceasta o a două interfață cu un mediu mai refringent, cu indicele de refacție n_1 de exemplu, ca în figura 4.10a. Unda este atunci parțial transmisă, traversând această a două interfață: aceasta este *reflexia totală frustrată*.

În dispozitivul din figura 4.10b, radiația incidentă pe ipotenuza primei prisme de sticla va fi total reflectată, dar în prezența celei de a doua prisme, reflexia totală devine frustrată și apare o undă transmisă.

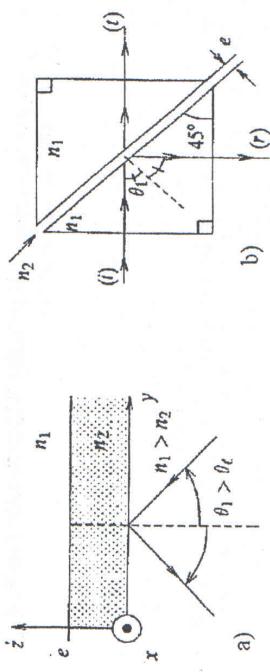


Fig. 4.10

Un receptor poate înregistra intensitatea undei transmise, a cărei valoare depinde de distanța e dintre prisme. Dacă $e > \lambda$, unda transmisă nu există; pentru $e < \lambda$, variația distanță dintre prisme, se realizează o modulare a undei în amplitudine (relația 4.57) și deci o variație a intensității undei transmise. Pe acest principiu se poate realiza un modulator de lumină în cadrul unui sistem de comunicații optice.

Observație. Fenomenele de reflexie și de transmisie a unei unde la suprafața de separație a două mediilor sunt specifice electromagnetismului. Toate rezultatele obținute anterior pot fi aplicate și în cazul undelor asociate microparticulelor. Cazul reflexiei totale frustrate poate fi considerat ca un caz particular de efect tunel pentru fotoni.

Să studiem acum ce se întâmplă cu unda reflectată pentru $\theta_1 > \theta_i$. Înlocuind

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_1} \quad \text{și} \quad \frac{n_2}{n_1} = \sin\theta_i \quad (4.60)$$

în formulele lui Fresnel (4.26) și (4.34), se obține, după calcule simple:

$$R_{||} = \frac{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2\theta_1} - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos\theta_1}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2\theta_1} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos\theta_1} = \frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - \sin^2\theta_1} - \sin^2\theta_1 \cos\theta_1}{\sqrt{\sin^2\theta_i - \sin^2\theta_1} + \sin^2\theta_1 \cos\theta_1} \quad (4.61)$$

$$r_{\perp} = \frac{\cos\theta_1 - i\sqrt{\sin^2\theta_i - \sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1 + i\sqrt{\sin^2\theta_i - \sin^2\theta_1}}. \quad (4.62)$$

Se observă că pentru $\theta_i = \theta_1$, $r_{||} = -1$ și $r_{\perp} = 1$. Dacă $\theta_1 > \theta_i$, coeficienții Fresnel devin mărimi complexe:

$$R_{||} = \frac{i\sqrt{\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_i} - \sin^2\theta_i \cos\theta_1}{i\sqrt{\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_i} + \sin^2\theta_i \cos\theta_1}; \quad (4.63)$$

$$r_{\perp} = \frac{\cos\theta_1 - i\sqrt{\sin^2\theta_i - \sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1 + i\sqrt{\sin^2\theta_i - \sin^2\theta_1}}. \quad (4.64)$$

Se știe însă că orice număr complex z de forma $z = \frac{a+ib}{a-ib}$ are proprietatea că $|z| = 1$. Rezultă că pentru $\theta_1 > \theta_i$, $R = r^* = 1$ și $T = 0$; dependența de unghiul θ_1 a factorilor de reflexie $R_{||}$ și R_{\perp} pentru incidența aer-stică este reprezentată în fig. 4.7a. Pentru $\theta_1 = 0$, pentru interfața apă-aer, în domeniul optic ($n_{apa} = 1,333$), $\theta_i = 48,6^\circ$; pentru unde radio ($n_{apa} = 9$), se obține $\theta_i = 6,4^\circ$.

