Bài 3.

Biến ngẫu nhiên

1. Tính toán

Ví dụ 1

a) Với $k = 0,1,\ldots,8$, tính các xác suất $P(X = k) = C_8^k 0.3^k 0.7^{8-k}$.

b) Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$$

với μ và $\sigma > 0$ là hai tham số. Viết hàm pdf của X để tính giá trị f(x) tại một điểm bất kỳ.

Giải:

a)

```
k = 0:8;
p = function(k) choose(8,k) * 0.3^k * 0.7^(8-k);
p(k)
[1] 0.05764801 0.19765032 0.29647548 0.25412184 0.13613670
0.04667544
[7] 0.01000188 0.00122472 0.00006561
```

Ta có thể kiểm tra lại rằng tổng các xác suất bằng 1 với lệnh

```
sum(p(k))
[1] 1
```

b)

```
f = function(x, mu=0, sigma=1){
      1/sqrt(2*pi*sigma^2) * exp(-(x-mu)^2/(2*sigma^2))
}
```

Gọi hàm

Kiểm tra tích phân có bằng 1?

```
integrate(function(x) f(x,0,1),lower=-Inf,upper=Inf)
1 with absolute error < 9.4e-05
```

Tính tại điểm $x = 0$:

```
f(0)
[1] 0.3989423
```

2. Biểu diễn bằng đồ thị

Ví dụ 2

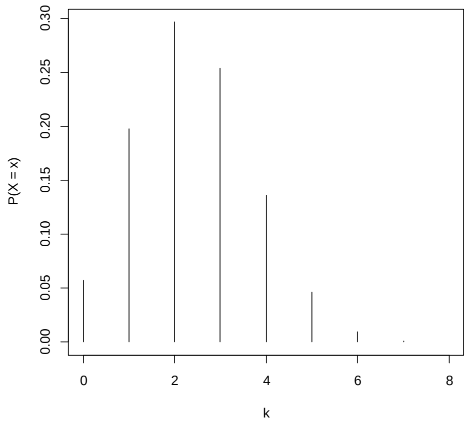
a) Vẽ đồ thị hàm xác suất trong Ví dụ 1a): $P(X = k) = C_8^k 0.3^k 0.7^{8-k}$ với $k = 0,1,\ldots,8$.

b) Vẽ hàm mật độ xác suất trong Ví dụ 1b): $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$

Giải:

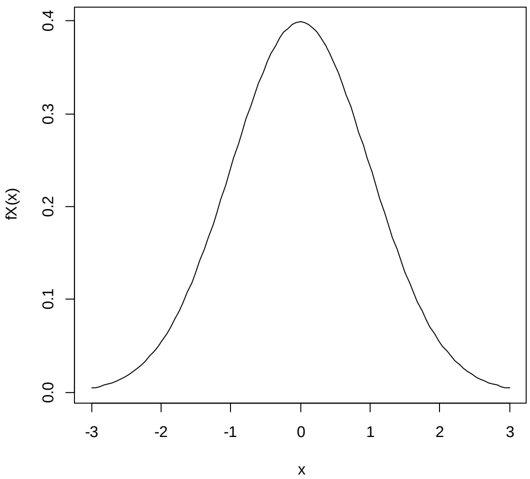
a)

```
plot(k, p(k), type = "h", ylab = "P(X = x)")
```



b)

```
curve(f(x,0,1),from=-3,to=3, ylab = "fX(x)")
```



3. Hàm phân phối

3.1 Định nghĩa

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

* X rời rạc,

$$F_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega) \cap (-\infty, x]} P(X = k)$$

* X liên tục,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

3.2 Tính toán

Ví dụ 3

a) Xét tiếp Ví dụ 1a). Tính $F_X(4) = P(X \le 4) = \sum_{k=0}^{4} P(X = k)$.

b) Xét tiếp Ví dụ 1b). Tính $F_X(1.96) = P(X \le 1.96) = \int_{-\infty}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

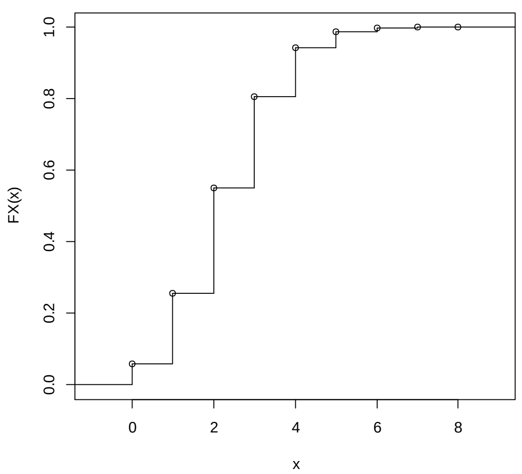
Giải:
a)
```
F = function(k) sum(p(0:k))
F = Vectorize(F)
F(4)
[1] 0.9420323
```

b)
```
F2 = function(a,mu = 0, sigma = 1){
     integrate(function(x) f(x,mu,sigma), lower = -Inf, upper =
a)$value
}
F2 = Vectorize(F2)
F2(1.96)
0.9750021
```

