Категорная логика

0.1 Введение в теорию категорий

Задача 1. Покажите, что если множества, моноиды, и предпорядки рассматривать как категории, то функторы между ними это то же, что и гомоморфизмы.

Задача 2. Опишите инициальные и терминальные объекты в категориях: Cat, Top (категория всех топологических пространств), $Group$.

Задача 3. Рассмотрим множество X. Любое множество подмножеств $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ образует категорию (в которой объекты – подмножества и стрелка между двумя объектами X,Y есть в том случае, если $X \subseteq Y$).

Что значит, что в этой категории есть инициальный или терминальный объекты?

Определение 1 (Напоминание)**.** Конкретной категорией называется такая категория, у которой каждый объект – множество, и каждая стрелка – теоретико-множественная функция.

Определение 2. Функтор $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется унивалентным (строгим), если для любой пары стрелок $f, g : X \rightrightarrows Y$, если $U(f) = U(g)$, то $f = g$. Другими словами, функтор унивалентен если он инъективен на $\mathrm{Hom}(X, Y)$ для любых объектов X, Y в $\mathcal{A}$.

Задача 4. Докажите, что у каждой конкретной категории $\mathcal{A}$ есть унивалентный функтор $\mathcal{A} \to Set$.

Задача 5. Покажите, что каждое действие моноида (группы) M на множество можно представить как функтор из M как категории в Set (действие моноида M на X – это гомоморфизм из M в моноид перестановок множества X).

Задача 6. Убедитесь, что следующие отображения дают примеры функторов:

1. $\mathcal{P} : Set \to Set$, которое множеству X сопоставляет множество его подмножеств $\mathcal{P}(X)$ и функции $f : X \to Y$ функцию $\mathcal{P}(f)(A) = f(A),\ A \subseteq X$; и $\mathcal{P} : Set \to Set^{op}$, как предыдущее, только функции $f : X \to Y$ оно сопоставляет $\mathcal{P}(f)(B) = f^{-1}(B),\ B \subseteq Y$.

2. $Ring \to Ring$, отображение кольцу R кольцо многочленов $R[x]$; $Ring \to Ring$, отображение кольцу R его кольцо квадратных матриц $M_{n,n}(R)$.

3. $F\text{-}Vect \to F\text{-}Vect^{op}$, отображение векторному пространству K его сопряженное K^* ($F\text{-}Vect$ – категория векторных пространств над полем F).

Задача 7. Как можно следующие объекты представить в виде функтора?

1. Стрелка $f : X \to Y$ в произвольной категории $\mathcal{A}$

2. Цепочка функций в $Sets$ $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \ldots \xrightarrow{f_n} X_n$.

3. Бесконечная цепочка вложенных подмножеств $\mathbb{R}$ $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \ldots \subset X_n \subset \ldots$;

Задача 8. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$ и зафиксируем в ней объект X. Построим отображение на объектах $\mathrm{Hom}(X, -) : C \to Set$, которое каждому объекту сопоставляет множество $\mathrm{Hom}(X, A)$. Теперь определим отображение на стрелках следующим образом: стрелке $f : A \to B$ сопоставим отображение между $\mathrm{Hom}(X, A)$ и $\mathrm{Hom}(X, B)$, отправляющее $g : X \to A$ в $fg : X \to B$.

Покажите, что эти отображения дают функтор.

0.2 Сопряженные функторы

Конспект.

Задача 1. Рассмотрим множества с предпорядком $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и ковариантное соответствие Галуа (F, G).

Доказать:

1. $a \leq GF(a)$
2. $GFGF(a) \leq GF(a)$
3. $a \leq a' \Rightarrow GF(a) \leq GF(a')$

Задача 2. Рассмотрим множества X, Y и бинарное отношение $R \subseteq X \times Y$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(x), \subseteq)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(y), \mathrm{superseteq})$.

Функторы $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ определены так:

- $A \subseteq X$. $F(A) = \{y \in Y | \forall x \in A.\ (x, y) \in R\}$
- $B \subseteq Y$. $F(B) = \{x \in X | \forall y \in B.\ (x, y) \in R\}$

Доказать (или опровергнуть), что (F, G) – соответствие Галуа.

