LÝ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN HỌC

Phan Văn Tân

Bộ mô Khí tượng

10:07:29

2.1 Phép thử, sự kiện và xác suất sự kiện

- Các khái niệm được gặp đầu tiên trong lý thuyết xác suất là "phép thử" và "sự kiện"
- "phép thử" được hiểu là một bộ điều kiện xác định, nó có thể là
  - một thí nghiệm cụ thể
  - một lần quan sát (quan trắc) sự xuất hiện một hiện tượng nào đó
- Một phép thử có thể có nhiều kết cục khác nhau,
  - các kết cục này là các "sự kiện" có thể xảy ra
  - Sự kiện thường được ký hiệu bởi các chữ in A,B,C, v.v... đôi khi có kèm theo chỉ số.

Chương 2. SỰ KIỆN VÀ XÁC SUẤT

2.1 Phép thử, sự kiện và xác suất sự kiện

- Ví dụ:
  - Khi gieo một đồng tiền tức là ta đã tiến hành một phép thử.
    - Kết quả nhận được là hai kết cục: Đồng tiền xuất hiện mặt sấp hoặc xuất hiện mặt ngửa
    - Nếu nhận được mặt sấp ta nói "sự kiện" đồng tiền xuất hiện mặt sấp đã xảy ra
  - Gieo một con xúc xắc (tiến hành một phép thử)
    - Phép thử này có 6 kết cục đơn: xuất hiện mặt 1 chấm, 2 chấm, 3 chấm, 4 chấm, 5 chấm, 6 chấm
    - Các kết cục này cũng có thể cấu thành kết cục phức hợp: xuất hiện mặt có số chấm là chẵn, xuất hiện mặt có số chấm bội 3 v.v...
    - Nếu một trong các kết cục xuất hiện ta nói "sự kiện" (nào đó) đã xảy ra

2.1 Phép thử, sự kiện và xác suất sự kiện

- Ví dụ:
  - Mưa là một hiện tượng khí tượng. Việc quan trắc hiện tượng này cũng là một phép thử.
    - Số kết cục của phép thử này có thể là
      - 2 kết cục: “không mưa” hoặc “có mưa”
      - 3 kết cục: “không mưa”, “mưa dạng lỏng” hoặc “mưa hỗn hợp” (lỏng và rắn)
- Nói chung cần phân biệt rõ ba khái niệm: “Phép thử”, “kết cục” và “sự kiện”

2.1 Phép thử, sự kiện và xác suất sự kiện

- Tuỳ theo tính chất xuất hiện của các sự kiện trong phép thử mà ta có thể chia chúng ra ba loại:
  - Sự kiện tất yếu (hay sự kiện chắc chắn) là sự kiện nhất thiết xảy ra khi phép thử được thực hiện
  - Sự kiện bất khả (hay sự kiện không thể có) là sự kiện nhất thiết không xảy ra khi thực hiện phép thử
  - Sự kiện ngẫu nhiên là sự kiện có thể xảy ra nhưng cũng có thể không xảy ra khi thực hiện phép thử
- Ký hiệu:
  - U là sự kiện tất yếu
  - V là sự kiện bất khả
  - A là sự kiện ngẫu nhiên

2.1 Phép thử, sự kiện và xác suất sự kiện

- Ví dụ:
  - Gieo một điểm ngẫu nhiên lên mặt phẳng, khi đó:
    - Điểm đó nằm trong mặt phẳng là sự kiện tất yếu
    - Điểm đó không nằm trong mặt phẳng là sự kiện bất khả
    - Điểm đó rơi vào một miền hình chữ nhật cho trước trên mặt phẳng là sự kiện ngẫu nhiên
  - Tiến hành đo nhiệt độ ở Hà Nội vào một ngày mùa hè:
    - Nhiệt độ đo được có giá trị $>0^oC$ là sự kiện tất yếu
    - Nhiệt độ đo được có giá trị $<0^oC$ là sự kiện bất khả
    - Nhiệt độ đo được nằm trong khoảng $25\text{-}30^oC$ là sự kiện ngẫu nhiên

2.1 Phép thử, sự kiện và xác suất sự kiện

- Quan sát các sự kiện ngẫu nhiên ta thấy:
  - khả năng xuất hiện của chúng nói chung không đồng đều,
  - một số sự kiện thường hay xảy ra,
  - một số khác thường ít xảy ra.
- Ví dụ, về mùa đông ở khu vực vùng núi phía Bắc "nhiệt độ thường dưới 15 độ", nhưng "rất ít khi xuất hiện sương muối"
- ➔ nảy sinh vấn đề tìm cách đo lường "độ chắc chắn" của một sự kiện
  - Tìm cách gán cho mỗi sự kiện một số P(A) không âm.
  - Số này được gọi là xác suất của sự kiện A.

2.1 Phép thử, sự kiện và xác suất sự kiện

- Để phù hợp với nội dung thước đo "độ chắc chắn" của sự kiện, xác suất P(A) phải được xây dựng sao cho thoả mãn các đòi hỏi hợp lý sau:
  - Xác suất của sự kiện tất yếu U bằng 1: $P(U) = 1$ (vì sự kiện chắc chắn 100% xảy ra).
  - Xác suất của sự kiện bất khả V bằng 0: $P(V) = 0$ (chắc chắn 100% không xảy ra).
  - Xác suất của sự kiện ngẫu nhiên A bị kẹp giữa 0 và 1: $0 \le P(A) \le 1$

2.2 Cách tính xác suất theo quan niệm đồng khả năng

- Xét ví dụ:
  - Trong một thùng kín đựng **n** quả cầu giống nhau về mọi mặt và chỉ khác nhau về màu sắc, trong đó có **m** quả trắng và **n-m** quả đen. Thực hiện phép thử: rút hú hoạ 1 quả. Hỏi xác suất rút được quả trắng là bao nhiêu?
  - Nhận thấy: Khi tiến hành rút hú họa một quả, mọi quả cầu bất kỳ trong số **n** quả đều có thể được rút trúng, không phân biệt màu sắc
  - Nói cách khác: Do tính đối xứng hoàn toàn của các quả cầu nên mỗi quả đều có cùng khả năng được rút như nhau

2.2 Cách tính xác suất theo quan niệm đồng khả năng

- Nếu gọi A là sự kiện rút được quả có màu trắng thì trong số **n** kết thúc đồng khả năng của phép thử có **m** kết cục thuận lợi cho A
- Khi đó xác suất P(A) của sự kiện A sẽ được tính bởi: $P(A) = \dfrac{m}{n}$

- **Định nghĩa**: Giả sử một phép thử có tất cả **n** kết cục đồng khả năng, trong đó có **m** két cục thuận lợi cho sự kiện **A**. Khi đó xác suất của **A** là tỷ số giữa số kết cục thuận lợi cho **A** trên tổng số kết cục đồng khả năng của phép thử

$$P(A) = \frac{m\,(Sô\;kêt\;cuc\;thuân\;loi\;cho\;A)}{n\,(Tông\;sô\;kêt\;cuc\;đông\;kha\;năăn)} = \frac{m}{n}$$