În cazul particular al trecerii luminii din sticla în aer, $\theta_i = 41,2^\circ$. Dependența de unghiul θ_1 a factorilor de reflexie $R_{||}$ și R_{\perp} pentru incidența aer-stică este reprezentată în fig. 4.7a. Pentru $\theta_1 = 0$,

$$R_{||} = R_{\perp} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \approx 0,04. \quad \text{Se observă că pentru } \theta_1 = \theta_B, R_{||} = 0, \text{ iar pentru } \theta_1 \rightarrow \theta_i \text{ (și nu pentru } \theta_1 \rightarrow \pi/2 \text{ ca în cazul } n_2 > n_1), R \rightarrow 1.$$

Aplicații.

1. Microscopul cu reflexie totală internă
TIRM (Total Internal Reflection Microscopy) este o metodă optică de determinare a distanței instantanee între o sferă cu dimensiuni microscopice și o suprafață plană, cu o precizie de ordinul 1 nm, utilizată în biologia celulară. Pentru a determina această distanță, se

măsoară intensitatea lumini împărtăsite de sferă când lumina incidentă pe suprafața ei este o undă evanescență (fig. 4.11).

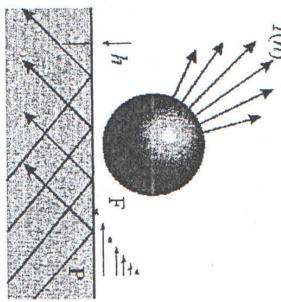


Fig. 4.11

undei evanescente

$$I(h) = I_0 e^{-\beta h}$$

cu β determinat din ecuația (4.58), unde n_1 și n_2 sunt indicele de refracție pentru placă, respectiv pentru fluid. Dispozitivele performante pot detecta modificările de 1% în intensitatea lumini difuzate, pentru că valorile pentru β^{-1} sunt de ordinul 100 nm, o variație de 1% în I corespunde la o variație de 1 nm a lui h . Prin urmare, se pot detecta modificările de ordinul 1 nm ale distanței, acestea fiind rezoluția spațială a tehnicii descrise.

2. Rombul lui Fresnel. Este o priză de sticlă a cărei geometrie (fig. 4.12) permite introducerea unui defazaj de 90° între unda p (E_{\parallel}) și unda s (E_{\perp}), transformând o polarizarea liniară în polarizare circulară. Comparativ cu dispozitivele similare bazate pe fenomenul de birefringență (cap. 6), prisma Fresnel are avantajul că acest defazaj este independent de frecvența undei incidente (dispozitiv acromatic). Lumina liniar polarizată este incidentă pe sticla (cu indice de refracție $n = 1,51$, așa încât unghiul limită este $\theta_i = 41,47^\circ$), având vectorul \vec{E} la 45° față de planul de incidentă. Unghiul rombului, $\theta = 54,62^\circ$, este și unghiul de incidență pe fețele prismei. Acest unghi este ales așa încât, la fiecare reflexie totală, defazajul între cele două componente, E_{\parallel} și E_{\perp} , să fie de 45° , astfel, după două reflexii consecutive acesta devine egal cu 90° .

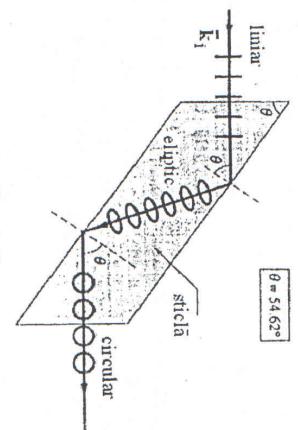


Fig. 4.12

Unghiiul rombului poate fi determinat astfel. Pentru $\theta_1 > \theta_i$ și $n_1 = 1$ rescriem coeficientii Fresnel (4.63 - 4.64) sub forma

$$r_{\perp} = \frac{1-iu}{1+iu} \quad r_{\parallel} = \frac{-1-iun^2}{1+iun^2} \quad (4.66)$$

unde

$$u = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta} \quad \text{și} \quad \sin \theta_i = 1/n. \quad (4.67)$$