Задача 3. Понять, как соотносятся сопряжение для множеств с предпорядками и сопряжение для категорий. Сопряжение для категорий можно взять в смысле четверки (F, U, η, ϵ).

Задача 4. Доказать утверждение.

Сопряжение (F, U, η, ϵ) в категориях $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ взаимно однозначно соответствует решению $(F, \eta, *)$ для функтора $U : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

План доказательства и само утверждение можно найти в книжке на странице 14.

Задача 5. Пусть (F, G) – соответствие Галуа между посетами (частично упорядоченными) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. показать, что F сохраняет супремумы, а G сохраняет инфимумы. Доказать, что если $\mathcal{A}$ имеет, а F сохраняет супремумы, то правое сопряжение $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ может быть вычислено формулой $G(b) = sup\{a \in \mathcal{A} | F(a) \leq b\}$.

Задача 6. Понять, объяснить, и доказать утверждение 3.4 на странице 15.

Задача 7. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - пред упорядоченные множества формул пропозиционального исчисления, где порядок – следование. Для фиксированный формулы C показать, что $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, определенные как $F(A) = C \wedge A$ и $G(B) = C \Rightarrow B$, являются парой сопряженных функторов. Что есть "единство противоположностей"в таком случае?

Задача 8. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbf{Sets}$, C – фиксированное множество, $F(A) = C \times A$, $U(B) = B^C$ для всех A и B. Расширить U и F до функторов и показать, что U право-сопряжен к F.

0.3 Пределы

Задача 1. Найдите хотя бы два уравнителя функций `id :: Int -> Int` и `abs :: Int -> Int` в категории Hask.

Объясните, почему следующие функции не являются уравнителями:

1. `id :: Int -> Int`
2. `\n -> -n :: Int -> Int`
3. `\n -> 0 :: Int -> Int`

Задача 2. Найдите хотя бы один уравнитель функций `fst :: (Int, Int) -> Int` и `snd :: (Int, Int) -> Int` в категории Hask.

Задача 3. Найдите хотя бы один уравнитель функций `fst'` и `snd'`, где:

```
data IntOrChar = I Int | C Char

fst' :: (Int, Char) -> IntOrChar
fst' = I . fst

snd' :: (Int, Char) -> IntOrChar
snd' = C . snd
```

в категории Hask.

Задача 4. Найдите хотя бы два коуравнителя функций `id :: Int -> Int` и `abs :: Int -> Int` в категории Hask.

Задача 5. Найдите хотя бы один pullback функций `length :: [Int] -> Int` и `length :: [Char] -> Int` в категории Hask.

Задача 6. Найдите хотя бы один pullback функций `id :: Int -> Int` и `(const 0) :: () -> Int` в категории Hask.

Задача 7. Найдите хотя бы один pullback функций `(const ()) :: Int -> ()` и `(const ()) :: Char -> ()` в категории Hask.

Задача 8. Опишите построение pullback'а из задачи 5 через двоичные произведения и уравнители.

Задача 9. Докажите, что любой предел можно построить через произведения и уравнители.

Задача 10. Найдите предел функтора `Identity`.

Задача 11. Найдите предел функтора `Maybe`.

0.4 Декартово замкнутые категории

Задача 1. Доказать, что **Grp** не является декартово замкнутой.

Задача 2. Доказать биективность $\hat{}$ (преобразующей g в $\hat{g}$)

Задача 3. A и B конечные множества из категории **Sets**. Какова мощность A^B?

Задача 4. Узнать связь между $\Leftarrow$ и $\rightarrow$ в полурешетке Гейтинга

0.5 Декартово замкнутые категории в уравнениях и графах

Задача 1. Показать, что в любой декартовой категории:

1. $A \times 1 \cong A$
2. $A \times B \cong B \times A$
3. $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

Задача 2. Показать, что в любой декартово замкнутой категории:

1. $A^1 \cong A$
2. $1^A \cong 1$
3. $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$
4. $A^{B \times C} \cong (A^C)^B$

Задача 3. Записать эквивалентное определение декартово замкнутой категории через

$$U_B = (\cdot)^B,\ F_B = (\cdot) \times B\ :\ \mathscr{A} \to \mathscr{A}$$
$$\varepsilon_B(A) = \varepsilon_{A,B};\quad \varepsilon_B\ :\ F_B U_B \to 1_{\mathscr{A}}$$
$$\eta_B(C) = \eta_{C,B}\ :\ C \to (C \times B)^B,$$

где $U_B(f) = f^B \equiv f \Leftarrow 1_B = (f\varepsilon_{A,B})^*$ для всех $f : A \to A'$ (см. предыдущую лекцию).