- Người ta gọi đây là định nghĩa xác suất theo quan niệm đồng khả năng, hay "định nghĩa cổ điển" của xác suất vì nó rất thông dụng trong thời kỳ ra đời của lý thuyết xác suất

2.2 Cách tính xác suất theo quan niệm đồng khả năng

- Nếu A là sự kiện chắc chắn U thì mọi kết cục đồng khả năng của phép thử đều thích hợp cho A nên **m = n**, do đó $P(U) = \frac{n}{n} = 1$
- Nếu A là sự kiện bất khả V thì không có kết cục thích hợp nào cho A nên **m = 0**, do đó $P(V) = \frac{0}{n} = 0$
- Nếu A là sự kiện bất kỳ thì **0 ≤ m ≤ n** nên $0 \le P(A) \le 1$

- Cách tính xác suất theo công thức cổ điển có ưu điểm là đơn giản và trực quan
- Tuy nhiên phạm vi áp dụng rất hạn chế vì công thức này chỉ dùng được cho loại phép thử gồm một số **hữu hạn** kết cục và mọi kết cục **đồng khả năng** xuất hiện.
- Khi vận dụng để tính **m** và **n**, trừ các trường hợp giản đơn, thường phải dùng công cụ giải tích tổ hợp

2.2 Cách tính xác suất theo quan niệm đồng khả năng

Một số ví dụ:

- VD1: Gieo một con xúc xắc. Hỏi xác suất xuất hiện: a). Mặt 6 chấm; b). Mặt bội của 3
  - **Giải**: Gọi A là sự kiện xuất hiện mặt 6 chấm, B là sự kiện xuất hiện mặt bội của 3,
  - ➔ Số kết cục khả năng n = 6,
  - số kết cục thuận lợi cho A là m = 1, số kết cục thuận lợi cho B là m = 2 (mặt 3 và mặt 6).
  - Do đó

$$P(A) = 1/6;$$

$$P(B) = 2/6 = 1/3$$

2.2 Cách tính xác suất theo quan niệm đồng khả năng

- VD 2: Trong một thùng có 3 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen giống hệt nhau về kính thước. Rút hú hoạ 2 quả từ thùng đó. Tính xác suất xuất hiện: a) 2 quả trắng; b) 1 quả trắng và 1 quả đen
  - **Giải:** Gọi A là sự kiện xuất hiện 2 quả trắng, B là sự kiện xuất hiện một quả trắng và một quả đen
  - Tổng số quả cầu trong thùng là: 3+5 = 8. Coi các quả cầu này như 8 phần tử đã cho.
  - Mỗi cách rút 2 quả cầu ứng với việc chọn một tổ hợp chập 2 từ 8 phần tử. Vậy có tất cả **n** = C_8^2 kết cục đồng khả năng.
  - Số kết cục thuận lợi cho A là những cách chọn 2 trong số 3 quả trắng. Vì vậy $\mathbf{m_A} = C_3^2$. Từ đó $P(A) = m_A/n = C_3^2/C_8^2 = 3/28$
  - Số cách chọn quả trắng là C_3^1, số cách chọn quả đen là C_5^1. Do đó số kết cục thuận lợi cho B là $\mathbf{m_B} = C_3^1.C_5^1$. Vậy $P(B) = m_B/n = C_3^1.C_5^1/C_8^2 = 15/28$

2.2 Cách tính xác suất theo quan niệm đồng khả năng

- VD 3: Trong số N bài thi có M bài đạt từ điểm khá trở lên. Rút ngẫu nhiên **n** bài để nhập điểm. Tính xác suất để trong **n** bài được rút có **m** (m<n) bài đạt từ điểm khá trở lên.
  - **Giải:** Gọi A là sự kiện trong số **n** bài được rút có **m** bài đạt từ điểm khá trở lên.
  - Số kết cục đồng khả năng chính là số cách chọn **n** từ N bài: C_N^n
  - Số kết cục thuận lợi cho A chính là tích của số cách chọn **m** (bài đạt điểm khá trở lên) từ M kết hợp với số cách chọn **n-m** (bài không đạt điểm khá) từ N-M tức $C_M^m.C_{N-M}^{n-m}$
  - Vậy $P(A) = C_M^m.C_{N-M}^{n-m}/ C_N^n$

2.3 Định nghĩa xác suất theo tần suất

- Định nghĩa cổ điển của xác suất chỉ áp dụng được khi phép thử có một số hữu hạn kết cục đồng khả năng
- Thực tế thường gặp những phép thử không có tính chất đó
- Chẳng hạn phép thử bắn một phát đạn vào bia thì các kết cục trúng bia hay trượt không thể coi là đồng khả năng xuất hiện
- Để khắc phục hạn chế đó của định nghĩa cổ điển và để tính được xác suất của sự kiện cho một phép thử rộng lớn, người ta đưa vào định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
- Khái niệm cơ bản đưa tới định nghĩa này là khái niệm tần suất

2.3 Định nghĩa xác suất theo tần suất

- Giả sử tiến hành **N** phép thử cùng loại, trong mỗi phép thử có thể xuất hiện sự kiện A,
- Gọi **M** là số các phép thử quan sát thấy A xuất hiện
- Khi đó tỷ số **M/N** được gọi là tần suất xuất hiện sự kiện A trong loạt phép thử đã được tiến hành

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

- Ví dụ: Để đánh giá chất lượng sản phẩm của một phân xưởng, người ta lấy hú họa từ kho 100 sản phẩm và tiến hành kiểm tra. Kết quả là có 7 sản phẩm không đạt tiêu chuẩn chất lượng. Vậy tần suất xuất hiện phế phẩm của phân xưởng là p(A) = 7/100 = 0.7

2.3 Định nghĩa xác suất theo tần suất

- Tính chất:
  - Trị số của tần suất nói chung phụ thuộc vào số lượng **N** phép thử được tiến hành.
  - Khi **N** bé, tần suất thay đổi rõ rệt nếu ta chuyển từ loạt ẩ phép thử này sang loạt ẩ phép thử khác.
  - Tuy nhiên thực nghiệm chứng tỏ rằng, tần suất có tính ổn định, nghĩa là khi số phép thử **N** khá lớn thì trị số của tần suất biến thiên rất ít xung quanh một hằng số xác định nào đó
  - Đối với các phép thử thuộc mẫu "thùng kín", hằng số này trùng với xác suất tính theo công thức cổ điển
- **Định nghĩa thống kê của xác suất**: Xác suất của sự kiện là trị số ổn định của tần suất khi số phép thử tăng lên vô hạn

2.3 Định nghĩa xác suất theo tần suất

- Tính ổn định của tần suất khi số phép thử đủ lớn được xác minh bằng nhiều thí nghiệm công phu của các nhà nghiên cứu:
  - Laplace (thế kỷ XVIII) theo dõi các bảng thống kê ở toàn nước Pháp và các thành phố London, Peterbur, Berlin, đã tìm thấy tần suất sinh con trai bằng 22/43≈0,542
  - Đến thế kỷ XX, nhà toán học Thuỵ điển Crame cũng nhận thấy trị số này rất gần với tần suất sinh con trai năm 1935 tại Thuỵ điển
- Ứng dụng:
  - Xác định kích cỡ quần áo may sẵn hoặc các đồ dùng gia đình
  - Xác định qui luật hoạt động của tội phạm trong điều tra hình sự
  - Chọn thời điểm phát sóng truyền tin qua các tầng điện ly
  - ả ghiên cứu công hiệu của thuốc men chữa bệnh
  - Trong Khí tượng Thủy văn ?