Observăm că

$$r_{\perp} = \frac{|z| e^{-i\varphi_{\perp}}}{|z| e^{i\varphi_{\perp}}} = e^{-i2\varphi_{\perp}} \quad (4.68)$$

iar

$$r_{\parallel} = -e^{-i2\varphi_{\parallel}} = e^{i\pi} e^{-i2\varphi_{\parallel}} \quad (4.69)$$

unde φ_{\perp} , φ_{\parallel} sunt defazajele corespunzătoare numerelor complexe de la numărotoriile celor două expresii (4.66)

$$\operatorname{tg} \varphi_{\perp} = u; \operatorname{tg} \varphi_{\parallel} = un^2. \quad (4.70)$$

Unda incidentă polarizată liniar poate fi obținută prin suprapunerea a două unde, una de tip p , cealaltă de tip s , având amplitudini egale ($A_1 = A_2 = A$) și faze inițiale $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$. După prima reflexie totală, unda reflectată de tip p are amplitudinea $\tilde{A}_{\parallel} = -A e^{-i2\varphi_{\parallel}}$, iar pentru unda s , $\tilde{A}_{\perp} = A e^{-i2\varphi_{\perp}}$. După a două reflexie, defazajul între cele două unde devine egal cu $4(\varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp}) = \pi/8$. Condiția ca acest defazaj să fie egal cu 90° rezultă $\varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp} = \pi/8$.

Prin urmare

$$\operatorname{tg}(\varphi_{||} - \varphi_{\perp}) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_{||} - \operatorname{tg}\varphi_{\perp}}{1 + \operatorname{tg}\varphi_{||}\operatorname{tg}\varphi_{\perp}} = \frac{u\eta^2 - u}{1 + u^2\eta^2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right). \quad (4.71)$$

În cazul în care mediul 2 este un mediu disipativ ($\sigma \neq 0$), el este caracterizat de un indice de refacție complex $\tilde{n}_2 = n_2' + i/n_2''$. Pentru simplificarea calculelor, vom considera incidenta aproape normală ($\theta_1 \rightarrow 0$). Vectorul de undă asociat undei transmise este atunci

$$\tilde{k}_t = \frac{\omega}{c} \tilde{n}_2 \tilde{u}_z = k_0(n_2' + i/n_2'') \tilde{u}_z, \quad (4.72)$$

iar câmpul electromagnetic $(\tilde{\tilde{E}}_t, \tilde{\tilde{B}}_t)$ se scrie:

$$\tilde{\tilde{E}}_t = \tilde{A}_t \exp(-k_0 n_2'' z) \exp[i(k_0 n_2' z - \omega t)] \quad (4.73)$$

$$\tilde{\tilde{B}}_t = \frac{\tilde{n}_2}{c} \tilde{u}_z \times \tilde{\tilde{E}}_t, \quad (4.74)$$

Prin urmare, undă transmisă se propagă după Oz cu o viteză de fază c/n_2' și se atenuază exponential în mediu. Să observăm că, datorită faptului că \tilde{n}_2 este o mareime complexă, câmpul magnetic nu este în fază cu cel electric.

Formulele lui Fresnel (4.35) devin:

$$\tilde{r} = \frac{n_1 - \tilde{n}_2}{n_1 + \tilde{n}_2} = \frac{n_1 - n_2' - i/n_2''}{n_1 + n_2' + i/n_2''}, \quad (4.75)$$

și respectiv

$$\tilde{t} = \frac{2n_1}{n_1 + \tilde{n}_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2' + i/n_2''}. \quad (4.76)$$

Valoarea complexă a acestor coeficienți arată existența unui defazaj al undelor reflectate și transmisă în raport cu unda incidentă.

Să pot deduce atunci factorii de reflexie și de transmisie

$$R = \tilde{r} \tilde{r}^* = \frac{(n_1 - n_2')^2 + n_2''^2}{(n_1 + n_2')^2 + n_2''^2} \quad (4.77)$$

$$T = \tilde{t} \tilde{t}^* = \frac{4n_1 n_2'}{(n_1 + n_2')^2 + n_2''^2} = 1 - R \quad (4.78)$$

a) **Reflexia și absorția în metale la frecvențe joase**

Dacă $\sigma \ll 1$, conductivitatea electrică a mediului este reală și egală cu valoarea sa în regim stationar; în acest caz, din relația (3.115) obținem

$$n_2' = n_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_p \sqrt{\frac{\tau}{\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}}. \quad (4.79)$$

Înlocuind aceste expresii în (4.72) și (4.73), vectorul de undă \tilde{k}_t și câmpul electric al undei transmise pot fi scrise sub forma

$$\tilde{k}_t = \frac{\omega}{c} \tilde{n}_2 = \frac{1}{2\delta} (1 + i/\tilde{u}_z), \quad (4.80)$$

$$\tilde{E}_t = \tilde{A}_t \exp\left(-\frac{z}{2\delta}\right) \exp\left[i\left(\frac{z}{2\delta} - \omega t\right)\right] \quad (4.81)$$

unde $\delta = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\omega}}$ este adâncimea de pătrundere. Observăm că unda transmisă în mediu al doilea este absorbită puternic; după o distanță de câteva δ semnalul este practic nul.

