Signale und Systeme - Systemanalyse

Analyse des Systems

PT_1 mit negativer Verstärkung

Matrikelnummer: **8809469**

Matrikelnummer: **6130555**

Kurs: TINF21B3

Abgabedatum 16.12.2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das System, welches im Folgenden behandelt wird ist das PT_1-Glied mit negativer Verstärkung. Es wird auch Verzögerungsglied 1. Ordnung genannt. Es weist sowohl P-Verhalten als auch T-Verhalten auf. Es kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$y(t) + T * \dot{y}(t) = K * u(t)$$

K steht hierbei für den Proportionalitäts- bzw. Verstärkunsfaktor des Systems und T ist die Zeitkonstante.
Bei unser System haben wir uns für die Werte $K = -25$ und $T = 10$ entschieden.
Um das System analysieren zu können, haben wir das System mit den entsprechenden Werten in Simulink simuliert und die Sprungantwort betrachet. Erst danach haben wir mit Matlab gearbeitet und dort die entsprechenden Graphen plotten lassen.

2 Physikalische Beschreibung/Umcodierung

Unser System weist sowohl P- als auch T-Verhalten auf und ist ein Verzögerungsglied 1. Ordnung. In der Praxis lässt sich mit diesem System beispielsweise der Kühlvorgang in einer Tiefkühltruhe beschreiben.

	Physikalisch	Normiert	Systemtheoretisch
Eingang	(Kühl-)Energie	Wh	u
Ausgang	Temperatur	°C	y
Zustand	Temperatur	°C	x_1
Parameter	Niedrigste Temperatur des Kühlgerätes, Leistung des Kühlgerätes	°C, $\frac{BTU}{h}$	K, T_1

Die Wahl der Zeitkonstante h ist naheliegend, da Kühlgeräte die Temperatur normalerweise nur langfristig (im Stundenbereich) ändern können.
Die Normierung und Festlegung der Einheiten ist wichtig, damit die Plots mit den richtigen Zeitskalen beschriftet werden können.

3 Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion ist die Systembeschreibung im Laplace-Bereich (auch Bildbereich genannt) und berücksichtigt die Anfangswerte nicht. Sie geht durch Laplace-Transformation aus der Eingangs- / Ausgangsdifferentialgleichung hervor, wobei die Anfangswerte auf 0 gesetzt werden. Folglich hat die Übertragungsfunktion eine geringere Aussagekraft als die E-/A-Differentialgleichung, bei der die Anfangswerte immer berücksichtigt werden. Die Übertragungsfunktion stellt das Verhältnis von Eingangs- und Ausgangssignal eines Systemes dar.
Die Übertragungsfunktion unseres Systems hat die folgende Form:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T * s + 1}$$

K steht hierbei für den Verstärkunsfaktor des Eingangssignals und T für die Zeitkonstante. Mit den von uns ausgewählten Werten $K = -25$ und $T = 10$ ergibt sich daraus die neue Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{-25}{10s + 1}.$$

Mit Hilfe des Befehls `sys = tf([-25],[10 1])` lässt sich die Übertragungsfunktion in Matlab erzeugen.

4 Zustandsraumbeschreibung (implizite Systembeschreibung)

Mein System in neuer Zustandsraumdarstellung nach Transformation -> Zusandsraumdarstellung

Standard-Übertragungsfunktion eines Verzögerungsglied mit proportionalen Übertragungsverhalten.

Allgemein

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{a_2}(-a_0\dot{y}(t) - a_1 y(t) + b_0 u(t))$$

Eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung benötigt zur Lösung n Integrationen. Nach dem Blockschaltbild zur Lösung der Differenzialgleichung 1. Ordnung ergibt sich eine Zustandsvariable als Ausgang der Integratore. Durch Substitution wird die Ableitung von $y(t)$ durch die Bezeichnung der Zustandsvariable $x(t)$ wie folgt eingesetzt:

$$x_1(t) = y(t); x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Damit lautet die Differentialgleichung mit der eingeführten neuen Bezeichnungder Zustandsvariable:

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{a_2}(-a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + b_0 u(t))$$

Daraus können die Zustandsgrößen gebildet werden.

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{a_0}{a_2}x_1 - -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b_0}{a_2}u$$

Die Zustandsgrößen x_1 und x_1 bilden den sogenannten Zustandsvektor $\vec{x}$.

