Strömungsmechanik II

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Janoske

Lehrstuhl für Strömungsmechanik
Bergische Universität Wuppertal
Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik

Sommersemester 2023

Was ist Strömungsmechanik?

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) - \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} - \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} - \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx} - \frac{\partial}{\partial x}p + \rho g_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho vw) - \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} - \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} - \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx} - \frac{\partial}{\partial y}p + \rho g_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho vw) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho ww) - \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} - \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} - \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx} - \frac{\partial}{\partial z}p + \rho g_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Drei gekoppelte, partielle, nichtlineare Differentialgleichungen

- Strömungsmechanik I: Vorlesung im 5. Semester: 2 SWS Vorlesung und 2 SWS Übung
- Strömungsmechanik II: Vorlesung im 6. Semester: 2 SWS Vorlesung und 2 SWS Übung
- Übungen als Vortragsübung oder als Gruppenübung
- Es findet ein wöchentliches Tutorium (Termin wird über Moodle bekanntgegeben) für Fragen zu Inhalten und Übungen statt
- Skript und Formelsammlung auf Moodle verfügbar
- Prüfung
  - Prüfungstermin für Modulabschlussprüfung Strömung I und II nach Aushang PA, in der Regel zweite Prüfungsphase
  - Zugelassene Hilfsmittel:
    - Formelsammlung (wird in Prüfung zur Verfügung gestellt)
    - Nicht-programmierbarer Taschenrechner und Schreibwerkzeug (müssen zur Prüfung mitgebracht werden)

- Die vorliegende Präsentation ist ein Arbeitsmanuskript, d.h. in der Vorlesung folgen weitere
  - Ergänzungen
  - Beispiele
- Empfehlungen für Bücher:
  - Herwig, H.: Strömungsmechanik: Einführung in die Physik von technischen Strömungen, Vieweg+Teubner, 2008
  - Durst, F.: Grundlagen der Strömungsmechanik, Springer, 2006
  - Kuhlmann, H.: Strömungsmechanik, Pearson Studium, 2006
  - Schade, H., Kunz, H., Kameier, F., Paschereit, C.O.: Strömungslehre, De Gruyter Studium, 2013
  - Herbert Sigloch, Technische Fluidmechanik, Springer

Hinweis: Die Vorlesungsunterlagen sind für den Gebrauch in der Vorlesung bestimmt. Es wird für den weiteren Gebrauch auf die Literaturstellen im Anhang verwiesen.

- Inhalte der Strömungsmechanik I
  - Grundlagen der Strömungsmechanik (Begriffe, Phänomene (Turbulenz,..))
  - Grundlagen der Hydrostatik
  - Grundlagen dimensionsloser Kennzahlen
  - Grundlagen **eindimensionaler** inkompressibler Strömungen
    - Bernoulli-Gleichung
    - Auslegung Rohrleitungsnetzwerke
    - Auslegung von Pumpen / Kennlinien
- Inhalte der Strömungsmechanik II
  - Bestimmung von Strömungskräften - Impuls- und Drallsatz
  - Mehrdimensionale Strömungen - Navier-Stokes Gleichungen
  - Grundlagen der Potentialströmungen
  - Grundlagen **eindimensionaler** kompressibler Strömungen
  - Grundlagen der Strömungsmeßtechnik

- Häufige Aufgabe im Maschinenbau ist die Bestimmung von Kräften und Momenten auf Bauteile, damit diese konstruktiv ausgelegt werden können
  - Auslegung von Druckbehältern
  - Auslegung von Klappen, Ventilen, usw.
  - ...

$\Rightarrow$ Bestimmung von Strömungskräften wichtige Aufgabe innerhalb der Strömungsmechanik

- Nachfolgend Betrachtung verschiedener Methoden zur Abschätzung der Kräfte auf Bauteile

- Nach dem 2. Axiom von Newton (Dynamisches Grundgesetz) gilt:

$$\mathrm{F} = \frac{d(m \cdot \mathrm{c})}{dt}$$

- Differenziert man die Gleichung, so erhält man:

$$\mathrm{F} = m\frac{d\mathrm{c}}{dt} + \mathrm{c}\frac{dm}{dt}$$

- Bei einem Festkörper mit $m = const$ erhält man die bekannte Beziehung

$$\mathrm{F} = m\frac{d\mathrm{c}}{dt}$$

- Als Bewegungsgröße oder Impuls I bezeichnet man

$$\mathrm{I} = m\,\mathrm{c}$$

- Nach der Betrachtungsweise von D'Alembert kann das Newtonsche Aktionsprinzip geschrieben werden als:
  $$\mathsf{F} - \frac{d(m \cdot \mathsf{c})}{dt} = \mathsf{F} - \frac{d\mathsf{I}}{dt} = \mathsf{F} - \dot{\mathsf{I}} = 0$$
- Daraus ergibt sich der Impulssatz $\sum \mathsf{F} - \sum \dot{\mathsf{I}} = 0$
- Bei Fluiden unterscheidet man zwischen äußeren und inneren Kräften
  - Äußere Kräfte (Oberflächenkräfte)
    - Druckkräfte
    - Wandkräfte
    - Widerstandskräfte
  - Innere Kräfte (Massenkräfte)
    - Zentrifugalkraft
    - Trägheitskraft (je nach Betrachtungsweise)

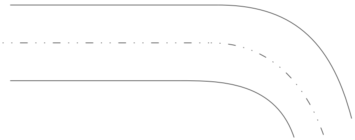
$\Rightarrow$Zeitliche Änderung des Impulses = Resultierende aller äußeren Kräfte