Condiția $\sigma \ll 1$ implică $n_2' = n_2'' \gg \omega_p \tau$. Pentru metale $\omega_p \approx 10^{16}$ rad/s și $\tau \approx 10^{-14}$ s, astă încât la frecvențe joase $n_2' = n_2'' \gg 1$.

Coefficientul de reflexie este

$$\tilde{r} = \frac{1 - n_2' - i/n_2''}{1 + n_2' + i/n_2''} \approx -1. \quad (4.82)$$

Rezultă că la reflexia pe o suprafață metalică unda suferă un defazaj de π , iar factorul de reflexie $R \approx 1$. Expressia corespunzătoare pentru transmițanță T este cunoscută sub numele de formula Hagen-Rubens:

$$T = \frac{4n'_2}{(1+n'_2)^2 + n''_2^2} \equiv \frac{2}{n'_2} = \frac{4\pi\delta}{\lambda_0} \quad (4.83)$$

unde $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ este lungimea de undă a radiatiei în vid.

Ordin de mărime. Pentru cupru la frecvența de 1 GHz, $n'_2 = n''_2 = 732$ și $T \approx 2,7 \cdot 10^{-3} \ll 1$, iar $R = 1 - T \approx 0,9973 \approx 1$.

Observație. Pentru că la frecvențe joase $n'_2 \gg 1$, chiar dacă incidenta nu e normală, unghiul de refracție este întotdeauna mic; practic, unda transmisă în metal se propagă întotdeauna normal la interfață.

b) Reflexia și transmisia la frecvențe înalte

Așa cum am arătat în capitolul 3, dacă $\omega >> 1$, indicele de refracție al unui metal devine

$$\tilde{n}_2^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (4.84)$$

Această expresie este valabilă și în cazul plasmei.

Plasma este un amestec (neutră din punct de vedere electric) de ionii pozitivi, electroni și atomi neutră. Într-o plasma rarefiată (în răcirea ciocnirii), expresia indiceului de refracție se obține din relația (3.64), punând condiția $\omega_0 = 0$ și $\Gamma = 0$. Un exemplu de plasma este ionosfera, un strat superior al atmosferei, la o altitudine cuprinsă între 50 și 600 km deasupra pământului și care influențează puternic propagarea undelor radio. Ionosfera constă din molecule de oxigen și azot la presiuni mici, care sunt ionizate sub acțiunea radiatiei ultraviolete emise de soare. În timpul zilei, ionizarea este mai puternică, în timp ce noaptea o parte dintre ionii recombină. Concentrația de electroni, N , variază în timpul zilei (datorită radiatiei solare), dar și cu altitudinea: crește până la aproximativ 150 km (în pătrile D și E ale ionosferei), atinge o valoare maximă în stratul F (între 250-400 km), apoi descrește pentru că deși radierea solară este intensă, există puțini atomi de gaz care pot fi ionizați (concentrația de molecule de gaz scade exponențial cu înălțimea în atmosferă). La înălțimi mici, concentrația de electroni este mică pentru că radierea ultravioletă emisă de soare a fost deja absorbită în pătrile superioare ale atmosferei.

Sunt posibile două cazuri:

b1) $\omega < \omega_p$

Indicele de refracție este în acest caz imaginar

$$\tilde{n}_2 = i\tilde{n}_2'' = i \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.85)$$

Și obținem

$$\tilde{r} \equiv \frac{1 - i\tilde{n}_2''}{1 + i\tilde{n}_2''}; \quad \tilde{t} = \frac{2}{1 + i\tilde{n}_2''} \equiv -\frac{-2i\omega}{\omega_p} \equiv 0. \quad (4.86)$$

Pentru că $|\tilde{r}| = 1$, rezultă $R = \tilde{r} \tilde{r}^* = 1$ și $T \equiv 0$ (reflexie totală).