2.3 Định nghĩa xác suất theo hình học

- Định nghĩa thống kê của xác suất đã khắc phục được một số hạn chế của định nghĩa xác suất cổ điển:
  - Các kết cục không đồng khả năng xuất hiện
  - Số kết cục quá lớn
- Tuy vậy trong trường hợp số kết cục là vô hạn thì định nghĩa này cũng không phù hợp
- Bởi vậy, người ta đưa vào định nghĩa xác suất theo hình học

2.3 Định nghĩa xác suất theo hình học

- Xét phép thử có vô hạn kết cục đồng khả năng
- Giả sử có thể biểu thị tập hợp kết cục này bởi một miền hình học G nào đó:
  - một đoạn thẳng một miền phẳng,
  - một mảnh mặt cong hay một khối không gian v.v...;
- Giả sử có thể biểu thị những kết cục thuận lợi cho sự kiện A bởi các điểm thuộc miền $g \subset G$
- Khi đó, xác suất của sự kiện A được tính như sau:

  P(A) = (Kích thước của miền g)/(Kích thước của miền G)

2.3 Định nghĩa xác suất theo hình học

- Ví dụ (Bài toán gặp gỡ): Hai người hẹn gặp nhau tại một địa điểm xác định trong khoảng từ 0 giờ đến 1 giờ và qui ước với nhau rằng người đến trước chờ người kia quá 20 phút thì sẽ bỏ đi. Tính xác suất để họ gặp nhau, biết rằng mỗi người có thể đến chỗ hẹn vào một thời điểm bất kỳ trong khoảng thời gian trên.
  - **Giải:** Gọi A là sự kiện hai người gặp nhau
  - Gọi x và y (phút) tương ứng là thời điểm đến điểm hẹn của người thứ nhất và người thứ hai
  - Số kết cục đồng khả năng chính là mọi cặp số (x,y) mà $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$
  - Tập hợp này được biểu diễn bởi một hình vuông có cạnh bằng 60
  - Các kết cục thuận lợi cho A là những cặp (x,y) sao cho $|x-y| \le 20$, hay

$$-20 \le x - y \le 20 \Rightarrow \begin{cases} y \le x + 20 \\ y \ge x - 20 \end{cases}$$

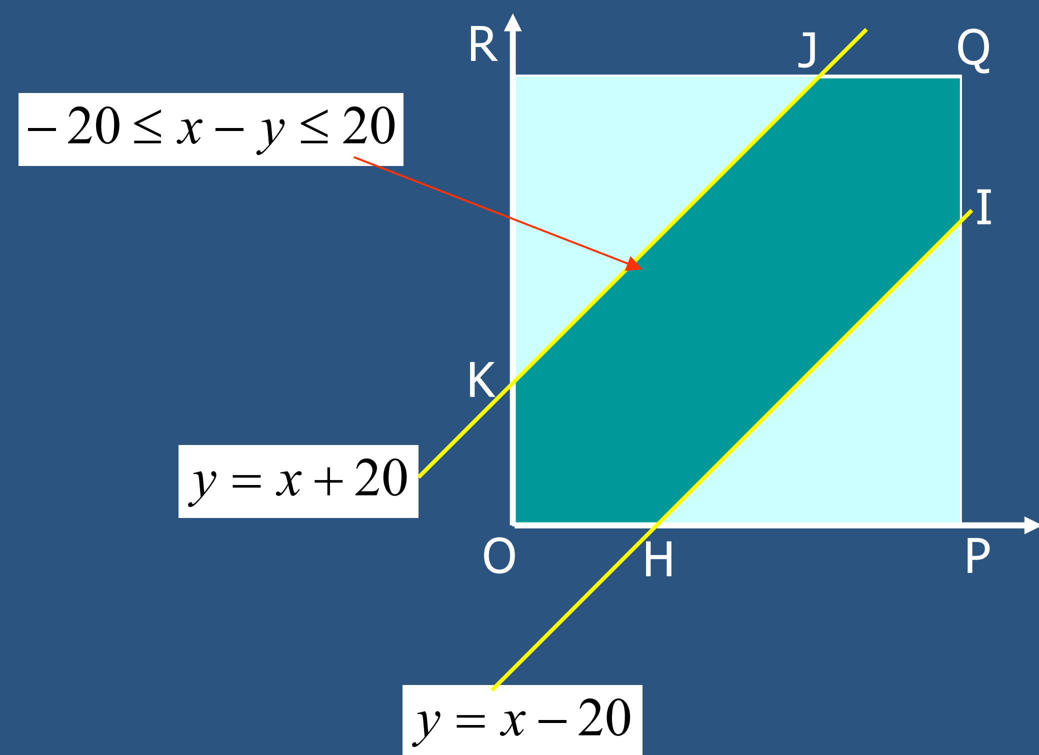
  - Tập hợp này ứng với miền con của hình vuông gồm giữa các đường thẳng

$$y = x + 20 \text{ và } y = x - 20$$

2.3 Định nghĩa xác suất theo hình học

$$P(A) = \frac{S_{OHIQJK}}{S_{OPQR}}$$

$$P(A) = \frac{60 \times 60 - 40 \times 40}{60 \times 60} = \frac{3600 - 1600}{3600} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}$$



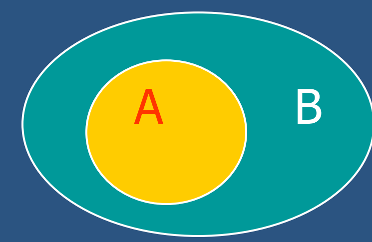
2.3 Định nghĩa xác suất theo hình học

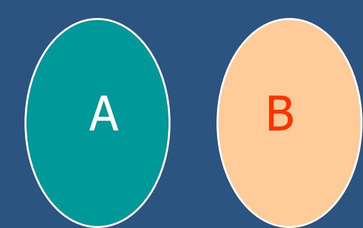
Chú ý:

