Zusammenfassung Analysis 1

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2023/2024

Niklas Rodenbüsch

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Rechenregeln

Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- Allg. binomische Formel: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, $n \geq k > 0$

Potenzen

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $x^a * x^b = x^{a+b}$
- $x^n * y^n = (xy)^n$
- $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Logarithmus

- $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(b^n) = n * \log_a(b)$
- $\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log(x+y) = \log(x) + \log(1 + \frac{y}{x})$

e-Funktion und ln

- $\ln(e) = 1$, $\ln(0) = 1$
- $e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$
- $e^{\ln(a)} = a = \ln(e^a)$

1.2 Summen-/Produktformeln

- Gaußsche Summenformel: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
- Teleskopsumme: $\sum_{n=0}^{N} (a_{n+1} - a_n) = -a_0 + a_{N+1}$
- Geometrische Summenformel: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$
- Teleskopprodukt: $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$

1.3 Ungleichungen

1.3.1 Rechenregeln

- Keine Zeichenänderung bei Addition, Subtraktion oder Multiplikation mit positiver Zahl. ($a \leq b$ und $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$),($a \leq b$ und $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$)
- Zeichenwechsel bei Division und Multiplikation mit negativer Zahl.
- Ungleichungen mit Betrag: Fallunterscheidung (≥ 0 bzw < 0)
- $a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ (Zeichenwechsel bei Kehrwertbildung)

1.3.2 Wichtige Ungleichungen

- **Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:**
  Für $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ gilt: $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$
- **Bernoulli-Ungleichung:**
  Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
- **Young'sche Ungleichung:**
  Sind $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \geq 0$, dann gilt: $ab \leq \frac{a^p}{q} + \frac{b^q}{q}$

1.4 Tricks

- Summen auseinanderziehen: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n + 1)^3$
- Dritte bin. Formel für Wurzelfolgen: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$
  Beispiel: $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

2 Komplexe Zahlen ℂ

- $\mathbb{C} := \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$
- $|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$
- $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$
- $|w + z| \leqslant |w| + |z|$
- $w = x + yi \Leftrightarrow \overline{w} = x - yi$
- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$

3 Vollständige Induktion

1. Zu beweisende Aussage (1) aufschreiben
   $\rightarrow$ „Sei $A(n)$ die Aussage (1)“
2. **IA:** „Es gilt $A(1)$, da ...“
3. **IV:** „Sei $n \in \mathbb{N}$, es gelte $A(n)$“
4. **IS:** „Für $A(n+1)$ gilt ... $\overset{IV}{=}$ ...“

4 Folgen & Grenzwerte

4.1 Allgemein

- Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Teilfolge von $(a_n)_n : (a_{n_k})_k$
  - Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.
  - Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.
- Beschränktheit: (x_n) ist beschränkt falls $\exists c > 0$ so dass $|x_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Monotonie: (x_n) ist:
  - monoton fallend: $\forall n : \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$
  - monoton wachsend: $\forall n : \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$
- a ist Häufungspunkt von $(a_n)_n$. $\Leftrightarrow \exists (a_{n_k})_k : a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$
- $(a_n)_n$ monoton und beschränkt $\Rightarrow (a_n)_n$ konvergent.
- $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergent:
  - $(a_n \dotplus b_n)_n$ konvergent, $\lim(a_n \dotplus b_n) = \lim(a_n) \dotplus \lim(b_n)$
  - $\lim(b_n) \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq N$, $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq N}$ konvergent,
    $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}$
  - $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim(a_n) \leq \lim(b_n)$
  - $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$
  - Sandwich-Kriterium:
    $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = x$ und $a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(c_n) = x$

4.2 Bekannte Folgen

- $\lim_{n\to\infty}(1 \pm \frac{1}{n})^n = e^{\pm 1}$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **Cauchy-Folge**, wenn $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall m, n \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon$
  Reelle Cauchy-Folgen konvergieren immer.