- Bei der Herleitung waren keine Einschränkungen hinsichtlich Materialeigenschaften erforderlich
  $\Rightarrow$Impulssatz gilt für alle Arten von Stoffen (fest, flüssig, gasförmig)
  $\Rightarrow$Impulssatz gilt für alle Qualitäten von Medien (reibungsfrei, reibungsbehaftet)
- Anwendung des Impulssatzes erfordert Kontroll- bzw. Bezugsraum
- Regeln für Wahl des Bezugsraumes
  - Auf der gesamten Berandung sollen Querschnitt, Druck, vektorielle Geschwindigkeit (Größe und Richtung) bekannt sein
  - Verläuft der Kontrollraum teilweise entlang von Körperflächen müssen die Kraftwirkungen (Schnittkräfte) als äußere Kräfte berücksichtigt werden

- Der Impulsstrom lässt sich ausdrücken als
  $\dot{\mathrm{I}} = \frac{d}{dt}(m\mathrm{c}) = m\frac{d\mathrm{c}}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot \mathrm{c} = m \cdot \dot{\mathrm{c}} + \dot{m} \cdot \mathrm{c}$
- Für Festkörper erhält man:
  $\dot{\mathrm{I}} = m \cdot \dot{\mathrm{c}}$
- Für instationäre Strömungen erhält man:
  $\dot{\mathrm{I}} = m \cdot \dot{\mathrm{c}} + \dot{m} \cdot \mathrm{c}$
- Für stationäre Strömungen erhält man
  $\dot{\mathrm{I}} = \dot{m} \cdot \mathrm{c}$
- Der Impulssatz für stationäre (kompressible und inkompressible) Strömungen lautet
  $\boxed{\sum \mathrm{F} - \sum (\dot{m} \cdot \mathrm{c}) = 0}$

Vorgehensweise bei der Anwendung des Impulssatzes (stat. Ström.)

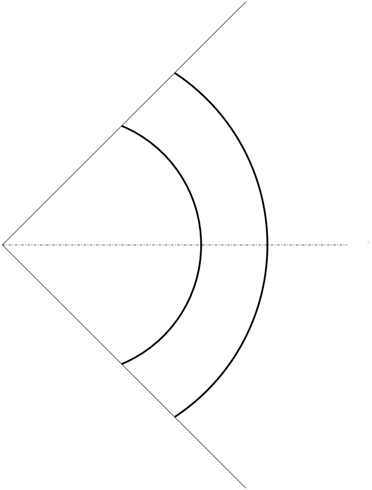
1. Festlegung des Kontrollraumes - Auf der Berandung müssen bekannt sein
   - Druck
   - Strömungsgeschwindigkeit - Größe und Richtung
   - Flächen
   - Fluidreibung



2. Alle Kräfte in der Wirkungsrichtung in den Lageplan einzeichnen - Die Richtung der Kräfte ist dabei
   - Impulskräfte: Am Eintritt als Eintrittsstoß (Aktion) am Austritt als Rückstoß (Reaktion)
   - Druckkräfte $F_{p,ü}$: Der durch den Atmosphärendruck nicht kompensierte Überdruck ist auf den Kontrollraum gerichtet
   - Wandkräfte F_{Wd}: Von den Begrenzungsflächen auf den Kontrollraum gerichtet. Richtung normal, falls keine Widerstandskräfte berücksichtigt werden
   - Widerstandskräfte F_W: Tangential angreifend. Meist vernachlässigbar
   - Gewichtskraft F_G: Entsprechend der Lage des Kontrollraums eintragen
3. Kräfte- und Momentengleichgewicht aufstellen

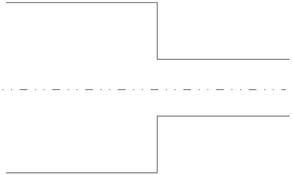
$$\boxed{\sum \mathrm{F} = 0} \quad \text{und} \quad \boxed{\sum \mathrm{M} = 0}$$

Rechenmodell



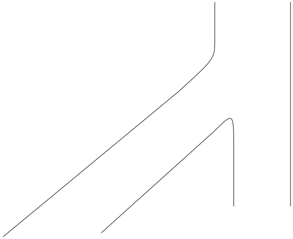
Ergebnis

Rechenmodell



Ergebnis

Rechenmodell



Ergebnis

- Bei gekrümmter Strömung ist der Drall L zu berücksichtigen

  $\mathrm{L} = m \cdot \mathrm{r} \times \mathrm{c}$ als Betrag $L = |\mathrm{L}| = R \cdot m \cdot c = R \cdot I$

- Aus der Ableitung des Dralls erhält man

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(mRc)}{dt} = cR\frac{dm}{dt} + mc\frac{dR}{dt} + mR\frac{dc}{dt}$$

- Bei einer instationären Kreisströmung $(R = const)$ gilt

$$\frac{dL}{dt} = cR\dot{m} + mR\dot{c}$$

- Bei einer stationären Kreisströmung $(R = const)$ gilt

$$\frac{dL}{dt} = cR\dot{m}$$

- In allgemeiner Vektordarstellung wird der Drallsatz für stationäre, gekrümmte Fluidströmungen damit zu:

$$\boxed{\sum M - \sum \dot{L} = 0}$$

$\Rightarrow$**Summe der wirkenden Momente ist gleich der Ableitung des Dralls**

- Festlegung eines Kontrollraums zur Anwendung des Drallsatzes analog dem Impulssatz
  - Ansatz im Relativ- oder Absolutsystem möglich
- Drallsatz ist wichtig im Bereich der Strömungsmaschinen (Pumpen usw.)

