Gruppen $(G, *)$

Halbgruppe

1. Abgeschlossenheit bzgl. $*$
2. Assoziativität

Monoid

3. Neutrales Element

Gruppe

4. Inverses Element

Abelsche Gruppe

1. Kommutativität

Untergruppen $(H, \circ)$ von G

1. $e_G \in H$
2. Abgeschlossenheit bzgl. $\circ$
3. Inverses Element

Ringe $(R, +, \cdot)$

1. $(R, +)$ abelsche Gruppe
2. $(R, \cdot)$ Monoid
3. Distributivgesetze
4. $\cdot$ kann kommutativ sein

Körper $(K, +, \cdot)$

1. $(K, +)$ abelsche Gruppe
2. $(K \backslash 0_K, \cdot)$ abelsche Gruppe
3. Distributivgesetze

K-Vektorraum V

1. (K) ist Körper
2. $(V, +)$ abelsche Gruppe
3. Abgeschlossen bzgl. skalarer Multiplikation
   $\cdot : K \times V \to V$

Untervektorraum U von V

1. $0_V \in U$
2. Abgeschlossen bzgl. Addition
3. Abgeschlossen bzgl. skalarer Multiplikation

Affine Unterräume R

- $R = \{p + x | x \in U\} \quad (p \in \mathbb{R}^n)$

Homomorphismen Φ

- G, H Strukturen mit Verknüpfungen $\dotplus$
- $\Phi : G \to H$
- $\forall x, y \in G : \Phi(x \dotplus_G y) = \Phi(x) \dotplus_H \Phi(y)$

Algebra $(A, +, \circ, \cdot)$

- $(A, +, \cdot)$ K-Vektorraum
- $(A, +, \circ)$ Ring
- $(\lambda \cdot a) \circ b = a \circ (\lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a \circ b)$

Matrizen A

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \to$ m Zeilen
- $(AB)^T = B^T A^T, \quad (A + B)^T = A^T + B^T$

Determinante

- $\det(\lambda A) = \lambda^m \cdot \det(A)$
- 2×2: $ab - cd$
- 3×3: Regel von Sarrus

1. Mit Gauß vereinfachen (Dreiecksmatrix/-Zeile mit vielen Nullen)
2. Nach Zeile/Spalte entwickeln

Invertierbare Matrizen

- $\det(A) \neq 0$
- $\ker(A) = \{0\}$
- $\mathrm{rg}(A) = m$
- **Vorgehen:** $(A|I) \rightsquigarrow (I|X)$
- **Cramersche Regel:** $A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}$
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Bild einer Matrix

- Die linear unabhängigen Spalten

Spur einer Matrix

- Summe der Diagonalelemente

Rang einer Matrix

- Anzahl nicht-Null-Zeilen in ZSF

Kern einer Matrix

- $\ker(A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}$

Dimensionsformel

- rang(A)+dim(ker(A))$= n$

Ähnlichkeit von Matrizen

- Determinante gleich, Spur gleich UND $\exists S$ mit $B = SAS^{-1}$

Äquivalenz von Matrizen

- $rg(A) = rg(B)$

Lineare Abbildungen Φ

- V, W Vektorräume, $\Phi : V \to W$
- $\forall x, y \in V : \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$
- $\forall x \in V : \Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$
- Φ ist Vektorraum
- $\ker(\Phi) = \{v \in V | \Phi(v) = 0\}$

Linearkombination

Sei V ein K-VR und U ein UVR von V. Seien $n \in \mathbb{N}, v_1, ..., v_n \in U, \lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Dann ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ eine Linearkombination.

Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein K-VR und M $= \{m_1, ..., m_n\} \subseteq V$. M ist linear unabhängig, wenn gilt:
$\sum_{i=1}^n \lambda_i m_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \quad (\lambda_i \in K)$

Lineare Hülle

Sei V ein K-VR und M ein UVR von V. LH(M) ist die Menge aller Linearkombinationen aus M. LH(M) ist der kleinste UVR, der M enthält. M heißt Erzeugendensystem von LH(M).

Basis

Sei V ein K-VR und U ein UVR von V. U ist eine Basis von V, wenn gilt:

- $V = \text{LH}(U)$
- Jedes $u \in U$ ist linear unabhängig

Dimension/Rang von $\Phi \in$ Hom(V, W)

- $\text{rg}(\Phi) = \dim(\text{img}(\Phi))$
- $\dim(V) = rg(\Phi) + dim(ker(\Phi))$

Lineare Fortsetzung

Seien V und W K-Vektorräume, B eine Basis von V und $I = \{1, ..., n\}$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ mit $\Phi(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Abbildungsmatrix

- Lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- AM spaltenweise: $A = (f(e_1)...f(e_n))$
  $\Rightarrow f(v) = A \cdot v \quad (\forall v \in V)$

Basiswechsel

Sei V ein K-VR mit geordneter Basen B und C. Basiswechsel von B nach C ($(v)_B \rightsquigarrow (v)_C$):
$(v)_C = M_{CB}(id_V) \cdot (v)_B$

Bestimmung der Basiswechselmatrix

$M_{CB}(id) = M_{CE}(id) \cdot M_{EB}(id) = M_{EC}(id)^{-1} \cdot M_{EB}(id)$ mit $M_{EX}(id) = (x_1|...|x_n)$

Eigenwerte einer Matrix A

$\det(A - \lambda I_n) = 0$

Charakteristisches Polynom

CP(A)$= \det(A - \lambda I)$

Eigenvektoren

x ist ein EV zum Eigenwert λ_i, wenn er folgendes LGS löst: $(A - \lambda_i I)x = 0$

Eigenräume zu EW λ

Eig(A, λ)= ker$(A - \lambda I)$

Diagonalisierbarkeit

Häufigkeit $\lambda = \dim(\text{Eig}(A, \lambda))$