Задача 4. Доказать, что
$$\ulcorner f \urcorner^{\S} = f,\ \ulcorner g^{\S} \urcorner = g,$$
где $\ulcorner f \urcorner \equiv (f\pi'_{1,A})^*,\ f\ :\ A \to B$ и $g^{\S} \equiv \varepsilon_{B,A}\langle g\bigcirc_A, 1_A\rangle,\ g\ :\ 1 \to B^A$.

Задача 5. Показать, что дедуктивная система $\mathscr{L}(x)$ с прошлой лекции — это $\mathscr{D}(\mathscr{L}_x)$, где $\mathscr{L}_x$ — граф, полученный из $\mathscr{L}$ добавлением нового ребра x между старыми вершинами T и A.

0.6 Топосы

Задача 1. Топосы функторов. Покажите, что следующие категории можно представить как топос (указать классификатор подобъектов, доказать замкнутость):

1. Set^2
2. $Set^{\to}$
3. Set^M – категория действий моноида (группы).

Задача 2. Докажите теорему: для любого топоса $\mathcal{C}$ и любого его объекта a категория стрелок над ним $\mathcal{C} \downarrow a$ является топосом.

Задача 3. Докажите, что в топосе $\mathcal{T}$ $f : A \to B$

1. мономорфизм тогда и только тогда, когда $\mathcal{T} \vDash \forall_{x\in A}\forall_{x'\in A}(fx = fx') \Rightarrow x = x'$
2. эпиморифизм тогда и только тогда, когда $\mathcal{T} \vDash \forall_{y\in B}\exists_{x\in A} fx = y$

Определение 3. Топос называется булевым, если он удовлетворяет формуле $\forall_{t\in\Omega}(t \vee \neg t)$.

Задача 4. Докажите, что топос является булевым тогда и только тогда, когда $1 \xrightarrow{T} \Omega \xleftarrow{\perp} 1$ это диаграмма копроизведения.

0.7 CAM

Задача 1. Константы Id, Fst, Snd, App — а также одноместная операция Λ и двуместные $\circ$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — имеют естественный смысл, задаваемый уравнениями ниже. Также заметим, что их можно понимать как некоторые стрелки в категории между объектами, понятными из контекста. Соответственно, операции — это стрелки, строящиеся по другим стрелкам. Поясните, что следующие уравнения эквиваленты уравнениям, задающим декартово-замкнутые категории (за исключением указаний объектов у констант и операторов и отсутствия уравнений для терминального объекта):

(Ass)	$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
(IdL)	$Id \circ x = x$
(IdR)	$x \circ Id = x$
(Fst)	$Fst \circ \langle x, y\rangle = x$
(Snd)	$Snd \circ \langle x, y\rangle = y$
(SPair)	$\langle Fst \circ x, Snd \circ x\rangle = x$
(App)	$App \circ \langle \Lambda(x) \circ Fst, Snd\rangle = x$
(SΛ)	$\Lambda(App \circ \langle x \circ Fst, Snd\rangle) = x$

Задача 2. Покажите, что уравнения из предыдущего задания эквивалентны уравнениям Ass + IdL + IdR + Fst + Snd + DPair + Beta + DΛ + AI + FSI, где:

(DPair)	$\langle x \circ y \rangle \circ z = \langle x \circ z, y \circ z \rangle$
(Beta)	$App \circ \langle \Lambda(x), y \rangle = x \circ \langle Id, y \rangle$
(DΛ)	$\Lambda(x) \circ y = \Lambda(x \circ \langle y \circ Fst, Snd \rangle)$
(AI)	$\Lambda(App) = Id$
(FSI)	$\langle Fst, Snd \rangle = Id$

Задача 3. Поясните, что делают операции, определяемые следующим образом:

$A^{>} := \Lambda(A \circ Snd)$
$A^{<} := App \circ \langle A, Id \rangle$
$A \cdot B := (A \circ B^{>})^{<}$
$(A, B) := \langle A^{>}, B^{>} \rangle^{<}$