Signale und Systeme - Systemanalyse

Matrikelnummer:

Kurs: TINF20B2

10. Dezember 2021

Nachfolgend haben wir dieses DT_s-System analysiert:

$$G(s) = K\frac{sT_D}{1 + 2DsT + s^2T^2}$$

mit $K = 3;\ T_D = 1;\ D = 0.05;\ T = 1$ ergibt sich:

$$G(s) = \frac{3s}{1 + 0.1s + s^2}$$

Dazu haben wir unser System mit entsprechenden Werten in Simulink simuliert und die Sprungreaktion betrachtet.
Erst danach haben wir mit MatLab gearbeitet und dort die entsprechenden Graphen plotten lassen. Mithilfe des Befehls `sys=tf([3 0], [1 0.1 1])` haben wir unser System in MatLab erzeugt. Falls es notwendig ist, wird als Eingangssignal ein Sinus angenommen.

Das System ist wie folgt zu klassifizieren:

1. Zeitabhängigkeit
   - zeitkontinuierlich, da eine stetige Zeit
   - zeitinvariant, da kein anderer Parameter von der Zeit abhängt
2. Gesetzmäßigkeit des Übertragungsverhaltens
   - kausal, da keine Werte aus Zukunft benötigt
   - deterministisch, durch Funktion eindeutig bestimmbar
3. Art des Übertragungsverhaltens
   - linear, da die drei Gesetze erfüllt sind
     (a) Zerlegungsgesetz, durch die Graphen in der grafischen Darstellung der Zustandsübergangsfunktion bewiesen
     (b) Superpositionsprinzip für erzwungene Vorgänge (aus Ruhelage)
     (c) Superpositionsgesetz bei Eigenvorgängen (für freies System)
   - dynamisch, da die Übertragungsfunktion keine Konstante ist, bzw. da die Differenzialgleichung und Übergangsfunktion stetig sind und somit keinen Sprung besitzen.
4. Anzahl der Ein- und Ausgangssignale:
   - Eingrößensystem: Single-Input-Single-Output (SISO), da nur ein u(t) und ein y(t)
5. Vorhersagbarkeit allein aus dem Anfangszustand
   - nicht autonom, weil es sich nicht um ein freies System handelt, auch wenn es zeitinvariant ist

1 Simulink

Mit Simulink haben wir unser System folgendermaßen skizziert:

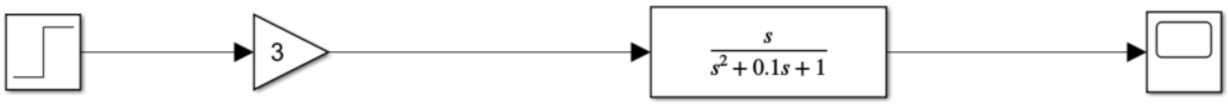


Abbildung 1: Simulink Skizze bestehend aus "Step", "Gain", "Transfer Fcn" und "Scope"

Mit einer Schrittzeit von 0.1 s und einer Endzeit von 80 s hat sich folgende Sprungantwort auf dem Scope ergeben.

