Signale und Systeme - Systemanalyse

Analyse des Systems

PT_1 mit negativer Verstärkung

Matrikelnummer: **8809469**

Matrikelnummer: **6130555**

Kurs: TINF21B3

Abgabedatum 16.12.2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Physikalische Beschreibung/Umcodierung **3**

3 Explizite Darstellung des Übertragungsoperators **3**

4 Zustandsraumbeschreibung (implizite Systembeschreibung) **3**

5 Ein-/Ausgangsdifferentialgleichung **5**

6 Zusammenhänge der Funktionen $G(s)$, $g(t)$, $h(t)$ und $\frac{G(s)}{s}$ **7**

7 Übertragungsfunktion/Sprungantwort **8**
- 7.1 Parametrische Darstellung . . . 8
- 7.2 Nichtparametrische Darstellung . . . 8
  - 7.2.1 Plot mit Matlab . . . 8
  - 7.2.2 Plot mit Step-Funktion . . . 8
  - 7.2.3 Plot mit Simulink . . . 9

8 Gewichtsfunktion/Impulsantwort **9**
- 8.1 Parametrische Darstellung . . . 9
- 8.2 Nichtparametrische Darstellung . . . 9
  - 8.2.1 Plot mit Matlab . . . 9
  - 8.2.2 Plot mit Step-Funktion . . . 9
  - 8.2.3 Plot mit Simulink . . . 9

9 Frequenzgang **10**
- 9.1 Parametrische Darstellung . . . 11
- 9.2 Nichtparametrische Darstellung . . . 11
  - 9.2.1 Nyquist-Plot (Ortskurve) . . . 11
  - 9.2.2 Bode-Plot . . . 11

10 Pol-Nullstellen-Plot **12**

11 Statische Kennlinie **12**

1 Einleitung

Das System, welches im Folgenden behandelt wird hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{T * s + 1}$$

und mit den Werten $K = -25$ und $T = 10$ ergibt sich daraus die neue Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{-25}{10s + 1}.$$

Um das System analysieren zu können, haben wir das System mit den entsprechenden Werten in Simulink simuliert und die Sprungantwort betrachet. Erst danach haben wir mit Matlab gearbeitet und dort die entsprechenden Graphen plotten lassen. Mit Hilfe des Befehls `sys = tf([-25],[10 1])` haben wir unser System in Matlab erzeugt. Falls notwendig wird ein Sinus als Eingangssignal angenommen.

Vorgehen in der Systemtheorie

1. Detaillierungsgrad fürs Modell festlegen
2. Physikalisches Modell erstellen
3. Eingangs-, Ausgangs-, Zustandsgrößen festlegen (u,y,x,z)
4. Physikalische Einheiten festlegen, ggf. Normierung in % $\Longleftrightarrow$ Einheitenfreie Darstellung
5. Analyse des Modells
   - a Ruhelagen, evtl. linearisieren; Anfangswerte
   - b Systemeigenschaften ermitteln
6. Entwurf
   - a Ziele festlegen
   - b Arbeitspunkte festlegen bzw. Trajektorien planen
   - c Entwuft (Struktur, Bereich, Verfahren, Kriterium)

2 Physikalische Beschreibung/Umcodierung

Darstellung

	Physikalisch	Normiert	Systemtheoretisch
Eingang	x	x	u
Ausgang	x	x	y
Zustand	x	x	x_1, x_2
Parameter	Masse, etc.	x	T_1

3 Explizite Darstellung des Übertragungsoperators

Die allgemeine explizite Form des Übertragungsoperators für ein lineares zeitinvariantes System ist (x(t) Formel Aufschrieb). Für unser konkretes System kann man das mit der symbolik-Toolbox in Matlab berechnen: syms t und expm liefert .... Die erzwungene Bewegung kann man aber nur dann explizit angeben, wenn man für u(tau) eine explizite Vorgabe hat. Das ist der Fall, wenn u(tau) beispielsweise ein Dirac-Impuls oder ... oder ein Sinusimpuls ist. In einem solchen Fall kann man das Integral analytisch ausrechnen. In meiner Arbeit wählen wir die Step-Funktion. Das heißt u(tau)=1 für tau>=0. Im konkreten erhalten wir die Formel, die ausgeplotet identisch ist, mit Darstellung in ...

4 Zustandsraumbeschreibung (implizite Systembeschreibung)

Mein System in neuer Zustandsraumdarstellung nach Transformation -> Zusandsraumdarstellung

Standard-Übertragungsfunktion eines Verzögerungsglied mit proportionalen Übertragungsverhalten.