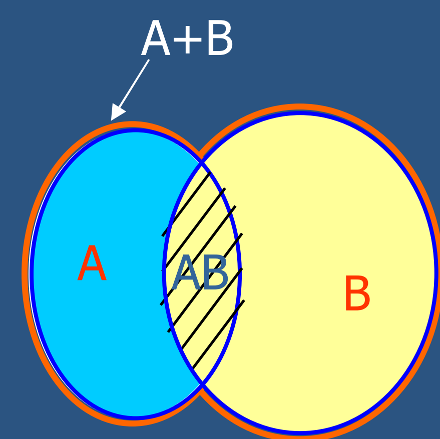
- Với định nghĩa xác suất này, một sự kiện có xác suất bằng 0 vẫn có thể xảy ra
- Ví dụ: Trên mặt phẳng ngang vẽ một vòng tròn trong đó đánh dấu một điểm M. Đứng từ xa phóng lao vào miền vòng tròn. Tính xác suất để lao phóng trúng điểm M.
    - Trong trường hợp này, diện tích của miền ***g*** bằng 0, do đó xác suất tính được sẽ bằng 0. ả hưng trên thực tế vẫn có thể phóng trúng điểm M đã cho, tức sự kiện vẫn có thể xảy ra.

2.4 Quan hệ giữa các sự kiện

- Các sự kiện trong một phép thử thường liên quan với nhau bởi các quan hệ sau đây:
  - Quan hệ kéo theo: Sự kiện A xuất hiện nhất thiết sự kiện B xuất hiện. Trong trường hợp này ta nói sự kiện A kéo theo sự kiện B, hoặc A là trường hợp riêng của B. Ký hiệu $A \subset B$, hay A là tập con của B
  - Quan hệ tương đương: Đồng thời sự kiện A kéo theo sự kiện B và B kéo theo A, tức $A \subset B$ và $B \subset A$. Ta nói A và B là các sự kiện tương đương. Ký hiệu $A=B$
  - Tổng của hai sự kiện: Tổng của hai sự kiện A và B là một sự kiện được ký hiệu là $A \cup B$ (hay $A + B$), sao cho $(A+B)$ xảy ra khi và chỉ khi hoặc A xảy ra hoặc B xảy ra (nói cách khác: khi và chỉ khi ít nhất một trong hai sự kiện A và B xảy ra)
  - Tích của hai sự kiện: Tích của hai sự kiện A và B là một sự kiện được ký hiệu là $A \cap B$ (hay AB), sao cho sự kiện tích AB xảy ra khi và chỉ khi cả A và B cùng xảy ra



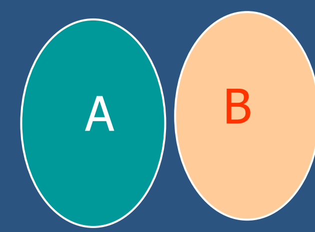


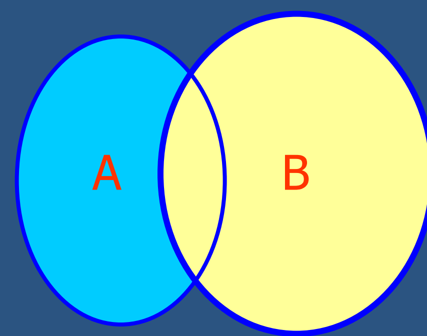


2.4 Quan hệ giữa các sự kiện

- Hai sự kiện xung khắc: A và B được gọi là xung khắc nếu A xuất hiện thì B không xuất hiện và ngược lại, hay AB = V
- Hiệu của hai sự kiện: Hiệu của sự kiện A và sự kiện B, ký hiệu là A\B, là sự kiện xảy ra khi A xảy ra nhưng B không xảy ra
- Sự kiện đối lập: Trong trường hợp hiệu của hai sự kiện A và B, nếu A là sự kiện chắc chắn, A=U thì sự kiện A\B=U\B được gọi là sự kiện đối lập của sự kiện B, ký hiệu là $\overline{B}$

$$\overline{B} = U \setminus B$$





A\B

- ẩ hận xét: Ta có thể mở rộng các khái niệm trên cho trường hợp nhiều sự kiện, chẳng hạn tổng của nhiều sự kiện, tích của nhiều sự kiện,…

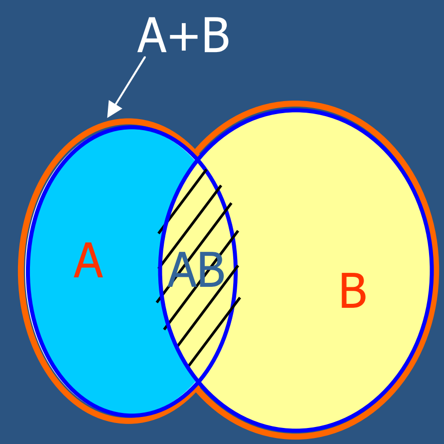
2.4 Quan hệ giữa các sự kiện

- Các sự kiện A_1, A_2, A_3,....A_n được gọi là hợp thành nhóm đầy đủ nếu chúng xung khắc từng đôi một và nhất thiết một trong chúng phải xảy ra (tức tổng của chúng là sự kiện chắc chắn):

$$A_iA_j = V, \forall i \neq j$$
$$A_1+A_2+\ldots+A_n = U$$

- Ví dụ:
  - Gọi E_i là sự kiện xuất hiện mặt i trong phép thử gieo một con xúc xắc (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). Khi đó các sự kiện E_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) hợp thành nhóm đầy đủ các sự kiện
  - Hai người cùng bắn vào một mục tiêu, mỗi người bắn một phát. Gọi A_i là sự kiện người thứ i bắn trúng mục tiêu, ta có:
  - Sự kiện chỉ người thứ nhất bắn trúng: $A_1\overline{A_2}$
  - Sự kiện có một người bắn trúng: $A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$
  - Sự kiện có ít nhất một người bắn trúng: A_1+A_2
  - Sự kiện cả hai người bắn trúng: A_1A_2
  - Sự kiện không có ai bắn trúng: $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$

2.5 Xác suất của tổng các sự kiện (Công thức cộng XS)



- Định lý: Xác suất của tổng hai sự kiện A và B được xác định bởi: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)
- Chứng minh: Sử dụng định nghĩa xác suất cổ điển.
  - Giả sử số kết cục đồng khả năng (số trường hợp có thể có của phép thử) là n.
  - Số kết cục thuận lợi cho A là n_A
  - Số kết cục thuận lợi cho B là n_B
  - Số kết cục thuận lợi cho AB là n_{AB}
  - ➔ Số kết cục thuận lợi cho A+B sẽ là $n_A+n_B-n_{AB}$
  - Vậy $$P(A+B)=\frac{n_A+n_B-n_{AB}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}-\frac{n_{AB}}{n}=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

2.5 Xác suất của tổng các sự kiện (Công thức cộng XS)

- ả ếu A và B xung khắc với nhau: AB=V, do đó P(AB)=P(V)=0

➔ P(A+B) = P(A) + P(B)