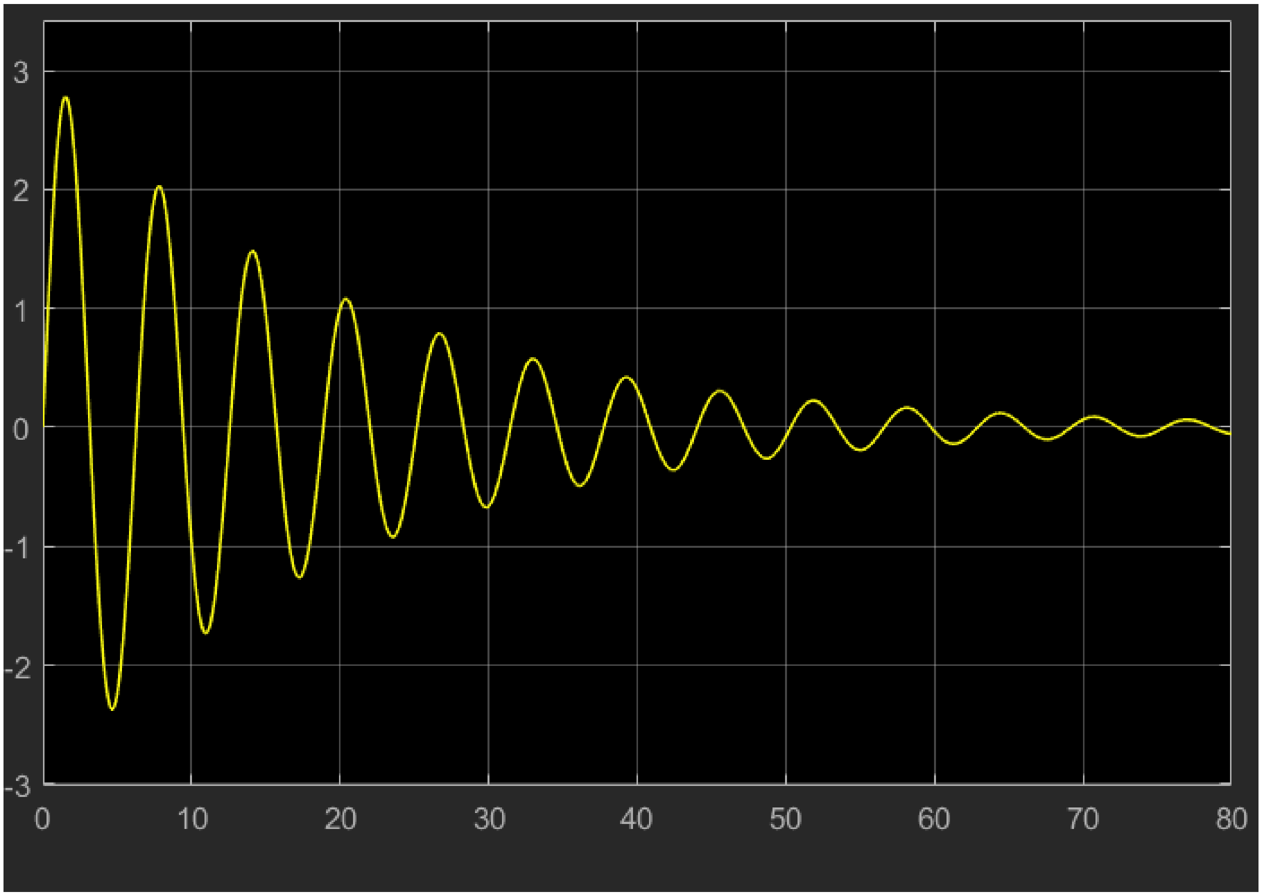


Abbildung 2: Ausgabe auf dem Scope

2 Lösungsoperator für DGL

Die Lösung der Differenzialgleichung kann über den Laplace-Bereich wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + 0.1\dot{y} + y &= 3\cos(t) \\
s^2 Y + 0.1sY + Y &= \frac{3s}{s^2+1} \\
Y(s^2 + 0.1s + 1) &= \frac{3s}{s^2+1} \\
Y &= \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+0.1s+1)} \\
\Rightarrow y(t) &= 30\sin(t) - \frac{200\sqrt{399}e^{-\frac{t}{20}}\sin(\frac{\sqrt{399}t}{20})}{133}
\end{aligned}$$

2.1 Zustandsraumdarstellung

2.1.1 Allgemeines

Um die Zustandsraumdarstellung zu bestimmen, benötigen wir die Matrizen A, B, C und D. Diese stehen wie folgt mit dem System in Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\
y &= C\underline{x} + D\underline{u} \\
x_0 &= x(t-0)
\end{aligned}$$