Strömungsgeschwindigkeiten am Laufrad einer Kreiselpumpe

- Bei Innenströmungen ist die Kenntnis des auftretenden Druckverlustes wichtig
- Bei Außenströmungen ist der Widerstand wichtig
  $\Rightarrow$ Beide Widerstände erfordern Energiezufuhr
  $\Rightarrow$ Kraftwirkung ist abhängig von Relativgeschwindigkeit, d.h.
  - Körper kann von Fluid umströmt sein - Brückenpfeiler ...
  - Körper kann sich durch Fluid bewegen - Flugzeug, Schiff ...
- Nach D'Alembertschem Paradoxon üben ideale Fluide keine resultierende Kraft auf einen umströmten Körper aus
- Bei realen Fluiden immer Reibung vorhanden und Körper erfahren einen Widerstand
- Widerstand=f(Form und Größe des Körpers, Fluid, Relativgeschwindigkeit, Oberflächenbeschaffenheit des Körpers)

- Widerstandskraft F_W setzt sich aus 2 Anteilen zusammen
  - Flächenwiderstand $F_{W,R}$
  - Formwiderstand $F_{W,D}$
- Index R $\rightarrow$ Reibung, Index D $\rightarrow$ Druck
- Auftrennung des Widerstandes in die einzelnen Anteile schwer zu erfassen
- Faustregel
  Bei stumpfen Körpern ist der Flächenwiderstand etwa um eine Größenordnung kleiner als der Formwiderstand

Tafelanschrieb

Diskussion der Kugelumströmung

- Der Flächen-, Oberflächen-, Schub- oder Reibungswiderstand wird durch die Reibung zwischen Fluid und der Körperaußenfläche verursacht

$$\mathrm{F}_{W,R} = \int_A \boldsymbol{\tau} \cot\, d\mathrm{A}$$

- Reibungswiderstand von der Art der Grenzschichtströmung abhängig, d.h.
  - Laminare Grenzschichtströmung vorteilhaft
  - Umschlagpunkt möglichst weit stromabwärts schieben
- In der Praxis wird die Flächenwiderstandskraft berechnet zu:

$$\boxed{F_{W,R} = c_{W,R}\rho_\infty \frac{c_\infty^2}{2} A_0}$$

  - $c_{W,R}$ Reibungswiderstandszahl=f(Re,Rauhigkeit k)
  - ρ_∞ Dichte der ungestörten Anströmung
  - c_∞ Geschwindigkeit der ungestörten Anströmung
  - A_0 benetzte Körperoberfläche

- Der Form-, Wirbel- oder Druckwiderstand wird in erster Linie durch die Form des umströmten Körpers bestimmt

$$F_{W,D} = -\int_{A_0} p dA_0$$

- In der Praxis wird die Druckwiderstandskraft berechnet zu:

$$\boxed{F_{W,D} = c_{W,D} \rho_\infty \frac{c_\infty^2}{2} A_{St}}$$

  - $c_{W,D}$ Druck- oder Formwiderstandszahl=f(Re,Körperform)
  - A_{St} Bezugsfläche: Bei Widerstandskörpern wird als Bezugsfläche die Stirnfläche verwendet. Bei Auftriebskörpern wird die Flügelfläche (Profiltiefe x Spannweite) verwendet.

1. Wirbelbildung vergrößert den Widerstand
2. An vorspringenden Ecken und Kanten besteht verstärkt Ablösegefahr
3. Die Ablösungsgefahr ist um so größer, je höher die ablenkungsbedingte Übergeschwindigkeit und der dadurch nachfolgend unter Verzögerung zu überwindende Druckanstieg
4. Je größer das Totraumgebiet, desto höher ist der Formwiderstand
5. Turbulente Grenzschichten ergeben höheren Reibungswiderstand. Infolge Anliegen der Strömung an der Körperkontur ist der entstehende Totraum jedoch wesentlich kleiner als bei laminarer, d.h. der Gesamtwiderstand kann bei turbulenter Grenzschicht kleiner sein.
   $\Rightarrow$**Formwiderstand durch konstruktive Maßnahmen stark beeinflussbar.**

- Der Gesamtwiderstand wird zu:

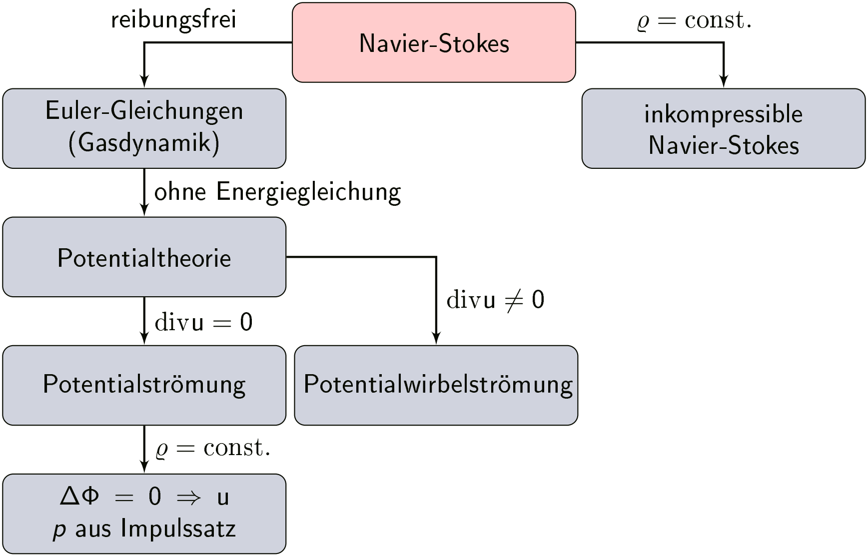
$$F_W = F_{W,R} + F_{W,D} = \left(c_{W,R} \frac{A_0}{A_{St}} + c_{W,D} \right) \rho_\infty \frac{c_\infty^2}{2} A_W$$

- zusammengefasst: $F_W = c_W \rho_\infty \frac{c_\infty^2}{2} A_{ref}$

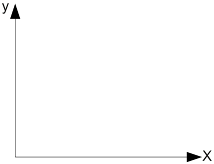
$\Rightarrow$ **Allgemeine Widerstandsformel**