Diese Gleichungen werden als Vektordifferenzialgleichungen in Matizenform wie folgt geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_0}{a_2} \end{bmatrix} * u(1)$$

und die Ausgangsgleichung:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Unser System

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{10}(-y(t) - 25u(t))$$

$$x_1 = y(t)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{10}(-x_1(t) - 25u(t))$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{10}(-x_1(t) - 25u(t))$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{10}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{25}{10}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}u(t)\end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}x_1\end{bmatrix}$$

5 Ein-/Ausgangsdifferentialgleichung

Allgemein

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_{\mathrm{PT1}}}{T_1 + 1}$$

Die zugehörige linare Differentialgleichung wird durch Umwandlung mit Hilfe der inversen Laplace-Transformation ermittelt:

$$T_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + y(t) = K_{\mathrm{PT1}} u(t)$$

mit T_1 als System-Zeitkonstante und dem Verstärkungsfaktor K_{PT1}.

Zur Vereinheitlichung der Ableitungen $y(t)$ werden die Koeffizienten mit dem Buchstaben a dargestellt. Für die rechte Seite der Ableitungen von $u(t)$ mit b und fortlaufend nummeriert:

$$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Die höchste Ableitung wird vom Koeffizienten freigestellt, in dem alle Terme der Gleichung auch durch a_1 dividiert werden und nach $\dot{y}(t)$ aufgelöst wird:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{a_1}(-a_0 y(t) + b_0 u(t))$$

Unser System

$$G(s) = \frac{-25}{10s+1}$$

Die zugehörige linare Differentialgleichung wird durch Umwandlung mit Hilfe der inversen Laplace-Transformation ermittelt:

$$10\dot{y}(t) + y(t) = -25u(t)$$

Nach $\dot{y}(t)$ umformen:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{10}(-y(t) - 25u(t))$$

Zustandsraumbeschreibung in Übertragungsfunktion

Natürlich kann die Umformung von der Zustandsraumbeschreibung in die Übertragungsfunktion auch mathematisch durchgeführt werden: Gleichung 1:

$$\dot{X}(t) = A * x(t) + B * u(t) \tag{1}$$

wird transformiert in:

$$s * X(s) = A * X(s) + B * U(s) \tag{2}$$

Gleichung 2:

$$y_a(t) = C * x(t) + D * u(t) \tag{3}$$

wird transformiert in:

$$Y_a(s) = C * x(s) + D * U(s) \tag{4}$$

bei Gleichung 1 wird das $x(s)$ isoliert:

$$s * X(s) = A * X(s) + B * U(s) \tag{5}$$

$$X(s) * (sE - A) = B * U(s) \tag{6}$$

wobei E die Einheitsmatrix ist.

$$X(s) = (sE - a)^{-1}U(s) \tag{7}$$

Im nächsten Schritt wird das $x(s)$ der Gleichung 1 in das $x(s)$ der Gleichung 2 eingesetzt:

$$Y_a(s) = C * (sE - a)^{-1} U(s) + D * U(s) \tag{8}$$

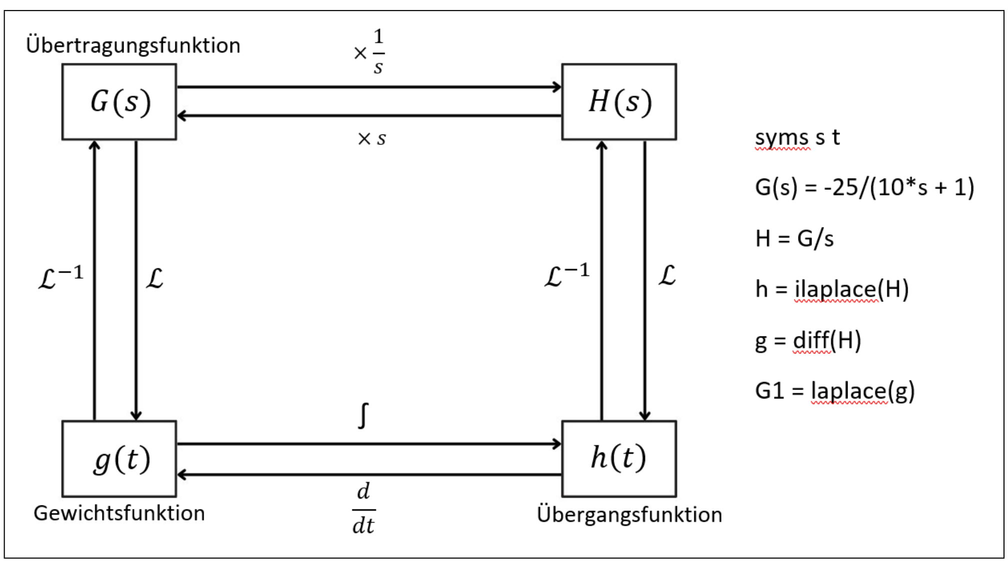
Umgeformt ergibt es die Formel:

$$G(s) = \frac{Y_a(s)}{U(s)} = C * (sE - A)^{-1} * B + D \tag{9}$$

Falls man die Differentialgleichung erhalten möchten muss man die gewonnene Übertragungsfunktion in die Differentialgleichung umwandeln.