- Đối với hai sự kiện đối lập:

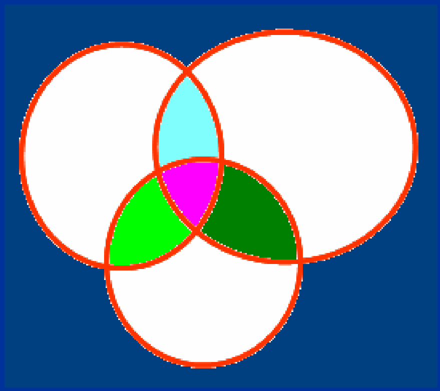
$$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(U) = 1$$
$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

- Trong trường hợp tổng của ba sự kiện:

P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)

- ả ếu các sự kiện A, B, C xung khắc với nhau từng đôi một:

P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)



2.5 Xác suất của tổng các sự kiện (Công thức cộng XS)

- Ví dụ: Một kho vũ khí của địch gồm 3 nhà: nhà số 1 chứa bom, nhà số 2 chứa xăng và nhà số 3 chứa các vũ khí không gây cháy. Xác suất bắn trúng nhà số 1, 2, 3 của một phát đạn pháo tương ứng là 10%, 15%, 20%. Tính xác suất phá huỷ toàn kho bởi phát đạn pháo đó, biết rằng muốn phá huỷ toàn bộ kho chỉ cần bắn trúng vào nhà số 1 hoặc nhà số 2.
- Giải: Gọi A_i là sự kiện bắn trúng nhà số i (i = 1, 2, 3,...).

- Theo đầu bài, sự kiện $A_1 + A_2$ là sự kiện phá huỷ toàn bộ kho bởi phát đạn.
- Vì A_1, A_2 xung khắc nên:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}25$$

2.6 Xác suất có điều kiện. Công thức nhân XS

- Ví dụ dẫn:
  - Một bộ vé số gồm 5 vé, trong đó có 2 vé trúng thưởng. Hai người mua lần lượt rút mỗi người một vé. Xác suất trúng thưởng của mỗi người?
  - Xác suất người thú nhất trúng thưởng: P(A) = 2/5
  - Xác suất người thứ hai: Phụ thuộc vào kết quả của người thứ nhất:
    - ả ếu người thứ nhất không trúng thưởng: Xác suất = 2/4
    - ả ếu người thứ nhất trúng thưởng: Xác suất = 1/4
- **Định nghĩa**. Xác suất của sự kiện A được tính với giả thiết sự kiện B đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của A với điều kiện B, ký hiệu là P(A/B)
  - Các xác suất P(A), P(B) được gọi là xác suất không điều kiện

2.6 Xác suất có điều kiện. Công thức nhân XS

- Ví dụ:
  - Một bộ vé số gồm 5 vé, trong đó có 2 vé trúng thưởng. Hai người mua lần lượt rút mỗi người một vé. Xác suất trúng thưởng của mỗi người?
  - Gọi sự kiện người thứ nhất trúng thưởng là A, người thứ hai là B
  - Xác suất người thứ nhất trúng thưởng: P(A) = 2/5
  - Xác suất người thứ hai:

$$P(B/A) = 1/4$$

$$P(B/\overline{A}) = 2/4 = 1/2$$

2.6 Xác suất có điều kiện. Công thức nhân XS

- **Định lý nhân xác suất**: Xác suất của tích hai sự kiện bằng tích xác suất của một trong chúng nhân với xác suất có điều kiện, với giả thiết sự kiện kia đã xảy ra

$$\mathbf{P(AB) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)}$$

- Chứng minh: Gọi
  - Số kết cục đồng khả năng là n
  - Số kết cục thuận lợi cho B là n_B
  - Số kết cục thuận lợi cho cả A và B (sự kiện AB) là n_{AB}
  - Vì B đã xảy ra nên số kết cục đồng khả năng của sự kiện A/B sẽ là n_B, do đó:

$$P(A/B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- → $P(AB) = P(B)P(A/B)$ $\qquad$ $P(AB) = P(A)P(B/A)$

2.6 Xác suất có điều kiện. Công thức nhân XS

- **Tính chất của xác suất có điều kiện**
  - $0 \le P(A/B) \le 1$
  - $P(B/B) = 1$
  - Nếu $AC = V$ thì $P(A+C/B) = P(A/B) + P(C/B)$
  - $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$
- **Các sự kiện độc lập:** Hai sự kiện A và B được gọi là độc lập với nhau nếu sự xuất hiện của sự kiện A không ảnh hưởng đến xác suất xuất hiện của sự kiện B và ngược lại

$$\mathbf{P(A/B) = P(A) \text{ hoặc } P(B/A) = P(B)}$$

- Hệ quả: Xác suất của tích hai sự kiện độc lập bằng tích xác suất của chúng: $P(AB) = P(A).P(B)$

2.6 Xác suất có điều kiện. Công thức nhân XS

- **Tổng quát:**
  - **Định nghĩa 1**. Các sự kiện A_1, A_2,...A_n được gọi là độc lập từng đôi một nếu $P(A_i/A_j) = P(A_i)$ (i, j = 1,2,3,...n; $i \neq j$), nói cách khác, nếu mỗi cặp sự kiện trong chúng là độc lập
  - **Định nghĩa 2**. Các sự kiện A_1,A_2,....A_n được gọi là độc lập trên toàn thể (độc lập tương hỗ) nếu mỗi sự kiện trong chúng độc lập với tích của một số bất kỳ trong các sự kiện còn lại, tức là:

$$P(A_k/A_{i1}\ A_{i2},...A_{ir}) = P(A_k)$$

trong đó A_{i1},..., A_{ir} là r sự kiện khác A_k trong số n sự kiện đã cho

  - Xác suất của tích n sự kiện:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

  - Khi các sự kiện A_i (i = 1,2, ...n) độc lập tương hỗ

$$P(A_1A_2...An) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$$

2.6 Xác suất có điều kiện. Công thức nhân XS

- Ví dụ 1. Trong thùng có 10 quả cầu, trong đó 3 quả màu trắng, 7 quả màu đen. Bốc hú hoạ hai lần, mỗi lần một quả. Tính xác suất để lần thứ nhất bốc được quả trắng, lần thứ hai được quả đen.
  - Giải: Gọi A là sự kiện lần thứ nhất bốc được quả trắng, B là sự kiện lần thứ hai bốc được quả đen. Ta phải tính xác suất P(AB). Ta có