- c_W Widerstandsbeiwert
- A_{ref} Referenzfläche

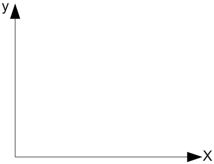
a) Längsangeströmte Platten $c_W \approx c_{W,R}$ und $A_{ref} = A_0$
b) Widerstandskörper (z.B. Kugeln) $c_W \approx c_{W,D}$ und $A_{ref} = A_{St}$
c) Auftriebskörper (z.B. Tragflächen) $c_W \approx c_{W,R}$ und $A_{ref} = A_{Fl}$


Navier-Stokes
reibungsfrei
$\varrho = \text{const.}$
Euler-Gleichungen (Gasdynamik)
inkompressible Navier-Stokes
ohne Energiegleichung
Potentialtheorie
$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$
$\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$
Potentialströmung
Potentialwirbelströmung
$\varrho = \text{const.}$
$\Delta\Phi = 0 \Rightarrow \mathbf{u}$
p aus Impulssatz

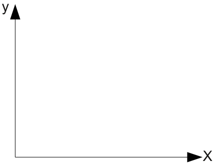
Translation: Diagonalen behalten

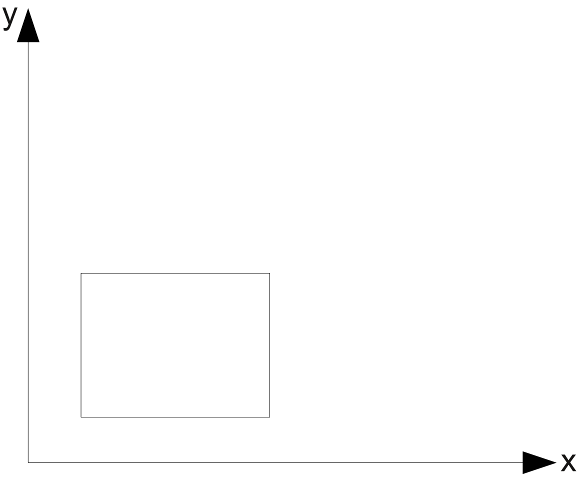


Rotation: Gleiche Schnittwinkel der Diagonalen



Deformation: Die Gesamtdrehung der Diagonalen ist gleich 0 oder entgegengesetzt gleich groß





Überlagerung von

- Translation
- Deformation
- Rotation
- Dilatation (=Volumenänderung)

- Zur Beschreibung dynamischer Vorgänge muss die zeitliche Veränderung von Größen bestimmt werden
- Dazu wird die Veränderung einer Größe ϵ in einem substantiellen Volumen V betrachtet
- Ziel ist die Beschreibung der integralen Größe $E = \int_V \epsilon dV$ als Funktion der Zeit

⇒ Herleitung an Tafel

- Integrale Form Reynoldsche Transport-Theorem
  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \epsilon dV = \int_{V_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} dV + \int_{A_0} \epsilon \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$
- Differentielle Form Reynoldsche Transport-Theorem
  $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u})$

In einem abgegrenzten Kontrollvolumen kann Masse weder erzeugt noch vernichtet werden.

- Massenstrom aus dem KV = zeitliche Abnahme der Fluidmasse im KV
- konservative Integralform:

$$\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} \varrho \boldsymbol{v} \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}A = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\mathrm{KV}} \varrho \,\mathrm{d}V$$

- konservative, differentielle Form:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\varrho \boldsymbol{v}) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z} = 0$$

- nicht-konservative, differentielle Form:

$$\frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \varrho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

In einem abgegrenzten Kontrollvolumen kann Masse weder erzeugt noch vernichtet werden.

- Massenstrom aus dem KV = zeitliche Abnahme der Fluidmasse im KV
- konservative Integralform:

$$\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} \varrho \boldsymbol{v} \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}A = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\mathrm{KV}} \varrho \,\mathrm{d}V$$

- konservative, differentielle Form:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\varrho \boldsymbol{v}) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z} = 0$$

- nicht-konservative, differentielle Form:

$$\frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \varrho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

Vorgehen bei der Herleitung

- Ausgangspunkt: 2.Newtonsches Gesetz:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial t}\boldsymbol{v},$$

  wobei $\boldsymbol{M}$ der Gesamtimpuls des Fluidvolumens ist.
- Kräftebilanz: Volumenkräfte (z.B. Gravitation) und Oberflächenkräfte (Druck und Reibung) = Änderung des Impulses des KV (FV)
- Annahme: Newtonsches Fluid (Scherspannungen sind proportional zur Schergeschwindigkeit)

$$\tau_{yx} = \eta\frac{\partial u}{\partial y},$$

  wobei τ_{yx} in der Fläche $y = \text{const.}$ in x-Richtung wirkt

Vorgehen bei der Herleitung

- Ausgangspunkt: 1.Thermodynamischer Hauptsatz:

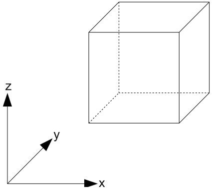
$$Q - W = \Delta E,$$

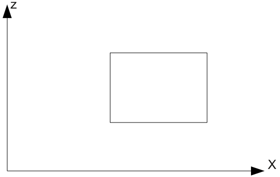
  wobei Q und W die zugeführte Wärme und Arbeit sind. E bezeichnet die Energie des Systems.
- Die Energie des Systems setzt sich wie folgt zusammen:

$$E = \underbrace{U}_{\text{innere Energie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{mgz}_{\text{potentielle Energie}} .$$