Allgemein

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{a_2}(-a_0\dot{y}(t) - a_1 y(t) + b_0 u(t))$$

Eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung benötigt zur Lösung n Integrationen. Nach dem Blockschaltbild zur Lösung der Differenzialgleichung 1. Ordnung ergibt sich eine Zustandsvariable als Ausgang der Integratore. Durch Substitution wird die Ableitung von $y(t)$ durch die Bezeichnung der Zustandsvariable $x(t)$ wie folgt eingesetzt:

$$x_1(t) = y(t); x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Damit lautet die Differentialgleichung mit der eingeführten neuen Bezeichnungder Zustandsvariable:

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{a_2}(-a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + b_0 u(t))$$

Daraus können die Zustandsgrößen gebildet werden.

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{a_0}{a_2}x_1 - -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b_0}{a_2}u$$

Die Zustandsgrößen x_1 und x_1 bilden den sogenannten Zustandsvektor $\vec{x}$.

Diese Gleichungen werden als Vektordifferenzialgleichungen in Matizenform wie folgt geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_0}{a_2} \end{bmatrix} * u(1)$$

und die Ausgangsgleichung:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Unser System

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{10}(-y(t) - 25u(t))$$

$$x_1 = y(t)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{10}(-x_1(t) - 25u(t))$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{10}(-x_1(t) - 25u(t))$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{10}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{25}{10}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}u(t)\end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}x_1\end{bmatrix}$$

5 Ein-/Ausgangsdifferentialgleichung

Allgemein

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_{\mathrm{PT1}}}{T_1 + 1}$$

Die zugehörige linare Differentialgleichung wird durch Umwandlung mit Hilfe der inversen Laplace-Transformation ermittelt:

$$T_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + y(t) = K_{\mathrm{PT1}} u(t)$$

mit T_1 als System-Zeitkonstante und dem Verstärkungsfaktor K_{PT1}.

Zur Vereinheitlichung der Ableitungen $y(t)$ werden die Koeffizienten mit dem Buchstaben a dargestellt. Für die rechte Seite der Ableitungen von $u(t)$ mit b und fortlaufend nummeriert:

$$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Die höchste Ableitung wird vom Koeffizienten freigestellt, in dem alle Terme der Gleichung auch durch a_1 dividiert werden und nach $\dot{y}(t)$ aufgelöst wird:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{a_1}(-a_0 y(t) + b_0 u(t))$$

Unser System

$$G(s) = \frac{-25}{10s+1}$$

Die zugehörige linare Differentialgleichung wird durch Umwandlung mit Hilfe der inversen Laplace-Transformation ermittelt:

$$10\dot{y}(t) + y(t) = -25u(t)$$

Nach $\dot{y}(t)$ umformen:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{10}(-y(t) - 25u(t))$$

Zustandsraumbeschreibung in Übertragungsfunktion

Natürlich kann die Umformung von der Zustandsraumbeschreibung in die Übertragungsfunktion auch mathematisch durchgeführt werden: Gleichung 1:

$$\dot{X}(t) = A * x(t) + B * u(t) \tag{1}$$

wird transformiert in:

$$s * X(s) = A * X(s) + B * U(s) \tag{2}$$

Gleichung 2:

$$y_a(t) = C * x(t) + D * u(t) \tag{3}$$

wird transformiert in:

$$Y_a(s) = C * x(s) + D * U(s) \tag{4}$$

bei Gleichung 1 wird das $x(s)$ isoliert:

$$s * X(s) = A * X(s) + B * U(s) \tag{5}$$

$$X(s) * (sE - A) = B * U(s) \tag{6}$$

wobei E die Einheitsmatrix ist.

$$X(s) = (sE - a)^{-1}U(s) \tag{7}$$

Im nächsten Schritt wird das $x(s)$ der Gleichung 1 in das $x(s)$ der Gleichung 2 eingesetzt:

$$Y_a(s) = C * (sE - a)^{-1}U(s) + D * U(s) \tag{8}$$

Umgeformt ergibt es die Formel:

$$G(s) = \frac{Y_a(s)}{U(s)} = C * (sE - A)^{-1} * B + D \tag{9}$$

Falls man die Differentialgleichung erhalten möchten muss man die gewonnene Übertragungsfunktion in die Differentialgleichung umwandeln.

6 Zusammenhänge der Funktionen $G(s)$, $g(t)$, $h(t)$ und $\frac{G(s)}{s}$

Die Ubergangsfunktion stellt den die Veränderung des Signals innerhalb des Systems als Funktion dar. Diese kann durch Integrieren aus der Gewichtsfunktion (später dargestellt) gebildet werden. Dafur nutzt man wie in den folgenden Abbildungen dargestellt den Laplace-Bereich, da nicht alle Funktionen einfach integriert werden können.