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = 3/10 \times 7/9 = 7/30$$

- Ví dụ 2. Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Xác suất người thứ nhất bắn trúng đích là 0.7, người thứ hai là 0.8. Tính xác suất để ít nhất có một người bắn trúng đích.
  - Giải: Gọi A là sự kiện người thứ nhất bắn trúng đích, B là sự kiện người thứ hai bắn trúng đích. Sự kiện có ít nhất một người bắn trúng đích sẽ là A+B. Ta phải tính xác suất P(A+B).
  - Ta có: P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). Theo giả thiết, P(A)=0.7, P(B)=0.8, mặt khác vì A và B là hai sự kiện độc lập nên P(AB)=P(A).P(B)=0.56.
  - Vậy: P(A+B) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94

2.6 Xác suất có điều kiện. Công thức nhân XS

- Ví dụ 2. Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Xác suất người thứ nhất bắn trúng đích là 0.7, người thứ hai là 0.8. Tính xác suất để ít nhất có một người bắn trúng đích.
  - Một cách giải khác: Sự kiện "ít nhất có một người bắn trúng đích" là đối lập với sự kiện "cả hai người đều bắn trượt". ả ghĩa là

$$A + B = U \setminus \overline{A}\overline{B} \ hay$$
$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B})$$

  - Mặt khác:

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$
$$P(\overline{A}\overline{B}) = 0.3 \times 0.2 = 0.06$$

  - Vậy P(A+B) = 1-0.06 = 0.94

2.7 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

- Giả sử A_1, A_2,...,A_n là một nhóm đầy đủ các kiện kiện xung khắc và B là một sự kiện bất kỳ nào đó xảy ra trên nền các sự kiện A_i, nói cách khác B xảy ra chỉ khi một trong các A_i xảy ra.
- Cho biết các xác suất $P(A_i)$ và $P(B/A_i)$ (i = 1,2...n). Khi đó xác suất của sự kiện B được xác định bởi:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

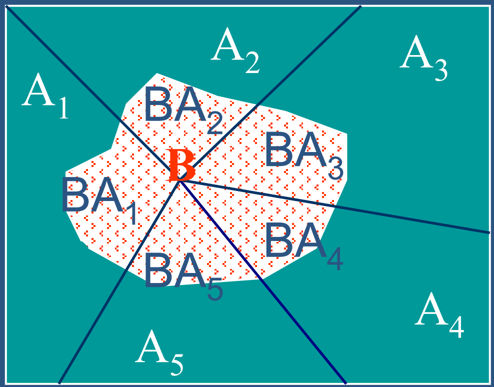
  - Ta gọi đây là công thức xác suất toàn phần hay công thức xác suất đầy đủ
  - Công thức xác suất toàn phần cho phép tính xác suất của B theo các xác suất không điều kiện $P(A_i)$ và các xác suất có điều kiện $P(B/A_i)$ (i = 1,2,..n)
- Có thể chứng minh công thức này như sau

2.7 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

- $A_1, A_2,...,A_n$ là nhóm đầy đủ các kiện kiện xung khắc nên $\Sigma A_i = U$
- B xảy ra chỉ khi một trong các A_i xảy ra nên B=BU, hay

$$B = B(A_1+A_2+...+A_n) = BA_1+BA_2+\ldots+BA_n$$

- Vì các $A_1, A_2,...,A_n$ xung khắc nên các $BA_1, BA_2,\ldots, BA_n$ cũng là nhóm đầy đủ các sự kiện xung khắc
- Do đó: $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$$
- Mặt khác: $$P(BA_i) = P(A_i)P(B/A_i)$$
- Vậy $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$



2.7 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

- Ví dụ: Số liệu khí tượng của trạm X được đo đạc bởi ba quan trắc viên QTV1, QTV2 và QTV3. Do tính chất công việc, QTV1 chỉ đảm nhận 20% khối lượng công việc, QTV2 đảm nhận 30% khối lượng công việc, 50% còn lại do QTV3 đảm nhận. Xác suất xảy ra sai số do QTV1, QTV2 và QTV3 đo đạc tương ứng là 0.4%, 0.3% và 0.1%. Tính xác suất xảy ra sai số chung của số liệu cung cấp bởi trạm X.
- Giải:
  - Gọi A_1, A_2, A_3 tương ứng là các sự kiện số liệu được tiến hành kiểm tra do QTV1, QTV2, QTV3 đo đạc.
  - Gọi B là sự kiện số liệu được kiểm tra có chứa sai số
  - Ta có: $P(A_1) = 0.2$, $P(A_2) = 0.3$, $PA_3) = 0.5$,
  - $P(B/A_1) = 0.004$, $P(B/A_2) = 0.003$, $P(B/A_3) = 0.001$,
  - Vậy $P(B) = P(A_1)P(B/A_1)+ P(A_2)P(B/A_2)+ P(A_3)P(B/A_3) =$

$0.2x0.004 + 0.3x0.003 + 0.5x0.001 = 0.0008+0.0009+0.0005=0.0022 = 0.22\%$

2.7 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

- Giả sử A_1, A_2,...,A_n là một nhóm đầy đủ các kiện kiện xung khắc và B là một sự kiện bất kỳ nào đó xảy ra trên nền các sự kiện A_i, nói cách khác B xảy ra chỉ khi một trong các A_i xảy ra.
- Cho biết các xác suất $P(A_i)$ và $P(B/A_i)$ (i = 1,2...n). Khi đó xác suất có điều kiện của sự kiện A_i với điều kiện B được xác định bởi:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

  - Đây được gọi là công thức Bayes
- Có thể chứng minh công thức này như sau:

$$P(A_i)P(B/A_i) = P(B)P(A_i/B)$$

$$\Rightarrow P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

2.7 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

- Công thức Bayes được ứng dụng rất nhiều trong khí tượng thủy văn
- Có thể phát biểu dạng bài toán tổng quát như sau:
- Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là một nhóm đầy đủ các kiện kiện xung khắc và B là một sự kiện nào đó xảy ra trên nền các sự kiện A_i. Biết rằng B đã xảy ra. Cho biết các xác suất $P(A_i)$ và $P(B/A_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$.
- Hãy xác định: Trong số các sự kiện $A_1, A_2, ..., A_n$, sự kiện nào có khả năng xảy ra nhiều nhất.

  - Giải bài toán này đồng nghĩa với việc tính các xác suất có điều kiện $P(A_i/B)$ và tìm giá trị lớn nhất của chúng
  - Lời giải cuối cùng sẽ là MAX $\{P(A_i/B), i=1,2,…, n\}$

2.7 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

- Ví dụ: Trở lại với bài toán ứng dụng công thức xác suất toàn phần
- Số liệu khí tượng của trạm X được đo đạc bởi ba quan trắc viên QTV1, QTV2 và QTV3. Do tính chất công việc, QTV1 chỉ đảm nhận 20% khối lượng công việc, QTV2 đảm nhận 30% khối lượng công việc, 50% còn lại do QTV3 đảm nhận. Xác suất xảy ra sai số do QTV1, QTV2 và QTV3 đo đạc tương ứng là 0.4%, 0.3% và 0.1%. Tiến hành kiểm tra ngẫu nhiên một tập số liệu người ta phát hiện thấy trong tập này có chứa sai số. Hỏi khả năng tập số liệu này do ai quan trắc?
- Giải:
  - Trả lời câu hỏi có nghĩa là phải tính được các xác suất $P(A_1/B)$, $P(A_2/B)$, $P(A_3/B)$.