- Energiebilanz am KV (FV) aufstellen

Eulersche Bewegungsgleichungen - kartesische Koordinaten





Komponentenschreibweise u, v und w

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho}f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho}f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho}f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Vektorgleichung

$$\rho\frac{d\mathrm{u}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} + \mathrm{u}\nabla\mathrm{u}\right) = \mathrm{f} - \nabla p$$

Spezifische Feldkraft f

$$\mathrm{f} = -\rho\mathrm{g}$$

Massenerhaltung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho\, u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\, v) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\, w) = 0$$

Energieerhaltung (Newtonsches Fluid, μ und ϱ sind konstant)

$$\varrho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} + w\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

$$+2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$+\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

Impulserhaltung

x-**Komponente**

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}+w\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\varrho\,g_x$$

y-**Komponente**

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\,\frac{\partial v}{\partial x}+v\,\frac{\partial v}{\partial y}+w\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\varrho\,g_y$$

z-**Komponente**

$$\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\,\frac{\partial w}{\partial x}+v\,\frac{\partial w}{\partial y}+w\,\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\varrho\,g_z$$

Massenerhaltung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varrho\, r\, u\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\varrho\, v\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\, w\right) = 0$$

Energieerhaltung (Newtonsches Fluid, μ und ϱ sind konstant)

$$\varrho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

$$+2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$+\mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right)^2 \right]$$

Impulserhaltung

r-Komponente

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{v^2}{r}+w\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u\right)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+\varrho\,g_r$$

θ-Komponente

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\,\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{uv}{r}+w\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,v\right)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]+\varrho\,g_\theta$$

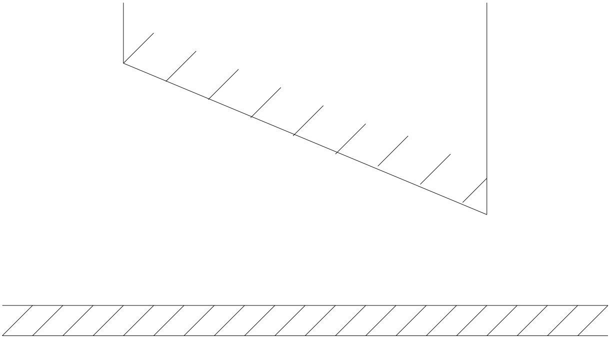
Impulserhaltung

z-Komponente

$$\varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \, \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \, \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \, \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \varrho \, g_z$$

Beispiel: Schmierspalt



- Viskose Effekte meist nur in dünnen Schichten in Wandnähe dominierend
- Vorschlag der Aufteilung nach Prandtl in zwei Bereiche
  - Rotationsbehafteter Anteil in Wandnähe: Auftreten viskoser Effekte, Änderung der Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht
  - Rotationsfreier Anteil außerhalb der Grenzschicht: Reibungsfreie Betrachtung
- Die Druckverteilung in der Grenzschicht wird wesentlich durch die Druckverteilung in der Außenströmung beeinflusst
- Die resultierenden Druckkräfte (Auftrieb, Druckwiderstand) können deshalb mit hinreichender Genauigkeit aus der rotationsfreien Außenströmung berechnet werden

- Strömungen sind durch Wirbel unterschiedlicher Art charakterisiert
- Problem ist die eindeutige und allgemeingültige Definition der Wirbel
- Rotationsrate eines Fluidelements um sich selbst, kann durch die **Vortizität** (oder: Wirbeldichte) definiert werden

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}}$$

- Die Vortizität kann auch über die Rotationsrate ˙ ausgedrückt werden:

$$\dot{} = 2\omega$$

- Strömungen mit $\omega = 0$ sind (mathematisch) interessant, da für diesen Fall das Geschwindigkeitsfeld aus einem Potential bestimmt werden kann
- Dadurch ergeben sich interessante Lösungsansätze, vielfach sogar analytisch
- Eine weitere wichtige Größe ist die **Stromfunktion** für eine ebene (2D), inkompressible Strömung

- Die Stromfunktion ist so definiert, dass sie die Kontinuitätsgleichung für das 2D-Strömungsfeld $\mathrm{u} = [u, v]^T$ explizit erfüllt:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Tafelanschrieb

Überprüfung der Kontinuitätsgleichung, Bedeutung der Stromfunktion, Berechnung des Volumenstroms mit Hilfe der Stromfunktion

- Die **Zirkulation** Γ stellt eine integrale Größe der Vortizität dar:

$$\Gamma = \int_A \dot{} \cdot d\mathrm{A} = \int_A (\nabla \times \mathrm{u}) \cdot d\mathrm{A} = \oint_C \mathrm{u} \cdot d\mathrm{x}$$

- Mit Hilfe des Stokeschen Satzes wurde das Flächen- in ein Linienintegral umgewandelt

Zirkulationstheorem von Kelvin, 1869

In einer reibungsfreien Strömung ist die Zirkulation Γ entlang einer geschlossenen Kurve C zeitlich konstant

- Wie bereits erwähnt lassen sich zweidimensionale Strömungen bei Vorliegen der Wirbelfreiheit $\omega = 0$ nach der Vektoranalysis als Potential Φ darstellen:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0}$$

- Bei Kenntnis des Potentials Φ können die Geschwindigkeiten direkt bestimmt werden:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

- Betrachtet man die Bestimmung der Geschwindigkeiten aus der Stromfunktion

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- stellt man fest, dass Stromlinien ($\Psi = const.$) und Potentiallinien ($\Phi = const.$) senkrecht zueinander sind

$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = (u, v)^T \cdot (-v, u)^T = 0$$

- Gleichungen sind identisch mit Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen
- Kann für effiziente Lösung durch Einführung komplexer Zahlen ausgenutzt werden

$$\boxed{f(z) = \Phi + \mathrm{i}\Psi}$$

- mit

$$z = x + \mathrm{i}y = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

- partiell abgeleitet ergibt sich daraus:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = f'(z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{i}f'(z)$$