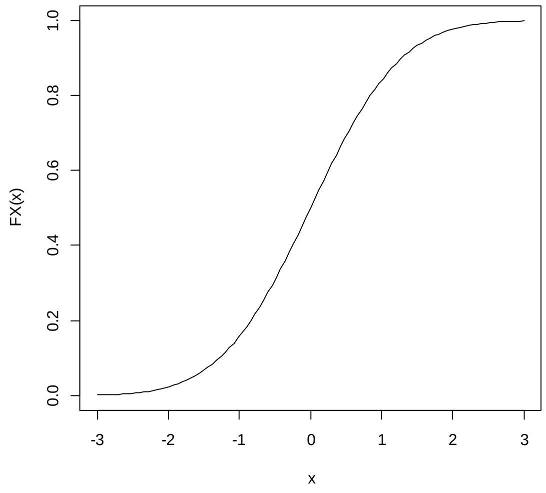
3.3 Vẽ đồ thị

Ví dụ 4

a) Xét tiếp Ví dụ 1a). Vẽ hàm phân phối xác suất của X.
b) Xét tiếp Ví dụ 1b). Vẽ hàm phân phối.
Giải:
a)
```
plot(stepfun(k, c(0, F(k))), ylab = "FX(x)", main = "")
```



b)
```
curve(F2(x), from = -3, to = 3, ylab = "FX(x)")
```



4. Phân vị

4.1 Định nghĩa

Cho $p \in (0,1)$ và X là một biến ngẫu nhiên.

* Nếu X rời rạc, thì phân vị mức p của X, ký hiệu là x_p, là

$$x_p = \inf\{k \in \mathbb{Z}; F_X(k) \geq p\}$$

* Nếu X liên tục, thì phân vị mức p của X, ký hiệu là x_p, là giá trị thỏa $F_X(x_p) = p$.

4.2 Tính toán

Ví dụ 5

a) Xét tiếp Ví dụ 1a). Tính phân vị mức 0.25 của X.
b) Xét tiếp Ví dụ 1b). Tính phân vị mức 0.975 của X.
<u>Giải:</u>
a)

```
K = k[F(k) >= 0.25];
K[1]
[1] 1
```

Kiểm tra lại bằng lệnh:

```
F(0)
[1] 0.05764801
F(1)
[1] 0.2552983
```

b)

```
uniroot(function(x) F2(x)-0.975,  c(-3,3))$root
[1] 1.959992
```

Kiểm tra lại bằng lệnh

```
F2(1.959992)
[1] 0.9750016
```

5. Mô phỏng

5.1 Lệnh sample

a) Sử dụng cơ bản

Lệnh cơ bản là: `sample(x)`, với `x` là vector số, logic hoặc chuỗi ký tự.
Lệnh này trả về một vector có các phần tử được rút ra từ `x` mà không hoàn lại.
Tạo một hoán vị các phần tử của `x` ta làm:

```
x = 1:7
sample(x)
[1] 2 4 1 7 5 6 3
```

Ta chạy lại cùng lệnh này:

```
sample(x)
[1] 1 7 6 2 3 4 5
```

Ta nhận được các kết quả khác nhau; thứ tự của hoán vị thay đổi mỗi lần chạy.
Ta có thể giữ lại kết quả của một phép hoán vị trong một vector để sử dụng sau này:

```
y = sample (c ("red", "green", "blue", "white", "black"))
y
[1] "black" "white" "green" "red," "blue"
```

5.2 Các tùy chọn

Có một số tùy chọn trong lệnh sample để thay đổi mẫu cho phù hợp với thực tế. Nó được làm bằng cách thêm một hoặc vài tham biến trong lệnh `sample`.

Ví dụ:

```
sample(1:3, size = 2, replace = TRUE, prob = c(25 / 100, 20 / 100,
55 / 100))
```

Các tùy chọn được trình bày bên dưới

a) *Size (cỡ mẫu)*: `size = "n"`, với n là một số nguyên, xác định số lần n ta thực hiện rút ra. Mặc định, số được rút ra bằng chiều dài x.

```
sample(1:10, size = 3)
[1] 10 7 3
```

Trong cú pháp sample, tham biến `size` là thứ hai. Ta có thể viết tắt như sau :
`sample(1:10, 3)`.

b) *Replace (hoàn lại)*: `replace = L`, với L là TRUE hoặc FALSE, trong đó rút có thay thế (hoàn lại) nếu L = TRUE và không hoàn lại nếu khác.
Ta làm :

```
sample(1:5, size = 9, replace = TRUE)
[1] 5 1 4 1 3 1 2 1 3
```

c) *Prob (xác suất :* Tham biến `prob` cho phép ta gán các giá trị xác suất cho từng giá trị trong vector `x`. Chưa học

$$P(X = x_j) = p_j, j \in \{1, \dots, k\}, p_j \in [0,1], \sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

Do đó, `prob = vec`, với vec là vector chứa các xác suất $(p_1, \dots, p_k)$.
Nếu `prob` không được xác định, mặc định $p_j = 1/k$ (các giá trị bằng nhau).

Ta làm:

```
y = c ("red", "green", "blue", "white", "black")
sample(y, 2, prob = c(10 / 100, 30 / 100, 10 / 100, 30 / 100, 20 /
100))
[1] "red" "green"
```

Bài tập

Bài 1

1. Biến ngẫu nhiên P, nhận các giá trị giữa 0 và 1, có hàm mật độ xác suất $f_P(p) = 0.07p^{-0.93}$.
a) Tính xác suất P(P ≤ 0.2) bằng cách sử dụng hàm: 1) f=function(p){.07*p**(-0.93)}, và 2) integrate(f,lower=0,upper=.2).
b) Kiểm tra $f_P(p)$ là hàm mật độ xác suất bằng cách tính diện tích dưới đường cong từ 0 đến 1.

Bài 2

Sử dụng lệnh `x=sample(1:5,100,TRUE,c(0.1,0.2,0.4,0.2,0.1))` để rút một mẫu ngẫu nhiên cỡ 100 từ phân phối với hàm xác suất

x	1	2	3	4	5
P(x)	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

và chứa mẫu này trong `x`. Tiếp theo vẽ biểu đồ cột của các xác suất thực nghiệm (mẫu) bằng lệnh `table(x)/100`