Die Zustandsübergangsfunktion beinhaltet die Systemmatrix A und die Eingangsmatrix B und gliedert sich in den Eigenvorgang sowie den erzwungenen Vorgang. Im Folgenden ist diese Übergangsfunktion dargestellt:

$$\varphi(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A\tau}\ Bu(t-\tau)d\tau$$

Der Übertragungsoperator bezieht zusätzlich die Ausgangsmatrix C und die Durchgriffsmatrix D mit ein.

$$\psi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) = C\ e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau + Du(t)$$

2.1.2 Unser System

Die Werte der Matrizen können wir uns in Matlab mit dem Befehl `ss(sys)` berechnen lassen. Jedoch sind dort die Werte in einer für uns nicht passenden Reihenfolge dargestellt, weshalb wir die Matrizen hier herleiten. Wir nehmen die Gleichung der Ein- und Ausgangsdifferentialgleichung (Herleitung im Kapitel Ein-/ Ausgangsdifferentialgleichung) und arbeiten mit dieser weiter:

$$\ddot{y}(t) + 0.1\dot{y}(t) + y(t) = 3\dot{u}(t)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y \\
x_2 &= \dot{y} \\
\dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\
\dot{x}_2 &= \ddot{y} = -0.1\dot{y}(t) - y(t) + 3u(t) \\
\ddot{y} &= -0.1x_2 - x_1 + 3u(t)
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix};\ D = 0$$

Aus diesen Gleichungen können die Matrizen bestimmt werden, eingesetzt in das obige Gleichungssystem ergibt sich die Zustandsraumdarstellung. Da wir eine Ableitung von u auf der rechten Seite hatten, haben wir die folgende Zustandsraumdarstellung über die Regelungsnormalform gebildet.

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Einsetzen der Matrizen in die Zustandsübergangsfunktion ergibt die folgende Gleichung:

$$\varphi(t,0,x_0,x) = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix}(t-0)} x(0) + \int_0^t e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix}\tau} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-\tau)d\tau$$

Für unser System ergibt sich der dieser Übertragungsoperator:

$$\begin{aligned} \psi(t,0,x_0,u_{[0,t)}) &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix}(t-0)} x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix}\tau} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-\tau)d\tau \\ \psi(t,0,x_0,u_{[0,t)}) &= \begin{bmatrix} 3e^{-t} & 3e^{-\frac{t}{10}} \end{bmatrix} x(0) + \int_0^t 3e^{-\frac{\tau}{10}}\, u(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Nach Hinweis haben wir den Exponenten über `C*expm(A*t)` ausmultiplizieren wollen, jedoch kam dabei diese deutlich komplexere Matrix statt einer Vereinfachung heraus (oberes Bild stellt die erste Spalte und das zweite die zweite dar):

$$\left[\frac{399^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{t\cdot\left(-1+399^{\frac{1}{2}}\cdot 1i\right)}{20}\right)\cdot 10i}{133} - \frac{399^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{t\cdot\left(1+399^{\frac{1}{2}}\cdot 1i\right)}{20}\right)\cdot 10i}{133} \right.$$

$$\left. \frac{3\cdot\exp\left(\frac{t\cdot\left(-1+399^{\frac{1}{2}}\cdot 1i\right)}{20}\right)}{2} + \frac{3\cdot\exp\left(-\frac{t\cdot\left(1+399^{\frac{1}{2}}\cdot 1i\right)}{20}\right)}{2} + \frac{399^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{t\cdot\left(-1+399^{\frac{1}{2}}\cdot 1i\right)}{20}\right)\cdot 1i}{266} - \frac{399^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{t\cdot\left(1+399^{\frac{1}{2}}\cdot 1i\right)}{20}\right)\cdot 1i}{266} \right]$$