6 Zusammenhänge der Funktionen $G(s)$, $g(t)$, $h(t)$ und $\frac{G(s)}{s}$

Die Übergangsfunktion stellt die Veränderung des Signals innerhalb des Systems als Funktion dar. Diese kann durch Integrieren aus der Gewichtsfunktion (später dargestellt) gebildet werden. Dafur nutzt man wie in den folgenden Abbildungen dargestellt den Laplace-Bereich, da nicht alle Funktionen einfach integriert werden können.



7 Übertragungsfunktion/Sprungantwort

Die Übertragungsfunktion ist die Systembeschreibung im Laplace-Bereich. Sie berücksichtigt die Anfangswerte nicht. Sie geht aus der E/A-Differentialgleichung hervor, wobei die Anfangswerte auf Null gesetzt werden. Folglich hat sie eine geringere Aussagekraft, als die E/A-Differentialgleichung, bei der die Anfangswerte immer mit dabei stehen. Es ist ein Leichtes aus der Übertragungsfunktion auf die E/A-Differentialgleichung zu schließen.

7.1 Parametrische Darstellung

Die Parametrische Darstellung erhält man, indem man die Laplace-Rücktransformierte der Übertragungsfunktion bildet. Das macht man wie folgt:
Die Symbolic Toolbox macht die Ausführung symbolischer mathematischer Berechnungen möglich.
Mit dem Befehl
```
syms s t
```
erstelle ich mir eine symbolische Variable s und t.
Mit
```
G(s)=(-25)/(10*s+1)
```
gebe ich die Übertragungsfunktion G(s) ein.

Alternativ kann ich die Sprungantwort h(t) durch Integration der Übertragungsfunktion bestimmen, gebe ich den Befehl
```
ilaplace(G(s)/s)
```
ein.

Diese Sprungantwort wäre dann:

$$h(t) = 25 * e^{\frac{-t}{10}} - 25$$

Hier graphisch dargestellt:

7.2 Nichtparametrische Darstellung

7.2.1 Plot mit Matlab

...

7.2.2 Plot mit Step-Funktion

...

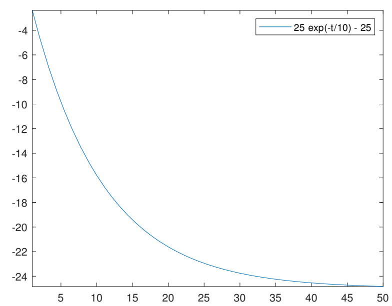


Abbildung 1: Übergangsfunktion $h(t)$

7.2.3 Plot mit Simulink

...

8 Gewichtsfunktion/Impulsantwort

...

8.1 Parametrische Darstellung

...

8.2 Nichtparametrische Darstellung

8.2.1 Plot mit Matlab

...

8.2.2 Plot mit Step-Funktion

...

8.2.3 Plot mit Simulink

...

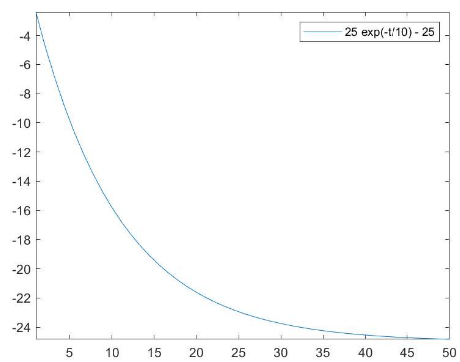


Abbildung 2: Übergangsfunktion $h(t)$

9 Frequenzgang

Den Frequenzgang erhält man indem man die komplexe Variable s durch iOmega ($i\omega$) ersetzt. Das ist gleichbedeutend mit einem Schnitt der komplexen Funktion $G(s)$ entlang der imaginären Achse. Damit wird jeder Kreisfrequenz Omega eine komplexe Zahl $G(i\omega)$ zugeordnet. Bedingt durch den Schnitt hat der Frequenzgang eine geringere Aussagekraft als die Übertragungsfunktion.