În cazul metalelor $\omega_p \approx 1,6 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$; prin urmare, radiatările din domeniul vizibil ($\omega \approx 10^{15} \text{ rad/s}$) sunt total reflectate, ceea ce explică "luciu metallic" al acestor suprafete și utilizarea lor – sub formă de straturi subțiri – la obținerea oglindilor.



Fig. 4.13.

În cazul ionosferei, pulsăriile plasmelor $\omega_p \approx 1,8 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$; prin urmare, undele radio de frecvențe joase vor fi reflectate total la suprafața plasmei. Acest fenomen permite realizarea de

transmisii radio la mari distanțe, utilizând undele radio lungi, cu frecvențe $\omega \in [3-300] \text{ kHz}$; semnalele se propagă prin reflexii successive pe suprafața pământului (care este și el un mediu conductor) și pe ionosferă (fig. 4.13).

b2) $\omega > \omega_p$

În acest caz indicele de refracție \tilde{n}_2 este real, dar mai mic decât 1:

$$n'_2 = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.87)$$

asa încât mărurile

$$r \equiv \frac{1 - n'_2}{1 + n'_2} \quad \text{și} \quad t = \frac{2}{1 + n'_2} \quad (4.88)$$

sunt reale și pozitive (nu există defazaj pentru unde reflectată și transmisă). Se observă că în acest caz factorul de transmisie

$$T = 1 - R = \frac{4n'_2}{(1+n'_2)^2} \quad (4.89)$$

crescă când pulsuația crește și tinde către 1, dacă $\omega > \omega_p$.

Acest rezultat explică transparența metalor în domeniile ultraviolet și al razelor X și posibilitatea comunicării prin satelit utilizând unde cu frecvențe superioare valorii de prag, $\omega_p = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1.8 \cdot 10^7}{2\pi} \approx 3 \text{ MHz}$; de exemplu, unde radio cu $\omega \geq 30 \text{ MHz}$ pot traversa ionosfera fără atenuare (transmisie totală).

În plus, trebuie observat că dacă plasma este imersată într-un câmp magnetic, propagarea undelor depinde nu numai de frecvență, ci și de intensitatea câmpului magnetic și de direcția de propagare a undei față de direcția câmpului magnetic. În câmpul magnetic terestru, undele radio de frecvență înalte se pot propaga în orice direcție (viteză lor va depinde însă de direcția de propagare), dar undele de joasă frecvență se propagă numai dacă unghiul dintre direcția lor de propagare și direcția câmpului magnetic este mai mic dacă o valoare critică.

În tabelul următor este rezumată comportarea unui mediu conductor în funcție de pulsuația undei incidente:

$\omega \leq \frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau} < \omega < \omega_p$	$\omega > \omega_p$	$\omega > \omega_p$
reflexie puternică și absorbtie	reflexie totală	transmisie totală fără absorbtie	

Exemplu. Incidentă normală pe mediul conductoare

Indicele de refracție al germaniului corespunzător lungimii de undă $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ este $n = 3,47 + 140i$. Să se determine:

1. factorul de reflexie la incidentă normală aer-germaniu.
2. defazajul introdus pentru undă reflectată la incidentă normală.
3. parcursul unei unde în germaniu, dacă intensitatea luminoasă scade de 1 000 ori.

Rezolvare.

1. Din formula (4.75) rezultă

$$\tilde{r} = r \exp(i\phi_r) = \frac{1 - \tilde{n}}{1 + \tilde{n}} = \frac{1 - n' - in'}{1 + n' + in'}$$

și factorul de reflexie

$$R = \tilde{r} \tilde{r}^* = \frac{(1 - n')^2 + n''^2}{(1 + n')^2 + n''^2} = 0,37.$$

2. Defazajul undei reflectate este dat de

$$\operatorname{tg} \phi_r = -\frac{2n'}{1 - n'^2 - n''^2} = 0,216, \text{ de unde } \phi_r = 167,80^\circ.$$

3. Scăderea intensității luminoase cu parcursul în material are loc după o legă exponențială

$$I = I_0 \exp(-\beta z)$$

$$\text{cu } \frac{\beta}{2} = \frac{\omega}{c} I m \tilde{n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n'.$$