- Dadurch erhält man für die Ableitung nach z

$$f'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\Psi}{\partial x} = u - \mathrm{i}v$$

- Da die Stromlinien auf der Annahme reibungsfrei basieren, ist eine Wandkontur einer Potentialströmung immer eine Stromlinie
- Durch Überlagerung verschiedener Funktionen kann man ein Strömungsfeld erzeugen, das mit der Wandkontur zusammenfällt
- Weiterhin kann die Bernoulli-Gleichung entlang der Stromlinien eingesetzt werden

Tafelanschrieb

- Beispiele für elementare Stromfunktionen
- Beispiele für Überlagerungen von elementaren Stromfunktionen

- **Wann kann Dichteänderung bei Fluiden auftreten?**
- Große Höhenerstreckungen von Gasmassen unter Schwerewirkung
  - Beispiel freie Atmosphäre (sehr große Höhen)
- Große Geschwindigkeiten bei Gas- und Dampfströmungen
  - Große Druckunterschiede zwischen zwei Räumen
  - Große Geschwindigkeiten von Körpern in kompressiblen Medien
- Große Beschleunigungen
  - Detonationen, Öffnen und Schließen von Ventilen
- Große Temperaturunterschiede

- **Charakterisierung von Strömungen mit hoher Geschwindigkeit**

$$\boxed{Ma = \frac{c}{a}}$$

- $Ma < 1$ - Unterschall
  - $Ma < 0.3$ nahezu inkompressibles Verhalten
  - $Ma \approx 0.3 - 0.75$ subsonischer Bereich
- Ma $\approx$ 1 - Transschall
  - $Ma \approx 0.75 - 1.25$ transsonischer Bereich
- $Ma > 1$ - Überschall
  - $Ma \approx 1.25(1.8) - 5$ supersonischer Bereich
  - $Ma > 5$ hypersonischer Bereich

- Gasgleichung $pv = RT$
- Gaskonstante $R = c_p - c_v$
- Isentropenexponent $\kappa = \dfrac{c_p}{c_v}$ $\quad \Rightarrow \boxed{c_p = R\dfrac{\kappa}{\kappa - 1}}$
- Innere Energie $du = c_v \cdot dT$
- Enthalpie $dh = c_p \cdot dT$

- Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner, d.h. akustischer Druckstörungen, Schallwellen, wird mit Schallgeschwindigkeit bezeichnet.
- Allgemeine Definition der Schallgeschwindigkeit

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}}$$

- Verwendung der LAPLACE-Gleichung ergibt Schallgeschwindigkeit für die Annahme isentroper Zustandsänderungen

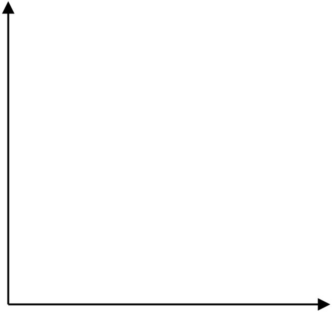
$$\boxed{a = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa p v} = \sqrt{\kappa R T}}$$

- Schallgeschwindigkeit = f(thermischer Zustandsgrößen)

- Wie ändert sich die Schallgeschwindigkeit für zweiphasige Strömungen?

Tafelanschrieb

Vereinfachtes Rechenmodell zur Herleitung der Schallgeschwindigkeit zweiphasiger Medien



- Bei Wärmezu- oder abfuhr ändert sich die Temperatur in Rohrleitungen
- Durch die Abhängigkeit der Stoffgrößen von der Temperatur ändert sich ebenfalls der Druck

$\Rightarrow$ Wie kann Vorgang modelliert werden?

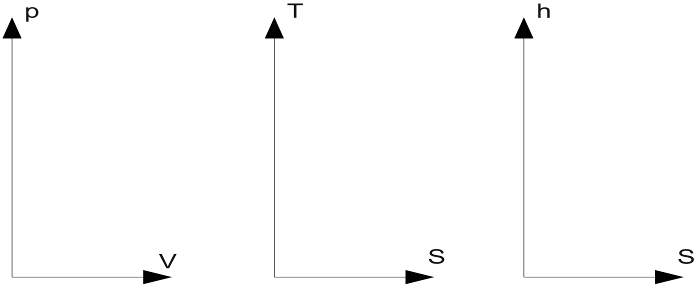
Rechenmodell

Entwicklung eines Rechenmodells (siehe Tafelanschrieb)

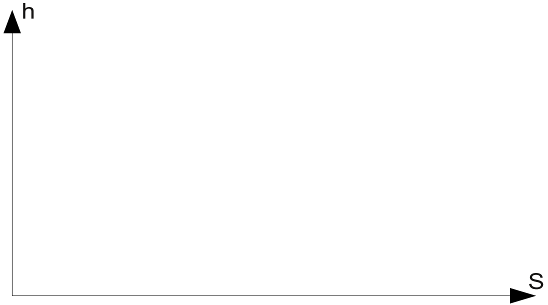
- Kontinuitätsgleichung
  $\dot{m} = Ac\rho = konst.$
- Energiegleichung
  $$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + u = konst.$$
  $$gz + \frac{c^2}{2} + h = konst.$$
- Impulsgleichung

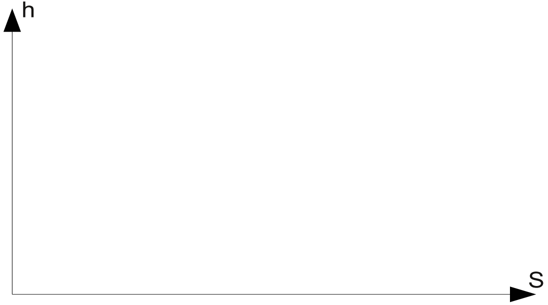
  analog inkompressibel

- Zustandsänderung eines thermodynamisch ($R = konst, \kappa = konst$) und fluidmechanisch ($\eta \approx 0$) idealen Gases in einem adiabaten System $\Rightarrow$ **isentrope Zustandsänderung**