5 Reihen & Konvergenz

5.1 Allgemein

- Schreibweise: Reihe $A_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k, \quad (a_k)_k$ ist „zugehörige“ Folge
- A_n konvergent: $\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \lim(A_n)$
- $\sum_{k=n_0}^{n} a_k$ konvergent $\Rightarrow a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- Die Summe zweier konvergenter Reihen ist konvergent. Eine konvergente Reihe bleibt bei Multiplikation mit einem reellen Skalar konvergent.
- $\sum a_n$ absolut konvergent $:\Leftrightarrow \sum |a_n|$ konvergent
- $\sum a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum a_n$ konvergent, $\quad |\sum a_n| \leq \sum |a_n|$

5.2 Kriterien

Sei die Reihe $A_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. **Nullfolge:**
   Für die Konvergenz muss $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten. Ist a_n keine Nullfolge, folgt daraus direkt Divergenz.
2. **Cauchy's Konvergenzkriterium:**
   A_n konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$
   Gilt nur für $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, nicht aber für $\mathbb{Q}$
3. **Quotientenkriterium:**
   Sei $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$.
   Die Reihe konvergiert absolut, wenn $L < 1$ und divergiert wenn $L > 1$.

4. **Wurzelkriterium:**
   Sei $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.
   Die Reihe konvergiert absolut, wenn $L < 1$ und divergiert wenn $L > 1$.

5. **Majorantenkriterium:**
   Sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent. Wenn $|b_n| \geq |a_n| \geq 0$ für alle $n \geq n_0$, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut).

6. **Minorantenkriterium:**
   Sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. Wenn $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle $n \geq n_0$, dann divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. **Leibniz-Kriterium (alternierende Reihen):**
   Eine alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   (a) $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ für alle n (monoton fallend),

   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Nullfolge)

8. **Umordnungsgesetz:**
   A_n absolut konvergent $\Rightarrow$ jede Umordnung der Reihe konvergiert gegen A

5.3 Bekannte Reihen

- **(Allgemeine) Harmonische Reihe:**
  - $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to$ divergent
  - $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \to$ konvergent für $\alpha > 1$
- **Geometrische Reihe:**
  - $|q| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \to$ konvergent
  - $|q| \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} q^k \to$ divergent
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \to$ konvergent $(= e)$

5.4 Potenzreihen

- Sei (a_n) ein Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$, dann ist $P(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe.
- Konvergenzradius $R := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$
  Falls $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ existiert, dann gilt: $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$
  - $|z| < R \Rightarrow P(z)$ konvergiert
  - $|z| > R \Rightarrow P(z)$ divergiert
  - $|z| = R \Rightarrow$ beides kann passieren
- Verhalten am Rand des Konvergenzradius:
  Sei der Konvergenzradius $R > 0$ der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ gegeben. Falls gefragt wird, wie sich die Reihe am Rand des Konvergenzkreises verhält, so sollte man $x = -R$ und $x = R$ auf Konvergenz überprüfen. Da $R = |\varrho|$:
  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-R)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n R^n \quad \Rightarrow$ Leibnizkriterium verwenden.
  Tipp: Überprüfen, ob a_n eine Nullfolge ist.

6 Stetige Funktionen

- Funktion f definiert als: $\quad f : \underbrace{X}_{\text{Definitionsbereich}} \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{Bildbereich}}$
- Eigenschaften von Funktionen:
  - Injektivität: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  - Surjektivität: $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$
  - Bijektivität: f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist surjektiv und injektiv
  - Umkehrfunktion: f ist bijektiv $\Rightarrow \exists f^{-1} : f^{-1}(y) = x \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$
  - Beschränktheit: f heißt beschränkt, falls $\exists c > 0$ so dass $\forall x \in X : |f(x)| < c$
- **Zwischenwertsatz:** Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und reelle Funktion. Es gilt:
  $f(a) \leq \gamma \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] : f(c) = \gamma$

6.1 Stetigkeit

- Definition durch $\varepsilon\delta-$Kriterium:
  f heißt stetig in x_0 falls $\forall \varepsilon > 0. \quad \exists \delta > 0,$ sodass $\forall x \in X$, gilt:
  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Weiter heißt f stetig, wenn f stetig in x_0 $\forall x_0 \in X$ ist.
δ ist in Abhängigkeit von ε und x_0 zu wählen.