În cazul considerat,

$$\frac{I}{I_0} = 10^{-3} = \exp\left(-\frac{4\pi}{\lambda_0} n' z\right),$$

de unde rezultă

$$z \equiv 0,2 \mu\text{m}.$$

4.7. Presiunea radiației

Efectul presiunii radiației trebuie să se observe în toate procesele de reflexie și de absorbtie a undelor electromagnetice de către substance iradiate. Într-adevăr, orice variație a fluxului incident trebuie să conducă la apariția unei forțe suplimentare, care poate fi interpretată ca fiind dată de presiunea radiației. Pentru că toate corpurile conțin sarcini electrice, putem presupune că interacția undelor electromagnetice cu materia – interacție însotită de reflexia sau absorbtia unei părți din fluxul luminos incident – constă în apariția unei forțe $q\vec{E}$, exercitată de componenta electrică a câmpului electromagnetic asupra fiecărei sarcini electrice. Forța Laplace pe unitatea de volum a unui conductor va fi:

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{J} \times \vec{B}_t = \sigma \vec{E}_t \times \vec{B}_t = \sigma \mu_0 \vec{S}_t. \quad (4.90)$$

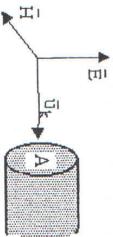


Fig. 4.14

perpendicular pe direcția versorului \bar{u}_k (fig. 4.14);

$$\langle \bar{F} \rangle = \sigma \mu_0 A \int_0^{\infty} \langle \bar{S}_t(z) \rangle dz = \sigma \mu_0 A \langle \bar{S}_t(0) \rangle \int_0^{\infty} e^{-z/\delta} dz = \quad (4.91)$$

$$= \sigma \mu_0 A \delta \langle \bar{S}_t(0) \rangle.$$

La incidență normală, din definiția factorului de transmisie avem

$$T = \frac{\langle S_t(0) \rangle}{\langle S_i(0) \rangle} \quad (4.92)$$

și înlocuind în (4.91) obținem

$$\langle \bar{F} \rangle = \sigma \mu_0 A \delta T \langle \bar{S}_t(0) \rangle \bar{u}_k. \quad (4.93)$$

Pentru metale, adâncimea de pătrundere $\delta = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_0 \mu_0}}$ și, cu formula lui Hagen – Rubens

$$T \equiv \frac{2}{n} = \frac{2}{\sqrt{\sigma / 2\alpha \epsilon_0}} \quad (4.94)$$

expresia forței devine

$$\langle \bar{F} \rangle = \frac{2A}{c} \langle S_i \rangle \bar{u}_k. \quad (4.95)$$

Calculând presiunea exercitată de radiație

$$\rho_{rad} = \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{2}{c} \langle S_i \rangle \quad (4.96)$$

observăm că este proporțională cu mărimea vectorului Poynting incident pe suprafață și nu depinde de frecvența undei și de adâncimea de pătrundere δ .

Presiunea radiației poate fi interpretată ca un transfer de impuls de la radiația electromagnetică incidentă către mediul material, prin intermediul electronilor. Această interpretare rezultă simplu dacă

Direcția forței coincide cu cea a vectorului Poynting, \bar{S} , deci cu direcția de propagare a undei. Calculăm forța medie exercitată de radiație asupra unui conductor infinit de lung și cu suprafață de arie A plasată

cu suprafață de arie A exercitată de radiație asupra unui conductor infinit de lung și cu suprafață de arie A plasată

unde N este concentrația de fotoni. Presiunea exercitată de undă asupra unei suprafețe perfect reflectătoare (de exemplu, un metal ideal) este efectul ciocnirii fotoniilor cu această suprafață. Pentru că înto ciocnire impulsul total al sistemului (foton+mediu) se conservă, variația impulsului mediului va fi

$$\Delta \bar{P}_m = \bar{p}_i - \bar{p}_f \quad (4.97)$$

\bar{p}_i și \bar{p}_f fiind impulsurile fotonului incident, respectiv reflectat. Dacă presupunem ciocnirea elastică, $\bar{p}_i = -\bar{p}_f$, atunci $\Delta \bar{P}_m = 2\bar{p}_i$. Într-un interval de timp Δt , impulsul cedat mediului prin suprafața de arie A este dat de ciocnirile fotoniilor conținuți în volumul unui cilindru de arie A și înălțime $c \Delta t$, c fiind viteza luminii. Obținem