2.7 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

- Gọi A_1, A_2, A_3 tương ứng là các sự kiện số liệu được tiến hành kiểm tra do QTV1, QTV2, QTV3 đo đạc.
- Gọi B là sự kiện số liệu được kiểm tra có chứa sai số
- Ta có: $P(A_1) = 0.2$, $P(A_2) = 0.3$, $PA_3) = 0.5$,
- $P(B/A_1) = 0.004$, $P(B/A_2) = 0.003$, $P(B/A_3) = 0.001$,
- $P(B) = P(A_1)P(B/A_1)+ P(A_2)P(B/A_2)+ P(A_3)P(B/A_3) =$

$0.2x0.004 + 0.3x0.003 + 0.5x0.001 = 0.0008+0.0009+0.0005=0.0022 = 0.22\%$

- $P(A_1/B) = P(A_1)P(B/A_1)/P(B) = 0.2x0.004/0.0022 = 0.0008/0.0022= 8/22$
- $P(A_2/B) = P(A_2)P(B/A_2)/P(B) = 0.3x0.003/0.0022 = 0.0009/0.0022= 9/22$
- $P(A_3/B) = P(A_3)P(B/A_3)/P(B) = 0.5x0.001/0.0022 = 0.0005/0.0022= 5/22$
- Vậy $P(A_2/B) = MAX \{P(A_i/B), i=1,2,3\} = 9/22$

Kết luận:

- Khả năng lớn nhất tập số liệu có chứa sai số là do QTV2 đo đạc

2.8 Dãy phép thử độc lập (Dãy phép thử Bernoulli)

- **Định nghĩa**: Tiến hành ***n*** phép thử độc lập. Dãy phép thử này được gọi là dãy phép thử Bernoulli (hoặc lược đồ Bernoulli) nếu nó thỏa mãn các điều kiện:
  - Mỗi phép thử chỉ có hai kết cục là A và $\overline{A}$
  - Xác suất xuất hiện A ở mỗi phép thử không đổi, bằng P(A)=p, và không phụ thuộc vào chỉ số phép thử
- Ví dụ:
  - Gieo đồng tiền 100 lần với cách thức như nhau. Đó là một dãy phép thử Bernoulli (n=100, A là sự kiện xuất hiện mặt sấp)
  - Một người bắn lần lượt 20 viên đạn vào một mục tiêu bằng một khẩu súng (n=20, A là sự kiện bắn trúng mục tiêu)
  - Quan trắc hiện tượng mưa phùn từng ngày trong một tháng giêng (n=31, A là sự kiện mưa phùn xuất hiện trong ngày)

2.8 Dãy phép thử độc lập (Dãy phép thử Bernoulli)

- **Bài toán**: Tiến hành dãy ***n*** phép thử Bernoulli. Tính xác suất để trong ***n*** lần thử đó sự kiện A xuất hiện ***k*** lần.
- Giải:
  - ả ếu ở lần thử thứ i nào đó A xuất hiện ta ghi chữ A, còn A không xuất hiện ta ghi chữ $\overline{A}$
  - ả hư vậy, kết quả có thể có của n lần thử là một dãy gồm k chữ A và (n-k) chữ $\overline{A}$

$$\underbrace{A\overline{A}\ldots\overline{A}A}_{k\;lân\;A,(n-k)\;lân\;\overline{A}}$$

  - Do tính độc lập của các phép thử, nên với 1 cách sắp xếp cố định k chữ A và (n-k) chữ $\overline{A}$ ta có xác suất tương ứng là $p^k.(1-p)^{n-k}$
  - Vì số cách sắp xếp k chữ A trong n vị trí chính bằng tổ hợp chập k của n, nên xác suất cần tìm sẽ là: $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Người ta gọi đây là công thức Bernoulli

2.8 Dãy phép thử độc lập (Dãy phép thử Bernoulli)

- **Số lần xuất hiện chắc chắn nhất (số có khả năng nhất):**

Ví dụ dẫn: Ta xét ví dụ sau

- Gieo một đồng tiền 5 lần. Gọi A là sự kiện đồng tiền xuất hiện mặt sấp. Vậy P(A) = 0.5
- Số lần xuất hiện mặt sấp trong 5 lần gieo có thể là k=0,1,2,3,4,5
- Áp dụng công thức $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- ta được

k	0	1	2	3	4	5
$P_5(k)$	0.0313	0.1563	0.3125	0.3125	0.1563	0.0313

- ẩ hận xét: Trong các trường hợp trên, xác suất xuất hiện mặt sấp 2 lần và 3 lần là lớn nhất
- Các số đó được gọi là số lần xuất hiện chắc chắn nhất, hay số có khả năng nhất

2.8 Dãy phép thử độc lập (Dãy phép thử Bernoulli)

- **Số lần xuất hiện chắc chắn nhất (số có khả năng nhất):**
  - Trong dãy phép thử Bernpulli, khi n cố định, trị số của xác suất $P_n(k)$ nói chung phụ thuộc vào k
  - Trong tất cả các trị số của k có những giá trị $k = k_0$ mà ứng với nó xác suất $P_n(k)$ đạt giá trị lớn nhất
  - Số k_0 đó được gọi là số lần xuất hiện chắc chắn nhất (hay số có khả năng nhất) của sự kiện A trong dãy n phép thử đã cho
  - Để xác định giá trị k_0 ta xem $P_n(k)$ như là hàm của đối số tự nhiên k và xét dáng hiệu biến thiên của $P_n(k)$ rồi từ đó tìm ra k_0
  - Lập tỷ số:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} \frac{p}{(1-p)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

2.8 Dãy phép thử độc lập (Dãy phép thử Bernoulli)

- **Số lần xuất hiện chắc chắn nhất (số có khả năng nhất):**

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

- Từ đó:
- $P_n(k + 1) > P_n(k)$ khi $(n-k)p>(k+1)(p-1)$, tức là khi $k<np+p-1$;
- $P_n(k + 1) = P_n(k)$ khi $k = np+p-1$;
- $P_n(k + 1) < P_n(k)$ khi $k > np+p-1$
- Khi k tăng từ 0 đến n, hàm $P_n(k)$ lúc đầu tăng theo k, sau đó đạt cực đại rồi giảm dần
- ả ếu np+p-1 là một số nguyên thì $P_n(k)$ đạt hai cực đại $k_0=np+p-1$ và $k_0=np+p$
- ả ếu np-q không phải là số nguyên thì $P_n(k)$ đạt cực đại tại k_0 là số nguyên bé nhất lớn hơn (np+p-1), nghĩa là phần nguyên của số $np+p = p(n+1)$