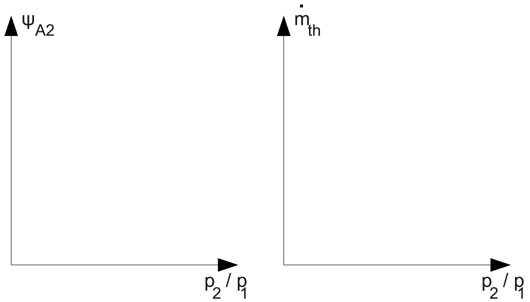


- Zustandsänderung eines realen, kompressiblen Gases bei einer Druckänderung von Zustand 1 in 2



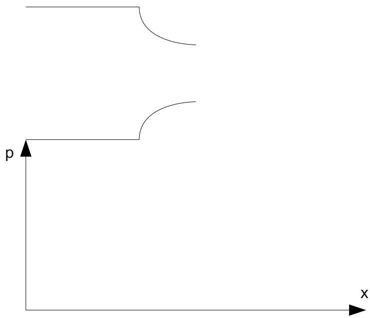

h
s


Behälter

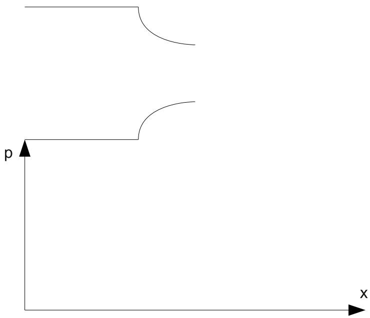


$$\psi_{A,2} = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 1}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)}$$

unterkritisch



überkritisch

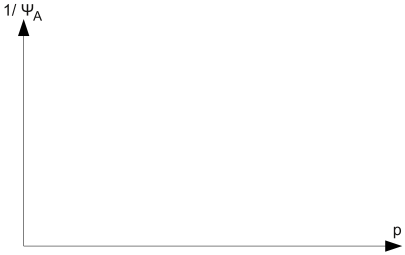


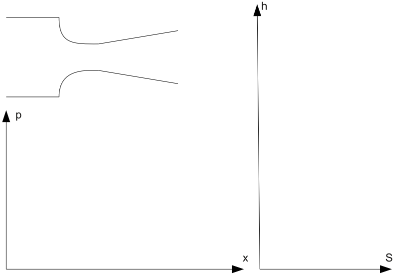
Fluid	κ	P_L	Ψ_{GL}	Ψ_{AL}
Einatmoige Gase	1,67	0,487	0,791	0,514
Zweiatomige Gase	1,40	0,528	0,764	0,484
Mehratomige Gase	1,33	0,540	0,756	0,476
Wasser Heißdampf	1,30	0,546	0,752	0,472
Wasser Sattdampf	1,135	0,577	0,729	0,449

- Bei Ausströmung aus Düse ist Ausströmgeschwindigkeit durch die Schallgeschwindigkeit begrenzt.
- Wie muss Düse aussehen, um höhere Geschwindigkeiten zu erzielen?

$$\dot{m}_{th} = A_{th}\psi_A\sqrt{2\frac{p_1}{v_1}} = konst.$$

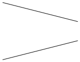
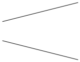
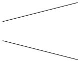
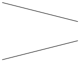
$$A_{th} = konst \cdot \frac{1}{\psi_A}$$

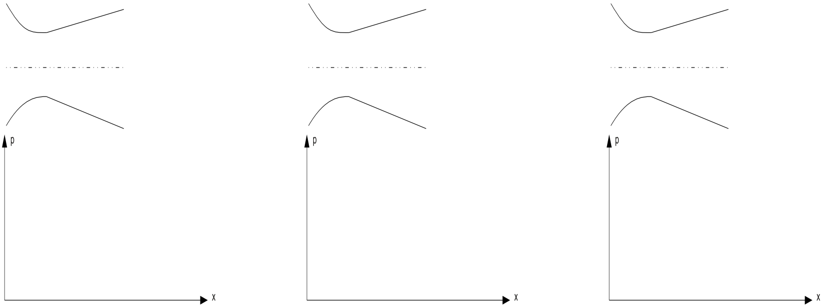




- Querschnittsverlauf
- Druck- und Geschwindigkeitsverlauf
- Expansionsverlauf bei idealer $(1-2_s)$ und realer $(1-2)$ Strömung (überkritisch)

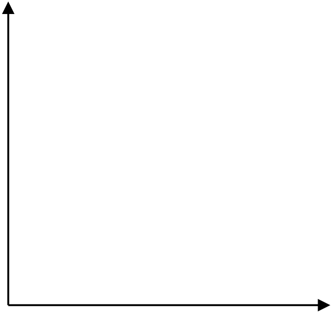
5.4 Vergleich der Kanalformen I

Typ	Änderung der Strömungs-größen	Kanalform bei Unterschall	Kanalform bei Überschall
Düse	p fällt C wächst V wächst		
Diffusor	p wächs C fällt V fällt		



- Ungestörte Strömung- Kurve a
- Gestörte Strömung- Kurven b-e

- Bei der Anströmung mit Überschallgeschwindigkeit ändern sich die Werte für Druck und Dichte stark und die Änderungen können nicht mehr als klein gegenüber den Mittelwerten betrachtet werden
- Betrachtung der Vorgänge in einem Rohr