$$\Delta \bar{P}_{total} = 2\bar{p}_i N A c \Delta t. \quad (4.98)$$

Pentru fotoni, $\varepsilon = pc$, iar $\langle \bar{S} \rangle = c w \bar{u}_k$,

prin urmare rezultă

$$\Delta \bar{P}_m^{total} = 2 \frac{\varepsilon_i}{c} N A c \Delta t \bar{u}_k = 2 \frac{w_{inc}}{c} A c \Delta t \bar{u}_k \quad (4.101)$$

unde $w_{inc} = N \epsilon_i$ este densitatea volumică de energie transportată de undă incidentă. Putem scrie atunci

$$\Delta \bar{P}_m^{total} = 2 \frac{\langle \bar{S}_i \rangle}{c} A \Delta t \quad (4.102)$$

Se observă că forța medie rezultată exercitată asupra mediului

$$\langle \bar{F} \rangle = \frac{\Delta \bar{P}_m^{total}}{\Delta t} = 2 A \frac{\langle \bar{S}_i \rangle}{c} \quad (4.103)$$

conduce la aceeași formulă (4.96) pentru presiunea radiației

$$\rho_{rad} = \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{2}{c} \langle S_i \rangle.$$

Exemplu. Presiunea radiației solare
La suprafață pământului, valoarea medie a vectorului Poynting

corespunzător radiației solare este $\langle S \rangle = 135 \text{ kW/m}^2$. O oglindă plasată perpendicular pe direcția razelor va fi supusă unei presiuni $p_{rad} \approx 9 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$, mult mai mică decât presiunea atmosferică ($p_{atm} \approx 10^5 \text{ N/m}^2$) (de unde și dificultatea de a o punе în evidență).

Considerând undele armonice plane, putem calcula amplitudinea câmpului electric

$$E_0 = \frac{\langle 2 \langle S \rangle \rangle}{c \epsilon_0} = 10^3 \text{ V/m}.$$

Amplitudinea corespunzătoare a câmpului magnetic este

$$B_0 = E_0 / c = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

Acest câmp magnetic asociat radiației solare este mai mic decât o zecime din câmpul magnetic terestru.

Puterea medie emisă de soare este

$$\langle P \rangle = \langle S \rangle A = \langle S \rangle 4\pi R^2$$

unde R este distanța medie soare-pământ, $R = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Înlocuind obținem $\langle P \rangle = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

O experiență care demonstrează existența presiunii radiației este ilustrată schematic în fig. 4.15.



Fig. 4.15

(Sferă este foarte mică și nu poate fi văzută cu ochiul liber, dar în experiență se observă datorită strălucirii sale, dată de difuzia radiației laser). Ordinul de mărime al valorilor experimentale rezultă din următorul

Exemplu. Sferă în levitație într-un fascicul laser vertical

O sferă conductoare (de rază r și masă m), este plasată într-un fascicul laser vertical. Fie I intensitatea radiației laser și N numărul de fotoni incidenti în unitatea de volum.

1. Calculați impulsul cedat de un foton sferei și presiunea exercitată de radiatia laser pe o suprafață elementară a sferei.
2. Care este forță exercitată asupra sferei?
3. Ce valoare are raza unei sfere din aluminiu (cu densitatea $\rho_m = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) pentru a fi în levitație într-un fascicul laser cu putere de 1 W și cu secțiunea de 1 mm^2 ?

Rezolvare

1. În ciocnirea elastică foton-sferă (fig. 4.16), din legea conservării impulsului rezultă

$$\Delta \vec{P}_m = \vec{p}_f - \vec{p}_r = -2p \cos \theta' \vec{u}_r = -\frac{2hv}{c} \cos \theta' \vec{u}_r.$$

În intervalul de timp dt , numărul de fotoni dN incidenti pe suprafață elementară dA este egal cu $N dA \cos \theta' c dt$. Putem calcula atunci forța exercitată asupra elementului de suprafață dA și presiunea corespunzătoare:

$$d\vec{F} = \Delta \vec{P}_m \frac{dN}{dA}$$

de unde obținem:

$$d\vec{F} = -2Nhv \cos^2 \theta' dA \vec{u}_r.$$

Prin urmare

$$\rho_{rad} = 2Nhv \cos^2 \theta'.$$

2. Din simetria sferică a problemei rezultă forță $\vec{F} = F_z \vec{u}_z$. Înlocuind $dA = r^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$, și integrând după θ' și ϕ' se obține:

$$\vec{F} = 4Nhv \pi r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta' \sin \theta' d\theta' \vec{u}_z = \frac{I}{c} \pi r^2 \vec{u}_z,$$

unde $I = Nhv c$ este intensitatea fasciculului.