2.8 Dãy phép thử độc lập (Dãy phép thử Bernoulli)

- **Mở rộng ứng dụng của công thức Bernoulli:**
  - Ứng dụng công thức Bernoulli trên đây ta tính được xác suất xuất hiện k lần trong n lần thử, $P_n(k)$
  - Trong nhiều trường hợp ngoài xác suất $P_n(k)$ ta còn phải tính xác suất sao cho trong n phép thử độc lập, sự kiện A xuất hiện một số bất kỳ gồm giữa k_1 và k_2 $(0 \leq k_1 \leq k \leq k_2 \leq n)$
  - Ký hiệu xác suất này là $P_n(k_1,k_2)$ ta sẽ xác định công thức tính như sau
  - Gọi B_k là sự kiện trong n lần thử A xuất hiện k lần
  - Gọi H là sự kiện trong n lần thử A xuất hiện trong khoảng k_1 đến k_2 lần
  - Ta có $$H = \sum_{k=k_1}^{k_2} B_k$$
  - Vì các B_k là xung khắc nên: $$P(k_1,k_2) = P(H) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P(B_k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

2.8 Dãy phép thử độc lập (Dãy phép thử Bernoulli)

- **Mở rộng ứng dụng của công thức Bernoulli:**
  - Ví dụ: Bắn 5 phát súng vào một mục tiêu, xác suất trúng đích của mỗi phát bằng 0,2. Để phá huỷ mục tiêu phải cần từ 3 phát trở lên trúng đích. Tính xác suất để mục tiêu bị phá hủy.
  - Giải: Sự kiện A: bắn trúng mục tiêu, P(A)=p=0.2
  - Sự kiện H, mục tiêu bị phá hủy, chính là sự kiện có hoặc 3, hoặc 4, hoặc 5 phát bắn trúng mục tiêu, tức là hoặc B_3 hoặc B_4 hoặc B_5 xảy ra ($k_1=3$, $k_2=5$)
  - $H = B_3 + B_4 + B_5$
  - Do đó

$$P(H) = P(3,5) = \sum_{k=3}^{5} P(B_k) = \sum_{k=3}^{5} C_5^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(H) = C_5^3 (0.2)^3 (0.8)^2 + C_5^4 (0.2)^4 (0.8)^1 + C_5^5 (0.2)^5 (0.8)^0 = 0.0579$$

2.9 Các định lý giới hạn

- **Định lý giới hạn địa phương Moivres–Laplace**
- ẩ ếu trong mỗi phép thử Bernoulli sự kiện A xuất hiện với xác suất p (0<p<1) thì khi $\boldsymbol{n}\to\infty$ ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left[P_n(k)-\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}\right]=0$$

ẩ ghĩa là khi ***n*** đủ lớn ta có $P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_0)$

Với $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\quad x_0=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

2.9 Các định lý giới hạn

- **Định lý giới hạn địa phương Moivres–Laplace**
- Ví dụ: Thực hiện 400 phép thử Bernoulli. Xác suất xuất hiện sự kiện A trong mỗi phép thử p=0.2. Tính xác suất để A xuất hiện 80 lần
- Giải: ẩ hận thấy rằng nếu sử dụng công thức Bernoulli sẽ không thể tính được bằng phương pháp thông thường. Ở đây ***n*** khá lớn do đó ta áp dụng định lý Moivres–Lapcae

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \times 0.2 \times 0.8}}\varphi(x_0)$$

$$x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \times 0.2}{\sqrt{400 \times 0.2 \times 0.8}} = 0$$

$$\varphi(x_0) = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.3989$$

$$P_{400}(80) \approx \frac{0.3989}{\sqrt{400 \times 0.2 \times 0.8}} = \frac{0.3989}{8} = 0.0499$$

2.9 Các định lý giới hạn

- **Định lý giới hạn trung tâm**
- ả ếu trong mỗi phép thử Bernoulli sự kiện A xuất hiện với xác suất p (0<p<1) thì khi $\boldsymbol{n}\to\infty$ ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left[P_n(k_1,k_2)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\right]=0$$

Với

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$$

ả ghĩa là khi $\boldsymbol{n}$ đủ lớn ta có

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\phi(x_2)-\phi(x_1)$$

Trong đó $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$ là hàm Laplace

2.9 Các định lý giới hạn

- **Định lý giới hạn trung tâm**
- Ví dụ: Xác suất bắn trúng đích của một xạ thủ là p=0.75. Tính xác suất để với 100 phát có 81 phát trở lên trúng đích.

Giải: $n = 100, k = 81 \Rightarrow P_{100}(81,100) \approx \phi(x_2) - \phi(x_1)$

$$x_1 = \frac{81 - 100\times 0.75}{\sqrt{100\times 0.75\times 0.25}} \approx 1.38,\ x_2 = \frac{100 - 100\times 0.75}{\sqrt{100\times 0.75\times 0.25}} \approx 5.77$$

$$\phi(1.38) \approx 0.4162,\ \phi(5.77) \approx 0.5$$

$$\Rightarrow P_{100}(81,100) \approx \phi(5.77) - \phi(1.38) = 0.5 - 0.4162 = 0.0838$$

2.9 Các định lý giới hạn

- **Định lý Poisson**
- ả ếu trong mỗi phép thử Bernoulli sự kiện A xuất hiện với xác suất p (0<p<1) thì khi $\boldsymbol{n}\to\infty$ mà p→0 sao cho $\boldsymbol{np}=\lambda=\text{const}$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

- Chứng minh: Từ công thức Bernoulli

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$np = \lambda \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

$$\Rightarrow P_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-(k-1)}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

2.9 Các định lý giới hạn

- **Định lý Poisson**

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

- Lấy giới hạn khi n→∞

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \equiv P(k)$$

Tham số λ được gọi là trung bình số lần xuất hiện

2.9 Các định lý giới hạn

- **Định lý Poisson**
- Ví dụ: Sau khi kiểm tra cuốn sách 1000 trang người ta phát hiện được 20 lỗi chính tả. Tính xác suất sao cho khi giở một trang bất kỳ sẽ phát hiện được
  - Có đúng 2 lỗi chính tả
  - Có không ít hơn hai lỗi chính tả
- Giải: Số lỗi trung bình trên một trang sách là: $\lambda = \frac{20}{1000} = 0.02$

$$P(k=2) = P(k) = \frac{e^{-0.02}0.02^2}{2!} = \frac{0.9802 \times 0.0004}{2} = 0.000196$$

$$P(k \geq 2) = 1 - (P(k=0) + P(k=1)) = 1 - P(0) - P(1) =$$
$$= 1 - \frac{e^{-0.02}0.02^0}{0!} - \frac{e^{-0.02}0.02^1}{1!} = 1 - e^{-0.02} - e^{-0.02}0.02 =$$
$$= 1 - 0.9802 - 0.9802 \times 0.02 \approx 0.000197$$

HẾT CHƯƠả G 2

Which one would you like?