- Definition durch Grenzwert:
  f heißt stetig in x_0, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Seien f, g stetige Funktionen:
  - $f \circ g$ ist stetig.
  - $f \dotplus g$ ist stetig.
  - $|f|, \overline{f}, \Re(f), \Im(f)$ sind stetig.
  - $\frac{f}{g}$ ist stetig $\forall x$ mit $g(x) \neq 0$.
  - Polynome sind stetig.
  - $\sqrt[n]{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+$.

- Libschitz-Stetigkeit:
  f heißt Libschitz-stetig falls $\exists L > 0$ so dass $\forall x, x_o \in X$ gilt:
  $|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|$

- Mächtigkeit: f ist Libschitz-stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig

6.2 Funktionenfolgen und -reihen

- Punktweise Konvergenz:
  (f_n) konvergiert punktweise gegen f, wenn $\forall x \in X.\ \forall \varepsilon > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
  n_0 ist in Abhängigkeit von ε und x zu wählen.

- Gleichmäßige Konvergenz:
  (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn $\forall \varepsilon > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0\ \forall x \in X$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
  n_0 ist in Abhängigkeit von ε zu wählen.

- Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f und f_n ist stetig $\forall n \Longrightarrow f$ ist stetig.

- Funktionenfolge auf Konvergenz überprüfen:
  Sei $f_n(x)$ gegeben. Zu zeigen: Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von $f_n(x)$.
  1. Punktweise: f_n konvergiert punktweise, wenn die Grenzfunktion $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existiert.
  2. Gleichmäßig: Zeige $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

6.3 Nützliche Grenzwerte

1. $\lim_{z\to\infty} \frac{z^n}{e^z} = 0$
2. $\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = 1$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$ (log konvergiert wesentlich langsamer als andere Funktionen)

6.4 Trigonometrische Funktionen

- $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x)$ | $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

7 Differenzialrechnung

7.1 Allgemein

- Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, falls folgender Grenzwert existiert:
  $\frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- **Mittelwertsatz:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (mit $a < b$) stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Dann gilt:
  $\exists\gamma \in (a,b) : f'(\gamma) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- **L'Hospital:** Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$ und $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = 0$ oder ∞. Dann gilt:
  $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert $\Longrightarrow \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

7.2 Ableitungsregeln

Seien u, v reellwertige, hinreichend oft differenzierbare Funktionen und $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Es gelten folgende Regeln:

1. Konstanten: $(a)' = 0$
2. Konstanter Vorfaktor: $(a \cdot u)' = au'$
3. Summenregel: $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
5. Quotientenregel: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6. Kettenregel: $(u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x)$
7. Logarithmische Ableitung: $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

7.3 Wichtige Ableitungen

- $f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a) \longrightarrow f''(x) = a^x \cdot \ln(a) \cdot \ln(a)$
- $f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $f(x) = \log_a(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln(a)}$

7.4 Kurvendiskussion

- Extremum: $f'(x_0) = 0$
- Minimum: x_0 ist Extremum und $f''(x_0) > 0$
- Maximum: x_0 ist Extremum und $f''(x_0) < 0$
- Wendepunkt: x_0 ist Extremum, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

8 Taylorreihen/-polynome

Anstatt eine Funktion lokal durch eine lineare Abbildung darzustellen, können wir sie, falls die Funktion genügend oft differenzierbar ist, durch polynomiale Funktionen annähern. Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar.

- **Entwicklungspunkt:** x_0
- **n-tes Taylorpolynom:** $T_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
- **Taylorreihe im Entwicklungspunkt:** $T_{x_0}f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
- Es gilt: $T_{0,x_0}f(x) = f(x_0)$
- $f : D \to \mathbb{R} n$-mal diff.bar, $x_0 \in D$, $f^{'}(x_0) = 0, ..., f^{(n-1)} = 0, f^{(n)}$:
  - $n \in 2\mathbb{N}, f^{(n)} < 0 \Rightarrow x_0$ strikt lokales Maximum
  - $n \in 2\mathbb{N}, f^{(n)} > 0 \Rightarrow x_0$ strikt lokales Minimum
  - $n \in 2\mathbb{N} + 1, f^{(n)} < 0 \Rightarrow x_0$ kein lokales Extremum