3. Echilibrul mecanic este realizat dacă $\vec{F} + m\vec{g} = 0$, ceea ce conduce la condiția:

$$\frac{I}{c} \pi r^2 - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_m g = 0, \quad \text{de unde } r = \frac{3I}{4\rho_m cg} = 0,1 \mu\text{m},$$

pentru un fascicul laser cu $I = \frac{P}{A} = \frac{1 \text{ W}}{\pi \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$.

PROPAGAREA GHIDATĂ

În concluzie, studiul propagării undelor electromagnetice în medii materiale limitate, se face cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell și necesită cunoașterea proprietăților electrice și magnetice ale mediilor, precum și condițiile la limită la interfața dintre medii.

- La interfață între doi dielectrici ideali, se regăsesc legile reflexiei și refracției; cu ajutorul formulelor lui Fresnel se pot calcula factorii de reflexie și de transmisie și se demonstrează legea conservării energiei în procesele de reflexie-refracție. Trebuie semnalată posibilitatea polarizării prin reflexie la incidentă Brewster ($\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$) și a fenomenului de reflexie totală, dacă $n_1 > n_2$ și $\theta_i > \theta_B$.

- Un conductor, puternic absorbant la frecvențe scăzute, reflectă puternic frecvențele înalte. În domeniul optic, această reflexie este practic totală pentru conductorii buni (metale). În capitolul următor vom studia utilizarea fenomenului de reflexie a undelor în propagarea ghidată.
- Mediile bune conductoare sunt transparente pentru radiatiile având $\omega > \omega_p$. Acest rezultat explica transparencya metalelor în domeniile ultraviolet și al razelor X și utilizarea undelor radio cu frecvențe mari pentru comunicațiile prin satelit.
- Radiația electromagnetică incidentă pe o suprafață exercitată o presiune proporțională cu intensitatea undei, $P_{rad} = \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{2}{c} \langle S_i \rangle$.



Fig. 5.1

Adăugând lateral două plăci conductoare, rezultă o direcție unică de propagare: s-a realizat astfel un *ghid de unde* rectangular (fig. 5.1a). Astfel de ghiduri în care planele reflectante sunt metale cu conductivitate electrică mare, iar propagarea semnalului se face în vid sau în aer, sunt utilizate în mod curent în domeniul undelor centimetrice. Se pot utiliza și ghiduri cu secțiune circulară: fibrele optice, de exemplu, care realizează ghidajul undelor din domeniul optic, sunt formate dintr-un dielectric (miez) peste care este depus

Propagarea ghidată constă în canalizarea unui semnal electromagnetic, care este transmis de la o sursă la un detector, într-un spațiu delimitat de suprafete metalice sau dielectrice. Principalul avantaj constă în posibilitatea propagării energiei electromagnetice cu o atenuare slabă; în plus, informația transmisă nu este afectată de fenomene parazite.

Ghidajul este realizat prin reflexia totală a undelor; acest fenomen se produce la suprafața de separare dintre două medii în două cazuri (cap. 4):

- (1) interfață vid – conductor perfect (caz în care, pentru $\sigma \rightarrow \infty$, $R = 1$ și reflectanță $R = 1$)
- (2) interfață între doi dielectrici cu $n_1 > n_2$, dacă $\theta_i > \theta_B$.

Prin suprapunerea undei incidente cu cea reflectată rezultă o undă care nu se poate propaga decât paralel cu interfață; această undă rezultată se numește *ghidată*. Adăugând o două suprafață dispuse paralel cu prima, se poate canaliza transportul de energie electromagnetică în spațiul delimitat de aceste suprafete; s-a realizat astfel o *linie de transmisie*.