2.1.3 Grafische Darstellung der Zustandsübergangsfunktion

Die oben gezeigte Zustandsübergangsfunktion ist im folgenden Diagramm grafisch aufgeteilt und dargestellt, sodass die obige Gleichung stimmt. Dabei handelt es sich beim Faltungsintegral auf der rechten Seite um den erzwungenen Vorgang des Systems. Im Graph entspricht dies dem Graphen `data2` (orange).
Der vordere Teil bildet den Eigenvorgang ab, dies ist im Graph die Linie `data3` (gelb).
Den Eigenvorgang können wir uns über folgende Befehle generieren lassen: `y2=lsim(sys2,u,t,[7 14]*0)` und `plot(t,y2)`, wobei zuvor `sys2=ss(sys))` ausgeführt worden ist, um die Matrizen des Systems zu speichern.
Den erzwungenen Vorgang stellen wir nahezu identisch über nachfolgende Befehle dar: `y3=lsim(sys2,u0,t,[7 14])` und `plot(t,y3)`.
Nun addieren wir diese beiden, um das gesamte System zu erzeugen, dieses bilden wir ebenfalls über

`plot(t,y4)` (lila) in die Grafik ab. Die blau gestrichelte Linie bildet ebenfalls das Gesamtsystem ab, wird allerdings direkt von Matlab, mit den Befehlen `y1=lsim(sys2,u,t,[7 14])` und `plot(t,y1,'--',LineWidth=2)` generiert. Die beiden Darstellungen des Gesamtsystems sind, wie erwartet, identisch.

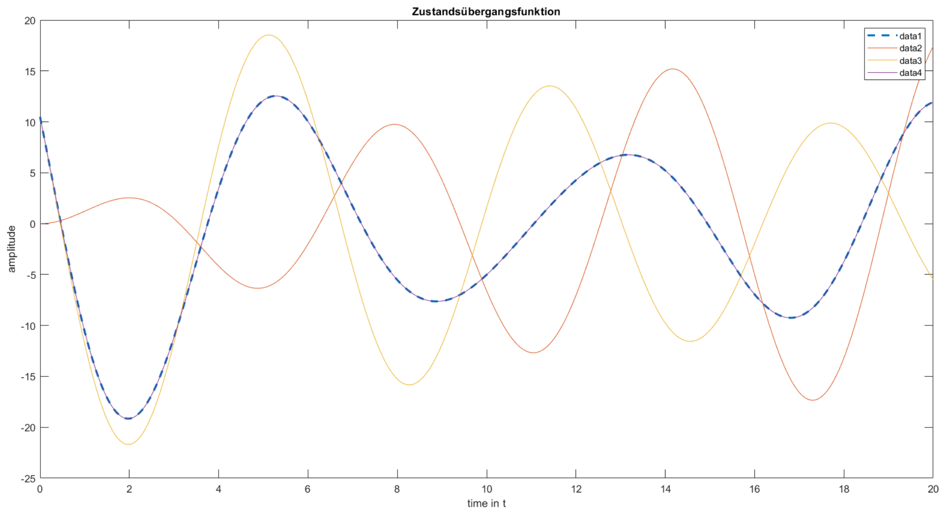


Abbildung 3: Zustandsübergangsfunktion des Systems als Graph

2.2 Ein-/ Ausgangs-Differentialgleichung

Aus der Übertragungsfunktion kann über Rücktransformation aus dem Laplace-Bereich die Differenzialgleichung bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{3s}{1 + 0.1\ s + s^2} \\
Y(s) * (1 + 0.1\ s + s^2) &= U(s) * 3s \\
s^2 * Y(s) + 0.1s * Y(s) + Y(s) &= 3s * U(s) \\
\ddot{y}(t) + 0.1\dot{y}(t) + y(t) &= 3 * \dot{u}(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
mit\ den\ Anfangswerten : y(0) &= y_0 \\
\dot{y}(0) &= y_1 \\
u(0) &= u_0
\end{aligned}
$$