Die Bedeutung des Frequenzgangs ergibt sich aus der Tatsache, dass das stationäre Verhalten des Systems auf eine sinuidale Anregung beschrieben wird. Sei $u(t) = sin(\omega t)$, so ist $\dot{y}_{stat}(\dot{t})$, dh. das Ausgangssignal nach Abklingen der Anfangswerte durch $\dot{y}_{stat}(t) = A * |G(i\omega)| sin(\omega t + \phi(G(i\omega)))$ gegeben. Der Frequenzgang liefert formal weniger Aussagen als die Übertragungsfunktion, da er nicht alle s betrachtet, sondern nur die s, die auf der imaginären Achse liegen.
Experimentell könnte der Frequenzgang durch die folgende Simulink-Schaltung aufgenommen werden. Man stellt eine Frequenz ein und schaut am Ausgang die Amplitudenverstärkung und die Phasenverschiebung an. Hat der Eingangssinus die Amplitude 1, kann ich die Verstärkung am Ausgang direkt ablesen. Den erhaltenen Punkt trägt man in das Bode-Diagramm ein. Danach wiederholt man das Experiment mit einer anderen Frequenz. Hat man genügend Punkte, so verbindet man diese und erhält das Bode-Diagramm. Ebenso wie wir an den Verläufen der Sprungantwort auf die Differentialgleichung schließen konnten, können Experten aus den Verläufen des Bode-Diagramms auf den Frequenzgang (und damit auf die Übertragungsfunktion und damit auf die Differentialgleichung) schließen.
Die Phasenverschiebung kann selbstverständlich auch mit Computeralgebra ausgerechnet werden.

9.1 Parametrische Darstellung

...

9.2 Nichtparametrische Darstellung

9.2.1 Nyquist-Plot (Ortskurve)

...

9.2.2 Bode-Plot

...

10 Pol-Nullstellen-Plot

Der Pole-Zero-Plot stellt die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene dar. Pole werden durch ein Kreuz dargestellt, Nullstellen durch einen Kreis. Ein Doppelpol wird durch ein Doppelkreuz und eine Nullstelle durch einen Doppelkreis dargestellt. Der PZP enthält keine Informationen mehr über die statische Verstärkung. Aus dem PZP lassen sich Eigenschaften wie Stabilität und Minimalphasigkeit ablesen. So ist ein System stabil, wenn alle Pole in der linken offenen Halbebene liegen. Es ist instabil, sobald ein Pol auf der rechten Halbebene liegt. Es ist grenzstabil, wenn keine Pole in der rechten Halbebene liegen aber einige auf der imaginären Achse liegen. Ein System ist minimalphasig, wenn alle Nullstellen in der offenen linken Halbebene liegen. Es ist nicht minimalphasig, sobald eine Nullstelle auf der rechten Halbebene liegt. Und letztlich ist es schwach-minimalphasig, wenn keine Nullstelle auf der rechten Halbebene liegt, aber Nullstellen auf der imaginären Achse auftauchen.

11 Statische Kennlinie

In der statischen Kennlinie wird der Ausgang über dem Eingang dargestellt. Bei einem linearen System (unten u oben y) ist die statische Kennlinie eine Ursprungsgerade, deren Anstieg der statischen Verstärkung entspricht. Die statische Verstärkung K kann aus $G(0) = K$ berechnet werden. Sie ist bei Systemen mit D-Verhalten 0 und bei Systemen mit I-Verhalten unendlich. Mit anderen Worten, Systeme mit I-Verhalten haben keine Kennlinie. In der statischen Kennlinie ist keinerlei Dynamik zu erkennen. Die Information über Pole, Nullstellen, etc. fehlt. Sie ist somit die schwächste der Modellbeschreibungen. Gleichwohl ist sie einfach zu bestimmen. Man stellt einen konstanten Wert u ein, wartet bis die Eigenvorgänge abgeklungen sind und liest den y-Wert ab. Diesen Punkt trägt man in das Diagramm ein und wiederholt das ganze für mehrere Punkte. In der Praxis werden sich häufig nicht ideale Geraden ergeben. Bei Öfen verringert sich der Anstieg beispielsweise bei hohem u. Der Praktiker ließt aus der statischen Kennlinie ab, wie gut seine Annahme eines linearen Modells ist. Sie ist gut in einem Bereich, in dem eine Geradenapproximation akzektabel ist (wenn sie einer Gerade ähnelt). Bei einem Mehrgrößensystem mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen wählt man häufig die folgende Darstellung: Entweder zwei Einzeldiagramme, oder ein Verbunddiagramm (zwei Eingänge ein Ausgang: Üblicherweise keine 3D-Darstellung, sondern Transistorkennlinien). Bei Systemen mit zwei Eingängen wählt man häufig die Darstellung mit Kennlinienscharen, wobei beispielsweise u_1 die reellen Zahlen darstellt und u_2 den Scharparameter darstellt.