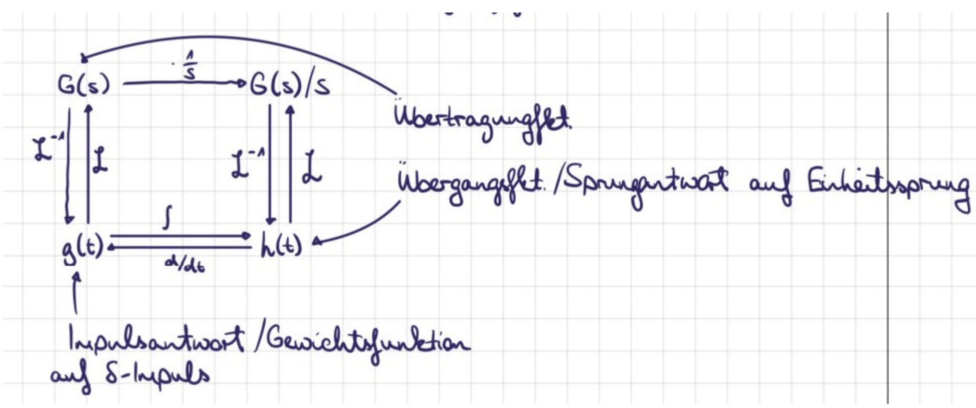

Abbildung 1: syms s t, $G(s) = \frac{-25}{10s+1}$, h=ilaplace(H),g=diff(h), $G(s)$=laplace(g)

7 Übertragungsfunktion/Sprungantwort

Die Übertragungsfunktion ist die Systembeschreibung im Laplace-Bereich. Sie berücksichtigt die Anfangswerte nicht. Sie geht aus der E/A-Differentialgleichung hervor, wobei die Anfangswerte auf Null gesetzt werden. Folglich hat sie eine geringere Aussagekraft, als die E/A-Differentialgleichung, bei der die Anfangswerte immer mit dabei stehen. Es ist ein Leichtes aus der Übertragungsfunktion auf die E/A-Differentialgleichung zu schließen.

7.1 Parametrische Darstellung

Die Parametrische Darstellung erhält man, indem man die Laplace-Rücktransformierte der Übertragungsfunktion bildet. Das macht man wie folgt:
Die Symbolic Toolbox macht die Ausführung symbolischer mathematischer Berechnungen möglich.
Mit dem Befehl

```
syms s t
```

erstelle ich mir eine symbolische Variable s und t.
Mit

```
G(s)=(-25)/(10*s+1)
```

gebe ich die Übertragungsfunktion G(s) ein.

Alternativ kann ich die Sprungantwort h(t) durch Integration der Übertragungsfunktion bestimmen, gebe ich den Befehl

```
ilaplace(G(s)/s)
```

ein.

Diese Sprungantwort wäre dann:

$$h(t) = 25 * e^{\frac{-t}{10}} - 25$$

Hier graphisch dargestellt:

7.2 Nichtparametrische Darstellung

7.2.1 Plot mit Matlab

...

7.2.2 Plot mit Step-Funktion

...

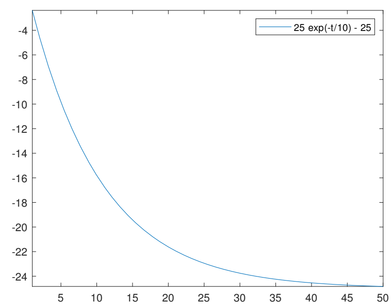

Abbildung 2: Übergangsfunktion $h(t)$

7.2.3 Plot mit Simulink

...

8 Gewichtsfunktion/Impulsantwort

...

8.1 Parametrische Darstellung

...

8.2 Nichtparametrische Darstellung

8.2.1 Plot mit Matlab

...

8.2.2 Plot mit Step-Funktion

...

8.2.3 Plot mit Simulink

...

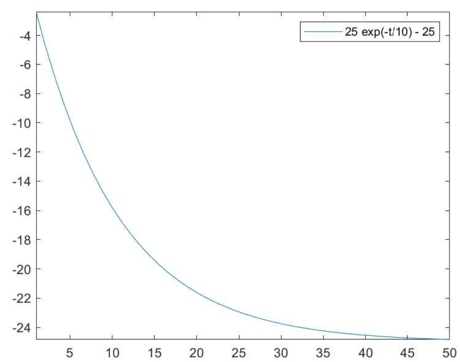

Abbildung 3: Übergangsfunktion $h(t)$

9 Frequenzgang

Den Frequenzgang erhält man indem man die komplexe Variable s durch iOmega ($i\omega$) ersetzt. Das ist gleichbedeutend mit einem Schnitt der komplexen Funktion $G(s)$ entlang der imaginären Achse. Damit wird jeder Kreisfrequenz Omega eine komplexe Zahl $G(i\omega)$ zugeordnet. Bedingt durch den Schnitt hat der Frequenzgang eine geringere Aussagekraft als die Übertragungsfunktion.