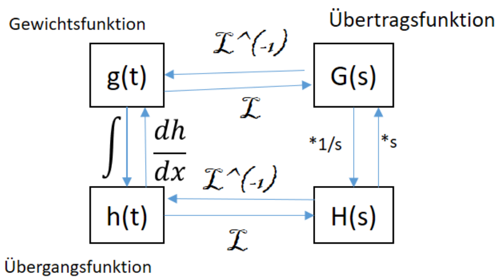
3 Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion ist in dem Laplace-Bereich mit den Anfangswerten Null definiert und sie lautet:

$$G(s) = \frac{3s}{1 + 0.1s + s^2}$$

3.1 Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion stellt den die Veränderung des Signals innerhalb des Systems als Funktion dar. Diese kann durch Integrieren aus der Gewichtsfunktion (später dargestellt) gebildet werden. Dafür nutzt man wie in den folgenden Abbildungen dargestellt den Laplace-Bereich, da nicht alle Funktionen einfach integriert werden können.




```
syms s t
G(s)=3*s/(s^2 + 0.1*s + 1)
H=G/s
h=ilaplace(H)
g=diff(h)
G1=laplace(g)
```

Im folgenden Diagramm ist die Übergangsfunktion

$$h(t) = 3e^{-\frac{t}{20}} * \cos(\frac{\sqrt{399}t}{20}) - \frac{\sqrt{399} * e^{-\frac{t}{20}} * \sin(\frac{\sqrt{399}t}{20})}{133}$$

grafisch dargestellt:

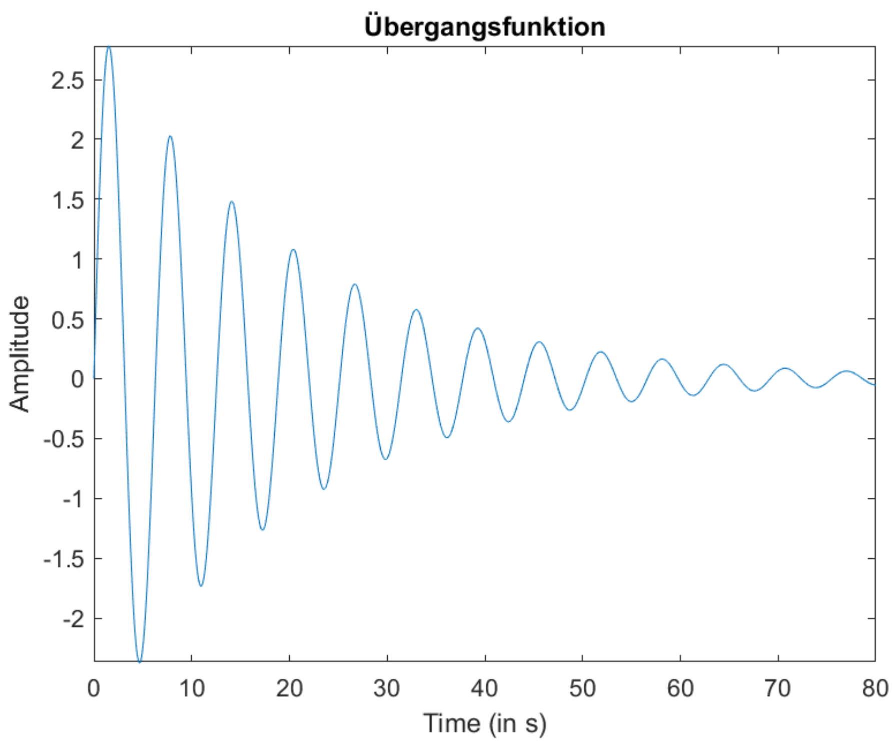


Abbildung 4: Übergangsfunktion $h(t)$ des Systems

4 Frequenzgang

4.1 Nyquistplot (Ortskurve)

Der Nyquistplot haben wir uns mit dem Befehl `nyquist(sys)` anzeigen lassen.