- Die Messungen von Stoffdaten und Strömungsvorgängen ist ein wichtiger Pfeiler der Strömungsmechanik, u.a. für die Validierung von numerischen Rechenmodellen
- Die Bandbreite der Komplexität bei Messungen ist dabei riesig und reicht von einfachen Aufbauten bis hin zu Messtechniken, die mehrere Hunderttausend Euro kosten können
- Wichtige Fragestellung bei der Messung von Strömungen ist immer eine Abschätzung von Nutzen zu Aufwand und die Überprüfung, ob eine "korrekte"Messung (ohne Einfluss der Messtechnik) möglich ist
- Nachfolgend werden einige Grundprinzipen für unterschiedliche Fragestellungen beschrieben:
  - Druckmessung
  - Geschwindigkeitsmessung
  - Volumenstrommessung
  - Messung von Stoffgrößen

- Absolut- und Relativdruckbestimmung
- Druckmessbohrungen
- Messgeräte
  - U-Rohr
  - Schrägrohrmanometer
  - Präzisionsmanometer nach Betz und Prandtl
  - Mechanische Druckaufnehmer (Federprinzip)
  - Elektronische Druckaufnehmer

- Wichtige Fragestellungen vor der Messung
- Soll Absolut- oder Relativdruck gemessen werden?
- Soll statischer oder dynamischer Druck bestimmt werden?
- Ist das Drucksignal transient oder stationär?
- Welche Messgenauigkeit ist erforderlich?
- Wo wird der Druck gemessen (Störungen von Einbauteilen, Krümmern?)
- Wird Strömung durch Messtechnik beeinflusst?

- Lage und Form der Druckmessbohrungen sehr wichtig
- Zahlreiche Fehlerquellen möglich!

Tafelanschrieb

Beispiel zur Messung von Drücken mit U-Rohr unter Verwendung einfacher Hilfsmittel

- Unterschiedliche Messprinzipien möglich:
  - Resistive Druckmessung - Messung des Widerstands durch druckabhängige Verformung, z.B. durch eine Membran in Kombination mit DMS
  - Kapazitive Messung (Veränderung der Kapazität eines "Kondensators"durch Veränderung des Wandabstandes)
  - Piezoelektrisch durch Änderung der Ladungsmenge
  - Siehe auch: `https://de-de.wika.de/upload/Handbook_ElectronicPressure_de_de_34153.pdf`

- Pitotrohr
- Prandtlrohr
- Lochsonden
- Anemometer
- Hitzdraht-, Heißfilmsonden
- Laser-Doppler-Anemometrie (LDA)
- Particle-Image-Velocimetry (PIV)

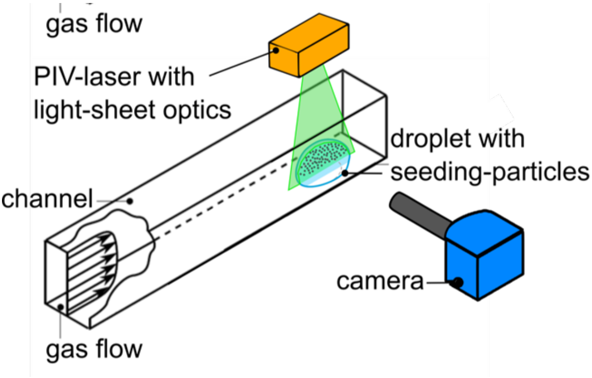
Tafelanschrieb

Vergleich Pitot- und Prandtlrohr

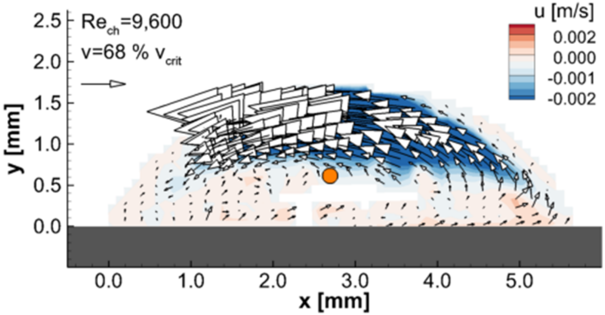
6.2 Kugelsonde I

- Messtechnik beruht auf Doppler-Effekt
- Kohärentes Licht wird an der Partikeln im Fluid gestreut
- Durch unterschiedliche Lichteinstrahlungen wird das Licht durch Dopplereffekt frequenzverschoben
- Frequenzverschiebung ist proportional zur Geschwindigkeit

Funktionsprinzip:



Beispiel Messergebnis:



- Blende, Düse und Venturi
- Schwebekörper-Durchflußmesser
- Ovalrad-Durchflußmesser
- Coriolis-Durchflußmesser
- Ultraschall-Durchflußmesser

- Funktionsprinzip beruht auf Messung der Druckdifferenz
- Druckdifferenz proportional der Geschwindigkeit bzw. des Massenstroms
- In Norm werden Düsen, Blenden und Venturi definiert

Tafelanschrieb

Betrachtung der unterschiedlichen Varianten und Herleitung des Volumenstroms

Tafelanschrieb

Herleitung des Funktionsprinzips

- Akustisches Verfahren und deshalb meist unabhängig von Stoffeigenschaften
- Berührungslose Messung und störende Einbauteile
- Messung über Doppler-Effekt oder Laufzeitmessung des Signals möglich

- Ein durchströmtes Rohr, das in eine Schwingung versetzt wird, erfährt eine Corioliskraft, die vom Massenstrom abhängig ist
- Dadurch ergibt sich eine Verformung, die induktiv oder optisch gemessen werden kann

- Viskosimeter
  - Kapillarviskosimeter
  - Kugelfallviskosimeter
  - Rotationsviskosimeter

Funktionsprinzip

Herleitung

Funktionsprinzip

Herleitung

Funktionsprinzip

Herleitung