Die Bedeutung des Frequenzgangs ergibt sich aus der Tatsache, dass das stationäre Verhalten des Systems auf eine sinuidale Anregung beschrieben wird. Sei $u(t) = sin(\omega t)$, so ist $\dot{y}_{stat}(\dot{t})$, dh. das Ausgangssignal nach Abklingen der Anfangswerte durch $\dot{y}_{stat}(t) = A * |G(i\omega)| sin(\omega t + \phi(G(i\omega)))$ gegeben. Der Frequenzgang liefert formal weniger Aussagen als die Übertragungsfunktion, da er nicht alle s betrachtet, sondern nur die s, die auf der imaginären Achse liegen.
Experimentell könnte der Frequenzgang durch die folgende Simulink-Schaltung aufgenommen werden. Man stellt eine Frequenz ein und schaut am Ausgang die Amplitudenverstärkung und die Phasenverschiebung an. Hat der Eingangssinus die Amplitude 1, kann ich die Verstärkung am Ausgang direkt ablesen. Den erhaltenen Punkt trägt man in das Bode-Diagramm ein. Danach wiederholt man das Experiment mit einer anderen Frequenz. Hat man genügend Punkte, so verbindet man diese und erhält das Bode-Diagramm. Ebenso wie wir an den Verläufen der Sprungantwort auf die Differentialgleichung schließen konnten, können Experten aus den Verläufen des Bode-Diagramms auf den Frequenzgang (und damit auf die Übertragungsfunktion und damit auf die Differentialgleichung) schließen.
Die Phasenverschiebung kann selbstverständlich auch mit Computeralgebra ausgerechnet werden.

9.1 Parametrische Darstellung

...

9.2 Nichtparametrische Darstellung

9.2.1 Nyquist-Plot (Ortskurve)

...

9.2.2 Bode-Plot

...

10 Pol-Nullstellen-Plot

Der Pole-Zero-Plot stellt die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene dar. Pole werden durch ein Kreuz dargestellt, Nullstellen durch einen Kreis. Ein Doppelpol wird durch ein Doppelkreuz und eine Nullstelle durch einen Doppelkreis dargestellt. Der PZP enthält keine Informationen mehr über die statische Verstärkung. Aus dem PZP lassen sich Eigenschaften wie Stabilität und Minimalphasigkeit ablesen. So ist ein System stabil, wenn alle Pole in der linken offenen Halbebene liegen. Es ist instabil, sobald ein Pol auf der rechten Halbebene liegt. Es ist grenzstabil, wenn keine Pole in der rechten Halbebene liegen aber einige auf der imaginären Achse liegen. Ein System ist minimalphasig, wenn alle Nullstellen in der offenen linken Halbebene liegen. Es ist nicht minimalphasig, sobald eine Nullstelle auf der rechten Halbebene liegt. Und letztlich ist es schwachminimalphasig, wenn keine Nullstelle auf der rechten Halbebene liegt, aber Nullstellen auf der imaginären Achse auftauchen.

11 Statische Kennlinie

In der statischen Kennlinie wird der Ausgang über dem Eingang dargestellt. Bei einem linearen System (unten u oben y) ist die statische Kennlinie eine Ursprungsgerade, deren Anstieg der statischen Verstärkung entspricht. Die statische Verstärkung K kann aus $G(0) = K$ berechnet werden. Sie ist bei Systemen mit D-Verhalten 0 und bei Systemen mit I-Verhalten unendlich. Mit anderen Worten, Systeme mit I-Verhalten haben keine Kennlinie. In der statischen Kennlinie ist keinerlei Dynamik zu erkennen. Die Information über Pole, Nullstellen, etc. fehlt. Sie ist somit die schwächste der Modellbeschreibungen. Gleichwohl ist sie einfach zu bestimmen. Man stellt einen konstanten Wert u ein, wartet bis die Eigenvorgänge abgeklungen sind und liest den y-Wert ab. Diesen Punkt trägt man in das Diagramm ein und wiederholt das ganze für mehrere Punkte. In der Praxis werden sich häufig nicht ideale Geraden ergeben. Bei Öfen verringert sich der Anstieg beispielsweise bei hohem u. Der Praktiker ließt aus der statischen Kennlinie ab, wie gut seine Annahme eines linearen Modells ist. Sie ist gut in einem Bereich, in dem eine Geradenapproximation akzektabel ist (wenn sie einer Gerade ähnelt). Bei einem Mehrgrößensystem mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen wählt man häufig die folgende Darstellung: Entweder zwei Einzeldiagramme, oder ein Verbunddiagramm (zwei Eingänge ein Ausgang: Üblicherweise keine 3D-Darstellung, sondern Transistorkennlinien). Bei Systemen mit zwei Eingängen wählt man häufig die Darstellung mit Kennlinienscharen, wobei beispielsweise u_1 die reellen Zahlen darstellt und u_2 den Scharparameter darstellt.