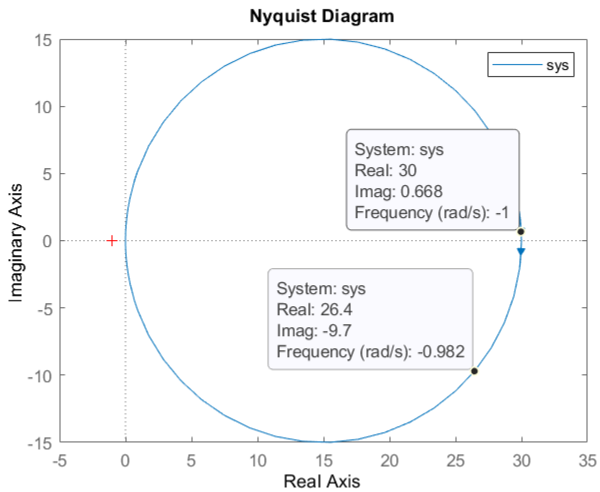


Abbildung 5: Ortskurve des Systems

4.2 Bode Diagramm

Das Bodediagramm wurde mit dem Befehl `bode(sys)` erzeugt. Die x-Achse ist logarithmisch beschriftet, damit im großen Frequenzspektrum Werte noch erkennbar sind.

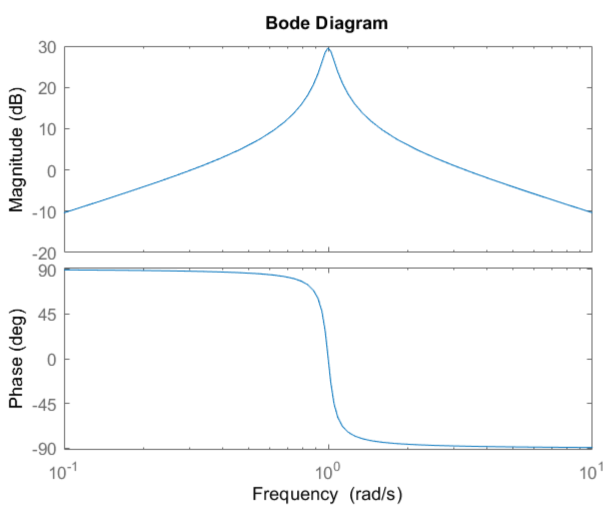


Abbildung 6: Bode Diagramm des Systems

5 Gewichtsfunktion/ Impulsantwort

Die Impulsantwort/ Gewichtsfunktion wurde mit dem Befehl `impulse(sys,80)` erzeugt, alternativ hätten wir auch `fplot(g,80)` verwenden können. Wie die Gewichtsfunktion mit der Übergangsfunktion in Zusammenhang steht, kann dem früher verwendeten Überführungsdiagramm (Kapitel 3.1 Übergangsfunktion) entnommen werden, sie entspricht hier der Funktion $g(t)$.

$$g(t) = 3\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{20}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{399}\,t}{20}\right) - \frac{\sqrt{399}\,\sin\left(\frac{\sqrt{399}\,t}{20}\right)}{399} \right)$$

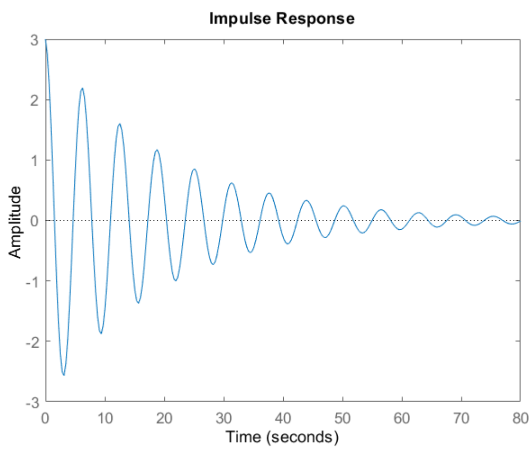


Abbildung 7: Impulsantwort/ Gewichtsfunktion des Systems

6 Sprungantwort/ Übergangsfunktion

Die Sprungantwort (step response) konnten wir uns über `step(sys,80)` im gleichen Zeitbereich plotten lassen. Dieser gleicht unserem Graphen, den wir bereits aus Simulink kennen.

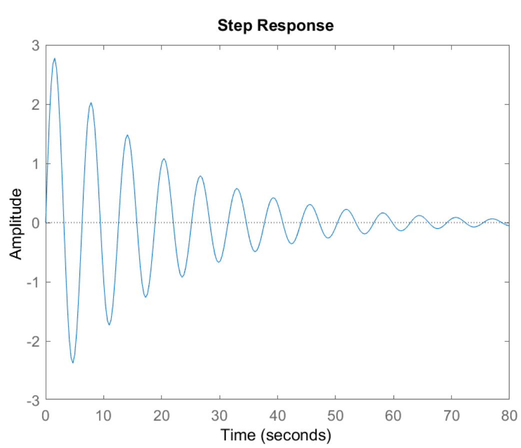


Abbildung 8: Sprungantwort des Systems

7 Pol/ Nullstellenplot

Den Pol bzw. Nullstellenplot konnten wir mit `pzplot(sys)` erstellen lassen.

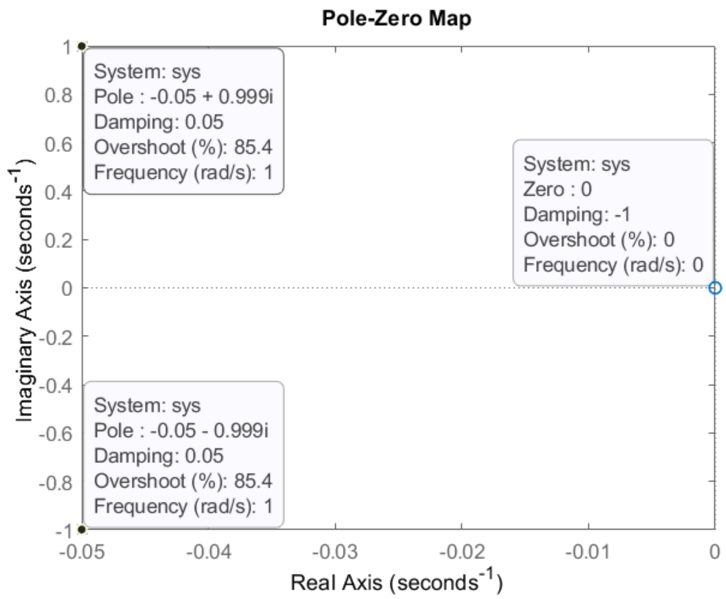


Abbildung 9: Pol/ Nullstellenplot

8 Statische Kennlinie

Mithilfe des Befehls `fplot(dcgain(sys), [0 80])` kann in Matlab die statische Kennlinie berechnet und als Graph ausgegeben werden. In unserem Beispiel entspricht die Kennlinie genau der x-Achse, da `dcgain(sys)` den Wert Null zurückliefert.

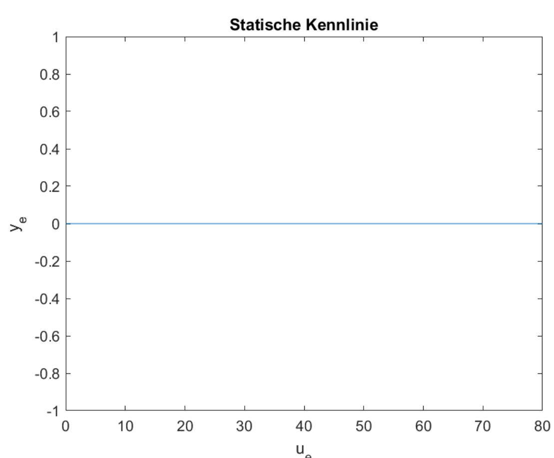


Abbildung 10: Statische Kennlinie